Le monde est
MATHÉMATIQUE

DU BOULIER À LA RÉVOLUTION NUMÉRIQUE

ALGORITHMES ET INFORMATIQUE

UNE COLLECTION PRÉSENTÉE PAR **CÉDRIC VILLANI**
MÉDAILLE FIELDS
DIRECTEUR DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

DU BOULIER À LA RÉVOLUTION NUMÉRIQUE

DU BOULIER À LA RÉVOLUTION NUMÉRIQUE

ALGORITHMES ET INFORMATIQUE

Vicenç Torra

Le monde est **MATHÉMATIQUE**

Une collection présentée par **CÉDRIC VILLANI**,
médaille Fields 2010, directeur de l'Institut Henri Poincaré,
enseignant-chercheur de l'Université de Lyon

Une édition réalisée avec le soutien de l'IHP
www.ihp.fr

L'Institut Henri Poincaré (IHP) a été créé en 1928 à Paris, à l'initiative de chercheurs français et américains, pour favoriser les échanges intellectuels liés aux mathématiques. Soutenue par le CNRS et l'UPMC, cette "Maison des Mathématiques et de la Physique théorique" est située sur le Campus Pierre et Marie Curie, haut lieu historique de la science, qui participa à la naissance de la physique atomique, à la création du CNRS et à celle du Palais de la Découverte. Dirigé depuis 2009 par Cédric Villani – enseignant-chercheur de l'Université de Lyon –, l'IHP se concentre sur trois missions : l'accueil, chaque année, de centaines de chercheurs de haut niveau, venus du monde entier pour des conférences, cours, séjours de recherche et discussions informelles ; le soutien logistique de la recherche mathématique française ; et enfin, le développement des contacts entre la recherche mathématique et la société : élèves, enseignants, entrepreneurs, artistes, journalistes et tous les publics intéressés par la fascinante aventure des sciences.

et en collaboration avec *Images des Maths*
http://images.math.cnrs.fr

Images des Mathématiques veut contribuer à réduire le manque de communication entre les chercheurs en mathématiques et le public.

Images des Mathématiques est une revue en ligne qui a pour but de présenter la recherche mathématique – en particulier française – et le métier de mathématicien, à l'extérieur de la communauté scientifique. Tous les articles sont écrits par des chercheurs en mathématiques et aucun article n'est écrit pour les chercheurs en mathématiques. On espère ainsi montrer les aspects mathématiques de la recherche contemporaine bien sûr, mais aussi ses aspects historiques, culturels et sociologiques. Le site est hébergé par le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Préface

Du boulier à la révolution numérique

Par David Auger, maître de conférences en informatique à l'université de Versailles – Saint-Quentin-en-Yvelines

De nos jeunes années, nous nous souvenons certainement de ces heures de labeur passées à remplir des cahiers d'additions, de multiplications et autres divisions. Certains d'entre nous ont peut-être même appris à extraire les racines carrées, ces monstres ayant fait souffrir tant de générations d'écoliers, avec pour seuls outils un stylo et une feuille. Pourtant, ces méthodes, nous les avons tant appliquées qu'elles nous sont devenues systématiques. Finalement, inutile de comprendre les arcanes des systèmes de numération pour les appliquer : il suffit de connaître leur recette !

Aujourd'hui, les machines calculent pour nous, certainement mieux et beaucoup plus vite que nous. Elles appliquent ces mêmes recettes, ces algorithmes, car nous les leur avons appris. Les comprennent-elles ? En tout cas, elles n'en ont pas besoin, car ces méthodes de calcul qu'elles implémentent sont non ambiguës et systématiques.

C'est à travers l'histoire de la numération, c'est-à-dire des systèmes d'écriture des nombres, et celle des algorithmes de calcul, que nous emmène l'auteur de ce livre. On verra comment ces systèmes, des plus rudimentaires aux plus perfectionnés, se sont enrichis l'un de l'autre et ont évolué. Des milliers d'années d'histoire des mathématiques ont été nécessaires pour aboutir à ces techniques, à commencer par notre système décimal positionnel, et à nos chiffres dits « arabes », c'est-à-dire les dix chiffres de 0 à 9, avec lesquels ces opérations sont si aisées.

Pourtant, les premières traces écrites de nombres datent de plusieurs milliers d'années avant notre ère. Dans ces époques reculées, l'homme a aussi compté, additionné, multiplié et consigné ses résultats sur divers supports (tablettes, papyrus, et même os). On découvrira – ou redécouvrira – par exemple que les Babyloniens, déjà, utilisaient une notation positionnelle, bien qu'avec un système sexagésimal (c'est-à-dire de base 60), et comment on comptait avec divers types de bouliers et d'abaques au long de l'histoire ; comment le calcul approché de 1/4 a servi de moteur au développement des techniques de calcul ; comment le zéro a été inventé. Ce voyage se terminera à l'époque du calcul numérique, jusqu'aux langages de programmation qui nous permettent de décrire aux ordinateurs comment effectuer des calculs d'une complexité sans limite.

Avant de partir dans cette fabuleuse histoire, prenons quelques instants afin de distinguer les notions de nombre et de chiffre : le nombre est un concept, un objet abstrait, qui nous permet de qualifier les quantités. Le chiffre, lui, est bien plus réel : il est un symbole, au même titre que les lettres de l'alphabet. En Grèce antique, on utilisait justement les mêmes symboles (α, β…) pour écrire les mots et les chiffres. Par analogie, on pourrait convenir que la gravité est un concept, certes lié à la réalité, mais n'ayant pas la tangibilité des lettres du mot « gravité ».

Cet ouvrage conte comment les algorithmes et la numération se sont développés jusqu'à nous, et comment le génie humain a permis d'aller toujours plus loin dans la technologie numérique, jusqu'à notre monde contemporain où le chiffre est partout.

Sommaire

Introduction

Un algorithme est une méthode d'automatisation du calcul qui, à partir de données de départ, permet d'obtenir avec certitude un résultat grâce à une série de règles appliquées dans un ordre précis et selon un nombre fini de passages. Par conséquent, un algorithme ne permet pas seulement de résoudre un problème donné, mais toute une série de problèmes du même genre, c'est-à-dire des problèmes régis par les mêmes prescriptions, quelles que soient les données de base. Une formule, dans son acceptation la plus courante, est un algorithme. Il s'agit donc d'un instrument mathématique, mais sa définition nous laisse déjà entrevoir pourquoi son rôle est si crucial en informatique.

Les algorithmes sont ces ingénieurs mathématiques, petits mais puissants, qui travaillent au sein des appareils électroniques qui nous entourent et qui rendent possible notre formidable monde numérique. Ainsi, un programme informatique n'est rien de plus qu'un algorithme rédigé dans un langage qu'un ordinateur peut comprendre. Mais le règne des algorithmes en informatique n'est que l'épisode le plus récent d'une histoire beaucoup plus longue et fascinante du point de vue mathématique, car elle commence avec la naissance même du calcul.

Le rapport entre calcul et technologie vient de loin. Tout au long de leur évolution, les outils de calcul furent le résultat de la technologie disponible à un moment donné et des formes de numération de chaque culture. Les méthodes égyptiennes et les outils romains de calcul, comme l'abaque, étaient étroitement liés aux formes de numération propres à chaque empire. Le rapport d'influence fut réciproque. Ainsi, l'usage de l'abaque comme méthode de calcul dans la numération romaine participa à la conservation de ce système tout au long du Moyen Âge. Il se produisit la même chose avec l'utilisation du papier pour le calcul, qui favorisa l'usage des chiffres arabes. Les ordinateurs et l'informatique se trouvent à la fin de cette évolution. Ils furent développés avec le même objectif : servir d'outils, de plus en plus puissants, permettant de réaliser des calculs de plus en plus complexes.

Le nombre π offre un exemple paradigmatique dans l'évolution du calcul et son rapport avec la technologie. Dès les origines des mathématiques, en Mésopotamie et en Égypte, les chercheurs essayèrent de calculer le nombre π avec les instruments à leur portée. Les résultats sont stupéfiants : déjà Archimède, au III^e siècle av. J.-C., en fit une estimation avec une erreur incroyablement minime de 0,002.

De son côté, le développement de l'informatique a permis de calculer de plus en plus de décimales de π : actuellement, ce sont des millions de décimales qui ont été trouvées et des outils très précis ont été développés pour calculer un chiffre dans une position arbitraire.

Cet ouvrage raconte l'histoire des algorithmes et de l'informatique. Il décrit également les aspects les plus intéressants du calcul et de ses outils, depuis les os utilisés dans les calculs préhistoriques jusqu'aux ordinateurs qui dominent notre monde. Il s'agit d'une histoire fascinante et instructive : elle se focalise sur ce qui fait notre présent et elle se demande comment et pourquoi il est façonné ainsi.

Chapitre 1

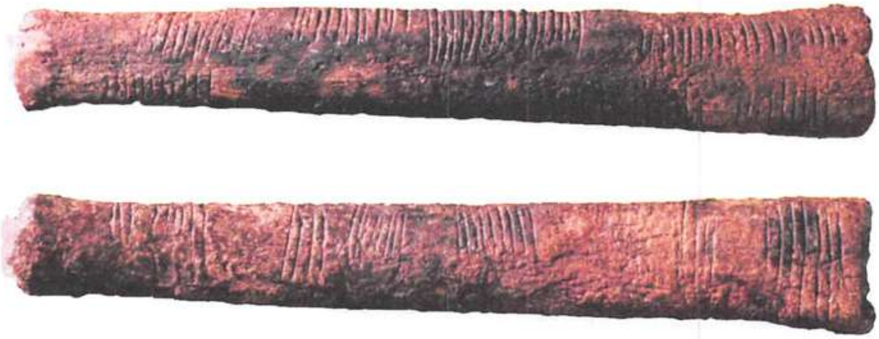
Les premiers siècles du calcul : la numération positionnelle

En espagnol, *calcular* et *computar* sont des synonymes du verbe calculer, même si, sous l'influence de l'anglais – langue vêhiculaire dans le monde technologique – le mot *computación* n'est aujourd'hui utilisé que dans son acception actuelle, dans le domaine informatique. Cela fait pourtant des millénaires que l'homme a inventé des méthodes de *computación*, autrement dit de calcul.

Le processus a commencé lentement avec le développement de la numération. Comme bien d'autres manifestations culturelles, la numération et le calcul sont apparus dans des lieux éloignés, de manière isolée, avant de se retrouver au cœur d'un réseau d'influence mutuelle. Son histoire, qui se déroule en Mésopotamie, en Égypte, en Grèce, à Rome, en Inde et sur d'autres territoires utilisant leurs propres méthodes de calcul, dure jusqu'à l'apparition de la numération positionnelle, à savoir la numération arabe, qui a constitué un véritable tournant copernicien.

Les origines de la numération

Les origines de la numération sont anciennes, mais elles ne sont ni universelles ni uniformes ; tous les peuples ne l'ont pas développée de la même façon et certaines tribus – comme les Pirahãs d'Amazonie – n'ont aucune notion de nombre. Les premières preuves de l'utilisation des nombres sont des os entaillés trouvés lors de fouilles archéologiques. La plus vieille découverte à ce jour est un os de *Papio* (primate plus connu sous le nom de babouin) datant de 35 000 ans av. J.-C. et portant 29 encoches retrouvé dans la chaîne montagneuse des Lebombo, au Swaziland (Afrique), lors d'une fouille réalisée en 1973. Il pourrait s'agir d'un calendrier lunaire ou menstruel. Il est similaire aux bâtons utilisés encore aujourd'hui par les Bushmen de Namibie. Autre découverte marquante : un os de loup trouvé en 1937 à Vestonice, dans la région tchèque de Moravie, qui comporte 55 encoches regroupées par 5 et une encoche supplémentaire après la vingt-cinquième encoche. Cet os date de 30 000 ans av. J.-C. et relève de la culture aurignacienne. Une tête de Vénus en ivoire a également été trouvée à proximité. Et un autre os plus « récent », appelé « os d'Ishango », a été découvert au Congo en 1960. Il date d'environ 20 000 ans av. J.-C.



L'os d'Ishango, l'une des premières preuves archéologiques de l'utilisation des nombres, est conservé à l'Institut royal des sciences naturelles de Belgique.

L'origine de la numération admet deux théories, chacune affirmant l'antériorité d'un type de nombres, les cardinaux (1, 2, 3...) ou les ordinaux (premier, deuxième, troisième...). La théorie la plus communément admise est celle de la nécessité. Tout aurait commencé par la nécessité de compter des objets ; les nombres cardinaux auraient donc été créés en premier, et ensuite les nombres ordinaux.

L'autre théorie est celle de l'origine spirituelle des nombres, qui auraient été utilisés dans des rites : certaines cérémonies nécessitaient que les participants se déplacent ou se trouvent dans un ordre rituel bien précis ; les nombres ordinaux auraient donc précédé les nombres cardinaux. Cette dernière théorie voudrait que les nombres soient apparus à un endroit géographique donné, d'où ils se seraient propagés dans le reste du monde ; elle distingue également deux types d'entiers, les entiers pairs, qui seraient masculins, et les entiers impairs, qui seraient féminins, une classification aujourd'hui internationalement reconnue.

L'utilisation des dix chiffres – et de la base 10 correspondante –, semble si logique et naturelle dans le monde occidental contemporain qu'il est difficile d'admettre qu'elle n'est pas universelle, mais les preuves sont là, irréfutables. Les études réalisées sur plusieurs centaines de tribus d'Indiens d'Amérique, par exemple, ont démontré que ces derniers avaient recours à des bases de numération très différentes,

LES PIRAHÃS

Un scénario de roman : dans les années 1970, le missionnaire américain Dan Everett, considéré à l'heure actuelle comme l'un des plus grands linguistes du monde, part en Amazonie pour y poursuivre sa mission d'évangélisation et apprendre la langue des Pirahãs. Après sept années en immersion dans la tribu, Everett aurait perdu la foi. Il s'agit d'un peuple très étrange : sa langue, également appelée piranhã, n'est pas structurée, contrairement à toutes les langues connues, et ne possède que dix phonèmes. Par ailleurs, les membres de cette tribu n'ont ni mythes ni mémoire collective, ils font uniquement référence aux événements auxquels eux-mêmes ou des personnes de leur connaissance ont participé et se projettent uniquement dans un futur immédiat. Mais, ce qui est peut-être le plus surprenant, c'est que les études d'Everett, corroborées par des psychologues, démontrent que les Pirahãs ne disposent d'aucun système de numération ou de calcul. Par exemple, ils ne font pas de distinction entre le singulier et le pluriel et ne font pas vraiment la différence entre objets dénombrables et objets indénombrables. En fait, leur système de calcul est approximatif. Dan Everett relate sa vie chez les Pirahãs dans le livre *Don't Sleep, There Are Snakes: Life and Language in the Amazonian Jungle*, publié en 2008.

certaines étant néanmoins plus utilisées que d'autres. Bien sûr, presque un tiers des tribus utilisaient le système décimal, mais celles qui employaient un système quinaire – de base cinq – ou, dans certains cas, un système quinaire-décimal, étaient tout aussi nombreuses. Dans le tiers restant, on compte principalement le système binaire, utilisé par un peu plus de 20 % des tribus, le système vicésimal, à hauteur de 10 %, et un système de base trinaire, à hauteur de 1 %.

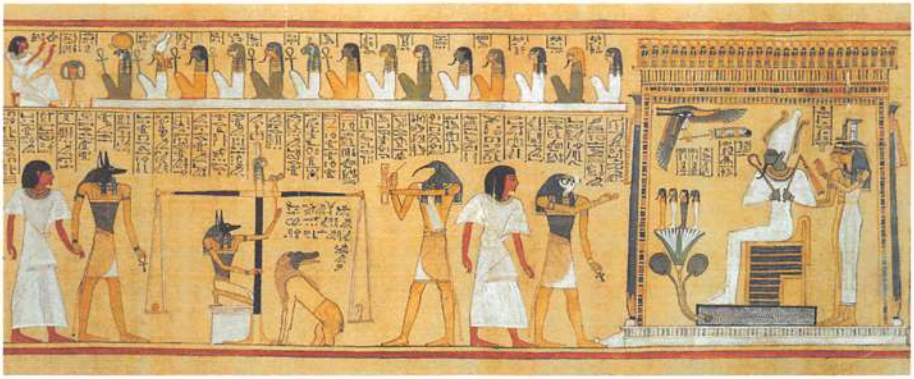
Par ailleurs, cela peut être démontré sans avoir recours à des tribus lointaines. Dans la famille des langues indo-européennes, le mot qui signifie « huit » vient du mot qui signifie « quatre », et le mot latin *novem*, qui correspond au chiffre neuf, viendrait de *novus*, « nouveau », ce qui suggère l'utilisation de systèmes de numération de bases 4 et 8. De même, il reste des traces d'un système de numération vicésimal dans les mots basques *hogei*, *berrogei*, *hirurogei* et *laurogei* (qui signifient 20, 40, 60 et 80, ou plus littéralement, 20, 2 × 20, 3 × 20, 4 × 20), ainsi que dans le mot français « quatre-vingts ». De la même façon, bien que cela corrobore l'utilisation du système décimal, la numérotation anglaise comprend des traces d'anciennes approches : *eleven* (« onze ») et *twelve* (« douze ») viennent respectivement de *one left* et *two left*, « il en reste un » et « il en reste deux » (dans le sens, « après dix »).

L'ORIGINE DES MATHÉMATIQUES

Le débat sur l'origine des mathématiques est aussi vieux que cette science. Hérodote et Aristote se sont longuement penchés sur cette question cruciale. Selon Hérodote, la géométrie serait apparue en Égypte pour faciliter la redistribution des champs après les crues annuelles du Nil ; elle répondrait donc à une nécessité pratique. En revanche, selon Aristote, les mathématiques auraient fait leur apparition grâce aux prêtres, ou plus exactement, grâce à l'extraordinaire temps libre dont ils disposaient. Elles seraient ainsi le résultat d'une activité intellectuelle désintéressée.

Les crues annuelles du Nil (ci-dessus, une photo prise à Louxor) et la nécessité de redéfinir les limites des champs inondés seraient à l'origine des mathématiques selon l'historien grec du v^e siècle av. J.-C., Hérodote.

Même s'il pourrait sembler que les grands nombres soient beaucoup plus modernes et que dans les textes ou registres qui nous sont parvenus de l'Antiquité apparaissent seulement des petits nombres, il n'en est pas du tout ainsi. Une pièce égyptienne conservée à l'université d'Oxford datant d'environ 5 000 ans av. J.-C. et commémorant la victoire du roi Narmer sur les Libanais à l'ouest du delta du Nil décrit le butin de 120 000 prisonniers, 400 000 bœufs et 1 422 000 chèvres remis à l'Égypte. Ces mêmes nombres sont mentionnés très clairement dans le *Livre des morts* égyptien.



Papyrus du Livre des morts, *texte funéraire égyptien contenant des références à de grands nombres.*

Bien que la plupart des cultures connût la numération, il n'en était pas de même pour les fractions, inconnues de beaucoup d'entre elles. Les Égyptiens utilisaient uniquement les fractions de la forme $1/n$, et les Babyloniens, qui disposaient pourtant d'outils ressemblant davantage à ceux que nous connaissons aujourd'hui, notaient les nombres en utilisant le système sexagésimal (base 60). La notation décimale utilisée à l'heure actuelle pour écrire les fractions est une invention moderne. Au XVIᵉ siècle, le mathématicien Simon Stevin a publié un court traité dans lequel il défend son utilisation.

Le calcul et ses outils ont évolué tout au long de l'histoire, parallèlement à la technologie disponible et à la numération utilisée aux différentes époques. Le papyrus a eu une influence directe sur l'évolution de la numération et des méthodes de calcul des Égyptiens, qui souhaitaient pouvoir les représenter facilement en utilisant ce support.

THIENDE. 13

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINGHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Weſende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men ſal de ghegheven ghetalen in oirden ſtellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

	⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
3	7	6	7	5
8 7	5	7	8	2
9 4	1	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onſer Franſcher Arith.) 941304 dat ſijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen ſtaende, anwijſen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick ſegghe de ſelve te weſen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3ᵉ. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē t'ſamen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de ſelve reden ſullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich ſijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ② ...

Page du traité De Thiende, *publié par Simon Stevin en 1585, dans lequel le mathématicien belge propose une nouvelle notation pour désigner les nombres décimaux.*

La numération romaine, quant à elle, était très difficile à représenter sur papyrus, d'où l'utilisation d'instruments tels que le boulier et l'abaque pour faire les calculs.

Le calcul babylonien

La région qui englobe les vallées du Tigre et de l'Euphrate (l'actuel Iraq) était connue des Grecs sous le nom de Mésopotamie, mot qui signifie littéralement « le pays entre les fleuves ». La confluence de ces deux voies fluviales rendait la zone très fertile et c'est sur ce territoire que se sont développées certaines des civilisations les plus anciennes et les plus évoluées de l'histoire de l'humanité. L'écriture, liée à la culture sumérienne, y est apparue vers l'an 3000 av. J.-C. Les premières formes d'écriture ont été les pictogrammes, des représentations graphiques de l'objet signifié qui ont ensuite évolué vers l'écriture cunéiforme. Ce changement a, encore une fois, été amené par la technologie : la nouvelle écriture portait l'empreinte des instruments utilisés pour la réaliser.

Exemple d'écriture cunéiforme sur une tablette d'argile sumérienne remontant à 2600 av. J.-C. Il s'agit du contrat de vente d'une maison et du champ voisin.

L'écriture cunéiforme était inscrite sur des tablettes d'argile humide ; au début, les incisions étaient pratiquées à l'aide d'une tige de jonc, et plus tard avec un stylet en forme de coin, d'où son nom. Cette écriture a pu être étudiée en détail, car, fort heureusement, nous disposons aujourd'hui de nombreuses tablettes sumériennes

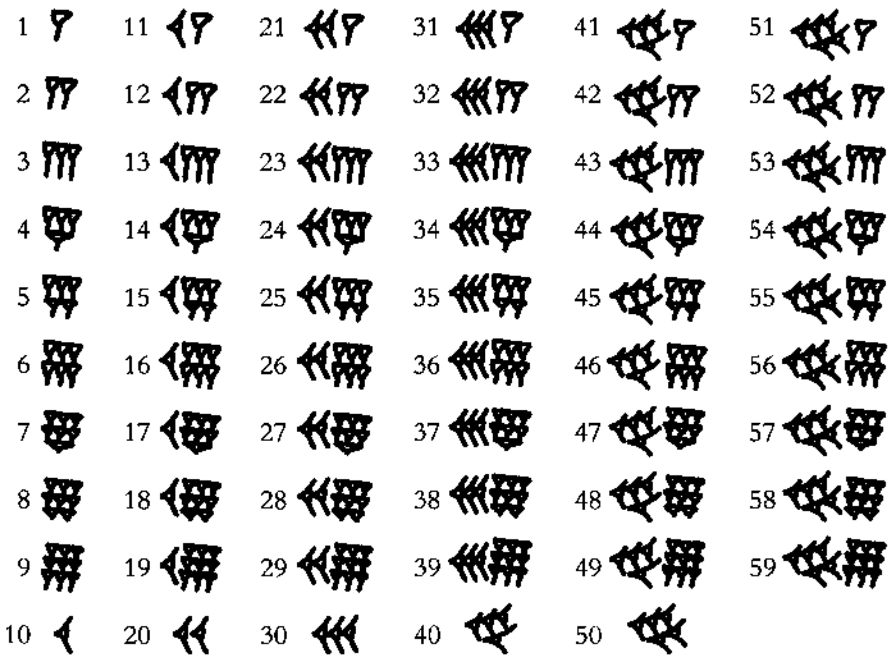
LA VILLE D'URUK

Uruk était une cité de Mésopotamie située sur les bords de l'Euphrate, à 225 kilomètres de la ville actuelle de Bagdad. Vers le III[e] millénaire av. J.-C., elle a été la plus grande ville du monde. Selon la tradition sumérienne, Gilgamesh, le héros de l'une des plus anciennes sagas de l'histoire, y serait né. De plus, Uruk était considérée comme le berceau du calcul et de la comptabilité. Bien que cette théorie soit très critiquée, certains spécialistes avancent que le nom moderne d'Iraq vient d'Uruk.

Le centre archéologique d'Uruk, ville où seraient nés le calcul et la comptabilité.

en bon état de conservation. En fait, à l'heure actuelle, quelque 400 000 tablettes d'argile provenant de Mésopotamie sont conservées dans différents musées du monde. Des questions mathématiques sont consignées sur environ 400 d'entre elles ; les plus anciennes ont été découvertes à Uruk.

L'utilisation du système de numération et de calcul développé en Mésopotamie s'est prolongée pendant de longues années, bien au-delà de la culture sumérienne. Bien que les peuples qui arrivaient dans la région eussent des idées politiques qui subjuguaient ses habitants, ils finissaient par s'imprégner de sa culture, ce qui prouve bien sa splendeur et sa puissance.



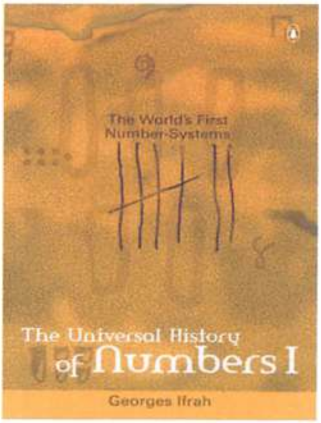
Représentation cunéiforme des nombres babyloniens.

La numération babylonienne était sexagésimale, de base 60, ce qui veut dire que chaque chiffre correspond à un nombre entre 0 et 59. Elle était également positionnelle, ce qui signifie qu'une même figure représente une valeur différente selon sa position ; dans le cas du système sexagésimal, une puissance de 60. Pour illustrer cela, nous allons prendre l'exemple d'un nombre à trois chiffres sexagésimaux 3, 3, 3. Dans ce nombre, la valeur du 3 dépend de sa position. Le premier 3 correspond à la valeur $3 \times 60 \times 60$, le deuxième à 3×60 et le troisième à 3. Par conséquent, en base décimale, ce nombre serait $3 \times 60 \times 60 + 3 \times 60 + 3 = 10\,983$. Un exemple plus complexe : le nombre 23, 4, 52, qui représente $23 \times 60 \times 60 + 4 \times 60 + 52 = 83\,092$. Cet exemple permet de corroborer le principe selon lequel, dans une base donnée, tous les chiffres doivent être inférieurs à la base ; c'est-à-dire qu'en système sexagésimal, les chiffres doivent être inférieurs à 60. Enfin, notez que, bien que cette numération soit fondée sur la base 60, les groupements de bases utilisent le système décimal, c'est-à-dire qu'ils regroupent les multiples de 10.

1	geš (o aš o diš)	10	u	60	geš
2	min	20	niš	120	geš-min
3	eš	30	ušu	180	geš-eš
4	limmu	40	nišmin (o nimin o nin)	240	geš-limmu
5	iá	50	ninnu	300	geš-iá
6	àš	60	geš (o gešta)	360	geš-àš
7	imin			420	geš-imin
8	ussu			480	geš-ussu
9	ilimmu			540	geš-ilimmu
				600	geš-u

Nom des nombres babyloniens.

Plusieurs théories tentent d'expliquer l'origine de ce système. Kewitsch, spécialiste de la civilisation assyrienne, a démontré en 1904 que le système sexagésimal combinerait deux systèmes antérieurs, l'un de base 6 et l'autre de base 10. Mais, selon Georges Ifrah, dont l'*Histoire universelle des chiffres*, plus récente, est considérée comme une référence, l'idée de la base 6 est invraisemblable, compte tenu de la faible utilisation de ce système. Sa théorie est que la base 60 est la combinaison de la base 12 et de la base 5. L'utilisation des deux bases est attestée par de nombreux documents et, en fait, en y regardant d'un peu plus près, il semblerait qu'il y ait des restes de la base 5 dans les chiffres sumériens 6, 7 et 9.



*Couverture de la version anglaise de l'*Histoire universelle des chiffres*, l'œuvre monumentale de l'historien des mathématiques Georges Ifrah.*

Le tableau suivant reproduit le travail d'Ifrah. On peut y voir que *iá*, mot sumérien qui signifie « cinq », a été retenu comme base pour représenter les autres nombres en utilisant l'addition. Ainsi, le 6 sumérien est iá.geš, iá étant 5 et geš 1 ; par conséquent, en sumérien, 6 correspondrait au mot composé « cinq.un », ce qui laisse penser à une addition.

1	geš (o aš o diš)	6	àš < iá.geš
2	min	7	imin < iá.min
3	eš	8	ussu
4	limmu	9	ilimmu < iá.limmu
5	iá	10	u

La positionnalité du système babylonien était très souple. Un triplet (a, b, c) pouvait aussi bien représenter $60^2 + b \times 60 + c$ qu'une autre suite avec trois autres puissances successives de 60, comme, par exemple, $a + b \times 60^{-1} + c \times 60^{-2}$. Étant donné que les puissances négatives permettent de représenter les fractions,

DES HISTOIRES ANCIENNES ?

Peut-être avez-vous déjà compris que le règne du système sexagésimal n'a pas connu de frontière, qu'il s'est poursuivi bien au-delà de l'Antiquité du Proche-Orient. Ce système est effectivement très présent dans notre vie quotidienne, nous l'utilisons non pas tous les jours, mais plutôt toutes les minutes. Ce système sexagésimal est toujours à la base de notre mesure du temps. Ce sont les Babyloniens qui ont divisé le jour en 24 heures, l'heure en 60 minutes et la minute en 60 secondes. Il en est de même pour le système utilisé pour exprimer les angles, qui a également été établi par les Babyloniens et est toujours d'actualité.

L'horloge astronomique de Brescia, en Italie.

dans ce dernier cas, le nombre (1, 2, 3) correspondrait à $1 + 2/60 + 3/(60 \times 60)$. Cette notation permettait donc de représenter les fractions avec une grande précision. Mais malgré cette qualité, la représentation positionnelle présente un défaut : l'absence de valeur doit aussi être représentée, un problème épineux à une époque où le zéro n'existait pas. Pour désigner un nombre nul, les Babyloniens utilisaient un symbole établi. Plus tard, vers l'an 130 de notre ère, à Alexandrie, Ptolémée employait à cet effet l'omicron, la quinzième lettre de l'alphabet grec, identique à notre lettre « o ».

La numération babylonienne est restée proche de l'écriture pictographique utilisée dans le passé, qui transparaissait dans ses représentations. Les Babyloniens disposaient de leurs propres calculatrices, un système archaïque et simple, mais très efficace, basé sur la manipulation de différents objets représentant différentes quantités : un objet représentait l'unité ; un autre, la dizaine ; un autre, la soixantaine... Avec ces objets, il était facile pour les Babyloniens de faire des calculs de complexité modérée. On dit même que la première notation écrite aurait adopté la forme de ces objets.

Plusieurs éléments renforcent cette théorie. Depuis leur début en 1896, les fouilles du palais de Nuzi, à 90 kilomètres du Tigre, près de l'actuelle ville irakienne de Kirkuk, ont mis au jour 5 000 tablettes cunéiformes des XV^e et XIV^e siècles av. J.-C. et 200 autres plus anciennes, des XXIV^e et XXII^e siècles av. J.-C. Parmi les restes trouvés dans le palais, figurait également un récipient d'argile de forme ovoïde,

La célèbre tablette Plimpton 322, datant d'entre 1824 et 1784 av. J.-C., contient une série de nombres disposés en tableau à quatre colonnes écrits en système sexagésimal.

dans lequel se trouvait toute une série de figurines sphériques identiques. Une certaine quantité de têtes de bétail est inscrite sur la paroi extérieure du récipient : exactement la quantité de figurines d'argile contenue dans le récipient. Des récipients d'argile contenant des disques, des cônes, des billes et des bâtonnets ont également été trouvés à Suse, l'une des plus anciennes villes du monde située dans l'Iran actuel. Il a été établi qu'ils étaient liés à la numération écrite.

Le système de calcul babylonien était réellement très avancé, comme on peut le voir sur l'énorme quantité de tablettes présentant des données mathématiques. Beaucoup d'entre elles contiennent des tables : des tables de inverses, de carrés et de cubes, et des tables de multiplication. Certaines tables de inverses ne contiennent pas, entre autres, les inverses de 7 et de 11, qui, en base 60, nécessitent une écriture ayant une infinité de chiffres pour les puissances négatives de 60, tandis que d'autres en contiennent des approximations supérieures et inférieures. Sur quelques tablettes apparaissent des tables de racines carrées et de puissances d'un seul nombre. Les tables de puissances auraient en effet été utilisées pour calculer la réciproque de l'exponentiation (les logarithmes). On pense que lorsque la réciproque d'un nombre donné était inconnu, il était obtenu de manière approximative en effectuant une interpolation linéaire à partir des nombres connus de la table.

Voici, ci-dessous, la reproduction d'une table de multiplication de 9 inscrite sur une tablette provenant de Nippur et conservée à l'université d'Iéna. Elle a été adaptée à la numération actuelle par Christine Proust, historienne des mathématiques et assyriologue. Cette table présente des particularités intéressantes : par exemple, 1, 3, qui correspond à la multiplication 9×7, se comprend comme $1 \times 60 + 3 = 63$; et 7, 30, qui correspond à 9×50, se comprend comme $7 \times 60 + 30 = 420 + 30 = 450$.

$9 \times 1 = 9$	$9 \times 11 = 1, 39$	$9 \times 30 = 4, 30$
$9 \times 2 = 18$	$9 \times 12 = 1, 48$	$9 \times 40 = 6$
$9 \times 3 = 27$	$9 \times 13 = 1, 57$	$9 \times 50 = 7, 30.$
$9 \times 4 = 36$	$9 \times 14 = 2, 6$	
$9 \times 5 = 45$	$9 \times 15 = 2, 15$	
$9 \times 6 = 54$	$9 \times 16 = 2, 24$	
$9 \times 7 = 1, 3$	$9 \times 17 = 2, 33$	
$9 \times 8 = 1, 12$	$9 \times 18 = 2, 42$	
$9 \times 9 = 1, 21$	$9 \times 19 = 2, 51$	
$9 \times 10 = 1, 30$	$9 \times 20 = 3$	

L'exemple suivant, adapté également par Proust, est une table d'inverses provenant également de Nippur. Dans cette table, 20 correspond à $20 \times 60^{-1} = 20 / 60 = 1/3$.

$1/2 = 30$	$1/10 = 6$	$1/20 = 3$	$1/40 = 1,30$
$1/3 = 20$	$1/12 = 5$	$1/24 = 2,30$	$1/45 = 1,20$
$1/4 = 15$	$1/15 = 4$	$1/25 = 2,24$	$1/48 = 1,15$
$1/5 = 12$	$1/16 = 3,45$	$1/27 = 2,13,20$	$1/50 = 1,12$
$1/6 = 10$	$1/18 = 3,20$	$1/30 = 2$	$1/54 = 1,6,40.$
$1/8 = 7,30$		$1/32 = 1,52,30$	
$1/9 = 6,40$		$1/36 = 1,40$	

Pour calculer la racine carrée d'un nombre, les Babyloniens appliquaient une méthode algorithmique connue maintenant sous le nom de méthode de dichotomie.

Pour calculer la racine carrée .d'un nombre N, nous effectuons deux approximations, a_1 et b_1, l'une étant supérieure à N et l'autre inférieure. Ensuite, nous calculons $a_2 = (a_1 + b_1)/2$ et regardons si son carré est supérieur ou inférieur à N. S'il est supérieur, a_2 remplacera l'ancienne valeur supérieure ; s'il est inférieur, a_2 remplacera l'autre valeur. Ce processus est répété jusqu'à obtenir une valeur dont le carré est N, ou bien une approximation suffisante.

Les Babyloniens pouvaient résoudre des systèmes d'équations et des équations du second degré, apportant ainsi des solutions simples à leurs problèmes. Ces problèmes apparaissent dans des textes datés de l'an 2000 av. J.-C. Ces « proto-mathématiciens » babyloniens résolvaient également quelques équations du troisième degré. Les équations de la forme $x^3 = a$ et $x^3 + x^2 = c$ étaient résolues à l'aide de tables, et celles de forme plus complexe comme $ax^3 + bx^2 = c$ étaient réduites aux premières.

L'analyse des textes babyloniens fait ressortir que, pour ces hommes, les mathématiques n'étaient pas qu'un outil pratique, ce qui constitue une différence fondamentale par rapport aux Égyptiens, qui en avaient une approche beaucoup plus pragmatique. Les Babyloniens ont favorisé grandement le développement de l'arithmétique et de l'algèbre, comme l'avaient fait les Égyptiens pour la géométrie, matière dans laquelle les connaissances des Babyloniens étaient rudimentaires, limitées à quelques figures, comme les triangles et les quadrilatères.

