Université Virtuelle Africaine

INFORMATIQUE APPLIQUÉE: MAT 3200

LA RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Babacar M Ndiaye

Avant propos

L'Université virtuelle africaine (UVA) est fier de participer à l'amélioration de l'accès à l'éducation dans les pays africains à travers la production de matériel didactique de qualité. Nous sommes également fiers de contribuer aux connaissances mondiales comme nos ressources pédagogiques sont pour la plupart accessibles de l'extérieur du continent africain.

Ce module a été développé dans le cadre d'un programme à un diplôme en informatique appliquée, en collaboration avec 18 institutions partenaires africaines de 16 pays. Un total de 156 modules ont été élaborés pour assurer la disponibilité ou traduit en anglais, français et portugais. Ces modules ont également été mis à disposition en tant que ressources éducatives libres (REL) sur oer.avu.org.

Au nom de l'Université virtuelle africaine et notre patron, nos institutions partenaires, la Banque africaine de développement, je vous invite à utiliser ce module dans votre établissement, pour votre propre formation, de partager le plus largement possible et à participer activement à l'avu les communautés de pratique de votre intérêt. Nous nous engageons à être en première ligne de l'élaboration et le partage de ressources éducatives libres.

L'Université virtuelle africaine (UVA) est une organisation intergouvernementale panafricaine créée par la location avec le mandat d'accroître sensiblement l'accès à un enseignement supérieur de qualité et de formation à l'aide de l'information technologies de la communication. Une Charte, l'établissement de l'avu en tant qu'organisation intergouvernementale, a été signé ce jour par dix-neuf (19) Les gouvernements africains - le Kenya, le Sénégal, la Mauritanie, le Mali, la Côte d'Ivoire, Tanzanie, Mozambique, République démocratique du Congo, Bénin, Ghana, République de Guinée, Burkina Faso, Niger, Soudan du Sud, Soudan, l'Éthiopie, la Gambie, la Guinée-Bissau et le Cap-Vert.

Les institutions suivantes ont participé au programme d'informatique appliquée : (1) Université d'Abomey Calavi au Bénin ; (2) Université de Ougagadougou au Burkina Faso ; (3) l'Université Lumière de Bujumbura au Burundi ; (4) l'Université de Douala au Cameroun ; (5) Université de Nouakchott en Mauritanie ; (6) l'Université Gaston Berger au Sénégal ; (7) Université des Sciences, des Techniques et technologies de Bamako au Mali (8) Ghana Institute of Management and Public Administration ; (9) Université des Sciences et Technologies de Kwame Nkrumah au Ghana ; (10) l'Université Kenyatta au Kenya ; (11) l'Université d'Egerton au Kenya ; (12) l'Université d'Addis Abeba en Ethiopie (13) Université du Rwanda (14) ; Université de Dar es Salaam en Tanzanie ; (15) l'Université Abdou Moumouni de Niamey au Niger ; (16) l'Université Cheikh Anta Diop de Sénégal ; (17) Universidade Pedagógica au Mozambique ; et (18) l'Université de la Gambie en Gambie.

Bakary Diallo,

Recteur

l'Université virtuelle africaine

Crédits de production

Auteur

Babacar Mbaye Ndiaye

Pair Réviseur

Luc Ngend

UVA – Coordination Académique

Dr. Marilena Cabral

Coordinateur global Sciences Informatiques Apliquées

Prof Tim Mwololo Waema

Coordinateur du module

Florence Tushabe

Concepteurs pédagogiques

Elizabeth Mbasu

Benta Ochola

Diana Tuel

Equipe Média

Sidney McGregor

Barry Savala

Edwin Kiprono

Kelvin Muriithi

Victor Oluoch Otieno

Michal Abigael Koyier

Mercy Tabi Ojwang

Josiah Mutsogu

Kefa Murimi

Gerisson Mulongo

Droits d'auteur

Supporté par

Projet Multinational II de l'UVA financé par la Banque africaine de développement.

Table of Contents

Aperçu du cours

Bienvenue à Recherche Opérationnelle

La Recherche Opérationnelle est une approche quantitative permettant de produire de meilleures décisions. Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler, optimiser et planifier l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes.

Ce cours aborde un type particulier de modélisation. Il s'agit, d'une part, de donner une introduction à la formulation en modèles d'optimisation et d'autre part, de présenter les techniques de résolution de ces problèmes. On parle de problème d'optimisation lorsqu'il faut maximiser (ou minimiser) une fonction sous contraintes. Par exemple, maximiser le bénéfice (ou minimiser les pertes) d'une entreprise sous les contraintes de satisfaire la demande et de respecter la capacité de production.

Nous commencerons par le cas des problèmes linéaires en variables continues, c'est à dire les problèmes où la fonction objectif et les contraintes sont purement linéaires et les variables dans l'espace R^n.

Les autres classes de problèmes linéaires concernent la programmation linéaire en nombres entiers et la programmation linéaire binaire $[\![\{0,1\}]\!]$^n. Lorsque les contraintes et/ou la fonction objectif sont non linéaires, on parle de programmation non linéaire.

Beaucoup de techniques de résolution (méthodes exactes, heuristiques, métaheuristiques) existent dans la littérature pour la résolution des problèmes linéaires et non linéaires. Parmi elles, nous pouvons en citer : méthode du Simplexe (que nous étudierons dans le premier chapitre, voir https://www.siam.org/pdf/news/637.pdf), Branch-and-Bound ou séparation et évaluation progressive, cutting plane ou plan coupant, points intérieurs, colonies de fournies, génération de colonnes, algorithmes génétiques, recherche tabou, etc.

Il est à remarquer que toutes ces méthodes de résolution étant mises en œuvre dans des logiciels commerciaux, il ne viendrait plus à l'idée de les programmer soi-même. Par exemple: le solveur d'Excel, IBM CPLEX Optimizer, GUROBI, XPRESS-MP, Local Solver, etc. disposent d'une implémentation de ces algorithmes.

Prérequis

Pour suivre le cours, l'apprenant devra au préalable :

- Avoir les connaissances de base en mathématiques (algèbre linéaire, probabilité and statistique I).
- Savoir utiliser un ordinateur pour les apprenants désirant faire des applications pratiques.
- La connaissance d'un langage de programmation comme C, C++, java, etc. est un atout.

Matériaux

Les matériaux nécessaires pour compléter ce cours comprennent les :

- Disposer d'un ordinateur et d'internet;
- Access to Excel / Solver or Google / Sheets / Solver -https://www.google.com/sheets/about/
- Introduction to Operations Research, Fernando Marins, UNESP, São Paulo, 2011
- Introduction to Operations Research, 8th Ed, Frederick Hillier, Gerard Lieberman, McGraw, 2006
- Matrices, Vectors and Analytic Geometry, Reginaldo Santos, March 2012 -
- Introduction to Probability and Statistics, Maria G Martins, 2005
- Maîtriser certains logiciels comme IBM cplex, IPOPT, R project, scilab et/ou Gurobi etc. pour la résolution numérique des problèmes d'optimisation.

Objectifs du cours

À la fin de ce cours, l'étudiant devrait être en mesure de:

- Modéliser et résoudre un problème de décision.
- Résoudre graphiquement un programme linéaire avec deux variables (en variables continues).
- Développer la méthode du simplexe pour résoudre manuellement les problèmes de programmation linéaire simple.
- Utiliser le SOLVEUR pour résoudre des problèmes de programmation linéaire complexes.
- Modéliser et résoudre un problème de transport et d'affectation.
- Flots dans les réseaux, chemin de poids minimal, flot maximum et de coût minimum.
- Modéliser un problème de files d'attente et déterminer la durée moyenne et la longueur moyenne d'une file d'attente.

- Modéliser les cas simples de planification de projet et de la théorie des jeux.
- Faire des simulations numériques sur un problème d'optimisation avec contraintes.

Unités

Unité 0: Pre-Evaluation

Dans ce chapitre, nous faisons un examen des principaux concepts de l'algèbre linéaire et de la géométrie analytique nécessaires pour les unités qui vont suivre. Utiliser certains concepts statistiques pour déterminer les paramètres statistiques de la distribution de Poisson (nombre d'événements dans un intervalle de temps donné),

La distribution exponentielle (temps entre deux événements) et la distribution binomiale. Utiliser un tableur pour mettre en œuvre les simulations numériques

Unité 1: Programmation Linéaire, méthode du simplexe

Nous présentons, dans ce chapitre, d'abord les concepts de modélisation mathématique et la formalisation des problèmes de programmation linéaire. Puis, les éléments de base du procédé d'optimisation linéaire; ensuite les bases de calcul de la méthode du simplexe d'un problème à deux dimensions, illustrant le procédé de résolution graphique et algébrique. Enfin, nous abordons quelques-uns des problèmes de type de maximisation en utilisant l'algorithme SIMPLE des tableaux dans un tableur en introduisant l'add-on Draps Google et le SOLVER.

Unité 2: Programmation linéaire, dualité et analyse de sensibilité

Nous présentons ici, à la fois l'algorithme du Simplexe et ses variantes pour minimiser la fonction cible: « grand M » et « deux phases »;

Nous traitons le théorème de programmation linéaire, ainsi que le traitement de la question de l'existence et l'unicité de solutions;

Nous traitons également, la question de l'initialisation et des itérations de l'algorithme du Simplexe, en résolvant certains sous problèmes via les feuilles de calcul et SOLVEUR:

Nous terminerons par afficher la relation entre le primal et le dual d'un problème de programmation linéaire, les principes fondamentaux de l'analyse de sensibilité. Nous illustrons les concepts avec des exemples.

Unité 3: Les problèmes de transport

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les principes de bases de la théorie des graphes, puis le problème du transport et ses algorithmes de résolution, ensuite le problème d'affection et l'algorithme hongrois pour sa résolution.

Unité 4: ptimisation dans les réseaux et files d'attente

Nous développons, dans ce chapitre, d'abord l'optimisation des réseaux pour l'analyse des problèmes de plus court chemin, flot dans les réseaux et flot de coût minimum; puis nous présentons les éléments de bases des processus stochastiques de Markov; ensuite nous présentons la théorie des files d'attente. Nous terminerons par étudier la planification de projets et la théorie des jeux.

Évaluation

Les évaluations formatives (vérification de progrès) sont incluses dans chaque unité.

Les évaluations sommatives (tests et travaux finaux) sont fournies à la fin de chaque module et traitent des connaissances et compétences du module.

Les évaluations sommatives sont gérées à la discrétion de l'établissement qui offre le cours. Le plan d'évaluation proposé est le suivant:

1	Partie 1 : Devoir	15%
2	Partie 2 : Devoir	15%
3	Partie 3 : Devoir	15%
4	Partie 4 : Devoir	15%
5	Partie 5 : Examen final	40%

Plan

Unité	Sujets et Activités	Durée estimée
Unité 0	Préliminaires + évaluation	20 heures
Unité 1	Activités théoriques + Exercices pratiques + Évaluation formative	25 heures
Unité 2	Activités théoriques + Exercices pratiques + Évaluation formative	25 heures
Unité 3	Activités théoriques + Exercices pratiques + Évaluation formative	25 heures
Unité 4	Activités théoriques + Exercices pratiques + Évaluation formative	25 heures
Unité 4	Examen Final	20 heures

Lectures et autres ressources

Les lectures et autres ressources dans ce cours sont indiquées ci-dessous.

Unité 0

Lectures et autres ressources obligatoires:

- Lectures et autres ressources obligatoires:
- Un premier cours en algèbre linéaire :
- Programmation mathématique: Théorie et algorithmes, Michel Minoux, 710 pages. Éditeur: Tec & Doc Lavoisier, 2ième édition (14 Décembre 2007).
- Programmation linéaire, Christelle Gueret, Christian Prins, Marc Sevaux. Collection Algorithmes, octobre 2000.
- Introduction to Probability and Statistics, Charles M. Grinstead, J. Laurie Snell : .
- Application Worksheet : .
- Khan Academy - .

Lectures et autres ressources optionnelles:

- Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., Introduction to Global Optimization,
- (eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Portail ENSTA de la RO. .

Unité 1

Lectures et autres ressources obligatoires:

- Programmation mathématique: Théorie et algorithmes, Michel Minoux, 710 pages. Editeur: Tec & Doc Lavoisier, 2ième édition (14 Décembre 2007).
- Introduction to Operations Research, 8th Ed, Frederick Hillier, Gerard Lieberman, McGraw, 2006.
- Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., Introduction to Global Optimization,
- (eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications,
- Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Application Worksheet : .
- Khan Academy - .

Lectures et autres ressources optionnelles:

- ROADEF. .
- Principles of Mathematical Modeling, 2nd Ed, Clive Dym, Elsevier Inc., 2004.
- Portail ENSTA de la RO.
- Linear and Non-Linear Programming, 3rd Ed, David Luenberger, Yinyu Ye, Springer, 2008.
- International Ferderation of Operational Research Societies : .
- The Institute for Operations Research and the Management Sciences : .

Unité 2

Lectures et autres ressources obligatoires:

- Programmation mathématique: Théorie et algorithmes, Michel Minoux, 710 pages. Editeur: Tec & Doc Lavoisier, 2ième édition (14 Décembre 2007).
- Introduction to Operations Research, 8th Ed, Frederick Hillier, Gerard Lieberman, McGraw, 2006.
- Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., Introduction to Global Optimization,
- (eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications,
- Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Application Worksheet : .
- Khan Academy - .

Lectures et autres ressources optionnelles:

- Principles of Mathematical Modeling, 2nd Ed, Clive Dym, Elsevier Inc., 2004.
- Portail ENSTA de la RO. .
- Linear and Non-Linear Programming, 3rd Ed, David Luenberger, Yinyu Ye, Springer, 2008.
- International Ferderation of Operational Research Societies : .
- The Institute for Operations Research and the Management Sciences : .

Unité 3

Lectures et autres ressources obligatoires:

- Programmation mathématique: Théorie et algorithmes, Michel Minoux, 710 pages. Editeur: Tec & Doc Lavoisier, 2ième édition (14 Décembre 2007).
- Introduction to Operations Research, 8th Ed, Frederick Hillier, Gerard Lieberman, McGraw, 2006.

- Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., Introduction to Global Optimization,
- (eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications,
- Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Application Worksheet : .
- Khan Academy - .

Lectures et autres ressources optionnelles:

- Principles of Mathematical Modeling, 2nd Ed, Clive Dym, Elsevier Inc., 2004.
- Portail ENSTA de la RO. .
- Linear and Non-Linear Programming, 3rd Ed, David Luenberger, Yinyu Ye, Springer, 2008.
- International Ferderation of Operational Research Societies : .
- The Institute for Operations Research and the Management Sciences : .

Unité 4

Lectures et autres ressources obligatoires:

- Programmation mathématique: Théorie et algorithmes, Michel Minoux, 710 pages. Editeur: Tec & Doc Lavoisier, 2ième édition (14 Décembre 2007).
- Introduction to Operations Research, 8th Ed, Frederick Hillier, Gerard Lieberman, McGraw, 2006.
- Horst, R., Pardalos, P. and Thoai, N., Introduction to Global Optimization,(eds.): 1995, Vol. 3 of Nonconvex Optimization and its Applications,
- Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Application Worksheet : .
- Khan Academy - .

Lectures et autres ressources optionnelles:

- Principles of Mathematical Modeling, 2nd Ed, Clive Dym, Elsevier Inc., 2004.
- Portail ENSTA de la RO. .
- Linear and Non-Linear Programming, 3rd Ed, David Luenberger, Yinyu Ye, Springer, 2008.
- International Ferderation of Operational Research Societies : .
- The Institute for Operations Research and the Management Sciences : .

Unité 0. Pré-Évaluation

Introduction à l'unité

Le but de cette unité est de vérifier la compréhension de la connaissance de l'algèbre linéaire, la géométrie analytique et des statistiques qui sont liés aux autres cours.

Objectifs de l'unité

À la fin de cette unité, vous devriez être capable de:

- Analyser les principaux concepts de l'algèbre linéaire et de la géométrie analytique
- Résoudre graphiquement un programme linéaire avec deux variables.
- Développer la méthode du simplexe pour les problèmes primal et dual.
- Utiliser certains concepts statistiques pour déterminer les paramètres statistiques de la distribution de Poisson (nombre d'événements dans un intervalle de temps donné), la distribution exponentielle (temps entre deux événements) et la distribution binomiale.
- Utiliser un tableur pour mettre en œuvre les simulations numériques.

Termes clés

Espace vectoriel: corps scalaire agissant sur un groupe abélien (vecteurs)

Combinaison linéaire: somme de multiplication scalaire de vecteurs

Indépendance linéaire: zéro combinaison linéaire de vecteurs (négligeable ou nulle)

Générateur: extension par la combinaison linéaire

Base: vecteurs linéairement indépendants et systèmes générateurs

Sous-espace vectoriel: sous-ensemble qui est aussi un espace vectoriel

Somme directe: sous-espaces dont la somme est tout l'espace et dont l'intersection est l'espace trivial {0}.

Transformation linéaire: fonction qui préserve la combinaison linéaire

Espace vide: vecteurs de sous-espace dont l'image est le vecteur nul

Matrice: agencement des numéros en lignes et colonnes

Multiplication de matrices: somme des colonnes entrées dans un ordre particulier

Forme linéaire: groupe linéaire de fonctions sur le corps d'un espace vectoriel

Espace dual: l'espace des formes linéaires dans un espace vectoriel

Graphique : ensemble de niveau de linéarisé.

Plan : ensemble de niveau de linéarisé.

Distribution de Poisson: P (X = n) = ((E ^ {- λ} λ^n) / (n!))

Distribution Binomial: P (Y = k) = (n / k) p ^ {k} (1-w) ^ {nk}

Évaluation de l'unité

Vérifiez votre compréhension!

Question 1

On considère les matrices suivantes :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calculer

AB=

BA=

CD=

⟦AC⟧^T=

DC=

B^T B=

AD=

AE=

EB=

ED=

b) Expliquer pourquoi il est impossible de calculer A+B,AC,BC,DEouEC

c) Calculer [A] + [B] +[C] [D]+[E]

d) Utiliser l'algorithme d'élimination gaussienne pour trouver les matrices en quinconce C et D.

e) Utilisation de l'élimination de Gauss-Jordan pour trouver l'inverse de E et résoudre l'équation Ex=B.

Question 2

a) En ce qui concerne la base canonique de R^2, quelle est l'équation de la droite passant par les points P: (4,0) et Q: (0,3)

b) Quel est le segment de l'équation entre P, Q ?

c) Quelles sont les coordonnées du point milieu de P et Q

d) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la droite dans (a) avec la droite .

Question 3

a) Dans la base canonique de R^3, quel est l'équation du plan passant par les points Q: (4,0,0), Q: (0,3,0) et R: (0,0, -1) ?

b) Quels sont les coordonnées du point qui est le milieu des sommets du triangle P, Q et R ?

c) Quel est l'équation de la droite obtenue à partir de l'intersection de la surface de (a) avec la surface x-2y + z = 1 ?

Question 4

Une compagnie d'assurance reçoit en moyenne un accident par heure de participation. Tenant compte de la distribution de Poisson et admettant que l'entreprise travaille en moyenne six heures par jour, cinq jours par semaine.

a) Quelle est la probabilité qu'il ne se produise aucune participation de l'accident en une heure ?

b) Quelle est la proportion de jours avec moins de trois exploitations ?

c) Quelle est la probabilité d'avoir trois jours par semaine, qu'il y ait une participation quotidien de quatre accidents ?

Question 5

Dans un processus (sans mémoire) Markov, le vecteur d'état générant k ne dépend que de la génération précédente où les entrées sur la matrice de transition T mesure la probabilité l'état changeant i à l'état j en une génération.
Considérons un système de Markov avec une population divisée en trois états, avec la matrice de transition

$$E = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

et l'état initial

$$P^0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

a) Expliquer pourquoi les valeurs de la matrice de transition T ne sont pas négatives, la somme des valeurs dans l'une des colonnes de T est 1 et la somme des valeurs de est aussi égale à un ?

b) Quel est le vecteur d'état de la 3ème génération, P³ ?

Answers

Question 1

a)

$$A=4$$

$$BA=\begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CD=\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$DC=\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AC^T=[-2\ 5]$$

$$B^TB=6$$

$$AD=[12\ 5]$$

$$AE=[3\ 2\ 3]$$

$$EB=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ED=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Les dimensions des matrices ne sont pas compatibles avec les opérations

c)

$$[A]_{12}+[B]_{31}+[C]_{23}[D]_{12}+[E]_{22}=0+1-(-1)(1)-2=0$$

d)

$$C\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e)

$$E^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Question 2

a) $3x + 4y = 12$

b) (1-t) (4,0) + t (0,3) avec

(x, y) = ((1- t) 4,3t) équations paramétriques

c) Pour t = (1/2)

(x, y) = (2,7 / 2)

d) (x, y) = (2,3 / 2)

Question 3

a)

$3x + 4y - 12z = 12$

b)

$$(x,y,z)_{mid}=(4/3,1,-1/3)$$

c)

$$\lambda(24/5,24/10,1)+(1-\lambda)(2,2/3,0)$$

Question 4

a) Par heure (unité de temps)

X~Po (1) i.e. la variable aléatoire X a une distribution de Poisson de paramètre λ = 1

p (X = n) = ((E ^ {-} λ^n λ) / (P

n!))(X= 0) = (($e^1 1^0$) / (0!)) = e^1 = 0.36788 = 37%

b) Par jour (unité de temps) l’entreprise travaille pendant 6 heures

X~Po (6)

P (X = 0,1,2) = ((e6) / (0!)) + (($e6^1$) / (1!)) + ($e6^2$) / (2!) = 25e = 0.062 = 6.2%

c) jour (unité de temps) exploite l’entreprise pendant 6 heures

X~Po (6)

$P(X = 4) = ((e6) / (4!)) = 54e^{-6} = 0.134$

Y est le nombre de jours dans une semaine, avec un total de 5 jours dans une semaine

Y~B (5; 0134) ie la variable aléatoire a une loi binomiale de moyenne 0.134

P (Y = k) = (n / k) p ^ {k} (1-p) ^ {nk}

P (Y = 3) = (5/3) (0,134) ³ (1 (0134)) ² = 0.018 = 1.8%

Question 5

a) correspondent à des probabilités de transition de l'état i à l'état j. Ceux sont des valeurs réelles dans [0,1].
La somme des entrées dans l'une des colonnes est 1 parce que la somme des probabilités pour le transit de l'un des Etats pour un état donné est 1
Nombre total d'unités est égale à la somme des unités initiales de chacun des Etats.

b)

$P^3 = TP^2 = T(TP^1) = T^2(TP) = T^3P$

$$P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Instructions

Le test comprend cinq questions auxquelles il faut répondre pour une durée de 120 minutes.

Système de notation

Chaque question a un poids de 20 points pour un total de 100 points.

Feedback

Avec des résultats supérieurs à 50%, les étudiants peuvent continuer avec les unités restantes. Avec un résultat inférieur à 50%, l'étudiant doit faire un examen des modules de l'algèbre linéaire, la géométrie analytique et statistique avant de poursuivre.

Unité 1. Programmation linéaire, méthode du simplexe

Introduction à l'unité

Cette unité introduit les concepts de la modélisation mathématique et la formalisation des problèmes de programmation linéaire. Cette unité traite des terminologies et éléments de base de la démarche d'optimisation linéaire. Les fondements de l'informatique et de la méthode du Simplex d'un problème de dimension deux sont traités graphiquement et algébriquement.

Les solutions des problèmes de minimisation et de maximisation utilisant l'algorithme du Simplexe sont introduites. Nous utilisons le solveur Excel pour résoudre numériquement ces problèmes.

Objectifs de l'unité

À la fin de cette unité, vous devriez être capable de:

- Résoudre graphiquement un programme linéaire.
- Connaître les exemples simplifiés qui font référence à des situations réelles.
- Développer des modèles mathématiques simples relatives aux processus réels ou idéalisés;
- Formuler des problèmes de programmation linéaire et de les présenter sous une forme normalisée;
- Appliquer les préalables de l'algèbre et de la géométrie descriptive pour la résolution d'un problème de programmation linéaire de dimensions deux;
- Appliquez manuellement l'algorithme Simplex pour résoudre des problèmes de programmation linéaire simple
- Utilisez le solveur pour résoudre des problèmes de programmation linéaire simple.

Termes clés

Valeur:c'est la quantité monétaire résultant de l'équilibre entre l'offre et la demande

Rendement: rapport entre unités d'entrée par unité de production

Les variables de décision: c'est la quantité utile à la résolution du problème dont le modèle détermine la valeur.

Fonction objectif : critère de choix entre diverses solutions possibles. (par convention on dit fonction objectif et non fonction objectif)

Contraintes: toute relation limitant le choix possible des valeurs des variables

Optimisation: maximisation ou minimisation de la fonction objectif sous les contraintes du système.

Fonction convexe : le segment des points reste dans l'ensemble

Linéaire: relation proportionnelle

Région réalisable: domaine de faisabilité du système
Solution de base: points extrêmes du domaine réalisable

Excellente solution: solution qui maximise ou qui minimise la valeur de la fonction objectif.

Variables d'écart: variables permettant de saturer les contraintes

Variable de base: variables de référence

Variable non-base: variables libres (qui sont remis à zéro)

Simplexe: procédure de résolution des problèmes d'optimisation

Initialisation: les valeurs initiales entrées dans l'algorithme

Itération : commande de contrôle de l'exécution de l'algorithme:

Activités d'apprentissage

Activité 1 – Formulation d'un problème de programmation linéaire

Introduction

Il présente les concepts généraux de la modélisation mathématique et modèles de décision les plus courantes:
1. La programmation (dans le sens de la planification)
2. Flot de réseaux
3. Les files d'attente
4. Contrôle
Il présente les étapes de la modélisation et de la formulation des problèmes de programmation linéaire, avec des exemples plus fréquentes [Marins]:

- production
- Campagne publicitaire
- La formation du personnel
- Industrie chimique
- machines utilisant l'équilibrage de charge
- équipes de mise à l'échelle

Détails de l'activité:

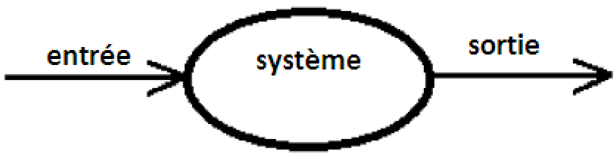
Modèles de décision

L'objectif de la recherche opérationnelle est la "modélisation et la prise de décision dans les systèmes réels, déterministe ou probabiliste, concernant la nécessité d'allouer des ressources rares." [Marins]
Les modèles sont des projections (représentations) d'une réalité / concept dans un «espace» particulier.
Par exemple, un avion de papier est une projection d'un concept d'un espace de matériau en papier.
Un plan numérique d'une maison est la projection d'un concept dans un espace géométrique de points, lignes, surfaces et volumes.
La modélisation mathématique surgit naturellement de l'activité humaine.

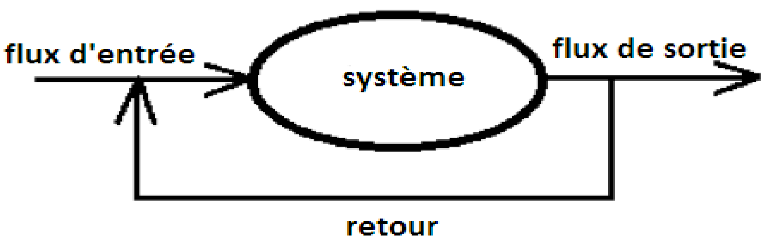
Apprentissage

A titre d'exemple, l'activité simple de partager un sac de riz entre voisins est modélisée naturellement en quantifiant le riz dans le sac (12 kg) et la quantité de voisins (6). Cette mesure permet de résoudre un problème (12/6 = 2) l'optimisation de la paix entre voisins: chaque voisin correspond à 2 kg de riz.
Il y a toujours deux côtés de la même question: celui qui donne le riz (primal) et celui qui reçoit le riz (dual).
La modélisation vise à prendre la meilleure décision ou la décision optimale.
Bien sûr, il existe d'autres modèles de distribution de riz qui pourrait prendre en compte la composition de la famille et l'âge de chacun des membres de la famille ou d'autres facteurs jugés pertinents.
Par conséquent, la modélisation n'est pas unique et dépend du degré de précision analytique à atteindre.
Aujourd'hui, la modélisation mathématique est : (i) réalités complexes et (ii) concepts dans l'espace des relations abstraites. Tout ceci est exprimé par le langage mathématique.
La distribution de Bernoulli $P(X = 1) = p$ sert de modèle stochastique de l'état final de la pièce de monnaie lancée en l'air, où la variable aléatoire $X = 1$ si la sortie est "face" et le paramètre p détermine la probabilité "a priori d'avoir face ". Un système est une mise au point de l'analyse de l'observation.

Un système peut être classé en systèmes physiques (particules, organes mécaniques…), systèmes biologiques (organismes, écosystèmes, ...), systèmes technologiques (équipements, cameras, cars, ...), systèmes de communication et d'information (ordinateurs, téléphones portables, les tours de communication, routeurs, ...), des systèmes de gestion (entreprises, usines, points de vente, ...), etc. Les modèles mathématiques sont généralement appliqués à des systèmes (organisation) et des processus (évolution temporelle). Un système d'entrées est transformé en un signal de sortie donnée, en fonction de la spécificité du système



Dans le cas où à la fois l'entrée et la sortie sont des séries de temps et peuvent être des lignes de feed-back (ou action anticipée). Tout ou partie de l'entrée est renvoyée comme entrée pour mieux contrôler la production.



Dans la modélisation de systèmes physiques, chaque entrée et chaque sortie est mesurable et les unités de mesure sont standard dans le système des unités internationales de mesure.

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	mètre	M
Masse	Kilogramme	Kg
Temps	Seconde	S
Courant électrique	Ampère	A
Température	Kelvin	K
Quantité de matériel	Moles	Mol
Intensité lumineuse	Candela	cd

Dans l'élaboration de systèmes humains de gestion des ressources, de production et financiers d'une entreprise, les unités physiques sont converties en unités monétaires à travers la notion de valeur.
La valeur de marché actuelle vous permet de traduire les différentes unités de mesure en unités monétaires.
Par exemple, si l'entrée d'un système donné est de 1 kilogramme de peinture à l'huile est alors convertibles à 1000 unité monétaire si cela est la valeur marchande de chaque litre de peinture à l'huile. Comme spécifié, chaque système a des paramètres techniques de performance qui déterminent la capacité de traitement d'entrée de sortie.

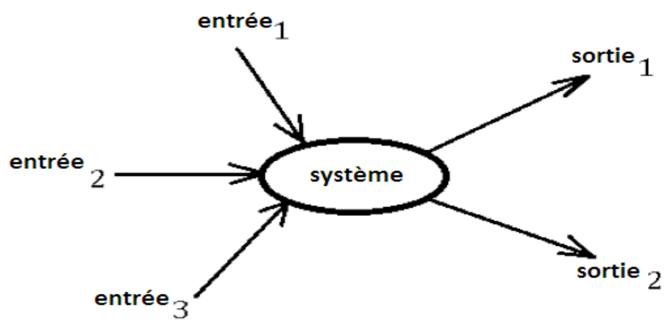
Par exemple, si une couturière a un rendement de 2 chemises par jour, et s'il ne manque pas de matière première, un système avec trois couturières produit 6 chemises.
Les rendements sont généralement associés à une certaine période de temps et sont habituellement classées en de spécifiques tableaux techniques pour chaque système.

Item	Descrição	Un	Qte	Preço venda	Valor
17.04.01.07	Fornecimento e assentamento de azulejo com 60x60cm em paredes exteriores, assente com cimento cola Weber.Col Flex L e betumagem das juntas com betume Weber.Color Flex em cor a definir	m2	1,00	40,04€	40,04€

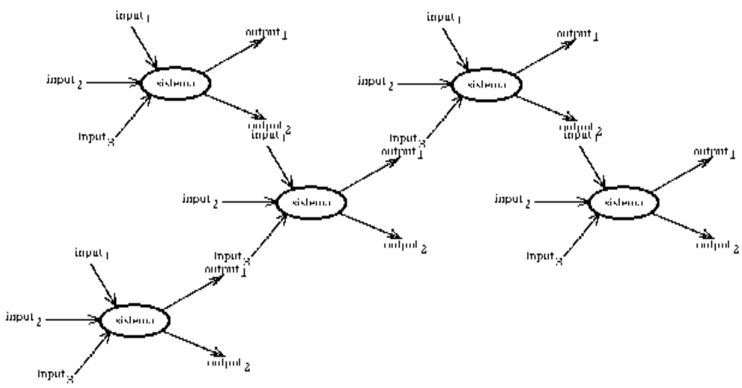
Preços para os diverssos tipos de obra

Condições de execução	Rendimento (hr/m2)	Produção (m2/dia)	Mão-de-obra	Materiais	Equipa-mento	Preço Seco	Margem	Preço venda
Más	2,000	4,000	16,71 €	19,22 €	1,37 €	37,30 €	36,00%	50,73 €
Normais	1,400	5,714	11,70 €	19,22 €	1,37 €	32,29 €	24,00%	40,04 €
Boas	1,000	8,000	8,35 €	19,22 €	1,37 €	28,94 €	18,00%	34,15 €
Óptimas	0,850	9,412	7,10 €	19,22 €	1,37 €	27,69 €	11,00%	30,74 €

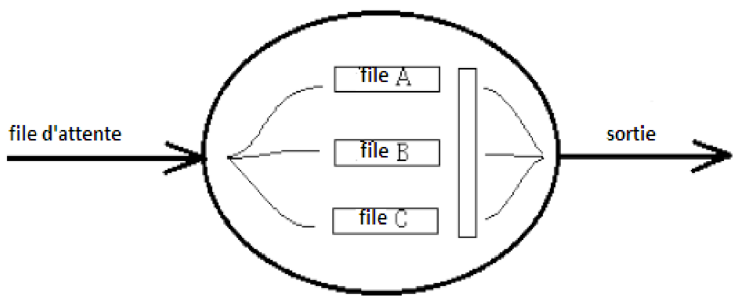
Une grande partie de la gestion des ressources humaines, de la gestion de la production des sociétés financières se concentrent sur la meilleure décision à prendre (bonne décision) dans les modèles de décision suivants:
problème 1. Programmation (planification) - affectation de ressources limitées dans la production des output.



2. problème de débit dans les systèmes réseaux – Écoulement à travers un système de réseau interconnecté avec différents « poids » de connexion, chaque entrée d'un système sert d'output pour les autres:



3. Problème de file d'attente- entrée aléatoire mais avec une accumulation/retard entre l'entrée et la sortie.



4. Problème de contrôle – la (les) sortie (s) est (sont) contrôlée(s) à partir de la réglementation de certaines ressources.

Les deux premiers modèles de prise de décision commerciale, de programmation des flux de réseaux seront traités tout au long de ce cours.

Le problème de file d'attente et de contrôle ne seront pas traités dans ce cours.
Dans la classe des problèmes d'ordonnancement (planification) seront traités les cas typiques impliquant :

- Détermination de la composition de la production
- Campagne publicitaire
- La formation du personnel
- Mélange dans l'industrie chimique
- machines utilisant l'équilibrage de charge
- Conception des équipes d'inspection et
- d'autres problèmes ayant des caractéristiques similaires.

La classe de flux de réseau sera analysée dans les cas typiques impliquant:

- le transport
- arbre de recouvrement minimal.
- chemin de poids minimal
- débit maximal dans un réseau
- flot de coût minimal dans un réseau
- chemin critique
- éléments de la théorie des jeux

Dans la plupart des cas, la conception et la mise en œuvre d'un modèle de programmation (planification) nécessite les étapes suivantes:

1. Définir le problème;
2. Recueillir des données;
3. Formuler le modèle mathématique en terme d'un problème d'optimisation;
4. Tester et expérimenter le modèle;
5. Résoudre le problème d'optimisation et simuler différentes conditions de fonctionnement;
6. Déterminer la zone de fonctionnement optimal du système;
7. Mettre en œuvre le fonctionnement du système dans la zone optimale;
8. commander la déviation de la région optimale du système;

Définition du problème

Il est nécessaire d'établir très clairement la définition du problème à optimiser : la fonction objectif dont la valeur est un nombre réel qui mesure la performance sur les variables de décision.

Collecte des données

La collecte de données permet d'identifier les variables de décision qui influencent directement la fonction objectif. Elle aide à déterminer les restrictions sur laquelle sont soumises les variables de décision. Elle aide aussi à obtenir les revenus et les paramètres techniques qui influencent la fonction objectif.

Formulation

Dans la formulation du modèle de l'optimisation, le problème se pose sous la forme de la fonction objectif sous réserve de m contraintes pour , où x est le vecteur des variables de décision

Test

Il est important de tester le modèle et l'ajuster afin de représenter objectivement les conditions réelles du système.

Simulation

La simulation du modèle identifie les variables ayant le plus grand impact sur la fonction objectif et traite ces variables avec une attention particulière.

Résolution

La résolution du modèle revient à trouver le vecteur de la variable de décision qui satisfait toutes les contraintes et à optimiser (maximiser ou minimiser) la fonction objectif.

Contrôle

Le système devrait être pris pour fonctionner dans la région admissible et les systèmes de contrôle devraient être introduits afin d'attirer l'attention sur les écarts de la région de fonctionnement optimal.

Formulation des problèmes de programmation linéaire

En général, un problème d'optimisation est classé selon que la fonction objectif soit convexe ou non et que les m contraintes pour , avec x le vecteur de décision variable soient convexe ou non.

Rappelez-vous que la fonction est convexe si

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y) \text{pour} \alpha+\beta=1 \text{e} \alpha,\beta \epsilon [0,1]$$

Une classe importante de problèmes d'optimisation convexe est appelée problèmes de programmation linéaire, où les fonctions sont des fonctions linéaires du vecteur des variables de décision.Rappelez-vous que la fonction est linéaire si:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y) \text{pour} \alpha+\beta \epsilon R$$

Les fonctions non linéaires peuvent être représentées par des combinaisons linéaires des composantes du vecteur de la variable:

$$f(x)=c_1 x_1+c_2 x_2+\cdots+c_n x_n \text{ pour} \epsilon R$$

La formulation d'un modèle de programmation linéaire consiste à présenter le problème comme une fonction objectif d'optimisation:
Maximisation ou de minimisation:

$$z=c_1 x_1+c_2 x_2+\cdots+c_n x$$

soumise à des contraintes:

$$ax_1+a_{12} x_2+\cdots+ax_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1+a_{22} x_2+\cdots+a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1} x_1+a_{m2} x_2+\cdots+a_{mn}, x_n \leq b_m$$

et une non-négativité:

$$x_i \geq 0 \text{pour} i=1,\ldots,n$$

Comme la maximisation d'une fonction z est équivalente à la minimisation de la fonction symétrique z, traiter seulement parfois un seul cas.
Nous présentons quelques exemples de formulation linéaire des modèles de programmation, dont les détails peuvent être trouvés à [Marins].

Exemple 1 : Détermination de la composition de la production:
Problème :

Formuler un modèle de programmation linéaire pour optimiser le profit de la production quotidienne de chacun des trois types de briques (S, M, L) produites par une entreprise familiale, en utilisant deux types de ressources: le travail à la main et la matière, conformément à la performance suivante table des ressources techniques par unité de production.

Rendement	S	M	L
Travail à la main (hr/pc)	7	3	6
Matériel (Kg/pc)	4	4	5

La totalité de la production quotidienne est vendu et les profits de la vente de chaque type de brique, en unités monétaires ($), est la suivante:

Résultat de la vente	S	M	L
profit ($)	4	2	3

La société a seulement 300 heures de travail à la main et 200 kg de matériau par jour.
Solution:
Le but est de maximiser le profit quotidien.
Le bénéfice quotidien dépend de la quantité de briques de divers types produits quotidiennement et le bénéfice quotidien obtenu par la vente de chaque type de brique.

Les variables de décision:

x_1 = quantité de type de brique de S, produit par jour

x_2=nombre de type de brique de M, produit par jour

x_3=quantité de type de brique de L, produit par jour

Maximisant la fonction objectif en unités monétaires (de $):

$$z=4x_1+2x_2+3x_3$$

Contraintes (par jour):

$7x_1+3x_2+6x_3 \leq 300$ travail manuel

$4x_1+4x_2+5x_3 \leq 200$ matériel

La non-négativité des variables de décision (quantité produite est toujours non-négative):

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Le modèle de programmation linéaire est formulé comme suit:
plus tard, nous allons voir comment il est résolu en trouvant les quantités optimales de production de différents types de briques.

Exemple 2 : Campagne publicitaire

Problème:
Une société de produits de beauté veut effectuer une campagne de publicité dans les médias: internet, télévision, radio et journaux.
Une étude de marché a révélé les caractéristiques techniques suivantes sur le public (en milliers) et le coût ($) de la publicité dans ces médias:

	internet	TV	Radio	journaux
Coût par émission ($)	5	40	30	15
Public (Kpes.)	50	400	500	100
Audience féminine (Kpes.)	20	250	150	50

La société veut dépenser jusqu'à 800 unités monétaires ($) et, en outre:

- atteindre 2000 femmes
- faire le minimum de 5 emplacements sur TV
- faire entre 10 à 20 emplacements à la radio
- faire 5 à 10 placements dans les journaux

Formuler un modèle de programmation linéaire pour optimiser la campagne de publicité de l'entreprise.

Solution:
L'objectif est d'atteindre le plus large public possible.
Le public dépend du nombre de placements pour chaque type de support.
Les variables de décision:

x_1= nombre de placements sur Internet

x_2= nombre de placements à la TV

x_3= nombre de placements à la radio

x_4= nombre de placements dans les journaux

Maximisation de la fonction objectif du nombre de personnes touché (Kpes.):

$$z=50x_1+400x_2+500x_3+100x_4$$

Avec des contraintes:

$5x_1+40x_2+30x_3+15x_4\leq 800$ le coût total de la campagne

$20x_1+250x_2+150x+50x\geq 2000$ le public féminin

$x_2\geq 5$ des placements à la télévision

$10\leq x_3\leq 20$ des placements à la radio

$5\leq x_4\leq 10$ des placements dans les journaux et la non-négativité des variables de décision (nombre de placements est toujours non-négative):

$$x_1\geq 0$$

$$x_2\geq 0$$

$$x_3\geq 0$$

$$x_4\geq 0$$

Le modèle de programmation linéaire est formulé comme suit:

Exemple 3 : formation du personnel

Problème [Marins]:
Une entreprise de montage a un programme de formation au travail pour les opérateurs de la chaîne de production.
Les opérateurs déjà formés peuvent travailler en tant que formateurs dans ce programme en étant responsables de 10 stagiaires chacun.
Après la formation d'un mois, la société prévoit d'embaucher jusqu'à la fin de la période de production, seulement 7 de chaque classe de 10 élèves.
L'entreprise compte actuellement 130 opérateurs sous contrat.

Pour remplir son carnet de commandes ; l'entreprise a besoin pour les prochains mois, dans la chaîne de production: 100 opérateurs en Janvier, 150 en Février, 200 en Mars et 250 en Avril.

La période de production se termine à la fin du mois d'Avril.
Le salaire mensuel ($ en unités monétaires) des travailleurs et des étudiants est la suivante:

1 – Travailleur dans la production	700
2 – Travailleur en tant que formateur	800
3 – Les travailleurs n'ayant pas de place dans la production	500
4 – stagiaires	400

Le syndicat ne permet pas le licenciement des opérateurs avant l'expiration du contrat.
Trouver un modèle de programmation linéaire qui offre un coût minimum de programme de formation qui répond aux exigences de l'entreprise en termes de nombre d'opérateurs disponibles dans chaque mois.

Solution:
L'objectif est de satisfaire le nombre d'opérateurs sur la chaîne de production avec le projet de loi sur le salaire minimum.
Le coût mensuel de salaire est déterminé par le nombre de travailleurs embauchés et le nombre de stagiaires.

