mini

Manuel de Mathématiques financières

Benjamin Legros

- Modèles financiers
- Projets d'investissement

Cours + Exos

DUNOD

Dans la même collection

Collain B., Déjean F., LeTheule M.-A., *Mini Manuel de Comptabilité*, 2011

Legros B., *Mini Manuel de Mathématiques pour la gestion*, 2011.

Legros G., *Mini Manuel de Finance d'entreprise*, 2010.

Kruger A., Ferrandi J.-M., Ingarao A., Carpentier L., *Mini Manuel de Marketing*, 2010.

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2011
ISBN 978-2-10-056605-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Copyright © 2011 Dunod.

Table des matières

Partie 1
Les modèles financiers

1 **Études de suites** 3

1.1 Suites arithmétiques 4
1.2 Suites géométriques 8
1.3 Suites arithmético-géométriques 12
Points clefs 14
Exercices 15
Solutions 17

2 **Les intérêts simples et l'escompte** 23

2.1 Mode de calcul des intérêts simples 24
2.2 Placements de courtes durées 25
2.3 Versements constants 29
2.4 Calcul du taux moyen 31
2.5 Exemples de livrets d'épargne 32
2.6 L'effet de commerce et l'escompte 33
2.7 Calcul de l'escompte 34
2.8 Équivalence de capitaux 35
2.9 Intérêts précomptés 36
Points clefs 38
Exercices 40
Solutions 43

Copyright © 2011 Dunod.

3 Les intérêts composés 55

3.1 Calcul des intérêts composés 55
3.2 Taux proportionnels et taux équivalents 59
3.3 Versements constants 60
Points clefs 68
Exercices 69
Solutions 71

4 Emprunts indivis 85

4.1 Principe général 86
4.2 Modes de remboursement classiques 92
4.3 Remboursements évolutifs 98
Points clefs 102
Exercices 104
Solutions 106

Partie 2
Les projets d'investissement

5 Outils d'évaluation d'un investissement 119

5.1 Éléments d'analyse d'un projet d'investissement 119
5.2 Comparaison de deux projets d'investissement 127
5.3 Prise de décision en avenir incertain 130
Points clefs 134
Exercices 135
Solutions 137

6 Emprunts obligataires 145

6.1 Principe de fonctionnement 146
6.2 Tableaux d'amortissement pour les obligations à taux fixe 151
6.3 Analyse du risque 157
Points clefs 160
Exercices 162
Solutions 163

Copyright © 2011 Dunod.

7 Valeur des actions 171

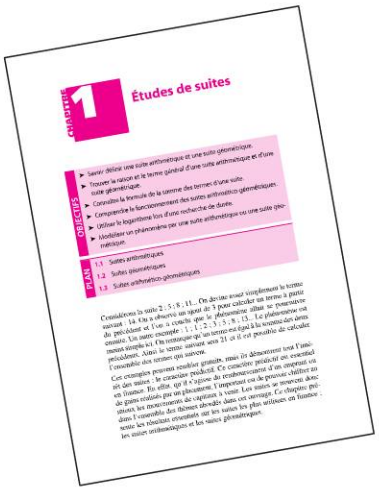
7.1 Mode d'évaluation 172
7.2 Risque et rentabilité 177
Points clefs 181
Exercices 182
Solutions 184

Index 189

Copyright © 2011 Dunod.

Comment utiliser le Mini Manuel ?

La page d'entrée de chapitre


CHAPITRE 1

Études de suites

OBJECTIFS

- Savoir définir une suite arithmétique et une suite géométrique.
- Trouver la raison et le terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Connaître la formule de la somme des termes d'une suite.
- Comparer le fonctionnement des suites arithmétiques-géométriques.
- Utiliser le logarithme lors d'une recherche de durée.
- Modéliser un phénomène par une suite arithmétique ou une suite géométrique.

PLAN

1.1 Suites arithmétiques
1.2 Suites géométriques
1.3 Suites arithmético-géométriques

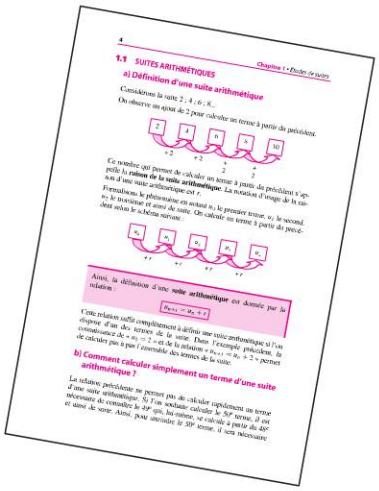
Considérons la suite 2 ; 5 ; 8 ; 11... On dit ici passer simplement le terme suivant : 14. On a observé un ajout de 3 pour calculer un terme à partir du précédent et l'on a conclu que le phénomène allait se poursuivre comme. Un autre exemple : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13... Le phénomène est moins simple ici. On remarque qu'un terme est égal à la somme des deux précédents. Ainsi le terme suivant sera 21 et il est possible de calculer l'ensemble des termes qui suivent.

Ces exemples peuvent sembler grossiers, mais ils démontrent tout l'intérêt des suites : le caractère prédictif. Ce caractère prédictif est essentiel en finance. En effet, qu'il s'agisse de rembourser/avoir un emprunt ou de gains réalisés par un placement, l'important est de pouvoir chiffrer ou estimer les montants/avoirs de chaque échéance. Ce chapitre présente l'ensemble des thèmes abordés dans cet ouvrage. Ce chapitre présente les théorèmes essentiels sur les suites les plus utilisées en finance : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Elle donne le plan du cours, ainsi qu'un rappel des objectifs pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré, expose les notions importantes du programme.


4

Chapitre 1 • Études de suites

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition d'une suite arithmétique

Considérons la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8...

On observe un ajout de 2 pour calculer un terme à partir du précédent.

2 4 6 8 10

+2 +2 +2 +2

Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite arithmétique**. La notation d'usage de la raison d'une suite arithmétique est r.

Formalisons le phénomène en notant u_1 le premier terme, u_2 le second, u_3 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :

u_1 u_2 u_3 u_4

+r +r +r

Ainsi, la définition d'une **suite arithmétique** est donnée par la relation :

$u_{n+1} = u_n + r$

Cette relation suffit complètement à définir une suite arithmétique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Dans l'exemple précédent, la connaissance de $u_1 = 2 = r$ et de la relation $u_{n+1} = u_n + 2$ permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite arithmétique ?

La relation précédente ne permet pas de calculer rapidement un terme d'une suite arithmétique. Si l'on souhaite calculer le 50e terme, il est nécessaire de connaître le 49e qui, lui-même, se calcule à partir du 48e et ainsi de suite. Ainsi, pour atteindre le 50e terme, il sera nécessaire

Les rubriques

Une erreur à éviter

Un peu de méthode

Les points clefs à retenir

Exercices

15

EXERCICES

1 Les modèles financiers

1.1 Recherche de la raison d'une suite arithmétique

Déterminer la raison des suites arithmétiques suivantes :

a) 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14

b) 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4

c) 15 ; 12 ; 9 ; 6

d) 4,56 ; 4,89 ; 5,22 ; 5,55

1.2 Recherche de la raison d'une suite géométrique

Déterminer la raison des suites géométriques suivantes :

a) 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162

b) 729 ; 243 ; 81 ; 27

c) 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4

d) 1,23 ; 1,291 5 ; 1,356 07 5 ; 1,423 878 75

1.3 Terme général et raison

Déterminer la raison et le terme général des suites arithmétiques définies par :

a) $u_1 = 6$ et $u_7 = 16$

b) $u_{11} = 10$ et $u_{51} = 4$

Déterminer la raison et le terme général des suites géométriques définies par :

c) $u_1 = 2$ et $u_4 = 8$

d) $u_7 = 25$ et $u_{14} = -1$ 84

1.4 Évolution d'un loyer

Un loyer a une valeur initiale de 500 €. On envisage deux types de contrat :

– Contrat A : Augmentation du loyer de 50 € par an.

– Contrat B : Augmentation du loyer de 5 % par an.

a) Déterminer, pour chacun des deux contrats, le loyer des années 1, 2, 3 et de l'année n.

b) En carrelé sur 20 ans, combien aura-t-on payé dans chacun des contrats ?

Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre, avec leur solution, pour se tester tout au long de l'année.

Copyright © 2011 Dunod.

PARTIE 1

Les modèles financiers

Chapitre 1	Études de suites	3
Chapitre 2	Les intérêts simples et l'escompte	23
Chapitre 3	Les intérêts composés	55
Chapitre 4	Emprunts indivis	85

Comment évaluer un placement financier ? Que représente un gain à venir dans le bilan d'une entreprise ? Que représente un taux d'intérêt ? Quels mécanismes déterminent un emprunt ?

