

# Les graphes



**Représenter les données  
et les stratégies**



**Tangente Hors-série n° 54**

# **Les graphes**

## **Représenter les données et les stratégies**



© Éditions POLE – Paris – Juin 2015

Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tout procédé, sur quelque support que ce soit, en tout pays, faites sans autorisation préalable, est illicite et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires (loi du 11 mars 1957).

**ISBN: 9782848841366    ISSN: 2263-4908    Commission paritaire: 1016K80883**

Prochainement  
dans la Bibliothèque Tangente

# Les démonstrations



# Les graphes

Les onze états du taureau de Picasso  
Tous les chemins mènent à Königsberg

## DOSSIER

### Les types de graphes

Quelques points et des traits pour les relier suffisent à créer un graphe. Une idée aussi simple se devait d'engendrer un monde foisonnant d'objets : les idées les plus élémentaires sont souvent les plus riches !

Les graphes planaires	14
Quand les chemins ne se croisent pas	20
Gardons le sens de l'orientation et restons pondérés !	24
Obstruction et stabilité	28
Les matrices entrent en scène	32
Le graphe de l'amitié et le moulin à vent	34
Des arbres au secours des probabilités	36
Des graphes et des surfaces à partir d'un carré	40
Le théorème des mineurs	44
Des diagrammes pour la physique	50
Le théorème des quatre couleurs	56
Colorier, un défi innocent et redoutable	58
Le théorème des graphes parfaits	62
Cliques et théorème de Turán	68
La formule d'Euler et les solides de Platon	72
Le polyèdre de Czászár, un monstre topologique	76
Diagrammes de Schlegel : les polyèdres sont des graphes !	80

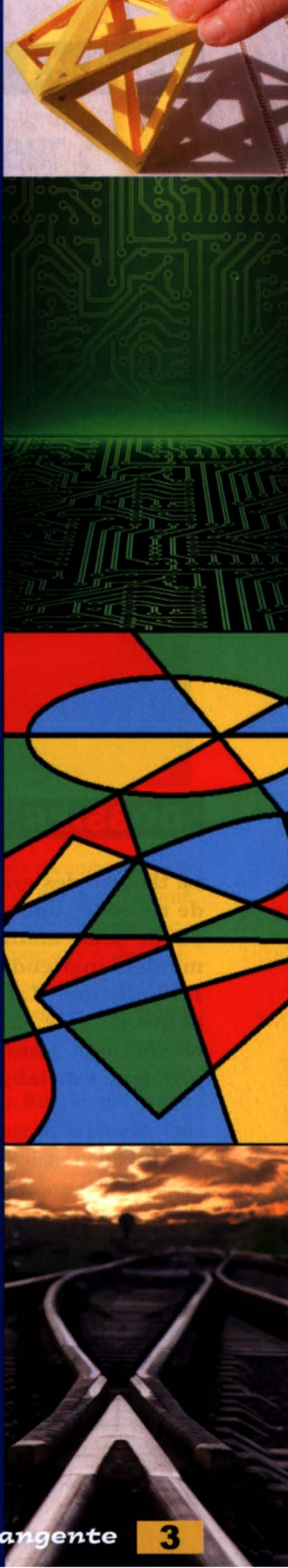
## DOSSIER

### Des applications à la vie quotidienne

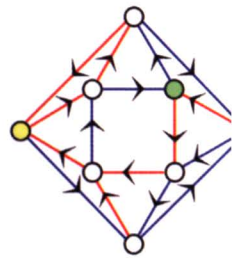
De par leur structure purement topologique, les graphes sont un puissant outil d'aide à la décision. Ils sont utiles pour planifier et ordonnancer les tâches dans une chaîne de production, gérer les priorités dans un projet, ou hiérarchiser les étapes dans une suite d'instructions informatiques...

La fourmi et le problème du voyageur de commerce	84
Un projet dans le bon ordre, la méthode PERT	88
L'algorithme de Dijkstra	92
Quand le chemin se joue aux dés	96

(suite du sommaire au verso)



<b>Un problème de téléphonie mobile</b>	100
Des arbres pour faire passer les trains	104
<b>Comment éviter les bouchons</b>	108
Un arbre pour le théâtre	114
<b>Entre sens et texte</b>	118
Les livres dont vous êtes le héros	122



## DOSSIER

### Dans l'informatique

Que serait la théorie des graphes aujourd'hui sans l'informatique ? Qu'il s'agisse de trier des données, de compresser des fichiers ou de rechercher un mot dans un texte, on retrouve partout une structure de graphe dans un ordinateur.

<b>Parler à son ordinateur</b>	126
Retrouver un mot dans un texte	130
<b>Les réseaux de neurones</b>	132
Des listes autrement qu'en ligne	136
<b>Des arbres à compresser</b>	140

## DOSSIER

### Jeux de graphes

La théorie des graphes permet de comprendre, voire de résoudre une grande quantité de jeux de réflexion ou de jeux mathématiques et logiques, parfois de manière inattendue (voir à ce sujet le numéro 46 de la Bibliothèque Tangente). *A contrario*, les graphes peuvent être à la source d'une catégorie de récréations dont les plus classiques sont des problèmes de labyrinthes.

Arbres, jeux et stratégies	144
<b>Graphes sur échiquier</b>	148
Algorithmes en graphes	151
<b>Graphes et labyrinthes</b>	152
Résoudre des énigmes à l'aide des graphes	156
<b>Jeux et problèmes</b>	160
Solutions	164

#### En bref

5, 43, 55,
75, 87, 95,
99, 107,
112, 124

#### Glossaire

23, 27, 31
------------

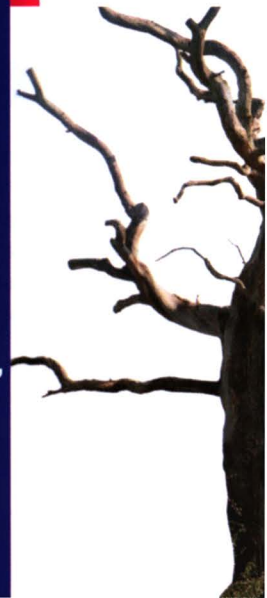
125

HAL 9000



126  
130  
132  
136  
140

143



## Une origine anglaise : c'est graphe, docteur ?



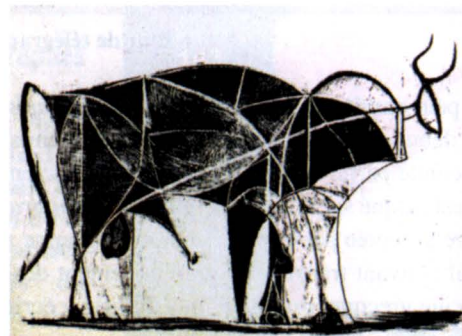
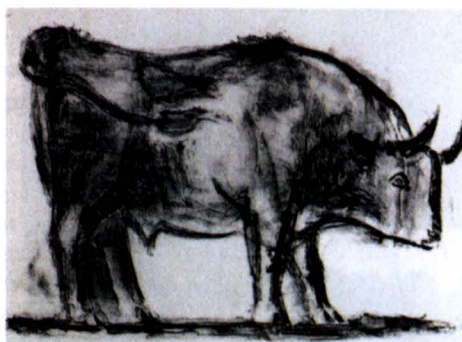
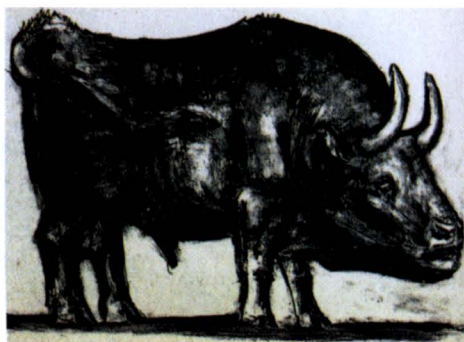
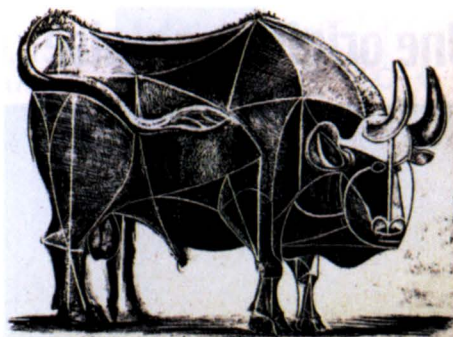
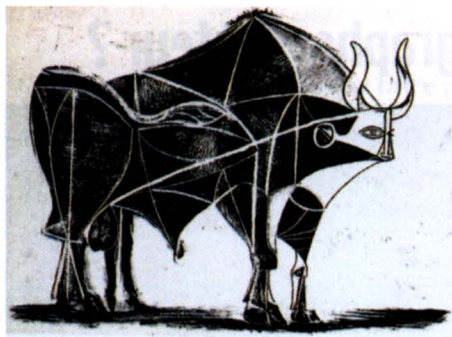
Tour de télégraphe Chappe à Marly-le-Roi.

Il peut paraître surprenant que le mot *graphe* soit apparu dans notre langue assez récemment, vers le début du XX<sup>e</sup> siècle, et qu'il nous vienne... de l'anglais. Pourtant, ce terme se retrouve comme seconde partie de mot beaucoup plus anciens. Ainsi « orthographe » voit le jour à la Renaissance ; il est calqué sur un homonyme latin *orthographia*, à une époque où l'on devient soucieux d'une écriture acceptée par tous. Le mot « télégraphe », pour sa part, est créé en 1792 pour désigner un appareil pouvant transmettre graphiquement des signaux. Leur suffixe commun est bien sûr issu d'une racine grecque, *graphein*, qui signifie « écrire » ; le terme *graphê* désigne quant à lui tant l'écriture que ce qui est écrit.

Si l'on en croit le *Dictionnaire historique de la langue française* dirigé par Alain Rey, le mot *graph* apparaît en anglais comme abréviation de *graphic formula* d'abord dans le langage de la chimie. On le trouve utilisé en mathématiques vers 1880. Cependant, sa première attestation dans notre langue daterait seulement de 1926. Son utilisation devient alors courante pour désigner la représentation graphique d'une fonction.

L'émancipation de la théorie des graphes comme discipline autonome, juste avant la Seconde Guerre mondiale, donne une nouvelle jeunesse à ce terme, avec comme point de départ le livre du mathématicien hongrois Dénes Kőnig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, paru en 1936. Cet ouvrage est suivi en 1958 de celui de Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications*. Le mathématicien français introduit peu après la notion et le terme « hypergraphe ».

De nos jours, le mot *graphe*, par-delà ses acceptions mathématiques, est devenu un terme courant, montrant que la science concourt elle aussi à enrichir la langue.



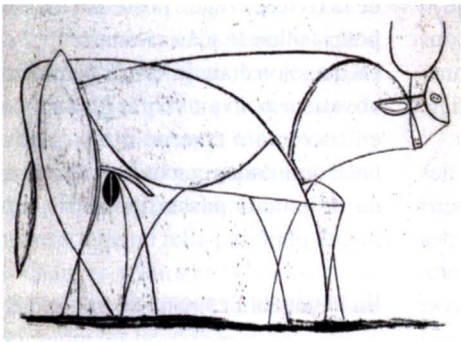
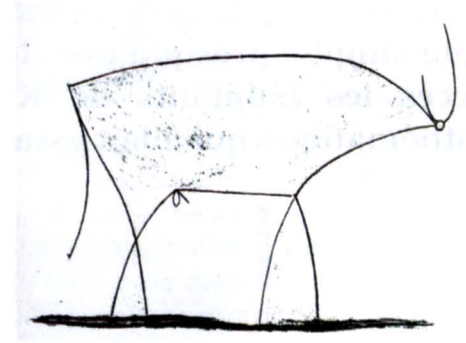
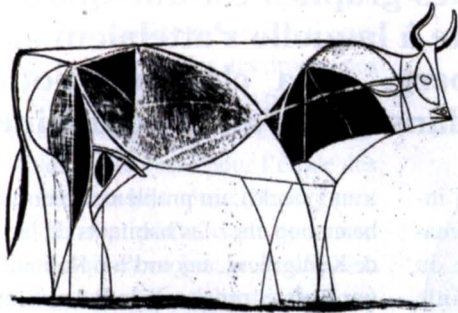
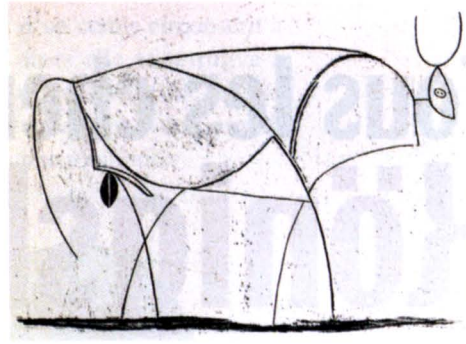
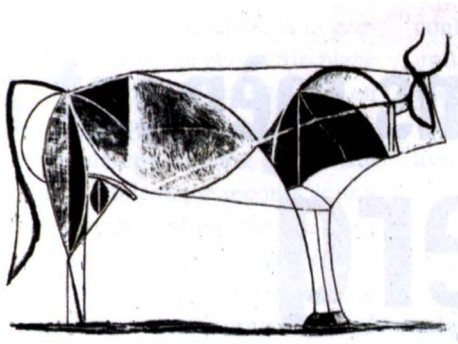
© Succession Picasso, 2002

# Les onze états du taureau de Picasso

Cette double page présente une série de onze lithographies de Pablo Picasso, réalisées entre le 5 décembre 1945 et le 17 janvier 1946 (la suite chronologique se lit de haut en bas, colonne par colonne, à partir de la gauche).

Il est frappant de constater à quel point cette suite de dessins peut se lire comme une métaphore du processus qui a conduit Euler à inventer la notion de graphe. Dans cette analogie, le premier taureau représente la ville de Königsberg et ses sept ponts.





Une figure rassurante, bien identifiée, tout comme celui du plan de Königsberg avec sa petite île et sa rivière, que l'on imagine tranquille. Et puis le problème surgit : la question des sept ponts rend brusquement le plan de Königsberg beaucoup plus déroutant. Le calme de la figure cède la place à la controverse : les deuxième et troisième taureaux, presque monstrueux, se mettent ainsi en parallèle avec la confusion mentale qui règne dans les esprits de ceux qui s'attaquent désespérément au problème des sept ponts.

Puisque le plan de Königsberg est une figure plane, une approche mathématique du problème semble

devoir passer par la géométrie. Les recherches s'orientent donc de ce côté-là : c'est l'irruption des triangles à partir du quatrième taureau. Mais le problème est fuyant : les triangles, figures centrales et emblématiques de la géométrie euclidienne, se tournent et se retournent sans parvenir à la solution. Progressivement, ils cèdent du terrain : au neuvième taureau, ils doivent disparaître. Étirés, comprimés, tordus, ils ne résistent pas à la poussée unificatrice qui se met en place et qui verra l'avènement de la topologie. Les derniers taureaux achèvent le travail d'élaboration de la nouvelle structure permettant de comprendre le problème sous un jour nouveau : la notion de graphe est née. Ainsi, loin de montrer une disparition progressive, la démarche de l'artiste est au contraire celle d'une création.

L'œil de Picasso et celui d'Euler ont chacun tiré d'une image quotidienne quelque chose de radicalement nouveau. Après s'être immergé dans leur façon de voir, plus rien ne peut paraître comme avant.

B. R.

# Tous les chemins mènent à Königsberg

L'acte de naissance de la théorie des graphes est une question toute simple, presque une devinette à laquelle s'attelaient sans succès les habitants de Königsberg. À la clé, une notion mathématique qui allait essaimer dans bien d'autres domaines.

**I**l n'est pas très fréquent que l'introduction d'une notion mathématique passe par l'exposition du premier problème qui lui a fait voir le jour : d'ordinaire, les développements et simplifications ultérieures font qu'il devient difficile de reconnaître, sous les multiples couches de perfectionnements successifs, la question initiale d'une théorie.

À l'opposé de cette règle, l'histoire des sept ponts de Königsberg est un véritable passage obligé pour la théorie des graphes. Plus de deux siècles après cette jolie histoire, il est difficile de trouver un ouvrage de base sur les graphes qui ne la mentionne pas au moins en passant. Or, donc, à l'époque du mathématicien suisse Leonhard Euler (c'est-à-dire au

xviii<sup>e</sup> siècle), un problème se discutait beaucoup chez les habitants de la ville de Königsberg, aujourd'hui Kaliningrad (en Russie, proche de la Pologne et de la Lituanie). La ville, construite autour de la rivière Pregel, possédait alors sept ponts, selon le plan ci-contre.

La question était de savoir comment un voyageur pouvait visiter les sept ponts en traversant chacun d'eux, dans un ordre quelconque et sous la seule contrainte de ne jamais passer deux fois sur le même pont.

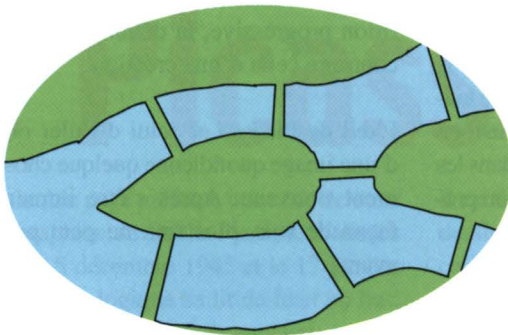
## Un voyageur économe de son temps

On ignore qui, au xviii<sup>e</sup> siècle, a eu l'idée de se poser la question des sept ponts de Königsberg. Cet inconnu, sans le savoir, a pourtant posé une question qui fut à l'origine de deux nouvelles branches des mathématiques.

La première de ces branches est devenue au xx<sup>e</sup> siècle l'une des disciplines phares des mathématiques : la *topologie*. L'aspect topologique de la question des sept ponts est probablement son aspect le plus révolutionnaire.

De quoi s'agit-il ? Eh bien, pour la première fois, on avait affaire à une ques-

Les sept ponts de Königsberg.



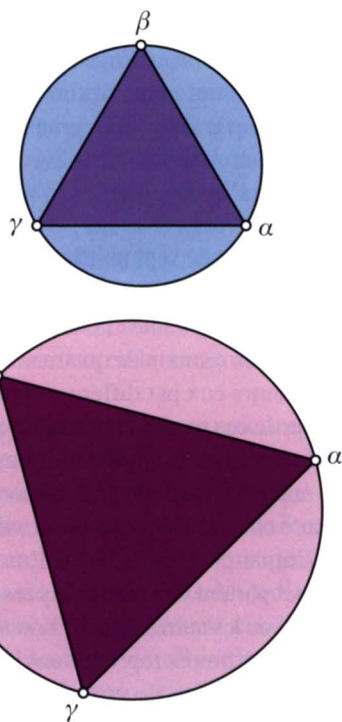
tion qui semblait d'ordre purement géométrique, et même de géométrie plane (la figure matérialisant la situation en fait foi), alors qu'aucun des outils traditionnels de cette même géométrie n'était d'un quelconque secours pour y répondre. Peu importe en effet que, dans la figure précédente, les bras de la rivière soient plus ou moins écartés, peu importe que l'île centrale ait une forme carrée ou circulaire, peu importe, encore, que les ponts soient parfaitement rectilignes ou pas. Dans la situation posée, il n'y a pas de place pour les cercles, les droites, les triangles ou les angles, toutes ces notions qui s'étaient tant de fois révélées indispensables par le passé pour l'étude des questions de la géométrie. Dans le problème des sept ponts, c'est donc tout autre chose qui est en jeu : la classification géométrique traditionnelle des figures y est caduque.

Toutefois, même si dans notre figure la situation demeurerait fondamentalement la même en remplaçant les segments représentant les ponts par des arcs de cercles ou des morceaux d'ellipses, il y a des limites à ces manipulations. Il est visible, en effet, que s'il est possible de « tordre » telle ou telle partie du dessin sans changer vraiment le problème, il n'est pas possible en revanche de faire se rejoindre les bras de la rivière, ou de « recoller » la petite île à l'une ou l'autre des rives, sous peine d'être confronté à une situation manifestement différente pour notre problème.

### Une géométrie sans cercles ni triangles

Dans la géométrie traditionnelle, les figures peuvent être faites « en plus grand » ou « en plus petit » sans changer fondamentalement la situation : si une propriété géométrique se trouve dans le dessin du haut ci-après (il s'agit de la

configuration d'un cercle circonscrit à un triangle), alors elle se retrouve à l'identique dans dans le second dessin, simple « grossissement » du premier avec, en plus, une rotation.

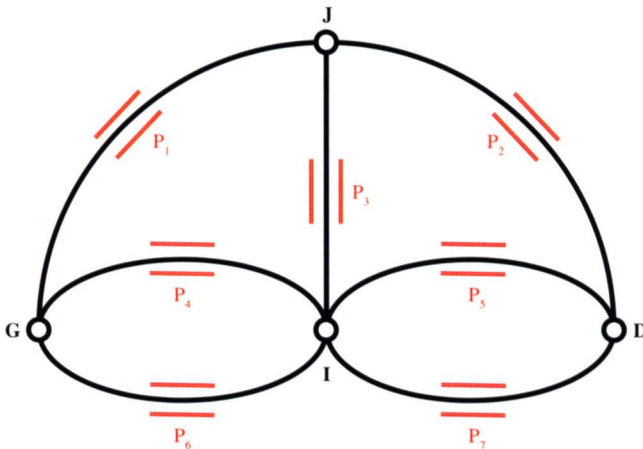


En géométrie, grossissements et rotations sont à peu près les seules transformations « légitimes », c'est-à-dire qui ne changent pas les propriétés de ces figures (égales distances entre les sommets du triangle et le centre du cercle, par exemple). Pour la situation des sept ponts, en revanche, bien d'autres manipulations sont possibles qui ne modifient pas « l'état général » de la figure. La délimitation précise de cet ensemble plus vaste de transformations qui préservent les propriétés « utiles » de la figure du problème des sept ponts est à la base de la topologie, sorte d'« extension » de la géométrie dans laquelle les propriétés structurantes sont d'ordre plus générale (et sont souvent bien plus abstraites).

Quelle est donc la structure mathématique qui permet de rendre compte le plus efficacement possible de la situation des sept ponts ? Quel est ce squelette abstrait qui résume toutes les données de la configuration topographique de la ville de Königsberg ? Ce squelette, c'est un graphe : lorsque Euler résout le problème des sept ponts, il fonde ainsi du même coup la *théorie des graphes*, appelée à jouer un rôle majeur avec l'émergence de l'informatique.

### Un squelette de sept points

L'idée est la suivante : la ville de Königsberg est la réunion de quatre morceaux reliés entre eux par différents ponts. La forme de ces morceaux n'a guère d'importance : seuls comptent les ponts qui les relient. Il est donc possible de représenter chaque morceau de la ville par un simple point (une île, si l'on veut), duquel partent des ponts vers les autres points (ou les autres îles). Si l'on nomme G et D les points représentant les deux rives, I la petite île et enfin J la terre émergée entre les deux bras de la rivière, la représentation de la situation est alors la suivante :



C'est le *graphe de Königsberg*. Chaque ligne reliant deux points symbolise un pont, et l'on voit que la comparaison

avec un squelette n'était pas usurpée. Il est par ailleurs clair que, dans cette figure, la forme précise des lignes reliant les points n'a pas d'importance : seul compte que ces lignes indiquent les liaisons possibles entre les points (c'est, là encore, une illustration du caractère topologique et non géométrique du problème étudié).

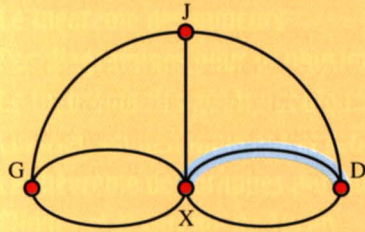
À partir du graphe de Königsberg, la question des sept ponts se reformule de la manière suivante : comment, partant de l'un des quatre points (G, D, I ou J), peut-on colorier au crayon la totalité des lignes du graphe sans repasser deux fois par la même ligne et sans lever le crayon ?

Ce qui est en jeu ici est la construction de ce que l'on appelle depuis un *chemin eulérien*, c'est-à-dire un chemin qui parcourt tout le graphe sans passer deux fois sur la même arête et sans que soit effectué de « saut ». Euler a donné la solution générale à ce problème ; plus précisément, quel que soit le graphe considéré (celui de Königsberg ou un autre), il est possible, d'ailleurs assez facilement, de savoir si un chemin eulérien existe ou non (voir en encadré) : il suffit de compter, pour chaque sommet, le nombre d'arêtes qui en partent. S'il y a plus de deux sommets pour lesquels le nombre en question est impair, alors la réponse est négative. Sinon, un chemin existe.

S'agissant du graphe de Königsberg, le décompte n'est pas long : un nombre impair d'arêtes part de chacun des sommets, un touriste ne peut donc pas visiter tous les ponts une fois et une seule. Dans une autre ville, avec des ponts disposés différemment, un chemin eulérien aurait pu exister et, dans ce cas, on peut penser que les habitants auraient eu tôt fait de trouver eux-mêmes la solution. À Königsberg, tant que les essais demeureraient infructueux, la question

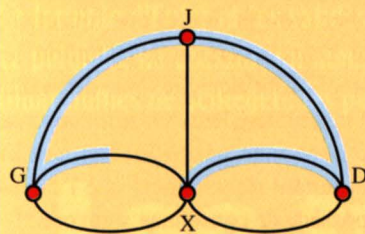
## De bout en bout

Lorsque l'on suit les différentes lignes d'un graphe, on rencontre chaque sommet une ou plusieurs fois. Ces rencontres peuvent se produire selon trois modalités distinctes. La première est celle du début, c'est-à-dire du moment où le crayon commence à avancer. Le point X duquel il part présente un certain nombre de lignes qui partent de lui, le crayon en choisit une (noircie dans le dessin suivant).



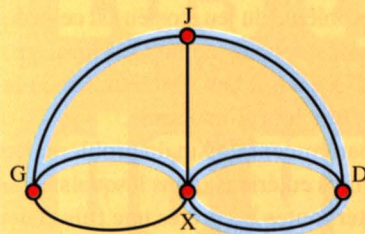
La deuxième configuration, le cas général, est celle dans laquelle le crayon est en cours de route.

La rencontre avec un sommet du graphe se fait alors en deux temps : il y a d'abord l'avant, au cours duquel le crayon noircit l'une des lignes arrivant sur X (à nouveau), puis il y a l'après, où le crayon noircit l'une des lignes non encore noircies qui partent de X.



Enfin, la dernière configuration qui se produit est celle de la fin du tracé : toutes les lignes ont été noircies, sauf une, et le crayon noircit celle-là pour atteindre le dernier point du tracé.

En général, pour un graphe quelconque, le crayon va passer et repasser au point X. Considérons alors les arêtes qui partent de ce point X. À chaque passage du type de la deuxième configuration, deux de ces arêtes sont parcourues et peuvent donc ensuite être considérées comme « inexistantes », puisqu'on n'a plus le droit de repasser par elles. Tout se passe ainsi comme si ces deux arêtes étaient supprimées : le nombre d'arêtes de X est diminué de 2, puis sera à nouveau diminué de 2 au passage suivant, et ainsi de suite. À chaque fois que l'on passe par X, on retire donc deux arêtes, à deux exceptions près. La première est celle où X est le point de départ (c'est la première configuration) : dans ce cas, au premier passage par X (c'est-à-dire



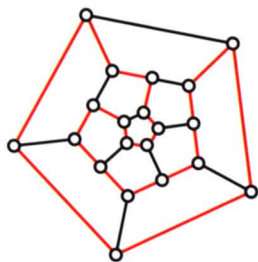
lorsque l'on démarre), une seule arête peut lui être retranchée. La seconde exception se produit lorsque X est le point d'arrivée (troisième configuration), où là aussi une seule arête est retranchée (la dernière du graphe).

À part pour les points de départ et d'arrivée, on voit donc que, les arêtes étant retirées de deux en deux, il est nécessaire que chaque sommet dispose au départ d'un nombre pair d'arêtes pour que puisse exister un chemin eulérien. Si un sommet possède un nombre impair d'arêtes, alors ce sommet est le point de départ ou d'arrivée.

Inversement, un graphe dans lequel ne se trouvent pas plus de deux sommets desquels partent un nombre impair d'arêtes est toujours un graphe eulérien (c'est-à-dire qu'il existe un chemin eulérien le parcourant) : de même que le mouvement se montre en marchant, on se persuade facilement de ce résultat en faisant quelques essais (qui ne remplacent pas, bien entendu, une démonstration dans les règles).

Enfin, si aucun sommet n'a un nombre impair d'arêtes, alors un chemin eulérien est aussi un cycle, c'est-à-dire que le point de départ se confond avec le point d'arrivée.

demeurait en suspens, et le serait restée si Euler ne s'était pas attaqué au problème sous l'angle des graphes et n'avait pas eu cette idée d'un genre si particulier consistant à vouloir démontrer qu'un problème *ne possède pas* de solution.



Sir William Rowan Hamilton, père des quaternions et du jeu icosien.



Après Königsberg

C'est en 1737 qu'Euler a résolu le problème des sept ponts. Bien que point de départ de la théorie des graphes, il faut tout de même attendre plus d'un siècle avant que celle-ci ne fasse son retour dans l'actualité scientifique. Alors que la question d'Euler est avant tout ludique, le XIX<sup>e</sup> siècle voit un développement de la théorie de nature beaucoup plus concrète. C'est d'abord Kirchhoff qui, en 1847, s'intéresse à la quantité de courant qui circule dans les différentes branches d'un circuit électrique. L'auteur des lois qui portent son nom (aussi appelées la *loi des nœuds* ou la *loi des mailles*) développe pour ses problèmes la notion d'*arbre*, c'est-à-dire de graphe sans boucle.

Dix ans plus tard, c'est au tour de la chimie de s'attaquer aux graphes. En 1857, Cayley s'intéresse en effet aux différentes structures possibles (on parle d'*isomères*) d'une molécule ayant  $n$  atomes de carbone et  $2n + 2$  atomes d'hydrogène (ce sont les *alcanes*). Des contraintes de nature chimique font que, dans les alcanes, un atome de carbone est toujours lié à quatre autres atomes (de carbone ou d'hydrogène) alors qu'un atome d'hydrogène est lié à un unique atome de carbone. Enfin, les cycles ne sont pas permis. La question est donc de

trouver tous les arbres à  $3n + 2$  éléments tels que de chaque élément (chaque sommet) partent exactement une ou quatre arêtes (symbolisant les liaisons chimiques).

En 1869, enfin, les mathématiciens redécouvrent les graphes, par la voix de Jordan qui, sans connaître les travaux de Cayley, retrouve ses résultats.

Les jeux ne sont pas en reste : en 1859, soit cent vingt-deux ans après les travaux d'Euler, le mathématicien William Hamilton invente le « jeu icosien » (*The Icosian Game*), dans lequel il s'agit de visiter tous les sommets d'un icosaèdre régulier (voir la figure) une fois et une seule. Dans la version de Hamilton, les sommets sont désignés par des villes dont la première lettre est une consonne (une consonne par ville, l'icosaèdre ayant autant de sommets que l'alphabet possède de consonnes, à savoir 20) : Bruxelles, Canton, Delhi, Francfort, etc. Le problème du jeu icosien est celui des chemins appelés depuis *hamiltoniens*, dans lesquels il faut visiter tous les sommets une fois et une seule.

Apparemment voisin du problème des chemins eulériens (dans lesquels il faut visiter toutes les arêtes une fois et une seule), le problème des chemins hamiltoniens est en réalité beaucoup plus difficile !

Le XX<sup>e</sup> siècle voit la théorie des graphes prendre son véritable essor. Utile dans des domaines comme l'électricité, elle a aussi servi à des études psychologiques ou sociologiques (les sommets représentant des individus et les arêtes les relations entre eux). Toutefois, c'est surtout l'informatique qui a favorisé l'étude des graphes. Aujourd'hui, la théorie des graphes est omniprésente dans la technologie contemporaine.

B. R.

Les graphes planaires	14
Quand les chemins ne se croisent pas	20
Gardons le sens de l'orientation et restons pondérés !	24
Obstruction et stabilité	28
Les matrices entrent en scène	32
Des arbres au secours des probabilités	36
Des graphes et des surfaces à partir d'un carré	40
Le théorème des mineurs	44
Des diagrammes pour la physique	50
Le théorème des quatre couleurs	56
Colorier, un défi innocent et redoutable	58
Le théorème des graphes parfaits	62
Cliques et théorème de Turán	68
La formule d'Euler et les solides de Platon	72
Le polyèdre de Czászár, un monstre topologique	76
Diagrammes de Schlegel : les polyèdres sont des graphes !	80

# Les types de graphes

Quelques points et des traits pour les relier suffisent à créer un graphe. Une idée aussi simple se devait d'engendrer un monde foisonnant d'objets : les idées les plus élémentaires sont souvent les plus riches ! Ainsi, l'énoncé du théorème des quatre couleurs est élémentaire ; pourtant, sa démonstration nécessitera l'utilisation d'un ordinateur. Depuis, l'obstination des mathématiciens a eu raison d'autres résultats puissants. Deux résultats structuraux, le théorème des graphes parfaits et le théorème des mineurs, comptent parmi les plus profonds des mathématiques.

# Les graphes planaires

**Les croisements dans un graphe sont la source de problèmes difficiles, et même de conjectures que personne n'arrive à prouver. Plusieurs possèdent un intérêt pratique pour le dessin des circuits électroniques ou la représentation optimale des réseaux informatiques.**

Un graphe est dit *planaire* s'il admet une représentation dans laquelle les nœuds (ou sommets) sont des points d'un plan et les arêtes ne se rencontrent qu'en des sommets.

Ainsi,  $K_4$  – quatre nœuds, chacun reliés aux trois autres, ce qui fait en tout six arêtes – est planaire, alors que le graphe à dix arêtes  $K_5$  – cinq nœuds, chacun reliés aux quatre autres – n'est pas un graphe planaire : il est impossible de le dessiner sur un plan sans croisement d'arêtes.

Le graphe à neuf arêtes  $K_{3,3}$  – trois points reliés à trois autres de manière systématique – n'est pas, lui non plus, un graphe planaire.

Ces deux derniers exemples permettent de caractériser les graphes planaires : ce sont ceux qui ne contiennent ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$  (voir l'article sur le théorème des mineurs dans ce même numéro).

## Graphes planaires : des théorèmes simplificateurs

Un théorème, très surprenant, a été démontré par Paul Koebe en 1936. Il indique qu'un graphe est planaire si et seulement si c'est « un graphe de pièces

de monnaie », c'est-à-dire, si et seulement si, on peut disposer des pièces de monnaie de diamètres variés les unes contre les autres pour dessiner le graphe en question, avec les centres des pièces comme nœuds du graphe, et une arête entre chaque couple de pièces tangentes.



On déduit du théorème de Koebe un troisième théorème inattendu concernant les graphes planaires et démontré indépendamment quelques années plus tôt par István Fáry : un graphe est planaire si et seulement si on peut le dessiner sur un plan en reliant les nœuds par des segments de droite qui ne se



## Nombre minimum de croisements rectilignes

Imposer aux arêtes d'être des segments de droite conduit à un problème différent (celui du calcul de  $cr'(G)$  ; ce nombre est défini en page 17). Il se trouve qu'il est un peu plus facile car le nombre de dessins différents à envisager est plus petit. Dans le cas du graphe  $K_n$ , les valeurs connues grâce aux calculs des machines vont bien au-delà de  $n = 12$ . On connaît toutes les valeurs jusqu'à  $n = 27$ , et on connaît en plus la valeur pour  $n = 30$ .

Les valeurs pour  $n = 19$  et  $n = 21$  ont été obtenues en 2006 par Oswin Aichholzer de l'université de Graz et ses collègues. La valeur pour  $n = 18$  est le résultat d'un calcul distribué de plusieurs mois ayant utilisé plusieurs dizaines d'ordinateurs. Il a été obtenu par le Rectilinear Crossing Number project. Récemment, les valeurs calculées ont été confirmées par Bernardo Abrego de l'université d'État de Californie et ses collègues, qui ont pu atteindre les réponses pour  $n = 20$ , pour  $n$  de 22 à 27, et qui ont aussi déterminé que la valeur inconnue pour  $n = 28$  ne peut être que 7233 ou 7234.

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$cr'$	0	1	3	9	19	36	62
$n$	11	12	13	14	15	16	17
$cr'$	102	153	229	324	447	603	798
$n$	18	19	20	21	22	23	24
$cr'$	1029	1318	1657	2055	2528	3077	3699
$n$	25	26	27	30			
$cr'$	4430	5250	6180	9726			

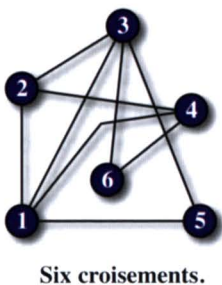
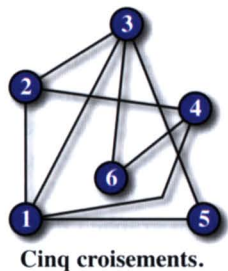
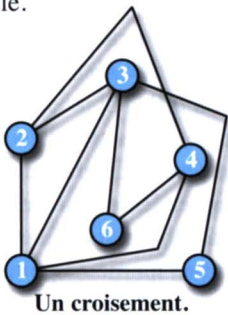
### Graphes non planaires : minimiser les croisements

Face à un graphe non planaire se pose une intéressante question : comment le disposer sur le plan de façon à avoir le moins de croisements possible ?

Pour un graphe donné  $G$ , la meilleure disposition du graphe sur le plan possède un nombre minimum de croisements, que l'on note  $cr(G)$ . Le nombre minimum

croisent pas. Cela signifie qu'aussi compliqué que soit un graphe planaire on peut toujours le dessiner sur un plan sans avoir recours à des arêtes courbées ou empruntant des chemins compliqués. N'est-ce pas magnifique ?

Bien sûr, un même graphe peut être dessiné plus ou moins adroitement et, selon la façon dont on s'y prend, posséder un nombre de croisements plus ou moins grand. L'exemple ci-dessous montre le même graphe dessiné avec un croisement, cinq croisements ou six croisements. Si vous regardez attentivement ce graphe, vous n'y trouverez ni  $K_5$  ni  $K_{3,3}$ , c'est donc qu'il est planaire et que l'on peut le dessiner sans aucune intersection. Cherchez ce dessin sans croisement ! La solution est donnée à la fin de l'article.



## Preuves et conjectures

L'inégalité  $cr \geq a - 3(n-2)$ , expliquée et démontrée en page 17, a été améliorée de plusieurs façons, chacune ayant son intérêt particulier selon le graphe que l'on considère :

- $cr \geq 7a/3 - 25(n-2)/3$ ,      •  $cr \geq 3a - 35(n-2)/3$ ,
- $cr \geq 4a - 103(n-2)/6$ ,      •  $cr \geq 5a - 25(n-2)$  quand  $n > 2$ ,
- $cr \geq a^3/64n^2$  quand  $a \geq 4n$ .

Ces inégalités sont certes utiles, mais, au moins dans le cas des graphes simples, on aimerait disposer d'égalités, c'est-à-dire de formules précises indiquant le nombre minimum de croisements  $cr(G)$  que l'on peut obtenir et la façon d'y arriver. Le plus simple des graphes possédant  $n$  nœuds est le graphe complet où chaque nœud est lié à tous les autres. On le note  $K_n$  et il possède  $n(n-1)/2$  arêtes. Que sait-on concernant  $cr(K_n)$  ? Une formule proposée il y a bientôt cinquante ans par Thomas Saaty et Richard Guy indique que ce nombre vérifie :

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-2}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-3}{2} \right]$$

où les crochets partiels désignent la fonction partie entière.

Cela donne les valeurs suivantes :

$n$	4	5	6	7	8	9	10
$cr(K_n)$	0	1	3	9	18	36	60
$n$	11	12	13	14	15	16	
$cr(K_n)$	100	150	225	315	441	588	

Cette formule semble bien fonctionner... mais personne n'a su la démontrer ! Il s'agit donc d'une conjecture. On a seulement pu établir que  $cr(K_n) \leq Z(n)$  où

$$Z(n) = \frac{1}{4} \cdot \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-2}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n-3}{2} \right]$$

L'égalité a été démontrée jusqu'à 12, mais cela a demandé un travail considérable. La difficulté provient de ce qu'il existe un très grand nombre de façons différentes de dessiner le graphe  $K_n$  sur le plan et qu'il faut surtout ne pas en manquer pour identifier les dessins qui conduisent à un nombre minimum de croisements.

Les dessins optimaux (voir encadrés « Les meilleurs dessins ») pour  $K_5$  et  $K_6$  ne sont pas trop difficiles à trouver. Pour  $K_7$  et  $K_8$ , cela devient déjà plus subtil, surtout qu'il n'y a pas unicité de la solution donnant le nombre minimum de croisements. L'idée de trouver une disposition optimale de proche en proche en utilisant celle de  $K_{n-1}$  pour trouver celle de  $K_n$  est une mauvaise idée, car on a montré que, dans certains cas, les dessins optimaux pour une valeur de  $n$  ne contiennent aucun dessin optimal pour  $n-1$ .

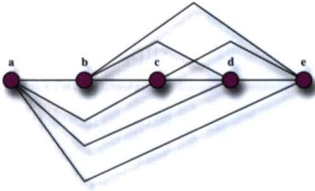
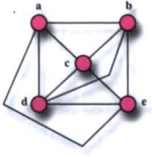
Aller au-delà de 12 est un défi informatique et mathématique.

À défaut d'une démonstration de l'inégalité  $cr(K_n) \geq Z(n)$ , on a réussi récemment à avoir celle-ci :  $cr(K_n) \geq 0,86 \times Z(n)$ , qui s'en approche.

de croisements de  $K_5$  est 1, de même que celui de  $K_{3,3}$ . En effet, ils ne sont pas planaires, donc  $cr(G) > 0$  pour  $G = K_5$  ou  $K_{3,3}$ , et on réussit sans mal à les disposer de façon à ce qu'il n'y ait qu'un seul croisement. Qu'en est-il pour  $K_6, K_7$ , et plus généralement pour  $K_n$  (le graphe complet à  $n$  nœuds) ? Et pour  $K_{n,m}$  (le graphe reliant  $n$  points à  $m$  points des  $nm$  façons possibles) ? Nous allons voir que ce sont de difficiles énigmes.

Pour éviter tout malentendu, décrivons avec soin les graphes dont nous parlons et les règles adoptées pour le décompte des croisements. D'abord les graphes que nous considérons sont non orientés : l'arête  $ab$  est la même que l'arête  $ba$ . Par définition, dans un graphe deux nœuds sont reliés une fois au plus entre eux. Un graphe est donc déterminé par l'ensemble de ses nœuds (exemple  $\{a, b, c, d\}$ ) et de ses arêtes (exemple  $\{ab, ad, bc, bd\}$ ).

Quand on dessine un graphe sur un plan pour compter les croisements, (a) on exige qu'au plus deux arêtes du graphe se croisent en un même point (lorsque ce n'est pas le cas, on s'y ramène facilement en déplaçant légèrement le dessin d'une arête) ; (b) on interdit à une arête reliant  $a$  et  $b$  de se croiser elle-même, et enfin, (c) on interdit à une arête reliant  $a$  et  $b$  de passer par des nœuds du graphe autres que  $a$  et  $b$ . Il résulte de tout cela que l'emplacement des nœuds du graphe  $G$  sur le plan est sans importance pratique quand on s'occupe de  $cr(G)$ . En effet, s'il existe un dessin des arêtes de  $G$  avec  $r$  croisements, pour une certaine disposition des nœuds sur le plan, en déplaçant continûment les nœuds et les arêtes (que l'on allonge ou déforme si nécessaire), il y aura un dessin des arêtes avec  $r$  croisements pour n'importe quelle autre disposition des nœuds. Voici un exemple :



En déplaçant les points du premier dessin et en faisant suivre les arêtes (sans créer ni supprimer de croisements), on passe du premier dessin au second de manière continue et en conservant le nombre de croisements. Le dessin de départ comportait un croisement (entre  $ce$  et  $bd$ ), il en comportera un (entre  $ce$  et  $bd$ ) à l'arrivée. Le nombre minimum de croisements d'un graphe ne dépend donc pas de l'emplacement que l'on choisit pour les nœuds.

Puisque, d'après le théorème de Koebe, tout graphe planaire se dessine sans croisement en représentant les arêtes par des segments de droites, il est naturel de se demander si le nombre minimum de croisements pour dessiner un graphe quelconque est le même en imposant que les arêtes soient des segments de droite, ou en ne l'imposant pas. La réponse est que ce choix importe !

De ce fait, on nomme *nombre de croisements minimum rectilignes* du graphe  $G$ , et on note  $cr'(G)$ , le nombre minimum de croisements que l'on peut obtenir en ne dessinant que des segments de droites pour les arêtes. On a bien sûr  $cr(G) \leq cr'(G)$ . Le graphe le plus simple pour lequel  $cr(G)$  et  $cr'(G)$  sont différents est le graphe  $K_8$ , qui se dessine avec dix-huit croisements si l'on n'impose pas aux arêtes d'être des segments de droite ( $cr(K_8) = 18$ ) et qui oblige à dix-neuf croisements au minimum quand on veut que toutes les arêtes soient des segments de droite ( $cr'(K_8) = 19$ ).

### La formule d'Euler

Parmi les énoncés généraux concernant

$cr(G)$ , l'un est assez intéressant à démontrer et conduit à une inégalité utile à partir de la formule d'Euler pour les graphes planaires. La formule

d'Euler indique que si un graphe est planaire et « d'un seul tenant » (en suivant les arêtes on peut joindre deux nœuds quelconques, on dit aussi *connexe*) alors le nombre de nœuds du graphe,  $n$ , le nombre d'arêtes,  $a$ , et le nombre de faces,  $f$  (les zones que le graphe dessine sur le plan, y compris la zone extérieure), vérifient l'égalité :

$$f = 2 - n + a.$$

La formule se démontre en partant d'un graphe réduit à un seul nœud (qui vérifie évidemment la formule car  $f = 1$ ,  $n = 1$ ,  $a = 0$ ) et en ajoutant étape par étape, soit un nouveau nœud avec une arête le reliant à la partie déjà construite sans créer de nouvelles faces ( $n$  et  $a$  augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité), soit une nouvelle arête reliant deux nœuds déjà présents et créant donc une nouvelle face ( $f$  et  $a$  augmentent chacun d'une unité, ce qui préserve l'égalité). Dans les graphes que nous considérons, une face est entourée d'au moins trois arêtes, car si une face n'était entourée que de deux arêtes, il y aurait deux fois la même arête, ce qui n'est pas autorisé. Chaque arête est sur la frontière de deux faces exactement. Pour entourer les  $f$  faces, il faut donc  $3f/2$  arêtes au moins :  $3f/2 \leq a$ .

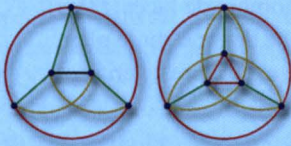
En combinant avec la formule d'Euler, cela donne  $2 - n + a \leq 2a/3$ , ou encore  $a \leq 3n - 6$ .

Cela signifie en particulier qu'un graphe planaire ne possède jamais un nombre d'arêtes plus grand que trois fois le nombre de nœuds.

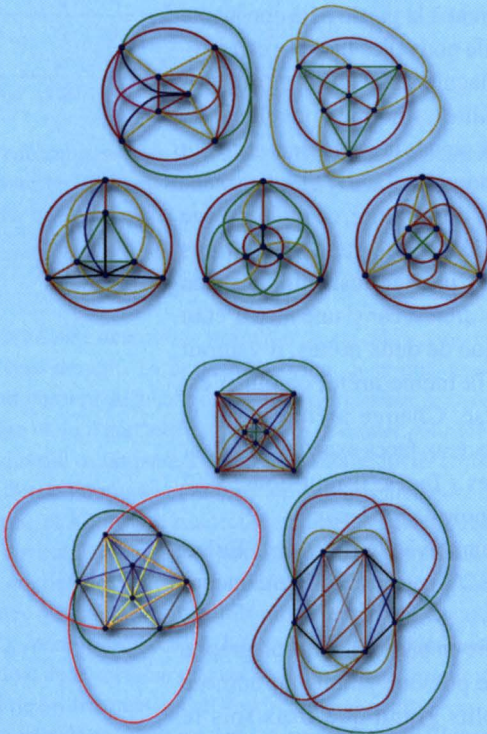
Considérons maintenant un graphe non planaire ayant pour nombre de croisements  $cr$ . En enlevant une à une des

## Les meilleurs dessins des graphes $K_5$ , $K_6$ , $K_7$ , $K_8$

La notation  $K_n$  désigne le graphe complet à  $n$  nœuds : chaque nœud est relié à tous les autres. Trouver la manière de dessiner ces graphes de façon à limiter le plus possible le nombre de croisements des arêtes reliant les nœuds est loin d'être facile et aucune méthode générale n'est connue permettant de concevoir les dessins optimaux. Voici les meilleurs dessins possibles des graphes  $K_5$  et  $K_6$ .



Pour  $K_7$  et  $K_8$ , plusieurs dispositions (topologiquement différentes) donnent le même nombre minimum de croisements. Ces solutions ont été trouvées par Richard Guy et redessinées par Francesco de Comitè, de l'université de Lille-I.



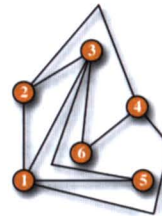
Aujourd'hui la question du nombre minimum de croisements des graphes complets n'est résolue que pour  $n \leq 12$ .

arêtes qui en rencontrent d'autres, on supprime tous les croisements et on arrive donc (après avoir enlevé  $cr$  arêtes) à un graphe planaire vérifiant l'inégalité vue au-dessus, qui s'écrit maintenant  $(a - cr) \leq 3n - 6$ .

Cela donne l'inégalité, valable pour  $n > 2$  :  $cr \geq a - 3(n - 2)$ .

Cette inégalité est importante puisqu'elle indique immédiatement un nombre minimum de croisements pour un graphe ayant  $n$  nœuds et  $a$  arêtes. Si par exemple un graphe comporte cinquante-cinq arêtes et quinze nœuds, on sait qu'en le dessinant il faudra nécessairement au moins  $55 - 3 \times 13 = 16$  croisements.

J.-P. D.



**Solution de la question posée au début de l'article.**

### Références

- *The graph crossing number and its variants: a survey.* Marcus Schaefer, *Electronic Journal of Combinatorics* 1000, 2013.
- *Crossings and Planarization.* Christoph Buchheim et al., in *Handbook of Graph Drawing and Visualization*, Chapman & Hall/CRC, 2013.
- *The Erdős and Guy conjectured equality on the crossing number of hypercubes.* Yuansheng Yang et al., 2012 (<http://arxiv.org/abs/1201.4700>).
- *The Early History of the Brick Factory Problem.* Lowell Beinke et Robin Wilson, *The Mathematical Intelligencer* 32 (2), 2010.
- *Crossing number problem.* Paul Erdős et Richard Guy, *American Mathematical Monthly* 80, 1973.
- *On a Problem of P. Turán Concerning Graphs.* Casimir Zarankiewicz, *Fundamenta Mathematicae* 41, 1954.
- *Obstruction et stabilité pour classifier les graphes.* Jean-Paul Delahaye, pages 12 et 13, dossier « Les types de graphes ».
- *Le principe de transfert en analyse infinitésimale.* Jacques Bair et Valérie Henry, *Tangente SUP* 70-71, 2013.

# Sur les ponts de Paris

**R**endons-nous au centre de Paris. On y trouve deux îles (l'île de la Cité et l'île Saint-Louis), la Rive droite, la Rive gauche et des ponts, des tas de ponts, qui relient les unes aux autres les zones géographiques : le pont Neuf, le pont au Change, le pont Saint-Michel, le pont Notre-Dame, le Petit Pont, le pont d'Arcole, le pont au Double, le pont de l'Archevêché, le pont Saint-Louis, le pont Louis-Philippe, le pont de la Tournelle, le pont Marie et le pont de Sully.

dants peuvent être joints par un chemin (empruntant ou non un pont) : on vient de transcrire la question posée en un problème de graphes. À présent, il n'est pas difficile de voir que six sommets sont de degré impair



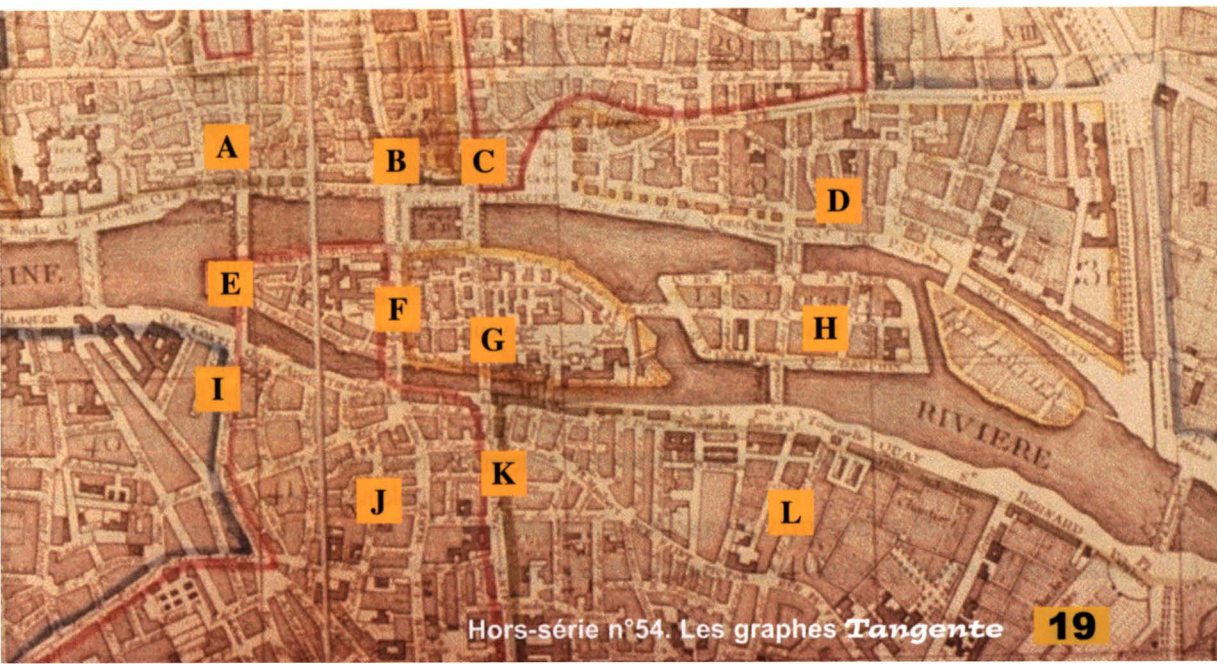
(B, C, E, H, J et K), c'est-à-dire qu'un nombre impair d'arêtes partent d'eux. Le problème des ponts de Paris était donc sans solution à l'époque d'Euler, et l'examen d'un plan d'aujourd'hui vous permettra de vous persuader qu'il en est de même à l'heure actuelle.

## Paris, ses îles, ses ponts

Peut-on trouver un chemin qui emprunte chaque pont une et une seule fois ?

À l'époque d'Euler, le centre de Paris est constitué de différents quartiers connectés les uns entre les autres par neuf ponts. Dans la figure ci-dessous, chaque quartier est assimilé à un point : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K ou L. Relions deux à deux les sommets par des arêtes à chaque fois que les quartiers correspon-

N. V.



# Quand les chemins ne se croisent pas

Le jeu des trois maisons et des trois puits est de cette catégorie d'énigmes impossibles à l'énoncé pourtant élémentaire. En même temps, cette question débouche sur des problèmes qui sont parfois loin d'être évidents.

Maison 1



Maison 2



Maison 3



Puits 1



Puits 2



Puits 3

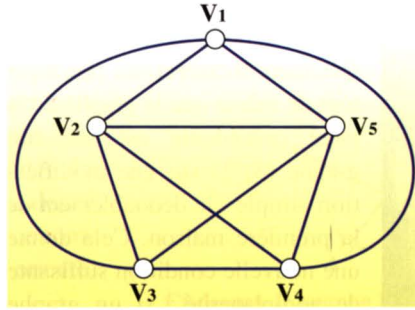
**D**ans le dessin ci-dessus, on a représenté trois maisons et trois puits. Le but du jeu est de relier chaque maison à tous les puits, par des routes aussi sinueuses que l'on veut mais ne devant pas se croiser.

Il se trouve que ce jeu n'a pas de solution. La démonstration de cette impossibilité peut se faire de plusieurs façons,

la plus accessible étant d'étudier les différents cas, selon les manières dont une route peut relier une maison à un puits. En effet, deux routes sont manifestement équivalentes si l'on peut passer de l'une à l'autre par petites déformations successives sans jamais passer par un puits ou une maison. Une fois remarquée cette équivalence, le nombre de routes véritablement distinctes joignant une maison à un puits est fini, et il est possible de tester tous les cas à la main.

*Il n'est pas possible de joindre sans croisement trois maisons à trois puits.*

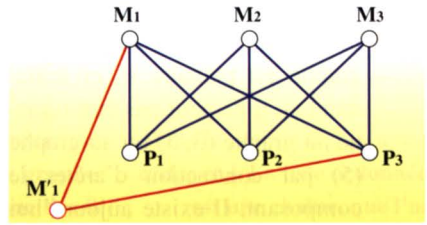
Une autre manière de procéder consiste à montrer que les trois puits ne peuvent pas être dans la même face de la figure une fois reliés les deux premières maisons aux puits (figure ci-dessous).



**Graphes planaires**

Ce jeu, d'apparence simple, ouvre la porte à une question plus générale : étant donné un certain nombre de villes, à quelles conditions est-il possible de relier ces villes avec des routes (éventuellement courbes) en évitant tout croisement ? Un graphe construit sous cette contrainte est *planaire*.

Il paraît évident que si un graphe contient un sous-graphe (sommets et arêtes) non planaire, alors le graphe lui-même n'est pas planaire. Ainsi, on pourrait croire qu'un graphe est non planaire si, et seulement si, il contient un sous-graphe non planaire comme celui des trois maisons et des trois puits (noté (3, 3)) ou celui des cinq villes (noté (5)). La réalité est toutefois différente, comme le montre la figure suivante.

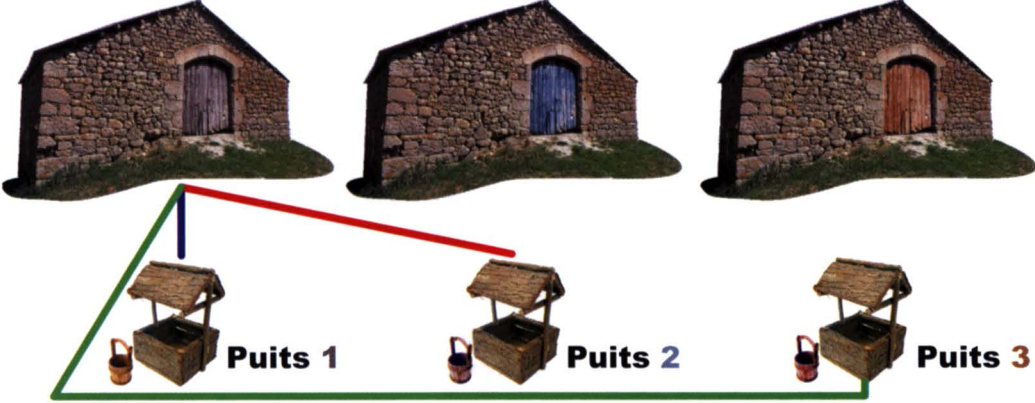


**Ce graphe n'est pas planaire alors qu'aucune des restrictions de ce graphe à six sommets n'est le graphe (3, 3) et aucune de ses restrictions à cinq sommets n'est le graphe (5).**

**Maison 1**

**Maison 2**

**Maison 3**



**Dans cette configuration, la maison 2 ne peut pas être reliée au puits 3 en même temps que la maison 3 aux puits 1 et 2.**



Même si notre critère est manifestement incorrect, on remarque tout de même que le graphe de la page précédente est issu du graphe (3, 3) *via* une modification simple : le dédoublement de la première maison. Cela donne une nouvelle condition suffisante de non-planarité : si un graphe peut être ramené à (3, 3) ou à (5) par amalgame de sommets en contractant certaines arêtes, alors il n'est pas planaire. C'est par exemple le cas de la figure précédente si l'on amalgame les maisons 1 et 1' en contractant l'arête rouge.

**Le bon critère**

Il se trouve que ce critère est non seulement suffisant, mais aussi nécessaire ; par conséquent, un graphe est planaire si, et seulement si, il ne peut pas être ramené au graphe (3, 3) ou au graphe (5) par contraction d'arêtes le composant. Il existe aujourd'hui de nombreuses démonstrations de ce résultat, et autant de méthodes pratiques pour le vérifier. En effet, utiliser ce critère directement en testant toutes les contractions d'arêtes prendrait un temps incroyablement long pour des graphes très grands. Pour trouver des méthodes plus efficaces, il faut s'intéresser d'un peu plus près à l'étape de contraction d'une arête.

Partons d'un sommet d'un graphe que l'on dédouble. L'ensemble des sommets voisins de celui-ci peut être représenté par un cercle autour de lui. Il n'y a que deux cas où le dédoublement pose un problème de planarité : quand

trois sommets voisins sont reliés aux deux autres à la fois (auquel cas on a une contraction du grand graphe en (5)) et lorsque quatre sommets voisins sont reliés alternativement aux deux sommets (auquel cas on a une contraction du grand graphe en (3, 3)).

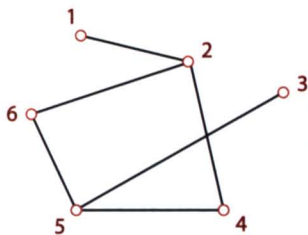
L'algorithme issu de ces observations permet de conclure à la planarité ou à la non-planarité d'un graphe en au plus  $3n^4$  étapes (où  $n$  est le nombre de sommets du graphe), par une méthode consistant à contracter certaines arêtes vérifiant des conditions faciles à tester et réduisant l'ensemble du graphe au graphe des quatre villes toutes reliées entre elles. Ce graphe est bien entendu planaire et l'on part alors de celui-ci : on lui applique les dédoublements de sommets réalisant l'opération inverse de la contraction et l'on vérifie qu'à chaque étape, on n'a jamais l'un des deux cas de dédoublement interdit. Il existe des algorithmes beaucoup plus rapides : l'un d'eux met un temps d'exécution proportionnel à  $n$ , ce qui est difficilement imaginable, mais les choses se compliquent sérieusement...

Enfin, il existe des algorithmes permettant de déterminer si un graphe donné peut être placé dans une surface comme la sphère ou le tore. Toutefois, le nombre d'étapes nécessaires aux algorithmes connus dépend de la nature de la surface considérée, et l'on ignore s'il peut exister un algorithme qui répondrait à la question en un nombre d'étapes à peu près indépendant de la nature de la surface. Cela illustre une fois de plus l'idée qu'en théorie des graphes, les questions dont on connaît les réponses sont somme toute peu nombreuses, et sont souvent très proches dans leurs termes de questions encore ouvertes...

**J.-C. N.**



Un **graphe** est constitué de **sommets**, dont certains sont reliés par des **arêtes**. Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**, deux sommets non adjacents sont **indépendants**. Le nombre de sommets présents dans un ordre est l'**ordre** du graphe, le nombre d'arêtes est sa **taille**. Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité. Un graphe fini, non orienté, sans boucle ni arête multiple est **simple**.