Les variables de décision:

x_{ij} est le nombre de personnes dans la catégorie de salaire pendant la dj mois
En pleine:

x_{11}= nombre de travailleurs sur la ligne de production en Janvier
x_{21}= nombre de travailleurs des formateurs en Janvier

x_{31}= nombre de travailleurs inactifs en Janvier

x_{41}= nombre de stagiaires en Février

x_{12}= nombre de travailleurs sur la ligne de production en Février

x_{22}= nombre de travailleurs des formateurs en Février

x_{32}= nombre de travailleurs inactifs en Février

x_{42}= nombre de stagiaires en Février

x_{13} = nombre de travailleurs sur la ligne de production en Mars

x_{23} = nombre de travailleurs des formateurs en Mars

x_{33} =nombre de travailleurs inactifs en Février

x_{43} = nombre de stagiaires Mars

x_{14} = nombre de travailleurs sur la ligne de production en Avril

x_{24} = nombre de travailleurs des formateurs en Avril

x_{34} = nombre de travailleurs ralenti en Avril

x_{44} = nombre de stagiaires en Avril

Minimisation de la fonction objectif en unités monétaires (de $):
(Somme de toutes les catégories de salaire tous les mois)

$$z = \sum_{j=1} (700x_{1j} + 800x_{2j} + 500x_{3j} + 400x_{4j})$$

des contraintes:
variables de décision à valeur fixe (constants):

x_{11}= 100 travailleurs de la production en Janvier

x_{12}= travailleurs de la production en Février

x_{13}= travailleurs de la production en Mars

x_{14}= travailleurs sur la ligne de production en Avril

variables liées les unes aux autres:

$x_{41}=10x_{21}$= relation stagiaires - formateur en Janvier

$x_{42}=10x_{22}$= relation stagiaires - formateur en Février

$x_{43}=10x_{23}$= relation stagiaires - formateur en Mars

x_{44}= 0 aucun formateurs nécessaires en Avril

x_{24}= 0 aucun formateurs nécessaires en Avril

Le nombre total des opérateurs au début de chaque mois est égal au nombre d'opérateurs dans la production ainsi que le nombre d'opérateurs plus formateurs du nombre d'opérateurs de repos:

$$130=x_{11}+x_{21}+x_{31}$$

$$130+0.7x_{41}=x_{12}+x_{22}+x_{32}$$

$$130+0.7x_{41}+0.7x_{42}=x_{13}+x_{23}+x_{33}$$

$$130+0.7x_{41}+0.7x_{42}+0.7x_{43}=x_{14}+x_{24}+x_{34}$$

La non-négativité des variables de décision (nombre d'opérateurs ou de diplômés est toujours non-négative):

$x_{ij} \geq 0$pour tout i,j=1,2,3,4

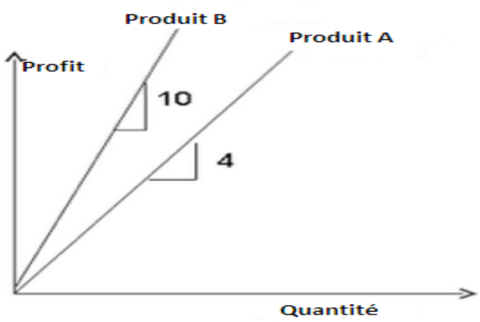
Le modèle de programmation linéaire est formulé comme suit.
Mélanger dans l'industrie chimique problème [Marins]:

Dans une entreprise industrielle chimique, deux produits, A et B, sont fabriqués à partir de deux opérations chimiques, 1 et 2.
Chaque unité de produit A nécessite 2 heures de fonctionnement à partir de l'opérateur 1 et 3 heures à partir de l'opérateur 2.
Chaque unité de produit B nécessite 3 heures de fonctionnement à partir de l'opérateur 1 et 4 heures à partir de l'opérateur 2.

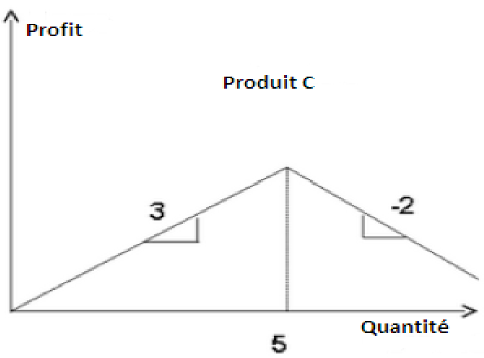
Dans la production de chaque unité de produit B s'incorpore 2 unités de produit C comme sous-produit, et sans frais supplémentaires.
Au maximum 5 unités de produit C seront vendus à profit, mais le reste doit être détruit.
Les informations disponibles sont:

- Le produit A génère un bénéfice de 4 $ par unité.
- Le produit B génère un bénéfice de 10 $ par unité.
- Le produit C génère un 3 $ par profit unitaire en cas de vente.
- Le produit C génère un coût de 2 $ par unité si elle est détruite
  Le temps total disponible pour effectuer la première opération est de 16 heures et la durée totale de l'opération est de 2 à 24 heures.
  Déterminer un modèle de programmation linéaire afin de maximiser les bénéfices de l'entreprise.

Solution:
Notez que le bénéfice de la vente des produits A et B est une fonction linéaire [Marins]:



mais par rapport au produit C cela ne se produit pas [Marins]:



L'objectif est de maximiser les profits.
Le gain dépend de la quantité de produit A, B, C et produit également le produit de la

quantité de C détruite.
Les variables de décision

x_1= quantité de produit Un produit

x_2= quantité de produit B produit

x_3= quantité de produit C produit

x_4= quantité de produit C détruit

Maximiser la fonction objectif:

$$z=4x_1+10x_2+3x_3-2x_4$$

Avec des contraintes:

$2x_1+3x_2 \leq 16$ le temps disponible pour le fonctionnement 1

$3x_1+4x_2 \leq 24$ le temps disponible pour le fonctionnement 2

$2x_2=x_3+x_4$ chaque pièce de B résulte 2 de C.

$x_3 \leq 5$ pas plus de 5 unités pour C ne peut être vendu.

et la non-négativité des variables de décision (quantité produite est toujours positif ou nul):

$x_i \geq 0$ pour tout i=1,2,3,4

Le modèle de programmation linéaire est ainsi formé.

Exemple 5 : Utilisation de la machine d'équilibrage de charge.
Problème :

Un atelier d'usinage travaille 8 heures par jour et produit une pièce formée de deux composantes.
Chaque composant est constitué d'un foret (ou mèche, est un outil qui sert à percer des trous) et d'une fraise (petit outil rotatif), et la productivité de chaque machine pour la fabrication de la pièce est la suivante (en minutes):

Consommation	Foret	Fraise
composant 1	3	20
composant 2	5	15

La société dispose d'une perceuse et 5 moulins, mais veulent équilibrer la charge de ces machines, de sorte que la différence d'heures d'utilisation entre les deux ne dépasse pas 30 minutes par jour.
Trouver un modèle de programmation linéaire qui maximise la production de pièces (ensembles complets), avec des machines d'équilibrage.

Solution:
L'objectif est de maximiser le nombre de pièces produites.
Le nombre de pièces dépend du plus petit nombre de composants fabriqués.

Les variables de décision:

x_1= nombre de composants manufacturés 1

x_2= nombre de composants manufacturés 2

Le nombre de pièces (ensemble de deux composants) est déterminé par le minimum entre le nombre de composants manufacturés du même type.

La fonction $z=\min(x_1,x_2)$ est non linéaire mais peut être linéarisée en utilisant un nouveau variable $y=\min(x_1,x_2)$

Maximiser la fonction objectif:

$$z=y$$

Avec des contraintes

$y\le x_1$ nombre de parties ne dépasse pas le nombre de composants manufacturés 1.

$y\le x_2$ nombre de parties ne dépasse pas le nombre de composants manufacturés 2.

$3x_1+5x_2\le 480$ 8 heures par jour (480 min), 1 forage

$20x_1+15x_2\le 480\times 5$ 8 heures par jour (480 min), 5 fraises

$(3x_1+5x_2)-(4x_1+3x_2)\vee\le 30$ machines d'équilibres de charge

et la positivité des variables de décision (quantité produite est toujours positif ou nul):

$x_i\ge 0$ pour tout $i=1,2$

Le modèle de programmation linéaire est formulé comme suit

Exemple 6 : Les équipes de conception

Problème:
Des inspecteurs d'usine veulent déterminer comment répartir une tâche de contrôle de qualité donné.
Les informations recueillies par l'équipe de recherche opérationnelle au cours de la visite de travail à l'usine sont:
Le marché dispose de 8 inspecteurs de niveau 1 gagnant 4 $ par heure, ce qui peut vérifier les pièces à un taux de 25 pièces par heure avec une précision (précision) de 98%;
Le marché dispose de 10 inspecteurs niveau 2 gagner 3 $ par heure, ce qui peut vérifier les parties à un taux de 15 pièces par minute, avec une précision de 95%.
L'usine veut au moins 1800 pièces sont inspectées une journée de travail de 8 heures.
Chaque erreur faite par les inspecteurs dans le contrôle de la qualité des pièces provoque des dommages au 2 $ usine par une partie mal inspecté.

Élaborer un modèle de programmation linéaire afin d'optimiser le coût de l'inspection journalière de l'usine.

Solution:
L'objectif est de minimiser le coût de l'inspection.
Le coût de l'inspection dépend du nombre d'inspecteurs de niveau 1 et de niveau 2 et les erreurs commises par eux au cours des inspections.

Variables de décision:

x_1 nombre d'inspecteurs de niveau 1

x_2 nombre d'inspecteurs de niveau 2

Minimiser la fonction objectif (jour de travail de 8 heures):

$\blacksquare(15(8)(0.05)\, x_1+25(8)(0.02)\, x_2 @ z=4(8)\, x_1+3(8)\, x_2+2)$

La forme simplifiée de la fonction objectif est:

$z=40x_1+36x_2$

Avec des contraintes:

$x_1\leq 8$ Marché du travail (inspecteurs de niveau 1).

$x_2\leq 10$Marché du travail (inspecteurs de niveau 1).

$25(8)\, x_1+15(8)\, x_2\geq 1800$ Exigence d'inspection.
La non-négativité des variables de décision (nombre d'inspecteurs est toujours non-négative):

$x_i\geq 0$ pour tout $i=1,2$

Le modèle de programmation linéaire est formulé comme suit

Conclusion
La prise de décision scientifique nécessite la construction d'un modèle de décision qui correspond à la réalité à laquelle la décision devrait se concentrer. Comme les variables de décision impliqués dans le modèle peuvent être nombreuses, il est commode que la formulation du modèle soit résolue avec l'aide des outils de simulations numériques mathématiques.

Activité

Problème 1

Une entreprise familiale produit deux types de briques (S, M) en utilisant deux types de ressources: le travail à la main et la matière. Le tableau suivant fournit les consommations des activités sur les ressources.

Types	**S**	**M**
Travail à la main (h/unité)	7	3
Matière (Kg/unité)	4	4

La totalité de la production quotidienne est vendu et les profits de la vente de chaque type de brique, en unités monétaires (en dollars US), sont donnés dans le tableau suivant:

	S	M
Profit ($)	4	2

La société ne dispose que de 200 heures pour le travail à la main et 150 kg de matériaux par jour.
Formuler un modèle de programmation linéaire pour résoudre ce problème afin de maximiser le profit quotidien.

Problème 2

Une usine produit deux produits P1 et P2 à l'aide de 3 machines M1, M2 et M3. Les délais de traitement (en heures) et le résultat net (en unités monétaires) de la vente des articles sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Produit	M1	M2	M3	Profit
P1	0.25	0.40	0	2
P2	0.50	0.20	0.80	3

Pour un temps de préparation de 40 heures disponible par semaine, formuler un modèle de programmation linéaire qui permettra de maximiser le bénéfice de l'usine.

Problème 3

Une usine de textile travaille en trois équipes de huit heures chacune: 1ère équipe de 7 h à 15 h, la 2ème de 15 h à 23 h et la troisième de 23 h à 7 h.
Chaque équipe nécessite des designers, des couturiers et les emballeurs qui gagnent un salaire horaire, respectivement 23, 19 et 8 unités monétaires ($).
Les designers et couturiers gagnent un montant supplémentaire de 2 $ / heure et l'emballeur un montant supplémentaire de 1 $ / heure lorsque l'on travaille sur le dernier des changements

indiqués.
Les besoins de production nécessitent, pour chaque équipe, à 1 heure pour chaque designer et 3 heures pour chaque couturier. Il peut ne pas avoir plus de 200 heures disponibles pour chaque équipe.
Il est prévu que le total des heures de travail des designers et des couturiers est au moins 400 heures dans l'équipe du matin, 376 heures dans l'après-midi et 270 heures sur le quart de nuit.
A chaque équipe, vous devez effectuer au moins 600 heures de travail.
Formuler un modèle de programmation linéaire pour le problème donné.

SOLUTION:

1. Formulation:

Les variables de décision:

x_1: la quantité de briques de type S

x_2: la quantité de briques de type M

On maximise la fonction objectif en unités monétaires ($):

$x=4x_1+2x_2$

soumise à des contraintes (par jour):

$7x_1+3x_2 \leq 200$

$x_1+4x_2 \leq 150$

La contrainte de non-négativité des variables de décisions:

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

2. Formulation

Variables de décisions:

x_{11} nombre de designers dans l'équipe 1

x_{21} nombre de couturiers dans l'équipe 1

x_{31} nombre d'emballeurs dans l'équipe 1

x_{12} nombre de designers dans l'équipe 2

x_{22} nombre de couturiers dans l'équipe 2

x_{32} nombre d'emballeurs dans l'équipe 2

x_{13} nombre de designers dans l'équipe 3

x_{23} nombre de couturiers dans l'équipe 3

x_{33} nombre d'emballeurs dans l'équipe 3

Minimisation de la fonction objectif (coût quotidien):

XXXX

Sous les contraintes (jour)

XXXX

couturière-modeleur de la première équipe

XXXX

Activité 2 – Résolution graphique et méthode du simplexe

Introduction

Il présente les fondements de base de calcul de la méthode du tableau du Simplexe. La démarche sera traitée à partir d'un problème de dimension deux, dont une illustration avec les méthodes graphique et algébrique.

Détails de l'activité

1. Méthode graphique

Nous illustrons la résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode graphique.

Considérons le Problème n ° 1 à l'activité d'évaluation 1.1
La formulation de ce problème est donnée par:
Maximisation de la fonction objectif en unités monétaires (de $):

$z=4x_1+2x_2$

Sous les contraintes (par jour):

$7x_1+3x_2\leq 200$

$4x_1+4x_2\leq 150$

Contrainte de non-négativité:

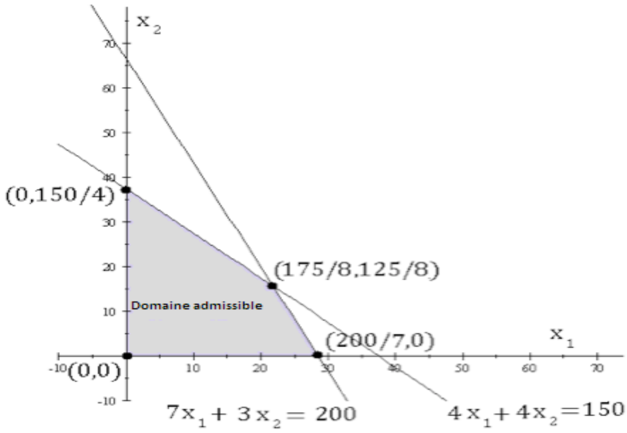
$x_1\geq 0$

$x_2\geq 0$

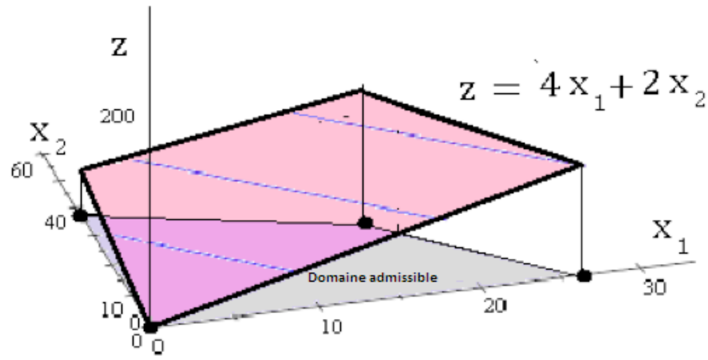
Les restrictions et la non-négativité des variables de décision définissent les domaines admissibles ou domaines réalisables.
La non-négativité limite la production de la société ($x_1\geq 0, x_2\geq 0$), représenté par le quart de plan où toutes les variables sont positives.

La première contrainte 7x_1+3x_2≤200 limite la société de production pour la région en dessous de la ligne définie par

La deuxième contrainte 4x_1+4x_2≤150 limite la production dans la région en dessous du seuil défini par 4x_1+4x_2=150.
L'intersection de ces régions est la région réalisable ou région admissible:



Comme la fonction objectif z est linéaire, les valeurs extrêmes ne peuvent être situés que sur le bord de cette région, à moins que z ne soit constante (dans ce cas, un point quelconque de la région réalisable est grand).



De plus, si z n'est pas une constante, les valeurs extrêmes ne peuvent pas être sur le bord des sommets de la région réalisable, à moins que l'un des bords coïncident avec la valeur de la fonction objectif (et dans ce cas tout point du bord est grand).
Par conséquent, les candidats potentiels pour être solution de base sont les paires (x_1≥0, x_2≥0) dans les coins, où vous pouvez calculer les valeurs de la fonction objectif z. Nous obtenons les points suivants (intersection des droites):

x_1	x_2	z
0	0	0
175/8	125/8	475/4
0	150/4	75
200/7	0	800/7

La fabrication optimale est = 175/8, = 125/8 où le profit sur la vente atteint le maximum, la valeur optimale de z est 475/4 (=118.75).
Un problème qui peut se poser: si les quantités sont fabriquées par unités entières et non fractionnaires. Pour des solutions entières exactes (pourvu qu'elle soit réalisable), on peut se limiter dans l'ensemble admissible. Mais pour ce cours, le simple arrondi est au moins suffisant:
Une solution optimale entière peut être donnée par: $x_1=21$et $x_2=15$, avec comme valeur optimale : z = 114 ($) (obtenant même certains stocks dans l'entrepôt).
La méthode graphique représente une bonne intuition de résolution de problème d'optimisation, lorsqu'il y a un maximum de 3 variables de décision.
Avec trois, quatre ou plusieurs variables de décision ne peut pas utiliser la méthode graphique, mais peut utiliser la méthode algébrique.

Méthode algébrique:
La méthode algébrique est de résoudre un système d'équations, mais dans la plupart des cas, et les contraintes de positivité sont les inégalités et les équations ne.
Pour transformer les inégalités dans les équations sont introduites de nouvelles variables, appelées variables d'écart.
Pour exemple, le problème n ° 1 dans l'activité 1.1 de l'évaluation est utilisé.
$7x_1 + 3x_2 \leq 200$ se transforme en $7x_1+ 3x_2 + s_1 = 200$ où $s_1 \geq 0$
$4x_1 + 4x_2 \leq 150$ se transforme en $4x_1+ 4x_2 + s_2 = 150$ où $s_2 \geq 0$
Les deux variables d'écart s_1, s_2 sont non-négatives et peuvent être interprétés comme le stock.
L'objectif de maximisation du profit exige nécessairement que cette existence dans le stockage est consommée dans la production.
Il est nécessaire de résoudre un système de n équations (n = 2) et de m variables (m = 4) (y sont compris les variables de décision et les variables d'écart m=2+2)

$7x_1 + 3x_2 + s_1 + = 200$

$4x_1 + 4x_2 + s_2 = 150$

3. Au maximum, m-n = 2 variables sont libres (non-base) et les deux autres sont dépendantes (de base).
   En général, les variables libres peuvent prendre toute valeur, mais dans la méthode algébrique des variables libres sont mises à zéro.
   Les possibilités de choisir 2 des 4 variables pour les mettre à zéro sont donnés par les équations:
   Mettre les variables zéro $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, on obtient deux équations:

   $7 (0) +3 (0) + s_1 = 200$

   $4 (0) + 4 (0) + s_2 = 150$

   avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0,0,200,150)$

4. Mettre les variables zéro $x_1 = 0$, $s_1 = 0$ on obtient deux équations:

$7 (0) + 3x_2 + (0) = 200$

$4 (0) + 4x_2 + s_2 = 150$

avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0,200 / 3,0, -350 / 3)$

5. Mettre les variables zéro $x_1 = 0$, $s_2 = 0$ on obtient deux équations:

$7 (0) + 3x_2 + s_1 = 200$

$4 (0) + 4x_2 + (0) = 150$

avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0,150 / 4.175 / 2, 0)$

6. Mettre les variables zéro $x_2 = 0$, $s_1 = 0$ on obtient deux équations:

$7x_1 + 3 (0) + (0) = 200$

$4x_1 + 4 (0) + s_2 = 150$

avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (200 / 7,0,0,250 / 7)$

7. Mettre les variables zéro $x_2 = 0$, $s_2 = 0$ on obtient deux équations:

$7x_1 + 3 (0) + s_1 = 200$

$4x_1 + 4 (0) + (0) = 150$

avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (150 / 4.0, -125 / 2,0)$

8. Mettre les variables zéro $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ on obtient deux équations:

$7x_1 + 3x_2 + (0) = 200$

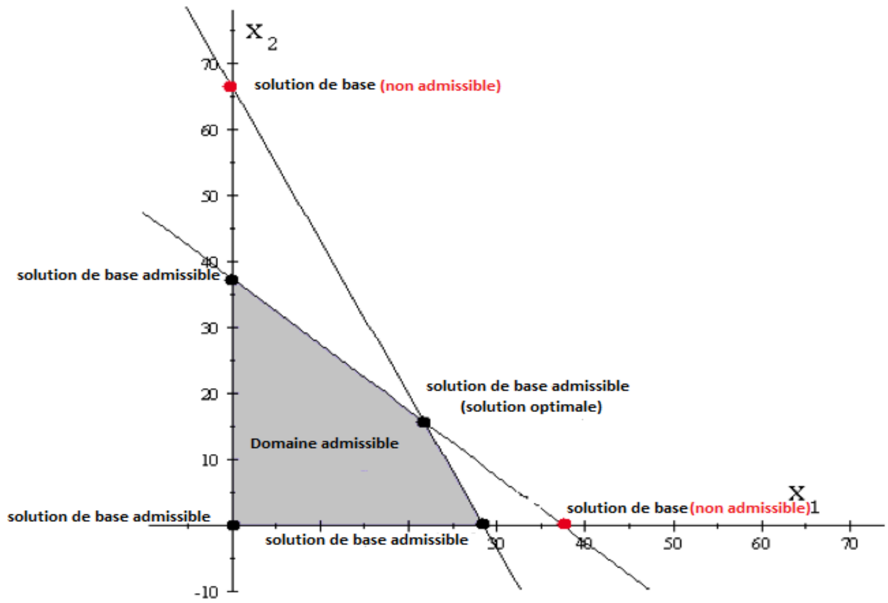
$4x_1 + 4x_2 + (0) = 150$

avec solutions $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (175 / 8,125 / 8,0,0)$

Le tableau suivant est un résumé des résultats:

En	x_1	x_2	s_1	s_2	z_j	Vecteur de base
1	0	0	200	150	–	2 $s_{\square}$
2	0	200/3	0	−350/3	400/3	2 $x_{\square}$
3	0	150/4	175/2	0	150/2	1 $x_{\square}$
4	200/7	0	0	250/7	800/7	2 $x_{\square}$
5	150/4	0	−125/2	0	150	1 $x_{\square}$
6	175/8	125/8	0	0	475/4	2 $x_{\square}$

Graphiquement, ce sont les points correspondant aux points d'intersection des droites qui définissent la région réalisable:



Les solutions (ou points) situées sur le bord (ou frontière) de l'ensemble admissible sont appelés des solutions de base possibles (admissibles) et non admissibles s'ils sont à l'extérieur du domaine admissible.
Au moins une des solutions admissibles est une solution optimale.
Si deux solutions sont ensuite admissibles, alors tous les points sur le bord reliant ces deux solutions le sont également.

2. Méthode du simplexe

La méthode algébrique peut "perdre du temps" pour calculer toutes les solutions de base, y compris celles non réalisables.
Vous pouvez "gagner du temps", s'il est possible de développer un algorithme qui:

1. Calculer les solutions non admissibles,
2. A chaque itération va résulter une amélioration de la solution admissible,
3. Capable d'identifier la solution optimale quand elle est atteinte.

En 1948, George Dantzig a créé l'algorithme du Simplexe qui à partir d'une solution de base initialise (par exemple, l'origine du repère), parcourt tous les sommets du domaine admissible (pas nécessairement tous) jusqu'à l'obtention de la solution optimale.
La méthode du simplex est agencé sous forme de tableau, en tant que problème de programmation linéaire formulée dans les équations à n variables (y compris les d variables de décision et m-d variables d'écart).

z = Σ_ (j = 1) ^ d + c_j x_j Σ_ (j = d + 1) m 0s_ ^ (j-d)

A_ij x_j≤b_i for i = 1, ..., m

Par exemple problème n ° 1 à l'Activité 1.1 évaluation, la formulation est donnée par:
Maximisation de la fonction objectif en unités monétaires (de $):

z = 4x_1 2x_2 + + + 0s_2 0s_1

Contraintes (par jour):

7x_1 + + s_1≤200 3x_2

4x_1 + + s_2≤150 4x_2

Non-négativité:

x_1≥0

x_2≥0

Initialisation:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	7	3	1	0	200	200/7
$0s_2$	4	4	0	1	150	150/4

Les en-têtes de colonnes sont les n=d+m variables, le côté droit celles des restrictions (LD) et une colonne de θ qui est le montant maximum que la variable dans la base peut avoir sans quitter la région réalisable et décide par conséquent sur la prochaine itération.
En ligne au-dessus de la tête sont placés C_J les coefficients qui apparaissent dans la fonction objectif à chaque variable.
Dans chaque ligne ci-dessous, il est l'équation qui calcule chaque variable dans la base.
L'initialisation se fait avec les variables d'écart, s_1, s_2 la base et donc les colonnes correspondantes apparaissent les colonnes de la matrice d'identité (en surbrillance jaune).
Ce qui termine le démarrage du tableau du simplexe tableau.

1ère Itération:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	7	3	1	0	200	200/7
$0s_2$	4	4	0	1	150	150/4
$c_j - z_j$	4	2	0	0	0	

Une nouvelle ligne cj-ZJ calcule la différence entre C_J de chaque colonne avec le produit scalaire du vecteur de coefficients des variables basées sur le coefficient de a_ij de chacune des colonnes par exemple la première colonne (de surbrillance verte):

4- $(0{\cdot}7 + 0{\cdot}4) = 4$

Les autres colonnes:

2- $(0{\cdot}3 + 0{\cdot}4) = 2$

0- $(0{\cdot}1 + 0{\cdot}0) = 0$

0- $(0{\cdot}0 + 0{\cdot}1) = 0$

et la marque est celle de la plus grande valeur que la variable (x 1) correspondant à cette colonne, entre dans la base. (Si toutes les valeurs calculées sont nulle ou négative alors l'algorithme se termine).
Dans le même esprit et dans la colonne de LD est calculé z_ $0{\cdot}200$ = + = 0 $0{\cdot}200$
un résultat qui correspond à la valeur de z = 0 pour les variables de décision à l'extérieur de la base

x_1 = 0, = 0 x_2.

Pour savoir quelle variable sort de la base, calculer la colonne ⍰_i divisant la droite (LD) par les coefficients de a_i1 de la colonne correspondant au x 1 variables entrant dans la base θ_1 = 200/7 (le plus petit des deux)

θ_1 = 150/4

Notez que ces valeurs correspondent à x_1 valeurs pour x_2 = 0 et alternativement s_1 = 0 et = 0 s_2.
La variable (S_1), ce qui correspond à la ligne de la plus faible de ces valeurs, en dehors de la base.
Le coefficient a_11 = 7 correspondant à la colonne de la variable entrée et celle de la variable de la ligne gauche est appelé pivot et servira à effectuer le processus de Gauss.

Les éliminations sur les lignes sont les suivants : diviser toute la ligne par le a_11 coefficient = 7. Puis, on utilise cette ligne de L_1 pour éliminer toutes les autres variables de cette colonne, avec des opérations en ligne, en commençant par

L_2-4L_1:

4-4 (7/7) = 0

4-4 (3/7) = 16/7

0-4 (1/7) = - 4/7

1-4 (0/7) = 1

150-4 (200/7) = 250/7

	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$4x_1$	$7/7$	$3/7$	$1/7$	$0/7$	$200/7$	
$0s_2$	0	$16/7$	$-4/7$	1	$250/7$	

On constate que dans la colonne des variables qui sous-tendent apparaître les colonnes de la matrice d'identité.

2ième itération:
Répéter les étapes de l'itération précédente:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	7	3	1	0	200	$200/7$
$0s_2$	4	4	0	1	150	$150/4$
$c_j - z_j$	4	2	0	0	0	
$4x_1$	1	$3/7$	$1/7$	0	$200/7$	$350/3$
$0s_2$	0	$16/7$	$-4/7$	1	$250/7$	$50/4$
$c_j - z_j$	0	$2/7$	$-4/7$	0	$800/7$	

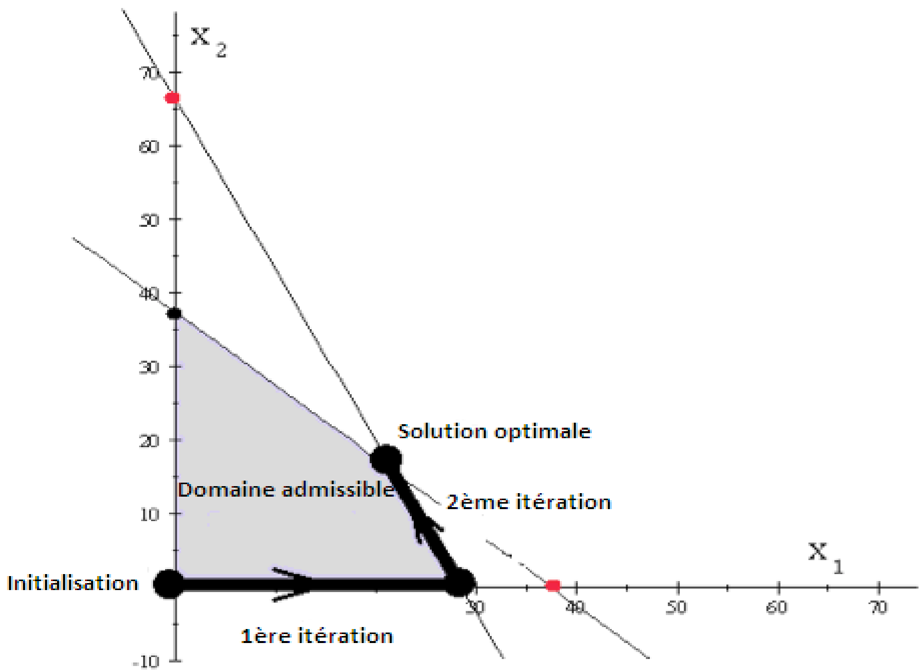
X_2 correspond à la colonne que vous entrez.
La valeur de z 800/7 correspond à l'augmentation de l'itération.
Sortir s_2 de la variable de base.

Test d'arrêt:

L'itération suivante trouve que les valeurs de C_J-z_ sont négatives ou nulles. Ainsi, la valeur optimale est z = 475/4 obtenu aux points x_1 = 175/8 et 125/8 x_2 =

	$c_1 = 4$	$c_2 = 2$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	7	3	1	0	200	200/7
$0s_2$	4	4	0	1	150	150/4
$c_j - z_j$	4	2	0	0	0	
$4x_1$	1	3/7	1/7	0	200/7	350/3
$0s_2$	0	16/7	−4/7	1	250/7	50/4
$c_j - z_j$	0	2/7	−4/7	0	800/7	
$4x_1$	1	0	1/4	−3/16	125/8	
$2x_2$	0	1	−1/4	7/16	125/8	
$c_j - z_j$	0	0	−1/2	−1/8	475/4	

Graphiquement, on peut voir cela comme une variante de la méthode du "gradient", qui restreint le bord de la région réalisable:



A partir d'un point initial réalisable, l'algorithme de Simplexe a choisi la voie de la croissance plus rapide de la valeur de la fonction objectif (gradient) dans l'itération, pour le prochain point possible.

Il existe une autre méthode basée sur le gradient, nommée méthode de points intérieurs, mais qui ne sera pas traitée ici. Elle peut être étudiée par exemple dans [optimisation convexe, Stephen Boyd, L Van Den Berghe, Cambridge Press, 2008].
Quelques observations sur la méthode du tableau du Simplexe:
1. Une variable qui a quitté la base peut rentrer, combinée avec d'autres variables.
2. La valeur de ▯ n'est pas calculée si elle est négative. Ceci révèle que la variable est déjà admissible dans la région;
3. Les nombres représentés sous forme décimale (non fractionnée) peuvent générer des erreurs d'arrondi, surtout quand il attend la valeur 0;
Le tableau du Simplexe présenté ci-dessus résout le problème de la maximisation de la fonction objectif.
Minimiser la fonction objectif z, revient à maximiser -z (opposé de la fonction objectif) et de multiplication par le signe - la valeur obtenue.

Conclusion

Dans cette unité, nous avons présentées les bases de calcul de la méthode du Simplexe, pour un problème à deux dimensions; accompagnée d'une illustration par les méthodes graphique et algébrique.
La méthode des tableaux du Simplexe a été appliquée en détail à un problème de maximisation de la fonction objectif.

Activité 3 – SIMPLEXE avec tableur et SOLVEUR

Introduction

Cette activité permet de résoudre un problème linéaire de type maximisation en utilisant l'algorithme Simplex dans une feuille de calcul de Excel / Google;
Introduit également dans la feuille Excel / Google le SOLVEUR qui résout le problème de type maximisation.

Détails de l'activité

Feuille de calcul avec le tableau du Simplexe.
La forme du tableau du Simplex peut être automatisé dans une feuille de calcul Excel, ou "feuille Google".
A titre d'exemple, on a utilisé le problème résolu dans l'unité précédente:

SIMPLEX		4	2	0	0	0	
		X1	X2	S1	S2	LD	θ
0	S1	7	3	1	0	200	28.57
0	S2	4	4	0	1	150	37.5
	Cj-Zj	4	2	0	0	0	
4	X1	1	0.43	0.14	0	28.57	66.44
0	S2	0	2.28	-0.56	1	35.72	15.67
	Cj-Zj	0	0.28	-0.56	0	114.28	
4	X2	1	0	0.25	-0.19	21.83	
2	X1	0	1	-0.25	0.44	15.67	
	Cj-Zj	0	0	-0.5	-0.12	118.66	

Les formules des cellules:

SIMPLEX		4	2	0	0	0	
		X1	X2	S1	S2	LD	θ
0	S1	7	3	1	0	200	=round(G3/C3,2)
0	S2	4	4	0	1	150	=round(G4/C4,2)
	Cj-Zj	=round(C$1-($A3*C3+$A4*C4),2)	=round(D$1-($A3*D3+$A4*D4),2)	=round(E$1-($A3*E3+$A4*E4),2)	=round(F$1-($A3*F3+$A4*F4),2)	=round($A3*G3+$A4*G4,2)	
4	X1	=round(C3/$C$3,2)	=round(D3/$C$3,2)	=round(E3/$C$3,2)	=round(F3/$C$3,2)	=round(G3/$C$3,2)	=round(G6/D6,2)
0	S2	=round(C4-$C$4*C6,2)	=round(D4-$C$4*D6,2)	=round(E4-$C$4*E6,2)	=round(F4-$C$4*F6,2)	=round(G4-$C$4*G6,2)	=round(G7/D7,2)
	Cj-Zj	=round(C$1-($A6*C6+$A7*C7),2)	=round(D$1-($A6*D6+$A7*D7),2)	=round(E$1-($A6*E6+$A7*E7),2)	=round(F$1-($A6*F6+$A7*F7),2)	=round($A6*G6+$A7*G7,2)	
4	X2	=round(C6-$D$6*C10,2)	=round(D6-$D$6*D10,2)	=round(E6-$D$6*E10,2)	=round(F6-$D$6*F10,2)	=round(G6-$D$6*G10,2)	
2	X1	=round(C7/$D$7,2)	=round(D7/$D$7,2)	=round(E7/$D$7,2)	=round(F7/$D$7,2)	=round(G7/$D$7,2)	
	Cj-Zj	=round(C$1-($A9*C9+$A10*C10),2)	=round(D$1-($A9*D9+$A10*D10),2)	=round(E$1-($A9*E9+$A10*E10),2)	=round(F$1-($A9*F9+$A10*F10),2)	=round($A9*G9+$A10*G10,2)	

1. Pour des problèmes beaucoup plus complexes, tantôt Excel ou la "feuille Google" dispose d'un "add-on" appelé SOLVEUR qui peut être utilisé pour résoudre ces problèmes.

   Solveur

   Quelques brèves instructions sur la façon d'utiliser le SOLVEUR:
   Préparer les tableaux de l'initialisation;

   L'activité montrant une colonne de production d'abord, avec 1 unité de production pour chaque type (les variables de décision);

   Ressources par type de produit montrant les ressources nécessaires pour produire une unité de chaque type de produit (les contraintes);

   Le bénéfice par type de produit qui montre le bénéfice de la vente d'une unité de chaque type de produit;

2. Appelez le solveur le menu Add-ons

3. Il apparaît à la droite de la feuille de calcul dans le menu SOLVER dans lequel se pose:

Cellule cible: indique ici le nom de la cellule qui contient l'expression de la fonction objectif z calculé automatiquement pour 1 unité de chaque type de produit;

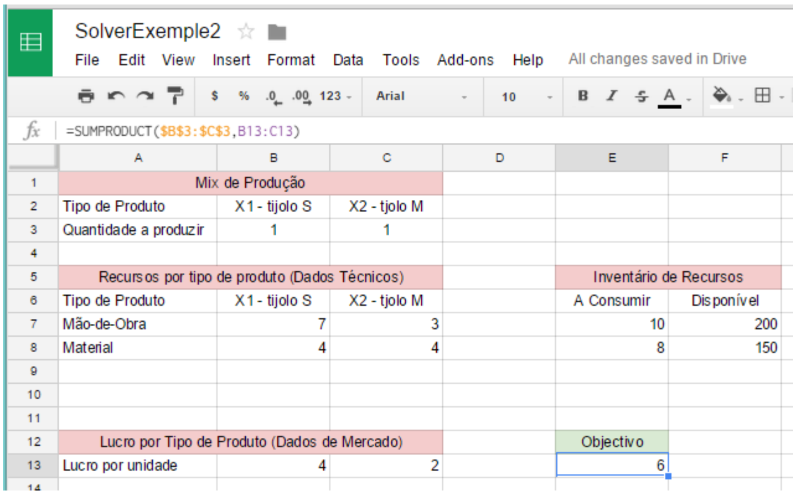
A: ici choisit le type d'optimisation: maximiser, minimiser ou une certaine valeur;

Cellules variables: ici indique la plage de cellules où se trouvent les valeurs des variables de décision.

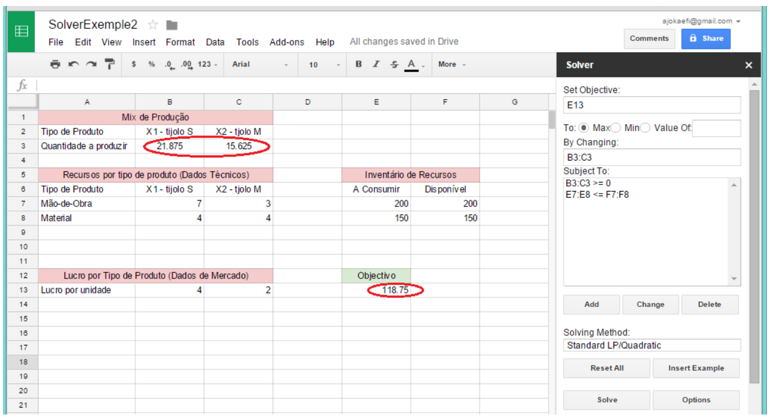
Sous les contraintes: ici indiquent les restrictions à l'aide des boutons Ajouter / Modifier / Supprimer pour ajouter, modifier ou supprimer des contraintes. Pour la contrainte de non-négativité: il faut indiquer la plage de cellules avec la valeur des variables de décision et mettre supérieur ou égal à (> =) à zéro. Pour les autres restrictions indiquent est la gamme de leurs cellules;

Méthode de résolution: indique la méthode utilisée dans la résolution. Ici, on est uniquement intéressé par le LP standard (programmation linéaire);

Initialiser / Insérer Exemple / Résolvez / Options - font partie du menu SOLVEUR. C'est à ce niveau qu'est régulée la limitation de la précision, l'optimisation, la convergence et d'autres paramètres qui doivent être étudié par l'étudiant.
A titre d'exemple, nous utilisons le problème n ° 1 à l'activité d'évaluation 1.1
Les tableaux de l'initialisation:



Le résultat de l'optimisation obtenu par solveur est représenté en Rouge.



Pour plus d'informations, vous devriez consulter l'aide du Solveur.

Conclusion

Cette unité nous a permis de résoudre un problème de maximisation en utilisant l'algorithme du Simplex dans une feuille de calcul de feuille Excel / Google.
Il a été également présenté le Add-on SOLVEUR et résolu un problème type de maximisation.

Évaluation

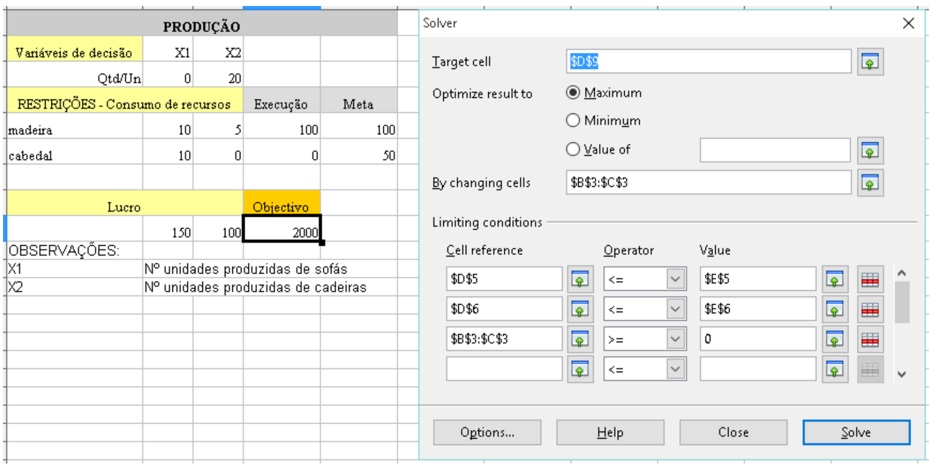
Problème n ° 1

Utiliser le SOLVEUR pour résoudre le premier exemple de l'Activité 1.1.

Problème n ° 2:

Utiliser le SOLVEUR pour résoudre le premier exemple de l'Activité 1.2.

Solution n ° 1 :



Solution n ° 2:

	PROBLEMA PRODUÇÂO – Empresa BLOK						
				Tipo de Blocos			
		j =	A	B	C		
das linhas	1	NORMAL	2000	1000	0	3000	3000
	2	EXTRA	0	0	1500	1500	1500
	3	SUBEMPRT	0	1000	500	1500	1500
			2000	2000	2000	6000	
			2000	2000	2000		
Variáveis de decisão		Xij	1	2	3	Total levantado	
		NORMAL	26	33	40		
		EXTRA	36	41	44		
		SUBEMPRT	35	40	45		
		Total colocado					
Custo da opção de produção escolhida		Objectivo					
		26500					

Résumé de l'unité

Dans cette unité, les concepts de la modélisation mathématique et de la formulation des problèmes de programmation linéaire ont été présentés;
Ont été également présentés la terminologie et les éléments de base de la méthode d'optimisation linéaire;
Les bases de calcul de la méthode du Simplex ont été traités à partir d'un problème de dimension deux, illustré avec la méthode graphique et algébrique.
La méthode du Simplexe a été appliquée de façon détaillée à un problème, montrant le cas de l'initialisation, l'itération et les tests d'arrêt.
Un problème de type maximisation a été résolu en utilisant l'algorithme du Simplexe dans un tableur où le solveur a été introduit.

Unité 2. Programmation linéaire, dualité et analyse de sensibilité

Introduction à l'unité

Cette unité présente l'algorithme Simplex pour la minimisation de la fonction objectif d'un problème en introduisant les variantes Grand M et les deux phases.
Il traite également de l'usage de la feuille de calcul et de SOLVER pour résoudre des problèmes complexes de la programmation linéaire traitant de la question de l'existence et l'unicité de solutions, les conditions de lancement, l'itération et la fin de l'algorithme Simplex. Il présente la relation entre la table Simplex primaire et la table Simplex double d'un problème de programmation linéaire. Les fondamentaux de l'analyse de sensibilité et les concepts sont illustrés par des exemples.

Objectifs de l'unité

À la fin de cette unité, vous devriez être capable de:

- Formuler le dual d'un programme linéaire.
- Utiliser la méthode Simplex pour résoudre manuellement minimiser les problèmes et en maximisant la fonction objectif appliquant soit une variante du Grand M ou les deux étapes.
- Utilisez le solveur pour résoudre des problèmes de programmation linéaire complexes.
- Déterminer l'existence et l'unicité de solutions et de conditions de lancement, l'itération et la fin de l'algorithme du simplexe.
- Transformer un problème primal pour sa double résoudre à la fois interpréter les résultats.
- Construire la table simplex double et mixte.
- Identifier les variables les plus sensibles d'un problème de programmation linéaire et l'impact de la variation de la fonction objectif.