ÉQUATION DU SECOND ET DU TROISIÈME DEGRÉ

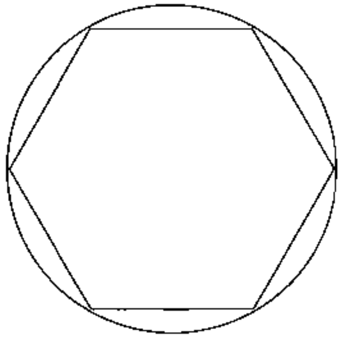
Les équations du second degré, dont la formule est $ax^2 + bx + c = 0$, sont généralement résolues en utilisant l'expression

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

qui admet une solution réelle lorsque le discriminant est positif ou nul, c'est-à-dire lorsque $b^2 - 4ac$ est supérieur ou égal à zéro.

Pour résoudre l'équation $ax^3 + bx^2 = c$, les Babyloniens la multipliaient par (a^2/b^3), obtenant ainsi $(ax/b)^3 + (ax/b)^2 = ca^2/b^3$. Cette autre équation pouvait être résolue à l'aide des tables de forme $x^3 + x^2 = c$. Il ne restait alors plus qu'à calculer la valeur de x.

Toutefois, leur travail sur le cercle est parvenu jusqu'à nous. Ce sont eux qui l'ont divisé en 6 parties égales à partir du rayon, puis qui ont divisé chaque partie en 60, obtenant ainsi 360 degrés. Selon le système sexagésimal, les degrés sont divisés en 60 minutes, elles-mêmes divisées en 60 secondes. Comme approximation du nombre π, ils prenaient la valeur $\pi = 3$, bien que, sur une tablette de Suse, ils soient arrivés à un résultat de $\pi = 3 + 1/8$ en comparant le périmètre d'un hexagone et celui d'un cercle.



Construction d'un hexagone inscrit dans un cercle à partir du rayon de ce dernier.

Le calcul égyptien

Le système de numération de l'Égypte antique utilisait un symbole pour chaque puissance de dix. Ainsi, il existait un symbole pour les unités, un autre pour les dizaines, un autre pour les centaines, etc. Par conséquent, contrairement au système babylonien, le système égyptien n'était pas positionnel. Le tableau ci-dessous montre les hiéroglyphes représentant les nombres les plus utilisés :

Valeur	Représentation
1	
10	
100	
1 000	
10 000	
100 000	

À la différence de notre système et du système babylonien, qui sont positionnels, le système de notation numérique égyptien était additif. Par exemple, en notation additive, le nombre 3 204 s'écrirait 1 000 + 1 000 + 1 000 + 100 + 100 + 1 + 1 + 1 + 1, ce qui, en hiéroglyphes égyptiens, donnerait :

Ce système permettait de représenter les grands nombres, en plus de faciliter les opérations d'addition et de soustraction. Pour les additions, si nécessaire, les retenues étaient « reportées » au rang suivant, et pour les soustractions, elles étaient « retirées ». Les opérations de multiplication étaient réduites à des opérations d'addition et de soustraction, ce qui était effectué d'une manière ingénieuse, mais compliquée.

Prenons un exemple : la multiplication du nombre 17 par le nombre 53. Nous prenons la paire 1 et 53 et la multiplions par deux, ce qui donne 2 et 106. En répétant l'opération, on obtient la paire 4 et 212. Nous poursuivons le processus jusqu'à ce que le premier des deux nombres soit supérieur au multiplicande 17 et faisons alors abstraction du dernier résultat. Les paires ainsi obtenues sont les suivantes :

1	53
2	106
4	212
8	424
16	848.

Maintenant, nous devons trouver comment obtenir 17 en additionnant des valeurs contenues dans la première colonne. Dans ce cas, la seule façon d'y parvenir est d'additionner 1 et 16. Les valeurs qui accompagnent le 1 et le 16, à savoir, celles qui se trouvent à droite, 53 et 848, doivent alors être additionnées, ce qui donne 901, le résultat de la multiplication de 17 par 53.

1	53	◀
2	106	
4	212	
8	424	
16	848	◀
17	901	= Résultat

Notez que dans cette opération, on décompose 17 en base 2, puis on associe les produits correspondants au 53. Ainsi, la décomposition de 17 est $17 = 2^0 + 2^4$ et, au niveau de l'addition, les valeurs sélectionnées sont $(2^0 + 2^4) \times 53$. Les produits $2^1 \times 53$, $2^2 \times 53$ et $2^3 \times 53$ sont écartés, car ils ne font pas partie de la décomposition de 17. Cette procédure est similaire au calcul informatique. Ce calcul fonctionne bien, car la décomposition d'un nombre en puissances de 2 est unique ; par conséquent, une seule sélection de valeurs à additionner permet d'obtenir 17. Ainsi, la sélection de valeurs contenues dans la colonne de droite est également unique. Cette méthode de multiplication est connue sous le nom de multiplication russe.

La division se faisait en effectuant l'opération inverse de la multiplication. Pour illustrer le processus, prenons l'exemple de la division de 901 par 17, qui devra donner 53. C'est une division dont le résultat est un nombre entier, sans décimale.

Nous prenons le dénominateur 17 et la valeur 1, et, comme dans le processus précédent, nous multiplions les deux valeurs par deux, ce qui donne 34 et 2.

En répétant l'opération, on obtient 68 et 4. Nous poursuivons le processus jusqu'à ce que la première valeur soit supérieure au numérateur, qui dans ce cas est 901, et faisons alors abstraction de la dernière paire. Les paires ainsi obtenues sont les suivantes :

901/17	17	1
	34	2
	68	4
	136	8
	272	16
	544	32.

La paire suivante, que nous avons ignorée car elle était supérieure à 901, était 1 088 et 64. Nous devons ensuite déterminer quelles sont les valeurs de la première colonne que nous devons additionner pour obtenir 901. Dans cet exemple, il s'agit de 544, 272, 68 et 17 (puisque 544 + 272 + 68 + 17 = 901). La somme des valeurs correspondantes contenues dans la colonne de droite donne le résultat final, à savoir, 32 + 16 + 4 + 1= 53.

901/17	17	1	◀
	34	2	
	68	4	◀
	136	8	
	272	16	◀
	544	32	◀
	901	53	= Résultat

Comme dans le cas de la multiplication, la décomposition de 901 est unique. Le nombre 901 a été décomposé en termes de 17 multiplié par les puissances de 2 composant le total de 53. Par ailleurs, le résultat de cette division est un nombre entier. Lorsque ce n'était pas le cas et que le résultat obtenu était un nombre décimal, les Égyptiens avaient recours aux fractions. Toutefois, l'utilisation des fractions égyptiennes, avec très peu d'exceptions, était plus compliquée que celle de nos fractions actuelles. Les Égyptiens utilisaient uniquement des fractions de la forme $1/n$, c'est-à-dire des fractions ayant toutes un numérateur égal à 1. Curieusement, cela était dû à une limitation liée à la façon de les exprimer : un symbole était utilisé pour désigner la fraction, puis il y avait les symboles correspondant au nombre du dénominateur. Rien n'était indiqué pour le numérateur, qui ne pouvait être qu'égal à 1.

Les Égyptiens désignaient une fraction à l'aide du symbole suivant :

Puis ils y ajoutaient le dénominateur, dans cet exemple 21 :

On obtient ici la fraction 1/21.

Nous avons mentionné qu'il existait des fractions de numérateur différent de 1. Il s'agissait de la fraction 2/3, qui avait son propre symbole, et de la fraction $n/(n + 1)$, qui correspond à l'inverse de $1 + 1/n$, c'est-à-dire à $1/(1 + 1/n) = 1/((n + 1)/n) = n/(n + 1)$.

Le papyrus Rhind, ou papyrus Ahmes, montre bien l'importance des fractions et de leur traitement. On y trouve des décompositions de la fraction $2/n$ en expressions de la forme $1/x + 1/y + \ldots + 1/z$ pour tous les nombres impairs entre 5 et 101, ainsi que les expressions des fractions $n/10$ pour $n = 2$ jusqu'à 9.

LE PAPYRUS RHIND

Ce papyrus égyptien de six mètres de long est connu pour son contenu mathématique : 87 problèmes de tous types avec leurs solutions. Il date d'entre 2000 et 1800 av. J.-C., mais son auteur, Ahmes, y explique qu'il reproduit des connaissances acquises il y a plus de deux cents ans et qu'il les résume pour former de futurs scribes. Il s'agit donc d'un « manuel » primitif de mathématiques. Il est actuellement conservé au British Museum de Londres, qui l'a racheté à Henry Rhind en 1858, d'où son nom. Le traitement des fractions y est également décrit.

En plus de montrer pour la postérité le fonctionnement des fractions égyptiennes, le papyrus Rhind donne une idée du type de problèmes que cette civilisation devait résoudre et du raisonnement qu'elle développait pour y parvenir. Les premiers problèmes du document sont des divisions par 10 utilisant la table de $n/10$ mentionnée. Apparaissent ensuite des problèmes d'arithmétique et de géométrie, mais aussi des problèmes pouvant être résolus à l'aide d'équations linéaires, écrits sous la forme $ax + bx = c$. Certains problèmes du papyrus comprennent des inconnues au carré lorsqu'ils sont transcrits en notation moderne ; toutefois, on pense que les Égyptiens ne savaient pas résoudre les équations du second et du troisième degré.

La plupart des problèmes du papyrus sont résolus grâce à la méthode de fausse position, ou *regula falsi*. Seul le problème 30 est résolu comme on le ferait maintenant, en factorisant et en divisant. Pour comprendre la règle de fausse position, nous allons prendre comme exemple le problème 24, qui aujourd'hui serait résolu à l'aide d'une équation linéaire. Son énoncé est le suivant :

« Un nombre ajouté à son septième donne 19, quel est ce nombre ? ».

Aujourd'hui, nous l'écririons sous la forme $x + 1/7\,x = 19$.

La méthode de fausse position consiste à calculer le résultat en supposant une valeur pour l'inconnue. Comme la valeur supposée au départ est fausse, le résultat le sera également, mais cette valeur sera ensuite modifiée pour que le résultat final soit exact. Supposons donc une valeur : par exemple, 7, soit $x = 7$. Le résultat obtenu en y ajoutant son septième est 8, ce que nous écrivons sous la forme $x + 1/7\,x = 8$. À partir de là, nous devons déterminer comment modifier la valeur choisie, 7, pour obtenir un résultat de 19 et non de 8. Nous multiplions 8, ou x, par 19/8. En utilisant uniquement des fractions de numérateur 1, nous trouvons que $2 + 1/4 + 1/8$ est égal à 19/8. En multipliant 7 par $(2 + 1/4 + 1/8)$, on obtient

LE NOMBRE π EN ÉGYPTE

Le papyrus Rhind donne l'approximation la plus ancienne du nombre π, légèrement au-dessus de celle d'aujourd'hui : il indique la valeur de 256/81, à savoir 3,1604. Cette approximation, la plus ancienne, n'est pas la plus satisfaisante. Des documents ultérieurs donnent des approximations plus justes, la meilleure étant 3 + 1/7.

16 + 1/2 + 1/8. Le papyrus montre également que cette solution est correcte et que cette valeur et son septième font bien 19.

Tous ces calculs ont pu être réalisés grâce à l'introduction du papyrus, plus pratique que l'argile ou la cire sur lesquels il aurait été plus compliqué de réaliser ces opérations. Les Égyptiens pouvaient ainsi travailler de la même façon que sur du papier. Pour écrire sur les papyrus, ils ont développé l'écriture hiératique, une forme simplifiée de l'écriture hiéroglyphique. Elle était utilisée par les scribes pour les documents administratifs. Plus tard est apparu le démotique, une forme abrégée de l'hiératique, qui comme son nom l'indique, était l'écriture populaire. Le démotique était utilisé pour traiter les affaires quotidiennes, alors que, dans les textes sacrés, on continuait à employer l'hiératique. Ce processus de simplification de l'écriture aurait eu des incidences sur la notation numérique, ouvrant la voie au chiffrage.

Le papyrus Ebers (à gauche), ouvrage médical du XVI^e siècle av. J.-C., est écrit en hiératique, alors que la Pierre de Rosette, qui date du II^e siècle av. J.-C., porte des inscriptions en trois écritures : hiéroglyphique, démotique et grec.

L'écriture démotique a réglé les problèmes liés à la notation égyptienne originelle, comme le fait d'inclure une forme numérique pour chaque puissance de 10, ce qui impliquait que la représentation de 9 correspondait à 9 fois la forme de l'unité et, de la même façon, que la représentation de 99 correspondait à 9 fois la forme de la dizaine et 9 fois la forme de l'unité. L'écriture démotique a créé une forme pour chaque valeur de 1 à 9, une forme pour chaque dizaine de 10 à 90 et la même chose pour les autres puissances de 10. Pour représenter les valeurs, il était nécessaire de mémoriser les formes correspondantes. La mémorisation de dessins n'était pas un problème pour les mathématiciens égyptiens car il n'existait pas de notation unifiée pour les opérations mathématiques. Sur le papyrus Rhind, par exemple, l'addition et la soustraction sont représentées par des jambes tournées dans des sens différents.

La Grèce

Le développement des mathématiques en Grèce s'est fait sur la base des mathématiques babyloniennes et égyptiennes. Les techniques mathématiques égyptiennes sont arrivées en Grèce par l'intermédiaire des échanges commerciaux entre les deux pays, des échanges qui ont atteint leur summum entre 700 et 600 av. J.-C., époque dorée qu'ont choisie de nombreux mathématiciens grecs, avides de connaissances, pour partir en Égypte et apprendre les secrets de leur savoir millénaire.

L'intérêt des mathématiciens grecs s'est alors porté sur la géométrie, qu'ils ont non seulement améliorée, mais également placée à un niveau supérieur. Comme ils l'ont fait avec bien d'autres domaines de la connaissance, les Grecs ont appliqué leur esprit spéculatif et rigoureux aux mathématiques, et ils leur ont donné une dimension scientifique, au sens moderne du terme. En Égypte, les propriétés mathématiques n'étaient pas démontrées, elles étaient purement empiriques. Les Grecs, au contraire, avaient besoin de connaître la cause de chaque phénomène et de démontrer les propriétés en se basant sur des axiomes. Les Égyptiens cherchaient seulement des solutions aux problèmes rencontrés ; les Grecs aimaient le savoir pur et étudiaient les mathématiques sans aucune considération pratique.

L'influence babylonienne se fait nettement sentir dans l'astronomie grecque. C'est grâce aux Grecs que le système sexagésimal babylonien est parvenu jusqu'à nous. Les termes « minute » et « seconde » viennent de termes grecs qui ont ensuite été traduits en latin. Ils sont apparus pour la première fois dans un texte du XIIIe siècle qui utilisait les expressions latines *pars minuta prima* (« les premières petites parties ») pour désigner une soixantième partie, *pars minuta secunda* (« les secondes petites parties ») pour désigner les soixantièmes parties d'une soixantième partie, etc., laissant ainsi transparaître nos termes actuels « minute » et « seconde ». Mais, en réalité, le parcours de ces termes jusqu'à nos jours a été plus complexe. Le texte latin du XIIIe siècle n'était pas traduit directement du grec, mais d'un texte arabe adapté de l'original grec. Encore une fois, cela nous rappelle que l'héritage de la Grèce antique a été, en grande partie, transmis à l'Occident par les Arabes, qui l'ont conservé pendant des siècles.

Le système de numération grec a été développé vers l'an 500 av. J.-C. en Ionie et présente des similitudes avec le système hiératique égyptien. Par exemple, il utilise un symbole pour chaque chiffre de 1 à 9, un autre pour chaque dizaine de 10 à 90 et un autre pour chaque centaine de 100 à 900. Les symboles correspondent aux lettres grecques et à trois lettres phéniciennes : le *digamma* (qui représente le chiffre 6), le *koppa* (qui représente le nombre 90) et le *sampi* (qui représente le nombre 900).

Les symboles grecs permettent de représenter tout nombre entre 1 et 999. Les milliers étaient représentés en faisant précéder les unités d'une virgule ; ainsi, l'expression « ,α» correspond à 1 000, l'expression « ,β» à 2 000, etc. Comme le système égyptien, ce système de notation numérique est additif. Ainsi, par exemple, le nombre ρκε correspond à 125, parce que ρκε = ρ + κ + ε = 100 + 20 + 5. Le tableau suivant montre les lettres utilisées pour représenter les valeurs numériques de base :

1 α	10 ι	100 ρ	1 000 ,α
2 β	20 κ	200 σ	2 000 ,β
3 γ	30 λ	300 τ	3 000 ,γ
4 δ	40 μ	400 υ	4 000 ,δ
5 ε	50 ν	500 φ	5 000 ,ε
6 ς	60 ξ	600 χ	6 000 ,ς
7 ζ	70 ο	700 ψ	7 000 ,ζ
8 η	80 π	800 ϖ	8 000 ,η
9 θ	90 φ	900 ϡ	9000 ,θ.

Pour représenter les multiples de 10 000, entre ce nombre et 99 990 000, ce système utilisait la lettre *M* précédée des lettres correspondant au multiple. Le *M* représentait 10 000, et venait de myriade, en grec *murios* (μυριαδος), qui signifiait « cent fois cent ». Les lettres pouvaient également être écrites au-dessus du *M* :

$$\varpi o\alpha \mathrm{M} = \overset{o\alpha}{M} = 8\ 710\ 000$$

ou

$$\varpi o\alpha \mathrm{M},\delta\rho o\delta = \overset{o\alpha}{M}\ ,\delta\rho o\delta = 8\ 714\ 174.$$

Pour représenter des valeurs encore plus élevées, telles que 10 000^2, il était possible d'utiliser deux *MM*.

Dans la notation égyptienne, l'ordre n'avait pas d'importance, mais dans la notation grecque, le nombre qui commençait à gauche avait la valeur qui avait le plus de poids. Cela permettait d'enlever les virgules des nombres si elles n'étaient pas nécessaires pour en comprendre le sens. Néanmoins, comme les nombres étaient représentés par des lettres, il était souvent nécessaire de les différencier du texte. À cet effet, les Grecs inséraient une marque à la fin du nombre ou ajoutaient une barre au-dessus de celui-ci. Ainsi, le nombre 871 s'écrivait :

$$\varpi o \alpha'$$

ou bien

$$\overline{\varpi o \alpha}.$$

Avec cette notation, il était difficile de faire des calculs sur papier. On pense que, pour l'arithmétique, les Grecs utilisaient surtout l'abaque, même si les mathématiciens utilisaient probablement les symboles.

La méthode de multiplication des Grecs était différente de celle que nous appliquons aujourd'hui. Aujourd'hui, nous prenons chaque chiffre du second opérande et nous le multiplions par les chiffres du premier opérande. Les Grecs, en revanche, multipliaient les chiffres du premier opérande par chaque chiffre du second opérande. Cependant, comme à la place des chiffres, ils avaient la valeur relative à la position (dans l'expression $\pi\delta$, la valeur de π serait 80 et non 8), la multiplication donnait directement la valeur du produit.

Pour calculer le produit de 24 par 53 (en grec, $\kappa\delta$ multiplié par $\nu\gamma$), nous prendrions le premier κ (qui correspond à 20), que nous multiplierions par les chiffres de 53 ; c'est-à-dire, 20ν et 20γ (en notation actuelle, 20×50, et 20×3). Ensuite, nous procéderions de la même manière avec le second chiffre du premier multiplicande : δ (qui correspond à 4) multiplié par ν, puis δ multiplié par γ (en notation actuelle, 4×50 et 4×3). Ces résultats partiels seraient ensuite additionnés, ce qui, en notation actuelle, donnerait ce qui suit :

$$24 \times 53 = (20 + 4)(50 + 3) = 20 \times 50 + 20 \times 3 + 4 \times 50 + 4 \times 3 = 1\,272.$$

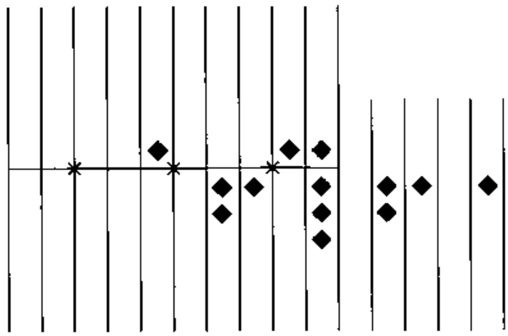
Ci-dessous, la représentation graphique de la multiplication grecque :

κδ		24	
νγ		53	
———	———	———	
,α ξ	1 000	60	
σ ιβ	200	12	
———	———	———	
,ασ οβ	1 200	72	= 1 272

L'utilisation de 27 symboles rendait difficile le calcul des produits partiels, puisque la table de multiplication correspondante aurait 27 × 27 = 729 résultats possibles. On pense que c'est pour cette raison que l'abaque a joué un rôle fondamental comme outil de calcul. Les abaques grecs étaient des tables divisées en plusieurs colonnes sur lesquelles on plaçait des cailloux ou des jetons. Chaque colonne représentait une puissance de 10, et il y avait d'autres colonnes pour les fractions.

L'abaque de Salamine est une plaque de marbre qui a été trouvée dans cette île grecque en 1846.

Ces tables ont pu être étudiées directement grâce aux différents spécimens qui en ont été retrouvés et qui comprennent, en outre, des informations sur les valeurs des colonnes. Sur la table trouvée à Salamine, chaque colonne représente une certaine quantité de pièces de monnaie grecques. Les colonnes longues représentent, de droite à gauche, respectivement, 1, 10, 100, 1 000 et 10 000 drachmes, puis 1, 10, 100, 1 000 et 10 000 talents (un talent correspond à 6 000 drachmes). Les colonnes courtes représentent des fractions de l'unité. Les fractions de la drachme sont l'obole (qui vaut un sixième de drachme), l'hémi-obole, le tétrobole et le chalkous (qui vaut un huitième d'obole). Sur la table, les pièces placées au-dessous de la ligne représentent une unité et celles placées au-dessus cinq unités. Par conséquent, le schéma suivant représente le nombre 502 158 + 2 oboles + 1 hémi-obole + 1 chalkous.



Les additions étaient effectuées en ajoutant le nombre de pièces nécessaires à la bonne place. Lorsqu'il y avait 5 unités dans la partie inférieure, elles étaient remplacées par une pièce dans la partie supérieure et, de même, pour 2 pièces dans la partie supérieure, on les remplaçait par une pièce dans l'unité suivante. L'utilisateur devait se rappeler que, dans le cas des talents, 6 000 drachmes étaient égales à un talent, et que, dans le cas des fractions, il devait procéder de même, puisque 6 oboles valaient une drachme.

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛῼ ΕΥΘΕΙΩΝ.								
ΠΕΡΙΦΕ-ΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ο̆	ςʺ	ο̄	λα	κε	ο̄	α	β	ν
α	ο̄	α	β	ν	ο̄	α	β	ν
α	ςʺʹ	α	λδ	ιε	ο̄	α	β	ν

*Table de l'*Almageste*, traité d'astronomie rédigé par Ptolémée au IIe siècle, où des fractions sont utilisées.*

Comme le démontre Ptolémée dans son *Almageste*, les Grecs connaissaient les fractions sexagésimales, mais, en mathématiques, ils utilisaient le système égyptien. Dans les commentaires de l'œuvre d'Archimède, Eutocius d'Ascalon utilise

$$,\overline{\alpha\ \lambda\eta}\ \theta'\ \iota\alpha'$$

pour représenter 1838 (1/9) (1/11), et

$$\overline{\beta}\,\eta^{\iota\alpha}\eta^{\iota\alpha}\ \ \theta'\rho\kappa\alpha'$$

pour désigner 2 (8/11) (8/11) (1/99) (1/121).

Les Grecs et le nombre π

Les Grecs étaient très avancés en géométrie et ont pu obtenir de meilleures approximations de π que leurs prédécesseurs. Concernant le nombre π, Archimède a donné l'encadrement $3 + 10/71 = 223/71 < \pi < 3 + 1/7 = 22/7$ (valeur moyenne de 3,141851), et Ptolémée a obtenu la valeur 3,141666. Pour parvenir à ce résultat, ils ont utilisé deux polygones réguliers, l'un inscrit (intérieur au cercle) et l'autre circonscrit (extérieur au cercle), et ont calculé les périmètres correspondants.

Gravures dédiées à Archimède (à gauche) et à Ptolémée.
Les deux penseurs ont donné chacun une approximation du nombre π.

Archimède a calculé que l'hexagone inscrit dans un cercle de rayon 1 a un périmètre de 6 et l'hexagone circonscrit un périmètre de $4\sqrt{3}$. Par conséquent, π est compris entre 3 et $2\sqrt{3}$. Il a alors intégré le fait que la racine carrée de 3 correspond à l'inégalité $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ et a continué à calculer le périmètre de polygones réguliers en augmentant le nombre de côtés : à partir de l'hexagone (polygone à 6 côtés), Archimède a doublé à plusieurs reprises le nombre de côtés, utilisant d'abord le polygone à 12 côtés, puis ceux à 24, 48 et jusqu'à 96 côtés. Avec le polygone à 96 côtés, il a obtenu l'approximation $6\,336/(2\,017 + 1/4) < \pi < 14\,688/(4\,673 + 1/2)$. Étant donné que $3 + 10/71 < 6\,336/(2\,017 + 1/4) < \pi < 14\,688/(4\,673 + 1/2) < 3 + 1/7$, il a pris ces deux valeurs comme valeurs extrêmes de l'intervalle dans lequel se trouve π. Ptolémée a utilisé le polygone à 360 côtés.

Les Grecs et les nombres premiers

Les nombres premiers sont les entiers naturels qui ne sont divisibles que par un ou par eux-mêmes. Par convention, le nombre 1 n'est pas premier. Tout nombre entier admet une décomposition en produit de nombres premiers, unique, à permutation des facteurs près. Par exemple :

$$120 = 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 5 \times 2 \times 2 \times 3.$$

LES NOMBRES PREMIERS INFÉRIEURS À 1 000

Voici les nombres premiers inférieurs à 1 000, pour celles et ceux d'entre vous qui souhaiteraient vérifier leurs propriétés sans avoir à les calculer un par un :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Les Grecs les ont étudiés en détail : ils ont défini le concept de nombre premier et ont démontré leurs principales propriétés. On pense que les Égyptiens avaient également la notion des nombres premiers, mais nous ne disposons pas de résultats antérieurs à ceux des Grecs.

En 300 av. J.-C., Euclide, mathématicien à Alexandrie sous le règne de Ptolémée I^{er} (323-283 av. J.-C.), autre époque heureuse marquée par l'union des cultures égyptiennes et grecques, a trouvé la propriété peut-être la plus étonnante et la plus remarquable des nombres premiers. Il l'a présentée dans son œuvre *Éléments de géométrie*, l'un des textes fondamentaux de l'histoire des mathématiques, qui a posé les bases de la géométrie qui serait enseignée au cours des deux millénaires suivants : la géométrie euclidienne. Dans le Livre IX des *Éléments*, la Proposition 20 démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Pour le démontrer, Euclide prend un ensemble de nombres premiers $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ et vérifie que le nombre $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ n'est pas divisible par p_1, car le reste de la division par p_1 est 1. De la même façon, N n'est divisible par aucun des nombres p_2, $p_3, \ldots, p_n$, car le reste de la division de N par $p_2, \ldots, p_n$ est 1. N est donc soit un nombre premier, soit le produit de nombres premiers qui ne font pas partie de S. Ainsi, S n'est pas un ensemble complet de nombres premiers. Comme le choix de S est arbitraire, il n'existe aucune liste complète de nombres premiers, et la liste des nombres premiers est infinie.

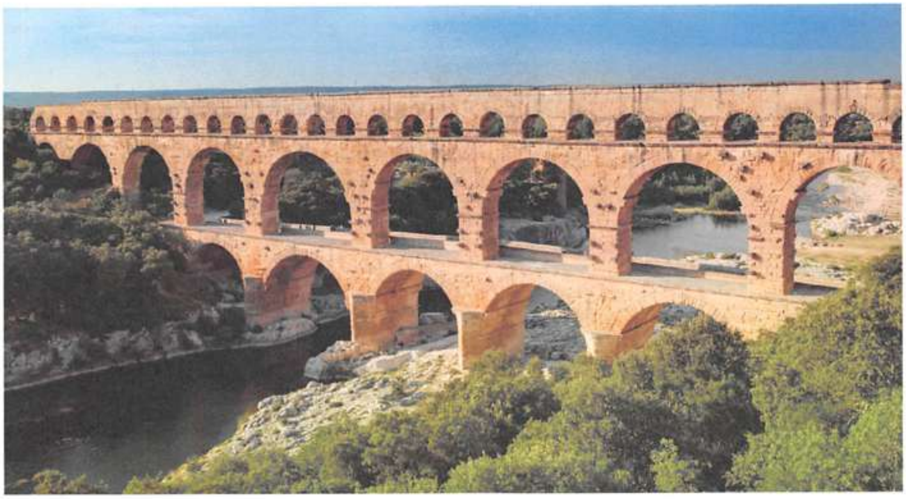
*Détail de l'*École d'Athènes*, tableau de Raphaël dans lequel le peintre a représenté Euclide, l'auteur des célèbres* Éléments de géométrie.

Rome

À Rome, les mathématiques et leur notation n'ont pas été aussi puissantes et évoluées qu'en Grèce et à Babylone. Le centre du monde latin, si fertile dans d'autres domaines, n'a pas produit de mathématiciens de grande valeur. Au temps de Rome, les moments importants de l'histoire des mathématiques n'ont pas été vécus dans la capitale de la République, ou de l'Empire, mais à côté, dans les régions sous influence grecque, où la tradition des mathématiques grecques se perpétuait. En fait, les mathématiques romaines renverraient à une tradition complètement différente, qui ne doit rien ni aux Grecs ni aux Babyloniens, mais à la numération et aux mathématiques étrusques. Les auteurs majeurs de cette période, mathématiciens de tradition grecque, ont été Ptolémée, avec son célèbre ouvrage déjà cité, l'*Almageste*, et Diophante et Pappus, tous deux d'Alexandrie. Diophante a écrit le traité intitulé *Les Arithmétiques* et Pappus, un ensemble de huit livres de commentaires sur des classiques.

Cicéron lui-même a reconnu les limites des mathématiques romaines dans ses *Tusculanes*, où il affirme que :

> « La géométrie était tenue en grande estime, de sorte que nul n'était plus illustre que les mathématiciens. Mais nous, nous avons limité la grandeur de cet art à l'utilité qu'il y a à mesurer et à compter. » (*Tusculanes*, I, 5)



Le pont du Gard, photographie d'Édouard Baldus, vers 1850. Cet aqueduc, sur lequel circulaient voitures et charrettes, a été construit par des bâtisseurs romains, qui ont combiné dans leurs œuvres architectoniques le savoir mathématique de l'Antiquité.

Cependant, si les Romains n'ont pas été aussi forts que les Grecs en mathématiques et en calcul, il ne fait aucun doute qu'ils ont été les grands techniciens et ingénieurs de l'Antiquité, faisant un usage de maître des mathématiques. Beaucoup de leurs magnifiques œuvres d'ingénierie et d'architecture ont résisté au passage du temps et sont parvenues jusqu'à notre époque grâce à leurs solutions admirables et, naturellement, au génie mathématique avec lequel elles ont été conçues. Par conséquent, les Romains ont rédigé toute une série de textes sur des techniques de construction, parmi lesquels figurent ceux de leur auteur le plus célèbre, Vitruve.

La notation romaine originelle est très populaire, puisque les chiffres romains sont encore utilisés de nos jours. Cette notation est présentée dans le tableau suivant :

1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000	500 000
I	V	X	L	C	I)	(I)	I))	((I))	I)))	(((I)))	I))))

Plus tard, avec l'arrivée de l'imprimerie, |) a été simplifié en D et (|) en M, et de nouvelles notations ont été introduites pour exprimer des valeurs plus élevées. Une barre au-dessus d'un nombre le multipliait par 1 000, et des barres verticales de chaque côté le multipliaient par 100. Par exemple, |LV| représentait 5 500. Des valeurs à retrancher ont également été introduites à gauche. C'est le cas, par exemple, de XC pour LXXXX, et IV pour IIII.

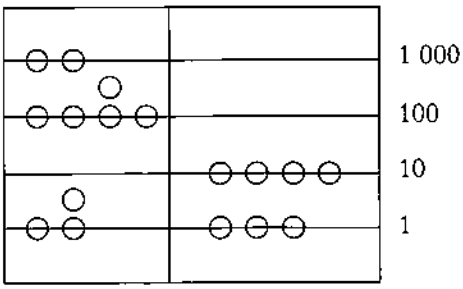
MARC VITRUVE

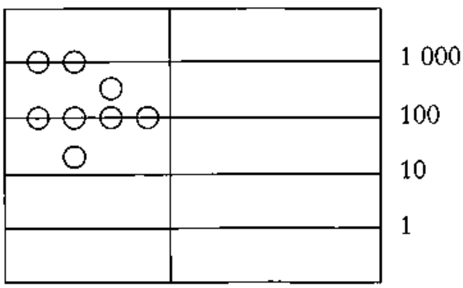
Le célèbre architecte et écrivain romain Vitruve (80 av. J.-C.–15 av. J.-C.) a servi dans les légions de Jules César, sous les ordres directs de ce dernier. Il nous a légué son *De Architectura*, important traité en dix volumes dans lequel il aborde différents aspects de l'architecture du point de vue romain, qui était très large et intégrateur, depuis les éléments de construction, comme les machines et les instruments, jusqu'aux éléments de planification urbaine et paysagère.

Édition du De Architectura *de Vitruve publiée en 1567.*

Toutefois, cette numération était difficile à utiliser. Il est fort probable que des abaques ou des tables de calcul étaient utilisés pour calculer, et que la numération ne servait que pour noter les valeurs et le résultat. Le fonctionnement des tables de calcul romaines était similaire à celui des tables grecques. La table comportait des lignes : les pièces placées sur les lignes correspondaient à des unités et celles placées entre correspondaient à 5 unités. La table était divisée en deux parties, la partie droite représentait le nombre à additionner et la partie gauche, le résultat.

Par exemple, sur la figure ci-dessous, les cailloux situés à gauche représentent le nombre 2 907 et ceux situés à droite, le nombre 43. En les déplaçant tous à gauche et en remplaçant les excès (5 pierres sur une ligne par une pierre entre des lignes, ou deux entre des lignes par une pierre sur la ligne supérieure), on obtient le résultat. Dans ce cas, il s'agit de 2 950.





Pour compter, les Romains se servaient également de tablettes en métal ou en bois contenant des rainures. Pour désigner les nombres, ils y plaçaient des petites pièces ou des pierres. Aussi paradoxal que cela puisse paraître, ces pierres sont la grande contribution de Rome aux mathématiques, car le mot latin pour dire « pierre », qui est *calx*, et son diminutif *calculus*, qui signifie « petite pierre » ou « caillou », ont donné naissance aux mots modernes « calcul » et « calculer ».

Les mathématiques à Alexandrie

Les mathématiques grecques se sont éteintes sous l'empire romain. Les grands progrès accomplis durant cette période, longue de près de huit siècles, ont été influencés par les Grecs. À l'époque, Alexandrie, avec son musée et sa bibliothèque, était un haut lieu de la connaissance, et certains des mathématiciens grecs les plus éminents des derniers siècles de l'empire romain y ont résidé.

Pappus d'Alexandrie, mathématicien du début du IVᵉ siècle que nous avons déjà mentionné, a initié un renouveau des mathématiques grecques en se livrant à des commentaires et des exégèses des textes classiques. Ses textes complétaient les découvertes antérieures par des démonstrations plus détaillées pour que le lecteur puisse bien comprendre les œuvres de l'Antiquité. Malheureusement, sa tentative a vite tourné court, car peu de mathématiciens de renom l'ont suivi.

HYPATIE D'ALEXANDRIE

Hypatie (vers 370-415) était la fille du mathématicien et philosophe Théon d'Alexandrie, dont elle a hérité le talent et les intérêts intellectuels. Elle pratiquait la religion païenne alors que le christianisme était devenu la religion officielle de l'empire romain et que le paganisme était persécuté. Malgré cela, cette grande mathématicienne a conservé son indépendance religieuse et a même compté parmi ses élèves le futur évêque de Cyrène, Synésios. Toutefois, en 415, elle se trouva au cœur d'une bataille politique opposant le patriarche chrétien Cyrille et le préfet romain Oreste, dont elle était l'amie et la conseillère. Afin de nuire à Oreste, le bruit a circulé qu'Hypatie pratiquait la sorcellerie et elle a été assassinée de façon horrible pendant le carême.