Le graphe ci-contre est d'ordre 6 ; les sommets 1 et 2 sont adjacents, puisque reliés par une arête. Ce n'est pas le cas des sommets 5 et 2.

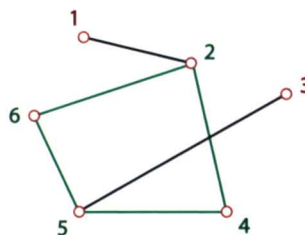
Le degré du sommet 5 est égal à 3.

La **matrice (d'adjacence) associée à un graphe** d'ordre  $n$  dont les sommets sont numérotés de 1 à  $n$  est une matrice symétrique, de dimension  $n^2$ , où le terme à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne vaut  $k$ , nombre d'arêtes reliant  $i$  et  $j$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice 6 par 6 ci-contre est la matrice associée au graphe  $G_1$  ; elle ne contient que des 0 et des 1 puisque deux sommets quelconques de ce graphe sont au plus reliés par une arête.

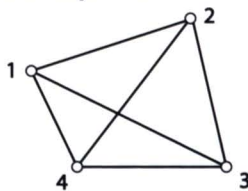
Un **sous-graphe (induit)** d'un graphe  $G$  est un graphe  $G'$  composé de certains sommets de  $G$ , ainsi que toutes les arêtes qui relient ces sommets. Tout graphe obtenu par contraction (ou non) d'arêtes de  $G$  est un **mineur** de  $G$ .



Ci-contre, on a choisi, pour construire le sous-graphe  $G'$  (en vert) à partir de  $G_1$ , les sommets 2, 4, 5 et 6.

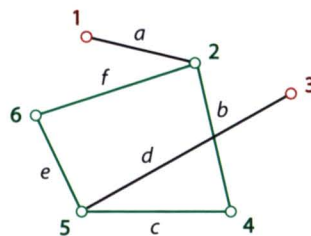
Les arêtes qui relient dans  $G_1$  ces sommets (en vert aussi) sont les arêtes du sous-graphe  $G'$ .

On appelle **graphe complet** un graphe dont tous les sommets sont adjacents.



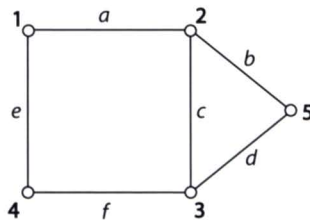
Ci-dessus, le graphe  $H$  est un graphe complet d'ordre 4.

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent. Une chaîne est **élémentaire** si elle ne repasse pas par un même sommet.



Dans le graphe  $G_1$ , on a nommé les six arêtes  $a, b, c, d, e$  et  $f$ . La liste ordonnée de sommets (2-6-5-4) est une chaîne, que l'on peut aussi noter, en utilisant les arêtes qui la composent, ( $f-e-c$ ). La longueur de cette chaîne vaut 3.

Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues ; un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.



Dans le graphe  $G_2$  ci-contre, (1-2-3-5-2-1) est une chaîne fermée que l'on pourrait aussi noter ( $a-c-d-b-a$ ). Ce n'est pas un cycle, puisque l'arête  $a$  y intervient deux fois. En revanche, ( $a-c-f-e$ ) est un cycle.

# Gardons le sens de l'orientation et restons pondérés !

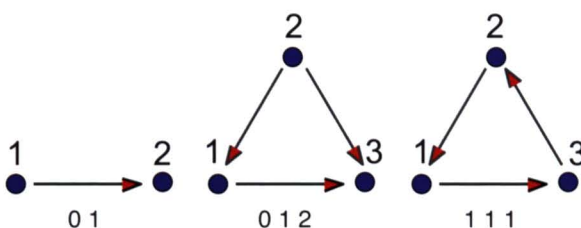
Dans de nombreuses situations, les graphes simples non orientés sont suffisants comme procédé de modélisation. Mais d'autres cas pratiques peuvent nécessiter l'usage d'arêtes orientées et parfois d'attribuer des étiquettes à ces arêtes afin d'indiquer un « poids » ou une probabilité.

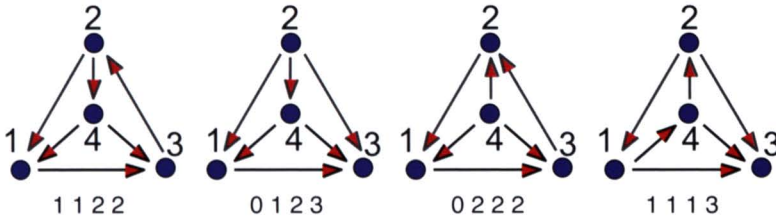
Dans un graphe *non orienté*, les arêtes correspondent à des paires de sommets : à la paire  $\{a ; b\}$  correspond un arc d'extrémités  $a$  et  $b$ . Dans un graphe *orienté*, les sommets sont reliés par des arcs que l'on peut identifier à des couples de sommets : au couple  $(a, b)$  correspond un arc d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$ . La figure ci-dessous donne des exemples de graphes complets orientés pour de petits nombres de sommets. Dans le cas d'un graphe complet, deux sommets quelconques sont toujours directement reliés par un et un seul arc, et cet arc sera orienté dans un sens ou

dans l'autre selon les besoins. Dans ces exemples, on considère que les sommets sont indifférenciés et on exclut les *boucles* (les arcs reliant un sommet à lui-même) ; les graphes sont alors dits *simples*.

Chacun de ces graphes est identifié par un code donnant le nombre d'arcs aboutissant aux différents sommets, ces nombres d'arcs étant rangés par ordre croissant : 012, par exemple, signifie que l'on va trouver un sommet qui n'est l'extrémité d'aucun arc (le sommet 2), un sommet auquel aboutit exactement un arc (le sommet 1) et un troisième sommet auquel aboutissent deux arcs (le sommet 3).

Il existe un seul graphe complet orienté à deux sommets, deux graphes à trois sommets, quatre graphes à quatre sommets. À chacun de ces graphes, on peut associer une matrice. Dans chacune de ces matrices, le terme  $a_{ij}$  vaut 1 s'il





existe une arête d'origine  $i$  et d'extrémité  $j$ , et 0 dans le cas contraire.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 01 & 012 & 111 \end{matrix}$$

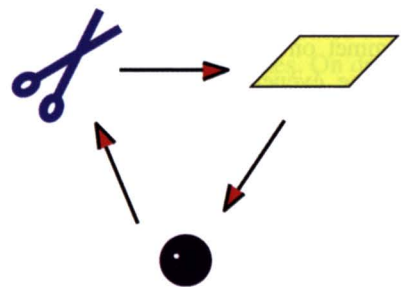
$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 1122 & 0123 & 0222 & 1113 \end{matrix}$$

S'il n'existe pas de boucle, les termes de la diagonale (vérifiant  $i = j$ ) sont tous nuls. La somme des termes de chaque ligne est égale au nombre d'arêtes partant du sommet correspondant, et la somme de tous les termes de la matrice est égale au nombre total d'arêtes du graphe. Dans un graphe non orienté, une telle matrice serait symétrique par rapport à la diagonale. Dans la matrice associée à un *multigraphe* (dans lequel plusieurs arêtes peuvent aller d'un sommet  $i$  vers un sommet  $j$ ), les « 1 » pourront être remplacés par le nombre  $n$  d'arêtes correspondantes.

**Pierre, feuille, ciseaux !**

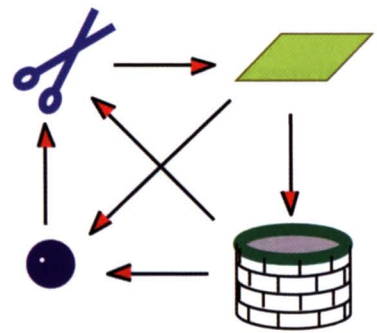
L'intérêt des graphes orientés est qu'il existe de nombreuses situations où ils sont utiles, notamment dans les sciences sociales ou économiques. Voici un exemple tiré du domaine des jeux : le chi-fou-mi. Dans un tel jeu à trois objets, de type pierre-feuille-ciseaux, la pierre gagne contre les ci-

seaux (elle casse les ciseaux), les ciseaux gagnent contre la feuille (ils la coupent) et la feuille gagne contre la pierre (elle la recouvre).



Cette situation correspond au graphe codé 111.

Dans le jeu à quatre objets, pierre-feuille-ciseaux-puits, le puits gagne contre la pierre et contre les ciseaux (ceux-ci tombent dedans) et la feuille gagne contre le puits (elle le recouvre).



Cette situation correspond au graphe codé 1122.

Dans un certain nombre de situations concrètes représentées par un graphe, les différentes arêtes n'ont pas la même importance. On peut alors être amené à « pondérer » ces arêtes en leur attribuant un « poids », qui peut correspondre par exemple à une distance, à une durée de parcours ou encore à un coût. Les *graphes pondérés* apparaissent naturellement dans des graphes particuliers : les arbres de probabilités. Dans de tels graphes, la somme des pondérations des arêtes partant d'un sommet doit toujours être égale à 1, puisque d'un sommet on fait partir une arête pour chaque événement possible. Voyons-en un exemple avec le jeu de 421. Il s'agit de lancer trois dés. Si l'on obtient un 4, un 2 et un 1, c'est gagné. Si l'on n'obtient aucun de ces chiffres, on relance les trois dés. Si l'on obtient un seul des trois (éventuellement répété), on garde un dé affichant ce chiffre et on relance deux dés. Si l'on obtient deux de ces trois chiffres (dont l'un peut être répété), on relance un seul dé. On a droit à trois lancers de dés (de trois dés pour le premier lancer, de trois, deux ou un seul dé pour les deux autres). On a gagné et le jeu s'arrête dès que l'on obtient les trois chiffres 4, 2, 1 en trois lancers maximum.

0 chiffre  
1 chiffre  
2 chiffres  
3 chiffres

0 chiffre	1/8	37/72	1/3	1/36
1 chiffre	0	4/9	1/2	1/18
2 chiffres	0	0	5/6	1/6
3 chiffres	0	0	0	1

La matrice associée au graphe du 421.

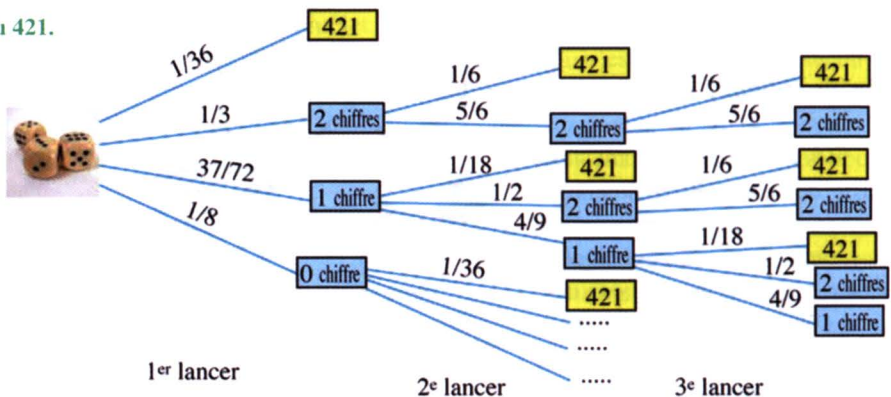
Le terme  $a_{ij}$  de cette matrice est alors égal à la probabilité de passer d'une situation où l'on n'a aucun des chiffres 4, 2, 1 à une situation où l'on a  $n$  chiffres de la combinaison gagnante ( $n = 0, 1, 2, \text{ ou } 3$ ) en appliquant les règles du jeu.

M.C.

RÉFÉRENCES :

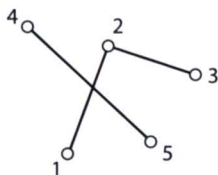
- *Les matrices*. Bibliothèque Tangente 44, 2012.
- *Théorie des jeux*. Bibliothèque Tangente 46, 2013.

L'arbre de probabilité du 421.

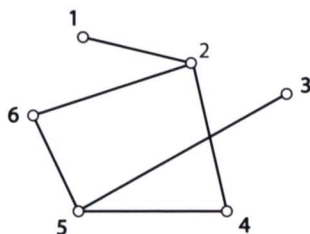


Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Si cette chaîne est un cycle, on parle de **cycle eulérien**.

**Le graphe ci-contre n'est pas connexe : il n'existe pas de chaîne entre les sommets 5 et 3 par exemple.**



Un graphe est **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe. Un graphe qui reste connexe en ôtant un sommet est **biconnexe**. Si au moins un cycle est **hamiltonien** (passant par tous les sommets une fois seulement), le graphe est **hamiltonien** (c'est la notion duale d'**eulérien**). Un graphe connexe sans cycle (à  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes) est un **arbre**. Un sommet de degré 1 est une **feuille**. La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient. Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.



Reprenons le graphe  $G_1$  :

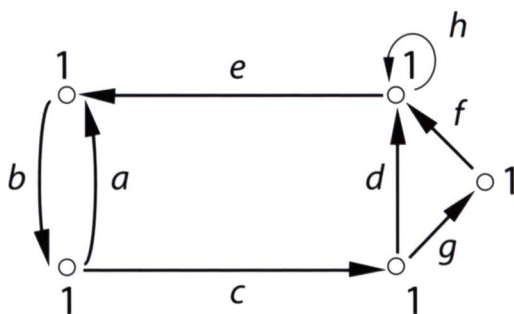
- il existe une chaîne de longueur 2 entre les sommets 1 et 4 : la chaîne (1-2-4). Ces deux sommets n'étant pas adjacents, la distance entre 1 et 4 vaut 2.
- le diamètre du graphe est 4 : en effet, la distance entre les sommets 1 et 3 vaut 4. On peut vérifier « à la main » qu'il n'existe pas de distance plus grande entre deux sommets.

**Colorer** un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur. Le **nombre chromatique** d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer. Un graphe **biparti** peut être partitionné en deux sous-ensembles indépendants de sommets (il est 2-colo-

nable). Un graphe biparti entre les ensembles  $M$  et  $N$  tels que chacun des  $m$  sommets de  $M$  soit adjacent à chacun des  $n$  sommets de  $N$ , et réciproquement, est **biparti complet**. On le note  $K_{m,n}$ .

**Le graphe  $G_1$  a pour nombre chromatique 2 ; en effet, il faut au moins deux couleurs pour colorer ce graphe puisqu'il y existe des sommets adjacents. En outre, on vérifie que deux couleurs suffisent.**

Un **graphe orienté** est un graphe dont les **arêtes** (ou **arcs**) sont orientées : on parle alors de l'**origine** et de l'**extrémité** d'une arête. Une **boucle** est une arête orientée dont l'origine et l'extrémité sont les mêmes. On définit de même une **chaîne orientée**, une **chaîne eulérienne orientée**, un **cycle orienté**...



**Le graphe A ci-dessus est orienté. L'arête  $a$  qui va de 1 vers 2 est distincte de l'arête  $b$ , qui va de 2 vers 1. L'arête  $h$  est une boucle.  $(e-b-c-d)$  est un cycle orienté.**

La **matrice associée à un graphe orienté** d'ordre  $n$  est une matrice de dimension  $n^2$ , où le terme à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est  $i$  et l'extrémité est  $j$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci-dessus, on a la matrice associée au graphe A.

# Obstruction et stabilité pour classifier les graphes

Certaines propriétés d'un graphe sont conservées par ses sous-graphes particuliers appelés mineurs. Cette stabilité est à la base de la définition d'un certain nombre de types de graphes qui sont énumérés dans cet article.

On peut définir la notion de sous-structure d'un graphe de façon immédiate, simple et apparemment naturelle par ce que l'on nomme les *sous-graphes*. Si on définit un graphe par la donnée d'un ensemble de nœuds et d'un ensemble d'arêtes  $G = (N, A)$ , on dira que  $G' = (N', A')$  est un *sous-graphe* de  $G = (N, A)$  si  $N'$  est un sous-ensemble de  $N$  et  $A'$  un sous-ensemble de  $A$  n'utilisant que des nœuds de  $N'$ .

Cependant, la notion de *mineur* est plus profonde et plus féconde que la notion de *sous-graphe*. On dit qu'un graphe  $G'$  est le mineur d'un autre graphe  $G$  si on peut « trouver la forme du graphe  $G'$  dans celle de  $G$  ». Plus précisément, le graphe  $G'$  est un *mineur* de  $G$ , si en partant de  $G$  et en le réduisant par une suite d'opérations de type (a), (b) ou (c), il est possible d'arriver à  $G'$ .

Les opérations permises sont les suivantes :

- suppression d'une arête ;
- contraction d'une arête (les deux nœuds aux extrémités de l'arête choisie sont fusionnés en un seul) ;
- suppression d'un nœud isolé.

La supériorité de cette seconde notion (qui n'interdit pas d'utiliser et d'étudier l'autre) provient sans doute de ce qu'elle

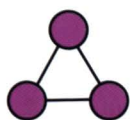
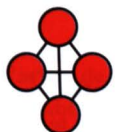
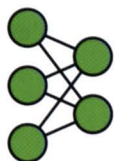
respecte mieux et de manière plus abstraite l'idée qu'un graphe est une forme de nature topologique (et non pas seulement la donnée de deux ensembles). La meilleure preuve de l'intérêt profond de la notion de *mineur* (voir encadré en page 45) est qu'elle conduit à des notions utiles, et à des théorèmes inattendus et subtils (voir un exemple dans l'article sur le théorème des mineurs, en pages 44 à 49).

La première notion déduite de celle de mineur est celle d'ensemble de graphes stable par minoration. Un ensemble de graphes  $E$  est *stable par minoration* si, lorsque  $G$  est un graphe pris dans  $E$  et que  $G'$  est un mineur de  $G$ ,  $G'$  est aussi dans l'ensemble  $E$ .

La suite de cet article va consister en l'énumération d'ensembles de graphes stables par minoration – on va voir qu'ils sont nombreux, simples et intéressants – et à leur caractérisation par une propriété remarquable – l'obstruction –.

## Graphes dessinables sans croisement sur une surface

Les *graphes planaires* sont ceux que l'on peut dessiner sans croisement sur un plan ou – cela revient au même – sur


 $K_3$ 

 $K_4$ 

 $K_{2,3}$

une sphère. On sait leur importance puisqu'un des plus beaux théorèmes de théorie des graphes indique que les nœuds des graphes planaires sont coloriables avec quatre couleurs sans que deux nœuds voisins portent la même couleur.

Les graphes planaires sont stables par minoration car les opérations (a), (b) et (c) ne font pas se croiser les arêtes : elles « nettoient » le graphe et le contractent mais sans jamais obliger à des croisements. Chose remarquable, les graphes planaires admettent une caractérisation élémentaire en termes de mineur : un graphe est planaire, si et seulement si, il n'a pas comme mineur  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  (théorème de Kuratowski). On dit que les graphes planaires sont définissables par obstructions par  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .

L'ensemble des graphes dessinables sans croisement sur une surface  $S$  donnée constitue toujours un ensemble de graphes stables par minoration, quelle que soit la surface  $S$  choisie (car les opérations (a), (b) et (c) ne font jamais se croiser d'arêtes qui ne se croisent pas déjà). En conséquence, quelle que soit la surface  $S$ , un tel ensemble est toujours définissable par obstructions : pour toute surface  $S$ , il existe un ensemble fini  $Obst$  de graphes tel que les graphes n'ayant aucun des graphes de  $Obst$  comme mineurs sont exactement les graphes dessinables sur  $S$  sans croisement.

C'est là un corollaire du théorème des mineurs (cf. page 44) dont l'énoncé peut se réduire à :

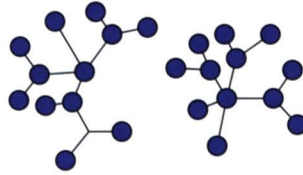
**stable par minoration = définissable par obstructions.**

### Familles remarquables de graphes

Voici maintenant d'autres exemples d'ensembles de graphes stables par minoration, avec à chaque fois l'ensemble d'obstructions associé s'il est connu.

#### • Arbres et forêts

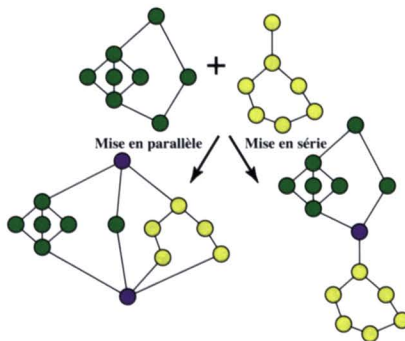
Un *arbre* est un graphe d'un seul tenant sans cycle. Une *forêt* est un graphe composé d'un ou plusieurs arbres. L'ensemble des forêts est stable par minoration. On montre qu'un graphe est une forêt si, et seulement si, il ne possède pas  $K_3$  comme mineur.



#### • Graphes « série-parallèle »

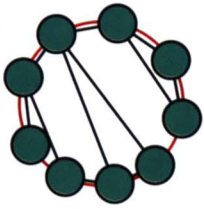
Un graphe est dit *série-parallèle* si on l'obtient en partant de graphes élémentaires ayant un seul nœud ou une arête liant deux nœuds et en opérant une ou plusieurs fois les opérations de mise en parallèle, de mise en série (voir dessin) ou de simples juxtapositions (comme quand on définit les forêts à partir des arbres).

L'ensemble des graphes série-parallèle est stable par minoration. Un graphe est série-parallèle si, et seulement si, il ne contient pas  $K_4$  comme mineur.



#### • Graphes planaires extérieurs

Un graphe est *planaire extérieur* (ou *outerplanar*) s'il est possible de le dessiner sur le plan sans croisement, en plaçant tous les nœuds sur un cercle et cela de telle façon que les arêtes soient toutes à l'intérieur du cercle.



Un graphe planaire extérieur.

Tout arbre par exemple est planaire extérieur. Les graphes planaires extérieurs peuvent être colorés avec trois couleurs (sans que deux nœuds voisins aient la même couleur).

L'ensemble des graphes planaires extérieurs est stable par minoration. Un graphe  $G$  est planaire extérieur si, et seulement si, ni  $K_{2,3}$  ni  $K_4$  ne sont des mineurs de  $G$ .

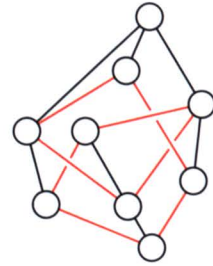
• Graphes sans imbrication de cycles

Un graphe est *sans imbrication de cycles* si on peut arranger ses nœuds et ses arêtes dans l'espace de telle façon que jamais deux cycles du graphe ne soient imbriqués l'un dans l'autre. Il est immédiat que la famille des graphes sans imbrication de cycles est stable par minoration, car en réalisant les opérations (a), (b) et (c) à partir d'un graphe placé dans l'espace sans imbrication on ne crée pas d'imbrication.

Les graphes planaires sont sans imbrication de cycle. Si on prend un graphe planaire dessiné sur un plan et que l'on relie chaque nœud du graphe à un nœud en dehors du plan, on obtient encore un graphe sans imbrication de cycles.

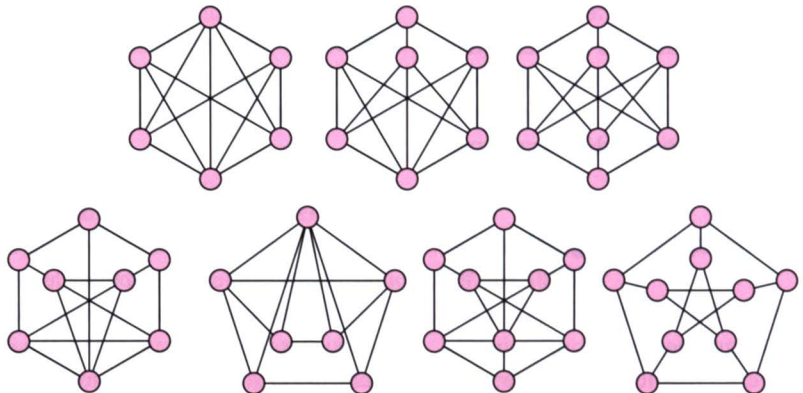
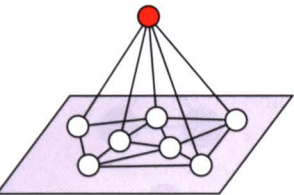
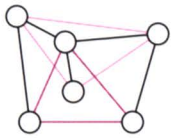
On montre qu'un graphe est sans imbrication de cycles si, et seulement si, aucun des sept graphes suivants (constituant l'ensemble de Petersen) n'est un mineur de  $G$ .

• Graphes sans cycle noué



Les graphes *sans cycle noué* sont ceux que l'on peut placer dans l'espace sans que jamais les arêtes d'un cycle fassent un nœud autre que la simple boucle. Ils constituent un ensemble de graphes stable par minoration. On ne connaît pas de caractérisation de ces graphes en termes d'obstructions. Le graphe ci-dessus possède un cycle noué (en orange). Ces quelques exemples couvrent une grande partie des graphes communément rencontrés dans les applications de plus en plus fréquentes qui en utilisent la théorie. Leur caractérisation, selon le cas par obstructions ou par stabilité, ouvre de nouveaux horizons, en particulier car connaître leur ensemble d'obstructions permet d'obtenir des algorithmes rapides qui testent si un graphe est dans la classe ou pas.

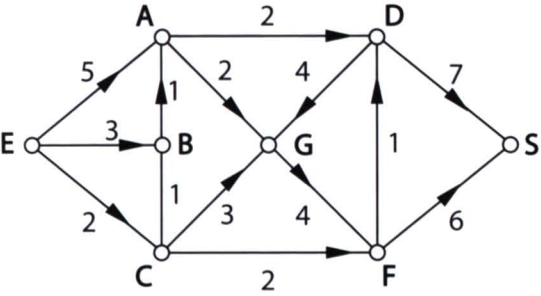
J.-P. D.





Un **graphe étiqueté** est un graphe orienté, dont les arêtes sont affectées d'étiquettes. Si toutes les étiquettes sont des nombres positifs, on parle de **graphe pondéré**. Dans ce cas, le **poïds** d'une chaîne est la somme des poids des arêtes orientées qui la composent.

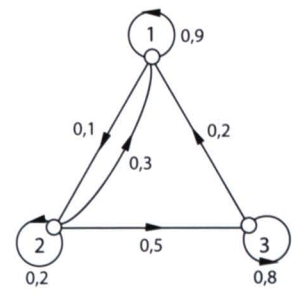
Une **plus courte chaîne** entre deux sommets, est parmi les chaînes qui les relient, une chaîne de poids minimum.



**Le graphe orienté ci-dessus est pondéré. La chaîne (C-B-A-G-F), a pour poids  $1 + 1 + 2 + 4 = 8$ .**

Une **clique** est un sous-ensemble de sommets connectés les uns aux autres ; une clique forme un ensemble complet. Pour un graphe, le nombre de sommets de sa plus grande clique est le **nombre de clique**. Ce nombre est toujours inférieur au nombre chromatique. Un graphe est **parfait** si pour tout sous-graphe induit H le nombre chromatique est égal au nombre de clique de H. La clique  $K_n$  est un graphe parfait.

Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté, pondéré, tel que la somme des poids des arêtes sortant de chaque sommet donné vaut 1. Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution



d'un système pouvant changer aléatoirement d'état : les sommets du graphe sont les états possibles du système et le poids d'une arête orientée issue du sommet  $i$  et d'extrémité  $j$  est la probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$ .

L'**état probabiliste** du système est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles : cette loi sera ici représentée par une matrice ligne. Un graphe probabiliste peut aussi être utilisé pour décrire l'évolution d'un système formé de plusieurs composants pouvant se trouver dans différents états (l'ensemble des états est le même pour chaque composant). L'état du système à un instant donné est la matrice ligne donnant le nombre de composants du système dans chaque état.

La **matrice de transition** d'un graphe probabiliste d'ordre  $n$  est de dimension  $n^2$ . Le terme à l'intersection de la  $i$ -ème ligne et de la  $j$ -ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de  $i$  vers  $j$  si cette arête existe, 0 sinon.

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

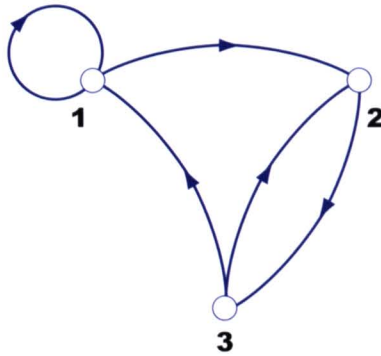
**Le graphe d'ordre 3 précédent est un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est donnée ci-dessus. La somme des éléments d'une ligne vaut 1.**

- La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
- Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme  $(i, j)$  de la matrice  $A^r$  donne le nombre de chaînes de longueur  $r$  reliant  $i$  à  $j$ .
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à  $D - 1$ , D étant le plus grand degré des sommets.
- Théorème d'Euler : un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.
- Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste, si  $P_0$  est la matrice ligne décrivant l'état initial, et  $P_k$  l'état probabiliste à l'étape  $k$ , on a  $P_k = P_0 M^k$ .
- Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, l'état  $P_k$  à l'étape  $k$  converge vers un état P indépendant de l'état initial  $P_0$ . De plus, P vérifie  $P = PM$ .

# Les matrices entrent en scène

**Non, la règle de multiplication des matrices ne sert pas qu'à poser des exercices calculatoires aux examens. En théorie des graphes, elle reçoit des interprétations précieuses autant qu'inattendues.**

**C**onsidérons le graphe orienté  $G$  suivant :



Une méthode simple pour rendre compte de ce graphe sans avoir à en faire le dessin est de constituer un tableau : en ligne, on met les sommets, en colonne aussi, et l'on écrit 1 à la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne lorsqu'il y a une arête menant du sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe. Quand il n'y a pas d'arête, on

écrit 0. Ce procédé conduit, pour le graphe précédent, à la matrice  $M$  suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le graphe permet de produire la matrice et, réciproquement, la connaissance de la matrice permet sans difficulté de reconstituer le graphe. L'intérêt de cette correspondance est illustré par la question suivante : avec la numérotation des sommets de la figure précédente, combien existe-t-il de chemins menant du sommet 1 au sommet 3 en exactement deux coups ? Pas dur, certes, de compter directement. Mais combien y a-t-il alors de chemins menant de 1 à 3 en trois coups ? en  $n$  coups ?

Si l'on note  $m_{i,j}(n)$  le nombre de chemins menant du sommet  $i$  au sommet  $j$  en exactement  $n$  coups, alors on a la relation suivante :

$$m_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^3 m_{i,k}(n-1) \times m_{k,j}(1).$$

***Combien y a-t-il de chemins menant d'un sommet à un autre en exactement  $n$  coups ?***

Une formule un peu compliquée qui traduit pourtant l'idée relativement simple suivante : quand on va de  $i$  à  $j$  en  $n$  coups, c'est que l'on va de  $i$  à  $k$  en  $n - 1$  coups, puis de  $k$  à  $j$  en un coup. En faisant la somme sur tous les sommets  $k$  possibles, on obtient la formule précédente.

## Multiplier (les matrices) pour régner

Où sont les matrices là-dedans ? Pas loin. Pas loin du tout. La formule pour  $n = 2$  s'écrit de la manière suivante :

$$m_{i,j}(2) = \sum_{k=1}^3 m_{i,k}(1) \times m_{k,j}(1).$$

Souvenons-nous à présent que les  $m_{i,k}(1)$  sont les coefficients de  $M$ . Cette matrice  $M$  est d'ailleurs appelée *matrice d'adjacence* du graphe orienté  $G$ .

Alors, la formule ci-dessus, elle ne vous rappelle rien ? Oh stupeur : il s'agit de la formule du produit d'une matrice (carrée) par elle-même. Nous obtenons donc que le coefficient de la  $i$ -ième ligne et de la  $j$ -ième colonne de la matrice  $M^2$  est égal au nombre de manières qu'il y a d'aller de  $i$  à  $j$  en exactement deux coups. Autrement dit, les coefficients de  $M^2$  sont les  $m_{i,j}(2)$ . Par une récurrence immédiate, et à l'aide de la formule vue plus haut, il vient que cette propriété de  $M^2$  s'étend aux puissances successives de  $M$  : le coefficient à la  $i$ -ième ligne et à la  $j$ -ième colonne de  $M^n$  est égal au nombre de

manières qu'il y a d'aller de  $i$  à  $j$  en  $n$  coups exactement.

En l'occurrence, pour répondre aux questions posées, le nombre de chemins menant de 1 à 3 en  $n$  coups obéit à une suite de Fibonacci (comme un calcul matriciel élémentaire le prouve).

Quand on commence l'étude des matrices, on ne coupe pas à la règle ligne-colonne de multiplication des matrices. D'où cette règle peut-elle bien sortir, se demande-t-on souvent, désarçonné que l'on est devant une formule qui ne semble avoir été inventée que pour se compliquer la vie. On pourrait penser que remplacer un dénombrement de chemins par le calcul d'une puissance  $n$ -ième d'une matrice est une simplification davantage formelle que réelle, parce qu'élever une matrice à la puissance  $n$  n'a rien de simple en première analyse. La technique matricielle n'en a pas moins un caractère systématique qui rend le calcul aisément programmable, et, de plus, quand on pousse plus loin la théorie des matrices, on découvre qu'il existe des techniques performantes pour élever une matrice à la puissance  $n$  sans déployer trop d'efforts.

D'ailleurs, il n'y en a pas que pour les 0 et les 1 dans une matrice... Si vous remplacez le 1 de chaque arête par une probabilité, vous obtenez une chaîne de Markov.

B. R.

## Références

*Les matrices.*

Bibliothèque Tangente 44, POLE, 2012.

*Graphes et hypergraphes.*

Claude Berge, Dunod, 1970.



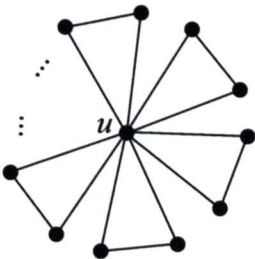
# Le graphe de l'amitié et le moulin à vent

**Si, lors d'une réunion, vous partagez avec chaque personne de rencontre un et un seul ami commun, alors, il existe un individu ami avec tout le monde. On l'appelle le *politicien*. Ce résultat surprenant est dû à trois mathématiciens hongrois.**

**I**nvité à l'occasion d'une soirée mondaine, vous remarquez que vous partagez avec chaque personne de rencontre un et un seul ami commun, et qu'il en est de même pour ces personnes de rencontre. Peut-on en conclure quelque chose sur le graphe global des invités ? Les individus sont représentés par des sommets, et leur lien amical par une arête. En excluant le cas narcissique où une personne est son propre ami, le graphe ne comporte pas de boucle et est donc simple.

Dans un *graphe de l'amitié*, chaque paire de sommets possède exactement un voisin commun, et un graphe *moulin à vent* est constitué de triangles qui ont un unique sommet en commun. Il est totalement évident qu'un moulin à vent est un graphe de l'amitié. Les Hongrois Paul Erdős, Alfred Rényi et Vera Sós seront les premiers à prouver la réciproque, le *théorème de l'amitié* : tout graphe de l'amitié est un moulin à vent !

Un moulin  
à vent.



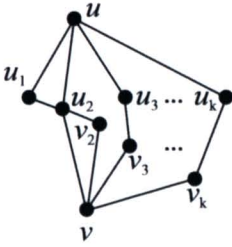
## L'ami hongrois

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'aucun sommet du graphe  $G$  ne soit adjacent à tous

les autres sommets. On va établir de manière combinatoire une relation algébrique entre les caractéristiques de  $G$ , avant de montrer son impossibilité à l'aide d'un peu d'algèbre linéaire.

On peut déjà prouver que  $G$  est un graphe *régulier*, c'est-à-dire que tous les sommets ont le même degré :  $d(u) = d(v)$ , pour tous les sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ . La condition du théorème impose de ne pas avoir de cycle de longueur 4, car deux sommets diagonalement opposés ont deux voisins en commun.

Considérons deux sommets  $u$  et  $v$  non adjacents. Le sommet  $u$  est de degré  $k$  et ses sommets adjacents sont notés  $u_1, u_2, \dots, u_k$ . Un d'entre eux, mettons  $u_2$ , est voisin avec le sommet  $v$ , et doit de plus, puisque adjacent à  $u$ , être voisin d'un des  $u_1, u_3, u_4, \dots, u_k$  ; on supposera qu'il s'agit de  $u_1$  (voir la figure). Le sommet  $v$  partage le voisin  $u_2$  avec  $u_1$ , et pour chaque sommet  $u_2, u_3, \dots, u_k$  le voisin  $v_2, v_3, \dots, v_k$  de même indice. Pour éviter la formation d'un 4-cycle, tous ces  $v_2, v_3, \dots, v_k$  doivent être distincts. Par suite,  $d(v) \geq k$ , et donc  $d(u) = d(v)$  par symétrie. Deux sommets non adjacents ont donc le même degré.



Un peu d'algèbre linéaire

Dire que deux sommets  $i$  et  $j$  ont un seul sommet  $m$  adjacent en commun implique que la colonne  $m$  est la seule pour laquelle les lignes  $i$  et  $j$  de la matrice d'adjacence ont un « 1 » en commun. Le produit terme à terme de deux lignes distinctes est donc égal à 1, et le produit d'une ligne  $i$  par elle-même à  $d(i) = k$ . Il en résulte que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J,$$

où la matrice  $J$  n'est constituée que de 1. Les valeurs propres de  $J$  sont l'entier  $n$ , de multiplicité 1, et l'entier 0, de multiplicité  $n - 1$ . Ainsi, les valeurs propres de la matrice  $A^2$  sont  $(k - 1) + n = k^2$  (une fois) et  $k - 1$  (en tout,  $n - 1$  fois). On vérifie que la trace de  $A^2$ , somme des éléments de sa diagonale, est bien égale à la somme  $nk$  de ses valeurs propres.

Pour éviter l'apparition d'un 4-cycle,  $u_2$  doit être le seul sommet à être adjacent à  $u$  et à  $v$  à la fois. Tout sommet  $w$  différent de  $u_2$  est donc tel que  $d(w) = k$ . Mais c'est aussi le cas pour  $u_2$ , qui a aussi un sommet non voisin, et qui est donc, de même degré  $k$ . Le graphe  $G$  est donc  $k$ -régulier : tous ses sommets, dont  $u$ , sont de degré  $k$ .

Par suite, la somme des degrés des  $k$  voisins de  $u$  est  $k^2$ . Puisque chaque sommet possède un, et un seul, voisin commun avec  $u$ , tous les sommets ont été comptés une fois, sauf  $u$ , qui a été compté  $k$  fois au lieu d'une. Le nombre total  $n$  de sommets du graphe  $G$  est donc lié au « degré de régularité » du graphe  $G$  par la relation  $n = k^2 - k + 1$ . Pour  $k = 1$ ,  $n = 1$  et  $G = K_1$ , de même que pour  $k = 2$ ,  $n = 3$  et  $G = K_3$ , on obtient des cas particuliers de graphe en moulin à vent.

Pour  $k \geq 3$ , construisons la matrice d'adjacence  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  du graphe  $G$ , matrice carrée de dimension  $n$  qui contient l'information structurelle du graphe (voir le précédent article ; le terme  $a_{ij}$  représente l'adjacence des sommets  $i$  et  $j$ ). Par construction,  $A$  est symétrique et ses valeurs propres sont réelles. En fait, la multiplication d'une matrice d'adjacence par le vecteur colonne unité  ${}^t(1, 1, \dots, 1)$  produit un vecteur dont le  $i$ -ème terme est la somme de la ligne  $i$ , c'est-à-dire le nombre de sommets adjacents au sommet  $i$ , soit encore  $d(i)$ . Pour un graphe  $k$ -régulier, comme dans le texte, on a donc  $A^t(1, 1, \dots, 1) = k^t(1, 1, \dots, 1)$  et  $k$  est valeur propre de multiplicité 1.

La valeur propre  $k$  de  $A$  correspond à la valeur propre  $k^2$  de  $A^2$ . Les autres valeurs propres de  $A$ , dont le carré doit être égal à  $k - 1$ , sont donc  $\pm\sqrt{k - 1}$ . Quelles que soient leurs multiplicités respectives, leur somme est de la forme  $z\sqrt{k - 1}$  avec  $z$  un entier relatif. La trace de  $A$  étant nulle,  $k + z\sqrt{k - 1} = 0$ . Puisque  $k$  est un entier,  $\sqrt{k - 1}$  doit lui-même être entier, et donc  $k = 1 + m^2$ , avec  $m$  entier. Alors  $1 + m^2 + zm = 0$ , équation du second degré. La seule valeur entière possible est  $m = 1$ , soit  $k = 2$ , ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Cette contradiction termine la preuve.

F.L.

RÉFÉRENCES

- *Raisonnements divins*. Martin Aigner et Günter Ziegler, Springer-Verlag, 2013.
- *On a problem of graph theory*. Paul Erdős, Alfred Rényi et Vera Sós, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 1966.

# Des arbres

## au secours des probabilités

Des urnes, des boules de couleurs différentes, des tirages : le décor est planté pour une bonne vieille question de probabilités « élémentaires ». Pour éviter de s'embrouiller, il est conseillé d'avoir recours à un auxiliaire efficace : l'arbre.

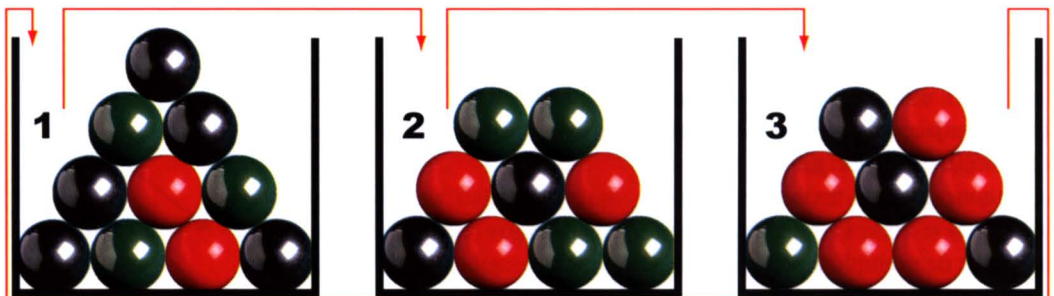
**L**a question qui va nous occuper tient en un énoncé horrible, à faire fuir à la fois les plus courageux, les plus besogneux et les plus indulgents parmi ceux qui étudient les probabilités « élémentaires » (c'est-à-dire sur des ensembles finis). Pas vraiment le meilleur moyen de vous donner envie de lire cet article, mais il est inutile de reculer pour mieux sauter. Cet énoncé, donc, le voici.

### L'énoncé infernal

Trois urnes sont disposées côte à côte. La première contient **trois boules**

**vertes, deux boules rouges** et **cinq boules noires**; la deuxième **quatre boules vertes, trois boules rouges** et **deux boules noires**; la troisième **une boule verte, cinq boules rouges** et **trois boules noires**.

On prend une boule au hasard de la première urne, que l'on met dans la deuxième. On tire ensuite une boule au hasard de la deuxième urne pour la mettre dans la troisième; enfin, on tire une boule au hasard de cette troisième urne pour la mettre dans la première. *Quelle est la probabilité que, à l'issue de ces opérations, la composition de la première urne soit la même qu'au départ ?*

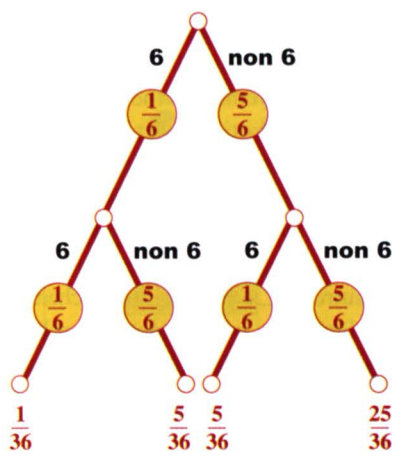


L'énoncé est infernal, certes, mais vous ne pouvez pas dire que vous n'étiez pas prévenus. D'ailleurs, la question elle-même est assez simple, et il n'est pas difficile de reproduire l'expérience.

La question a beau se comprendre assez facilement, il semble que la réponse soit proprement introuvable. Il est vrai que si l'on tente de la trouver uniquement à l'aide de calculs (à partir des propriétés classiques des probabilités), on y passe la nuit : on tombe sur d'interminables formules desquelles on a toutes les chances d'extraire un résultat faux, pour cause d'erreurs de calcul, bien compréhensibles, d'ailleurs.

Or il existe un moyen de s'en sortir, d'une simplicité et d'une élégance remarquables : ce moyen consiste à utiliser un arbre. Pour comprendre en quoi cette structure peut nous être utile, prenons une situation un peu plus simple que celle de l'énoncé précédent.

Lançons un dé deux fois de suite et intéressons-nous à la probabilité d'obtenir soit deux fois 6, soit aucune fois 6. Le cheminement de l'expérience peut se représenter à l'aide d'un arbre de la façon suivante :



Les deux branches qui partent de la racine reflètent les deux issues possibles lors du premier lancer (« 6 » ou « non-6 »). Au bout de chacune d'elles partent deux nouvelles branches, qui concernent l'issue du second lancer. Chaque branche est surmontée d'une probabilité, qui est celle de l'issue vers laquelle elle mène (à chaque fois, une chance sur six d'avoir 6 et cinq chances sur six d'avoir non-6).

**Bifurquer pour régner**

Les feuilles de l'arbre représentent donc tous les résultats possibles, les fractions à côté d'elles la probabilité de chaque feuille. La feuille correspondant au double-6 est de probabilité  $1 / 36$ , celle correspondant au « double-non-6 » est de probabilité  $25 / 36$  : chacune de ces valeurs s'obtient simplement en multipliant entre elles les probabilités des branches menant de la racine à la feuille considérée. La justification de ce fait est donnée par la *formule des probabilités conditionnelles* :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

La probabilité que A et B se produisent (ici, par exemple, « le premier dé donne 6 » et « le second dé donne non-6 ») est égal au produit de la probabilité que B se produise sachant que A s'est produit par la probabilité que A se produise. Soit, en termes mathématiques :

$$P(A \cap B) = P(B/A) P(A).$$

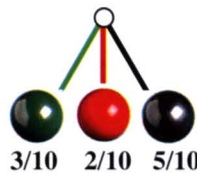
Puisque les feuilles sont incompatibles entre elles (c'est-à-dire que le résultat de l'expérience ne peut être représenté par deux feuilles à la fois), la probabilité cherchée est donnée par la somme des probabilités des feuilles « favorables », soit ici :

$$\frac{1}{36} + \frac{25}{36} = \frac{26}{36}, \text{ soit encore } \frac{13}{18}.$$

Chacun des « sous-arbres » obtenus à partir de l'arbre matérialise un espace de probabilités conditionnelles : les probabilités affectées à chacune des branches d'un sous-arbre sont en réalité des probabilités conditionnées par le résultat délivré par la branche à laquelle le sous-arbre est rattaché dans l'arbre complet.

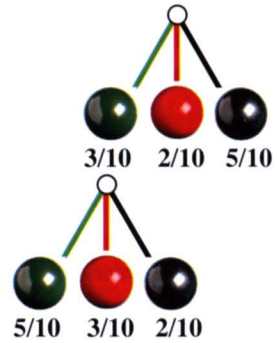
**Retour aux urnes**

Avec le problème infernal du début de cet article, on peut aussi raisonner à partir d'un arbre, même si celui-ci va être un peu plus long à construire. Trois branches partent de la racine de l'arbre, ces branches représentant la couleur de la boule tirée de la première urne. La branche « verte » est affectée de la probabilité 3 / 10 (il y a trois boules vertes parmi les dix boules que contient la première urne), la branche « rouge » de la probabilité 2 / 10 et la branche « noire » de la probabilité 5 / 10 (soit 1 / 2, mais, en l'occurrence, mettre les fractions sous forme irréductible a plutôt tendance à compliquer les calculs : le mieux est de laisser autant que possible le même dénominateur à toutes les fractions, pour pouvoir faire des additions plus facilement). Le début de l'arbre est donc le suivant :



Comment la suite de l'arbre se construit-elle ? Si l'on suit la branche de gauche, c'est que l'on se place dans l'hypothèse où une boule verte a été

tirée de la première urne. La deuxième urne contient donc désormais une boule verte de plus (soit en tout cinq vertes, trois rouges et deux noires). Les branches qui partent de la feuille issue de la branche « verte » originelle sont donc : une nouvelle branche « verte » affectée de la probabilité 5 / 10 (probabilité de tirer une boule verte de la deuxième urne sachant que l'on a tiré une boule verte de la première), une « rouge » de probabilité 3 / 10 et une « noire » de probabilité 2 / 10.



En reproduisant le même raisonnement pour toutes les branches, les données de l'énoncé se traduisent finalement par l'arbre de la suivante, dans lequel l'unité est le dixième. (Par commodité, on a omis les dixièmes pour les probabilités. Il faut donc lire 3/10 là où il est écrit 3.)

Les feuilles entourées correspondent chacune à un cas où la composition finale de la première urne est la même que la composition initiale (si le premier tirage était une boule verte, alors il faut, pour retrouver la même composition, qu'une boule verte soit tirée de la troisième urne ; même chose pour les autres). La probabilité *p* cherchée s'obtient donc en ajoutant les probabilités de chacune de ces feuilles entourées, ces probabilités s'obtenant, comme dans l'exemple précédent, en



effectuant le produit des probabilités affectées aux branches menant de la racine de l'arbre à la feuille considérée. On a ainsi :

$$p = \frac{30}{1000} + \frac{9}{1000} + \frac{6}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{48}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{60}{1000} + \frac{45}{1000} + \frac{60}{1000} = \frac{318}{1000}$$

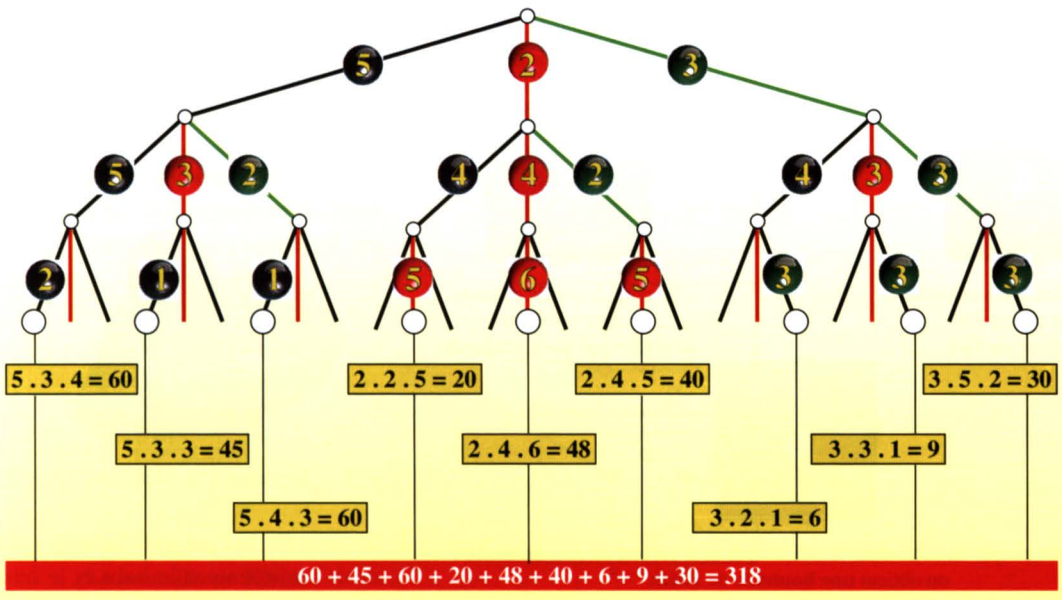
soit  $p = \frac{159}{500}$ .

Et voilà ! C'est un peu long, mais ce n'est pas difficile (d'autant que l'on aurait pu se dispenser de faire toutes les branches) et cela peut très bien se programmer sur ordinateur. L'utilisation d'un arbre rend donc accessible un calcul qui serait beaucoup plus fastidieux sinon. Cela dit, vous pouvez toujours essayer d'écrire le calcul en question : ce n'est pas impossible, mais bon courage quand même...

B. R.



Arbre associé à l'expérience aléatoire

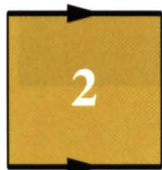


# Des graphes et des surfaces à partir d'un carré

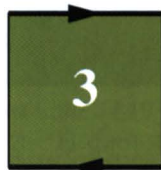
Selon la surface sur laquelle est dessiné un graphe, ses propriétés diffèrent, comme on l'a vu dans le précédent article. Pour compléter l'étude de ces divergences, voici un sujet d'étonnement : une recension des surfaces qui peuvent être engendrées à partir d'un simple carré.



On ne coud rien :  
on obtient **un plan**.



On coud 2 côtés opposés  
dans le même sens :  
on obtient **un cylindre creux**.



On coud 2 côtés opposés  
dans le sens contraire :  
on obtient **un ruban de Möbius**.



On coud les côtés opposés  
dans le même sens :  
on obtient **un tore**.



On coud les côtés opposés  
en sens contraire :  
on obtient **un plan projectif**.

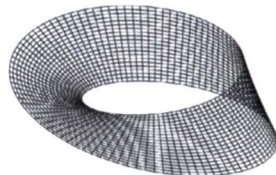


On coud un couple de côtés dans le même sens et le second en sens contraire :  
on obtient **une bouteille de Klein**.

Parmi les surfaces que considère la topologie, celles obtenues en collant les côtés opposés d'un carré sont les plus simples.

1. Si on ne colle rien : on a un plan.

2. Si on colle le côté gauche et le côté droit dans toute leur hauteur en respectant le haut et le bas, on obtient un anneau simple, ou *cylindre creux*. Les graphes dessinables sur un cylindre creux (sous-entendu « sans croisement d'arêtes ») sont les mêmes que ceux dessinables sur le plan, car (i) en déformant un cylindre creux continûment on le met sur le plan, et (ii) un graphe dessiné sur un plan l'est dans un rectangle dont on peut bien sûr faire un cylindre creux.



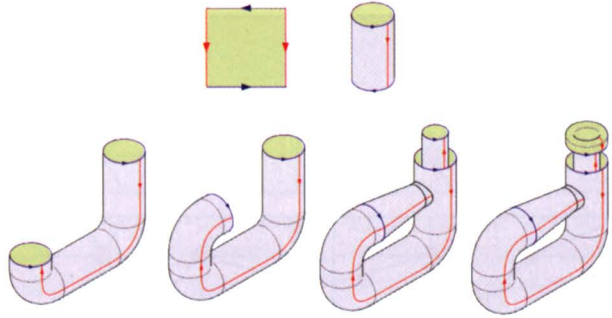
Le ruban de Möbius.

3. Si on colle le côté gauche et le côté droit en inversant le haut et le bas,

on obtient une *bande de Möbius*, surface à un seul bord et un seul côté.



Le tore.

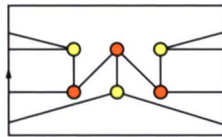


6. Si on colle à la fois le côté gauche et le côté droit en respectant le haut et le bas et le côté du bas avec le côté du haut en inversant la gauche et la droite, on obtient la *bouteille de Klein*, qui comme le plan projectif ne peut pas vraiment se placer dans l'espace usuel à trois dimensions.

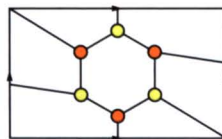
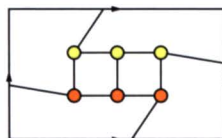
**En haut :** construction d'un cylindre.

**Juste en dessous :** construction d'une bouteille de Klein à partir d'un cylindre.

Chacune de ces surfaces définit un ensemble de graphes stables par minoration (voir l'article en pages précédentes) quand on considère les graphes qu'on peut y dessiner sans croisement d'arêtes. Ces ensembles ne sont pas tous identiques. En effet, le graphe  $K_{3,3}$  ne peut pas être dessiné sur le cylindre creux (ni sur le plan), mais il peut l'être sur la bande de Möbius et la bouteille de Klein. Le graphe  $K_5$ , qui ne peut pas être dessiné sur le plan (et donc sur le cylindre creux), peut l'être sur le tore.



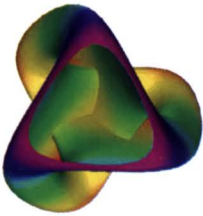
$K_{3,3}$  sur la bande de Möbius



$K_{3,3}$  sur le tore

4. Si on colle à la fois le côté gauche et le côté droit en respectant le haut et le bas et le côté du bas avec le côté du haut en respectant la droite et la gauche, cela donne le *tore* (la chambre à air).

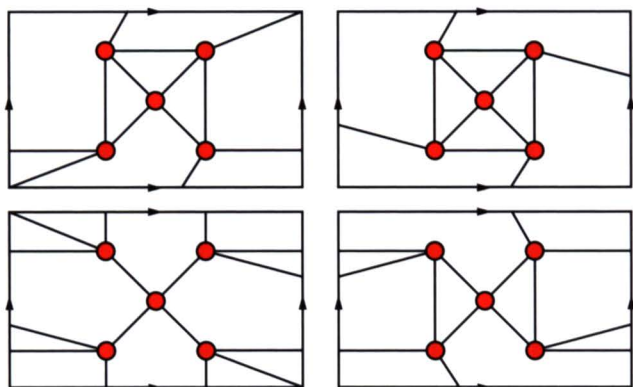
Le plan projectif.



5. Si on colle à la fois le côté gauche et le côté droit en inversant le haut et le bas (comme pour la bande de Möbius), et le côté du bas avec le côté du haut en inversant la gauche et la droite, alors on obtient le *plan projectif*. Il est assez difficile à visualiser car c'est une surface qui ne peut pas se placer dans l'espace usuel de dimension trois (sauf en introduisant des intersections de la surface avec elle-même).



La bouteille de Klein.

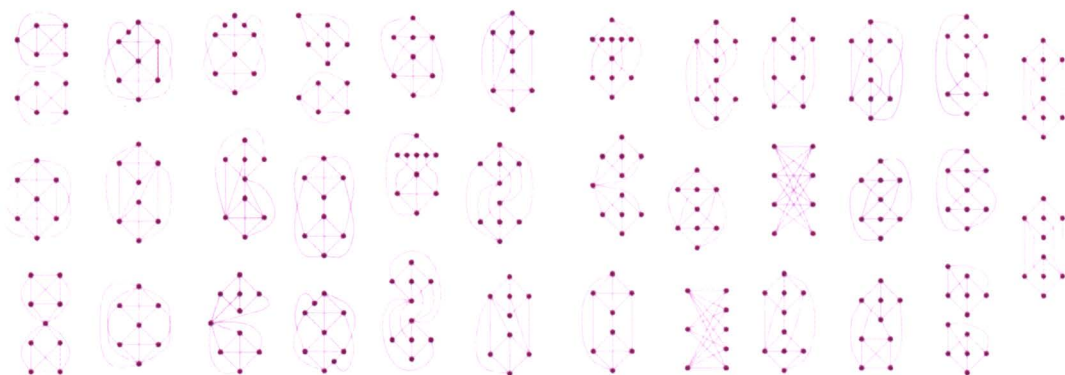


Quatre façons de dessiner  $K_5$  sur le tore

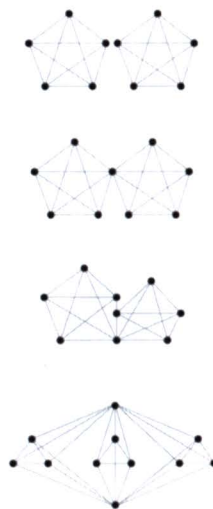
D'après le théorème des mineurs (voir l'article qui y est consacré), chacun des ensembles de graphes définis par les surfaces élémentaires que nous envisageons est caractérisé par un ensemble d'obstructions. Pour le carré ou le cylindre creux, l'ensemble d'obstructions est  $\{K_5, K_{3,3}\}$ . Pour le ruban de Möbius et le plan projectif, Dan Steven Archdeacon a réussi (non sans mal) à établir que l'ensemble d'obstructions est constitué de trente-cinq graphes.

Pour le tore et pour la bouteille de Klein, personne pour l'instant n'a réussi à trouver l'ensemble d'obstructions. On sait juste que pour le tore, il contient plusieurs milliers de graphes, ce qui est vraiment très étonnant : pourquoi donc le tore conduit-il à quelque chose d'aussi complexe ?

**Les trente-cinq graphes d'obstructions du ruban de Möbius.**



Un résultat partiel intéressant a été découvert récemment par Andrei Gagarin, Wendy Myrvold et John Chambers : l'ensemble des graphes que l'on peut dessiner sans croisement sur le tore et n'ayant pas pour mineur  $K_{3,3}$  a pour ensemble d'obstructions l'ensemble de quatre graphes suivants :



**J.-P. D.**

## Des Hongrois au sommet des graphes

De nombreux mathématiciens hongrois se sont consacrés à l'analyse à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et au début du XX<sup>e</sup> siècle, comme Marcel Grossmann (1878–1936), Frigyes Riesz (1880–1956), Lipót Fejér (1880–1959), Alfréd Haar (1885–1933), Michael Fekete (1886–1957), Gábor Szegő (1895–1985), George Pólya (1887–1985), János von Neumann (1903–1957), Béla Szökefalvi-Nagy (1913–1998) ou Péter Lax (né en 1926). Beaucoup de leurs compatriotes se sont depuis illustrés en mathématiques discrètes, et particulièrement en théorie des graphes.

Outre les célèbres Pál, Erdős (1913–1996) et Turán (1910–1976), on peut citer Dénes König (1884–1944), fils du mathématicien Gyula König (1849–1913), auteur d'un théorème éponyme et du premier manuel de théorie des graphes, et László Rédei (1900–1980), dont les travaux portent sur la théorie des nombres algébriques et la théorie des groupes. Il établit avec Dénes König le théorème suivant : tout graphe complet admet un chemin hamiltonien.

Tibor Gallai (1912–1992) fut l'élève de Dénes König, le tuteur de László Lovász (né en 1948), et le collaborateur d'Erdős. Plus récemment, Balázs Szegedy (né en 1974), spécialiste de combinatoire et théorie des graphes, obtient avec László Lovász le prix Fulkerson en 2012. Son frère Mórió (né en 1960) a été lauréat du prix Gödel, qui récompense des travaux remarquables en informatique théorique, en 2001 puis en 2005. Ce prix a été décerné la première fois en 1993 à son professeur László Babai (né en 1950), puis à Róbert Szelepcsényi (né en 1966) en 1995, et à Éva Tardos (née en 1957), prix Gödel en 2012 et de plus lauréate du prix Fulkerson en 1988.

Né en 1948 à Budapest, László Lovász est connu pour ses travaux en informatique théorique, en combinatoire et en théorie des graphes (il a donné son nom à un nombre  $\vartheta$ ). Il dirige actuellement l'institut de mathématiques de l'université de Budapest. Pour un graphe  $G$  à  $n$  sommets, considérons toutes les matrices  $A$  symétriques et d'ordre  $n$  telles que  $a_{ij} = 1$  si  $i = j$  ou si  $i - j$  n'est pas une arête de  $G$ . La matrice complémentaire de la matrice d'adjacence, obtenue en  $y$  interchangeant les 0 et les 1, est de ce type. Soit  $\lambda_{\max}(A)$  la valeur propre maximale d'une telle matrice. Alors le nombre de Lovász est  $\vartheta(G) = \min_A \lambda_{\max}(A)$ . Il est tel que le théorème du sandwich  $\omega(G) \leq \vartheta(G) \leq \chi(G)$  est vérifié pour tout graphe  $G$ , où  $\omega(G)$  est la taille de la plus grande clique de  $G$  et le nombre chromatique  $\chi(G)$  le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier de façon différente des sommets adjacents.