La première partie de cet ouvrage a vocation à modéliser les aspects essentiels du calcul financier. Les modèles présentés sont appliqués des différents points de vue du particulier, de l'entreprise ou de la banque. Le premier chapitre « Les suites » est le fondement mathématique nécessaire à la compréhension des formules de la finance. Ses résultats mathématiques vont se trouver dans l'ensemble du livre. Le second chapitre « Intérêts simples et Escompte » permet d'estimer les placements de durées courtes sur des comptes réglementés du type Livret A. Il permet aussi d'appréhender le fonctionnement de l'escompte pour les entreprises. Le troisième chapitre « Intérêts composés » présente le calcul des placements de longues durées et de l'actualisation. Une application essentielle de ce chapitre est le calcul des rentes qui permet de concevoir le fonctionnement d'une retraite par capitalisation. Le quatrième chapitre « Emprunts Indivis » modélise les échanges financiers entre le préteur et l'emprunteur avec une mise en place des aspects comptables de l'emprunt.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 1

Études de suites

OBJECTIFS

- ➤ Savoir définir une suite arithmétique et une suite géométrique.
- ➤ Trouver la raison et le terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- ➤ Connaître la formule de la somme des termes d'une suite.
- ➤ Comprendre le fonctionnement des suites arithmético-géométriques.
- ➤ Utiliser le logarithme lors d'une recherche de durée.
- ➤ Modéliser un phénomène par une suite arithmétique ou une suite géométrique.

PLAN

1.1 Suites arithmétiques

1.2 Suites géométriques

1.3 Suites arithmético-géométriques

Copyright © 2011 Dunod.

Considérons la suite 2 ; 5 ; 8 ; 11... On devine assez simplement le terme suivant : 14. On a observé un ajout de 3 pour calculer un terme à partir du précédent et l'on a conclu que le phénomène allait se poursuivre ensuite. Un autre exemple : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13... Le phénomène est moins simple ici. On remarque qu'un terme est égal à la somme des deux précédents. Ainsi le terme suivant sera 21 et il est possible de calculer l'ensemble des termes qui suivent.

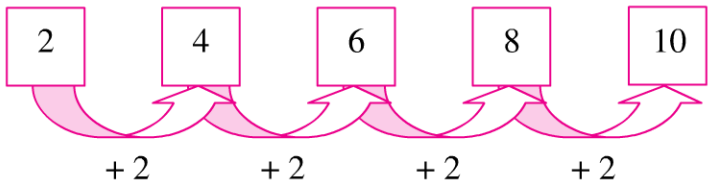
Ces exemples peuvent sembler gratuits, mais ils démontrent tout l'intérêt des suites : le caractère prédictif. Ce caractère prédictif est essentiel en finance. En effet, qu'il s'agisse du remboursement d'un emprunt ou de gains réalisés par un placement, l'important est de pouvoir chiffrer au mieux les mouvements de capitaux à venir. Les suites se trouvent donc dans l'ensemble des thèmes abordés dans cet ouvrage. Ce chapitre présente les résultats essentiels sur les suites les plus utilisées en finance : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition d'une suite arithmétique

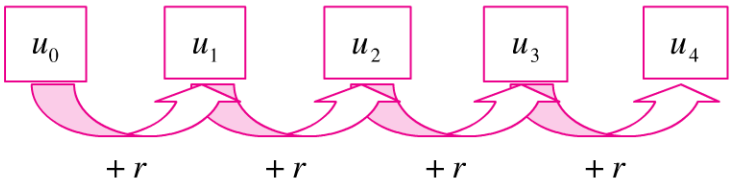
Considérons la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8...

On observe un ajout de 2 pour calculer un terme à partir du précédent.



Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite arithmétique**. La notation d'usage de la raison d'une suite arithmétique est r.

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le second, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :



Ainsi, la définition d'une **suite arithmétique** est donnée par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Cette relation suffit complètement à définir une suite arithmétique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Dans l'exemple précédent, la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = u_n + 2$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite arithmétique ?

La relation précédente ne permet pas de calculer rapidement un terme d'une suite arithmétique. Si l'on souhaite calculer le 50^e terme, il est nécessaire de connaître le 49^e qui, lui-même, se calcule à partir du 48^e et ainsi de suite. Ainsi, pour atteindre le 50^e terme, il sera nécessaire

Copyright © 2011 Dunod.

d'effectuer un grand nombre de calculs. C'est pour cela qu'il est essentiel de mettre en place une formule générale qui fournit n'importe quel terme indépendamment du précédent.

Pour construire cette formule, on peut partir de la définition suivante pour calculer u_1 : $u_1 = u_0 + r$

De même pour calculer u_2 :

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2 \times r$$

Puis :

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2 \times r) + r = u_0 + 3 \times r$$

Ces premiers résultats induisent une **formule générale** :

$$\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$$

Remarque : la démarche présentée induit la formule mais n'a pas valeur de démonstration mathématique. Une démonstration rigoureuse utiliserait le principe de récurrence.

Si l'on ne dispose pas du terme u_0 mais d'un autre terme u_k, le terme général d'une suite arithmétique est donné par la relation suivante :

$$\boxed{u_n = u_k + (n - k) \times r}$$

Exemple

Cherchons le terme général de la suite arithmétique de raison 3 sachant que $u_5 = 22$.

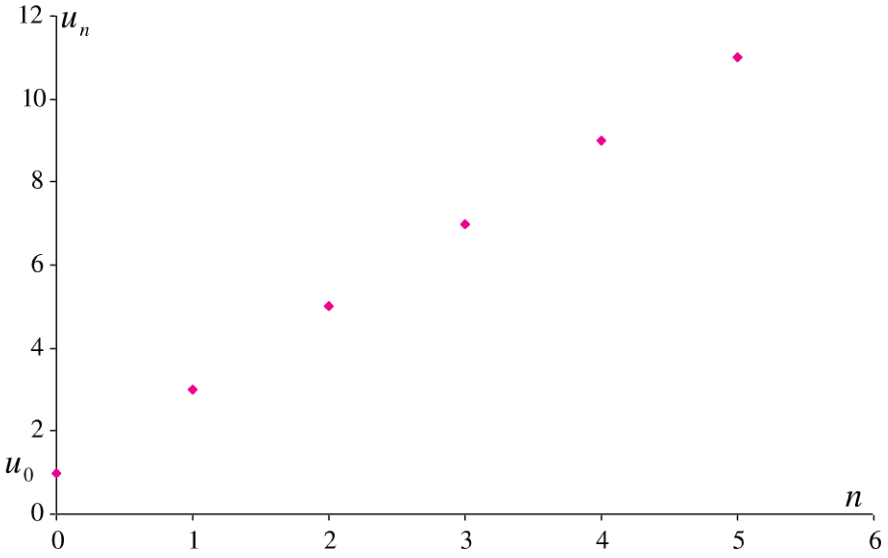
Par application de la formule précédente avec $k = 5$, on trouve :

$$u_n = u_5 + (n - 5) \times 3 = 22 + (n - 5) \times 3 = 22 + 3 \times n - 15$$
$$= 7 + 3 \times n$$

c) Représentation graphique et sens de variation

Les termes successifs d'une suite arithmétique peuvent être représentés graphiquement. Les points représentés sont alignés sur une droite de pente r et d'ordonnée à l'origine u_0.

Copyright © 2011 Dunod.



Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend de sa raison :

– Si $r > 0$ la suite est croissante.

– Si $r < 0$ la suite est décroissante.

– Si $r = 0$ la suite est constante.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut chercher à cumuler les termes d'une suite. Ce calcul a un intérêt dès que l'on souhaite cumuler des valeurs.

On cherche à calculer : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

En écrivant cette somme « à l'envers » on trouve :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0$$

Ainsi en additionnant les deux lignes précédentes, terme à terme, on trouve :

$$2 \times S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_n + u_0)$$

À première vue, ce regroupement peut sembler artificiel mais la remarque suivante va simplifier l'expression :

On a $u_0 + u_n = u_0 + u_0 + n \times r = 2 \times u_0 + n \times r$

$u_1 + u_{n-1} = u_0 + r + u_0 + (n-1) \times r = 2 \times u_0 + n \times r = u_0 + u_n$

$u_2 + u_{n-2} = u_0 + 2 \times r + u_0 + (n-2) \times r = 2 \times u_0 + n \times r$

$= u_0 + u_n$

$u_k + u_{n-k} = u_0 + k \times r + u_0 + (n-k) \times r = 2 \times u_0 + n \times r$

$= u_0 + u_n$

Copyright © 2011 Dunod.