Termes clés

Bornée: Région ou cette norme partout est un nombre réel

Grand M: Une valeur positive inconnue plus que toutes les valeurs du problème

Négative écart: valeur dont décalages symétrique inégalités
Variables auxiliaires: variables utilisées temporairement pour résoudre un problème

Deux phases: la résolution en deux phases de façon standard: moyen souhaitable de démarrer SIMPLEX conçu pour maximiser

Entrer dans la base: variable calculée sur la base d'autres

Sur la base: variable est mis à zéro

Excellente alternative: montant égal à la grande valeur

Primal: le problème de la première manière formalisée

Dual: celui obtenu à partir du problème primal

Transposée: mère avec des rangées inter-échange et des colonnes

Clairance de la complémentarité: à somme nulle produit du vecteur dual avec le primal

Somme du produit: Feuilles de commandes / Excel pour le produit intérieur

Erreur du dual: la différence entre la valeur de la fonction objectif du primal et dual

Critère d'optimalité: égal à la valeur de la fonction objectif du primal et dual

L'analyse de sensibilité: l'impact de divers changements dans la valeur de la fonction objectif

Activités d'apprentissage

Activité 1 – Simplexe: Grand M et 2 phases

Introduction: Cette activité utilise l'algorithme Simplexe tableau, conçu pour résoudre les problèmes de maximisation d'une fonction objectif en introduisant les variantes Grand M et deux phases / étapes; Il montre également comment utiliser le solveur pour résoudre les problèmes de minimisation.

Détails de l'activité

Grand M

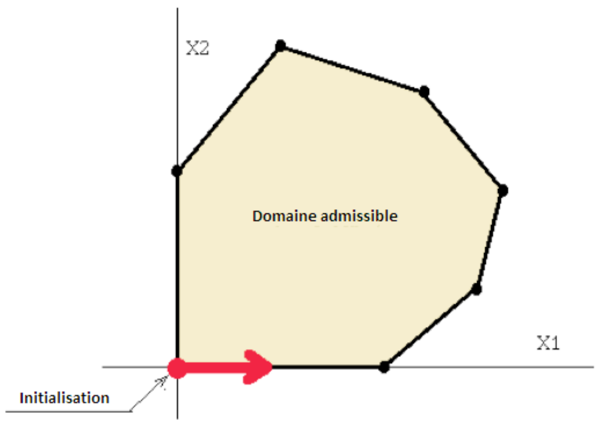
Simplexe tableau a été développé pour résoudre la maximisation du problème de la fonction objectif, qui est la forme standard:

$$\max z$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Les contraintes définissent le domaine convexe fermé possible. Le Simplexe tableau démarre à l'origine de (coordonnées 0,0) où la fonction objectif qui a la valeur la plus basse et recherche des points où la fonction objectif évolue jusqu'à ce qu'elle atteigne un maximum:



Pour un problème de minimisation de la fonction objectif, la forme standard est:

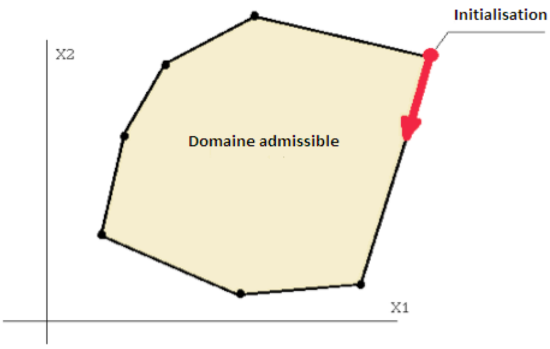
$$\min(z)$$

$$Ax \geq b$$

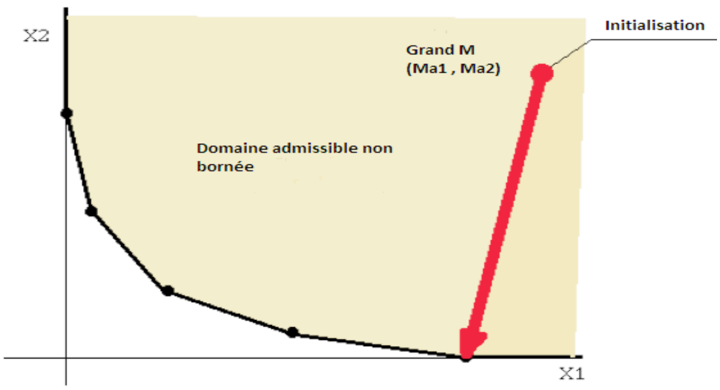
$$x \geq 0$$

Les contraintes définissent une région convexe faisable mais pas toujours fermée à cause de l'inégalité des contraintes.

Si la région est un fermé alors l'»algorithme de minimisation» commence en un point où la fonction objectif à la plus grande valeur et recherche des points où la fonction objectif diminue le plus rapidement, atteignant une valeur minimale.



Minimum: si la région n'est pas bornée alors que l'«algorithme de minimisation » démarre à un point donné Grand M de coordonnées où la fonction objectif a la valeur la plus élevée et recherche des points où la fonction objectif diminue jusqu'à ce qu'elle atteigne une clé:



Minimum:

La minimisation d'une fonction objectif (z) est équivalente à la maximisation de la fonction objectif (-z) et ainsi la méthode Simplexe tableau déjà présenté peut être utilisé aussi dans un problème de minimisation.

Exemple:

Face à un problème de minimisation sous forme standard:

min(z)

z=3x_1+4x_2

2x_1+3x_2≥8

5x_1+2x_2≥12

x_1,x_2≥0

Le problème de la minimisation de la fonction objectif (a z) correspond à la maximisation d'une nouvelle fonction d'objectif (-z)

$$\max(-z)$$

$$(z)=-3x_1-4x_2$$

Les contraintes nécessitent deux variables d'écart négatifs pour obtenir les équations :

$$2x_1+3x_2-s_1=8$$

$$5x_1+2x_2-s_2=12$$

Les variables d'écart négatifs ne contribuent pas à la fonction objectif (-z) leur coefficients sont nuls dans la fonction objectif

$(-z)=-3x_1-4x_2-0s_1-0s_2$

L'initialisation ne peut être faite au point , elle ne satisfait pas aux contraintes.
L'initialisation est effectuée à un point Grand M de coordonnées avec la plus petite valeur possible de la fonction d'objectif (z) obtenu en multipliant les variables auxiliaire ou artificielles par les coordonnées du Grand M:

$$(-z)=-3x_1-4x_2-0s_1-0s_2-Ma_1-Ma_2$$

Clé:
Si les variables auxiliaires ou artificielles ne font pas partie du problème, elles ne peuvent pas faire partie de la solution. De plus quand toutes les itérations sont terminées les variables auxiliaires ne peuvent pas être dans la base.
Nous sommes maintenant en mesure d'exécuter le Simplexe tableau par exemple :

	-3	-4	0	0	$-M$	$-M$		
	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	LD	θ
$-Ma_1$	2	3	-1	0	1	0	8	$8/2$
$-Ma_2$	5	2	0	-1	0	1	12	$12/5$
c_j-z_j	$7M-3$	$5M-4$	$-M$	$-M$				
$-Ma_1$	0	$11/5$	-1	$2/5$			$16/5$	$16/11$
$-3x_1$	1	$2/5$	0	$-1/5$			$12/5$	$12/2$
c_j-z_j	0	$\frac{11M}{5}-\frac{14}{5}$	$-M$	$\frac{2M}{5}-\frac{3}{5}$				
$-4x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$			$16/11$	
$-3x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$			$20/11$	
c_j-z_j	0	0	$-14/11$	$-1/11$			$-124/11$	

L'initialisation est effectuée de la même manière en tenant compte à la fois des variables d'écart et des variables auxiliaires dans l'en-tête.
Les variables auxiliaires commencent à la base avec des coefficients -M
Bien que certaines variables aident la base, il est nécessaire de calculer les variables auxiliaires (cellules grises.) Parce que les valeurs ne sont pas utilisées pour les calculs.

Les solutions optimales sont les suivantes:

x_1=20⁄11

x_2=16⁄11

max(-z)=(-124)⁄11

Par conséquent, la valeur minimale de (z) est 124⁄112 phases.

Ce problème peut également être résolu avec la méthode 2 phases.
Dans un premier temps mettre tous les coefficients des variables de décision à zéro et prendre la valeur de . Puis exécuter le Simplexe tableau jusqu'à ce que les variables artificielles sortent de la base.

	0	0	0	0	-1	-1		
	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	LD	θ
$-a_1$	2	3	-1	0	1	0	8	$8/2$
$-a_2$	5	2	0	-1	0	1	12	$12/5$
$c_j - z_j$	7	5	-1	-1				
$-a_1$	0	$11/5$	-1	$2/5$			$16/5$	$16/11$
$0x_1$	1	$2/5$	0	$-1/5$			$12/5$	$12/2$
$c_j - z_j$	0	$11/5$	-1	$2/5$				
$0x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$			$16/11$	
$0x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$			$20/11$	
$c_j - z_j$	0	0	0	0				

Les solutions de la première phase sont qui vont être utilisées pour la seconde phase.

La première phase se termine lorsque toutes les variables auxiliaires sortent de la base. Dans le cas contraire si au moins une variable artificielle reste dans la base, le problème n'a pas de solution.
Les variables auxiliaires ne sont pas introduites dans la base du premier tableau du Simplex de la deuxième phase. Ainsi la base ne peut contenir que des variables de décision et d'écart.
Les coefficients de la fonction objectif (z) sont également inscrits dans la table.
Dans la seconde phase, les valeurs de la dernière table d'itération de la première de phase (en vert) sont copiées en intégralité dans la première table de la deuxième phase et s'en suit les itérations habituelles du Simplex jusqu'à ce que les quantités aient des valeurs négatives ou nulles qui indiquent la fin des itérations.

	-3	-4	0	0		
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$-4x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$	$16/11$	
$-3x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$	$20/11$	

	-3	-4	0	0		
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$-4x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$	$16/11$	
$-3x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$	$20/11$	
$c_j - z_j$	0	0	$-14/11$	$-1/11$	$-124/11$	

	-3	-4	0	0		
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$-4x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$	$16/11$	
$-3x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$	$20/11$	

	-3	-4	0	0		
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$-4x_2$	0	1	$-5/4$	$2/11$	$16/11$	
$-3x_1$	1	0	$2/11$	$-3/11$	$20/11$	
$c_j - z_j$	0	0	$-14/11$	$-1/11$	$-124/11$	

Dans cet exemple il n'a pas été nécessaire d'aller au-delà de la 1ère itération pour obtenir les solutions, puisque les quantités ont des valeurs négatives ou nulles :

x_1=20⁄11

x_2=1 6⁄11

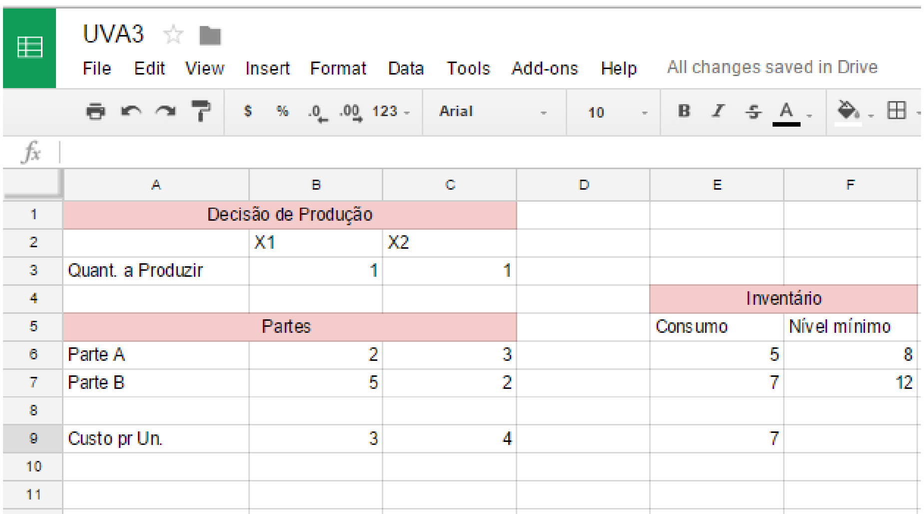
max(-z)=(-124)⁄11

Par conséquent, la valeur minimalede (z) est 124⁄11

Minimisation utilisant le SOLVEUR

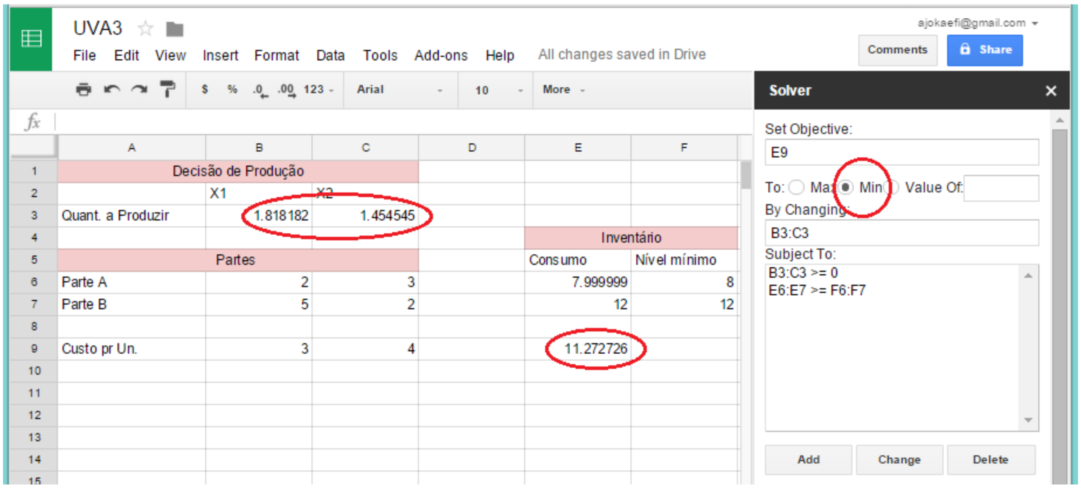
Le solveur a déjà intégré tous ces algorithmes et effectue une minimisation directement à partir du menu.

À partir du SOLVER avec le problème de l'Appel



	A	B	C	D	E	F
1	Decisão de Produção					
2		X1	X2			
3	Quant. a Produzir	1	1			
4					Inventário	
5	Partes				Consumo	Nível mínimo
6	Parte A	2	3		5	8
7	Parte B	5	2		7	12
8						
9	Custo pr Un.	3	4		7	
10						
11						

On fait la saisie des données et on exécute le SOLVER en choisissant l'option de minimisation. Nous obtenons :



Ce sont exactement les mêmes résultats que ceux obtenus par le Simplexe tableau

$x_1=20/11=1.818182$

$x_2=16/11=1.454545$

La valeur minimum de $=124/11=11.272726$

Conclusion:

Le Simplexe tableau a été conçu pour résoudre un problème de maximisation où le second membre des inégalités est (LD) est positif.
Pour résoudre une minimisation du problème, cela se transforme en un problème de maximisation de par la transformation min (z) = max (-z), on introduit des variables d'écart négatifs ainsi que des variables auxiliaires et on utilise la méthode du Grand M ou à 2 phases. D'autres méthodes seront présentées plus tard dans cette unité (Simplexe dual et mixte) qui permettent de résoudre ces problèmes directement.
Les Feuilles du solveur d'Excel ou Google ont intégré les choix de maximisation ou de minimisation afin de résoudre des problèmes directement.

Activité 2 – Théorème de la programmation linéaire

Introduction

Cette activité présente les conditions d'existence et d'unicité de solution et des théorèmes pour la résolution de problèmes de programmation linéaire;
C'est aussi une introduction à l'initialisation, à l'itération et à a conclusion d'une solution par la méthode du Simplexe tableau.

Détails de l'activité

Solutions

L'existence de solutions d'un problème de programmation linéaire dépend de la région de faisabilité, la monotonie de la fonction objectif (croissant ou décroissant) et si le problème est bien posé ou non.
La région réalisable est toujours un sous-ensemble d'un quadrant (cône positif) et est convexe puisqu'il résulte des intersections des demi-plans (les contraintes).
Cependant, comme nous l'avons vu, la région réalisable peut être délimitée ou non délimitée.
Lorsqu'il est bien défini, le problème de programmation linéaire a toujours une solution.
Vous pouvez avoir plus d'une solution si tous les points d'un bord (et les deux sommets) sont également une solution optimale.
Lorsqu'il n'est pas bien défini, le problème de programmation linéaire peut ne pas avoir une solution.
On peut résumer toutes ces conditions dans un théorème fondamental de la programmation.

Théorème fondamental de la programmation linéaire

- Tout Problème de Programmation Linéaire (PPL) est ou faisable ou impossible ou non délimité ;
- Si un PPL admet une solution réalisable, alors il admet une solution de base (sommet de la région réalisable);
- Si un PPL admet une solution optimale, alors il admet une solution de base réalisable.

Démarrer le Simplexe tableau

Le Simplexe tableau est conçu pour un problème de maximisation avec une solution sous forme standard particulier.
Lors de l'initialisation, l'itération et la fin, l'algorithme Simplexe tableau devraient tenir compte de toutes ces questions afin de déterminer si le problème a ou non une ou plusieurs solutions.
Dans la pratique, les variables de décision peuvent être de trois types:

non-négatives: $x_j \geq 0$

non-positives: $x_j \leq 0$

libres: $x_j \in [-\infty,\infty]$

Variables non-négatives sont préférables dans l'initialisation du Simplexe tableau. Lorsque les variables ne sont pas positives $x_j \leq 0$, on crée une nouvelle variable $x_j=-x_k$ et la nouvelle variable non négative $x_k \geq 0$ remplace la variable négative $x_j \leq 0$ dans la fonction objectif et les contraintes.

Lorsque des variables de signes quelconques (libres) x_j apparaissent dans le problème on crée deux nouvelles variables $x_{(k,)}$ x_m dont la différence est égale à la variable initiale $x_j=x_k-x_m$ et les nouvelles variables sont introduites dans la fonction objectif et les contraintes à la place de x_j.

Exemple

Considérer le problème de programmation linéaire pour les variables de formulation suivants qui sont impliquées dans les trois types mentionnés ci-dessus:

max(z)

$z=x_1-x_2+2x_3$

$x_1-x_2+2x_3 \leq 30$

$2x_1+2x_2+x_3 \leq 35$

$-x_1-4x_2+x_3 \leq 75$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$

x_3 signequeconque

Avant de démarrer le Simplexe tableau, on commence par remplacer les variables non-positives par des variables positives.

On introduit les nouvelles variables $x_2=-x_4$ et $x_3=x_5-x_6$ dans la fonction objectif et les contraintes pour obtenir:

max(z)

$z=x_1+x_4+2x_5-2x_6$

$x_1+x_4+2x_5-2x_6 \leq 30$

$2x_1-2x_4+x_5-x_6 \leq 35$

$-x_1+4x_4+x_5-x_6 \leq 75$

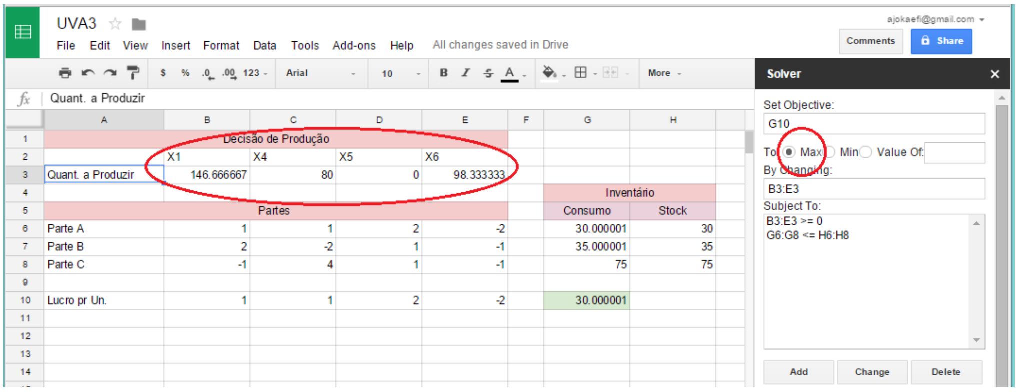
$x_1 \geq 0$

$x_4 \geq 0$

$x_5 \geq 0$

$x_6 \geq 0$

Utilisation du Solver



Obtient le point optimal

$x_1=147$

$x_4=80$

$x_5=0$

$x_6=98$

On reporte les variables initiales, nous obtenons la solution optimale:

$x_1=147$

$x_2=-80$

$x_3=-98$

$z=x_1-x_2+2x_3=67$

Dans les variantes Grand M ou 2 phases, il peut réduire le nombre de variables auxiliaires quand une variable de décision ou désactiver enregistré une seule restriction: divise tous cette contrainte par le coefficient de cette variable pour une colonne de la matrice. identité de la table de SIMPLEX
Si dans les contraintes, le second membre (LD) n'est pas positif, on peut le rendre positif en multipliant toutes les inégalités par (-1).

Les contraintes peuvent être de trois :

égalité: Membre de gauche égale au membre de droite, ■(+=LD)

Inégalité inférieure: ■(+≤LD)

Inégalité supérieure ■(+≥LD)

Dans le premier cas, le problème peut être résolu algébriquement si la solution de l'égalité existe sur le bord de la région réalisable.
Dans le second cas, il crée des variables d'écart (positif) qui sont ajoutés au membre de

gauche LE pour transformer l'inégalité en égalité;
Dans le troisième cas, il crée des variables d'écart (négatif) qui sont soustraits du membre de gauche LE pour transformer l'inégalité en égalité;
Il est donc important de connaître les contraintes préférables pour chaque cas de maximisation ou de minimisation de la fonction objectif:

Pour une maximisation ≤LD

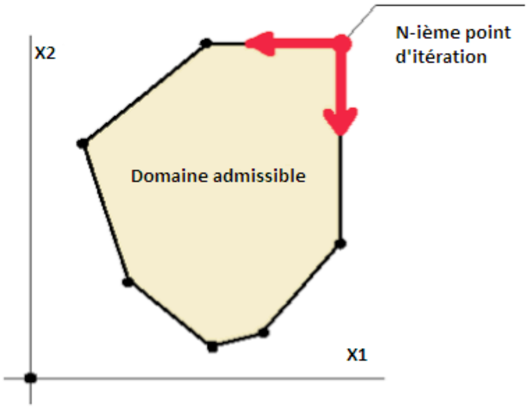
Pour une minimisation ≥LD

En utilisant ces types de contraintes préférables pour chacun des types d'optimisation, elle garantit l'existence d'une solution du problème de programmation linéaire.

Itération Simplexe tableau

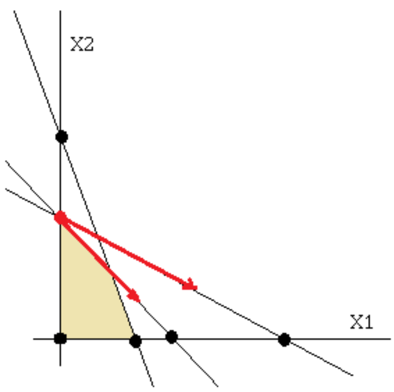
Lors de l'itération il peut survenir des problèmes de décisions.

Pour décider de la variable qui entre en base lorsque deux ou plusieurs valeurs positives de c_j-z_j sont identiques, on choisit un avec une méthode de décision.
Cela montre qu'à l'itération les décisions d'un sommet aux voisins ne se distinguent pas:



Dans la mise en œuvre d'un algorithme, il est nécessaire de prévoir pour l'ordinateur une règle de décision entre deux options identiques. Il est courant d'opter pour la variable de décision avec un coefficient plus élevé dans la fonction objectif ou de plus haut niveau.

Pour déterminer une variable qui doit sortir de base lorsque deux ou plusieurs valeurs de sont identiques, on choisit un avec une méthode de décision (arbitraire).
Cela révèle une dégénérescence, un point où se croisent plus de deux lignes:



Exemple

Considérons un problème de programmation linéaire suivant :

max(z)

z=4x_1+3x_2

2x_1+3x_2≤8

3x_1+2x_2≤12

x_1≥0

x_2≥0

Sur la première itération du Simplexe tableau on trouve la même valeur

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	2	3	1	0	8	$8/2 = 4$
$0s_2$	3	2	0	1	12	$12/3 = 4$
$c_j - z_j$	3	4	0	0	0	

On fait un choix arbitraire (pour mettre en œuvre un algorithme on a besoin d'une règle pour décider entre deux options identiques, il est donc commun d'opter pour l'indice le plus élevé parmi les variables dans ce cas s_2):

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	2	3	1	0	8	$8/2 = 4$
$0s_2$	3	2	0	1	12	$12/3 = 4$
$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
$0s_1$	0	$5/3$	1	$-2/3$	0	0
$4x_1$	1	$2/3$	0	$1/3$	4	6
$c_j - z_j$	0	$1/3$	0	$-4/3$	16	
$3x_2$	0	1	$3/5$	$-2/5$	0	
$4x_1$	1	0	$-2/5$	$3/5$	4	
$c_j - z_j$	0	0	$-1/5$	$-6/5$	16	

La deuxième itération θ = 0 (en rouge) est le résultat d'une égalité dans l'itération précédente. Notons que dans la deuxième itération le résultat de z=16 a été obtenue avec s_1=0 et x_2 hors base c'est-à-dire x_2=0, x_1=4.

Ce résultat n'est évidemment pas changé dans la 3ème itération où la solution est obtenu avec x_2=0 et x_1=4.

La dégénérescence ne fait pas obstacle à l'obtention de la solution optimale, mais peut causer des itérations inutiles.
Enfin, notons que la valeur θ ne peut pas être négative dans le Simplexe tableau car il est conçu pour trouver le maximum de la fonction objectif.
Si, au cours des itérations pour affecter les résultats de valeur dans une valeur négative, alors les θ autorisés à et indéterminée ne pénètrent pas dans la décision de la variable sur la base;
Résiliation Simplexe tableau
Comme nous l'avons vu, les conditions d'arrêt de l'algorithme Simplexe tableau sont obtenus lorsque c_j-z_j≤0.

Cependant, à la fin de l'algorithme Simplex tabulaire, on peut faire face à trois questions:
Excellente alternative - lorsque plus d'une combinaison de variables de base de fournir la même valeur de la fonction objectif, la variable de base sont répétées sans que les conditions de résiliation sont satisfaits;
illimitée possible - région est obtenu aucun ⍰ déterminée, aucune solution précédente;
Incapacité - variable auxiliaire ne laisse pas la base même de satisfaire les conditions de résiliation, la solution est impossible avant que les restrictions;
Pour chacune de ces situations, par exemple, présente explication.
Exemple d'excellente alternative
Considérer le problème de programmation linéaire de la formulation suivante:

max(z)

z=4x_1+3x_2

2x_1+3x_2≤8

3x_1+2x_2≤12

x_1≥0

x_2≥0

Résoudre le système de tableau avec:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	8	6	1	0	25	25/8
$0s_2$	3	4	0	1	15	15/3
$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
$4x_1$	1	3/4	1/8	0	25/8	25/6
$0s_2$	0	7/4	−3/8	1	45/8	45/14
$c_j - z_j$	0	0	−1/2	0	25/2	

Comme les conditions d'arrêt sont réunies pour c_j-z_j≤0 et la solution optimale est donnée x_1=25⁄8, s_2=45⁄14 (non utilisé dans la fonction objectif et x_2hors base, x_2=0)

Enfin, il apparaît que sur la colonne de la variable x_2 la valeur de c_j-z_j=0 mais x_2 est hors base.

Si nous continuons l'itération en introduisant de la variable x_2 dans la base, on obtient la même valeur optimale de la fonction objectif:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	8	6	1	0	25	25/8
$0s_2$	3	4	0	1	15	15/3
$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
$4x_1$	1	3/4	1/8	0	25/8	25/6
$0s_2$	0	7/4	−3/8	1	45/8	45/14
$c_j - z_j$	0	0	−1/2	0	25/2	
$4x_1$	1	0	2/7	0	5/7	
$3x_2$	0	1	−3/14	−3/7	45/14	
$c_j - z_j$	0	0	−1/5	4/7	25/2	

mais sur un autre point de la région réalisable

x_1=5⁄7

x_2=45⁄14

z=25⁄2

On voit que la quantité c_j-z_j≥0 sur la colonne de s_2. Si on essaye d'obtenir s_2 dans la base, alors l'algorithme entre dans une boucle infinie de remplacement:

Il y a donc deux solutions optimales:

x_1=25⁄8

s_2=45⁄8

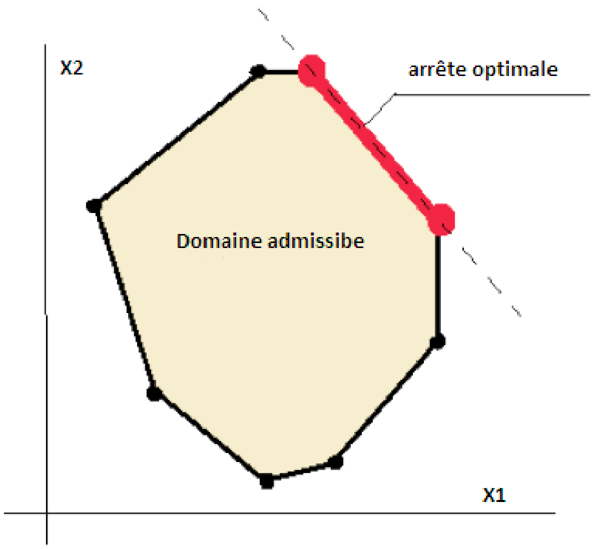
Et aussi

x_1=5⁄7

x_2=45⁄14

Dans les deux cas la valeur optimale de z = 25/2 (vérifier!)

Graphiquement, sur toute l'arrête, la valeur de z=25⁄2, mais la méthode du Simplexe tableau indique seulement que deux des sommets fournissent la valeur optimale.



Exemple de l'impossibilité de solution.

Considérons le problème de programmation linéaire avec la formulation suivante:

max(z)

z=4x_1+3x_2

x_1-6x_2≤5

3x_1≤11

x_1≥0

x_2≥0

Résolvons avec le Simplexe tableau:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	1	-6	1	0	5	5
$0s_2$	3	0	0	1	11	$11/3$
$c_j - z_j$	4	3	0	0	0	
$4x_1$	0	-6	1	$-1/3$	$4/3$	–
$0s_2$	1	0	0	$1/3$	$11/3$	?
$c_j - z_j$	0	3	0	$-4/3$	$44/3$	

Aucune possibilité de continuer à la prochaine itération de l'algorithme, car on ne peut pas déterminer θ.

Pourquoi ? Dans la première division pour trouver □, le nombre □(-@((4⁄3))⁄)6) est négatif, ensuite dans la deuxième division on a une division par 0 ((11/3)/0) qui n'est pas possible.

Ainsi, le problème de programmation linéaire n'a pas de solution.

Exemple d'infaisabilité:

Considérons un problème de programmation linéaire comme suit

max(z)

z=4x_1+3x_2

x_1+4x_2≤3

3x_1+x_2≥12

x_1≥0

x_2≥0

Résoudre avec le Simplexe tableau, après avoir introduit la variable auxiliaire en utilisant la variante Grand M:

	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	$-M$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2		LD	θ
$0s_1$	1	4	1	0	0	3	3
$-Ma_1$	3	1	0	-1	1	12	4
$c_j - z_j$	$3M + 4$	$M + 3$	0	$-M$	0		
$4x_1$	1	4	1	0	0	$4/33$	$-$
$-Ma_1$	0	-11	-3	-1	1	3	?
$c_j - z_j$	0	$-M - 13$	$-M - 4$	$-M$	0	$44/3$	

L'algorithme se termine mais une variable artificielle est toujours dans la base (en rouge), alors le problème de programmation linéaire n'a pas de solution (la solution n'est pas possible car ne satisfait pas aux contraintes).

Conclusion :

Le théorème fondamental de la programmation linéaire indique que tout problème de programmation linéaire (PPL) est soit possible, ou est non-délimitée ou n'a pas une solution réalisable;
Un PPL admettant une solution admissible, admet une solution de base (sommet de la région réalisable) et un PPL admettant une solution optimale, cette solution doit être une solution de base.
Ces cas sont démontrées Si le SIMPLEX tableau se présente comme suit : plus d'une solution optimale lorsque plusieurs combinaisons de solution de base donne la même valeur de la fonction objectif :

1.la variable de base sont répétées sans que les conditions de résiliation sont satisfaits; pas l'existence d'une solution ou d'une région faisable pas défini quand il ne thetav une donnée;

2. solution est impossible par rapport aux contraintes lorsque certains variables auxiliaires ne sortent pas de base.

Activité 3 – Dualité et Sensibilité

Introduction: Cette activité montre la relation entre le primal et le dual d'un problème de programmation linéaire. Il décrit la forme de la matrice du Simplex et il illustre également le primal et le dual du Simplex. Dans cette unité, les principes fondamentaux de l'analyse de sensibilité et de certains concepts sont illustrés.

Détails de l'activité:

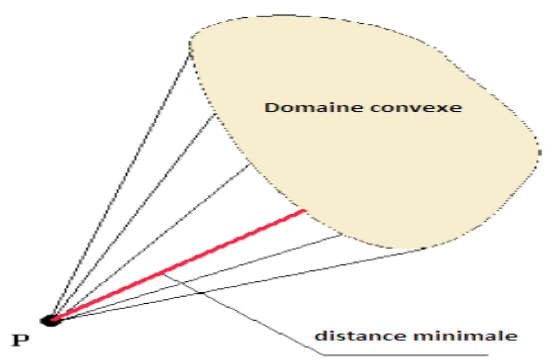
Exemples : Pour tout espace vectoriel, il existe un espace à double vecteur constitué de fonctionnels linéaires sur le scalaire.
Pour ne approfondir la théorie des espaces vectoriels dans ce module, nous présentons les principes de base de la relation primal-dual et ce que l'intuition géométrique fournie par des espaces euclidiens .
Considérons par exemple le cas de l'espace de l'art fonctionnel (vecteur ligne) par le produit intérieur sur le vecteur-colonne:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3(-1) + 2(1) = -1$$

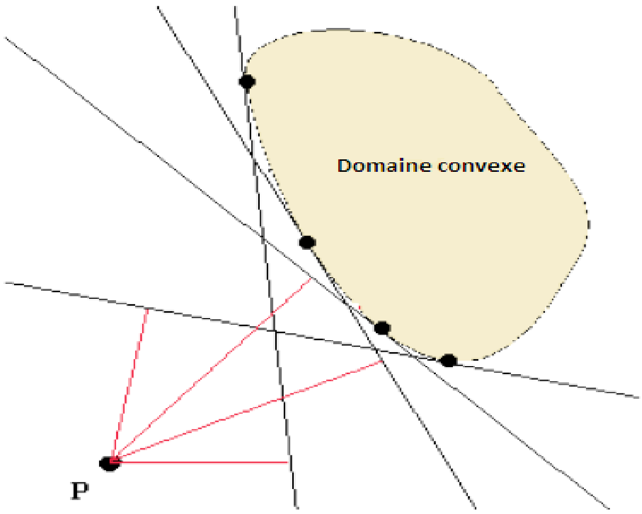
En ce sens, l'espace de tous les vecteurs de colonnes est duale de l'espace de tous les vecteurs lignes et vice-versa.
La transposition de cette opération (somme-produit ou produit interne) devient le vecteur-colonne dans un vecteur ligne (fonction linéaire) et vice-versa

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -1$$

Certaines intuitions géométriques sur le rapport primal-dual peuvent être obtenues dans la figure suivante où le problème primal est de trouver la distance minimale du point P à la région convexe (solution représentée en rouge):



Le problème lié au problème primal est de trouver la distance maximale du point P à une tangente à la région convexe:



Tout problème de programmation linéaire (primal) a un problème dual associé.
Plus précisément, le primal :

Minimiser z=cx

Contraintes Ax=b et x≥0 (cône positif)

Alors le dual est:

Maximiser w=yb

Contraintes yA≤c et y≥0

Le problème dual est construit à partir du primal, selon les règles suivantes:

Si le primal est un problème de maximisation alors le dual est un problème de minimisation, et vice versa;

Pour chaque contrainte du primal correspond une variable de décision du dual et vice versa;

Les coefficients de la fonction objectif du primal passent dans le second (LD) des contraintes du dual;

Les coefficients de la transposée de la matrice des contraintes du primal deviennent les coefficients de la matrice des contraintes du dual;

Si le primal est maximisé et la contrainte de l'inégalité est ≤ (), la variable est non-négatif. Si la contrainte est une équation, soit égal (=) la variable est libre de signe et de l'inégalité est ≥ (), le variable est non-positif;

Les règles sont résumées dans le tableau de conversion entre le primal (maximisation) et dual (minimisation):

	Primal	⇔	Dual
Fonction objectif z	max	⇔	min
	# contraintes	⇔	# variables de décision
	≤(préférence en max.)	⇔	≥ 0
		⇔	Signe en restriction
	≥	⇔	≤ 0
Fonction objectif z	min	⇔	max
	contraintes #	⇔	# variables de décision
	≤	⇔	≤ 0
		⇔	Signe en restriction
	≥(préférence en min.)	⇔	≥ 0
Coefficients	Fonction objectif	⇔	Contraintes LD
	Contraintes LD	⇔	Fonction objectif
	Contraintes A	⇔	A^T contraintes

A^T est la transposée de la matrice de coefficients des contraintes A.
La désignation de primal et dual à un problème de programmation linéaire est arbitraire, mais à partir du moment où un problème est donnée désignée primal, puis la transformation qui en résulte est le dual, et vice versa.

Exemple:

Comment par exemple de conversion, envisager un petit producteur de deux types de produits fabriqués à partir de deux types de ressources.

■(z=6x_1+15x_2)

sous les contraintes

1〖_x〗+x〖_2〗≤5

■(3x_1+12x_2≤2)

x_1,x_2≥0

Le primal du PPL est formulé comme suit :

variables:(z)

■(+15x〖_2〗@z=6x〖_〗)

1〖_x〗+x〖_2〗+s〖_1〗=5

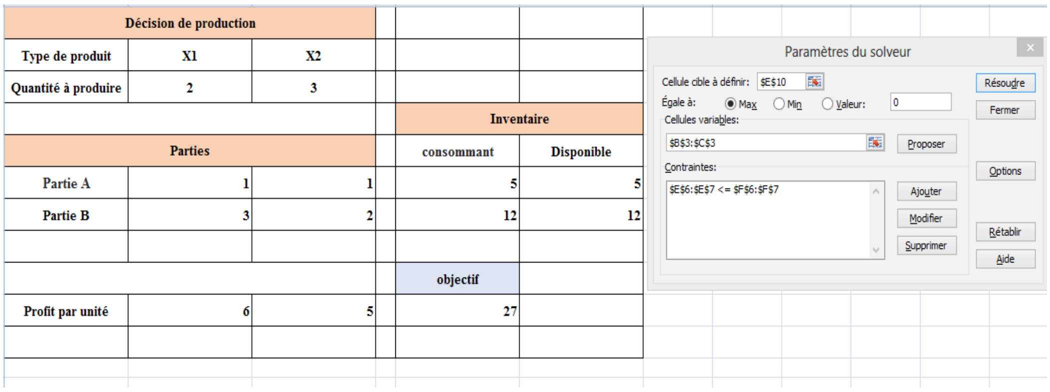
■(+12x〖_2〗+s〖_〗2x@3x〖_〗)

12⟦_x⟧⟦_(1,)⟧2,s⟦_(1,)⟧s⟦_2⟧≥0

oùs_(1,) s_2 sont les variables d'écart du primal.

En utilisant SOLVER, la solution optimale du primal est:

z⟦^⟧=27x⟦_1⟧=2x⟦_2⟧=3 et sont nuls s⟦_⟧10,s⟦_2⟧=0



Décision de production				Inventaire	
Type de produit	X1	X2			
Quantité à produire	2	3			
Parties				consommant	Disponible
Partie A	1	1		5	5
Partie B	3	2		12	12
				objectif	
Profit par unité	6	5		27	

Le PPL dual qui lui correspond est construit à partir de la table de conversion primal-dual:

min(w)

■(+112y⟦_⟧@w=5y⟦_⟧)

■(+13y⟦_2⟧-t⟦_⟧1@2⟦_⟧)

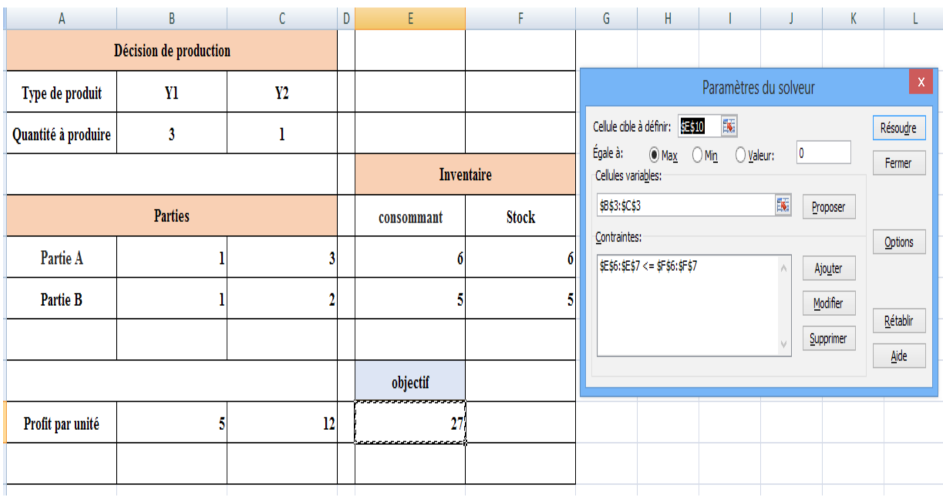
■(+12y⟦_2⟧-t⟦_5⟧2@6⟦_⟧)

y⟦_(1,)⟧y⟦_(2,)⟧t⟦_(1,)⟧t⟦_2⟧≥0

où ⟦_t⟧1,t⟦_2⟧sont les variables dual d'écart.

En utilisant le SOLVER, la solution dual est:

⟦^w⟧=27,y⟦_⟧13,y⟦_⟧21 et sont nuls1⟦_t⟧=0,t⟦_⟧20



A	B	C	D	E	F
Décision de production					
Type de produit	Y1	Y2			
Quantité à produire	3	1			
				Inventaire	
Parties				consommant	Stock
Partie A	1	3		6	6
Partie B	1	2		5	5
				objectif	
Profit par unité	5	12		27	

Considérons un problème primal avec n variables de décision et m contraintes.
Une contrainte qui est une égalité est égale à deux inégalités:A=B⇔B≤B∧B≥A

Total (n+m) des variables de décision (n) ainsi que les variables d’écart (m) du primal et le nombre total de variables de décision et en dehors du dual sont égaux.

	n variable de décision du primal			m variable d'écart du primal		
primal	x_1	$\cdots$	x_n	$s_1 = x_{n+1}$	$\cdots$	$s_m = x_{n+m}$
dual	$t_1 = y_{m+1}$	$\cdots$	$t_n = y_{m+n}$	y_1	$\cdots$	y_m
	n variable d'écart du dual			m variable de décision du dual		

La relation entre le primal et le dual se traduit sur les principes et les théories suivantes:

La complémentarité du principe de l'écart indique que la somme-produit (produit intérieur) du vecteur de PPL variables de décision primal x=(x〖_(…,)〗1,x〖_〗n) avec les variables d'écart double ■(t1,@(…,t〖_〗n)@t=〖_〗) couplé le vecteur somme-produit de variables de décision double y=(y〖_(1,…,)〗y〖_〗m) avec variables d'écart du primal ■(1,@(…,s〖_〗m)@s=〖_〗) est zéro:

∑_j^n x〖_t〗j〖_j〗+∑_i^m y〖_i〗s〖_0〗i

Le principe de la complémentarité de l'écart peut être vérifié pour l'exemple donné ci-dessus:

∑_j^n x〖_j〗T〖_j〗+∑_i^m y〖_i〗i〖_s〗=3(0)1(0)+2(0)+3(0)=0

Théorème faible de dualité:

■(x@(1,…,〖_x〗n)@SiX=〖_〗) est une solution optimale du primal du PPL et y=(y〖_(1,…,)〗y〖_〗m) est une solution optimale du dual PPL, alors:

∑_j^n c〖_j〗x〖_j〗≤∑_i^m b〖_i〗y〖_i〗

Théorème forte de dualité:

Si x〖^〗=(x〖_(…,)〗1,x〖_〗n) est une solution réalisable optimale pour le primal PPL et y〖^〗=(y〖_(1,…,)〗y〖_〗m) une solution optimale du dual PPL, alors: ∑_j^n c〖_j〗x〖_j〗i∑^m b〖_i〗x〖_i〗

C’est à dire que les valeurs optimales du primal et dual sont égaux.

Nous pouvons confirmer avec le primal-dual de l’exemple donné ci-dessus que:

Z〖^〗=27=〖^w〗

Réciproque du théorème de dualité forte est également valable.

Théorème de Critère d’optimalité

Si le primal et dual ont des solutions réalisables, alors les valeurs optimales sont identiques z=w ; et les points où sont obtenus ces valeurs sont des solutions optimales réalisables.