### RÉFÉRENCES

- *Mathématiques discrètes et combinatoire*. Bibliothèque Tangente 39, 2010.
- Dossier « Pál Erdős ». *Tangente* 152, 2013.

### Le théorème de l'amitié amélioré

La « condition de l'amitié » rencontrée dans l'article *le Graphe de l'amitié et le Moulin à vent* (voir en page 34) peut se réécrire sous la forme suivante : pour chaque paire de sommets, il existe exactement un chemin de longueur 2 entre eux. Cette reformulation permet une généralisation en cherchant les graphes, notés  $P_j(k)$ , dans lesquels chaque paire de sommets est connectée par exactement  $j$  chemins de longueur  $k$ . Le théorème de l'amitié énonce que les  $P_1(2)$  sont exactement les moulins à vent. En 1974, Anton Kotzig conjectura qu'il n'existe pas de graphes tels que  $P_1(k)$  avec  $k \geq 3$ , et le démontra pour  $3 \leq k \leq 8$ . Alexandr Kostochka prouva en 1988 que la conjecture était vraie pour  $k \leq 20$ . Depuis, les autres cas ont été vérifiés, et la conjecture est devenue un théorème !

# Un résultat profond

## Le théorème des mineurs

**Le théorème des mineurs – ou théorème de Robertson-Seymour – a été énoncé en 1937 par Klaus Wagner – ce n’était alors qu’une conjecture – et démontré soixante-sept ans plus tard, en 2004, par Neil Robertson et Paul Seymour.**

**L**e « théorème des mineurs » est simple et fondamental. Il indique que « dans toute suite infinie de graphes l’un au moins est contenu dans un autre ». La publication de la preuve s’est déroulée entre 1983 et 2004, elle occupe une série de vingt articles totalisant plus de 500 pages.

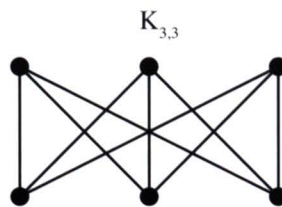
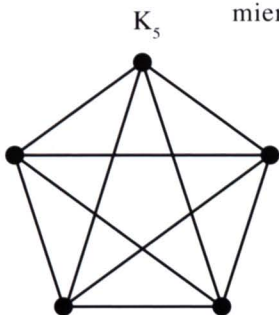
Ce théorème possède une démonstration non constructive (c’est-à-dire qui établit l’existence d’objets, sans expliquer comment les construire). Il a pourtant des conséquences algorithmiques très générales. Grâce à lui une vaste famille de problèmes est prouvée appartenir à la classe P des problèmes traitables en temps polynomial (c’est-à-dire efficacement), ce qui dans bien des cas n’est pas évident. À l’origine de cette histoire il y a un joli théorème graphique particulièrement concret que beaucoup d’amateurs de jeux connaissent : le théorème de Kazimierz Kuratowski (1896–1980), qui

affirme que les graphes planaires – c’est-à-dire pouvant être dessinés sur un plan sans croisement d’arêtes – sont exactement les graphes qui ne « contiennent » aucune des deux formes  $K_5$  et  $K_{3,3}$ .

- $K_5$  est le graphe à 5 nœuds où chaque nœud est relié aux 4 autres.
- $K_{3,3}$  est un graphe composé de deux groupes de 3 nœuds où chaque nœud du premier groupe est relié à chaque nœud du second, et réciproquement.

C’est assez remarquable : un graphe, aussi compliqué soit-il, peut être dessiné sur un plan sans croisement d’arêtes, si et seulement si, on n’y rencontre ni  $K_5$ , ni  $K_{3,3}$ . En Russie, le théorème de Kuratowski est nommé « théorème de Pontryagin-Kuratowski » car le grand mathématicien Lev Pontryagin (1908–1988) l’aurait découvert avant Kuratowski, sans le publier.

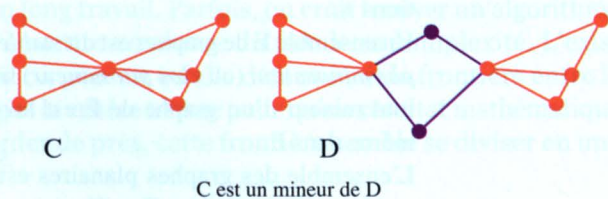
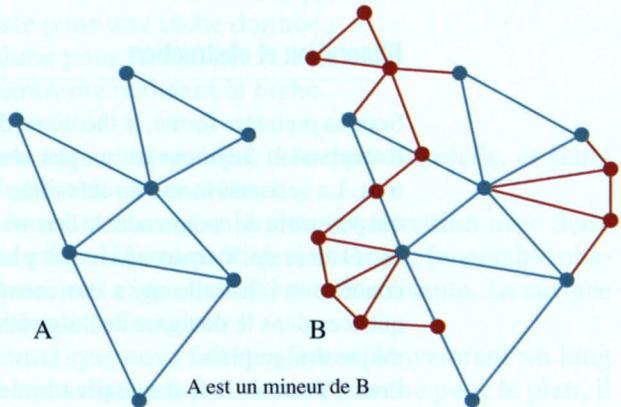
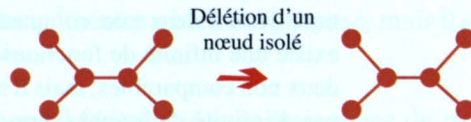
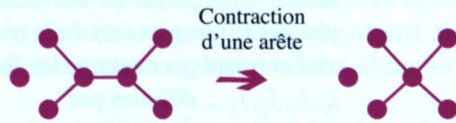
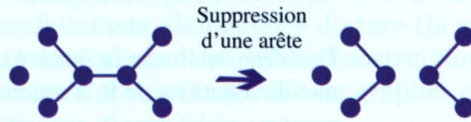
Les graphes que nous considérons ici sont *non orientés* – l’arête  $ab$  entre les nœuds  $a$  et  $b$  ne se distingue pas de l’arête  $ba$  –, ils n’ont pas de boucle – pas d’arête du type  $aa$  –, et entre deux nœuds  $a$  et  $b$ , on ne s’autorise à placer l’arc  $ab$  qu’une seule fois. Pour formuler précisément le



## Mineurs

Le graphe  $G$  est un *mineur* du graphe  $G'$ , si en partant de  $G'$  et en le réduisant par les opérations (a) (b) (c) on obtient  $G$ .

- (a) Suppression d'une arête.
- (b) Contraction d'une arête (les deux nœuds aux extrémités de l'arête choisie sont fusionnés).
- (c) Suppression d'un nœud isolé.



théorème de Robertson et Seymour, il faut préciser ce qu'on entend par « graphe contenu dans un autre ». La notion est naturelle, mais demande un peu de soin et plutôt que d'employer le terme de *sous-graphe* qui désigne souvent une autre notion nous utiliserons le terme consacré de *mineur* (voir encadré).

### Première forme du théorème des mineurs

Une fois défini un *mineur*, le théorème de Robertson et Seymour s'exprime maintenant en quatorze mots (**Première forme**) :

*Dans toute suite infinie de graphes, l'un est le mineur d'un autre.*

Ou en s'autorisant plus de mots :

*À chaque fois qu'une suite infinie de graphes  $G_0, G_1, \dots, G_n, \dots$  est donnée, il est possible de trouver deux graphes  $G_i$  et  $G_k$  avec  $i \neq k$  et tels que  $G_i$  est un mineur de  $G_k$ .*

Il n'est donc pas possible de trouver une infinité de graphes ayant tous des formes indépendantes les unes des autres : dans toute famille infinie de graphes, il y en a au moins deux dont les structures sont intimement liées puisque l'un se déduit de l'autre par utilisation des opérations (a), (b) et (c).

L'affirmation qu'il y a deux graphes  $G_i$  et  $G_k$  dont l'un est un mineur de l'autre, entraîne immédiatement qu'il existe en réalité une infinité de couples différents  $G_i - G_k$  tels que  $G_i$  est un mineur de  $G_k$ . En effet, quand on a trouvé un couple de tels graphes, on les enlève de la suite infinie (qui reste bien sûr infinie), on applique à nouveau le théorème, on trouve donc un second couple de graphes dont l'un est le mineur de l'autre, puis après l'avoir enlevé on en trouve un troisième, etc.

Il ne s'agit pas d'une évidence. Si par exemple, on se pose la même question pour les sous-ensembles finis de nombres entiers, on ne trouvera pas de théorème équivalent : il est en effet possible de définir une suite infinie de sous-ensembles de nombres  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  tels qu'aucun n'est une partie d'un autre (au sens habituel de l'inclusion d'ensembles). Il suffit par exemple de considérer :

$$E_1 = \{0, 1\}; E_2 = \{1, 2\}, E_3 = \{2, 3\}, \\ \text{etc.}$$

De même, on trouve facilement une infinité de fonctions de  $\mathbb{R}$  (l'ensemble des nombres réels) dans  $\mathbb{R}$ , sans qu'aucune ne soit plus petite qu'une autre ( $f$  est plus petite que  $g$ , si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$ ). On prend par exemple les fonctions  $f_0, f_1, f_2, f_3 \dots$  définies par :

$$f_n(x) = (x - n)^2.$$

Il existe une infinité d'ensembles d'entiers deux à deux non comparables, il existe une infinité de fonctions deux à deux non comparables, mais il n'existe pas d'infinité de graphes deux à deux non comparables !

### Minoration et obstruction

Sous sa première forme, le théorème de Robertson et Seymour est un peu abstrait. La seconde forme du théorème – qui permettra de comprendre le lien avec le résultat de Kuratovski – est plus concrète et c'est elle qui a des conséquences dans le domaine de l'algorithmique des graphes.

Pour l'énoncer il faut comprendre les notions d'ensemble « stable par minoration » et d'« ensemble d'obstructions ».

Un ensemble  $E$  de graphes est dit *stable par minoration* (ou *clos par mineur*) si tout mineur d'un graphe de  $E$  est lui-même dans  $E$ .

L'ensemble des graphes planaires est stable par minoration. En effet, si on

prend un graphe dessinable sans croisement d'arêtes sur un plan et qu'on lui applique une des opérations (a), (b) ou (c), il est clair que le graphe obtenu est encore dessinable sur un plan sans croisement d'arêtes : ni la suppression d'arêtes ou de nœuds isolés, ni la contraction d'arêtes n'obligent des arêtes qui ne se croisaient pas à se croiser, et donc tout graphe obtenu à partir d'un graphe planaire en effectuant une ou plusieurs fois les opérations (a), (b) ou (c) est encore un graphe planaire.

De la même façon, si on considère l'ensemble des graphes dessinables sans croisement d'arêtes sur un tore (ou sur une bande de Moebius ou sur n'importe quelle surface aussi compliquée soit-elle), il est clair – par le même raisonnement – qu'il s'agit encore d'un ensemble de graphes stables par minoration.

Un ensemble de graphes  $E$  peut être défini par la donnée de graphes interdits : on ne veut pas que tel ou tel graphe soit un mineur des graphes de  $E$ . L'ensemble des graphes planaires, d'après le théorème de Kuratovski, est définissable de cette façon : les graphes planaires sont les graphes n'ayant aucun des graphes  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  comme mineurs. La seconde forme du théorème de Robertson et Seymour est justement l'affirmation que ce qui se produit pour les graphes planaires – stables par minoration et définissables par interdiction – est général.

### Voici donc le théorème de Robertson et Seymour (seconde forme)

*Tout ensemble  $E$  de graphes stable par minoration est définissable comme l'ensemble des graphes n'ayant pour mineur aucun des graphes d'une liste finie, caractéristique de  $E$ , et appelée « ensemble d'obstructions de  $E$  ».*



## De l'existence d'un algorithme au programme concret

M. Fellows, M. Langston, R. Downey et B. Courcelle ont démontré qu'on n'automatiserait jamais l'utilisation du théorème des mineurs. Précisément : il n'existe pas d'algorithme permettant de calculer l'ensemble des mineurs à partir de la définition d'une classe de graphes stable par minoration, cela, que la définition soit donnée par un programme de test, ou qu'elle soit donnée par une formule logique.

Cette situation étrange ne serait qu'une simple curiosité logique si, au moins pour les cas les plus simples, on réussissait à déterminer les ensembles d'obstructions. Ce n'est pas le cas. Considérons l'exemple en apparence parfaitement élémentaire du tore (la surface d'un pneu). On est aujourd'hui incapable de déterminer l'ensemble d'obstructions des graphes qu'on peut y dessiner sans croisement d'arêtes (ensemble de graphes qui est stable par minoration comme nous l'avons dit).

Des études menées sur ce problème par Wendy Myrvold et John Chambers et 2002 ont conduit à l'étonnant résultat que l'ensemble d'obstructions du tore contient au moins 16 629 graphes ! Pour le plan, l'ensemble d'obstructions possède deux éléments,  $K_5$  et  $K_{3,3}$ , pour le tore, il en faut des milliers !

Une thèse de Jenifer Woodcock de l'Université de Victoria consacrée au problème des algorithmes testant si un graphe peut être dessiné sur un tore ne propose finalement qu'un algorithme exponentiel en temps. Un algorithme linéaire a bien été proposé, mais il semble si difficile à programmer qu'il est inutilisable.

Nous sommes dans un domaine où finalement il faut distinguer trois types de résultats algorithmiques :

- ceux indiquant qu'un algorithme existe pour une tâche donnée ;
- ceux formulant précisément l'algorithme pour la tâche ;
- ceux conduisant à l'écriture d'un programme réalisant la tâche.

Pour le dire autrement *l'effectivité* peut être *existentielle*, *théorique* ou *réelle*, et seule bien sûr la troisième est susceptible d'utilisations concrètes !

La situation est assez désagréable et le contraste entre le plan (obstruction avec deux graphes seulement, algorithme linéaire utilisables en pratique) et le tore (ensemble d'obstructions inconnu aujourd'hui, et programmes exponentiels) est ahurissant. La surface d'un tore est l'une des plus simple qu'on puisse imaginer !

On a le sentiment que le monde mathématique nous fait des farces. Moyennant un long et difficile raisonnement, il accepte de nous dire que pour le tore comme pour le plan, il existe un algorithme en  $n^3$ , facile à programmer, indiquant quels sont les graphes qu'on peut y dessiner sans croisement d'arêtes, mais il ne nous le donne pas. De plus, tout porte à croire que le trouver est à nouveau un long travail. Parfois, on croit trouver un algorithme efficace, mais il se révèle impossible à mettre en œuvre du fait de sa complexité. L'existence d'algorithmes polynomiaux dont on pensait qu'elle déterminait la frontière entre le faisable et l'infaisable n'est finalement pas le critère ultime pour qu'un résultat mathématique soit pratiquement utilisable : à y regarder de près, cette frontière semble se diviser en une série de zones délicates à préciser.

***Nécessairement, dans tout ensemble infini de graphes, l'un au moins est contenu dans un autre.***

L'ensemble d'obstructions des graphes planaires est  $\{K_5, K_{3,3}\}$  et pour chaque ensemble  $E$  de graphes stable par minoration, il existe un ensemble d'obstructions fini analogue qui est caractéristique de  $E$ .

La famille des graphes appelés *forêts* (chaque graphe de cette famille est une juxtaposition d'arbres) est stable par minoration, elle est donc définissable par obstructions ; on montre que l'ensemble d'obstruction des forêts est constitué du seul graphe  $K_3$  (le graphe à trois nœuds  $a, b, c$  et trois arêtes  $ab, bc, ca$ ).

La démonstration que les deux formes du théorème de Robertson et Seymour sont équivalentes n'est pas évidente, mais elle tient en une page. La vraie difficulté, qui a nécessité 500 pages de raisonnements et de calcul, ne se trouve pas là et à vrai dire semble un peu mystérieuse. Précisons quand même que la démonstration donnée dans les 500 pages introduit des outils et concepts dont l'utilité va bien au-delà de la simple preuve du théorème des mineurs et que, comme on le souhaite toujours dans une démonstration, ce qu'on apprend sur le chemin est aussi important que le point d'arrivée.

### **Il existe un algorithme rapide...**

La force et l'intérêt de la seconde forme du théorème résultent en particulier qu'on en tire immédiatement des conséquences algorithmiques.

On sait en effet tester rapidement si un graphe contient un graphe fixé  $G$  comme mineur. On connaît des méthodes réalisant un tel test ne prenant qu'un temps  $t$  majoré par  $cn^3$ ,  $c$  étant une constante et  $n$  étant la taille du graphe sur lequel on fait le test. Il en va de même, bien sûr si, à la place d'un mineur, on doit tester un nombre fini et fixé de mineurs, car un nombre fini d'algorithmes fonctionnant en un temps majoré par une fonction de la forme  $cn^3$ , exécutés les uns derrière les autres, donne un algorithme fonctionnant lui aussi en un temps majoré par  $c'n^3$  (avec une autre constante).

Pour tester si un graphe appartient à un ensemble  $E$  stable par minoration, on sait donc grâce à la deuxième version du théorème de Robertson et Seymour qu'il existera toujours un algorithme efficace en  $n^3$ . On déterminera l'ensemble d'obstructions de  $E$ , et à partir de cet ensemble, on aura immédiatement un algorithme de test d'appartenance à  $E$  fonctionnant efficacement.

On peut ainsi savoir si un graphe est planaire en temps majoré par  $cn^3$ . Ce n'est



**Paul Seymour.**

pas une nouveauté et on sait même faire mieux puisqu'on connaît des algorithmes linéaires (fonctionnant en temps majoré par  $cn$ ) testant si un graphe est planaire. Comme bien des algorithmes de théorie des graphes, ils sont utiles pour la conception et le dessin des circuits VLSI (*Very large scale integration* :

## La conjecture de reconstruction et autres problèmes

L'un des grands problèmes ouverts en théorie des graphes est la *conjecture de reconstruction*. Alice considère un graphe (secret)  $G$  possédant au moins trois sommets et donne à Bob l'ensemble  $D(G)$  de tous les sous-graphes de  $G$  obtenus en supprimant un unique sommet de  $G$  (et les arêtes qui sont connectées à ce sommet). Il y a  $\deg(G)$  tels sous-graphes. Le problème consiste à reconstituer  $G$  à partir de la données de tous ces sous-graphes. En particulier, si deux graphes  $H_1$  et  $H_2$  sont tels que  $D(H_1) = D(H_2)$ , peut-on affirmer que  $H_1$  et  $H_2$  sont isomorphes ? Ces questions, difficiles, ont été proposées par Paul Kelly et Stanislas Ulam.

D'innombrables autres problèmes résistent encore, notamment concernant les graphes cubiques (un graphe est *cubique* si chaque sommet possède exactement trois voisins) : la conjecture des 5-flots de William Tutte, la conjecture de Delbert Ray Fulkerson, la conjecture de Genghua Fan et André Raspaud... La problématique générale envisagée dans cette famille de conjectures est la couverture minimale en couplages parfaits d'un graphe cubique sans isthme (un graphe cubique 3-coloriable est optimal en ce sens). Un *isthme* est une arête telle que son élimination induit un graphe avec strictement plus de composantes connexes que le graphe initial.

Mentionnons encore la conjecture de Hadwiger (proposée par Hugo Hadwiger : si le graphe complet  $K_n$  n'est pas un mineur de  $G$ , alors  $G$  est  $(n-1)$ -colorable), ouverte dès que  $n > 6$ . Les conjectures de Lou Caccetta et Roland Häggkvist (sur les cycles d'un digraphe), ou de Herbert Ryser sur les hypergraphes, attendent également leur heure.

É. T.

### Références

- *Graph Theory*. Reinhard Diestel, Springer (troisième édition), 2006.
- *Une propriété cachée des graphes*. Jean-Paul Delahaye, *Pour La Science* 366, avril 2008.
- *Logique, un aiguillon pour la pensée*. Jean-Paul Delahaye, Belin-Pour La Science, 2012.

J.-P. D.

circuits intégrés à très grande densité). Mais le théorème de Robertson et Seymour est intéressant car d'application très générale : pour toutes surfaces  $S$ , quelle qu'elle soit, il indique qu'on peut savoir en temps majoré par  $cn^3$ , si un graphe pourra être dessiné sur  $S$  sans croisement d'arêtes. Et ça c'est nouveau !

### ... Oui mais lequel ?

Cependant, l'enthousiasme suscité auprès des programmeurs à la recherche d'algorithmes efficaces pour les graphes doit être tempéré. Pour trouver un algorithme polynomial testant l'appartenance à une classe de graphes stable par minoration, il faut d'abord identifier l'ensemble d'obstructions caractéristique de la classe.

Or justement, ce n'est pas facile. La démonstration de Robertson et Seymour est une démonstration non constructive : elle conduit à l'affirmation qu'il existe toujours un ensemble d'obstructions, mais elle ne fournit pas de procédé pour le déterminer. Cela pourrait être secondaire et en pratique on espérerait se débrouiller pour chaque cas particulier, et finalement découvrir par des méthodes *ad hoc* les ensembles d'obstructions. Il se trouve que ce n'est pas si simple et que la difficulté est réelle pour trouver les ensembles d'obstructions. Nous sommes dans la situation de celui qui sait qu'il y a un trésor caché quelque part (c'est ce que dit le théorème de Robertson et Seymour pour chaque ensemble stable par minoration), mais qui ne sait pas où précisément se trouve le trésor, ni même comment s'en approcher.

# Des diagrammes pour la physique

Les physiciens ont souvent besoin d'une représentation graphique des phénomènes qu'ils essaient de décrire. Des circuits électroniques à l'infiniment petit, du système solaire au boson de Higgs, voici quelques exemples d'utilisation de graphes et diagrammes en physique.

Certains problèmes de physique sont plus simples à comprendre quand on peut les « visualiser ». Les physiciens ont donc l'habitude de faire des graphes qui les aident à voir ce qu'ils étudient. Prenons un exemple simple : l'objectif d'un appareil photo ou d'une

lunette astronomique. Cet accessoire est constitué de plusieurs lentilles qu'il faut positionner au bon endroit de manière à ce que la lumière arrive correctement sur la plaque photographique (ou sur l'œil de l'astronome). Pour calculer la position de chacune de ces lentilles, il est utile de faire un graphe où l'on indique la position et la forme de chaque lentille afin de s'assurer que les rayons lumineux vont au bon endroit.

Les diagrammes sont aussi beaucoup utilisés en électronique, à la fois pour représenter de manière simple le circuit réel, mais également pour représenter certaines de ces propriétés. Par exemple, dans le cas d'un amplificateur de chaîne hi-fi, il est nécessaire de savoir quelles seront les fréquences qui seront amplifiées et de combien (pour éviter qu'une partie de la musique ne soit déformée par des fréquences manquantes). Cela se fait grâce à un *diagramme de Bode* (voir en encadré). Un tel diagramme fournit de manière schématisée la réponse en fréquence du circuit. Pour un amplificateur unique, un tel diagramme permet simplement de vérifier les calculs faits pour choisir les

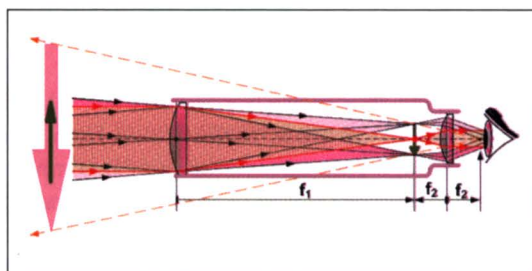
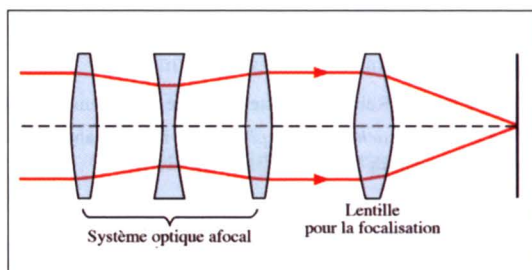


Diagramme montrant comment positionner les lentilles dans une lunette astronomique.

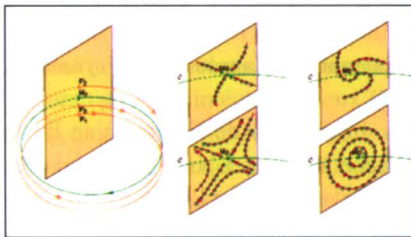


Un diagramme représentant les lentilles dans un zoom.

composants du circuit. Par contre, les concepteurs de systèmes sophistiqués sont amenés à combiner plusieurs circuits qui ont chacun leur propre réponse en fréquence. Pour calculer la réponse totale, plutôt que d'analyser le circuit dans son ensemble, il est possible de combiner les diagrammes de Bode les uns avec les autres pour obtenir le diagramme du système complet.

**Représenter ce qu'on ne voit pas**

Récemment les systèmes dynamiques ont été mis à l'honneur par une médaille Fields. Dans ce domaine à l'intersection entre la physique et les mathématiques, un graphe peut parfois aider à visualiser un phénomène. Les sections de Poincaré, par exemple, permettent d'étudier la périodicité d'orbites cycliques. Ces sections représentent le point de passage de l'orbite dans un plan donné à chaque tour.



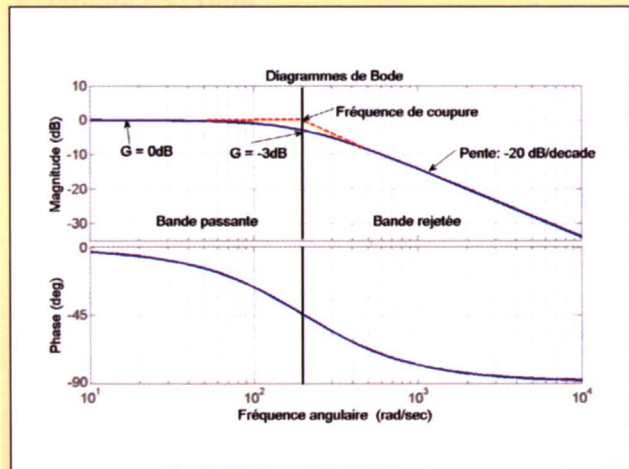
Sections de Poincaré.



**Le diagramme de Bode**

Un diagramme de Bode comporte deux parties : la première donne le gain du circuit en fréquence (c'est-à-dire de combien sera amplifiée ou atténuée une fréquence donnée). Cette partie est tracée avec le gain en décibels (le décibel est une unité particulière, qui correspond au logarithme de l'atténuation du signal, voir l'encadré page suivante).

La seconde partie est plus complexe : elle indique le changement d'une autre propriété des signaux qui se propage dans le circuit : leur phase. Les ondes se propageant dans le circuit peuvent être représentées sous la forme d'une sinusoïde, c'est-à-dire par une expression du type  $\cos(at + b)$ . Le terme  $a$  correspond à la fréquence et le terme  $b$  à la phase. Si deux circuits sont combinés et que les phases ne sont pas adaptées, alors les ondes peuvent interférer de manière destructive et annuler le signal dans le circuit ! Ce terme de phase est donc très important. Il est représenté en degrés en fonction de la fréquence. Un diagramme de Bode peut soit être déterminé à partir des équations décrivant le circuit, soit être mesuré en injectant des signaux à une fréquence connue dans le circuit et en mesurant leur amplitude et leur phase en sortie.



Un exemple de diagramme de Bode.

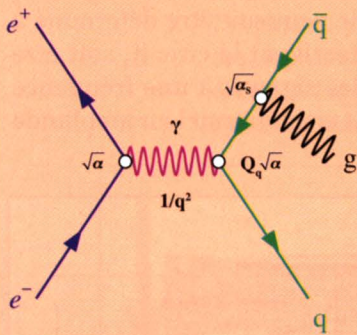
Exemple de ce qui est observé après une collision entre particules (ci-contre, à gauche).

## Les décibels

Le décibel permet d'exprimer l'intensité d'un signal par rapport à un signal de référence. Si l'on considère deux signaux (acoustiques, électroniques ou autre) de puissance respective  $P_1$  et  $P_2$ , on obtient un volume sonore  $V$  égal à  $10 \log_{10}(P_2/P_1)$ .

Le décibel est par exemple utilisé en acoustique. Une pression de référence ( $20 \mu\text{Pa}$ ) donne le niveau 0 dB à partir duquel sont définis les décibels acoustiques (l'unité correcte est  $\text{odB SPL}$ , pour *sound pressure level*) et ensuite on calcule le rapport des pressions pour obtenir le bruit en décibels. On comprend donc qu'entre un son de 60 dB SPL et un son de 70 dB SPL, il existe un facteur 10 en intensité du son !

## Mettre un diagramme de Feynman en équation



L'image ci-contre montre un exemple de diagramme de Feynman avec les termes à prendre en compte pour « calculer » (mettre en équation) ce diagramme.

Le terme  $\sqrt{\alpha}$  fournit la probabilité que, lors-

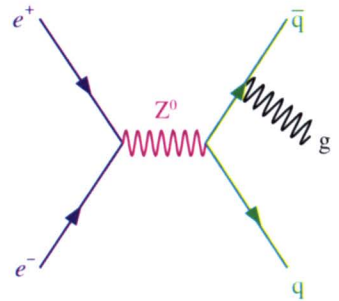
qu'un électron et un positron se rencontrent, ils donnent naissance à un photon (noté  $\gamma$ ).

Le terme  $1/q^2$  est appelé *propagateur*. Il correspond à la propagation du photon : des particules différentes vont se propager de manière différente et affecter la probabilité du processus total.

Les termes  $Q_q \sqrt{\alpha}$  et  $\sqrt{\alpha_s}$  donnent les probabilités de production des particules correspondantes.

Tous ces termes regroupés permettent de calculer la probabilité que deux électrons produisent deux quarks et un gluon dans l'état final (les physiciens appellent cela la *section efficace* de ce processus). Cet état final étant identique à celui décrit dans le texte, où c'est un  $Z^0$  qui se propageait au lieu d'un photon, il faut ajouter ces sections efficaces pour trouver la probabilité totale.

Dans le domaine de l'infiniment petit aussi les graphes sont très utilisés. Il n'est en effet pas possible de visualiser directement ce qui se passe lors d'une collision entre deux particules ! Tout ce que les physiciens observent, c'est l'état dans lequel les particules se trouvent après la collision. L'interprétation de cet état final requiert parfois une analyse sophistiquée. Le prix Nobel de physique Richard Feynman a proposé de représenter les interactions entre particules par des diagrammes, appelés aujourd'hui *diagrammes de Feynman*. Un exemple de diagramme de Feynman est présenté ci-après.



Exemple de diagramme de Feynman.

Un diagramme de Feynman se lit de gauche à droite. L'axe horizontal correspond au temps et l'axe vertical à l'espace. Tout à gauche, c'est-à-dire au début, avant la collision, on observe deux particules, un électron ( $e^-$ ) et un anti-électron ( $e^+$ ). Lorsque l'on se déplace vers la droite, on voit que ces deux particules se rapprochent, jusqu'au point où elles entrent en collision. À cet endroit, elles disparaissent en donnant naissance à une nouvelle particule, appelée  $Z^0$ . Cette particule possède des propriétés particulières, et par convention sa trajectoire est représentée par une sinusoïdale. Le  $Z^0$  se propage pendant quelques instants (en fait moins d'un milliardième de seconde !) avant de se désintégrer en deux nouvelles particules. Ces deux par-

ticules, appelées *quarks* ( $q$  et  $\bar{q}$ ), possèdent certaines propriétés assez proches de celles des électrons ; ainsi, par convention, elles sont également représentées par des lignes droites. Peu après la désintégration, l'un des deux quarks émet une autre particule, appelée *gluon* ( $g$ ), représentée par une ligne sinusoïdale (différente de la première). On trouve donc, dans l'état final, tout à droite de la figure, trois particules, ce qui correspond aux trois ensembles de traits verts et de barres noires sur l'image de l'état final (voir illustration précédente).

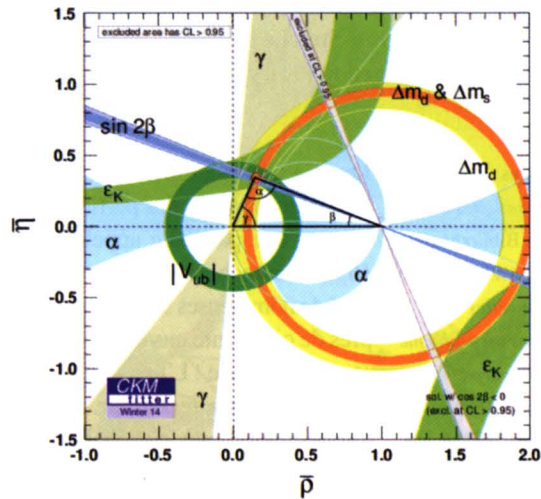
Les diagrammes de Feynman sont très utilisés car ils permettent de représenter de façon simple des phénomènes physiques. Ils permettent aussi de se demander s'il n'y a qu'une seule combinaison qui mène à un état final donné. Sur le schéma, par exemple, le gluon aurait très bien pu être émis par l'autre quark sans que cela change l'état final. Cela double donc la probabilité d'observer cet état final ! D'autres combinaisons sont possibles. Par exemple, le  $Z^0$  aurait pu se désintégrer en deux électrons, qui se seraient à nouveau combinés en un autre  $Z^0$ , qui aurait, lui, donné naissance aux deux quarks. En réalité, comprendre ce qui est vraiment possible requiert des connaissances avancées en physique des particules...

Les diagrammes de Feynman possèdent une propriété supplémentaire qui a grandement contribué à leur succès : ils peuvent facilement être mis en équation ! Chaque élément graphique du diagramme correspond à un terme d'une équation, et en combinant tous ces termes on obtient la probabilité que, en partant de l'état initial donné, on obtienne l'état final prédit par le diagramme. De nombreux chercheurs dans le monde sont occupés à écrire l'ensemble des diagrammes de Feynman de processus com-

plexes (en essayant de ne pas en oublier, ce qui est parfois difficile) puis à les mettre en équation pour prédire la répartition des états finaux de certaines collisions et comparer cela avec les mesures expérimentales.

### La quête du boson de Higgs

L'un des sujets d'actualité en physique des particules est la compréhension de l'asymétrie matière-antimatière. Dans les collisions se produisant sur les accélérateurs de particules, on voit parfois une particule d'antimatière se transformer spontanément en particule de matière, et réciproquement. Les physiciens appellent cela la *violation de charge-parité*. La probabilité qu'une particule de matière se transforme en particule d'antimatière est légèrement plus grande que l'inverse, mais ce point fait encore l'objet d'études très poussées.



Chaque bande colorée de ce graphe correspond à une mesure expérimentale de désintégration de quarks. Ces bandes permettent de contraindre un triangle dont les angles donnent les paramètres clés du modèle décrivant actuellement les transitions entre quarks. Chaque mesure qui permet de réduire les incertitudes sur la valeur de ces angles permet de faire progresser notre compréhension de la violation de charge-parité.

## Richard Feynman

Après de brillantes études de physique, Richard Phillips Feynman (1918–1988) rejoint le projet Manhattan (mise au point de la première bombe atomique) pendant la Seconde Guerre mondiale. Cela lui donne l'occasion de rencontrer les plus grands physiciens occidentaux de l'époque et de travailler avec eux sur des problèmes pointus de physique nucléaire. Après la guerre il obtient un poste à l'université de Cornell, qu'il quittera très vite pour aller à l'Institut californien de technologie (CalTech). Là, il développe la théorie de l'électrodynamique quantique, qui met en équation la propagation des particules fondamentales à haute énergie. Cette théorie lui vaudra le prix Nobel en 1965, conjointement avec Julian Seymour Schwinger et Sin-Itiro Tomonaga. Dans cette théorie, il décrit la propagation des particules grâce à une équation appelée *lagrangien*. Afin d'établir ce lagrangien, il met au point la méthode graphique décrite dans l'encadré de la page précédente.

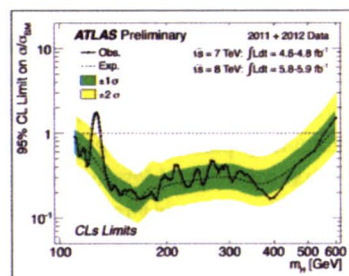
De ses années à CalTech, il reste également un ensemble d'ouvrages destinés aux étudiants de premier cycle et appelés *Cours de physique de Feynman*. Ces cours de physique sont très appréciés pour la clarté des explications données par Feynman. Sur la fin de sa vie, il fait partie de la commission d'enquête qui cherche les causes de l'explosion de la navette Challenger en 1986 ; il y jouera un rôle déterminant.

### Références

- *Mathématiques et chimie*. Bibliothèque Tangente 43, 2012.
- *Des nouvelles solutions au problème des trois corps*. Nicolas Delerue, Tangente SUP 69, 2013.
- *Feynman*. Jim Ottaviani et Leland Myrick, Vuibert, 2012.
- *Le lagrangien pour décrire la dynamique des systèmes*. Tangente 151, 2013.

Jusqu'à très récemment, l'un des objectifs de la physique des particules était de trouver une particule appelée *boson de Higgs*. La recherche de cette particule a duré de nombreuses années : il s'est écoulé près de cinquante ans entre sa prédiction et sa découverte ! L'une des raisons pour lesquelles cette recherche a duré aussi longtemps est que la probabilité de produire un boson de Higgs, même sur les accélérateurs les plus énergétiques au monde, était très faible. Cette probabilité elle-même n'était pas connue avec certitude tant que l'on ne connaissait pas les propriétés détaillées du boson de Higgs. Au fur et à mesure de leur quête, les physiciens ont été capables de dire que si le boson de Higgs existait alors la probabilité de le produire était de plus en plus petite.

Ces contraintes sur la probabilité de produire une particule se traduisent par des graphes comme le suivant. Cette quête s'est achevée quand le boson de Higgs a effectivement été trouvé, dans la seule zone qui n'était pas exclue par les limites.



Sur l'axe vertical, on visualise la limite sur la probabilité de produire un boson de Higgs par rapport à la prédiction théorique dans le cas standard. Sur l'axe horizontal est repérée la masse dudit boson de Higgs. La courbe noire donne la limite obtenue par les mesures expérimentales et les bandes jaunes et vertes les incertitudes liées à la mesure. Il y a quelques années encore, la courbe noire était nettement au dessus de 1 sur une grande partie du graphe. Elle est progressivement descendue en dessous de 1, partout sauf dans une petite bande qui correspond à l'énergie à laquelle le boson de Higgs a été effectivement découvert.

Ces quelques exemples ne sont pas limitatifs. Les graphes sont utilisés dans de nombreux domaines de la physique, parfois simplement pour schématiser ce que le physicien observe. D'autres fois, comme dans le cas des diagrammes de Feynman, ils apportent une aide réelle à la mise en équation des observations. L'importance des graphes et diagrammes est telle que l'on trouve très peu de publications en physique qui ne comportent pas au moins un graphe ou un diagramme.

N. D.



## La matrice laplacienne d'un graphe

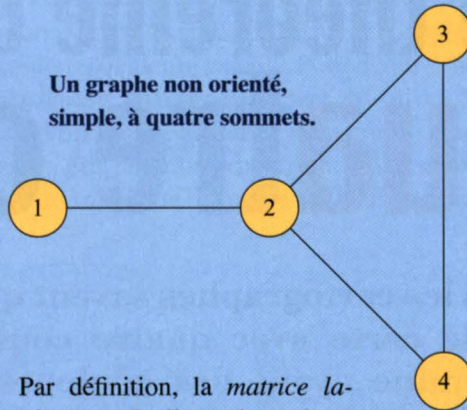
À tout graphe on peut associer une première matrice (la matrice d'adjacence, voir un précédent article dans ce dossier), mais également une matrice laplacienne, très utilisée dans différentes applications des mathématiques discrètes. Donnons-nous un graphe :

La matrice d'adjacence de ce graphe est la matrice  $A$  dont les coefficients  $a_{ij}$  sont égaux à 1 si  $(i, j)$  est une arête du graphe, à 0 sinon. Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice  $A$  est toujours symétrique. S'il est simple, les éléments de la diagonale sont tous nuls. Ici,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, chaque sommet a un degré égal au nombre de sommets auxquels il est relié. Cela permet de définir une matrice (diagonale) des degrés. Ici :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



Un graphe non orienté, simple, à quatre sommets.

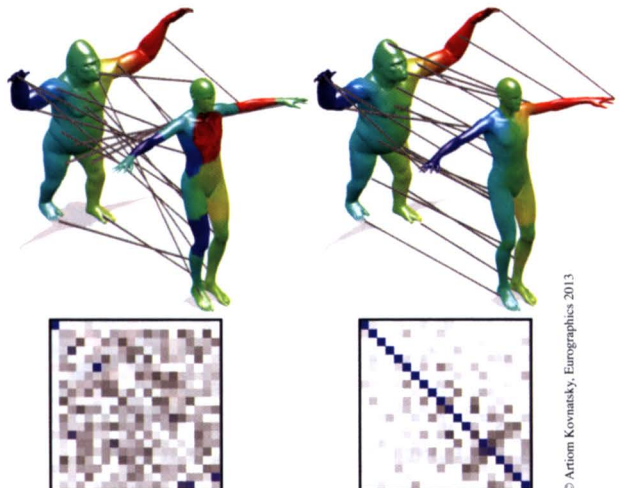
Par définition, la matrice laplacienne  $L$  d'un tel graphe est  $L = D - A$ . Dans notre exemple,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice  $L$  est diagonalisable (car symétrique réelle) et 0 est l'une de ses valeurs propres (puisque la somme des éléments de ses lignes est nulle). Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est le vecteur composé uniquement de 1.

## Le spectre d'un graphe

Le spectre de la matrice laplacienne d'un graphe, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres, ne dépend pas de la numérotation des sommets. C'est un ensemble qui ne dépend que du graphe lui-même. Même si les résultats concernant la matrice laplacienne et son spectre sont encore largement empiriques, ces notions semblent prometteuses pour la reconnaissance de formes ou pour partitionner les graphes, ce qui est utile en particulier dans la répartition des tâches en calcul parallèle.



© Artiom Kovnatsky, Eurographics 2013

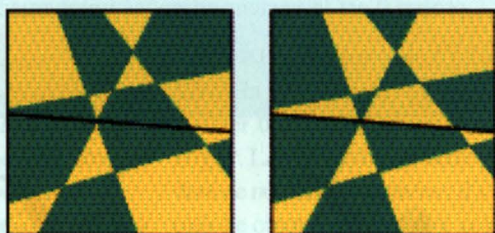
# Le théorème des quatre couleurs

Tous les cartographes savent que l'on peut colorier n'importe quelle carte avec quatre couleurs, deux pays de frontière commune ayant des couleurs différentes. Mais peut-on le prouver ?

## Le théorème des deux couleurs

Considérons les cartes planes construites seulement avec des droites : il est possible de les colorier uniquement avec deux couleurs !

Le résultat est évident pour les cartes ayant une seule droite. Supposons donc le résultat établi pour toutes les cartes tracées avec  $n$  droites. Prenons une de ces cartes et ajoutons une droite.



La nouvelle carte est mal coloriée. Pour rectifier le coloriage, il suffit d'inverser les couleurs dans un des demi-plans définis par la nouvelle droite : le théorème des deux couleurs est donc démontré par récurrence.

Le théorème se généralise au cas où le nombre de lignes (droites ou courbes) passant par chaque sommet est pair.



Le problème des quatre couleurs a connu et connaît encore une grande popularité. Cette fascination est due à l'extrême simplicité de son énoncé. En voici la formulation complète : il est possible de colorier à l'aide de quatre couleurs différentes n'importe quelle carte plane de sorte à ce que deux pays voisins soient toujours de couleurs différentes.

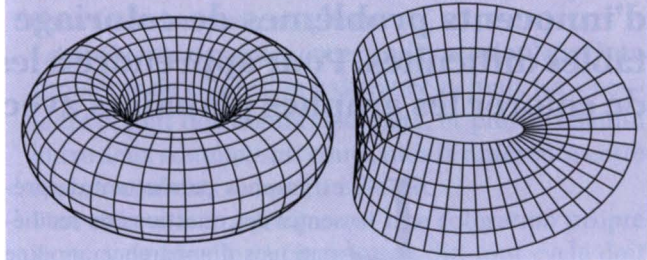
Par « voisins », on entend ici des pays ayant une ligne frontière commune (et pas seulement un point). L'énoncé de ce problème a été formulé pour la première fois par l'Écossais Francis Guthrie, en 1852. Les mathématiciens Auguste de Morgan et Arthur Cayley travaillèrent sur la question, mais c'est l'avocat Alfred Kempe qui annonça, en 1879, disposer d'une preuve. Dix ans passèrent avant que Percy John Headwood trouve dans la démonstration de Kempe une erreur subtile mais rédhibitoire.

### Erreur subtile

À partir de cette date, les plus grands mathématiciens s'attaquèrent à nouveau à cette question, qui se révéla

## Et pour une carte sphérique ?

Si les pays à colorier ne sont pas situés dans un plan mais sur une sphère (comme la Terre), le théorème des quatre couleurs demeure valable. Pour d'autres formes plus sophistiquées, en revanche, il peut être mis en défaut, même s'il l'on peut estimer le nombre de couleurs nécessaires. Sur un ruban de Möbius, il faut six couleurs. Sur un tore (une chambre à air), il en faut sept.



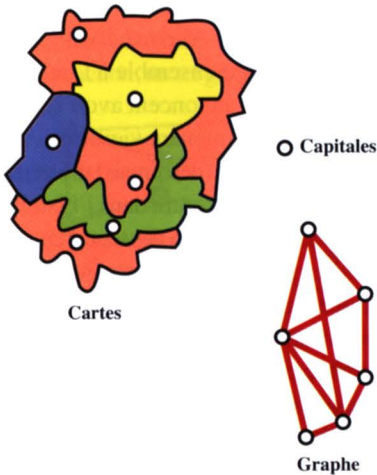
la formule d'Euler et le principe de récurrence. Cette version affaiblie indique que le nombre chromatique d'un graphe planaire sans boucle est d'au plus 5 : c'est le *théorème des cinq couleurs*. Pour pouvoir descendre à 4, d'énormes difficultés surviennent : il faut se ramener à certains types de configurations, dites *réductibles*, à partir duquel le problème peut se résoudre.

La technique d'Appel et Haken leur a permis de contourner la difficulté en ramenant le problème à l'étude de mille quatre cent cinquante configurations. Le théorème des quatre couleurs est le premier de l'histoire qui a nécessité l'usage systématique de l'ordinateur. À l'annonce de cette nouvelle, la communauté mathématique se divisa en deux clans : ceux pour qui le problème des quatre couleurs était résolu, et ceux pour qui tout restait à faire. Depuis, une preuve formelle a été obtenue (par Georges Gonthier et Benjamin Werner en 2004), mais une preuve conceptuelle reste encore à obtenir...

F. C., G. C. & B. R.

incroyablement difficile. Les progrès furent lents : on démontra le théorème pour des cartes à cinq, six régions, puis jusqu'à trente-huit régions. Des résultats généraux furent donnés pour des configurations simplifiées (voir en encadré), mais le problème complet résistait toujours. En 1976, enfin, Kenneth Appel et Wolfgang Haken ont donné une preuve, même si le nécessaire emploi de l'ordinateur pour étudier tous les cas de la démonstration a posé de nouvelles questions sur le statut de celle-ci.

La théorie des graphes est l'outil le plus naturel pour étudier le problème des quatre couleurs. Imaginons en effet que la capitale de chaque pays soit symbolisée par un point de la même couleur que celle du pays et que deux capitales de pays ayant une frontière commune soient reliés par une arête. On obtient alors le graphe associé à la carte. Ce graphe possède deux propriétés caractéristiques : il est sans boucle (aucune arête ne mène d'un sommet à lui-même), et il est planaire (les arêtes ne se croisent pas).



Avec ce changement de point de vue, le théorème des quatre couleurs prend alors la forme suivante : le nombre chromatique d'un graphe planaire est d'au plus 4. Il est relativement aisé de montrer une version affaiblie du théorème, qui utilise



Coloriage de la carte des régions.

# Colorier

## Un défi innocent et redoutable

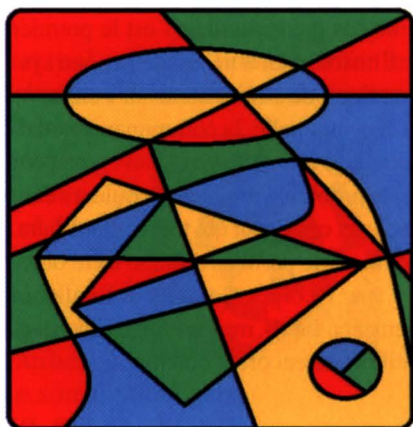
Comme l'illustre l'histoire du théorème des quatre couleurs, d'innocents problèmes de coloriage peuvent cacher de redoutables difficultés. Pour apprendre à les résoudre, on peut essayer de colorer les graphes planaires avec six couleurs.

**L**es graphes permettent de présenter des questions de mathématiques d'apparence anodine qui résistent aux meilleurs spécialistes et défient les plus puissants ordinateurs. Les questions de coloriage de cartes en sont un excellent exemple. Ainsi, une *carte plane* est le découpage d'un espace plan en plusieurs *zones*. Deux zones sont voisines si elles partagent une frontière (un simple point n'est pas une frontière). Une carte plane est *proprement coloriée* si chaque zone est coloriée et que deux zones voisines sont toujours de différentes couleurs.

En 1852, le jeune Francis Guthrie, ancien étudiant à l'University College London, propose à son ancien professeur Augus-

tus De Morgan la conjecture des quatre couleurs : il semble toujours possible de colorier proprement toutes les cartes planes avec seulement quatre couleurs (voir le précédent article). Bien que l'énoncé de la question soit aisé à formuler, y répondre se révèle bien plus difficile : deux démonstrations erronées seront publiées dans les années 1880, suffisamment techniques et convaincantes pour être tenues pour justes pendant plus de dix ans.

En 1976, le mathématicien américain Kenneth Appel et l'Allemand Wolfgang Haken, travaillant ensemble à l'université de l'Illinois, annoncent avoir résolu la conjecture, maintenant vieille de cent vingt-quatre ans. Le (désormais) théorème des quatre couleurs entre dans l'histoire des sciences comme l'un des tout premiers théorèmes mathématiques ayant nécessité l'intervention de l'ordinateur dans sa démonstration. Cette preuve est aussi considérée comme l'une des plus controversées des mathématiques modernes : les nombreux précédents de preuves erronées, le recours à un calcul informatique



**Une carte proprement coloriée.** Cette carte ne peut pas être coloriée avec seulement trois couleurs. En effet, les quatre zones en bas à droite sont toutes deux à deux voisines.

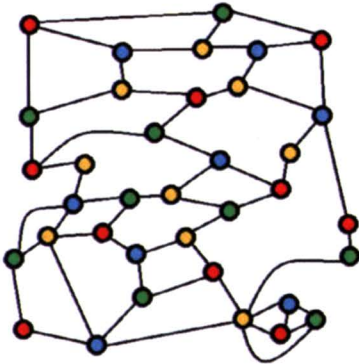
## Des colorations propres... et plus que propres

de plusieurs milliers d'heures et la difficulté technique de la partie vérifiable par l'homme (plus de cent cinquante pages de raisonnement mathématique) ont éveillé bien des suspensions.

Aujourd'hui, la validité du résultat (dont la preuve a été simplifiée plusieurs fois depuis) ne fait plus doute pour grand-monde, mais une preuve plus simple, peut-être faisant appel à une compréhension plus profonde des propriétés des cartes planes, serait souhaitable. Car si la preuve de Appel et Haken demande des efforts titanesques pour être vérifiée intégralement, elle repose sur des principes bien courants de la théorie des graphes, qui ne demandent que très peu de prérequis pour être abordés.

### De toutes les couleurs

Il est toujours possible de représenter une carte plane par un graphe : si l'on associe un sommet à chaque zone de la carte, puis que l'on relie chaque paire de sommets correspondant à des zones voisines, on obtient un graphe que l'on peut dessiner sans croisement d'arêtes. Par construction, un tel graphe est un planaire.



La carte précédente mise sous forme de graphe.

Colorier la carte revient à associer une couleur à chaque sommet du graphe, de manière à ce que deux sommets reliés

La coloration propre n'est pas la seule qui intéresse les chercheurs. On peut obtenir de nombreuses variantes si l'on rajoute des contraintes sur ce que l'on accepte comme une coloration valide. En voici quelques-unes. La *coloration à distance  $n$*  : deux sommets doivent avoir des couleurs différentes s'ils sont reliés par un chemin de longueur au plus  $n$ .

Le *problème des fréquences radio* est similaire à un problème de coloration à distance  $n$ , mais les « couleurs » sont des nombres entiers, et plus le chemin entre deux sommets est court, plus la différence entre leurs « couleurs » doit être élevée.

Une *coloration acyclique* est une coloration propre sans cycle bi-colorié (autrement dit, tout cycle doit comporter au moins trois couleurs).

Une *coloration équitable* est une coloration propre où aucune couleur n'est présente plus souvent qu'une autre (à plus ou moins un unité si le nombre de zones ne tombe pas juste).

Dans un problème de *coloration des arêtes*, on attribue des couleurs aux arêtes au lieu de colorier les sommets, deux arêtes ayant un sommet en commun devant recevoir des couleurs différentes.

Une *coloration ludique* est une coloration effectuée avec un partenaire (qui colorie un sommet sur deux) non coopératif (il tente de faire augmenter le nombre de couleurs en empêchant d'optimiser leur répartition).

Ces variantes peuvent se combiner : on rencontre des problèmes de coloration d'arêtes équitables, de coloration ludique des arêtes... On retrouve souvent dans ces variantes les mêmes méthodes de preuve que celles exposées dans le texte.

par une arête aient des couleurs différentes. On parle alors de *colorer proprement* le graphe. Le théorème des quatre couleurs se reformule ainsi : tout graphe planaire est proprement coloriable avec quatre couleurs.

Formulés ainsi, les problèmes de *coloration de graphe* dépassent le simple

## La présence d'un sommet réductible

Un *graphe connexe* est un graphe dans lequel, pour chaque paire de sommets, il existe un chemin les reliant. Montrons que chaque graphe planaire connexe possède un sommet de degré 5 (*a fortiori*, ce sera également le cas pour les graphes non connexes).

On commence par établir la Formule d'Euler, selon laquelle pour tout graphe planaire connexe avec  $n$  sommets,  $m$  arêtes et  $f$  faces, on a la relation  $n - m + f = 2$ . Cette formule se démontre facilement par récurrence sur le nombre d'arêtes : elle est vraie pour un graphe sans arêtes ( $m = 0$ ), et augmenter  $m$  de 1, c'est ajouter une arête. Pour ajouter une arête, il faut soit ajouter un nouveau sommet, soit relier deux sommets déjà existants (ce qui coupe une face en deux).

Ensuite, on observe que le nombre d'arêtes  $m$  est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets du graphe ; dans un graphe où chaque sommet est de degré 6 ou plus, on a  $m \geq 3n$ .

Le nombre d'arêtes  $m$  est aussi égal à la moitié de la somme des tailles des faces du graphe (la *taille* d'une face est son nombre d'arêtes). Comme chaque face est de taille au plus 3, tout graphe planaire vérifie donc  $m \geq 3f/2$ .

S'il existait un graphe planaire où chaque sommet serait de degré 6 ou plus, on aurait donc  $m = 1/2 m + 1/2 m \geq 6n/4 + 3f/4$ .

En remettant ces valeurs dans la formule d'Euler, et en se souvenant que  $n \geq f$ , on aboutit à une contradiction.

champ de la coloration de cartes géographiques. On peut se demander quelles sont les meilleures méthodes pour colorier proprement d'autres classes de graphes que les graphes planaires, avec de nombreuses applications, puisqu'il s'agit, en réalité, d'une question de répartition de ressources avec contraintes. Par exemple, dans les télécommunications, les problèmes de coloration de graphes sont utilisés pour modéliser les problèmes d'attribution de fréquences radio (voir en encadré) dans un système d'émetteurs-récepteurs : chaque sommet du

graphe représente un émetteur-récepteur, chaque couleur une fréquence, et les sommets sont reliés par une arête si les émetteurs qu'ils représentent sont suffisamment « proches » pour que leurs fréquences respectives se doivent d'être éloignées afin d'éviter les interférences.

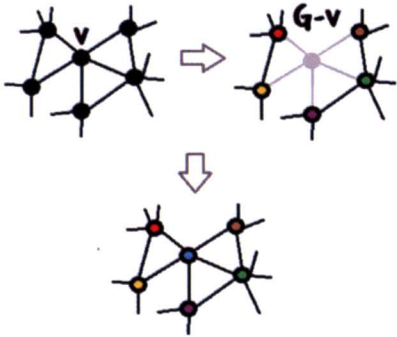
Le problème de gestion d'emploi du temps, que les institutions scolaires et universitaires connaissent bien, peut être vu comme un problème de coloration de graphe : générer un emploi du temps pour les cours d'un collège revient ainsi à représenter chaque cours de chaque classe à l'aide d'un sommet, de les relier s'ils ne peuvent être effectués en même temps (parce qu'assurés par le même enseignant ou destinés à la même classe), et à attribuer proprement des horaires (c'est-à-dire des couleurs) à chaque sommet.

On le comprend, la conjecture des quatre couleurs n'a pas été seulement un défi tenace pour la communauté scientifique, elle fut également le précurseur d'un domaine de la théorie des graphes largement étudié de nos jours.

S'il semble difficile de colorer proprement un graphe planaire donné avec quatre couleurs, sans doute est-il plus simple de le faire avec six. On va démontrer que tout graphe planaire est proprement colorable avec six couleurs. La preuve, structurée similairement à celle du théorème des quatre couleurs, utilisera une version embryonnaire des outils de la preuve de 1976. Il suffit de disposer d'un résultat classique de la théorie des graphes, selon lequel dans tout graphe planaire on peut trouver au moins un sommet dont le degré (le nombre de voisins) est de cinq ou moins. On va appeler un tel sommet un *sommet réductible*. La démonstration de ce résultat est elle-même tout à fait accessible (voir l'encadré ci-contre).

Considérons donc un graphe  $G$ , planaire, que l'on souhaite colorer proprement

avec six couleurs. Soit  $v$  un sommet réductible de  $G$  : s'il est possible de colorer proprement  $G - v$  (le graphe obtenu en supprimant  $v$  et toutes ses arêtes), alors il sera possible de colorer  $G$ . En effet, il ne restera plus qu'à colorer  $v$ , et comme c'est un sommet qui possède au plus cinq voisins, avec nos six couleurs, il y aura toujours au moins une couleur disponible pour le colorer !



Comment colorer  $G$  si  $v$  est réductible.

Comme  $G - v$  est planaire lui aussi, il a bien un sommet réductible lui aussi, disons  $v'$ . De la même manière que précédemment, s'il est possible de colorer  $(G - v) - v'$ , alors il est possible de colorer  $G - v$ , et donc de colorer  $G$ . Par récurrence, on obtient non seulement la preuve que  $G$  est colorable à l'aide de six couleurs, mais également une procédure pour réaliser une telle coloration.

De très nombreuses preuves en coloration de graphes, et notamment celle du théorème des quatre couleurs, utilisent la même structure de démonstration en deux temps : tout d'abord, l'identification d'une ou plusieurs « configurations réductibles » ensemble de sommets (dans notre exemple, un sommet de degré au plus 5), qui sont des sommets ou ensemble de sommets auxquels on pourra étendre la coloration lorsque tout le graphe sauf ceux-là seront colorés. Ensuite, on démontre que le graphe considéré et tous ses sous-graphes possèdent bien

l'une de ces configurations réductibles, en utilisant les propriétés de la classe considérée (ici, la formule d'Euler).

La complexité de ce type de preuves dépend du nombre et de la taille des configurations réductibles (il faut démontrer que chacune d'entre elles est bien réductible, et surtout montrer la présence obligatoire d'au moins l'une d'entre elles, ce qui demande des calculs de plus en plus méticuleux). On peut raisonnablement considérer qu'une telle démonstration devient ardue aux alentours d'une dizaine de configurations différentes. La première version de la preuve du théorème des quatre couleurs, celle de l'article originel de 1976, en contenait mille neuf cent trente-six...

C. C.

## Des problèmes hauts en couleur

On ne parle pas traditionnellement de « coloriage » de cartes, mais de « coloration » de graphes. Les cartes sont donc *coloriées* et les graphes *colorés* ; elles sont *coloriables* quand les graphes sont *colorables*. Tout n'est pas encore terminé pour le coloriage de cartes, et de nombreux problèmes défient encore la communauté des chercheurs (notamment l'étude des cartes coloriables en trois couleurs).

L'année 1976 fut exaltante pour les coloristes, puisqu'elle vit également publier la preuve, par Michael Garey, David Johnson et Larry Stockmayer, qu'il n'existe aucun moyen de déterminer « en un temps raisonnable » si un graphe planaire peut être coloré ou non en trois couleurs. Cela n'empêche pas, bien sûr, de chercher un critère « simple » permettant d'être certain qu'un graphe planaire est colorable en trois couleurs : on sait déjà, grâce à l'Allemand Herbert Grötzsch qui le démontra en 1959, que sont 3-colorables tous les graphes planaires *sans triangles*, c'est-à-dire sans cycles de longueur 3.

Toujours en 1976 (décidément), Richard Steinberg propose la conjecture suivante : tous les graphes planaires n'ayant ni cycle de longueur 4, ni cycle de longueur 5 (mais pouvant avoir des triangles) sont colorables en trois couleurs. Cette question reste toujours irrésolue !

# Le théorème des graphes parfaits

L'un des plus spectaculaires résultats mathématiques de ces dernières années est un théorème permettant de caractériser de manière « simple » la structure de toute une classe de graphes. Les grandes lignes de la démonstration permettent d'introduire de nombreuses familles de graphes.

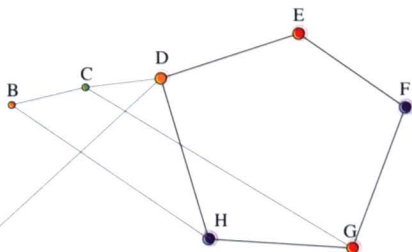
**L**e *théorème des graphes parfaits* est un important résultat qui relie les graphes parfaits (une classe de graphes définie à partir de propriétés de coloriage) à des propriétés simples de structure. Il énonce qu'un graphe est parfait si, et seulement si, il ne possède ni « trou » ni « antitrou ». Conjecturé par Claude Berge en 1961, il faudra attendre plus de quarante ans pour que Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas annon-

cent une preuve, qu'ils publieront en 2006. Leur démonstration apporte aussi des nouveaux outils algorithmiques permettant de reconnaître ces graphes rapidement en pratique. Ce résultat fait suite au théorème *faible* des graphes parfaits, lui aussi conjecturé par Claude Berge. Il sera prouvé par László Lovász en 1972 et conduira à la première caractérisation de ces graphes :

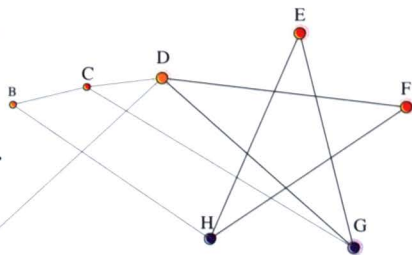
**Tout graphe est parfait si, et seulement si, son complémentaire est parfait.**

La courte preuve consiste à remplacer certains sommets par des cliques (une *clique* est un graphe dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête), ce qui ne change pas le caractère parfait du graphe. La taille des cliques est choisie en fonction des ensembles indépendants maximums pour construire un deuxième graphe dont il est facile de démontrer que le complémentaire est parfait, et que la réduction au complémentaire du graphe original ne change pas cette perfection. On le voit, des notions assez techniques interviennent dans la démonstration ! Passons-les en revue.