Ainsi chaque terme de la somme est égal à $u_0 + u_n$

$$2 \times S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)}_{n+1 \ fois}$$

En remarquant que cette somme est constituée de $n + 1$ termes identiques, on en déduit que :

$$2 \times S = (n + 1) \times (u_0 + u_n)$$

La formule de la somme est donc :

$$S = \frac{(u_0 + u_n) \times (n + 1)}{2}$$

Cette formule nécessite de connaître u_0, on peut généraliser l'expression ainsi :

$$S = \frac{(1^{er} \text{ terme } + \text{ dernier terme}) \times \text{Nombre de terme}}{2}$$

Remarque : cette dernière formule évite le problème des indices des suites et les questions du type *que faire si le premier terme n'est pas* u_0 *mais* u_1 *?*

Exemple

Calcul de la somme des 100 premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = S$$

La suite des entiers naturels est arithmétique de raison 1. Le premier terme est 1, le dernier est 100 et le nombre de termes est 100. Ainsi :

$$S = \frac{(100 + 1) \times 100}{2} = 101 \times 50 = 5\,050$$

Ce calcul peut se faire quasiment de tête alors que la somme pas à pas des entiers nécessiterait au moins un tableur.

e) En pratique où trouve-t-on des suites arithmétiques ?

Les suites arithmétiques se trouvent dans les phénomènes pour lesquels on envisage un ajout ou un retrait d'une même valeur à chaque période.

Exemples

- Un loyer augmente de 400 € par mois.
- On retire 500 € de son compte tous les ans.

Copyright © 2011 Dunod.

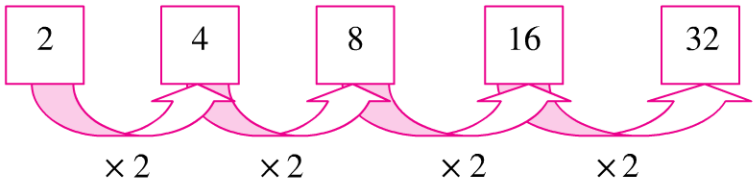
- Une production augmente de 100 unités par jour.
- Les intérêts sont simples.

1.2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

a) Définition d'une suite géométrique

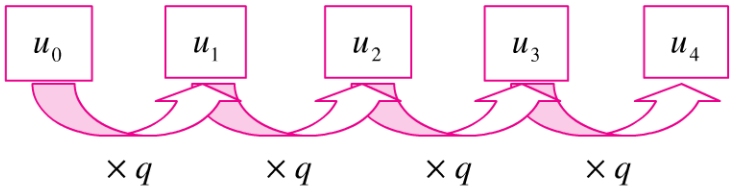
Considérons la suite 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32...

Cette suite commence comme la suite arithmétique 2 ; 4 ; 6 ; 8... mais elle augmente beaucoup plus vite. En effet, pour calculer un terme à partir du précédent, on multiplie par 2 selon le schéma suivant :



Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite géométrique** dont la notation d'usage est q.

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :



Ainsi la définition d'une **suite géométrique** est donnée par la relation :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque : cette relation suffit complètement à définir une suite géométrique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Ainsi dans l'exemple précédent la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = 2 \times u_n$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite géométrique ?

Comme pour les suites arithmétiques, il est utile de disposer d'une relation permettant de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique indépendamment.

La définition d'une suite géométrique permet de calculer $u_1 = q \times u_0$.
De même $u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$
et $u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^2 \times u_0$

Ces premières observations induisent la formule du **terme général** d'une suite géométrique à l'aide du premier terme :

$$u_n = q^n \times u_0$$

Si l'on ne dispose pas du premier terme, la formule suivante est utile :

$$u_n = q^{n-k} \times u_k$$

Exemple

On cherche à donner le terme général d'une suite géométrique de raison 5 sachant que $u_3 = 625$. En appliquant la formule précédente à $k = 3$, on trouve :

$$u_n = 5^{n-3} \times u_3 = 5^{n-3} \times 625 = 5^{n-3} \times 5^4 = 5^{n+1}$$

c) Représentation graphique et sens de variations

Les points représentatifs d'une suite géométrique représentent une courbe de type « exponentielle » sur un graphe. Le sens de variation et la convergence de la suite sont donnés par la valeur de la raison q.

– Si $q > 1$ la suite est croissante et non convergente.

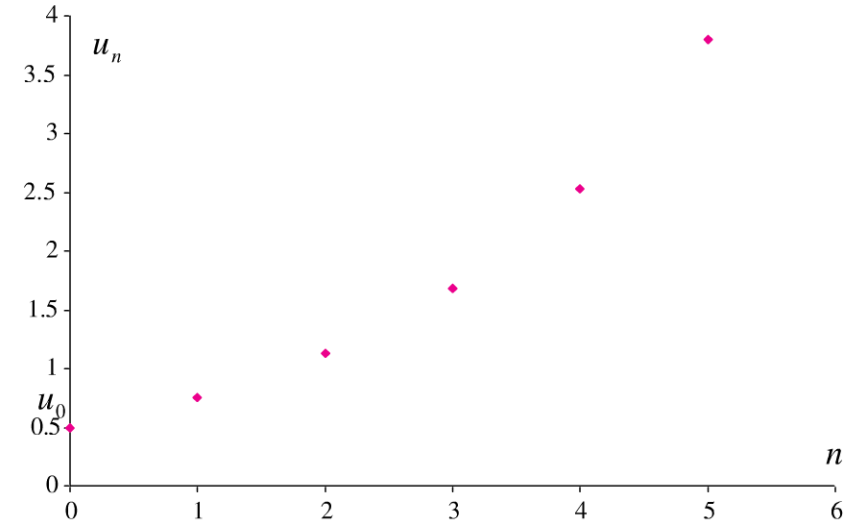
– Si $q = 1$ la suite est constante.

– Si $0 < q < 1$ la suite est décroissante et converge vers 0.

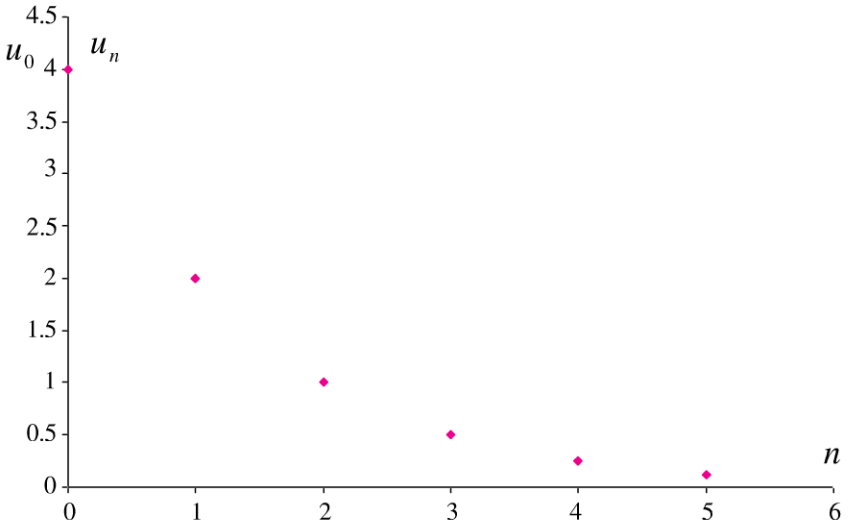
– Si $q = 0$ la suite est constante.

– Si $q < 0$ la suite n'est ni croissante ni décroissante.

Copyright © 2011 Dunod.



Suite géométrique avec $q > 1$



Suite géométrique avec $0 < q < 1$

d) Somme des termes d'une suite géométrique

Comme pour les suites arithmétiques, il est utile de connaître une formule permettant de calculer simplement la somme des termes d'une suite géométrique.

On cherche à calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

On a : $q \times S = q \times u_0 + q \times u_1 + q \times u_2 + \cdots + q \times u_n$

or : $u_1 = q \times u_0$; $u_2 = q \times u_1$; ... ; et $u_{n+1} = q \times u_n$

ainsi :

$$q \times S = u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_{n+1}$$

Copyright © 2011 Dunod.

On remarque que cette expression est proche de celle de S, d'où $q \times S - S = u_{n+1} - u_0$

La plupart des termes disparaissent par soustraction.

Ainsi $(q-1) \times S = u_{n+1} - u_0$

et si $q \neq 1$ alors $S = \dfrac{u_{n+1} - u_0}{q-1}$

or $u_{n+1} = q^{n+1} \times u_0$ donc $S = \dfrac{q^{n+1} \times u_0 - u_0}{q-1}$

et en factorisant par u_0 :

$$S = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} \times u_0$$

On retient cette formule plus générale qui ne nécessite pas de commencer la somme à u_0 :

$$S = \frac{q^{\text{Nombre de termes}} - 1}{q-1} \times 1^{\text{er}} \text{ terme}$$

Remarque : Les deux formules précédentes ne sont valables que pour $q \neq 1$. Le cas où $q = 1$ revient au cas d'une suite géométrique de raison 1 ; autrement dit d'une suite constante. La somme des termes est par conséquent égale à un terme de la suite multiplié par le nombre de termes de la somme.

e) En pratique où trouve-t-on des suites géométriques ?

