

# Mathématiques financières et actuarielles – Partie II

## Introduction aux risques d'assurance

Avril 2015, version 1.0

Aymric Kamega, Actuaire  
[aymric.kamega@univ-brest.fr](mailto:aymric.kamega@univ-brest.fr)

- 1. Risques financiers et modèles associés**
- 2. Risques liés à la durée de vie humaine et modèles associés**
- 3. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 1 / formule standard)**
- 4. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 2 / ORSA)**

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : actions

Le cours d'une société cotée est sensé refléter sa « valeur fondamentale » (somme de ses revenus futurs actualisés), telle qu'elle peut ressortir d'une analyse économique de l'activité de l'entreprise et de ses perspectives.

Dans ce cas, on a (en faisant tendre  $n$  vers l'infini) : 
$$P_{t,n} = \sum_{h=1}^n \frac{E(D_{t+h})}{(1+r)^h}$$

Les écarts entre la valeur fondamentale et la capitalisation boursière d'une société sont en général interprétés comme la conséquence de comportements spéculatifs qui auraient pour conséquence de créer un décalage entre l'« économie réelle » et le monde de la finance.

Cette dichotomie entre d'une part une analyse économique objective et d'autre part un comportement largement irrationnel des marchés boursiers peut toutefois être dépassée au prix d'une réflexion sur la nature de l'aléa sous-jacent à la détermination de la valeur.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : actions

Les modèles classiques de valorisation financière d'actifs de type « actions » se sont développés avec l'hypothèse sous-jacente de rendements gaussiens (le modèle de Black et Scholes en est devenu l'archétype).

De nombreuses études empiriques montrent que les prix observés sur les marchés ont des comportements très éloignés de l'hypothèse de rendements gaussiens (cf. Mandelbrot [2005]).

Le défaut majeur de l'hypothèse gaussienne est de sous-estimer très sensiblement les variations de grande amplitude du rendement.

Un modèle prétendant à un certain réalisme ne saurait donc faire l'économie d'une prise en compte du caractère non gaussien des rendements de l'actif.

## 1.1. Risques financiers : actions

On considère ainsi les modèles suivants :

- Black et Scholes [1973] : 
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

- Merton [1976] : 
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\mu - \lambda k) dt + \sigma dB(t) + dP$$
 avec  $P$  processus de Poisson.

- Heston [1993] : 
$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sqrt{V(t)} dB_1(t)$$
 avec 
$$dV(t) = a(\theta - V(t)) dt + b\sqrt{V(t)} dB_2(t)$$

- Hardy [2001] : 
$$\frac{dS(t)}{S(t)} \Big|_{\rho_t} = \mu_{\rho_t} dt + \sigma_{\rho_t} dB(t)$$
 avec  $p_{ij} = \Pr[\rho_{t+1} = j | \rho_t = i]$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2$

## 1.1. Risques financiers : taux

Contrairement aux actions, pour les produits de taux ce sont des variables d'état déterminant la structure des taux qui sont modélisées.

Le prix d'une obligation est obtenu comme combinaison linéaire des prix des zéro-coupons, déduit de la modélisation des taux d'intérêt. Ainsi, on a (où  $P(t, T)$  est le prix en  $t$  du zéro-coupon de maturité  $T$ ) :

$$O(T) = N \times \left( \gamma \sum_{i=1}^T P(0, i) + P(0, T) \right)$$

avec

$$P(0, t) = E \left[ \exp \left( - \int_0^t r(u) du \right) \right]$$

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt sont nombreux mais peuvent toutefois être classés en deux catégories :

- modèles d'équilibre partiel ou d'équilibre général,
- modèles fondés sur l'absence d'arbitrage.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles d'équilibre)

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court.

En pratique, le taux d'intérêt semble poussé, au cours du temps, à revenir vers une moyenne de long terme lorsqu'il s'en éloigne : quand  $r(t)$  est élevé, la tendance est à la baisse, et vice versa. Le modèle classique dans ce domaine est celui de Vasicek :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW_t$$

Dans le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif. À partir d'un modèle d'équilibre général, Cox, Ingersoll et Ross obtiennent une dynamique tel que le taux court n'est jamais négatif. Ce modèle s'écrit :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r} dW_t$$

Ici, l'écart-type instantané est proportionnel à la racine carré du taux court : lorsque le taux court diminue, l'écart-type fait de même. En outre, lorsque ce taux est nul, il reste une tendance positive égale à  $abdt$ , sans terme stochastique.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles d'équilibre)

Les modèles présentés ci-dessus sont des modèles à un facteur, ie qu'un seul facteur est à l'origine de l'évolution de l'ensemble de la courbe des taux.

Leur principale limite est qu'ils impliquent que les taux évoluent de façon parfaitement corrélée pour toutes les maturités (toute la courbe des taux étant déterminée par le seul taux court  $r$ ), ce qui n'est pas le cas en pratique.

Parmi les modèles multifactoriels, on trouve le modèle de Hull et White à deux facteurs, basé sur une spécification de la dynamique du taux court (noté  $r_t$ ) et du taux long (noté  $l_t$ ), qui reprend l'approche de retour à la moyenne du modèle classique de Vasicek :

$$dr_t = \kappa_r (l_t - r_t) dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

L'inconvénient des modèles ci-avant est que la courbe initiale des taux est un output qui ne s'ajuste pas automatiquement à celle observée en date courante.

Un modèle fondé sur l'AOA est construit de façon à être cohérent avec la structure par termes observée aujourd'hui (la courbe initiale est alors un input).

Hull et White ont ainsi généralisé le modèle de Vasicek afin de le rendre compatible avec la courbe des taux actuelle :

$$dr = (k(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

Le modèle de Black et Karasinski, qui ne permet pas aux taux d'intérêt de devenir négatifs, est également fondé sur l'AOA :

$$d \ln(r) = (k(t) - a \ln(r_t))dt + \sigma dW_t$$

Enfin, il existe également en AOA le modèle de Ho et Lee :

$$dr = k(t)dt + \sigma dW_t$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Outre les modèles cités précédemment, on trouve parmi les modèles d'absence d'arbitrage la classe de modèles HJM qui modélisent la dynamique des taux *forward* instantanés dans un cadre très général. HJM suppose que le taux *forward* instantané suit le processus d'Îto suivant :

$$df(t, T) = \mu(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t$$

soit :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \mu(s, T) ds + \int_0^t \sigma(s, T) dW_s$$

Le résultat fondamental de HJM est que sous la probabilité risque neutre (RN), la tendance de la dynamique du taux forward est donnée par :

$$\mu(t, T) dt = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$$

HJM ne propose donc pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail. Les applications les plus connues sont celles avec le modèle de Ho et Lee et avec le modèle de Hull et White / Vasicek généralisé.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Dans le cas du modèle de Ho et Lee, on a :

$$\sigma(t, T) = \sigma$$

d'où

$$\mu(t, T) = \sigma^2(T - t)$$

puis

$$f(t, T) = f(0, T) + \sigma^2 t \left( T - \frac{t}{2} \right) + \sigma W_t$$

Au final, on a ainsi pour le taux court :

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : taux (modèles fondés sur l'AOA)

Dans le cas du modèle de Vasicek généralisé, on a :

$$\sigma(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$$

d'où

$$\mu(t, T) = \frac{\sigma^2}{a} \left( e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)} \right)$$

puis

$$f(t, T) = f(0, T) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-a(T-t)} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-aT} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-a(T-s)} dW_s$$

Au final, on a ainsi pour le taux court :

$$r(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left( 1 - e^{-at} \right)^2 + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

La source du risque de crédit est *a priori* simple : une entreprise qui a emprunté, en émettant des obligations, se trouve dans l'impossibilité de faire face au remboursement de sa dette, partiellement ou totalement.

Deux situations sont alors possibles : une renégociation avec les créanciers des conditions de la dette ou la faillite.

En cas de faillite, les actionnaires perdent leur pouvoir au profit des ayants-droits (ensemble des créanciers de l'entreprise). Un ensemble de règles de priorité strictes existe entre les ayants-droits, règles généralement délicates à prendre en compte.

En pratique, la description formelle du risque de crédit et sa quantification reposent sur la spécification de deux éléments :

- la probabilité de défaut du débiteur, « PD » (*Probability of Default*) ;
- la quotité recouvrée en cas de défaut, dont le complément à 100 % est noté en général « LGD », pour *Loss Given Default*.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Le taux de recouvrement, exprimé en pourcentage, permet de déterminer la valeur attendue de la créance juste après le défaut.

Ce taux varie selon l'ordre de priorité de la dette considérée.

Taux de recouvrement des obligations corporate en % de la valeur faciale - Moody's Investors Service, 1982-2003	
Classe	Taux de recouvrement moyen (en %)
Senior garantie	51,6
Senior non garantie	36,1
Senior subordonnée	32,5
Subordonnée	31,1
Junior subordonnée	24,5

Il présente par ailleurs empiriquement une corrélation négative significative avec les taux de défaut.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Concernant les probabilités de défaut, on a les historiques suivants :

**Probabilités de défaut cumulées (en %) - Moody's, 1970-2003**

Maturité	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Aaa	0,00	0,00	0,00	0,04	0,12	0,29	0,62	1,21	1,55
Aa	0,02	0,03	0,06	0,15	0,24	0,43	0,68	1,51	2,70
A	0,02	0,09	0,23	0,38	0,54	0,91	1,59	2,94	5,24
Baa	0,20	0,57	1,03	1,62	2,16	3,24	5,10	9,12	12,59
Ba	1,26	3,48	6,00	8,59	11,17	15,44	21,01	30,88	38,56
B	6,21	13,76	20,65	26,66	31,99	40,79	50,02	59,21	60,73
Caa	23,65	37,20	48,02	55,56	60,83	69,36	77,91	80,23	80,23

**Probabilités de défaut cumulées (en %) - Standard & Poor's, janvier 2001**

Maturité	1	2	3	4	5	7	10	15
AAA	0,00	0,00	0,04	0,07	0,12	0,32	0,67	0,67
AA	0,01	0,04	0,10	0,18	0,29	0,62	0,96	1,39
A	0,04	0,12	0,21	0,36	0,57	1,01	1,86	2,59
BBB	0,24	0,55	0,89	1,55	2,23	3,60	5,20	6,85
BB	1,08	3,48	6,65	9,71	12,57	18,09	23,86	27,09
B	5,94	13,49	20,12	25,36	29,58	36,34	43,41	48,81
CCC	25,26	34,79	42,16	48,18	54,65	58,64	62,58	66,12

On remarque que pour les entreprises avec une note élevée, la probabilité annuelle de défaut est d'autant plus forte que l'on considère des années éloignées.

Ce phénomène est moins accentué, voire inversé, pour les entreprises initialement en difficulté, avec un note faible.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Alors que pour l'appréciation du risque couru par un investisseur l'utilisation de probabilités réelles ou historiques est pertinente, les méthodes d'évaluation recourent plutôt aux probabilités risque neutre (RN), qui peuvent être déduites des prix, des taux ou des *spreads* de taux observés.

Le *spread* de taux, égal à la différence entre le taux promis et le taux sans risque, traduit entre autres :

- un risque de défaut, correspondant au risque de défaut de la contrepartie ;
- un risque de signature, correspondant au risque de dégradation de la note ;
- un risque de liquidité, correspondant au risque de ne pas trouver de contrepartie pour céder le titre.

Le *spread* est ainsi composé de l'espérance de baisse du taux dû à la prise en compte du défaut, d'une prime de risque reflétant l'aversion au risque dans le monde réel et d'une prime de liquidité.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers : défaut, signature et liquidité

Considérons un titre zéro-coupon de durée  $T$  quelconque, qui vaut 1 en date 0 et qui promet un flux  $X_{\max} = \exp(r_T^{\max} T)$  en date  $T$ , avec  $r^{\max}$  le taux nominal. L'espérance du flux aléatoire réellement payé par le titre en  $T$  s'écrit alors :

$$E^*(X) = (1 - f_T^*) \exp(r_T^{\max} T) + f_T^* \alpha \exp(r_T^{\max} T)$$

avec :

- $f_T^*$  : la probabilité RN cumulée de défaut de paiement en date  $T$  ;
- $\alpha$  : le taux de recouvrement en cas de défaut de paiement en date  $T$ .

Par ailleurs, avec les probabilités RN, la prime de risque est nulle, et en négligeant la prime de liquidité, on a (avec  $r$  le taux sans risque) :

$$E^*(X) = \exp(rT)$$

Il ressort que le *spread* est égal à :  $s = r_T^{\max} - r = -\frac{1}{T} \ln(1 - f_T^* (1 - \alpha)) \approx \frac{1}{T} f_T^* (1 - \alpha)$

d'où (en cas de faible risque de défaut) :  $f_T^* \approx \frac{sT}{1 - \alpha}$

## 1.1. Risques financiers : immobilier

L'immobilier apparaît générer plus de rendement que les actions, alors que sa volatilité est plus faible. D'autres éléments doivent donc être pris en compte, comme par exemple la liquidité ou la fiscalité.

Concernant la liquidité, on peut retenir que la vitesse de rotation des actifs est d'environ 2,5 % par an pour l'immobilier, contre plus de 75 % pour les actions cotées à la Bourse de Paris. Cet écart met en évidence le fait que les transactions sur les marchés actions sont essentiellement des transactions d'arbitrage alors que pour l'immobilier ce sont des transactions finales (les coûts de transaction de l'immobilier sont d'ailleurs élevés).

En termes de modélisation, il est souvent retenu un modèle de Black et Scholes :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Ahlgrim et al. proposent de leur côté une modélisation des rendements réels de l'immobilier sur la base d'un modèle de Vasicek :

$$dm_t = \kappa_m (\mu_m - m_t) dt + \sigma_m dB_{m,t}$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers et modèles intégrés : présentation générale

Dans le cadre du pilotage de son activité, un organisme assureur se doit de développer une réflexion sur la projection de son actif. Il s'avère alors indispensable de s'appuyer sur une modélisation des principales classes d'actifs disponibles de manière cohérente, et prenant compte des fluctuations de court terme et des équilibres macro-économiques de long terme.

En effet, à long terme, il est généralement considéré que (cf. relation de Fisher) :

$$\text{Taux d'intérêt nominal} = E_t(\text{Taux d'inflation}) + \text{Taux d'intérêt réel}$$

Cette contrainte doit donc être prise en compte. Ainsi, l'objectif de cette partie est de présenter une brève synthèse de la littérature pour identifier les modèles sur ce registre.

On considérera classiquement que le modèle d'actifs intègre les supports d'investissement suivants : les obligations, les actions, l'immobilier et le monétaire.

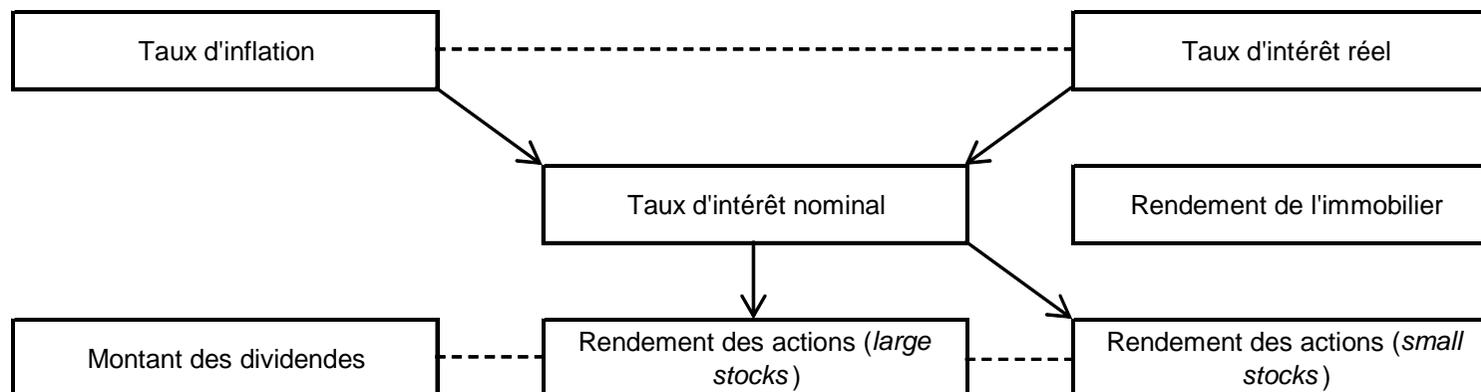
# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

Afin d'accentuer la sensibilisation des actuaires à la gestion des risques financiers, la *Casualty Actuarial Society* (CAS) et la *Society Of Actuaries* (SOA) se sont associées pour solliciter des recherches sur le développement de modèles intégrés.

Le modèle d'Ahlgrim, qui couvre entre autres, les taux d'intérêt, les rendements des actions, les taux de dividende, les taux d'inflation et les revenus de l'immobilier, s'inscrit dans ce cadre et ambitionne de répondre aux limites des principaux modèles intégrés et des principaux modèles composites, tout en mettant l'accent sur l'accessibilité de l'approche au plus grand nombre.