Les sommets DEFGH forment un cycle induit de longueur 5, donc un trou, et le graphe n'est pas parfait.



Les sommets DEFGH forment un antitrou, soit le complémentaire d'un trou (c'est-à-dire qu'il suffit de rajouter le cycle DEFGH pour obtenir une clique). Le graphe n'est donc pas parfait.

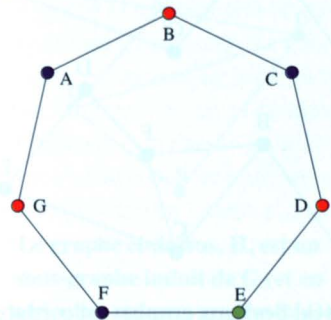




# Le nombre chromatique

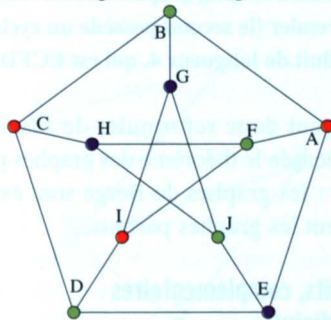
L'un des domaines les plus anciens et les plus étudiés de la théorie des graphes concerne la coloration. Le théorème des quatre couleurs, par exemple, énonce que l'on peut colorier tous les sommets d'un graphe planaire avec seulement quatre couleurs. Un problème naturel est de déterminer le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier un graphe  $G$  (qu'il soit planaire ou non) sans que deux sommets adjacents soient coloriés de la même manière. Ce nombre, noté  $\chi(G)$ , s'appelle *nombre chromatique* du graphe  $G$ . Trouver le nombre chromatique d'un graphe quelconque est non seulement une question NP-complète dans le cas général, mais même le fait de décider si  $\chi(G) = 3$  est déjà un problème NP-complet.

Plusieurs résultats partiels existent cependant : on sait déjà que  $\chi(G)$  est inférieur au degré maximal  $\Delta(G)$  plus 1. (*Le degré maximal* d'un graphe  $G$  est le maximum des degrés de ses sommets.) Le résultat se prouve facilement : on colorie les sommets un par un, dans n'importe quel ordre, et vu qu'ils n'ont au plus que  $\Delta(G)$  voisins, donc  $\Delta(G)$  couleurs interdites, on peut toujours trouver une couleur à assigner à tout sommet.



Trois couleurs sont nécessaires pour colorier n'importe quel cycle de longueur impaire. Ici, l'exemple de  $C_7$  : chaque sommet a un degré égal à 2, mais il faut bien trois couleurs pour le colorier car le cycle est de longueur impaire.

En bas, une coloration minimale du graphe de Petersen. On n'a besoin que de trois couleurs, bien qu'il ne soit pas planaire (et donc assez complexe).

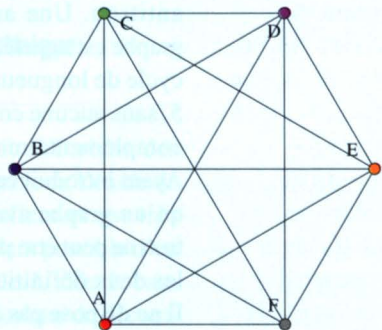


Ensuite, on sait qu'une clique de taille  $n$  (on la notera  $K_n$ ) nécessite exactement  $n$  couleurs.

Une conjecture fameuse porte justement sur ce sujet. Nommée *conjecture de Hadwiger*, elle est une des plus anciennes du domaine. Elle postule que tout graphe possède un nombre chromatique inférieur ou égal à la taille de sa plus grande clique mineure. La grande différence avec les graphes parfaits est que l'on regarde ici les cliques mineures (donc correspondant à des contractions du graphe) et pas seulement les cliques induites. Cette conjecture fondamentale – qui est aussi une généralisation considérable du théorème des quatre couleurs –

ne fournirait cependant pas d'apports algorithmiques directs pour la coloration : en effet, calculer les cliques mineures est également un problème NP-complet ! Cela donnerait cependant des intuitions supplémentaires. C'est d'ailleurs en travaillant sur ce problème (et en résolvant des cas particuliers de la conjecture) que les auteurs se sont mis en quête de la preuve du théorème des graphes parfaits.

L'exemple de  $K_6$  montre que l'on a bien besoin de six couleurs : chaque sommet est adjacent à tous les autres.



## Les graphes de Berge

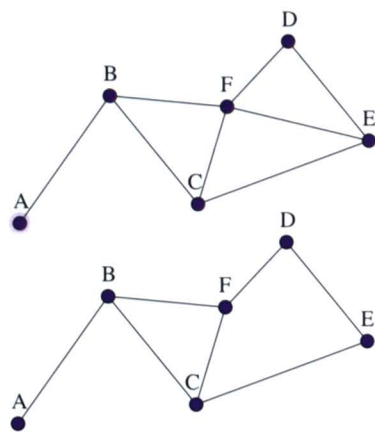
Un graphe  $G$  est *parfait* quand le nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes induits est égal à la taille de la plus grande clique comprise dans le sous-graphe. En vocabulaire courant, cela signifie que si l'on prend un sous-graphe de  $G$ , et que l'on cherche sa plus grande clique, alors il faudra autant de couleurs pour colorier le sous-graphe que pour colorier la clique. Cette propriété confère à un graphe une grande régularité, ce qui explique l'attention qu'ont reçue les graphes parfaits depuis la fin des années 1950.

Certaines classes sont connues depuis longtemps comme étant parfaites, dont les graphes bipartis (et leur compléments) ou les graphes cordaux. L'utilité des graphes parfaits est que de nombreux problèmes réputés difficiles (des problèmes NP-difficiles par exemple) deviennent faciles à résoudre sur cette classe (comme les plus grandes cliques ou plus grands ensembles indépendants, ainsi que le coloriage). Le problème était donc d'identifier et de caractériser ces graphes, ce qui est permis par le nouveau théorème.

Les *graphes de Berge* – d'après le mathématicien et artiste Claude Berge, qui fut l'un des pères de la théorie moderne des graphes et un membre fondateur de l'Ouvroir de littérature potentielle – sont ceux qui ne possèdent ni trou, ni antitrou. Une arête interne dans un graphe est appelée *corde*. Un *trou* est un cycle de longueur impaire supérieure à 5, sans aucune corde. Un *antitrou* est le complémentaire d'un trou.

Ayant introduit ces notions, il remarque qu'un graphe avec un trou ou un antitrou ne peut être parfait et conjecture que les deux définitions sont équivalentes. Il ne dispose pas alors des outils nécessaires à la démonstration (la preuve dis-

ponible aujourd'hui fait plus de cent cinquante pages). Tous ces graphes sont par contre fortement reliés aux *graphes cordaux*, qui eux n'ont (par définition) pas le droit d'avoir un cycle sans corde de longueur supérieure ou égale à 4. Les graphes cordaux sont également appelés *graphes triangulés* car on peut décomposer chacun de leurs cycles comme un ensemble de triangles.



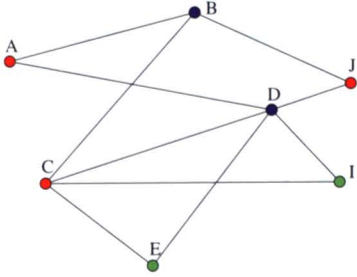
**Un seul des deux graphes est cordal : le premier (le second possède un cycle induit de longueur 4, qui est ECFD).**

On peut donc reformuler de manière condensée le théorème des graphes parfaits : les graphes de Berge sont exactement les graphes parfaits.

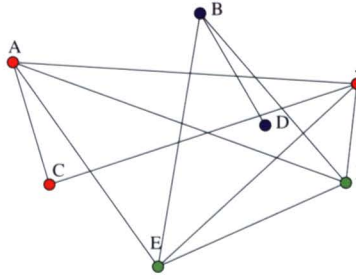
## Induits, complémentaires ou adjoints

Bien que l'étude des graphes soit relativement récente, un vocabulaire précis a été adopté. Plusieurs notions assez techniques sont nécessaires pour comprendre pleinement le théorème des graphes parfaits. Trois types de graphes interviennent notamment. Tout d'abord, les *sous-graphes induits* sont des sous-graphes dans lesquels toutes les arêtes présentes dans le graphe original subsistent. On enlève donc un ensemble de

sommets et uniquement les arêtes qui partent de ceux-ci.

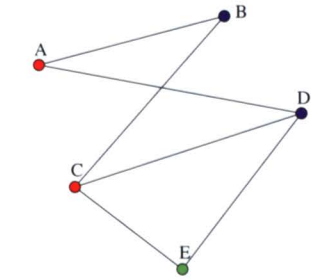


Le graphe G.

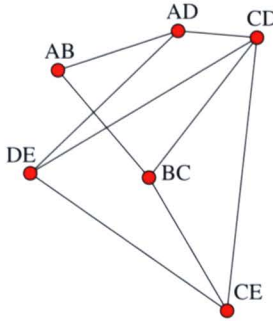


Le graphe G',  
graphe complémentaire de G.

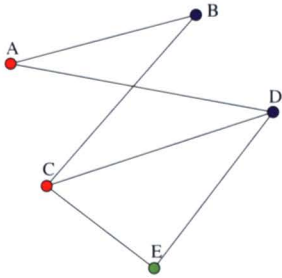
prenant les arêtes de G comme nouveaux sommets et en reliant deux tels sommets si les arêtes correspondantes partageaient une extrémité. Bien que faisant partie des plus anciens graphes étudiés, il existe toujours des problèmes ouverts les concernant, notamment sur les itérations de graphes adjoints (comme caractériser l'adjoint de l'adjoint de l'adjoint (...)) d'un graphe).



Le graphe ci-dessus, H, est un sous-graphe induit de G (et en particulier un sous-graphe de G).



Le graphe H<sub>A</sub> représenté ici est l'adjoint du graphe H : chaque sommet correspond à une arête de H.



Le graphe ci-dessus, H', est un sous-graphe de G mais n'en est pas un sous-graphe induit.

**Une preuve longue, technique mais intuitive**

Le graphe complémentaire d'un graphe G est formé du même ensemble de sommets que le graphe original G, et une arête est présente entre deux sommets si, et seulement si, il n'y en avait pas dans G.

Enfin, le graphe adjoint d'un graphe G (ou *line graph* en anglais) est formé en

La preuve complète du théorème des graphes parfaits fait intervenir l'étude de nombreux cas particuliers et est très complexe. Il est cependant possible d'en saisir l'intuition générale. L'idée de base est de chercher un « théorème de décomposition », c'est-à-dire une méthode qui

## Graphes de Berge et algorithmique

Si les graphes cordaux et les graphes de Berge sont intensément étudiés, ce n'est pas uniquement pour leur beauté théorique intrinsèque. De très nombreux problèmes qu'on ne sait aujourd'hui résoudre qu'en temps exponentiel (et qui, sous des hypothèses raisonnables, pourraient le rester) peuvent être résolus rapidement sur ces classes. En effet, et comme on l'a vu, le nombre chromatique et les tailles des plus grandes cliques peuvent être rapidement déterminés. Cependant, si le fait de reconnaître qu'un graphe est cordal est un problème très simple (cela se fait de manière gloutonne en un temps proportionnel au temps nécessaire pour lire le graphe), le problème de reconnaître un graphe parfait était conjecturé comme difficile, et potentiellement exponentiel lui aussi.

En fait, même après avoir achevé la première version de la preuve, les auteurs n'arrivaient toujours pas à transformer leur théorème de décomposition de façon à obtenir un algorithme de reconnaissance – un procédé naturel dans le domaine. Ce n'est qu'après plusieurs mois de travail intensif (et avec l'aide de Gérard Cornuéjols, Xinming Liu et Kristina Vuškovi) que les auteurs y parvinrent et trouvèrent le premier algorithme rapide de reconnaissance ! Les graphes parfaits ont ainsi une application supplémentaire en programmation linéaire. Dans ce domaine, on cherche à optimiser une fonction donnée en fonction de contraintes, tous les paramètres étant linéaires. Le problème général peut être résolu rapidement car il revient à trouver le « meilleur » sommet d'un polytope convexe de haute dimension, l'inconvénient étant que ce sommet n'est pas toujours à coordonnées entières. Si on se restreint à des coordonnées entières, on se retrouve à nouveau dans un calcul potentiellement exponentiel. L'intérêt des graphes parfaits est que l'on sait que leur polytope convexe associé ne possède que des sommets à coordonnées entières, garantissant des calculs rapides dans tous les cas.

permette de construire tous les graphes de Berge, et seulement ceux-ci. La vraie preuve repose en fait sur un principe légèrement différent : les auteurs prouvent le résultat suivant pour tout graphe de Berge  $G$ .

- Ou bien  $G$  est construit à partir de certains graphes de Berge plus petits avec

une certaine méthode de construction, ou bien il possède une propriété qui permet de trouver un graphe de Berge strictement plus petit qui conserve la perfection du premier (ou sa non-perfection).

S'il existe des graphes de Berge qui ne sont pas parfaits, on peut prendre un tel graphe de taille minimale, et se retrouver avec deux possibilités absurdes :

- ou bien il est construit comme précédemment et est parfait,
- ou alors on peut construire un graphe de Berge plus petit et non parfait (ou *imparfait*), ce qui contredit l'hypothèse de minimalité.

Ce qui veut dire qu'il n'existe pas de graphe de Berge imparfait et prouve le théorème !

Les auteurs voyaient potentiellement deux méthodes de preuve : une par décomposition, l'autre à base de raisonnements de programmation linéaire, qui avait déjà été essayée sans succès par plusieurs collègues. Un premier résultat prouvé par Alan Tucker était que les graphes de Berge contenant  $K_4$  sont parfaits ; il suffisait donc de montrer le résultat dans le cas simplifié des graphes ne contenant pas  $K_4$ . Même si ce problème est en apparence plus simple, il ne déboucha pas, et il fallut repartir de zéro pour trouver une décomposition originale. Après un certain temps, cette idée fut également abandonnée au profit d'une autre approche : la présence d'une décomposition (ou au moins d'une propriété) contredisant la minimalité. Une telle décomposition aurait permis de disposer d'un algorithme de construction des graphes de Berge, ce qui n'existe toujours pas.

La preuve actuelle, dont les grandes lignes sont esquissées ci-après, est beaucoup plus épurée que la première version : l'une des contributions de Maria Chudnovsky a justement consisté à

réduire le nombre de classes et de méthodes de décomposition. Le long travail des auteurs (deux ans et demi pour la première preuve, cinq ans pour la version simplifiée et l’algorithme de reconnaissance) sera finalement récompensé en 2009 par le prix Fulkerson.

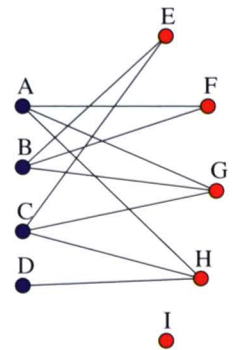
La preuve fait intervenir cinq types de graphes élémentaires dans la décomposition : les graphes bipartis et leurs complémentaires, les graphes adjoints de graphes bipartis et leurs complémentaires, et les graphes fendus doubles (*double split graphs* en anglais). Les *graphes bipartis* sont constitués de deux ensembles de sommets et d’un ensemble d’arêtes allant d’un ensemble à l’autre. Comme il suffit de deux couleurs pour colorier un graphe biparti (vu qu’il n’y a aucune arête à l’intérieur de chacun des deux ensembles), ces graphes sont parfaits. De plus, la plus grande clique présente dans un graphe biparti est  $K_2$  car un ensemble de plus de trois sommets en possède forcément deux dans un même ensemble, et ceux-ci ne peuvent être reliés. Donc un sous-graphe d’un graphe biparti ou bien est dénué d’arêtes (et coloriable avec une unique couleur), ou bien contient une arête, donc  $K_2$ , et nécessite deux couleurs. Deux théorèmes de Dénes Kőnig permettent de montrer la perfection des adjoints et complémentaires.

Les graphes fendus doubles sont une création des auteurs à partir des *graphes fendus*, ces graphes qui sont par définition simultanément cordaux et complémentaires de graphes cordaux. Les graphes fendus peuvent être décomposés en une clique et un ensemble indépendant, potentiellement reliés par des arêtes. Les auteurs montrent que tout graphe de Berge possède l’une au moins des deux propriétés suivantes :

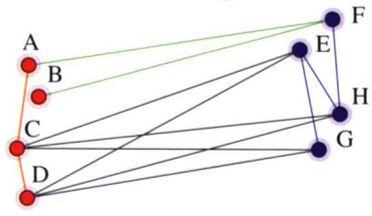
- il est décomposable en deux sous-graphes  $H_1$  et  $H_2$  tels que les arêtes entre  $H_1$  et  $H_2$  (et leurs extrémités) for-

ment deux graphes bipartis complets ou leur complémentaire,

- il admet une *décomposition oblique équilibrée*, c’est-à-dire une décomposition en deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  tels que  $E_1$  ne soit pas connexe et  $E_2$  soit le complémentaire d’un graphe non connexe, avec des contraintes de taille sur  $E_1$  et  $E_2$ .



Un graphe biparti.



**Le premier type de décomposition : on a bien deux sous-graphes ABCD et EFGH, et les arêtes entre eux correspondent aux deux graphes bipartis complets (AB:F) et (CD:EGH).**

Le point final est un lemme (conjecturé par Vašek Chvátal) disant que tout graphe de Berge imparfait et admettant une décomposition oblique équilibrée n’est pas minimal. La preuve se trouve ainsi... bouclée !

N. K. B.

**Références**

- *How the proof of the strong perfect graph conjecture was found.* Paul Seymour, *Gazette des mathématiciens* 109, 2006.
- *The strong perfect graph theorem.* Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas, *Annals of Mathematics* 164, 2006.
- *A characterization of perfect graphs.* László Lovász, *Journal of Combinatorial Theory* 13 (2), 1972.

# Cliques et théorème de Turán

**Le théorème de Turán est un des théorèmes fondamentaux de la théorie des graphes. Redémontré de nombreuses fois sous différentes formes, il inaugure la théorie extrémale des graphes, une nouvelle branche de la théorie combinatoire des graphes.**

Le monde des graphes possède son vocabulaire propre. Le célèbre théorème de Turán mobilise principalement les notions de cliques, de degré et de graphes extrémaux. Considérons un arbre simple  $G$ . On peut écrire  $G = (S, A)$  avec  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  l'ensemble des sommets de  $G$  et  $A$  l'ensemble des arêtes de  $G$ , de cardinal  $\alpha$ . On peut représenter l'ensemble des vérités mathématiques comme un graphe dont les sommets sont des propositions et les arêtes des liens logiques. Une démonstration est ainsi un chemin entre une proposition hypothèse et une proposition conclusive, et l'on va suivre ici deux de ces chemins qui mènent au théorème de Turán.

## Des triangles dans les graphes

Le graphe  $G$  étant simple, il ne contient pas de cycle. En particulier, aucun triangle ne peut en être extrait comme sous-graphe. En gardant les mêmes sommets, l'ajout d'arêtes va complexifier le graphe et un triangle (ou une 3-clique) va finir par apparaître comme sous-graphe de  $G$ . Le théorème

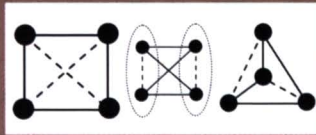
de Mantel (voir en encadré) précise qu'il en sera ainsi pour  $G$  si le nombre d'arêtes est supérieur ou égal à  $n^2 / 4$ . Plus généralement, quel est le nombre maximal d'arêtes qu'un graphe simple sans  $p$ -clique peut contenir ? Ce problème, qui apparaît souvent en théorie des graphes, a été résolu par Paul Turán en 1941.

Une façon naturelle d'obtenir des graphes qui répondent à la contrainte posée est de considérer les sommets répartis en  $p - 1$  sous-ensembles disjoints  $S_k$  de  $n_k$  sommets, et en ne reliant par une arête que les sommets appartenant à des sous-ensembles différents. On est ainsi certain de n'avoir, au maximum, que des cycles de longueur  $p - 1$  pour ce graphe, noté  $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$ , qui est une généralisation des graphes bipartis.

Pour le graphe biparti  $K_{n_1, n_2}$ , le nombre d'arêtes est de la forme  $\alpha = n_1 n_2$ , avec la contrainte  $n_1 + n_2 = n$ , où  $n$  est le nombre de sommets de  $K_{n_1, n_2}$ . Par symétrie, le produit de deux nombres de somme constante est maximal quand ces nombres sont égaux. Pour un nombre de sommets pair,  $\alpha = n^2 / 4$ , et si  $n = 2m + 1$ ,  $\alpha = m(m + 1) = (n^2 - 1) / 4$ . Pour les mêmes raisons, le nombre

## Les graphes extrémaux

Le plus grand graphe possédant une propriété donnée peut être défini comme le plus petit possédant la propriété contraposée quand on lui ajoute une arête. On appelle donc *graphe extrémal* un graphe tel que l'ajout d'une arête quelconque, pour les mêmes sommets, lui confère une propriété P donnée. Ainsi, les graphes suivants (qui sont isomorphes, ou « topologiquement identiques ») sont des graphes maximaux pour la propriété P : {ne pas posséder de sous-graphes triangulaires (ou 3-cliques K<sub>3</sub>)}.



L'ajout d'une arête quelconque, en pointillés, crée en effet un triangle (une 3-clique).

Pour un nombre de sommets pair  $\sigma = 2n$ , les graphes extrémaux sont les graphes bipartis  $K_{n,n}$  ; pour un nombre de sommets impair  $\sigma = 2n + 1$ , ce sont les graphes  $K_{n+1,n}$ .

En notant respectivement  $\sigma$  et  $\alpha$  le nombre de sommets et d'arêtes du graphe  $G(S, A)$ , la fonction  $f$  est une *borne inférieure* par rapport à la propriété P si l'inégalité  $\alpha > f(\sigma)$  garantit la propriété P pour le graphe G (et donc la propriété non P pour  $\alpha \leq f(\sigma)$ ). Le théorème de Mantel (voir encadré) donne

$$f(\sigma) = \frac{\sigma^2}{4}$$

pour la présence de triangles comme sous-graphes. Ceci signifie que, pour quatre sommets ( $\sigma = 4$ ), un nombre d'arêtes supérieur à 4 implique la présence d'un triangle comme sous-graphe.

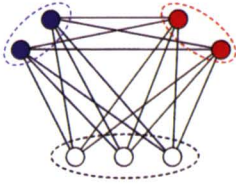
$$1 - \frac{1}{n} \leq 1 - \frac{1}{p-1} \quad \text{et on a bien}$$

$$\alpha \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}. \quad \text{Pour } n \geq p,$$

un graphe G avec un nombre maximal d'arêtes contient au moins une  $(p-1)$ -clique C, qui contient

$$\alpha_c = \binom{p-1}{2} = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

maximal d'arêtes du graphe  $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$  est obtenu lorsque les nombres  $n_1, n_2, \dots, n_{p-1}$  sont égaux, ou presque. Ces graphes  $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-1}}$  pour lesquels  $|n_i - n_j| \leq 1$  pour tous  $i$  et  $j$  sont appelés *graphes de Turán*.



Le graphe **K<sub>2,2,3</sub>**.

Dans le cas particulier où les sous-ensembles  $S_k$  ont la même dimension  $n_k = n / (p - 1) = m$ , le nombre maximal d'arêtes entre deux d'entre eux est alors  $m^2$ . Puisqu'il y a  $(p - 1)(p - 2) / 2$  couples de sous-ensembles, le nombre maximal A d'arêtes pour un tel cas est donc  $m^2(p - 1)(p - 2) / 2$ , soit :

$$A = \frac{n^2}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right). \quad \text{Le théorème de}$$

Turán affirme que cette expression, obtenue dans ce cas particulier des graphes Turán (voir en encadré), est la valeur maximale du nombre d'arêtes d'un graphe de  $n$  sommets ne comportant pas de  $p$ -cliques.

Si  $p = 2$ , il n'existe aucune arête et on a bien  $A = 0$ . Pour  $p = 3$  et  $p = 4$ , des preuves particulières se trouvent en encadrés en fin d'article. Pour le cas général, il est possible de produire deux preuves hongroises par récurrence.

Turán nous donne une première démonstration de son théorème éponyme. Pour  $n$  sommets, il y a au maximum  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  arêtes, et donc :

$$\alpha \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n^2}{2}. \quad \text{L'absence de}$$

$p$ -clique est garantie pour  $n \leq p - 1$ . Dans ce cas,

arêtes. On va maintenant déterminer le nombre d'arêtes  $\alpha_D$  de l'ensemble D des sommets restants, et le nombre d'arêtes  $\alpha_{C,D}$  entre C et D.

faits, donne  $\alpha \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{n^2}{2}$ .

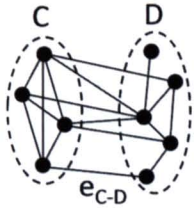
Ainsi, en effectuant la récurrence sur  $k$  tel que  $(p-1)k < n \leq (p-1)(k+1)$ , la proposition, vraie pour  $k=0$  et  $k=1$ , est démontrée pour tout couple  $(n, p)$ .

La seconde preuve, due au grand poseur de problèmes devant l'Éternel, le Hongrois Pál Erdős, utilise la structure des graphes de Turán. Le graphe G étant fini, il existe un sommet  $m$  dont le degré est maximal:  $d(m) = \max_{u \in S} d(u)$ .

Notons M l'ensemble des  $d(m)$  som-

Pour  $p-1 < n \leq 2(p-1)$ , l'ensemble D possède  $n-p+1 \leq p-1$  sommets, et donc  $\alpha_D \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{(n-p+1)^2}{2}$ .

Puisque G est sans  $p$ -clique, chaque sommet de D est au maximum adjacent à  $p-2$  sommets de C, et donc  $\alpha_{C,D} \leq (p-2)(n-p+1)$ . Au bilan final,  $\alpha = \alpha_C + \alpha_{C,D} + \alpha_D$ , ce qui, tous calculs



### Le théorème de Mantel

Le mathématicien néerlandais Heiko Mantel a prouvé le résultat suivant : un graphe G à  $n$  sommets sans triangle possède au plus  $n^2/4$  arêtes.

En voici une première preuve : puisque G est sans triangle, les voisins d'un sommet forment un ensemble indépendant ; on note  $x$  la taille de l'ensemble indépendant maximal X. On a donc  $d(u) \leq x$  pour tout sommet  $u$ . En comptant les  $y = n - x$  arêtes ayant leurs extrémités dans le complémentaire Y de X dans S, on obtient :

$$\alpha \leq \sum_{u \in Y} d(u) \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

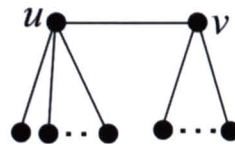
On a utilisé une inégalité algébrique classique, qui exprime que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, l'égalité ayant lieu quand  $x = y$ . L'égalité a donc lieu si  $n$  est pair ( $n = 2x$ ), et G est alors le graphe complet biparti  $K_{x,x}$ .

Voici une seconde preuve : pour une arête  $u-v$  quelconque, les sommets liés à  $u$  et ceux liés à  $v$  sont indépendants puisque le graphe ne contient aucun triangle. Dans le cas minimaliste de la figure ci-dessous, on a  $d(u) + d(v) = n$ . Dans le cas général,

d'autres sommets peuvent exister et on a donc  $d(u) + d(v) \leq n$ . On en déduit que :

$$\sum_{u-v \in A} (d(u) + d(v)) \leq n\alpha.$$

Puisque  $d(u)$  est pris en compte pour chacune des arêtes partant du sommet  $u$  (quelconque), cette quantité apparaît  $d(u)$  fois dans la somme, d'où  $\sum_{u-v \in A} (d(u) + d(v)) = \sum_{u \in S} d^2(u)$ .



En s'inspirant des définitions en statistique de l'espérance et de la variance (toujours positive ou nulle), on obtient :

$$\sum_{u \in S} \left[ d(u) - \frac{\sum_{u \in S} d(u)}{n} \right]^2 = \sum_{u \in S} d(u)^2 - \frac{1}{n} \left[ \sum_{u \in S} d(u) \right]^2 \geq 0.$$

La première inégalité devient alors :

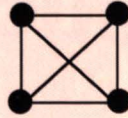
$$n\alpha \geq \sum_{u \in S} d^2(u) \geq \frac{\left(\sum_{u \in S} d(u)\right)^2}{n} = \frac{4\alpha^2}{n};$$

on en tire la relation cherchée :  $\alpha \leq \frac{n^2}{4}$ .




### Les graphes sans 4-clique

Un graphe fini simple  $G$  est constitué d'un ensemble  $S$  de  $\sigma$  sommets et d'un ensemble  $A$  de  $\alpha$  arêtes. Puisqu'à chaque arête correspond deux sommets, la somme des degrés des sommets est le double du nombre d'arêtes :  $\sum_{s \in S} d(s) = 2\alpha$ . Ce résultat élémentaire a d'intéressantes conséquences.



Une 4-clique : le tétraèdre.

Pour un graphe à  $n$  sommets sans 4-clique, dénombrons le nombre  $U$  de sous-graphes correspondant

à une alternative de type . Un sommet  $u$  est le

point de convergence de  $d(u)$  arêtes, et donc le sommet de  $d(u)(d(u) - 1) / 2$  tels embranchements.

On a alors  $U = \sum_{u \in S} d(u)(d(u) - 1) / 2$ . D'autre part,

deux sommets quelconques, parmi les  $n(n - 1) / 2$  couples possibles, ne peuvent avoir plus d'un élément en commun pour éviter de constituer une 4-clique, ce qui implique  $U \leq n(n - 1) / 2$ . Par suite,

$\sum_{u \in S} d(u)(d(u) - 1) \leq n(n - 1)$ . Tous calculs faits, on obtient l'inégalité suivante :

$$4\alpha^2 - 2n\alpha - n^2(n - 1) \leq 0,$$

ce qui fournit  $\alpha \leq \left\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n - 3}) \right\rfloor$ , où  $\lfloor x \rfloor$  désigne

la partie entière de  $x$ . Cette majoration est meilleure que celle donnée dans le cas général pour  $n > 3$ , et lui est égale pour  $n = 3$ .

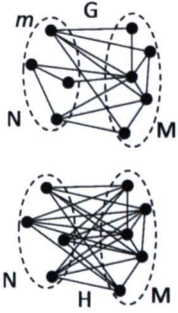
couleurs, et s'il y a erreur, ce n'est pas graphe...

F.L.

#### RÉFÉRENCE

*Raisonnements divins*. Martin Aigner et Günter Ziegler, Springer-Verlag, 2013.

mets adjacents à  $m$  et  $N$  l'ensemble des autres sommets, dont  $m$ . L'ensemble  $M$  ne contient pas de  $(p - 1)$ -clique, car dans le cas contraire elle formerait avec le sommet  $m$  une  $p$ -clique de  $(S, A)$ , avec  $S = M \cup N$ .



En partant du graphe  $G = (S, A)$ , on construit le graphe  $H = (S, A')$ , où  $A'$  est constitué des arêtes de  $M$ , de toutes celles possibles entre  $M$  et  $N$ , et d'aucune de  $N$ . L'ensemble  $N$

est donc indépendant dans  $H$ . Par construction, aucune  $p$ -clique n'apparaît dans  $H$ . En notant  $\delta(u)$  le degré du sommet  $u$  dans  $H$ , on a  $\delta(u) \geq d(u)$  pour  $u \in M$ , puisque l'on a ajouté des liens avec les sommets de  $N$ . De même, cette construction de  $H$  implique que  $\delta(u) = d(m) \geq d(u)$  pour  $u \in N$ . Donc, globalement, on a  $\alpha_H \geq \alpha_G$ , et l'on peut conclure que, parmi tous les graphes  $G$  ayant un nombre d'arêtes  $\alpha_G$  maximal, il doit y en avoir un qui a la forme de  $H$ . Comme il a été évoqué, tout graphe construit sur  $M$  a au plus autant d'arêtes qu'un graphe convenable du type  $K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-2}}$ . En prenant  $n_{p-1} = N$ , on a :  $\alpha_G \leq \alpha_H \leq \alpha(K_{n_1, n_2, \dots, n_{p-2}, N})$ , d'où le résultat cherché d'après ce qui précède sur les graphes de Turán.

Il suffit donc d'avoir plusieurs cordes adjacentes à son arc pour que les chemins vers le sommet de la connaissance s'enchaînent, degré après degré ! L'important est de rester simple, d'être complet à défaut d'être parfait, de devenir indépendant de la clique des bipartis, de ne pas tourner en boucle, de savoir s'arrêter pour reprendre des

# La formule d'Euler

## et les solides de Platon

**Comment une formule découverte par le génial Leonhard Euler au XVIII<sup>e</sup> siècle permet de vérifier que les Grecs de l'Antiquité n'avaient oublié aucun solide platonicien...**

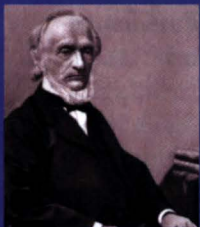
L'attraction esthétique pour la symétrie fut sans doute un guide pour les philosophes grecs qui firent reposer leur conception du monde sur cette idée. En effet, ils pensaient l'univers constitué à partir de quatre éléments de base, le feu, l'air, l'eau et la terre. À chacun d'eux était associé un *polyèdre régulier convexe*, qui est une figure dans l'espace dont toutes les faces sont des polygones réguliers identiques (par exemple des triangles équilatéraux, des carrés...) et dont le nombre d'arêtes par-

tant de chaque sommet est constant.

L'exemple le plus connu d'un tel solide est le cube, dont les six faces sont des carrés et dont chaque sommet est atteint par trois arêtes. Ainsi, le feu était représenté par le tétraèdre (quatre faces triangulaires), l'air par l'octaèdre (huit faces triangulaires), l'eau par l'icosaèdre (vingt faces triangulaires) et la terre par l'hexaèdre (le cube).

Mais Théétète, un contemporain de Platon, découvrit l'existence d'un cinquième solide régulier, le dodécaèdre (douze faces pentagonales). Dans son dialogue *le Timée*, Platon introduit alors, après avoir distingué les quatre « figures cosmiques » habituelles, un cinquième élément (!), l'éther, qui serait la matière remplissant l'espace au-delà de l'atmosphère.

Heureusement les Anciens n'auront plus à remettre en cause leur vision de l'Univers. En effet, *il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes*, aujourd'hui appelés *solides platoniciens*.



**Ludwig Schläfli** est né en Suisse en 1814, où il meurt en 1895. Avant de s'occuper de mathématiques, il étudia la théologie. L'histoire ne dit pas s'il faut y voir un lien avec les solides platoniciens...

On lui doit une classification des polyèdres utilisée pour les solides platoniciens. Il fera des découvertes en géométrie, mais leur importance sera surtout reconnue après sa mort.



La formule d'Euler

Pour le montrer, le plus élémentaire est d'utiliser une formule due à Euler : si l'on note  $a$  le nombre d'arêtes,  $f$  le nombre de faces et  $s$  le nombre de sommets, alors on a la relation suivante :

$$s + f - a = 2.$$

Pour un solide platonicien, toutes les faces ont le même nombre  $n$  d'arêtes et, comme chaque arête est commune à deux faces, on a :

$$2a = n f.$$

De plus, de chaque sommet partent le même nombre  $p$  d'arêtes et une arête joint toujours deux sommets. On peut donc en déduire la relation suivante :

$$2a = p s.$$

Ces propriétés et la formule d'Euler nous permettent d'écrire :

$$2 \frac{a}{p} + 2 \frac{a}{n} - a = 2.$$

En multipliant par  $np$ , on obtient :

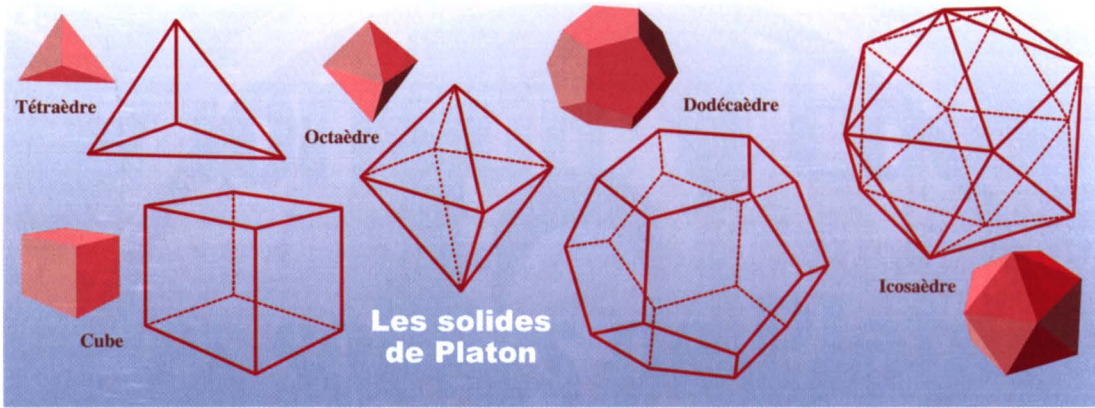
$$a(2n + 2p - np) = 2np.$$

*Le feu était représenté par le tétraèdre, l'air par l'octaèdre, l'eau par l'icosaèdre et la terre par le cube.*

On en déduit que le terme entre parenthèses est strictement positif, ce qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$(n - 2)(p - 2) \leq 4.$$

Or, une face possède au minimum trois arêtes, donc  $n$  vaut au moins 3. Par ailleurs, on trouve au moins deux arêtes qui partent de chaque sommet, mais le cas  $p = 2$  correspond simplement au cas où le solide est une figure plane (un polygone régulier). On ne s'intéresse donc ici qu'aux valeurs de  $p$  supérieures ou égales à 3. L'inégalité ci-dessus implique alors que  $n$  et  $p$  ne peuvent prendre que les valeurs 3, 4 ou 5. Il suffit donc d'examiner les  $3 \times 3 = 9$  cas possibles restants. Quatre de ces cas sont à écarter, car ils conduisent à des valeurs de  $(n - 2)(p - 2)$  supérieures ou égales à 4. Il s'agit de ceux



**Les solides de Platon et leurs graphes planaires.**

où  $n$  et  $p$  sont égaux à 4 ou 5. Il ne reste plus que cinq possibilités.

**$n = 3, p = 3$**

D'après les formules précédentes, on a  $a = 6, s = 4$  et  $f = 4$ . Les Grecs fondaient leur terminologie sur le nombre de faces, c'est pourquoi ce solide est appelé *tétrahédre* (tétra = quatre).

**$n = 3, p = 4$**

D'après les formules précédentes, on trouve  $a = 12, s = 6$  et  $f = 8$ . Les Grecs le nommaient donc *octaèdre* (octo = huit).

**$n = 3, p = 5$**

D'après les formules précédentes,  $a = 30, s = 12$  et  $f = 20$ . Les Grecs le nommaient *icosaèdre* (icosi = vingt).

**$n = 4, p = 3$**

D'après les formules précédentes,  $a = 12, s = 8$  et  $f = 6$ . Les Grecs le nommaient *hexaèdre*

(hexa = six) mais nous préférons l'appeler *cube*.

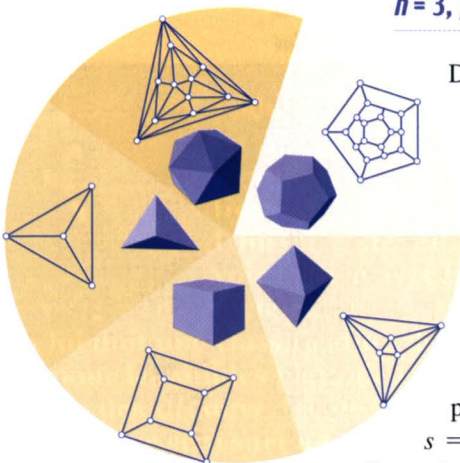
**$n = 5, p = 3$**

D'après les formules précédentes, on obtient  $a = 30, s = 20$  et  $f = 12$ . Les Grecs le nommaient *dodécaèdre* (dodéca = douze).

Le couple  $(n, p)$  correspondant à chaque polyèdre s'appelle *symbole de Schläfli*. À chaque fois que  $(n, p)$  apparaît comme symbole de Schläfli d'un solide platonicien, on trouve aussi le couple inversé  $(p, n)$ . Ce n'est pas un hasard : à partir d'un polyèdre donné, on peut toujours construire un nouveau polyèdre, appelé *polyèdre dual*, dont les sommets sont au centre des faces du premier. Il a le même nombre d'arêtes mais les nombres de sommets et de faces sont inversés. Le dual d'un solide platonicien est encore un solide platonicien. Le dual du tétraèdre est un tétraèdre.

**É. J. & T. R.**

**Les solides de Platon et leurs graphes planaires.**



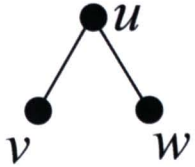
**Référence**

<http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html>

## Le théorème de Kövari–Sós–Turán

Une question classique en théorie extrémale des graphes est de déterminer le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple  $G$  à  $n$  sommets qui ne contient pas de sous-graphe  $H$  de type donné. C'est une généralisation du théorème de Turán (voir l'article qui lui est consacré dans ce dossier) pour lequel  $H = K_p$ , le graphe complet à  $p$  sommets. Un exemple en est le théorème de Kövari–Sós–Turán, qui stipule que si le graphe simple  $G = (S, A)$  à  $n$  sommets de  $S$  et  $m$  arêtes de  $A$  ne contient pas  $K_{2,r}$ , avec  $r \geq 1$ , alors :

$$m \leq \frac{n}{4} (\sqrt{4(r-1)(n-1) + 1} + 1).$$



Intéressons-nous au cardinal (ou nombre d'éléments)  $|E|$  de l'ensemble  $E$  des sommets  $(u, v, w)$  de  $G$  tels que  $u-v$  et  $u-w$  soient des arêtes de  $A$  (voir la figure). Pour un sommet  $u$  de degré  $d(u)$ , il existe autant de configurations cherchées que de couples possibles parmi  $d(u)$  éléments, soit  $\binom{d(u)}{2}$ , d'où :

$$|E| = \sum_{u \in S} \binom{d(u)}{2} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{u \in S} d^2(u) - \sum_{u \in S} d(u) \right].$$

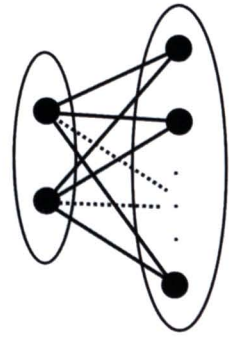
D'autre part, chaque couple de sommets de  $S$ , parmi les  $\binom{n}{2}$  possibles, ne peut avoir plus de  $r-1$  voisins communs. On a donc  $|E| \leq \frac{(r-1)n(n-1)}{2}$ , soit  $\sum_{u \in S} d^2(u) - \sum_{u \in S} d(u) \leq (r-1)n(n-1)$ .

Puisque  $\sum_{u \in S} d(u) = 2m$ , et que, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,  $4m^2 = \left( \sum_{u \in S} d(u) \right)^2 \leq \left( \sum_{u \in S} d^2(u) \right)$ ,

on obtient :  $4m^2 \leq (r-1)n^2(n-1) + 2nm$ . Cette inégalité du second degré fournit le résultat cherché :

$$m \leq \frac{n}{4} (\sqrt{4(r-1)(n-1) + 1} + 1).$$

Ce théorème est souvent utilisé en géométrie discrète pour borner les incidences entre divers types d'objets géométriques.



Les graphes  $K_{2,r}$ .

### Alfréd Rényi et Vera Sós

Les contributions du Hongrois Alfréd Rényi (1921–1970) sont principalement en théorie des probabilités, combinatoire et théorie des graphes. Il fut le co-auteur de Pál Erdős dans trente-deux articles. Ensemble, ils créèrent la notion de *graphe aléatoire* en 1959. Ce concept de graphes générés par un processus aléatoire est actuellement un domaine de recherche très fécond. Rényi a aussi donné son nom à une entropie en théorie de l'information, et apporta sa contribution à la théorie analytique des nombres (conjecture de Goldbach et théorie du crible).

Vera Sós (née en 1930) est une spécialiste de théorie des nombres et de combinatoire. Elle fut une collaboratrice d'Erdős et de Rényi, et de son mari Pál Turán. Deux de ses résultats, le théorème de Kövari–Sós–Turán et le théorème de l'amitié, démontré avec Erdős et Rényi, sont développés dans ce dossier. Elle reçut le prix Széchenyi en 1997. En théorie des nombres, elle démontra le « théorème des trois longueurs », conjecturé par Hugo Steinhaus.

# Le polyèdre de Császár

## Un monstre topologique

La célèbre formule d'Euler appliquée à un graphe complet bien choisi permet d'imaginer qu'un polyèdre à sept sommets, vingt et une arêtes, quatorze faces triangulaires et un trou pourrait exister. C'est le polyèdre de Császár ! Cet objet permet de résoudre des problèmes ardu de combinatoire.

Un graphe est *complet* lorsque tout sommet est relié par une arête à tous les autres sommets. L'*ordre* de ce graphe est alors le nombre de sommets. Le graphe complet d'ordre 1 ne possède qu'un sommet, celui d'ordre 2 ne possède que deux sommets (reliés par une arête), et celui d'ordre 3 possède trois sommets (reliés par trois arêtes). De manière générale, le graphe complet d'ordre  $n$  possède  $n$  sommets, reliés par  $n(n-1)/2$  arêtes.

Il est aisé de construire ces objets par récurrence : à partir du graphe complet d'ordre  $n$ , on construit le graphe complet d'ordre  $n+1$  en ajoutant un sommet, et depuis ce sommet on « lance » des arêtes vers tous les sommets précédents. C'est ainsi que Ludwig Schläfli a construit les simplexes de dimension  $n$  : on part du triangle (de dimension 2), que l'on appelle dans ce contexte  $\alpha_2$ . Son graphe complet est d'ordre 3. On ajoute un sommet dans la dimension supérieure (l'espace) et on relie ce sommet au triangle par trois arêtes : on obtient le tétraèdre, ou  $\alpha_3$ , dont le graphe associé est le graphe complet d'ordre 4. En ajoutant un sommet dans la quatrième dimension et en le reliant par des arêtes au sommet du tétraèdre, on obtient l'hyper-tétraèdre, ou  $\alpha_4$ , et ainsi de suite.

Le géomètre américain H.S.M. Coxeter a montré qu'un simplexe de la dimension  $n$  (dont le nom technique est

Les graphes complets possédant de un à cinq sommets.



Graphe complet d'ordre 1



Graphe complet d'ordre 2



Graphe complet d'ordre 3

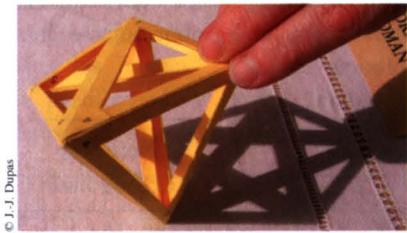


Graphe complet d'ordre 4



Graphe complet d'ordre 5

$\alpha_n$ ) peut se projeter sur le plan en un polygone régulier à  $n + 1$  côtés. Donc le tétraèdre, de symbole  $\alpha_3$ , peut être projeté en un carré du plan. De même, l'hyper-tétraèdre, de symbole  $\alpha_4$ , peut se projeter en un pentagone régulier.



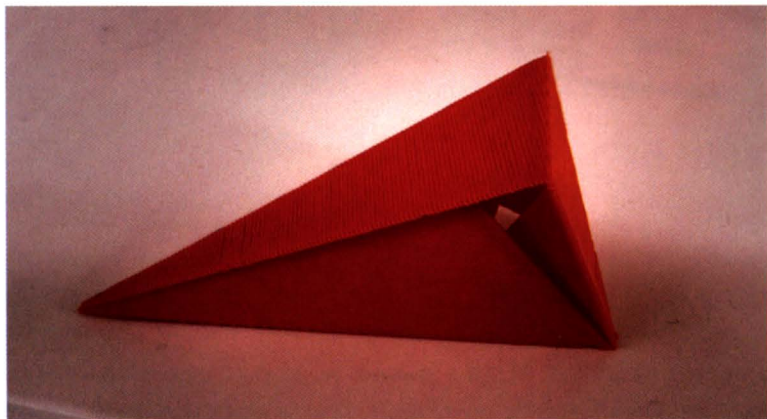
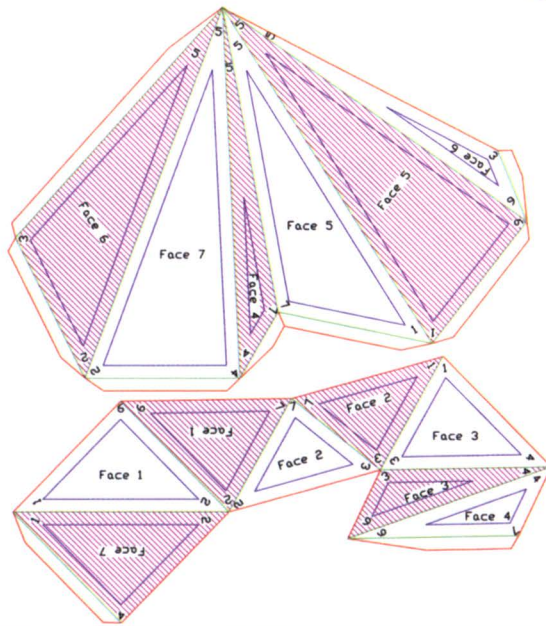
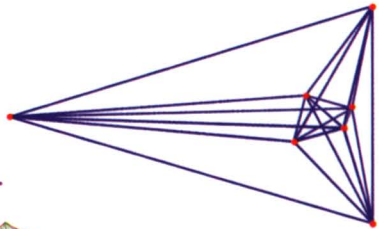
Le polyèdre, qui se projette sur le plan suivant un pentagone, est une projection tridimensionnelle d'un hyper-tétraèdre quadridimensionnel.

Un échiquier à quatorze cases

Quittons ces enivrantes dimensions supérieures pour revenir dans notre monde à trois dimensions : le graphe d'un polyèdre peut-il être complet ? C'est déjà le cas du tétraèdre. Un moyen efficace de rechercher de tels polyèdres est d'utiliser la formule d'Euler :  $S + F - A = 2$ , avec  $S$  le nombre de sommets,  $F$  le nombre de faces et  $A$  le nombre d'arêtes du polyèdre. En effet, dans le cas d'un graphe complet,  $A = S(S - 1) / 2$  et  $F = 2A / 3$  puisque les faces sont des triangles, ce qui fournit  $S + S(S - 1) / 3 - S(S - 1) / 2 = 2$ . En simplifiant, on aboutit à l'équation du second degré  $S^2 - 7S + 12 = 0$ , dont les deux solutions sont  $S = 3$  (correspondant au triangle) et  $S = 4$  (correspondant au tétraèdre). Est-ce tout ? Il semblerait que oui. Eh bien, non ! Car en utilisant la formule d'Euler, nous avons supposé que le polyèdre est simplement connexe et convexe. Si le polyèdre possède des « trous », il faut modifier la formule d'Euler comme

suit :  $S + F - A = 2 - 2T$ , avec  $T$  le nombre de trous. Cette formule indique qu'il pourrait exister un polyèdre à sept sommets, vingt et une arêtes, quatorze faces triangulaires et un trou. Mais un tel monstre topologique existe-t-il ? Le mathématicien hongrois Ákos Császár (né en 1924) a le premier exhibé un tel polyèdre.

Structure du polyèdre de Császár. Il peut être colorié de deux couleurs à la façon d'un échiquier.



À quoi cet objet mathématique peut-il être employé ?

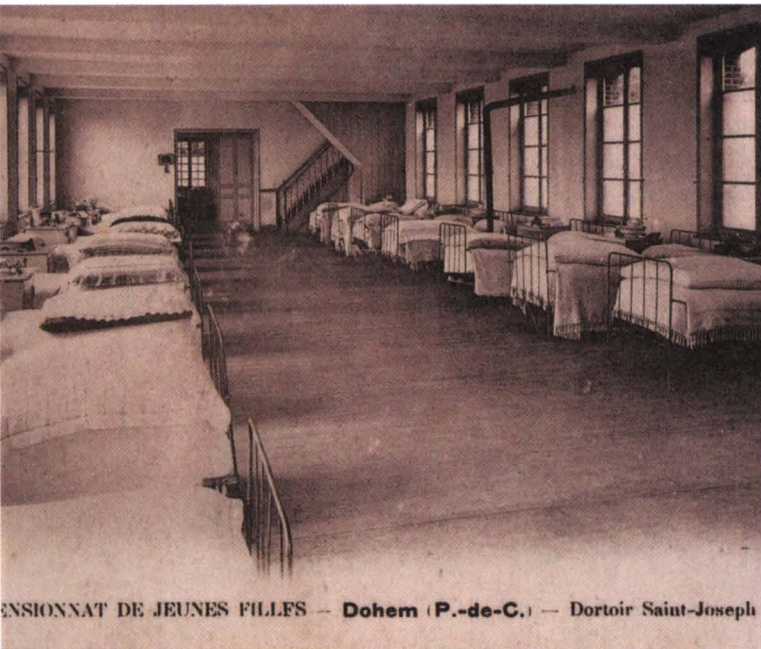
Un pensionnat de jeunes filles ne comporte plus que sept pensionnaires. Chaque jour, on envoie trois pensionnaires faire les courses. Pour être équitable, tous les binômes de filles ne doivent sortir qu'une seule fois. Comment faire ? La solution est simple, il suffit de la lire sur le polyèdre de Császár ! Constituons les binômes : pour la première fille, on dispose de sept choix ; pour la deuxième, six choix. Cela fait quarante-deux paires différentes, mais de la sorte on les a comptées deux fois chacune. On obtient donc vingt et un binômes, ce qui évoque les vingt et une arêtes du graphe : les filles sont les sommets du polyèdre. Si l'on a colorié les faces du polyèdre de Császár alternativement en faces claires et sombres, il suffit de choisir les faces claires ; les trois arêtes des faces claires désignent trois sommets, soit une solution. En faisant la même chose avec les faces sombres,

on trouve une solution « orthogonale ». Une autre façon de trouver est de numéroter les faces claires de 1 à 7, et de numéroter les faces sombres de 1 à 7 : les numéros des faces voisines des faces claires fournissent une solution, les numéros des faces voisines des faces sombres donnent une autre solution.

Solution	Solution orthogonale
124 = 124 = 124	126 = 126 = 126
235 = 235 = 235	237 = 237 = 237
346 = 346 = 346	341 = 341 = 341
457 = 457 = 457	452 = 452 = 452
561 = 561 = 561	563 = 563 = 563
672 = 672 = 672	674 = 674 = 674
713 = 713 = 713	715 = 715 = 715

Deux solutions orthogonales du problème du pensionnat.

Question d'organisation de tournoi, maintenant. Essayons de mettre en place une compétition de bridge avec huit équipes sur sept tables en sept rounds, de sorte qu'une équipe ne joue jamais deux fois contre une équipe donnée et qu'une équipe ne joue jamais deux fois à la même table. Comment le malheureux organisateur peut-il procéder ? Il construit une matrice de taille 8. De manière analogue aux triplets de jeunes filles, les numéros du binôme sont les numéros des équipes qui se rencontrent (le troisième numéro est la colonne de la matrice). On cherche le binôme dans la solution orthogonale (le troisième numéro est le numéro de colonne). Puis, sur la diagonale, on



PENSIONNAT DE JEUNES FILLES — Dohem (P.-de-C.) — Dortoir Saint-Joseph



installe les rencontres de la huitième équipe avec les sept précédentes, dans l'ordre croissant. L'organisateur a sa solution ! En termes techniques, on a construit la *matrice de Room* du tournoi, d'après le nom du mathématicien australien Thomas Gerard Room (1902–1986), qui a étudié ce problème dans les années 1950. La solution du problème était en fait connue au XIX<sup>e</sup> siècle, mais a été oubliée.

Table	1	2	3	4	5	6	7
Round							
1	1,8			5,7		3,4	2,6
2	3,7	2,8			6,1		4,5
3	5,6	4,1	3,8			7,2	
4		6,7	5,2	4,8			1,3
5	2,4		7,1	6,3	5,8		
6		3,5		1,2	7,4	6,8	
7			4,6		2,3	1,5	7,8

La matrice de Room (et d'Hadamard) de l'organisation du tournoi de bridge.

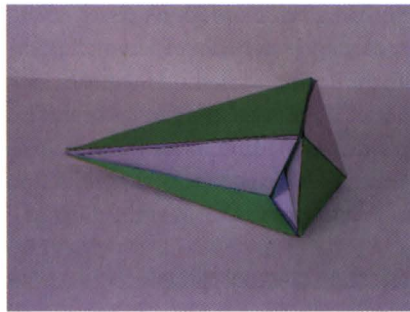
Si l'on colorie les cases de la matrice de Room qui comportent une rencontre, et que l'on ajoute une ligne et une colonne pleine, on reconnaît une matrice d'Hadamard (voir *les Matrices*, Bibliothèque Tangente 44, 2012), mais cela est une tout autre histoire...

On le voit, le graphe complet d'ordre 7 se trouve lié à de très nombreux problèmes de combinatoire. Il est fascinant de constater qu'un objet *a priori* trivial, une configuration de sept points tous reliés les uns aux autres, soit aussi riche d'enseignement.



Playing cards bridge © destina

J.-J. D.



© J.-J. Dupas

RÉFÉRENCES

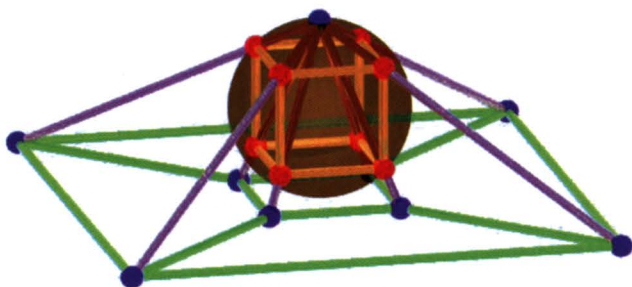
- *La formule magique des polyèdres*. Jean-Jacques Dupas, Leonhard Euler, Bibliothèque Tangente 29, 2005.
- *Les polyèdres, le gang des Hongrois*. Jean-Jacques Dupas, Tangente 126, 2009.
- *On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving*. Martin Gardner, *Scientific American*, 1975.
- *A polyhedron without diagonals*. Ákos Császár, *Acta Scientiarum Mathematicarum* 13, 1949–1950.
- *Euler's formula for polyhedra and related topics*. Donald Crowe, *Excursions into Mathematics*, Worth Pub, 1969.
- *A New Type of Magic Square*. Thomas Room, *The Mathematical Gazette* 39, 1955.

# Diagrammes de Schlegel : les polyèdres sont des graphes !

Le vocabulaire des polyèdres nous parle aussi de sommets et d'arêtes. Alors, les polyèdres sont-ils des graphes ? Eh bien oui, grâce aux diagrammes de Schlegel. La représentation de polyèdres convexes sous forme de graphes permet de résoudre de nombreux problèmes combinatoires.

La difficulté inhérente à l'étude des polyèdres est que ce sont des objets de l'espace à trois dimensions. C'est l'espace dans lequel nous vivons. La manipulation mentale de polyèdres ne devrait donc poser aucun problème. L'expérience montre pourtant qu'il n'en est rien... Heureusement, une solution existe pour transformer les problèmes tridimensionnels en problèmes bidimensionnels : la projection stéréographique.

## Projection stéréographique



Projection stéréographique des sommets d'un cube.

L'idée de la projection stéréographique est de projeter une sphère sur un plan. Pour ce faire, on choisit un point de la sphère : le *pôle* (par exemple le point bleu au sommet de la sphère). Ce sera le seul et unique point de la sphère qui

n'aura pas d'image. À tout point de la sphère (un point rouge), sauf le pôle, on associe le point du plan (point bleu), intersection du plan et de la droite (mauve) passant par le point source (rouge) et le pôle. Le plan peut être quelconque à condition qu'il ne contienne pas le pôle. En général, on choisit par commodité un plan orthogonal à la ligne des pôles. La projection stéréographique est en général attribuée à Apollonius de Perge au III<sup>e</sup> siècle avant notre ère, ou à Hipparque. Le premier traité connu sur cette projection est l'œuvre de Ptolémée, au II<sup>e</sup> siècle. La projection stéréographique, qui a été beaucoup utilisée en cartographie, est la base théorique de l'astrolabe, instrument massivement utilisé pendant plus de mille ans.

Les sommets des polyèdres réguliers et semi-réguliers (voir les définitions en encadré) se trouvant sur une sphère, il est très facile d'en faire une projection stéréographique. Il ne reste plus qu'à relier les projections des sommets par les mêmes arêtes (vertes) qui relient les sommets (bleus). On obtient pour les polyèdres réguliers et semi-réguliers un graphe planaire qui est une bonne image du polyèdre : la structure du polyèdre est conservée, avec ses

## Polyèdres réguliers et semi-réguliers

Les *polyèdres réguliers*, ou *solides de Platon*, sont les cinq polyèdres qui vérifient les conditions suivantes :

- Ils sont convexes (les contre-exemples sont les *étoiles de Poincaré-Kepler*),
- Les faces, sommets et arêtes sont en nombre fini (les contre-exemples sont les *éponges régulières*),
- Les faces sont un seul type de polygones réguliers convexes (les contre-exemples sont les *solides semi-réguliers*),
- Les sommets sont *équivalents* (le même nombre de faces y convergent). Un contre-exemple est constitué de deux pyramides à base pentagonale collées suivant les pentagones : il existe des sommets avec quatre triangles et des sommets avec cinq triangles.

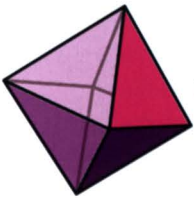
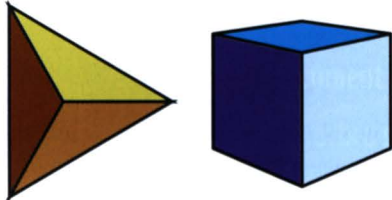
Il n'existe que cinq solides vérifiant ces conditions : le tétraèdre régulier, l'octaèdre régulier, l'hexaèdre régulier (ou cube), le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

Si l'on relâche la contrainte « un seul type de polygones réguliers convexes » en « polygones réguliers convexes », on obtient les *polyèdres semi-réguliers* :

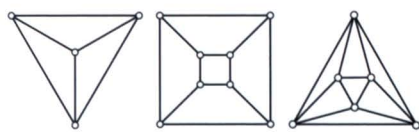
- Une infinité de prismes réguliers,
- Une infinité d'anti-prismes réguliers,
- Treize solides dits *archimédiens*.

Les polyèdres réguliers et semi-réguliers sont inscriptibles à la sphère.

faces (même si elles sont déformées du point de vue géométrique) et ses sommets, où convergent le même nombre d'arêtes. C'est Victor Schlegel (1843–1905) qui en a eu l'idée, et donc ces projections s'appellent des *diagrammes de Schlegel*.