Les suites géométriques interviennent dans les phénomènes pour lesquels on envisage une multiplication par un facteur constant à chaque période.

Exemples

- Une production baisse de 2 % par mois.
- Un salaire augmente de 10 % par an.
- L'entreprise double de volume tous les ans.
- Les intérêts sont composés.

Remarque : Une augmentation de 10 % se traduit par une multiplication par 1,1. Une baisse de 2 % se traduit par une multiplication par 0,98.

Copyright © 2011 Dunod.

De façon générale, une augmentation de t % se traduit par une multiplication par $1 + t$ %, et une baisse de t % se traduit par une multiplication par $1 - t$ %.

Résoudre une équation comportant une puissance

Ce type d'équations se rencontre dans la recherche de durées, pour répondre à des questions du type « au bout de combien de temps... ? ».

Dans les suites géométriques, le temps « n » se trouve en exposant. En cherchant à isoler n on va finir par trouver une équation du type $a^n = b$.

La méthode pour poursuivre la résolution est l'utilisation du **logarithme** de manière à linéariser l'équation. On a $\ln(a^n) = \ln(b)$ qui, par propriété du logarithme, donne $n \times \ln(a) = \ln(b)$ et ainsi $\boxed{n = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}}$

L'utilisation d'une racine n-*ième* ne permet pas de trouver la solution car,

si $a^n = b$, on a $a = b^{\frac{1}{n}}$

On utilise ainsi une expression de b en fonction de a pour construire une expression de a en fonction de b qui ne sert pas à isoler n.

1.3 SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Les **suites arithmético-géométriques** se définissent par la relation :

$$\boxed{u_{n+1} = a \times u_n + b}$$

Ces suites peuvent être des suites arithmétiques lorsque $a = 1$, et des suites géométriques lorsque $b = 0$.

On cherche à déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique. La méthode est la suivante.

1. Recherche du point fixe de la relation $u_{n+1} = a \times u_n + b$

On remplace u_n et u_{n+1} par x : $x = ax + b$ ainsi $x(1 - a) = b$ et si $a \neq 1$ on a $x = \dfrac{b}{1 - a}$. Le cas $a = 1$ est celui d'une suite arithmétique, il ne présente donc pas d'intérêts dans cette partie. On supposera par conséquent pour la suite que $a \neq 1$.

2. Introduction d'une suite auxiliaire $v_n = u_n - x = u_n - \dfrac{b}{1 - a}$

Copyright © 2011 Dunod.

On a donc $u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a}$

par conséquent $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = a\left(v_n + \dfrac{b}{1-a}\right) + b$

donc $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{ab}{1-a} + b$

et $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{ab + b(1-a)}{1-a}$

donc $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{b}{1-a}$

et ainsi :

$$\boxed{v_{n+1} = av_n}$$

Cette suite est par conséquent une suite géométrique de raison a.

3. Terme général de u_n

Le terme général de la suite v_n en fonction de v_0 est donc $v_n = a^n \times v_0$.

Or $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ et $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$

donc $u_n - \dfrac{b}{1-a} = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)$

et ainsi :

$$\boxed{u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

On peut déduire le terme général d'une suite arithmético-géométrique en fonction de u_k :

$$\boxed{u_n = a^{n-k}\left(u_k - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

Exemple

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 0$. On a ainsi $a = 2$, $b = 1$ et $u_0 = 0$. Par conséquent, $u_n = 2^n\left(0 - \dfrac{1}{1-2}\right) + \dfrac{1}{1-2} = 2^n \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 2^{n-1} - \dfrac{1}{2}$

Copyright © 2011 Dunod.

POINTS CLEFS

- Utilisation d'une suite arithmétique : ajout ou retrait d'une même valeur à chaque période.
- Utilisation d'une suite géométrique : multiplication par un même facteur à chaque période.
- Résumé des formules :

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général en fonction de u_0	$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = q^n \times u_0$
Terme général en fonction de u_k	$u_n = u_k + (n - k) \times r$	$u_n = q^{n-k} \times u_k$
Somme des termes	$S = \dfrac{(1^{er}\text{terme} + \text{dernier terme}) \times \text{Nombre de termes}}{2}$	$S = \dfrac{q^{\text{Nombre de termes}} - 1}{q - 1} \times 1^{er}\text{terme}$

- Terme général d'une suite arithmético-géométrique :

$$u_n = a^{n-k}\left(u_k - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

- Résolution d'une équation avec une puissance : on utilise le logarithme pour linéariser une équation du type $a^n = b$.

Copyright © 2011 Dunod.

EXERCICES

1.1 Recherche de la raison d'une suite arithmétique

Déterminer la raison des suites arithmétiques suivantes :

a) 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14

b) 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4

c) 15 ; 12 ; 9 ; 6

d) 4,56 ; 4,89 ; 5,22 ; 5,55

1.2 Recherche de la raison d'une suite géométrique

Déterminer la raison des suites géométriques suivantes :

a) 2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162

b) 729 ; 243 ; 81 ; 27

c) 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4

d) 1,23 ; 1,291 5 ; 1,356 075 ; 1,423 878 75

1.3 Terme général et raison

Déterminer la raison et le terme général des suites arithmétiques définies par :

a) $u_0 = 8$ et $u_3 = 14$

b) $u_5 = 10$ et $u_9 = 4$

Déterminer la raison et le terme général des suites géométriques définies par :

c) $u_3 = 2$ et $u_4 = 8$

d) $u_7 = 23$ et $u_{10} = -184$

1.4 Évolution d'un loyer

Un loyer a une valeur initiale de 500 €. On envisage deux types de contrat :

– Contrat A : Augmentation du loyer de 50 € par an.
– Contrat B : Augmentation du loyer de 5 % par an.

a) Déterminer, pour chacun des deux contrats, le loyer des années 1, 2, 3 et de l'année n.

b) En cumulé sur 20 ans, combien aura-t-on payé dans chacun des contrats ?

Copyright © 2011 Dunod.

c) Au bout de combien de temps le loyer aura-t-il doublé dans chacun des contrats ?

d) Quel contrat choisir (vous nuancerez la réponse selon la durée de votre séjour) ?

1.5 Assèchement d'un lac

Un lac a un volume de 100 000 litres. Une rivière en amont alimente le lac ; elle fournit chaque jour 1 000 litres d'eau au lac. Les agriculteurs qui développent leur exploitation autour du lac prélèvent chaque jour une quantité d'eau. Leur consommation d'eau augmente de 0,5 % par jour. Supposons que le premier jour de notre observation ils prélèvent 400 litres d'eau.

Supposons que le volume du lac demeure constant. Une rivière en aval du lac permet d'évacuer le surplus d'eau (de manière à ce que le volume du lac reste constant).

a) Déterminer le volume V d'eau par jour de la rivière en aval en fonction du nombre de jours d'observation j.

b) À quelle date $V = 0$? Qu'est-ce que cela signifie pour le lac ?

c) Déterminer le volume total U d'eau fournit par la rivière en amont pendant j jours. Déterminer le volume total W d'eau prélevé par les agriculteurs pendant j jours.

d) Que signifie $U - W = -100\,000$? Déterminer pour $j = 500$. Que conclure ?

1.6 Limite sur un compte

Un particulier place chaque mois sur un compte sans intérêts une somme de 1 200 €. Chaque mois, il consomme une somme égale au quart de ce qu'il possède sur son compte. Initialement on suppose que son compte est vide. On notera M_n le montant sur le compte à la fin du mois n.

a) Exprimer le montant sur son compte en fin de mois, les mois 1, 2 et 3.

b) Exprimer M_{n+1} en fonction de M_n. En déduire une expression de M_n en fonction de n.

c) Y a-t-il une limite au montant sur le compte de cet individu ?

Copyright © 2011 Dunod.

SOLUTIONS

Exercice 1.1

a) $5 - 2 = 3$; $8 - 5 = 3$; $11 - 8 = 3$; ... La raison de cette suite arithmétique est donc 3. C'est la valeur qui permet de calculer un terme à partir du précédent.

b) $4 - 4 = 0$. La raison de cette suite arithmétique est 0. C'est une suite constante.

c) $12 - 15 = -3$. La raison est -3. Une raison négative indique une suite décroissante.

d) $4{,}89 - 4{,}56 = 0{,}33$. La raison est 0,33.

Si l'on dispose de deux termes consécutifs u_k et u_{k+1}, pour déterminer la raison d'une suite arithmétique, on peut faire la soustraction $u_{k+1} - u_k$ = raison.

Exercice 1.2

a) $\dfrac{6}{2} = 3$. La raison de cette suite géométrique est 3.

b) $\dfrac{243}{729} = \dfrac{1}{3}$. La raison est donc $\dfrac{1}{3}$.

c) $\dfrac{4}{4} = 1$. La raison de cette suite est 1. Il s'agit d'une suite constante.