### Structure du modèle d'Ahlgrim



# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

La mesure de l'inflation à la date  $t$  est supposée suivre un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (modèle de Vasicek) :

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$$

Une fois l'inflation décrite, les taux d'intérêt réels sont modélisés. Le taux à court terme et le taux à long terme reprennent l'approche de retour à la moyenne du modèle multifactoriel de Hull et White :

$$dr_t = \kappa_r (l_t - r_t) dt + \sigma_r dB_{r,t}$$

$$dl_t = \kappa_l (\mu_l - l_t) dt + \sigma_l dB_{l,t}$$

Le rendement des actions hors dividende est ensuite décrit par le taux d'intérêt nominal de court terme majoré d'une prime de risque :

$$s_t = q_t + r_t + x_t$$

Ahlgrim et al. utilisent un modèle à changement de régime (modèle de Hardy), qu'ils appliquent à l'excès de rendement des actions .

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.1. Risques financiers et modèles intégrés : Ahlgrim

Une modélisation spécifique du taux de dividende est proposée :

$$d(\ln y_t) = \kappa_y (\mu_y - \ln y_t) dt + \sigma_y dB_{y,t}$$

Le modèle sur le taux de dividende est comparable à celui relatif à l'inflation. Toutefois, une des principales difficultés ici est la disponibilité des données.

Enfin, en suivant la même logique, une description des rendements de l'immobilier est proposée :

$$dm_t = \kappa_m (\mu_m - m_t) dt + \sigma_m dB_{m,t}$$

Le modèle a été calibré par Ahlgrim à partir d'un indice incluant une variété de produits immobiliers : habitation, industrie, bureaux et commerces.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Dans la suite, les travaux sont réalisés dans l'univers des probabilités réelles pour le modèle d'Ahlgrim.

En pratique, le modèle retenu doit être alimenté par un certain nombre de paramètres ; ces paramètres sont déterminés par l'utilisation conjointe de deux logiques :

- à partir de données représentant l'historique ;
- à partir d'avis d'expert ou de contraintes exogènes jugées raisonnables.

Le recours à des avis d'experts permet en outre d'utiliser des logiques de scénarios (pour tester le comportement du modèle et des projections).

Ainsi par exemple, pour l'inflation il est important de tenir compte de l'objectif de stabilité des prix fixé par la BCE, et qui correspond en pratique au maintien des « taux d'inflation à un niveau inférieur à, mais proche de, 2 % à moyen terme ».

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Le pas de temps (quotidien, hebdomadaire, mensuel, annuel, etc.) doit être retenu en fonction de l'utilisation qui sera faite du générateur.

Il convient entre autres de s'assurer que la fréquence des données est cohérente avec l'horizon de projection. Par exemple dans le cadre de projections de long terme, les données pourront être de fréquence annuelle, afin de limiter l'impact des fluctuations conjoncturelles et de ne conserver que la tendance de moyen ou long terme des séries.

Le choix de la période d'observation influe beaucoup sur le calibrage et, de fait, sur les scénarios produits.

Il convient ainsi de s'assurer que la période utilisée est compatible avec les risques économiques ou financiers que l'on cherche à modéliser. En pratique, il existe des risques liés à l'utilisation d'un historique trop court (risque que certains risques ne se soient pas réalisés sur la période) ou trop long (risque que l'environnement économique ait considérablement évolué).

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Dans le cas des modèles de type autorégressif  $AR(1)$ , l'estimation des paramètres peut être réalisée à partir de la méthode classique des moindres carrés.

En particulier, il conviendra de retenir une estimation par les moindres carrés simples pour les modèles de type Vasicek à un facteur et par les doubles moindres carrés pour les modèles de type Vasicek à deux facteurs (Hull et White).

La pertinence du modèle est appréciée à partir de sa qualité d'ajustement et de sa significativité globale. La qualité d'ajustement est évaluée à partir du coefficient de détermination ajusté et la significativité globale est mesurée à partir d'un test de Fisher. En complément, il convient d'évaluer la significativité individuelle des coefficients à partir du test de Student.

Dans les résultats présentés ci-après, une probabilité est associée aux tests de Fisher et de Student, il s'agit de la probabilité de rejeter à tort  $H_0$  ( $H_0$  étant l'hypothèse de nullité des coefficients) : lorsque cette probabilité est inférieure à 5 %, on rejettera  $H_0$ .

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Une attention particulière doit être accordée à l'analyse des résidus.

Dans ce contexte la 1<sup>ère</sup> étape est de s'assurer que les résidus sont de moyenne nulle. À cet effet, par application du théorème central limite, on peut déterminer un intervalle de confiance, au seuil standard de 95 %, sur la moyenne des résidus.

Dans une 2<sup>ème</sup> étape, il convient de détecter une éventuelle autocorrélation des erreurs, classique dans les modèles de séries temporelles (pour mémoire, il y a autocorrélation des erreurs lorsque les erreurs sont liés par un processus de reproduction – ie processus à mémoire –).

À cet effet, au-delà de l'examen visuel des résidus, on peut utiliser le test de Breusch-Godfrey pour les autocorrélations d'ordre  $p \geq 1$ , plus robuste que le test de Durbin-Watson. Le principe consiste à régresser les résidus estimés sur les variables explicatives et sur la série des résidus retardés, puis à tester l'hypothèse  $H_0$  de nullité simultanée des  $p$  coefficients des résidus retardés.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Pour la 3<sup>ème</sup> étape, on cherche à détecter une éventuelle hétéroscédasticité, fréquente dans les modèles de séries financières (il y a hétéroscédasticité lorsque les variances des erreurs ne sont plus constantes mais sont liées aux valeurs de la variable explicative).

Les modèles ARCH( $q$ ) permettent de modéliser des séries dont la volatilité dépend du passé d'ordre  $q$ , notamment celles présentant de fortes périodes de volatilité suivies de périodes d'accalmies (comme dans les séries financières). À cet effet, le test approprié est le test qui vérifie si le processus est justifiable d'un processus ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity). Ce test consiste en une régression autorégressive des résidus (au carré) sur  $q$  retards. Ici, l'hypothèse nulle  $H_0$  correspond à l'absence d'effet ARCH.

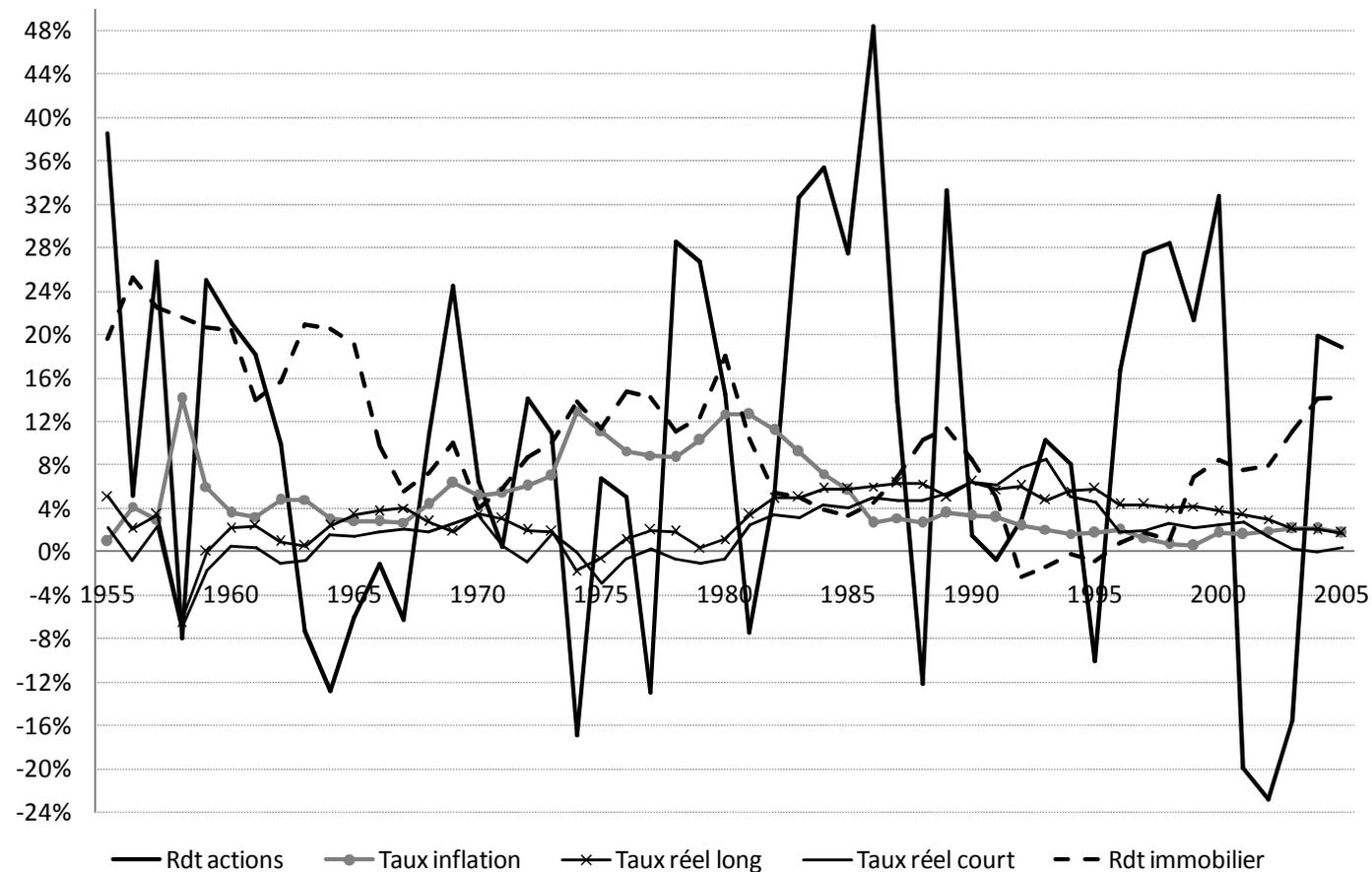
Pour la 4<sup>ème</sup> étape, on réalise un test de normalité des erreurs. On retient le test de Jarque-Bera, fondé sur la notion d'asymétrie (skewness) et d'aplatissement (kurtosis). Ici, l'hypothèse nulle  $H_0$  est celle de la normalité des résidus : lorsque la probabilité associée est supérieure à 5 %, on accepte l'hypothèse  $H_0$  de normalité des résidus.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : préparation du calibrage

Les données utilisées pour le calibrage ont l'allure suivante.

**Illustration des données de Friggit (1955-2005, France)**



# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (inflation)

Le modèle retenu par Ahlgrim pour l'inflation est :  $dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_{q,t}$

soit après discrétisation exacte :

$$q_{t+1} = q_t \times \exp(-\kappa_q) + \mu_q (1 - \exp(-\kappa_q)) + \varepsilon_{q,t} \times \sigma_q \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_q)}{2\kappa_q}}$$

L'estimation des paramètres est effectuée via une régression linéaire simple :

$$q_{t+1} = \alpha_q + \beta_q \times q_t + \tilde{\varepsilon}_{q,t}$$

Pour revenir au modèle initial d'Ahlgrim, les coefficients estimés  $\hat{\alpha}_q$  et  $\hat{\beta}_q$  sont transformés.

La vitesse de retour à la moyenne  $\hat{\kappa}_q$  est ainsi calculée comme suit :

$$\beta_q = \exp(-\kappa_q)$$

$$\kappa_q = -\ln(\beta_q).$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (inflation)

Le taux d'inflation moyen est déterminé par :

$$\alpha_q = \mu_q \left(1 - \exp(-\kappa_q)\right) = \mu_q \left(1 - \exp(\ln(\beta_q))\right)$$

$$\mu_q = \frac{\alpha_q}{(1 - \beta_q)}$$

L'écart type  $\hat{\sigma}_q$  est égal à l'écart type de l'erreur du modèle estimé divisé par :  $\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_q)}{2\kappa_q}}$

Au final, on arrive aux résultats suivants, sachant que le calibrage d'Ahlgrim est réalisé avec des données annuelles US (1946-2001).

### Ahlgrim : ajustement de l'inflation

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim (annuel)	Friggit (annuel)
$\kappa_q$	Vitesse retour à la moyenne	0,47	<b>0,261</b>
$\mu_q$	Taux d'inflation moyen	0,048	<b>0,051</b>
$\sigma_q$	Écart type de l'erreur	0,03	<b>0,026</b>

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (inflation)

### Ahlgrim : ajustement de l'inflation (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R <sup>2</sup> ajusté	0,59	Le pouvoir explicatif du modèle est de 59 %
Fisher	$P = 4,5 \cdot 10^{-11}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,04$	La constante est significative
Student (variable)	$P = 4,5 \cdot 10^{-11}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-2,6 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,37$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,11$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt réels)

Pour mémoire, le modèle retenu pour les taux d'intérêt réels est le suivant (avec  $r_t$  pour les taux à court terme, et  $l_t$  pour les taux à long terme) :

$$\text{Étape 1: } l_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \times l_t + \tilde{\varepsilon}_{l,t}$$

$$\text{Étape 2: } r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

soit après discrétisation exacte :

$$r_{t+1} = r_t \times \exp(-\kappa_r) + l_t (1 - \exp(-\kappa_r)) + \varepsilon_{r,t} \times \sigma_r \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_r)}{2\kappa_r}}$$

$$l_{t+1} = l_t \times \exp(-\kappa_l) + \mu_l (1 - \exp(-\kappa_l)) + \varepsilon_{l,t} \times \sigma_l \times \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_l)}{2\kappa_l}}$$

Pour estimer ce modèle à équations simultanées, Ahlgrim et al. retiennent une procédure d'estimation des Doubles Moindres Carrés (DMC). La procédure DMC consiste à appliquer en deux étapes les MCO :

$$\text{Étape 1: } l_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 \times l_t + \tilde{\varepsilon}_{l,t}$$

$$\text{Étape 2: } r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt réels)

Concernant la première étape, les coefficients estimés  $\hat{\beta}_1$  et  $\hat{\beta}_2$  sont transformés : on déduit la vitesse de retour à la moyenne des taux réels à long terme :  $\kappa_l = -\ln(\beta_2)$

Le taux d'intérêt réel moyen à long terme est alors :  $\mu_l = \frac{\beta_1}{(1-\beta_2)}$

L'écart type de l'erreur du modèle initial de taux à long terme, est égal à l'écart type du modèle estimé divisé par :

$$\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_l)}{2\kappa_l}}$$

À la différence du modèle de l'étape 1 des DMC, le modèle de l'étape 2 sur les taux à court terme compte deux variables endogènes :

$$r_{t+1} = \alpha_1 \times \hat{l}_t + \alpha_2 \times r_t + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$$

où les coefficients sont  $\alpha_2 = \exp(-\kappa_r)$  et  $\alpha_1 = (1 - \exp(-\kappa_r))$ , soit  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ .

Le modèle pour les paramètres relatifs aux taux courts est alors :  $\Delta r_{t+1} = \alpha_1 (\hat{l}_t - r_t) + \tilde{\varepsilon}_{r,t}$

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt réels)

On en déduit alors la vitesse de « retour à la moyenne » des taux réels à court terme, noté  $\kappa_r = -\ln(1 - \alpha_1)$ , et l'écart type de l'erreur du modèle initial de taux à court terme, égal à l'écart type du modèle estimé divisé par :

$$\sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_r)}{2\kappa_r}}$$

Les résultats du calibrage sont les suivants (calibrage d'Ahlgrim réalisé à partir de données US mensuelles, et annualisées (1982-2001) et jugé insatisfaisant par Ahlgrim) :

**Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels**

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim (annualisé)	Friggit (annuel)
$\kappa_r$	Vitesse retour à la moyenne (CT)	6,1	<b>0,397</b>
$\sigma_r$	Écart type de l'erreur (CT)	0,1	<b>0,024</b>
$\kappa_l$	Vitesse retour à la moyenne (LT)	5,1	<b>0,451</b>
$\mu_l$	Taux d'intérêt réel moyen (LT)	0,028	<b>0,029</b>
$\sigma_l$	Écart type de l'erreur (LT)	0,1	<b>0,023</b>

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt réels)

Le tableau suivant reprend les principaux résultats sur les tests d'adéquation réalisés pour la 1<sup>ère</sup> étape des DMC (modèle sur les taux d'intérêt réels à long terme).

### Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R <sup>2</sup> ajusté	0,40	Le pouvoir explicatif du modèle est de 40 %
Fisher	$P = 6,0 \cdot 10^{-7}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,02$	La constante est significative
Student (variable)	$P = 6,0 \cdot 10^{-7}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-2,8 \cdot 10^{-19}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,30$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,72$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt réels)

Ce tableau reprend les principaux résultats sur les tests d'adéquation réalisés pour la 2<sup>ème</sup> étape des DMC (modèle sur les taux d'intérêt réels à court terme).

### Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (tests complémentaires)

Test	Résultat	Interprétation
R <sup>2</sup> ajusté	0,13	Le pouvoir explicatif du modèle est de 13 %
Fisher	$P = 6,1.10^{-3}$	Le modèle global est significatif
Student (variable)	$P = 6,1.10^{-3}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$-3,6.10^{-3}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,41$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,96$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P < 2,2.10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (taux d'intérêt nom.)

Les taux d'intérêt nominaux sont déduits des relations suivantes :

$$i_r = (1 + q) \times (1 + r) - 1$$

$$i_l = (1 + q) \times (1 + l) - 1$$

Ahlgrim et al. s'aperçoivent que les paramètres estimés pour le modèle de taux d'intérêt réel conduisent à une estimation des taux d'intérêt nominaux insatisfaisante. Aussi, Ahlgrim et al. fixent la valeur des paramètres sur la vitesse de retour à la moyenne et sur la volatilité des modèles de taux d'intérêt réel.

**Ahlgrim : ajustement des taux d'intérêt réels (Version 2)**

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim V2 (annualisé)	Friggit (annuel)
$\kappa_r$	Vitesse retour à la moyenne (CT)	1,0	0,397
$\sigma_r$	Écart type de l'erreur (CT)	0,01	0,024
$\kappa_l$	Vitesse retour à la moyenne (LT)	0,1	0,451
$\mu_l$	Taux d'intérêt réel moyen (LT)	0,028	0,029
$\sigma_l$	Écart type de l'erreur (LT)	0,0165	0,023

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (immobilier)

Le modèle retenu pour l'immobilier est le suivant :

$$d(re)_t = \kappa_{re} (\mu_{re} - (re)_t) dt + \sigma_{re} dB_{re,t}$$

soit après discrétisation exacte :

$$(re)_{t+1} = (re)_t \times \exp(-\kappa_{re}) + \mu_{re} (1 - \exp(-\kappa_{re})) + \varepsilon_{re,t} \sigma_{re} \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\kappa_{re})}{2\kappa_{re}}}$$

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant (le calibrage d'Ahlgrim est réalisé avec des données trimestrielles US (1978-2001)).

### Ahlgrim : ajustement de l'immobilier

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim (trimestriel)	Friggit (annuel)
$\kappa_{re}$	Vitesse retour à la moyenne	1,2	<b>0,152</b>
$\mu_{re}$	Taux de rendement réel moyen	0,023	<b>0,094</b>
$\sigma_{re}$	Écart type de l'erreur	0,013	<b>0,037</b>

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (immobilier)

### Ahlgrim : ajustement de l'immobilier (tests)

Test	Résultat	Interprétation
R <sup>2</sup> ajusté	0,76	Le pouvoir explicatif du modèle est de 76 %
Fisher	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Le modèle global est significatif
Student (constante)	$P = 0,13$	La constante n'est pas significative
Student (variable)	$P < 2,2 \cdot 10^{-16}$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$1,5 \cdot 10^{-18}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
Breusch-Godfrey	$P = 0,29$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,93$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
Jarque-Bera	$P = 0,51$	Hypothèse de normalité des résidus vérifiée

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.2. Mise en œuvre Ahlgrim (historique) : résultats (actions)

Ahlgrim et al. modélisent l'excès de rendement et les taux de dividendes des actions, approche qui présente toutefois des difficultés en termes de données. Aussi, une alternative a été retenue : modélisation de l'excès de rendement avec dividendes réinvestis (données disponibles avec Friggit).

En outre, dans notre exemple le modèle de Black et Scholes a été privilégiée au modèle à changement de régime de Hardy (RSLN2) retenu par Ahlgrim.

### Ahlgrim : ajustement des actions

Paramètre	Intitulé	Ahlgrim	Friggit (annuel)
$\mu_s$	Excès de rendement moyen	<i>s.o.</i>	<b>0,033</b>
$\sigma_s$	Écart type de l'excès des actions	<i>s.o.</i>	<b>0,175</b>

## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Toutes les projections présentées sont une moyenne des valeurs obtenues à partir de  $N=10\ 000$  simulations et sont réalisées jusqu'à la date  $t=T=30$  ans.

Pour l'ensemble des projections, on suppose qu'à l'origine (valeurs observées sur les données de Friggit pour la période 1997-2005) :

- le taux d'inflation est égal à 1,5 % ;
- le taux d'intérêt réel à court terme est égal à 1,5 % ;
- le taux d'intérêt réel à long terme est égal à 3,1 % ;
- le taux de rendement dans l'immobilier est égal à 8,1 %.

## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Lors des projections, il convient de tenir compte de la corrélation observée entre les résidus des modèles calibrés et à cet effet, les erreurs de spécification des modèles projetés sont simulées *ex ante* (pour toutes les simulations et sur l'ensemble de la durée de projection).

En pratique, pour chaque modèle projeté les erreurs de spécification doivent s'écrire comme une combinaison linéaire (qui dépend directement de la structure de la matrice de corrélation des résidus) des erreurs des autres modèles.

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont déterminés en utilisant la méthode de factorisation de Cholesky (qui permet d'obtenir une matrice triangulaire inférieure  $L$ , telle que  $K = L.L'$ ,  $K$  étant la matrice de corrélation des résidus) et les valeurs des variables aléatoires représentant les erreurs utilisées dans ces combinaisons linéaires sont générées selon une loi normale centrée réduite.

# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

On dispose alors d'une matrice contenant les erreurs des modèles projetés, pour chaque simulation et sur l'ensemble de la durée de projection, proche de la matrice des corrélations historiques.

Cela permet de s'assurer de la cohérence entre la corrélation des résidus historiques et la corrélation des erreurs projetées.

**Ahlgrim (Friggit) : corrélations de l'historique des résidus**

Friggit	Inflation	Immo.	Taux LT	Taux CT	Excès act.
<b>Inflation</b>	1	0,202	-0,858	-0,651	-0,324
<b>Immo.</b>	0,202	1	-0,321	-0,269	0,103
<b>Taux LT</b>	-0,858	-0,321	1	0,802	0,176
<b>Taux CT</b>	-0,651	-0,269	0,802	1	0,112
<b>Excès act.</b>	-0,324	0,103	0,176	0,112	1

**Ahlgrim (Friggit) : corrélations des erreurs projetées**

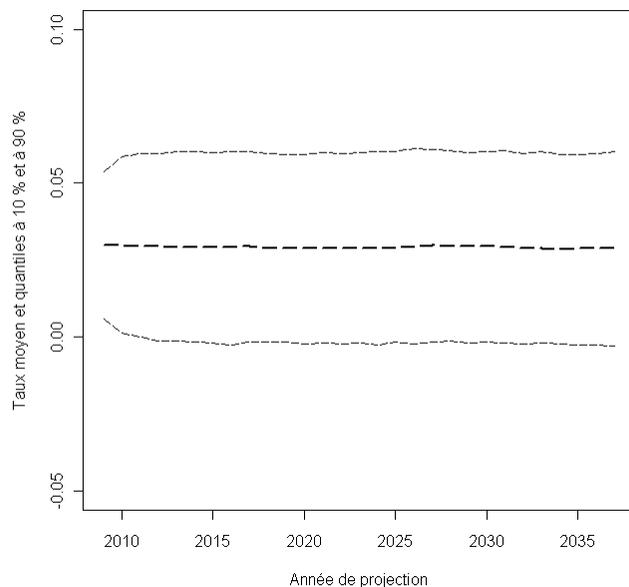
Friggit	Inflation	Immo.	Taux LT	Taux CT	Excès act.
<b>Inflation</b>	1	0,197	-0,853	-0,643	-0,320
<b>Immo.</b>	0,197	1	-0,316	-0,262	0,102
<b>Taux LT</b>	-0,853	-0,316	1	0,796	0,173
<b>Taux CT</b>	-0,643	-0,262	0,796	1	0,109
<b>Excès act.</b>	-0,320	0,102	0,173	0,109	1

# 1. Risques financiers et modèles associés

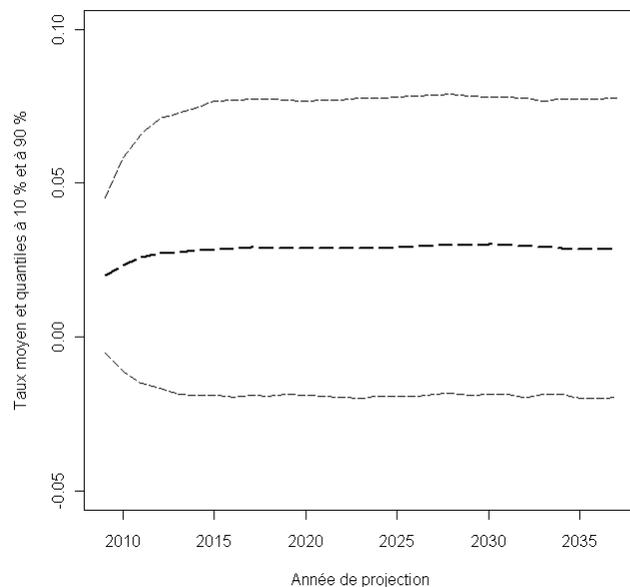
## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

On a les résultats suivants pour les taux d'intérêt en réel et l'inflation.

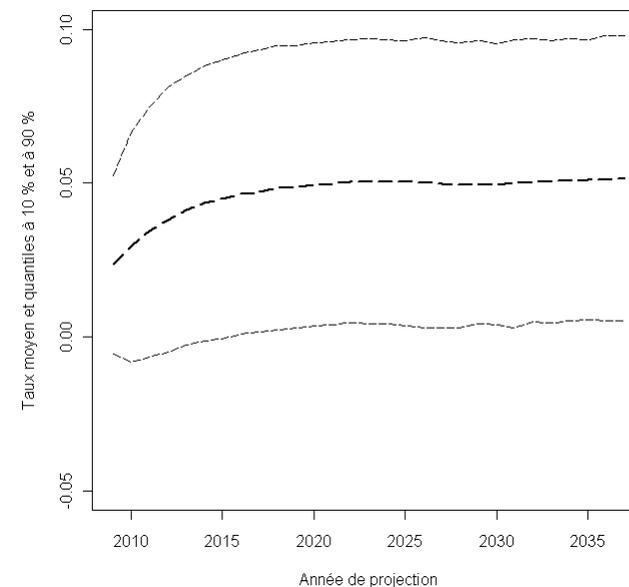
Taux réel long (Ahlgrim / Friggit)



Taux réel court (Ahlgrim / Friggit)



Inflation (Ahlgrim / Friggit)

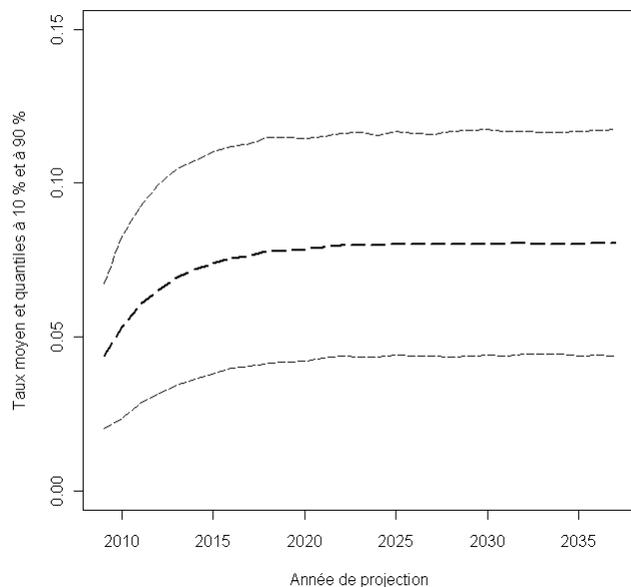


# 1. Risques financiers et modèles associés

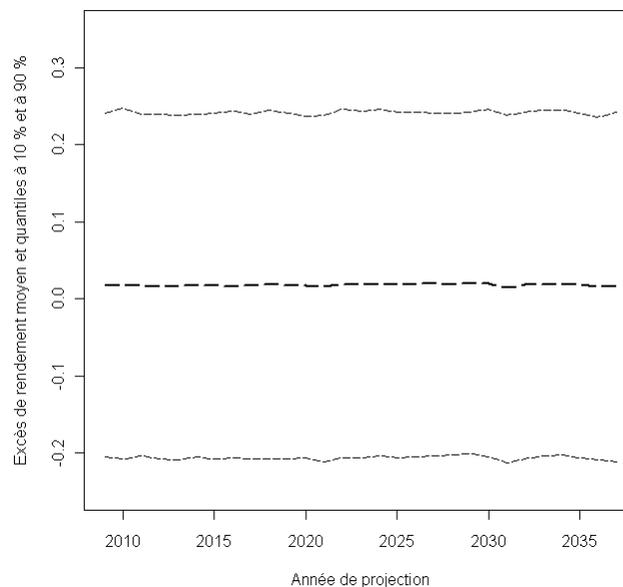
## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Pour le modèle d'Ahlgrim et al., nous considérons que le taux de rendement des actions est :  $s_t = i_{r,t} + x_t$

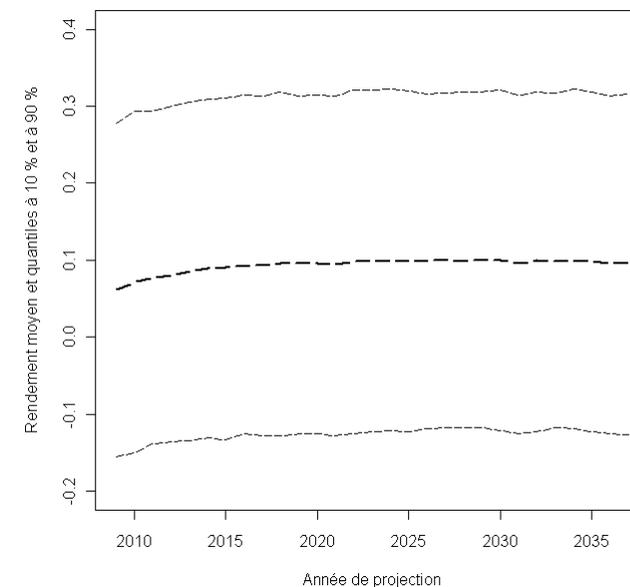
Taux nominal court (Ahlgrim / Friggitt)



Excès de rendement des actions (Ahlgrim / Friggitt)



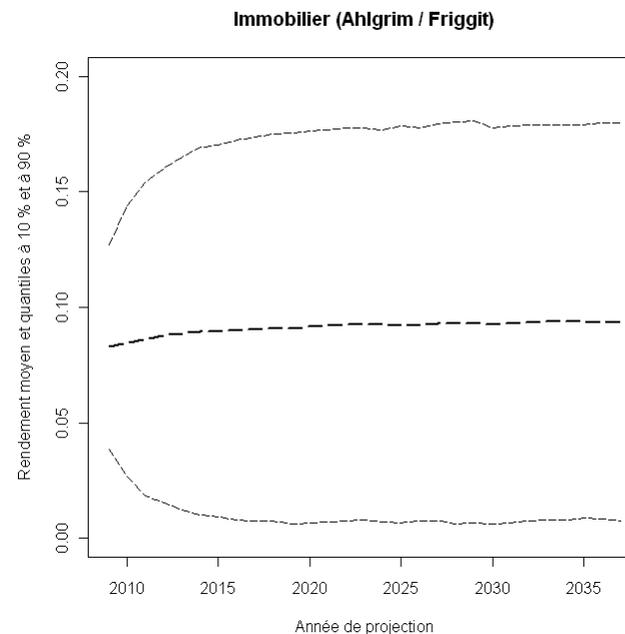
Action (Ahlgrim / Friggitt)



# 1. Risques financiers et modèles associés

## 1.3. Projections issues du calibrage du modèle d'Ahlgrim

Les résultats des projections de l'immobilier sont présentés dans le graphique suivant.



1. Risques financiers et modèles associés
2. Risques liés à la durée de vie humaine et modèles associés
3. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 1 / formule standard)
4. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 2 / ORSA)

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.1. Quelques rappels : présentation d'une table

Une table peut être définie sur la base des éléments suivants :

$l_x$  : nombre de vivants à l'âge  $x$

$d_x$  : nombre d'individus qui décèdent entre l'âge  $x$  et l'âge  $x+1$  ( $d_x = l_x - l_{x+1}$ )

$p_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  soit encore vivant à l'âge  $x+1$  ( $p_x = l_{x+1} / l_x$ )

$q_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  décède avant l'âge  $x+1$  ( $q_x = d_x / l_x$ )

On en déduit :  $p_x + q_x = 1$

Age $x$	$l_x$	$d_x$	$p_x$	$q_x$
<b>0</b>	100 000	489	99,5110%	0,4890%
<b>1</b>	99 511	38	99,9618%	0,0382%
<b>2</b>	99 473	27	99,9729%	0,0271%
<b>3</b>	99 446	22	99,9779%	0,0221%
<b>4</b>	99 424	...	...	...