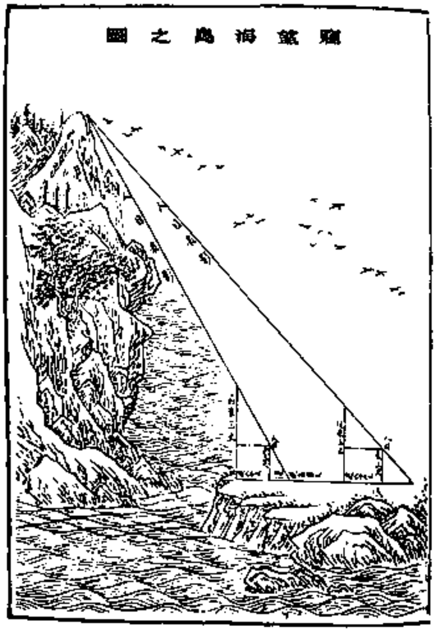
*Hypatie d'Alexandrie, vêtue d'une tunique blanche, apparaît sur ce détail de l'*École d'Athènes *de Raphaël.*

L'un des rares grands noms à avoir succédé à Pappus a été la célèbre Hypatie, également d'Alexandrie. Parmi les textes mathématiques de cette dernière, citons les commentaires sur *Les Coniques* d'Apollonius de Perga et sur *L'Arithmétique* de Diophante, ainsi que des parties comprises dans les commentaires de son père sur l'*Almageste* de Ptolémée. Son assassinat en 415, qui en a fait une grande martyre de la science et du féminisme, et la destruction du musée d'Alexandrie et de son importante bibliothèque, qui aurait eu lieu entre le IVe et le VIIe siècle, ont opéré une coupure définitive avec la tradition mathématique grecque, qui fut reléguée au rang de barbare avant que les Arabes ne la réhabilitent.

La Chine

Les mathématiques ont joué un grand rôle dans ce pays marqué par de grandes réalisations dans les domaines scientifique et technique. Depuis la dynastie Han (206 av. J.-C.-220 apr. J.-C.), l'accès au fonctionnariat était basé sur des examens stricts et non, comme on pourrait s'y attendre, sur les relations familiales. Ces examens insistaient tout particulièrement sur les classiques de la littérature chinoise, mais comprenaient aussi des problèmes mathématiques, ce qui s'avère très important. Même si cela paraît irréel, ce modèle est parvenu jusqu'à l'époque moderne, malgré une utilisation discontinue. Bien sûr, les examens ne favorisaient pas la créativité mathématique et, généralement, les Chinois recouraient à des listes de problèmes et de solutions à mémoriser ; en toute logique, ils partageaient la vision des Babyloniens et des Égyptiens, qui considéraient les sciences comme un outil pratique. Malgré cela, rien n'a pu empêcher qu'une culture aussi riche et aussi étendue dans le temps développe ses connaissances mathématiques à la recherche de nouveaux résultats et de méthodes plus efficaces pour résoudre des problèmes toujours plus complexes.

Le texte mathématique chinois le plus important de l'Antiquité est le *Jiuzhang suanshu* (*Neuf chapitres sur les procédures mathématiques*). Cet ouvrage est le grand classique sur lequel les mathématiciens chinois ont travaillé pendant des générations. Ils utilisaient aussi comme référence les commentaires et les annotations apportés par Liu Hui au IIIe siècle de notre ère. Par ailleurs, en 1983, un manuscrit mathématique de 7 000 idéogrammes disposés sur 190 lattes de bambou a été découvert dans une tombe datant de 186 av. J.-C. Chaque latte mesure 30 centimètres de long et 6-7 millimètres de large. À l'origine, ces lattes étaient reliées entre elles puis enroulées, mais elles ont été trouvées dans le désordre, car les liens avaient disparu, et leur recomposition a constitué un véritable casse-tête pour les experts.



Reproduction du XVIIIe siècle d'un des problèmes du mathématicien chinois Liu Hui, dans lequel on étudie comment mesurer la hauteur d'une île.

Une fois recomposé, ce texte de grande importance a été étudié en détail. Il comprend des problèmes de différents types, toujours posés dans le but de résoudre des questions pratiques liées aux taxes, aux volumes, etc., mais il est tout de même possible d'y trouver des applications intéressantes de méthodes, telles que la règle de fausse position ou les algorithmes d'extraction de racine carrée. Tous ces problèmes sont présentés sous forme allégorique.

Bien que les paragraphes suivants traitent uniquement des questions des mathématiques chinoises qui concernent le sujet qui nous intéresse ici, à savoir

UN PROBLÈME DES *NEUF CHAPITRES*

Le problème énoncé sur les lattes 34 et 35 des *Neuf chapitres sur les procédures mathématiques* donne une idée du type de questions posées dans ce texte : un renard, un chat sauvage et un chien arrivent à un poste de douane où on leur demande 111 pièces. Le chien dit au chat, et le chat dit au renard : « Ta peau vaut le double de la mienne ; tu dois payer deux fois plus de taxes. » Combien doit payer chaque animal ?

la numération et le calcul, il convient d'ajouter que les mathématiciens chinois mentionnés ci-dessous ont fait bien d'autres découvertes importantes, qui n'ont peut-être pas leur place ici, mais qui se sont avérées fondamentales pour l'histoire des mathématiques, comme les méthodes de résolution des équations et les problèmes de congruences.

La numération et le système de calcul en Chine

La plus ancienne méthode de calcul utilisée par les Chinois remonte au IVe siècle av. J.-C. Elle consistait en des bâtonnets ou des baguettes à calculer appelés *suan* (算) ou *chou* (筹). Avec le temps, ce système serait remplacé par l'abaque. Ces bâtonnets représentaient les chiffres de 1 à 9 en adoptant deux séries de dispositions différentes. La première série jouait avec la position verticale des bâtonnets, comme on peut le voir sur la représentation ci-dessous, qui montre les chiffres de 1 à 9 de gauche à droite :

La seconde série jouait avec la position horizontale, comme on peut le voir sur la représentation ci-dessous, qui montre de nouveau les chiffres de 1 à 9 :

Les Chinois utilisaient des tables sur lesquelles ils représentaient ces chiffres à la bonne place. Par exemple, la représentation de 4 508 était :

Comme on peut le constater, dans un même nombre, les deux séries étaient utilisées, la série verticale représentant les unités, les centaines, etc., et la série horizontale les dizaines, les milliers… Si l'un des chiffres était zéro, ils laissaient la position correspondante vide, comme on peut le voir dans le cas de 4 508.

Le même système était employé pour représenter les nombres négatifs. La couleur des bâtonnets permettait de distinguer ces deux types de nombres : les nombres positifs étaient représentés par des bâtonnets rouges et les nombres négatifs, par des bâtonnets noirs.

Les opérations de calcul étaient effectuées sur la même table et avec les mêmes bâtonnets. L'addition et la soustraction se faisaient en ajoutant ou en enlevant des bâtonnets de la table. Il existait des méthodes pour faire les multiplications et les divisions, et même pour représenter et effectuer d'autres opérations d'algèbre, comme factoriser des polynômes.

La date d'introduction de ce système de calcul en Corée et au Japon est incertaine. On sait tout au moins qu'au Japon il était déjà utilisé sous le règne de l'impératrice japonaise Suiko (593-628 apr. J.-C.) sous le nom de *sangi*.

L'abaque est apparu en Chine à partir du IIe siècle av. J.-C. sous le nom de *suanpan*. L'abaque chinois était divisé en deux parties : dans la partie supérieure, les pièces représentaient cinq unités (ou dizaines, centaines, etc., selon le cas) et dans la partie inférieure, chaque pièce représentait une unité. Cette division ressemble à celle de l'abaque romain, ce qui, associé à la certitude historique des relations commerciales entre l'empire romain et le monde chinois, a amené des spécialistes à évoquer sérieusement la possibilité d'un lien direct entre les abaques.

Photo prise en 1938 dans une école de la ville chinoise de Zhenjiang lors d'une leçon de manipulation de l'abaque.

L'abaque chinois a été introduit au Japon vers le XVIe siècle, sous le nom de *soroban*. Son introduction a été favorisée par les échanges commerciaux, mais sa diffusion a rencontré de nombreux freins ; il faudra longtemps pour qu'il entre dans les écoles et soit utilisé pour développer des méthodes mathématiques avancées. Dans les échanges commerciaux, le *soroban* a très vite remplacé les systèmes antérieurs, mais ces derniers ont conservé leur prestige dans le domaine des hautes mathématiques.

La représentation des nombres, aussi bien en Chine qu'au Japon, qui utilise un système de numération fortement influencé par son grand voisin, passe par neuf pictogrammes correspondant aux chiffres de 1 à 9 :

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Pour désigner les dizaines, centaines, milliers, etc., ces symboles sont associés aux pictogrammes suivants :

十 : dizaine (10)
百 : centaine (10^2)
千 : millier (10^3)
万 : dizaine de milliers (10^4)
億 : cent millions (10^8).

Les nombres sont représentés à l'aide des symboles de 1 à 9, en intercalant le symbole des dizaines, centaines, etc. Par exemple, 10 563 serait représenté de la manière suivante :

一万五百六十三.

Ce qui peut être compris comme :

一 (un), 万 (dizaine de milliers), 五(cinq), 百 (centaines),
六 (six), 十 (dizaines), 三 (et trois).

Il est intéressant de noter que, contrairement au système utilisé dans la plupart des langues européennes, où l'unité de millier (10^3) est à la base de la construction des multiples, ils utilisent ici l'unité 10^4 pour construire les multiples.

Par conséquent, 132 000 s'écrit $13 \times 10^4 + 2\,000$, ce qui, en pictogrammes, donnerait :

十三万二千

Le nombre π en Chine

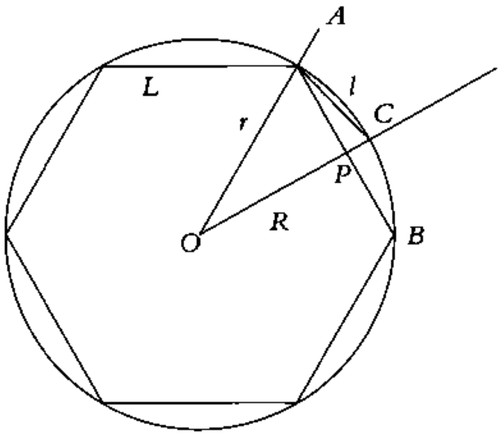
Les Chinois ont développé des algorithmes pour calculer le nombre π. Le grand mathématicien Liu Hui, qui a vécu vers l'an 300 dans le royaume de Wei, après la fin de la dynastie Han, a été le premier à proposer une méthode pour calculer la valeur de ce nombre. Avant lui, le scientifique et inventeur Zhang Heng (78-139), qui a mis au point un détecteur de séisme mille sept cents ans avant l'invention du premier sismographe, aurait donné 3,1724 comme approximation de π. Il en existait également des approximations telles que 3,162 (la racine de 10) et 3,156. Au IIIe siècle, l'astronome Wan Fan, du royaume de Wu, a utilisé cette dernière valeur comme résultat de la fraction 142/45.

La première méthode employée par Liu Hui pour construire une approximation de π a été la méthode de dichotomie des polygones. Il a réussi, avec un polygone à 96 côtés, à déterminer que $3{,}141024 < \pi < 3{,}142708$, suite à quoi il en a donné une approximation de 157/50, considérant que 3,14 était suffisant.

Timbres chinois dédiés aux érudits Liu Hui (à gauche) et Zhang Heng.

Liu Hui part d'un hexagone inscrit de côté de longueur L auquel il applique un processus itératif consistant à multiplier à chaque fois le nombre de côtés du polygone par deux. C'est-à-dire qu'il a d'abord utilisé un hexagone, puis un dodécagone (12 côtés), puis un polygone à 24 côtés (= 12 × 2) et un autre à 48 (= 24 × 2), et ainsi de suite. À chaque étape, il calculait l'aire du polygone à N côtés, ainsi que la longueur du côté du polygone à $2N$ côtés.

Nous représenterons la longueur du côté du polygone à $2N$ côtés par l. Et, à cet effet, nous appliquerons le théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse h est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés c_1 et c_2 de l'angle droit, soit $h^2 = c_1^2 + c_2^2$.



Représentation du processus de calcul de la longueur l *à partir de la longueur* L,
L *étant la longueur du côté d'un hexagone et* l *la longueur du côté d'un dodécagone.*
O *représente le centre du cercle ;* A *et* B, *deux des sommets de l'hexagone ;*
C, *le nouveau sommet, et* P, *le point du côté de l'hexagone qui est à la même distance*
de A *et de* B. *La longueur du rayon est* r, *et la longueur du centre à* P *est* R.

Sur la figure ci-dessus, O est le centre du cercle, et A et B les extrémités du côté dont nous voulons calculer la longueur L. Notez que OAB est un triangle. La procédure à suivre est la suivante :

Étape 0. Prenons le polygone avec $N = 6$ côtés de longueur L connue.

Étape 1. Tout d'abord, nous partageons le côté AB en deux parties égales et appelons le milieu de $[AB]$ le point P.

Étape 2. Nous calculons ensuite la longueur du segment OP, que nous désignerons par la lettre R. À cet effet, nous appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle OAP. On sait déjà que l'hypoténuse de ce triangle est r, qu'un côté est $L/2$ et que l'autre, dont nous souhaitons calculer la longueur, est R. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité $r^2 = R^2 + (L/2)^2$, donc $R^2 = r^2 - (L/2)^2$ et :

$$R = \sqrt{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}\ .$$

Étape 3. Prenons maintenant le rayon qui passe par P. La prolongation de ce rayon jusqu'à la rencontre du cercle forme un sommet du polygone à $2N$ côtés. Nous appellerons ce point C. Connaissant R, nous calculons la longueur du segment PC. Nous appellerons cette longueur ρ. Comme OC a une longueur de r, le segment PC a une longueur de

$$\rho = r - R = r - \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}\ .$$

Étape 4. La longueur du segment AC peut être déterminée en utilisant le théorème de Pythagore. Comme nous l'avons dit plus haut, nous appellerons la longueur de ce segment l. Dans ce triangle, l'hypoténuse est l et les côtés sont $L/2$ et ρ. Par conséquent,

$$l^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \rho^2 = \frac{L^2}{4} + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}\right)^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}\ .$$

Étape 5. En isolant l dans la dernière égalité, on obtient la longueur du côté du polygone à $2N$ côtés :

$$l = \sqrt{2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{L^2}{4}}}\ .$$

Étape 6. L'aire du polygone à N côtés, égale à N fois l'aire d'un triangle, peut être calculée à partir du triangle formé par les points OAB. Pour trouver l'aire de OAB, il faut multiplier sa base par sa hauteur puis diviser par 2. Dans ce triangle, la base AB a une longueur de L, et la hauteur est R, que nous avons calculé précédemment. Par conséquent, l'aire du polygone sera égale à :

$$N \times \text{aire du triangle } OAB = N\frac{\mathrm{LR}}{2}.$$

Étape 7. Nous revenons ensuite à l'étape 2, et remplaçons N par $2N$ et L par 1.

Pour connaître la valeur de π, on admettra que l'aire du cercle est πr^2. Par conséquent, pour $r = 10$, l'aire est 100π.

En commençant par $r = 10$, et par conséquent par $L = 10$, on obtient les aires regroupées dans le tableau ci-dessous, en notation moderne, car Liu Hui utilisait des fractions pour exprimer les résultats obtenus.

En partant de l'aire d'un polygone à $2N$ côtés de longueur l (que nous désignerons par la lettre C), obtenue à partir du polygone à N côtés de longueur L, Liu Hui en a également déduit l'inégalité suivante concernant l'aire du cercle :

$$\text{Aire} - 2N < C < \text{Aire} - 2N + \text{excès}.$$

Ici, « excès » correspond aux $2N$ triangles d'aire $\rho(L/2)/2$, soit à $2N(\rho(L/2))/2$, en rappelant que $r = r - R$. Ces valeurs figurent également dans le tableau.

Étant donné que la différence entre l'aire du polygone à 96 côtés et celle du polygone à 192 côtés est minime, Liu Hui a considéré que l'approximation $\pi = 3{,}14$ était suffisante.

Nombre de côtés	Longueur du côté du polygone à *N* côtés	Longueur du côté du polygone à 2*N* côtés		Aire du polygone	Excès de l'aire entre le polygone à *N* côtés et celui à 2*N* côtés
N	L	l	R	$N(LR)/2$	$2N(\rho(L/2))/2$
6	10	5,1763806 8	8,6602545	259,80765	40,192368
12	5,1763806 8	2,6105237	9,659258	299,99997	10,582865
24	2,6105237	1,3080626	9,914449	310,58282	2,6800032
48	1,3080626	0,65438163	9,978589	313,26285	0,67216444
96	0,65438163	0,32723463	9,994646	313,935	0,16816857
192	0,32723463	0,1636228	9,998661	314,10318	0,042062752
384	0,1636228	0,08181208	9,999665	314,14526	0,01051604

Liu Hui a remarqué que le rapport entre un excès et le suivant est de l'ordre de 1 / 4 = 0,25. Ces quotients sont indiqués dans le tableau ci-dessus. Ce rapport lui a permis d'obtenir une approximation de l'aire du polygone à 3 072 côtés, et à partir de celle-ci, une meilleure approximation π.

À titre d'exemple, nous pouvons calculer quelle serait l'estimation obtenue avec l'approximation de Liu Hui pour le polygone à 384 côtés à partir de sa dernière approximation (celle du polygone à 192 côtés). Dans ce cas, on sait que l'aire du polygone à 192 côtés est de 314,10318 et que l'excès de ce polygone par rapport au précédent est de 0,16816857. À partir de là, Liu Hui a estimé que la différence d'aire entre le polygone à 192 côtés et celui à 384 côtés était de 0,16816857 × (1/4) = 0,042042144. L'aire du polygone à 384 côtés est donc égale à :

$$314{,}10318 + 0{,}16816857 \times 0{,}25 = 314{,}14523.$$

On peut voir que l'excès réel est de 0,042062752 et que l'aire totale est de 314,14526. Liu Hui trouve ainsi avec ce même système l'aire du polygone à 3 072 côtés, puis une approximation de π égale à 3 927 / 1 250 = 3,14159.

Nombre de côtés	Longueur du côté du polygone	Aire du polygone	Excès de l'aire entre le polygone à *N* côtés et celui à 2*N* côtés	Quotient
N	*L*	*N(LR)/2*	*2N(ρ(L/2))/2*	Excès aire (*N*)/ excès aire (*N/2*)
6	10	259,80765	40,192368	
12	5,1763806 8	299,99997	10,582865	0,26330534
24	2,6105237	310,58282	2,6800032	0,25323987
48	1,3080626	313,26285	0,67216444	0,25080734
96	0,65438163	313,935	0,16816857	0,25018963
192	0,32723463	314,10318	0,042062752	0,25012255
384	0,1636228	314,14526	0,01051604	0,25000837

Cette méthode a été réintroduite en 480 par le mathématicien et astronome Zu Chongzhi (429-500), de la dynastie Qi, qui l'a appliquée à un polygone à 12 288 = 3×2^{12} côtés. Il a ainsi pu montrer que π était compris entre 3,1415926 et 3,1415927, ce qu'il a présenté de façon plus succincte sous la forme : $\pi \simeq 355/113$. Pendant 900 ans, cette approximation a été la plus précise qui ait été donnée de π.

Mathématiques indiennes et arabes : la numération positionnelle

Dans l'histoire de la science, on considère traditionnellement que les mathématiques indiennes sont apparues au VII^e siècle, à l'époque où l'utilisation du sanscrit comme langue commune était relativement uniforme en Inde. L'Inde n'avait pas été isolée de l'Europe ; elle avait noué des rapports intenses avec les Grecs, puis avec les Romains. Il ne faut pas oublier qu'Alexandre le Grand a étendu son empire jusqu'à la vallée de l'Indus.

Bien que la science indienne se soit intéressée de très près à l'astronomie, elle a accordé également une place importante aux mathématiques, élément fondamental du savoir scientifique. Curieusement, les Indiens ne partageaient pas la vision orientale des sciences et, pour eux, les mathématiques ne devaient pas être appliquées. La finalité des mathématiques indiennes était le savoir pour le savoir. Malgré cela, ses spécialistes n'ont pas fait preuve d'un zèle excessif pour proposer des démonstrations plus ou moins formelles des méthodes ou procédures. On pense que les mathématiciens indiens devaient justifier leurs découvertes, mais qu'ils n'ont pas conservé les démonstrations correspondantes.

Les Indiens ont étudié en détail la trigonométrie, surtout pour son utilité dans les calculs astronomiques, mais également dans la résolution des équations indéterminées, en algèbre et en combinatoire. En fait, le concept et le mot *sinus* viennent d'un traité d'astronomie du V^e siècle, le *Paitāmahasiddhānta*.

SINUS

Comment le mot « sinus » a-t-il été appliqué à un concept trigonométrique qui n'a rien à voir avec ses acceptions ? Tout a commencé avec le traité d'astronomie indienne intitulé *Paitāmahasiddhānta*, dans lequel apparaît une table de jyā-ardha, c'est-à-dire de « demi-cordes », celles-ci étant d'usage dans les calculs astronomiques. Ce terme est ensuite apparu dans l'*Āryabhaṭīya*, le livre principal du mathématicien indou Āryabhaṭa, qui l'a abrégé en *jyā* ou *jīvā*. Les Arabes l'ont traduit dans leur langue par *jiba*, mais, comme l'écriture arabe ne note pas les voyelles, dans les textes il apparaissait uniquement sous la forme *jb*. Puis, par erreur ou sciemment, il est devenu *jaib*, qui signifie « poitrine » ou « sein », et a été traduit tel quel en latin, ce qui a alors donné *sinus*, qui signifie « sein », « pli de vêtement », mais aussi « baie ». Ce terme n'a pas seulement fait fortune dans les langues romanes, car le mot anglais *sine* vient également du latin.

Bien entendu, la contribution la plus importante des mathématiques indiennes à l'ensemble des sciences est le système de numération dit arabe, mais que les Arabes ont emprunté aux Indiens. Ce système de numération vient du système d'écriture utilisé sous le règne du roi Aśoka (272 av. J.-C.-231 av. J.-C.) : le syllabaire brahmi, dont les textes transcrivent l'ancienne langue prakrite et contiennent des nombres. Cependant, durant leur voyage vers l'Occident, les figures des nombres ont subi des modifications telles que leurs représentations actuelles ne ressemblent plus en rien à ce qu'elles étaient au début. Les chiffres que nous utilisons aujourd'hui correspondent à la version de ces anciens nombres prakrits qui est arrivée en Afrique du Nord après plusieurs modifications puis s'est propagée en Europe au Moyen Âge.

क *ka* = 1	ख *kha* = 2	ग *ga* = 3	घ *gha* = 4	ङ *ṅa* = 5
च *cha* = 6	छ *chha* = 7	ज *ja* = 8	झ *jha* = 9	ञ *ña* = 10
ट *ṭa* = 11	ठ *ṭha* = 12	ड *ḍa* = 13	ढ *ḍha* = 14	ण *ṇa* = 15
त *ta* = 16	थ *tha* = 17	द *da* = 18	ध *dha* = 19	न *na* = 20
प *pa* = 21	फ *pha* = 22	ब *ba* = 23	भ *bha* = 24	म *ma* = 25
य *ya* = 30	र *ra* = 40	ल *la* = 50	व *va* = 60	
श *śha* = 70	ष *sha* = 80	स *sa* = 90		
ह *ha* = 100				

Fragment de la numération alphabétique indienne décrite par le mathématicien Āryabhaṭa (source : Georges Ifrah, Histoire universelle des chiffres*).*

Le système positionnel est également d'origine indienne. Au début, les anciens Indiens écrivaient les nombres à l'aide des symboles de 1 à 9, puis avec un autre ensemble de symboles représentant les dizaines de 10 à 90. Les multiples de 100, 1 000, etc., étaient construits en représentant les unités multipliées par les symboles de 100, 1 000... Plus tard, cette notation a été simplifiée, passant à une notation positionnelle, une innovation très importante qui n'utilisait plus que les symboles de 0 à 9. La date exacte de cette transformation est controversée, mais la plupart des preuves nous conduit à croire qu'elle eut lieu vers l'an 600. Un texte syrien daté de 662 parle déjà de la notation indienne.

Ce système pourrait avoir vu le jour à la frontière avec la Chine, où l'utilisation de l'abaque expliquerait la nécessité de faciliter la représentation des calculs réalisés avec cet outil. L'apparition de la numération positionnelle pourrait être liée à l'utilisation du point pour représenter un vide sur l'abaque, ce qui est attesté dans un texte du VIIe siècle trouvé en 1881 dans le nord-ouest de l'Inde, à Bakhshālī. La révolution est arrivée avec la transformation de ce point en zéro. Le zéro est inclus dans les nombres dès 628 apr. J.-C., lorsque Brahmagupta le définit dans son livre *Brahmasphutasiddhanta* (*L'Ouverture de l'Univers*) comme le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même.

Quoi qu'il en soit, en 870, le système positionnel était déjà établi en Inde. De là, il a rejoint Bagdad, d'où, plus tard, il gagna toutes les régions et les pays de culture musulmane. La Chine a utilisé la notation positionnelle avec ses propres caractères à partir de la dynastie Ming (1368-1644). Il a fallu attendre le XXe siècle pour que les caractères chinois soient remplacés par la numération arabe dans les documents mathématiques.

Le plus ancien livre arabe existant qui utilise la numération arabe en notation positionnelle est *Principes du calcul indien* de Kūshyār ibn Labbān, connu en arabe

ZÉRO ET CHIFFRE

L'origine étymologique des mots « zéro » et « chiffre » est presque la même. « Chiffre » vient du mot arabe *sifr*, transformé à partir du mot indien *sunya*. Son sens originel était « vide ». Le mot « zéro » vient du mot latin utilisé par Fibonacci dans son *Liber Abaci* (*Livre de l'abaque*), qui a popularisé les chiffres arabes en Europe. Fibonacci parlait de *zephyrum*, qui en latin et en grec signifiait « vent d'ouest », probablement de par sa ressemblance avec le mot arabe *safira*, qui signifie « être vide » et renvoyait, de toute évidence, à *sifr*, « vide ».

KŪSHYĀR IBN LABBĀN

L'astronome et mathématicien persan Kūshyār ibn Labbān (971-1029) est né dans la cité de Jīlān, au sud de la mer Caspienne. Bien que son ouvrage le plus connu soit son traité d'arithmétique *Principes du calcul indien*, l'ensemble de son œuvre écrite est très riche et renferme des livres et des collections de tables qui ont été transmis de génération en génération dans la tradition scientifique musulmane. Il a été le professeur d'al-Nasawī, l'algoriste. Dans son traité d'arithmétique, il présente la numération arabe et les principales opérations qu'elle permet de faire : l'addition, la soustraction, la division par 2, la multiplication, la division, la racine carrée et la racine cubique.

sous le nom de *Kitāb fī usūl hisāb al-hind*. Cette œuvre est importante non seulement parce qu'elle est la plus ancienne à utiliser cette numération, mais également parce que son contenu mathématique est singulier. Dans ce texte, le zéro, sous la forme de *sífr*, est systématiquement utilisé comme un nombre supplémentaire.

Jusqu'alors, la plupart des textes écrits en arabe étaient des traductions de textes grecs, mais aux Xᵉ et XIᵉ siècles la tendance s'est radicalement inversée. Vers le tournant du millénaire, lorsque Kūshyār ibn Labbān a écrit ses œuvres, les textes donnant de nouveaux résultats mathématiques intéressants se sont multipliés dans les pays musulmans. De ce fait, ce sont les musulmans qui ont intégré les fractions dans la notation positionnelle, qui avait été développée seulement pour les nombres entiers.

Le calcul du nombre π en Inde

Les Indiens se sont également laissés séduire par les mystères du nombre π. Le fondateur de l'école d'astronomie et de mathématiques du Kerala, Madhava de Sangamagrama (1350-1425), a découvert, entre autres, des séries infinies de fonctions sinus et cosinus, qui lui ont permis de définir le nombre π à l'aide d'une décomposition de la fonction arc-tangente. Il a présenté π sous la forme suivante :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \ldots$$

Il a aussi indiqué qu'il était faux de calculer π en utilisant uniquement n termes de la série. Le calcul de l'erreur résultant de cette troncature nécessite d'avoir une grande connaissance des séries. Plus tard, la série de l'arc-tangente a été redécouverte par James Gregory et utilisée par Gottfried Leibniz pour calculer π avec l'expression de ces lignes. C'est pourquoi la formule correspondante est habituellement appelée formule de Leibniz ou série de Gregory-Leibniz. Ce n'est que depuis très récemment qu'elle est connue sous le nom de Madhava-Leibniz, en mémoire du mathématicien indien qui l'a découverte en premier.

L'expression de l'arc-tangente utilisée est la suivante :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Cette série n'est pas du tout efficace pour calculer le nombre π. Le problème est que pour calculer 10 décimales correctes, 10 milliards d'opérations mathématiques sont nécessaires.

Chapitre 2

L'Europe médiévale

Au cours des premiers siècles du Moyen Âge, l'enseignement en Europe se nourrissait des textes et de l'autorité des auteurs de l'Empire romain tardif, comme Boèce. Les universités médiévales formaient leurs étudiants en suivant le modèle formulé au V^e siècle par l'énigmatique avocat Martianus Capella, l'auteur de *De Nuptiis Philologiae et Mercurio* (*Les noces de Philologie et de Mercure*), œuvre également connue sous le nom de *De Septem Disciplinis* (*Les sept disciplines*), dans laquelle il présentait pour la première fois la division classique des connaissances en *trivium* (les lettres) et *quadrivium* (les sciences).

Le poids de l'héritage culturel romain se faisait sentir même dans le calcul, où l'on continuait d'utiliser les chiffres romains. Le lent processus d'introduction des chiffres arabes, qui dut faire face à la controverse et à d'acharnés opposants, occupa une grande partie de cette période, mais le Moyen Âge finit par donner naissance à d'importantes innovations, ayant des effets décisifs sur les époques suivantes. Par exemple, le système logique de Raymond Lulle influença le travail de Leibniz au XVII^e siècle.

Boèce et la rithmomachie

La rithmomachie était un jeu présentant certaines similitudes avec les échecs. Il était très populaire au Moyen Âge. Il fut inventé vers le milieu du XI^e siècle dans des monastères du sud de l'Allemagne, et atteignit son heure de gloire au XVI^e siècle pour ensuite décliner puis disparaître totalement. Même s'il s'agissait seulement d'un jeu, l'évolution de la rithmomachie est particulièrement révélatrice de l'histoire des sciences car sa popularité et son déclin sont concomitants au développement des mathématiques.

L'œuvre mathématique médiévale par excellence est *L'Institution arithmétique* de Boèce, intitulée en latin *De Institutione Arithmeticae*. Sa structure est totalement différente des travaux mathématiques actuels. D'une certaine façon, du point de vue contemporain, on peut la voir comme une régression par rapport aux travaux des Grecs. L'ouvrage porte sur les rapports entre les chiffres et, surtout, sur les proportions. Il définit de nombreux concepts, à l'instar des *Éléments* d'Euclide,

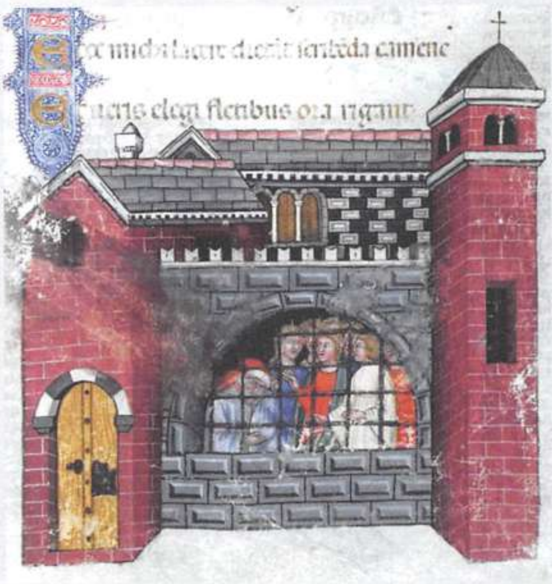
TRIVIUM ET *QUADRIVIUM*

Le concept de *trivium* s'est imposé aux VIIIe et IXe siècles, suite à la propagation de son grand frère, le *quadrivium*. Le *trivium* englobait les disciplines de grammaire, de logique et de rhétorique, et était une initiation aux arts libéraux, ainsi qu'une introduction au *quadrivium*, considéré comme plus complexe. Il s'agit là d'un préjugé qui s'est transmis au fil des siècles, le terme ayant donné naissance au mot « trivial » en raison de la moindre importance accordée au *trivium* par rapport au *quadrivium*. Son aîné, le *quadrivium*, était composé des arts libéraux restants, soit les disciplines d'arithmétique, de géométrie, d'astronomie et de musique. Boèce systématisa son usage aux Ve et VIe siècles, mais le concept est bien plus ancien car il figurait déjà dans les écrits des pythagoriciens.

Illustration représentant les sept arts libéraux, tirée de l'ouvrage Hortus deliciarum *de Herrad von Landsberg, compilé à des fins pédagogiques à la fin du XIIe siècle.*

BOÈCE (480-524)

Anicius Manlius Severinus Boetius ou Boëthius ou Boethius en latin, ou Séverin Boèce, était un philosophe chrétien né dans une importante famille qui compta plusieurs empereurs. Son ouvrage le plus connu est *De Consolation Philosophiae* (*La consolation de la philosophie*), qu'il écrivit en prison et dans lequel il présentait les inégalités du monde en suivant les schémas platoniciens. Il traduisit de nombreuses œuvres grecques en latin dans l'objectif de transmettre la culture gréco-romaine aux générations futures. En effet, quatre ans avant sa naissance, le dernier empereur romain, Romulus Augustule, fut destitué par le roi germanique Odoacre, ce qui marqua la fin de l'empire romain d'Occident. Souvent, les traductions de Boèce n'étaient pas littérales et elles comprenaient de nombreux commentaires personnels. Ainsi, son ouvrage *De Institutione Arithmeticae Libri II*, qui prétendait traduire l'*Arithmétique* de Nicomaque, était truffé d'apports propres à Boèce. Quoi qu'il en soit, les traductions de Boèce furent couramment employées au Moyen Âge en Europe.



Boèce emprisonné, miniature tirée d'une édition du XIVe *siècle de* La Consolation de la philosophie.

mais il ne contient pas l'idée de démonstration et de proposition, qui avait constitué l'avancée majeure de la pensée grecque, déjà si ancienne. La rithmomachie dut constituer une véritable planche de salut pour les étudiants de l'époque. Le jeu était en effet utilisé pour leur enseigner les concepts et les rapports de Boèce.

Au fil du temps, les auteurs grecs les plus remarquables furent réutilisés et le style médiéval fut délaissé. Malheureusement, le jeu disparut par la même occasion, au point que Leibniz, dont certaines des grandes découvertes se basaient sur les acquis des mathématiques médiévales, avait entendu parler du jeu mais ne connaissait pas totalement sa mécanique.

Dans les mathématiques de Boèce, les nombres peuvent être égaux (*aequalis*) ou inégaux (*inaequalis*). L'égalité n'est pas divisée en catégories, car il s'agit d'un concept indivisible, mais l'inégalité peut l'être. Ainsi, la catégorie supérieure (*maioris*) concerne les nombres inégaux supérieurs et la catégorie inférieure (*minoris*) les nombres inégaux inférieurs. Ces catégories sont subdivisées en cinq, selon le type de rapport pouvant être établi entre les nombres. La catégorie supérieure contient les sous-catégories multiples (*multiplex*), superparticuliers (*superparticularis*), superpartients (*superpartiens*), multiples superparticuliers (*multiplex superparticularis*) et multiples superpartients (*multiplex superpartiens*). La catégorie inférieure contient les sous-catégories *submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis, submultiplex superpartiens.*

Quand on essaie d'éclaircir certains de ces concepts, un jeu comme la rithmomachie s'avère utile pour s'orienter dans le système de Boèce. Pour cet auteur de l'Empire romain tardif, un multiple était, comme son nom l'indique, un nombre étant n fois un second nombre. On obtient donc ainsi un rapport double, triple, quadruple, etc. Par exemple, 8 est le quadruple de 2. Dire de deux nombres qu'ils sont superparticuliers signifie que le premier nombre contient le second et une fraction de celui-ci. Par exemple, 9 est superparticulier de 6 car $9 = 6 + (1/2) \times 6$. Superpartient signifie qu'un premier nombre contient le second plus plusieurs fractions de celui-ci. Par exemple, 9 est superpartient de 7 car $9 = 7 + (2/7) \times 7$. Les multiples superparticuliers contiennent un nombre plusieurs fois, et une fraction de ce dernier, et les multiples superpartients contiennent un nombre plusieurs fois et plusieurs fractions de ce dernier. Par exemple, 15 est un multiple superparticulier de 6 parce qu'il est égal à $6 + 6 + (1/2) \times 6$, et 16 est un multiple superpartient de 7 car il est égal à $7 + 7 + (2/7) \times 7$.