Remarque : une suite constante peut être considérée comme une suite géométrique de raison 1 ou comme une suite arithmétique de raison 0.

d) $\dfrac{1{,}2915}{1{,}23} = 1{,}05$. La raison est 1,05. Une suite géométrique de raison 1,05 est une suite de termes qui augmentent de 5 % à chaque période.

Si l'on dispose de deux termes consécutifs u_k et u_{k+1}, pour déterminer la raison d'une suite géométrique on peut faire le rapport $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ = raison.

Exercice 1.3

a) L'expression de u_3 en fonction de u_0 indique que $u_3 = u_0 + 3 \times r$. Ainsi $14 = 8 + 3 \times r$ soit $14 - 8 = 3 \times r$ et $6 = 3 \times r$ donc $r = 2$. Le terme général de la suite est donné par la formule $u_n = u_0 + n \times r$, ainsi $u_n = 8 + 2 \times n$.

Copyright © 2011 Dunod.

b) L'expression de u_9 en fonction de u_5 indique que $u_9 = u_5 + (9-5) \times r$. Ainsi $4 = 10 + 4 \times r$ soit $4 - 10 = 4 \times r$ et $-6 = 4 \times r$ donc $r = -1{,}5$.

Le terme général de la suite est donné par la formule générale : $u_n = u_5 + (n-5) \times r$,

ainsi $u_n = 10 - 1{,}5 \times (n-5)$ et $u_n = 17{,}5 - 1{,}5 \times n$.

Remarque : on a choisi d'utiliser la formule avec $k = 5$ mais on trouvera le même terme général en appliquant la formule avec $k = 9$. La formule permet de calculer le terme général, quelque soit le choix de k.

c) La définition d'une suite géométrique indique que $u_4 = q \times u_3$ ainsi $8 = 2 \times q$ donc $q = 4$.

Le terme général de la suite est donné par $u_n = q^{n-3} \times u_3$,

ainsi $u_n = 4^{n-3} \times 2$.

d) On a $u_{10} = q^{(10-7)} \times u_7$ ainsi $-184 = q^3 \times 23$ donc $q^3 = -8$ et ainsi $q = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Le terme général de la suite est donné par $u_n = q^{n-7} \times u_7$ ainsi $u_n = (-2)^{n-7} \times 23$.

Pour résoudre une équation du type $x^n = a$, on isole x à l'aide d'une racine n-ième. La solution est donc $x = a^{\frac{1}{n}}$.

La méthode générale pour cet exercice est l'utilisation des formules de définition des suites arithmétiques et des suites géométriques.

Exercice 1.4

a) Notons A_n le loyer avec le contrat A l'année n et B_n le loyer avec le contrat B l'année n.

On a ainsi $A_0 = 500 = B_0, A_1 = A_0 + 50 = 550, A_2 = A_1 + 50 = 600$ et $A_3 = A_2 + 50 = 650$.

On remarque que la suite (A_n) est une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme 500, par conséquent $A_n = 500 + 50 \times n$.

On a $B_1 = 1{,}05 \times B_0 = 525$, $B_2 = 1{,}05 \times B_1 = 551{,}25$ et $B_3 = 1{,}05 \times B_2 = 578{,}8125$.

La suite (B_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 500 ; par conséquent $B_n = 1{,}05^n \times 500$.

b) *Pour le contrat A :*

Pour cumuler les termes d'une suite arithmétique, on applique la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique. Ici le premier terme

Copyright © 2011 Dunod.

est 500, le dernier est $A_{19} = 500 + 19 \times 50 = 1\,450$ – en effet, on compte la première année comme année 0, la 20e année est donc l'année comptée 19 –, le nombre de termes est 20.

Ainsi $S = \dfrac{(500 + 1\,450) \times 20}{2} = 19\,500$ €

Pour le contrat B :

Dans la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a besoin du premier terme : 500, de la raison : 1,05 et du nombre de termes : 20.

Ainsi $S = 500 \times \dfrac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1} = 16\,532{,}98$ €

c) On cherche à déterminer à quelle date le loyer aura doublé.

Pour le contrat A

Il s'agit de résoudre $A_n = 1\,000$

soit $500 + 50 \times n = 1\,000$

d'où $50 \times n = 500$

donc $n = 10$ ans

Pour le contrat B

On doit résoudre $B_n = 1\,000$, soit $500 \times 1{,}05^n = 1\,000$

d'où $1{,}05^n = 2$

On a une équation avec une puissance en inconnue, on utilise donc le logarithme pour linéariser cette équation. Ainsi $\ln(1{,}05^n) = \ln(2)$ soit $n \times \ln(1{,}05) = \ln(2)$

et donc $n = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} \approx 14{,}2$ ans

Un résultat de 14,2 indique qu'il faut dépasser la 14e année pour doubler le loyer ; or la 15e année le loyer a dépassé le doublement pour la première fois. Ainsi, si l'on suppose que le loyer est payé une fois par an, alors il aura doublé la première fois au bout de 15 ans.

d) Le choix du contrat dépend de la durée de séjour dans la location. On constate d'après les résultats précédents que pour une durée inférieure ou égale à 20 ans le contrat *B* est plus avantageux en total cumulé et en loyer annuel. Il reste à déterminer à partir de quand le choix s'inverse.

On est assuré que le choix va s'inverser les années suivantes car les suites géométriques évoluent plus rapidement que les suites arithmétiques au bout d'un certain rang.

Copyright © 2011 Dunod.

Il n'est pas possible de trouver par une résolution d'équation l'année à partir de laquelle le choix va s'inverser ; il est en revanche possible de calculer pour chaque année le loyer dans chacun des deux contrats et le loyer cumulé depuis le début. On résume les résultats dans le tableau suivant.

Année	Loyer contrat A	Loyer Contrat B	Total cumulé contrat A	Total cumulé contrat B
20	1 500.00 €	1 326.65 €	21 000.00 €	17 859.63 €
21	1 550.00 €	1 392.98 €	22 550.00 €	19 252.61 €
22	1 600.00 €	1 462.63 €	24 150.00 €	20 715.24 €
23	1 650.00 €	1 535.76 €	25 800.00 €	22 251.00 €
24	1 700.00 €	1 612.55 €	27 500.00 €	23 863.55 €
25	1 750.00 €	1 693.18 €	29 250.00 €	25 556.73 €
26	1 800.00 €	1 777.84 €	31 050.00 €	27 334.56 €
27	1 850.00 €	1 866.73 €	32 900.00 €	29 201.29 €
28	1 900.00 €	1 960.06 €	34 800.00 €	31 161.36 €
29	1 950.00 €	2 058.07 €	36 750.00 €	33 219.42 €
30	2 000.00 €	2 160.97 €	38 750.00 €	35 380.39 €
31	2 050.00 €	2 269.02 €	40 800.00 €	37 649.41 €
32	2 100.00 €	2 382.47 €	42 900.00 €	40 031.89 €
33	2 150.00 €	2 501.59 €	45 050.00 €	42 533.48 €
34	2 200.00 €	2 626.67 €	47 250.00 €	45 160.15 €
35	2 250.00 €	2 758.01 €	49 500.00 €	47 918.16 €
36	2 300.00 €	2 895.91 €	51 800.00 €	50 814.07 €
37	2 350.00 €	3 040.70 €	54 150.00 €	53 854.77 €
38	2 400.00 €	3 192.74 €	56 550.00 €	57 047.51 €
39	2 450.00 €	3 352.38 €	59 000.00 €	60 399.89 €
40	2 500.00 €	3 519.99 €	61 500.00 €	63 919.88 €
41	2 550.00 €	3 695.99 €	64 050.00 €	67 615.88 €
42	2 600.00 €	3 880.79 €	66 650.00 €	71 496.67 €
43	2 650.00 €	4 074.83 €	69 300.00 €	75 571.50 €