Sur la base de ces théorèmes, il est facile de conclure que:

- Si le primal est infaisable et non borné alors le dual est aussi non borné
- Si le dual est infaisable est non borné alors le primal est aussi irréalisable et non borné.
- La solution optimale est obtenue uniquement lorsque le primal et dual sont réalisables.
- Le Simplexe tableau résout à la fois le primal et le dual

Pour comprendre pourquoi, considérons le même exemple précédent primal:

max(z)

■(+15x〖_2〗@z=6x〖_〗)

1〖_x〗+x〖_2〗+s〖_1〗=5

■(+12x〖_2〗+s〖_〗2x@3x〖_〗)

12〖_x〗〖_(1,)〗2,s〖_(1,)〗s〖_2〗≥0

Où s〖_(1,)〗s〖_(2,)〗s〖_3〗 sont les variables d'écart du primal.

Dans l'exécution du Simplex, les résultats donnes:

	$c_1 = 6$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
$0s_1$	1	1	1	0	5	5
$0s_2$	3	2	0	1	12	4
$c_j - z_j$	6	5	0	0	0	
$0s_1$	0	$1/3$	1	$-1/3$	1	3
$6x_1$	1	$2/3$	0	$1/3$	4	6
$c_j - z_j$	0	1	0	-2	24	
$5x_2$	0	1	3	-1	3	
$6x_1$	1	0	-2	1	2	
$c_j - z_j$	0	0	-3	-1	27	
	$-t_1$	$-t_2$	$-y_1$	$-y_2$		

Avec le principe des écarts complémentarité, nous savons que:

- aux variables de décision du primal correspondent aux variables d'écart du dual1 〖_x〗↔1〖_t〗 2〖_x〗↔2〖_t〗
- les deux variables de décision correspondent aux variables d'écart du primal y〖_1 〗↔s〖_1〗 y〖_2〗↔s〖_2〗

telles que:

∑_j^md x〖_j〗t〖_j〗+∑_i^nd y〖_i〗s〖_〗i3(0)+1(0)

Dans le tableau du simplex, la dernière ligne de l'itération ■(@■(j@c〖_j〗-z〖_〗@)) est la solution du dual (vert), avec un signe négatif ,〖_〗13,y〖_(2,)〗=1 et des zéros 〖_t1〗=t2〖_(0,)〗=0, tandis que la solution du primal est donnée dans la dernière itération de la colonne LD1〖_x〗=3x〖_〗2 avec des variables nulles s〖_〗10,t〖_〗20 données implicitement (parce qu'ils ne sont pas sur la base).

	$1_c = 6$	$2 = c5$	$c\,30$	$c\,40$	0	
$0s_1$	0	$1/3$	1	$-1/3$	1	3
$6x_1$	1	$2/3$	0	$1/3$	6	4
$j_c - z_j$	0	1	0	-2	24	
	$-t_1$	$-t_2$	$-y_1$	$-y_2$		

Nous lisons dans le tableau, les valeurs des variables du primal (cyan)

s〖_1〗1

1〖_x〗=4

s〖_〗20 (primal hors-base)

x〖_〗20 (primal hors-base)

Et le dual

t〖_1〗=0

t〖_2〗=-1

y〖_〗10

y〖_2〗=2

Et à chaque itération, l'étape de complémentarité donne:

∑_j^n x〖_j〗t〖_j〗+∑_i^m y〖_i〗s〖_〗i0

On obtient : 4(0)+0(-1)

Nous pouvons voir, étape par étape que les calculs effectués par le Simplexe tableau de la deuxième itération donne: les variables du primal de base sont:〖_1〗1

1〖_x〗=4

Le variables du primal hors-base sont:

s〖_〗21 (hors-base)

2〖_x〗=4 (hors-base)

Les éléments de la base correspondant aux inconnus du dual sont:

y〖_2〗

2〖_t〗

Et celles correspondant au variables hors-base du dual sont :

y〖_〗10

T〖_〗10

Pour calculer les inconnues du primal, SIMPLEX utilise la contrainte du dual de:

■(+13y〖_2〗-t〖_1〗=6⇒(0)+3y〖_2〗-(0)=6⇒y〖_〗2y1@y〖_〗)

〖_2〗 +2y 〖_2〗 −t 〖_(2=5(0)+2(2))〗 −t 〖_5〗 2⇒T 〖_2〗 =−1

On notera également que cette itération w =z=24 n'a pas la valeur optimale, ce qui se traduit par le fait que le dual est infaisable parceque 〖_t2〗=-1 ne satisfait pas la conditiont〖_2〗≥0.

La négativité des variables duales (le dual infaisable) reflète la non-optimalité du primal.

Algorithme Dual du Simplex :

Le Simplexe tableau présenté ici est un algorithme PRIMAL car il considère que les itérations sur le primal sont faisables (LD positive) et continue les itérations tandis que le dual est infaisable. Certaines quantités■(@■(j@c〖_j〗z〖_〗@))sont positives et seulement au point où l'optimum du dual et du primal sont simultanément possibles.

Cependant, il y a une acceptation sur LD, autre algorithme SIMPEX avec des valeurs négatives.

Dans cet algorithme du dual du Simplex, le démarrage sur les valeurs de LD peut être négatif, indiquant l'infaisabilité du primal, et les valeurs j〖_c〗z〖_j〗 peuvent être négatives, indiquant la faisabilité du dual.

Le but de l'algorithme dual du simplex est ensuite faire sur le LD non-négative. (Notez que le but de l'algorithme Simplex primal est de rendre la ligne j〖_c〗-z〖_j〗 non-positive)

Par exemple, considérons le problème de programmation linéaire donné par:

min(z)

■(+17x〖_2〗@z4x〖_〗)

2x〚_1〛+3x〚_2〛≥x

■(1+7x〚_2〛≥x@5〚_〛)

9〚_x2〛〚_(1,)〛≥0

Ajout de deux variables d'écart négatives :

min(z)

■(+17x〚_2〛@z4x〚_〛)

2x〚_1〛+3x〚_2〛-x〚_3〛=x1

〚_5〛+7x〚_2〛-x〚_3〛=9

x〚_x〛〚_(1,)〛2,〚_x〛3,4〚_x〛≥0

Une des solutions qui a été étudiée est de résoudre la PPL par le Simplexe tableau avec des variantes du Grand M ou des 2 phases.

Une autre alternative est d'utiliser le dual Simplex, en acceptant que le membre de droite (LD) est négative.

Par passage à maximiser(z) et en multipliant par les contraintes x(-1), on obtient:

max(z)

(z)=-4x〚_1〛-7x〚_2〛

■(+23〚_x〛=-5@-2x〚_1〛-3x〚_〛)

-x〚_1〛-7x〚_2〛+x〚_〛3-9

x〚_x〛〚_(1,)〛2,〚_x〛3,4〚_x〛≥0

Initialisation du tableau dual du simplex:

	$1_c = -4$	$2 = c - 7$	$c\,30$	$c\,40$	0	
	1_x	$2x3$	$_x$	4_x	LD	
$0x_3$	-3	-2	0	1	-5	
$0x_4$	-1	-7	0	1	-9	
$j_c - z_j$	-4	-7	0	0		

Notez que les valeurs négatives LD reflètent l'impossibilité du primal et qui sont tous j〚_c〛z〚_j〛. Les valeurs de non-positives, reflétant le dual faisables.

Le but est de faire des itérations sur le membre de droite (LD) positif.

Sur la base de la LD, variable de valeur plus négative, qui dans notre cas est x〚_4〛(mis en évidence en rouge).

Ajoute lettre de θ d'une ligne, uniquement pour les variables hors-base (x〖_1〗,x〖_2〗, résultant de la division.

Les c〖_j〗-z〖_j〗sont les valeurs respectives de la ligne :

	$1_c = -4$	$2 = {}_c c - 7$	$c_{}30$	$c_{}40$	0	
	1_x	$2x3_{}$	$_x$	4_x	LD	
$0x_3$	-3	-2	0	1	-5	
$0x_4$	-1	-7	0	1	-9	
$j_c z_j$	$-700 - 4/$					
θ	$-4 - 7/$ -4	$1(-7) = 1$				

Entrer dans la base de la variable avec la plus petite valeur de θ (mis en surbrillance verte). Le pivot (valeur de l'intersection de la cellule de la ligne et de la colonne mise en surbrillance) dans ce cas est négatif (-7) et produit l'élimination de Gauss, comme d'habitude.

	$c_1 = -4$	$c_2 = -7$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	LD	θ
$0x_3$	-2	-3	1	0	-5	
$0x_4$	-1	-7	0	1	-9	
$c_j - z_j$	-4	-7	0	0		
θ	4	1				
$0x_3$	$-11/7$	0	1	$-3/7$	$-8/7$	
-7_2	$1/7$	1	0	$-1/7$	$9/7$	
$c_j - z_j$	-3	0	0	-1	-9	

En répétant le processus dans la prochaine itération, on obtient

	$c_1 = -4$	$c_2 = -7$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	LD	θ
$0x_3$	-2	-3	1	0	-5	
$0x_4$	-1	-7	0	1	-9	
$c_j - z_j$	-4	-7	0	0		
θ	4	1				
$0x_3$	$-11/7$	0	1	$-3/7$	$-8/7$	
$-7x_2$	$1/7$	1	0	$-1/7$	$9/7$	
$c_j - z_j$	-3	0	0	-1	-9	
θ	$21/11$			$7/3$		
$-4x_1$	1	0	$-7/11$	$3/11$	$8/11$	
$-7x_2$	0	1	$1/11$	$-2/77$	$13/11$	
$c_j - z_j$	0	0	$-21/11$	$-2/11$	$-123/11$	

Tantôt le dual comme le primal sont réalisables et l'algorithme s'arrête avec la solution optimale:

x[(_1)]=8/11

x[(_)]21311

z=(-123)/11⇒z=123⁄11

Algorithme du Simplex mixte

Dans les problèmes avec des contraintes mixtes ≤ ou ≥, on peut utiliser un mélange d'algorithmes PRIMAL DUAL du SIMPLEX au lieu des variables d'entrée des variantes Grand M ou 2 phases.
L'utilisation du primal et du dual du SIMPLEX est plus efficace d'un point de vue des exemples de calcul.

y[(_1)]=x

■(1+x[(_2)]≥5+δ@3[(_)])

■(+12x[(_2)]≥12@3x[(_)])

En résolvant simultanément, on obtient :

1[(_x)]≥2-2δ

x[(_3)]≥+2 , en substituantδ dans la fonction objectif, on obtient la valeur marginale de z :

■(3+δδ@z≥δ6(2-2)+5)

Une incrémentation de la valeur des résultats de la deuxième contrainte augmente la valeur de la ressource dans la fonction objectif et envoie la valeur y〖_1〗1 (calculé !)

Ainsi, les valeurs des variables duales peuvent être interprétées comme les valeurs marginales de la fonction objectif résultant de la variation incrémentale de ressource correspondant ; aussi longtemps que l'augmentation est suffisamment petit, pour ne pas éliminer le problème dans le voisinage du point optimal.
Donc, sur le plan économique, la valeur des variables duales peut être interprété comme le prix maximum que le producteur offre à payer pour chaque unité de ressources utilisées dans le primal.
D'autre part, le dual correspond au problème où le vendeur de ressources, ne pourra pas vendre moins cher que les valeurs optimales du prix du dual.
Ainsi, pour la formation correcte de l'acheteur la satisfaction du vendeur et des ressources, la valeur optimale du primal doit être égale à la valeur optimale du dual représenté.

Matrice algorithme Simplex

Les tableaux en blocs sont identifiés via les transformations des itérées au cours du processus d'exécution du tableau de l'algorithme du Simplex.
A titre d'exemple, considérons le cadre de Simplexe tableau calculée dans les exemples précédents:

		$c_1 = 6$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
0	s_1	1	1	1	0	5	5
0	s_2	3	2	0	1	12	4
$c_j - z_j$		6	5	0	0	0	
0	s_1	0	1/3	1	−1/3	1	3
6	x_1	1	2/3	0	1/3	4	6
$c_j - z_j$		0	1	0	−2	24	
5	x_2	0	1	3	−1	3	
6	x_1	1	0	−2	1	2	
$c_j - z_j$		0	0	−3	−1	27	

Dans l'identification, le démarrage se fait avec les matrices suivantes:

Le vecteur colonne des variables primales de la base

$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ identifiants 1

La ligne des coefficients des variables dans la base

$C_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

Les coefficients des matrices des contraintes

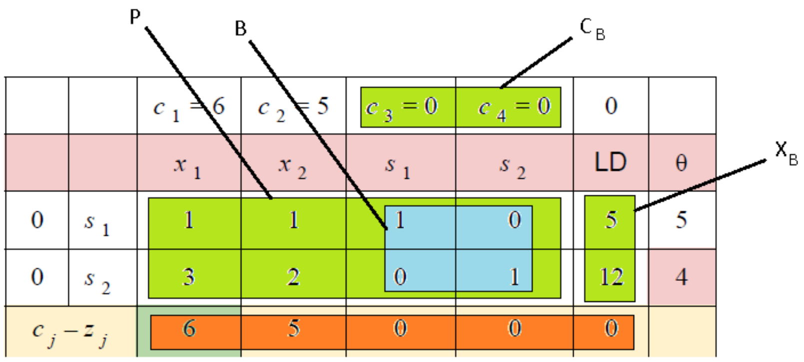
$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ où la j-ième colonne est

Dans la matrice des coefficients des contraintes, seules les variables de base sont:

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Les variables duales de la ligne du vecteur de la base:

La matrice est une sous-matrice égale à la matrice identité, comme indiqué dans la figure:



Les calculs matriciels faits au cours de l'exécution du Simplex sont :

$$\overline{P_j} = B^{-1} P_j$$
$$z_j = C_B \overline{P_j} = C_B B^{-1} P_j = y P_j \quad \text{où} \quad y = C_B B^{-1}$$
$$c_j - z_j = c_j - y P_j$$

L'indication matrices barres signifie que le résultat va à l'itération suivante.
La variable entre dans la base, car il a une plus grande valeur de ,

et estime θ par la formule :

$(\overline{P_j})^T \cdot \theta = X_B$

La variable avec la valeur la plus faible des composantes de θ, appelée sort de la base.

On calcule la valeur des nouvelles variables de la base

$\overline{X_B} = X_B - \theta_{\min} \overline{P_k} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{\min} \end{bmatrix}$ où k est l'indice de la variable qui entre dans la base

On remet en place la variable X en enlevant la barre au-dessus, et le processus est répété pour calculer $\overline{X_B}$.

La première itération est donnée par :

$$
\begin{aligned}
&X_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&C_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&y = C_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&z_1 = yP_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \\
&z_2 = yP_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \\
&c_1 - z_1 = 6 - 0 = 6 \\
&c_2 - z_2 = 5 - 0 = 5
\end{aligned}
$$

Entrée de la variable x avec comme valeur optimale (on notera que dans cette itération que =

$$
\begin{aligned}
&\overline{P_1} = B^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&\left(\overline{P_1}\right)^T \cdot \theta = X_B \\
&\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}^T \cdot \theta = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&\theta = \begin{bmatrix} \frac{5}{1} \\ \frac{12}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{quand } \theta_{\min} = 4
\end{aligned}
$$

La variables de base sortante (entrée en base de 1)

Pour calculer les valeurs des nouvelles variables de base, on effectue:

$$
\overline{X_B} = X_B - \theta_{\min}\overline{P_1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

En continuant avec la seconde itération :

$$
\begin{aligned}
&X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&C_B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{car les variables de bases sont } x_3 = s_1 \text{ et } x_1 \\
&B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{sont les colonnes de} [P_3 P_1] \text{ de } P \quad \text{qui correspondent à} \qquad x_3 = s_1 \text{ e } x_1 \\
&B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
&y = C_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&c_2 - z_2 = 5 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \\
&c_4 - z_4 = 0 - \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2
\end{aligned}
$$

Entre dans la base la variable x (dans cette itération =

$$\overline{P_2} = B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$(\overline{P_2})^T \cdot \theta = X_B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \cdot \theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ pour } \theta_{\min} = 3$$

Sortie de la variable de base (entrée de)

$$\overline{X_B} = X_B - \theta_{\min}\overline{P_2} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_{\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Troisième itération:.

$$X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{car les variables de bases sont } x_3 = s_1 \text{ et } x_1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{sont les colonnes de [P2P1] de P qui correspondent à } x_3 = s_1 \text{ et } x_1$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y = C_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3$$

$$c_4 - z_4 = 0 - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

Les conditions de faisabilité sont satisfaites et les mêmes valeurs optimales sont trouvées. Enfin, nous calculons la valeur de z:

$$z = C_B X_B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 27$$

Toutes les itérations figurent dans le tableau du SIMPLEX. Et quand le test d'arrêt est atteint, aux colonnes de la matrice identité correspond aux colonnes des variables de base:

		$c_1 = 6$	$c_2 = 5$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$	0	
		x_1	x_2	s_1	s_2	LD	θ
0	s_1	1	1	1	0	5	5
0	s_2	3	2	0	1	12	4
$c_j - z_j$		6	5	0	0	0	
0	s_1	0	1/3	1	−1/3	1	3
6	x_1	1	2/3	0	1/3	4	6
$c_j - z_j$		0	1	0	−2	24	
5	x_2	0	1	3	−1	3	
6	x_1	1	0	−2	1	2	
$c_j - z_j$		0	0	−3	−1	27	

B^{-1} de la première itération

B^{-1} de la deuxième itération

B^{-1} de la troisième itération

colonne de la matrice identité

Analyse de sensibilité

Ca consiste à voir comment évolue la solution si on fait des modifications dans:

de la fonction objectif

membre de droite (LD)

la matrice des coefficients des contraintes

Variation: si vous ajoutez plusieurs variables ou des contraintes sur le problème initial.
Une réponse évidente à cette question est tout simplement de recadrer la question avec les variations désirées et de comparer les résultats.
Cependant, cette méthode de «force brute» a un coût élevé du point informatique. On peut faire les calculs pour exécuter l'algorithme du Simplex.

En outre, vous pouvez obtenir cette information à partir de la solution déjà obtenue.

Pour analyser ces questions en détail, prenons un exemple avec le problème de programmation linéaire (primal) suivant :

max(z)

(+25x〖_2〗@z=4x〖_1〗+3x〖_〗)

1〖_x〗+2x〖_2〗+3x〖_3〗≤9

(+2x〖_3〗≤x@2x〖_1〗+3x〖_〗)

12〖_x〗〖_(1,)〗2,3〖_x〗≥0

Démarrage du Simplexe tableau:

		$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	θ
0	x_4	1	2	3	1	0	9	3
0	x_5	2	3	1	0	1	12	12
$c_j - z_j$		4	3	5	0	0	0	
5	x_3	$1/3$	$2/3$	1	$1/3$	0	3	9
0	x_5	$5/3$	$7/3$	0	$-1/3$	1	9	$27/5$
$c_j - z_j$		$7/3$	$-1/3$	0	$-5/3$	0	15	
5	x_3	0	$1/5$	1	$2/5$	$-1/5$	$6/5$	
4	x_1	1	$7/5$	0	$-1/5$	$3/5$	$27/5$	
$c_j - z_j$		0	$-18/5$	0	$-8/5$	$-7/5$	$138/5$	

Une solution optimale est :

1[[_x]]=6/5

x[[_]]20

3[[_x]]=27⁄5

z=138⁄5

Nous ne serons pas analyser plusieurs cas qui peuvent varier la valeur optimale:

Changement 1 : on fait varier le coefficient de la variable hors-base, dans la fonction objectif.
Considérons un coefficient de variation de

Seulement en revue la dernière itération:

		$1\square_c 4$ =	$2\square_c$	$c\square 53$	$c\square 40$	$c\square_5$ = 0	0	
		$1\square_x$	$2x3\square$	$\square_x$	$4x\square$	$x\square_5$	LD	θ
5	$x\square_3$	0	1/5	1	2/5	−1/5	6/5	
4	$x\square$17/50−1/53/527/5						1	
$j\square_c - z\square_j$		0	−18/5	0	−8/5	−7/5	138/5	

Une variation peut mettre 2 une valeur positive et changer la solution optimale calculée:.

Le changement nécessaire pour y arriver peut être

$$c_2 - z_2 = c_2 - \left(1 + \tfrac{28}{5}\right) = c_2 - \tfrac{33}{5} \leq 0 \Rightarrow c_2 \leq \tfrac{33}{5}$$

Autrement dit, la valeur optimale est insensible à la hausse de 33/5-3=6 unités du coefficient .

Changement de 2 : pour le coefficient des variables de base dans la fonction objectif, il faut envisager une variation du coefficient x (peut aussi être 3)

Analyser seulement la dernière itération:

		$c\square_1$	$2\square_c 3$ =	$c\square 53$	$c\square 40$	$c\square_5$ = 0	0	
		$1\square_x$	$2x3\square$	$\square_x$	$4x\square$	$x\square_5$	LD	θ
5	$x\square_3$	0	1/5	1	2/5	−1/5	6/5	
$c\square_1$	$x\square$17/50−1/53/527/5						1	
$c\square_j z\square_j$		0	−18/5	0	−8/5	−7/5	138/5	

Une variation de peut modifier les valeurs des variables hors-base pour les valeurs positives et changer la solution optimale:

$$c_2 - z_2 = 3 - \left(1 - \frac{7c_1}{5}\right) = 2 - \frac{7c_1}{5} \leq 0 \Rightarrow c_1 \geq \frac{10}{7}$$
$$c_4 - z_4 = 0 - \left(2 - \frac{c_1}{5}\right) = \frac{c_2}{5} - 2 \leq 0 \Rightarrow c_1 \leq 10$$
$$c_5 - z_5 = 0 - \left(-1 + \frac{3c_1}{5}\right) = 1 - \frac{3c_1}{5} \leq 0 \Rightarrow c_1 \geq \frac{5}{3}$$

Autrement dit, la valeur optimale est insensible puis que

3) Variation du membre de droite LD.

Considérons une variation du membre de droit à une entrée de variable non spécifiée

$$X_B = \begin{bmatrix} b_1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

L'impact peut être quantifiée:

$$LD = B^{-1}X_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}b_1 - \frac{12}{5} \\ \frac{36}{5} - \frac{1}{5}b_1 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \geq 6 \\ b_1 \leq 36 \end{cases}$$

En d'autres mots, la valeur optimale est insensible puisque reste dans la gamme36].

4) Des contraintes de coefficients dans une variable hors-base

Considérons une variation d'une certaine matrice de coefficient de contraintes sur une variable hors-base. La variation de est donnée par :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ q \end{bmatrix}$$

L'impact sur la colonne affecte , et cet effet peut être calculé comme suit:

$$\overline{P_2} = B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}q \\ \frac{3}{5}q - \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$
$$c_2 - z_2 = c_2 - yP_2 = 3 - \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} - \frac{1}{5}q \\ \frac{3}{5}q - \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{13}{5} - \frac{3}{5}q < 0 \Rightarrow q > \frac{3}{13}$$

Autrement dit, la valeur optimale ne modifie pas la valeur de q et est supérieure à 13/3.

5) Une nouvelle variable de décision sera rentable avec l'introduction de nouveau type de produit sans changer le stock dans les entrepôts (LD initiale) ?

Un nouveau produit dont la quantité doit être déterminée est 6, a une contribution dans la fonction objectif, avec dans la matrice des coefficients des contraintes.

Pour cela, on peut prend par exemple =

$$P_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Crée une nouvelle colonne de

		$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 6$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	θ
5	x_3	0	1/5	1	2/5	−1/5	−1/5	6/5	−
4	x_1	1	7/5	0	−1/5	3/5	8/5	27/5	27/8
$c_j - z_j$		0	−18/5	0	−8/5	−7/5	3/5	138/5	

Calculs des valeurs de la colonne

$$\overline{P_6} = B^{-1}P_6 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Comme:

$$c_6 - z_6 = c_6 - yP_6 = 6 - \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{5}$$

est positif, la nouvelle variable est entrée dans la base et les variables de la base.
Si cette valeur est négative, il est recommandé de ne pas présenter le nouveau produit.
Pour calculer l'augmentation de la valeur de la fonction objectif l'itération continue avec le tableau du Simplex:

		$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 6$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD	θ
5	x_3	0	1/5	1	2/5	−1/5	−1/5	6/5	−
4	x_1	1	7/5	0	−1/5	3/5	8/5	27/5	27/8
$c_j - z_j$		0	−18/5	0	−8/5	−7/5	3/5	138/5	
5	x_3	1/8	1/8	1	3/8	−1/8	0	15/8	−
6	x_6	5/8	7/8	0	−1/8	3/8	1	27/8	27/8
$c_j - z_j$		−3/8	−33/8	0	−9/8	−13/8	0	237/8	

On obtient une nouvelle solution optimale, où la valeur de la fonction objectif est passée de 138/5 à plus de 237/8.

Une restriction:

Supposons qu'il y ait une nouvelle ressource qui n'a pas été correctement pris en compte en difficulté et il est maintenant nécessaire de le prendre en compte.

		$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD	θ
5	x_3	0	1/5	1	2/5	−1/5	6/5	−
4	x_1	1	7/5	0	−1/5	3/5	27/5	27/8
$c_j - z_j$		0	−18/5	0	−8/5	−7/5	138/5	

Exemple de cône, envisager une nouvelle variable x1

Exemple de cône, envisager une nouvelle variable x1

⟦_(restriction:)⟧+2⟦_x⟧+3⟦_x⟧≤8

Comme la solution ⟦_x1⟧=x2⟦_(27⁄(5,))⟧=x3⟦_(0,)⟧=6⁄5satisfait cette contrainte:

■(@■(0+(6⁄5)=33⁄5≤@(27⁄5)+)) .) alors cette restriction n'a pas d'incidence sur la solution optimale.

Considérons maintenant une restriction touchant l'optimum x1

⟦_(solution:)⟧+2⟦_x⟧+3⟦_x⟧≤6

Alors cette contrainte n'a pas d'incidence sur la solution optimale.

Considérons maintenant les contraintes.

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x_2 + x_3 + \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5 = \frac{6}{5} \\ x_1 + \frac{7}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 = \frac{27}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{6}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5 \\ x_1 = \frac{27}{5} - \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5 \end{cases}$$

Remplacement des nouvelles contraintes et la simplification donne:

$$\left(\frac{27}{5} - \frac{7}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{3}{5}x_5\right) + x_2 + \left(\frac{6}{5} - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_5\right) \leq 6$$
$$-\frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_2 \leq -\frac{3}{5}$$

L'ajout d'une variable.

$$-\frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_2 + s_1 = -\frac{3}{5}$$

Création d’une nouvelle ligne pour la nouvelle équation:

		$c_1 = 4$	c_2	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	LD	θ
5	x_3	0	$1/5$	1	$2/5$	$-1/5$	0	$6/5$	
4	x_1	1	$7/5$	0	$-1/5$	$3/5$	0	$27/5$	
0	s_1	0	$-3/5$	0	$-1/5$	$-2/5$	1	$-3/5$	
$c_j - z_j$		0	$-18/5$	0	$-6/5$	$-7/5$	0	$138/5$	

La valeur négative dans la nouvelle LD des contraintes montre que, en fait, la grande solution existante viole la nouvelle contrainte optimale.
En continuant avec le Simplex du dual, nous obtenons la nouvelle solution.:

		$c_1 = 4$	c_2	$c_3 = 5$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	s_1	LD	θ
5	x_3	0	$1/5$	1	$2/5$	$-1/5$	0	$6/5$	
4	x_1	1	$7/5$	0	$-1/5$	$3/5$	0	$27/5$	
0	s_1	0	$-3/5$	0	$-1/5$	$-2/5$	1	$-3/5$	
$c_j - z_j$		0	$-18/5$	0	$-6/5$	$-7/5$	0	$138/5$	
θ			6		6	$1/2$			
5	x_3	0	$1/2$	1	$1/2$	0	$-1/2$	$3/2$	
4	x_1	1	$1/2$	0	$-1/2$	0	$3/2$	$9/2$	
0	x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	$-5/2$	$3/2$	
$c_j - z_j$		0	$-3/2$	0	$-3/2$	0	$-7/2$	$51/2$	

Ce qui donne to 51/2.

Ratios de contraintes, une variable de base
Quel est l’impact d’un changement dans un coefficient des contraintes d’une variable de base? La meilleure solution est de résoudre le nouveau problème, car il devient trop complexe pour essayer de comprendre l’impact du tableau du Simplex original.

La raison est simple, quand il y a un changement dans un coefficient des contraintes, sur une variable de base, les «variables de base» changent et on ne peut pas l'utiliser pour calculer l'impact sur d'autres variables.

Conclusion

Nous avons développé le problème dual et les règles de la construction du primal. Les relations ont été identifiées entre les variables primal et dual et ont montrées plusieurs principes et théorèmes, en particulier le principe de l'élimination complète, les théorèmes de dualité et le critère d'optimalité.
Il a été présenté la méthode Simplex primal et dual, ainsi que la sensibilité de la solution.

Résumé de l'unité

Le tableau du Simplex permet de résoudre un problème de maximisation où le membre de droite (LD) des contraintes est positif.

Pour résoudre un problème de minimisation, cela se transforme en un problème de maximisation via la transformation min(z) = - max (-z) et des variables d'écart et auxiliaires sont introduits dans les contraintes en utilisant la méthode Grand M ou à deux étapes.
D'autres méthodes ont été aussi présentées dans cette unité (Dual du Simplex) qui abordent ces problèmes directement dans Excel. Or les fiches SOLVER Google intègrent la maximisation ou la minimisation et résout des problèmes directement.
Le théorème fondamental de la programmation linéaire indique que tout problème de programmation linéaire(PPL) est faisable ou non délimité ou non réalisable.
Si un PPL possède une solution viable, alors une solution de base (sommet de la région réalisable) de PPL optimale doit ensuite être solution de base;

De plus une solution est alternative, lorsque plus d'une combinaison de variables de base fournit la même valeur de la fonction objectif, la variable de base est répétée sans que les conditions d'arrêt soient satisfaits. La solution est impossible lorsque certaines variables auxiliaires dans les contraintes ne laissent pas la possibilité à la base de satisfaire les conditions d'arrêt.
Il a été développé le problème dual et les règles de la construction du primale.
La relation entre les variables du primal et dual sont identifiés et présentés. Plusieurs théorèmes sont rapportés, en particulier le principe de l'élimination complète, le théorème de dualité et le critère d'optimalité.

Il a aussi été introduit la méthode du Simplex primal et dual.

Lectures et autres ressources

Les lectures et autres ressources de cette unité se trouvent au niveau des lectures et autres ressources du cours.

Unité 3. Les problèmes de transport

Introduction à l'unité

Dans cette unité, les terminologies et les bases de la théorie des graphes sont introduits.
Les Graphes représentent des relations dans un ensemble discret et sommets pas vides et forment un cadre mathématique très utile pour modéliser une large classe de modèles discrets de la programmation linéaire, tels que les problèmes de transport, la désignation, arbre couvrant minimum, plus court chemin, flux réseau.
Aussi les principaux algorithmes pour résoudre ces problèmes sont présentés.

Objectifs de l'unité

À la fin de cette unité, vous devriez être capable de:

- Modéliser et résoudre un problème de transport
- modèle et résoudre un problème d'affectation;
  calculer l'arbre de recouvrement minimal d'un réseau
  déterminer le chemin le plus court entre deux sommets
  résoudre des problèmes d'optimisation de flux de réseau;

Termes clés

Grade: nombre d'arêtes adjacentes au sommet

Planaire: graphique représenté dans le plan où les bords ne se croisent pas.
Régions: sous-ensembles du plan défini par des bords.

Arbre binaire: l'arbre avec deux enfants par coin que la feuille

Spanning tree: arbre qui relie tous les sommets

Bipartite: bord seulement entre sous-ensembles distincts de la partition des sommets

Formule de euler: v-un + r = 2

Kuratowski théorème: un graphique est soit plane ou homeomorfo ak5 ou k3,3.

Graphe dual: graphique avec un bord par carte des régions adjacentes

Graphe: représentation d'une relation binaire sur un ensemble de sommets.

Vertex: des éléments entrant dans la relation en tant que source ou en tant que destination.

pointe: des paires d'éléments connexes par origine-destination.

Degré intérieure: nombre d'arêtes lié sur le vertex

degré extérieure: nombre d'arêtes d'origine au sommet.

Bord: bord vers et à partir d'un même sommet

bords symétriques: bords vers et inter-échange de destination.

Graphe: digraphe symétrique.

Sommets adjacents: sommets reliés par des arêtes.

Les bords adjacents: bords connectés au même sommet.

Graphe simple: pas de liens et pas de bords parallèles

Simples sommet: degré de vertex 2.

Isomorphe: même représentation autre que les étiquettes de sommets et d'arêtes.

Compléter: avec arête entre deux sommets.

Graphe: graphe obtenu d'une autre, la suppression de sommets et d'arêtes.

Supprimer sommet: opération utilisé pour sous-graphes.

Chemin: séquence de sommets et d'arêtes adjacentes.

Accessibilité: les sommets peuvent être reliés par des chemins.

Contiguïté: propriété de «proximité» entre les bords et. Sommets régions.

Longueur: le nombre d'arêtes sur le chemin.

Euler: chemin d'accès à une caractéristique spécifique.

Cycle: chemin pour commencer même sommet et à la fin.

Hamiltonien: chemin qui visite tous les sommets.

Connexe: graphique avec le chemin entre deux sommets.

Cour: la décomposition d'un graphe en deux sous-graphes éliminant seulement bords.

Cut (couper-set): un ensemble de bords enlevés pour faire la coupe.

Arbre: connecté graphe sans cycles.

Root: vertex arbre avec la hiérarchie supérieure.

Feuille: degré de sommet 1.

Division élémentaire: simples sommet introduction d'un bord.

Homéomorphisme: isomorphe à l'exception des subdivisions élémentaires.

Carte double: d'une zone du sommet du graphe

Couleur: l'attribution de couleurs (étiquettes) les différentes régions adjacentes.

Nombre chromatique: nombre minimum nécessaire pour cromar une carte.

4 Couleurs théorème: le nombre minimum nécessaire pour cromar une carte est de 4.

Réseaux: graphiques ou digraphes pondérés.

Pondération: attribuer un poids (valeur) chaque arête ou chaque sommet.

Stockage: accumulation valeurs sommets.

Débit: le transfert de la valeur d'un sommet à l'autre.

Problème de transport: les eaux de ruissellement et le graphique bipartite en minimisant le poids total.

Problème d'affectation: le ruissellement et le graphique bipartite avec des bords uniques.

Équilibrées: total sommets que nous offrons égal tentatives au total nous sommets.

Le coin supérieur gauche: méthode d'initialisation de l'algorithme modi oü stepping stone.

Coût minimum: méthode d'initialisation de l'algorithme modi ou stepping stone.

Tarif: méthode d'initialisation de l'algorithme modi ou stepping stone.

Tremplin: algorithme d'optimisation sur le problème de transport.

Vogel / modi: algorithme d'optimisation sur le problème de transport.

Attribution: attribuer des valeurs à des cellules dans le stepping stone / modi ou algorithme hongrois.

Position de base: les cellules affectées.

Pas de position de base: cellules réinitialisation.

Cycle alterné: alternance étape horizontale à l'étape verticale pour revenir à la source.

Solution dégénérée: position de base alloué à zéro.

Variable cachée: position de base variable allouée avec zéro.

Activités d'apprentissage

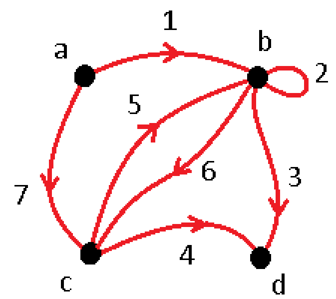
Activité 1 – Terminologie et éléments de base de la théorie des graphes

Introduction: À travers les bases et la terminologie de la théorie des graphes; Graphiques représentent des relations dans un ensemble discret de sommets et pas vide et que la forme d'une structure mathématique très utile, semblables par exemple des fonctions de l'ECA, qui sont aussi des relations d'un ensemble (domaine) à un autre (codomain).
Une grande classe de modèles distincts de programmation linéaire peut être représenté par des graphes comme on peut le voir dans les activités suivantes.
Il est donc très important de connaître la terminologie, les principaux théorèmes (Euler, Kuratowski et 4 couleurs) et les principaux problèmes (cycle Euler et de cycle hamiltonien).

Détails de l'activité

Un graphe ou graphe dirigé est une représentation d'une relation binaire sur un ensemble de sommets.
Exemple:
Étant donné un ensemble de sommets V={a,b,c,d}, le graphe

G={(b,)a,(a,)b,(c,)b,(b,)b,(d,)c,(b,)a,(c,d)} peut être représenté par le graphe



Chaque relation de paire ordonnée est désigné sous le bord graphe G et est généralement identifié par un symbole alphanumérique.
Autrefois, un graphe est défini par la caractérisé par deux ensembles V, A et table ou

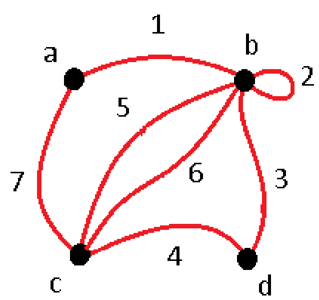
Vertex: Va,{=b,c,d}

A = Edges:{1,2,3,4,5.6:}

Table

	v^2
	$(2a, 2)$
b	$(b, 3)$
b	(b, d)
4	(c, d)
5	(c, b)
6	(b, c)
7	(a, c)

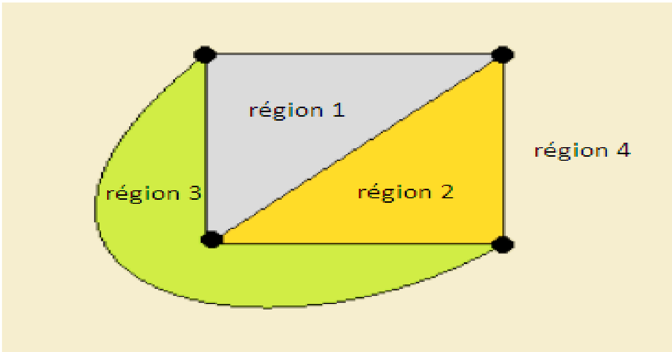
Le graphe des bords a un sommet de source: première paire d'éléments d'assemblage, et un sommet cible: deuxième paire d'éléments d'assemblage.
Le nombre d'arêtes entrant un sommet appelé le degré intérieur d'un sommet et le nombre de bords laissant un sommet appelé le degré extérieure apex.
Lorsque la source et de destination se chevauchent, le bord est appelé une boucle.
Dans l'exemple ci-dessus, le bord 2 est une liaison.
Deux bords sont symétriques à l'origine et le destin de l'un est la destination et l'origine de l'autre, respectivement.
Dans l'exemple ci-dessus, le bord 5 de l'arête 6 est symétrique.
Lorsque tous les bords ont des bords symétriques le graphe est dit d'être symétrique et est appelé seulement graphique.
Alors le graphe est un graphe orienté symétrique.



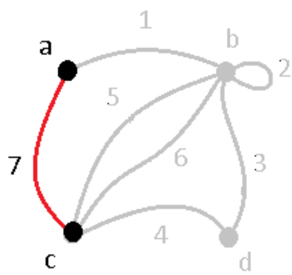
Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui se connectent au sommet, et.

Dans l'exemple ci-dessus, le degré de (b) = 6.
Une représentation géométrique d'un graphe permet correspondant à un point d'un espace géométrique avec un sommet dans le graphe et une ligne continue entre deux points géométriques avec un bord entre ces points.
Les deux exemples ci-dessus sont des représentations géométriques d'un graphe et un graphe dans le rôle du plan (cette feuille).

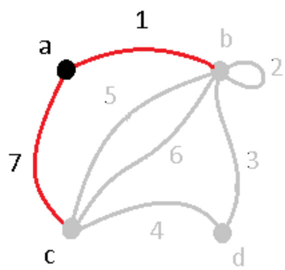
Un graphe est planaire s'il y a une représentation géométrique de la courbe dans un plan (deux dimensions) de telle sorte que les bords ne se croisent pas.
Un graphe planaire sépare le plan en régions distinctes (intérieure et extérieure)
Par exemple, définir 4 régions dans le plan, trois intérieure et une extérieure:



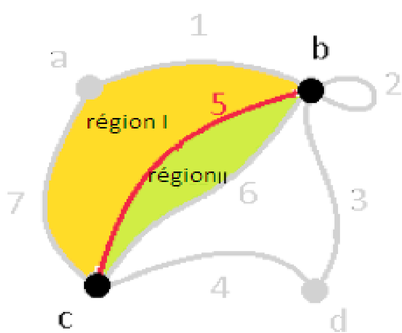
Deux sommets sont adjacentes si elles sont bord extrême de ce dernier, par exemple, sont des sommets adjacents a et c sont comme bord extrême 7:



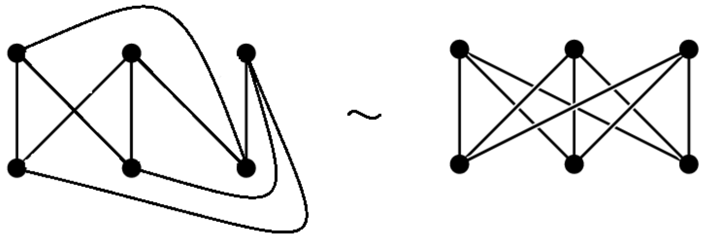
Deux bords sont adjacents si elles se lient au même sommet, par exemple, les bords 1 et 7 sont adjacents depuis lient au même sommet:



Deux régions adjacentes sont séparées par une arête, par exemple, les régions I et II sont contiguës sont séparées par le bord 5:

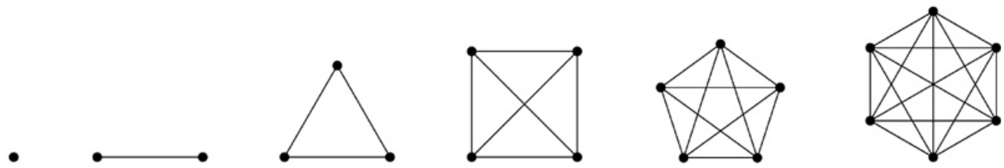


Deux bords sont parallèles si elles ont les mêmes extrêmes.
graphiques simples disposent pas des boucles ou des bords parallèles.
Deux graphes sont isomorphes si elles ont des représentations identiques à moins que le lettrage.
Gérer sans casser les bords de leurs sommets adjacents entraînant graphiques isomorphes, par exemple:



$K_{3,3}$

Un graphe est complet si tous les sommets distincts sont contiguës.
Exemple de graphes complets avec n sommets, appelés



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

H A structure H(V',A',g') est un sous graphe de graphe G=(V,A,g) if

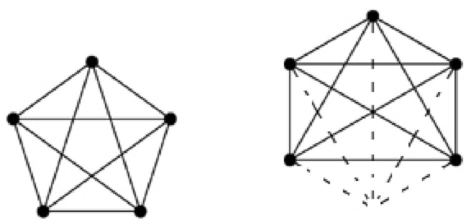
V'⊆V

A⊆A'

g'=gV⟦_V⟧ est une contrainte g à A'

Un moyen important de construire des sous-graphes est la suppression de sommets et d'arêtes qui sont adjacents.

Par exemple, si l'un des sommets K⟦_6⟧ est éliminé avec tous les bords qui s'y connectent, suit un graphique K⟦_5⟧ (sous grapheK⟦_6⟧)



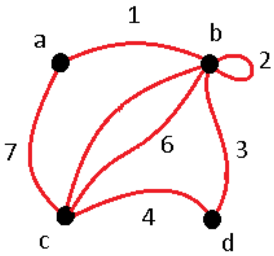
K_5 K_5

Un chemin du sommet n_0 à un sommet n_k est une suite finie de sommets et d'arêtes, à partir de n_0 etseterminantenn_k.

Le sommet n_0 est dit être accessible à partir du sommet n_k

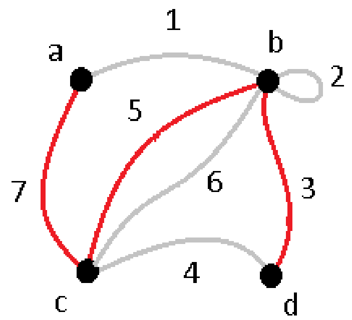
s'il existe un chemin à partir de n_0à n_k.