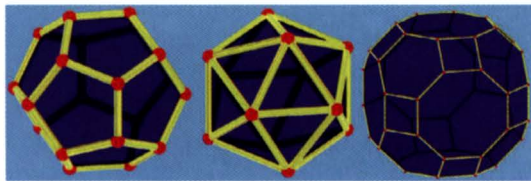


Trois des cinq solides de Platon : le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre régulier.

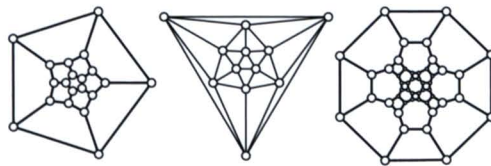


De gauche à droite, le diagramme de Schlegel du tétraèdre, du cube et de l'octaèdre.

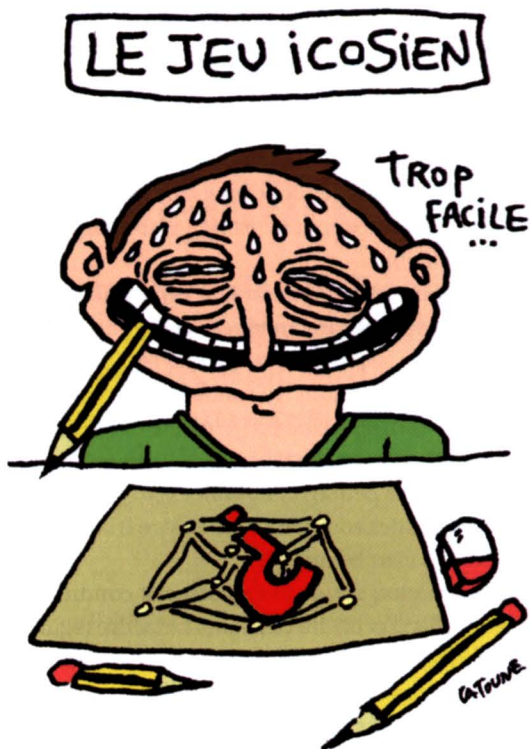
On choisit en général un pôle au-dessus du centre d'une face. Tout le polyèdre va donc se projeter à l'intérieur de cette face, étant entendu que la projection de la face près du pôle est exactement l'extérieur de cette face. Par exemple, pour le tétraèdre (voir la figure précédente, à gauche), le plan est bien divisé en quatre régions : une région infinie et trois régions à l'intérieur du grand triangle, qui correspondent aux quatre faces du tétraèdre. Pour le diagramme de Schlegel du grand rhombi-cuboctaèdre, le pôle a été placé au-dessus d'une face octogonale. Pour les polyèdres semi-réguliers, on aura autant de diagrammes que de types de faces.



De gauche à droite, deux des cinq solides de Platon, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre, et le grand rhombi-cuboctaèdre, polyèdre archimédien.

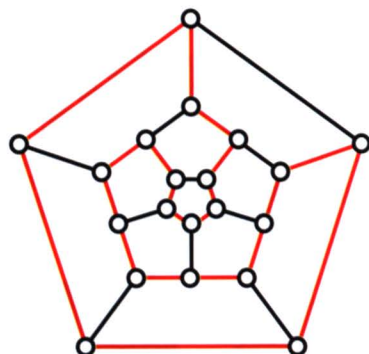


De gauche à droite, le diagramme de Schlegel du dodécaèdre, de l'icosaèdre et du grand rhombi-cuboctaèdre.



Les diagrammes de Schlegel présentent l'intérêt d'être plus faciles à manipuler que les polyèdres eux-mêmes. Si l'on cherche un coloriage du dodécaèdre régulier en quatre couleurs, plutôt que d'imaginer et visualiser l'objet, on va se concentrer sur son diagramme de Schlegel ! De même, les problèmes de dualité et de troncature sont facilités en passant par les diagrammes de Schlegel.

Le jeu icosien est lui aussi plus facile à résoudre ainsi. Inventé en 1855 par William Rowan Hamilton, le jeu consiste à trouver un chemin parmi les arêtes d'un dodécaèdre pour passer une seule fois par tous les vingt sommets, en revenant à son point de départ, sans passer deux fois par la même arête. Ce type de chemin deviendra *hamiltonien*. Comme on parcourt les vingt sommets, Hamilton le baptisa *icosien* (*ico* signifie vingt en grec, mais on parcourt bien les sommets d'un dodécaèdre régulier, et non pas d'un icosaèdre !).



Une solution du jeu icosien : le chemin rouge passe par tous les sommets une seule fois sans jamais emprunter deux fois la même arête (un chemin hamiltonien ne passe pas forcément par toutes les arêtes).


Un ami d'Hamilton, John Gaves, lui suggéra d'en faire un jeu. L'objet sera vendu 25 livres à la société John Jacques & Sons en 1859, qui l'éditera sous deux formes : un dodécaèdre où un lacet devait relier les sommets du dodécaèdre matérialisés par des pions, et un modèle à plat reprenant le diagramme de Schlegel du dodécaèdre où les pions représentent vingt villes du monde (d'où le titre du jeu, *Around The World*). Il existe trente solutions qui respectent la symétrie du dodécaèdre.

Les diagrammes de Schlegel transforment un polyèdre convexe en graphe, ce qui simplifie nombre de problèmes de combinatoire. Ils se révèlent plus utiles encore pour étudier les *polytopes* (l'équivalent des polyèdres en dimension 4), qui se transforment ainsi en assemblages de polyèdres tridimensionnels.

J.-J. D.

#### Références

- *Dimensions : une promenade mathématique*. Film disponible gratuitement en ligne, 2008.
- *Mathematical Recreations and Essays*. Walter William Rouse Ball et Harold Scott MacDonald Coxeter, Merchant Books, 2008.



La fourmi et le problème du voyageur de commerce	84
Un projet dans le bon ordre, la méthode PERT	88
L'algorithme de Dijkstra	92
Quand le chemin se joue aux dés	96
Un problème de téléphonie mobile	100
Des arbres pour faire passer les trains	104
Comment éviter les bouchons	108
Un arbre pour le théâtre	114
Entre sens et texte	118
Les livres dont vous êtes le héros	122

# Des applications à la vie quotidienne

De par leur structure purement topologique, les graphes sont un puissant outil d'aide à la décision. Les arêtes munies d'une pondération peuvent aussi bien représenter des distances entre deux sommets connectés que des temps de parcours ou des limites de capacité dans un réseau. C'est le point de départ de l'utilisation des graphes pour planifier et ordonnancer les tâches dans une chaîne de production, gérer les priorités dans un projet, hiérarchiser les étapes dans une suite d'instructions informatiques... et même constituer un réseau de voies pour faire passer des trains !

# La fourmi



## et le problème du voyageur de commerce

**Certains problèmes de mathématiques ont des solutions évidentes mais irréalistes en termes de temps de calcul. Peut-on alors trouver des solutions efficaces, des algorithmes rapides et universels ?**

**U**n voyageur de commerce veut se rendre dans un certain nombre de villes. Afin d'établir son itinéraire, il consulte une carte où figurent les distances entre les villes. Il doit trouver le chemin le plus court reliant toutes les villes et qui le ramène à son point de départ (une ville, à l'exception de la première, ne pouvant être visitée qu'une seule fois).

Notons  $V_1, V_2, \dots, V_n$  les villes de sa tournée. Partant de  $V_1$ , un itinéraire se résume à une permutation des  $n-1$  villes  $V_2, V_3, \dots, V_n$ , le circuit ainsi déterminé ayant deux sens de parcours. Il existe donc finalement  $[(n-1)!]/2$  itinéraires à considérer dès que  $n > 2$ .

### Les solutions évidentes

Une solution évidente vient immédiatement à l'esprit : tracer tous les chemins possibles, mesurer leur longueur et choisir celui qui est le plus court (il n'y a aucune raison que la solution trouvée soit unique ; plusieurs chemins optimaux peuvent avoir la même longueur). Cette méthode souffre d'un défaut rédhibitoire : dès que le nombre de villes est élevé, la résolution du problème du voyageur de commerce requiert un temps



de calcul tout à fait déraisonnable. Pour  $n = 10$ , le nombre d'itinéraires à explorer vaut 181 440. À raison d'une seconde de calcul par chemin, le temps de résolution dépasse cinquante heures. Pour les grandes valeurs de  $n$ , une formule due à Stirling donne une bonne approximation de l'ordre de grandeur de  $n!$  :

$$n! \approx \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

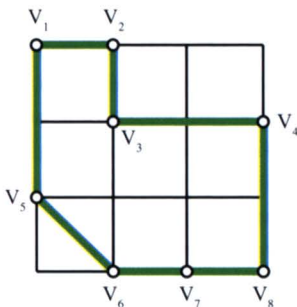
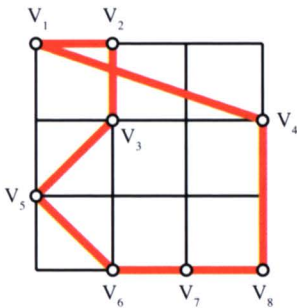
Une tournée passant par cent villes nécessite l'examen d'un nombre de parcours de l'ordre de  $10^{157}$  (environ

100 !); de quoi faire tourner un ordinateur personnel pendant plusieurs milliards d'années !

Une autre méthode « intuitive », née de l'expérience du terrain, consiste à choisir, à chaque étape, la ville la plus proche parmi celles qui n'ont pas été déjà visitées. Ce procédé, s'il élimine les parcours les plus longs, n'assure en rien, au final, la découverte de la meilleure solution.

Ainsi sur l'exemple suivant, le parcours tracé en rouge à l'aide de l'algorithme de « la ville la plus proche », de longueur  $6 + 2\sqrt{2} + \sqrt{10}$ , n'est pas le plus court. Le tracé vert, par exemple, est préférable ; sa longueur est de  $10 + \sqrt{2}$ .

Il est surprenant qu'un problème dont on connaît un algorithme de résolution exacte puisse être dans la pratique irrémédiablement intraitable. À l'heure actuelle, aucun algorithme efficace permettant de venir à bout du problème du voyageur de commerce n'a été découvert. Une méthode, économe en temps d'exécution, existe-t-elle ? La réponse à cette question est toujours pendante.



Les spécialistes du problème sont pessimistes ; toutes les solutions exactes envisageables, prédisent-ils, seront, peu ou prou, des avatars de la recherche exhaustive. Le voyageur serait condamné à errer éternellement, impuissant à résoudre un problème échappant à l'entendement humain.

### Des solutions approchées

S'il est illusoire de chercher des solutions exactes et efficaces, la détermination de solutions approchées n'est pas hors de portée. De nombreuses stratégies pertinentes ont été proposées : recuit simulé, 2-opt, algorithme de Lin et Kernighan, algorithme de Karp, algorithme de Keld Heldgaun, algorithme d'insertion, recherche avec tabous, algorithmes génétiques, algorithme ACO (voir en encadré)...

Les applications pratiques de ces méthodes d'optimisation sont innombrables : routage des journaux et des imprimés, gestion d'un parc de camions citerne pour l'approvisionnement en essence, prévision des délestages sur un réseau autoroutier engorgé, distribution des tâches entre différentes usines d'un même groupe, développement d'Internet, etc. Les recherches sur le problème du voyageur de commerce sont toujours d'actualité. La solution est peut-être au bout du chemin !

F. C.

### Références

- *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. Éric Bonabeau, Marco Dorigo et Guy Théraulaz, Oxford University Press, 1999.
- *L'intelligence en essaim*. Éric Bonabeau et Guy Théraulaz, Pour La Science, mai 2000.
- *L'efficacité des algorithmes*. Harry Lewis et Christos Papadimitriou, les Mathématiques aujourd'hui, Pour La Science-Belin, 1986.
- *Inspiration for optimization from social insect behaviour*. Éric Bonabeau, Marco Dorigo et Guy Théraulaz, Nature 406, 2000.

## Un travail de fourmis

Lors de leurs déplacements, les fourmis sécrètent une molécule, la phéromone, qui attire et guide leurs congénères. Si, entre le nid et une source de nourriture, on place un obstacle qui crée deux voies d'accès de longueurs inégales, on constate un phénomène étonnant. En un laps de temps très bref, les fourmis choisissent majoritairement le chemin le plus court. L'explication est simple. Au début de l'expérience, le hasard seul guide les fourmis. Les deux pistes sont alors explorées équitablement par l'avant-garde des fourmis. Lorsque les premières d'entre elles retournent au nid, elles ont marqué deux fois par des phéromones le trajet le plus court, invitant ainsi le reste de la colonie à emprunter de préférence ce chemin. Marco Dorigo, de l'université libre de Bruxelles, a transposé, dans une simulation informatique, la stratégie des fourmis au problème du voyageur de commerce. Notons  $d_{ij}$  la distance entre les villes  $i$  et  $j$ , et  $\tau_{ij}$  la quantité de phéromone sécrétée sur l'arête connectant  $i$  et  $j$ . Une même valeur  $\tau_0$ , peu élevée, est attribuée initialement à tous les  $\tau_{ij}$ . L'algorithme ACO (pour *ant colony optimization*) peut être résumé ainsi :

(1) Au début de la première itération, on choisit aléatoirement  $m$  villes. Une fourmi virtuelle est placée dans chacune de ces villes.

(2) Chaque fourmi, notée  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ), entreprend un tour complet, visitant chaque ville une seule fois et revenant à son point de départ. Lors de son périple, la fourmi actualise en permanence la liste  $J_k$  des villes non visitées. (L'algorithme initial de parcours peut être celui de « la ville la plus proche » ou tout autre algorithme donnant, en un temps raisonnable, un circuit acceptable.)

(3) Lors de la deuxième itération, une fourmi située dans la ville  $i$  choisit de se diriger vers la ville  $j$  non encore visitée, avec la probabilité suivante :

$$p_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [d_{ij}]^\beta}{\left( \sum_{i \in J_k} [\tau_{ij}]^\alpha [d_{ij}]^\beta \right)},$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres positifs qui gouvernent l'influence respective des phéromones diffusées ou évaporées et des distances parcourues.

(4) Quand toutes les fourmis ont achevé leur circuit, le tableau des phéromones est mis à jour :  $\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}$  où  $\rho$  est le taux d'évaporation et  $\Delta\tau_{ij}$  est le montant des contributions de marquage de l'arête  $(i, j)$ . Ainsi,  $\Delta\tau_{ij}$  est proportionnel à la qualité des solutions dans lesquelles  $(i, j)$  a été utilisée par une ou plusieurs fourmis.

Plus précisément, si  $L_k$  dénote la longueur du circuit  $T_k$  parcouru par la fourmi  $k$ ,

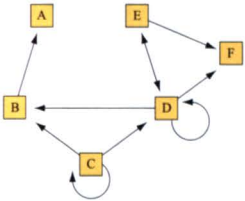
alors :  $\Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^m \Delta\tau_{ij}^k$ , avec  $\Delta\tau_{ij}^k = Q/L_k$  si  $(i, j) \in T_k$  et  $\Delta\tau_{ij}^k = 0$  sinon ( $Q$  est un paramètre positif). Cette

procédure de renforcement traduit l'idée que la densité des phéromones doit être plus forte sur les pistes courtes, un long trajet étant plus difficile à entretenir. Les étapes (1) à (4) sont répétées un nombre prédéfini de fois, ou jusqu'à l'obtention d'une solution stable. L'algorithme de la colonie de fourmis est très efficace. Il n'identifie pas nécessairement le circuit le plus court, mais ses solutions sont quasi-optimales et, comme l'affirment Éric Bonabeau et Guy Théraulaz, deux spécialistes de la question : « *Ce système est flexible : les fourmis artificielles explorent continuellement différentes voies ; les multiples pistes de phéromone fournissent donc des plans de secours. Ainsi, lorsqu'une voie est coupée, des solutions de rechange sont déjà prêtes. Cette propriété, qui explique sans doute le succès écologique des vraies fourmis, est cruciale pour de nombreuses applications.* »



# Le graphe du Web

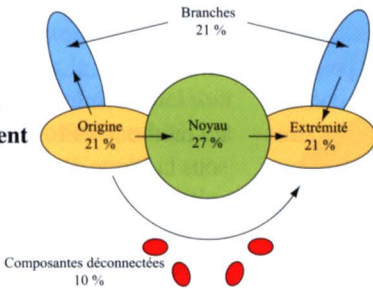
Les pages du Web sont (ou ne sont pas) reliées entre elles par des hyperliens, qui correspondent au clic que vous pouvez effectuer sur une page et qui vous mène à une autre.



Pour simplifier, les pages sont désignées par des lettres. Les flèches désignent les pages vers lesquelles chaque page pointe, c'est-à-dire les pages auxquelles on peut accéder en un clic de souris.

Ce graphe énumère toutes les pages avec leurs connexions, celles-ci correspondant aux liens que l'on peut atteindre en cliquant. Il est immense puisqu'il réunit plusieurs millions de pages. Il a souvent été modélisé par un nœud de papillon, mais ce modèle serait dû à la méthode qu'utilisent les robots pour le parcourir, il ne serait pas une réalité. Il ignore en particulier une grande partie des pages, qui sont de fait invisibles car déconnectées des autres.

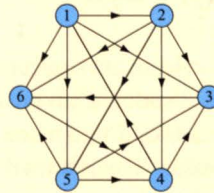
**Le nœud papillon.**  
Les flèches indiquent le sens des liens.



Les moteurs de recherche comme Google utilisent le graphe du Web pour donner les pages traitant d'un sujet donné, en les classant selon leurs degrés de pertinence. Ce classement est dû aux internautes eux-mêmes, qui font pointer leurs pages ou non vers telle ou telle autre. Chaque page a ainsi un score selon le nombre de pages pointant vers elle, score qu'elle distribue à celles sur lesquelles elles pointent. Ce classement des pages revient à mettre en avant les pages les plus populaires, qui ne sont pas forcément les plus pertinentes. D'autre part, la méthode ignore qu'une partie du Web est invisible ; ce sont les composantes déconnectées du graphe.

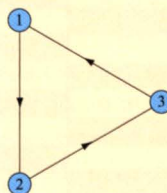
# Les tournois en théorie des graphes

En théorie des graphes, les *tournois* correspondent aux compétitions où tous les participants sont opposés les uns aux autres une et une seule fois. Dans le langage usuel des compétitions, on parle de « tournois toutes rondes simples ». Le graphe sous-jacent est un graphe complet orienté, où les participants au tournoi sont les sommets, et les couples de participants (orientés dans le sens de celui qui a perdu vers celui qui a gagné) sont les arêtes orientées.



**Un tournoi paradoxal à six sommets.**

Si un tournoi possède  $n$  sommets, il a donc  $n(n - 1)/2$  arêtes. Si un joueur gagne toutes les parties, il est clairement le vainqueur mais il existe des tournois, dits *paradoxaux*, où chaque joueur perd au moins une partie. Pour déterminer un vainqueur, on peut calculer le *score*, c'est-à-dire le nombre de parties gagnées de chacun. Dans le tournoi correspondant à la figure ci-dessus, 1 et 2 sont *ex-aequo* avec quatre parties gagnées. On peut imaginer de considérer que 1 est le vainqueur puisqu'il a gagné le match qui l'opposait à 2. La situation peut cependant être plus compliquée. Par exemple, dans le tournoi paradoxal à trois joueurs correspondant à la figure ci-dessus, il est difficile d'imaginer une règle pour déterminer un vainqueur puisque chaque joueur possède le même score !



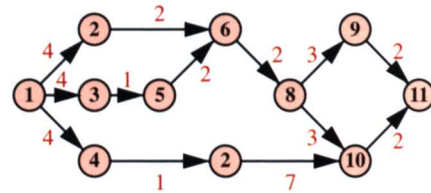
**De nos jours, les tournois sont utilisés dans la théorie des systèmes électoraux et, de façon plus générale, pour certaines questions de choix en société.**

# Un projet dans le bon ordre : la méthode PERT\*

La construction d'une maison ou d'un avion supersonique passe par l'exécution d'un certain nombre de tâches. Comment les ordonner pour gagner du temps ?

Les tâches nécessaires à la réalisation d'un projet comme l'envoi d'une fusée sur la lune sont diverses. Si certaines d'entre elles peuvent être réalisées simultanément, d'autres en revanche doivent être menées dans un certain ordre : par exemple, les murs d'une maison doivent être dressés avant de poser la charpente. De plus, chaque tâche prend un certain temps. La première étape de la conception d'un projet consiste donc à énumérer les tâches nécessaires à sa réalisation, à évaluer leur temps d'exécution et leurs antériorités relatives. Par exemple, le tableau ci-dessous énumère les tâches relatives à la construction d'un entrepôt.

Il s'agit ensuite d'ordonner ces tâches en respectant les conditions d'antériorité et en minimisant la durée totale d'exécution.



La méthode PERT consiste à modéliser sous la forme d'un graphe les différentes contraintes. On représente chaque tâche par un sommet et on visualise la nécessité de réalisation de la tâche  $i$  avant l'exécution d'une tâche  $j$  par une flèche allant de  $i$  à  $j$ , flèche sur laquelle figurera la durée de la tâche  $i$ . Le projet de construction de l'entrepôt précédent prend alors la forme suivante :

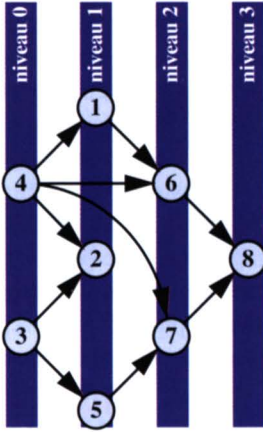
À l'aide d'un tel graphe, on peut ordonner « à la main » le projet. En l'occurrence, sa durée minimale est de quatorze jours et correspond à l'exécution des tâches 1, 4, 7, 10. Le chemin correspondant est appelé *chemin critique* : tout retard pris le long de ce chemin rallonge d'autant la durée d'exécution du projet. En revanche, des retards pris sur les autres tâches n'auront pas d'in-

Construction d'un entrepôt

n°	Tâche	Tâche(s) prérequis(e)s	Durée (en jours)
1	Acceptation des plans		4
2	Creusage des fondations	1	2
3	Commande des matériaux	1	1
4	Commande des huisseries	1	1
5	Livraison des matériaux	3	2
6	Coulage des fondations	2 et 5	2
7	Livraison des huisseries	4	7
8	Pose des murs	6	3
9	Pose du toit	8	2
10	Pose des huisseries	7 et 8	2
11	Livraison de l'entrepôt	9 et 10	

cidences aussi immédiates, ce qui peut permettre quelques battements.

**Le plus long chemin**



Le graphe précédent est sans cycle, autrement dit les flèches ne permettent pas de retour en arrière. Un tel graphe peut alors être hiérarchisé « par niveaux » de sorte que tout arc mène d'un sommet vers un sommet de niveau supérieur, comme dans l'exemple ci-contre. On complète en outre le graphe d'un sommet F dit de *finalisation*, auquel sont reliés tous les autres sommets (F est placé au niveau le plus élevé). Concrètement, supposons disposer d'un projet formé de neuf tâches dont les interdépendances sont données par le tableau. Le graphe orienté associé est représenté ci-dessous. Les tâches ont été numérotées par niveaux croissants (les flèches vers F ne sont pas représentées pour des raisons de clarté).

Tâche	Tâche(s) prérequis(e)s
1	aucune
2	aucune
3	1
4	2, 1
5	2
6	3
7	1, 2, 5
8	4, 7
9	5, 7

## Algorithme de calcul du chemin le plus long

• Initialisation :

Hiérarchiser le graphe par niveaux.  
 Pour tous les sommets  $j$  du graphe,  
 Si le sommet  $j$  est de niveau 0  
 alors poser  $L(j) = 0$  sinon poser  $L(j) = -\infty$ .

• Détermination des plus grandes longueurs

Pour chaque niveau  $k$  par ordre croissant :

Pour tout sommet  $i$  de niveau  $k$  :

Pour tout sommet  $j$  successeur de  $i$  :

Poser  $d = L(i) + \text{poids}(i, j)$

Si  $d > L(j)$  alors poser  $L(j) = d$

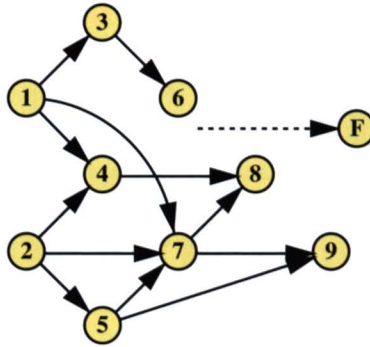
Cet algorithme détermine les  $L(i)$  en commençant par les sommets de niveau 0, puis 1, etc. Lorsque les  $L(i)$  des sommets de niveau  $k$  sont déterminés, l'algorithme détermine, pour chaque successeur  $j$  de  $i$ , la plus grande longueur menant à  $j$  en transitant par  $i$  (c'est le rôle de la variable  $d$ ). Cette longueur est ensuite comparée à la plus grande longueur menant à  $j$  déjà déterminée, de sorte à conserver la plus grande des deux.



\* **PERT**, pour *program evaluation and review technic* (ou *technique d'ordonnancement et de contrôle des programmes*) est une méthodologie inventée en 1957 par l'US Navy

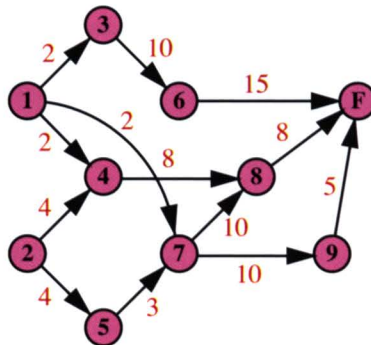
pour le projet Polaris (missiles à longue portée embarqués dans des sous-marins et dotés

d'une ogive nucléaire). Cette technique a permis de coordonner les travaux de près de six mille constructeurs dans les délais imposés par le gouvernement américain. Ce projet représentait deux cent cinquante fournisseurs et neuf mille sous-traitants. L'utilisation de PERT a permis de ramener la durée globale de réalisation du projet de sept à quatre ans. Un des autres titres de gloire de cette méthode est attaché à la conquête de la lune : sept ans seulement ont séparé la déclaration d'intention du président John Kennedy et l'alunissage du module lunaire de Neil Armstrong et Buzz Aldrin.



D'emblée, on constate que certains arcs sont inutiles, comme celui de 2 à 7 (car 7 nécessite 5, qui nécessite elle-même 2). En épurant ainsi le schéma, on obtient un nouveau graphe sur lequel a également été reporté la durée de chacune des tâches : le graphe est dit *pondéré*. On appelle *longueur* d'un chemin allant de  $i$  à  $j$  la somme des poids des arcs constituant ce chemin.

Tâche	Durée
1	2
2	4
3	10
4	8
5	3
6	15
7	10
8	8
9	5



Les tâches de niveau 0 peuvent être commencées immédiatement et, pour toute autre tâche  $i$ , la meilleure date de commencement est égale à la durée du plus

long chemin menant d'un sommet de niveau 0 au sommet  $i$ . Par ailleurs, la plus courte durée d'exécution du projet correspond à la date de commencement du sommet de finalisation.

Il faut donc pouvoir déterminer la longueur  $L(i)$  de ce plus long chemin jusqu'à  $i$ . Essayer tous les chemins et retenir le plus long est impossible si les sommets du graphe se comptent par centaines : il existe heureusement des algorithmes pour venir à bout du problème en un temps raisonnable (voir un exemple en encadré). On aboutit ainsi à une durée d'exécution du projet de vingt-sept jours, dont l'ordonnancement est le suivant :

jour 0	début tâches 1 et 2
jour 2	début tâche 3
jour 4	début tâches 4 et 5
jour 7	début tâche 7
jour 12	début tâche 6
jour 17	début tâches 8 et 9

Qu'on ne s'y trompe pas : facile à faire à la main pour de petits projets, l'ordonnancement des tâches montre vite l'écrasante supériorité de la méthode PERT pour des projets d'envergure.

D. D.



## Aux origines de la RO

Le Britannique Charles Babbage (1791–1871) est souvent considéré comme le père de la recherche opérationnelle (RO). C'est en effet lui qui mena les premiers travaux concernant les coûts de transport de la poste à l'échelle d'un pays. Ce qui aboutit, le 10 janvier 1840, à une tarification uniforme (un *penny*) pour envoyer une lettre d'un point à l'autre du Royaume-Uni, quelle que soit la distance parcourue par cette lettre. Le principal avantage d'un système uniforme de tarification est de simplifier l'envoi de lettres par les utilisateurs de la poste, qui pouvaient facilement être abusés. De fait, le service postal devint à cette période très démocratique. La RO fait un usage intensif de modèles mathématiques, de statistiques, de théorie des graphes et d'algorithmique, souvent dans le but d'optimiser (minimiser ou maximiser) une fonctionnelle représentant par exemple un coût ou un temps d'intervention.

### Références

- Dossier « La recherche opérationnelle ». *Tangente* 126, pages 35–54, janvier–février 2009.
- *La recherche opérationnelle*. Vidal Cohen, Que sais-je ? 941, Presses universitaires de France, 1995.

## Le rôle de la guerre froide et de l'armée



En 1948 fut fondée aux États-Unis RAND Project (aujourd'hui RAND Corporation, acronyme pour *Research and Development*), organisation à but non lucratif dédiée à l'aide à la décision. Un de ses premiers objectifs est de développer l'analyse systémique afin de combler une carence majeure : l'absence d'une défense aérienne américaine performante face à la montée en puissance du bloc soviétique. Dans les années 1950, les chercheurs du RAND Project, et notamment George Dantzig (1914–2005), introduisirent la programmation linéaire, la programmation dynamique et développèrent la théorie des jeux. Avec ses mille six cents employés, cette organisation est toujours très active dans le domaine de la RO.

En France, ce sont les entreprises et l'armée qui, les premières, vont s'intéresser à la recherche opérationnelle. L'hostilité des universitaires envers tout ce qui touche aux mathématiques dites appliquées y est en effet très forte jusqu'à la fin des années 1960. Pourtant, un engouement existe bel et bien, tant de la part des ingénieurs que des étudiants, ce qui permet à la RO de prendre racine. Aujourd'hui, grâce au développement de l'informatique, elle est appliquée dans presque tous les domaines : transports, télécommunications, production, logistique, finance, assurance, gestion des données...

# L'algorithme de Dijkstra

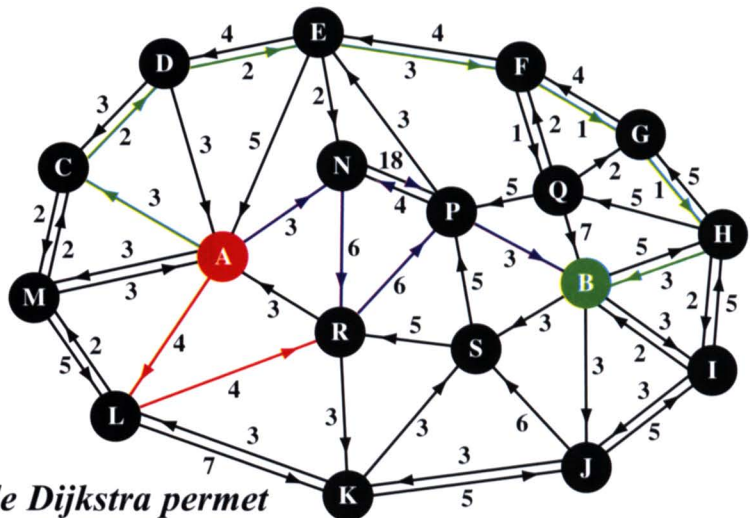
Savoir quelles sont les routes embouteillées, c'est bien, mais encore faut-il déterminer rapidement le chemin à suivre pour aller le plus vite possible d'un point à un autre. L'algorithme de Dijkstra est celui qui, à l'heure actuelle, est le plus performant pour résoudre ce problème.

Un problème important est de savoir comment rejoindre le plus vite possible un point B partant d'un point A lorsque le système de navigation d'un conducteur automobile lui fournit les temps moyens de parcours de chacun des axes possibles en fonction de la densité du trafic. En voici un exemple :

Si on veut essayer tous les chemins possibles de A vers B (en excluant les cycles), on arrive vite à un nombre colossal. En moyenne, trois flèches partent de

chaque point : en partant de A, les trajets composés d'une arête seraient donc au nombre de 3, de deux arêtes, au nombre de  $3^2$ , et ainsi de suite. On trouve donc  $3^n$  trajets de  $n$  arêtes. En se limitant à sept arêtes, on trouve déjà plus de deux mille trajets.

Pour des trajets sur des graphes comportant des centaines d'arêtes, avec un ordinateur examinant un milliard de trajets à la seconde, il faudrait plus de  $10^{30}$  années pour venir à bout du problème. Le monde est loin d'être aussi vieux !



*L'algorithme de Dijkstra permet d'éviter l'explosion combinatoire.*

## Trouver sa route rapidement

Comment faire ? Une solution est apportée par l'algorithme de Dijkstra. L'observation clé est la suivante : si un chemin optimal de A vers B passe par un sommet X, alors la partie de ce chemin allant de A à X est un itinéraire optimal de A vers X. En effet, s'il existait un chemin plus rapide de A vers X, il permettrait de réduire le trajet de A vers B. On associe alors, à chaque sommet X (autre que A), son *prédécesseur*  $p(X)$ , c'est-à-dire le sommet immédiatement précédent dans le chemin optimal menant de A à X. Dans l'exemple ci-dessus, on a  $p(B) = H, p(H) = G$ , et ainsi de suite jusqu'à  $p(C) = A$ . La fonction  $p$  permet de reconstruire, de proche en proche, pour chaque sommet X, un chemin optimal de A vers X. On note  $t(X)$  le temps de parcours correspondant.

Au départ, on ne dispose pas des valeurs définitives de  $t(X)$  et de  $p(X)$  : on se contente donc de valeurs provisoires, respectivement  $\tau(X)$  et  $\pi(X)$ , données par le meilleur itinéraire de A vers X actuellement connu. Ces valeurs vont évoluer, par améliorations successives, vers les valeurs définitives.

Appelons  $\Omega$  l'ensemble des sommets du graphe pour lesquels on sait que les fonctions  $t$  et  $p$  ont atteint leurs valeurs définitives.

L'algorithme de Dijkstra consiste à faire grossir de proche en proche  $\Omega$  en lui adjoignant, à chaque itération, un nouveau sommet. Voici comment. Au démarrage, on pose  $\Omega = \{A\}$  avec  $\tau(A) = t(A) = 0$  (le trajet optimal de A vers A prend un temps nul, par un chemin formé de zéro arête). Pour les sommets X différents de A, on ne connaît pas de chemin et on initialise donc  $\tau(X)$  à  $+\infty$  en convenant que, tant que  $\tau(X)$  n'aura pas de valeur finie,  $\pi(X)$  ne sera pas défini.

## Exemple d'exécution de l'algorithme de Dijkstra

Dans l'exemple de la page précédente, on initialise l'algorithme avec  $\Omega = \{A\}$ ,  $t(A) = 0$  et  $\tau(X) = +\infty$  pour tout sommet X autre que A.

### Première itération

On considère les arêtes ayant leur origine en A : AC, AL, AM et AN, ce qui nous amène à poser :

$$\tau(C) = 3, \tau(L) = 4, \tau(M) = 3, \tau(N) = 3,$$

$$\pi(C) = \pi(L) = \pi(M) = \pi(N) = A.$$

Parmi ces quatre sommets (C, L, M et N), il faut en trouver un minimisant le temps de parcours : C par exemple.

On pose donc  $t(C) = 3$  et  $p(C) = A$ .

Continuons l'algorithme avec  $\Omega = \{A, C\}$ ,  $t(A) = 0$ ,  $t(C) = 3$ ,

$p(C) = A$ ,  $\tau(L) = 4$ ,  $\tau(M) = 3$ ,  $\tau(N) = 3$  et les autres à  $+\infty$ ,  $\pi(L) = \pi(M) = \pi(N) = A$ .

### Seconde itération

On considère les arêtes ayant leur origine en A ou C, c'est-à-dire AL, AM, AN, CD et CM.

La première étape conduit à poser  $\tau(D) = 6$ ,  $\pi(D) = C$ .

Choisissons M. On pose donc  $t(M) = 3$ ,  $p(M) = A$ .

Poursuivons donc l'algorithme avec  $\Omega = \{A, C, M\}$ ,

$t(A) = 0$ ,  $t(C) = 3$ ,  $t(M) = 3$ ,

$\tau(D) = 6$ ,  $\tau(L) = 4$ ,  $\tau(N) = 3$  et les autres à  $+\infty$ ,

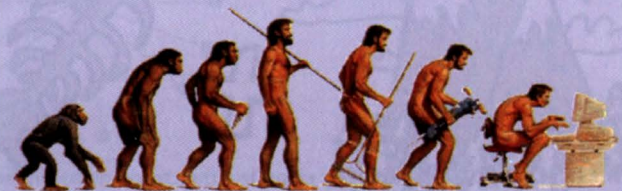
$\pi(L) = \pi(N) = A$  et  $\pi(D) = C$ .

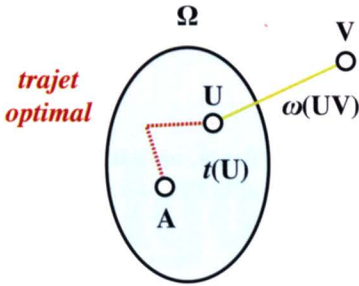
### Troisième itération

On considère les arêtes AL, AN, CD et ML. Les deux étapes conduisent à  $\Omega = \{A, C, M, N\}$ ,  $t(N) = 3$  et  $p(N) = A$ .

### Quatrième itération

Les arêtes à considérer sont AL, CD, ML, NP et NR. Le point suivant à être englobé dans  $\Omega$  est L avec  $t(L) = 4$  et  $p(L) = A$ .





Une itération se fait en deux étapes. D'abord, on sélectionne toutes les arêtes UV dont l'origine U est dans  $\Omega$  et dont l'extrémité V est extérieure à  $\Omega$ .

Pour chacune d'elles, on connaît un trajet optimal de A vers U (car U est dans  $\Omega$ ). En prolongeant ce trajet jusqu'à V, on a un temps total de parcours égal à  $t(U) + \omega(UV)$ , où  $\omega(UV)$  est le « poids » de l'arête UV (proportionnel au temps de parcours de U à V).

Si cette somme est inférieure à  $\tau(V)$ , ce trajet pourrait être un chemin optimal vers V, et on le retient en posant  $\tau(V) = t(U) + \omega(UV)$  et  $\pi(V) = U$ .

Ces valeurs restent toujours relatives au meilleur itinéraire actuellement connu (notons que V peut être touché par plusieurs arêtes).

**Bourgeoisements successifs**

Dans une seconde étape, on choisit, parmi les sommets X extérieurs à  $\Omega$  et tels que  $\tau(X) < +\infty$  (et où  $\pi(X)$  est donc défini), un X qui minimise  $\tau(X)$ . Le trajet optimal de A vers  $\pi(X)$  (qui est dans  $\Omega$ ) suivi de l'arête joignant  $\pi(X)$  à X est alors un trajet optimal vers X. En effet, s'il existait un trajet plus rapide, en notant Y le prédécesseur de X dans ce

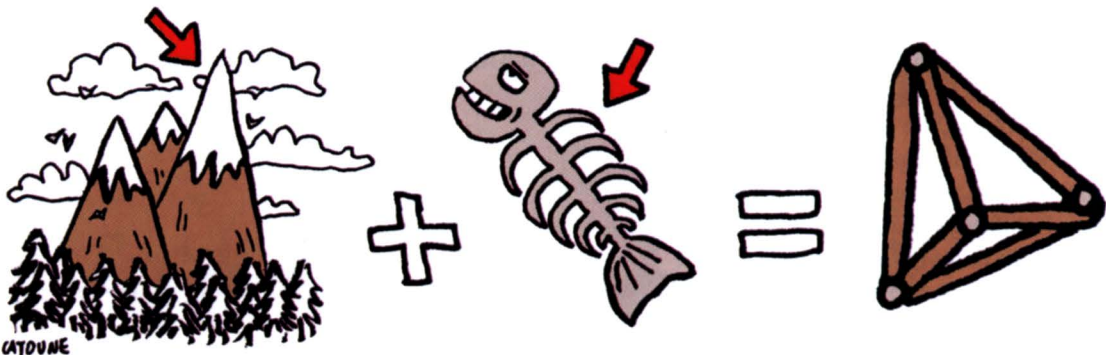
dernier trajet, Y devrait être dans  $\Omega$  (car Y a dû, lors d'une étape précédente, être inclus dans  $\Omega$ ), ce qui contredit la définition de X.

Le sommet X ainsi trouvé est ensuite rajouté à l'ensemble  $\Omega$ , et on pose  $p(X) = \pi(X)$  et  $t(X) = \tau(X)$ , ce qui termine cette itération : on recommence alors avec le nouvel ensemble  $\Omega$  « grossi » qui, de proche en proche, finira ainsi par contenir le point B qui nous intéresse (sauf si le schéma de circulation rend inaccessible le point B partant de A), marquant la fin de l'exécution de l'algorithme.

L'algorithme de Dijkstra fournit l'itinéraire optimal de A vers B ainsi que les itinéraires optimaux pour tous les points qui, partant de A, sont plus rapides à atteindre que B. Le temps de calcul, proportionnel au carré du nombre d'éléments de  $\Omega$ , reste raisonnable, même pour des réseaux routiers à l'échelle d'un pays.

Pour un réseau routier réel, avec des temps de trajets à peu près proportionnels aux distances, la zone  $\Omega$  analysée ressemble très grossièrement à un disque centré en A et de rayon la distance AB. Elle regroupe un nombre de sommets proportionnel au carré de cette distance et, donc, les temps de calculs croissent donc à peu près comme la puissance quatrième de AB.

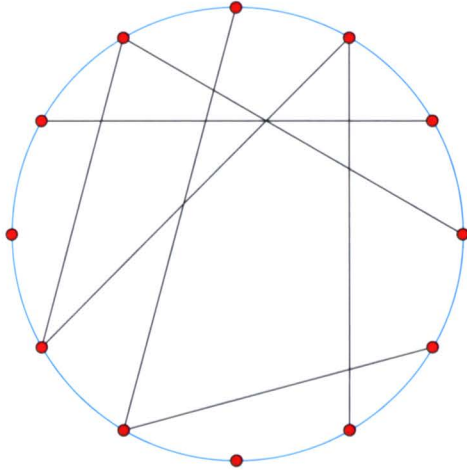
J.-L. S.





# Le graphe des épidémies : Ébola, sida et grippe

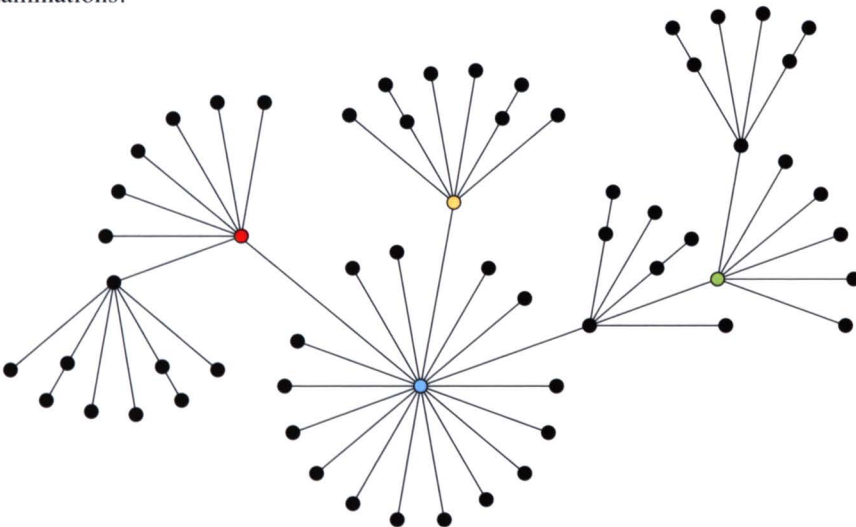
Imaginons une région où sévit une maladie se propageant par contact, dont la nature dépend du virus impliqué. Quiconque rentre en contact avec une personne malade devient malade avec une certaine probabilité, disons 5 % pour fixer les idées. Si l'on considère les individus comme les sommets et les contacts potentiellement contaminants comme les arêtes, on obtient un graphe.



Graphe des contacts potentiellement contaminants entre individus.

L'ensemble des sommets restant le même, on peut modéliser l'évolution de l'épidémie en tirant au sort chaque jour un certain pourcentage d'arêtes, disons 20 %. Le premier jour, on introduit un sommet infecté, qui contamine les sommets adjacents dans la journée avec une certaine probabilité. En itérant le procédé un certain nombre de fois, disons cent fois, on obtient un modèle mathématique de l'évolution de l'épidémie. Comme la question comprend une part aléatoire, on recommence le procédé un grand nombre de fois pour faire une moyenne. Ces simulations montrent l'existence d'un seuil au-delà duquel l'épidémie se répand à la population entière, et en-deçà duquel elle reste limitée. Dans le cas où un vaccin existe, son utilisation, même sur une fraction de la population, peut faire diminuer la probabilité de contamination en dessous du seuil d'expansion de l'épidémie, et donc suffire à l'arrêter.

Ce modèle est malgré tout imparfait car certains ont plus de contacts avec les personnes infectées que d'autres : le personnel médical dans le cas de la grippe et d'Ébola et les gens ayant de multiples partenaires sexuels dans le cas du sida. C'est vers eux que doit porter l'essentiel de la protection, pour éviter les contaminations.



Graphe des contacts potentiellement contaminant entre personnes.

Une attention particulière doit être portée à celles correspondant à des disques colorés.

# Quand le chemin se joue aux dés

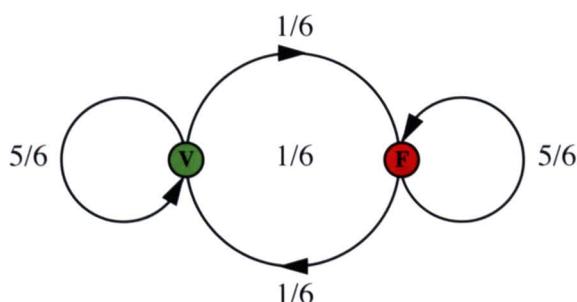
L'alliance des graphes et de la théorie des probabilités produit un outil extrêmement utile : les chaînes de Markov. Celles-ci se retrouvent partout, de l'étude des flux migratoires à l'analyse du langage.

La situation du téléphone arabe consiste en une chaîne de personnes qui se transmettent tour à tour une information provenant d'un informateur initial  $I_0$ . Cette informateur donne la nouvelle à  $I_1$ , qui la transmet à son tour à  $I_2$ . Comme chacun sait, le téléphone arabe est un moyen peu sûr de faire circuler l'information : on considère donc qu'il y a une chance sur six (par exemple) pour que  $I_1$  se trompe. De la même façon, lorsque  $I_2$  transmet à son tour ce qu'il a entendu à  $I_3$ , on suppose qu'il y a une chance sur six pour qu'il se trompe, et ainsi de suite. Quel crédit le destinataire de l'information,  $I_n$ , peut-il alors accorder à la version qui lui parvient ?

Bien entendu, cette question peut se

formuler de façon plus « sérieuse » : on pense notamment aux altérations qui se produisent lors de la circulation de données informatiques lors de sauvegardes, de transmission par Internet, de duplication, *etc.* La situation peut se modéliser à l'aide du graphe ci-contre.

Ce graphe possède deux sommets : V correspond à la situation où la version de la nouvelle qui circule est la vraie, F celle où elle est la fausse. Les arêtes, orientées, indiquent les transitions possibles. Chacune de ces arêtes est affectée d'un coefficient correspondant à sa probabilité dans notre situation du téléphone arabe. À la différence des coefficients qui ont cours dans le problème d'un itinéraire routier, par exemple, les valeurs attribuées à chacune de nos arêtes ne représentent pas un « coût » pour passer de l'un à l'autre sommet, mais une « probabilité de passage ». Pour simuler la situation du téléphone arabe, il suffit de se placer d'abord sur le sommet V, puis de lancer le dé  $n$  fois de suite : à chaque fois que le résultat est 6, on change de sommet (on passe sur le sommet F si on était sur V et inver-



sement). Ce qui nous intéresse est de savoir sur quel sommet nous nous trouverons à l'issue des  $n$  lancers de dé.

## Téléphone arabe

Bien entendu, l'évolution de notre position sur le graphe étant soumise à l'aléa (le mot signifie « dé » en latin), il n'est pas possible d'espérer une réponse déterminée. Tout ce que l'on peut faire, c'est d'estimer des probabilités. L'outil mathématique le plus naturel pour étudier le comportement à la limite (c'est-à-dire lorsque  $n$  devient grand) de la probabilité de finir sur V ou sur F est celui de suite récurrente. Il permet de montrer que, lorsque le nombre  $n$  de transmetteurs devient important, la probabilité que la nouvelle transmise soit la bonne tend vers la valeur  $1/2$ . Ce résultat traduit le fait que l'information qui parvient à  $I_n$  est vide, au sens où il y a « une chance sur deux » pour que ce soit la bonne version qui lui parvienne, et également une chance sur deux pour que ce soit la mauvaise. Le destinataire de l'information ne peut donc pas accorder le moindre crédit à ce qui lui est dit ! Cette étude s'étend à des situations plus générales. Le cas le plus global se décrit à partir d'un ensemble de points caractérisant les états possibles. Les états sont reliés par des arêtes indiquant les transitions envisageables, chacune d'elles étant affectée d'une certaine probabilité. Dans un graphe comme celui de la précédente figure, contrairement à notre premier exemple, les différents états ne sont pas égaux en termes de probabilités. S'il est relativement facile de se persuader que l'état D a peu de chances de survenir souvent à long terme, il est un peu plus délicat de se convaincre de ce que, en réalité, on a toutes les chances de finir coincé au point A. Dans les cas les plus généraux, où il n'y a pas d'at-

tracteur (c'est-à-dire d'état qui, une fois atteint, ne peut être quitté), chaque état a une certaine probabilité de figurer à long terme parmi les états visités.

## Les cases du Monopoly

D'un point de vue ludique, la modélisation par un tel graphe permet d'étudier les jeux de hasard comme le Monopoly : c'est à partir d'une chaîne de Markov, un peu longue à détailler, qu'on peut déterminer les cases du jeu sur lesquelles les joueurs ont le plus de chances de tomber (les cases ne sont pas toutes égales en termes de probabilités, même à long terme). Avec l'image du chauffeur de taxi, les sommets du graphe représentent les différents endroits de la ville où le chauffeur est susceptible d'aller, les probabilités des arêtes les chances d'aller à tel ou tel endroit. Dans la figure précédente, le point « répulsif » D est alors un point central dans la ville, où un chauffeur de taxi ne reste en général pas longtemps avant qu'un client ne se présente. Le point A, en revanche, est un point à l'écart, où le chauffeur n'a guère intérêt à accepter de se rendre. D'autres contextes rendent plus utile l'étude des graphes précédents. En particulier, on peut penser aux flux migratoires entre différents pays (les probabilités se muant alors en proportions d'une population), à l'évolution de l'état de santé d'un individu (les sommets représentant les différents stades de différentes maladies qui peuvent se contracter à la suite les uns des autres), ou encore à la circulation automobile (les sommets représentant des nœuds de circulation, les arêtes les axes entre ces nœuds, et les probabilités des proportions de véhicules). Certaines études de la langue utilisent également les chaînes de Markov. Dans un texte, l'apparition de telle ou telle lettre n'est pas indifférente à l'apparition

de la suivante. Par exemple, en lisant la suite de caractères

C O N S T A N T I N O P L,  
chacun conviendra que la probabilité que le caractère suivant soit un E est extrêmement élevée. Une première approche de l'étude probabiliste d'un texte est alors la suivante : on considère un graphe constitué de vingt-sept sommets (chacun représentant une lettre de l'alphabet, plus l'espace, désignant la fin du mot). Les arêtes reliant les sommets sont affectés de coefficients représentant la probabilité qu'une lettre soit suivie par une autre. Bien sûr, ces coefficients dépendent de la langue dans laquelle les mots sont considérés. En français, par exemple, du sommet Q ne partent que peu d'arêtes, celle menant à U étant affectée d'une très forte probabilité.

Dans ce contexte de « graphe de Markov de la langue française », une étude comme celle du téléphone arabe ne peut avoir pour objectif de déterminer une « lettre ultime » d'un texte écrit en français. Elle donne plutôt la fréquence moyenne d'apparition de chaque lettre, et permet donc de savoir par quelle lettre commencer (on tire au sort, en affectant à chaque lettre une probabilité proportionnelle à sa fréquence moyenne d'apparition). On peut aussi s'intéresser à la fabrication de « non-sens français » : en suivant le graphe de Markov selon les règles indiquées et en notant

à la suite les lettres rencontrées en chemin, on produit une succession de lettres qui ne constituent pas un message français, mais qui ressemble à quelque chose de français.

**Du AAAAA à ZZZZ**

En réalité, pour rendre le modèle plus précis, il faut tenir compte non pas de la dernière lettre vue, mais de plusieurs : ici, la probabilité d'apparition d'un E est beaucoup plus élevée après la lecture des treize lettres précédentes qu'après la lecture de la lettre L seule. Bien, sûr, la connaissance des douze dernières lettres (le C étant exclu) aurait suffi : en réalité, une approximation assez raisonnable consiste à supposer qu'au-delà d'un écart de quelques lettres, il n'y a plus suffisamment de lien entre les lettres pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte. Si l'on décide de s'en tenir à, disons, cinq lettres, le graphe de Markov a pour sommets l'ensemble des suites de cinq lettres (de AAAAA à ZZZZZ en passant par YOUPI, MIAOU... sans oublier les séquences avec un ou plusieurs espacements, tels que VAS Y). D'un sommet tel que GRAPH partent alors vingt-sept arêtes, affectées de probabilités diverses, aboutissant à toutes les suites de caractères dont les trois premières lettres sont RAPH (RAPHA, RAPHB, RAPHC...).

La séquence ci-dessous a été réalisée informatiquement à partir de ces considérations pour le graphe de Markov du latin :  
IBUS CENT IPITIA VETIS IPSE CUM VIVIVS...  
Aucun mot n'a de sens dans la langue concernée, et pourtant il est manifeste que cela ressemble fort à de « vrais mots » de latin. Pour un peu, on se prendrait à croire que l'ordinateur cherche à nous dire quelque chose...

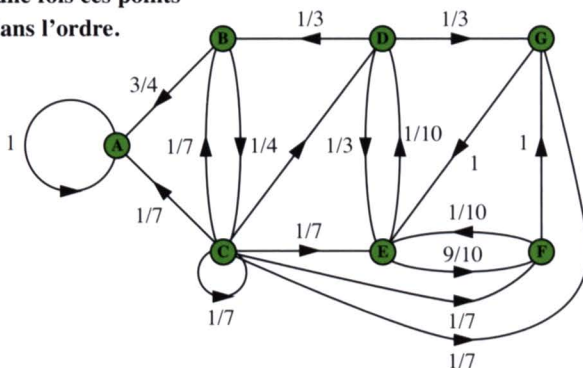
B. R.

Dans cette figure, le point

A est un « trou » ou « puits » : dès qu'on arrive dessus, on ne peut plus en sortir. À l'inverse, le point

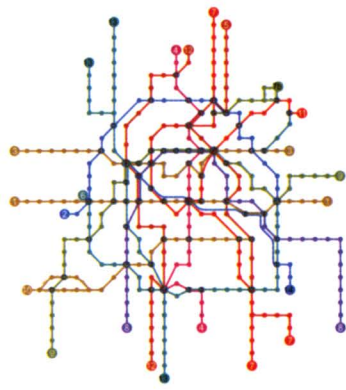
D est répulsif : à peine arrivé dessus, on est obligé d'en repartir. Le point C est en quelque sorte neutre : il permet d'aller n'importe où sans préférence particulière. Enfin, les points E, F et G constituent quasiment une

boucle : il y a une probabilité très forte pour que, arrivé sur E, on suive au moins une fois ces points dans l'ordre.



## Les problèmes de cheminement

Les indicateurs lumineux du métro parisien donnent aux voyageurs qui les interrogent le trajet qui mène à la station où ils veulent se rendre. C'est un exemple de *problème de cheminement* : trouver le chemin le plus court d'un point à un autre. Parfois, le critère est plus complexe, par exemple si l'on intègre le nombre de correspondances et le temps qu'elles prennent. Ces problèmes se résolvent à l'aide de graphes, d'algorithmes et (souvent) de puissants ordinateurs.

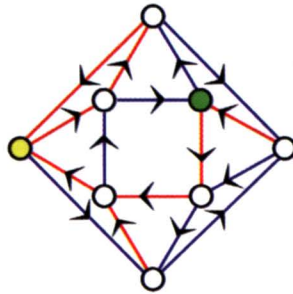


Dans le cas des circuits électriques, les arêtes du graphes se voient attribuer une capacité maximale, l'intensité que peut supporter chaque fil. Le problème consiste alors à rechercher le chemin entre deux points supportant

l'intensité maximale (et, par la même occasion, cette intensité maximale). D'ailleurs, apporter le courant jusqu'à votre cuisine n'est pas une tâche aisée ! D'un côté, Électricité de France dispose d'un certain nombre de centrales, chacune pouvant ou non être mise en service. De l'autre, il existe des millions de points de consommation. Entre les deux se trouvent les lignes électriques. Tout cela constitue un graphe extraordinairement complexe ! Si trop de centrales sont en service, il se produit des surtensions, qui détériorent les appareils. Si trop peu de centrales sont en service, la demande n'est pas satisfaite. En outre, les centrales doivent être choisies de sorte que le courant passant sur les lignes à haute tension n'excède pas leur capacité ! Et quand on intègre les coûts de fonctionnement (une centrale nucléaire coûte moins cher qu'une centrale thermique), on comprend que EDF fourmille de beaux problèmes de maths à résoudre en temps réel. Par contre, en cas d'échec, le système s'effondre, comme c'est arrivé un jour froid de décembre 1978, où des millions de Français se sont retrouvés privés de courant...

## Le problème de coloriage de Weiss résolu

Vous arrivez dans une ville que vous ne connaissez pas, et vous devez vous rendre à un endroit bien précis. Le problème est que dans cette ville les rues ne possèdent pas de nom et sont toutes à sens unique (comme dans un graphe orienté...). À chaque intersection, vous avez la possibilité de continuer tout droit, de tourner à droite ou de tourner à gauche. Le problème abstrait posé par Roy Adler et Benjamin Weiss en 1970 est le suivant : existe-t-il des graphes orientés pour lesquels une suite d'instructions finies (par exemple : gauche, droite, droite, tout droit, gauche) permet de rejoindre le point d'arrivée, quel que soit le point de départ ? Lesquels ?



**En suivant (et répétant si nécessaire) les instructions « bleu, rouge, rouge », on arrive toujours sur le sommet jaune, quel que soit le point de départ. Par contre, si l'on suit les instructions « bleu, bleu, rouge », on arrive toujours sur le point vert.**

Ce joli problème est resté ouvert pendant trente-sept ans, jusqu'à ce que le mathématicien israélien Avraham Trahtman propose une caractérisation des graphes qui peuvent posséder une telle solution.

### Référence

- [siliconwadi.fr/4854/un-probleme-ouvert-depuis-37-ans-resolu-par-un-mathematicien-israelien-auparcours-peu-habituel](http://siliconwadi.fr/4854/un-probleme-ouvert-depuis-37-ans-resolu-par-un-mathematicien-israelien-auparcours-peu-habituel) (disponible en ligne).

# Un problème de téléphonie mobile

Comment faire en sorte que le passage de relai entre deux bornes de téléphonie mobile se fasse dans les meilleures conditions pour l'utilisateur ? La technique aujourd'hui employée, qui utilise la notion d'arbre couvrant, répond au problème de manière particulièrement efficace.



La technologie et la science sont deux sœurs jumelles qui héritent chacune des progrès de l'autre : d'une part, nombre d'avancées scientifiques ont permis d'améliorer le quotidien et, d'autre part, l'irruption de la technologie (par exemple l'ordinateur) peut modifier en profondeur la façon de travailler des chercheurs. Ce va-et-vient est particulièrement visible dans les technologies de pointe, où le travail du chercheur et celui de l'ingénieur sont intimement mêlés.

L'une des technologies les plus en vogue aujourd'hui est la téléphonie mobile, qui pose de gros problèmes aussi bien théoriques que pratiques. En particulier, il faut gérer les transferts d'information entre les téléphones

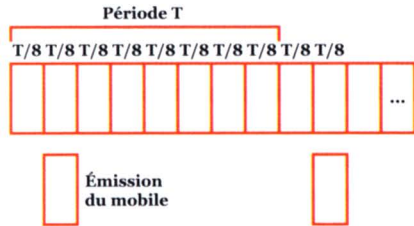
(mobiles) et les bornes BTS (*base transceiver stations*), qui sont des bornes fixes disposées un peu partout sur le territoire et qui jouent le rôle d'intermédiaires entre le mobile et le réseau, chaque mobile se connectant à la borne la plus proche.

Dans la mesure où cette partie de la communication se fait par ondes radio, un procédé par nature imprécis et sujet à erreurs de transmission (par exemple en raison de la présence d'obstacles entre le mobile et sa borne BTS, ou à cause des interférences avec d'autres mobiles reliés à la même borne), de très nombreuses questions pratiques se posent. Parmi elles, le problème de la synchronisation des BTS concerne directement la théorie des graphes.

Dans un réseau GSM (*global standard for mobility*), les bornes BTS disposent chacune d'une horloge indépendante. Lorsqu'un mobile se met en relation avec une horloge, il se synchronise

*Les multiples problèmes d'interférences imposent une synchronisation précise des bornes.*

avec celle-ci puis lui transmet des paquets d'informations à une certaine fréquence, pendant un temps égal à un huitième de la période, comme schématisé ci-dessous.



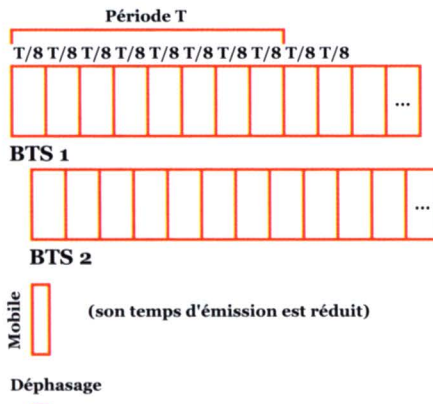
Ainsi, l'ensemble des mobiles reliés à une borne fixée interfèrent soit sur l'ensemble de la transmission du paquet (s'ils sont sur le même huitième de période), soit n'interfèrent pas. Il existe différentes méthodes pour limiter ces interférences, et il est possible de retrouver le signal initial du mobile même si ces interférences sont nombreuses, à condition que la perturbation soit constante sur l'ensemble du paquet. Pour ce faire, une partie de ce que transmet le mobile est une suite conventionnelle fixée de *bits* (des 0 et des 1) : le résultat qui parvient au niveau de la borne peut ainsi être contrôlé et, en cas de différences, permet de corriger l'ensemble de la transmission en faisant l'hypothèse que celle-ci a été modifiée partout de la même façon.