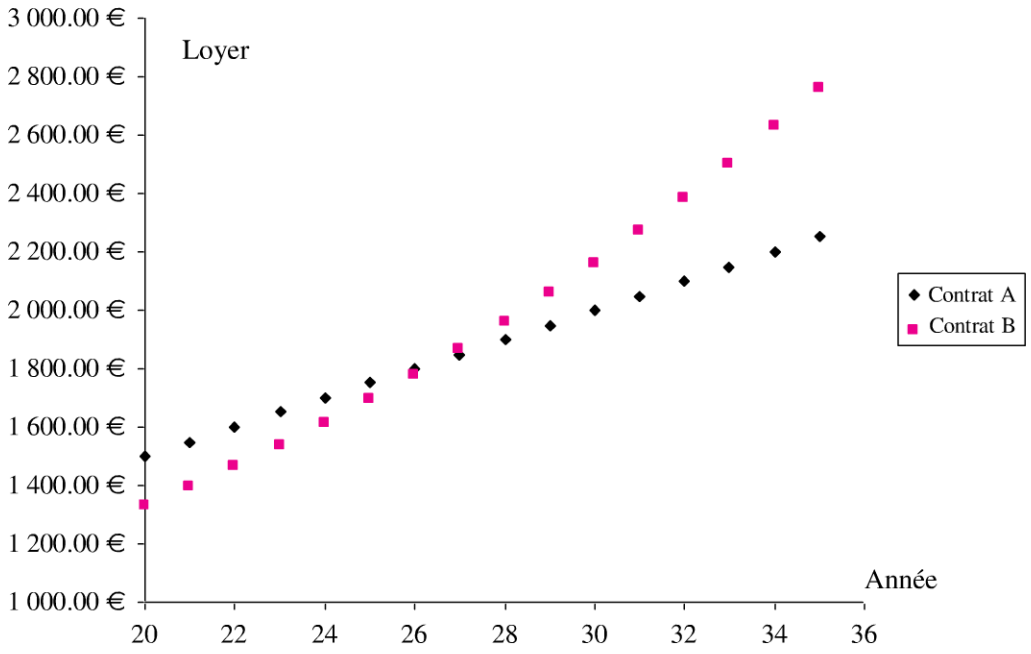
L'année 27 le loyer du contrat *B* devient pour la première fois plus élevé que celui du contrat *A*. L'année 38 le total cumulé du contrat *B* devient plus important que celui du contrat *A*. Si l'on reste dans le logement une durée inférieure à 38 ans, le contrat *B* est donc préférable. Au contraire, si l'on reste dans le logement une durée supérieure ou égale à 38 ans, il est préférable de choisir le contrat *A*.

On représente sur le graphique suivant l'évolution comparée des loyers pour le contrat *A* et pour le contrat *B*.

Le loyer du contrat *B*, bien qu'évoluant plus lentement au début, rattrape et dépasse celui du contrat *A* à partir de l'année 27.

Il n'est pas faisable de chercher à résoudre l'inéquation $A_n < B_n$. Cette inéquation revient à $500 + 50 \times n < 1,05^n \times 500$ soit $1 + 0,1 \times n < 1,05^n$, or l'inconnue n se trouve à la fois dans le premier terme et dans le second terme en puissance dans l'inéquation. Ainsi il n'est pas possible de l'isoler.

Copyright © 2011 Dunod.



Exercice 1.5

a) On a chaque jour un volume entrant (rivière en amont) de 1 000 litres et un volume sortant (du fait des agriculteurs) de $400(1+0{,}005)^{j-1}$ le jour j. Ainsi, pour maintenir le volume du lac constant, on a $V = 1\,000 - 400 \times 1{,}005^{j-1}$.

0,5 % = 0,005 et non 0,05.

b) Résolution de $V = 0$:

$V = 1\,000 - 400 \times 1{,}005^{j-1} = 0$ ainsi $1\,000 = 400 \times 1{,}005^{j-1}$ et donc $\dfrac{1\,000}{400} = 1{,}005^{j-1}$

soit $(j-1)\ln(1{,}005) = \ln\left(\dfrac{1\,000}{400}\right)$

d'où $j = 1 + \dfrac{\ln\left(\dfrac{1\,000}{400}\right)}{\ln(1{,}005)} = 184{,}71$

La rivière en aval sera donc sèche le 185e jour.

c) Notons U le volume d'eau fourni au lac pendant j jours. On a $U = 1\,000\,j$. En notant W le volume prélevé par les agriculteurs pendant j jours, on a :

$$W = 400 + 400 \times 1{,}005 + 400 \times 1{,}005^2 + \cdots + 400 \times 1{,}005^{j-1}$$

Copyright © 2011 Dunod.

On reconnaît pour la somme de j termes d'une suite géométrique de premier terme 400 et de raison 1,005. On a donc :

$$W = 400\frac{1{,}05^j - 1}{1{,}005 - 1} = 400\frac{1{,}005^j - 1}{0{,}005} = 80\,000(1{,}005^j - 1)$$

d) $U - W = -100\,000$ signifie que le lac est vide.

Pour $j = 500$ on a $U = 500\,000$ et $W = 888\,547$, ainsi $U - W = 500\,000 - 888\,547 = -388\,547 < -100\,000$.

Le lac sera donc vide à cette date, et ce depuis un temps qu'on aurait pu déterminer avec plus de précisions en résolvant $U - W = -100\,000$.

Exercice 1.6

a) À la fin du mois 1, cet individu aura placé 1 200 € et retiré un quart de cette somme, à savoir 300 € ; on a donc $M_1 = 1\,200 - 300 = 900$ €. Le mois 2 on ajoute 1 200 € à cette somme, puis on retire le quart de l'ensemble de la somme sur le compte,

ainsi $M_2 = (900 + 1\,200) \times 0{,}75 = 1\,575$ €

et le mois 3 on trouve de la même manière $M_3 = (1\,575 + 1\,200) \times 0{,}75 = 2\,081{,}25$ €.

b) On trouve la somme le mois $n + 1$ en fonction de la somme le mois n par la relation :

$$M_{n+1} = (M_n + 1\,200) \times 0{,}75 = 0{,}75M_n + 900$$

On trouve ainsi une relation caractéristique des suites arithmético-géométriques. On peut exprimer M_n en fonction de n à l'aide de la relation :

$$u_n = a^{n-k}\left(u_k - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Dans cette question : $a = 0{,}75$ et $b = 900$

ainsi

$$M_n = 0{,}75^{n-1}\left(M_1 - \frac{900}{1 - 0{,}75}\right) + \frac{900}{1 - 0{,}75}$$

$$= 0{,}75^{n-1}(900 + 3\,600) + 3\,600 = -2\,700 \times 0{,}75^{n-1}$$

c) On cherche la limite – si elle existe – de M_n lorsque n tend vers l'infini.

On a $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}75^{n-1} = 0$ ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 3\,600$.
Le montant sur le compte est donc limité à 3 600 €.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 2

Les intérêts simples et l'escompte

OBJECTIFS

- ➤ Connaître la formule des intérêts simples.
- ➤ Savoir calculer une durée de placement, un taux ou une valeur de placement.
- ➤ Utiliser la formule des versements constants.
- ➤ Connaître les principaux livrets d'épargne et leurs caractéristiques.
- ➤ Savoir calculer un taux moyen.
- ➤ Connaître le principe de l'escompte.
- ➤ Savoir calculer un escompte.
- ➤ Évaluer une date d'équivalence de capitaux.
- ➤ Savoir comparer des modes de paiement.
- ➤ Calculer un taux d'intérêt précompté et connaître la relation d'équivalence avec le taux d'intérêt simple.
- ➤ Connaître la définition d'un agio.

PLAN

2.1 Mode de calcul des intérêts simples

2.2 Placements de courtes durées

2.3 Versements constants

2.4 Calcul du taux moyen

2.5 Exemples de livrets d'épargne

2.6 L'effet de commerce et l'escompte

2.7 Calcul de l'escompte

2.8 Équivalence de capitaux

2.9 Intérêts précomptés

Copyright © 2011 Dunod.

2.1 MODE DE CALCUL DES INTÉRÊTS SIMPLES

a) Qu'est-ce qu'un intérêt ?

Un intérêt est la rémunération d'un placement pour un prêteur ou le coût d'un emprunt pour un emprunteur. L'intérêt est fonction de la somme prêtée, de la durée et du taux d'intérêt négocié entre le prêteur et l'emprunteur.

Une banque rémunère ses clients sur des comptes d'épargne lorsque ceux-ci placent leur argent sur un compte à intérêts. Cela correspond à un principe de prêt. Le client immobilise une partie de son capital sur un compte et la banque utilise ce capital pendant la durée sur laquelle l'argent est sur le compte pour ses activités rémunératrices comme les prêts d'argent. En contrepartie de cette immobilisation d'argent, la banque distribue des intérêts à ses clients.

b) Formalisation

Les intérêts simples se calculent uniquement à partir du capital initialement placé. Les intérêts ne sont distribués qu'en fin de placement. Il n'y a pas de cumuls d'intérêts d'une période à l'autre comme dans les intérêts composés.

Notons n la durée d'un placement en années, t le taux d'intérêt annuel pratiqué (supposé constant sur la durée du placement) et C_0 le capital placé.

Au bout d'un an, les intérêts calculés seront de $I_1 = C_0 \times t$, le capital sera donc $C_1 = C_0 + C_0 \times t$. La deuxième année, les intérêts sont à nouveau calculés à partir du capital C_0 et le capital placé devient $C_2 = C_1 + C_0 \times t$. De la même manière, l'année 3 on a $C_3 = C_2 + C_0 \times t$.