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.1. Quelques rappels : présentation d'une table

En complément, on peut définir de la manière suivante les probabilités viagères sur plusieurs années :

${}_n p_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  soit encore vivant à l'âge  $x+n$  ( ${}_n p_x = l_{x+n} / l_x$ )

${}_n q_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  décède avant l'âge  $x+n$  ( ${}_n q_x = (l_x - l_{x+n}) / l_x$ )

On en déduit alors :  ${}_n p_x + {}_n q_x = 1$

En outre, on considère également :

${}_{n-1|}q_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  décède au cours de la  $n^{\text{ème}}$  année (différé de  $n-1$  années) ( ${}_{n-1|}q_x = {}_{n-1}p_x * q_{x+n-1}$ )

${}_{n|t}q_x$  : probabilité qu'un individu d'âge  $x$  décède entre  $x+n$  et  $x+n+t$  (différé de  $n$  années) ( ${}_{n|t}q_x = {}_n p_x * {}_t q_{x+n}$ )

### 2.1. Quelques rappels : différents types de tables de mortalité

Les tables de mortalité utilisées par les assureurs pour les tarifs et les provisions des risques vie sont encadrées par la réglementation (cf. articles A335-1 du Code des Assurances) afin d'assurer que les tables utilisées sont raisonnablement prudentes.

Du point de vue de l'assureur, on peut en pratique distinguer les tables réglementaires par défaut, et les tables d'expérience certifiées (en pratique, il convient de distinguer les tables d'expérience certifiées, dites « tables certifiées », qui s'inscrivent dans le cadre de la réglementation et incluent donc un marge de prudence raisonnable, et les tables d'expérience *best estimate*, dites « tables *best estimate* », qui s'inscrivent dans le cadre du calcul de *best estimate* de Solvabilité 2 et n'incluent donc pas de marge de prudence).

D'un point de vue technique, on distingue par ailleurs les « tables du moment » et les tables prospectives, ces dernières intégrant l'aspect dynamique de la mortalité.

### 2.1. Quelques rappels : différents types de tables de mortalité

Les tables réglementaires par défaut comportent deux volets :

- les tables TH et TF 00-02 pour les assurances en cas de décès ;
- les tables ci-dessus utilisées avec des décalages d'âges pour les assurances en cas de vie (à l'exclusion des rentes).

Homologuées par l'arrêté du 20/12/2005, les tables TH/TF 00-02 ont été établies à partir des données de l'INSEE issues d'observations entre 2000 et 2002. La table TF décrit la mortalité féminine, et la table TH la mortalité masculine.

De plus, la nécessité d'utiliser des tables de mortalité prospectives pour les rentes viagères a été prise en compte par le législateur et des tables de générations (TGH et TGF 05) ont été homologuées par un arrêté du 01/08/2006. Celles-ci ont été obtenues sur base de la mortalité de la population des bénéficiaires de contrats de rentes observée sur la période 1993-2005 et de données sur la population générale (INSEE) de 1962 à 2000. Ces tables servent depuis le 01/01/2007 à la tarification et au provisionnement des contrats de rentes viagères immédiates ou différées. Elles imposent un tarif minimal.

### 2.1. Quelques rappels : différents types de tables de mortalité

Dans le cadre du suivi technique de ses produits et au regard de l'article A. 335-1 du Code des assurances, un assureur peut souhaiter utiliser des tables de mortalité d'expérience en lieu et place des tables officiellement en vigueur pour justifier du niveau de la prime pure dans les contrats qu'il couvre.

Il apparaît en effet opportun, dans ce cadre, de cerner au mieux tout « comportement » de la population assurée qui serait significativement différent des tables réglementaires.

En pratique la mise en place, et l'autorisation d'utilisation, d'une table d'expérience comporte 3 étapes :

- la construction de la table ;
- la certification initiale ;
- le suivi annuel destiné à assurer la pérennité du droit d'utilisation de la table.

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (période d'obs.)

Afin de mener à bien les travaux de construction, un certain nombre de données individuelles, dont le format est précisé ci-après, est nécessaire.

Dans un premier temps, on définit la période d'observation retenue dans le cadre de la collecte des données, par exemple du 01/01/N au 31/12/N+D (avec  $D \geq 0$ ). Les données individuelles devront inclure toutes les observations relatives aux assurés couverts au moins un jour sur la période d'observation, et doivent donc inclure :

- les matricules ayant adhéré au contrat pour la 1<sup>ère</sup> fois avant le 01/01/N et sortis (décès ou autre motif) après le 01/01/N (les matricules non sortis doivent être inclus) ;
- les matricules ayant adhéré au contrat pour la 1<sup>ère</sup> fois après le 01/01/N et sortis (décès ou autre motif) avant le 31/12/N+D (les matricules non sortis doivent être inclus) ;
- les matricules ayant adhéré au contrat pour la 1<sup>ère</sup> fois avant le 31/12/N+D et sortis (décès ou autre motif) après le 31/12/N+D (les matricules non sortis doivent être inclus).

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (champs)

Le tableau ci-dessous donne la liste des données individuelles requises avec la description des valeurs attendues.

Données individuelles indispensables	
Variable	Valeur attendue / commentaire
Assureur	Nom de l'assureur au format texte
Pays	Identifiant du pays où les données sont collectées. Cette donnée sera renseignée conformément à la nomenclature ISO 3166. Un tableau de correspondance pays / code est annexé au présent document.
Matricule	Code alphanumérique identifiant de façon unique chaque assuré
DDN	Date de naissance (JJ/MM/AAAA). Si cette information n'est pas disponible, il conviendra de renseigner l'année de naissance.
Sexe	Homme : H Femme : F
Entrée risque	Date d'adhésion au contrat (JJ/MM/AAAA)
Sortie risque	Date de décès ou de sortie pour autre motif (JJ/MM/AAAA)
Motif sortie	Motif de sortie (1 si décès, 0 si autre motif )

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (doublons)

Il est par ailleurs souhaitable de réaliser des tests de cohérence sur les données, avant livraison pour l'analyse de mortalité.

D'une part les données doivent être retraitées des doublons établis à partir du matricule de l'assuré, de sa date de naissance et de son sexe (seul un enregistrement est retenu) :

- si toutes les informations renseignées pour les enregistrements en doublons sont strictement identiques, le choix de l'enregistrement retenu peut être effectué par ordre d'apparition dans le fichier ;
- si des informations diffèrent, notamment au niveau des dates d'entrées et/ou de sortie (il s'agit alors d'assurées ayant renouvelé leur contrat ou en ayant souscrits plusieurs), et si les périodes de présence se superposent, l'enregistrement retenu est celui avec la date d'entrée renseignée la plus ancienne, et la date de sortie affectée à cet enregistrement doit être la plus tardive parmi l'ensemble des dates de sortie des doublons concernés (ce qui permet de cumuler les expositions au risque).

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (dates)

D'autre part, les enregistrements pour lesquels la date de naissance renseignée est incomplète, les conventions suivantes peuvent être retenues :

- lorsque le mois et l'année de naissance sont renseignés mais que le jour ne l'est pas, la date de naissance retenue est le 15 du mois et de l'année renseignés ;
- lorsque l'année de naissance est renseignée mais que le mois et le jour ne le sont pas, la date de naissance retenue est le 01 juillet de l'année renseignée.

Enfin, concernant l'incohérence et les erreurs sur la date de naissance, la date d'entrée ou la date de sortie, il convient de calculer pour chaque enregistrement :

- l'âge au 31/12/N+D+1 ;
- l'âge à la date d'entrée ;
- l'âge à la date de sortie (pour les individus dont la date de sortie n'est pas renseignée, un calcul au 31/12/N+D+1 pourra être réalisé).

En pratique, il conviendra de s'assurer que le calcul de ces trois âges est possible avec les données renseignées, et que ces trois âges sont cohérents entre eux.

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (censures)

Dans l'analyse des durées, on peut être confronté à une censure à droite (si  $X$  est la variable d'intérêt, l'observation de la censure  $C$  indique que  $X \geq C$ ) ou à une censure à gauche (l'observation de la censure  $C$  indique que  $X \leq C$ ).

Un exemple classique : on veut savoir à quel âge  $X$  les enfants d'un groupe donné sont capables d'effectuer une certaine tâche :

- lorsque l'expérience débute, certains enfants d'âge  $C$  sont déjà capables de l'accomplir, et pour eux  $X \leq C$  : il s'agit d'une censure à gauche ;
- à la fin de l'expérience, certains enfants ne sont pas encore capables d'accomplir la tâche en question, et pour eux  $X \geq C$  : il s'agit d'une censure à droite.

En pratique, dans la suite on s'intéressera à la censure à droite, courante dans les solutions d'assurance.

### 2.2. Construction d'une table : préparation des données (troncatures)

On dit qu'il y a troncature à gauche (resp. à droite) lorsque la variable d'intérêt n'est pas observable lorsqu'elle est inférieure à un seuil  $c > 0$  (resp. supérieur à un seuil  $C > 0$ ).

Le phénomène de troncature est très différent de la censure, puisque dans ce cas, on perd complètement l'information sur les observations en dehors de la plage : dans le cas de la censure, on a connaissance du fait qu'il existe une information mais on ne connaît pas valeur précise, simplement le fait qu'elle excède un seuil ; dans le cas de la troncature on ne dispose pas de cette information.

La troncature peut s'observer dans le cas d'une migration informatique au cours de laquelle n'auraient été repris dans la nouvelle base que les sinistres encore en cours au moment de la bascule.

La troncature s'observe également dans le cas d'un contrat d'arrêt de travail avec une franchise : les arrêts de durée inférieure à la franchise ne sont pas observés, et on ne dispose donc sur eux d'aucune information.

### 2.3. Construction d'une table : calcul des taux bruts (KM)

L'estimateur de Kaplan-Meier (KM) s'appuie sur la remarque suivante : la probabilité de survivre au delà de  $t > s$  peut s'écrire  $S(t) = P(T \geq t \mid T \geq s) P(T \geq s) = P(T \geq t \mid T \geq s) S(s)$ .

Si on choisit comme instants de conditionnement les instants  $i$  (supposés compris entre  $x$  et  $x+1$ ) où se produit un évènement (sortie ou censure), on se ramène à estimer des probabilités de la forme :  $p_i = P(T \geq i+1 \mid T \geq i)$ .

En pratique, on utilise les notations suivantes :

- $q_i$  : probabilité de décéder en  $i$
- $n_i$  : nombre d'individus vivants juste avant  $i$
- $d_i$  : nombre de décès observés en  $i$
- $c_{i-1}$  : nombre de données censurées (à droite) sur  $[i-1, i[$
- $t_{i-1}$  : nombre de données entrantes sur  $[i-1, i[$

Un estimateur naturel de  $q_i = 1 - p_i$  est  $q_i = d_i / n_i$ , avec  $n_i = n_{i-1} - d_{i-1} - c_{i-1} + t_{i-1}$ .

### 2.3. Construction d'une table : calcul des taux bruts (KM)

On veut estimer  $q_x$ , probabilité de décès dans la classe d'âge  $[x, x+1[$ .

Or  $q_x$  vérifie que  $q_x = 1 - p_x = 1 - S(x+1)/S(x)$ .

On cherche donc à estimer  $S(x+1)/S(x)$ .

On obtient alors (avec  $i$  des instants appartenant à  $[x, x+1[$ ) : 
$$\frac{\hat{S}(x+1)}{\hat{S}(x)} = \prod_i \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

Et on déduit : 
$$\hat{q}_x = 1 - \prod_i \left(1 - \frac{d_i}{n_i}\right)$$

L'estimateur de Kaplan-Meier est *non paramétrique*. Il permet d'approcher la forme empirique prise par le risque de sortie de l'état, sans adopter une quelconque spécification de loi.

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.3. Construction d'une table : calcul des taux bruts (Hoem)

Dans le cadre de l'estimation des taux bruts selon Hoem, on a les notations suivantes :

- $n_x$  : nombre d'individus en vie à l'âge  $x$
- $D_x$  : la variable aléatoire représentant le nombre de décès observés sur  $[x, x+1[$
- $d_x$  : réalisation de  $D_x$
- $[\alpha_i, \beta_i]$  : l'intervalle inclus dans  $[x, x+1[$  pour lequel l'assuré  $i$  est sous observation
- $X_1, \dots, X_{n_x}$  :  $n_x$  variables de Bernoulli de paramètre  ${}_{\beta_i - \alpha_i}q_{x + \alpha_i}$  indépendantes

Pour l'estimateur de Hoem, on pose les hypothèses suivantes :

- chaque décès est indépendant des autres
- on suppose une répartition uniforme des décès sur l'année, donc  ${}_{\beta_i - \alpha_i}q_{x + \alpha_i} \approx (\beta_i - \alpha_i)q_x$

On a ainsi  $D_x = \sum_{i=1}^{n_x} X_i$  qui suit une loi binomiale  $B(n_x, \beta_i - \alpha_i q_x)$

On a donc  $E(D_x) = \sum_{i=1}^{n_x} (\beta_i - \alpha_i)q_x$

Et au final on a donc  $\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_i \beta_i - \alpha_i}$

### 2.4. Construction d'une table : lissage non paramétrique (W-H)

Le principe de la méthode de Whittaker-Henderson est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité et de rechercher les valeurs ajustées qui minimisent une combinaison linéaire des deux critères.

On se fixe des poids ( $w_i$ ) et l'on pose :

- pour le critère de fidélité  $F = \sum_{i=1}^p w_i (q_i - \hat{q}_i)^2$  ,
- pour le critère de régularité  $S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$  , où  $z$  est un paramètre du modèle et  $\Delta^z$  la différence d'ordre  $z$ .

Le critère à minimiser est une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun des deux termes étant contrôlé par un paramètre  $h$  :  $M = F + h \times S$  .

La résolution de ce problème d'optimisation conduit alors à l'expression des taux ajustés  $q^* = (w + h^t K_z K_z)^{-1} w \hat{q}$  , où la matrice  $K_z$  est telle  $\Delta^z q = K_z q$ .

### 2.4. Construction d'une table : lissage paramétrique

L'essentiel des lissages paramétriques s'exprime selon une fonction de hasard (taux de décès instantanés), souvent notée  $h$  ou  $\mu$ .

Soit une variable aléatoire  $T$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , et  $F(t) = P(T \leq t)$  sa fonction de répartition (continue à droite).

La fonction de survie est le complément à 1 de la fonction de répartition  $S(t) = 1 - F(t)$ . La fonction  $S$  est donc décroissante, telle que  $S(0) = 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .

La fonction de hasard est par définition  $h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$

Il en résulte directement qu'on a la relation suivante  $S(t) = \exp\left(-\int_0^t h(s) ds\right)$

Et pour la survie après  $t$ , ayant déjà survécu jusqu'en  $u$ , on a :  $S_u(t) = \exp\left(-\int_u^{u+t} h(s) ds\right)$

Enfin, on remarque que :  $h(t) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t+u)}{uS(t)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t+u | T > t)}{u}$

### 2.4. Construction d'une table : lissage paramétrique

Sur de nombreuses populations, il a été observé que le taux instantané de mortalité augmente de manière quasi-exponentielle avec l'âge. Gompertz a proposé un modèle paramétrique simple qui traduit cette tendance :

$$\mu_x = bc^x$$

Cette fonction peut permettre de modéliser la courbe de mortalité au-delà de 30 ans environ, mais la sous-estime avant 40 ans et la surestime au-delà de 80 ans.

Pour améliorer l'évaluation de la mortalité des jeunes adultes (avant 40 ans environ), Makeham a enrichi la formule de Gompertz d'un paramètre :

$$\mu_x = a + bc^x$$

Parmi les âges élevés, on peut citer le modèle de Kannisto-Thatcher :

$$\mu_x = a + \frac{bc^x}{1 + bc^x}$$

### 2.4. Construction d'une table : lissage paramétrique

En pratique, après avoir calculé des taux de décès bruts, on ajuste le modèle paramétrique retenu à ces taux bruts. Pour cela, on utilise la « formule de passage » suivante :

$$q_x = 1 - \exp \left[ - \int_x^{x+1} \mu_y dy \right]$$

Illustrons la démarche dans le cadre du modèle de Makeham. Compte tenu de la croissance des taux de décès avec l'âge, on doit avoir une constance  $c$  supérieure à 1, un  $b$  positif et un  $a$  positif. On a alors :

$$p_x = \exp \left[ - \int_x^{x+1} \mu_y dy \right] = \exp \left[ - \int_x^{x+1} (a + bc^y) dy \right] = \exp(-a) \exp \left[ - \frac{b}{\ln c} c^x (c-1) \right]$$

Posons  $s = \exp(-a)$  et  $g = \exp \left( - \frac{b}{\ln(c)} \right)$ .

La fonction utilisée pour ajuster les taux de décès discrets s'écrit donc :  $q_x = 1 - p_x = 1 - sg^{c^x(c-1)}$

Au préalable, pour déterminer des valeurs initiales acceptables, on note en faisant l'approximation  $\ln(1 - q_x) \approx -q_x$ , la relation suivante  $\ln(q_{x+1} - q_x) = x \ln c + \ln((c-1)^2 \ln g)$ .