### Se déplacer avec son mobile

Le concept même du téléphone mobile repose sur le fait que les utilisateurs se déplacent en l'utilisant, que ce soit en voiture (passagers, uniquement !) ou à pied. Ainsi, il arrive relativement fréquemment qu'un mobile passe d'une borne à une autre. À ce moment-là, pour éviter des interférences avec les mobiles connectés à la nouvelle borne, le mobile émet des paquets plus petits jusqu'à ce que celle-ci lui communique



la phase sur laquelle il doit se recalibrer. Là surgit le problème : lors du passage de la première borne à la seconde s'insère un petit blanc dans la communication, désagréable pour l'utilisateur. Plus les deux bornes ont une déphasage faible et plus il est possible d'obtenir un blanc de faible durée. C'est là une première raison pour synchroni-



ser les bornes. Une seconde raison est que deux mobiles physiquement proches mais communiquant avec des bornes différentes peuvent se brouiller sur une partie du paquet seulement et rendre ainsi inopérantes les méthodes de traitement des interférences mentionnées plus haut.

### D'une borne à l'autre

Pour synchroniser les bornes, la méthode la plus simple serait d'utiliser un élément extérieur, un GPS par exemple, qui enverrait un « top » à chacune d'elles et les synchroniserait directement. Cette solution n'a pas été retenue pour des raisons politiques.

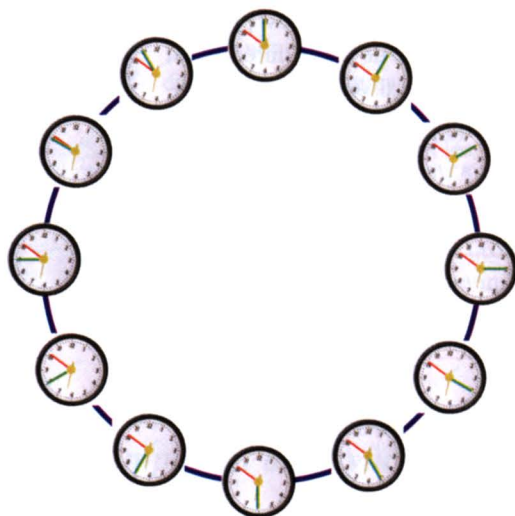
Il serait également possible de faire envoyer un « top » par d'autres bornes, dites BSC (*base station controllers*), qui contrôlent plusieurs BTS : en synchronisant ces bornes elles-mêmes, on obtiendrait le résultat voulu. Cette solution n'a pas non plus été retenue car les communications entre les bornes BTS et les bornes BSC sont déjà nombreuses, et cette communication utiliserait du temps qui peut être

utilisé à autre chose. De plus, les bornes BTS ne peuvent modifier leur phase que très lentement.

Une autre solution, purement algorithmique, a fort heureusement été trouvée. Elle fonctionne de la manière suivante : les bornes disposent d'un système pour écouter les signaux provenant de mobiles communiquant avec une borne voisine, ce qui permet à chaque borne de calculer son déphasage avec chacune de ses voisines, même si cette information lui parvient à des moments imprévisibles. Ce système permet de définir un graphe dont les sommets sont les bornes et dont les arêtes relient celles qui interfèrent suffisamment souvent pour que leur déphasage soit connu régulièrement. (Ce graphe dépend beaucoup du terrain environnant, des immeubles, des fleuves qui créent des interférences supplémentaires, etc.) Une fois en possession de ce graphe (manifestement non orienté car la mesure du déphasage est réalisée par les deux bornes en même temps), il reste alors à trouver un algorithme permettant de synchroniser ses sommets. Cet algorithme doit être purement « local », en ce sens que chaque borne ne peut agir directement que sur la phase des bornes qui lui sont voisines. De plus, pour que l'algorithme soit véritablement efficace, il doit résister à toutes sortes de contraintes, qui vont des pannes de bornes BTS aux ajouts de nouvelles bornes (susceptibles de modifier sensiblement la structure du graphe).

### Se jouer des pannes

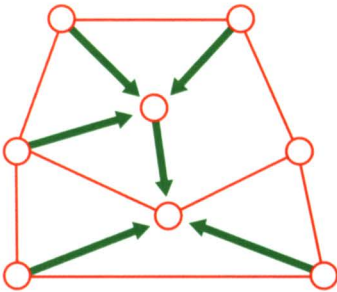
Une première idée peut être de synchroniser les bornes sur le déphasage moyen de leurs voisines. Malheureusement, on peut alors assez facilement rencontrer, en théorie comme en pratique, des configurations stables où les bornes ne seront pas synchronisées par cette technique, à l'image de l'exemple extrême de la page précédente.





La solution qui a été retenue utilise la notion d'arbre, en complément d'autres méthodes plus classiques pour donner une valeur constante aux sommets d'un graphe (par exemple la méthode du gradient, très efficace dès que les bornes sont proches de l'état de synchronisation).

Le graphe étant connu, on en extrait un sous-graphe avec exactement les mêmes sommets, mais avec moins d'arêtes : plus précisément, on fait en sorte que le sous-graphe considéré soit un arbre, c'est-à-dire à la fois d'un seul tenant et sans chemin qui boucle (*connexe* et *sans cycle*, en termes techniques : tous les sommets sont reliés les uns aux autres par un chemin, et il n'existe qu'un chemin d'un sommet à un autre). Un tel arbre est appelé *arbre couvrant* du graphe initial, comme dans l'exemple ci-dessous.



En orientant les arêtes de l'arbre couvrant, on obtient un arbre orienté passant par tous les sommets du graphe. Il suffit alors d'imposer à chaque sommet de se connecter à celui qui le précède dans l'arbre, seul un sommet (appelé *racine*) ne faisant rien. Pour éviter qu'une panne de l'une des bornes n'empêche le bon fonctionnement de l'algorithme, le plus simple est de prévoir un arbre couvrant bis (comme les itinéraires du même nom) et de le mettre en place si l'une des bornes ne parvient plus à se synchroniser à celle qui lui est dévolue.

Quand une borne tombe en panne, il faut que toutes celles qui en dépendent, directement ou indirectement, puissent se synchroniser à l'aide d'autres bornes, ce qui est toujours possible à moins que la borne en panne ne provoque une coupure du graphe en deux parties non reliées l'une à l'autre. Enfin, lorsqu'une borne BTS est ajoutée, on lui impose d'être une feuille de l'arbre (c'est-à-dire de n'être reliée qu'à une seule autre borne) et de se synchroniser avec le sommet du graphe avec lequel elle a le plus d'interférences.

### Des arbres de qualité

De nombreux paramètres permettent d'établir la qualité des arbres couvrants choisis, notamment le nombre de déphasages calculés par chaque arête du graphe, le nombre commun d'arêtes entre l'arbre couvrant et son arbre bis, ou encore la taille du plus long chemin existant dans l'arbre. En optimisant suivant ces différents critères, on obtient un système à la fois rapide (car les sommets ne sont pas trop éloignés de la racine), fiable (car les synchronisations sont fréquentes), résistant aux pannes grâce au circuit bis, et enfin qui permet l'ajout de nouvelles bornes.

Signalons enfin que cette technique a été validée à l'aide d'un simulateur développé pour l'occasion, qui a permis de voir que l'algorithme est à la fois très efficace et évite les situations de blocage. Ce travail de mise en place du simulateur a aussi été l'occasion de poser des problèmes théoriques intéressants, notamment la question d'engendrer aléatoirement certains types de graphes. Ainsi, le va-et-vient entre la théorie et la pratique se poursuit.

J.-C. N.

# Des arbres pour faire passer des trains

Comment minimiser le coût d'un réseau ferroviaire ? L'algorithme de Kruskal donne un moyen simple et efficace de le faire. Et produit quelques surprises.

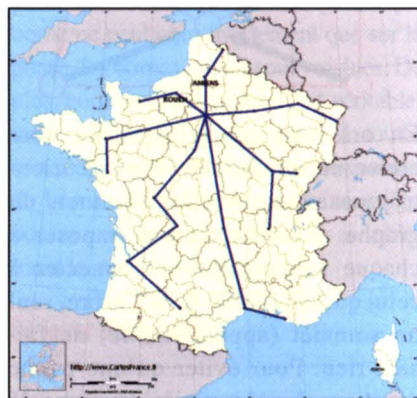
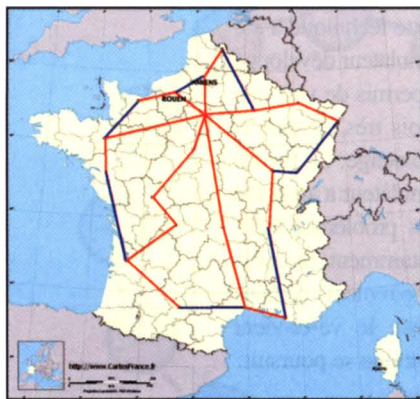
**D**ébut des années 2030. La SNCF vient de mettre au point le Super-TGV, beaucoup plus

rapide que le TGV de ces dernières décennies. Mais il ne peut rouler sur le réseau existant : toutes les voies ferrées doivent donc être reconstruites ! Dans un souci d'économie, on voudrait pouvoir relier entre elles les vingt et une capitales régionales de la fin du siècle dernier en construisant le moins de voies possibles.

En France jacobine, tout passe par Paris. Un réseau dessiné selon ces principes pourrait être semblable à celui du dessin ci-contre.

Ce réseau n'est pas le plus court : on peut par exemple supprimer la liaison directe Rouen-Amiens,

tout en continuant à pouvoir relier ces deux villes... mais en passant par Paris. Pour la même raison, toutes les liaisons dessinées en bleu peuvent ainsi être supprimées ! On obtient alors une structure d'arbre (un arbre possède toujours une arête de moins que de sommets) : il existe toujours une façon et une seule de relier une ville à une autre en suivant le réseau. Chacune des villes constitue un sommet, chacune des étapes une arête.



## Arbre jacobin

L'arbre jacobin n'est pas le plus court que l'on puisse imaginer. En admettant que le coût de construction de la voie soit proportionnel à sa longueur, on a intérêt à

se pencher sur un moyen de trouver l'arbre qualifié de *minimal*, c'est-à-dire dont la longueur soit la plus courte parmi toutes celles des arbres possibles reliant les villes. Pas question de les étudier tous les uns après les autres : cela ferait  $n^n - 2$  arbres à tester (d'après un théorème de Cayley de 1897), un nombre qui a vite fait de devenir colossal : pour  $n = 21$ , le nombre d'arbres vaut 13 248 496 640 331 026 125 580 781.

On n'aurait pas fini ! Heureusement, une propriété très simple permet de déterminer assez rapidement l'arbre minimal : chaque sommet est joint par une arête à son plus proche voisin.

L'arbre minimal comporte donc nécessairement l'étape Strasbourg–Metz, puisque Metz est la ville la plus proche de Strasbourg. En considérant les villes une par une, on obtient ainsi que l'arbre minimal contient toutes les arêtes représentées ci-dessous :

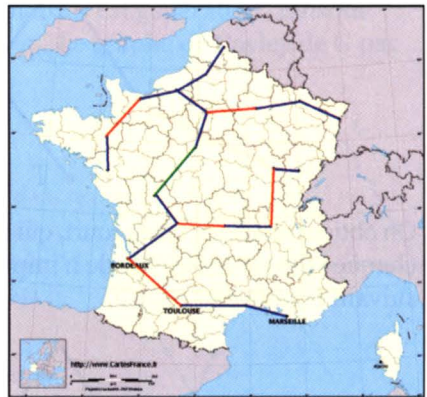
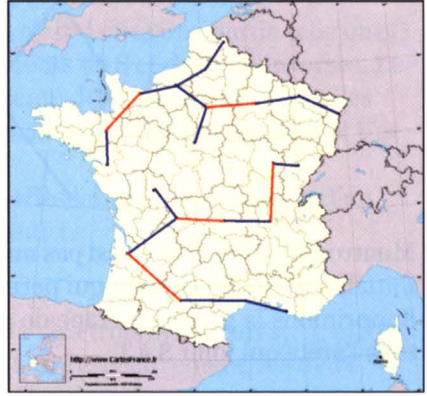


Il nous suffit maintenant de trouver comment relier de façon optimale les groupes ainsi obtenus. Comme plus haut, l'arbre minimal doit contenir l'arête la plus courte qui joint une ville d'un groupe à une ville d'un autre groupe. Ainsi, on doit ajouter la liaison Toulouse–Bordeaux, qui est la plus courte étape reliant une ville du groupe Toulouse–Montpellier–

Marseille à une ville extérieure à ce groupe. Il comporte donc toutes les arêtes figurant ci-dessous, où il n'y a désormais plus que deux groupes de villes.

À la troisième étape, on relie par la plus courte liaison possible le groupe nord et le groupe sud, et on obtient le réseau le plus court joignant les vingt et une capitales régionales.

Cet algorithme est dû à Joseph Kruskal (1928–2010). Dans le cas particulier des capitales régionales, surprise, il n'existe plus de ligne directe Paris–Lyon–Marseille ! Pour aller de Paris à Marseille, il faut passer par Poitiers, Bordeaux et Toulouse. Avec un tel itinéraire, le gain en temps pour aller de Paris à Marseille sera très réduit...

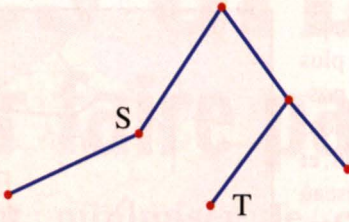


## Des arbres abstraits

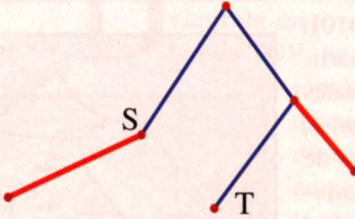
Contrairement au cas des capitales régionales, les objets à classer en statistique descriptive ne sont généralement pas assimilables à des points d'un plan, et la « distance » qui les sépare n'a pas de sens physique. La représentation graphique adaptée à ce genre de situations plus abstraites est alors le *dendogramme*, une sorte de mobile suspendu à la Calder. La hauteur des traits horizontaux caractérise le niveau de cassure d'un groupe en deux morceaux, c'est-à-dire la longueur de la plus longue étape reliant les objets du groupe.

## Propriété de l'arbre minimal

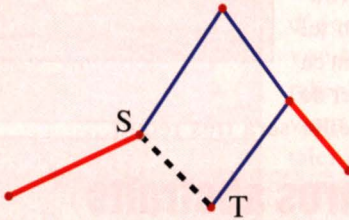
Considérons un arbre qui ne comprend pas l'arête qui joint le sommet S à son plus proche voisin T.



Montrons que cet arbre n'est pas minimal. Dans l'arbre initial, il existe un chemin qui permet d'aller de S à T. Supprimons la première étape de ce chemin, et ajoutons l'arête qui joint S à T.



On obtient un réseau, plus court, qui est un arbre puisque chaque ville est accessible de n'importe quelle autre en suivant le nouveau réseau.



Une des raisons de cette aberration est que l'on n'a pas tenu compte du trafic potentiel !

Un inconvénient de l'arbre minimal est qu'il supporte mal la mise à jour : si l'on ajoute une gare, il faut entièrement recalculer l'arbre minimal !

En pratique, l'arbre minimal n'est bien sûr pas utilisé pour déterminer le réseau ferroviaire à construire. Il joue cependant un rôle essentiel en statistique des-

criptive pour établir des classifications par groupes, par exemple pour regrouper les vingt et une capitales régionales en plusieurs « superstructures » constituées de villes « proches entre elles ». En supprimant la plus longue étape (Bordeaux–Toulouse), on obtient deux groupes. Pour en avoir trois, on supprime la seconde plus longue étape (Toulouse–Montpellier). La ville de Toulouse constitue alors un groupe à elle seule. En ôtant les  $k$  plus grandes arêtes de l'arbre minimal, on obtient  $k + 1$  groupes, qui constituent des « super-régions », dont on peut ainsi choisir le nombre et la répartition géographique.

G. G. & T. R.

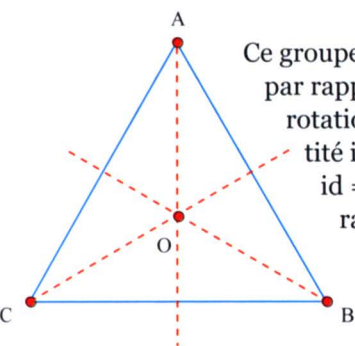
### Références

- *Graphes et algorithmes*. Michel Gondran et Michel Minoux, Eyrolles, 1995.
- *Proof from the book*. Martin Aigner et Günter Ziegler, Springer, 1998.

## Les graphes de Cayley

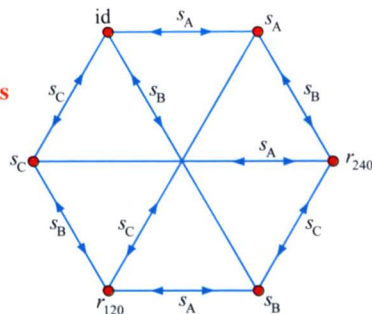
De par leur définition on ne peut plus élémentaire, les graphes s'adaptent à toutes les situations... Prenons ainsi une question d'algèbre : comment choisir de manière aléatoire un élément dans un groupe fini ? En faisant appel à la théorie des graphes ! Donnons-nous un groupe  $G$  et  $S$  une partie génératrice de  $G$ , c'est-à-dire une partie telle que tout élément de  $G$  soit le produit d'un nombre fini d'éléments de  $S$  et de leurs inverses. Le *graphe de Cayley* de  $G$  par rapport à  $S$  est un graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $G$  ; ses arêtes relient les éléments  $g$  aux éléments  $g.s$  où  $s$  appartient à  $S$ . Une telle arête s'étiquète naturellement  $s$ .

Prenons un exemple visuel, celui du groupe  $G$  des isométries laissant les sommets d'un triangle équilatéral  $T$  globalement invariants :

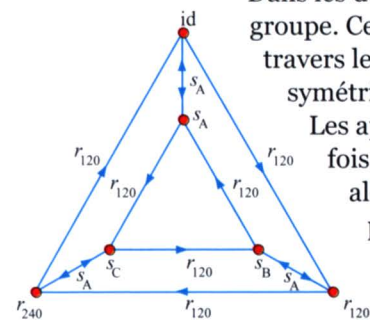


Ce groupe est constitué de six éléments : les trois symétries  $s_A, s_B$  et  $s_C$  par rapport aux axes (OA), (OB) et (OC) respectivement, les deux rotations  $r_{120}$  et  $r_{240}$  de centre O et d'angles  $120^\circ$  et  $240^\circ$ , et l'identité  $\text{id}_T$ . L'ensemble des trois symétries est générateur, puisque  $\text{id} = s_A^2, r_{120} = s_B \cdot s_A$  et  $r_{240} = s_C \cdot s_A$ . Le graphe de Cayley de  $G$  par rapport à  $S$  est le suivant :

**Chaque arête est orientée dans les deux sens. Bien entendu, ce n'est pas toujours le cas pour un groupe  $G$  et une partie génératrice  $S$  donnés !**



En remplaçant la partie génératrice  $S$  par  $S'$ , la partie constituée de la symétrie d'axe (OA) et de la rotation de centre O et d'angle  $120^\circ$ , le graphe de Cayley est différent.



Dans les deux cas, le graphe de Cayley est une visualisation du groupe. Certaines propriétés sont mises en évidence, en particulier à travers les cycles du graphe. Ici, on observe que le carré de chaque symétrie est égal à l'identité, et le cube des rotations également.

Les applications des graphes de Cayley sont nombreuses et parfois inattendues. Ainsi, ils permettent de trouver un élément aléatoire dans un groupe, ce qui est utile en cryptographie, par exemple pour utiliser des méthodes comme celle des courbes elliptiques : on part d'un point (l'identité par exemple) et on suit un chemin aléatoire dans le graphe. On retrouve également les graphes de Cayley dans les questions de routage dans un réseau.

# Comment éviter les bouchons

**Quand les distances se mesurent en minutes, la ligne droite est rarement le plus court chemin d'un point à un autre. Les randonneurs comme les automobilistes le savent bien, mais comment trouver l'itinéraire le plus rapide ?**



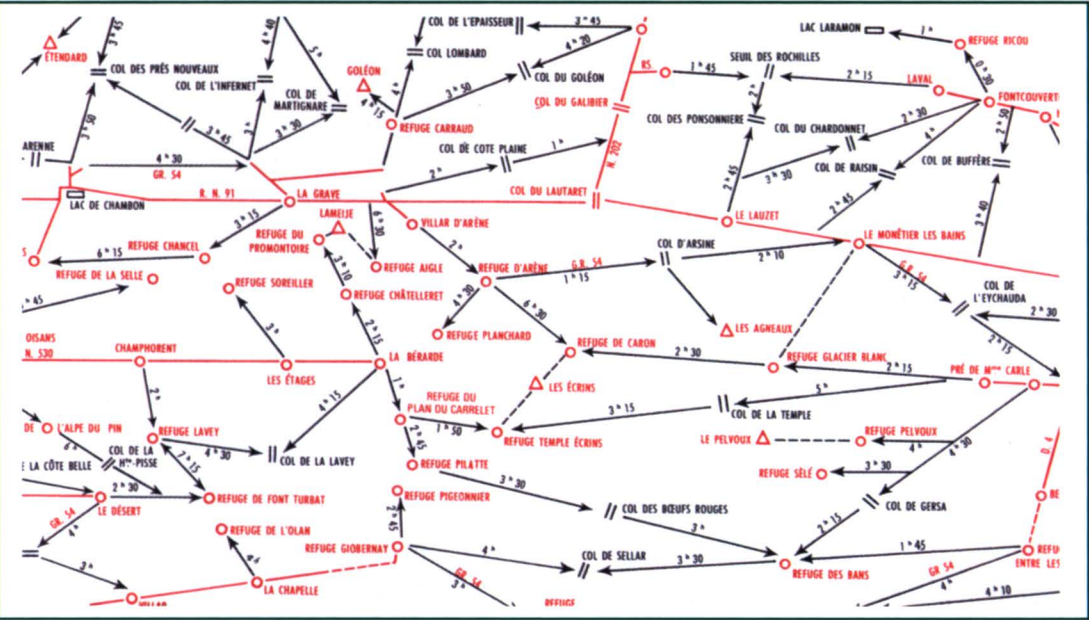
**U**n automobiliste pressé souhaite se rendre d'un point A à un point B le plus rapidement possible, tout en respectant toutefois les limitations de vitesse. Le logiciel de navigation de son ordinateur de voiture a en mémoire les cartes routières de la région et, à intervalles réguliers, il se

connecte, *via* le réseau téléphonique mobile GSM, au central de contrôle routier, qui le renseigne sur l'état du trafic, les ralentissements, rues barrées et autres embouteillages. Par ailleurs, un système GPS de localisation par satellite donne en permanence la position exacte du véhicule : on dispose donc de toutes les informations permettant de choisir un itinéraire optimal et de le modifier en temps réel selon l'évolution des conditions de circulation (un bouchon s'est résorbé, un autre s'est formé, *etc.*).

## Un graphe pour le réseau routier

Le réseau routier est modélisé sous forme d'un graphe  $(S, A)$ . Les sommets du graphe (l'ensemble  $S$ ) correspondent aux intersections et les arêtes (l'ensemble  $A$ ) aux segments de route allant d'une intersection à l'autre. Deux sommets  $U$  et  $V$  étant choisis, il n'y a une arête de  $U$  vers  $V$  (notée  $U-V$ ) que s'il existe une route de  $U$  vers  $V$  sans inter-

*Chaque rue est pondérée pour tenir compte du trafic.*



section intermédiaire et si le sens de trajet de U vers V est autorisé. À toute arête U-V on associe un coefficient de pondération, proportionnel au temps nécessaire pour parcourir U-V compte tenu de la distance et des conditions de circulation.

C'est ainsi qu'une rue à sens unique est représentée par une arête unique, une rue à double sens par deux arêtes (une dans chaque sens) et les temps de parcours sont parfois différents d'un sens à l'autre compte tenu de la densité du trafic. La figure ci-dessus montre l'exemple d'une ville pourvue d'un boulevard périphérique à double sens et très fluide, ainsi que de rues à trafic plus lent et parfois fort embouteillées (comme pour aller de N à P).

Il serait logique, pour trouver l'itinéraire le plus court, d'avancer toujours dans la direction de l'objectif. Dans l'exemple précédent, cela conduit à l'itinéraire A-N-P-B, qui prend vingt-quatre minutes. Cependant, la rue N-P étant embouteillée dans le sens de N vers P, il vaut mieux faire le détour N-R-P, qui fait économiser six minutes. Passer par L est

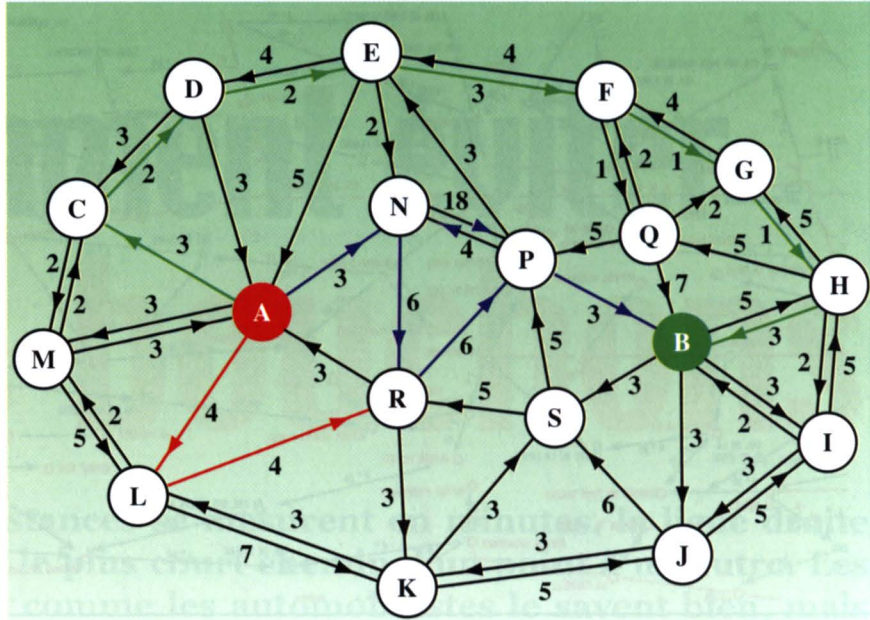
encore plus rapide, d'où la solution A-L-R-P-B, qui ne prend que dix-sept minutes. C'est alors que, constatant que le périphérique intérieur est très fluide, on décide finalement de partir dans la direction opposée à celle de l'objectif, et de rejoindre en C le périphérique intérieur, que l'on suit jusqu'en H pour gagner finalement B. On choisit donc le trajet A-C-D-E-F-G-H-B, qui prend quinze minutes. (Quitter le périphérique en F aurait été une mauvaise solution car Q-B et Q-P sont embouteillés.)

**L'éloignement aide au rapprochement**

Cet exemple, tout à fait réaliste pour une ville comme Paris, montre qu'un bon itinéraire peut démarrer en tournant le dos à l'objectif. Pour trouver cette solution, il a fallu analyser plusieurs chemins. Tenons-nous la solution optimale ? Pour le savoir, il faudrait explorer tous les chemins possibles mais, même en éliminant les boucles, c'est en pratique impossible : pour une ville réelle, le graphe contient considérablement plus d'arêtes que celui de notre

**Réseau de sentiers en montagne avec temps de parcours. Le dénivelé fait que les itinéraires doivent être fléchés : le temps de parcours n'est pas le même dans un sens et dans l'autre. Pour d'autres raisons (embouteillages), les graphes de navigation routière sont aussi orientés.**

Exemple de modélisation de la situation du trafic d'une grande ville. Les temps de parcours entre les points d'intersection, exprimés en minutes, indiquent qu'on a affaire à une ville dont le centre est surchargé et dont le boulevard périphérique est fluide.



exemple, sans parler des navigateurs de voiture actuels, qui peuvent contenir la carte routière de l'ensemble de la France (y compris tous les plans de toutes les villes), ce qui représente un graphe gigantesque. L'énumération de tous les chemins possibles conduit à une explosion combinatoire et, même sur un ordinateur de pointe, les temps de calcul se compteraient plutôt en siècles qu'en minutes.

La solution aujourd'hui employée est un algorithme dû à Dijkstra (voir par ailleurs dans ce numéro), dont le temps de calcul, proportionnel au carré du nombre de points, est raisonnable même pour des réseaux routiers à l'échelle d'un pays. Cet algorithme consiste à « bourgeonner » autour de A, en déterminant de proche en proche les plus courts chemins menant de A aux autres points (en commençant par les plus proches de A). Pour un réseau routier réel, avec des temps de trajets à peu près proportionnels aux distances, les temps de calculs croissent à peu près comme la puissance quatrième de la distance AB : c'est beaucoup, mais à l'échelle d'une ville, c'est encore suffisamment

raisonnable pour que le conducteur puisse avoir l'information dont il a besoin en un temps acceptable.

**Encore plus fort : les heuristiques**

On peut considérablement accélérer l'algorithme en définissant une notion de « grands axes » et en prenant en compte des règles intuitives (appelées *heuristiques*) du type « une fois sur un grand axe, on y reste jusqu'à ce que l'on soit proche du point d'arrivée ». Dans certains cas, certes, cet algorithme accéléré donne un résultat non optimal, mais, en général, l'économie de temps de calcul est phénoménale à l'échelle d'un pays. Tout repose sur l'astuce dont on a fait preuve dans la définition des heuristiques et dans le choix des grands axes. Comme souvent dans les applications pratiques, on peut opter pour un algorithme exact mais parfois lent, ou pour un algorithme accéléré, parfois non optimal mais souvent de vitesse d'exécution beaucoup plus rapide.

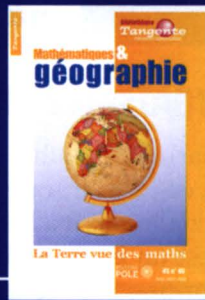
J.-L. S.



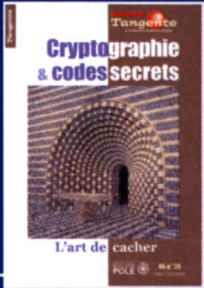
# La plus belle bibliothèque mathématique au monde



Le calcul intégral



Mathématiques  
& géographie



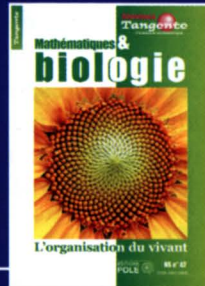
Cryptographie  
& codes secrets



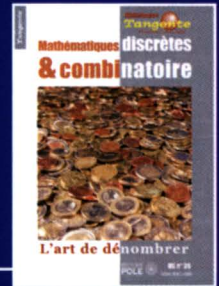
Esthétique et  
mathématiques



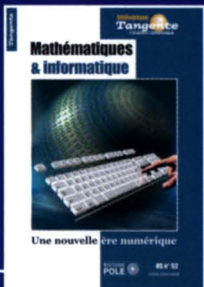
Maths  
et musique



Maths et biologie



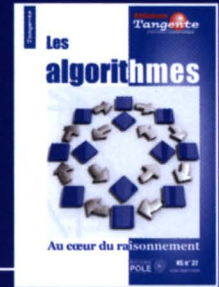
Maths discrètes  
et combinatoire



Mathématiques  
et informatique



Mathématiques  
et philosophie



Les algorithmes

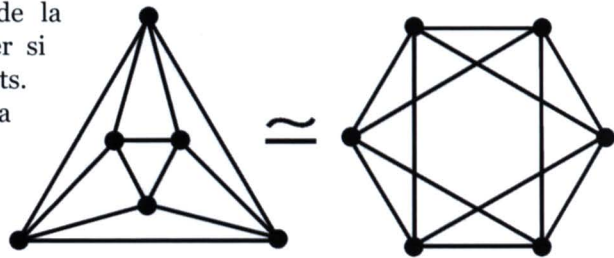
Ces magnifiques  
ouvrages en couleur  
de 160 pages  
feront l'admiration  
de tous les visiteurs  
de votre bibliothèque.

[www.librairie-archimede.com](http://www.librairie-archimede.com)

## Les problèmes d'isomorphismes de graphes

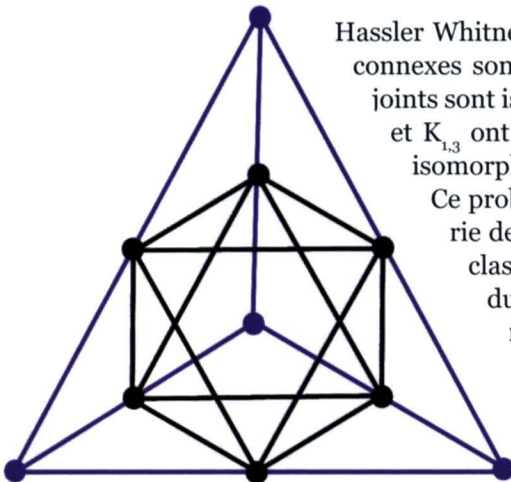
Un graphe peut être représenté par un ensemble de billes reliées par des élastiques. Pour chaque nouvelle position des billes, on crée un graphe équivalent, en ce sens qu'ils ont le même nombre de sommets et les mêmes conditions d'adjacence entre eux. Cette bijection entre leurs sommets qui conserve les arêtes est un isomorphisme de graphes qui préserve leurs structures, indépendamment de leurs formes. Si  $u - v$  est l'arête entre les sommets  $u$  et  $v$ , et  $h$  un isomorphisme entre les graphes  $G$  et  $H$ , alors  $u - v \in G$  équivaut à dire  $h(u) - h(v) \in H$ . Ces isomorphismes constituent des relations d'équivalence entre graphes, et on note  $G \cong H$ . Les graphes octaédriques suivants sont isomorphes. Du fait de leur régularité (les six sommets sont de degré 4), l'isomorphisme n'est pas unique.

La question générale fondamentale de la théorie des graphes est de déterminer si deux graphes donnés sont équivalents. Ce problème non résolu dans toute sa généralité se pose en particulier pour classer les molécules chimiques. Une condition nécessaire d'équivalence est bien sûr qu'ils aient le même nombre de sommets. Mais d'autres invariants existent,



comme le degré des sommets, la distance (topologique) à un sommet particulier, la taille de la clique maximale ou le nombre chromatique. Si certaines de ces quantités ne sont pas égales, les graphes ne peuvent être isomorphes.

La dualité point-droite de Poncelet et la correspondance Delaunay-Voronoi pour les mailages amènent à définir le *graphe adjoint*  $G'$  d'un graphe  $G$  en associant un sommet à chaque arête de  $G$ , deux sommets de  $G'$  étant adjacents si les arêtes correspondantes ont un sommet de  $G$  en commun. Ainsi, le graphe adjoint du tétraèdre est le graphe octaédrique.



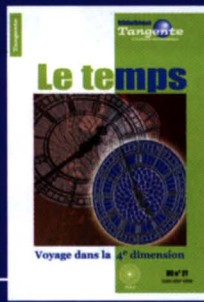
Hassler Whitney (1907-1989) a montré en 1932 que deux graphes connexes sont isomorphes si, et seulement si, leurs graphes adjoints sont isomorphes. Deux exceptions toutefois, les graphes  $K_3$  et  $K_{1,3}$  ont tous eux  $K_3$  pour graphe adjoint, mais ne sont pas isomorphes.

Ce problème classique en algorithmique est connu en théorie de la complexité pour être l'un des seuls problèmes de classe NP (avec la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers) pour lesquels on ne connaît ni d'algorithme polynomial, ni de preuve qu'il est NP-complet. Il est donc particulièrement important pour le problème «  $P = NP ?$  ».

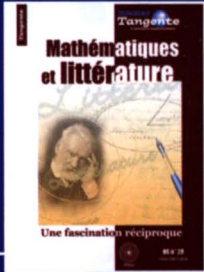
# La plus belle bibliothèque mathématique au monde



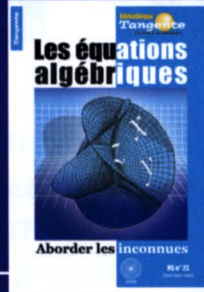
Le triangle



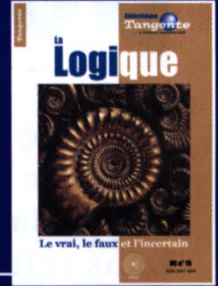
Le temps



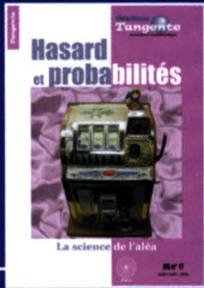
Mathématiques  
et littérature



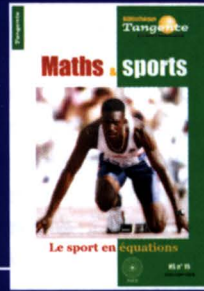
Les équations  
algébriques



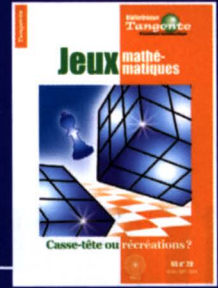
La logique



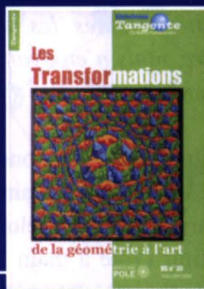
Hasard  
et probabilités



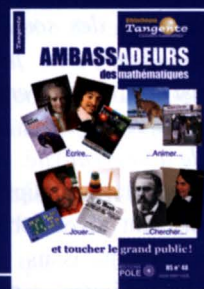
Maths et sports



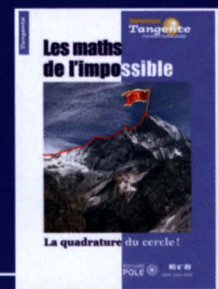
Jeux  
mathématiques



Les transformations



Ambassadeurs  
français des maths



Les maths  
de l'impossible

# Un arbre pour le théâtre

**Un texte littéraire est avant tout une suite de mots. Avant d'enfiler les mots à la suite les uns des autres, on peut décider au préalable de choisir une structure qui organise l'ensemble. Dans cette phase, les mathématiques peuvent jouer un rôle.**

**D**ans les années 1960, un groupe d'écrivains regroupés sous le nom d'Oulipo (Ouvroir de littérature potentielle) a décidé de rapprocher les mathématiques de la création littéraire. Dans son introduction à l'Oulipo, Raymond Queneau en précise ainsi les intentions : « *Proposer aux écrivains de nouvelles "structures", de nature mathématique, ou bien encore inventer de nouveaux procédés artificiels ou mécaniques, contribuant à l'activité littéraire : des soutiens de l'inspiration pour ainsi dire, ou bien encore, en quelque sorte, une aide à la créativité.* » À partir de là, les oulipiens utilisèrent divers objets ou notions issus des mathématiques pour structurer le monde des mots.

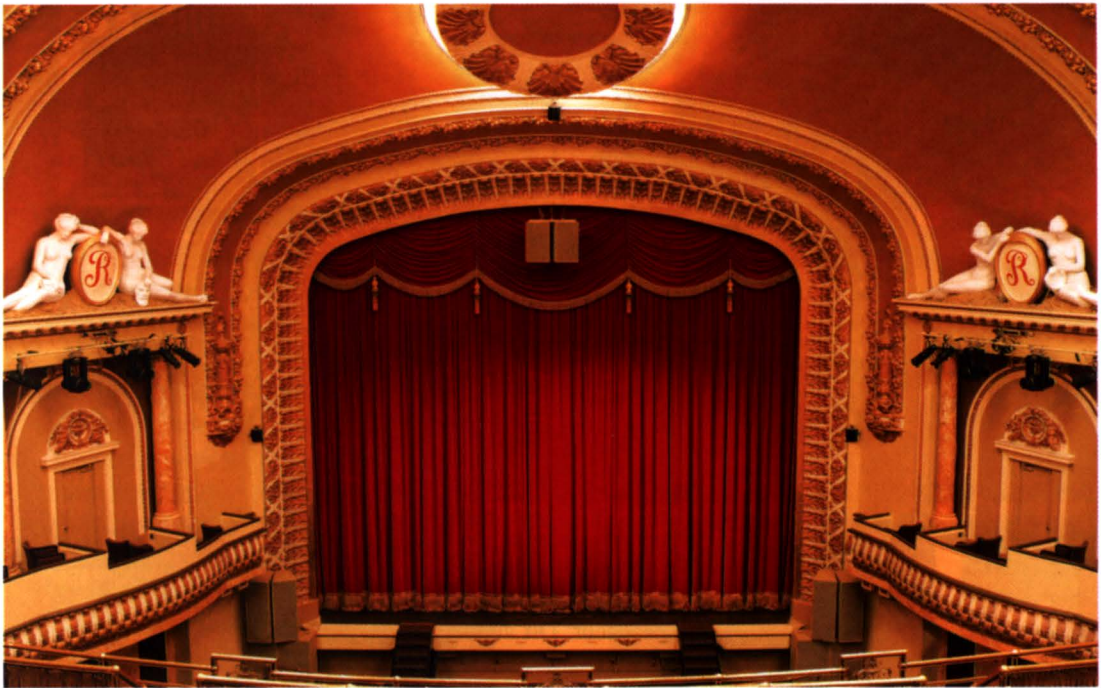
## Créations combinatoires

Paul Fournel a utilisé des notions extraites de la théorie des graphes dans son « arbre à théâtre ». Il explique ainsi qu'« à l'origine, le but était de faire une comédie sur une structure en arbre. Les problèmes soulevés par une telle réalisation sont particulièrement nombreux et certains nous ont paru pratiquement insolubles. Une pièce en "arbre" demanderait notamment un effort de mémoire presque surhumain aux comédiens. Nous avons donc élaboré un graphe original, présentant pour le spectateur toutes les apparences de l'arbre, mais n'en ayant pas les inconvénients pour les comédiens ».

L'arbre à théâtre implique donc les spectateurs, qui sont amenés à faire des choix, en l'occurrence quatre, selon des modalités à définir (vote à main levée dans une salle de théâtre, vote par téléphone s'il s'agit d'une diffusion radiophonique, etc.). La seule contrainte est de faire en sorte que la durée du vote ne

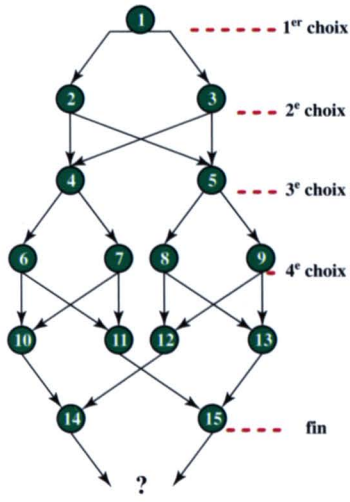


Claude Lévi-Strauss.



soit pas trop longue. Ensuite, suivant le choix finalement retenu, les acteurs jouent telle ou telle scène. Par exemple, la scène 1 nous montre le roi triste, que la reine ne parvient pas à consoler. Pourquoi est-il malheureux ?

**La structure de graphe permet de multiplier les possibilités avec un minimum d'efforts pour les comédiens.**



C'est cette question qui fait l'objet d'un choix de la part des spectateurs, confrontés à l'alternative suivante :

- la fille du roi, la princesse, a perdu le sourire ;
- la princesse a été enlevée.

Si les spectateurs se prononcent pour la première possibilité, alors les comédiens jouent la scène numérotée 2 dans le graphe de la figure de la page précédente. Si, à l'inverse, ils optent majoritairement pour la seconde, c'est alors la scène n°3 qui est jouée.

**L'arbre à théâtre. Les spectateurs sont invités à faire quatre choix successifs au moyen d'un vote organisé dans la salle.**

**Du théâtre au suffrage universel**

Quel que soit le déroulement de la pièce, celui-ci intègre en tout quatre choix effectués par les spectateurs et se déroule en cinq scènes. Le graphe structurant la pièce possède quinze sommets, cha-



## Les seize chemins

Pour lister toutes les pièces possibles, une méthode systématique consiste à partir de la plus à gauche possible en descendant le graphe, et en ne bifurquant à droite que si tous les chemins plus à gauche ont déjà été visités. En suivant cette règle, on trouve les 16 chemins suivants :

1 2 4 6 10 14  
 1 2 4 6 11 15  
 1 2 4 7 10 14  
 1 2 4 7 11 15  
 1 2 5 8 12 14  
 1 2 5 8 13 15  
 1 2 5 9 12 14  
 1 2 5 9 13 15  
 1 3 4 6 10 14  
 1 3 4 6 11 15  
 1 3 4 7 10 14  
 1 3 4 7 11 15  
 1 3 5 8 12 14  
 1 3 5 8 13 15  
 1 3 5 9 12 14  
 1 3 5 9 13 15

cun correspondant à une scène potentiellement jouée. Parmi celles-ci, quatre n'engagent pas le spectateur. Dit autrement, l'arbre comprend quinze scènes, dont quatre seulement ne débouchent pas sur un choix des spectateurs. Une étude simple montre qu'il est possible de jouer seize pièces différentes, autrement dit que le nombre de chemins du graphe menant de la racine (la scène 1) aux feuilles (les scènes 14 et 15) est de 16. Sans l'utilisation de cette structure, les seize pièces différentes obtenues auraient nécessité l'écriture de pas moins de quatre-vingt scènes (cinq scènes par pièce), d'où d'insurmontables difficultés d'apprentissage pour les comédiens. La structure de l'arbre à théâtre possède ainsi un intérêt « économique », représentant à elle seule seize pièces potentielles tout en ne nécessitant la mémorisation que de quinze scènes différentes. L'écriture à contraintes a connu son heure de gloire surtout à l'époque de l'ère structuraliste (voir en encadré). Cependant, les oulipiens continuent encore à être actifs aujourd'hui et rencontrent un succès qui ne s'est jamais démenti.

N. V.

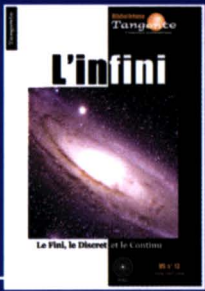
L'Ouvroir de littérature potentielle a été fondé, le 24 novembre 1960, par François Le Lionnais, Raymond Queneau et une dizaine de leurs amis (autour d'une bonne table, comme il se devait).

## Structuralisme, langage

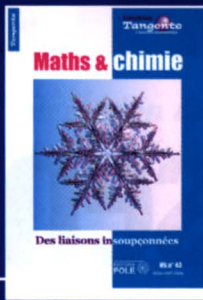
Ce sont les publications de Lévi-Strauss qui ont donné naissance au structuralisme, qui a envahi peu à peu toutes les sciences humaines, l'histoire et la grammaire notamment. (Le structuralisme a, dans ses excès, souvent trop privilégié la structure formelle des choses étudiées au détriment du sens, et a progressivement perdu de son aura.)

Par exemple, connaître la structure d'une langue en apprend autant que connaître les mots isolément car dès qu'on la connaît, on peut d'un seul coup se lancer dans l'apprentissage de toutes les langues ayant une structure similaire. Un exemple parmi d'autres : la structure de la langue arabe, dite de *dérivation*. Les mots sont groupés par familles, chaque famille est engendrée à partir d'une racine. Par adjonction de lettres à la racine, on forme d'autres mots, chaque type d'adjonction correspondant à une même classe de sens. Par exemple, la racine « KTB » (signifiant « il a écrit ») donne, en ajoutant une lettre, le mot « celui qui écrit » (l'écrivain) et, en ajoutant deux lettres, le mot « ce qui est écrit » (le destin, *maktoub*). Cette racine engendre ainsi une vingtaine de mots. D'autres racines peuvent engendrer plus d'une cinquantaine de mots.

# La plus belle bibliothèque mathématique au monde



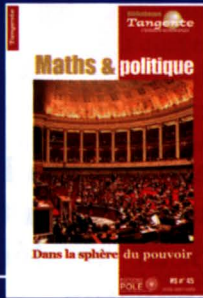
L'infini



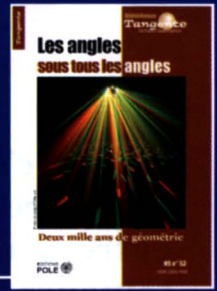
Maths et chimie



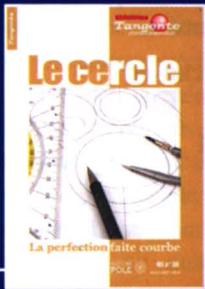
Théorie des jeux



Maths & politique



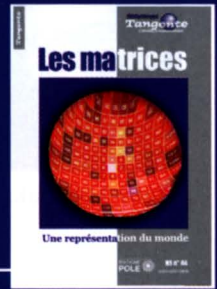
Les angles



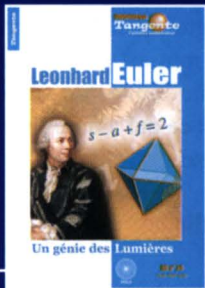
Le cercle



Les statistiques



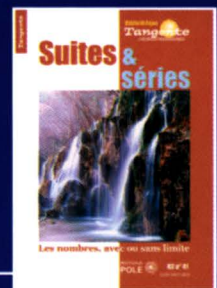
Les matrices



Leonhard Euler



La magie  
des invariants



Suites et séries

# Entre sens et texte

**Parler, c'est transformer ce que l'on veut dire en ce que l'on dit, autrement dit un sens en un texte. Cette correspondance entre sens et textes peut se décrire par des graphes, pas toujours simples à interpréter.**



Igor Mel'cuk.

Il est délicat de définir et de représenter le sens attaché à un texte. Il existe un système de représentation basé sur des graphes, qui prend sa source dans les travaux d'Igor Melcuk, l'un des pionniers de la modélisation formelle des langues. Sa théorie, dite *théorie sens-texte*, date des années 1960.

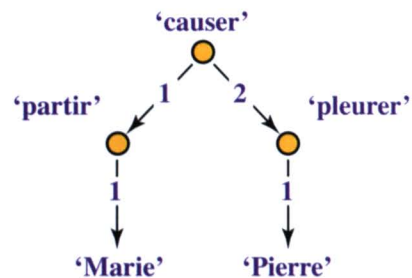
L'idée de départ est que le sens d'une phrase naît de l'interaction des sens des mots. Cette interaction peut être visualisée au moyen d'un graphe.

Dans un énoncé, certains mots agissent sur le sens d'autres mots (ses *arguments sémantiques*) et les mettent en relation. Par exemple, dans la phrase :

(1) « Pierre pleure à cause du départ de Marie »,

« pleure » a comme unique argument sémantique « Pierre ». Syntactiquement parlant, « Pierre » est le sujet de « pleure ». Le groupe « à cause de » possède, quant à lui, deux arguments :

« départ » et « pleure ». Toutes ces relations peuvent se regrouper sous la forme d'un graphe orienté :



Dans ce graphe, chaque arête représente la relation entre le sens d'un mot et l'un de ses arguments. Le graphe est connexe : tout mot est relié à tous les autres par une suite de relations (d'arêtes) ; c'est ce qui assure l'unité de sens de la phrase.

## Graphes sémantiques

Les étiquettes sur les arêtes du graphe indiquent le numéro de l'argument et permettent de distinguer les différents arguments d'un même mot. D'autres



*L'interaction des sens des mots peut se représenter par un graphe.*

phrases ont le même graphe et sont donc des paraphrases de la phrase initiale. Par exemple :

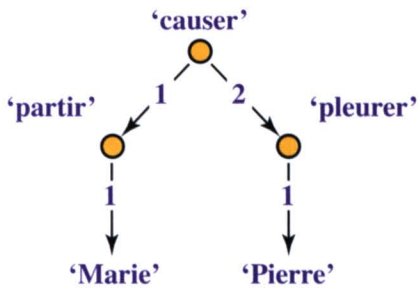
- (2) « Pierre pleure, parce que Marie part »,
- (3) « Les pleurs de Pierre sont dus au départ de Marie »,
- (4) « Le départ de Marie fait pleurer Pierre » .

Comme on le voit, le sens « causer » peut être exprimé en français de multiples façons (« à cause de », « parce que », « être dû à », « faire » suivi de l'infinitif...).

Le graphe sémantique d'une phrase peut avoir des cycles, comme dans la phrase « Pierre croit entendre Marie ».

Un graphe sémantique ne représente qu'une partie du sens, dite *situationnelle*, qui renvoie à la situation que l'on veut décrire. Les phrases précédentes, bien que décrivant toutes la même situation, ne peuvent être employées dans les mêmes contextes de communication et sont donc différentes de ce point de vue.

Le passage du sens au texte peut être modélisé par un ensemble fini de règles, qui permettent de construire un graphe sémantique. Une partie de cet



ensemble de règles forme le lexique et concerne la description des mots. Par exemple, « pleurer » possède un unique argument, alors que dans « Pierre donne un

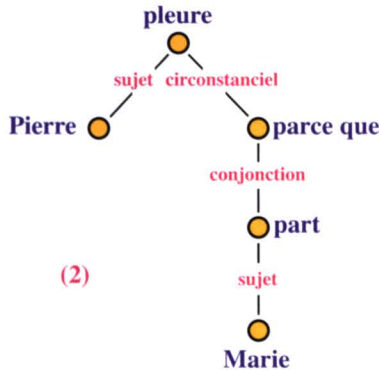
cadeau à Marie », « donner » en a trois qui se réalisent comme sujet, objet direct et objet indirect.

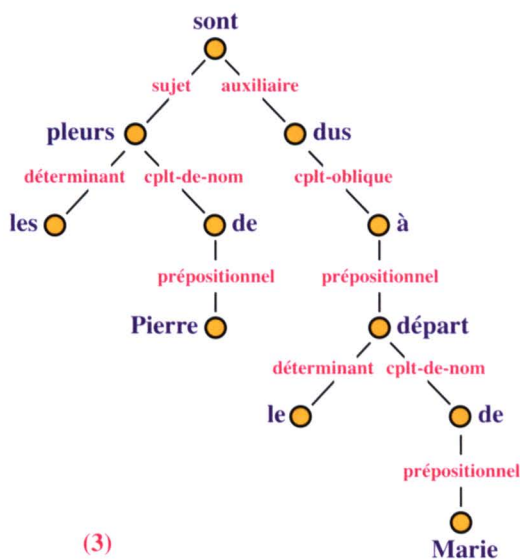
L'autre partie forme la grammaire proprement dite : règles de conjugaison, place du sujet par rapport au verbe, etc. Pour décrire la correspondance entre graphes sémantiques et textes, il est préférable de considérer des représentations intermédiaires, notamment une représentation dite *syntactique*. La grammaire devient alors *modulaire* : un premier module assure la correspondance entre le graphe sémantique et la représentation syntactique et un second module assure la correspondance entre la représentation syntactique et le texte.

**L'arbre de dépendance**

La représentation syntactique que nous adoptons s'appelle un *arbre de dépendance syntactique*, notion développée par Lucien Tesnière, linguiste majeur du XX<sup>e</sup> siècle. Les nœuds de cet arbre sont les mots de la phrase et ses arcs sont étiquetés par des relations syntactiques indiquant la fonction du mot dépendant par rapport au mot dont il dépend.

Voici ces arbres pour les phrases (2) et (3) :





Un mot ne correspond pas forcément à une chaîne de caractères entre deux espaces. Ainsi, «au» est considéré comme l'amalgame de deux mots, «à» et «le», tandis que «parce que» est considéré comme un seul mot.

Pour passer du graphe sémantique à un arbre de dépendance, il faut choisir le nœud qui correspondra à la racine de l'arbre (ce choix est guidé par la structuration communicative), puis suspendre le graphe par cette racine. Ensuite, il faut choisir pour chaque sens dans le graphe un ou plusieurs mots qui l'expriment («causer» s'exprime par «à cause de» ou «être dû à», par exemple).

En français comme dans la plupart des langues, la racine de l'arbre de dépendance doit être un verbe.

Par exemple, pour l'arbre de (2), le nœud sémantique «pleurer» est choisi pour exprimer la racine de l'arbre et donne le verbe «pleure»; le sens «causer» devient

un dépendant de ce verbe et est exprimé par la conjonction de subordination «parce que». Pour l'arbre (non représenté) de (4), le nœud «causer» est choisi pour exprimer la racine de l'arbre et donne la configuration «sont dus à»; le sens «pleurer» devient un dépendant de ce verbe et est exprimé par le nom «pleurs».

S'il existe des cycles dans le graphe, il faut les couper soit sur un arc (ce qui donne «Pierre croit entendre Marie» pour notre deuxième exemple de graphe), soit sur un nœud. De cette opération résulte l'introduction de pronoms, comme le pronom «il» renvoyant à Pierre dans «Pierre croit qu'il entend Marie».

Le passage de l'ordre de dépendance syntaxique au texte consiste à ordonner les nœuds de l'arbre syntaxique selon des règles qui font intervenir le type de l'arc qui les relie.

Il y a tout lieu de penser que le sens est un objet multidimensionnel. Là où la hiérarchisation assure le passage d'un graphe sémantique à un arbre syntaxique (un arbre est un graphe hiérarchisé), la linéarisation, quant à elle, permet le passage d'un arbre syntaxique à une suite linéaire de mots.

S. K.

### Linguistique, sémantique et syntaxe

Décrire ce que produit quelqu'un qui parle ou qui écrit et la façon dont il le produit est l'objet de la *linguistique*. La *sémantique*, quant à elle, s'occupe du sens des mots et des textes, là où la *syntaxe* s'occupe de leurs constructions. Ainsi, la phrase «d'incolores idées vertes dorment furieusement» est syntaxiquement correcte, alors que «les enfants joue dans la cour» ne l'est pas. Du point de vue sémantique, c'est le contraire.

# Les arbres par eux-mêmes

Les oulipiens ont imaginé des textes définissant eux-mêmes la contrainte à partir de laquelle ils sont construits. Petit essai dans cette veine.

À l'inverse de la topologie, de l'algèbre ou des probabilités (ces dernières étant bien sûr prises non dans leur acception scolaire mais dans leur généralité contemporaine), la théorie des graphes est une discipline mathématique qui s'occupe d'objets finis, ou plus exactement discrets. Parmi les cas particuliers significatifs de graphes figure l'exemple des arbres qui, contrairement aux autres graphes, sont à la fois connexes (c'est-à-dire que l'on peut toujours joindre deux sommets de l'arbre en suivant les arêtes le constituant) et sans cycles (autrement dit, il n'existe qu'un chemin menant d'un sommet à un autre,

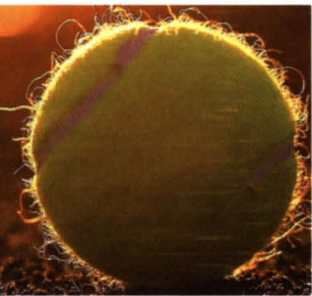
il n'y a pas de « boucles »), ce qui impose, par un petit raisonnement pas bien difficile (partez d'un sommet quelconque et avancez dans la direction que vous voulez jusqu'à être bloqué), qu'un arbre contient des feuilles (des sommets desquels ne partent qu'une seule arête). Cet énoncé ne saurait être confondu avec l'affirmation homonyme issue de la biologie végétale, autre science éminente qui tire d'ailleurs profit de l'étude des arbres – arbres au sens mathématique, s'entend – pour mieux comprendre la manière dont les arbres – les vrais cette fois, ceux en bois – se ramifient progressivement.

B. R



# Les livres dont vous êtes le héros

**Il y a une trentaine d'années, c'est-à-dire bien avant Harry Potter, un type particulier de livres pour la jeunesse a été inventé. Structurés par des graphes, ils permettent une narration originale.**



**E**n 1982, les Britanniques Steve Jackson et Ian Livingstone, passionnés de jeux de stratégie et de société, firent paraître un livre d'un genre nouveau. Traduit en 1983 sous le titre *Le Sorcier de la montagne de feu* (Gallimard), il fut le premier des Livres dont vous êtes le héros, principalement destinés au jeune public, qui peut ainsi découvrir le plaisir de lire. Dans l'introduction au premier de ces livres, on trouve mentionnée une référence à l'informatique dans un langage délicieusement démodé : « *C'est le livre lui-même qui fait office de Maître du Jeu, en utilisant une technique familière à ceux qui ont suivi des cours programmés électroniquement.* »

La structure en paragraphes permet au lecteur de choisir lui-même le déroulement de l'action : s'il veut l'orienter dans telle direction, il est invité à se rendre à tel ou tel paragraphe du livre où une autre décision à prendre l'attend, et ainsi de suite jusqu'à atteindre un paragraphe marquant la fin de l'histoire. Puisque le lecteur est ainsi « tout-puissant », les inventeurs de ces ouvrages l'ont fort

logiquement doté aussi du premier rôle de l'histoire racontée.

## Un lecteur très puissant

Outre le rôle qu'elle donne au lecteur, l'intérêt de cette structure est d'obtenir un ouvrage de taille raisonnable permettant toutefois un grand nombre de parcours différents : il faut en général plusieurs tentatives pour finir l'aventure avec succès, sans que celles-ci soient trop répétitives. Ces livres n'ont pas une structure d'arbre, puisque des cycles sont possibles (par exemple lorsque le « valeureux lecteur » est perdu dans un labyrinthe). De plus, deux lecteurs en train de lire le même paragraphe du livre n'en sont pas nécessairement au même point : suivant le chemin déjà parcouru, le héros a pu ou non récolter objets magiques et informations utiles. Pour limiter la « triche », c'est-à-dire pour que le lecteur ne puisse pas faire semblant de disposer de l'amulette indispensable pour vaincre le monstre qu'il a en face de lui, les concepteurs de ces livres-jeux adjoignent à certains objets ou informations une règle

d'utilisation du style « *lorsqu'il sera temps d'utiliser la formule magique, ajoutez 10 au paragraphe où vous vous trouverez alors* ». Le lecteur qui n'a pas rencontré au préalable le sorcier ne peut alors pas poursuivre comme si c'était le cas.

**B. R.**

**Un début d'histoire dont vous êtes le héros. Si le cœur vous en dit, poursuivez-la et complétez son graphe.**

**Allez savoir comment, vous êtes en finale dames des internationaux de France de Roland-Garros, opposée à Serena Williams, tenante du titre.**

**Il faut remporter deux manches pour gagner la partie. Rendez-vous au 1.**

**1. Vous donnez-vous à fond pour gagner la première manche ? Si oui, rendez-vous au 2. Si vous préférez vous économiser, rendez-vous au 3.**

**2. Au prix d'un gros effort, vous remportez la première manche. Mais, épuisée, vous perdez la suivante et vous êtes menée 4-2 dans la troisième. Lancez un dé : si vous obtenez 1 ou 2, rendez-vous au 4. Sinon, rendez-vous au 5.**

**3. Vous êtes au jeu décisif dans la première manche. Tentez-vous un service-volée (rendez-vous au 6), ou servez-vous normalement (rendez-vous au 7) ?**

**4. « Dès le début de la partie, je sentais que ce serait difficile... »** Le journaliste qui vous interroge le lendemain de votre défaite prend un air compatissant. Serena Williams a

remporté Roland-Garros une nouvelle fois. L'année suivante, vous êtes à nouveau confrontée à Serena Williams en finale ; l'expérience acquise lors de votre défaite pourrait vous aider à prendre votre revanche... Rendez-vous au 1.