Généralement, le **capital de l'année $n+1$** se calcule à partir du capital de l'année n par la formule :

$$C_{n+1} = C_n + C_0 \times t$$

On remarque que la suite (C_n) est une suite arithmétique de raison $C_0 \times t$. On peut donc donner une expression de C_n en fonction du premier terme C_0 : $C_n = C_0 + n \times C_0 \times t$.

En factorisant par C_0 on déduit la formule générale :

$$C_n = C_0(1 + n \times t)$$

Copyright © 2011 Dunod.

Les **intérêts sur *n* années** sont :

$$I_n = n \times C_0 \times t$$

2.2 PLACEMENTS DE COURTES DURÉES

Les intérêts simples sont généralement appliqués pour des durées inférieures à un an. Il est donc nécessaire d'adapter la formule $C_n = C_0(1 + n \times t)$ à des durées plus courtes.

a) Pour une durée comptée en mois

Notons k le nombre de mois de placement, on cherche à exprimer k en fonction de n.

On a la proportionnalité suivante :

k	12
n	1

Cette proportionnalité indique simplement qu'une année contient 12 mois ; ainsi par un simple produit en croix on trouve $12 \times n = k$,

ainsi : $n = \dfrac{k}{12}$

En remplaçant la valeur de n par son expression en fonction de k dans la formule précédente, on trouve :

$$C_k = C_0\left(1 + \times \frac{k}{12}\right)$$

Les **intérêts sur *k* mois** sont :

$$I_k = C_0 \times t \times \frac{k}{12}$$

Cette formule sera utilisée dans les placements dont la durée est fixée en mois.

Une année est plus importante qu'un mois, l'intuition peut conduire à penser que $n = 12k$. La vrai relation est $k = 12n$. Cette relation n'indique pas qu'une année est plus courte qu'un mois mais que dans une période de temps fixée il y a un plus grand nombre de mois que d'années selon un rapport de 12.

Copyright © 2011 Dunod.

Exemple

On place 1 000 € pendant 5 mois au taux annuel de 5 %. La somme sur le compte, au terme du placement, est donc :

$$C_5 = 1\,000 \times \left(1 + 0{,}05 \times \frac{5}{12}\right) = 1\,020{,}83 \text{ €}$$

Les intérêts sont de 20,83 €.

b) Pour une durée comptée en jours

De manière similaire à la formule sur les mois, on peut trouver une formule utilisant la proportionnalité entre les jours et les années. Par souci de simplification on prend en référence, pour le décompte des intérêts en jours, l'année comptable de 360 jours et non l'année civile de 365 jours ou 366 jours.

Ainsi, si l'on note j le nombre de jours dans une année, on a la proportionnalité suivante :

j	360
n	1

On a ainsi $360 \times n = j$, par conséquent $n = \dfrac{j}{360}$ et donc :

$$C_j = C_0 \times \left(1 + t \times \frac{j}{360}\right)$$

Les **intérêts sur *j* jours** sont :

$$I_j = C_0 \times t \times \frac{j}{360}$$

Exemple

On place 1 000 € pendant 50 jours au taux annuel de 2 %. La somme sur le compte au terme du placement est donc :

$$C_{50} = 1\,000\left(1 + 0{,}02 \times \frac{50}{360}\right) = 1\,002{,}78 \text{ €}$$

Les intérêts sont de 2,78 €.

Pour les contrats de date à date, on compte le nombre de jours réel entre les deux dates de placement et l'on applique la formule précédente.

Copyright © 2011 Dunod.

Autrement dit, on compte le nombre de jours réel de chaque mois.

Mois	Nombre de jours
Janvier	31
Février	28/29
Mars	31
Avril	30
Mai	31
Juin	30
Juillet	31
Août	31
Septembre	30
Octobre	31
Novembre	30
Décembre	31

Exemple

On réalise un placement de 1 000 € à 8 % du 1er mars au 2 septembre. Le nombre de jours entre ces deux dates est de :

$$31 - 1 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 2 = 185 \text{ jours}$$

Ainsi le capital au terme du placement est de :

$$1\,000\left(1 + 0{,}08 \times \frac{185}{360}\right) = 1\,041{,}11 \text{ €}$$

Remarque : ce mode de calcul peut sembler surprenant ; en effet si l'on compte le nombre réel de jours dans un mois, on se réfère à l'année civile. Or on applique ensuite une formule construite sur un décompte de jours de l'année comptable. Il n'y a pas de logique mathématique dans ce mode de calcul. Cette étrangeté implique l'importance de rédiger un contrat à son avantage.

Exemple

Pour un placement de 10 000 € à 10 %, est-il plus intéressant de réaliser un contrat de date à date du 30 juin au 31 août ou un contrat d'une durée de 2 mois ?

Entre le 30 juin et le 31 août, on compte 62 jours (l'ensemble des jours de juillet et août), les intérêts au terme du contrat de date à date seront donc de :

Copyright © 2011 Dunod.

$$10\,000 \times 0{,}1 \times \frac{62}{360} = 172{,}22\ €$$

Pour un contrat de 2 mois, les intérêts seront de :

$$10\,000 \times 0{,}1 \times \frac{2}{12} = 166{,}67\ €$$

On choisit donc de réaliser un contrat de date à date.

De manière générale, les contrats de date à date seront plus avantageux que les contrats comptés en nombre de jours ou en nombre de mois car l'année civile est plus longue que l'année comptable.

c) Pour les décomptes par quinzaine

Les comptes d'épargne à taux réglementé (du type Livret A) ont des intérêts calculés par quinzaines. Seules les quinzaines complètes sont prises en compte.

Lorsque vous placez une somme d'argent, les intérêts calculés sont comptés à partir du début de la quinzaine suivante. Les quinzaines sont à dates fixes, du 1er au 15 du mois pour la première quinzaine ; du 16 à la fin du mois pour la seconde quinzaine. Lorsque vous retirez de l'argent les intérêts ne sont plus comptés à partir du début de la quinzaine précédente.

Exemple

On place une somme de 1 000 € le 5 janvier. Les intérêts seront comptés seulement à partir du 16 janvier pour la seconde quinzaine. On perd donc 11 jours de placement.

On retire une somme de 1 000 € le 5 janvier. Les intérêts ne seront plus comptés sur cette somme à partir du 1er janvier. On perd donc 5 jours de placement.

Remarque : connaissant ce mode de calcul, il est pertinent d'effectuer les versements en fin de quinzaine et les retraits en début de quinzaine.

De manière similaire à la formule des intérêts simples mensuels, on peut envisager une formule pour le décompte par quinzaine, en notant q le nombre de quinzaines complètes, et sachant qu'il y a 24 quinzaines dans une année :

Les **intérêts sur q quinzaines** sont :

$$C_q = C_0 \times \left(1 + t \times \frac{q}{24}\right)$$

Copyright © 2011 Dunod.

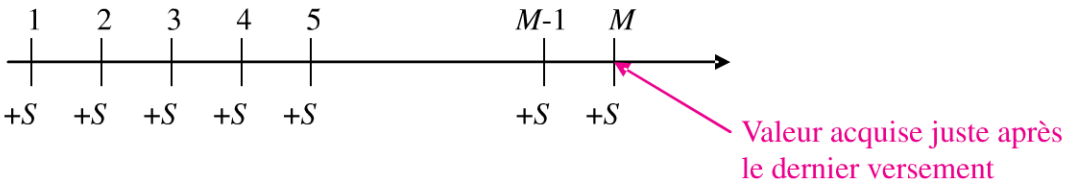
Après avoir déterminé le nombre de jours entre deux dates, il semblerait simple de diviser ce nombre de jours par 15 en arrondissant à la valeur inférieure de manière à connaître le nombre de quinzaines entre ces deux dates. Cette méthode ne respecte pas la comptabilité des banques pour les quinzaines.

En effet, pour un placement du 17 janvier au 14 février, on compte 28 jours, soit une quinzaine complète (en divisant ce nombre par 15 puis en arrondissant à la valeur inférieure). Or, la première quinzaine ne peut être comptée dans une banque débute après le 16 janvier. De même, la seconde quinzaine ne peut être comptée car elle se termine avant le 15 février. Par conséquent, la banque ne comptabilise aucune quinzaine pour un placement du 17 janvier au 14 février.

2.3 VERSEMENTS CONSTANTS

Dans le cas de versements constants, il est possible de mettre en place une formule qui permet de calculer simplement la valeur acquise d'un capital sur un compte à intérêts.

Supposons qu'un individu place une même somme S tous les mois sur un compte au taux t pendant M mois. On s'intéresse à la valeur sur le compte juste après le dernier versement :



Le mois 1, la somme S placée va rester $M-1$ mois sur le compte ; ainsi la valeur acquise de cette somme sera :

$$S\left(1+t\times\frac{M-1}{12}\right)$$

Le mois 2 la somme S va rester $M-2$ mois sur le compte ; ainsi sa valeur acquise sera de :

$$S\left(1+t\times\frac{M-2}{12}\right)$$

Le mois $M-1$ la somme S va rester un mois sur le compte ; ainsi sa valeur acquise sera de :

$$S\left(1+t\times\frac{1}{12}\right)$$

Copyright © 2011 Dunod.