Un graphique peut être représenté par une matrice adjacente, avec des rangées et des colonnes et représentés par l'entrée de sommets 1 si les sommets sont adjacents et 0 sinon:

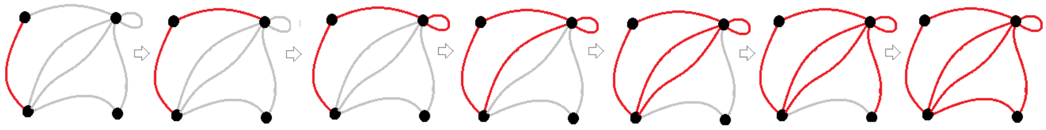


$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

La longueur d'un chemin est le nombre d'arêtes de cette manière.
Dans l'exemple définit le trajet (a, 7 c, 5 a, b, 3, d) rouge, avec une longueur égale à trois:

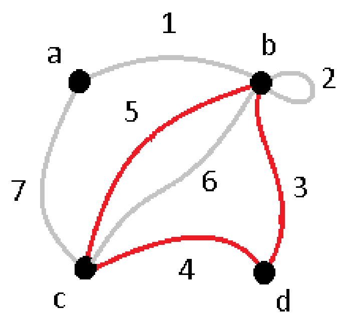


Un trajet d'Euler dans un graphe connexe G est un chemin qui rend chaque arête du graphe seule fois, (c, 7, a, 1 b, 2 b, 5 c, 6 a, b, d 3, 4, c):

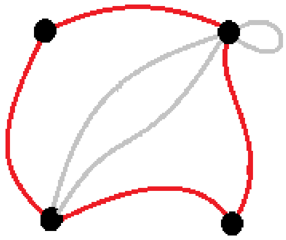


Euler a été le premier à noter que si un graphe a un seul ou plus de deux sommets de degré impair alors ne peut pas être un chemin eulérien, sinon il y a toujours (pour étudier le problème de pont de Königsberg).
Le problème de chemin d'Euler est également connu comme le problème de facteur chinois: ce qui est le plus court chemin pour aller dans toutes les rues, sans répéter?
Un cycle est un chemin d'un sommet

Par exemple (c, 5 b, d 3, 4 c) est un cycle de longueur 3



Un cycle hamiltonien dans un graphe G est un connecté un cycle qui visite chaque sommet du graphe (c exactement une fois, 7, a, 1, b, 3 d, 4, c):



Trouver cycles hamiltoniens dans un graphe arbitraire est un problème NP-complet, alors nous ne pouvons pas savoir s'il y a un cycle hamiltonien (ou non) avant la découverte (ou non) par une recherche approfondie.

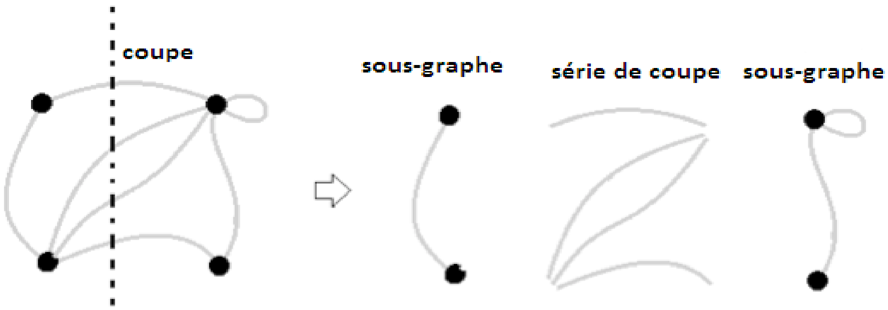
Le cycle hamiltonien de problème est également connu comme le problème de voyageur de commerce: quelle est la meilleure voie pour atteindre tous les ménages sans répéter les chemins, le retour à la maison à partir de la fin de la journée?

Un graphe est connexe s'il existe un chemin entre deux sommets.

Une coupe est une partition des sommets d'un graphe en deux sous-ensembles (disjoints dont l'union est l'ensemble de tous les sommets)

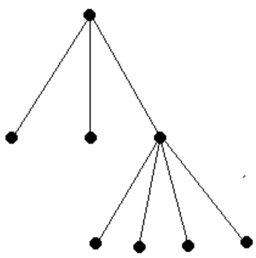
Une coupe génère deux sous-graphes déconnectés, et une coupe (coupe-set) qui est l'ensemble de tous bords dans un sommet avec un autre sous-ensemble de sommets et le deuxième sous-ensemble de la partition.

Les bords de la coupe transversale de la coupe.



Un arbre est acyclique, et relié graphe fini.

Il est habituel de représenter avec la racine aux feuilles de dessus et de dessous:



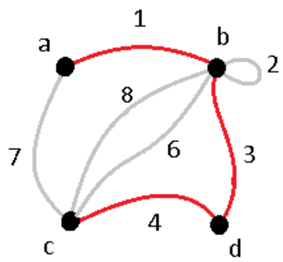
Un arbre de n sommets (nœuds) a n-1 arêtes, et souvent définit un arbre comme un graphe connexe à n sommets et n-1 arêtes.

La profondeur d'un sommet est la longueur du chemin de la racine au sommet en question.

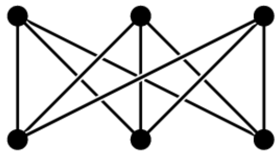
La hauteur d'un arbre est la plus grande profondeur de l'ensemble de leurs sommets.

L'arbre le plus célèbre est l'arbre binaire où chaque parent sommet a deux enfants, sommets.

Un arbre de recouvrement d'un graphique est un arbre contenant tous les sommets du graphe. Un arbre de recouvrement minimal d'un graphe pondéré est un arbre de recouvrement ayant la plus faible poids total, par exemple si le nombre d'arêtes représentent la pondération alors l'arbre de recouvrement minimal est donné par:

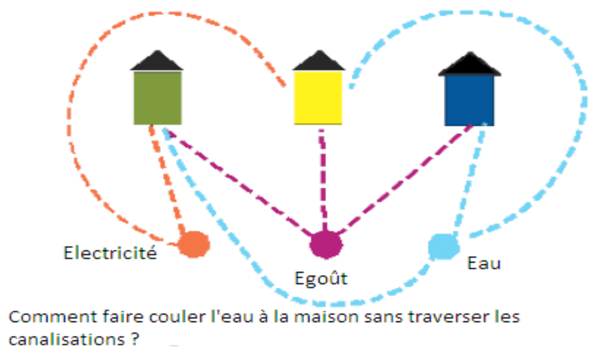


Un graphe biparti est l'ensemble des sommets peut être divisé en deux sous-ensembles et les sommets d'un même sous-ensemble sont non-adjacente.
Un graphe biparti est complète si chaque sommet de l'une des sous-ensembles est adjacent à tous les sommets de l'autre sous-ensemble.
Un graphe biparti très bien connu est



$K_{3,3}$

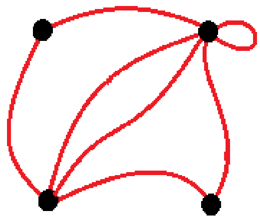
ce graphique est souvent utilisé comme un exemple de l'impossibilité de se connecter électricité, eaux usées et de l'eau et 3 maisons adjacentes, sans traverser l'une des lignes:



la formule d'Euler:
Pour un graphe fini, plane et liée à l'identité suivante (Euler):

v-a+r=2

où
v est le nombre de sommets
r est le nombre de régions
a est le nombre d'arêtes
A titre d'exemple, dans le graphique:



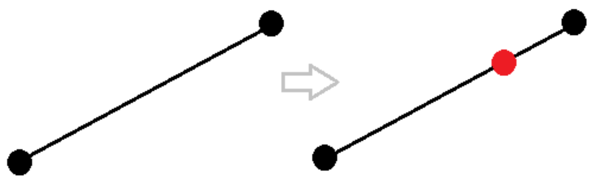
a=7,v=4∧r=5 et la formule d'Euler est titulaire: 5+2=

Un sommet est un feuille 1 a grade4-7.

Un sommet est une feuille de grade 1 a.

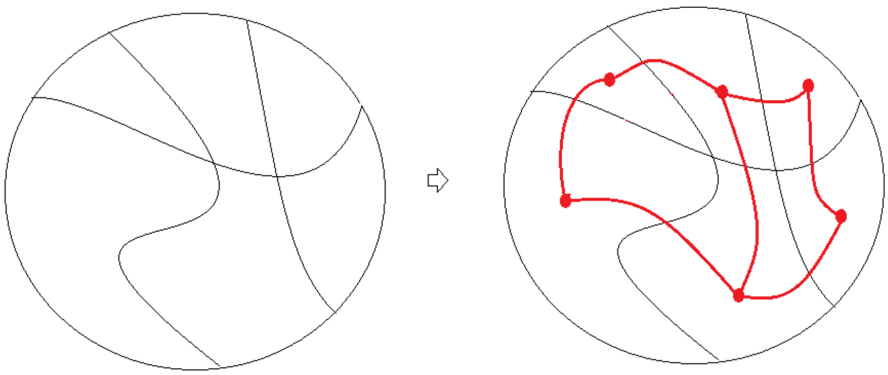
Un sommet est simple si vous avez deuxième année (un graphe si degré intérieure = degré externe = 1).

Une subdivision d'un bord élémentaire est l'introduction d'un seul sommet dans le corps de ce bord.

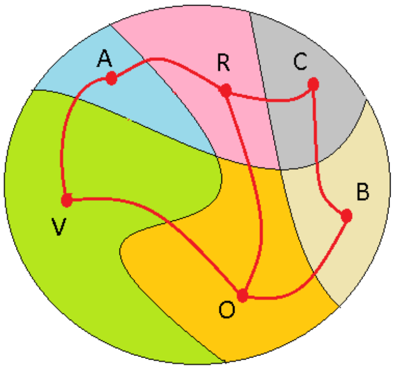


Deux graphiques sont homéomorphes si les deux peuvent être obtenus dans le même graphique comme une séquence de subdivisions élémentaires.
Théorème de Kuratowski (caractérisation des graphes non-planaires):
Un graphe est non plane, si et seulement si elle contient un sous-graphe de homomorphique ou

Une carte planaire est un plan de lotissement dans les espaces clos.
Le graphe dual d'une carte plane est obtenue en plaçant un sommet dans chaque région (privée) de la carte et un bord entre les sommets si leurs régions sont contiguës.



Réciproquement, car un graphique peut être construit à double carte correspondant.
La coloration de la carte est l'attribution d'un symbole (une couleur) à chaque sommet du graphe dual sans sommets adjacents restent dans la même couleur.



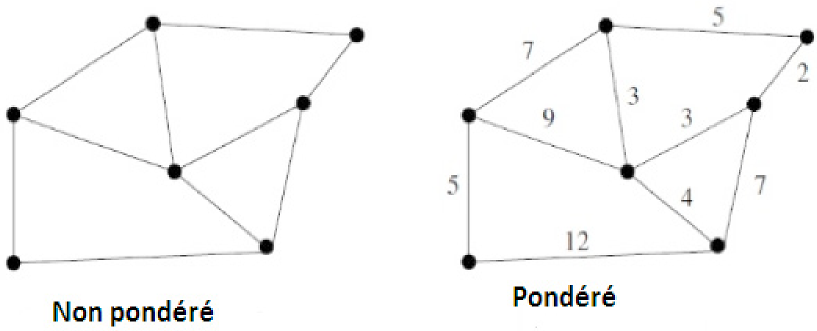
nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de symboles nécessaires pour obtenir une carte de la double coloration.

Théorème de quatre couleurs:

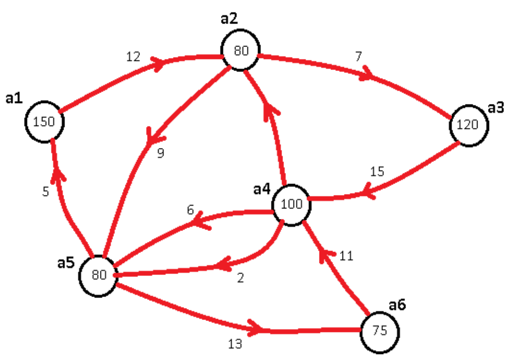
Le nombre chromatique d'un graphe simple, connecté et plane (SCP) est d'au plus 4.

Ce théorème confirme que vous ne pouvez utiliser que 4 couleurs pour colorer tout plan de la carte, si grand le nombre et la complexité des régions.

Les réseaux sont des graphes pondérés et digraphs où chaque bord et / ou le sommet a un poids attribué par une fonction de pondération: p_(A:) The→R et p_(V:) V→A:



La pesée des sommets sur un réseau est appelé capacité de stockage de vertex et la pondération des arêtes est dénommée capacité d'écoulement du edge:



réseaux de graphiques sont largement utilisés dans les problèmes de modélisation où l'on a besoin d'analyser une relation dans un ensemble V. Exemple donnée:

Conclusion :

Après avoir défini la terminologie, les concepts et la notation de base de la théorie des graphes, théorèmes de Euler et Kuratowski et graphiques ont été utilisés pour modéliser les problèmes de transport et d'affectation qui sera résolu dans l'unité suivante.

Activité 2 – Les problèmes de transport

Introduction

Cette activité est d'analyser les problèmes de transport utilisés en tant que modèles pour les produits de ruissellement provenant des différents points d'origine (l'offre) à multiples points de destination (recherche), et chaque origine à chaque destination d'un coût de transport spécifique (de réparation).
Les problèmes de transport peuvent être résolus par le Simplex ou le solveur, mais pour des problèmes avec de nombreuses variables de décision peuvent vouloir utiliser des algorithmes alternatifs:
i) de trouver une solution de base réalisable: en haut à gauche, le coût minimum ou Vogel (penalty)
ii) d'optimiser la méthode viable de solution de «tremplin» ou MODI
Diverses situations sont analysées, à savoir la facilitation de la solution quand il y a des cycles, l'existence de variables cachées et les problèmes asymétriques

Détails de l'activité

Le problème du transport est modélisé par (n) entre le point d'origine (i) et un nombre al d'être drainé à partir de chaque source, les points (m) de la cible (j) et une quantité à fournir à chaque source à un coût de transport à partir de chaque source (i) à chaque destination (j), donnée par ..

Le problème est dit équilibré lorsque le débit total de tous les centres d'origine est égale à la somme de fournir tous les centres de cibles:

$$\sum_{i}^{n} a_i = \sum_{j}^{m} b_j$$

Le problème est de minimiser le coût du transport entre les points d'origine et de destination des points.
Le problème du transport peut être formulé en tant que problème de programmation linéaire:
Variable de décision: - quantité de procéder à l'origine (i) à la destination (j)
Minimiser la fonction objectif:

$$z = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$$

sous réserve des contraintes:

$\sum_j^m x_{ij} \leq a_i, \forall i$ - ne peut pas passer de l'origine (i) plus de a_i

$\sum_i^n x_{ij} \geq b_j, \forall j$ j avoir à répondre à la demande à la destination (j) qui est b_j

$x_{ij} \geq 0$

Exemple

Envisager une production et des ventes de la compagnie des eaux de table qui produit dans trois centres de production / origine et vendre dans quatre centres de vente / de destination (B1, B2, B3). Le coût d'expédition à partir de l'origine (i) à la destination (j) est donnée par

La société est intéressé à savoir combien d'unités devraient porter l'un des centres de production pour l'un des centres de vente de minimiser les coûts de transport.
Les données sont les suivantes:

Source

$(a_1,a_2,a_3)=(12,7,10)$

Destination:

$(b_1,b_2,b_3,b_4).=(7,85,9)$

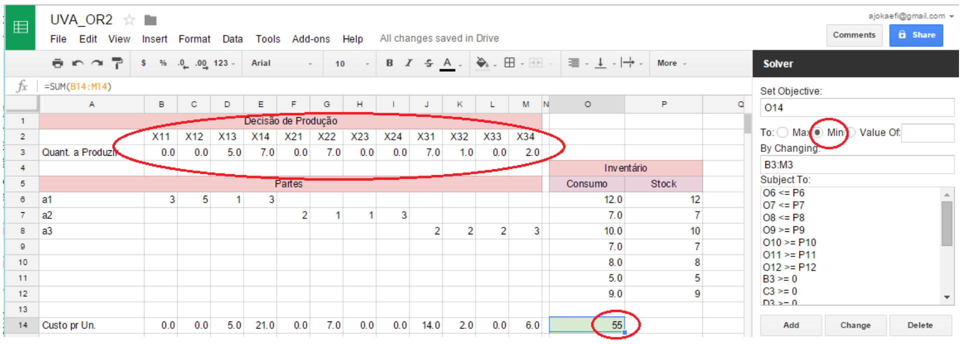
Coût de livraison, c_{ij}:

c_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1 4		2	
a_2	2 3		4	
a_3	3	2 6		3

Il y a 12 variables de décision, :

x_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
a_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
a_3	x_{31}	x_{32}	x_{31}	x_{34}

et il devient beaucoup de temps, même pour ce petit problème, utilisez le Simplexe tableau. et l'excel SOLVEUR:



on obtient la solution optimale (complet) donnée par:

$x_{11}=0, x_{12}=0, x_{13}=5, x_{14}=7$

$x_{21}=0, x_{22}=7, x_{23}=0, x_{24}=0$

$x_{31}=7, x_{32}=1, x_{33}=0, x_{34}=2$

$z=5\times1+7\times3+7\times1+7\times2+1\times2+2\times3=55$

En raison de la particularité du problème au-dessus, vous pouvez résoudre avec des alternatives plus efficaces, trouver d'abord une solution de base, puis itération à trouver la solution optimale.

1. Phase I - trouver des solutions réalisables de base avec l'une des méthodes suivantes:

la méthode de coin supérieur gauche

la méthode du coût minimum

méthode de la peine (ou Vogel)

2. Phase II - obtenir la solution optimale l'une des méthodes

méthode de tremplin

méthode MODI

Les données du problème précédent peuvent être organisées dans une table, comprenant:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1	3	12
a2	2	1	1	3	7
a3	2	2	3	3	10
Total	7	8	5	9	29=29

dans le coin supérieur gauche de chaque cellule (rouge), les frais de transport

dans la dernière colonne, la demande totale de chaque centre de vente

dans la dernière ligne, l'offre totale pour chaque centre de production

La cellule dans l'équilibre de coin en bas à droite: la demande égale à l'offre.

Le but de la méthode annoncée est une première étape pour rendre les allocations () aux cellules afin d'obtenir une solution de base réalisable (satisfaire le total de la dernière colonne et la dernière rangée) et dans une deuxième étape de recherche de la solution optimale (la plus basse valeur de la fonction objectif).
postes attribués correspondent à des positions de base des positions non affectées et de variables de décision correspondent à des positions non-base (valeurs à zéro).
Méthode du coin supérieur gauche
On commence à remplir le cadre de l'attribution de la cellule avec le «coin supérieur gauche» dans a1 de ligne et de la colonne b1.
L'offre pour a1 est 12 et b1 recherche 7.
Puis la cellule a1 x b1 peut recevoir au maximum 7 juste de l'offre de la a1 12-7 = 5 et la recherche de la b1 7-7 = 0. Comme colonne de la demande b1 a été épuisé, les cellules restantes de la colonne sont bloqués (gris) et les valeurs totales de la ligne et la colonne sont ajustés en conséquence:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 7	5	1	3	5
a2	2	1	1	3	7
a3	2	2	3	3	10
Total	0	8	5	9	

Et comme l'A1 de la ligne d'alimentation est pas encore épuisé, vous allez à la b2 de la colonne où 5
unités restantes de a1 seront utilisés et la demande de b2
est réduite à 8-5 = 3. Le a1 lignée cellulaire restant, ils sont bloqués:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 7	5 5	1	3	0
a2	2	1	1	3	7
a3	2	2	3	3	10
Total	0	3	5	9	

Conformément demande de b2 est convaincu, sur l'A2 de la ligne et l'offre a diminué de 7-3 = 4. Les cellules restantes sont bloqués dans la colonne b2:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 7	5 / 5	1	3	0
a2	2	1 / 3	1	3	4
a3	2	2	3	3	10
Total	0	0	5	9	

A2 ligne d'alimentation n'a pas encore épuisé, vous allez à la b3 de la colonne où 4 unités restantes de a2 seront utilisés et la demande de b2 est réduite à 5-4 = 1. La lignée cellulaire restante de a2 sont bloqués:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 7	5 / 5	1	3	0
a2	2	1 / 3	1 / 4	3	0
a3	2	2	3	3	10
Total	0	0	1	9	

Sur la ligne de la demande de b3 est convaincu, sur l'A3 de ligne et une diminution de l'approvisionnement en 1.10 = 9

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 7	5 / 5	1	3	0
a2	2	1 / 3	1 / 4	3	0
a3	2	2	3 / 1	3	9
Total	0	0	0	9	

Enfin, dans la ligne de la cellule A3 et la colonne offre et la demande sont égales b4:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 7	5 / 5	1	3	0
a2	2	1 / 3	1 / 4	3	0
a3	2	2	3 / 1	3 / 9	0
Total	0	0	0	0	

Les résultats de processus dans une solution basique avec 6 allocations possibles:

z = 73 + 55 + 31 + 41 + 13 + 93 = 83

mais nous ne savons pas si cette solution est la bonne.

Procédé de coût minimum

Dans le procédé de coût minimal, au lieu de partir du haut à gauche, la procédure commence à la cellule qui a le coût le plus bas. Dans le cas d'égalité, le choix est arbitraire entre le coût inférieur.

Le choix d'un a1 lignée cellulaire et la colonne b2 dont le coût d'expédition est 1 et exécutant les mêmes procédures et de la demande de réduction de l'offre, on obtient:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 / 5	3	7
a2	2	1	1	3	7
a3	2	2	3	3	10
Total	7	8	0	9	

A2 lignée cellulaire et la colonne b2 avec les coûts de transport 1:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 / 5	3	7
a2	2	1 / 7	1	3	0
a3	2	2	3	3	10
Total	7	1	0	9	

Le a3 lignée cellulaire et la colonne b2 avec les coûts de transport 2:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 / 5	3	7
a2	2	1 / 7	1	3	0
a3	2 / 7	2	3	3	3
Total	0	1	0	9	

Le a1 lignée cellulaire et la colonne b4 avec les coûts de transport 3:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 5	3	7
a2	2	1 7	1	3	0
a3	2 7	2 1	3	3	2
Total	0	0	0	9	

La cellule de la a1 de ligne et colonne b4 avec les coûts de transport 3:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 5	3 7	0
a2	2	1 7	1	3	0
a3	2 7	2 1	3	3	2
Total	0	0	0	2	

et la cellule d'extrémité de la rangée a3and colonne b4 avec un coût de transport 2:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 5	3 7	0
a2	2	1 7	1	3	0
a3	2 7	2 1	3	3 2	0
Total	0	0	0	0	

Les résultats du processus dans une solution de base avec 6 affectations:

Z51 + 73 + 71 + 72 + 12 + 23 = 55

mais ne sait pas encore si elle est la solution optimale.

Cette méthode ressemble à la position minimale de coût à chaque itération et donc la solution de base trouvé est mieux que le coin supérieur gauche de la méthode qui utilise les positions ne prédéterminés.

Méthode de sanctions (ou In Vogel)

Dans chaque rangée (et dans chaque colonne) si vous ne pouvez pas allouer toute demande ou toute offre à la position de coût minimum, et s'il y a une autre cellule avec le même coût sur la même ligne (ou la même colonne), il y aura une augmentation la fonction objectif, à savoir une pénalité.

Le procédé commence à une position de moindre coût, par exemple

Calcule la peine maximale dans chaque ligne et chaque colonne et tente de les éviter:

	b1	b2	b3	b4	Total	Pénalité
a1	3	5	1 5	3	7	+2
a2	2	1	1	3	7	0
a3	2	2	3	3	10	0
Total	7	8	0	9		
Pénalité	0	+1	0	0		

Dans une ligne 1 si la demande ou l'offre ne correspond pas tout dans la cellule à moindre coût   puis la cellule suivante dans cette ligne avec le coût le plus bas est   ou et le coût de réparation est 3-1 = +2

Conformément a2 le coût le plus bas est cellules 1 à deux, alors il ne convient pas à tous dans une cellule est adaptée à une autre au même coût, le coût de réparation est 0, et en continuant de cette façon sont calculées les pénalités pour toutes les lignes et colonnes. Identifie la ligne (ou colonne) de pénalité majeure et attribue la valeur maximale possible de l'offre ou de la demande dans la cellule à moindre coût   cette ligne (ou colonne), le total mis en place, bloquent les cellules interdites et recalculer à nouveau les sanctions:

	b1	b2	b3	b4	Total	Pénalité
a1	3	5	1 5	3	7	0
a2	2	1 7	1	3	0	+1
a3	2	2	3	3	10	0
Total	7	1	0	9		
Pénalité	0	+1	0	0		

Le plus grand peine est +1 et se produit dans la deuxième rangée et la 2ème colonne. Le choix de tout, dans ce cas, la 2e ligne, alloue le montant maximal de l'offre ou de la demande de la cellule de moindre coût (a2, b2) de cette ligne (ou colonne), le total est réglé, les cellules ont été d'îlot interdites et recalculer le nouvelles sanctions:

	b1	b2	b3	b4	Total	Pénalité
a1	3	5	1 / 5	3	7	0
a2	2	1 / 7	1	3	0	0
a3	2	2 / 1	3	3	9	0
Total	7	0	0	9		
Pénalité	+1	+3	0	0		

Le plus grand peine est +3 et se produit dans la 2ème colonne. Alloue la valeur maximale possible de l'offre ou la demande à la cellule de coût le plus bas (a3, b2) de cette colonne, le total est réglé, bloquer les cellules interdits et calculer les nouvelles sanctions:

	b1	b2	b3	b4	Total	Pénalité
a1	3	5	1 / 5	3	7	0
a2	2	1 / 7	1	3	0	0
a3	2 / 7	2 / 1	3	3	2	+1
Total	0	0	0	9		
Pénalité	+1	0	0	0		

Le plus grand peine est +1 et se produit dans la première colonne. Alloue la valeur maximale possible de l'offre ou la demande à la cellule de coût le plus bas (a3, b1) de cette colonne, le total est réglé, bloquer les cellules interdits et calculer les nouvelles sanctions:

	b1	b2	b3	b4	Total	Pénalité
a1	3	5	1 / 5	3 / 7	0	0
a2	2	1 / 7	1	3	0	0
a3	2 / 7	2 / 1	3	3	2	0
Total	0	0	0	2		
Pénalité	0	0	0	0		

Les sanctions sont tous nuls, vous choisissez l'une des lignes ou des colonnes manquantes (a le même coût que les sanctions sont nuls), attribue la valeur maximale possible de l'offre ou la demande à la cellule la moins chère (A1, b4) de cette ligne, le total set-up, bloquer les cellules interdites et recalculer à nouveau les sanctions:

	b1		b2		b3		b4		Total	Pénalité
a1	3		5		1	5	3	7	0	0
a2	2		1	7	1		3		0	0
a3	2	7	2	1	3		3	2	0	0
Total		0		0		0		0		
Pénalité	0		0		0		0			

Les résultats de processus d'une base allocations de solution réalisable 6:

Z=51 + 73 + 71 + 72 + 12 + 23 = 55

mais ne sait pas encore si elle est la solution optimale.

Parce que cette méthode utilise non seulement la demande à la position de coût minimum dans chaque itération, mais aussi la peine, il est prévu que la solution de base trouvé d'être meilleur que la méthode du coût minimal ou le coin supérieur gauche.

Série alternatif (série)

En ce qui concerne la répartition ci-dessus, considérons un graphe dont les sommets sont affectés à toutes les positions (position de base), et où les bords correspondent à toutes les connexions verticales et horizontales entre les sommets.

Un cycle alterné (à partir de maintenant que le cycle) est un chemin qui se fait le déplacement entre deux sommets adjacents, verticalement ou horizontalement en alternance, en commençant et se terminant dans la même cellule.

Soit (n) le nombre de points d'origine et de (m) le nombre de points de destination.

Cycles peuvent être encore inférieur à m + n-1 cadre allocations dans les cellules, mais avec plus de m + n-1 allocations est inévitable qu'il y ait au moins un cycle.

Cas inférieur à m + n-1 cycles sans allocations correspond à dégénérer solutions avec des positions de base remplis de 0 (variable cachée).

Les trois méthodes de 1ère étape assurer une solution réalisable de base sans cycles, à savoir, les variables pas cachés.

L'existence de cycles réduit le nombre d'allocations.

Exemple

Prenons l'exemple d'une solution viable avec la valeur suivante de la fonction objectif:

z = 41 + 33 + 53 + 31 + 43 + 42 + 52 + 13 = 64

8 allocations (de base variable), puis, avec plusieurs cas de différents cycles:

1er cas

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 / 4	3 / 5	0
a2	2	1 / 3	1	3 / 4	0
a3	2 / 4	2 / 5	3 / 1	3	0
Total	0	0	0	0	

ou un 2ième cas:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 / 4	3 / 5	0
a2	2	1 / 3	1	3 / 4	0
a3	2 / 4	2 / 5	3 / 1	3	0
Total	0	0	0	0	

ou un 3ième cas:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 / 4	3 / 5	0
a2	2	1 / 3	1	3 / 4	0
a3	2 / 4	2 / 5	3 / 1	3	0
Total	0	0	0	0	

Afin de réduire le nombre d'allocations, par exemple dans le troisième cas, la valeur la plus basse (1) de l'apex de la boucle peut être alternativement ajoutée et soustraite de tous les sommets du cycle:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 +1 / 4	3 -1 / 5	0
a2	2	1 -1 / 3	1	3 +1 / 4	0
a3	2 / 4	2 +1 / 5	3 -1 / 1	3	0
Total	0	0	0	0	

et ainsi annuler la valeur de la cellule (a3, b3), sans affecter la demande totale (colonnes) ou électrique (lignes) et en réduisant le nombre d'allocations 8-7:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 / 5	3 / 4	12
a2	2	1 / 2	1	3 / 5	7
a3	2 / 4	2 / 6	3 / 0	3	10
Total	7	8	5	9	

Dans ce cas, il est encore possible de réduire le nombre d'allocations parce que la solution de base qui a toujours été le cycle 7 allocations.

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 3	5	1 / 5	3 / 4	12
a2	2	1 / 2	1	3 / 5	7
a3	2 / 4	2 / 6	3	3	10
Total	7	8	5	9	

Soustrayant et en ajoutant la valeur minimale du cycle de sommets (2), on obtient:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 5	5	1 / 5	3 / 2	12
a2	2	1 / 0	1	3 / 7	7
a3	2 / 2	2 / 8	3	3	10
Total	7	8	5	9	

qui est une solution de base avec 3 + 4-1 = 6 allocations et avec une valeur de la fonction objectif différent:

z = 51 + 53 + 23 + 73 + 22 + 82 = 67

Il en conclut que l'ajout et la soustraction des valeurs aux sommets d'un cycle modifie la valeur de la fonction objectif, mais ne modifie pas la demande globale et d'approvisionnement.

La méthode de tremplin

La méthode de tremplin fait usage de la constatation faite dans le dernier paragraphe: la valeur de la fonction objectif peut être modifié (optimisé) sans modifier la demande globale et l'offre, l'introduction de cycles et en ajoutant / soustrayant des valeurs aux sommets de ces cycles.

Exemple:
Comment optimiser la solution de base de 3 + 4-1 = 6 allocations et z = 67 trouvé dans l'exemple précédent?

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 / 5	5	1 / 5	3 / 2	12
a2	2	1 / 0	1	3 / 7	7
a3	2 / 2	2 / 8	3	3	10
Total	7	8	5	9	

Si ce ne sont pas la solution optimale, puis quelques-unes des positions non alloués doivent être consacrés!
En commençant par la première cellule est pas attribué, (a1, b2), l'algorithme «tremplin» calcule chaque position à laquelle la variation non alloué de la fonction objectif est entrée si (+1) appareil en position.
Pour ne pas affecter la demande globale et l'offre devra être ajoutés et supprimés dans un des sommets du cycle d'entraînement créés avec cette nouvelle entrée:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 -1 / 5	5 / +1	1 / 5	3 / 2	12
a2	2	1	1	3 / 7	7
a3	2 +1 / 2	2 -1 / 8	3	3	10
Total	7	8	5	9	

Pour calculer la variance de la fonction objectif résultant d'une addition / soustraction d'une unité dans le cycle de sommets créés, il suffit d'ajouter / soustraire les coûts dans les cellules des sommets respectifs:

+ 5-2 + 2-3 = 2
Autrement dit, la fonction objectif (+2) augmente avec l'addition / moins une unité au niveau des sommets du cycle créé.
Le calcul de la variation de la fonction objectif dans les autres cellules non allouée est obtenu:

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	3		5	+2	1		3		
		5				5		2	12
a2	2	-1	1	-2	1	0	3		
								7	7
a3	2		2		3	3	3	1	
		2		8					10
Total		7		8		5		9	

Est cellule choisie (a2, b2) avec des variations mineures (-2) et cherche la valeur maximale (θ) qui peut être introduit dans cette cellule sans obtenir entrées négatives analyser le cycle qui a donné lieu à cette variation:

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	3	$-\theta$	5		1		3	$+\theta$	
		5				5		2	12
a2	2		1		1		3	$-\theta$	
				$+\theta$				7	7
a3	2	$+\theta$	2	$-\theta$	3		3		
		2		8					10
Total		7		8		5		9	

Le montant maximal de θ qui ne se traduit pas par des entités négatives est déterminée par la cellule donné par .

Remplacement θ = 5 pour tous les sommets des résultats du cycle indiqué dans une nouvelle base admissible

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	3		5		1		3		
						5		7	12
a2	2		1		1		3		
				5				2	7
a3	2		2		3		3		
		7		3					10
Total		7		8		5		9	

La valeur de la fonction objectif subit une variation de z = (- 2) (5) = -10, qui est causée par l'augmentation de la variation d'une unité, multiplié par (unités).
Calcul de la nouvelle valeur de la fonction objectif, on obtient:
z = 51 + 73 + 51 + 23 + 72 + 32 = 57
Comme ne sait toujours pas si cette solution est bonne, le processus est répété.
Le calcul de la variation de la fonction objectif pour l'ajout / retrait d'une unité sur l'ensemble des cellules non alloués est obtenu:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 +2	5 +4	1 5	3 7	12
a2	2 +1	1 5	1 0	3 2	7
a3	2 7	2 3	3 +1	3 -1	10
Total	7	8	5	9	

Est la cellule (A3, B4) avec moins de variation (-1) choisi et analyses du cycle qui a donné lieu à cette variation:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 5	3 7	12
a2	2	1 +θ 5	1	3 −θ 2	7
a3	2 7	2 −θ 3	3	3 +θ	10
Total	7	8	5	9	

La valeur maximale qui ne conduit pas à des entrées négatives est déterminée par la cellule (a2, b4), étant donné byθ = 2.
Remplacement thetav = 2 tous les sommets des résultats de cycle indiquées dans une nouvelle solution de base:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3	5	1 5	3 7	12
a2	2	1 7	1	3	7
a3	2 7	2 1	3	3 2	10
Total	7	8	5	9	

La valeur de la fonction objectif subit une variation de z = (- 1) (2) = -2, qui est la variation due à l'augmentation d'une unité, multiplié par (theta) unités.
Calcul de la nouvelle valeur, on obtient:
z = 51 + 73 + 71 + 72 + 12 + 23 = 55

Pour l'instant, il est difficile de savoir si cette solution est grande, répéter le processus.
Le calcul de la variation de la fonction objectif pour l'ajout / retrait d'une unité sur l'ensemble des cellules non alloués est obtenu:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	3 +1	5 +3	1 5	3 7	12
a2	2 +1	1 7	1 +1	3 +1	7
a3	2 7	2 1	3 +2	3 2	10
Total	7	8	5	9	

Il est à noter que tout changement dans les résultats de cellules non alloués à une augmentation de la fonction objectif, la valeur optimale a été atteint et le processus se termine. La solution optimale est donnée par:

x11=0, x12=0, x13=5, x14=7

x21=0, x22=7, x23=0, x24=0

x31=7, x32=1, x33=0, x34=2

z = 51 + 73 + 71 + 72 + 12 + 23 = 55

Variable Cachée

Si la solution de base est dégénéré alors il y a moins de m + n-1 les allocations et les variables cachées.
Pour surmonter ce problème, est-ce une allocation d'une petite valeur «petit epsilon (ε)» à une cellule non-base et procède à l'itération jusqu'à ce que la solution de base admissible cesse d'être dégénérée, si possible.
le «petit epsilon» (ε) est une valeur ajouté ou soustrait un nombre réel différent de zéro, ce nombre ne change pas: un ± ε = a

Exemple

A titre d'exemple, considérons un problème de transport avec les données suivantes:
Origine:

(a_1,a_2,a_3)=(40,60,50)

Destination:

(b_1,b_2,b_3,b_4)=(20,30,50,50)

Coût de transport:

c_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	4	6	8	8
a_2	6	8	6	7
a_3	5	7	6	8

En utilisant le coin supérieur gauche de la méthode est une solution réalisable de base:

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	4		6		8		8		
		20		20					0
a2	6		8		6		7		
				10		50			0
a3	5		7		6		6		
								50	0
Total		0		0		0		0	

Toutefois, cette solution de base est dégénérée comme il a seulement cinq allocations à la place de n + m = 3-1 + 4-1 = 6.
L'application de tremplin il semble que le cycle pour augmenter la cellule avec , mais pas la cellule :

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	4		6		8	+4	8		
		20		20				+1	0
a2	6		8		6		7		
				10		50			0
a3	5		7		6		6		
		?		?				50	0
Total		0		0		0		0	

À l›aide «petit epsilon» (ε) dans une position et un cycle fermé, il devient possible de calculer la variation Az = + 8-6 + 7-6 = 3:

	b1		b2		b3		b4		Total
a1	4		6		8	+4	8	+3	
		20		20					0
a2	6		8		6		7		
				10		50			0
a3	5		7		6		6		
				ε				50	0
Total		0		0		0		0	

Habituellement, jusqu'à se poursuit jusqu'à la cellule où nous devons utiliser le «petit epsilon» (ε) à nouveau:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 20	6 20	8 +4	8 +3	0
a2	6 0	8 10	6 50	7 +1	0
a3	5	7	6 ε	6 50	0
Total	0	0	0	0	

Continue de cette manière est le cadre du «tremplin»:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 20	6 20	8 +4	8 +3	0
a2	6 0	8 10	6 50	7 +1	0
a3	5 0	7 -1	6 +1	6 50	0
Total	0	0	0	0	

Est cellule choisie avec des variations mineures (-1) et des analyses du cycle qui a donné lieu à cette variation:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 20	6 20	8 +4	8 +3	0
a2	6 0	8 -θ 10	6 +θ 50	7 +1	0
a3	5 0	7 -1 +θ	6 +1 -θ ε	6 50	0
Total	0	0	0	0	

La valeur maximale qui ne conduit pas à des entrées négatives est déterminée par la cellule (a3, b3) est donnée par θ=ε.

Remplacement de tous les sommets des résultats du cycle indiqué dans une nouvelle solution de base:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 (20)	6 (20)	8	8	0
a2	6	8 (10)	6 (50)	7	0
a3	5	7 (ε)	6	6 (50)	0
Total	0	0	0	0	

Notez que le «petit epsilon» simplement passés de la cellule à une cellule .

Dans la nouvelle position, «petit epsilon» permet le calcul direct de la variation pour chaque augmentation d'une unité dans des positions non alloués et la détermination conséquente du cadre du «tremplin»:

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 (20)	6 (20)	8 (+4)	8 (+3)	0
a2	6 (0)	8 (10)	6 (50)	7 (0)	0
a3	5 (0)	7 (ε)	6 (+1)	6 (50)	0
Total	0	0	0	0	

Toutes les variations sont positives et le «petit epsilon» reste sur la table!
Signifie «une» valeur optimale de la fonction objectif est obtenu avec seulement 5 allocations, une position dégénérée:

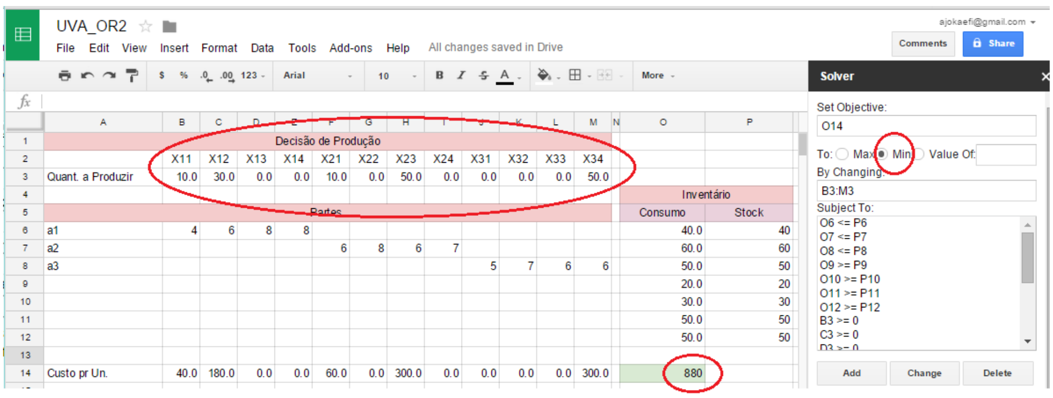
$$x_{11}=20, x_{12}=20, x_{13}=0, x_{14}=0$$

$$x_{21}=0, x_{22}=10, x_{23}=50, x_{24}=0$$

$$x_{31}=0, x_{32}=\varepsilon=0, x_{33}=0, x_{34}=50$$

$$z=20\times4+20\times6+10\times8+50\times6+50\times6=880$$

Pour confirmer les résultats, faire usage du solveur «feuilles Google»:



où l'on trouve une solution optimale dans des positions différentes mais ayant la même valeur de la fonction objectif (!):

$$x_{11}=10, x_{12}=30, x_{13}=0, x_{14}=0$$

$$x_{21}=10, x_{22}=0, x_{23}=50, x_{24}=0$$

$$x_{31}=0, x_{32}=\varepsilon=0, x_{33}=0, x_{34}=50$$

$$z=10\times4+30\times6+10\times6+50\times6+50\times6=880$$

Ce cas indique la grande existence alternatifs, qui est, deux ensembles différents de variables de décision avec le même grande valeur de la fonction objectif.
L'existence de trois zéros dans le «tremplin» indique ce fait: si l'attribution est faite à l'une des cellules contenant zéro, la fonction objectif ne change pas!
Par exemple, si nous faisons une affectation à la cellule , et on procède à une nouvelle itération.

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 -θ 20	6 +θ 20	8	8	0
a2	6 +θ	8 -θ 10	6 50	7	0
a3	5	7 ε	6	6 50	0
Total	0	0	0	0	

et le remplacement de la valeur des sommets :

	b1	b2	b3	b4	Total
a1	4 10	6 30	8	8	0
a2	6 10	8	6 50	7	0
a3	5	7	6	6 50	0
Total	0	0	0	0	

Nous trouvons la valeur exacte donnée par le solveur.
méthode MODI (distribution modifiée)
Pour calculer les positions ayant le plus grand impact sur la fonction objectif, la méthode MODI utilise les variables d'écart primales et duales à où:

Donc, aussi appelée méthode ST, méthode d'UV ou de la méthode LK, comme le nom donné à des variables d'écart primal et dual.
Procédé MODI suit la procédure suivante:

calcule, pour tous les postes attribués, les valeurs de et de telle sorte que

calcule, pour les postes non attribués, la valeur de

incrémente la cellule avec la valeur la plus faible   et calculer la valeur maximale de ⍰ admise pour les valeurs des sommets du cycle résultant

ajoute que tout cycle de sommets pour une réduction de la valeur de la fonction objectif.

Exemple

Considérons un problème de transport avec les données suivantes:

Origin:

(a_1,a_2,a_3,a_4)=(10,30,25,35)

Destination:

(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(10,15,20,25,30)

Coût transport :

c_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	7	2	9	4	3
a_2	6	5	5	7	4
a_3	5	5	3	4	5
a_4	5	5	5	4	2

Appliquer le coin supérieur gauche de la méthode, on obtient une solution de base réalisable avec 7 allocations (pas plus de 4 + 5-1 = 8 affectations) et sans cycles:

		t1 =		t2 =		t3 =		t4 =		t5 =		total
s1 =	0	7		2		9		4		3		
			10									0
s2 =		6		5		5		7		4		
					15		15					0
s3 =		5		5		3		4		5		
							5		20			0
s4 =		5		5		5		4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

où l'en-tête a été préparé pour le calcul s〖_i〗 et t〖_j〗, initialiser la position s〖_1〗=0.

Les postes attribués (non nulle de base), en commençant par le coin supérieur gauche de calculer toutes les valeurs de s〖_i〗 andt〖_j〗 de manière à satisfaire à l'équation s〖_i〗+t〖_j〗=c〖_ij〗 pour tous les valeurs de s i=1,...,m(n°lines),j=1,...,n(n°columns).

Par exemple, dans la cellule (a〖_1〗b〖_1〗) ou la valeur calculée facilement t〖_1〗

0+t〖_1〗=7 logo t〖_1〗=7

Quand il y a des m + n-1 = 4 + 5-1 = 8 allocations sans cycles est atteint d'obtenir toutes les valeurs de s⟦_i⟧ and t⟦_j⟧.