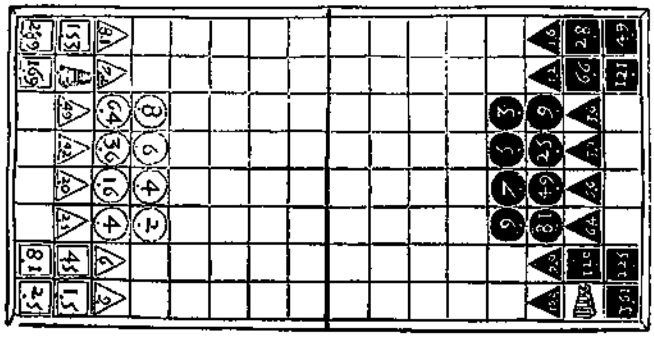
D'autre part, dans son ouvrage, Boèce identifia trois types de moyennes. La première est la moyenne arithmétique, définie comme $m = (a + b)/2$, dont la principale caractéristique est de se trouver au milieu des deux nombres extrêmes. La deuxième est la moyenne géométrique, présentée comme $m = \sqrt{ab}$, caractérisée par le fait que le rapport entre a et m est identique au rapport entre m et b ; ainsi $a/m = m/b$. Enfin, la troisième est la moyenne harmonique, $m = 1/((1/a + 1/b)/2)$, ce qui équivaut à : $m = 2\,ab/(a + b)$.

Comment la rithmomachie pouvait-elle aider à démêler ces rapports numériques complexes ? Bien évidemment en les transformant en une activité ludique qui manipulait ces concepts. Le jeu se déroulait traditionnellement sur un tableau de 8×16, même si la seconde dimension pouvait varier. Chaque joueur disposait de 24 pions portant des nombres correspondant aux multiplex, superparticuliers et superpartients, de nombres définis. Les joueurs utilisaient diverses opérations pour capturer les pions de l'adversaire. Par exemple, si le pion 4 était à 9 cases du pion 36,

LES MOYENNES DANS *L'INSTITUTION ARITHMÉTIQUE* DE BOÈCE

« Il est couramment admis, et bien connu des anciens, qu'il existe trois moyennes : l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique. Pythagore, Platon et Aristote les ont d'ailleurs utilisées. [...] Nous parlons de moyenne arithmétique lorsque, entre trois valeurs ou un nombre quelconque de valeurs, nous trouvons une différence égale entre toutes les valeurs considérées. [...] Nous allons désormais étudier la moyenne géométrique, qu'il conviendrait plutôt d'appeler proportionnelle, car cette moyenne tient compte des proportions, qu'elles soient supérieures ou inférieures. Les proportions y sont toujours considérées comme égales [...], par exemple il s'agit de 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ou de la triple proportion 1, 3, 9, 27, 81. Nous pourrions également définir la quadruple, la quintuple ou toute autre proportionnalité. [...] La moyenne harmonique se distingue des autres car elle n'est définie ni par ses différences ni par des proportions égales. Dans la moyenne harmonique, la valeur la plus grande est associée à la valeur la plus petite (comme quotient), puis on compare (ou égalise) la différence entre la valeur la plus grande et la valeur moyenne à la différence entre la valeur moyenne et la valeur la plus petite. Par exemple, soit 4, 5, 6 soit 2, 3, 6. Comme 6 est plus grand que 4, on considère son tiers (c'est-à-dire 2) ; comme 4 est plus grand que 3, on considère son quart (c'est-à-dire 1) ; comme 6 est plus grand que 3, on considère sa moitié (c'est-à-dire 3) ; comme 3 est plus grand 2, on considère son tiers (c'est-à-dire 1). »

le pion 36 était capturé (car 36 = 4 × 9), ou bien si les pions 4 et 8 étaient situés à côté du pion 12, ce dernier était capturé (car 12 = 4 + 8). De plus, certaines des conditions nécessaires pour terminer le jeu correspondaient aux trois moyennes de Boèce. Par exemple, réussir à placer sur des cases successives les pions 2 : 4 : 6 avec un pion de l'adversaire entre eux entraînait la fin de la partie. Pourquoi ? Parce que 4 est la moyenne arithmétique de 2 et 6.



Gravure de 1554 représentant le jeu de la rithmomachie.

BOÈCE MIS À JOUR

La numération actuelle permet d'exprimer les propriétés qu'utilisait Boèce pour définir les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique. Soient trois valeurs : a, b et c ; on suppose que a est la valeur la plus grande, b la valeur moyenne et c la valeur la plus petite. Elles sont donc inégales et $a > b > c$. On peut déjà anticiper que b sera la moyenne arithmétique, géométrique ou harmonique des deux autres valeurs. La moyenne arithmétique requiert que la différence entre les valeurs contiguës soit égale. Ainsi $a - b = b - c$. Cela est vérifié lorsque $b = (a + c) / 2$, comme on peut le déduire de l'équation précédente.

La moyenne géométrique requiert que les proportions entre les valeurs contiguës soient égales. Ainsi $a/b = b/c$. Cette égalité implique que $ac = bb$ et, par conséquent, $b = \sqrt{ac}$.

La moyenne harmonique requiert que, selon les mots de Boèce, le rapport entre la valeur supérieure et la valeur inférieure soit équivalent à la proportion entre, d'une part, la différence entre la valeur supérieure et la valeur moyenne et, d'autre part, la différence entre la valeur moyenne et la valeur inférieure. L'expression mathématique de ce rapport serait : $a/c = (a - b) / (b - c)$. On peut alors obtenir l'égalité $a (b - c) = c (a - b)$, à partir de laquelle on a également $ab - ac = ca - cb$; ou encore : $ab + cb = 2ac$. On peut isoler b pour obtenir $b = 2ac / (a + c)$, ce qui nous donne déjà une expression pour la moyenne harmonique, même si l'on rencontre plus souvent l'expression $b = 2 / (1/a + 1/c)$, obtenue à partir de l'équation précédente en divisant le numérateur et le dénominateur par ac.

Raymond Lulle

Dans son ouvrage *Ars Magna et Ultima*, Raymond Lulle présentait son système logique de démonstration des vérités scientifiques, dans le but de se doter des armes intellectuelles suffisantes pour discuter avec les musulmans, de façon objective,

Exemple de cercle lullien tiré de l'ouvrage Ars Magna *de Raymond Lulle.*

de la suprématie de la religion chrétienne. Il a en fait développé une logique de justification de ses propres raisonnements ! Parmi ses découvertes, le *cercle lullien* assimilait les concepts à des disques et permettait d'obtenir toutes les combinaisons correctes (considérées comme des déductions valables) à partir du cercle.

La logique de Lulle était novatrice dans le sens où elle reposait sur l'étude des propriétés des concepts ; par conséquent, elle pouvait être considérée comme une logique synthétique à un moment historiquement et intellectuellement dominé par la logique analytique. Ce point de vue différent intéressa des penseurs comme Giordano Bruno (1548-1600) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) qui réutilisèrent les idées de Lulle dans le cadre de la philosophie. Leibniz les employa dans son ouvrage majeur *Dissertation sur l'art combinatoire*, paru en 1666. Cette ligne de pensée est arrivée jusqu'à nos jours et c'est sur elle que reposent, à juste titre, les systèmes logiques à la base de nombreux outils informatiques actuels.

*Miniature tirée de l'*Ars Magna *de Raymond Lulle.*

LOGIQUE ANALYTIQUE ET LOGIQUE SYNTHÉTIQUE

Le philosophe Emmanuel Kant (1724-1804) expliqua la distinction entre logique synthétique et analytique dans son ouvrage *Critique de la raison pure*. Cette différence est basée sur la dichotomie entre les cas où le concept du prédicat est contenu dans le concept du sujet et les cas où il ne l'est pas. On dit d'une proposition qu'elle est analytique lorsque le concept du prédicat est contenu dans le concept du sujet, et qu'elle est synthétique dans le cas contraire. Par exemple, la proposition « tous les triangles ont trois côtés » est analytique parce que le fait d'avoir trois côtés est contenu dans la définition du triangle. Lorsque ce n'est pas le cas, la proposition est synthétique, comme par exemple « certains professeurs notent très sévèrement ». En 1951, l'Américain Willard van Orman Quine (1908-2000), philosophe et maître de Noam Chomsky, osa se lancer dans l'étude de cette distinction.

Outre son raisonnement logique, Raymond Lulle fut un précurseur dans de nombreux domaines des sciences modernes. Il développa par exemple un système électoral visant à organiser hiérarchiquement l'Église. Il décrit ce système dans son ouvrage *Blanquerna*, appliqué à l'élection d'une abbesse, et le développe sous sa forme académique dans *Ars Electionis* et *Artifitium Electionis Personarum*. Ses idées dans ce domaine eurent une grande influence sur le cardinal Nicolas de Cues (1401-1464), philosophe et théologien, considéré comme le père de la philosophie allemande. En fait, les systèmes d'élection qu'ils proposèrent tous deux donnèrent lieu aux systèmes modernes : le système électoral de Lulle remplit les critères du système de Condorcet de 1785 et celui de Cues s'apparente au système de vote de Borda de 1770. Tous ces systèmes cherchaient à sélectionner l'élément préféré d'un groupe de personnes, à partir des préférences de chacun des membres.

L'introduction des chiffres arabes

Trouvant sa lointaine origine en Inde, le système de numération que nous connaissons aujourd'hui fut introduit en Europe par les musulmans qui venaient d'Afrique du Nord, ce qui explique son appellation de « chiffres arabes ». Le système fut normalisé et développé par le sage perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi.

Gerbert d'Aurillac, pape sous le nom de Sylvestre II, joua un rôle primordial dans le processus, en favorisant la ré-introduction de l'abaque en Europe et en soutenant l'usage des chiffres arabes. L'abaque de Gerbert était un instrument modernisé qui, à la différence des abaques romains, était basé sur neuf symboles numériques et représentait le zéro par une colonne vide. Son usage se généralisa en Europe au XIe siècle, même si l'abaque à chiffres arabes ne remplaça pas celui à chiffres romains, car on considérait alors que l'abaque était une simple méthode de calcul et que les résultats ne pouvaient être écrits qu'en chiffres romains.

C'est à Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi que l'on doit avant tout la diffusion des chiffres arabes. Son ouvrage majeur est *Hisāb al-ŷabr wa'l muqābala* (*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*). Il s'agit d'un texte antérieur et beaucoup plus important que les *Principes du calcul indien* de Kūshyār ibn Labbān, dont aucune version en arabe n'a malheureusement été conservée, seules subsistant des versions ultérieures en latin datant du XIIe et du XIIIe siècle. L'importance de ses apports dans l'histoire des mathématiques se perçoit déjà dans le titre : *al-ŷabr* donnerait naissance au mot « algèbre » et le nom même de l'auteur produirait le terme « algorithme ».

GERBERT D'AURILLAC (946-1003)

Le futur pape Sylvestre II quitta l'abbaye Saint-Géraud d'Aurillac pour suivre le comte de Barcelone, Borrell II, jusqu'au monastère de Sainte-Marie de Ripoll, où il étudia les mathématiques pendant trois ans. À cette époque, il voyagea jusqu'à Cordoue et Séville où il apprit les mathématiques et l'astronomie auprès des Arabes et où, surtout, il fut convaincu de l'excellence de la numération que ces derniers utilisaient.

Gerbert d'Aurillac rédigea de nombreux ouvrages sur les mathématiques et l'astronomie, avant tout destinés au *quadrivium*, c'est-à-dire qu'il écrivait pour les étudiants, pas pour les érudits. Ses œuvres sont compilées dans le volume 139 de la *Patrologie latine*, collection qui regroupe les écrits des papes de Tertullien (160-220) à Innocent III (1160-1216). Outre la ré-introduction de l'abaque, Gerbert d'Aurillac popularisa la sphère armillaire à des fins pédagogiques.

Statue dédiée au pape Sylvestre II dans la commune d'Aurillac.

MUHAMMAD IBN MUSA AL-KHWARIZMI (780-850)

On en sait peu sur la vie de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi ; même son lieu de naissance est sujet à controverse. Mathématicien, astronome et géographe, al-Khwarizmi est considéré comme le père de l'algèbre et l'instigateur de notre système de numération. Il fit ses études puis travailla à la Maison de la sagesse de Bagdad, un institut de recherche et de traduction que l'on a parfois comparé à la bibliothèque d'Alexandrie. C'est là que furent compilées et traduites en arabe les grandes œuvres scientifiques et philosophiques grecques et indiennes. Le lieu disposait également d'un observatoire astronomique extrêmement performant pour l'époque. Al-Khwarizmi écrivit de nombreux ouvrages dont beaucoup furent d'une importance cruciale pour l'histoire des sciences. Il rédigea également une histoire politique. Son approche de la connaissance est si vaste qu'il est considéré comme l'un des grands sages de l'Antiquité.

Timbre à l'effigie de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi émis par l'Union soviétique en 1983.

En plus de son traité d'algèbre, il rédigea une arithmétique intitulée *Kitab al-Ŷamaa wa al-Tafriq bi Hisab al-Hind* (*Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien*), dans laquelle il décrivait le système indien de numération décimale de position ainsi que les méthodes de réalisation des principales opérations arithmétiques au moyen de ce système. Al-Khwarizmi fut sans doute le premier à utiliser le zéro comme indicateur de position, comme c'est le cas dans son ouvrage. Les traductions latines de cet ouvrage furent diffusées en Europe et énormément utilisées au cours des siècles suivants dans les universités européennes sous le titre *Algoritmi de Numero Indorum*.

La diffusion des chiffres arabes

L'introduction en Europe des chiffres arabes ne fut ni facile ni rapide et, bien entendu, elle ne fut pas exempte de polémiques. La ville de Florence interdit leur usage sous prétexte qu'ils facilitaient la falsification des résultats. Pendant plusieurs siècles, ils furent à l'origine de la querelle entre abacistes et algoristes. Ces derniers finirent par l'emporter, mais pas avant le milieu du XVIe siècle.

Les abacistes défendaient l'usage des chiffres romains, plus pratiques pour une utilisation avec les abaques. De leur côté, les algoristes s'appuyaient sur les chiffres arabes, plus difficiles à utiliser avec l'abaque, mais plus utiles sur le papier ; l'histoire les a appelés algoristes car les opérations sur papier sont algorithmiques dans le sens où l'on suit un algorithme pour les réaliser. Les partisans des deux bords diffusaient leurs propres traités : pour les uns, sur la façon d'utiliser l'abaque et pour les autres sur celle d'effectuer des opérations avec un papier et un crayon (ou des supports semblables, comme le parchemin ou l'ardoise). Les textes des abacistes accordaient peu d'importance au zéro et favorisaient la multiplication et la division comme opérations ; ils se concentraient également sur les fractions duodécimales. Pour les algoristes, comme le veut la logique, le zéro était d'une extrême utilité ; ils considéraient et favorisaient l'application de bien davantage d'opérations (addition, soustraction, multiplication, division, division et multiplication par deux, racines) et ils se concentraient sur les fractions sexagésimales.

Finalement, c'est l'argent qui a tranché. La balance commença à pencher du côté des algoristes en Italie où, peu à peu, il est devenu évident que les chiffres arabes étaient beaucoup plus utiles pour le commerce car leur utilisation sur le papier était beaucoup plus facile. L'enthousiasme italien pour les chiffres arabes contamina le reste de l'Europe : les nouvelles méthodes de calcul furent introduites en Allemagne en 1200, arrivèrent en France vers 1275 et atteignirent l'Angleterre en l'an 1300.

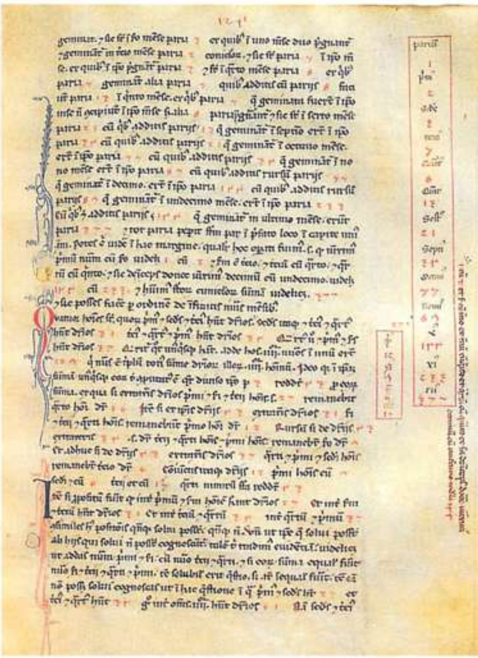
L'épicentre du tremblement de terre italien qui propagea les chiffres arabes, provoquant la révolution des mathématiques, a un nom : Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci. Le *Liber Abaci* (ou *Livre de l'abaque*) de Fibonacci exposait les applications commerciales de l'arithmétique et, pour cela, il présentait les chiffres arabes et les algorithmes permettant de les utiliser. Son but, comme l'expliquait la préface, était qu'ils soient employés en Italie, étant donnée leur grande utilité. Le *Livre de l'abaque* fut le premier livre écrit en Europe à utiliser les chiffres arabes.

Il dressa les fondations d'un nouveau genre d'ouvrages mathématiques qui devinrent les plus populaires du XIVe siècle à la moitié du XVIe siècle : les arithmétiques mercantiles, c'est-à-dire des traités d'arithmétique centrés sur des applications et des problèmes commerciaux. La prolifération de ces arithmétiques est associée au développement des écoles d'abaque, surtout en Italie. En 1340, il y avait à Florence six écoles d'abaque, qui regroupaient quelque 1 200 étudiants (ce qui est considérable si l'on sait que la ville comptait 100 000 habitants). Ces écoles, comme celle de Galigai à Florence sur laquelle nous possédons de nombreux documents, enseignaient l'arithmétique à des élèves de dix ou onze ans, pendant deux ou trois ans. Les élèves provenaient normalement d'une école de grammaire

LÉONARD DE PISE (1170–1250)

Léonard de Pise, dit *Fibonacci*, était le fils de Guglielmo Bonacci, commerçant italien de Béjaïa. *Fibonacci* est l'abréviation de *figlio di Bonacci*, ou « fils de Bonacci ». Auprès de son père, le jeune Léonard apprit le système de numération arabe et les opérations mais, par la suite, voulant élargir ses connaissances, il voyagea en Égypte, en Syrie et à Byzance où il approfondit l'étude des mathématiques arabes. Son œuvre écrite compile et expose la masse de connaissances qu'il acquit au cours de ses voyages. En plus de son ouvrage majeur *Liber Abaci*, on lui doit, entre autres, *Liber Quadratorum* (1225), traitant d'algèbre, et *Practica Geometriae* (1223).

où ils avaient appris à lire et à écrire dès l'âge de cinq ou sept ans. Après l'école d'abaque, vers treize ou quatorze ans, les élèves entraient comme apprentis dans des ateliers, des maisons de change, etc. Quelques élus pouvaient se dispenser de travailler et se consacraient alors à l'étude des classiques.



Page tirée du Liber Abaci *de Fibonacci.*

Les arithmétiques mercantiles et les écoles d'abaque influencèrent le développement mathématique de l'époque. Souvent, les auteurs des ouvrages ou les professeurs des écoles étaient appelés pour résoudre des problèmes pratiques, comme ce fut le cas pour Giovanni di Bartolo, professeur dans une école d'abaque de Florence, qui collabora par ses calculs à la construction de la coupole de la cathédrale en l'an 1420. Toutefois, cette activité mathématique pratique se produisait indépendamment de l'activité académique des universités. En réalité, il n'y avait quasiment aucune relation entre les professeurs des écoles d'abaque et les professeurs du cadre universitaire. La majorité des universités continuaient d'enseigner l'arithmétique classique de Boèce et les chiffres romains.

La propagation des chiffres arabes fut également favorisée par d'autres métiers liés au commerce. Ils étaient utilisés dans les manuels de commerce médiéval, comprenant des arithmétiques, comme les manuels italiens appelés *Pratice della mercatura.* Les plus connus sont le *Libro di divisamenti di apesi e di misure di mercantie*, de Francesco Balducci Pegolotti, publié au cours de la première moitié du XIVe siècle, celui d'Antonio da Uzzano (1442) et celui de Giorgio di Lorenzo Chiarini (1458).

Les arithmétiques mercantiles étaient très populaires, mais les livres de texte, en raison de leur coût élevé, n'étaient pas accessibles aux étudiants, même si ces ouvrages étaient liés aux écoles d'abaque, qui en ont peut-être utilisé quelques exemplaires. On pense que, en réalité, il s'agissait de livres de référence que l'on trouvait dans les établissements de commerce où, d'une certaine façon, ils légitimaient la profession commerciale. Le premier ouvrage imprimé de l'histoire et consacré aux mathématiques est l'*Arithmétique mercantile de Trévise*, ville italienne où il fut publié

LES MATHÉMATIQUES À L'ÉPOQUE DE LA TRANSITION

L'époque suivant la publication du *Livre de l'abaque* est considérée comme une étape de transition entre les deux systèmes, un changement de modèle. Les spécialistes ont tenté d'établir un classement dans la nébuleuse des livres et traités publiés à cette époque. Ils ont ainsi identifié quatre types d'ouvrages, reposant respectivement sur :

- Les traités théoriques, qui suivaient les écrits de Boèce.
- Les abaques arithmétiques, qui décrivaient le calcul au moyen d'abaques.
- Les algorithmes, qui utilisaient la numération arabe et expliquaient comment calculer sur du papier. Ils se basaient sur les travaux d'al-Khwarizmi.
- Les calculs, qui décrivaient les systèmes de calcul définissant le calendrier ecclésiastique.

L'IMPRIMERIE

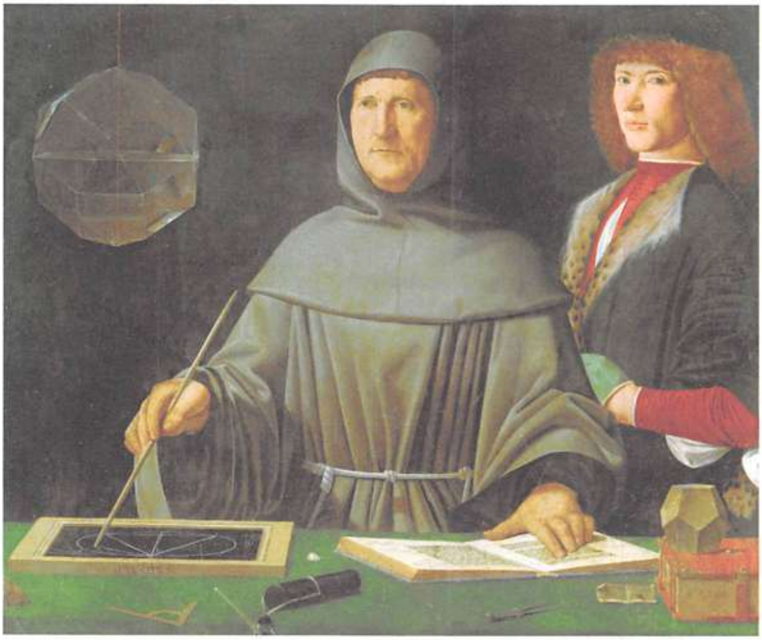
L'invention de l'imprimerie à caractères mobiles est attribuée à Johannes Gutenberg (1398-1468) qui, vers 1450, mit au point cette machine dans la ville allemande de Mayence. Les premiers textes furent imprimés ente 1449 ou 1450, lorsque fut édité le *Missel de Constance* (considéré comme le premier livre imprimé avec des caractères mobiles), et 1454 ou 1455, lorsque Gutenberg termina l'impression de la fameuse bible à 42 lignes, expression faisant référence au nombre de lignes de chaque page. Son nombre total de pages était de 1282 et elle comportait plusieurs volumes (normalement deux). Actuellement, on recense 48 copies de la bible de Gutenberg dont le prix, au moment de l'impression, équivalait à trois années de salaire d'un employé moyen. Malgré l'apport inouï et impossible à quantifier de l'imprimerie à caractères mobiles (en permettant l'impression massive de textes, elle est à l'origine d'une des plus profondes révolutions culturelles de l'histoire de l'humanité), Johannes Gutenberg mourut totalement ruiné.

Page tirée de la bible imprimée par Gutenberg.

en 1478. En deuxième position sur la liste, se trouve l'ouvrage *Summa de l'art d'aritmètica*, de Francesc Santcliment, publié à Barcelone en catalan en 1482, et qui fut le premier du genre imprimé dans la péninsule Ibérique. Le *Rechenbuch* d'Ulrich Wagner, publié à Bamberg (Bavière) en 1483, figure en troisième position.

Gravure extraite de Margarita philosophica *(1508) de Gregor Reisch, mettant en scène Boèce et Pythagore en pleine compétition de calcul sous la surveillance d'Arithmétique. Boèce, à gauche, calcule avec des chiffres arabes tandis que Pythagore utilise un abaque.*

En témoignage de la primauté accordée alors aux arithmétiques mercantiles sur les textes strictement mathématiques, l'ouvrage incontournable d'Euclide, *Éléments*, ne fut imprimé qu'en 1482, en version latine et sous le titre *Elementa Geometriae*. L'impression de *L'Institution arithmétique* de Boèce ne date que de 1488. La première algèbre imprimée est *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità* de Luca Pacioli, publiée à Venise en 1494. Cet ouvrage généra à son tour, pendant tout le XVI^{e} siècle, une longue série de textes explicatifs très populaires car nécessaires, le niveau de l'œuvre de Pacioli étant considérablement élevé. Néanmoins, et malgré l'importance de ces éditions, la majorité des livres publiés à cette époque étaient des arithmétiques mercantiles.



Portrait du mathématicien Luca Pacioli réalisé par Jacopo de' Barbari (Jacques de Barbary) vers 1496.

UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE COMMERCIALE

Le manuscrit 102 (A. III 27) de la Biblioteca degli Intronati de Sienne est l'un des quatre manuscrits consacrés à l'arithmétique commerciale antérieurs à l'an 1500 et étant arrivés jusqu'à nos jours. Il y figure le problème suivant, que nous reproduisons à titre d'exemple : « Si vous voulez savoir combien d'argent un homme a en poche, procédez ainsi : supposez qu'il ait 4 sous ; dites-lui de les doubler, ce qui fera 8, puis d'ajouter 5, ce qui donnera 13. Ensuite, demandez-lui de multiplier ce total par 5, ce qui fera 65, puis d'ajouter 10, ce qui donnera 75. Ensuite, dites-lui de multiplier par 10, pour faire 750. Enfin, dites-lui de retirer 350 et il obtiendra 400, ce qui vous donnera 4, puisque chaque centaine correspond à un chiffre. »

Les fractions et les décimales

Quand les chiffres arabes sont arrivés en Occident, ils ne représentaient que des entiers. Les nombres fractionnaires continuaient d'être représentés en base sexagésimale, comme chez les Babyloniens. Kūshyār ibn Labbān décrit cette procédure dans son ouvrage *Principes du calcul indien*, en représentant les nombres sous forme de degrés : 1/60 comme minutes (*daqā'iq*), 1/(60^2) comme secondes (*thawānī*), 1/(60^3) comme tierces (*thawālith*), 1/(60^4) comme quartes (*rawābi'*), etc. Les mesures étaient déjà représentées par les symboles qui nous semblent si familiers aujourd'hui : les degrés étaient représentés par °, les minutes par ', les secondes par ", les tierces par '''...

Ce n'est qu'au XVI^e siècle que Simon Stevin écrivit un traité dans lequel il soulignait l'importance de la notation décimale, y compris dans les fractions, et qu'il entreprit une campagne en sa faveur auprès des autorités de l'époque. Avant Stevin, la notation décimale avait déjà était utilisée pour les fractions, mais ne s'était pas généralisée. Le mathématicien et astronome persan Ghiyath al-Kashi (1380-1429), de la grande académie de Samarcande, l'utilisait déjà un siècle auparavant dans ses importants travaux sur la trigonométrie et le calcul du nombre π. Al-Kashi connaissait également ce que l'on a appelé le triangle de Pascal ou de Tartaglia.

SIMON STEVIN

Le mathématicien, ingénieur, physicien et même sémioticien flamand Simon Stevin (1548-1620) publia en 1585 *De Thiende* (*La Dîme*), traité qui étudiait la notation décimale et la façon de réaliser des calculs avec cette dernière. Il fut le premier mathématicien à reconnaître la validité des nombres négatifs, en les acceptant comme résultats des problèmes sur lesquels il travaillait. Il développa également l'algorithme permettant d'obtenir le plus grand commun diviseur de deux polynômes. Il rédigea toute son œuvre en néerlandais afin de pouvoir être compris des artisans, ce qui rendit ses textes très populaires et facilita leur vente, favorisant ainsi la propagation de la notation décimale.

Le nombre π

Comme nous l'avons déjà mentionné, le persan al-Kashi participa également au calcul des décimales de π. Si Zu Chongzhi les avait calculées en utilisant un polygone régulier à 12 288 = 3×2^{12} côtés, al-Kashi le fit avec un polygone à 805 306 368 = 3×2^{28} côtés, ce qui lui permit d'obtenir 14 décimales correctes, vers l'an 1430.

Les mathématiciens al-Kashi et Ludolph van Ceulen calculèrent des décimales du nombre π jusqu'alors inconnues.

Le professeur de l'université de Leyde, Ludolph van Ceulen, poursuivit les calculs d'al-Kashi et, en 1596, il obtint 20 décimales exactes avec un polygone à 515 396 075 520 = 60×2^{33} côtés. Plus tard, en 1615, il calcula 35 décimales exactes avec un polygone à 4 611 686 018 427 387 904 = 2^{62} côtés.

Le système de calcul du nombre π avec des polygones donnait de bons résultats et permettait de trouver de nombreuses décimales, mais de nombreux mathématiciens pensaient qu'il devait être possible de trouver des alternatives plus efficaces. Il fut envisagé la possibilité de trouver π comme résultat de l'addition

FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)

Viète était avocat, parlementaire et surtout mathématicien reconnu, le premier à représenter les paramètres d'une équation par des lettres. Il se distingua notamment dans le déchiffrage de codes secrets grâce à des techniques statistiques. Il sut notamment déchiffrer le très complexe code espagnol, ce qui donna l'avantage aux Français lors des guerres contre l'Espagne. Peu avant sa mort, il écrivit un mémoire sur la cryptographie qui rendit caduques toutes les méthodes de chiffrement de l'époque.

ou de la multiplication d'une série de termes infinis. Le premier à trouver une expression de ce style en Europe fut François Viète, l'un des pères de l'algèbre moderne, qui ne connaissait pourtant pas l'expression de Madhava de Sangamagrama abordée au chapitre précédent. La formule de Viète se basait sur un produit de termes infinis qui partaient de la racine carrée de 2. Même si elle ne permettait pas de trouver facilement les décimales de π, elle ouvrit de nouvelles voies pour s'approcher au plus près du nombre inaccessible avec un plus grand nombre de décimales. Dans tous les cas, il s'agit du premier produit infini de l'histoire des mathématiques à donner une expression de π. Cette expression était la suivante :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdots$$

Chapitre 3

Les premiers instruments mécaniques de calcul

L'introduction des chiffres arabes permit d'améliorer le calcul et la science humaine poursuivit son évolution. Au XVII^e siècle, un long processus produisit des changements décisifs au niveau de la vision de l'univers, de la méthode scientifique et de la conception même de la science occidentale. Souvent qualifié de « révolution scientifique », ce moment ouvrit la porte au siècle des Lumières, dès le XVIII^e siècle. La pensée humaine évoluait très rapidement. La science engendrait de nouveaux calculs et encourageait le développement d'instruments toujours plus puissants, sophistiqués et précis pour les faire. Le calcul manuel étant toujours susceptible de contenir des erreurs, le désir de diminuer le plus possible l'intervention humaine en vue de les éviter stimulait la mécanisation des instruments de calcul. C'est ainsi que la construction des premiers instruments mécaniques de calcul s'étala sur 300 ans, du XVII^e au XIX^e siècle.

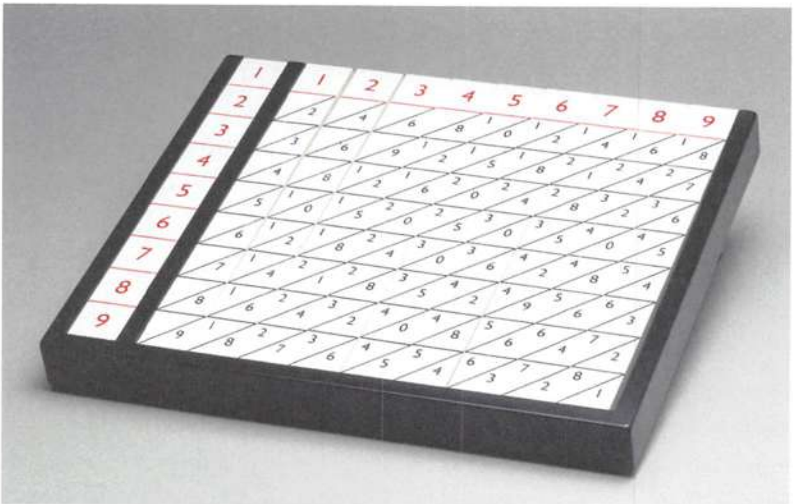
Le XVII^e siècle

En 1617, le mathématicien écossais John Neper (ou Napier) inventa l'un des premiers outils de calcul, un boulier connu sous le nom « les os de Neper ». Cet instrument se révéla si efficace qu'il fut utilisé jusqu'au début du XX^e siècle.

JOHN NEPER (1550-1617)

Le mathématicien John Neper découvrit la théorie des logarithmes, qu'il appela « nombres artificiels », et donna son nom aux logarithmes népériens. Très intéressé par la théologie, il appliqua le formalisme mathématique pour interpréter l'*Apocalypse selon saint Jean*, ce qui lui permit de calculer que la fin du monde se produirait entre 1688 et 1700.

Les os de Neper étaient basés sur un concept en réalité très simple puisqu'ils constituaient une sorte de table de multiplication. Il s'agissait de 10 bâtons de bois, quadrangulaires, numérotés de 0 à 9, et qui comprenaient 9 espaces dans lesquels se trouvaient les 9 multiples du nombre exprimés au moyen de deux chiffres séparés par une barre inclinée, comme l'indique la figure.



Reconstruction moderne des os de Neper.

Voyons un exemple du fonctionnement de cet instrument : considérons la multiplication de 35 672, un nombre qui permet de jouer avec tous les bâtons. Il faut placer en séquence les bâtons correspondant aux cinq chiffres du nombre, autrement dit d'abord le bâton portant le chiffre 3, puis celui portant le 5, puis le 6, le 7 et enfin, le 2. La simple observation des bâtons dans cette disposition montre toutes les possibilités de multiplication de 35 672 par n'importe quel chiffre de 1 à 9, qui apparaissent dans chaque rangée. Et donc, pour multiplier 35 672 par 4, il suffit de prendre les nombres se trouvant dans la rangée 4, lesquels, dans notre cas, correspondent à :

1/2 2/0 2/4 2/8 0/8.

On additionne alors les nombres contigus situés entre les divisions inclinées :

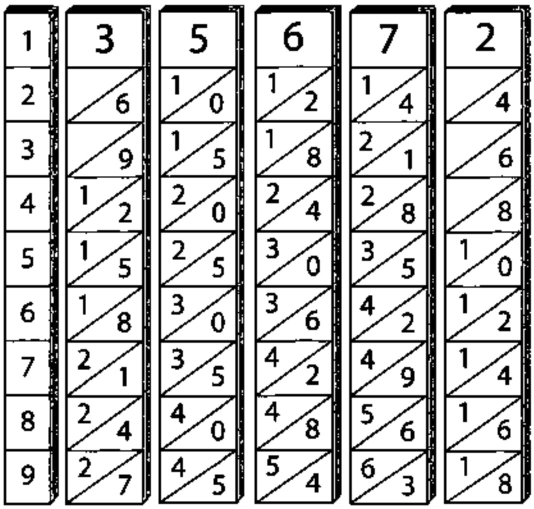
1/2 + 2/0 + 2/4 + 2/8 + 0/8.

On obtient :

1 / 4 / 2 / 6 / 8 / 8.

Soit 142 688. Ce résultat peut être vérifié à la main ou à l'aide d'une calculatrice ; en tout cas, il correspond au produit de 35 672 par 4 :

$$35\,672 \times 4 = 142\,688.$$



Les os de Neper utilisés pour multiplier 35 672 par 4.

Dans le cas de la multiplication par des nombres composés de plusieurs chiffres, l'opération est la même que celle que l'on réalise de nos jours : on multiplie chaque chiffre du deuxième nombre par le premier nombre puis on fait la somme. Pour obtenir les multiplications partielles, on applique le système de base. Notons que toutes les multiplications partielles nécessaires se trouvent dans les mêmes planchettes. Par exemple, pour multiplier 35 672 par 436, on fait les calculs précédents pour les rangées 4, 3 et 6 des planchettes. Elles nous donneront les nombres suivants, lesquels devront être présentés alignés conformément aux divisions inclinées des planchettes :

1/2 2/0 2/4 2/8 0/8
0/9 1/5 1/8 2/1 0/6
1/8 3/0 3/6 4/2 1/2.