**5. Votre adversaire manque sa volée. Vous êtes à 4 partout dans la dernière manche. Lancez une pièce : si elle tombe sur pile, rendez-vous au 9. Sinon, rendez-vous au 4.**

**6. Un point qui restera dans les annales ! Vous empochez la première manche. Rendez-vous au 8.**

**7. Votre service va au filet : vous êtes désormais menée une manche à zéro. Rendez-vous au 8.**

**8. La seconde manche commence, aussi âpre que la première. Lancez un dé : si vous obtenez 3 ou moins, vous perdez la manche (rendez-vous au 4 si vous aviez perdu la première), sinon, vous l'emportez (rendez-vous au 9 si vous aviez remporté la première). Si vous en êtes à une manche partout, rendez-vous au 5.**

**9. Victoire ! Après un superbe échange final, vous remportez la partie. Au moment de vous saisir du trophée retentissent alors une série de « Bip ! » caractéristiques de la sonnerie du réveil... Vous ne pensiez tout de même pas que vous aviez gagné Roland-Garros !**

**B. R.**

**Problème subsidiaire :** réaliser le graphe représentant l'évolution possible d'un jeu au tennis selon les règles habituelles (15-0, 15 partout, etc.).

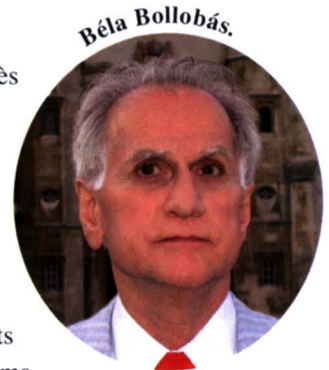


## Le word ladder, un jeu sur les mots de Lewis Carroll

Prenez deux mots de quatre lettres au hasard, comme AIME et MATH. Peut-on passer de l'un à l'autre en plusieurs étapes consistant chacune à modifier une lettre ? Ce jeu inventé par Lewis Carroll concerne le graphe dont les sommets sont les mots de quatre lettres, que l'on relie par une arête si l'on peut passer de l'un à l'autre selon la règle imposée. En utilisant une méthode initiée par Donald Knuth, on s'aperçoit que ce graphe est constitué de plusieurs composantes connexes... dont l'une regroupe près de 95 % des mots. Fort de cette quasi-certitude d'une solution à notre jeu, on trouve la suite AIME–MIME–MITE–MITA–MATA–MATH.

### Encore des Hongrois !

Né à Budapest en 1943, Béla Bollobás fut remarqué par Erdős après avoir gagné deux médailles d'or lors des trois premières Olympiades de mathématiques. À 19 ans, il publie avec lui un premier article sur les problèmes extrémaux en théorie des graphes et, sous sa recommandation, commence à Cambridge un doctorat en géométrie discrète, que les autorités communistes lui imposent de terminer à l'Université de Budapest, sous la supervision de László Tóth et Erdős. Bollobás est l'un des plus éminents mathématiciens en combinatoire. Il a prouvé que le nombre chromatique d'un graphe aléatoire de  $n$  sommets est asymptotiquement de l'ordre de  $n / 2 \log n$ . Le *polynôme de Bollobás–Riordan* est utilisé pour étudier les graphes polynomiaux. En excellant en analyse, en mathématiques discrètes et pentathlon moderne (!), Béla Bollobás est une parfaite synthèse des domaines de prédilection hongrois.



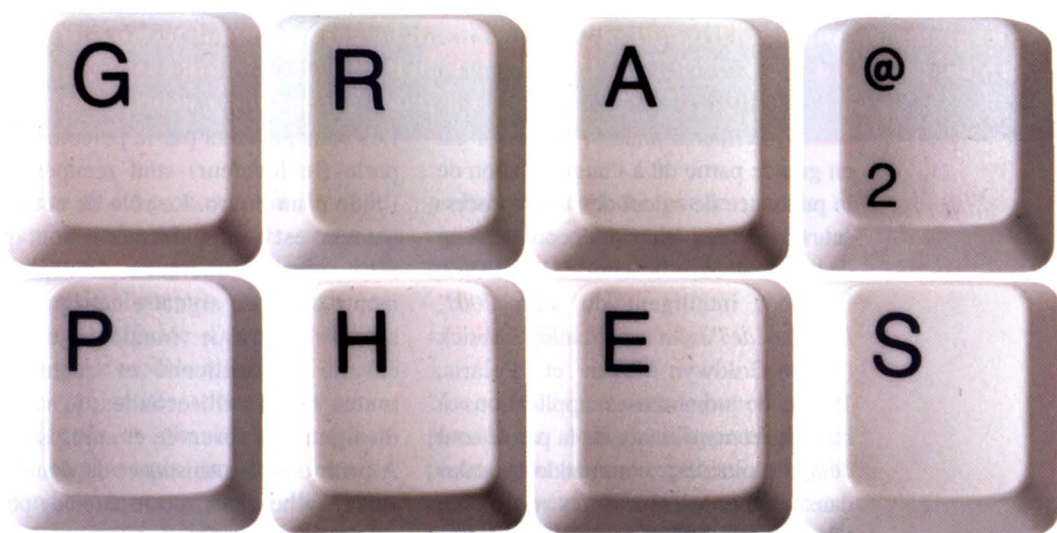
Béla Bollobás.

Né en 1931 à Budapest, András Hajnal est surtout connu pour ses travaux en théorie des ensembles et en combinatoire. En théorie des graphes, il existe le *théorème d'Hajnal–Szemerédi* relatif à la coloration équitable des graphes (prouvant ainsi une conjecture d'Erdős de 1964). Soit  $D$  le degré maximum d'un sommet d'un graphe fini  $G$ . Alors,  $G$  peut être coloré à l'aide de  $D + 1$  couleurs de sorte que les ensembles de sommets de même couleur aient la même taille, à une unité près.

Mathématicien créatif, Endre Szemerédi (né en 1940) fut l'un des premiers à comprendre l'importance des mathématiques discrètes (et des graphes en particulier, dont il se sert aussi bien pour l'étude des réseaux de communication que pour celle d'algorithmes informatiques). Il reçoit en 2012 le prestigieux prix Abel pour « *ses contributions fondamentales aux mathématiques discrètes et à l'informatique théorique* », et pour leur impact profond et durable en mathématiques. Cette récompense participe de la reconnaissance des mathématiques discrètes comme domaine d'activité à part entière, et non plus comme une simple accumulation de résultats disparates.

Parler à son ordinateur	126
Retrouver un mot dans un texte	130
Les réseaux de neurones	132
Des listes autrement qu'en ligne	136
Des arbres à compresser	140

# Dans l'informatique



Que serait la théorie des graphes aujourd'hui sans l'informatique, aurait-elle la notoriété qu'on lui connaît ? Qu'il s'agisse de trier des données, d'établir des files d'attente, de compresser des fichiers ou encore de rechercher un mot dans un texte, on retrouve partout une structure de graphe dans un ordinateur. Un arbre bien construit est plus maniable qu'une liste classique d'objets, et permet de construire des algorithmes très performants.

# Parler à son ordinateur

**Bientôt, vous parlerez à votre ordinateur et il vous comprendra. Derrière ce progrès, prédit par bien des auteurs de science-fiction, se cachent les graphes de mots.**

**L**a reconnaissance de la parole a fait d'énormes progrès ces dix dernières années. Cet essor est en grande partie dû à l'augmentation de la puissance de calcul des microprocesseurs modernes. Bien qu'encore très loin de la redoutable efficacité de HAL 9000, le robot intelligent du film *2001, l'odyssée de l'espace* de Stanley Kubrick (Metro-Goldwyn-Mayer et Polaris, 1968), de nombreuses applications à base de reconnaissance de la parole sont déjà exploitables : commandes vocales dans les voitures, répertoires vocaux des téléphones mobiles, logiciels de dictée pour ordinateurs personnels, interrogations de bases de données par téléphone, etc.

Pour fonctionner, ces machines s'appuient sur de nombreux outils mathématiques. Parmi ceux-ci, les graphes occupent une place de choix.

*Les graphes occupent une place de choix dans les machines de reconnaissance vocale.*

## Comment reconnaître la parole ?

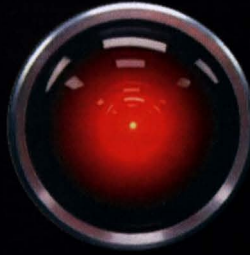
Les sons produits par la personne qui parle (le locuteur) sont récupérés à l'aide d'un micro. Le rôle de cet instrument est de transformer le son, qui n'est autre qu'une suite de déplacements d'air, en signal électrique. Ce signal électrique (analogique) est ensuite échantillonné et quantifié : toutes les  $x$  millisecondes, la valeur du signal est observée et enregistrée. À partir des caractéristiques du signal, le système cherche à reconnaître les phonèmes prononcés. Par phonème on entend la plus petite entité sonore du langage : c'est le cas par exemple du son [a].

Malheureusement, en raison des multiples altérations susceptibles de survenir, les caractéristiques du signal enregistrées ne permettent pas de reconstituer à coup sûr les phonèmes. C'est pourquoi l'on utilise des modèles acoustiques qui, à partir des caractéristiques principales du signal, permettent d'attribuer une probabilité au fait qu'un



MX CHECK

HAL 9000



## HAL 9000

Un canular à la vie dure voulait que le nom de HAL, l'ordinateur de 2001, l'odyssée de l'espace, provenait du fait qu'en remplaçant chaque lettre de son nom par la suivante dans l'ordre alphabétique, on obtient la séquence IBM.

Cette machine, humaine jusque dans sa monstruosité, était capable de soutenir une conversation. En 2001, les ordinateurs étaient encore très loin d'avoir les possibilités de HAL dans ce domaine. Cependant, il est possible aujourd'hui à une personne tétraplégique de commander un fauteuil roulant à la voix. De même, on peut poser des questions orales à son agenda électronique, etc.

phonème ait été prononcé (ou ait voulu être prononcé). Ainsi, nous pouvons associer au signal un ensemble de suites possibles de phonèmes, chacune de ces suites étant affectée d'une probabilité, donnée par le modèle acoustique.

En tant qu'entités sonores, les mots sont formés de phonèmes. Certaines suites de phonèmes candidates ne correspondent à aucun mot : elles sont alors éliminées. Seules les suites de phonèmes représentant des mots sont conservées. Le système associe alors des mots à chaque suite de phonèmes. Comme il peut exister des mots différents pour une même suite de phonèmes (par exemple pour les mots homophones comme « chaîne » et « chêne »), il y a davantage de suites de mots que de suites de phonèmes conservées. Chaque mot possède une probabilité acoustique, calculée à partir des

probabilités données par le modèle à chacun des phonèmes constituant le mot.

### Les phrases : des hypothèses

Une suite de mots est une hypothèse de phrase. Le nombre d'hypothèses de phrases pouvant correspondre au signal de parole peut être très grand (des centaines de milliers, voire des centaines de millions). Pour que les calculs puissent être effectués dans un délai raisonnable, il est nécessaire d'utiliser un outil efficace : c'est ici qu'interviennent les *graphes de mots*. Un graphe de mots permet de représenter de manière très compacte les hypothèses de phrase associées au signal de parole enregistré. S'agissant de traiter d'aussi nombreuses hypothèses, les performances des algorithmes de recherche du chemin optimal



**Architecture simplifiée d'un système de reconnaissance de la parole.**

issus de la théorie des graphes sont aujourd'hui inégalées. Le chemin optimal, c'est-à-dire le chemin dont la probabilité est la plus grande, correspond à la phrase qui sera reconnue par le système comme étant la phrase prononcée par le locuteur. Bien entendu, il arrive encore très souvent que la phrase reconnue ne soit pas celle réellement prononcée : beaucoup de travail reste à réaliser dans ce domaine.

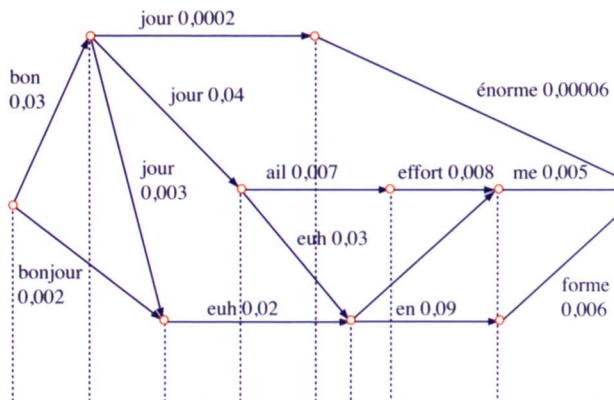
En reconnaissance de la parole, les arêtes sont en général appelées des *transitions*, et les sommets des *nœuds*. Un graphe de mots est un graphe orienté par le temps :

il débute sur un état initial et se termine par un état final. Chaque nœud représente un instant *t*. Chaque transition est étiquetée par un couple (mot ; probabilité acoustique). Les graphes de mots permettent de représenter un très grand nombre de phrases candidates sous une forme très économique : sans graphe, il faudrait calculer la probabilité de chacune des phrases candidates, ce qui est extrêmement long. La structure de graphe de mots permet d'élaborer des méthodes nécessitant moins de calculs (comme l'algorithme de Viterbi).

Bien entendu, de nombreux paramètres doivent être encore intégrés pour obtenir un algorithme véritablement performant. En particulier, pour le choix de l'hypothèse de phrase retenue, seules les probabilités acoustiques ont été utilisées ici : c'est insatisfaisant en pratique, où l'on introduit des probabilités également basées sur des contraintes linguistiques.

L'alliance des graphes, de l'informatique et de la linguistique nous permettra ainsi, peut-être, de rendre le rêve de Stanley Kubrick réalité.

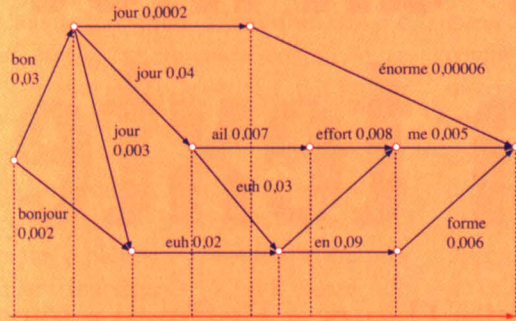
Y. E.



**Exemple de graphe de mots**

## Un algorithme pour reconnaître la voix

Prenons un exemple de graphe de mots, chaque mot étant affecté d'une certaine probabilité (donnée par le modèle acoustique) :



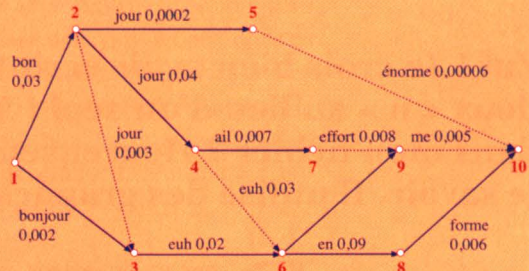
Exemple de graphe de mots

La probabilité d'une phrase est égale au produit des probabilités d'apparition de chacun des mots. Ainsi, la probabilité de « *bonjour euh en forme* » est égale à  $0,002 \times 0,02 \times 0,09 \times 0,006$ , soit  $2,16 \times 10^{-8}$ . Pour connaître la phrase qui possède la probabilité la plus grande d'être celle effectivement prononcée, la méthode la plus directe consiste à faire les calculs sur les huit phrases possibles. Or, la phrase de probabilité maximale est justement « *bonjour euh en forme* ». Pour effectuer de manière exhaustive les calculs, on doit réaliser deux multiplications pour déterminer la probabilité de la première phrase, quatre pour la deuxième... et, en tout, vingt-huit multiplications. Dès que la parole à reconstituer est un tant soit peu longue, le nombre de calculs nécessaires devient prohibitif. L'algorithme de Viterbi, qui exploite intelligemment la structure de graphe, permet d'aller beaucoup plus vite.

Cet algorithme s'effectue en deux temps. Pour commencer, on parcourt les nœuds du graphe dans le sens temporel (dans le sens de la numérotation du schéma ci-dessus). Pour chaque nœud, on détermine le chemin partiel de probabilité maximale y aboutissant en partant de l'état initial. On prend

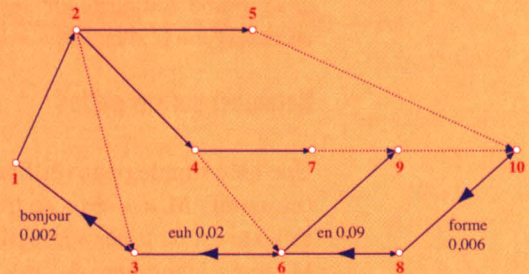
note de la dernière transition y aboutissant (en trait continu sur le dessin, les autres sont notées en pointillés).

Le calcul de la probabilité d'un chemin partiel terminant sur un nœud donné s'effectue de la façon suivante : pour chaque transition terminant sur ce nœud, on multiplie sa probabilité par celle (déjà calculée) du chemin partiel menant à son nœud de départ. Ainsi, à la fin de la première passe, le nœud final du graphe de mots indique la dernière transition de ce chemin.



Première passe de l'algorithme de Viterbi

Au cours de la seconde passe, on parcourt le graphe dans le sens inverse. Il s'agit de reconstruire le chemin optimal en parcourant les transitions retenues dans la première passe, et en ne passant que par les nœuds concernés.



Deuxième passe de l'algorithme de Viterbi

Au cours de la première passe, on calcule les probabilités des mots rencontrés. Pour chaque nœud, on a autant de multiplications à effectuer que de transitions menant à ce nœud. Le nœud 3 demande ainsi deux multiplications, le nœud 4 une seule, le 5 une, le 6 deux, le 7 et le 8 une, le 9 deux et le 10 trois. En tout, treize multiplications : le gain est de plus de 50 % par rapport à la méthode directe.

Andrew James Viterbi, ingénieur né en 1935, mathématicien et co-fondateur de Qualcomm, société spécialisée dans la téléphonie mobile.

# Retrouver un mot dans un texte

**Zut ! Je crois bien avoir écrit tout à l'heure « Huffman » avec deux « n » au lieu d'un seul ! Mais où diable se trouve ce mot dans mon fichier ? Heureusement, mon éditeur de texte peut le savoir. Il utilise des graphes spécifiques, les automates.**

Dans un ordinateur, un texte  $T$  peut être considéré comme une suite de caractères, blancs et ponctuations compris. Chaque terme de cette suite est repéré par son numéro d'ordre. On note  $T[n]$  le caractère en  $n$ ème position : pour le texte  $T$  « Un chat tombe toujours sur ses pattes », on a  $T[1] = \text{« U »}$  et  $T[3] = \text{« »}$ .

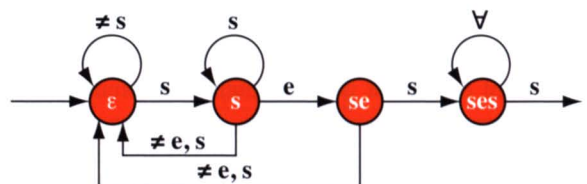
## Retomber sur ses pattes

Une idée simple pour vérifier si le mot (ou motif)  $M = \text{« ses »}$  se trouve dans ce texte est de tester successivement si  $M$  est identique à la séquence  $T[1]T[2]T[3]$ , puis à  $T[2]T[3]T[4]$ , et ainsi de suite (pour faire plus court, on note  $T[1..3]$ ,  $T[2..4]$ , etc. ces séquences). Ce test se décompose en trois comparaisons de deux caractères, ceux de  $M$  et ceux de  $T[i..i+2]$ .

Dans le pire des cas, on effectue  $3n$  comparaisons, ou plutôt  $3(n-2)$ , ce qui est du même ordre de grandeur. Plus généralement, pour vérifier si un motif de longueur  $p$  figure dans un mot de longueur  $n$ , on effectue  $p(n-p+1)$  comparaisons.

L'emploi des graphes permet de réduire cette vérification à  $n + p$  opérations, ce qui constitue une amélioration non négligeable.

Considérons le graphe ci-dessous. Ses sommets sont étiquetés par  $\epsilon$ , « s », « se » et « ses », c'est-à-dire tous les préfixes du mot « ses » ( $\epsilon$  désignant le



**Automate reconnaissant le motif « ses »**

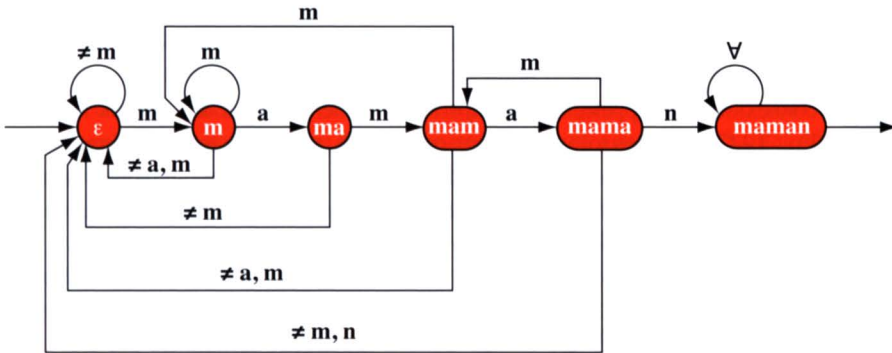
mot vide). Dans un tel graphe, on parle d'états plutôt que de sommets et de transitions plutôt que d'arêtes. Deux états sont à distinguer des autres :  $\epsilon$  est appelé l'état initial et « ses » l'état final (flèche entrante et flèche sortante). Chaque transition (allant d'un état  $p$  à un état  $q$ ) est étiquetée par une lettre  $l$  : la lecture de la lettre  $l$  fait passer l'automate de l'état  $p$  à l'état  $q$ .

Si l'on soumet un texte tel que « son chat se chauffe à ses pieds » à cet automate, il part de l'état initial  $\epsilon$ . Le premier caractère, « s », fait passer de l'état initial à l'état « s » puis « o » fait revenir à l'état  $\epsilon$ . Les caractères suivants maintiennent l'automate à l'état  $\epsilon$ , jusqu'à l'arrivée de « s », puis de « e » et de « », qui font alors passer successivement à « s », « se » et à nouveau à  $\epsilon$ , et ainsi de suite. De la sorte,

un texte fait passer de l'état initial à l'état final si, et seulement si, il contient le motif « ses ».

Avec cette méthode, pour vérifier si le motif « ses » figure dans un mot de longueur  $n$ , il faut effectuer seulement  $n$  comparaisons. Plus généralement, à tout motif on peut associer un automate tel que, pour vérifier si ce motif figure dans un message de longueur  $n$ , il suffit d'effectuer  $n$  comparaisons. La fabrication préalable de cet automate demande  $p$  opérations si le motif est de longueur  $p$  : cela donne donc  $n + p$  opérations en tout. La méthode est illustrée ci-dessous pour l'automate reconnaissant le motif « maman ». Le principe de fabrication se généralise facilement à n'importe quel motif.

H. L.



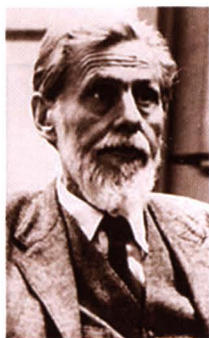
### Automate reconnaissant le motif « maman ».

Pour construire l'automate, on utilise l'idée suivante : si un état, par exemple « ma », est atteint, la lettre « m » fait passer à « mam » puisque c'est la suivante dans le mot « maman ». Une autre lettre fait revenir en arrière, directement à l'état initial. En revanche, si on arrive à « mama », en ajoutant la lettre « m » on obtient « mamam » et donc on ne revient pas à l'état initial mais seulement à « mam », qui est la fin du mot trouvé.

Le procédé de fabrication est donc simple et généralisable : lorsque l'on a atteint un état non final  $u$ , la lettre  $x$  fait passer au plus grand suffixe de  $u.x$  (ce qui désigne le mot  $u$  auquel on a juxtaposé  $x$ ) qui soit un préfixe du motif cherché « maman ».

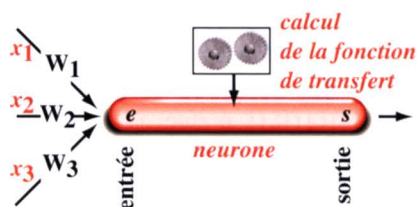
# Les réseaux de neurones

**Les réseaux de neurones informatiques s'inspirent de la forme des vrais neurones. Capables de progresser au fil du temps dans l'analyse de situations du même type, ils s'éloignent toutefois sensiblement de leur modèle biologique.**



**Warren McCulloch.**

**L**e cerveau humain est composé de cent milliards de neurones. Chacun d'eux est affecté à une tâche bien précise, que ce soit la respiration, la vue ou la digestion. Mais un neurone n'est rien sans ses liens avec d'autres neurones ou d'autres cellules. Ces connexions sont appelées des *synapses*. En 1943, le neurologue américain Warren Mc Culloch et le mathématicien Walter Pitts proposent le modèle mathématique suivant du neurone :



Les flèches de gauche symbolisent les synapses apportant de l'information au neurone, sous la forme de nombres :  $x_1, x_2, x_3, \dots$ . Chacune de ces valeurs est affectée d'un certain coefficient, appelé *poids synaptique*, qui dépend de la synapse porteuse du nombre en question. On note traditionnellement  $W_1, W_2, W_3, \dots$  ces différents poids).

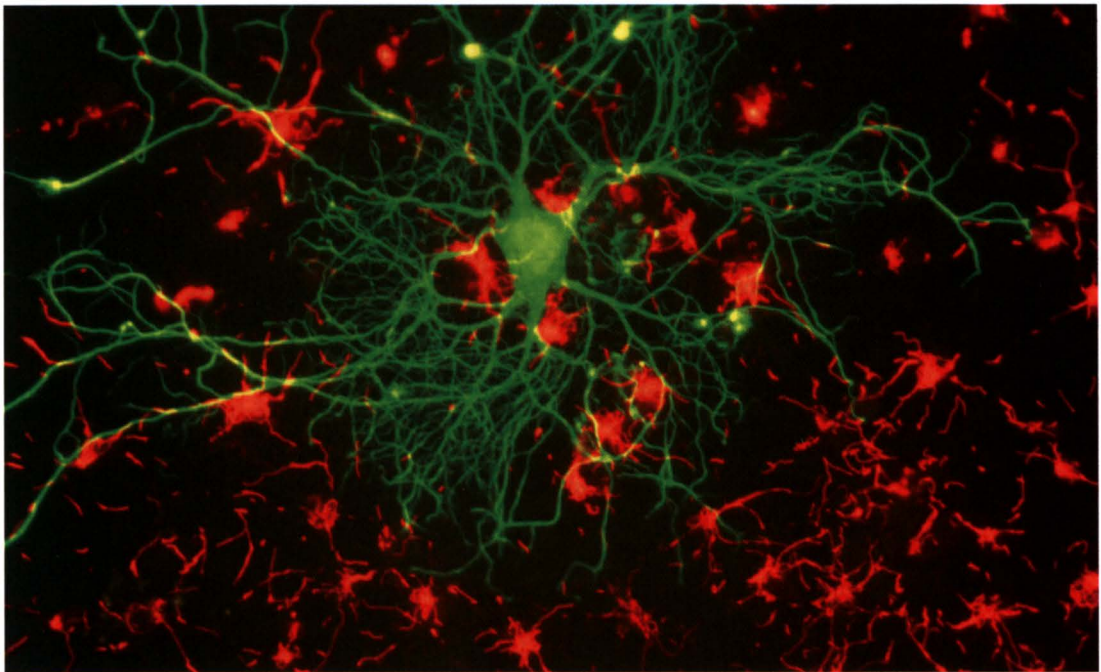
## Neurones d'informaticien

Le neurone informatique synthétise alors l'information en effectuant la somme pondérée

$$e = x_1 W_1 + x_2 W_2 + x_3 W_3 + \dots :$$

le nombre  $e$  ainsi obtenu sera surtout déterminé par les valeurs apportées par les synapses les plus importantes (ou les plus fiables), auxquelles sont naturellement affectés des poids plus importants.

À cette valeur obtenue à l'entrée du neurone correspond alors une valeur de sortie,  $s$ , déterminée par  $e$  et calculée à l'aide d'une certaine fonction  $f$  propre au neurone considéré. On écrit ainsi  $s = f(e)$ . La fonction  $f$  est appelée *fonction de transfert* ; elle calcule le transfert de l'entrée  $e$  vers la sortie  $s$ . (On peut également considérer des neurones avec plusieurs sorties identiques ou distinctes.) Ce nombre  $s$  va alors transiter par une nouvelle synapse et jouer le rôle de l'un de nos nombres  $x_1, x_2$  ou  $x_3$  pour le neurone suivant.



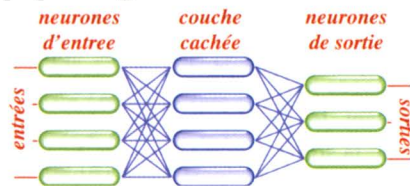
Bien entendu, ces « neurones » ne sont qu'un modèle mathématique des neurones effectifs de notre cerveau : on parle à leur sujet de neurones *formels*. En les mettant en réseau, on obtient un « réseau de neurones ». De tels réseaux peuvent donc aussi bien être considérés comme des modèles de certaines fonctions de notre cerveau (vue, mémoire...) que comme des instruments mathématiques.

Pour illustrer ce second point de vue, voici un exemple très simple de réseau de neurones réalisant la multiplication de deux nombres donnés en entrée :



Un réseau de neurones sans boucle à deux couches. Les deux premiers neurones (première couche) ont comme fonction de transfert la fonction logarithme. Ensuite,  $\ln(a)$  et  $\ln(b)$  sont additionnés en entrée du troisième neurone (deuxième couche). La fonction de transfert est alors l'exponentielle, la sortie donne donc le produit  $a.b$ .

Ce premier exemple montre que les réseaux neuronaux, même s'ils sont d'inspiration biologique, sont des objets purement mathématiques. Dans cet exemple, le réseau ne possède pas de boucle. Autrement dit, aucun retour en arrière n'est possible. Chaque neurone fait son travail après ses prédécesseurs, une couche après l'autre, le résultat ne dépend donc pas du temps. Pour cette raison, on dit qu'il est *statique*. Ce type de réseau est utilisé pour évaluer des fonctions mathématiques comme dans l'exemple précédent mais aussi dans la reconnaissance de formes. Bien entendu, pour des questions plus compliquées que celle de notre exemple, on utilise des réseaux avec un grand nombre de couches comportant pour la plupart un grand nombre de neurones.

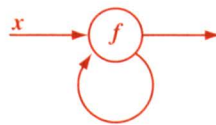


Walter Pitts.

Les réseaux de neurones en couches. Les propriétés de ces réseaux dépendent du nombre de couches et du nombre de neurones par couche. Ils décrivent assez bien les premières étapes des systèmes sensoriels.

### Des structures qui apprennent

Une caractéristique des réseaux de neurones est leur capacité à « apprendre », par exemple, à reconnaître une lettre ou un son. Il y a *apprentissage* en ce sens que les paramètres s'ajustent au fil de l'expérience acquise. La structure de réseau de neurones permet de classer, généraliser, mémoriser et même oublier. Un réseau de neurones reconnaîtra d'autant plus facilement un objet qu'il l'aura « vu » plus souvent. Comment est-ce possible ? Il suffit pour cela de faire ajuster automatiquement les poids synaptiques en fonction des résultats antérieurs. Sur un certain nombre d'exemples, le réseau va donc choisir des poids de façon à obtenir le résultat souhaité. De cette manière, on peut fabriquer des réseaux de neurones capable d'apprendre à jouer à des jeux simples comme le jeu de Nim. Les réseaux comportant des boucles sont aussi appelés *réseaux récurrents* (ou *récurrents*). Pour comprendre cette dénomination, il suffit de considérer l'exemple très simple suivant :



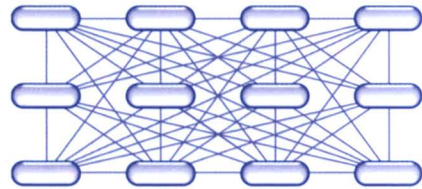
À l'instant 0, la première entrée est  $x$  et la seconde 0. La sortie est donc, en tenant compte de deux poids  $p$  et  $q$ ,  $x_1 = f(px)$ .

Les entrées sont donc maintenant  $x$  et  $x_1 + f(px)$ , la sortie devient  $x_2 = f(px + qx_1)$ . Maintenant, le système n'est plus statique, il évolue avec le temps : on dit qu'il est *dynamique*.

De façon générale, si la sortie après  $k$  passages par le neurone est  $x_k$ , au tour suivant, les entrées deviennent  $x$  et  $x_k$  donc la sortie  $x_{k+1} = f(px + qx_k)$ .

Ainsi, la suite des sorties est définie par récurrence. Il se pose donc des problèmes de convergence et il est même possible que le réseau évolue de manière chaotique.

Dans les années 1980, on a étudié des réseaux de neurones *complètement connectés*, c'est-à-dire où chaque neurone est connecté à tous les autres comme celui-ci :



Ces réseaux avec un très grand nombre de neurones (jusqu'à quinze mille) ont servi à des études sur la mémoire. Leurs capacités limitées en font de bons candidats pour la description de la mémoire humaine à court terme.

H. L.



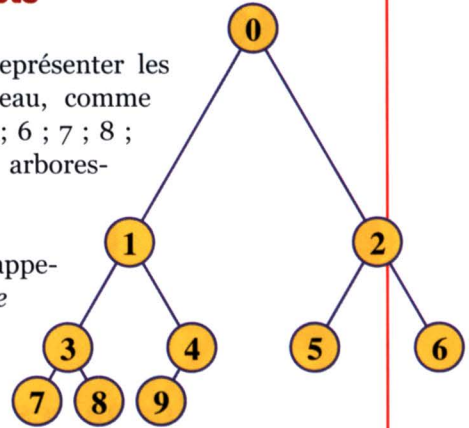
## Files d'attente : en faire tout un tas !

Dans les ordinateurs, plusieurs tâches sont effectuées simultanément. Cela permet de gérer au mieux les diverses ressources à la disposition du processeur (mémoire, imprimante...). Pour chaque ressource, l'ordinateur utilise donc une file d'attente. Le même problème se retrouve sur les réseaux (Internet...). Une gestion de ces tâches s'impose. Si, comme sur un ordinateur personnel, le nombre de travaux en cours est minime, la représentation peut prendre la forme d'un simple tableau unidimensionnel (un vecteur) et du principe suivant lequel le premier arrivé est également le premier servi : on retrouve la queue classique des boulangeries le dimanche matin. Si la queue est de longueur  $n$  et que chaque travail prend le même temps, l'attente est alors proportionnelle à  $n$ . Dans les cas où  $n$  est petit, ce système est suffisant, mais sur de grands réseaux, une telle gestion aboutit au blocage de tout le système. Il faut donner des ordres de priorité afin que les tâches les plus essentielles puissent être accomplies les premières.

L'idée de départ est donc d'attribuer à chaque travail un numéro de priorité et de créer une file d'attente. Chaque fois qu'un nouveau travail a besoin de la ressource, il est inséré dans la file avec son numéro. Chaque fois que la ressource est disponible, l'élément ayant la priorité la plus élevée dans la file en est extrait. C'est l'exemple des services d'urgences des hôpitaux.

## Des arbres binaires presque complets

On peut toujours représenter les éléments d'un tableau, comme  $[0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9]$ , sous une forme arborescente :



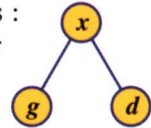
Un tel graphe est appelé un *arbre binaire presque complet*.

Les emplacements cerclés sur le schéma sont les *nœuds*, le premier nœud en partant du haut est la *racine*.

Chacun des deux nœuds descendant d'un nœud donné sont ses  *fils*  (gauche et droit). Si les éléments du tableau sont numérotés de  $0$  à  $n - 1$ , l'élément  $i$  a pour fils  $2i + 1$  et  $2i + 2$ . Si chaque élément est supérieur à ses deux fils, on parle de structure de tas.

De façon générale, on définit les *arbres binaires sur les nombres entiers* au moyen des deux règles de construction suivantes :

un nombre est un arbre binaire, si  $x$  est un nombre et  $g$  et  $d$  deux arbres binaires, alors est un arbre binaire.



## Hauteur d'un arbre

Dans le cas d'un arbre binaire complet, la relation entre le nombre d'éléments  $n$  et la hauteur  $h$  est facile à déterminer. En effet, à la hauteur  $0$ , l'arbre a un seul élément (la racine). Ensuite, à chaque niveau, le nombre d'éléments double puisque chaque élément a deux fils. Ainsi, si la hauteur est  $h$ , le nombre d'éléments de l'arbre complet est égal à  $1 + 2 + \dots + 2^h$ , soit  $2^{h+1} - 1$ . Pour un arbre presque complet, on a donc  $2^h < n < 2^{h+1} - 1$ , ce qui donne  $h \leq \log_2(n) < h + 1$ .



# Des listes autrement qu'en ligne

**Si les dictionnaires et les annuaires utilisent, en bonne logique, un ordre linéaire pour classer leurs éléments, il est des situations où la structure arborescente est bien meilleure. Premier concerné par cette structure : l'ordinateur.**

Comme Monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, tout un chacun consulte des bases de données sans y prendre garde. Les exemples les plus courants de telles bases sont les dictionnaires et les annuaires. Leur structure est toujours la même : chaque article est formé d'un élément (on parle d'*étiquette*) sur lequel portent les recherches (un nom dans le cas du bottin, un mot dans celui du dictionnaire) et d'une partie contenant le renseignement cherché (numéro de téléphone, définition...).

## Un ordre pour aller plus vite

*Sur ordinateur, une base de données est souvent appelée à évoluer.*

On utilise une base de données lorsque l'on recherche un élément dans une liste (la *base*). Quand celle-ci est longue, c'est-à-dire quand le nombre  $n$  d'étiquettes est grand, la recherche risque de l'être également : si l'on procède en commençant au début et en consultant tous les éléments jusqu'à trouver le bon (ou échouer), dans le pire

des cas, il nous faut un temps proportionnel à  $n$  pour finir le travail. Heureusement, quand on doit consulter un dictionnaire pour trouver la définition du mot « orang-outan », on n'a en fait pas besoin de commencer par la première page : on regarde plus ou moins « au milieu ». Si l'on tombe sur « ptérodactyle », c'est qu'il faut regarder plus haut, alors que si c'est le mot « lézard », il faut aller voir plus bas.

Si l'on consulte une base de données contenant, mettons, cent mille étiquettes, on commence par regarder celle figurant en 50000<sup>e</sup> position : à moins d'avoir beaucoup de chance, il convient alors de chercher soit dans les cinquante mille étiquettes suivantes, soit dans les cinquante mille précédentes. En continuant sur le même principe, au coup suivant ne restent que vingt-cinq mille étiquettes, puis douze mille cinq cents, six mille deux cent cinquante, trois mille cent vingt-cinq (...) et enfin une seule : la bonne (si elle figure bien

## La hauteur des arbres équilibrés

Soit  $m_h$  (resp.  $M_h$ ) le nombre minimal (resp. maximal) de nœuds d'un arbre équilibré de hauteur  $h$ . Considérons un arbre équilibré de hauteur  $h$  dont le nombre de nœuds est égal à  $m_h$  : l'un de ses deux sous arbres est de hauteur  $h - 1$  (par exemple celui de gauche), et l'autre de hauteur au plus  $h - 1$ . Les hauteurs des deux sous-arbres diffèrent d'au plus une unité, donc le sous-arbre de droite est de hauteur  $h$  ou  $h - 1$ .

Puisque le nombre de nœuds de l'arbre considéré est minimal, il en va de même pour chacun des sous-arbres (dans le cas contraire, il suffirait de les remplacer par des arbres équilibrés ayant moins de nœuds pour aboutir à une contradiction).

On en déduit donc que la hauteur du sous-arbre droit est  $h - 1$  (sinon, il n'y aurait pas minimalité), puis la formule de récurrence

$$m_h = 1 + m_{h-1} + m_{h-2}.$$

Par ailleurs, on a facilement que  $m_0 = 1$  et  $m_1 = 2$ .

Par récurrence, on en tire que  $m_h$  est minoré par  $2^{(2/3)(h+1)} - 1$ .

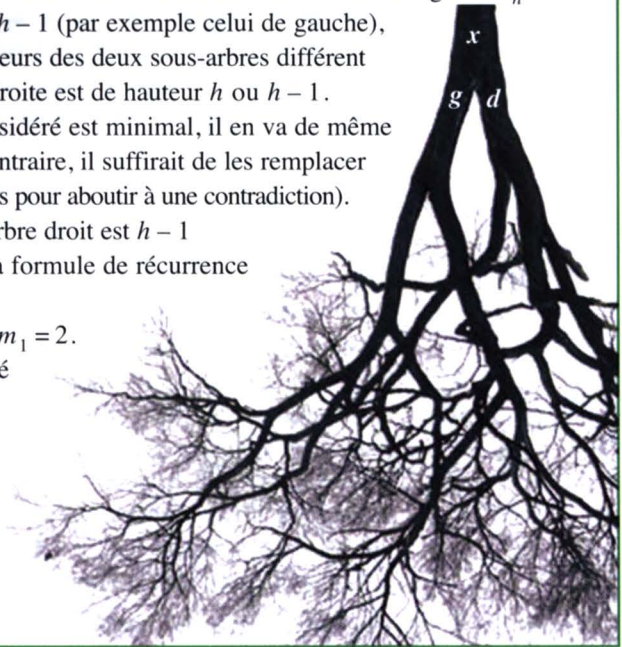
Une étude identique sur le fond permet de démontrer que  $M_h$  vérifie la relation

$$M_h = 1 + 2M_{h-1}$$

et que, puisque  $M_0 = 1$  et  $M_1 = 3$ ,

$M_h = 2^{h+1} - 1$ , d'où l'inégalité

$$2^{(2/3)(h+1)} \leq n + 1 \leq 2^{h+1}.$$



dans la base). La recherche s'est faite en au plus dix-sept comparaisons. Ce résultat est indépendant de l'étiquette cherchée, il provient du fait que l'on a  $2^{17} > 100\,000$ . Plus généralement, pour chercher un mot dans une base de  $n$  articles, le temps est au plus proportionnel à  $\log_2(n)$ .

### Des mots qui vont et qui viennent

Du point de vue de celui qui la consulte, la question des bases de données est ainsi à peu près close. Pour le fournisseur de la base, en revanche, tout reste à faire.

Quand il s'agit de constituer une liste sur papier, comme dans le cas d'un dictionnaire, la seule chose à faire est de rassembler les éléments de la liste et de les ranger dans l'ordre (alphabétique, le plus souvent). L'ordinateur,

quant à lui, peut davantage : on peut imaginer de faire évoluer la base, en lui ajoutant ou en lui supprimant des éléments. Avec notre structure « en dictionnaire », pour ajouter (ou supprimer) un élément, il faut trouver l'emplacement où l'on doit l'insérer (ou l'endroit où il se trouve pour le supprimer). Le temps que cela prend est le même que celui d'une recherche, c'est-à-dire proportionnel à  $\log_2(n)$ .

Mais ce n'est pas tout : il faut ensuite insérer (ou supprimer) l'élément concerné et, pour cela, déplacer d'un cran tous ceux situés après lui, que ce soit pour lui laisser une place ou pour boucher le trou qu'il laisse. Cela fait entre 1 et  $n$  étiquettes à déplacer, donc, dans le pire des cas, le temps nécessaire à cette opération est proportionnel à  $n$ . En conséquence, si la base de données doit évoluer régulièrement, les coûts de maintenance sont élevés.

### Structurer avec des arbres

La structure la plus utilisée sur ordinateur est celle des *arbres binaires de recherche* : il s'agit d'un arbre dans lequel, pour chaque nœud  $x$ , les nœuds du fils gauche se situent avant  $x$  dans l'ordre de la base de données et les nœuds du fils droit sont après. Par exemple, pour rechercher l'élément « orang-outan », on part de la racine « léopard » et on parcourt l'arbre en descendant. Puisque « orang-outan » vient après « léopard » dans l'ordre alphabétique, il faut le chercher dans le sous-arbre de droite ; on recommence ainsi jusqu'à tomber sur une feuille de l'arbre. Le temps de recherche est alors proportionnel à la hauteur de l'arbre, laquelle est d'autant plus petite que les nœuds se répartissent de façon équilibrée entre la gauche et la droite.

### Arbres équilibrés

Si un arbre binaire de hauteur  $h$  est *complet*, c'est-à-dire possède le maximum de nœuds possibles, il a exactement  $n = 2^{h+1} - 1$  nœuds. Une liste à  $n$  éléments étant donnée, il n'y a bien évidemment pas toujours de nombre  $h$  entier vérifiant la relation précédente, on doit donc se contenter d'arbres incomplets « aussi peu déséquilibrés que possible ». Un arbre binaire est *équilibré* si, pour tout nœud, les hauteurs des fils droit et gauche diffèrent d'au plus 1. On démontre (voir en encadré) que dans ce cas, la hauteur totale (et donc le temps de recherche) est de l'ordre de grandeur de  $\log_2(n)$ .

La première opération de maintenance d'une base de donnée structurée en arbre binaire de recherche équilibré consiste à insérer de nouveaux éléments sans perdre la structure. Pour cela, on commence par suivre la règle de construc-

tion des arbres binaires. Ainsi, pour insérer un élément  $e$  dans un arbre dont la racine est  $x$ , on compare  $e$  à  $x$ . Si  $e > x$ , on insère  $e$  dans le sous-arbre droit, sinon on l'insère dans le sous-arbre de gauche. La suite des comparaisons impliquées finit toujours par nous ramener à la création d'une nouvelle feuille à l'arbre, et le temps pour y arriver est de l'ordre de la hauteur de l'arbre, soit  $\log_2(n)$ .

### Retrouver l'équilibre

Mais il y a un problème : l'ajout d'une nouvelle feuille peut « déséquilibrer » l'arbre. Heureusement, comme l'arbre était équilibré avant l'insertion (ou la suppression) de l'élément, le déséquilibre est limité et peut se corriger sans chambouler toute la liste (dans l'encadré ci-contre, tous les cas de figure sont passés en revue).

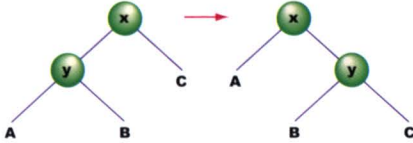
Dans le pire des cas, les transformations assurant le rééquilibrage se font dans un temps proportionnel à la hauteur de l'arbre, donc, comme celui-ci est équilibré, dans un temps proportionnel à  $\log_2(n)$ . Ainsi, toutes les opérations d'utilisation et de maintenance d'une base de données structurées en arbre binaire de recherche équilibré se font dans un temps proportionnel à  $\log_2(n)$ , là où une simple liste « classique » met un temps proportionnel à  $n$ . C'est un gain de temps tout à fait considérable. Pour fixer les idées, lorsque  $n$  vaut un million,  $\log_2(n)$  vaut environ 20 ; pour  $n$  égal à un milliard,  $\log_2(n)$  vaut environ 30. En conséquence, en passant d'une base de données d'un million d'éléments à une base de données d'un milliard de données, on multiplie les temps de travail par 3/2 et non pas par 1 000.

H. L.

## Comment garder l'équilibre tout en ajoutant une feuille

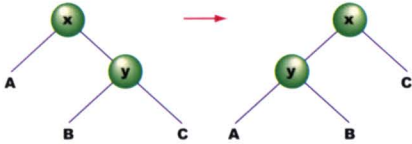
Le rééquilibrage s'effectue à l'aide de transformations simples, les rotations. Dans chaque cas, la structure d'arbre binaire de recherche est conservée.

### 1• rotation droite



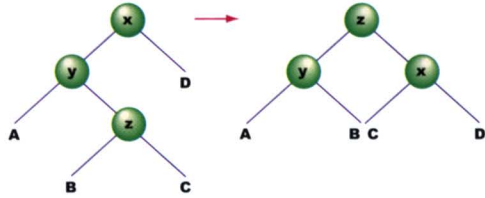
Résolution du cas : A de hauteur  $h - 1$ , B de hauteur  $h - 1$  ou  $h - 2$  et C de hauteur  $h - 2$ .

### 2• rotation gauche



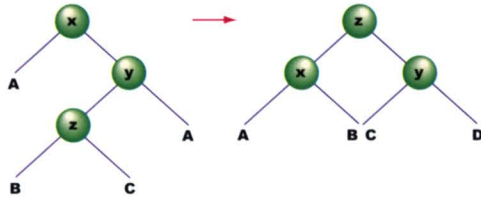
Résolution du cas : A de hauteur  $h - 2$ , B de hauteur  $h - 1$  ou  $h - 2$  et C de hauteur  $h - 1$ .

### 3• rotation gauche-droite



Résolution du cas : A de hauteur  $h - 2$ , B et C de hauteur  $h - 2$  ou  $h - 3$  (l'un au moins de hauteur  $h - 2$ ) et D de hauteur  $h - 2$ .

### 4• rotation droite-gauche

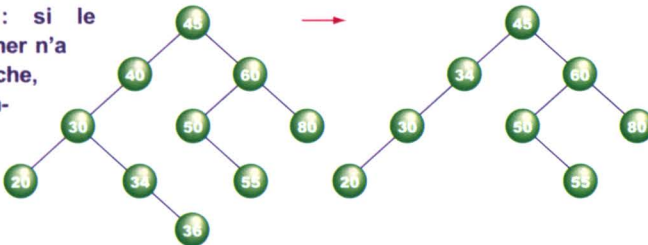


Résolution du cas : A de hauteur  $h - 2$ , B et C de hauteur  $h - 2$  ou  $h - 3$  (l'un au moins de hauteur  $h - 2$ ) et D de hauteur  $h - 2$ .

## Comment supprimer un élément

Quand on supprime un élément à un arbre de recherche, un problème surgit : à moins que l'élément soit une feuille, sa suppression oblige à effectuer un recollement de ses descendants pour les remettre dans l'arbre.

En pratique, plusieurs cas se présentent : si le nœud à supprimer n'a pas de fils gauche, il suffit de le remplacer par son fils droit. Sinon on le remplace d'abord par le plus grand nœud parmi ses descendants, puis on supprime ce nœud. Par exemple, pour supprimer 40 dans l'arbre ci-contre, on le remplace par 34 puis on le supprime.



Toutes ces opérations prennent un temps proportionnel à la hauteur de l'arbre, donc ne modifient pas l'ordre de grandeur du temps total nécessaire à la mise à jour de la base de données.



# Des arbres à compresser

**David Huffman a donné son nom à une méthode de compression des données aujourd'hui à la base des diverses compressions utilisées sur Internet : JPEG, MPEG 1, 2 et 3. Elle peut également servir en cryptographie.**

**L**e codage de Huffman est une méthode de compression des données, utilisée en particulier pour la transmission de messages par Internet. Sur les ordinateurs, les noms des programmes correspondants se terminent en général par **ZIP**.

Pour illustrer le principe, supposons que l'on ait à transmettre un texte composé seulement des lettres *a*, *b*, *c*, *d* et *e*, dont les fréquences d'apparition sont respectivement de 5 %, 50 %, 20 %, 10 % et 15 %. Puisque l'on ne dispose que de cinq caractères différents, on peut coder chacun sur trois *bits* (un *bit* est un 0 ou un 1), selon la règle suivante :  $a = 000$ ,  $b = 001$ ,  $c = 010$ ,  $d = 011$  et  $e = 100$ .

Le décodage s'effectue alors simplement en lisant la table de codage « à l'envers » et en découpant le texte codé en groupes de trois *bits*.

Une idée plus subtile consiste à utiliser des codes de longueurs variables, comme par exemple :

$a = 1101$ ,  $b = 0$ ,  $c = 101$ ,  $d = 111$  et  $e = 100$ .

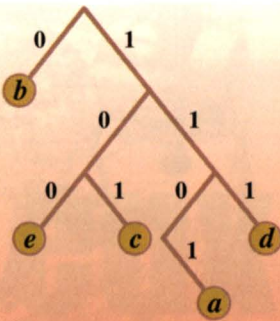
Pour cent caractères à coder, on utilise donc en moyenne :

$5 \times 4 + 50 \times 1 + 20 \times 3 + 10 \times 3 + 15 \times 3$ , soit 205 *bits*. Pour un million de caractères, on obtient 2 050 000 *bits*, soit un gain d'environ 30 % par rapport au codage précédent.

Le texte codé est une liste de *bits*. Lors du décodage, ils sont lus et accumulés l'un après l'autre jusqu'à obtenir un code valide. Par exemple, avec la table de codage précédente, un mot a été codé en 11111010100. Pour le décoder, on lit le premier *bit*, 1. Il ne constitue pas un code. On lit le *bit* suivant (1 encore), ce qui donne 11. Ce n'est pas un code non plus. On continue donc et on obtient 111, qui est le code de *d*. On note *d* et on remet l'accumulateur à zéro. À chaque étape, aucune ambiguïté n'est possible car aucun code n'est le préfixe d'un autre : on aboutit finalement au mot « dabe ».

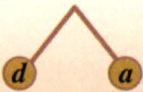
## L'arbre de Huffman

Une méthode simple pour décoder le message est de noter la règle de codage sous forme arborescente (voir ci-dessous). On commence à la racine de l'arbre, et on descend à chaque *bit* : à gauche pour 0, à droite pour 1. Après lecture d'un certain nombre de *bits*, on parvient à une feuille étiquetée par une lettre (voir la figure). On l'écrit, puis on recommence à la racine de l'arbre avec le *bit* suivant.



**Arbre de Huffman du codage de l'exemple. Le décodage se fait en le parcourant de la racine jusqu'aux feuilles.**

Pour construire un arbre de Huffman associé à un texte, on commence par calculer la fréquence d'apparition de chaque caractère. Avec les deux lettres les moins fréquentes (*a* et *d* dans notre exemple), on forme l'arbre suivant :



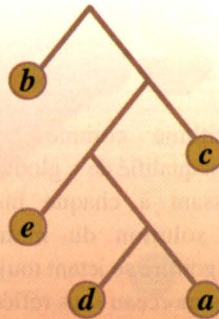
Dans cet arbre, chacune des feuilles est étiquetée par *a* et *d*. La racine est étiquetée par l'ensemble  $\{a, d\}$ . On recommence en remplaçant *a* et *d* dans la liste des caractères par l'ensemble  $\{a, d\}$ , auquel est attribuée la somme des fréquences de *a* et de *d* (soit 15 %), et ainsi de suite. À l'issue de ce procédé, on a construit l'arbre qui suit.

## Quand la glotonnerie ne paie pas

Un voleur dévalise un magasin. Il veut optimiser la valeur de son vol mais il a une contrainte : il est trop frêle pour dérober plus de 50 kg de marchandise.

Il trouve trois articles. Le premier pèse 10 kg et vaut 60 euros, le deuxième 20 kg et vaut 100 euros, et le troisième 30 kg et vaut 120 euros.

Une stratégie glotonne consiste à classer les articles par valeur au kilo et donc à prendre le premier, puis le deuxième, et à s'arrêter à cause de la contrainte de poids. Le vol du gloton sera donc de 160 euros. Une solution plus raisonnée est de prendre les deux derniers articles, ce qui fait 220 euros. Mais un homme aussi raisonnable se ferait-il voler ?



La table de codage correspondant à cet arbre est la suivante :

$a = 1011$ ,  $b = 0$ ,  $c = 11$ ,  $d = 1010$  et  $e = 100$ .

À présent, pour cent caractères à coder, on a donc en moyenne :

$5 \times 4 + 50 \times 1 + 2 \times 3 + 10 \times 4 + 15 \times 3$ ,  
soit 161 *bits* : le gain est donc d'environ 45 % au lieu de 30 %.

## Optimalité de Huffman

On peut montrer le résultat suivant : soit  $T$  un texte dans lequel chaque caractère  $a$  a une fréquence  $f(a)$ . Supposons que  $x$  et  $y$  soient les deux caractères les moins fréquents de  $T$ . Il existe alors un codage préfixe optimal tel que les caractères  $x$  et  $y$  aient des codes de même longueur et ne diffèrent que par le dernier *bit*.

Le nombre de codages préfixes étant fini, l'un d'entre eux est optimal (la longueur du texte codé correspondant est minimale). Soit  $A$  l'arbre correspondant. On considère  $a$  et  $b$  deux feuilles sœurs de profondeur maximale dans  $A$  et, quitte à changer les notations, on suppose que  $f(a) \leq f(b)$  et  $f(x) \leq f(y)$ .

Puisque  $x$  et  $y$  sont les lettres les moins fréquentes, on a  $f(x) \leq f(a)$  et  $f(y) \leq f(b)$ . On permute alors les positions de  $a$  et de  $x$  puis de  $b$  et de  $y$  dans l'arbre  $A$ . On obtient un nouvel arbre  $B$ . La longueur du codage du texte correspondant à  $B$  est inférieure à celle correspondant à  $A$  puisque  $a$  et  $b$  sont plus fréquentes que  $x$  et  $y$ . La longueur du code correspondant à  $A$  étant minimale, les deux longueurs sont donc égales. L'arbre  $B$  est donc optimal. Dans ce codage, les codes de  $x$  et de  $y$  ont même longueur et ne diffèrent que par le dernier *bit*.

L'étape suivante revient à remplacer  $x$  et  $y$  dans le texte  $T$  par  $z = \{x, y\}$  de fréquence  $f(z) = f(x) + f(y)$  et à coder le texte  $T'$  ainsi obtenu suivant le même principe. Les longueurs des deux textes codés sont les mêmes puisque celles des codes de  $x$  et de  $y$  le sont aussi. L'algorithme de Huffman est donc optimal.



### Algorithme glouton

Un algorithme comme celui de Huffman est qualifié de « glouton » car, en choisissant à chaque instant la meilleure solution du moment, il évoque un goinfre se jetant toujours sur le plus gros morceau sans réfléchir à la suite. Dans le cas qui nous intéresse, les codes les plus longs doivent être attribués aux lettres les moins fréquentes, c'est pourquoi on commence la construction de l'arbre par ces feuilles en reliant les lettres les moins fréquentes. Étant les plus basses sur l'arbre, elles auront donc les codes les plus longs. On peut montrer que, s'agissant de codage, cette stratégie gloutonne est optimale (voir l'encadré ci-dessus).

Le codage de Huffman a l'avantage de donner une programmation simple. Son utilisation comme méthode de compression exige de transmettre, en début de message codé, l'arbre de codage : cela réduit son intérêt dans le cas de textes courts, mais dissimuler l'arbre donne par ailleurs une méthode de cryptage de textes.

Les célèbres MP3 et MP4, qui permettent de coder des fichiers audio, utilisent l'algorithme de Huffman. Au préalable, il supprime certaines informations de l'enregistrement sonore, en particulier les sons inaudibles à l'oreille humaine. Il permet ainsi de réduire la taille d'un fichier audio dans un rapport de 12 pour 1, tout en conservant une qualité sonore proche de celle d'un CD.

H. L.





Arbres, jeux et stratégies	144
Graphes sur échiquier	148
Algorithmes en graphes	151
Graphes et labyrinthes	152
Résoudre des énigmes à l'aide des graphes	156
Jeux et problèmes	160
Solutions	164

# Jeux de graphes

La théorie des graphes permet de comprendre, voire de résoudre une grande quantité de jeux de réflexion ou de jeux mathématiques et logiques, parfois de manière inattendue (voir à ce sujet le numéro 46 de la Bibliothèque Tangente). *A contrario*, les graphes peuvent être à la source d'une catégorie de récréations dont les plus classiques sont des problèmes de labyrinthes.

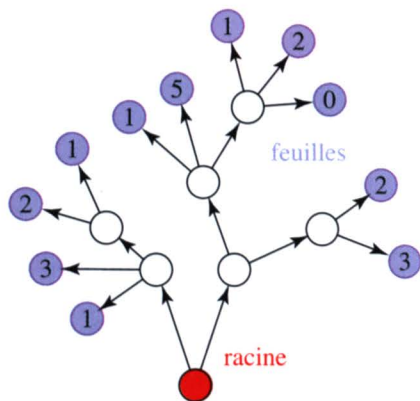
# Arbres, jeux et stratégies

**Comment créer à la pelle des jeux de stratégie inédits ? Comment devenir invincible au jeu d'échecs ? La réponse à ces questions se trouve dans les arbres, qui sont des graphes particuliers.**

**V**oici une méthode pour créer des jeux de stratégie totalement inédits. On dessine d'abord un arbre avec une racine et plein de feuilles. Notre arbre est donc constitué d'un nombre fini de nœuds, certains d'entre eux étant reliés par des arcs. Un nœud privilégié constitue la *racine*. On suppose que n'importe quel autre nœud est accessible à partir de la racine par un unique chemin qui suit les arcs du graphe, ce qui permet d'orienter sans ambiguïté tous les arcs de l'arbre dans le sens qui éloigne de la racine. Il existe alors certains nœuds dans le graphe d'où ne part aucun arc : on les nomme les *feuilles* de l'arbre, ce sont ceux à partir desquels on ne peut s'éloigner davantage de la racine.

Sur chacune des feuilles de l'arbre, écrivons alors un nombre, positif ou négatif : on obtient quelque chose qui ressemble à la figure ci-contre (où tous les nombres ont été choisis positifs par commodité). Les deux joueurs qui s'affrontent n'ont plus qu'à se munir d'un pion (un seul pour les deux) et à jouer selon la règle suivante : on place le pion sur la racine, le joueur 1 (le premier à jouer) choisit

l'un des arcs partant de la racine et déplace le pion vers le nœud où mène cet arc. À son tour, le joueur 2 choisit l'un des arcs issus de cette nouvelle position et le fait suivre au pion pour atteindre le nœud suivant. On continue ainsi tant que c'est possible : à chaque tour le pion s'éloigne un peu plus de la racine, jusqu'à atteindre une feuille où la partie s'achève. C'est l'heure du bilan : le nombre écrit sur la feuille où est arrivé le pion correspond au nombre de points marqués par le joueur 1 (c'est donc le joueur 2 qui gagne si le nombre indiqué est négatif).



## Polémique : les échecs sont-ils finis ?

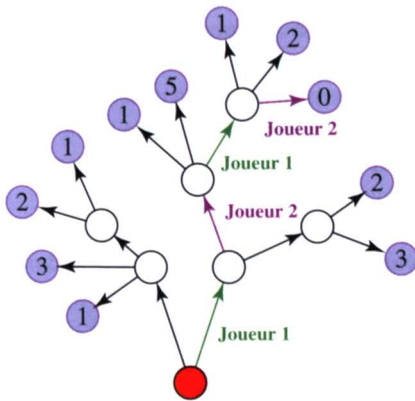


La première fois que l'aspect théorique des jeux de stratégie a été étudié d'un point de vue mathématique, ce fut en 1912 par Ernst Zermelo, mathématicien allemand connu pour ses contributions au développement de la théorie des ensembles. Il étudia plus particulièrement le jeu d'échecs, mais avec une

approche différente de celle présentée ici, qui lui est pourtant souvent attribuée. Une traduction en anglais et une analyse de son article original se trouve dans un travail de Ulrich Schwalbe et Paul Walker (disponible en ligne).