Mais dans ce cas, nous avons une répartition moins, qui est une variable cachée, et il doit y avoir un "petit epsilon" (ε) de continuer à calculer s⟦_i⟧ et t⟦_j

		t1 =	7	t2 =		t3 =		t4 =		t5 =		total
s1 =	0	7		2		9		4		3		
			10									0
s2 =		6		5		5		7		4		
			Є		15		15					0
s3 =		5		5		3		4		5		
							5		20			0
s4 =		5		5		5		4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

Il peut être calculé en utilisant maintenant s⟦_2⟧, s⟦_2⟧+t⟦_1⟧=6 i.e s⟦_2⟧+7=6, then s⟦_2⟧=-1 (À noter que les valeurs des variables d'écart primal et dual peuvent être négatives) et tous les autres déjà eux-mêmes s⟦_i⟧ and t⟦_j⟧ peut être calculée:

		t1 =	7	t2 =	4	t3 =	4	t4 =	5	t5 =	3	total
s1 =	0	7		2		9		4		3		
			10									0
s2 =	-1	6		5		5		7		4		
			Є		15		15					0
s3 =	-1	5		5		3		4		5		
							5		20			0
s4 =	-1	5		5		5		4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

Dans les positions non alloués (non-base), est calculé :

		t1 =	7	t2 =	4	t3 =	4	t4 =	5	t5 =	3	total
s1 =	0	7		2	**-2**	9	**5**	4	**-1**	3	**0**	
			10									0
s2 =	-1	6		5		5		7	**3**	4	**2**	
			Є		15		15					0
s3 =	-1	5	**-1**	5	**2**	3	**0**	4		5	**3**	
							5		20			0
s4 =	-1	5	**-1**	5	**2**	5	**2**	4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

Prenez la cellule avec la valeur négative plus petite , un cycle est créé (en utilisant le «petit epsilon» si nécessaire), et augmente jusqu'à une valeur qui ne rend pas toute valeur négative dans les sommets du cycle cellulaire:

		t1 =	7	t2 =	4	t3 =	4	t4 =	5	t5 =	3	total
s1 =	0	7	-θ	2	-2	9	5	4	-1	3	0	
			10		+θ							0
s2 =	-1	6	+θ	5	-θ	5		7	3	4	2	
			ε		15		15					0
s3 =	-1	5	-1	5	2	3	0	4		5	3	
							5		20			0
s4 =	-1	5	-1	5	2	5	2	4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

Ou maximum ne donnant pas lieu à des entrées négatives il est déterminé par la cellule, et donnée par .En remplaçant tous les sommets du cycle indiqué, résultant en une nouvelle solution de base (à noter que le «petit epsilon» a disparu, peut ou non retourner dans les itérations suivantes):

		t1 =		t2 =		t3 =		t4 =		t5 =		total
s1 =	0	7		2		9		4		3		
					10							0
s2 =		6		5		5		7		4		
			10		5		15					0
s3 =		5		5		3		4		5		
							5		20			0
s4 =		5		5		5		4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

La prochaine itération, les étapes en omettant, résultats:

		t1 =	3	t2 =	2	t3 =	2	t4 =	3	t5 =	1	total
s1 =	0	7	4	2		9	7	4	1	3	2	
					10							0
s2 =	3	6		5		5		7	1	4	0	
			10		5		15					0
s3 =	1	5	1	5	2	3		4		5	3	
							5		20			0
s4 =	1	5	1	5	2	5	2	4		2		
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

Etant donné que toutes les valeurs sont non-négatif, la procédure se termine.
La valeur optimale de la fonction objectif est la suivante:

$z=10\times2+10\times+6+5\times5+15\times5+5\times3+20\times4+5\times4+30\times2=355$

Atteint un excellent point:

$x_{11}=0, x_{12}=10, x_{13}=0, x_{14}=0, x_{15}=0$

$x_{21}=10, x_{22}=5, x_{23}=15, x_{24}=0, x_{25}=0$

$x_{31}=0, x_{32}=0, x_{33}=5, x_{34}=20, x_{35}=0$

$x_{41}=0, x_{42}=0, x_{43}=0, x_{44}=5, x_{45}=30$

Il apparaît un 0 dans la cellule (a2, b5) il y a excellente alternative et ainsi le regard que nous voulons, nous faisons une autre itération augmentant la cellule:

		t1 =	3	t2 =	2	t3 =	2	t4 =	3	t5 =	1	total
s1 =	0	7	4	2		9	7	4	1	3	2	
					10							0
s2 =	3	6		5		5	-θ	7	1	4	0	
			10		5		15				+θ	0
s3 =	1	5	1	5	2	3	+θ	4	-θ	5	3	
							5		20			0
s4 =	1	5	1	5	2	5	2	4	+θ	2	-θ	
									5		30	0
total			0		0		0		0		0	

La valeur de , qui a été remplacé sur les sommets du cycle résultats dans:

		t1 =	3	t2 =	2	t3 =	2	t4 =	3	t5 =	1	total
s1 =	0	7	4	2		9	7	4	1	3	2	
					10							0
s2 =	3	6		5		5		7	1	4	0	
			10		5						15	0
s3 =	1	5	1	5	2	3		4		5	3	
							20		5			0
s4 =	1	5	1	5	2	5	2	4		2		
									20		15	0
total			0		0		0		0		0	

avec la même grande valeur de la fonction objectif:

$z=10\times2+10\times6+5\times5+10\times4+20\times35\times4+20\times4+15\times2=355$

mais a atteint un optimum de remplacement:

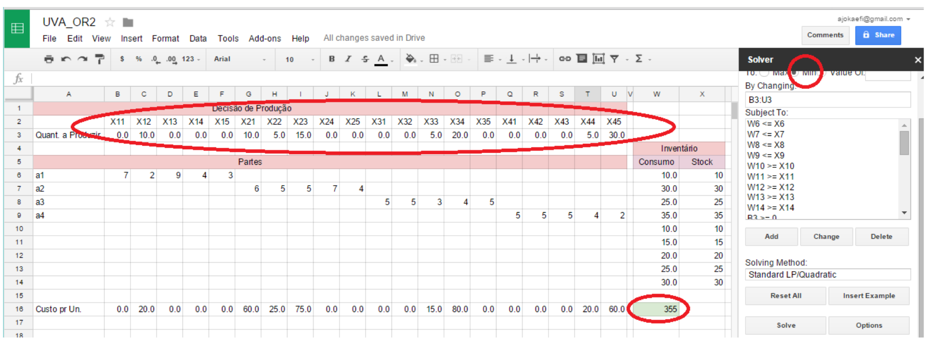
$x_{11}=0, x_{12}=10, x_{13}=0, x_{14}=0, x_{15}=0$

$x_{21}=10, x_{22}=5, x_{23}=0, x_{24}=0, x_{25}=15$

$x_{31}=0, x_{32}=0, x_{33}=20, x_{34}=5, x_{35}=0$

$x_{41}=0, x_{42}=0, x_{43}=0, x_{44}=20, x_{45}=15$

Seulement pour la vérification, en utilisant le solveur à ce problème, on obtient le même résultat:



problèmes asymétriques
Dans les cas où l'offre totale est différent du problème de recherche est dit être déséquilibré.
Si la demande est supérieure à l'offre ajoute jusqu'à un point de la demande qui absorbe la différence artificielle.
Si l'offre dépasse la demande ajoute un point de l'offre qui absorbe la différence artificielle.
Les coûts de transport des bords qui relient des points artificiels d'autres points est égal à zéro, et donc le transport de points artificiels et ne portent pas atteinte à la fonction objectif.
Avec ces points artificielle de l'offre ou de la demande, est résolu le problème général avec les méthodes énumérées ci-dessus.
Dans la solution finale, il est nécessaire d'envisager deux cas:

les quantités destinées à la recherche du point artificielle sont stockés dans ses origines;
provenientes les montants du point de l'offre fictive fait défaut en quantité reçu les destinations.

Conclusion

Cette activité a été analysé les problèmes de transport utilisés en tant que modèles pour les produits de ruissellement provenant des différents points d'origine (l'offre) à multiples points de destination (recherche), et chaque origine à chaque destination d'un coût de transport spécifique (de réparation).
Les problèmes de transport peuvent être résolus par le Simplex ou le solveur, mais pour des problèmes avec de nombreuses variables de décision peuvent vouloir utiliser des algorithmes alternatifs:
i) de trouver une solution de base réalisable: en haut à gauche, le coût minimum ou Vogel (penalty)
ii) d'optimiser la méthode viable de solution de «tremplin» ou MODI
Plusieurs situations ont été analysées, à savoir la facilitation de la solution quand il y a des cycles, l'existence de variables cachées et les problèmes asymétriques.

Activité 3 – Le problème d'affectation

Introduction

Le problème d'affectation est un problème de transport avec la contrainte supplémentaire que chaque destination ne peut correspondre à une seule source et vice versa.
Cette restriction supplémentaire est facile à poser le problème de la représentation par des graphiques, il y a donc des algorithmes alternatifs, à savoir l'algorithme hongrois pour résoudre les problèmes d'affectation.

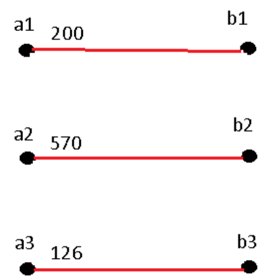
Détails de l'activité:

Le problème d'affectation est un problème de transport avec la contrainte supplémentaire que chaque destination ne peut correspondre à une seule source et vice versa, d'où le nombre d'origines et les destinations sont égaux.
Une situation où ce problème se produit est lors de l'attribution des tâches ou attribution des marchés, de même aussi appelé problème de l'attribution ou de la sentence.
Considérons le problème déjà décrit l'unité précédente:
Une agence des Travaux publics a lancé un appel d'offres pour la construction de m = 3

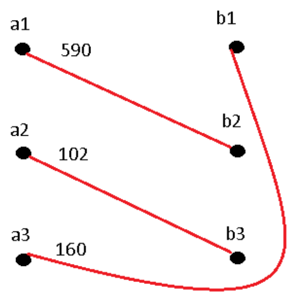
des ponts et n = 3 entrepreneurs ont participé et tous ont proposé un prix , (Penalty) pour la construction de chaque pont:

	b1	b2	b3
a1	200	590	120
a2	250	570	102
a3	160	610	126

Pour minimiser les risques, l'Agence des Travaux publics envisage d'attribuer un pont à chaque entreprise et souhaite minimiser le montant total de la sentence.
Dans ce cas, une solution de base se compose de
3 sous-graphes débranché, par exemple



Il est une solution viable = 896
Il existe d'autres solutions viables, par exemple:



est aussi une base possible solution z = 852.

Quelle est la solution optimale?

Congé m le nombre de points d'origine (offre) et n le nombre de points de destination (la demande).

La formulation du problème d'affectation mxn nécessite variables de décision min indiquent seulement si le bord entre la source et la destination existe:

x_ij=1 si le pont i Il est décerné à l'entrepreneur j

x_ij=0 si le pont i Il est pas attribué à l'entrepreneur j Réduire

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$$

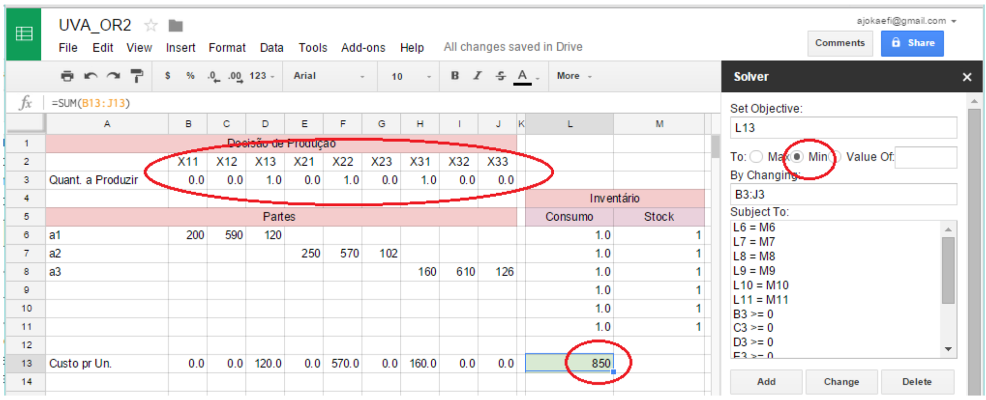
Restrictions

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

Il peut résoudre le problème de la nomination en utilisant le Simplex ou solveur.
En prenant comme exemple le problème précédent et en utilisant SOLVER, on obtient:



la solution optimale:

z=120×1+570×1+160×1=850

atteint l'optimum:

x⟦_11⟧=0,x⟦_12⟧=0,x⟦_13⟧=1

x⟦_21⟧=0,x⟦_22⟧=1,x⟦_23⟧=0

x⟦_31⟧=1,x⟦_32⟧=0,x⟦_33⟧=0

Cependant, le problème particulier est plus avantageux d'utiliser des algorithmes de remplacement, surtout s'il y a un grand nombre de variables de décision.
Dans l'exemple ci-dessus, un constat simple motive un algorithme alternatif appelé hongrois:
si tous les entrepreneurs décident d'augmenter la proposition de l'un des ponts +1 unité, la décision de l'Agence ne change pas;
si un entrepreneur décide d'augmenter les propositions de tous les ponts +1 unité, la décision de l'Agence ne change pas;

Par conséquent, le problème initial peut être réduit à un problème équivalent, en soustrayant une valeur fixe à toutes les cellules d'une colonne et en soustrayant une autre valeur fixe pour toutes les cellules dans une rangée.

Après réduction, le problème simplifié a au moins un zéro dans chaque ligne et de chaque colonne, 1 et zéro s'il y a une grande valeur, cette valeur est z = 0.
Bientôt la solution optimale, le cas échéant, sera dans les postes en alternance (lignes / colonnes) dans lequel les entrées sont 0;
algorithme hongrois
Considérons le problème indiqué ci-dessus, avec m = n = 3

	b1	b2	b3
a1	200	590	120
a2	250	570	102
a3	160	610	126

Identifie la valeur la plus faible des entrées sur chaque ligne (c〖_max〗) 〖_i〗

et soustraire cette valeur à toutes les entrées de cette ligne:

	b1	b2	b3
a1	80	470	0
a2	148	468	0
a3	34	484	0

On répète maintenant les colonnes, identifie la valeur la plus faible des entrées dans chaque colonne et soustraire cette valeur à toutes les entrées de cette colonne.
Le problème de la faible structure a au moins
1 zéro dans chaque ligne et 1 zéro dans chaque colonne et a une grande valeur cette valeur est z = 0.

	b1	b2	b3
a1	46	2	0
a2	114	0	0
a3	0	16	0

La répartition des postes de base devrait être faite d'abord par lignes puis des colonnes des cellules dont la valeur est 0 en alternance:
dans la première ligne de la cellule Elle est marquée

sur la deuxième ligne pas si peut marquer la cellule parce que est dans la même colonne puis certains déjà vérifié, la marge de la cellule dans la troisième rangée ne peut pas sélectionner la cellule .parce est dans la même colonne puis certains déjà vérifié, la marge de la cellule de gauche

Pas besoin de répéter le processus pour les colonnes parce qu'ils ont déjà marqué un colonnes de cellules / rangées alternées.

	b1	b2	b3
a1	46	2	0
a2	114	0	0
a3	0	16	0

La solution optimale z = 0 avec les allocations la base et les variables restantes sont égales à 0. En appliquant le même nombre réduit de postes au problème initial:

	b1	b2	b3
a1	200	590	120
a2	250	570	102
a3	160	610	126

Obtenir la valeur optimale de la fonction objectif z = 570 + 120 + 160 = 850, ce qui est égal à la valeur obtenue en utilisant le programme de calcul.
Souvent pas allouer immédiatement les positions de base à partir des cellules avec 0, dans ce cas, doit effectuer certaines procédures supplémentaires, le mieux démontré par un exemple.
Exemple
Considérons un appel d'offres pour remplir cinq emplois (m = 5) qui a été répondu par cinq candidats (n = 5) où chaque candidat présente ses rémunérations en monnaie constante le tableau suivant:

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	90	130	140	140	140
a2	170	110	90	160	190
a3	110	130	130	180	120
a4	80	70	150	110	160
a5	130	170	130	100	80

Réduit le problème i.e soustrayant à chaque ligne Entrées la ligne inférieure, et de même pour les colonnes:

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0	40	50	30	50
a2	80	20	0	50	100
a3	0	20	20	50	10
a4	10	0	80	20	90
a5	50	90	50	0	0

Les positions de base sont allocated-:
dans la 1ère ligne - la cellule

dans la 2ème ligne - la cellule

sur la 3ème ligne - vous ne pouvez pas parce qu'elle est une colonne avec la cellule déjà alloué et il n'y a pas d'autre 0 sur la 3ème ligne

dans la 4ème ligne - la cellule

dans la 5ème ligne - la cellule

dans la 1ère colonne - déjà marqué

dans la 2ème colonne - déjà marqué

dans la 3ème colonne - déjà marqué
dans la 4ème colonne - déjà marqué
la 5ème colonne - est impossible, car il est en ligne avec la cellule déjà alloué et aucun autre 0 la 5ème colonne
Il ne peut pas faire toutes les attributions:

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0	40	50	30	50
a2	80	20	0	50	100
a3	0	20	20	50	10
a4	10	0	80	20	90
a5	50	90	50	0	0

1. Comment surmonter le problème?
2. Dans les allocations obtenues peuvent être d'autres à la procédure suivante:
3. Marquez toutes les lignes non attribuées
4. Si l'une des lignes marquées ont 0, marquer les colonnes où ceux qui les 0
5. Si les colonnes marquées ont toute allocation, lignes de marquer l'endroit où sont ces allocations

6. Répétez jusqu'à épuisement des désignations à faire

7. Zéro avec un tableau de bord au-dessus de toutes les lignes non marquées et colonnes marquées

8. Trouver la plus faible quantité de cellules qui ne sont pas barrés, le désignant par

9. Soustraire la valeur de cellules non rayé

10. Ajouter 2 × θ la valeur de cellules croisés deux fois.

11. Soient comme le sont les cellules croisés qu'une seule fois les résultats de la procédure dans un nouveau cadre, faire de nouvelles attributions et répéter la procédure en cas de nouvelle serrure.

Dans l'exemple précédent:

1. L'annexe lignes sans affectation

	b1	b2	b3	b4	b5	
a1	0	40	50	30	50	
a2	80	20	0	50	100	
a3	0	20	20	50	10	√ lignes marquées sans affectation
a4	10	0	80	20	90	
a5	50	90	50	0	0	

2. Colonnes sélectionnez 0 sur les lignes marquées

	b1	b2	b3	b4	b5	
a1	0	40	50	30	50	
a2	80	20	0	50	100	
a3	0	20	20	50	10	√
a4	10	0	80	20	90	
a5	50	90	50	0	0	
	√					

marcar as colunas com 0 nas linhas marcadas

3. Marca as linhas com alocação nas colunas marcadas

	b1	b2	b3	b4	b5	
a1	0	40	50	30	50	√ marquage des lignes avec affectation dans les colonnes marquées
a2	80	20	0	50	100	
a3	0	20	20	50	10	√
a4	10	0	80	20	90	
a5	50	90	50	0	0	
	√					

4. Répétez jusqu'à ce que il n'y a pas de marques à faire

5. risque banalisée lignes et des colonnes marquées

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0	40	50	30	50
a2	80	20	0	50	100
a3	0	20	20	50	10
a4	10	0	80	20	90
a5	50	90	50	0	0

lignes non marquées risquées

colonnes marquées risquées

6. Trouver la valeur la plus faible des cellules non gratta = 10
7,8,9)
soustraire la valeur de cellules non rayé
ajouter à la valeur de cellules croisés deux fois
laisser comme le sont les cellules croisés qu'une seule fois

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0	30	40	20	40
a2	90	20	0	50	100
a3	0	10	10	40	0
a4	20	0	80	20	90
a5	60	90	50	0	0

Faire de nouvelles attributions de postes de base dans le nouveau cadre:

dans la 1ère ligne - la cellule

dans la 2ème ligne - la cellule

dans la 3ème ligne - la cellule

dans la 4ème ligne - la cellule

dans la 5ème ligne - la cellule

Toutes les nominations sont faites:

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	0	30	40	20	40
a2	90	20	0	50	100
a3	0	10	10	40	0
a4	20	0	80	20	90
a5	60	90	50	0	0

Appliquant les positions de base pour le tableau initial:

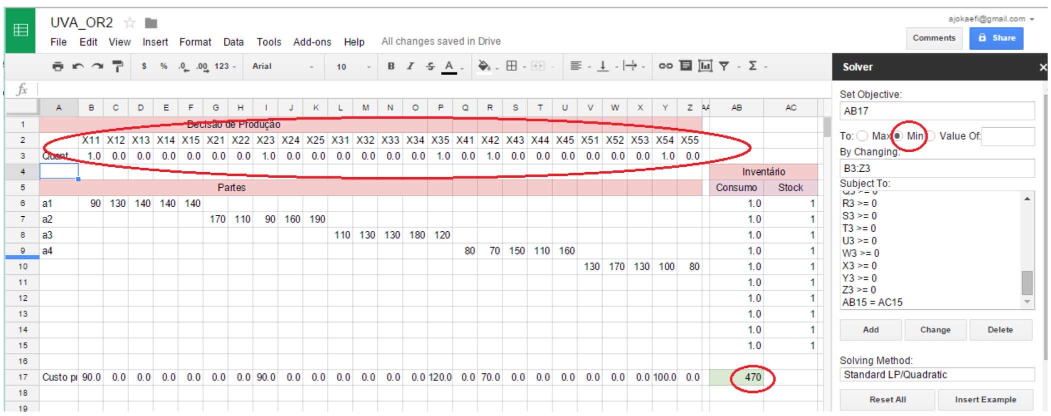
	b1	b2	b3	b4	b5
a1	90	130	140	140	140
a2	170	110	90	160	190
a3	110	130	130	180	120
a4	80	70	150	110	160
a5	130	170	130	100	80

Ils obtiennent la solution optimale:

z=90+90+120+70+100=470

obtenu dans des positions $x_{11}=1, x_{23}=1, x_{35}=1, x_{42}=1, x_{54}=1$

Utilisation SOLVER le même problème, on obtient:



La même solution optimale.

Conclusion

Le problème d'affectation a été présenté, que d'être un problème avec le transport contrainte supplémentaire peut être résolu avec les méthodes déjà traités.
Cependant, la restriction supplémentaire est facile à poser le problème de la représentation par des graphiques, il y a donc des algorithmes alternatifs, à savoir l'algorithme hongrois pour résoudre les problèmes d'affectation.
Cette unité a présenté les procédures de cet algorithme.

Résumé de l'unité

Montré la terminologie, les concepts et la notation de base de la théorie des graphes, théorèmes de Euler et Kuratowski et graphiques ont été utilisés pour modéliser les problèmes de transport et d'affectation qui seront résolus dans le lecteur suivant.
Cette activité a été analysé les problèmes de transport utilisés en tant que modèles pour les produits de ruissellement provenant des différents points d'origine (l'offre) à multiples points de destination (recherche), et chaque origine à chaque destination d'un coût de transport spécifique (de réparation).
Les problèmes de transport peuvent être résolus par le Simplex ou le solveur, mais pour des problèmes avec de nombreuses variables de décision peuvent vouloir utiliser des algorithmes alternatifs:
i) de trouver une solution de base réalisable: en haut à gauche, le coût minimum ou Vogel (penalty)
ii) d'optimiser la méthode viable de solution de «tremplin» ou MODI
Plusieurs situations ont été analysées, à savoir la facilitation de la solution quand il y a des cycles, l'existence de variables cachées et les problèmes asymétriques.
problème d'affectation a été présenté, que d'être un problème avec le transport contrainte supplémentaire peut être résolu avec les méthodes déjà traités.

Cependant, la restriction supplémentaire est facile à poser le problème de la représentation par des graphiques, il y a donc des algorithmes alternatifs, à savoir l'algorithme hongrois pour résoudre les problèmes d'affectation.
Cette unité a présenté les procédures de cet algorithme

Évaluation de l'unité

Vérifiez votre compréhension!

Lectures et autres ressources

Les lectures et autres ressources de cette unité se trouvent au niveau des lectures et autres ressources du cours.

Unité 4. Optimisation dans les réseaux et files d'attente

Introduction à l'unité

Cette unité traite le problème de l'optimisation des flux de réseau, les applications des projets de la théorie des jeux et les applications de la planification des projets et la théorie des jeux.

Objectifs de l'unité

À la fin de cette unité, vous devriez être capable de:

- Déterminer le chemin minimal d'un réseau
- Déterminer l'arbre minimum dans un réseau
- Déterminer le chemin de moindre poids dans un réseau
- Déterminer le débit maximal dans un réseau
- Déterminer le débit de coût minimum dans un réseau
- Modéliser un problème des listes d'attente, déterminer le temps moyenne et la longueur moyenne d'une file d'attente.

Termes clés

Kruskal: algorithme pour trouver l'arbre de Spanning

Primal: algorithme pour trouver l'arbre de Spanning

Dijkstra: algorithme pour trouver le chemin de moindre poids entre deux sommets

Flux maximum: maximum transportable dans un réseau

Capacité de limitation: la capacité maximale de transport de chaque arête

source: sommet qui est inondé

puits: sommet qui est drainée

Transitoire: État d'écoulement dépendant du temps

Stationnaire: État d'écoulement indépendant du temps Kirchhoff loi de l'équilibre des sommets

Arêtes inverses: arêtes virtuelles avec un flux inverse
flux maximal: la quantité maximale qui peut traverser le réseau

Coupe minimale: couper avec moins de poids, séparer la source du puits

Théorème ford-fulkerson: réseau d'optimalité: le flux maximal est égal à la coupe minimale

Coût minimum du flux: flux de poids minimum dans un réseau

Fluide :substance qui coule

Problème de débordement: transport avec des sommets de passage

Sommet de passage: sommets de degré intérieur et degré extérieur différent de zéro

Simplex en réseau: algorithme simplex fonctionnant sur un réseau

Transport généralisé: la généralisation du transport à un réseau quelconque

Processus de markov : sans mémoire: le courant ne dépend immédiatement que de la précédente

File d'attente: zone d'accumulation dans le sommet
serveur: unité de service

Notation de kendall: code d'identification des problèmes de files d'attente

Variable aléatoire: fonction spéciale, de l'espace de probabilité pour r

Paramètres stochastiques: paramètres avec des valeurs incertaines

Chemin critique: chemin qui détermine le plan minimum de temps d'exécution

Flux direct: Flux vers le graphe(réseau)

Flux reverse: la quantité du flux qui peut être réduite à l'arête

Probabilité de transition: la probabilité de passer d'un état à un autre

Étape maillage: la distance entre un état et la prochaine

Petite équation: relation entre la probabilité et la longueur de la file d'attente

Activité dans l'arête: le modèle de planification où l'arête correspondant à une activité

L'activité sur le sommet: le modèle de planification lorsque le sommet correspond à une activité

Np-hard: il n'y a pas d'algorithme de résolution, mais il existe l'algorithme de vérification du résultat

Passage direct: les termes et les dégagements se comptent du début à la fin

Passage inverse: les termes et les dégagements se comptent de la fin au debut

Début plus tôt (es): terme pour commencer plus tôt

Fin plus tôt (ef): terme pour terminer plus tôt

Début plus tard (ls): terme pour démarrer plus tard

Fin plus tard (lf): terme pour mettre fin à plus tard

Fluctuation libre: le montant de la lf-es-durée de l'activité

Fluctuation total: valeur de ef-es-durée de l'activité

Tampon libre: égal à la fluctuation, terme qui n'a pas d'influence sur la durée du projet

Pert: forme d'organiser les activités du projet dans un réseau

Gantt: forme d'organiser les activités du projet dans un tableau

Table de retour: un ensemble de valeurs à gagner et à perdre dans un jeu de 2 adversaires

Minimax: minimisation du maximum

Gain nul: gain total est égal à la perte totale dans la matrice de paiement

Maximin : maximisation du minimum

Maxcolumn: maximum dans la colonne

Minrow: minimum dans la ligne

Point selle: cellule où le maxcolumn est égal au minrow

Activités d'apprentissage

Activité 1 – Flots dans les réseaux

Introduction

- Cette activité présente trois différents types de problèmes de flux de réseau:
- Minimum de l'arbre de Spanning - algorithmes de Kruskal et Primal algorithmes Dijkstra
- flux maximal- algorithmes de flux augmenté et le théorème de Ford-Fulkerson

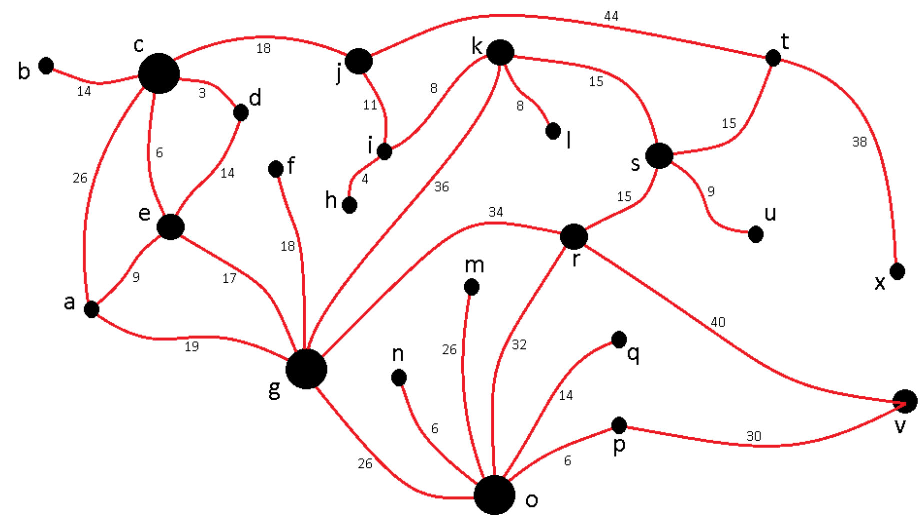
Cette activité présente également le problème de coût minimum du flux dans un réseau et l'analyse des réseaux et avec de multiples sources et puits.

Détails de l'activité

Dans la section précédente, les problèmes de transport et d'affectation ont été résolus avec des algorithmes basés sur la modélisation du réseau, puis comparés avec la résolution des mêmes problèmes avec la méthode /Solver Simplex.
Beaucoup d'autres systèmes sont modélisés avec des graphiques et des réseaux.
Dans les problèmes suivants il est destiné à analyser les problèmes d'écoulement dans un réseau d'un ou plusieurs points de l'origine (source) vers un ou plusieurs points de destination (puits), chaque arête d'une capacité de flux donnée et chaque sommet d'une certaine capacité de stockage.

Minimum de l'arbre recouvrant

Soit V l'ensemble des villages dans un pays, la distance entre les villages mentionnés dans le graphe pondéré:



Un opérateur de téléphonie veut savoir quelle est la longueur minimal de câbles téléphoniques nécessaires pour relier les villages entre eux.

Pour résoudre ce problème, il y a un arbre minimal, pour les cycles ne créent entre redondance et augmentent le coût.

1. Algorithme de Kruskal

On crée une liste de toutes les arêtes

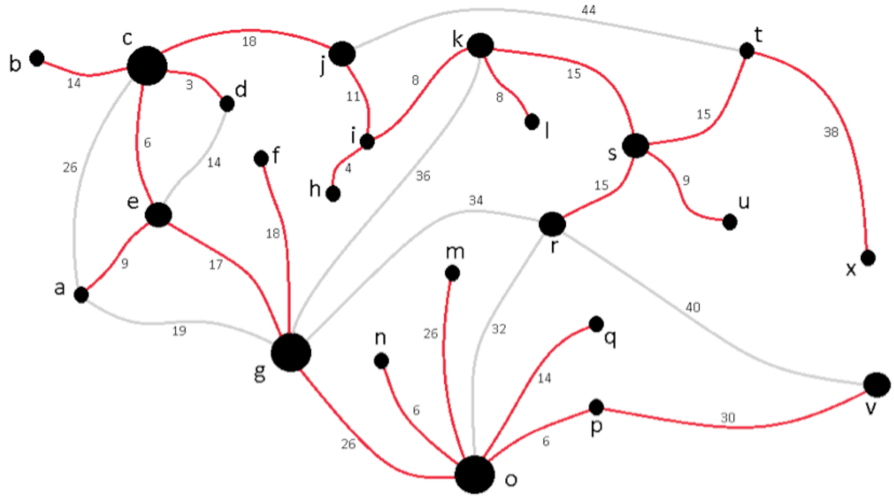
On trie la liste par poids respectifs des arêtes

arrête	poids
a-c	26
a-e	9
a-g	19
b-c	14
c-d	3
c-e	6
c-j	18
d-e	14
e-g	17
f-g	18
h-i	4
i-j	11
i-k	8
j-t	44
k-g	36
k-l	8
k-s	15
m-o	26
n-o	6
o-p	6
o-q	14
o-r	32
p-v	30
r-g	34
r-v	40
r-s	15
t-s	15
t-x	38
u-s	9

arrête	Poids
c-d	3
h-i	4
c-e	6
n-o	6
o-p	6
i-k	8
k-l	8
a-e	9
u-s	9
i-j	11
b-c	14
d-e	14
o-q	14
k-s	15
r-s	15
t-s	15
e-g	17
c-j	18
f-g	18
a-g	19
a-c	26
m-o	26
p-v	30
o-r	32
r-g	34
k-g	36
t-x	38
r-v	40
j-t	44

Il commence par l'arête de poids inférieur et dans un processus d'élimination, on va ajouter plusieurs arêtes de l'arbre, sans créer de cycles:

arrête	Poids	
c-d	3	
h-i	4	
c-e	6	
n-o	6	
o-p	6	
i-k	8	
k-l	8	
a-e	9	
u-s	9	
i-j	11	
b-c	14	
d-e	14	✗
o-q	14	
k-s	15	
r-s	15	
t-s	15	
e-g	17	
c-j	18	
f-g	18	
a-g	19	✗
a-c	26	✗
m-o	26	
g-o	26	
p-v	30	
o-r	32	✗
r-g	34	✗
k-g	36	✗
t-x	38	
r-v	40	✗
j-t	44	✗



Le poids total de l'arbre de cet exemple est de 290 unités de poids, ce qui est la longueur minimale du câble téléphonique qui permet de relier toutes les villes.

2. Algorithme de Primal

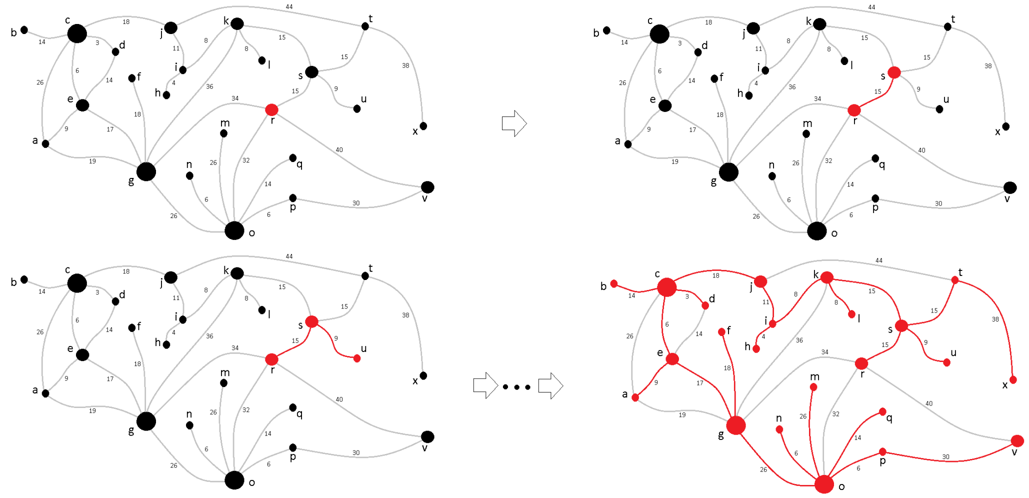
Alternativement, vous pouvez créer un sous-graphe de base et de l'étendre en fonction de certaines règles qui donnent lieu à la fin de l'arbre minimum souhaité:

1. Créez un sous-graphe A avec un sommet arbitraire du graphe original;
2. Inclure dans A une nouvelle arête et son sommet respectif, selon les règles suivantes:

être fixé à l'un des sommets déjà en A moins de poids entre tous les candidats;
former cycles avec ceux qui sont déjà en A

3. Répétez jusqu'à ce qu'il ne soit pas possible de continuer.

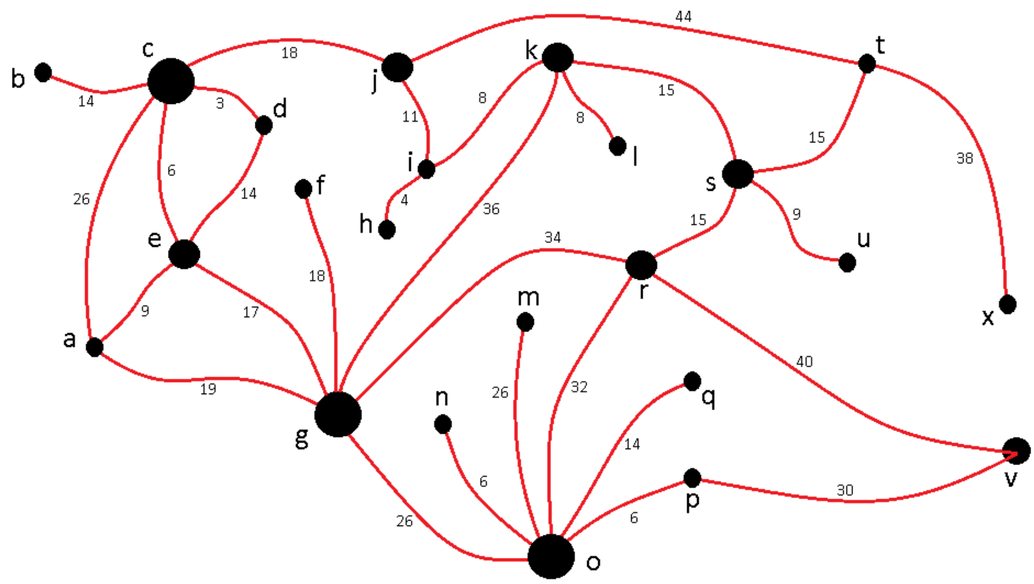
Le sous-graphe résultant est l'arbre minimal souhaité.
En utilisant le graphe de l'exemple précédent et en commençant par le sommet r, on obtient:



Le recouvrement minimal a un poids total de 290 (soit égale à celle obtenue par la méthode de Kruskal) -.

Le plus court chemin

Exemple: Un exemple typique de ce problème est le suivant:
Soit V le nombre d'aéroports dans un pays où un transporteur aérien se propose d'étudier les coûts associés aux différentes voies indiquées dans chaque le graphe pondéré de la route afin de minimiser le coût du carburant:



Comment déterminer le chemin le plus court (par rapport au poids) entre le sommet d'origine g et le sommet de destination j?
La méthode de la «force brute» liste tous les chemins possibles et détermine l'itinéraire le plus court.
Toutefois, lorsque la complexité du réseau augmente cette méthode consomme trop de ressources informatiques et devient inefficace.
Si la pondération est non négative, l'algorithme de Dijkstra fournit des résultats satisfaisants:

1. Préparer un tableau avec tous les sommets dans l'en-tête des colonnes;
2. circuler de sommet à origine et commencer une itération avec ce sommet dans le 1er ligne;
3. Enregistrer-dans chaque colonne les poids des arêtes adjacentes et les non adjacentes et marquer avec un symbole, à savoir (∞)
4. Le poids le plus bas enregistré en ligne est distribué en indiquant la fin de l'itération dans cette colonne et le sommet correspondant à il va à la ligne suivante:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x
g	19	∞	∞	∞	17	18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞

5. Répéter la procédure avec le nouveau sommet sur la ligne, sans oublier d'ajouter la valeur circulant dans l'itération précédente pour tous les poids de arêtes adjacentes au nouveau sommet dans la ligne:

- Si la valeur résultante est inférieure à celle déjà inscrite dans la colonne, puis remplace la valeur précédemment enregistrée ,
- si la valeur est égale garde l'ancien, mais marque comme un chemin alternatif
- si la valeur est supérieure à garder le registre antérieur
  les registres entourés indiquent que dans la colonne correspondante on ne fait pas de changements:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x
g	19	∞	∞	∞	17	18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
e	19	∞	23	31		18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞

6. Répétez le processus et si deux valeurs égales sont trouvées, l'un d'eux est choisi parce que l'autre sera revue plus tard,

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x
g	19	∞	∞	∞	17	18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
e	19	∞	23	31		18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
f	19	∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
a		∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
c		37		26				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞

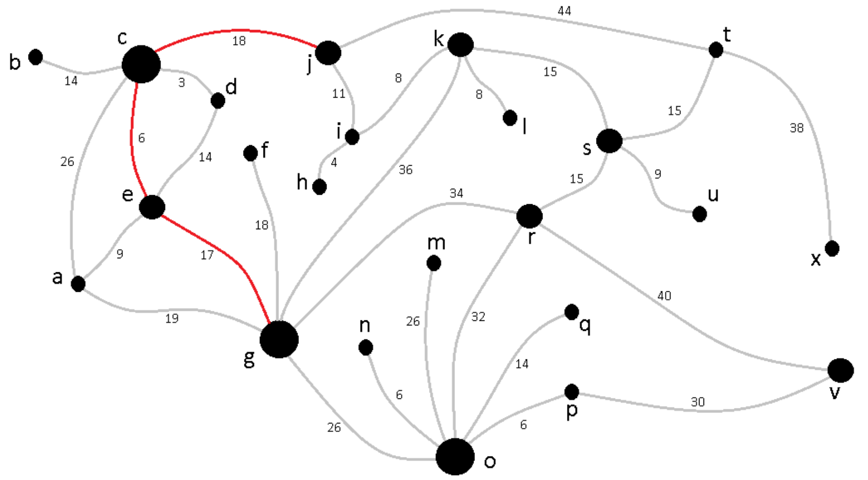
7. Le processus se poursuit jusqu'à ce que le sommet-destination soit distribué:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x
g	19	∞	∞	∞	17	18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
e	19	∞	23	31		18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
f	19	∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
a		∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
c		37		26				∞	∞	41	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
d		37						∞	∞	41	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
o		37						∞	∞	41	36	∞	52	32		32	40	34	∞	∞	∞	∞	∞
n		37						∞	∞	41	36	∞	52			32	40	34	∞	∞	∞	∞	∞
p		37						∞	∞	41	36	∞	52				40	34	∞	∞	∞	62	∞
r		37						∞	∞	41	36	∞	52				40		49	∞	∞	62	∞
k		37						∞	44	41		44	52				40		49	∞	∞	62	∞
b								∞	44	41		44	52				40		49	∞	∞	62	∞
q								∞	44	41		44	52						49	∞	∞	62	∞

Le chemin trouvé «arrivé» a j provenant de c parce qu'il était dans la ligne de c qui était le dernier changement dans la colonne j , de à 41; Nous sommes arrivé à c en provenant de e parce qu'il était sur la ligne de e et qui était le dernier changement dans la colonne c de ∞ à 23; Nous sommes venus à e et en provenance de g comme on peut le lire directement sur la colonne.
Pour cela, on peut reconstituer le chemin le plus court:

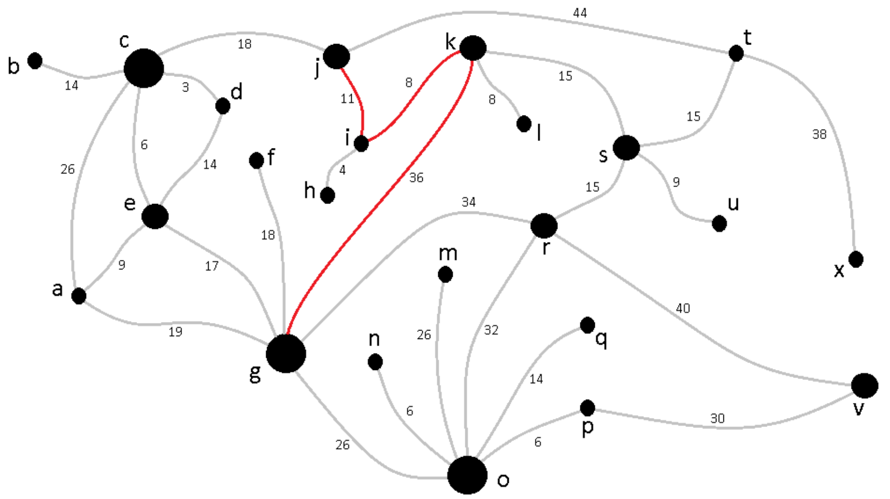
$$g \to e \to c \to j$$

avec la longueur de 41 (unités de poids).
S'il y a des marques pour des voies alternatives, on peut identifier les «sortant» dans les marques respectives.



Il peut y avoir d'autres chemins de g à j, mais ils doivent avoir une longueur supérieure à 41.

Le tableau montre les chemins les plus courts du sommet-origine g aux colonnes circulaires, comme ce fut le cas de j.