Les nombres étant ainsi disposés, il est possible de réaliser la multiplication de 35 672 par 436 en faisant la somme des résultats des multiplications partielles comme suit : on place d'abord les résultats des multiplications partielles puis les sommes partielles selon les dispositions en diagonale et enfin, la propagation des retenues.

```
1/2 2/0 2/4 2/8 0/8
    0/9 1/5 1/8 2/1 0/6
        1/8 3/0 3/6 4/2 1/2
-----------------------------
1 / 4 / 13 / 23 / 21 / 19 / 9 / 2
-----------------------------
1 / 5 / 5 / 5 / 2 / 9 / 9 / 2
```

Si on réalise l'opération à l'aide d'une calculatrice, on peut vérifier encore une fois que le résultat est parfaitement correct :

$$35\,672 \times 436 = 15\,552\,992.$$

On peut voir que les rangées calculées correspondent à celles que l'on obtiendrait avec l'algorithme de multiplication que nous connaissons aujourd'hui. Les résultats partiels sont :

$$\begin{array}{r} 35672 \\ \times \quad 436 \\ \hline 214032 \\ 107016 \\ 142688 \\ \hline 15552992 \end{array}$$

Toutefois, les os de Neper ne servent pas qu'à réaliser des multiplications. La division d'un nombre composé de plusieurs chiffres par un autre s'effectue en plaçant les planchettes correspondant aux chiffres du diviseur. Les multiples du diviseur apparaissant alors dans les différentes lignes des planchettes, on peut déterminer plus facilement les chiffres du résultat.

John Neper est également le père d'une autre découverte d'une importance capitale pour le calcul : les logarithmes. Le mathématicien écossais découvrit que les logarithmes pouvaient simplifier les opérations les plus complexes. La multiplication se transformait en addition, la division se convertissait en soustraction, l'exponentiation en multiplication et les racines en divisions. Cette simplification du calcul, fondamentale pour la réalisation d'opérations complexes manuelles, donna un coup de pouce décisif à la science des mathématiques.

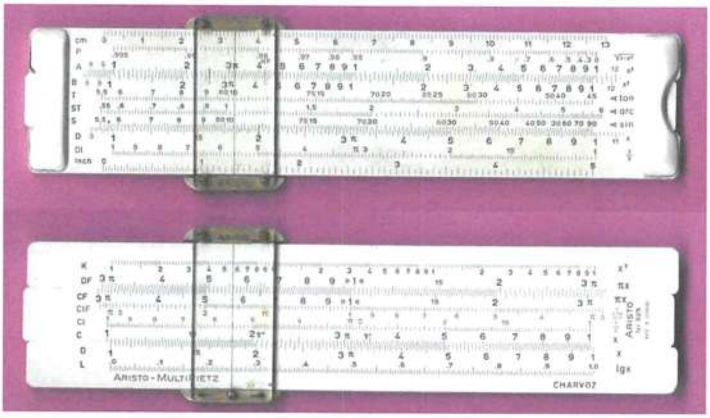
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b),$$
$$\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b),$$
$$\ln(a^b) = b\ln(a).$$

En conséquence, pour calculer ab, il suffit de calculer $e^{\log(a)+\log(b)}$.

Les logarithmes ont servi de base pour la règle à calcul, autre instrument de calcul développé par le britannique William Oughtred (1574-1660), qui introduisit le symbole × pour la multiplication et *sin* et *cos* pour les fonctions sinus et cosinus. Ce mathématicien travailla à partir d'un outil précédemment mis au point par Edmund Gunter, un instrument qui utilisait une seule échelle logarithmique, tandis que les règles à calcul juxtaposaient deux de ces outils. Plus tard, en 1859, le Français Amédée Mannheim apporta les améliorations qui lui donnèrent sa forme moderne.

Portrait de William Oughtred,
considéré comme l'inventeur de la règle à calcul.

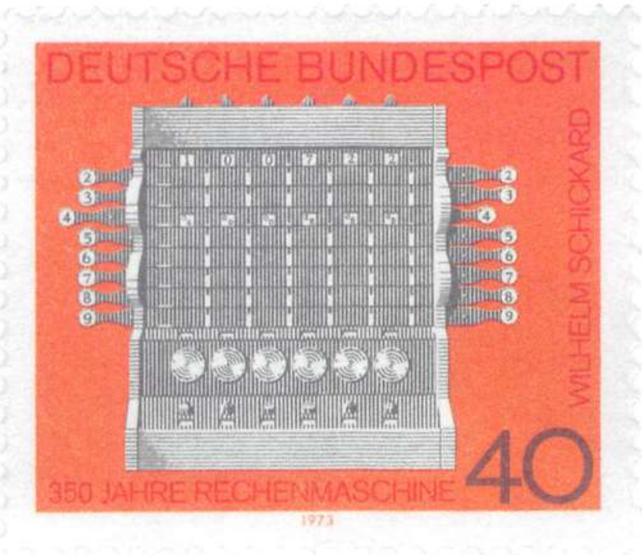
Les règles à calcul n'étaient pas utilisées pour faire des additions et des soustractions ; elles étaient plus adaptées, et c'était du reste leur principale utilité, pour la réalisation de multiplications et de divisions. Les plus modernes étaient même capables de calculer des racines, des fonctions trigonométriques, des exponentielles et des logarithmes. Notons toutefois que la précision de ce système était quelque peu limitée. Habituellement, on utilisait les trois chiffres les plus significatifs, mais certaines règles plus précises et plus grandes arrivaient à obtenir une meilleure précision. L'utilisateur devait tenir compte des grandeurs, celles-ci étant ignorées lors de l'utilisation de la règle. Les règles à calcul furent utilisées en tant qu'outil de calcul scientifique jusqu'à ce que le développement des calculatrices électroniques de poche les transformât en objets obsolètes à partir des années 1970.



Modèle de règle à calcul des années 1960 avant que ces outils ne soient rapidement remplacés par les calculatrices.

Les premières calculatrices

La première calculatrice électronique de poche fit son apparition en 1972, avec le célèbre modèle Hewlett-Packard HP-35. Jusqu'ici, ce livre a raconté l'évolution du calcul et son automatisation, autrement dit l'évolution de la base théorique qui a mené au résultat stupéfiant d'une petite calculatrice tenant dans une main, puis au développement de l'informatique qui contrôle aujourd'hui notre quotidien. Cependant, il est vrai que nous n'avons pas besoin d'aller jusqu'au XX^e^ siècle pour récolter le produit concret engendré par toute la théorie précédente. Ce qui est considéré comme la première calculatrice de l'histoire fut développé au XVII^e^ siècle, au moment de l'éclosion des instruments mécaniques de calcul. Appelée « horloge calculante », cette machine fut créée par Wilhelm Schickard (1592-1635) en 1623, à Tübingen.

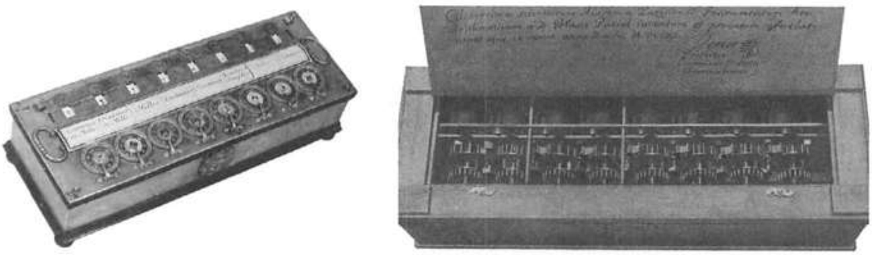


Timbre allemand dédié à l'« horloge calculante » de Wilhelm Schickard.

La première calculatrice au monde réalisait les quatre opérations arithmétiques de base. L'addition et la soustraction étaient faites de façon totalement mécanique, ce qui n'était pas le cas de la multiplication et de la division qui nécessitaient une intervention humaine pour les étapes intermédiaires. La machine fonctionnait au moyen d'éléments similaires aux os de Neper et faisait le report de retenue de façon mécanique grâce à une série de roues dentées qui augmentaient, par exemple, le compteur des dizaines lorsque le tour des unités était achevé. Cette procédure par roues était utilisée en Europe depuis le XVI^e siècle, notamment pour construire des podomètres permettant de compter le nombre de pas, et donc de déduire les distances parcourues. Le podomètre connu le plus ancien fut inventé par le Français Jean Fernel en 1525.

La calculatrice de Schickard eut un impact peu important dans l'histoire du calcul car son inventeur mourut, victime, semble-t-il, de l'un de ces terribles fléaux qui frappèrent l'Europe à cette époque. La machine se perdit et ne fut retrouvée qu'au XX^e siècle. Son existence fut révélée par les lettres échangées entre son inventeur et Johannes Kepler, avec qui il collabora. Comme ses lettres contenaient de nombreuses esquisses de sa machine, il fut possible de la reconstruire et de vérifier qu'elle fonctionnait réellement. Kepler affirma dans une lettre qu'il avait demandé une copie de la calculatrice à son ami et collaborateur Schickard.

La « Pascaline », la calculatrice inventée par Blaise Pascal, fut la première à entrer dans l'histoire par la grande porte. Le philosophe et génie mathématique la présenta au public en 1642 alors qu'il n'avait que 19 ans. Le mécanisme ressemblait à celui de Wilhelm Schickard : elle fonctionnait également en faisant un saut à l'unité supérieure à partir d'un tour complet de l'unité précédente. Malheureusement, ce système mécanique posait parfois des problèmes quand les roues dentées ne s'emboîtaient pas correctement.



La Pascaline inventée par Blaise Pascal.

On a pu vérifier que Pascal avait développé son invention indépendamment des évolutions de Wilhelm Schickard. De fait, la Pascaline, plus simple, ne servait qu'à faire des additions et des soustractions en tenant compte, pour la soustraction, du complément du nombre à soustraire. La première version pouvait fonctionner avec cinq chiffres (six pour la machine de Schickard), des versions avec plus de chiffres ayant été mises au point par la suite. Quelques calculatrices furent mises en vente, mais leur coût élevé se révéla être un obstacle au succès commercial pour la famille Pascal. Le rôle de la Pascaline fut réduit à celui de jouet, symbole de statut pour les écoles françaises et européennes aisées. Pascal poursuivit son travail d'amélioration du plan pendant toute une décennie, période au cours de laquelle il créa une cinquantaine de versions supplémentaires.

En dépit de leurs défauts et de leurs limites, la contribution de ces premières machines fut fondamentale. En effet, c'est à partir de leur apparition qu'émergea dans toute l'Europe une vague d'inventions qui encouragea mathématiciens et ingénieurs à essayer de concevoir et de construire davantage de calculatrices mécaniques, toujours de meilleure qualité. Certaines apportèrent des solutions techniques supérieures à celles de la Pascaline tandis que d'autres proposèrent de simples variations. L'Anglais Samuel Morland (1625-1695), par exemple, construisit une machine à calculer adaptée au système de devise anglais, non décimal, avec des cents, schillings et livres. À la différence de la Pascaline,

BLAISE PASCAL (1623-1662)

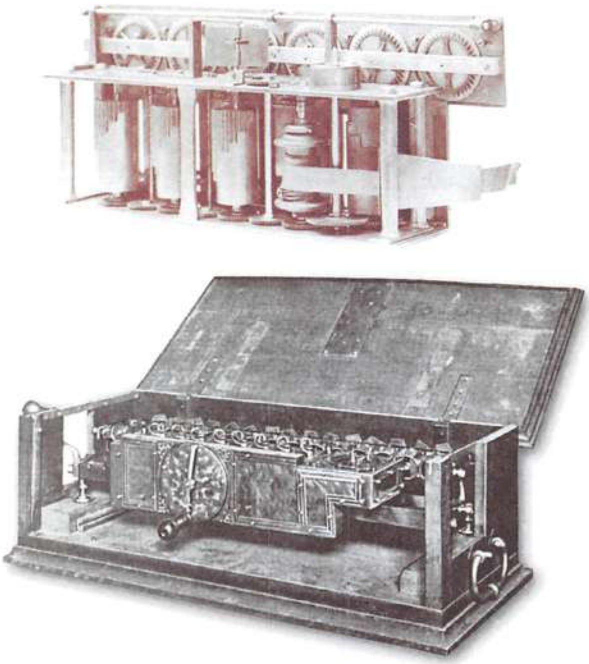
Le mathématicien, physicien, philosophe et théologien français Blaise Pascal est considéré comme le père des ordinateurs, aux côtés de Charles Babbage. Il fut un enfant prodige : à 11 ans seulement, il écrivit un petit traité sur les sons de corps en vibration et démontra, seul, que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. À 12 ans, il étudia Euclide et assista à des réunions avec les meilleurs mathématiciens et scientifiques d'Europe : Roberval, Desargues, Descartes lui-même... Il écrivit ses traités fondamentaux sur la géométrie projective à 16 ans à peine. Lorsque Descartes lut le manuscrit, il refusa de croire que l'auteur de cet ouvrage était un adolescent. Pascal fut un mathématicien et un physicien de premier ordre, dont les succès brillent de tout leur éclat dans le monde de la science contemporaine.

sa calculatrice n'effectuait pas automatiquement le report des retenues. Elle disposait d'une roue de reports pour chaque unité et l'utilisateur lui-même devait accumuler les reports une fois les sommes partielles terminées. La réussite de Morland fut la construction d'une calculatrice si petite qu'on pouvait l'emporter dans sa poche.

Le livre The Description and Use of two Arithmetick Instruments, *édité à Londres en 1673, décrit la machine à calculer inventée par Samuel Morland.*

La calculatrice développée par Gottfried Leibniz constitua une avancée importante par rapport à la machine de Pascal car elle permettait d'effectuer la multiplication de façon automatique. Jusque-là, la multiplication à l'aide d'une calculatrice était une opération qui nécessitait l'aide de l'utilisateur pour les étapes intermédiaires. Mais le problème demeurait toujours le même : les complications d'ordre technique faisaient que les machines ne fonctionnaient pas parfaitement. La précision des pièces était insuffisante pour que la machine soit dotée de la fiabilité nécessaire. Les améliorations apportées par Leibniz eurent néanmoins un fort impact sur les développements ultérieurs. Parmi elles, nous pouvons souligner les deux améliorations qui permirent de multiplier : l'engrenage de Leibniz, un cylindre qui supportait plusieurs engrenages dentés à des distances croissantes, et un chariot mobile. En fait, les améliorations techniques indispensables pour que ces machines soient véritablement viables et aient une raison d'être ne furent consolidées qu'en 1822 lorsque le Français Charles-Xavier Thomas de Colmar inventa puis commercialisa l'arithmomètre.

Cependant, les contributions de Leibniz allèrent bien au-delà de la construction d'une calculatrice mécanique peu précise. Son travail sur le système de numération



Le mécanisme interne de l'arithmomètre de Charles-Xavier Thomas de Colmar (en haut) et la calculatrice inventée par Gottfried Leibniz.

binaire, base de l'informatique moderne, fut essentiel. Ce système de numération avait déjà été étudié par l'Anglais Thomas Harriot (1560-1621), mais ses idées n'avaient pas été publiées. Le système de numération binaire n'utilise que deux chiffres, le 0 et le 1, à partir desquels sont représentés les nombres. Le tableau suivant montre la représentation binaire des nombres de 1 à 16.

0 = 0 decimal	100 = 4 decimal	1000 = 8 decimal	1100 = 12 decimal
1 = 1 decimal	101 = 5 decimal	1001 = 9 decimal	1101 = 13 decimal
10 = 2 decimal	110 = 6 decimal	1010 = 10 decimal	1110 = 14 decimal
11 = 3 decimal	111 = 7 decimal	1011 = 11 decimal	1111 = 15 decimal

L'influence de Leibniz ne se limita pas au calcul. Le philosophe allemand développa également de nombreux aspects liés à la logique. Ces aspects ne furent connus qu'après sa mort puisqu'il n'était apparemment pas du tout satisfait des résultats qu'il avait obtenus. En effet, il intitula l'un de ses travaux *Post tot logicas nondum Logica qualem desidero scripta est*, que l'on peut traduire par *Après tant de logiques, la logique*

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716)

Le penseur allemand Gottfried Leibniz fut l'un des trois grands rationalistes du XVIIe siècle, aux côtés de Descartes et de Spinoza. Mathématicien, logicien, philosophe, géologue, historien et spécialiste en droit, il apporta également d'importantes contributions à la technologie et anticipa des notions de biologie, médecine, psychologie et même des sciences de l'information. Il découvrit le calcul infinitésimal, indépendamment des travaux de Newton, et sa notation est celle qui s'utilise depuis lors. Il est impossible de faire le décompte de toutes ses prouesses, aucune édition complète de ses écrits, répartis dans des journaux, lettres et manuscrits, et certains non publiés, n'ayant été réalisée à ce jour. Leibniz établit un lien entre le système de représentation binaire et la création du monde : dans sa conception mathématisée du monde, inspirée de Pythagore, 0 représente le vide et 1, Dieu.

dont j'ai rêvé n'a pas encore été écrite. Son objectif en ce qui concerne la logique était de construire un calcul universel. Il voulait trouver un système capable de déterminer quels types d'inférences étaient valables d'un point de vue logique. Ce qui lui permettrait d'appliquer le calcul logique à des propositions scientifiques arbitraires. Il affirma dans l'un de ses ouvrages :

> « Si nous le réussissons, lorsque surgit la controverse, il ne sera plus besoin entre deux philosophes de discussions plus longues qu'entre deux mathématiciens. Il suffira qu'ils saisissent leur plume, qu'ils s'asseyent à leur table de calcul (en faisant appel, s'ils le souhaitent, à un ami) et qu'ils se disent l'un à l'autre : calculons ! »

On peut voir l'influence du travail de Raymond Lulle sur ces idées. En effet, dans son *Dissertatio de Arte Combinatoria*, Leibniz s'est inspiré de l'*Ars Magna* de Lulle. Pour l'Allemand, on devait pouvoir se rapprocher de la connaissance divine au travers d'une combinaison de concepts de base. Ces concepts de base non définissables devraient être exprimés sous une forme mathématique et pourraient permettre d'obtenir des propositions justes au travers de règles déductives claires. Ces concepts et procédures sont à la base de la logique mathématique. Leibniz considérait qu'il existait une relation très étroite entre la logique, les mathématiques et la métaphysique. Il assurait : « Ma métaphysique est toute mathématique », et encore : « J'ai reconnu que la vraie métaphysique n'est guère différente de la vraie logique. »

De nouvelles expressions pour calculer le nombre π

Tout au long du XVIIe siècle, les chercheurs reprirent le calcul du nombre π au moyen des séries infinies au point où l'avait laissé François Viète. Parmi eux figure l'Anglais John Wallis (1616-1703) de l'université d'Oxford. Dans son ouvrage *Arithmetica Infinitorum*, publié en 1655, Wallis décrivit plusieurs expressions d'intégrales qui lui permirent d'obtenir l'expression du nombre π suivante :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} \times \ \dots$$

À partir de cette expression, le mathématicien William Brouncker (1620-1684), premier président de la Royal Society, élabora en 1658 la formule suivante :

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\dots}}}}}.$$

L'expression importante suivante, connue en Europe, provenait de l'extérieur de ses frontières. Il s'agissait de l'expression de Madhava de Sangamagrama, que Leibniz redécouvrit en 1671 à partir de la formule de l'arc tangente de James Gregory. Rappelons que ses termes étaient :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} + \ldots$$

et qu'elle était obtenue à partir de l'expression de la fonction arc tangente :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Le XVIII^e^ siècle

Le XVIIIe siècle est resté dans l'histoire comme le siècle des Lumières. Cependant, sur le plan du calcul, ce siècle n'a connu aucune avancée supérieure à celles du siècle précédent. Peut-être la science du XVIIe siècle avait-elle été tellement brillante que l'homme était ébloui par tout ce qu'elle avait mis en lumière et peut-être avait-il suffisamment de travail à faire avec l'étude et l'appréciation de ce qui lui avait été révélé. Quoiqu'il en soit, pendant cette période, les travaux sur le calcul, la logique et le calcul du nombre π se poursuivirent dans la ligne de ce qui avait été obtenu au XVIIe siècle.

Le calcul du nombre π au XVIIIe siècle

Le XVIIIe siècle apporta quelques nouvelles expressions pour le calcul du nombre π. La première, fruit des travaux de l'astronome John Machin (1680-1751), conserva son hégémonie pendant des siècles, y compris en pleine ère informatique. Machin étudia la fonction arc tangente et découvrit, en utilisant la formule de Gregory, Leibniz et Madhava, que l'angle dont l'arc tangente est 1/5 pouvait s'exprimer comme suit :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} - \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^7}{5} + \dots$$

À partir de l'arc tangente de l'angle $4\alpha - \pi/4$, il bâtit une série pour calculer le nombre π basée sur l'inverse de la cotangente. Cette série convergeait plus rapidement que les séries précédentes. Et c'est ainsi que le mathématicien anglais réussit à calculer 100 décimales du nombre π. La série correspondait à :

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Cette expression est décrite au moyen de la série suivante :

$$\frac{\pi}{4} = 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times5^3} + \frac{1}{5\times5^5} - \frac{1}{7\times5^7} + \dots\right] - \left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times239^3} + \frac{1}{5\times239^5} - \dots\right].$$

Leonhard Euler contribua également au développement de séries destinées au calcul de décimales du nombre π. Grâce à l'une de ses expressions, il calcula 20 décimales de π en moins d'une demi-heure.

LEONHARD EULER (1707–1783)

Le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler est considéré comme le principal mathématicien du XVIII^e siècle et comme l'un des plus grands. Il fit des découvertes essentielles dans les domaines du calcul infinitésimal et de la théorie des graphes. Il introduisit une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, notamment dans le domaine de l'analyse (la notion de fonction mathématique, par exemple). Il est connu, en outre, pour ses travaux importants en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Auteur prolifique, on estime ses œuvres à 60, voire 80 volumes.

LE SYMBOLE π

L'utilisation de la lettre grecque pi (π) pour désigner le nombre π fut généralisée par Leonhard Euler dans son livre *Introductio in analysim infinitorum* de 1748, où il l'utilisa pour *periphéreia*, mot grec voulant dire « circonférence ». Euler introduisit d'autres symboles très populaires et utilisés dans les mathématiques actuelles : la lettre *e* pour représenter la base du logarithme naturel, la lettre *i* pour la racine carrée de -1, le symbole Σ pour la somme dans des séries et Δ pour une différence finie.

La logique

Si la recherche au XVIII[e] siècle n'engendra pas d'avancées significatives dans le domaine de la logique, il est indéniable que Kant apporta des éléments clés pour son développement postérieur, quoique de façon indirecte. En effet, les idées de Kant amenèrent la philosophie jusqu'au positivisme logique et à la philosophie analytique. Des années plus tard, ce furent Frege, Hilbert, Russell et Gödel qui apportèrent les contributions les plus importantes à la logique.

Le philosophe allemand Emmanuel Kant (1724-1804) établit les fondements de trois des caractéristiques principales de la logique moderne : la distinction entre concept et objet, la supériorité de la proposition en tant qu'unité d'analyse logique et la conception de la logique pour étudier la structure des systèmes logiques et non pas uniquement pour valider les inférences individuelles.

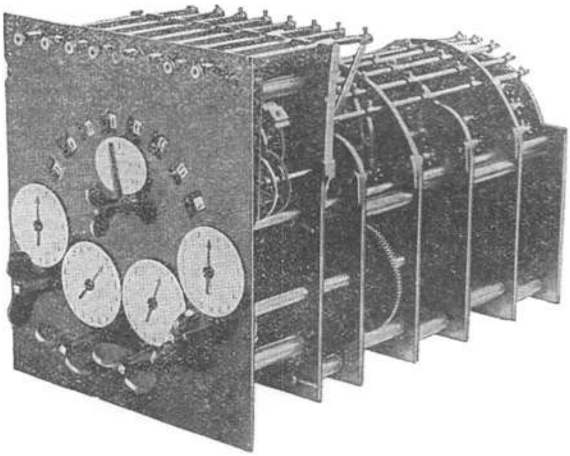
Professeur de logique et de métaphysique à l'université de Königsberg, sa ville natale, Emmanuel Kant est l'un des principaux penseurs de toute l'histoire de la philosophie. Ses études embrassèrent les domaines les plus variés, comme le droit ou la statistique, et se révélèrent très importantes en logique.

DISTINCTION ENTRE CONCEPT ET OBJET

Selon Gottlob Frege (1848-1925), tout énoncé ou proposition est composé d'un terme qui dénote un objet et d'un prédicat qui dénote un concept. Par exemple : dans l'expression « Socrate est un philosophe », « Socrate » est l'objet et « philosophe » est le concept d'être un philosophe. Ce point de vue se distinguait substantiellement de tout ce qui était admis jusque-là, puisque l'on considérait que toute proposition était composée de deux termes liés par le verbe être. La nouvelle façon de voir le lien concept-objet fut le point de départ de la compréhension des ensembles et de la relation d'appartenance élément-ensemble.

Le XIXᵉ siècle : quelques éléments de calcul

La première calculatrice à être commercialisée fut l'arithmomètre du Français Charles-Xavier Thomas de Colmar (1785-1870), qui remporta un vif succès en France mais aussi dans d'autres pays. La concurrence surgit immédiatement et plusieurs modèles alternatifs furent construits en quelques années seulement. Parmi les plus importants, citons la calculatrice Arithmaurel du Français Timoléon Maurel (1842), la calculatrice à roue dentée de l'Américain Frank Baldwin (1872), également développée de son côté par le Suédois établi à Saint-Pétersbourg Willgot Odhner (1874) et la calculatrice circulaire de l'Anglais Joseph Edmonson (1885). Toutes ces machines furent utilisées jusqu'à une date bien avancée du XXᵉ siècle.



Le mécanisme de l'Arithmaurel, la calculatrice inventée par Timoléon Maurel.

À partir de la machine de Maurel, les calculatrices introduisirent les racines carrées en plus des opérations arithmétiques de base. L'opération racine carrée se basait sur le développement suivant pour le carré x^2 :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2x - 1) = x^2.$$

Étant donné un nombre n qui est un carré parfait ; la racine carrée de n peut être obtenue au moyen de la soustraction successive de 1, 3, 5... jusqu'à arriver au nombre zéro. Le nombre de soustractions réalisées correspond à la racine carrée du nombre. Par exemple, si nous prenons la racine carrée de 100, on soustrait 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 ; comme on soustrait 10 nombres, la racine carrée de 100 est 10.

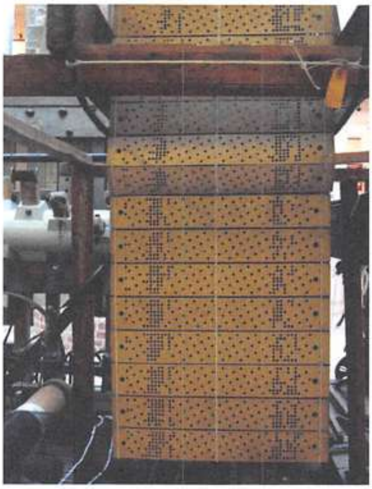
Lorsque n n'est pas un carré parfait, la dernière soustraction donne un nombre négatif. Le nombre de soustractions est une approximation de la racine carrée. Pour avoir les décimales, on peut multiplier par des puissances de 100 pour chaque décimale que l'on souhaite obtenir. Par exemple, en multipliant 2 par 100 pour calculer la racine carrée de 200, on obtient une décimale. Autrement dit,

$$\begin{aligned}&1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 \\ &= 196 < 200 < 225 \\ &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29.\end{aligned}$$

Nous observons 14 additions dans la première expression et 15 dans la seconde. La racine carrée de 200 se situe donc entre 14 et 15, et celle de 2 entre 1,4 et 1,5.

Le XIXe siècle connut des avancées scientifiques qui préparèrent le terrain pour l'informatique d'aujourd'hui. En 1835, le physicien américain Joseph Henry inventa le relais électromécanique, ce qui constitua un important pas en avant vers la création des ordinateurs. Par ailleurs, une autre avancée, beaucoup plus spécifique celle-là, fut l'apparition du clavier, qui préfigura la partie essentielle de l'interface dont les ordinateurs allaient être dotés plus tard. Jusque-là, pour introduire les nombres, les calculatrices utilisaient des méthodes qui multipliaient la durée des opérations et demandaient de surcroît un certain entraînement en calcul. Le clavier permit de réduire la durée de l'opération et mit la calculatrice à la portée de tous.

Avec la mise en place progressive des solutions industrielles qui allaient se matérialiser en révolution industrielle, le calcul automatique commença à se développer parallèlement au processus d'automatisation de l'industrie textile, qui « alimenta », grâce à ses ressources et à des équipements toujours plus perfectionnés, les machines à calculer et les ordinateurs. En 1725, le Français Basile Bouchon avait lancé les techniques de programmation des métiers avec un ruban perforé contenant les informations relatives aux patrons. Le ruban élaborait peu à peu le tissu. Peu de temps après, son assistant Jean-Baptiste Falcon perfectionna le système et remplaça le ruban par un système de cartes perforées. En 1803, Joseph Marie Jacquard (1752-1834) développa un système basé sur le dessin de l'ingénieur Jacques de Vaucanson, qui, en 1740, avait utilisé des cartes et un tambour rotatif pour produire des tissus de façon automatique avec un unique opérateur. C'est ainsi que naquit le fameux tissu Jacquard. Le système des cartes perforées, le plus efficace jusque-là, poursuivit son évolution et finit par aboutir, comme le raconte la culture populaire du XX^e^ siècle, aux ordinateurs. Le statisticien Herman Hollerith (1860-1929) utilisa ainsi les cartes perforées pour codifier les données du recensement américain de 1890. À ce titre, il est considéré comme le premier informaticien, autrement dit le premier qui a réussi à traiter de façon automatique des informations. Le mot « informatique » est la réunion des mots « information » et « automatique ».



Cartes perforées sur le métier Jacquard exposé au musée de la Science et de l'Industrie de Manchester.

Charles Babbage

Considéré comme le père de l'ordinateur, le philosophe, mathématicien et inventeur anglais Charles Babbage est l'un des personnages les plus brillants et les plus controversés de notre petite grande histoire. On pense qu'il est né dans les environs de Londres en 1791, son baptême ayant été enregistré le 6 janvier 1792 à Saint Mary Newington. Il étudia les mathématiques et la chimie, d'abord au Trinity College de Cambridge, où il entra en 1810, puis à Peterhouse (1812), un collège plus petit et moins prestigieux. On a raconté que Babbage décida de changer car deux de ses amis intimes au Trinity College, John Herschel et George Peacock, lui étaient supérieurs sur le plan intellectuel. À Peterhouse, il put obtenir, en 1814, son diplôme en étant premier de sa classe et un master en mathématiques en 1817.

Portrait de Charles Babbage réalisé par Samuel Laurence.

En 1812, Babbage, Herschel, Peacock et d'autres collègues fondèrent, sous la direction du professeur Robert Woodhouse, l'Analytical Society afin de s'opposer au calcul newtonien et de promouvoir le calcul analytique de Leibniz. Les deux activités les plus importantes de la société à cette époque furent la traduction à partir du français du livre de Sylvestre-François Lacroix *Traité de calcul différentiel et intégral* (1816) et l'introduction par Peacock de la notation de Leibniz dans certains examens (1817). Composé de trois volumes et traduit par Babbage, Herschel et Peacock, le livre de Lacroix fut largement diffusé en Angleterre. En 1819, la société devint la Cambridge Philosophical Society, nom sous lequel elle existe encore de nos jours.

La même année où il obtint son diplôme (1814), Babbage épousa Georgiana Whitmore, avec qui il eut huit enfants. Lorsque son père, son épouse et l'un de ses enfants au moins moururent en 1827, Babbage reçut en héritage des propriétés et une somme importante, mais il fut anéanti. Il suivit les conseils de son médecin et voyagea un an à travers l'Europe. À son retour, il occupa à Cambridge le poste de professeur qui avait appartenu à Newton. Considérant que le salaire était faible, il ne se rendait à l'université que lorsqu'il fallait évaluer les candidats du prix Smith décerné au meilleur étudiant de Cambridge. De ses huit enfants, seuls trois parvinrent à l'âge adulte.

Charles Babbage est passé dans l'histoire comme le concepteur des machines à calculer mécaniques. La première fut la machine à différences (*Difference Engine*) que le Britannique construisit pour calculer les valeurs d'un polynôme. La conception était basée sur les différences finies afin d'éviter la multiplication et la division. Financée par le gouvernement britannique, la construction de la machine démarra en 1822 mais le projet n'aboutit pas. Son développement fut abandonné en 1834 lorsque le financement s'acheva.

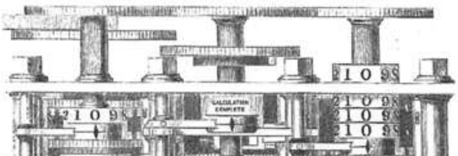


Illustration de la machine à différences de Charles Babbage apparue dans le magazine Harper's *en décembre 1864.*

Certains chercheurs ont défendu l'idée selon laquelle la machine de Babbage ne put être terminée car les moyens de l'époque ne le permettaient pas. Toutefois, les Suédois Per Georg Scheutz (1785-1873) et son fils Edvard construisirent, après avoir lu un article sur la machine à différences de Babbage, une machine qui fut présentée en 1843. Plus tard, en 1851, ils construisirent, avec l'aide de l'académie suédoise des Sciences, une machine plus grande, qui effectuait des calculs avec une précision de 15 décimales et disposait d'un système permettant d'imprimer les résultats.

Charles Babbage ne put achever sa machine, mais celle-ci fonctionnait. En 1991, le musée de la Science de Londres construisit, et acheva, le premier prototype de l'inventeur en utilisant la technologie de son époque. Un second prototype a été fabriqué et est exposé au musée de l'Histoire de l'informatique à Mountain View (Californie). La machine de Babbage a une précision de 31 chiffres, peut calculer des polynômes de degré 7, et mesure 2,4 × 2,1 × 0,9 m. La machine des Scheutz ne mesurait que 54 × 86 × 65 cm mais son modèle n'était capable de calculer que des polynômes de degré 3, avec une précision de 15 chiffres. En 2000, le musée de la Science de Londres construisit également l'imprimante que Babbage avait conçue pour sa machine.

Après avoir abandonné sa machine à différences en 1834, Babbage travailla sur la conception d'un nouvel appareil, qu'il appela *Analytical Engine*, l'ancêtre le plus direct de nos ordinateurs modernes. Si la machine à différences ne pouvait calculer que des polynômes, l'objectif de la machine analytique était plus général, autrement dit elle devait pouvoir calculer une fonction arbitraire. La nouvelle machine de Babbage était alimentée par de l'énergie générée par un moteur à vapeur. À l'entrée, se trouvaient des cartes perforées et à la sortie un système d'impression ainsi qu'un système de perforation de nouvelles cartes. Elle comprenait également une mémoire capable de stocker 1 000 nombres à 50 chiffres (décimales) ainsi qu'une unité arithmétique avec les quatre opérations essentielles que Babbage appela « le moulin » (*the mill*). Pour la programmer, on utilisait un langage spécifique, préfigurant les langages assembleurs actuels. Outre les instructions de base, ce langage permettait d'exécuter des boucles et des branchements conditionnels et de stocker. Du point de vue formel et mathématique, l'ensemble des opérations possibles prévues par Babbage dans son projet avait une puissance, ou capacité de calcul, équivalente à celle d'une machine de Turing, quoiqu'avec une durée de traitement qui n'est, bien sûr, pas comparable.

Pour le développement de la machine, Babbage put bénéficier d'une collaboration très spéciale, celle d'Ada Lovelace, fille de Lord Byron. Si ses contributions n'ont été reconnues que tardivement, Ada Lovelace est aujourd'hui considérée comme la première programmatrice informatique. En plus de programmer dans le langage

ADA BYRON, COMTESSE DE LOVELACE (1815-1852)

Ada Augusta Byron fut le seul enfant de Lord Byron et de son épouse Annabella Milbanke. L'enfant ne connut jamais le poète : ses parents se séparèrent un mois après sa naissance et Lord Byron abandonna l'Angleterre. Étant de santé fragile, un héritage de son père, elle fut éduquée à la maison, en particulier dans le domaine des mathématiques et des sciences, par des professeurs de renom tels que William Frend, William King, Mary Somerville et Augustus de Morgan. Ses maîtres étaient persuadés qu'elle pouvait être une chercheuse de premier ordre. Ce fut Mary Somerville qui la présenta à Charles Babbage. En reconnaissance de ses travaux pionniers dans le domaine de la programmation au travers des langages informatiques, le département de la Défense des États-Unis donna son nom au langage de programmation qu'il conçut en 1979 : le langage Ada.

de programmation de la machine analytique, elle déduisit et réussit à prévoir que la capacité des ordinateurs allait bien au-delà des simples calculs de nombres, aspect sur lequel Babbage lui-même se concentrait exclusivement.