Peut-on appliquer au jeu d'échecs l'algorithme minimax présenté ici ? D'excellents ouvrages de théorie des jeux l'affirment directement. Pourtant, les échecs ne remplissent pas complètement les conditions demandées pour pouvoir être représentés sous forme d'arbre, car il est très souvent possible de revenir à une position des pièces déjà observée. Pour ne pas introduire de boucle dans le graphe, on convient de représenter par des sommets différents des positions de pièces identiques mais qui n'ont pas été obtenues par la même suite de coups, ce qui est d'autant plus nécessaire aux échecs où la légalité de certains déplacements (comme le roque ou la prise en passant) peut dépendre de l'historique de la partie. Mais comme il est parfois permis de revenir infiniment souvent à une position donnée, cela introduit dans l'arbre du jeu d'échecs des branches infinies qui ne peuvent être analysées par l'algorithme minimax. On peut s'en sortir en montrant que le jeu d'échecs officiel est équivalent, du point de vue stratégique, au jeu modifié pour lequel la partie est déclarée nulle dès qu'une même position est obtenue trois fois (voir à ce sujet le travail de Christian Ewerhart, disponible en ligne).

En faisant varier la forme de l'arbre et les étiquettes des feuilles, on peut ainsi créer une variété infinie de jeux. En fait, on peut constater que la quasi totalité des jeux de stratégie classiques (comme par exemple le morpion, les jeux de Nim ou les échecs, voir cependant l'encadré ci-contre) peuvent être présentés de cette façon : il suffit de considérer l'arbre dont les nœuds sont toutes les situations possibles du jeu, les arcs sont les coups permis par les règles, et où la racine et les feuilles sont respectivement la position initiale et les positions finales. Quelques contraintes sont toutefois à respecter pour que cette modélisation soit possible :



- il ne doit y avoir qu'un nombre fini de situations possibles, sans retour en arrière autorisé (cela créerait des cycles dans l'arbre) ;
- à tout instant, les joueurs doivent parfaitement connaître la situation (ce n'est pas le cas des jeux de cartes où l'on ignore la main de l'adversaire) : le jeu est à *information complète* ;
- les coups joués doivent être entièrement décidés par les joueurs, et non par le hasard (pas de jet de dés).

### L'algorithme minimax



**John von Neumann est né en 1903 à Budapest et mort en 1957 à Washington. Il développa la théorie des jeux durant la Seconde Guerre mondiale. Il est également à l'origine de la construction du premier véritable ordinateur, l'Eniac.**

Dans un tel jeu, les intérêts des joueurs 1 et 2 sont diamétralement opposés. Un des premiers théorèmes importants de la théorie des jeux stipule que dans un tel affrontement, si les deux joueurs jouent chacun rationnellement (c'est-à-dire au mieux de leurs intérêts), alors l'issue de la partie est toujours la même. Voici une méthode pour parvenir à un tel résultat, elle semble due à John von Neumann. L'idée est de partir des positions finales (les feuilles) et de remonter progressivement jusqu'à la position initiale (la racine) en déterminant à chaque étape le meilleur choix possible pour chacun des joueurs.

En chacun des nœuds de l'arbre, on peut facilement déterminer si c'est le joueur 1 ou le joueur 2 qui joue en comptant le nombre d'étapes qui mènent de la position initiale à ce nœud.

L'arbre étant constitué d'un nombre fini de nœuds, il existe au moins un de ces nœuds qui n'est pas une feuille, mais qui ne peut mener qu'à des positions finales : pour trouver un tel nœud, il suffit de regarder la plus longue partie possible dans le jeu, c'est-à-dire le plus long chemin possible de la racine à une feuille, et de considérer l'avant-dernière étape de ce chemin.

Dans une telle position, si le tour est au joueur 2, celui-ci va évidemment choisir la case de valeur minimum pour terminer la partie. Mais comme il n'y a plus de suspense, autant décider tout de suite que la partie est terminée, c'est-à-dire d'écrire sur cette position la valeur minimum de toutes les feuilles auxquelles elle mène, et de faire comme si c'était déjà une position finale. Si au contraire le tour est au joueur 1, le même raisonnement conduit à considérer cette position comme une position finale mais où la valeur est cette fois la valeur maximum des feuilles qui suivent.

Une fois la valeur inscrite sur cette nouvelle position finale, on peut recommencer, c'est-à-dire trouver un nœud qui ne mène qu'à des positions finales, lui attribuer la valeur minimum (si c'est au tour du joueur 2) ou maximum (si c'est au tour du joueur 1) des positions qui suivent, et déclarer que ce nœud est désormais une position finale, puisque dans une telle situation on sait déjà quelle sera l'issue de la partie.

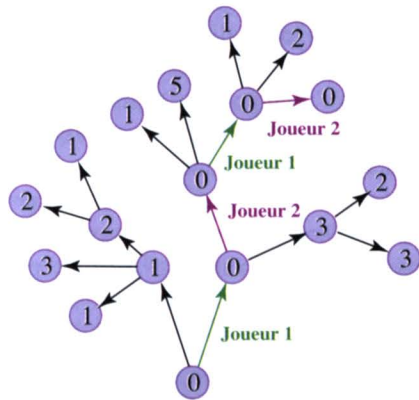
Jusqu'à quand peut-on continuer ainsi ? Tant qu'il existe encore des positions sur lesquelles on n'a pas encore écrit de valeur ; mais, puisque l'arbre est fini, on parviendra au bout d'un certain temps à étiqueter tous les nœuds, y compris la racine ! Le nombre écrit sur la racine s'interprète alors ainsi : si durant toute la partie les deux joueurs jouent rationnellement, la partie se termine forcément en une position finale portant cette valeur.

## De la théorie à la pratique

## Il existe trois cas possibles :

- ou bien le nombre écrit sur la racine est strictement positif ; cela signifie que le joueur 1 possède une stratégie qui lui permet de gagner contre tout autre joueur, aussi intelligent soit-il ;
- ou bien le nombre est négatif ; dans ce cas, c'est le joueur 2 qui peut s'assurer de la victoire ;
- ou bien le nombre est nul, et alors chacun des deux joueurs peut assurer le match nul dans tous les cas.

De plus, une fois que l'arbre du jeu est complètement rempli, la meilleure stratégie de chacun des joueurs est évidente : le joueur 1 doit toujours choisir, parmi les positions possibles, celle de valeur maximum, et le joueur 2 celle de valeur minimum.



L'arbre du début a été entièrement étiqueté. Si les joueurs jouent chacun au mieux de leurs intérêts, la partie suivra obligatoirement le trajet rouge, et se terminera par un match nul.

L'algorithme d'étiquetage des nœuds de l'arbre du jeu que l'on vient de décrire est souvent appelé *algorithme du minimax* car le joueur 2 doit à chacun de ses coups déterminer le minimum des maxima choisis par le joueur 1 aux coups qui suivent.

L'algorithme du minimax permet théoriquement de déterminer la meilleure stratégie dans n'importe quel jeu fini à information complète où le hasard n'intervient pas, ainsi que de dire lequel des deux joueurs est sûr de gagner (ou éventuellement que les deux joueurs sont assurés du match nul). Mais, bien qu'extrêmement simple, cet algorithme n'est pas utilisable en pratique pour les jeux classiques comme les échecs, à cause du nombre faramineux de nœuds que compterait l'arbre à étudier. Cette méthode nécessiterait en effet l'analyse de toutes les positions du jeu avant de pouvoir déterminer le meilleur premier coup des blancs ! Les vrais programmes qui jouent aux échecs n'effectuent pas une telle analyse rétrograde en partant des positions finales. Ils procèdent comme les joueurs humains en partant d'une situation donnée et en se projetant quelques coups dans le futur.

La puissance des ordinateurs actuels ne permet l'étude complète que de jeux très simples comme le morpion (dont le graphe comporte déjà plusieurs milliers de nœuds et dont l'issue est le match nul). Mais peut-être un jour nos machines seront-elles capables de résoudre le problème suivant :



Les blancs jouent et gagnent en soixante et onze coups.

T. R.

## Références

- *La mort programmée des échecs ?*, Benoît Rittaud, *Tangente* 63, avril-mai 1998.
- *La stratégie gagnante*, André Deledicq, *Tangente* 74, avril-mai 2000.

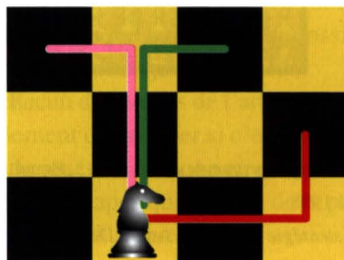
# Graphes

## sur échiquier

Les casse-tête sur l'échiquier sont probablement aussi anciens que le jeu lui-même. Ceux qui concernent les déplacements du cavalier ont fasciné de nombreux mathématiciens. Ils constituent un exemple classique de recherche de chemins hamiltoniens.

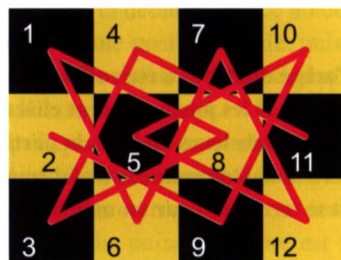
Le jeu d'échecs est constitué d'un plateau (l'échiquier) de huit cases sur huit, alternativement noires et blanches, sur lesquelles sont disposées différentes pièces se déplaçant de diverses manières, simulant une bataille entre deux armées ennemies. Les jeux sur échiquier, quant à eux, s'intéressent à des échiquiers dont les formes sont variées et sur lesquels une ou plusieurs pièces doivent accomplir une tâche déterminée. Certaines de ces tâches peuvent s'étudier par les graphes.

Considérons un échiquier de quatre cases sur trois, sur lequel se déplace un unique cavalier. Le cavalier se déplace en formant un « L », de la façon suivante :



En plaçant le cavalier n'importe où sur l'échiquier  $4 \times 3$  ci-dessous, on demande alors s'il est possible de lui faire parcourir toutes les cases en ne visitant chacune d'elles qu'une seule fois.

Bien sûr, le petit nombre de données permet, en tâtonnant, de trouver assez rapidement que la réponse est positive, par exemple en suivant le chemin 2-9-10-5-12-7-6-1-8-3-4-11.



Que dire alors des questions complémentaires suivantes ?

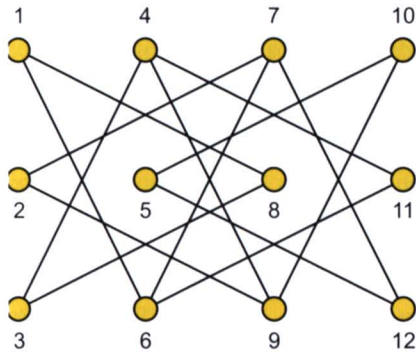
- Combien y a-t-il de manières de faire ?
- Existe-t-il un chemin dans lequel le cavalier visite toutes les cases et soit, en fin de parcours, en mesure de revenir à son

point de départ en un seul coup ? en deux coups ?

- Peut-on partir de n'importe quelle case ?
- Peut-on arriver sur n'importe quelle case ?

### Déplacements sous contraintes

Pour toutes ces questions, pratiquement insolubles sans méthode systématique, un graphe permet de répondre en quelques secondes. Celui qu'il convient de construire a ses sommets numérotés de 1 à 12, chacun représentant l'une des douze cases. Deux sommets sont reliés par une arête si, et seulement si, la règle de déplacement du cavalier permet de joindre en un coup les deux cases correspondantes. On obtient alors le graphe suivant :



Ce graphe met en lumière une structure assez inattendue. On constate en effet que, dans tous les cas, un chemin répondant au problème doit parcourir à la suite les cases 4-3-8-1-6 et 7-12-5-10-9 (dans un sens ou dans l'autre pour chacun de ces deux morceaux de chemin), si tant est que l'une de ces cases n'est pas le point de départ ou d'arrivée. Les cases 4, 6, 7 et 9 jouent un rôle particulier : il n'est pas possible de partir d'elles pour parcourir tout l'échiquier (si l'on part du sommet 4, par exemple, alors soit on va en 11 et alors on ne peut plus joindre à la fois 3 et 9, soit on va en 3 et le même pro-

## Comment faire en sorte que le cavalier visite toutes les cases de l'échiquier une fois et une seule ?

blème se pose avec 9 et 11, soit on va en 9 et le problème se pose à nouveau entre 3 et 11). De manière analogue, on voit qu'il n'est pas possible de partir (ou d'arriver, d'ailleurs) des cases 5 et 8. En revanche, toutes les autres sont des points de départ possibles, un résultat que l'on constate aisément sur le graphe, là où il faudrait de bien plus grands efforts en travaillant directement sur l'échiquier. En regardant le graphe d'encore un peu plus près, on constate que, quel que soit le chemin retenu, le cavalier finit sur une case d'où il a besoin de trois coups exactement pour revenir à son point de départ. Enfin, le dénombrement de tous les chemins possibles donne, avec un peu d'astuce pour simplifier l'étude, un total de huit chemins (mais deux seulement sont différents du point de vue de la symétrie).

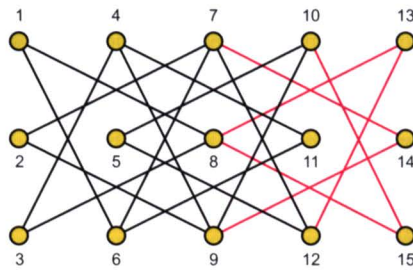


### Sur un « vrai » échiquier

Le même genre d'étude est possible sur un échiquier ordinaire, de huit cases sur huit : le graphe à étudier possède alors soixante-quatre sommets (combien possède-t-il d'arêtes ?). Dans ce nouveau cas d'un échiquier  $8 \times 8$ , il existe des chemins qui permettent de visiter tout l'échiquier en revenant au bout du compte à un coup de la position initiale, mais aussi d'autres pour lesquels ce n'est pas le cas (mais ne vous hasardez pas à essayer de le voir en dessinant le graphe et sans réfléchir par ailleurs !). Dans le graphe du problème de l'échiquier  $8 \times 8$ , on retrouve un certain nombre de « copies » du graphe du problème avec un échiquier  $4 \times 3$  : en pro-

nant sur l'échiquier  $8 \times 8$  un ensemble de douze cases formant un rectangle tel que le petit échiquier représenté précédemment, il est manifeste que la portion de graphe qui correspond à ces douze cases aura exactement la même allure que celui dessiné plus haut : on dit qu'on a affaire à un *sous-graphe*. Dans certains problèmes, comme celui des graphes planaires, il peut être précieux de savoir repérer un sous-graphe particulier dans un graphe donné. Ici, en prenant le point de vue inverse (si l'on peut dire), on voit qu'il est facile, partant du graphe correspondant à la situation de l'échiquier  $3 \times 4$ , de construire celui de l'échiquier  $3 \times 5$  :

Dans ce nouveau cas, une étude brutale sur le graphe est pénible à mener. Pour répondre au problème du cavalier, il convient donc de tenir quelques raisonnements annexes qui permettent de cir-



conscrire l'étude. Tout d'abord, puisque les cases à numéro impair sont une de plus que les cases à numéro pair, un chemin éventuel du cavalier doit nécessairement commencer (et finir) sur une case portant un numéro impair (car la parité de la case sur laquelle se trouve le cavalier change à chaque déplacement, comme on le vérifie facilement sur l'échiquier ou sur le graphe). Ensuite, des considérations élémentaires de symétrie permettent de se contenter des chemins partant de la case 1, 5 ou 7. (On peut le voir sur le graphe, mais cette observation est tout de même plus naturelle sur l'échiquier.)

**Le problème se réduit**

À partir de là, il ne reste que peu de cas à étudier, et l'on se persuade assez rapidement du fait que, contrairement au cas précédent, le problème n'a pas de solution. On peut aussi utiliser, pour aller plus vite encore, le cycle 2-9-14-7 du graphe, de la façon suivante : puisque 2 n'est ni point de départ ni point d'arrivée, alors un éventuel chemin contient nécessairement la séquence 7-2-9 (ou 9-2-7). Dans ce cas, 14 est atteint soit avant 7 soit après 9, il est alors point de départ ou d'arrivée, ce qui est impossible car 14 est pair.

**B. R.**





# Algorithmes en graphes

## L'algorithme de Kaprekar

En 1949, Dattatreya Ramachandra Kaprekar propose l'étude de l'algorithme suivant : prenez un nombre de quatre chiffres non tous égaux (par exemple, 4 742) ; réordonnez ses chiffres du plus grand au plus petit, puis du plus petit au plus grand, et soustrayez les deux nombres :  $7\,442 - 2\,447 = 4\,995$  dans notre exemple. Recommencer avec le nouveau nombre de quatre chiffres ainsi obtenu.

Dans l'exemple, on obtient successivement 5 355, 1 998, puis 8 082, 8 532 et 6 174. Et ensuite ? Eh bien le nombre suivant sera à nouveau 6 174 : nous sommes tombés dans un « puits » dont nous ne pouvons plus sortir !

Puisque les nombres mis en jeu dans l'algorithme sont en quantité finie (ce sont les nombres à quatre chiffres), on peut représenter par un graphe fini l'évolution de l'algorithme. Il suffit d'écrire tous les nombres, et de joindre à l'aide d'une arête orientée chaque nombre et celui à qui il donne naissance (voir *les Algorithmes*, Bibliothèque Tangente 37, 2013).

Pour les nombres à deux chiffres, le graphe montre qu'il existe le puits 00 et le cycle 27-45-09-81-63.

Pour les nombres à quatre chiffres, il n'existe pas d'autre cycle que les deux puits 0000 et 6 174.

## L'algorithme de Prabeckhar

L'algorithme de Prabeckhar est lui aussi basé sur l'écriture décimale : prenez un nombre quelconque (par exemple 162), calculez la somme des carrés de ses chiffres ( $1^2 + 6^2 + 2^2 = 41$ ), et recommencez avec le nombre ainsi obtenu ( $4^2 + 1^2 = 17$ , etc.). L'exemple fournit alors la liste suivante : 162, 41, 17, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145... La suite obtenue semble beaucoup plus capricieuse que dans l'exemple précédent, puisqu'un nombre à deux chiffres peut très bien avoir pour image un nombre à trois chiffres, mais à partir du moment où on retombe sur un

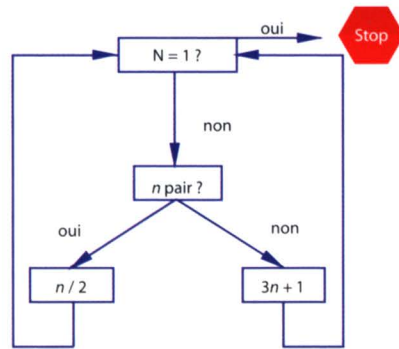
nombre déjà apparu (89 dans la suite précédente), on sait que l'on a découvert un cycle.

Le lecteur est invité à représenter le graphe de l'algorithme pour les nombres de 0 à 100 : ils établiront la (courte) liste de tous les puits et cycles.

## Le problème de Collatz

Un problème circule depuis plusieurs décennies dans les milieux mathématiques sous le nom de *problème de Collatz*, du nom de son inventeur, ou *problème de Syracuse*, du nom d'une université américaine qui a contribué à le faire connaître :

- Prenez un entier naturel quelconque. S'il est pair, divisez le par deux. S'il est impair, triplez le, et ajoutez un à son triple.
- Recommencez avec le nombre obtenu, et ainsi de suite. L'organigramme ci-dessous illustre l'algorithme.



L'expérience montre que, quel que soit le nombre de départ, on finit toujours sur le cycle 4-2-1.

Ainsi, en partant de **27**, on obtient successivement :

<b>72</b>	<b>36</b>	<b>18</b>	<b>9</b>	<b>28</b>	<b>14</b>	<b>7</b>	<b>22</b>
<b>11</b>	<b>34</b>	<b>17</b>	<b>52</b>	<b>26</b>	<b>13</b>	<b>40</b>	<b>20</b>
<b>10</b>	<b>5</b>	<b>16</b>	<b>8</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	

Mais ce résultat n'a encore jamais été démontré, et la question, malgré son ancienneté et son apparente simplicité, semble toujours hors de portée des mathématiques d'aujourd'hui !

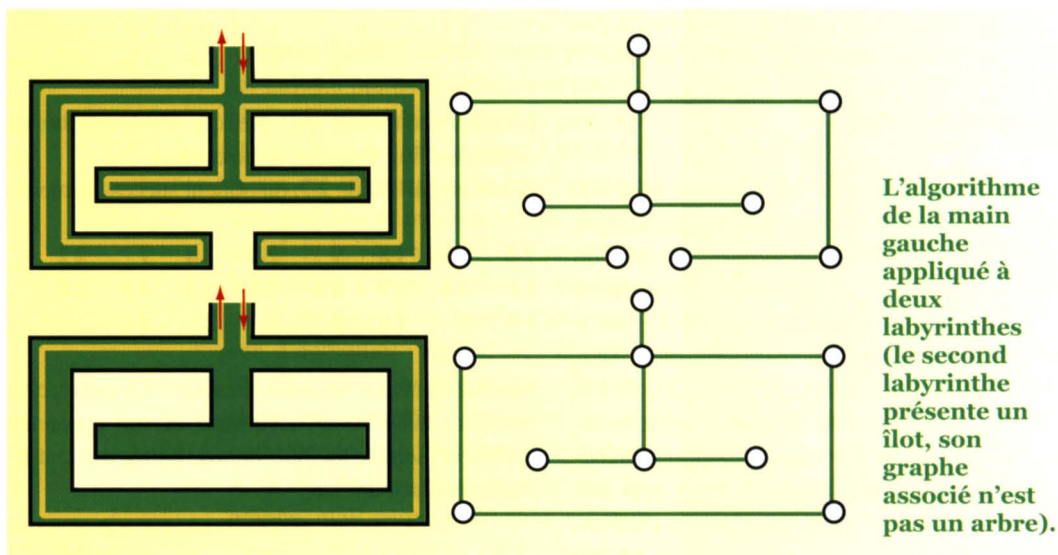
M. C.

# Graphes et labyrinthes

En assimilant les couloirs d'un labyrinthe aux arêtes d'un graphe et les carrefours à ses sommets, la théorie permet de se sortir de n'importe quel labyrinthe. Ah, si Thésée avait connu la théorie des graphes...

**L**es labyrinthes constituent un exemple de graphes dont l'origine remonte à la nuit des temps. Ce thème a existé dans de très nombreuses civilisations : chacun connaît la légende crétoise de Thésée et du Minotaure, ou le labyrinthe de la cathédrale de Chartres, qui fut bâtie au

xiii<sup>e</sup> siècle. Mais les labyrinthes ont également été conçus comme de purs divertissements, comme le labyrinthe végétal de Hampton Court, en Angleterre, réalisé pour le Roi Guillaume III en 1690. Ces labyrinthes bucoliques ont même été remis à la mode depuis quelques années.





L'intérêt d'un labyrinthe peut être multiple : selon les cas, le but peut être d'accéder à un point précis du labyrinthe, ou bien de « visiter » l'intégralité du labyrinthe dans le but d'y découvrir une structure particulière, un trésor, ou une issue secrète, avant d'en ressortir. Une question théorique se pose alors : comment explorer un labyrinthe de façon systématique, c'est-à-dire comment parcourir toutes ses galeries, sans en oublier le moindre recoin ?

### La méthode de la main gauche

Une première méthode d'exploration, très simple d'emploi, consiste à se déplacer en longeant continuellement le mur de gauche (ou bien celui de droite). Hélas, cette méthode ne fonctionne à coup sûr que dans les labyrinthes sans « îlots », c'est-à-dire dont les murs constituent un ensemble d'un seul

*On peut vouloir visiter tous les recoins d'un labyrinthe, ou seulement vouloir s'en échapper.*

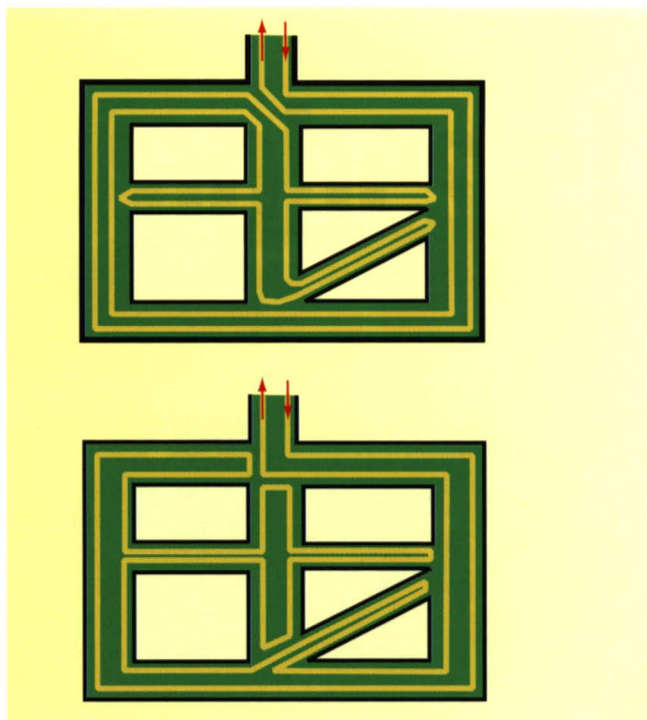
tenant. Le graphe associé à un tel labyrinthe est alors un arbre (montrez-le !). Dès que le labyrinthe comporte des îlots intérieurs entourés de murs, la « méthode de la main gauche » ne permet plus d'en explorer l'intégralité. Heureusement pour les Thésée modernes, des méthodes d'exploration plus sophistiquées ont été élaborées, qui s'adaptent à tous les labyrinthes.

### La méthode de Gaston Tarry

Gaston Tarry (1843–1913) est un mathématicien français de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle qui s'est intéressé à divers thèmes des mathématiques récréatives, comme les carrés multimagiques. En 1895, il énonce une méthode systématique d'exploration des labyrinthes, qui



**Gaston Tarry.**



**Parcours exhaustif d'un même labyrinthe à l'aide tout d'abord de l'algorithme de Gaston Tarry puis de l'algorithme de Trémaux. Chaque couloir est parcouru exactement deux fois.**

est la suivante :

- on parcourt chaque couloir exactement deux fois, une fois dans chaque sens, en mettant une marque à l'entrée dans le couloir et à la sortie (à l'issue de l'exploration, chaque couloir aura donc été marqué deux fois à chaque extrémité) ;
- à chaque carrefour, on s'impose de ne reprendre le couloir de découverte (c'est-à-dire le couloir par lequel on a découvert ce carrefour pour la première fois), qu'en dernier recours.

La seconde règle de cette méthode permet de nombreuses explorations différentes d'un même labyrinthe, puisqu'en arrivant à un carrefour déjà exploré, on peut avoir le choix entre explorer un nouveau couloir, emprunter un couloir ayant déjà été parcouru une fois, ou rebrousser chemin.

### La méthode de Trémaux

À la même époque, Charles Pierre Trémaux, ingénieur des télégraphes, avait communiqué au mathématicien français Édouard Lucas une méthode similaire, mais plus précise, décrite par Lucas dans le premier tome de ses *Récréations mathématiques* (1891) :

- on emprunte une voie quelconque. Si l'on aboutit à une impasse, on revient sur ses pas. Si l'on aboutit à un carrefour, on emprunte une voie quelconque non encore explorée ;
- si l'on arrive à un carrefour déjà exploré, par une voie nouvelle, on revient sur ses pas, ce qui revient à condamner cette voie ;
- si l'on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie déjà parcourue dans l'autre sens, on choisit en priorité une voie nouvelle, ou sinon une voie parcourue dans un seul sens.

### S'évader d'un labyrinthe

Les deux méthodes précédentes permettent de parcourir un labyrinthe à partir de son point d'entrée, elles pourraient évidemment être appliquées à partir de n'importe quel point du labyrinthe. S'il s'agit à présent de s'évader d'un labyrinthe dans lequel on est perdu, une autre méthode, due au mathématicien américain Oystein Ore, permet de trouver la sortie en connaissant à tout moment la « distance » entre l'endroit où l'on se trouve et le point de départ.

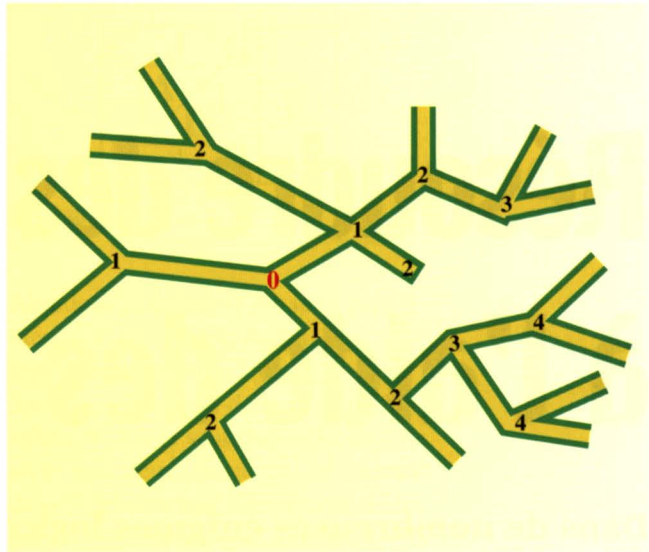
Cette méthode consiste à marquer les carrefours atteints à partir du point de départ, supposé être un carrefour auquel on a attribué le numéro 0. On explore chacune des galeries partant de ce carrefour 0, jusqu'à tomber sur un cul-de-sac ou un autre carrefour qui sera alors numéroté 1. On rebrousse ensuite chemin en marquant la galerie aux deux extrémités, et en ajoutant une croix

lorsqu'il s'agit d'une impasse.

L'étape suivante consiste à explorer tous les couloirs partant de chacun des carrefours 1, excepté celui relié au carrefour 0, jusqu'à atteindre chacun des carrefours 2, situés à deux couloirs du carrefour 0, puis on revient au carrefour 0, toujours en marquant chaque couloir deux fois, à l'entrée et à la sortie...

Cette méthode, très longue à mettre en œuvre, permet d'explorer l'intégralité du labyrinthe, en s'éloignant régulièrement du carrefour 0 au sens de la « distance » ainsi définie dans le labyrinthe.

M. C.



Algorithme d'Oystein Ore : marquage des carrefours et des impasses à partir du carrefour initial, noté 0.



# Résoudre des énigmes à l'aide des graphes

Dans de nombreuses énigmes logico-mathématiques, aucune méthode ne semble pouvoir conduire rapidement à la solution, hormis une exploration systématique souvent fastidieuse de toutes les possibilités. Or, souvent, la modélisation du problème à l'aide d'un simple graphe permet de bien élaguer les difficultés.

Un premier exemple est issu du concours Logic'Flip (un concours pour les collégiens et les lycéens, dans le cadre scolaire, conçu et organisé par la revue *Spécial Logique* et par la Fédération française de jeux mathématiques).

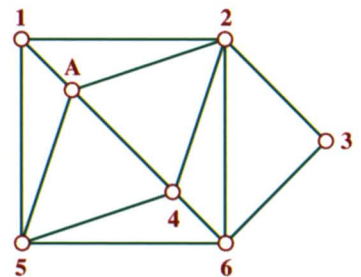
## Les sept lettres

Placez les lettres de B à G dans la grille de façon à ce que deux lettres qui se suivent dans l'alphabet ne se trouvent jamais dans des sections qui se



côtoient. Le A est déjà placé. Où sera le G ?

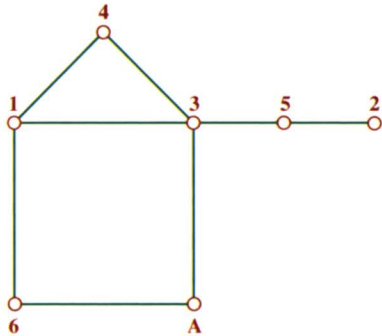
Pour répondre à cette énigme, établissons un graphe dont les sommets représentent les sept régions A, 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Dans ce graphe, deux régions sont reliées par une arête si, et seulement si, elles ont une frontière commune dans le problème. Il s'agit maintenant d'attribuer à chaque numéro de 1 à 6 une lettre (de B à G) de



Graphe associé à la grille (sept sommets et treize arêtes).

façon que deux lettres qui se suivent dans l'alphabet ne correspondent jamais à des sommets reliés par une arête.

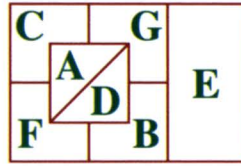
Une remarque s'impose : le problème serait plus simple à résoudre si la condition était que deux lettres qui se suivent doivent obligatoirement correspondre à deux sommets qui sont reliés par une arête. Qu'à cela ne tienne, nous allons construire le graphe complémentaire du graphe précédent, c'est-à-dire un nouveau graphe dans lequel deux sommets seront reliés par une arête si, et seulement si, ils ne le sont pas dans le graphe ci-dessus. Ce graphe complémentaire s'obtient en ajoutant au graphe originel toutes les arêtes qui manquent pour que le graphe soit complet (voir encadré), puis en supprimant les arêtes initiales du graphe originel.



Graphe complémentaire du graphe d'origine (sept sommets et huit arêtes).

On obtient le graphe ci-dessus, où il n'existe qu'une seule possibilité pour former la chaîne de lettres A-B-C-D-E-F-G en suivant un chemin sur les arêtes passant une et une seule fois par chaque sommet : A-6-1-4-3-5-2 (un tel chemin est un *chemin hamiltonien*).

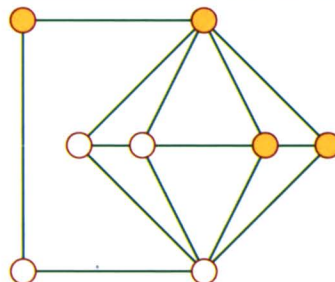
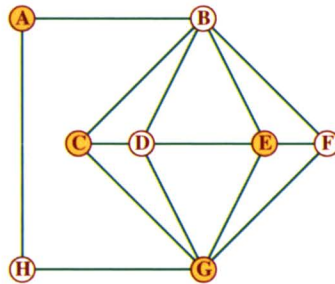
On en déduit alors l'unique solution du problème de départ : la lettre G figure nécessairement dans la région 2.



### Les huit lettres

Abordons maintenant un autre problème, tiré du Championnat des jeux mathématiques et logiques.

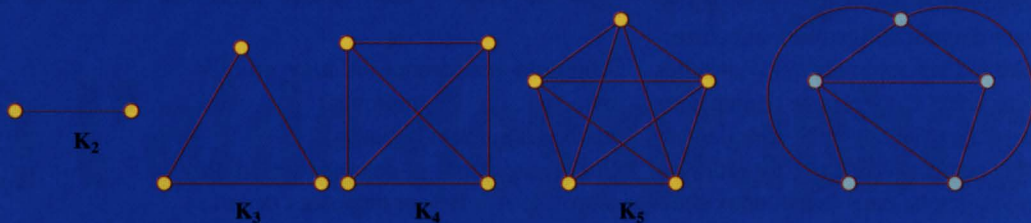
Sur le schéma ci-dessous, les huit lettres de A à H sont disposées de telle sorte que deux lettres qui se suivent dans l'alphabet sont directement reliées par un segment et que la dernière (H) est reliée à la première (A).



Disposez maintenant ces huit lettres sur le second dessin de

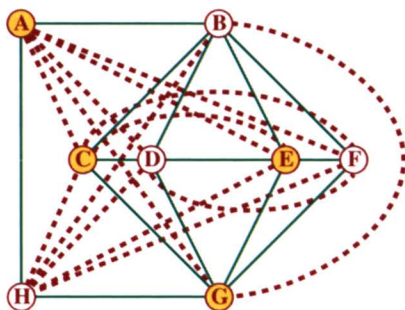
**Les graphes complets**

Un graphe est *complet* lorsque tous ses sommets sont reliés entre eux par une arête. Le graphe complet  $K_n$  à  $n$  sommets comporte  $n(n - 1) / 2$  arêtes. Pour  $n \geq 5$ , le graphe  $K_n$  n'est pas planaire, c'est-à-dire qu'il ne peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent (voir la figure de droite).

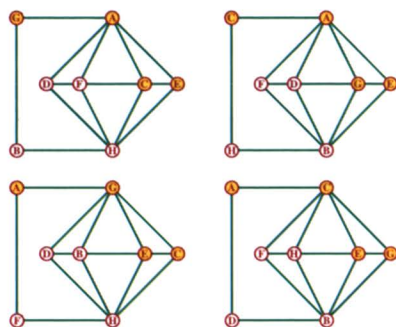


façon que chaque lettre soit sur un disque de même teinte que dans le premier schéma et que deux lettres qui se suivent ne soient jamais reliées par un segment, de même que les lettres A et H.

Comme dans le problème précédent, la méthode consiste ici à construire le graphe complémentaire du graphe initial. Sur le dessin ci-dessous, les arêtes du graphe complémentaire ont été dessinées en traits épais pointillés.



Mais ce nouveau graphe n'est pas très lisible avec cette disposition des sommets. Nous allons donc « déplier » ce graphe afin de lui donner une forme un peu plus « présentable ». Surprise ! Le nouveau graphe « déplié » est le même que le graphe de départ. Ce graphe est dit *autocomplémentaire*.



Certaines permutations de lettres permettent ensuite d'engendrer d'autres solutions à partir de la première. Une autre méthode possible pour construire ces solutions est de partir d'un sommet quelconque du graphe et de passer par tous les sommets (ou de décrire un circuit hamiltonien) en nommant un sommet sur deux, dans l'ordre A-B-C-D-E-F-G-H, jusqu'à épuisement.

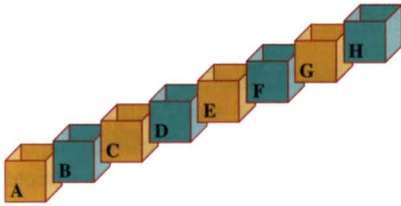
**Les billes**

Voici maintenant un troisième problème extrait du concours Logic'Flip.

**Des billes ont été placées dans ces boîtes selon les règles suivantes. Chaque boîte contient un nombre différent de billes (entre**

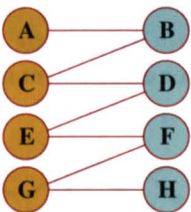


1 et 8). Les boîtes sombres contiennent un nombre pair de billes. Chaque boîte contient toujours au minimum deux billes de plus ou de moins que les boîtes situées juste à côté. Les boîtes A et H contiennent treize billes en tout. Combien y a-t-il de billes dans la boîte D ?



Le fait le plus important dans ce problème est que des boîtes voisines contiennent des nombres de billes de parités différentes. Les nombres de billes sont donc répartis en nombres pairs et nombres impairs, deux nombres de même parité ne pouvant jamais être voisins.

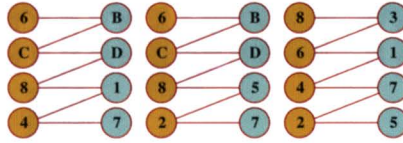
Établissons un graphe dont les sommets sont les boîtes, chaque boîte étant assimilée au nombre de billes qu'elle contient, et dont les arêtes correspondent à la relation « est voisin de ». Nous obtenons le graphe ci-dessous.



Un tel graphe, où les éléments de l'ensemble des sommets sont répartis en deux sous-ensembles séparés, est appelé un *graphe biparti*.

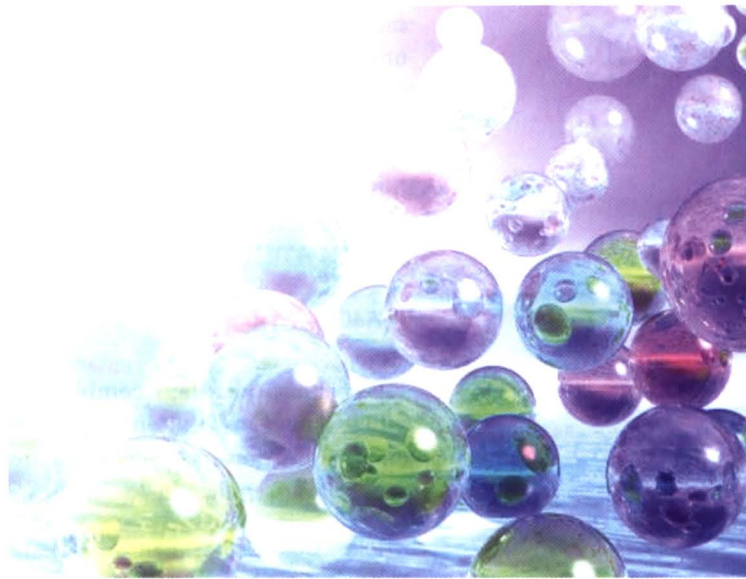
L'hypothèse de départ est ici que la somme  $A + H$  est égale à 13. On peut obtenir cette somme de deux façons :

$6 + 7$  ou  $8 + 5$ . On aura donc à explorer les deux possibilités :  $A = 6$  et  $H = 7$ , ou  $A = 8$  et  $H = 5$ , en complétant les sommets de proche en proche à partir de H.



La première possibilité conduit à poser soit  $G = 4$ , soit  $G = 2$ . Ces deux choix conduisent à une impasse : l'étude montre que  $C = 2$  ou  $4$ , et que le 3 ne peut donc pas être placé. On doit donc poser  $A = 8$  et  $B = 5$ , ce qui conduit à une solution unique dans laquelle D est égal à 1.

M. C.



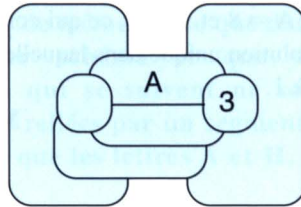
# Trouvez le bon chemin

## Niveau de difficulté

- très facile
- ✓ facile
- ✓✓ pas facile
- ✓✓✓ difficile
- ✓✓✓✓ très difficile

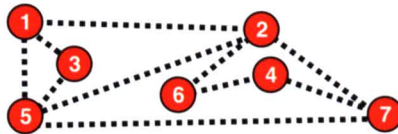
### HS5401 - Les sept régions ✓

Numérotez les sept régions de 1 à 7 pour que deux chiffres consécutifs ne se côtoient jamais. **Quel chiffre va en A ?**



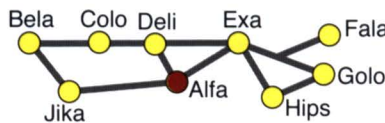
### HS5402 - Les sept villes ✓

Si B est relié directement et uniquement à A, E, F et G et si D est relié uniquement à A et F, et A à B et D, **où se trouve C ?**



### HS5403 - En partant d'Alfa ✓

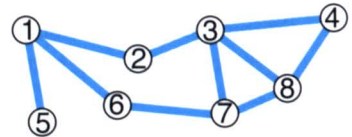
En partant d'Alfa, **combien de villes peut-on atteindre** après en avoir traversé deux autres, sans rebrousser chemin ?



### HS5404 - Les huit villes ✓✓

Des villes A, B et C, on peut aller directement dans trois villes voisines sans passer par d'autres villes. Des villes D, E et F, on peut aller directement dans deux villes voisines. De B, on peut aller à E et F, et de C, on peut aller à D.

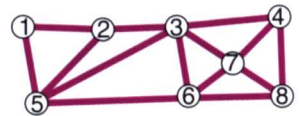
**Où se trouve A ?**



### HS5405 - Huit autres villes ✓✓

Sur le plan ci-contre, Alfa est reliée directement à trois villes. Balla et Calot sont reliées directement à quatre villes. On ne peut aller directement d'Alfa à Balla, mais ces deux villes peuvent être atteintes directement de Calot.

**Où se trouve Dahu si, de cette ville, on peut aller directement à Balla et à Calot, mais pas à Alfa ?**

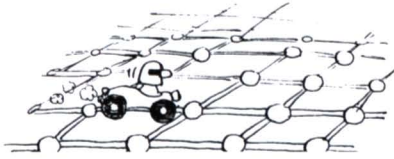


### HS5406 - Circuit maximal ✓✓

On considère un quadrillage à mailles carrées de deux mille quinze cases sur deux mille quinze, comportant des

nœuds (intersections), et des arêtes de longueur unité (segments joignant deux nœuds).

**Quelle est la longueur du circuit le plus long** (chemin partant d'un nœud et aboutissant à ce nœud), sachant qu'on ne peut emprunter qu'une seule fois une arête et qu'on ne peut passer qu'une seule fois sur un nœud (à l'exception du point de départ) ?



**HS5407 - Les huit États ✓✓**

L'Anthea a une frontière commune avec le Blaze et deux autres États. Le Blaze ne côtoie que quatre États. La Charvie a une frontière commune uniquement avec l'Anthea, le Doursk et l'Elvire. La Fulvie côtoie uniquement le Blaze, le Doursk, la Gasnie et l'Hermise. La Gasnie et le Doursk ont une frontière commune.

**Où se trouve l'Hermise ?**

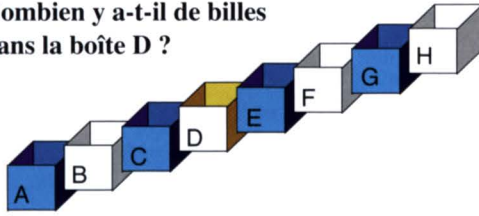


**HS5408 - Des billes dans des boîtes ✓✓**

Des billes ont été placées dans ces boîtes selon les règles suivantes. Chaque boîte contient un nombre différent de billes (entre 1 et 8). Les boîtes bleues contiennent un nombre pair de billes. Chaque boîte contient toujours au minimum deux billes de plus ou

de moins que les boîtes situées juste à côté. Les boîtes A et H contiennent treize billes à elles deux.

**Combien y a-t-il de billes dans la boîte D ?**



**HS5409 - L'île aux cormorans ✓✓**

L'île aux cormorans comprend huit villages reliés par de nombreuses petites routes directes. Ces routes ne sont jamais dédoublées d'une part, et ne se croisent en aucun cas en dehors des villages, d'autre part.

**Combien y en a-t-il au maximum ?**

**HS5410 - Le problème de Posthumus ✓✓✓**

Un ingénieur néerlandais, Klaas Posthumus (1902–1990), posa en 1946 le problème suivant dans le cadre de travaux sur la théorie des circuits téléphoniques : **combien existe-t-il de nombres binaires** (utilisant uniquement les chiffres 0 et 1) **contenant une et une seule fois chacun des huit triplets possibles en binaire** (000, 001, 010, 100, 101, 011, et 111) ?

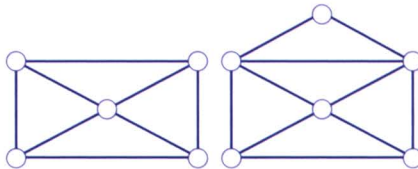
**Sources des problèmes**

- Concours Logic'Flip (HS5401, HS5402, HS5403, HS5404, HS5405, HS5407, HS5408)
- Championnat des jeux mathématiques et logiques (HS5404, HS5405, HS5406, HS5407, HS5410)
- Revue *Jouer Jeux Mathématiques*, article de Marie Berrondo (HS5409)
- *Les mathématiques, ce monde que créa l'homme*. Sherman Stein, Dunod, 1967 (HS5410)
- Document CNDP (HS5411, HS5412, HS5413)

Ces textes sont issus d'un remarquable document publié par le CNDP (aujourd'hui Canopé). Chaque énoncé est suivi d'une indication des connaissances mises en jeu. Nous remercions Claudine Robert de nous avoir permis de les publier.

## HS5411 - Les enveloppes

Peut-on parcourir une fois et une seule les arêtes des graphes ci-dessous sans lever le crayon ?

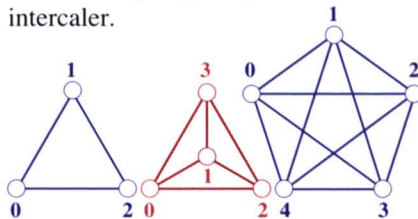


- Contenu : introduction des graphes (arêtes, sommets, ordre, sommets adjacents) ; degré d'un sommet ; chaîne eulérienne ; théorème d'Euler.

## HS5412 - Dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ? On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à  $n$ , pour  $n = 5, 2, 3, 4$ .

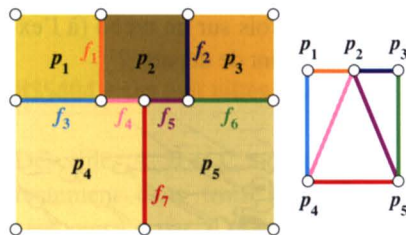
Une arête représente un domino. Il faut trouver une chaîne qui permet de parcourir toutes les arêtes une fois et une seule. On ne s'est pas occupé ici des « doubles » puisqu'on peut toujours les intercaler.



- Contenu : graphes complets ; chaînes eulériennes ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.

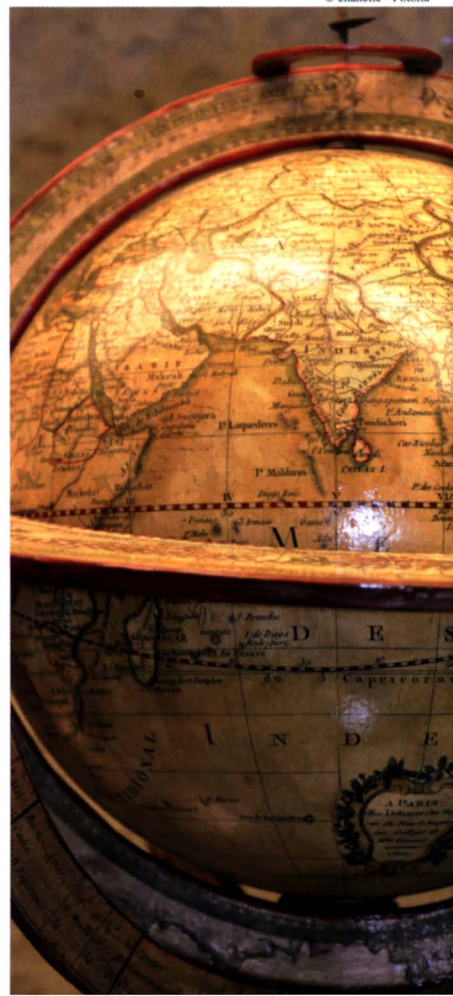
## HS5413 - Traversée de frontières

Cinq pays sont représentés ci-après avec leurs frontières. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?



- Contenu : chaîne eulérienne ; degré d'un sommet ; théorème d'Euler.

© chanelle - Fotolia



### ... Tangente, le magazine des mathématiques ...

Pour mieux comprendre le monde : *Tangente*

**Le seul magazine au monde sur les mathématiques.**

Tous les deux mois depuis 25 ans.

### ... Les hors-séries

#### Bibliothèque Tangente ...

Ce sont de magnifiques ouvrages d'en moyenne 160 pages (prix unitaire 19,80 €), richement illustrés, approfondissant le sujet du dernier numéro des HS « kiosque » de *Tangente*.

Disponibles  
- chez votre libraire

- avec l'**abonnement SUPERPLUS**

- avec l'**abonnement Math++**

à un prix exceptionnel (33% de réduction).

### ... Tangente Éducation ...

Trimestriel qui traite de thèmes pédagogiques variés : les programmes, les TICE, la formation des enseignants, MathC2+, l'informatique et les sciences du numérique... Permet l'accès à de nombreuses ressources en ligne.

### ... Les hors-séries « kiosque » ...

4 fois par an, un hors-série « kiosque » d'au moins 56 pages, explorent l'actualité des grands dossiers du savoir ou de la culture mathématique.



*Le calcul intégral, Mathématiques et informatique, Les angles*

Disponibles

- chez votre marchand de journaux

- avec l'**abonnement PLUS**

- avec l'**abonnement Math++**.

### ... Spécial Logique ...

**Nouveau!** Dans la collection

Tangente Jeux et Stratégie, un

trimestriel contenant près de

200 jeux : tests de logique, grilles à remplir, énigmes mathématiques...

Accès numérique gratuit pour les abonnés à la version papier.

codif : BIB54

## Bulletin d'abonnement à retourner à :

Espace Tangente - 2 rue de la Prée - 27170 Combon

Nom ..... Prénom .....

Établissement .....

Adresse .....

Code Postal ..... Ville .....

Profession ..... E-mail .....

Oui, je m'abonne à	FRANCE MÉTROPOLITAINE		EUROPE	AUTRES
	1 AN	2 ANS	Supplément par an	
<b>TANGENTE</b>	■ 36 €	■ 68 €	■ + 12 €	■ + 15 €
<b>TANGENTE PLUS</b>	■ 56 €	■ 108 €	■ + 20 €	■ + 25 €
<b>TANGENTE SUPERPLUS</b>	■ 88 €	■ 172 €	■ + 24 €	■ + 30 €
<b>TANGENTE ÉDUCATION</b>	■ 12 €	■ 22 €	■ + 2 €	■ + 3 €
<b>SPÉCIAL LOGIQUE</b>	■ 19,50 €	■ 37 €	■ + 8	■ + 10,50 €
<b>ABONNEMENT MATH+ *</b>	■ 105 €	■ 199 €	■ + 30	■ + 30 €
<b>ABONNEMENT MATH++ **</b>	■ 135 €	■ 260 €	■ + 32	■ + 32 €
<b>ABONNEMENT SOUTIEN ***</b>	■ 155 €	■ 300 €	■ + 35 €	■ + 35 €

\* Tous les titres avec les HS « kiosque ». \*\* Tous les titres avec les HS Bibliothèque. \*\*\* Tous les titres avec les deux HS.

Total à payer

**Je joins mon paiement par** (établissements scolaires, joindre bon de commande administratif) :

Chèque (uniquement **payable en France**)

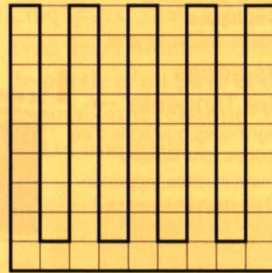
Carte (à partir de 30 €) numéro :

Date et Signature : crypto:

Expiration le: ...../.....

**HS5401** – Une seule région n'est pas voisine avec A : la région D, et une seule région n'est pas voisine avec B : la région E. Ce sont donc les chiffres 1 et 7 qu'il faut placer dans les régions A et B. Seule l'une des deux possibilités permet de compléter la numérotation avec le 3 déjà en place. **Le chiffre 1 va en A, 2 en D, 4 en C, 5 en F, 6 en E et 7 en B.**

**HS5406** –



**HS5402** – B est situé en 2 ou en 5 et A en 3, en 4 ou en 6, mais A relié à B impose que A soit en 3 si B est en 5 et en 6 si B est en 2. D relié à A et F impose que D soit en 4, A en 6 et B en 2. C ne doit être relié ni à 2, ni à 6, ni à 4. **Elle se trouve donc en 3.**

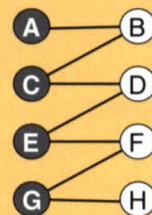
Un quadrillage de deux mille quinze cases sur deux mille quinze comporte  $2016^2 = 4064256$  nœuds. Le circuit idéal passe par tous ces nœuds, ce qui permet d'obtenir la longueur maximale égale à **4064256**. Or un tel circuit existe pour tout réseau de  $n \times n$  nœuds où  $n$  est un nombre pair. Un coup d'œil au dessin ci-dessus suffit pour s'en convaincre.

**HS5403** – En partant d'Alfa, on peut atteindre toutes les villes après en avoir traversé deux autres (sans rebrousser chemin) sauf trois d'entre elles : Deli, Exa et Jika. On peut donc atteindre **cinq villes**.

**HS5407** – La Gasnie se trouve en 1, l'**Hermise en 2**, la Fulvie en 3, le Blaze en 4, l'Anthea en 5, le Doursk en 6, la Charvie en 7 et l'Elvire en 8.

**HS5404** –  $\{A ; B ; C\} = \{1 ; 7 ; 8\}$  et  $\{D ; E ; F\} = \{2 ; 4 ; 6\}$ . B est égal à 1 ou 4. Si  $B = 1$ , alors  $C = 8$  et  $A = 7$ . Si  $B = 4$ , alors  $C = 1$  et  $A = 7$ . Dans tous les cas, on a donc **A = 7**.

**HS5408** –



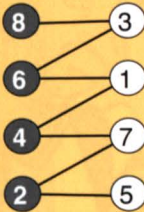
**HS5405** – Dahu se trouve en 3. Alfa peut être en 2, 4 ou 8, et Balla et Calot en 5, 6 ou 7. Pour qu'une ville soit reliée à Balla et Calot, mais pas à Alfa, il faut la placer en 3, avec Alfa en 8, Calot en 6 et Balla en 5.

Le fait le plus important dans ce problème est que des boîtes voisines contiennent des nombres de billes de parités différentes. Les nombres de billes sont donc répartis en nombres pairs et nombres impairs, deux nombres de même parité ne pouvant jamais être voisins. Établissons un graphe dont les sommets sont les boîtes, chaque boîte étant assimilée au nombre de billes qu'elle contient, et dont les arêtes cor-



multicolored streets © Sergii Mostovyi

respondent à la relation « est voisin de ». On obtient le graphe ci-contre. Un tel graphe, où les éléments de l'ensemble des sommets sont répartis en deux sous-ensembles séparés, est un graphe biparti.

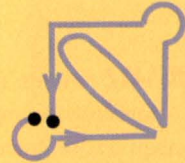
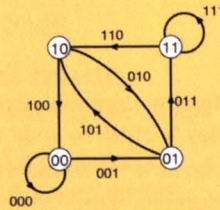


L'hypothèse de départ est ici que la somme  $A + H$  est égale à 13. On peut obtenir cette somme de deux façons :  $6 + 7$  ou  $8 + 5$ . On aura donc à explorer les deux possibilités :  $A = 6$  et  $H = 7$ , ou  $A = 8$  et  $H = 5$ , en complétant les sommets de proche en proche à partir de H. La première possibilité conduit à deux cas possibles ( $G = 4$  ou  $G = 2$ ), chacun de ces cas aboutissant à une impossibilité : on a  $C = 2$  ou 4, et le 3 ne peut plus être placé. Par contre, la seconde possibilité conduit à une solution unique et on obtient  $D = 1$ .



sunset path © Dmitry Ersler

HS5410 -

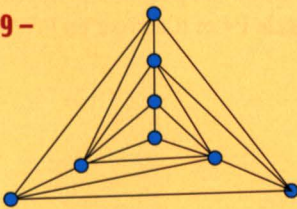


On peut représenter les doublets possibles  $ab$  par les sommets d'un graphe dont chaque arête correspond au passage d'un doublet  $ab$  à un doublet  $bc$ . Chaque arête correspond donc à un triplet formé des deux chiffres du doublet de départ, et du deuxième chiffre du doublet image.

Sur ce graphe, le problème de Posthumus se ramène à déterminer le nombre de chemins eulériens. L'un de ces chemins est représenté ci-dessus ; ce chemin fournit la solution 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0, qui contient une et une seule fois chacun des huit triplets possibles. Il existe seize nombres binaires répondant au problème :

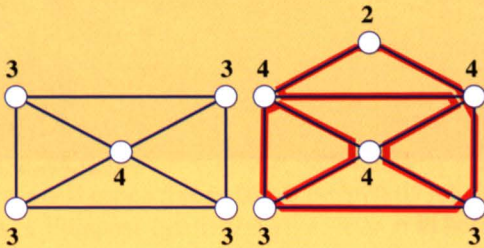
- 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0, 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0,
- 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0, 0 0 0 1 1 1 0 1 0 0,
- 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1, 1 0 0 0 1 1 1 0 1 0,
- 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0, 0 1 0 0 0 1 1 1 0 1,
- 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1, 1 0 1 0 0 0 1 1 1 0,
- 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1, 1 1 0 1 0 0 0 1 1 1,
- 1 1 0 0 0 1 0 1 1 1, 1 1 1 0 1 0 0 0 1 1,
- 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0, 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1.

HS5409 -



On cherche ici le nombre maximum d'arêtes que contient un graphe planaire avec huit sommets. Un graphe saturé (dans un *graphe saturé*, toute face est bordée par trois arêtes) possédant  $s$  sommets comporte un nombre d'arêtes  $a$  égal à  $3s - 6$ . On doit donc avoir  $a \leq 3s - 6$ . Avec  $s = 8$ , on a donc  $a \leq 18$ , ce qui donne le nombre maximal de routes sur l'île aux cormorans. Le dessin ci-dessus montre que ce maximum peut être atteint.

**HS5411** – Le premier graphe (connexe) admet quatre sommets de degré impair ; il n'admet pas de chemin eulérien. Le second graphe admet exactement deux sommets de degré impair ; il existe un chemin eulérien joignant ces deux sommets (tracé en rouge).



**HS5412** – Pour représenter les dominos sans « doubles » comportant les « chiffres » de 0 jusqu'à  $n$ , on trace un graphe de  $n + 1$  sommets. Une arête représente un domino. Trouver une chaîne de dominos consiste à parcourir toutes les arêtes de ce graphe une et une seule fois. Ce sera possible si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2.

Or, chacun des  $n + 1$  sommets est relié aux  $n$  autres. Il est donc de degré  $n$ . Ce degré est pair si, et seulement si,  $n$  est pair.

Pour  $n = 6$  (dominos usuels), il existe donc une chaîne eulérienne puisque tous les sommets sont « pairs ».

**HS5413** – Il est possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule si, et seulement si, le graphe associé admet un cycle eulérien. Or, ce graphe admet deux sommets de degré impair.

La réponse est donc négative. En revanche, un itinéraire est possible à condition de partir de P4 et d'arriver en P5.





**Tangente** Hors-série n° 54  
Les graphes

# **Tangente**

Publié par les Éditions POLE  
SAS au capital de 42 000 euros

## **Siège social**

80 bd Saint-Michel - 75006 Paris  
Commission paritaire : 1016 K 80883  
Dépôt légal à parution

**Directeur de Publication et de la Rédaction**  
Gilles COHEN

## **Secrétaire de rédaction**

Édouard THOMAS, assisté d'Estelle DUBOIS

## **Ont collaboré à ce numéro**

Nicolas BLANCHARD, Francis CASIRO,  
Clément CHARPENTIER, Michel CRITON,  
Jean-Paul DELAHAYE, David DELAUNAY,  
Thierry DE LA RUE, Jean-Jacques DUPAS,  
Yannick ESTÈVE, Gérard GRANCHER,  
Bertrand HAUCHECORNE, Élise JANURESSE,  
Sylvain KAHANE, François LAVALLOU,  
Hervé LEHNING, Jean-Christophe NOVELLI,  
Benoît RITTAUD, Jean-Luc STEHLÉ,  
Daniel TEMAM, Norbert VERDIER

## **Maquette**

Guillaume GAIDOT, Romain GIRAUD,  
Natacha LAUGIER

**Photos** : droits réservés

**Dessins** : Julie Lambert (catoune.com)

## **Abonnements**

abo@poleditions.com  
01 47 07 51 15 - Fax : 01 47 07 88 13



Achévé d'imprimer pour le compte des Éditions POLE  
sur les presses de l'imprimerie Bialec à Nancy (54, France)  
Dépôt légal — Juillet 2015

# Les graphes

- Les types de graphes
  - Des applications à la vie quotidienne
- Dans l'informatique
  - Jeux de graphes

Quelques points reliés par des traits suffisent à créer un graphe. Il faut pourtant attendre le XVIII<sup>e</sup> siècle pour voir émerger une théorie pertinente.

Depuis, des résultats structuraux puissants ont été mis en évidence, dont les derniers en date sont le théorème des graphes parfaits et le théorème des mineurs.

De par leur structure purement topologique, les graphes sont un outil incomparable d'aide à la décision : ordonnancer les tâches dans une chaîne de production, trier des données numériques, gérer un réseau de voies ferrées, sont quelques-unes de leurs applications.

Quant aux amateurs de jeux de réflexion, ils peuvent y trouver une source d'inspiration permanente : les stratégies se résument toutes à des chemins dans un graphe !



Prix : 19,80 €

EDITIONS  
**POLE**