### 2.4. Construction d'une table : lissage semi-paramétrique

Lorsque le volume de données n'est pas très important (comme souvent dans le cadre de tables de mortalité d'expérience), l'utilisation d'un modèle relationnel est pertinent.

Cette démarche consiste à rechercher un « positionnement » de la table d'expérience par rapport à une table de référence donnée (la table de référence peut être par exemple une table INSEE). L'ajustement peut être réalisé à partir d'une régression des logits d'expérience sur les logits de référence, soit :

$$y_x = \ln\left(q_x^{ex} / (1 - q_x^{ex})\right) = a \ln\left(q_x^{ref} / (1 - q_x^{ref})\right) + b + \varepsilon_x$$

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.5. Exemple CIMA : collecte et traitement de données

La collecte et l'exploitation des données s'est organisée de la manière suivante :

- utilisation de 32 jeux de données exploitables (sur plus de 40 demandes) ;
- retraitements : doublons, sexe non renseigné, dates non cohérentes, etc.

Synthèse quantitative	CEMAC	UEMOA	Total (CIMA)
Nombre de lignes initial	387 247	928 699	1 315 946
Nombre de lignes supprimées	62 921	50 552	113 473
Nombre de lignes final	324 326	878 147	1 202 473

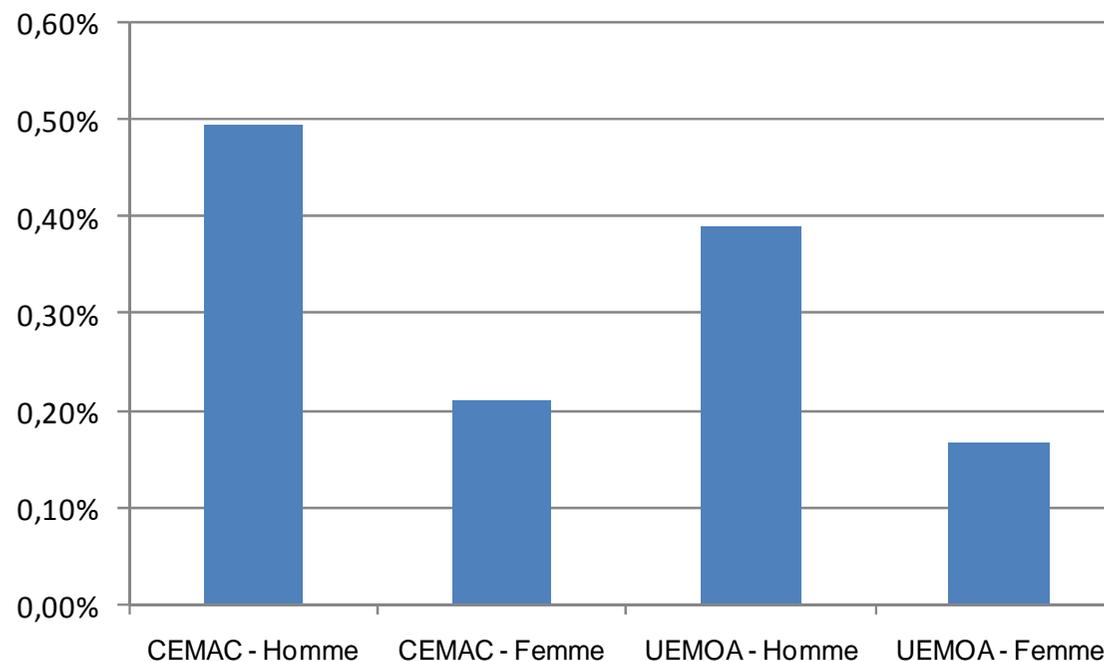
Les données retenues sont sélectionnées sur la base des critères suivants :

- choix de la période d'observation (du 01/01/2003 au 31/12/2006) ;
- mise à jour du périmètre en supprimant des jeux de données sur la base de 3 critères : faible exposition, aucun décès, forte hétérogénéité au sein d'un pays.

Sexe / Sous-région	CEMAC	UEMOA	Total (CIMA)
Homme	467 557	783 105	1 250 662
Femme	139 899	161 219	301 118
Total (tous sexes)	607 456	944 324	1 551 780

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.5. Exemple CIMA : taux de décès et statistiques par segment



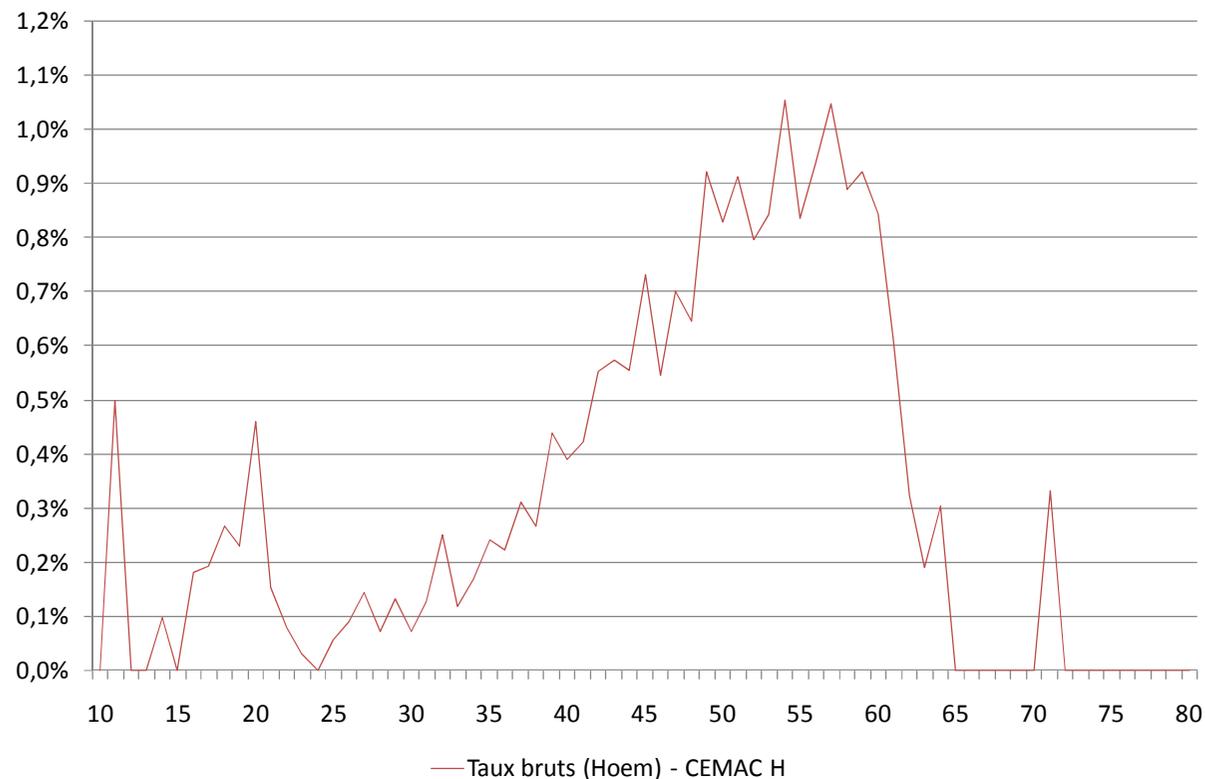
Segment	Exposition 2003-2006	Âge moyen	Âge min	Âge max	Taux de décès moyen	Taux de décès moyen (borne inf. à 95%)	Taux de décès moyen (borne sup. à 95%)	Âge moyen au décès
CEMAC - Homme	467 557	42 ans	0 an	95 ans	0,4947%	0,4745%	0,5149%	46 ans
CEMAC - Femme	139 899	39 ans	0 an	77 ans	0,2109%	0,1868%	0,2349%	41 ans
UEMOA - Homme	783 105	42 ans	0 an	106 ans	0,3902%	0,3764%	0,4041%	47 ans
UEMOA - Femme	161 219	42 ans	0 an	105 ans	0,1693%	0,1492%	0,1894%	45 ans
<b>Total (CIMA)</b>	<b>1 551 780</b>	<b>42 ans</b>	<b>0 an</b>	<b>106 ans</b>	<b>0,3826%</b>	<b>0,3729%</b>	<b>0,3923%</b>	<b>46 ans</b>

## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.5. Exemple CIMA : taux bruts CEMAC Homme

Les taux bruts sont établis à partir de la méthode de Hoem : 
$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{\sum_i ([\alpha_i; \beta_i] \cap ]x; x+1])}$$

Il apparaît notamment que les taux sont inexploitable avant 35 ans et après 55 ans.

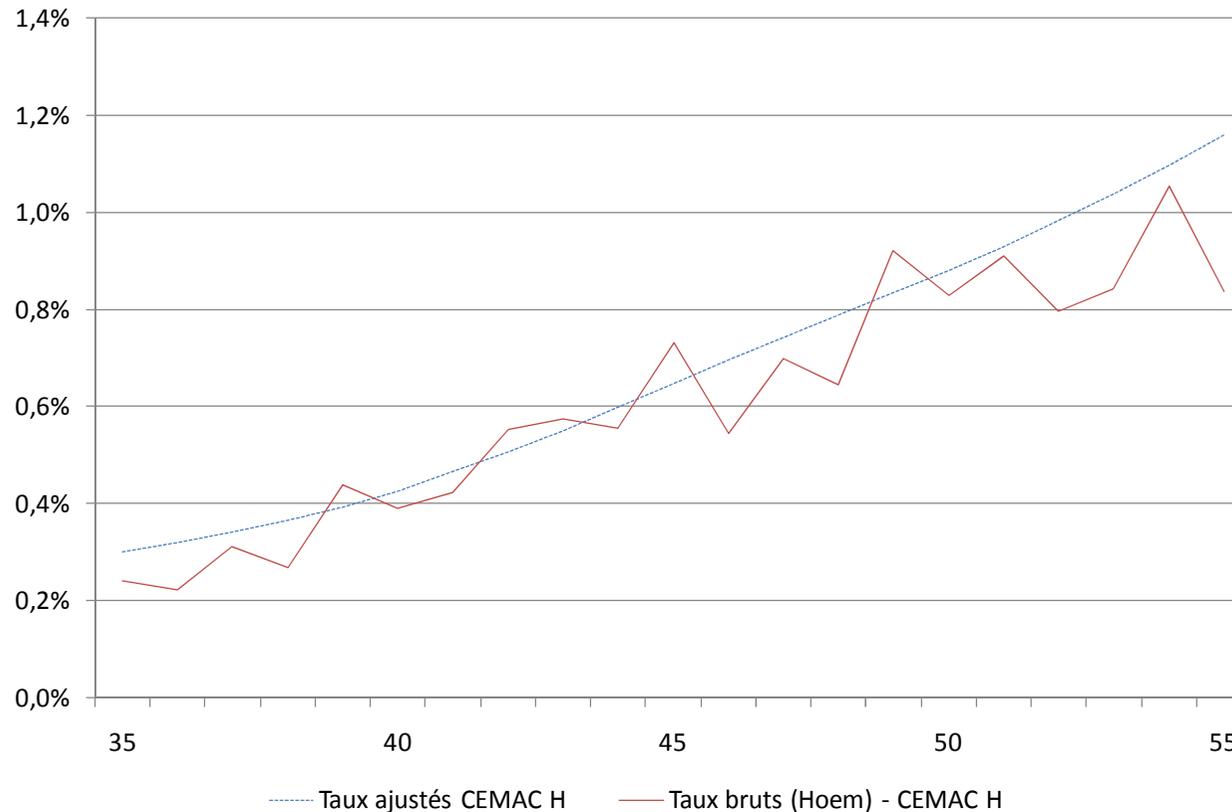


## 2. Risques liées à la durée et modèles associés

### 2.5. Exemple CIMA : ajustement taux CEMAC Homme

Ajustement réalisé, sur la plage d'âges exploitable, à partir d'une régression des logits d'expérience sur les logits de référence (sur la base de la TH00-02) :

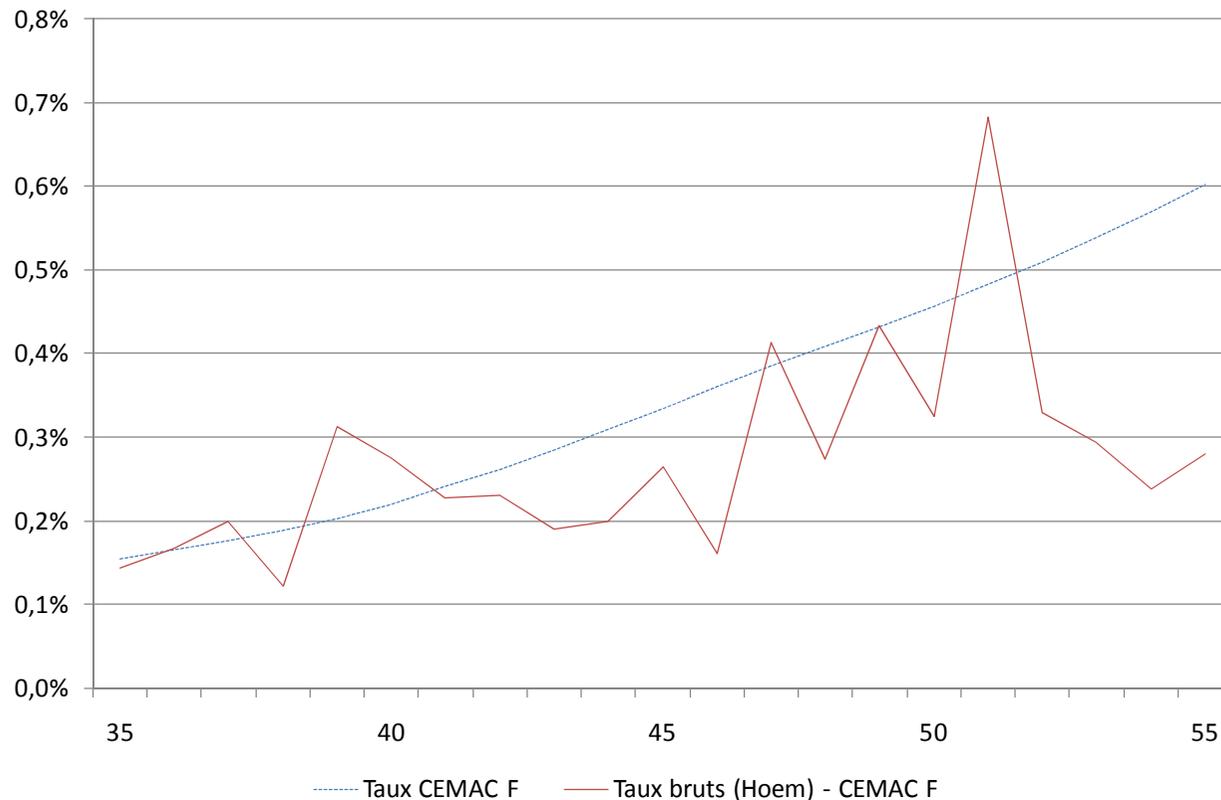
$$y_x = \ln\left(\frac{q_x^{ex}}{1 - q_x^{ex}}\right) = a \ln\left(\frac{q_x^{ref}}{1 - q_x^{ref}}\right) + b + \varepsilon_x$$