L'histoire de leur collaboration débuta lorsque Babbage demanda à Ada Byron de traduire un texte que Luigi Menabrea avait écrit en français sur la machine analytique à la suite d'une conférence donnée par Babbage à Turin, sur invitation du mathématicien Giovanni Plana. Ada ajouta une série de notes personnelles à la traduction de Menabrea, qui multiplièrent la taille de l'article original. Entre autres contenus de grande importance pour l'histoire de l'informatique, la très célèbre note G décrivait comment calculer les nombres de Bernoulli dans le langage de programmation de la machine de Babbage en utilisant deux boucles qui démontraient la capacité de bifurcation de la machine. Ce fut le premier programme informatique de l'histoire. Ada décrivit également comment on pouvait calculer des fonctions trigonométriques contenant des variables.

L'AVENIR DANS LA NOTE G

Dans la note G, Ada Lovelace manifesta sa confiance en la machine de Babbage mais aussi en cette façon révolutionnaire de gérer l'information : « La machine analytique n'a pas de prétention à donner naissance à quoi que ce soit. Elle peut exécuter tout ce que nous savons lui ordonner d'exécuter. Elle peut suivre une analyse mais elle n'a pas le pouvoir d'anticiper des relations ou des vérités analytiques. Son rôle est de nous aider à rendre plus disponible ce que nous connaissons déjà. A priori, et en particulier, son effet se sentira sur ce terrain mais il est très probable qu'elle exerce une influence indirecte et réciproque sur la science elle-même, d'une autre façon. En distribuant et en combinant les certitudes et formules de l'analyse de telle façon qu'elles puissent devenir plus facilement et rapidement traitables par les combinaisons mécaniques de la machine, les relations et la nature de beaucoup de sujets scientifiques sont éclairées d'une nouvelle façon, et leur recherche peut être approfondie. Il s'agit peut-être d'une conséquence indirecte et quelque peu spéculative de cette invention, mais il ne fait aucun doute que cette nouvelle façon d'enregistrer et de travailler les certitudes mathématiques suggère de nouvelles perspectives, quoique dans l'état le plus théorique du sujet. Il y a toujours, dans tous les territoires du pouvoir humain et dans toute acquisition du savoir humain, diverses influences collatérales en plus de l'objectif principal. »

Certains chercheurs ont émis des doutes sur l'identité de l'auteur de la note G. Peut-être est-ce Babbage lui-même qui l'a écrite ? Dans tous les cas, il est indiscutable qu'Ada avait de grandes connaissances en mathématiques et qu'elle était familière avec le fonctionnement de la machine analytique. Sa collaboration avec l'inventeur fut si étroite qu'il est impossible de déterminer jusqu'à quel point elle eut une influence sur sa conception. En effet, Ada était une spécialiste du système des métiers à tisser Jacquard. Certains auteurs, et parfois ceux dont nous venons de parler, considèrent qu'elle fut à l'origine de l'idée d'utiliser les cartes perforées de cette machine pour l'entrée de programmes et de données. Ada a développé des concepts aussi familiers dans le monde des langages de programmation que les instructions, les boucles ou les sous-programmes. Babbage l'appelait « l'enchanteresse des nombres » (*the Enchantress of Numbers*) tant il était impressionné par ses connaissances et son talent.

La machine ne put être construite, cette fois pour des raisons financières, politiques et même légales. Quelques sections existèrent – des parties de l'unité arithmétique ou du système d'impression –, mais ni la mémoire ni aucune partie programmable ne furent développées. Ce n'est que 100 ans plus tard que furent construits des ordinateurs logiquement comparables. La machine analytique sombra dans l'oubli, sauf pour quelques inventeurs dont les réalisations furent influencées par ses puissants concepts.

En 1903, le comptable irlandais Percy Ludgate conçut une machine dotée de fonctionnalités similaires à celles de Babbage, mais mue par l'électricité et non par la vapeur. Leonardo Torres y Quevedo, ingénieur et mathématicien espagnol, et prolifique inventeur, se basa sur ces idées pour créer l'automate *El Ajedrecista* (Le Joueur d'échecs) en 1911. La machine électro-mécanique était capable de jouer les finales roi et tour contre roi contre un adversaire humain et d'assurer la victoire en un minimum de coups.

Plus tard, dans les années 1930, le scientifique américain Vannevar Bush construisit diverses machines destinées à résoudre les équations différentielles et conçut un ordinateur électronique numérique. Le premier ordinateur électromécanique, l'Harvard Mark I, développé entre 1939 et 1943 par l'ingénieur américain Howard Hathaway Aiken avec le soutien d'IBM, basait même ses 760 000 roues et 800 kilomètres de câbles sur les notions exposées par Babbage pour sa machine.

Si elle avait été construite, la machine analytique aurait mesuré 30 mètres de long, 10 mètres de large et 4,5 mètres de haut. Une addition aurait nécessité 3 secondes et une multiplication entre 2 et 4 minutes, en supposant que les données eussent déjà été introduites dans l'unité arithmétique. Amener les nombres jusqu'à l'unité arithmétique aurait pris 2,5 secondes.

Charles Babbage est également connu pour de nombreuses autres découvertes et contributions. Il effectua la cryptanalyse du chiffre de Vigenère, une variation du chiffre de Jules César, inventa le chasse-pierres des trains destiné à éliminer les obstacles se trouvant sur la voie et a même eu des influences dans le domaine de l'économie où il découvrit ce que l'on appelle aujourd'hui « le principe de Babbage ». Il proposa également l'affranchissement postal, utilisé aujourd'hui, et fut le premier à signaler que la largeur du cerne d'un arbre dépend de la météorologie de l'année correspondante de sorte qu'il est possible de déduire des climats passés en étudiant les arbres les plus âgés.

Toutefois, il ne se montra pas aussi brillant dans les domaines de la philosophie et de la théologie où il voulut également évoluer. Très croyant, il publia en 1837 le *Ninth Bridgewater Treatise* (*Le neuvième traité de Bridgewater*), qui faisait suite aux huit traités sur la théologie naturelle financés à l'aide de l'héritage laissé par le révérend Francis Henry, comte de Bridgewater, et publiés jusque-là. Babbage adhérait à la théorie du révérend qui justifiait l'existence de Dieu à partir des mathématiques automatisées. Il écrivit que Dieu, en tant que législateur divin, élaborait des lois ou des programmes qui produisaient des espèces lorsque nécessaire, au lieu d'interférer directement sur la terre. Il justifia également les miracles par les mathématiques, au moyen du calcul des probabilités. Le texte est contemporain de l'œuvre de Charles Darwin (1809-1882).

La logique et George Boole

En 1847, George Boole publia son livre *Mathematical Analysis of Logic* (*Analyse mathématique de la logique*), dans lequel il présentait ce qui est aujourd'hui connu comme l'algèbre de Boole, une tentative d'utiliser les techniques algébriques pour traiter des expressions de la logique propositionnelle (ou logique du premier ordre) et, plus tard, de la logique de prédicats. De nos jours, l'algèbre de Boole est appliquée au architecture électronique, alors qu'au début les découvertes de Boole reçurent une reconnaissance qui se limita aux logiciens. Il fallut attendre le XX[e] siècle pour que son importance et son utilité dans le domaine informatique soient correctement comprises.

Elle doit sa récupération à Claude Shannon (1916-2001), ingénieur et mathématicien américain considéré comme le père de la théorie de l'information. Shannon découvrit le travail de Boole durant ses cours de philosophie de l'université de Michigan. En 1937, il réalisa sa thèse de master à l'Institut de technologie du Massachusetts (MIT) dans laquelle il démontra que l'algèbre de Boole permettait d'optimiser des circuits. En 1935, de façon parallèle et indépendante de Shannon, le logicien Victor Shestakov (1907-1987) avait également utilisé l'algèbre de Boole à l'université d'État de Moscou dans le même but.

Si l'algèbre de Boole joue un rôle aussi utile en informatique, c'est parce qu'elle fournit le cadre idéal au développement d'une logique binaire. Elle joue avec les valeurs 0 et 1, qu'elle rend rigoureuses par le biais des opérations de base ET, OU et NON, autrement dit la conjonction (opération binaire notée $\wedge$), la disjonction (opération binaire notée $\vee$) et la négation (opération unaire notée $\neg$). Il existe toutefois d'autres propriétés et opérations plus complexes. Les opérations peuvent être définies au moyen des tables de vérité :

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

Les autres opérations usuelles, comme l'implication, sont exprimées à partir des trois opérations précédentes $(x \rightarrow y) = \neg x \vee y$. De plus, toute autre fonction pouvant être construite à partir des entrées peut être formulée en combinant les opérations de base. En effet, selon ladite loi de De Morgan, les opérations de base peuvent se limiter à 2. Par exemple la disjonction et la négation ; dans ce cas, la conjonction est exprimée en termes de disjonction et de négation.

GEORGE BOOLE (1815–1864)

Ayant développé l'algèbre qui est à la base de l'arithmétique des ordinateurs modernes, le mathématicien et philosophe britannique George Boole est considéré comme l'un des fondateurs de l'informatique. Ses ouvrages mathématiques les plus importants sont *Treatise on Differential Equations* (*Traité sur les équations différentielles*), de 1859, puis *Treatise on the Calculus of Finite Differences* (*Traité sur le calcul des différences finies*), de 1860. Toutefois, c'est dans son ouvrage sur la logique *Recherche sur les lois de la pensée*, dont le titre en anglais est plus étendu et explicite, *An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, qu'il a développé son système de règles destinées à exprimer, manier et simplifier, au moyen de procédures mathématiques, des problèmes logiques et philosophiques dont les arguments admettent deux états : vrai ou faux.

L'algèbre de Boole est axiomatisée par des propriétés, ce qui signifie que ces propriétés sont nécessaires et suffisantes pour élaborer les tables de vérité.

Associativité	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
Commutativité	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
Absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
Complémentarité	$x \vee \neg x = 1$	$x \wedge \neg x = 0$
Distributivité	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	

Le nombre π au XIX^e siècle

À la moitié du XVIII^e siècle, et en 1761 plus précisément, Johann Lambert (1728-1777), mathématicien, physicien, astronome et philosophe allemand d'origine française, démontra qu'aussi bien le nombre π que son carré π^2 étaient irrationnels, ce qui annulait la possibilité de pouvoir déterminer un chiffre « exact » pour ce nombre. Il fallut attendre plus de 120 ans pour que le calcul de π connaisse sa deuxième période de grande importance mathématique. Ce fut en 1882, lorsque le mathématicien Ferdinand Lindemann (1852-1939) démontra que le nombre π

est un nombre transcendant. Il résolut ainsi le problème de la quadrature du cercle en prouvant qu'il est impossible de tracer un carré ayant la même aire qu'un cercle donné en utilisant une règle et un compas.

À l'heure actuelle, il existe encore des problèmes mathématiques à résoudre concernant le nombre π, par exemple, la normalité de π. Un nombre irrationnel est dit normal (en base 10) lorsque toutes les séquences finies de chiffres ont la même fréquence d'apparition dans l'écriture du nombre ; par exemple, si tous les chiffres apparaissent avec une probabilité de 1/10, si toutes les séquences de deux chiffres apparaissent avec une probabilité de 1/100, etc. Il n'a pu être démontré que π est un nombre normal, bien que l'on pense qu'il le soit et que des analyses sur les fréquences supportant la théorie aient été réalisées. À la fin du XX^e^ siècle, le mathématicien américain David Bailey mena une étude sur les 29 360 000 premières décimales, avec des séquences comportant jusqu'à 6 chiffres, et ne détecta aucune irrégularité. Les différences entre les fréquences sont plus petites et n'ont pas d'importance sur le plan statistique. À titre d'exemple, voici les fréquences des chiffres 0-9 selon le travail de David Bailey :

Chiffre	Fréquence
0	2 935 072
1	2 936 516
2	2 936 843
3	2 935 205
4	2 938 787
5	2 936 197
6	2 935 504
7	2 934 083
8	2 935 698
9	2 936 095

NOMBRES ALGÉBRIQUES ET NOMBRES TRANSCENDANTS

Un nombre est algébrique lorsqu'il est solution d'un polynôme à une variable ayant des coefficients entiers. Tous les nombres entiers et tous les nombres rationnels sont algébriques, ainsi que certains nombres irrationnels. Parmi les nombres irrationnels, le plus connu est la racine carrée de 2 : $\sqrt{2}$, qui est la solution du polynôme $x^2 - 2 = 0$. L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable. Un nombre est transcendant lorsqu'il n'est pas algébrique, autrement dit il n'est pas solution d'un polynôme à coefficients entiers. Les plus connus sont les nombres π et e.

Chapitre 4

Les ordinateurs du XX^e siècle

Le tumultueux XX^e siècle a été secoué par toutes sortes de mouvements politiques, sociaux et, bien sûr, par des changements survenus dans le domaine de la pensée et de la science, et notamment dans ce dernier domaine, par une spectaculaire révolution technologique. Dans cette histoire pleine de grandes théories, de réussites incroyables et de déceptions retentissantes, l'informatique a atteint un apogée qui lui a permis de façonner le monde à son image avec la révolution numérique. Si l'évolution de l'informatique a été prodigieuse, l'architecture des machines n'a pourtant pas subi de grandes modifications. Les ordinateurs actuels respectent toujours fondamentalement l'architecture créée par Von Neumann.

La série Z de Konrad Zuse

Au cours du XX^e siècle, certains protagonistes de l'histoire de l'informatique sont des anonymes comme l'Allemand Konrad Zuse et ses machines de la série Z. La plupart des calculateurs de Zuse sont passés inaperçus après leur construction, car nés trop peu de temps avant la Seconde Guerre mondiale. Pour créer sa structure, Zuse suivit sans le savoir les idées de Charles Babbage, puisqu'il n'avait pas connaissance de ses travaux antérieurs. À son tour, lorsque John von Neumann décrivit plus tard la structure qu'il avait conçue, il ignorait lui-même les travaux de Zuse. En effet, cette structure semblait la plus sensée, et il devait en être de même pour les experts en logique : elle comportait un système de contrôle, un module de mémoire et l'unité arithmétique correspondante pour effectuer les calculs.

Zuse construisit ses premières machines entre 1935 et 1939, lorsque la période d'entre-deux-guerres atteignit un point critique. Sa première demande de brevet data du 11 avril 1936. En 1938, il déposa une demande de brevet aux États-Unis, mais cette dernière lui fut refusée en raison d'un manque de détails dans la présentation de ses inventions. Ses machines s'appelaient Z1 et Z2. Zuse avait d'abord envisagé le nom V1, pour *Versuchsmodell*, qui signifie en allemand « modèle expérimental », mais il dut changer de nom pour éviter toute confusion avec les fusées V1 et V2 développées par Von Braun.

La Z1, la première de ces machines, mesurait 2 mètres sur 1,5 mètre. Elle était construite en acier et fonctionnait avec quelques difficultés : au bout de quelques minutes d'utilisation, il fallait toujours y apporter des ajustements. En fait, il s'agissait juste d'un calculateur binaire mécanique fonctionnant à l'électricité et doté d'une programmabilité limitée. L'Allemand construisit ensuite la Z2 pour résoudre le problème de la première machine. Ce deuxième prototype utilisait des relais en guise de mémoire et des nombres à virgule fixe.

Sur la suggestion de Helmut Schreyer, Zuse envisagea l'utilisation de tubes sous vide et conçut la Z3, une machine s'avérant très fonctionnelle. Il la présenta le 5 décembre 1941 à l'Institut allemand de recherches aéronautiques. Sur la Z3, les données étaient entrées à l'aide d'un clavier et le programme de commande était défini par une bande de celluloïd. Elle calculait avec une mémoire de 64 nombres représentés sous forme binaire, avec une virgule flottante. Chaque nombre était représenté par un total de 22 bits : un bit de signe, sept bits d'exposant et quatorze bits de mantisse. Zuse découvrit qu'avec une représentation avec une virgule flottante, le premier bit serait toujours égal à un et qu'il suffisait d'avoir l'exposant approprié. Cette représentation est celle que nous utilisons aujourd'hui, car elle permet de faire l'économie du bit qui est toujours un. Dans le cas de la Z3, cela signifiait que la machine pouvait présenter des nombres comme si la mantisse était composée de 15 bits. Cependant, la machine souffrait d'une limitation majeure : elle n'intégrait pas de sauts conditionnels. En terme de vitesse, elle pouvait effectuer trois ou quatre additions par seconde et multipliait deux nombres en quatre ou cinq secondes.

Zuse entreprit alors la conception et la construction de la Z4 commandée par l'Institut allemand de recherches aéronautiques. La machine fut présentée le 28 avril 1945. Elle calculait avec une mémoire de 1 024 nombres de 32 bits et intégrait les sauts conditionnels ainsi que des sous-routines. En outre, elle mettait en œuvre un mécanisme permettant de lire deux instructions à l'avance, de manière à pouvoir inverser les opérations si cela ne modifiait pas le résultat, permettant de meilleures performances en terme de temps. Cette procédure devint également courante dans les ordinateurs ultérieurs et est connue sous le terme anglais de *lookahead*.

Lorsque la guerre fut sur le point de s'achever, Zuse déménagea dans une grange des Alpes, où il commença à écrire sa thèse de doctorat : *Théorie d'informatique générale*. Dans ce document, qu'il acheva de rédiger en 1946, il définit le *Plankalkül* (calcul de plan), considéré comme un protolangage de programmation qui ne fut jamais largement implémenté. Le *Plankalkül* était conçu pour résoudre aussi bien des problèmes numériques que non numériques et présentait un niveau élevé

KONRAD ZUSE (1910–1995)

Durant ses années de formation universitaire, l'ingénieur allemand Konrad Zuse commença à imaginer une machine automatique car il était las des calculs à la main. En fin de compte, après avoir commencé à travailler dans une usine d'avions, il renonça à son poste pour accomplir son rêve et développer sa première machine dans l'appartement de ses parents. Il ne lui fallut pas longtemps pour devenir le créateur du premier calculateur programmable qui fonctionnait réellement. Il construisit la légendaire série Z à usage général, les machines S1 et S2 pour les calculs liés au lancement de bombes et la machine L1 pour l'évaluation des fonctions logiques. Il définit également le langage de programmation *Plankalkül*, mais seulement sur le plan théorique. Il fonda plusieurs entreprises pour la construction de ses machines, la plus importante étant Zuse KG qui se développa à partir de la série Z et qui est considérée comme le premier constructeur informatique.

d'abstraction, très supérieur aux essais similaires de la même époque. En fait, le premier langage pouvant lui être réellement comparé était un authentique langage de programmation, l'ALGOL, qui fut développé bien des années plus tard.

À partir de 1947, dans le monde dévasté de l'après-guerre, Zuse retourna travailler sur ses machines. Il prit contact avec IBM, plus tard avec Remington-Rand, avec qui il conclut un accord. Il développa des machines dotées de tubes sous vide, comme la Z22, et de transistors, comme la Z23 et la Z3. Plus tard, il construisit la Z64, un traceur contrôlé par une machine.

Le seul exemplaire des premières machines de Zuse arrivé jusqu'à nous est la Z4, devenue le premier ordinateur commercialisé. Cette machine fut utilisée jusqu'en 1959 par de nombreuses institutions et il en existe encore un exemplaire au Deutsches Museum de Munich, exposé avec une reconstitution de la Z3. Malheureusement, toutes les autres machines furent détruites durant les bombardements de Berlin.

La machine de Turing et Colossus

Bien qu'il souhaitât devenir médecin durant son enfance, Alan Turing (1912-1954) finit par être mathématicien, philosophe, cryptographe et devint le précurseur de l'informatique moderne. Il est surtout connu pour ses développements théoriques, mais a surtout joué un rôle majeur dans la réalisation matérielle de l'un des premiers ordinateurs. Turing fit des débuts remarqués en travaillant, en 1936, sur la théorie de la décidabilité, connue sous son nom allemand, *Entscheidungsproblem*, et qui avait été formulée par David Hilbert. Dans sa démarche de résolution, il conçut un modèle de calcul dans lequel il formalisait le concept d'algorithme (ou de programme) et qui passa à la postérité sous le nom de machine de Turing.

Le mathématicien Alan Turing considéré comme l'un des pères de l'informatique.

En 1928, l'influent mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943), qui avait proposé une célèbre liste de problèmes en 1900, reprit le problème de la décidabilité qui datait de Leibniz. Il était d'avis qu'il n'existait aucun problème insoluble et proposa l'hypothèse selon laquelle il était toujours possible de construire un programme (algorithme) qui, en fonction de la description d'une question, confirmait ou contestait le caractère erroné ou valable de celle-ci. De manière indépendante, Alan Turing et son collègue américain Alonzo Church démontrèrent que Hilbert avait tort : il existait des problèmes insolubles et il était impossible de construire le programme (algorithme) envisagé par Hilbert. Dans ces conditions, les mathématiques n'étaient pas décidables, autrement dit il n'existait pas de méthode définie pouvant s'appliquer à un quelconque énoncé mathématique pour établir s'il était démontrable.

Church et Turing utilisèrent chacun leur propre modèle pour leurs démonstrations : le premier, le lambda-calcul, et le second, sa machine. Tous deux formalisèrent le concept d'algorithme et basèrent leurs démonstrations sur des questions arithmétiques : si l'on démontrait que ce type de questions n'avait pas de solution, c'est qu'elles n'en avaient pas non plus de manière générale. L'étude de Turing s'avéra plus accessible : le Britannique limita le problème de la décidabilité au « problème de l'arrêt » pour démontrer que celui-ci était insoluble avec sa machine. Il est impossible de décider algorithmiquement si une machine de Turing va s'arrêter ou non. Les deux théories n'étaient pas contradictoires. Conscients que leurs modèles, présentaient un pouvoir d'expression équivalant, ils réunirent leurs efforts.

COMMENT FONCTIONNE LA MACHINE DE TURING ?

Imaginez un ruban de longueur infinie sur lequel se trouvent en entrée les symboles d'un problème et sur lequel il est possible d'écrire. La machine de Turing présente une tête de lecture à une position spécifique du ruban. C'est cette tête de lecture qui permet de lire et d'écrire le ruban, et le programme de la machine lui permet de changer de position. Les états possibles de la machine sont présentés au moyen d'un ensemble d'états Q. La programmation de la machine est présentée au moyen d'une fonction dite « de transition » qui définit l'état suivant en fonction de l'état actuel et du symbole en entrée.

De manière formelle, une machine Turing est un septuplet. Un *n*-uplet est une séquence ordonnée d'objets, autrement dit, une liste comportant un nombre limité d'objets formant une « famille ». On emploie le terme de *n*-uplets pour décrire des objets mathématiques présentant une structure. Le septuplet traité par notre machine de Turing est le suivant :

$$MT = (\Gamma, \Sigma, b, Q, q_0, f, F).$$

Ces éléments se définissent de la manière suivante :

- Γ: alphabet des symboles de la bande.
- $\Sigma \subset \Gamma$: alphabet des symboles en entrée. L'ensemble des symboles pouvant apparaître en entrée est un sous-ensemble de ceux pouvant se trouver sur le ruban. En effet, le ruban comporte aussi des symboles écrits par la machine.
- $b \in \Gamma$, $b \notin \Sigma$: b indique un espace blanc. Ce symbole ne fait pas partie des entrées. Initialement, le ruban contient un nombre fini de symboles de Σ, et le reste, puisqu'il est infini, contient des symboles b.
- Q : ensemble des états.
- $q_0 \in Q$: état initial.
- f : fonction de transition. En fonction de l'état et de l'élément du ruban, cette fonction se déplace vers un nouvel état, écrit un symbole sur le ruban et déplace le lecteur de ruban vers la gauche (*G*), vers la droite (*D*) ou reste immobile (*A*, arrêt). En d'autres termes, f est une fonction de la forme $f : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{G, D, A\}$.
- $F \subseteq Q$: ensemble des états finals.

En avril 1936, le mathématicien américain Alonzo Church de l'université de Princeton publia son travail sur le problème de la décidabilité. Church parvint à la même conclusion que Turing et prouva que tout n'était pas calculable. Il utilisa le lambda-calcul, radicalement différent de la machine de Turing, qu'il avait développé avec son collègue Stephen Kleene. Turing publia sa solution sur la décidabilité très peu de temps après, en août. Il s'agissait du remarquable article *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*, qui reformulait les résultats de Kurt Gödel (1906-1978) sur les limites de la démontrabilité et le calcul automatisé, et incluait une référence aux travaux de Church. Cependant, au lieu de se battre pour établir la paternité de sa découverte, en septembre de la même année, Turing s'installa à Princeton pour préparer sa thèse sur la décidabilité sous la direction de Church. Il la présenta en 1938, obtenant le titre de docteur, puis retourna à Cambridge. Ce fut une heureuse rencontre de talents dont bénéficia toute l'humanité.

BLETCHLEY PARK ET ENIGMA

La légendaire installation militaire de Bletchley Park était située dans le Buckinghamshire, à 80 km de Londres, entre Cambridge et Oxford. Les scientifiques anglais les plus réputés y menèrent leurs travaux de déchiffrement des codes allemands durant la Seconde Guerre mondiale. Il fut baptisé du nom du manoir victorien qui dominait les lieux. Actuellement, ses bâtiments abritent un musée de la cryptographie. Ce fut à Bletchley Park que l'on déchiffra le code d'Enigma, une machine disposant d'un mécanisme de chiffrement avec des rotors motorisés qui permettait de chiffrer et de déchiffrer les messages envoyés aux forces militaires de l'Allemagne nazie. L'effort britannique pour rompre leur code ne fut pas vain et l'on affirme que la lecture des messages allemands aurait permis d'écourter la guerre d'une année ou deux.

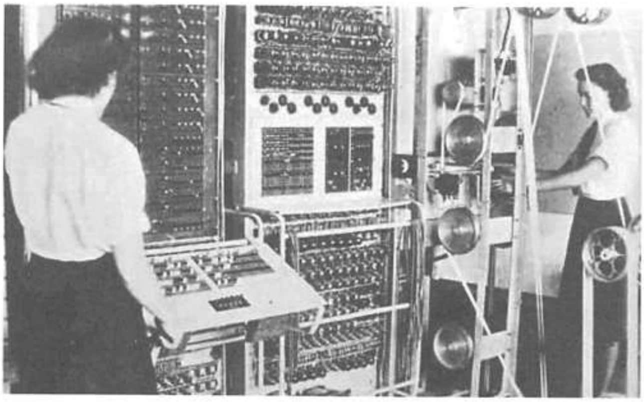
Ces événements passionnants et décisifs sur le plan théorique de la connaissance eurent lieu durant l'une des périodes les plus tumultueuses de l'histoire contemporaine. La situation politique de l'Europe se détériorait et dérivait vers un climat d'avant-guerre. Craignant que la Grande-Bretagne entrât en guerre contre l'Allemagne, Turing se consacra à l'étude de la cryptographie tout en préparant sa thèse de doctorat. Le gouvernement britannique le recruta en 1939 pour travailler à Bletchley Park, en collaboration avec d'autres chercheurs, avec pour mission de casser le code secret utilisé par l'armée allemande, le code Enigma. Les connaissances de Turing lui permirent de déchiffrer le code des forces aériennes allemandes au milieu de l'année 1941, mais en février 1942, les Allemands le rendirent plus compliqué et le code redevint inintelligible pour les Britanniques.

Pour casser le code allemand, Turing et ses collègues construisirent des calculateurs. Le mathématicien avait déjà construit une machine à multiplier à Princeton. Mais la nécessité d'obtenir une plus grande vitesse de calcul conduisit le groupe de Turing à construire une machine appelée Colossus, qui est considérée comme le premier ordinateur électronique programmable numérique du monde. L'équipe réussit à en construire dix exemplaires. Le premier d'entre eux commença à fonctionner en décembre 1943, deux ans avant l'ENIAC américain dont nous parlerons plus tard. À la même époque, à la fin de 1942 et au début de 1943, Turing voyagea de nouveau aux États-Unis, cette fois pour conseiller les Américains sur le déchiffrement des codes allemands. Lors de ce voyage, il fit la connaissance de Claude Shannon, le créateur de la théorie de l'information et de la définition de l'entropie.

Lorsque la guerre prit fin, Turing fut recruté par la NPL (National Physical Laboratory, le laboratoire national de physique) qui développait les normes pour la science et la technologie au Royaume-Uni. Il y travailla à la conception de l'ACM (*Automatic Computer Machine*, autrement dit, une machine automatique de calcul), un calculateur à portée générale, et lança le concept dénommé aujourd'hui « microprogrammation », soit le fait que l'unité arithmétique soit déjà programmée. L'autre option est que cette unité soit directement intégrée dans le matériel et que, par conséquent, il soit impossible de modifier les opérations. Turing définit donc également les concepts de sous-routine et de bibliothèques logicielles.

En 1947, il prit une année sabbatique et rédigea un essai précurseur sur un modèle informatique inspiré par la physiologie et la neurologie. L'année suivante, la machine du NPL ne connaissant aucun progrès, il déménagea à l'université de Manchester, où il travailla sur le développement du logiciel du Mark I de Maxwell Newman. Il réalisa alors ses études les plus abstraites. Il écrivit son célèbre article « *Computing Machinery and*

Intelligence », publié dans la revue *Mind* en octobre 1950, qui présentait ses vues sur l'intelligence artificielle et proposait l'expérience appelée « test de Turing » pour démontrer la présence d'une intelligence au sein d'une machine et décider si elle était « sensée ».



Deux opératrices travaillant sur la version Mark II du Colossus.

HONTE ET INJUSTICE

Le penseur mathématicien et logicien à qui nous devons une grande partie du visage et des réalisations du monde contemporain souffrit d'une persécution honteuse et injuste, en raison des préjugés de l'Angleterre d'après-guerre, qui finit par lui coûter la vie. La brillante carrière d'Alan Turing fut en effet écourtée lorsqu'il fut inculpé pour son homosexualité, encore illégale au Royaume-Uni à cette époque, avec les mêmes charges dont était accusé Oscar Wilde plus de 50 ans auparavant. Turing savait qu'il n'avait rien à se reprocher et dut subir une procédure judiciaire qui fut largement médiatisée. Le tribunal lui donna le choix entre l'incarcération et une castration chimique réduisant sa libido. Il préféra éviter la prison, mais une année de traitement aux œstrogènes provoqua d'importantes modifications physiques, en plus de le rendre impuissant. Il finit donc par se suicider avec du cyanure. Cette fin fut d'autant plus dramatique que, dans les lettres qu'il adressait à ses collègues, son plus grand souci était que les attaques à sa personne puissent assombrir ses réflexions sur l'intelligence artificielle, dont il était convaincu qu'elles apporteraient de grandes avancées dans ce monde. En 2009, le premier ministre britannique, Gordon Brown, publia un communiqué d'excuses au nom du gouvernement britannique pour le traitement infligé à Alan Turing lors des dernières années de sa vie, un repentir arrivant avec 50 années de retard vis-à-vis d'un homme qui, en outre, avait fourni de précieux services à son pays et au monde civilisé dans le combat contre les nazis.

En 1951, il fut élu membre de la Royal Society. Cependant, à la fin de sa vie, il ne profita pas de la reconnaissance qui lui était due. Des années après sa mort tragique, en 1966, l'Association for Computing Machinery (ACM) institua le prix qui porte son nom, le prix Turing, considéré comme l'équivalent du prix Nobel dans le monde de l'informatique. Ses lauréats sont récompensées pour leurs réalisations dans les domaines du matériel informatique, des logiciels, des bases de données, des fondements théoriques de l'informatique (dont la cryptographie) et des réseaux.

L'architecture de Von Neumann

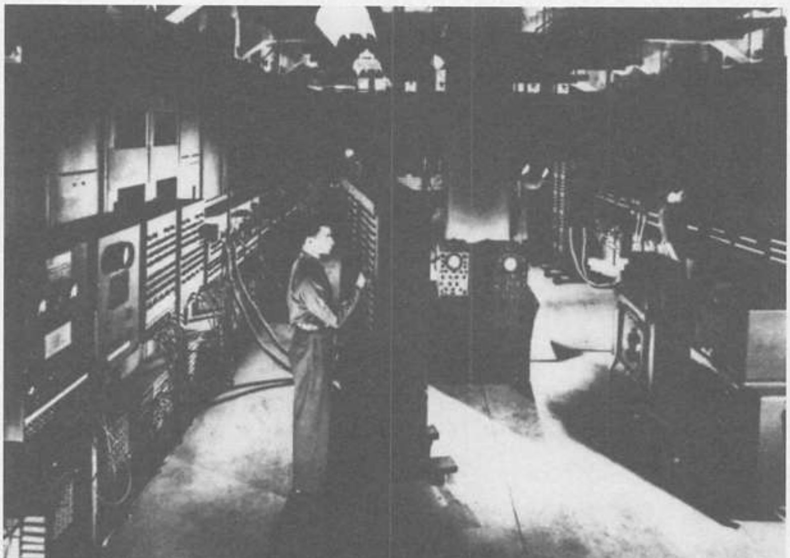
L'entrée de John von Neumann dans l'histoire de l'informatique eut également lieu durant la période captivante de la Seconde Guerre mondiale, lorsqu'il travaillait sur le projet Manhattan dans le but de développer la bombe atomique. Les besoins du projet nécessitaient l'utilisation de calculateurs puissants, dont on commençait à voir les premiers modèles plus avancés et plus fonctionnels. Von Neumann s'efforça de mettre la main sur les chercheurs les plus compétents en informatique dans tous les États-Unis. Parmi ceux-ci, il contacta John Presper Eckert (1919-1995) et John William Mauchly (1907-1980), qui avaient construit l'ENIAC (*Electronic Numerical Integrator and Computer*, que l'on peut traduire en français par « intégrateur et ordinateur électronique numérique »), l'équivalent américain du Colossus. Les chercheurs avaient l'intention de construire une version améliorée de la machine, qui deviendrait l'EDVAC (*Electronic Discrete Variable Automatic Computer*, Ordinateur électronique automatique à variable discrète). En mars 1945, Von Neumann formalisa ses idées dans son célèbre rapport *First Draft of a Report on the EDVAC*, qui fut signé de son seul nom, ce qui provoqua des conflits avec les deux autres chercheurs.

Ce premier rapport présentait ce qui est aujourd'hui connu sous le nom d'architecture de Von Neumann, la structure la plus efficace pour un ordinateur. Cette architecture suppose un stockage interne des programmes, autrement dit, un stockage en mémoire, et la séparation des unités de traitement et de stockage. En outre, il proposait d'utiliser le même dispositif de mémoire pour les programmes et les informations, afin d'économiser de la mémoire. La procédure générale de l'architecture de Von Neumann suit un schéma en trois étapes :

1. La récupération de l'instruction dans la mémoire
2. Le décodage
3. L'exécution

L'ENIAC

L'ENIAC fut achevé et présenté à la presse en 1945, et s'arrêta de fonctionner définitivement 10 ans plus tard, en 1955. Les instigateurs de sa construction furent Herman Heine Goldstine, John Presper Eckert et John William Mauchly. Ses installations massives occupaient 63 m², pesaient 30 t et mesuraient 2,6 m de haut par 0,90 m de large et 26 m de long. La machine comportait 18 000 tubes sous vide, 72 000 diodes, 70 000 résistances et 1 500 relais. Sa construction nécessita environ 5 millions de soudures. Ses coûts de fabrication s'élevèrent à près d'un demi-million de dollars de l'époque. Elle ne disposait pas de mémoire, mais de 20 accumulateurs permettant de stocker 20 nombres de 10 chiffres chacun. En outre, certains commutateurs permettaient de stocker les valeurs des fonctions (104 valeurs de 12 chiffres). Le temps de calcul était de 0,2 milliseconde pour une addition et de 2,8 millisecondes pour une multiplication. L'ENIAC élevait la température ambiante à 50 °C et les mauvaises langues racontaient malicieusement que lorsqu'il était en fonctionnement, la ville de Philadelphie où il était installé subissait des coupures de courant, car il consommait 160 kW.



Cette procédure s'applique séquentiellement aux instructions occupant des positions successives en mémoire, sauf en présence de sauts inconditionnels. Cette architecture ne diffère pas beaucoup de la conception utilisée par Charles Babbage et Konrad Zuse, la même encore attribuée aux ordinateurs d'aujourd'hui.

JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

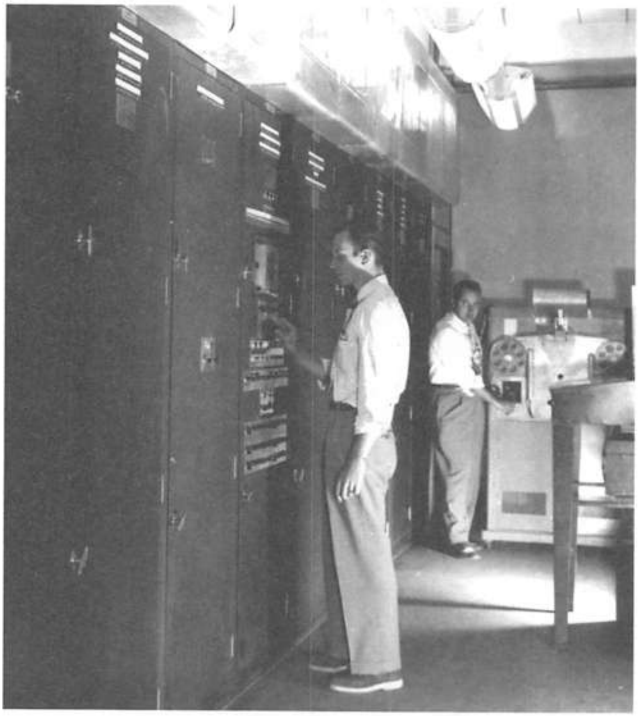
L'Américano-hongrois John von Neumann fut l'un des scientifiques les plus importants du xxe siècle. Pionnier de l'informatique numérique moderne, ses réalisations ont porté leurs fruits dans de nombreux domaines : la physique quantique, la cybernétique, l'économie, et bien entendu, les mathématiques. Ce fut un enfant prodige et en 1926, à seulement 23 ans, il obtint son doctorat en mathématiques avec une thèse sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles. En Europe à Gottingen, il mena des recherches en mathématiques et en mécanique quantique, sous la direction de David Hilbert, et rédigea en allemand le livre *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*. En 1930, il émigra aux États-Unis et, à 29 ans, obtint l'un des cinq premiers postes de professeurs à l'Institute for Advanced Study de Princeton, dont l'un des autres postes était occupé par Albert Einstein. Il est considéré comme le père de la théorie des jeux et du concept de MAD (*Mutually Assured Destruction*, ou « Destruction mutuelle assurée »). Il prit part au projet Manhattan et développa la bombe à hydrogène.

Après la publication du *Premier rapport*, Von Neumann rechercha des fonds pour la construction d'une machine plus puissante. Ce fut l'ADIVAC, qu'il développa au sein de l'Institute for Advanced Study de Princeton et qui fonctionna en 1953.

Les premiers ordinateurs aux États-Unis

En qualité d'ordinateurs d'usage général, l'ENIAC représentait une avancée, mais sa technicité laissait à désirer. Son principal problème était que sa reprogrammation nécessitait un changement des connexions des circuits. Comme il ne conservait pas de programme en mémoire pour déterminer les calculs à effectuer ainsi que l'ordre dans lequel il convient de les réaliser, au contraire des ordinateurs actuels, il fallait connecter ou déconnecter certains commutateurs, à l'instar des anciens standards téléphoniques. Cette tâche complexe était si fastidieuse qu'elle remettait en cause l'avantage de sa vitesse de calcul.

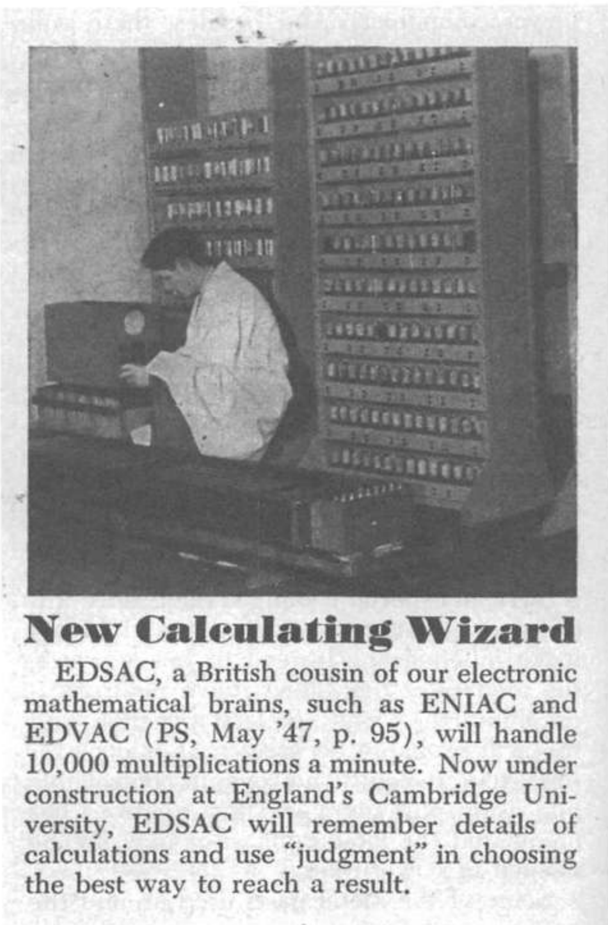
La résolution des problèmes de l'ENIAC servit de fil directeur au travail des concepteurs de l'EDVAC. Eckert, Mauchly et Von Neumann prêtèrent une grande attention au mode de programmation de l'ordinateur et arrivèrent à la conclusion qu'ils devaient utiliser un programme non câblé, qui devait être stocké en mémoire de la même manière que les nombres. Aujourd'hui, il nous semble extravagant, et même difficile à comprendre qu'à un moment du développement de l'informatique, la programmation (les logiciels) et la configuration de l'ordinateur (le matériel) n'aient pas été séparées. L'émergence de cette très belle idée signifia aussi la naissance du langage de programmation et de la programmation comme domaine d'étude.



L'EDVAC constitua une étape majeure dans l'histoire de l'informatique.

L'EDVAC fut achevé en 1949 à la Moore School of Electrical Engineering de l'université de Pennsylvanie. À cette époque, les concepteurs Eckert et Mauchly ne faisaient plus partie du projet, qu'ils avaient abandonné en 1946. La machine mettait en œuvre 6 000 tubes sous vide et 12 000 diodes. Elle pesait 7 800 kilos et occupait 45,5 m². Son fonctionnement nécessitait 56 kW. Elle était beaucoup plus légère que l'ENIAC, s'il s'avère néanmoins possible de s'exprimer ainsi compte tenu de ces chiffres. Elle améliorait également les performances de temps de son prédécesseur : il lui fallait 864 microsecondes pour effectuer une addition et 2 900 microsecondes pour effectuer une multiplication.

Dans le même temps, le *Premier rapport* de Von Neumann exerça une forte influence au Royaume-Uni. Maurice Wilkes, de l'université de Cambridge, construisit l'EDSAC (*Electronic Delay Storage Automatic Calculator*, calculateur automatique à mémoire électronique à retard). Ce fut le premier calculateur électronique intégrant des commandes internes, mais pas le premier ordinateur avec programmes internes, description qui correspondait au SSEM. Sa mémoire comprenait alors 512 positions avec 17 bits disponibles pour chacune. Le premier jeu vidéo de l'histoire, un tic-tac-toe électronique appelé OXO fut développé pour l'EDSAC. La conception de cette machine servit de base pour le premier ordinateur avec application commerciale, le LEO I. L'EDSAC intégrait des sous-routines, et même des sous-routines multiples.



New Calculating Wizard

EDSAC, a British cousin of our electronic mathematical brains, such as ENIAC and EDVAC (PS, May '47, p. 95), will handle 10,000 multiplications a minute. Now under construction at England's Cambridge University, EDSAC will remember details of calculations and use "judgment" in choosing the best way to reach a result.

Coupure de presse britannique faisant écho de la construction de l'EDSAC.

En quittant l'université de Pennsylvanie, Eckert et Mauchly fondèrent une entreprise, la Eckert-Mauchly Computer Corporation, afin de construire l'UNIVAC, acronyme de *Universal Automatic Computer*, dont le qualificatif « universel » laissait penser que la machine était destinée à un usage général et pourrait résoudre des problèmes liés au domaine de la science, de l'ingénierie, de l'économie...

Le premier acquéreur de l'UNIVAC de Eckert et Mauchly fut le bureau du recensement des États-Unis. Lorsque sa construction fut terminée en 1951, la société des concepteurs avait été absorbée par la Remington Rand. La seconde machine fut acquise par le Pentagone en 1952. Ces exemplaires ont été considérés comme les premiers ordinateurs commerciaux et, dans la plupart des cas, ils ont été utilisés davantage pour le traitement de données que pour des calculs liés à la physique ou aux mathématiques. Le bureau du recensement des États-Unis utilisa ainsi son UNIVAC pour traiter des données du recensement et effectuer des classifications.

Le pupitre de commande de l'UNIVAC I, exposé au musée de la Science de Boston.

Pour de nombreux utilisateurs, l'avancée la plus importante de l'UNIVAC ne résidait pas dans sa vitesse : au lieu d'utiliser des cartes perforées pour lire et stocker des informations, il avait recours à des bandes. Les cartes nécessitaient des manipulations humaines et leur remplacement par une bande permettait d'améliorer l'automatisation de la machine. La sélection des données était réalisée par la même machine. L'UNIVAC pouvait additionner deux nombres en 0,5 microseconde.

Jusqu'à l'arrivée de l'UNIVAC sur le marché, la société IBM s'était focalisée sur la commercialisation de calculateurs à cartes perforées. Cependant, voyant l'intérêt provoqué par le nouvel ordinateur, l'entreprise lança une nouvelle série de développement de projets dans cette direction. La première machine de cette gamme fut l'IBM 701, semblable à l'UNIVAC, et elle fut baptisée « machine électronique de traitement des données ». Von Neumann, qui était alors occupé par la construction de son ordinateur à Princeton, collabora à sa création en qualité de consultant. L'IBM 701 fut achevé en 1952 et envoyé au laboratoire des armes atomiques de Los Alamos.

Le nombre π au XXe siècle

L'évolution du matériel informatique au XXe siècle fournit de nouveaux outils pour calculer des approximations précises du nombre π. Actuellement, le nombre de décimales calculées pour ce nombre dépasse les mille milliards. La dernière approximation majeure atteint 5 000 milliards de chiffres corrects, soit 5×10^{12} décimales.

Mais avant l'arrivée des ordinateurs, les meilleures approximations furent celles de l'Anglais D.F. Ferguson, qui avec la seule aide de calculateurs, réussit à dépasser le millier de décimales : 620 décimales en 1946, 808 décimales en 1947, et 1 120 décimales en 1949, avec la collaboration de John Wrench.

Ce fut John Wrench qui, la même année, réalisa la première approximation de π au moyen d'un ordinateur. Pour ce faire, il utilisa l'ENIAC, à l'instigation de John von Neumann, et le calcul dura 70 heures pour arriver à 2 037 décimales. Cinq ans plus tard, en 1954, Nicholson et Jeenel dépassèrent le record initial en obtenant 3 092 décimales en seulement 13 minutes avec l'IBM NORC, l'ordinateur le plus puissant à cette époque. En 1959, après un nouvel intervalle de cinq ans, un IBM 704, le premier ordinateur fabriqué en série avec un matériel basé sur une arithmétique à virgule flottante, calcula 16 167 décimales en 4,3 heures. Les calculs furent réalisés par François Genuys, à Paris. La barrière des 100 000 ne tarda pas à être dépassée : le record fut battu en 1961 par Daniel Shanks et John Wrench, avec le nouvel IBM 7090, qui utilisait des transistors au lieu de tubes sous vide, ce qui le rendait six fois plus rapide que ses prédécesseurs. Il fallut à l'ordinateur 8,7 heures pour obtenir 100 265 décimales.

Le chiffre spectaculaire d'un million de décimales fut obtenu par Jean Guilloud et Martin Bouyer en 1973 avec un CDC 7600 de la société Control Data Corporation, concurrente d'IBM. Ces ordinateurs de seconde génération comprenait des transistors dans les circuits numériques, technologie qui s'est imposée durant les années 1960. Il lui fallut 23 heures et 18 minutes pour obtenir le nombre exact de 1 001 250 décimales.

Guilloud avait déjà obtenu un record de 250 000 décimales en 1966, en 41 heures et 55 minutes, puis avait renouvelé l'exploit en 1967 avec 500 000 décimales, calculées en 28 heures et 10 minutes. Les années 1980 consacrèrent les Japonais Yasumasa Kanada et Kazunori Miyoshi : en 1980, ils réussirent à dépasser les 2 millions de décimales en 137 heures ; en 1982, les 8 millions en 6 heures et 52 minutes ; en 1983, les 16 millions en un temps inférieur à 30 heures et en 1987, l'ordinateur japonais NEC SX-2 leur permit d'atteindre les 100 millions de décimales en 35 heures et 15 minutes de calcul. En 1989, Gregory Chudnovsky, considéré comme l'un des plus grands mathématiciens vivants, et son frère David, ont calculé un premier milliard de décimales avec un IBM 3090.

Le millier de milliards de décimales fut dépassé par Yasumasa Kanada et son équipe avec un HITACHI SR8000/MPP. L'événement eut lieu à Tokyo, en décembre 2002. Les 1 241 100 000 000 décimales ont été obtenues après 600 heures de calcul, soit 25 jours, ce qui revient au calcul de 574 583 décimales par seconde. En avril 2009, un autre Japonais, Daisuke Takahashi, dépassa les 2 000 milliards à l'université de Tsukuba, après 29,09 heures de calcul. Le record suivant de presque 2 700 milliards de décimales fut atteint par un programmateur informatique français, Fabrice Bellard, qui utilisa un PC avec un système d'exploitation Linux (131 jours de calcul). Le dernier record en date est détenu par Shigeru Kondo et Alexander J. Yee qui obtinrent le chiffre phénoménal de 5 000 milliards de décimales le 2 août 2010, après 90 jours de calcul.

La plupart des résultats sont basés sur ceux du brillant mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920). L'un d'entre eux, publié en 1914, permit de calculer huit nouvelles décimales pour chaque terme de la série suivante :

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{[1103+26390n]}{396^{4n}}.$$

À partir des résultats de Ramanujan, on a défini des séries convergeant plus rapidement et, pour chaque terme de la série, différents chiffres corrects ont été obtenus. La série des frères canadiens d'origine écossaise, Jonathan et Peter Borwein, permit d'obtenir 31 chiffres nouveaux pour chaque terme de leur série. Le reste des résultats, notamment ceux de Yasumasa Kanada, se base sur une formule de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) qui établit une relation entre π et la moyenne arithmético-géométrique :

$$MAG\left(1,\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{\varpi},$$

d'où $\varpi=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-z^4}}\,dz.$

Dans cette formule, *MAG*(*a*,*b*) correspond à la moyenne arithmético-géométrique de *a* et *b*. Les égalités formulées récemment par David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe sont les fruits de découvertes récentes, mais intéressantes, sur π. En 1997, ces chercheurs publièrent une série de formules permettant de calculer un chiffre binaire de π occupant une position arbitraire, sans avoir besoin de calculer les autres chiffres. La même méthode sert, évidemment, à calculer des chiffres dans toutes les bases multiples de deux et en particulier, en base hexadécimale. Les auteurs démontrèrent la validité de leur méthode en calculant le chiffre hexadécimal de π occupant les positions d'un million, de 10 millions, de 100 millions, d'un milliard et de 10 milliards, qui donnèrent comme résultat les chiffres hexadécimaux figurant ci-dessous :

Positions	Chiffres hexadécimaux obtenus à ces positions
1 000 000	26C65E52CB4593
10 000 000	17AF5863EFED8D
100 000 000	ECB840E21926EC
1 000 000 000	85895585A0428B
10 000 000 000	921C73C6838FB2

LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

La moyenne arithmético-géométrique se définit formellement à partir de la convergence de deux suites, l'une formée par des moyennes arithmétiques et l'autre, par des moyennes géométriques. Rappelons les formules des deux moyennes :

$$MA(a,b) = \frac{a+b}{2},$$
$$MG(a,b) = \sqrt{ab}.$$

On définit alors les premiers termes des séries *ma* et *mg* de la façon suivante : $ma_1 = MA(a,b)$, $mg_1 = MG(a,b)$. À partir de là, on définit les termes généraux de la manière suivante :

$$ma_{n+1} = MA(ma_n,\ mg_n),$$
$$mg_{n+1} = MG(ma_n,\ mg_n).$$

Ces deux suites convergent vers la même valeur, la moyenne arithmético-géométrique : $MAG(a,b)$.

L'une des formules proposées par Bailey, Borwein et Plouffe est la suivante :

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right).$$

Le terme 16^n est celui qui permet de trouver les chiffres binaires dans cette formule. Voici une autre de leurs propositions :

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{-8}{8n+1}+\frac{8}{8n+2}+\frac{4}{8n+3}+\frac{8}{8n+4}+\frac{2}{8n+5}+\frac{2}{8n+6}-\frac{1}{8n+7}\right).$$

Le calcul des décimales de π a poursuivi une course folle ayant occupé les esprits les plus éminents de l'humanité depuis des millénaires. Actuellement, grâce aux ordinateurs, le nombre de décimales connues de π dépasse les 5.000 milliards. Pourtant, seules quelques décimales suffisent pour la majorité des calculs.

LES SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Comme son nom l'indique, le système décimal utilise 10 chiffres différents. La notation la plus habituelle est 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

La notation binaire en utilise seulement deux : le 0 et le 1. La notation hexadécimale utilise 16 symboles, dont ceux utilisés le plus fréquemment sont les suivants : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Le symbole A représente une valeur de 10 en numération décimale ; le symbole B, une valeur de 11, C de 12, D de 13, E de 14 et F de 15.

La notation binaire et la notation hexadécimale sont extrêmement liées, puisque 16 est un multiple de 2 et qu'il est très facile de passer de l'une à l'autre.

Pour passer de la notation binaire à la numération hexadécimale, il convient de grouper les bits 4 par 4 pour que chaque groupe de quatre chiffres corresponde à un chiffre hexadécimal.

Pour passer du système de numération hexadécimale au système binaire, on fait correspondre quatre chiffres binaires à un chiffre hexadécimal, avec les équivalences suivantes :

0000: 0	0001: 1	0010: 2	0011: 3
0100: 4	0101: 5	0110: 6	0111: 7
1000: 8	1001: 9	1010: 10	1011: 11
1100: 12	1101: 13	1110: 14	1111: 15.

Dans un article de 1984 publié dans une revue spécialisée, les frères Borwein ne tentaient pas de justifier leurs recherches, ni d'en rechercher la raison. Ils se contentaient de dépeindre leur émerveillement :

> « En pratique, il suffit de 39 décimales de π pour calculer la circonférence d'un rayon de 2×10^{25} mètres (la limite supérieure de la distance parcourue par une particule se déplaçant à la vitesse de la lumière durant 20 millions d'années et par conséquent, une dimension supérieure au rayon de l'univers) avec une erreur inférieure à 10^{-12} mètres (une grandeur inférieure au rayon de l'atome d'hydrogène). Il ne fait aucun doute que le calcul de π avec la meilleure exactitude possible présente une importance mathématique qui va au-delà de son utilité. »

Chapitre 5

Programmation et logiciels

Le développement du matériel informatique s'est effectué en parallèle à celui des langages de programmation. Un langage de programmation peut se définir simplement comme une langue permettant d'expliquer à l'ordinateur comment il doit faire pour trouver la solution d'un problème donné, c'est-à-dire la liste des étapes exprimées dans un langage qui lui est compréhensible et les calculs qu'il doit réaliser dans un ordre donné afin d'obtenir le résultat attendu. Cette définition nous fait penser immédiatement à ces vieux amis de l'histoire des mathématiques, ces vénérables procédures poursuivant le même objectif et que nous avons déjà vues dans les premiers chapitres : les algorithmes. En effet, un langage de programmation peut être défini plus formellement comme une langue décrivant à l'ordinateur les algorithmes qui le feront fonctionner.

Les descriptions proposées par un langage de programmation seront nécessairement rigoureuses, sans la moindre ambiguïté, et seront conçues pour résoudre un problème concret. La notation devra permettre d'appliquer une notion fondamentale des algorithmes et des langages de programmation : la répétition. Celle-ci se réalise de deux manières : itérative ou récursive. L'itération est une répétition explicite qui s'exprime avec des instructions telles que *repeat*, *while* et *for*. La récursivité est une répétition implicite d'une partie d'une action, s'organisant de manière à ce que les procédures s'appellent elles-mêmes.

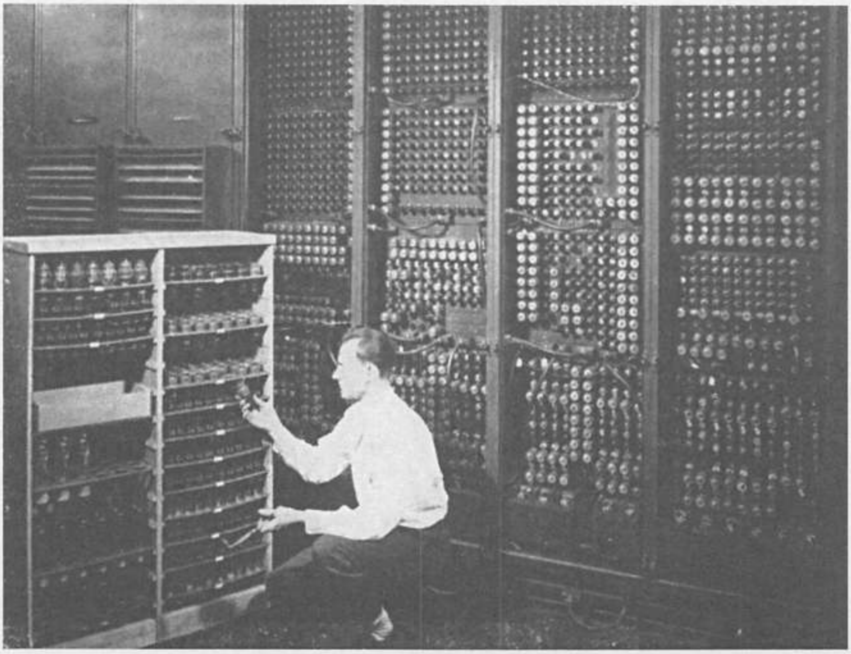
Tout au long de cet ouvrage, on a pu voir que le terme algorithme est bien plus ancien que celui d'ordinateur. À l'origine, en mathématiques pures, le terme désignait uniquement la description des procédures destinées aux calculs arithmétiques. Ce ne fut que plus tard qu'il prit un sens plus générique,

LE TERME « IMPLÉMENTER »

Implémenter signifie mettre en œuvre, appliquer les méthodes adéquates pour atteindre un but. En informatique, ce terme désigne la programmation d'un algorithme déterminé dans un langage spécifique.

LE TERME « PROGRAMMATION »

Le terme « programmer » (*to program*), désignant la définition des actions que doit réaliser un ordinateur, a été utilisé pour la première fois par le groupe qui a créé l'ENIAC, à la Moore School of Electrical Engineering de l'université de Pennsylvanie, au États-Unis. À cette époque, le terme le plus utilisé était « configurer » (*to set up*), car l'ENIAC (voir l'illustration ci-dessous) se programmait en changeant les connexions et en activant des interrupteurs, c'est-à-dire en modifiant manuellement le câblage de la machine. Mais peu à peu, au fur et à mesure que la différence entre logiciel (*software*) et matériel informatique (*hardware*) s'affirmait, prit forme l'idée de « programmation ».



courant aujourd'hui, surtout en informatique. Dans tous les cas, les langages de programmation ne sont qu'un développement de ces descriptions, dans une recherche du formalisme le plus précis possible, indispensable pour que l'ordinateur les comprenne.

Les algorithmes les plus anciens sont ceux qui firent des Babyloniens les premiers mathématiciens capables de résoudre des problèmes d'une certaine complexité. Ils résolvent des équations algébriques et sont décrits sous une forme générale dans laquelle sont insérés des exemples concrets. On n'y trouve ni itération, ni expression conditionnelle de la forme « si x < 0, alors », car les Babyloniens ne connaissaient pas le zéro. Lorsqu'il y avait plus d'une possibilité, l'algorithme

L'IMPLÉMENTATION DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE

À titre d'exemple, nous présentons ici l'implémentation de l'algorithme qui calcule le plus grand commun diviseur de deux nombres *A* et *B*, d'abord en langage PROLOG et ensuite en Java. Le sigle *gcd* fait référence au terme anglais *great common divisor*, « plus grand commun diviseur ». L'implémentation en PROLOG utilise trois règles, correspondant aux trois cas possibles. Dans tous les cas, les deux premiers arguments sont les nombres et le troisième peut être interprété comme le résultat. La première règle considère le cas où le deuxième argument est zéro, la deuxième règle s'applique lorsque le premier argument est supérieur au second, et la troisième, lorsque le second est supérieur au premier.

```
gcd(A, 0, A).
gcd(A, B, D) :– (A > B),(B > 0),R is A mod B,gcd(B,R,D).
gcd(A, B, D) :– (A < B),(A > 0),R is B mod A,gcd(A,R,D).
```

L'implémentation en Java utilise les mêmes règles que précédemment. Elle a comme paramètre d'entrée les deux nombres *A* et *B* et fournit leur plus grand commun diviseur comme résultat. La première version est récursive et la seconde, itérative.

```
public static int gcd (int A, int B) {
        if (B == 0) { return A; }
        else if (A > B) { return gcd(B, A % B); }
        else if (A < B) { return gcd(A, B % A); }
        return A;
}
public static int gcdIterative (int A, int B) {
        int r = 0;
        while (B > 0) {
            r = A % B;
            A = B;
            B = r;
        }
        return A;
}
```

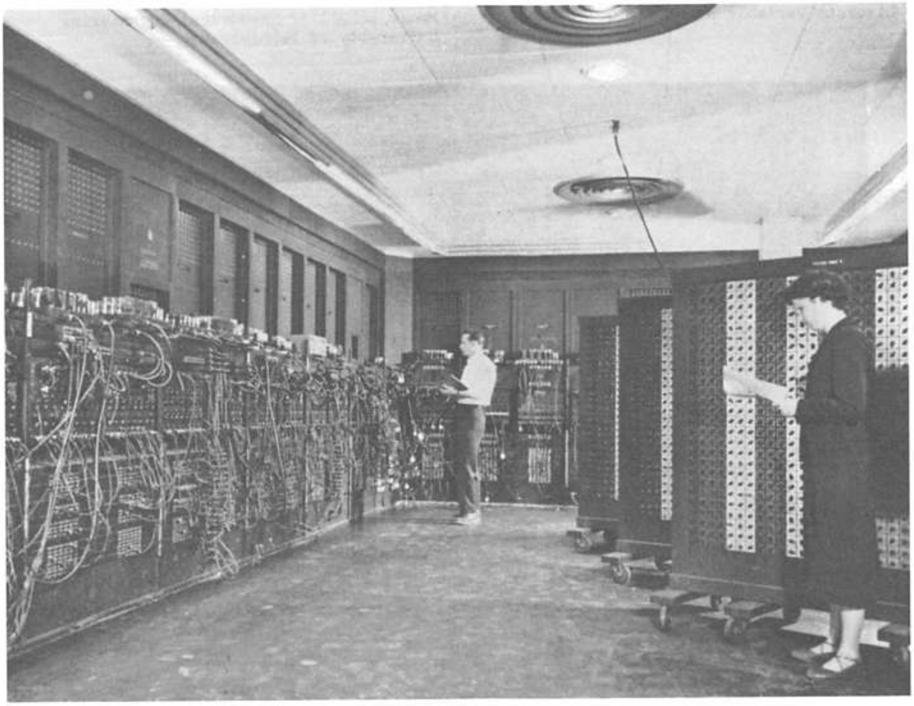
était répété autant de fois que nécessaire. Plusieurs siècles passèrent avant que le Grec Euclide ne décrive, vers 300 av. J.-C., un algorithme pour calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres. L'algorithme d'Euclide, tel qu'on le connaît actuellement, s'implémente en général sous la forme récursive.

En fait, ces algorithmes ne sont pas le fruit d'un processus continu d'évolution, mais sont restés longtemps des cas isolés. Dans l'histoire de l'utilisation de ce procédé visant à réaliser automatiquement des tâches (ce qui est l'acceptation actuelle du terme d'algorithme), le fait marquant fut la programmation des métiers à tisser initiée par Jacquard. Le métier de Jacquard déterminait le dessin de la toile au moyen de cartes perforées. Les cartes comportaient donc ce qu'on appellerait maintenant le « programme » que la machine devait exécuter. Charles Babbage appliqua l'idée des cartes perforées au calcul dans ses machines. Dans la perspective actuelle, ces programmes primitifs étaient déjà écrits en langage machine et c'est pourquoi Ada Byron est reconnue comme étant la première programmeuse. Pourtant, la notion de programme stocké en mémoire restait encore à découvrir.

Malgré ces premières tentatives et les travaux théoriques des années 1930 et 1940, en particulier ceux utilisant le lambda-calcul et la machine de Turing, la description des algorithmes ne se développa pleinement qu'à l'avènement des premiers ordinateurs : le Colossus, le Mark I, l'ENIAC, l'EDSAC et l'UNIVAC. Le stockage des langages de programmation en mémoire apparut comme une solution idéale pour diminuer la durée de calcul et simplifier le travail que représentait la manipulation directe du *matériel informatique*, ce qui était jusque-là la seule manière de programmer.

La programmation des premiers ordinateurs se faisait en système octal, c'est-à-dire en base huit. Parmi les premiers langages à permettre la représentation de symboles, on trouve le *Short Order Code* (1949) de John Mauchly ou le *Sort-Merge Generator* de Betty Holberton. À l'origine, le premier opérait en un langage interprété BINAC. Les routines correspondant aux symboles se trouvaient en mémoire et étaient invoquées par le système. L'UNIVAC hérita de ce système. Les programmes écrits dans ce langage interprété s'avéraient environ 50 fois plus lents que s'ils étaient en langage machine.

Le *Sort-Merge Generator* était quant à lui une application développée pour l'UNIVAC, qui, après spécification préalable des fichiers qu'il devait utiliser, produisait le programme en code machine pour ordonner et mélanger les fichiers contenant les opérations d'entrée et de sortie.

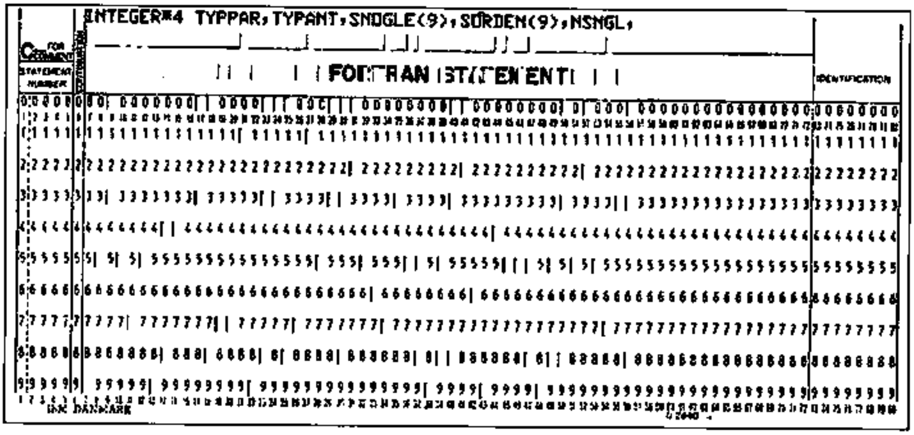


Betty Holberton, qui sur cette photo est en train de réaliser des contrôles de l'ENIAC, développa l'un des premiers langages de programmation.

Ces systèmes de programmation automatiques (*automatic programming systems*) se limitaient à fournir des codes d'opération mnémotechniques et des adresses symboliques ou encore à obtenir des sous-routines d'une bibliothèque de routines et à y insérer le code, après y avoir substitué les adresses des opérandes. Certains systèmes permettaient l'interprétation d'opérations en virgule flottante et d'indexation (*indexing*). À l'exception du compilateur A-2 et du système algébrique de Laning et Zierler, et jusqu'en 1954, même les systèmes les plus puissants ne donnaient rien de plus qu'une machine artificielle avec un code différent de celui de la machine réelle.

Les problèmes posés par ce modèle n'étaient pas seulement techniques, mais bien économiques. Le coût des programmeurs travaillant pour un centre de calcul dépassait celui de l'ordinateur, et ce de manière croissante, car le prix de la technologie décroissait, et avec lui, le prix des ordinateurs. De plus, entre 25 % et 50 % du temps d'utilisation de l'ordinateur se perdait en programmation et en débogage (*debugging*). Les systèmes de programmation automatique divisaient la vitesse de la machine par un facteur allant de 5 à 10. Les vendeurs exagéraient tant les prestations de ces systèmes, dans la pire des traditions commerciales, qu'ils finirent par générer au contraire un grand scepticisme à leur égard.

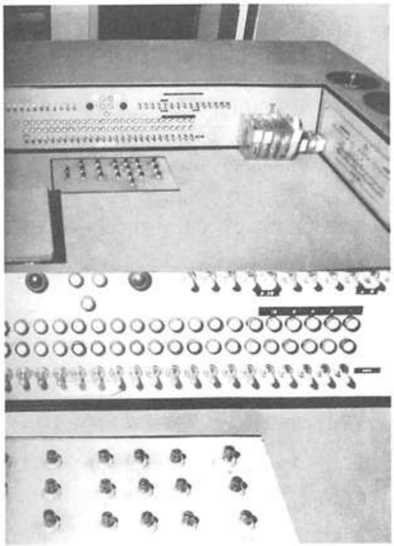
Dans ce contexte, à l'été 1954, IBM commença à développer le langage FORTRAN (*FORmula TRANslation*) sous la direction de John Backus, dans l'intention de résoudre tous ces problèmes. Le compilateur visait surtout à obtenir un code objet efficace et il y parvint. De fait, la qualité du code objet et les transformations qu'il effectuait pour obtenir un programme efficace surprirent même ceux qui avaient participé à son implémentation.



Carte perforée réalisée en langage FORTRAN.

Avec l'apparition du FORTRAN, le programmeur pouvait spécifier des procédures mathématiques avec un langage précis. Comme celui-ci permettait un certain niveau d'abstraction, le code pouvait être traduit pour différentes machines. Ainsi apparurent les premières abstractions de données. L'information était conservée dans des positions mémoire et elle n'était pas stockée sous forme d'une séquence de bits, mais comme une valeur entière ou réelle. Dans ce langage, apparaissaient certaines des constructions de base des langages impératifs : le branchement conditionnel (IF <condition> saut-vrai saut-faux) et le bouclage (DO fin-boucle variable=début, fin, pas).

Toute une série de programmes suivit le FORTRAN en utilisant aussi la notion d'abstraction des données : l'ALGOL-60, dont l'un des créateurs fut le scientifique hollandais Edsger Dijkstra, le COBOL et le LISP, prédécesseurs des langages fonctionnels dont on parlera en détail plus loin. Chacun d'entre eux comportait les types de données nécessaires aux applications que l'on souhaitait construire. Ces langages étaient spécifiques des problèmes particuliers que l'on voulait résoudre. Le PL/I, en revanche, fut conçu avec un objectif général et c'est pourquoi il comportait toutes les innovations des langages précédents, ce qui le rendit énorme et difficile à utiliser.



La console Electrologica X1, opérationnelle entre 1958 et 1965, utilisait le langage ALGOL-60.

La génération suivante des langages fut moins ambitieuse, mais plus efficace. Parmi eux se distinguèrent le Simula-67 et le Pascal. Au lieu de proposer un ensemble exhaustif d'abstractions définies a priori, ils disposaient de mécanismes flexibles et adaptés à la définition de nouvelles abstractions. Le Pascal et l'ALGOL-68 permettaient de définir de nouveaux types au moyen des types de base et de certains constructeurs (*array*, *record*, etc.). Un nouveau type pouvait être vu comme une abstraction construite sur une représentation interne et un ensemble d'opérations lui était associé. Mais ce modèle présentait un problème, en dépit de sa flexibilité. Si l'on pouvait accéder à la représentation de la structure des types ainsi définis et en modifier les valeurs, il n'était cependant pas possible d'accéder à la représentation des types prédéfinis. On ne pouvait pas manipuler directement un objet prédéfini, mais seulement au travers des opérations. Cela était dû au fait que le langage ne différenciait pas deux niveaux d'abstraction : celui où le programmeur utilisait un type comme un objet et celui où il implémentait ce type. Cela rendait difficiles la lecture des programmes, la correction d'erreurs et les modifications éventuelles. Quand les programmes atteignaient une certaine taille, la tâche devenait colossale.

La solution apparut du côté des types abstraits de données avec la différentiation des deux niveaux et l'occultation de l'information, et les langages qui les supportent, comme Ada, Modula-2 et CLU. Au niveau auquel le programmeur utilisait le type comme un objet, il n'était pas possible d'accéder à la structure qui l'implémentait. La manipulation ne pouvait se faire qu'au moyen d'opérations spécifiées dans l'interface. La représentation était complètement cachée. Au niveau de l'implémentation, on définissait les opérations spécifiées dans l'interface avec la structure qui les supportait.

Comme le programmeur connaissait les opérations d'un type et leur comportement, mais pas leurs représentations, il raisonnait en termes d'abstraction. Tout changement dans l'implémentation qui ne modifiait pas l'interface n'affecterait pas les modules qui l'utiliseraient, puisqu'on ne pouvait accéder à la représentation, mais seulement aux opérations de l'interface.