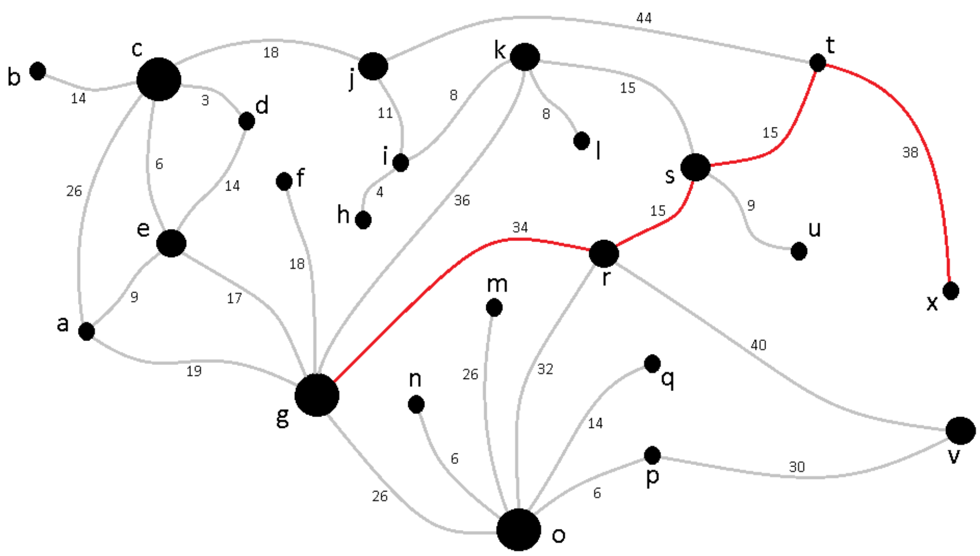


On poursuit le tableau jusqu' à avoir toutes les colonnes entourés on obtient tous les chemins les plus courts à partir du sommet d'origine g

:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	x
g	19	∞	∞	∞	17	18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
e	19	∞	23	31		18		∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
f	19	∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
a		∞	23	31				∞	∞	∞	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
c		37		26				∞	∞	41	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
d		37						∞	∞	41	36	∞	∞	∞	26	∞	∞	34	∞	∞	∞	∞	∞
o		37						∞	∞	41	36	∞	52	32		32	40	34	∞	∞	∞	∞	∞
n		37						∞	∞	41	36	∞	52			32	40	34	∞	∞	∞	∞	∞
p		37						∞	∞	41	36	∞	52				40	34	∞	∞	∞	62	∞
r		37						∞	∞	41	36	∞	52				40		49	∞	∞	62	∞
k		37						∞	44	41		44	52				40		49	∞	∞	62	∞
b								∞	44	41		44	52				40		49	∞	∞	62	∞
q								∞	44	41		44	52						49	∞	∞	62	∞
j								∞	44			44	52						49	85	∞	62	∞
l								∞	44				52						49	85	∞	62	∞
i								48					52						49	85	∞	62	∞
h													52						49	85	∞	62	∞
s													52							64	58	62	∞
m																				64	58	62	∞
u																				64		62	∞
v																				64			∞
t																							102

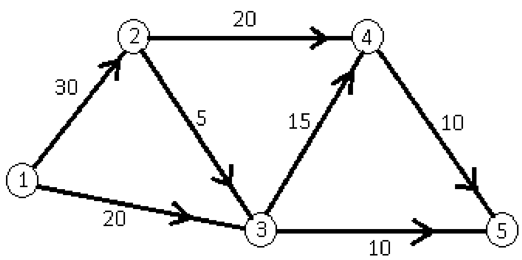
Par exemple, le chemin le plus court, en partant de g pour atteindre x, est:
g→r→s→t →x
et a une longueur de 102:



Flux maximal

Dans le problème de flux de réseau au lieu de pénalisation (coût de l’utilisation) en utilisant la ligne comme on le voit dans les problèmes de transport et de désignation, nous avons une capacité de limitation de flux associée à l’arête ..

Exemple: Un exemple typique de ce problème est la suivant:
Soit V l’ensemble des réservoirs d’eau dans diverses localités de la ville, reliés par un réseau ciblé dont la capacité de pompage dans chaque conduit est indiquée dans graphe pondéré (m3 / heure), avec les flèches représentant la direction de l’écoulement:



Quel est le flux maximal qui peut circuler sur le réseau (m3 / h), de la source1 au puits 5?
La matrice de contiguïté binaire, laissée sans remplir les entrées nulles est donnée par:

	1	2	3	4	5
1		1	1		
2			1	1	
3				1	
4					1
5					

La colonne 1 seulement avec des entrées nulles indique que ce sommet est une source.
La ligne 5 seulement avec des entrées nulles indique que ce sommet est un puits.
Dans le problème typique de flux maximal, on suppose que:

- e régime transitoire a été dépassé et donc nous ne considérons pas les magasins locaux (à chaque sommet)
- état d'équilibre étant atteint: tous les flux entrant dans la source quitte le puits.
- La quantité disponible à la source est infinie;
- Le montant perdu au puits est infini;

L'objectif est de maximiser flux total z circulant sur le réseau de la source1 au puits 5.

Chaque arête a une capacité non négative $u_{(ij.)} \geq 0$, où i,j=1,…,m, et la numérotation des sommets, et si deux sommets ne sont pas adjacents alors$c_{ij}=0$.

Le flux au niveau de l'arête est la variable de décision $0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$où i,j=1,...,m, la numérotation des sommets, et si deux sommets ne soient pas adjacents alors le flux est nul$x_{ij}=0$.

Comme le régime est stationnaire, la loi de Kirchhoff s'applique: le flux total entrant dans un sommet k est égal au flux total quittant ce sommet

$$\sum_{i=n}^{1} x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{kj}$$

Avec cette description, le problème de flux maximal dans un réseau est formulé par:

maximiser le flux z entrant dans la source et quittant le puits en régime stationnaire.

$z=\sum_{j=1}^{m} x_{1j}$ ou $z=\sum_{i=1}^{n} x_{}$

sous la contrainte

$0 \le x_{ij} \le U_{ij}$ pour $i,j=1,\dots,m$

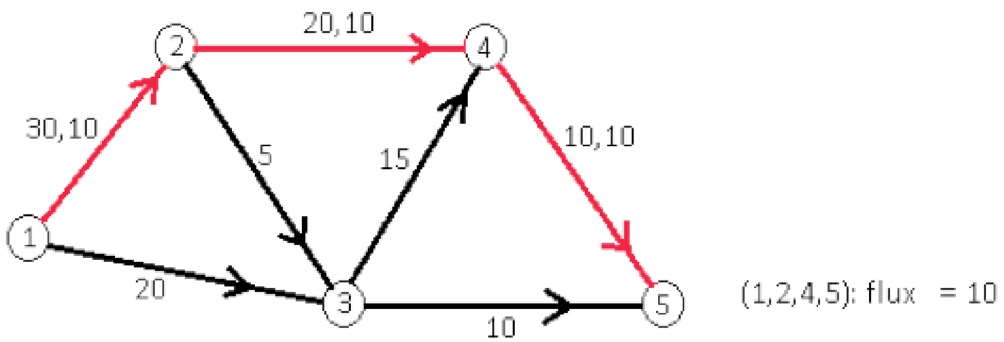
$\sum_{m=n}^{1} x_{ik} = \sum_{j=n}^{1} x_{kj}$ pour $i,j=1,\dots,m$

Ce problème peut être résolu par le Simplex/SOLVER, mais lorsque le réseau est complexe, il y a d'autres algorithmes plus faciles à réaliser.

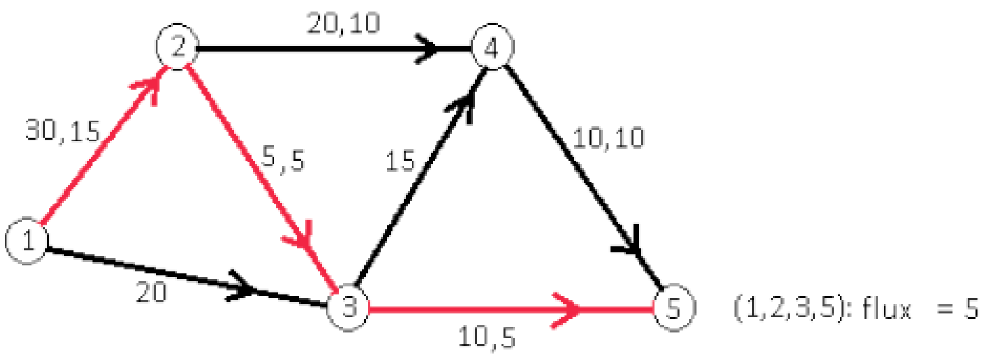
1. Algorithme du flux augmenté

L'algorithme de flux augmenté analyse la capacité de tous les chemins possibles de la source au puits, en tenant compte non seulement le flux direct des arêtes, mais aussi le flux inverse des arêtes si on a déjà un certain flux direct.

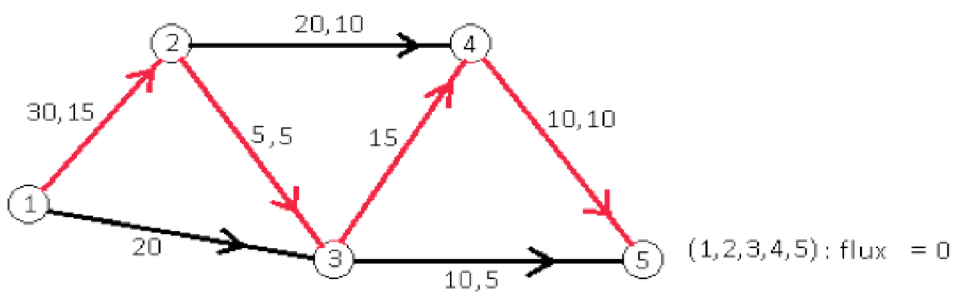
Dans cet exemple, le flux direct maximal de chaque chemin est égal à la capacité limite de la ligne:
Le chemin (1, 2, 4, 5): le flux maximal est de 10 :



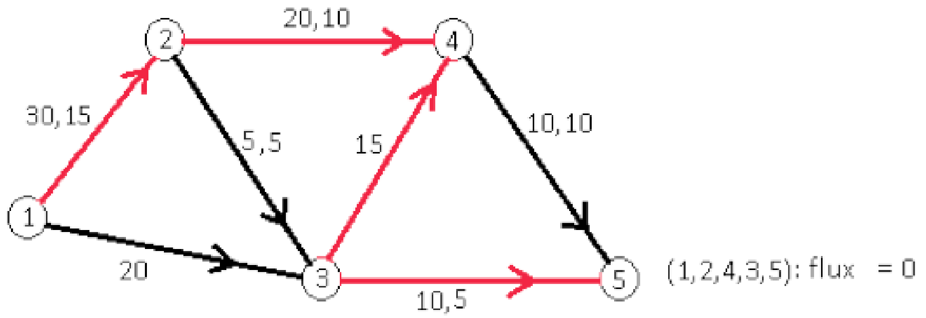
Le chemin (1,2,3,5): flux maximum 5 (marquer le flux supplémentaire dans les arêtes qui sont déjà marques):



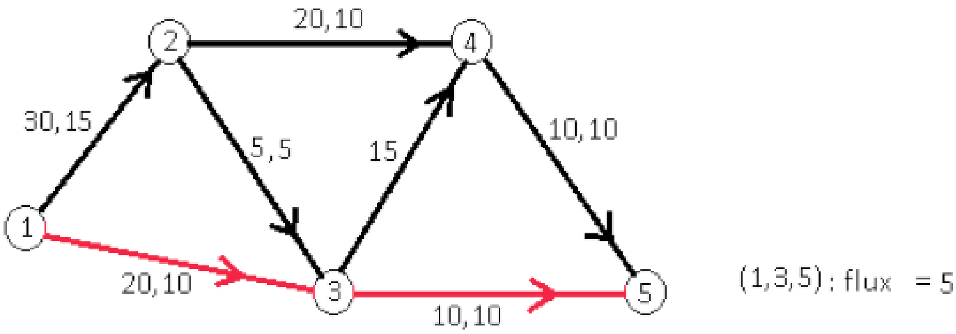
Le chemin (1,2,3,4,5): Débit maximum 0 puisque la capacité de l'arête (2,3) est déjà complète:



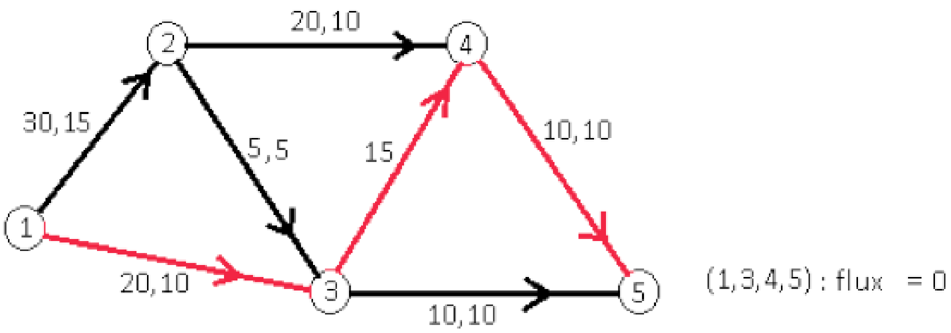
Le chemin (1,2,4,3,5): inclut l'arete inverse (4.3), mais comme il n'y a pas de flux à inverser (puis le flux direct est 0), le flux maximal de ce chemin est de 0:



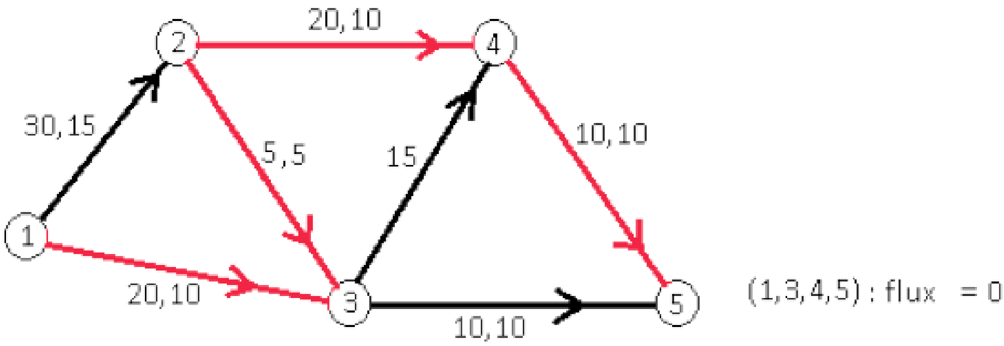
Le chemin (1,3,5): flux maximal de 5 (la capacité restante est de (3,5)):



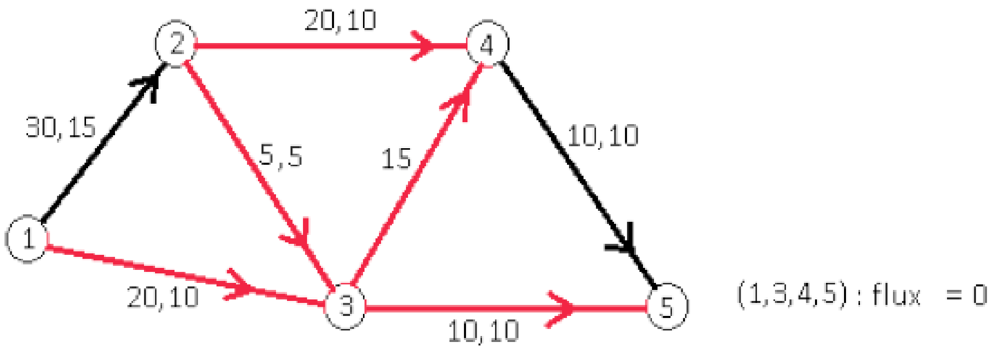
Le chemin (1, 3, 4,5): flux maximum 0:



Le chemin (1, 3, 2, 4,5) comprend l'arete opposée (3,2) ayant une capacité à inverser le flux direct de 5 déjà existant, mais que la capacité de l'arête (4.5) est déjà épuisée, le flux maximum est de 0:



Le chemin (1,3,2,4,3,5): comporte deux arêtes inverses (3,2) et (4,3), et tandis que la première a une capacité à inverser le flux direct de 5 directe déjà existant, le deuxième n'a pas de flux direct alors le débit maximum est de 0:



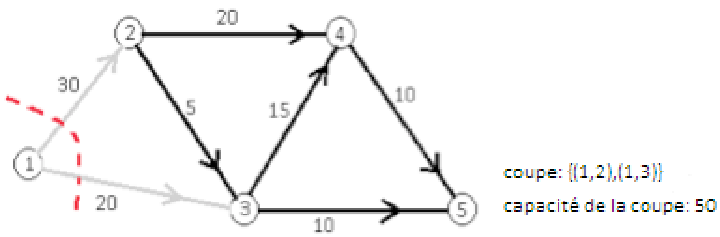
Après avoir analysé tous les chemins possibles, les flux calculés sont ajoutés pour obtenir le flux maximal du réseau= 5 + 10 + 5 + 0 + 0 + 0 + 0 = 20

Algorithme de coupe minimum

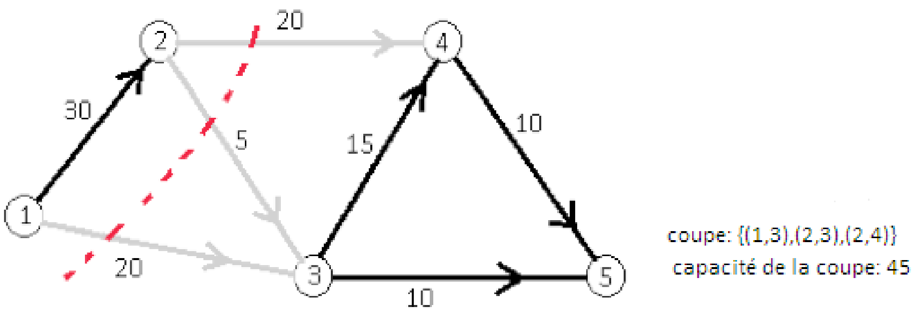
L'algorithme minimum de coupe analyse le problème dual du flux augmenté et toutes les coupes du réseau qui laissent non connectés deux sous-ensembles de sommets, l'un contenant la source tandis que l'autre contient le puits.

La capacité totale de la coupe ou coupes et (ensemble des arêtes coupées) est calculée en tenant compte de l'orientation des arêtes directes et inverses:

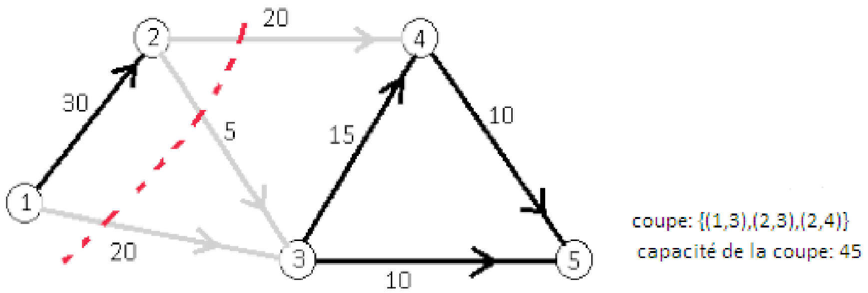
Coupe: (1,3): capacité de la coupe est



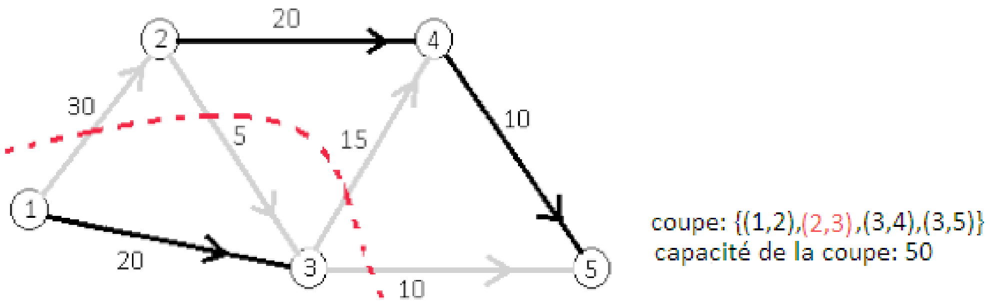
coupe : capacité de la coupe



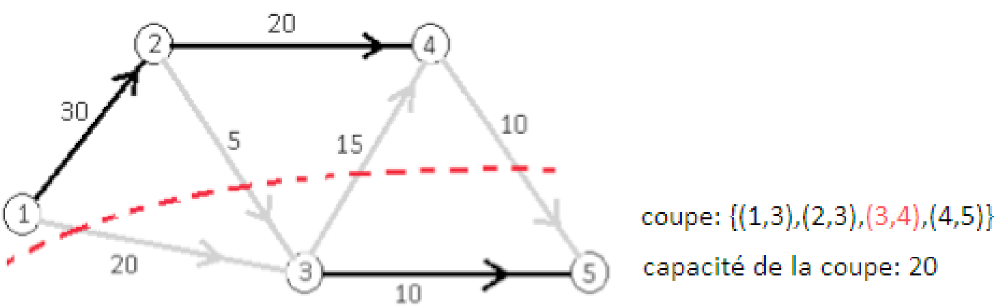
coupe : capacité de la coupe



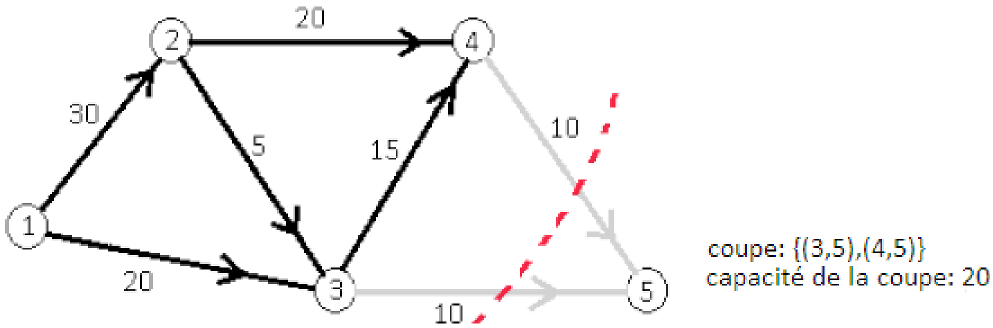
coupe : capacité de la coupe (À noter que la capacité de l'arête(2,3) a une orientation(-) représentant une coupe inversée



coupe: : capacité de la coupe À noter que la capacité de l'arête (3,4) a une orientation(-) représentant une coupe inversée



coupe: : capacité de la coupe



De toutes les coupes, la capacité minimale de coupe est.

Le fait que le flux maximal du réseau est égal à la coupe minimale n'est pas une coïncidence mais résulte de la relation primal-dual et des conditions d'optimalité d'un réseau désigné par le théorème de Ford-Fulkerson.

Pour approfondir un peu, cette relation détermine la formulation primale du problème donné dans l'exemple typique

Maximiser le flux z

L'expression z peut être calculée en appliquant la loi de Kirchhoff à la source:$z=x_{12}+x_{13}$, ou au puits : $z=x_{35}+x_{45}$

Cependant, il y a des avantages dans le traitement de z comme une variable de décision libre en signe.
Les contraintes données par la capacité de limitation des arêtes (égal au nombre d›arêtes) sont les suivantes:

$x_{12}\leq 30$

$x_{13}\leq 20$

$x_{24}\leq 20$

$x_{23}\leq 5$

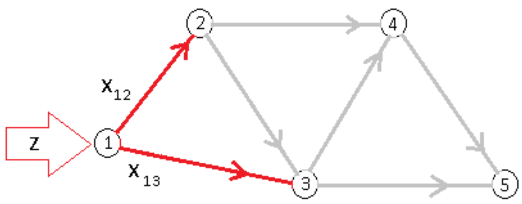
$x_{34}\leq 15$

$x_{35}\leq 10$

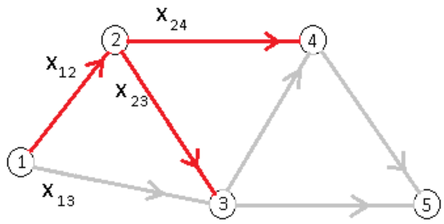
$x_{45}\leq 10$

Les contraintes données par la loi de Kirchhoff à chaque sommet (égal à nombre de sommets):

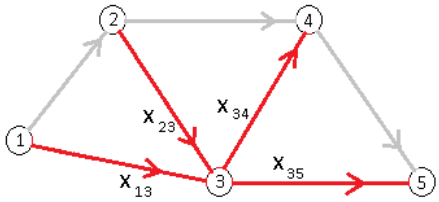
Sommet 1,(+),in :



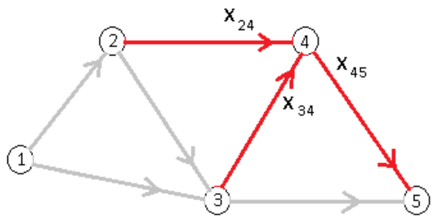
Sommet 2 :



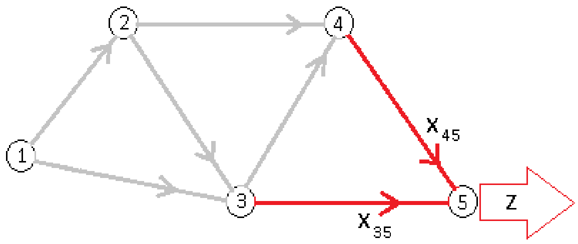
Sommet 3:



Sommet 4:



Sommet 5:



Restrictions indiquées par la non-négativité des variables de décision

et z est laissé libre en signe (bien qu'il soit pas toujours négative).
Résumant la formalisation du primal:

max z
sous réserve des contraintes

x⟦_12⟧+x⟦_13⟧-z=0

-x⟦_12⟧+x⟦_23⟧+x⟦_24⟧=0

-x⟦_13⟧-x⟦_23⟧+x⟦_34⟧+x⟦_35⟧=0

-x⟦_24⟧-x⟦_34⟧+x⟦_45⟧=0

-x⟦_35⟧-x⟦_45⟧+z=0

x⟦_12⟧≤30

x⟦_13⟧≤20

$x_{24} \leq 20$

$x_{23} \leq 5$

$x_{34} \leq 15$

$x_{35} \leq 10$

$x_{45} \leq 10$

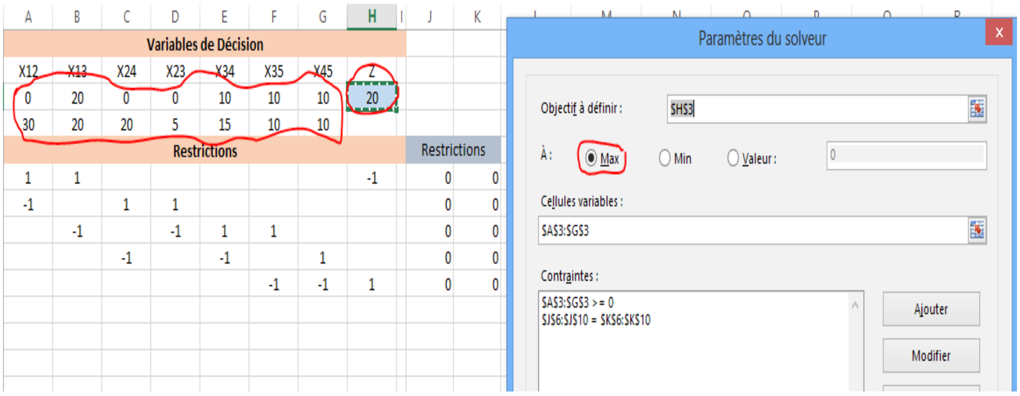
signe

$x_{ij} \geq 0$

z(restrictiondans≤signe)

Résoudre le primal en utilisant le solveur:

On obtient le même résultat que celui obtenu



avec flux augmenté et à une coupe minimale.
Pour calculer problème dual (minimisation de la coupe) on vérifie que le nombre de variables duales est égal au nombre de contraintes (n +m+1) et notons

w_j et h_{ij} où ij=1,...,n:

$w_1 : x_{12}+x_{13}-z=0$

$w_2 : -x_{12}+x_{23}+x_{24}=0$

$w_3 : -x_{13}-x_{23}+x_{34}+x_{35}=0$

$w_4 : -x_{24}-x_{34}+x_{45}=0$

$w_5 : -x_{35}-x_{45}+z=0$

$h_{12} : x_{12} \leq 30$

$h_{13} : x_{13} \leq 20$

$h_{24} : x_{24} \leq 20$

$h_{23} : x_{23} \leq 5$

$h_{34} : x_{34} \leq 15$

$h_{35} : x_{35} \leq 10$

$h_{45}: x_{45} \leq 10$

Le côté droit (RS) avec les coefficients de la fonction objectif: $\min w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} h_{ij} = 30h_{12} + 20h_{13} + 5h_{23} + 15h_{34} + 10h_{35} + 10h_{45}$

La 'Collection' verticale de coefficients entraine une restriction pour chaque variable primale $x_{ij}: w_i - w_j + h_{ij} \geq 0$ pour ij=1,...,navec l'inégalité préférée de minimisation (≥) puisque les variables du primal sont non négatives:

$x_{12}: w_1 - w_2 + h_{12} \geq 0$

$x_{13}: w_1 - w_3 + h_{13} \geq 0$

$x_{24}: w_2 - w_4 + h_{24} \geq 0$

$x_{23}: w_2 - w_3 + h_{23} \geq 0$

$x_{34}: w_3 - w_4 + h_{34} \geq 0$

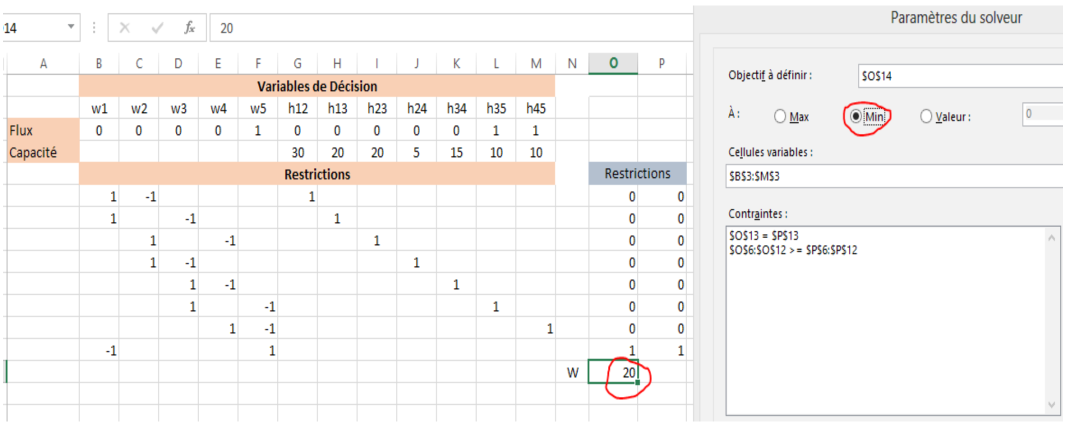
$x_{35}: w_3 - w_5 + h_{35} \geq 0$

$x_{45}: w_4 - w_5 + h_{45} \geq 0$

$z: -w_1 + w_5 = 1$(Comme z a été considéré comme libre de signe)

$h_{ij} \geq 0$(puisque les inégalités dans les contraintes respectives du primal sont préférées dans la maximisation)w_j(Sans restriction de signe) puisque la restriction provenant de la loi de Kirchhoff est une égalité.

Résoudre le dual en utilisant le solveur:



On obtient le même résultat que celui obtenu avec le flux augmenté et la coupe minimale traité.

Coût minimum de flux en réseau
Tous les problèmes d'optimisation dans le réseau sont déjà traités

- transports
- désignation
- plus court chemin

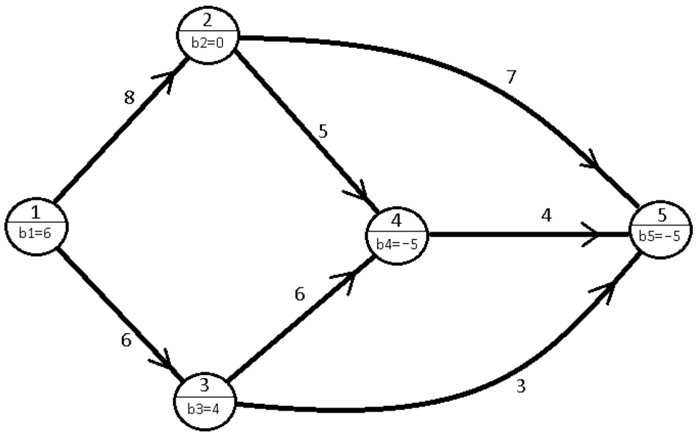
Flux maximal

Il y a des cas particuliers du problème de coût minimum de flux en réseau où nous avons non seulement un cout de l'utilisation de la ligne ou l›arête (i,j), mais nous pouvons également avoir une capacité limite   de chaque arête (i,j) et les sommets peuvent être sources, passage ou puits .

Le flux circulant sur le réseau est mesurée en(un), le flux a la capacité limite), l'entrée des sources et sortie des puits en unité par temps), le coût de l'utilisation des arêtes en unités monétaires par unité de flux.

Problème de débordement

En général, un problème de flux en réseau peut avoir plusieurs sommets-source, plusieurs sommets-puits et aussi plusieurs sommets de passage.
Considérons un problème de débordement (transport des sommets de réussite) modélisé par le réseau suivant (exemple tiré de G.Srinivasan, NPTEL):



Où les coûts de l'utilisation de chaque arête sont indiqués en unités monétaires par conteneur ($/PC), le problème n'a pas de limitation de la capacitéles sommets1.3 sont sources ave comme entrée de   respectivement, le sommet 2 est de passage   les sommets 4.5 sont des puits avec sorties négatives et   unité de conteneurs par jour.
L'objectif du problème est de minimiser le coût du flux en réseau, satisfaisant toutes les conditions.
Étant un problème de programmation linéaire, il peut être résolu en utilisant le solveur, le SIMPLEX de réseau ou une généralisation de la méthode MODI (ou tremplin).

1.Utilisation du Solveur

Le primal du problème est formalisé comme suit :

Base temporel fixée : jour

Variables de décision :

(Flux en unités de conteneurs : un par unité de base temporel)

Minimiser le coût ■(24+7x〖_25〗+6x〖_34〗+3x〖_35〗+4x〖_45〗@z=∑_(i=n)^1 ∑_(j=n)^1 c〖_ij〗 x〖_ij〗=8x〖_12〗+6x〖_13〗+5x〖_〗)

Contraintes du primal: (Les lois de Kirchhoff avec la conservation, les sommets: k)

12〖_x〗+13〖_x〗=6

-12〖_x〗+x〖_24〗+x〖_25〗0=

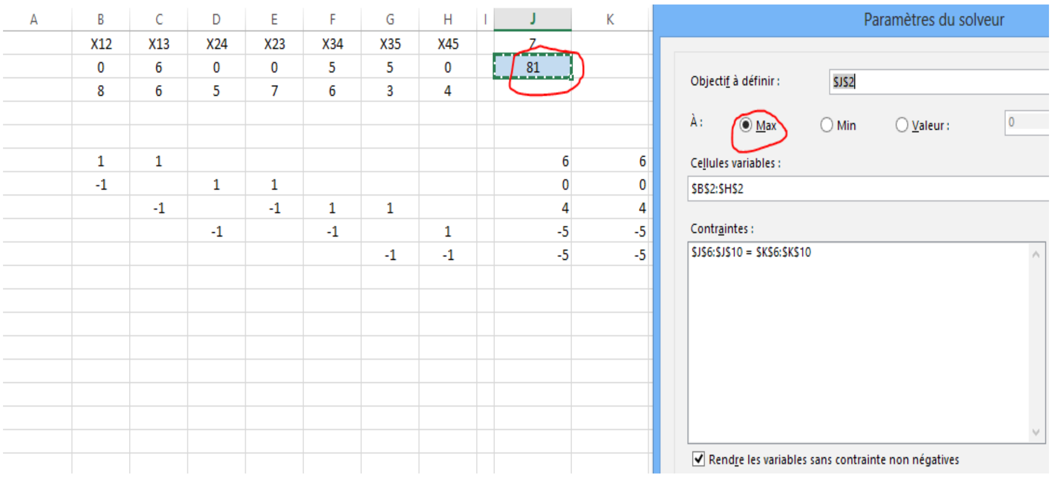
-x〖_13〗+x〖_34〗+x〖_〗354

-x〖_24〗-x〖_34〗+x〖_45〗-5=

-x〖_25〗-x〖_35〗-x〖_〗45-5

A noter que la somme des côtés gauches des contraintes et la somme des côtés droits sont tous les deux égaux à zéro ce qui montre que le système est linéairement dependant.

Appliquant du Solver du primal on obtient :

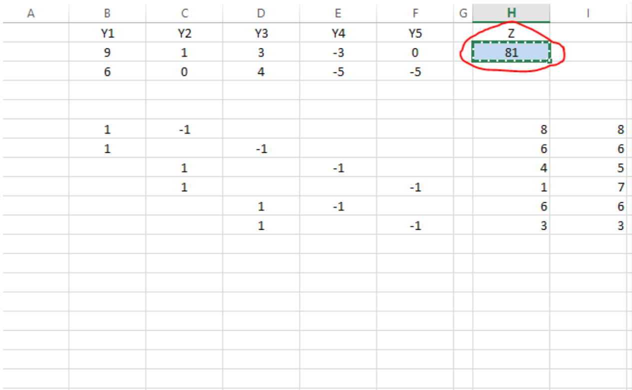


La solution optimale z= 81 obtenue en .

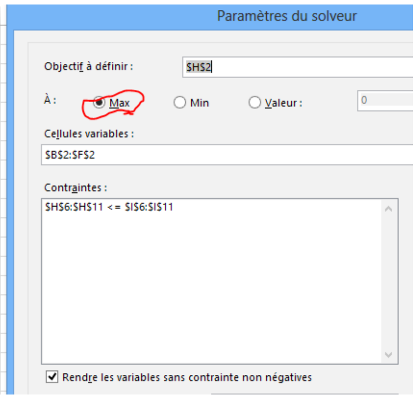
Pour le problème dual, comme le système primal est unimodulaire, l'une des variables du dual est libre:
Maximiser

Contraintes du dual:

Les variables sont de signe libre
En appliquant le SOLVER du double, on obtient:

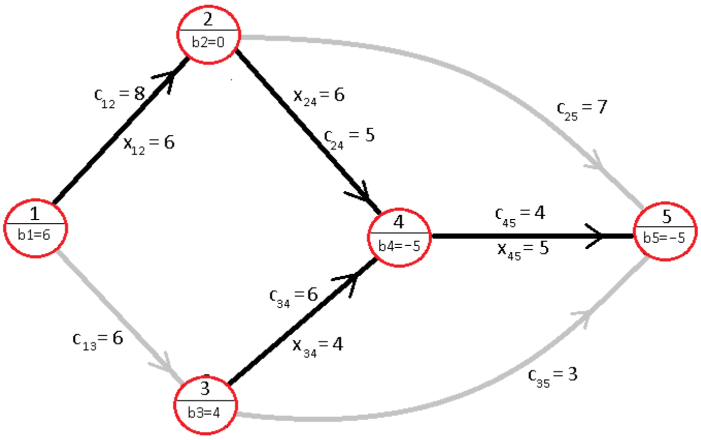


A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5		Z	
	9	1	3	-3	0		81	
	6	0	4	-5	-5			
	1	-1					8	8
	1		-1				6	6
		1		-1			4	5
		1			-1		1	7
			1	-1			6	6
			1		-1		3	3



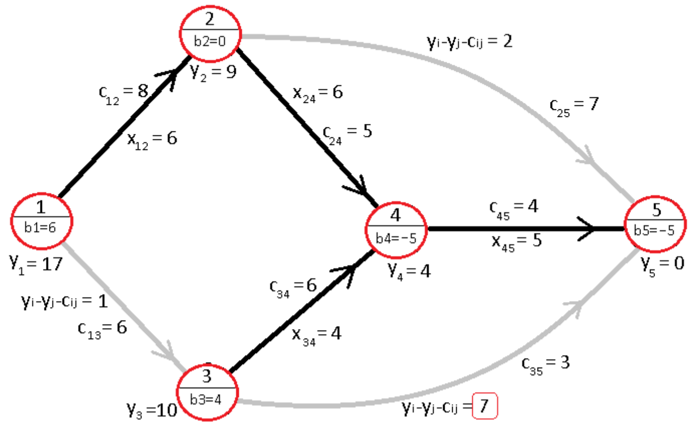
La solution obtenue en .

Le problème de coût minimum en réseau peut également être résolu en utilisant un algorithme SIMPLEX en réseau.
2. Utilisation du SIMPLEX en réseau
On commence par une solution de base réalisable arbitraire du problème primal :



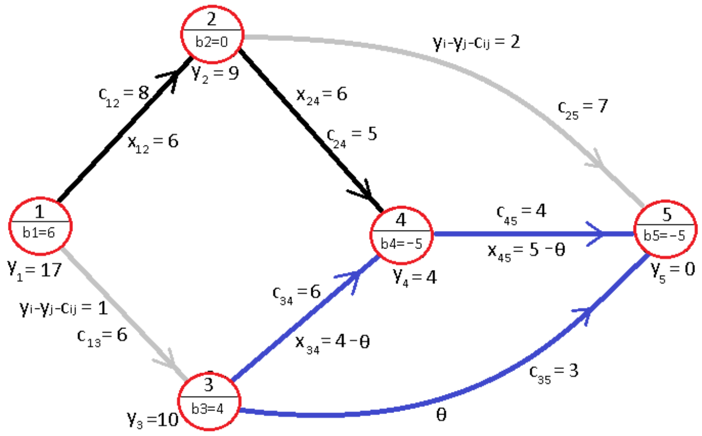
Comme il y a n=5 sommets, il y a au plus n-1 = 4 arêtes dans la solution (il peut être moins si la solution est dégénérée).
Par le théorème de complémentarité, dans des conditions optimales, nous avons:

Comme le problème primal est linéairement dépendant, une des variables duales est arbitraire et peut être égale à zéro, puis fixée et les autres sont calculées par la formule pour tous les arêtes de base
Pour les arêtes hors bases, on vérifie si la condition ou de manière équivalente est violée:

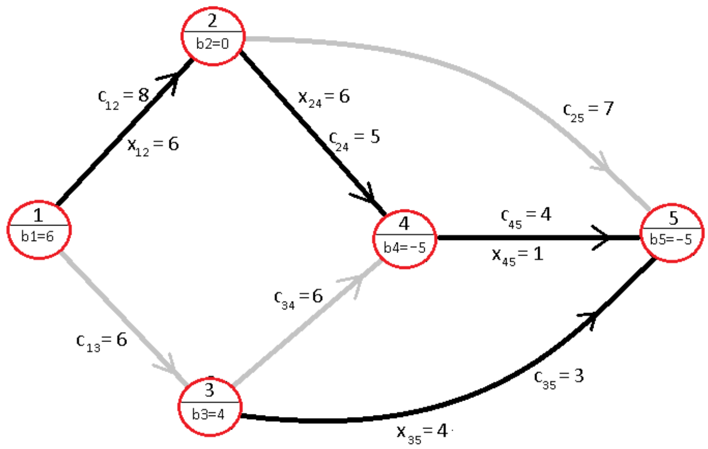


La solution du dual est n'est pas viable parce que la conditionest violée, donc la solution du primal n'est pas optimale.

L'arête avec une valeur maximale de entre dans la base avec un flux ⍰ et les flux dans les arêtes restants doivent être ajustés pour trouver la valeur la meilleur valeur de ⍰ compatible avec la loi de Kirchhoff:

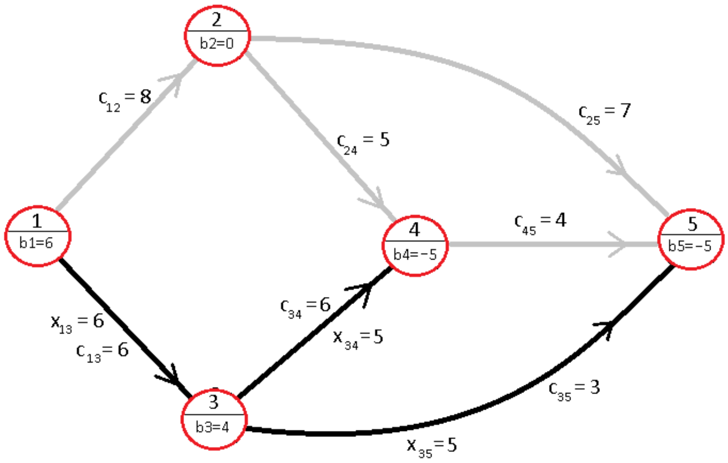


C'est la valeur 4 et les flux s'ajustent pour la seconde itération



On utilise la nouvelle solution de base pour répéter la procédure
S'il y a moins de arêtes dans la solution de base alors celle-ci est dégénérée et l'introduction d'une arête dans la base avec flux «petite ⍰ epsilon» permet de résoudre normalement.