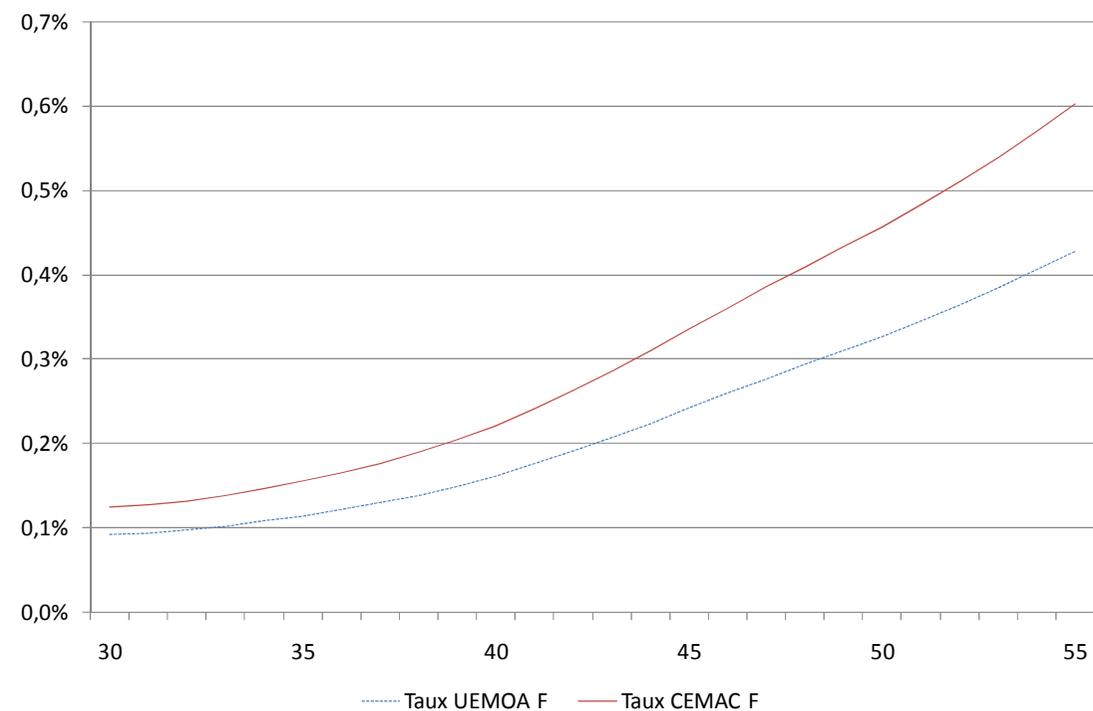
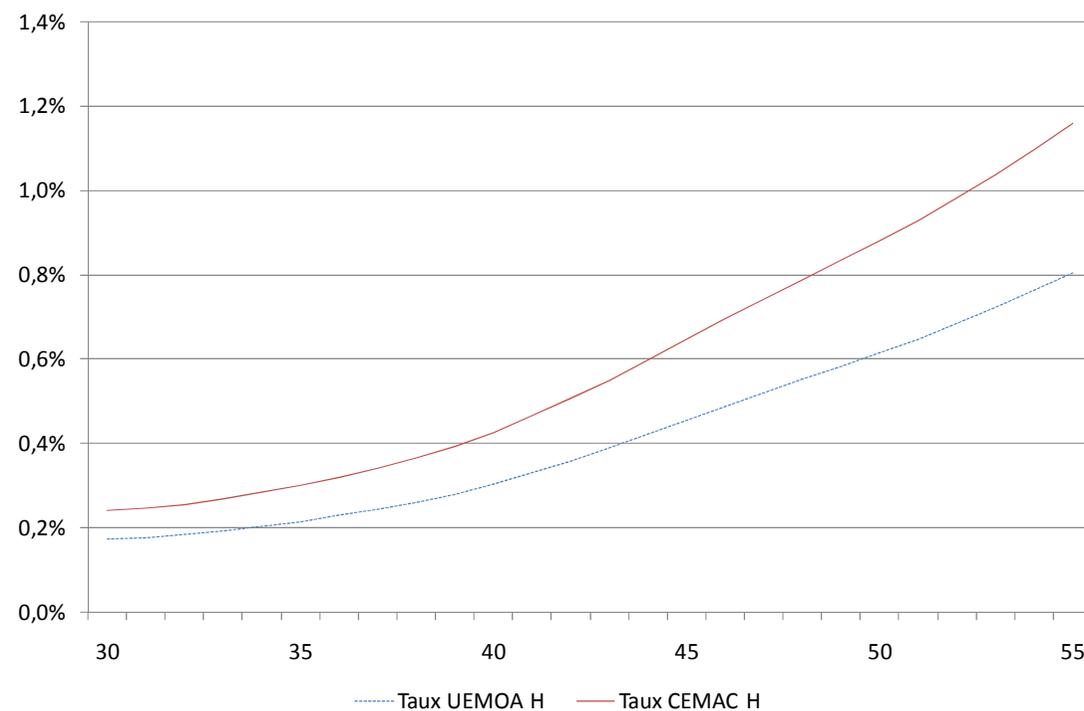
### 2.5. Exemple CIMA : ajustement taux CEMAC Femme

Les taux ajustés de la table CEMAC F sur la plage d'âges exploitable sont obtenus par un abattement des taux CEMAC H. Le niveau de cet abattement est déduit d'un modèle de Cox :

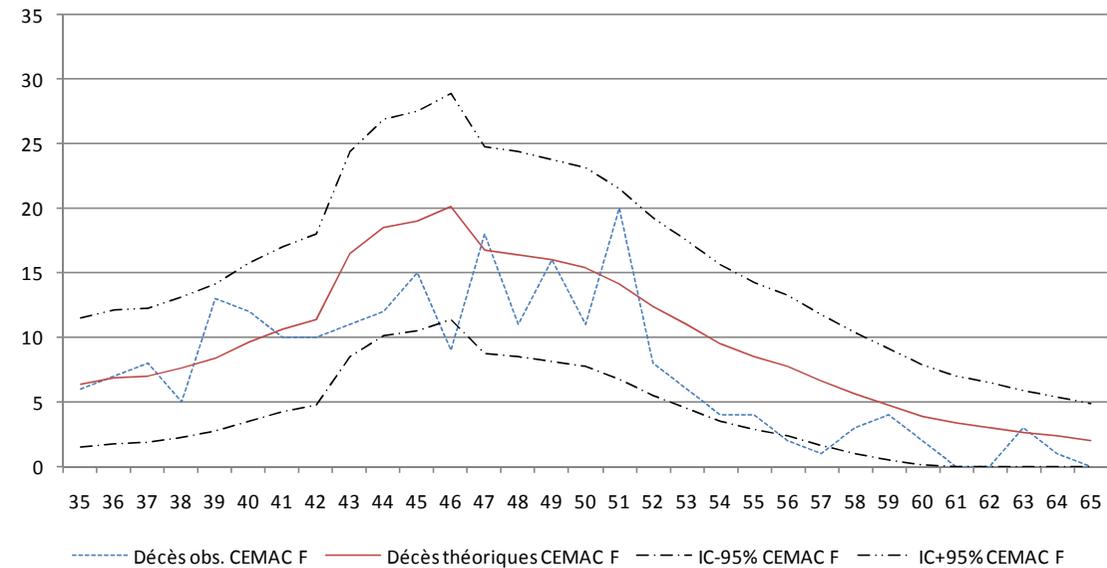
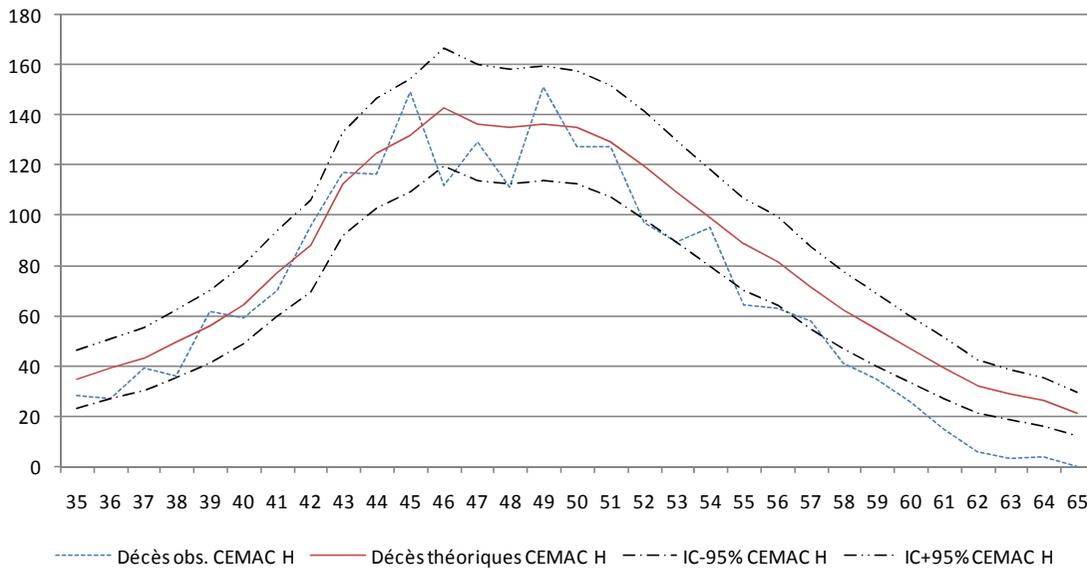
$$q_x^{CEMAC F} = 1 - (1 - q_x^{CEMAC H})^{\exp(\theta)}$$



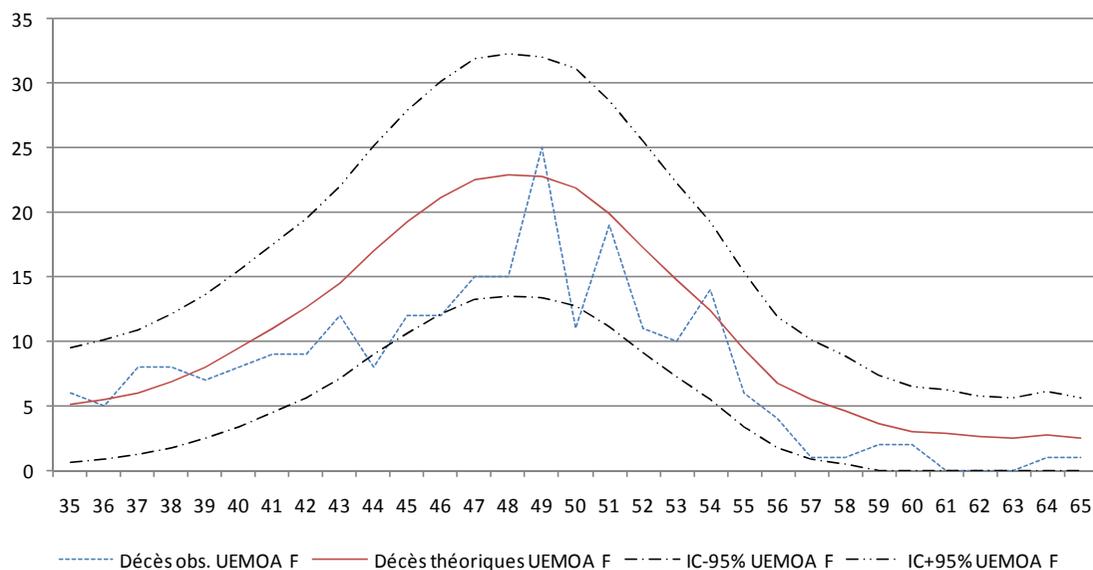
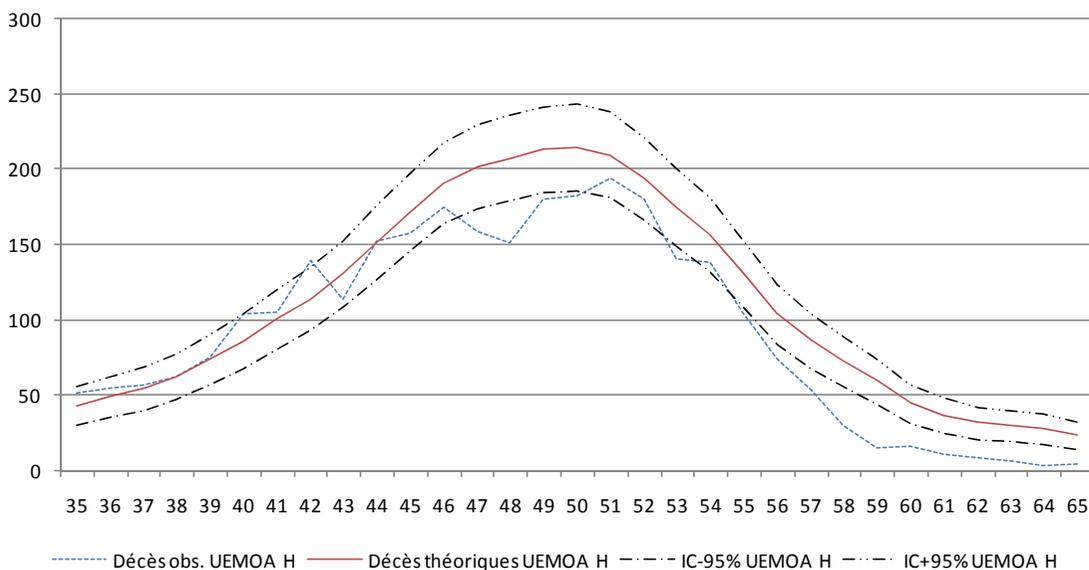
### 2.5. Exemple CIMA : taux ajustés CEMAC et UEMOA Homme et Femme



### 2.5. Exemple CIMA : contrôle des tables (CEMAC)



### 2.5. Exemple CIMA : contrôle des tables (UEMOA)



### 2.5. Exemple CIMA : contrôle des tables

	Décès théoriques				
	UEMOA H	UEMOA F	CEMAC H	CEMAC F	Total
<b>Tables OMS</b>	13 515	1 945	7 904	1 878	<b>25 241</b>
<b>Tables d'expérience</b>	4 473	465	2 881	372	<b>8 190</b>
<b>Ecart</b>	<b>-67%</b>	<b>-76%</b>	<b>-64%</b>	<b>-80%</b>	<b>-68%</b>

Au global les taux obtenus correspondent à un abattement de près de 70 % par rapport aux taux de la population générale issus des statistiques de l'OMS.

Cet abattement est cohérent avec une population assurée privilégiée.

1. Risques financiers et modèles associés
2. Risques liés à la durée de vie humaine et modèles associés
3. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 1 / formule standard)
4. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 2 / ORSA)

### 3.1. Quelques rappels

L'objectif est de calculer une Value-at-Risk (VaR) à 99,5 % pour le risque de ruine économique de l'assureur à horizon un an.

Pour mémoire, la VaR de niveau  $\alpha$  associée au risque  $X$  est donnée par :

$$VaR(X, \alpha) = \text{Inf} \left\{ x \mid \Pr[X \leq x] \geq \alpha \right\}$$

Cette mesure de risque a le mérite de reposer sur un concept simple et facilement explicable :  $VaR(X, \alpha)$  est le montant qui permettra de couvrir le montant de sinistres engendré par le risque  $X$  avec une probabilité  $\alpha$ .

Ce concept est directement lié à celui de probabilité de ruine puisque si une société, disposant d'un montant de « ressources » égal à  $VaR(X, \alpha)$ , assure un unique risque  $X$ , sa probabilité de ruine est égale à  $1-\alpha$ .

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.1. Quelques rappels

Sur ces bases, le capital réglementaire défini par Solvabilité 2 (SCR) correspond au montant de fonds propres qu'un organisme assureur doit détenir en  $t=0$  pour éviter la ruine économique, à horizon d'un an (en  $t=1$ ) et au niveau de confiance de 99,5 %.

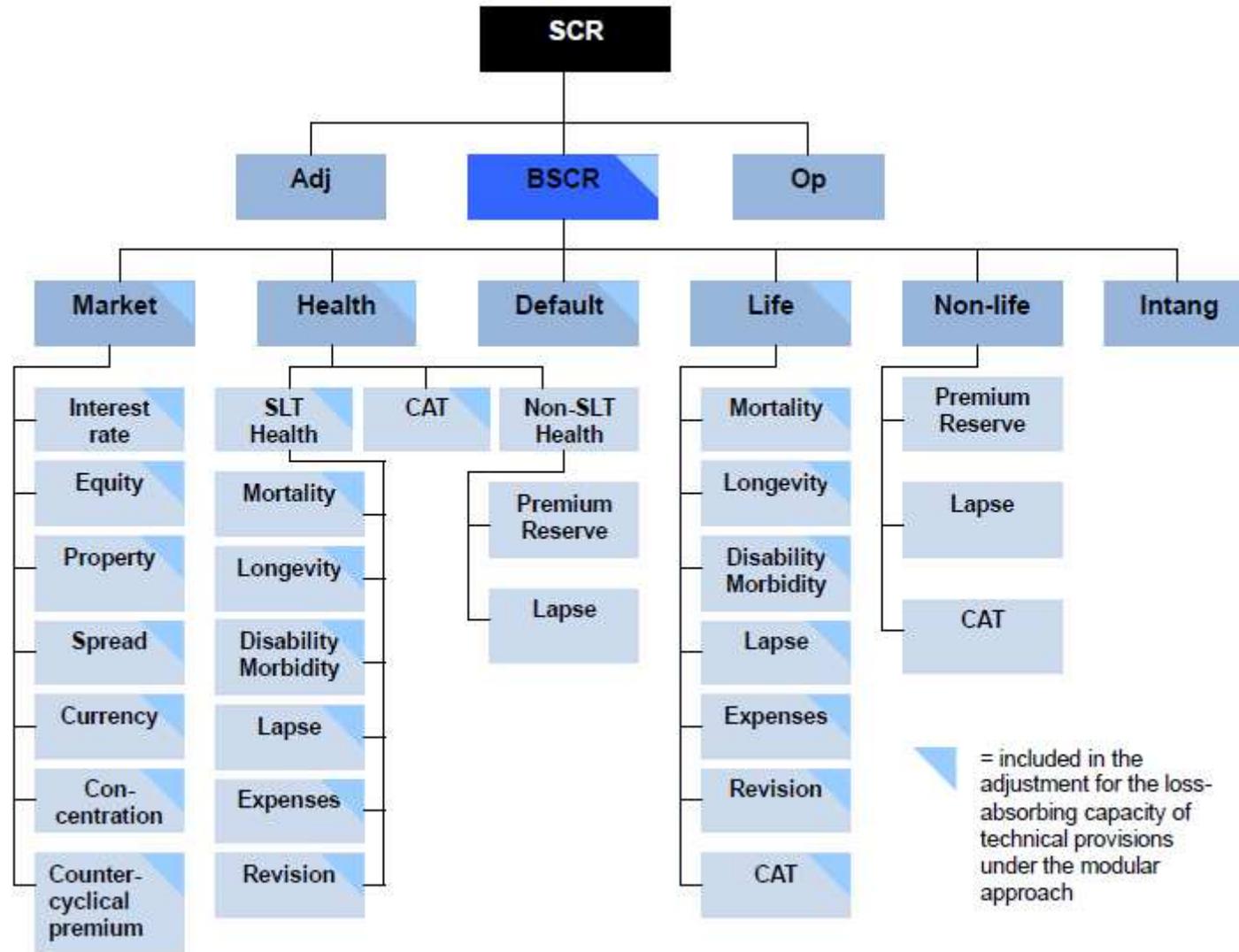
Pour calculer ce capital, il est donc nécessaire de disposer de la distribution des fonds propres (ou actif net, ou situation nette) économiques dans un an (en  $t=1$ ).