Ces mécanismes d'abstraction permettaient aux langages de structurer les programmes en termes d'objets, c'est-à-dire de représenter le type au côté de ses opérations. Cette structuration était optionnelle dans certains langages, comme Ada et Modula-2, mais obligatoires dans d'autres. En langage CLU, le programmeur devait rassembler les données de l'application en classes, appelées *clusters*. C'était la même chose pour les langages orientés objet qui comportaient, en plus des objets, la notion d'héritage, qui permettait de définir un objet à partir d'un autre, prédéfini.

La programmation orientée objet est un modèle de programmation qui utilise des objets et leurs interactions pour concevoir des applications et des programmes d'ordinateur. Elle a été développée avec deux objectifs : l'implémentation de programmes à grande échelle et la modélisation du raisonnement humain par l'intelligence artificielle. Dans ce dernier domaine, elle a contribué au développement de techniques de structuration de la connaissance, rassemblant en une entité unique l'information et les propriétés relatives à un même concept.

Le premier langage qui rassembla les données et les procédés en une entité unique fut le Simula-I. Destiné à traiter des problèmes de simulation, comme son nom l'indique, il a été développé au *Norwegian Computing Center* (NCC), sous la direction du mathématicien et homme politique norvégien Kristen Nygaard. La première version sortit en 1965. Elle fut suivie de Simula-67, plus général, qui formalisa les concepts d'objet et de classe, et introduisit également l'héritage. Plus tard, le langage Smalltalk-80, successeur de Simula et de deux versions préalables, Smalltalk-72 et Smalltalk-76, généralisa le concept d'objet et le convertit en l'unique entité que le langage manipulait. Le Smalltalk était un langage orienté objet qu'on peut considérer de type pur : les classes d'objets étaient aussi des objets et les structures de contrôle étaient les opérations sur les classes appropriées. Au début des années 1970, le Xerox Palo Alto Research Center, connu sous le nom de Xerox PARC, vit les premiers pas du système Dynabook, un outil personnel pour la gestion de l'information, avec une interface à base de fenêtres, de menus et d'icônes, c'est-à-dire une interface graphique, GUI en anglais, pour *Graphical User Interface*, telle que nous la connaissons aujourd'hui. Le Dynabook fut conçu par l'Américain Alan Kay dans le but de faire connaître le monde des ordinateurs aux enfants. Il était écrit en BASIC et fut achevé en 1972. Il comportait le mécanisme de passage de messages ainsi que les concepts de classe et d'instance de Simula.

Alan Kay lorsqu'il s'est vu décerné le titre de docteur honoris causa *par l'université espagnole de Murcie, qui souhaitait le récompenser pour sa contribution au développement de l'informatique. Cette cérémonie eut lieu le 28 janvier 2010.*

Actuellement, il existe beaucoup de langages orientés objet comme Eiffel, C++, etc. Certains d'entre eux sont des extensions d'autres langages. C++ est une extension du langage C, développée par le Danois Bjarne Stroustrup, intégrant les classes de Simula. CLOS fut développé pour normaliser le système d'objets de Common LISP. Les notions d'objet et d'héritage ont été utilisées dans le domaine de l'intelligence artificielle pour développer les langages à base de langages de *frames*, comme KRL ou KL-ONE, ou des langages d'acteurs, comme Act1, Act2, Act3, ABCL/1…

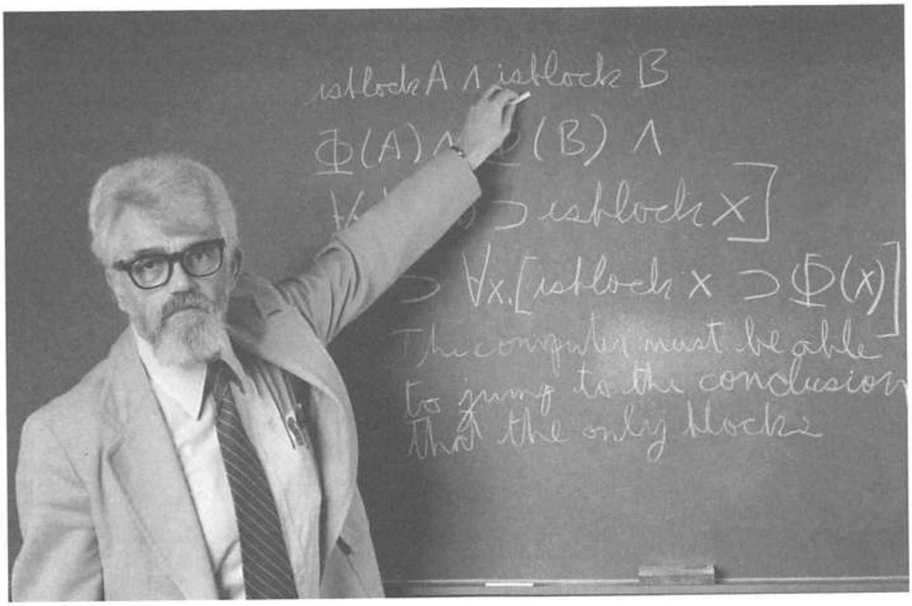
L'abstraction et les objets sont présents dans tous les langages récents, que ce soit dans ceux définis comme langages orientés objet, tels que Java et Python, ou dans ceux définis comme impératifs, mais qui comportent des constructions orientées objet, tels que le PHP. Mais on a également développé des langages orientés vers la construction rapide d'applications et des langages de *scripts*. C'est ainsi que fonctionnent PHP ou JavaScript, tous deux développés dans les années 1990. Le but de ces langages est d'accélérer et de faciliter la création de programmes. Il est certain qu'ils y parviennent dans le cas de petits programmes, mais, par rapport aux langages précédents, la conception de programmes de grandes dimensions s'avère plus compliquée. Quoiqu'il en soit, l'influence des langages orientés objet dans l'élaboration de programmes a fourni de nouveaux outils, comme les langages de modélisation tels que l'UML.

Le modèle fonctionnel

Dans les langages impératifs, le calcul s'effectue par la modification des variables, réalisée par assignation. Un programme en langage impératif est structuré comme la machine de Von Neumann, avec des cellules dans lesquelles figurent les valeurs. L'assignation d'une variable n'est rien de plus que le changement de la valeur d'une cellule. Dans les langages fonctionnels, le résultat s'obtient en appliquant des fonctions, définies par composition ou récursivité.

Ces langages proviennent des travaux de John McCarthy, créateur de l'expression « intelligence artificielle », au sein du MIT (Institut de Technologie du Massachusetts), qui furent publiés en 1960 dans la revue *Communications of the ACM*, publication mensuelle de l'Association américaine d'informatique (ACM), la société déjà ancienne qui décerne le prix Turing.

Tout commença en 1958, lorsque McCarthy étudiait l'usage d'opérations avec des listes chaînées pour un programme de différentiation symbolique. La différentiation étant un processus récursif, il utilisa des fonctions récursives. Il pensa qu'il serait intéressant de passer des fonctions comme arguments à d'autres fonctions. Le projet d'implémentation de ce nouveau langage commença à l'automne de cette même année. Le résultat, publié deux années plus tard, s'intitulait « *Recursive Functions of Symbolic Expressions and Their Computation by Machine, Part I* » (Fonctions récursives d'expressions symboliques et leur calcul par une machine, Partie I ; la partie II ne fut jamais publiée). Cet article constitue la première version du LISP (*List Processing*), premier des langages fonctionnels et pionnier sous plusieurs aspects dans le domaine de l'informatique. Pour le définir, McCarthy utilisa la notation d'Alonzo Church, le lambda-calcul.



John McCarthy, créateur de l'expression « intelligence artificielle », photographié en 1980 à l'université de Stanford en Californie.

LE LAMBDA-CALCUL

Ce modèle de calcul fut défini par Church et Kleene au début des années 1930 et présente une capacité d'expression équivalente à la machine de Turing, bien qu'il fonctionne différemment. D'un point de vue formel, le lambda-calcul utilise des expressions et des règles de réécriture des expressions qui modélisent l'application de fonctions ou de calcul. Prenons par exemple la définition de vrai et de faux :

vrai : λxy.x

faux : λxy.y.

La fonction « AND » est donc définie par :

AND: λpq.p q p.

Ainsi, pour calculer « AND vrai faux », on remplace chaque terme par son expression équivalente en lambda-calcul :

(λpq.p q p) (λxy.x) (λxy.y).

On applique ensuite les règles d'écriture qui nous donnent l'expression (λxy.y), équivalente à faux, comme nous l'avons dit. Les nombres et les opérations se définissent de manière similaire.

LISP présentait les données et les programmes de manière uniforme. Il utilisait la récursivité comme structure fondamentale de contrôle et évitait les effets de bords, inéluctables en programmation impérative. Les expressions conditionnelles et la notation préfixée, dite aussi notation polonaise de Lukasiewicz, ont été introduites dans ce langage.

LA NOTATION PRÉFIXÉE OU POLONAISE

Les expressions mathématiques s'écrivent avec le symbole d'opération correspondant placé devant les opérandes. Ainsi :

$$(a + b) - (c \times d)$$

s'écrit en notation polonaise :

$$- + ab \times cd.$$

Vers 1965, Peter Landin inventa un nouveau langage fonctionnel appelé l'ISWIM (*If You See What I Mean*, qui signifie « si vous voyez ce que je veux dire »), basé sur le LISP et le lambda-calcul. L'ISWIM produisit toute une famille de langages fonctionnels (ML, FP, Miranda...). À cette époque, la programmation fonctionnelle n'intéressait qu'un nombre réduit de chercheurs, mais on lui prêta plus d'attention à partir de 1978, lorsque John Backus, inventeur du FORTRAN, publia son article « *Can programming be liberated from the Von Neumann style?* » (La programmation peut-elle échapper au style de Von Neumann ?). Backus critiquait durement les langages de programmation conventionnels et demandait à ce que soit développé un nouveau modèle, qu'il appela programmation fonctionnelle, qui mette l'accent sur les fonctions opérant sur d'autres fonctions. Dans son article qui lui valut le prix Turing, il décrivit le langage FP (*Functional Programming*), dans lequel il n'y avait pas de variables. Ce coup de poing sur la table réveilla l'intérêt des chercheurs pour les langages fonctionnels et déclencha l'apparition de nouveaux langages.

Actuellement, il existe deux grandes familles de langages fonctionnels : celle du style de LISP et celle du style d'ISWIM. Dans la première, on retrouve des dialectes de LISP, comme le Common LISP, et des langages à part entière, comme Scheme. Dans la seconde se trouve le Standard ML, résultant de la normalisation du ML et du Hope, deux langages développés à l'université d'Édimbourg. Le ML est un langage fonctionnel très typé (*strongly-typed language*), à la différence de LISP, ce qui signifie que toute expression relève d'un type que le système déduit au moment de la compilation (type statique). Le programmeur peut aussi intégrer de nouveaux types grâce à des mécanismes de définition de types abstraits de données. Le ML permet la définition de modules et de modules génériques, appelés foncteurs. Dans le langage Hope, à la différence du ML, les définitions nécessitent une déclaration explicite des types.

LES LANGAGES FONCTIONNELS : DES EXEMPLES D'IMPLÉMENTATION

Les exemples suivants correspondent à la définition du factoriel et mettent en valeur les similitudes de syntaxe entre les deux grandes familles de langages fonctionnels. Dans les langages LISP (Scheme, Hope et ML), il existe des variables, même si elles sont fonctionnelles, et la définition du factoriel est récursive et semblable à celle que nous avons montrée en Java. Dans le langage FP en revanche, il n'existe pas de variables. La définition en FP utilise la fonction *iota*, qui, appliquée à un nombre, renvoie la liste de tous les nombres naturels compris entre un et ce nombre. On applique à cette liste la construction /*, qui multiplie entre eux ses éléments. Formellement, /op étend une opération binaire à une liste.

Définition en LISP :

```
(defun factorial (n)  (if (= n 0) 1 (* n (factorial (– n 1)))))
```

Définition en Scheme :

```
(define factorial
    (lambda (n)
      (if (= n 0) 1 (* n (factorial (– n 1))))))
```

Définition en Hope :

```
dec fact : num – > num;
– – – fact 0 < = 1;
– – – fact n < = n*fact(n–1);
```

Définition en ML :

```
fun f (0 : int) : int = 1
  If (n : int) : int = n * f (n–1)
```

Définition en FP :

```
fact ; /* op iota
```

LES LISTES INFINIES EN LANGAGE HASKELL

Les définitions suivantes de deux listes infinies en Haskell permettent de comprendre la différence qui existe entre évaluation paresseuse ou retardée et évaluation immédiate. Les définitions sont récursives, c'est-à-dire qu'elles s'appellent elles-mêmes.

La première correspond à la liste des entiers naturels. Par induction, on suppose que la liste est déjà définie correctement. On incrémente d'un pas tous les éléments de la liste. On obtient alors la liste 2, 3, 4..., à laquelle on ajoute le nombre 1. Dans la définition, on augmente de un les entiers de toute la liste grâce à la construction « map (+1) naturels ».

La deuxième liste regroupe les nombres de Fibonacci. Supposons que la liste existe déjà. La construction des nombres se fait par l'alignement de chaque nombre avec le suivant, puis la somme des nombres alignés. Dans la définition, on aligne « listafibs » avec la queue de listafibs, qui est calculée avec « tail listafibs ». Ensuite, on ajoute les paires formées d'un nombre de chaque liste grâce à « zipWith (+) ».

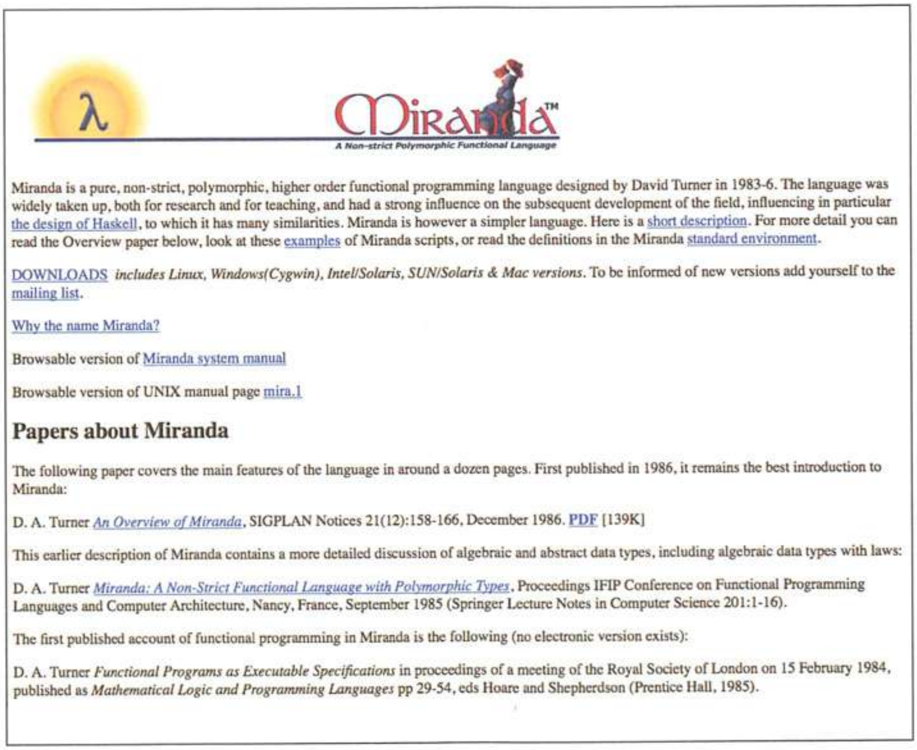
```
naturels = 1 : map (+1) naturels
listafibs = 0 : 1 : zipWith (+) listafibs (tail listafibs)
```

Ces définitions fonctionnent parce que l'évaluation est retardée. L'évaluation immédiate, employée par la plupart des langages, ferait que l'ordinateur évaluerait les expressions indéfiniment. Il est à noter que la définition des naturels demanderait de définir d'abord la liste infinie, puis d'ajouter un à tous ses éléments.

Les langages LISP et ML sont à évaluation immédiate (*eager evaluation*), c'est-à-dire que tous les arguments d'une fonction sont évalués avant que celle-ci ne soit appliquée.

Il existe aussi des langages sans évaluation ou à évaluation retardée, tels que le Haskell, le Lazy ML, certaines versions de Hope, mais surtout le Miranda, défini par David Turner à partir de KRC et de SASL. Dans ces langages, l'évaluation d'un argument ne se fait que lorsqu'il est nécessaire d'en connaître la valeur, ce qui permet de construire des programmes qui ne termineraient jamais s'ils utilisaient une évaluation immédiate.

On peut définir, par exemple, une liste infinie de nombres qui ne sera jamais évaluée dans son intégralité, mais dont seuls les termes nécessaires seront évalués à chaque instant.



Miranda™

A Non-strict Polymorphic Functional Language

Miranda is a pure, non-strict, polymorphic, higher order functional programming language designed by David Turner in 1983-6. The language was widely taken up, both for research and for teaching, and had a strong influence on the subsequent development of the field, influencing in particular the design of Haskell, to which it has many similarities. Miranda is however a simpler language. Here is a short description. For more detail you can read the Overview paper below, look at these examples of Miranda scripts, or read the definitions in the Miranda standard environment.

DOWNLOADS *includes Linux, Windows(Cygwin), Intel/Solaris, SUN/Solaris & Mac versions*. To be informed of new versions add yourself to the mailing list.

Why the name Miranda?

Browsable version of Miranda system manual

Browsable version of UNIX manual page mira.1

Papers about Miranda

The following paper covers the main features of the language in around a dozen pages. First published in 1986, it remains the best introduction to Miranda:

D. A. Turner *An Overview of Miranda*, SIGPLAN Notices 21(12):158-166, December 1986. PDF [139K]

This earlier description of Miranda contains a more detailed discussion of algebraic and abstract data types, including algebraic data types with laws:

D. A. Turner *Miranda: A Non-Strict Functional Language with Polymorphic Types*, Proceedings IFIP Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture, Nancy, France, September 1985 (Springer Lecture Notes in Computer Science 201:1-16).

The first published account of functional programming in Miranda is the following (no electronic version exists):

D. A. Turner *Functional Programs as Executable Specifications* in proceedings of a meeting of the Royal Society of London on 15 February 1984, published as *Mathematical Logic and Programming Languages* pp 29-54, eds Hoare and Shepherdson (Prentice Hall, 1985).

Page d'accueil du site dédié à Miranda,
le langage de programmation conçu par David Turner.

Le paradigme logique

Alors que les familles de langages impératifs et fonctionnels étaient déjà bien implantées, une alternative se présenta. Le troisième modèle fit intervenir les langages logiques. La programmation logique consiste à appliquer à la conception de langages de programmation la logique philosophique, science formelle étudiant les principes de démonstration et d'inférence valide. Elle ne doit pas être confondue avec la logique de calcul, logique mathématique appliquée aux problèmes de calcul.

Les modèles de programmation impérative et fonctionnelle présentent un programme comme une fonction calculant un résultat à partir de valeurs données en entrée. Dans un langage impératif, par exemple, le programme est un ordre de lecture de fichiers en entrée et, après avoir effectué les calculs, d'écriture des sorties dans d'autres fichiers. Un programme en langage logique, lui, implémente une relation. Au moyen d'un ensemble de règles, les clauses de Horn, le programmeur donne les faits qui sont vrais, à partir desquels l'utilisateur peut demander si une relation est vraie ou fausse. Le calcul se fonde sur le principe de résolution de Robinson et consiste à évaluer si la relation considérée est vraie ou fausse ou à fournir les cas où elle est vraie.

LES CLAUSES DE HORN

Les clauses de Horn sont un ensemble de règles logiques du type « si l'antécédent est vrai, alors le conséquent est vrai ». On peut dire que ce sont des implications avec un ensemble de prémisses et un seul conséquent. Les prémisses peuvent être 0, 1 ou plus d'une :

$$a1 \wedge a2 \wedge \ldots \wedge aN \rightarrow b.$$

Le langage logique par excellence est PROLOG, pour *PROgrammation en LOGique*. Il a été développé en 1972 et c'est le seul de cette famille à être encore utilisé aujourd'hui. La première version de ce langage a été conçue sous la direction d'Alain Colmerauer dans le groupe d'Intelligence artificielle de l'université d'Aix-Marseille, avec la collaboration du logicien britannique Robert Kowalski, de l'université d'Édimbourg. C'est un langage né de la convergence de deux lignes de recherche : la première, celle de Colmerauer, n'était pas directement liée au calcul, mais étudiait le traitement du langage naturel. La seconde, celle de Kowalski, étudiait la démonstration automatique de théorèmes. Les grammaires W, notation

UNE DÉFINITION EN PROLOG

Pour illustrer la programmation en PROLOG, voici un exemple d'un petit programme pour calculer les nombres naturels. On définit pour cela nat(*N*) qui est vrai uniquement lorsque *N* est un naturel. La définition est constructive dans le sens où le programme calculera les entiers naturels quand on lui demandera quelles valeurs de *N* satisfont le prédicat. Le programme se présente comme suit :

```
nat(N): −N = 0.
nat(N): −nat(Np), N is Np + 1.
```

La première ligne dit que zéro est un entier naturel. La deuxième ligne dit que, s'il existe un entier naturel *Np*, alors *Np* + 1 sera aussi un entier naturel. Plus formellement, le programme dit que *N* est un entier naturel si *N* égal zéro ou s'il existe un entier naturel *Np* tel que *N* égal *Np* + 1.

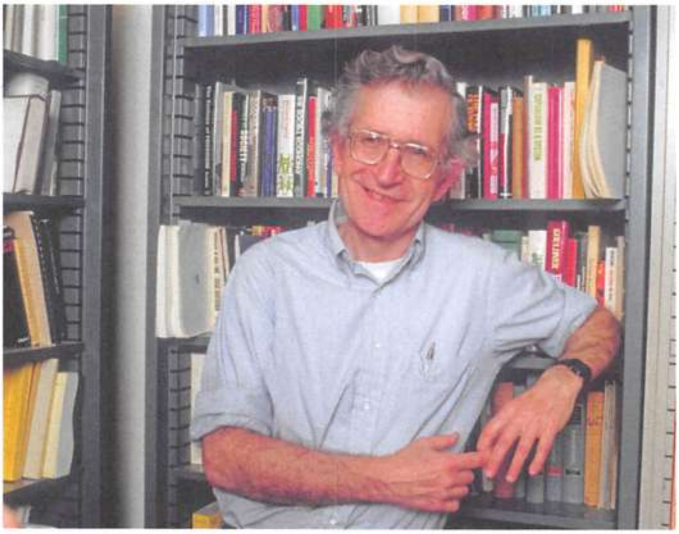
utilisée pour décrire l'ALGOL-68 et le langage Planner, développé à l'université de Stanford, influencèrent aussi le langage PROLOG. Le succès de PROLOG est dû à l'implémentation développée par David Warren, du groupe de Kowalski à Édimbourg. La « Machine abstraite de Warren » (WAM) exécutait les programmes à une vitesse comparable à celle atteinte par les programmes en LISP.

Description formelle des langages de programmation

La description syntaxique et sémantique des premiers langages de programmation se fit selon des méthodes informelles. La communauté scientifique se mit à considérer la question de la syntaxe. En 1960, pour décrire la syntaxe de l'ALGOL-60, John Backus et Peter Naur introduisirent la notation dite BNF (notation de Backus-Naur), qui, en plus de son utilité pour décrire formellement le langage, contribua grandement à son développement. Peu après qu'elle a été développée, on découvrit qu'elle présentait des similitudes fortes avec les règles de grammaire du sanscrit classique, établies au IVe siècle av. J.-C. par Pānini.

En même temps que se développait la BNF, le célébrissime Noam Chomsky, linguiste, philosophe et analyste politique, développait sa théorie des grammaires, que l'on connaît sous le nom de hiérarchie de Chomsky. Cette théorie classifiait les grammaires et les langages qu'elles génèrent en quatre types, selon leur capacité d'expression. Le type 3 regroupe les grammaires régulières, qui sont les plus restrictives. Le type 2 regroupe les grammaires non contextuelles, qui peuvent être décrites au moyen de la BNF. Le type 1 est constitué des grammaires sensibles au contexte et le type 0, les grammaires sans restriction, ces deux types présentant une plus grande expressivité que les deux précédents. La hiérarchie de Chomsky est liée à la capacité de calcul. Un système de calcul général pourra reconnaître des phrases de n'importe quel langage exprimé avec une grammaire de type 0. Une machine de Turing ou le lambda-calcul appartiennent à ce type de systèmes de calcul. Les automates réguliers relèvent de systèmes de calcul de type 3.

Des années plus tard, le Suisse Niklaus Wirth, lauréat du prix Turing et concepteur de nombreux langages, spécifia la syntaxe du langage Pascal, en introduisant des diagrammes syntaxiques et une extension de la BNF, la EBNF (*Extended BNF*). Bien que cette notation ne permît pas d'augmenter la capacité d'expression de la BNF, son usage s'est répandu et il existe actuellement des programmes qui génèrent automatiquement des reconnaisseurs syntaxiques à partir de descriptions de la syntaxe.



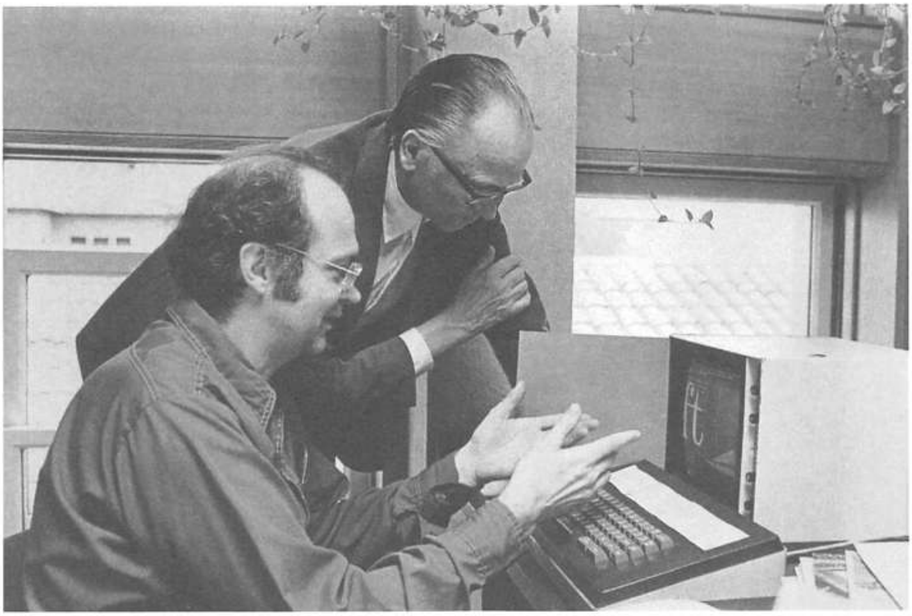
Le linguiste Noam Chomsky, créateur de la hiérarchie qui porte son nom.

La spécification formelle de la sémantique des langages de programmation, c'est-à-dire de la manière dont ils doivent se comporter, a connu moins de succès que celle de la syntaxe. Plusieurs formalismes ont été élaborés, mais jusqu'à aujourd'hui, aucun n'est aussi populaire que les modèles développés pour la syntaxe.

Le VDL (*Vienna Definition Language*), développé au laboratoire d'IBM de Vienne pour la spécification formelle du langage PL/I, a été proposé en premier. Il est constitué de deux parties : la première est un traducteur qui construit un arbre de syntaxe abstraite pour chaque programme PL/I. La seconde est un interpréteur qui spécifie comment le programme représenté par l'arbre doit être exécuté ou interprété. Cette sémantique est de type opérationnel et est intrinsèquement très détaillée. Comme le langage PL/I est vaste, irrégulier et rempli de cas particuliers, sa spécification formelle a produit un document énorme et difficile à comprendre. Sa taille lui a valu le surnom de VTD, initiales de *Vienna Telephone Directory* en anglais, soit « bottin téléphonique de Vienne ». Il constitue, malgré cela, une avancée importante dans ce domaine.

Le laboratoire de Vienne continua sur cette ligne de recherche et proposa une deuxième version : le VDM (*Vienna Development Method*), qui comportait les caractéristiques *ad hoc* permettant la spécification des langages de programmation impératifs. Développé en 1982, deux visions s'y rejoignent, celle de Dines Bjørner et celle de Cliff Jones, qui finiront par déboucher sur deux écoles de pensée dans le domaine de la programmation : l'école danoise et l'école anglaise. Le VDM a été utilisé pour les spécifications des langages Pascal et ALGOL-60, mais aussi pour un sous-ensemble de l'Ada'79.

D'autre part, en 1967, Robert Floyd montra comment on pouvait raisonner pour corriger un programme en associant des assertions aux arcs de son diagramme de flux. Une assertion est une formule logique qui relie les variables d'un programme. L'objectif est de donner une assertion qui soit toujours vraie à la fin du programme et qui relie les entrées et les sorties de celui-ci. Les techniques de Floyd ont été affinées et améliorées par le logicien britannique Charles Hoare, qui les exprima sous forme d'un ensemble d'axiomes et de règles d'inférence qu'il associa à la construction des langages de programmation, définissant ainsi la sémantique axiomatique. En 1973, Hoare et Wirth publièrent la spécification axiomatique d'un sous-ensemble du Pascal. Pendant qu'ils y travaillaient, ils trouvèrent quelques irrégularités dans la conception originale du langage, ce qui permit de l'améliorer. L'année suivante, Hoare et Lauer explorèrent l'utilisation complémentaire des sémantiques axiomatique et opérationnelle. Edsger Dijkstra introduisit l'usage de la précondition la plus faible en 1975.



Sur cette photo, Donald Knuth (à gauche) et Herman Zaph discutent des caractéristiques d'une nouvelle typographie informatique à l'université de Standford en Californie, en 1980.

Il existe d'autres manières de décrire la sémantique d'un langage. Les grammaires d'attributs apparurent en 1968, trouvées par l'un des plus célèbres experts en science informatique, connu aussi pour son sens de l'humour, Donald Knuth. Ces grammaires s'étudient sous forme extensive, en relation avec les techniques de compilation. Il existe un quatrième type, la sémantique dénotationnelle, développée à l'université d'Oxford par l'Américain Dana Scott et le Britannique Christopher Strachey, au début des années 1970. Elle attribue à chaque programme une signification, une dénotation (*denotation*) en terme d'entité mathématique, qui constitue normalement une application de valeurs d'entrée à des valeurs de sortie. Des systèmes ont été étudiés afin de générer des compilateurs à partir de la sémantique dénotationnelle, mais ils se sont montrés très peu efficaces jusqu'à aujourd'hui.

Ainsi, l'histoire de l'informatique est loin d'avoir atteint le point culminant qui surpasserait toutes les connaissances acquises et les avancées. Bien au contraire, son évolution est en cours, liée plus que jamais à celle de la technologie, qui offre des perspectives jusque-là inimaginables. Les langages informatiques non seulement configurent nos ordinateurs, mais aussi nos téléviseurs, téléphones mobiles, et même les plus insignifiants de nos appareils électroménagers. Une fois de plus, ce sont les premiers pas dans un nouveau monde. Comme nous l'avons vu, l'arrivée à ce stade n'a pas été le fruit du hasard, mais bien le résultat de la ténacité dont l'homme fait preuve pour développer sa connaissance. C'est un processus dans lequel le présent n'est qu'une étape vers un futur imprévisible et certainement étonnant.

Bibliographie

AL-KHWARIZMI, M. IBN MUSA, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, traduction de Jean-Pierre Levet d'après l'édition latine de Robert de Chesterdu (XIIe siècle), IREM de Poitiers, coll. « Cahiers d'histoire des mathématiques et d'épistémologie », 1997.

BENTLEY, P.J., *Le Livre des nombres*, traduction d'Anne-Marie Térel, Paris, Eyrolles, 2009.

BOYER, C., *A History of Mathematics*, Hoboken, John Wiley & Sons Inc., 2011.

COELLO, C.A., *Breve historia de la computación y sus pioneros*, México, Fondo de Cultura Económica, 2003.

IFRAH, G., *Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontées par les nombres et le calcul*, Paris, Robert Laffont, 1994.

SMITH, D.E., *History of Mathematics*, New York, Dover Publications, œuvre de 1923 rééditée en 1958.

Index analytique

Remerciements :
à Cédric Villani et à toute l'équipe de l'Institut Henri Poincaré ; à Étienne Ghys et à toute l'équipe de *Images des mathématiques* ; à Hervé Lavergne, Pascale Sensarric, Hervé Morin et Sabine Gude du journal *Le Monde.*

Collection "Le monde est mathématique"
Titre original : "El mundo es matemático",
Éditée en langue espagnole.

Édité par RBA France, SARL
105, avenue Raymond-Poincaré
75016 Paris
R.C.S. Paris 533 671 095
Gérant : Enrique Iglesias
Directeur de la publication : Frédéric Hosteins
Responsable marketing : Sophie Thouvenin
Responsable éditoriale : Clélia Fortier-Kriegel

Graphisme couverture : Manon Bucciarelli
Graphisme intérieur : Babel, disseny i maquetació, S.L ; version française : Nord Compo
Crédits photographiques : **Age-Fotostock** : 80, 110 ; **Agence Efe** : 135 ; **Aisa** : 93 ; **Album** : 65 ; **Album Akg** : 30 b, 34, 73, 89, 109 ; **Album Lessing** : 28, 38, 74 ; **Archives RBA** : 15 b, 19, 35, 36 a et b, 40, 42, 44, 48 a et b, 60, 61, 63, 64, 68, 72, 75, 76 a et b, 77, 79, 83, 84, 86 a, 87 b, 92, 94, 98, 104, 114, 116, 118, 119, 128, 131, 141 ; **Biblioteca Nazionale di Firenze** : 70 b ; **Bionet** : 14 ; **British Government Art Collection** : 100 ; **Columbia University** : 21 ; **Corbis** : 70 a, 137, 144, 145 ; **Getty Images** : 17 ; **Istockphoto** : 20, 39 ; **J. A. V. Turck** : 86 b, 88 b ; **Jon Bodsworth** : 15 a ; **La companie d'assurance « Le Soleil »** : 88 a ; **Leipziger Universitätsbibliothek** : 30 a ; **Los Alamos National Laboratory** : 117 ; **Marie-Lan Nguyen, Musée du Louvre** : 16 ; **Matt Crypto** : 112 ; **Museum of Science, Boston** : 120 ; **Museum of Science and Industry in Manchester** : 96 ; **National Portrait Gallery** : 97 ; **Nolege** : 67 ; **Peter Frankfurt** : 133 ; **Sweeper Tamonteen** : 46 ; **Ta Neter Foundation** : 12 ; **Toulouse, Archevêché** : 87 a ; **Wilhelm Schickard** : 85
Traduit de l'espagnol par : Youssef Halaoua, Maguy Ly, Laurence Moinereau
Adaptation : Vianney Aubert, Charles-Optal Dorget
Adaptation éditoriale : Cobra SAS

DIFFUSION EN KIOSQUE
Service des ventes France :
PROMÉVENTE
(réservé aux dépositaires de presse)
Pour la Belgique :
AMP - 1, rue de la Petite-Île - 1070 Bruxelles
Pour la Suisse :
Naville - 38-42, avenue Vibert - CH 1227 Carouge – GE
Tel : (022) 308 04 44
Pour le Québec :
Express Mag
8155 rue Larrey
Anjou
QCH1J2L5

SERVICE CLIENTS (France)
Le Monde est mathématique
90, boulevard National
92258 La Garenne Colombes Cedex
Tél. : 01 75 43 31 80 (prix d'un appel national)
L'éditeur se réserve le droit d'interrompre la publication en cas de mévente.

ISBN Collection : 978-2-8237-0099-2
ISBN : 978-2-8237-0111-1
Dépôt légal : à parution
Imprimé et relié par CAYFOSA – Barcelone, Espagne
Achevé d'imprimer : mars 2013.

DU BOULIER À LA RÉVOLUTION NUMÉRIQUE

ALGORITHMES ET INFORMATIQUE

PAR VICENÇ TORRA,
AVEC UNE PRÉFACE DE DAVID AUGER

De tout temps, l'homme a compté, additionné, multiplié et consigné ses résultats sur divers supports. Découvert au Congo dans les années 1960, l'os d'Ishango datant de 20 000 ans avant Jésus-Christ en est l'une des premières preuves archéologiques. Et des papyrus égyptiens aux outils de calcul romains tels que l'abaque, des algorithmes arabes aux premiers calculateurs, les méthodes de calcul ont toujours été le reflet des technologies de leur époque et des formes de numération propres à chaque culture. Un fabuleux voyage au cœur des algorithmes et de la numération qui, des premières traces écrites de nombres nous conduira à l'époque du calcul numérique et des langages de programmation où des outils de plus en plus puissants permettent de réaliser des calculs toujours plus complexes.

« Je vous invite à nous suivre dans l'exploration de ce monde mathématique qui n'est autre que notre monde à tous ».

Cédric Villani