Pour cet exemple, après quelques itérations, la solution optimale est obtenue



qui est la même solution trouvée par le SOLVER

3. Utilisation du transport généralisé

La méthode du simplex en réseau est une application de la méthode utilisée dans le problème de transport: nous utilisons le coin nord-ouest, le coût minimum ou Vogel pour trouver une solution de base, puis nous utilisons la méthode de tremplin ou MODI pour faire des itérations et d'optimiser la solution.

Pour utiliser la méthode du problème de transport dans l'exemple précédent, on crée un tableau similaire au problème de transport

	t1 = 3	t2 = 2	t3 = 2	t4 = 3	t5 = 1	total
s1 = 0	0	8	6	M	M	6
s2 = 3	M	0	M	5	7	
s3 = 1	M	M	0	6	3	4
s4 = 1	M	M	M	0	4	
s5 = 1	M	M	M	M	0	
				5	5	

Les entrées représentent le coût de l'arête respective

S'il n y a pas d'arête à l'entrée on marque « grand M », un nombre important comparé avec les nombres du problème.

sur la ligne ou total de la colonne marginale du problème, on marque l'entrée de ou du puits, à la fois avec des valeurs positives.

Le problème est équilibré avec total extrait de la source 6+4=10 est égale au total draine au 5+5=10.

On ajoute à cette valeur (10) à toutes les cellules de la ligne et la colonne marginale:

	t1 = 3	t2 = 2	t3 = 2	t4 = 3	t5 = 1	total
s1 = 0	0	8	6	M	M	16
s2 = 3	M	0	M	5	7	10
s3 = 1	M	M	0	6	3	14
s4 = 1	M	M	M	0	4	10
s5 = 1	M	M	M	M	0	10
	10	10	10	15	15	

Tous les sommets sont « artificiellement » source et puits d'une base de la valeur (10).
Maintenant, vous pouvez utiliser la méthode de transport pour obtenir le tableau suivant qui manque d'interprétation:

	t1 = 3	t2 = 2	t3 = 2	t4 = 3	t5 = 1	total
s1 = 0	10 10	8	6 6	M	M	16
s2 = 3	M	0 10	M	5	7	10
s3 = 1	M	M	0 4	6 5	3 5	14
s4 = 1	M	M	M	0 10	4	10
s5 = 1	M	M	M	M	0 10	10
	10	10	10	15	15	

Comme le graphique n'a pas de boucles, le coût dans la diagonale est 0 et les flux des arêtes en diagonale n'ont pas d'influence sur la fonction objectif.
Comme on a été ajouté un valeur de10 à tous les sommets, il est prévu que l'écoulement de aretes diagonales est 10, à l'exception des sommets de passage, dans ce cas, l'extrémité de sommet 3 où cette valeur est inférieure montrant que il est moins coûteux d'utiliser ce sommet dans le transport de 6 unites pour les autres sommets.
La solution est immédiatement donnée par les valeurs non diagonales, pour une solution optimale .

Conclusion

Dans cette unité quatre types de problèmes de flux de réseau ont été présentés:
minimum de l'arbre de Spanning-l'algorithme de Kruskal et Prim
Chemin le plus court-algorithmes de Dijkstra
Flux maximal- algorithmes de flux augmenté et théorème de Ford-Fulkerson
coût minimum de flux dans un réseau et l'analyse des réseaux avec plusieurs entrées et sorties.

Activité 3 – Étude de cas

Introduction:

Cette section présente des études de l'application des méthodes de recherche dans les unités précédentes de cas des projets de planification et de la théorie des jeux

Détails de l'activité:

La gestion de la planification et de projet
Comment coordonner l'exécution d'un projet avec plusieurs activités interdépendantes?
La procédure commence par la répartition des activités du projet, en identifiant pour chaque durée d'activité(s) précédent (s) immédiatement(s) et les événements qui sont le début et la fin d'une activité:

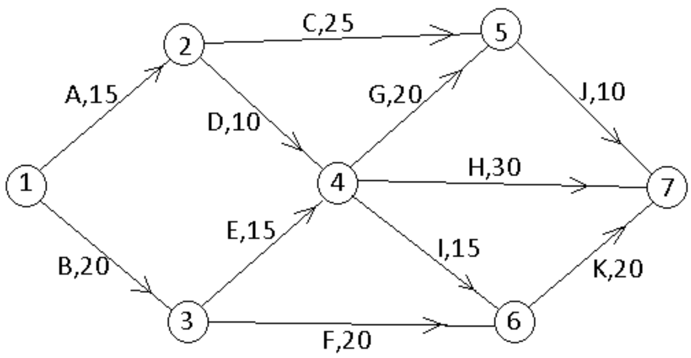
- activité
- durée
- priorité
- événement

Le projet peut être représenté dans deux types de réseau: l'activité sur l'arête (AOE) ou activité de source (AON).
Exemple de type de AOE est la suivante (Srinivasan, NPTEL)
Un groupe de théâtre a l'intention de projeter un événement en fonctions des données suivantes:

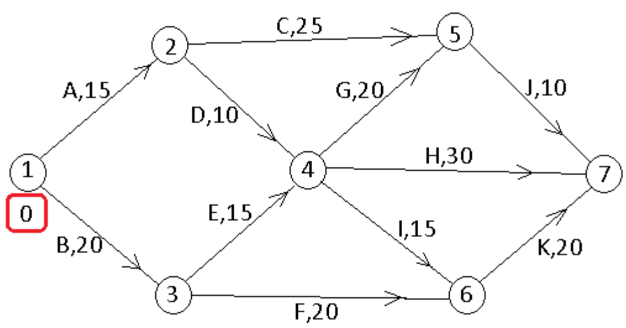
activité	Description	Retour immédiatement	Durée
A	Acteurs recrutés	-	15
B	Théâtre loué	-	20
C	Script final	A	25
D	Dosage unique	A	10
E	Stage de réparation	B	15
F	Améliorer l'éclairage	B	20
G	Répétition générale	D,E	20
H	événement Publicité	D,E	30

I	Distribuer les invitations	D,E	15
J	l'ajustement final	C,G	10
K	présentation publique	F,I	20

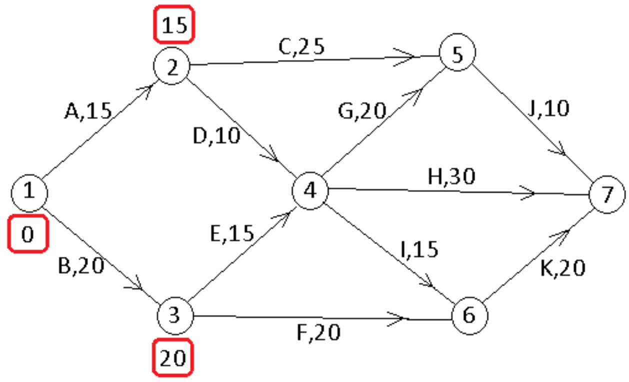
La relation de priorité permet de développer un réseau où les sommets sont des événements (début ou la fin d'une activité), les bords sont les activités et le poids associé à chaque bord (i, j) est la durée (coût temporel) de son activité respective :



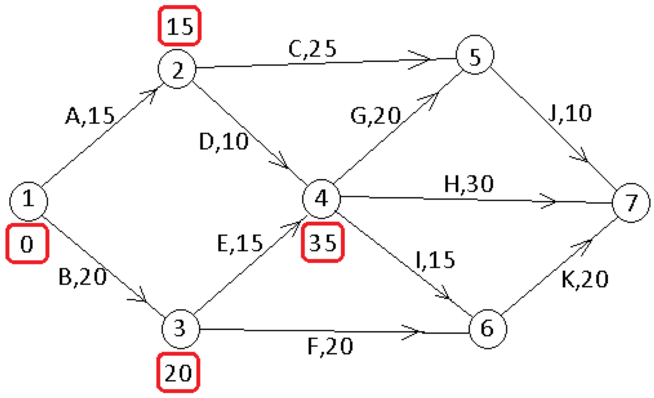
La principale différence entre ce problème avec le problème de flux de réseau est que la durée du bord (i, j) est une limite minimum et pas une limite maximale du flux dans l'arête.
Une activité a une certaine durée minimale, mais il peut prendre plus de temps s'il y a des retards.
Quel est le temps le plus court possible pour mener à bien le projet?
Pour résoudre ce problème, nous devons trouver le plus long chemin entre le début et la fin du projet, appelé le chemin critique.
Trouver le chemin critique dans un réseau est un problème NP-Hard, et donc nous ne disposons d'un algorithme général pour sa résolution mais disposons d'un algorithme pour vérifier si tout chemin trouvé est critique.
Mais dans les cas où le réseau est simple, comme l'exemple, il est possible d'utiliser la méthode de chemin critique (CPM), avec un passage direct:
Marquez le sommet de départ avec la valeur 0 (la boîte rouge)



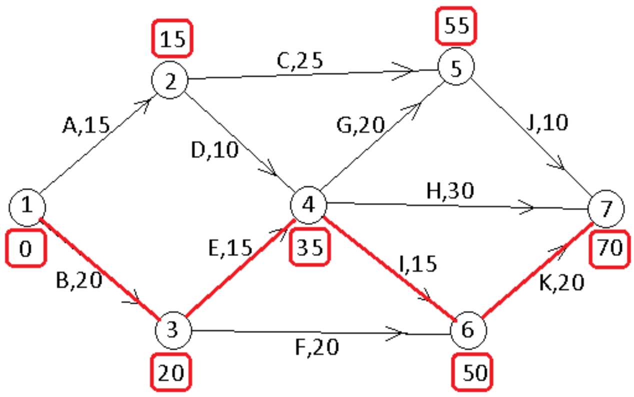
marquer les sommets suivants avec la plus grande valeur des marques des sommets précédents ainsi que le coût du temps des bords qui terminent le sommet



Dans le sommet 4 arrivent deux bords, via D avec 15+10=25 et par l'intermédiaire E avec 20+15=35, la valeur la plus élevée est choisi parce qu'ille est ce qui détermine la durée de l'ensemble du projet



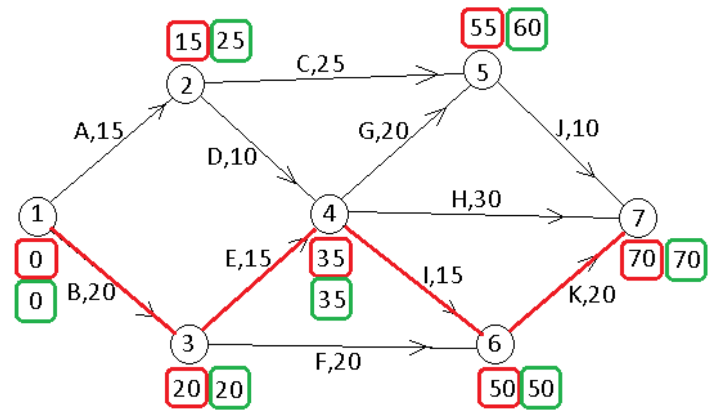
et en procédant de cette façon, vous arrivez au dernier sommet représentant l'achèvement du projet et le chemin critique est de 70 unités de temps, et les activités critiques sont marquées en rouge:



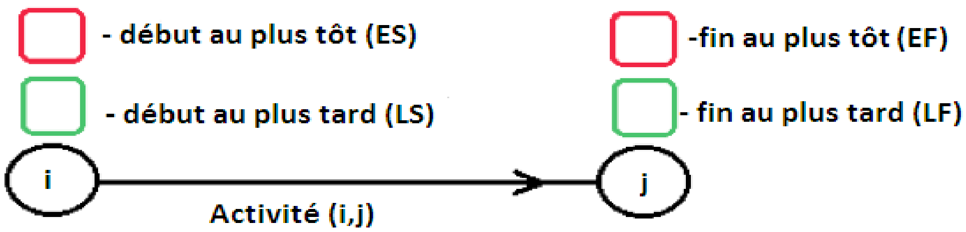
Pour les activités qui sont sur le chemin critique, tout retard affecte le temps de mise en œuvre du projet.

A noter que cet algorithme est similaire à l'algorithme de Dijkstra à la différence près qu'au lieu de choisir le chemin le plus court on choisit le chemin le plus long.

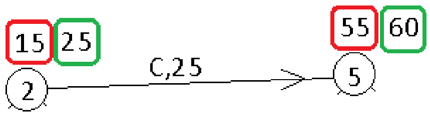
Nous pouvons également exécuter l'algorithme de CPM avec un passage inverse, en commençant par le dernier sommet avec 70 et en soustrayant le coût temporel du chemin inverse pour atteindre le premier sommet (valeurs dans la zone verte):



On vérifie que tous les sommets qui sont sur le chemin critique ont la même valeur à la fois dans le passage direct que dans le passage inverse .
La valeur obtenue à passage direct (boîte rouge) représente les valeurs premières dans l'ordre de départ en i et de fin j de l'activité (i, j)
La valeur obtenue avec le passage inverse (boîte verte) représente les valeurs plus tard du début en i et de la fin en j de l'activité (i, j):

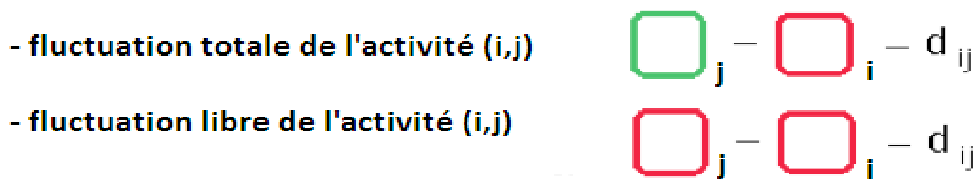


Par exemple, l'activité C entre les sommets et , avec les valeurs indiquées:

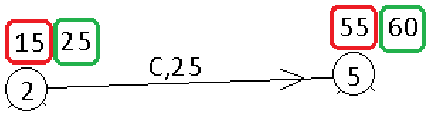


l'interprétation est la suivante:
le début au plus tôt de l'activité de C ne peut être de 15 unités de temps après le début du projet;
La fin au plus tôt de l'activité de C ne peut être de 55 unités de temps après le début du projet;
Le début au plus tard de l'activité C ne peut être de 25 unités de temps après le début du projet;

La fin au plus tard de l'activité C peut être de 60 unités de temps après le début du projet;
On définit la fluctuation totale et fluctuation libre d'une activité (i, j) avec:



Par exemple, l'activité de C entre les sommets et avec les valeurs indiquées:



La fluctuation totale de l'activité C est de
La fluctuation libre de l'activité C est de

La fluctuation libre est toujours inférieure ou égale à la fluctuation totale.
La fluctuation libre représente le tampon libre que l'activité doit être retardée sans affecter ni le coût total du chemin critique ni le chemin critique.
Un tampon supérieure de la fluctuation libre, mais inférieure à la fluctuation totale, n'affecte le coût total, mais le chemin critique peut déjà passer par d'autres arêtes.
Si le tampon est plus grand que la fluctuation totale alors l'activité (i, j) appartient au chemin critique et le coût total de changements en conformité.
Le problème de la RPC est un problème de programmation linéaire et possède une formulation primal et dual.

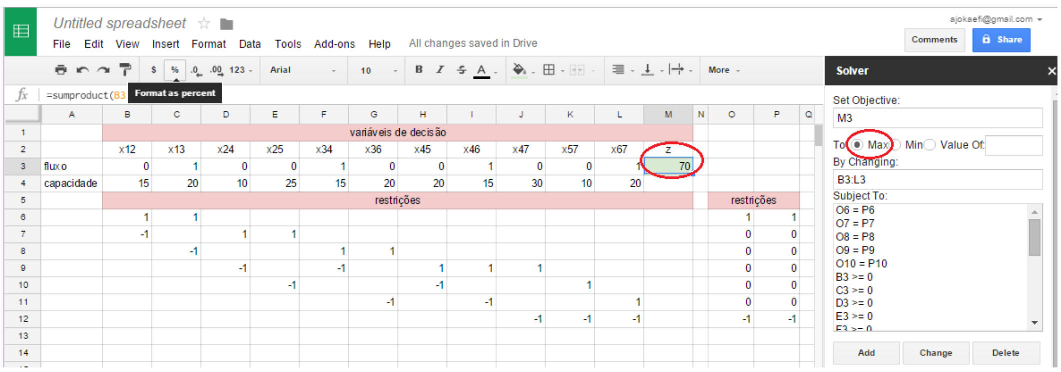
Formulation Primal:
variable de décision

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se aresta } (i,j) \text{ pertence ao caminho mais longo} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Maximiser

Contraintes (la loi de Kirchhoff aux sommets: Si le chemin critique passe par le sommet alors il existe une entrée et une sortie qui s'annulent sauf au début qui le total est +1 et la fin le total est -1 et ne passe pas par le sommet la somme est zéro)

Comme les contraintes forment un système uni modulaire on peut poser et résoudre le problème primal avec le Simplex ou le solveur:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		variáveis de decisão														
2		x12	x13	x24	x25	x34	x36	x45	x46	x47	x57	x67	z			
3	fluxo	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	70			
4	capacidade	15	20	10	25	15	20	20	15	30	10	20				
5		restrições													restrições	
6		1	1												1	1
7		-1		1	1										0	0
8			-1			1	1								0	0
9				-1		-1		1	1	1					0	0
10					-1			-1			1				0	0
11							-1		-1			1			0	0
12										-1	-1	-1			-1	-1
13																
14																

On obtient la même durée pour le projet et le même chemin critique.
Le problème dual est obtenu en utilisant les règles de conversion:

Minimise

Contraintes:

sont libres de signe.

Le problème peut être résolu avec le Simplex ou le solveur.
Parfois, il est nécessaire d'analyser les problèmes dans ce que la durée est une variable aléatoire et non pas une donnée déterminée.

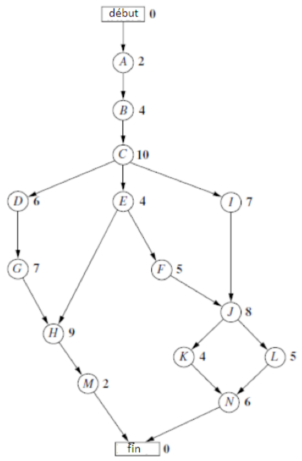
Exemple

La tendance moderne de la planification et de la gestion des projets est de faire l'analyse avec les activités dans les sommets.
A titre d'exemple d'un réseau d'activités d'un projet dans lequel l'activité est placée au sommet, nous utilisons l'exemple décrit dans le chapitre10 de Lieberman, Hillier.
La société Stroika a un maximum de 47 semaines pour construire une usine.

Une pénalisation de 300 sera applicable pendant une période de défaut.
Un bonus de150 sera attribué pour respecter le délai.
La construction de l'usine comprend 14 activités dont la durée et priorité sont données dans le tableau ci-dessous:

Activité	Description	Précédent immédiat	Durée
A	Les fouilles	-	2
B	Fondations	A	4
C	Maçonnerie	B	10
D	Couvertures	C	6
E	Eaux d'égout	C	4
F	Drainage maison	E	5
G	Travaux extérieurs	D	7
H	Peinture extérieure	E,G	9
I	Travaux d'électricité	C	7
J	Travaux platerie	F,I	8
K	Revêtements de sol intérieur	J	4
L	Peinture intérieure	J	5
M	Agencement d'intérieur	H	2
N	Installation extérieur	K,L	6

Vous pouvez utiliser un réseau AON (activité au niveau du nœud) pour représenter le projet, avec des relations de précédence représentés par les flèches (bords dirigés):



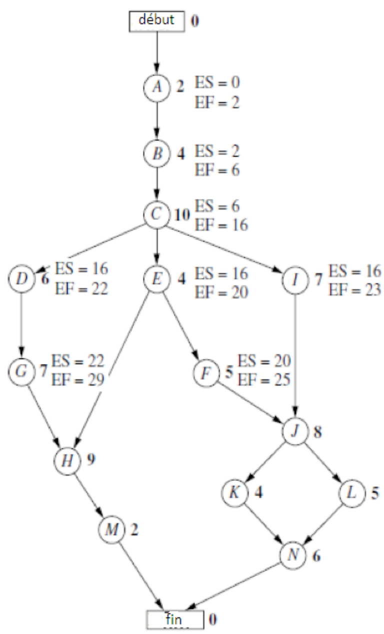
La durée de chaque activité est indiquée dans chaque sommet.
Deux activités de durée 0 sont ajoutées à la liste: le début et la fin du projet.

Un chef de projet a pour objectif de répondre aux questions suivantes:
Quel est le temps nécessaire pour exécuter le projet en cas de retard?
Les activités individuelles commencent-ils et se terminent-ils dans le but de respecter le délai ?
A quelle date au plus tôt peut commencer et se terminer le travail sans causer de retards ?
Quelles sont les activités d'embouteillage où tout retard aura une incidence sur le délai ?
Pour les autres activités, le retard est-il tolérable sans affecter la course ?
Pour répondre à ces questions, nous utilisons une procédure de deux passes: un passage direct qui calcule la date de début au plus tôt (ES) et de fin au plus tôt (EF) de chaque sommet. On calcule le début au plus tard (LS) et l'extrémité plus tard (LF) de chaque activité, en commençant par la fin.
Par passage direct :

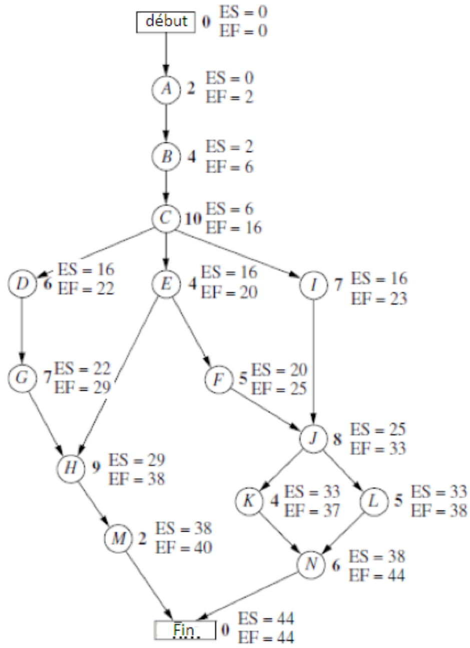
activité» début», et

l'activité A, et , ne peut pas avoir une fin plus tôt que la durée de l'activité;,

l' activité B et ne peut pas commencer avant la fin de l'activité précédente;



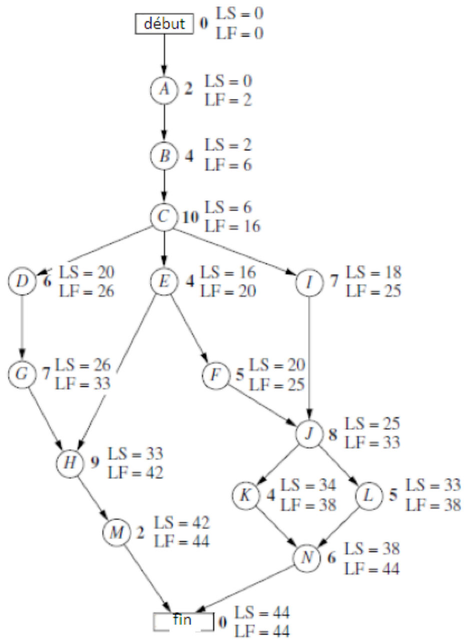
si une activité est supérieure à un exercice antérieur, elle ne peut pas commencer avant la fin de celle qui prend plus de temps, par exemple l'activité H doit attendre jusqu'à ce que les activités G et E prennent fin, donc ES doit être égal à la plus grande des activités immédiatement précédentes EF, donc ES=29



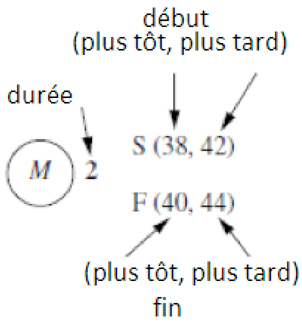
La procédure se poursuit jusqu'à ce que la durée de vie du projet (chemin le plus long).
Avec la procédure directe toutes les dates au plus tôt possibles sont calculées (premier calendrier de hasard)
Passage inverse

L'activité M , vous devez commencer au plus tard en et

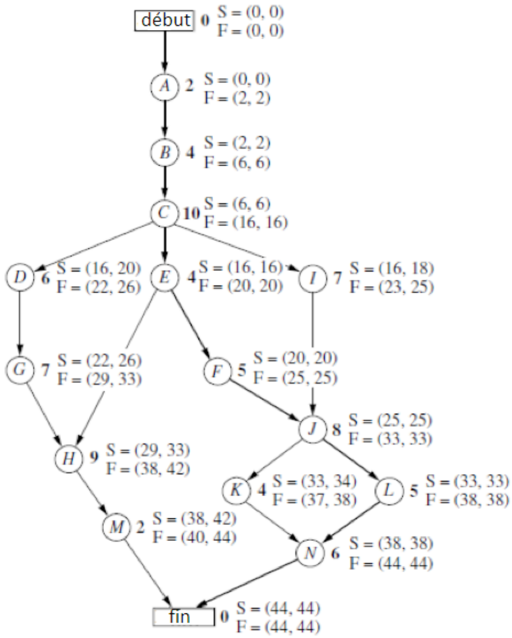
L'activité H, LF =LS de M=42, doit se terminer pour M jusqu'à son démarrage mais tard et :



Avec la procédure inverse toutes les dates possibles plus tard sont calculées (dernier calendrier de la chance).
Avec ces procédures chaque sommet du réseau donne un ensemble d'informations:



qui permettent d'analyser l'impact des retards et des lacunes possibles dans l'ensemble des activités du réseau:



Le dégagement de l'activité est la différence entre la fin plus tard et la fin plus tôt par :

Noter que l'on pourrait utiliser un début plus tard et un début plus tôt puisque

Les activités avec dégagement nul appartiennent au chemin critique dans le cas de cet exemple:

Méthode PERT

Au lieu d'adopter la distribution en probabilité pour la durée, il est courant d'utiliser trois valeurs d'estimation :

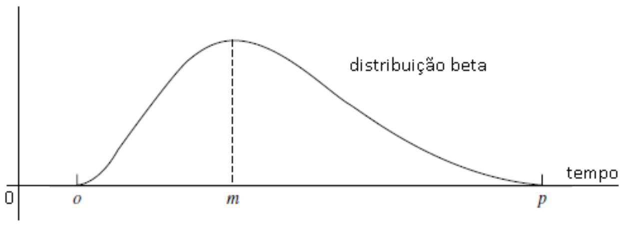
La durée d'optimisation :

La durée la plus probable :

La durée pessimiste :

Où

Le modèle est alors basé sur la distribution béta



Où l'espérance est et la variance est .

Alors le CPM est effectué avec l'espérance de la durée et le résultat trouvé sera la durée espérée du projet.

La méthode pour traiter le CPM est désignée par PERT (Programme d'Evaluation et Révision Technique) et plus souvent la méthode est désignée par PERT/CPM.

Il existe des logiciels spécifiques pour la gestion de projets tels que MS Project, Wrike, Basecamp, Bitrix24, Zoho et beaucoup d'autres.

Beaucoup de ces logiciels permettent à l'activité, la durée, la dépendance et les jeux d'entrer directement dans un tableau appelé tableau de Gantt (Gantt Henry, 1910).

Si la durée est une variable aléatoire, les valeurs sont utilisées: optimiste durée, pessimiste et probable de chaque activité et de la distribution bêta pour calculer la moyenne et la variance:

Si la période est une variable aléatoire, les valeurs sont utilisées: la durée optimiste et pessimiste probable de chaque activité et de la distribution bêta pour calculer la moyenne et la variance:

Activité	estimation optimiste o	estimation probable m	estimation pessimiste p	Moyenne $\mu = \frac{o+4m+p}{6}$	Variance $\sigma^2 = \left(\frac{p-o}{6}\right)^2$
A	1	2	3	2	$\frac{1}{9}$
B	2	$3\frac{1}{2}$	8	4	1
C	6	9	18	10	4
D	4	$5\frac{1}{2}$	10	6	1
E	1	$4\frac{1}{2}$	5	4	$\frac{4}{9}$
F	4	4	10	5	1
G	5	$6\frac{1}{2}$	11	7	1
H	5	8	17	9	4
I	3	$7\frac{1}{2}$	9	7	1
J	3	9	9	8	1
K	4	4	4	4	0
L	1	$5\frac{1}{2}$	7	5	1
M	1	2	3	2	$\frac{1}{9}$
N	5	$5\frac{1}{2}$	9	6	$\frac{4}{9}$

Outre les questions de planification et de gestion du temps (coûts de temps), nous pourrions être confrontés à des coûts économiques des activités de problèmes, la budgétisation et le contrôle des coûts du projet.

Le problème de planification suppose qu'il y a des ressources infinies pour les activités à réaliser, mais en pratique, nous devons introduire les ressources limitées, ce qui rend le problème NP-Hard.

Par exemple, l'activité peut être effectuée en 2 unités de temps, avec 3 moyens dans une catégorie professionnelle et 5 unités de matériel:..
En principe, la formulation d'un problème de planification avec des ressources limitées ajoute à la formulation du problème de planification plus de contraintes relatives à l'utilisation des ressources disponibles.
Ainsi, les équations de restriction perdent totalement la propriété uni modulaire et le problème devient une programmation complète, il ne sera pas traité ici.

Activité La théorie des jeux
On étudie l'exemple suivant:
Deux personnes A et B, chacune avec une pièce de monnaie, montrent simultanément un côté de la pièce de monnaie à l'adversaire:

Le gagnant est A s'il montre les deux faces (11) ou il montre les deux pile (00)
B gagne si on a (10) ou (01).

Quel est la meilleure perspective que le joueur A doit adopter ?

Pour que A gagne ou de perd, la table de retour (matrice pay-off) est la suivante (dans la perspective de B la matrice de paiement B est la table duale):

$$\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & 1 & 0 \\ \cline{3-4} A & 1 & 1 & -1 \\ & 0 & -1 & 1 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

Celui qui gagne obtient le prix+1 et celui qui perd est pénalisé d'une unité (gagne -1).
Le jeu est un gain de zéro parce que si A gagne alors B perd et si B gagne alors A perd.
Le joueur A a deux stratégies: soit il montre face (1) ou il montre pile(0), de même pour B.
La fréquence avec laquelle il montre la face(1) est et la fréquence avec laquelle il montre pile (0) est

De même, la fréquence avec laquelle B montre face (1) est et la fréquence avec laquelle il montre pile (0) est

$$\begin{array}{cc|cc|} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & q_1 & q_2 \\ \cline{3-4} A & p_1 & 1 & -1 \\ & p_2 & -1 & 1 \\ \cline{3-4} \end{array}$$

La stratégie des joueurs est la suivante:
A tente de maximiser le profit minimum B le concède – c'est la stratégie Maximin de A
B tente de minimiser autant préjudice que A veut l'infliger-stratégie MiniMax de B
Si un joueur a plus de chances de gagner (car il est plus expérimenté, ou plus fort, ou il est dopé) alors le jeu ne sera pas gain nul.

Exemple

Considérez un nouveau exemple avec la table de retour A

$$\begin{array}{cc|ccc|} & & & B & \\ & & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline A & p_1 & 3 & 2 & -1 \\ & p_2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Le joueur A a deux stratégies et le joueur B a trois stratégies.
Pour identifier les stratégies dominantes et le point col de la table de retour est donnée par:
les valeurs maximales des colonnes sont (maxcolumn)

$$\begin{array}{cc|ccc|} & & & B & \\ & & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline A & p_1 & 3 & 2 & -1 \\ & p_2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline & & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

les valeurs minimales des lignes sont (minrow)

$$\begin{array}{cc|ccc|} & & & B & \\ & & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline A & p_1 & 3 & 2 & -1 \\ & p_2 & 4 & 3 & 1 \\ \hline & & 4 & 3 & 1 \end{array}$$

Comme il y a des valeurs égales de la maxcolumn et de la ligne minrow, alors il existe des stratégies dominantes: Le joueur A doit toujours la stratégie 2 et B doit toujours jouer la stratégie 3.
L'entrée de la ligne 3 et de la colonne 2 est appelée point selle de la table de retour donné.
Exemple
Considérez un nouveau exemple avec la matrice paiement du joueur A

$$\begin{array}{cc|cc|} & & & B \\ & & q_1 & q_2 \\ \hline A & p_1 & 3 & -2 \\ & p_2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Le joueur A a deux stratégies et des plans pour maximiser le profit minimum que B l'accorde:
Le joueur A veut connaître la fréquence à laquelle devrait jouer la stratégie1 et fréquence que doit jouer la stratégie 2.

Le joueur B a également deux stratégies et vise à minimiser autant préjudice que A veut l'infliger::
Le joueur B veut connaître la fréquence   à laquelle devrait jouer la stratégie1 et la fréquence avec laquelledoit jouer la stratégie2.

D'abord, nous identifions les stratégies dominantes et le point selle de la table de paiement donnée:

les valeurs maximales des colonnes sont (maxcolumn)

$$\begin{array}{cc|cc|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & q_1 & q_2 \\
\cline{3-4}
A & p_1 & 3 & -2 \\
 & p_2 & 1 & 2 \\
\cline{3-4}
 & & 3 & 2
\end{array}$$

les valeurs minimales des lignes sont (minrow)

$$\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} & \\
 & & q_1 & q_2 & \\
\cline{3-4}
A & p_1 & 3 & -2 & -2 \\
 & p_2 & 1 & 2 & 1 \\
\cline{3-4}
 & & 3 & 2 &
\end{array}$$

Comme il n'y a pas de valeurs égales de maxcolumn et de minrow, il n'y a pas de strategies dominantes.

Pour les valeurs de e Calculer le module de la différence entre les valeurs des lignes et le module de la différence des valeurs de la colonne et les sommer; la proportion des valeurs en lignes et en colonnes avec le total est la valeur que vous voulez:

$$\begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} & \\
 & & q_1 & q_2 & \\
\cline{3-4}
A & p_1 & 3 & -2 & |3-(-2)|=5 \\
 & p_2 & 1 & 2 & |1-2|=1 \\
\cline{3-5}
 & & |3-1| =2 & |-2-2| =4 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
p_1 = 5/6 \\
p_2 = 1/6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
q_1 = 2/6 \\
q_2 = 4/6
\end{array}$$

La valeur attendue du revenu est

La valeur attendue des pertes est B

La raison pour laquelle ce résultat a à voir avec ce qui suit:
1 – Pour le joueur A

Si B joue constamment avec la stratégie1 alors le revenu de A est   et si B joue constamment la stratégie2, alors le revenu de A est ;

Le joueur veut utiliser le Maximin
maximiser u
avec des contraintes (minimisation des expressions)

S'il n y a aucun point de selle, alors la résolution simultanément avec est obtenue e

2 – Pour le joueur B

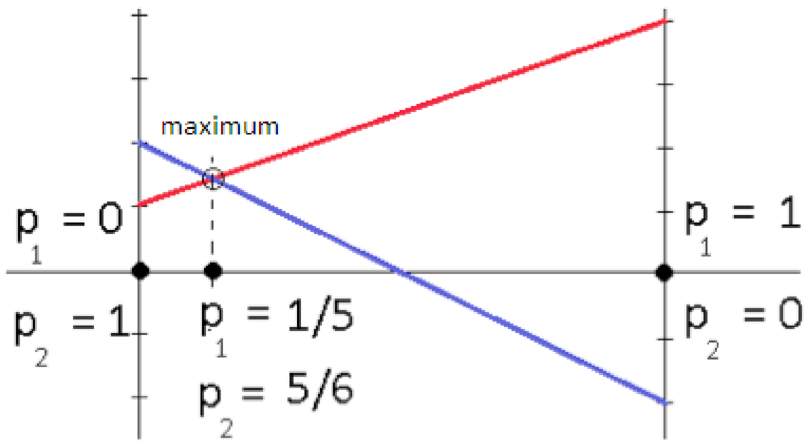
Si A joue constamment avec la stratégie 1 alors le préjudice de B est et Si A joue constamment avec la stratégie 2 alors le préjudice de B est;

Le joueur B a l'intention d'utiliser le MiniMax:
minimiser v
avec les contraintes (maximisation des expressions)

S'il n y a pas de point de selle, alors la résolution simultanément en tenant compte que est obtenue avec e

Le problème peut également être résolu par la méthode graphique:
les deux expressions pour le revenu de A sont données par

mais comme et sont liées par , de l'intersection des deux courbes donne un point maximum prétendu pour A



Exemple

Considérons la matrice de paiement suivante pour le joueur A

		B		
		q_1	q_2	q_3
A	p_1	3	4	1
	p_2	-2	-3	3

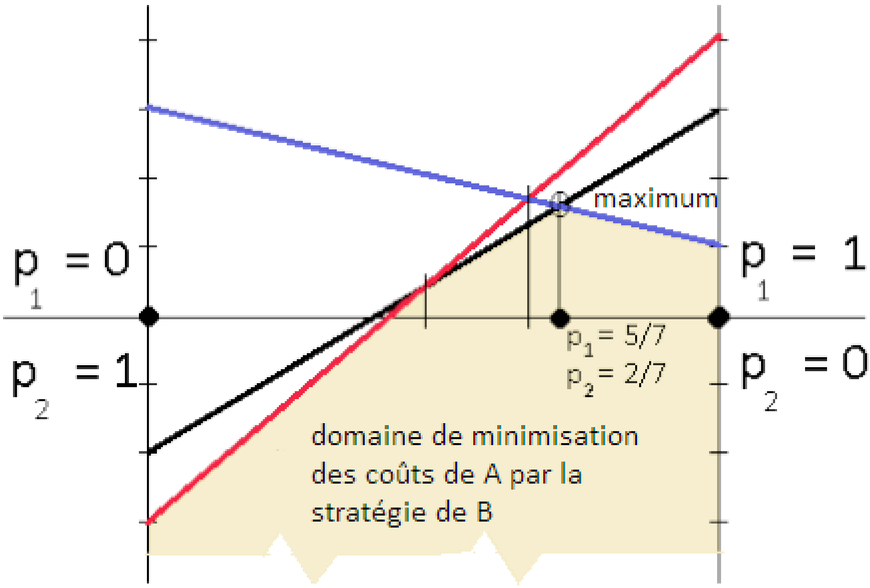
Il n'y a pas de valeurs communes entre le maxcolumn et le minrow

		B			
		q_1	q_2	q_3	
A	p_1	3	4	1	1
	p_2	-2	-3	3	-3
		3	4	3	

Il n'y a donc pas de point selle.
Le revenu de A lorsque B applique systématiquement les stratégies 1,2 et 3 respectivement, est donnée par les expressions:

en tenant compte de l'équation probabiliste:

Utilisation de la méthode graphique:



On obtient les valeurs e et la valeur attendue du revenu est

Les valeurs peuvent être obtenues de cette manière également (mais il est plus facile en utilisant la formulation de la PPL).

Le problème de l'optimisation de la stratégie de jeu peut être formulé sous forme d'un problème de programmation linéaire.
La formulation primal pour le joueur A est donnée par

Maximiser

Avec les contraintes

Valeur illimitée
La formulation du primal pour le joueur B est donnée par:
Minimiser

Avec les contraintes

valeur illimitée

Si l'on calcule la formulation duale pour le joueur B en appliquant les règles de conversion:
Variables duales:

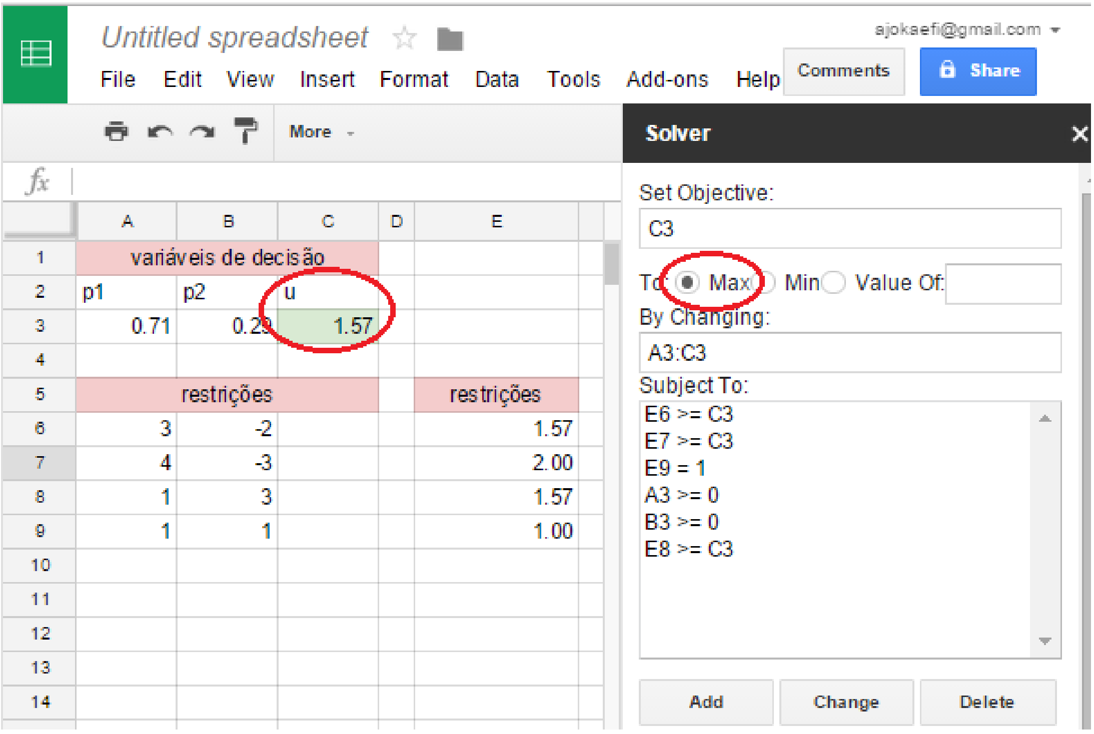
Minimise

Avec les contraintes

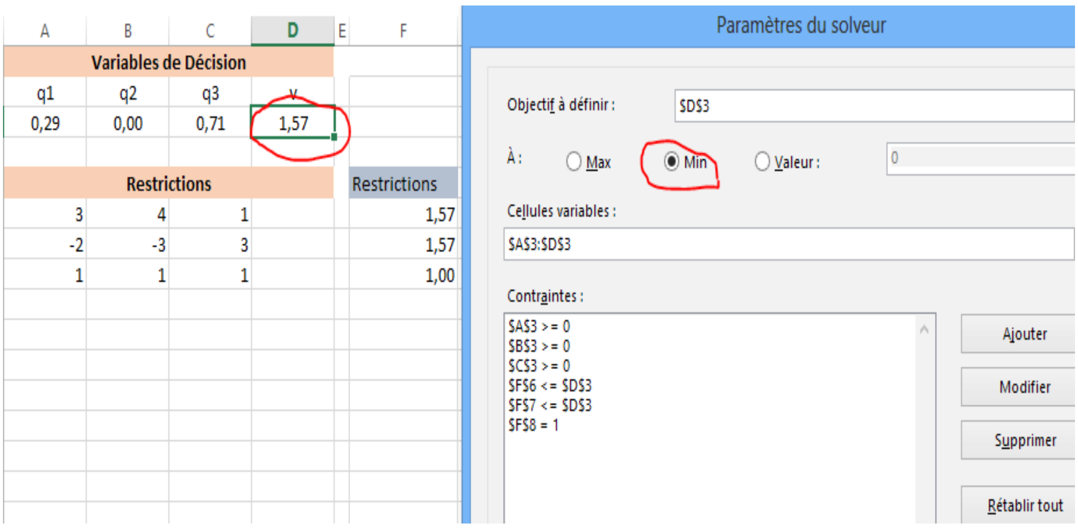
 est de signe quelconque.

On vérifie que c'est un problème de primal pour le joueur A, avec des variables remplacées par .

On peut vérifier également que le problème dual du joueur A est le primal B.
Avec l'utilisation du SOLVER primal du joueur A, on obtient:



Les valeurs et et la valeur attendue du revenu de A est de , les valeurs sont égales à celles obtenues précédemment.
Avec l'utilisation du solveur pour résoudre le primal du joueur B, on obtient les valeurs de :



.

Conclusion

De cas d'application de l'étude des méthodes a été présentée dans les précédentes unités d'études, dans les projets de planification et à la théorie des jeux.

Résumé de l'unité

Dans cette unité le problème d'optimisation de flux des réseaux a été présenté.
Les applications du problème de planification de projets ont été faites à la fin

Les applications des éléments de la théorie des jeux sont présentées

Évaluation de l'unité

Vérifiez votre compréhension!

Lectures et autres ressources

Les lectures et autres ressources de cette unité se trouvent au niveau des lectures et autres ressources du cours.

Siège de l'Université Virtuelle Africaine

The African Virtual University
Headquarters

Cape Office Park

Ring Road Kilimani

PO Box 25405-00603

Nairobi, Kenya

Tel: +254 20 25283333

contact@avu.org

oer@avu.org

Bureau Régional de l'Université Virtuelle Africaine à Dakar

Université Virtuelle Africaine

Bureau Régional de l'Afrique de l'Ouest

Sicap Liberté VI Extension

Villa No.8 VDN

B.P. 50609 Dakar, Sénégal

Tel: +221 338670324

bureauregional@avu.org