Il convient alors de déterminer tous les aléas (économiques, financiers, démographiques, opérationnels, etc.) susceptibles d'intervenir entre  $t=0$  et  $t=1$  et d'avoir un impact sur le bilan économique en  $t=1$ .

Une prise en compte de leurs interactions est notamment nécessaire.

# 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

## 3.1. Quelques rappels



### 3.1. Quelques rappels

L'approche avec la FS se décompose en trois étapes (en restant en  $t=0$ ) :

- une cartographie des risques (modules et sous-modules de risques) ;
- un calcul de capital pour chaque sous-module et module de risques ;
- une agrégation des capitaux grâce à des matrices de corrélations linéaires imposées par les textes de l'EIOPA (sachant que  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 \times Cov(X, Y)$  et  $Cov(X, Y) = \rho(X, Y) \times \sqrt{Var(X)Var(Y)}$ ).

Le calcul du capital des sous-modules de risque nécessite la constitution d'un bilan économique à la date  $t=0$ .

Ce bilan économique en  $t=0$  doit être constitué en fonction des conditions à la date de calcul, mais aussi lorsque ces conditions subissent des chocs instantanés, qui visent à être homogènes à un quantile à 99,5 % du risque de ruine.

La constitution du bilan économique est donc une étape importante, et n'est pas un exercice n'est pas simple.

### 3.2. Risques financiers : taux d'intérêt

Ce risque existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations de la structure de la courbe des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux d'intérêt. Il s'agit notamment des obligations, des autres produits de taux et du *best estimate* des provisions pour les passifs d'assurance.

Le principe de calcul repose sur la différence de l'évaluation de la valeur nette entre :

- la valeur des flux (actif et passif) actualisés avec la courbe de référence communiquée par l'EIOPA ;
- la valeur des flux (actif et passif) actualisés avec la courbe des taux choqués déduite de celle de l'EIOPA.

Caractéristiques du choc :

- des chocs relatifs asymétriques à la hausse et à la baisse ;
- un impact minimal de 1 % (100bps) ;
- une interpolation linéaire des taux en dehors des piliers de maturité transmis ;
- un choc relatif constant au-delà de 90 ans (+20 % / - 20 %).

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.2. Risques financiers : spread

Le risque de spread est la part de risque issu des instruments financiers qui est expliquée par la volatilité des spreads de crédit sur la structure de la courbe des taux d'intérêt de référence.

La mesure du SCR relatif au risque de spread est fondée sur la variation de la valeur de marché sous un choc forfaitaire dépendant du rating et de la durée.

$$\sum_i MV_i \times F^{up}(\text{rating}_i)$$

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC ou inférieur	Non noté
Duration ≤ 5 ans	0,9% *D	1,1%*D	1,4%*D	2,5%*D	4,5%*D	7,5%*D	7,5%*D	3%*D
5 < Duration ≤ 10 ans	4,5% + 0,53%*(D-5)	5,5% + 0,58%*(D-5)	7% + 0,70%*(D-5)	12,5% + 1,5%*(D-5)	22,5% + 2,51%*(D-5)	37,5% + 4,2%*(D-5)	37,5% + 4,2%*(D-5)	15% + 1,68%*(D-5)
10 < Duration ≤ 15 ans	7,15% + 0,5%*(D-10)	8,4% + 0,5%*(D-10)	10,5% + 0,5%*(D-10)	20% + 1%*(D-10)	35,05% + 1,8%*(D-10)	58,5% + 0,5%*(D-10)	58,5% + 0,5%*(D-10)	23,4% + 1,16%*(D-10)
15 < Duration ≤ 20 ans	9,65% + 0,5%*(D-15)	10,9% + 0,5%*(D-15)	13% + 0,5%*(D-15)	25% + 1%*(D-15)	44,05% + 0,5%*(D-15)	61% + 0,5%*(D-15)	61% + 0,5%*(D-15)	29,2% + 1,16%*(D-15)
Duration > 20 ans	12,15% + 0,5%*(D-20)	13,4% + 0,5%*(D-20)	15,5% + 0,5%*(D-20)	30% + 0,5%*(D-20)	46,55% + 0,5%*(D-20)	63,5% + 0,5%*(D-20)	63,5% + 0,5%*(D-20)	35% + 0,5%*(D-20)
Sensibilité maximale (en années)	176	173	169	140	107	73	73	130

### 3.2. Risques financiers : actions

Le risque action concerne les éléments au bilan dont la valeur de marché est sensible à l'évolution des cours d'actions.

La méthodologie de calcul s'appuie sur l'application d'un choc à la valeur de marché :

- choc de 22 % pour les actions listées sur des marchés des pays membres de l'EEA ou de l'OCDE (type 1) ;
- choc de 22 % pour les actions listées sur des marchés des pays non membres de l'EEA ou de l'OCDE, incluant les matières premières, les parts de Private Equity, de Hedge Funds ou investissements alternatifs (type 2).

La corrélation entre les chocs des actions de types 1 et 2 est de 75 %.

En pratique, ce choc n'est que provisoire et sera progressivement porté à 39 % / 49 % sur 7 ans à compter de l'entrée en application de Solvabilité 2. L'ajustement symétrique (« dampener »), faisant évoluer le choc dans un corridor de plus ou moins 10 points de pourcentage, s'appliquera bien pendant cette période transitoire.

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.2. Risques financiers : immobilier et change

Le risque immobilier concerne l'ensemble des actifs, passifs et instruments financiers dont la valeur de marché est sensible à l'évolution des cours et de la volatilité du marché immobilier :

- un choc unique de 25 % est appliqué ;
- un périmètre sans distinction entre habitations / bureaux, immobilier urbain / rural (terrains et immeubles de placement, participations dans des SCI, immobilier d'exploitation).

Le risque de change concerne des éléments de bilan sensibles à l'évolution des taux de change face à l'euro :

- choc entre 0 et 3 % pour les devises liées à l'euro ;
- choc de 25 % pour les devises non liées à l'euro.

### 3.2. Risques financiers : concentration

Il mesure la perte de valeur supplémentaire liée au cumul de l'exposition sur une même contrepartie lors du défaut d'un émetteur.

Il s'applique aux actifs considérés dans le risque action, spread et immobilier.

En pratique, pour chaque contrepartie au sens Groupe, il est évalué par :

$$g_i \times \max(0; E_i - CT \times Assets_{xl} )$$

où le paramètre  $g_i$  et le seuil  $CT$  dépendent de la notation de la contrepartie, et avec  $E_i$  correspondant à l'exposition au défaut de la contrepartie  $i$  et  $Assets_{xl}$  correspondant au montant total des actifs considérés dans ce sous-module.

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.3. Risques techniques vie : mortalité, longévité et invalidité

La charge de capital pour le **risque de mortalité** est égale à la variation de la valeur du *best estimate* suite à une augmentation multiplicative permanente de 15 % des taux de mortalité pour chaque âge.

Le **risque de longévité** est le risque que la durée de vie de l'assuré dépasse celle prévu par les tables de mortalité. Les charges de capital pour ce risque sont égales à la variation de la valeur du *best estimate* suite à une diminution multiplicative permanente de 20 % des taux de mortalité pour chaque âge.

Les charges de capital pour le **risque d'invalidité** sont égales à la variation de la valeur du *best estimate* suite à :

- une augmentation de 35 % des taux d'invalidité pour l'année suivante, couplée avec une augmentation de 25 % des taux d'invalidité pour chaque âge les années suivantes ;
- une diminution permanente de 20 % sur les taux de sortie d'invalidité.

### 3.3. Risques techniques vie : rachat

Le risque de rachat illustre le risque de changement défavorable du passif dû à des changements dans les taux d'exercice de certaines options (de résiliation, etc.).

Le capital du risque de rachat est égal au maximum entre le capital issus de trois chocs :

- down : une baisse instantanée et permanente de 50 % du taux d'exercice des options (dans la limite d'une baisse du taux de 20 points de pourcentage),
- up : une hausse instantanée et permanente de 50 % du taux d'exercice des options (dans la limite d'un taux d'exercice de 100 %),
- mass : un renoncement instantané de 40 % des contrats et une baisse instantanée de 40 % du nombre de contrats pour lesquels une réassurance était prévue.

Les chocs « down » et « up » sont appliqués si, pour un contrat, le choc conduit à une hausse du *best estimate* (que le *best estimate* soit positif ou négatif).

Concernant le choc « mass », il doit être appliqué aux contrats pour lesquels la valeur de rachat est supérieure au *best estimate* associée.

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.3. Risques techniques vie : dépense et catastrophe

La charge de capital pour le **risque de dépenses** est égale à la variation de la valeur du *best estimate* lorsque les dépenses futures sont supérieures aux anticipations *best estimate* de 10 % et que le taux d'inflation des dépenses est de 1 % par an supérieur aux prévisions.

La charge de capital pour le **risque catastrophe vie** est égale à la variation de la valeur du *best estimate* suite à une augmentation additive ponctuelle (événement sur une année) de 0,15 % des taux de mortalité.

Cette augmentation est réalisée pour les contrats concernés par le risque de mortalité, c'est-à-dire pour les contrats sur lesquels une augmentation des taux de mortalité entraîne une augmentation des provisions techniques.

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.4. Du BSCR au SCR : ajustement pour PB et risque opérationnel

On a :

$$SCR = BSCR + Adj_{TP} + Adj_{DT} + SCR_{op}$$

-  $Adj_{TP}$  : capacité d'action des dirigeants, qui peuvent par exemple adapter la PB pour atténuer les effets des chocs (capacité d'action limitée au montant du  $FDB$ ), évaluée par

$$Adj_{TP} = -\mathbf{max}(\mathbf{min}(BSCR - nBSCR; FDB); 0) ;$$

-  $SCR_{op}$  : le risque opérationnel (ne comprend ni le risque de réputation ni le risque stratégique). Il se calcule par :

$$SCR_{op} = \mathbf{min}(0,3 \times BSCR; Op) + 0,25 \times Exp_{ul}$$

avec  $Op = \mathbf{max}(Op_{premiums}; Op_{provisions})$ , sachant que les montants pour les primes et les provisions sont calculés à partir de formules simples distinguant les éléments vie et non-vie.

## 3. Illustration des risques dans S2 / pilier 1

### 3.4. Du BSCR au SCR : ajustement pour PB et risque opérationnel

L'ajustement pour impôts différés (DT) traduit le fait que les impôts futurs de l'organisme seront plus faibles dans un contexte défavorable.

Le calcul de l'ajustement pour DT est défini comme « la variation de la valeur des impôts différés qui résulteraient d'une perte instantanée d'un montant égal au  $SCRshock$  » (cf. SCR 2.17), où :

$$SCRshock = BSCR + Adj_{TP} + SCR_{OP}$$

En pratique, le SCR est (sachant que l'ajustement pour DT est négatif, cf. SCR 2.10) :

$$SCR = SCRshock + Adj_{DT}$$

avec

$$Adj_{DT} = -\max(DT - DTshock, 0)$$

où en simplifiant on a :

$$DTshock = \max\left(\left(FPshock - FP_{fisc}\right) \times Tx_{DT}, 0\right)$$

avec

$$FPshock = FP_{S2}^* - SCRshock$$

sachant  $FP_{S2}^*$  que correspond au montant de fonds propres Solvabilité 2 hors DT.

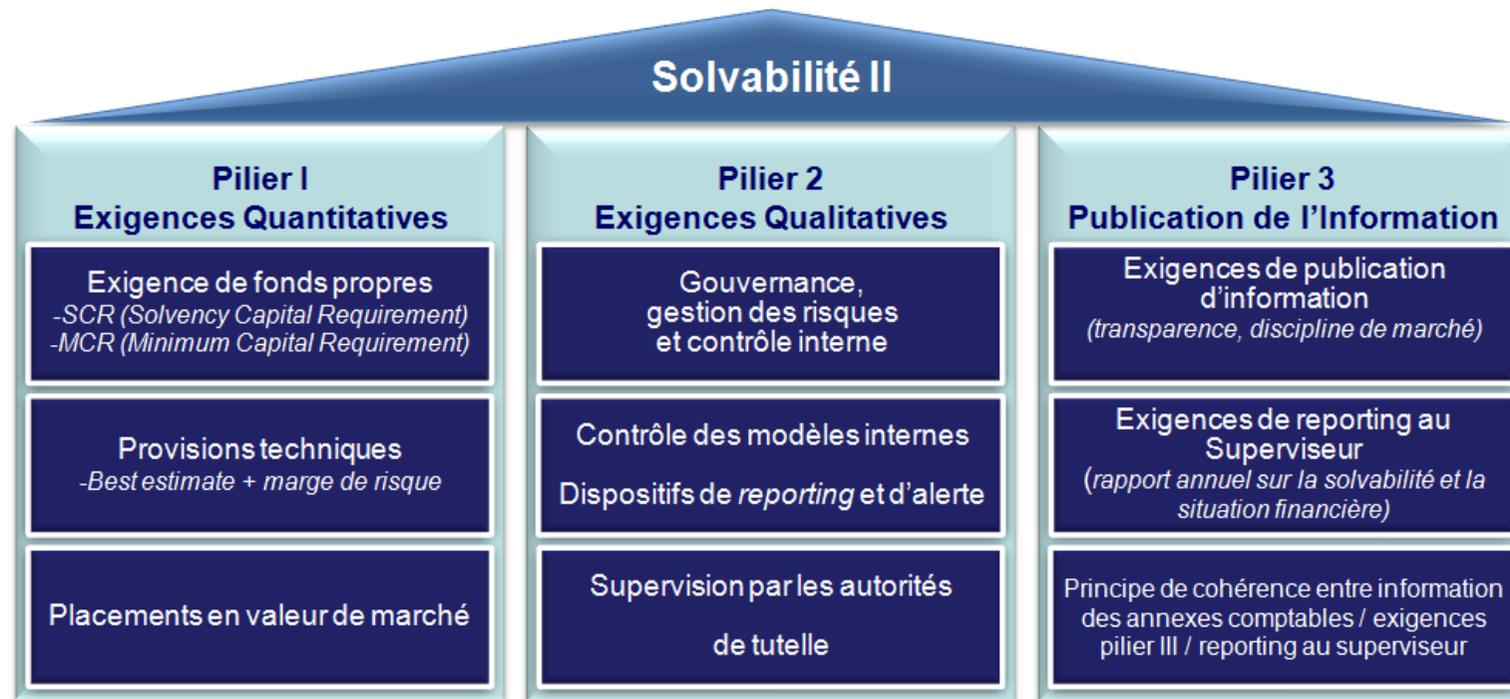
1. Risques financiers et modèles associés
2. Risques liés à la durée de vie humaine et modèles associés
3. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 1 / formule standard)
4. Illustration des risques de l'assureur dans le cadre de Solvabilité 2 (pilier 2 / ORSA)

# 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

## 4.1. Retour sur le contexte

Solvabilité 2 s'organise en trois piliers :

- Pilier 1 (purement quantitatif) : vise à s'assurer que l'organisme a la capacité, à une date donnée, de faire face sur les 12 mois à venir, à ses obligations dans 99,5% des cas.
- Pilier 2 (qualitatif et quantitatif) : vise à compléter les exigences du 1er Pilier.
- Pilier 3 : harmonise et enrichit la communication faite aux assurés et à l'ACPR.



### 4.1. Retour sur le contexte

Au cœur du pilier 2 de Solvabilité 2, l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) est l'évaluation par l'assureur lui-même et selon sa vision propre, de l'ensemble des risques auxquels il est soumis d'une part, et de sa solvabilité, c'est-à-dire sa capacité à les honorer, d'autre part.

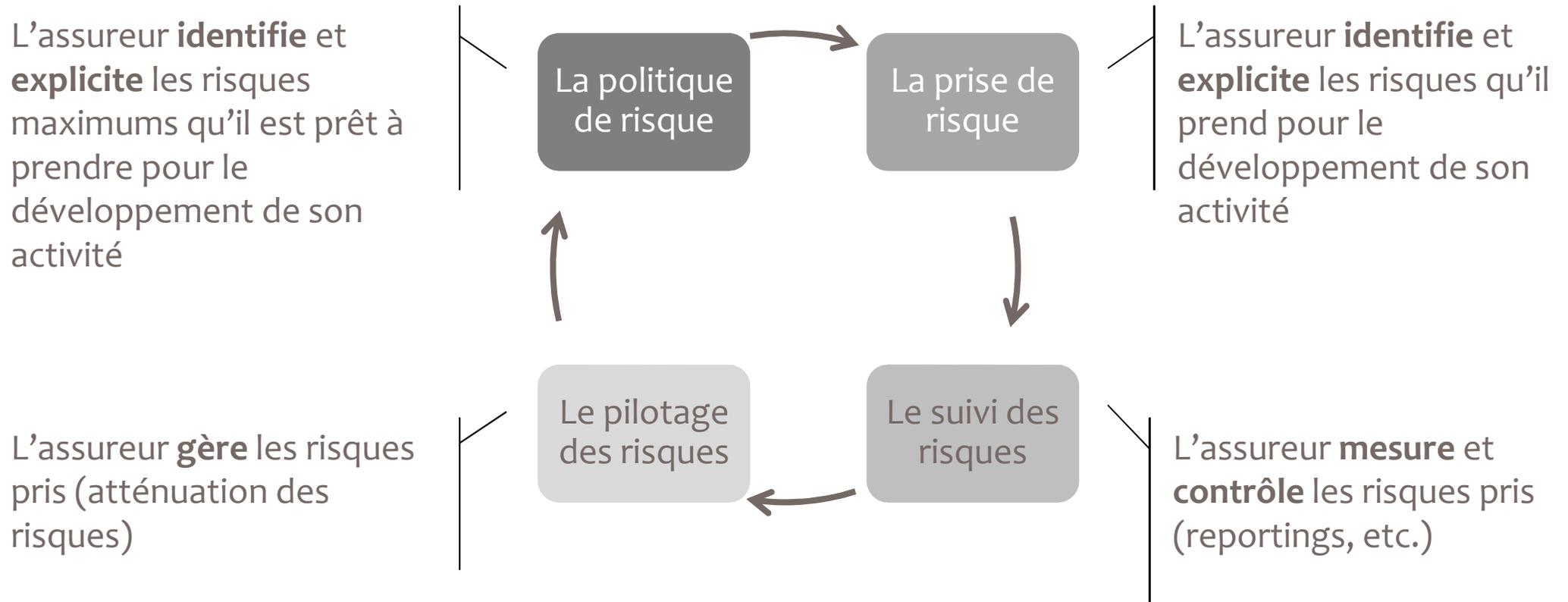
L'ORSA concentre tous les enjeux. En particulier, l'ORSA doit (cf. article 45) :

- prendre en compte le profil de risque propre, la politique de risque et la stratégie commerciale de l'entreprise d'assurance,
- identifier et évaluer les risques internes et externes auxquels l'entreprise d'assurance est soumise que ce soit à court, moyen ou long terme,
- démontrer la maîtrise continue de la solvabilité,
- être utilisé dans les décisions stratégiques.

S'acquitter de l'ORSA ne se résume pas à la production de calculs et de rapports, mais implique la mise en œuvre d'un macro-processus itératif, lui-même composé de processus et de sous-processus.

## 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

### 4.2. Gestion des risques : présentation du dispositif



Un tel dispositif doit être complet, cohérent, homogène, intégré dans l'activité opérationnelle et avec les systèmes d'information et surtout compréhensible par tous.

## 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

### 4.2. Gestion des risques : présentation d'une politique de risques

La politique de risque peut se décliner à plusieurs niveaux :

Appétence

Préférence

Tolérance

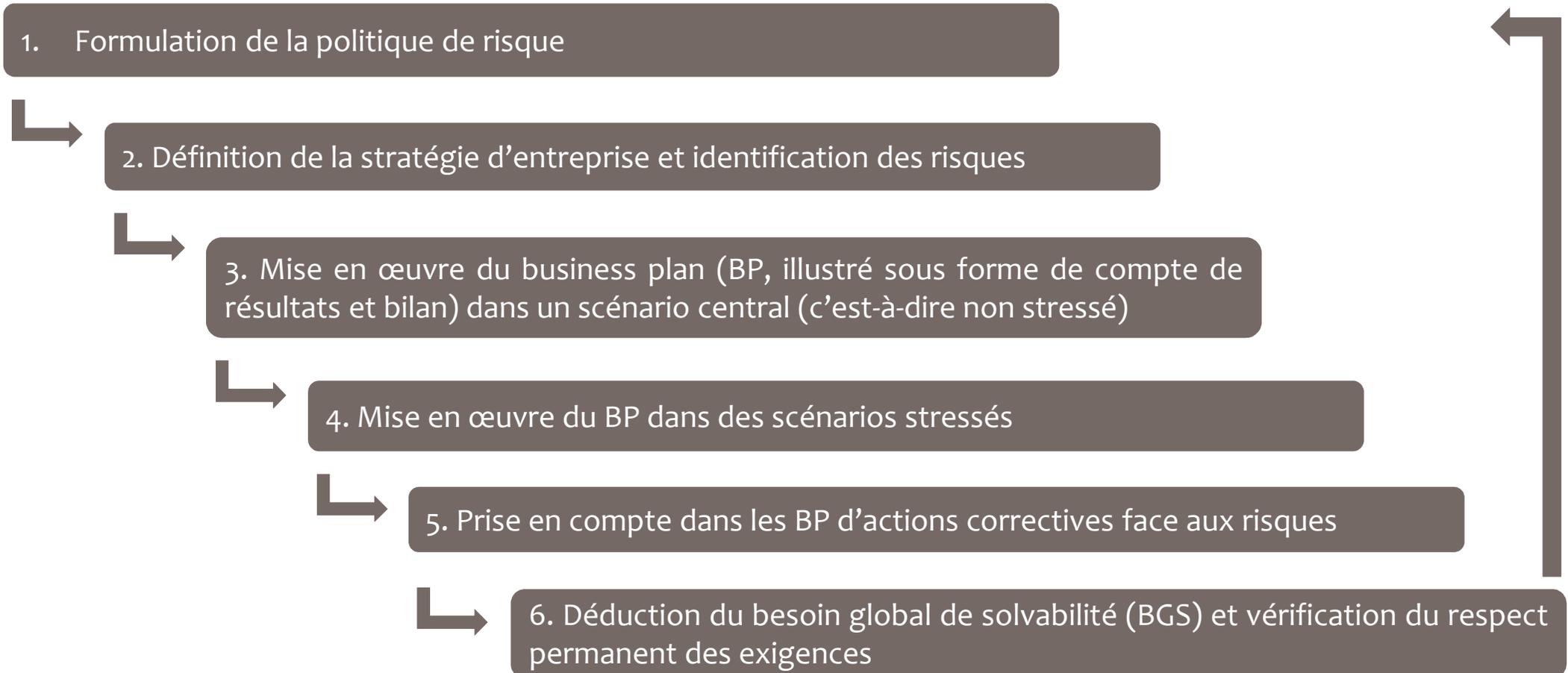
Limite

- l'appétence au risque, qui quantifie globalement les risques acceptés pour se développer (à cette limite de risque est associé le profil de risque, qui mesure l'exposition au risque de l'organisme et doit donc être inférieur à l'appétence au risque),
- les préférences de risque, qui encadrent la politique d'offre et définissent qualitativement et globalement les risques assumés en conséquence,
- les tolérances au risque, qui déclinent par *Business Unit* (BU) les deux points ci-dessus,
- les limites de risques, qui déclinent sur le plan opérationnel les tolérances au risque (dans les processus, les contrôles, la gestion actif – passif, la souscription de contrats, l'acquisition d'affaires, etc.).

## 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

### 4.2. Gestion des risques : de la politique au suivi et pilotage des risques

Une déclinaison de politique de risque est présentée dans les étapes suivantes, sachant que l'actuaire a un rôle à jouer dans chacune d'entre elles.



### 4.2. Gestion des risques : quelques points d'attention

Il convient d'accorder une attention particulière au management de la modélisation, et veiller ainsi à ce que le modèle reste simple pour :

- éviter l'illusion de la précision,
- développer une intuition du modèle,
- éviter de subir le modèle.

Par ailleurs, une bonne compréhension des systèmes d'information est cruciale pour apprécier la fiabilité des données (sources, processus de collecte, etc.) et en déduire les hypothèses et méthodes les plus pertinentes pour les modèles.

Enfin, il est indispensable de s'assurer de l'insertion opérationnelle du dispositif de gestion des risques via son appropriation par les instances de gouvernance : les administrateurs doivent s'approprier la démarche et la conclusion, et vérifier leur adéquation avec les objectifs visés.

### 4.3. L'ORSA : présentation générale

L'ORSA (ou évaluation interne des risques et de la solvabilité) est un processus essentiellement prospectif dans lequel il est demandé aux organismes de procéder à 3 évaluations :

- l'évaluation du besoin global de solvabilité (BGS),
- l'évaluation du respect permanent des obligations réglementaires concernant la couverture du SCR, du MCR et des exigences concernant le calcul des provisions techniques,
- l'évaluation de la mesure dans laquelle le profil de risque de l'organisme s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le calcul du SCR.

### 4.3. L'ORSA : évaluation du BGS

Cette évaluation doit comprendre une description de l'appétence au risque, du profil de risque spécifique et de la stratégie commerciale de l'organisme.

L'évaluation du BGS passe par une évaluation des moyens nécessaires pour faire face aux risques importants auxquels est soumis l'organisme : réassurance, plan d'urgence, couverture par des options, allocation d'actifs, moyens organisationnels et humains, etc.

En pratique, le BGS se distingue du SCR car :

- le calcul de SCR se limite aux seuls risques quantifiables et importants alors que le BGS doit couvrir tous les risques importants (y compris donc les risques de réputation, etc.) ;
- le SCR traduit les préoccupations prudentielles et réglementaires tandis que le BGS traduit également des considérations propres et commerciales de l'organisme ;
- le concept de BGS dépasse le cadre du seul capital.

## 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

### 4.3. L'ORSA : évaluation du respect permanent des obligations

Cette évaluation prospective consiste à apprécier la capacité de l'organisme à satisfaire aux exigences réglementaires (en termes de couverture du SCR), en particulier en situation adverse, en considérant des simulations de crises pertinentes.

Cette deuxième évaluation fait clairement une plus grande place aux exigences quantitatives de Solvabilité 2.

En pratique toutefois, cette évaluation reste propre et libre dans une large mesure, en particulier concernant le choix des méthodes et simulations pertinentes de crises ou de crises inversées.

## 4. Illustration des risques dans S2 / pilier 2

### 4.3. L'ORSA : évaluation de l'écart profil de risque / hypothèses du SCR

Dans le cadre de cette évaluation, l'organisme est amené à se poser la question de savoir :

- si tous les risques quantifiables et importants auquel il est soumis sont contenus dans le calcul du SCR,
- si la calibration de ces risques dans le calcul du SCR est conforme à son profil de risque,
- si l'interdépendance entre les risques de l'organisme correspond bien à la façon dont à la façon est modélisée dans le calcul du SCR.

Cette évaluation doit être *a minima* qualitative et, dans le cas où l'écart est jugé significatif, quantitative.

En outre, en pratique, les organismes utilisant la formule standard doivent sélectionner les hypothèses qui font intervenir les données propres à leur profil de risque.

**A1. Mouvements browniens**

**A2. Processus d'Îto et lemme d'Îto**

**A3. Discrétisation exacte**

## A1. Mouvements browniens

$X(t)$  est un mouvement brownien arithmétique (MBA) si  $X(t) - X(0)$  est gaussien selon la loi  $N(\mu t, \sigma^2 t)$  et si ses accroissements sont indépendants (s'ils sont calculés sur des périodes disjointes).

Un MBA dont les accroissements ont une espérance  $\mu=0$  et une variance par unité de temps  $\sigma^2=1$  s'appelle un mouvement brownien standard (ou processus de Wiener). Il est noté  $W(t)$  et on pose par définition  $W(0)=0$ .

Le calcul différentiel sur les processus de Wiener obéit aux règles suivantes :

- $(dW)^2 = dt = \text{Var}(dW)$
- $dW \cdot dt = 0$

Ces règles s'adaptent au Brownien arithmétique non standard  $X$  (de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ ) :

- $(dX)^2 = \sigma^2 dt$
- $dX \cdot dt = 0$

## A2. Processus d'Îto et lemme d'Îto

Un processus d'Îto est un processus stochastique pour lequel on a :

$$dX = \mu(t) dt + \sigma(t) dW_t$$

et

$$X(t) - X(0) + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s$$

Considérons une fonction  $f$  dont on écrit les valeurs  $f(t,x)$ . Les différences partielles sont notées  $\partial f / \partial t$ ,  $\partial f / \partial x$  et  $\partial^2 f / \partial^2 x$ .

On considère l'intervalle  $(t, t+dt)$  au cours duquel  $X$  varie de  $dX = X(t+dt) - X(t)$  et on note enfin la variation de  $f(t,X)$  induite par la double variation infinitésimale  $(dt, dX)$  :  $df = f(t+dt, X(t+dt)) - f(t, X(t))$ .

Le lemme d'Îto indique que dans ces conditions  $f(t,X(t))$  est un processus d'Îto et la différence  $df$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot) dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\cdot) (dX)^2$$

## A2. Processus d'Îto et lemme d'Îto

Pour illustrer un exemple d'application, on considère un mouvement brownien géométrique  $X$  et on applique le lemme d'Îto à  $\ln(X)$ . On a alors :

$$d \ln(X) = \frac{dX}{X} - \frac{1}{2} \frac{(dX)^2}{X^2}$$

Comme  $\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dW$  et  $\left(\frac{dX}{X}\right)^2 = \sigma^2 dt$ , on peut écrire :

$$d \ln(X) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW$$

d'où :

$$X(t) = X(0) \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)$$

## A3. Discrétisation exacte (modèle de vasicek à 1 facteur)

Soit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

alors :

$$d(\exp(at)r_t) = \exp(at)dr_t + a\exp(at)r_tdt = ab\exp(at)dt + \exp(at)\sigma dW_t$$

donc :

$$\exp(at)r_t = \exp(at_0)r_{t_0} + ab\int_{t_0}^t \exp(as)ds + \sigma\int_{t_0}^t \exp(as)dW_s$$

soit :

$$r_t = r_{t_0} \exp(-a(t-t_0)) + b(1 - \exp(-a(t-t_0))) + \sqrt{\left(\sigma\int_{t_0}^t \exp(-a(t-s))dW_s\right)^2}$$

d'où :

$$r_t = r_{t_0} \exp(-a(t-t_0)) + b(1 - \exp(-a(t-t_0))) + \sigma\sqrt{\frac{1 - \exp(-2a(t-t_0))}{2a}}\varepsilon_t$$

où  $\varepsilon$  représente une loi normale centrée réduite.

- Ahlgrim K. C., D'Arcy S. P., Gorvett R. W. [2005] « Modeling Financial Scenarios: A Framework for the Actuarial Profession », *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 92.
- Eiopa [2013] « [Technical Findings on the Long-Term Guarantees Assessment](#) », EIOPA, EIOPA/13/296.
- Eiopa [2013] « [Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment \(Part I\)](#) », EIOPA, EIOPA-DOC-13/61.
- Eiopa [2013] « [Technical Specifications part II on the Long Term Guarantee Assessment – Final version](#) », EIOPA, EIOPA/12/307.
- European Commission [2010] « [QIS5 Technical Specifications – Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5](#) », *European Commission, Financial Institutions*.
- Friggit J. [2007] « Long Term (1800-2005) Investment in Gold, Bonds, Stocks and Housing in France – with Insights into the USA and the UK: a Few Regularities », CGPC Working paper.
- Parlement européen, Conseil [2009] « [Directive du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice \(Solvabilité II\) \(Refonte\)](#) », *Union européenne*, PE-CONS 3643/6/09, REV 6.
- Planchet F., Leroy G. [2013] « [Risque de taux, spread et garanties long terme](#) », *la Tribune de l'Assurance* (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°178 du 01/03/2013.
- Planchet F., Théron P. [2011] « Modélisation statistique des phénomènes de durée – Applications actuarielles », *Economica*.
- Planchet F., Théron P.E., Kamega A. [2009] *Scénarios économiques en assurance. Modélisation et simulation*, *Economica*.

**Aymric Kamega**

[aymric.kamega@univ-brest.fr](mailto:aymric.kamega@univ-brest.fr)

**EURIA**

Université de Bretagne Occidentale

6 avenue le Gorgeu

CS 93837

29238 Brest Cedex 3

Tél : +33-2-98-01-66-55

[www.euria.univ-brest.fr](http://www.euria.univ-brest.fr)

<http://www.ressources-actuarielles.net>

<http://blog.ressources-actuarielles.net>

<http://afrique.ressources-actuarielles.net>