La dernière somme S placée le mois M ne profitera pas d'intérêts.

Ainsi la valeur acquise des versements sera la somme :

$$S + S\left(1 + t \times \frac{1}{12}\right) + \cdots + S\left(1 + t \times \frac{M-2}{12}\right) + S\left(1 + t \times \frac{M-1}{12}\right)$$

Cette somme est la somme des termes d'une suite arithmétique de M termes dont le premier terme est S et le dernier est :

$$S\left(1 + t \times \frac{M-1}{12}\right)$$

On peut donc simplifier cette somme par la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique :

$$\frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}) \times \text{Nombre de termes}}{2}$$

Ainsi, en notant V cette somme, on a :

$$V = \frac{\left(S + S\left(1 + t \times \frac{M-1}{12}\right)\right) \times M}{2}$$

En factorisant par S, on trouve :

$$V = S \times M \times \frac{2 + t \times \frac{M-1}{12}}{2}$$

Après simplification l'expression du **capital** V est :

$$V = S \times M \times \left(1 + t \times \frac{M-1}{24}\right)$$

Exemple

On place 1 000 € pendant 15 mois en intérêts simples à 5 %. Déterminer la valeur acquise des versements sur ce compte.

On a $V = 1\,000 \times 15 \times \left(1 + 0{,}05 \times \frac{15-1}{24}\right) = 15\,437{,}50$ €

Copyright © 2011 Dunod.

Remarque : cette formule n'est valable que si l'instant d'observation se situe juste après le dernier versement. Si l'on se place plus tard après le dernier versement, il faudra encore prendre en compte les intérêts acquis sur la période qui sépare le dernier versement de la date d'observation.

2.4 CALCUL DU TAUX MOYEN

Exemple

On place 1 000 € pendant 50 jours à 6 % et l'on place 2 000 € pendant 30 jours à 2 %. Quel est le taux moyen de l'ensemble de ces deux placements ?

On souhaite avoir un taux moyen qui rende compte de l'importance relative de ces deux placements. Une moyenne pondérée semblerait adaptée à cet exemple, sauf qu'il reste à savoir par quoi on va pondérer les taux. Si les capitaux placés étaient identiques, il serait naturel de pondérer par les durées, et si les durées étaient identiques, il serait naturel de pondérer par les capitaux. Or, dans l'exemple proposé, la durée et les capitaux diffèrent. La solution la plus simple est de pondérer les taux considérés par le produit des durées par les capitaux. Ainsi on trouve un taux moyen de :

$$\frac{1\,000 \times 50 \times 0{,}06 + 2\,000 \times 30 \times 0{,}02}{1\,000 \times 50 + 2\,000 \times 30} \approx 3{,}82\ \%$$

On pourrait chercher à assimiler l'ensemble de ces placements à un unique placement de 1 000 + 2 000 = 3 000 € sur une durée de 50 jours (durée maximale de l'ensemble des placements) ayant rapporté des intérêts de :

$$1\,000 \times \frac{50}{360} \times 0{,}06 + 2\,000 \times \frac{30}{360} \times 0{,}02 = 11{,}67\ €$$

Ainsi le taux moyen semblerait fixé par :

$$3\,000 \times t_m \times \frac{50}{360} = 11{,}67$$

soit $t_m = \dfrac{11{,}67 \times 360}{3\,000 \times 50} = 2{,}80\ \%$

Ce résultat semble cohérent car il est compris entre 2 % et 6 %. Cependant il ne correspond pas à un taux moyen des deux placements mais à un taux moyen d'un placement de 1 000 € pendant 50 jours à 6 % et de 2 000 € pendant 30 jours à 2 % puis pendant 20 jours à 0 %. Cette erreur a pour effet de sous-estimer le taux moyen.

On généralise cet exemple au cas de n capitaux $C_1, C_2, \cdots, C_n$ placés pendant des durées $d_1, d_2, \cdots, d_n$ aux taux respectifs $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

Copyright © 2011 Dunod.

Le **taux moyen** t_m est alors donné par la formule :

$$t_m = \frac{C_1 \times d_1 \times t_1 + C_2 \times d_2 \times t_2 + \cdots + C_n \times d_n \times t_n}{C_1 \times d_1 + C_2 \times d_2 + \cdots + C_n \times d_n}$$

2.5 EXEMPLES DE LIVRETS D'ÉPARGNE

a) Livret A

Le Livret A est le compte d'épargne français le plus utilisé. On compte près de 46 millions de Livret A ouverts. Il est réglementé et défiscalisé.

Le Livret A fut créé en 1818 par Louis XVIII de manière à solder la crise financière conséquente des guerres napoléoniennes. L'utilisateur du Livret A est libre de ses versements mais ceux-ci sont plafonnés à 15 300 €. Le taux annuel du Livret A est de 1,75 % depuis le 1er août 2010. Ce taux a beaucoup varié dans l'histoire. Le gouvernement Raffarin avait mis en place une formule mathématique permettant de calculer automatiquement le taux du Livret A. Cette formule a pour but d'éviter les fluctuations de taux liées à des motifs politiques. La formule de calcul dépend du taux Euribor 3 mois, du taux Eonia. – Les taux Euribor et Eonia sont des taux de référence du marché monétaire de la zone euro – et de l'inflation.

Historique des taux du Livret A :

Date	Taux
1er août 2007	3,00 %
1er février 2008	3,50 %
1er août 2008	4,00 %
1er février 2009	2,50 %
1er mai 2009	1,75 %
1er août 2009	1,25 %
1er août 2010	1,75 %

D'une période à l'autre, le nouveau taux peut varier de plus ou moins 1,5 %.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Livret d'épargne populaire

Le Livret d'épargne populaire (LEP) est au taux de 2,25 % depuis le 1er août, son plafond est de 7 700 € et son plafond d'imposition est de 757 €. Autrement dit, ce livret n'est accessible qu'à des épargnants payant moins de 757 € d'impôts.

c) Livret développement durable

Le Livret développement durable (LDD) est à un taux identique à celui du Livret A. Son plafond est de 6 000 € ; il sert à financer les investissements des PME.

d) Livret jeune

Il est réservé aux jeunes de 12 à 25 ans. Son plafond est de 1 600 €. Son taux est variable d'une banque à l'autre, mais généralement supérieur à celui du Livret A.

e) Plan épargne logement

Le plan épargne logement (PEL) permet de préparer l'achat d'un bien immobilier. L'épargne se fait sur plusieurs années avec un versement minimum de 225 € à l'ouverture et de 45 € par mois. Le plafond est de 61 200 €. Son taux est de 2,50 % ; ce compte permet de disposer d'une prime d'État en cas de prêt pour un bien immobilier.

Remarque : pour l'ensemble de ces livrets, les intérêts appliqués sont simples pour des durées inférieures à un an, et composés pour des durées supérieures à un an.

2.6 L'EFFET DE COMMERCE ET L'ESCOMPTE

Un **effet de commerce** est un document juridique engageant un débiteur à régler, à une date future (date d'échéance), un capital déterminé.

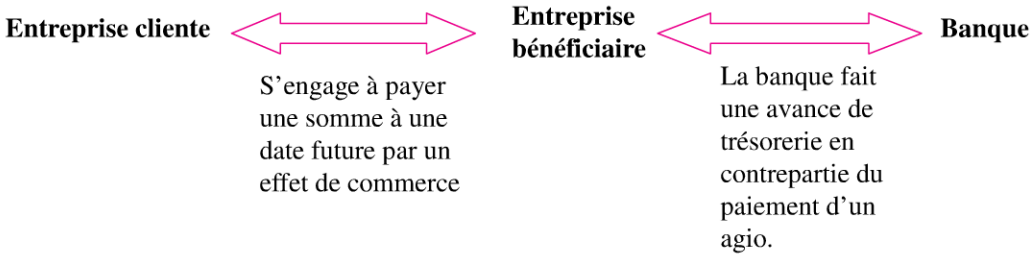
Un effet de commerce permet, par exemple, à une entreprise cliente de payer son fournisseur plus tard si elle n'a pas les moyens de le faire dans l'immédiat.

Exemple

Si *A* détient un effet de commerce de *B*, alors *B* s'engage juridiquement à verser une somme à *A* à la date précisée sur l'effet de commerce.

Copyright © 2011 Dunod.

Un effet de commerce est un document juridique qui reconnaît **la dette d'une entreprise**.
Les entreprises ont besoin de liquidités à court terme. Les banques peuvent intervenir pour racheter l'effet de commerce avant l'échéance en contrepartie du paiement d'un agio. Cette opération s'appelle **l'escompte**.



L'objectif de l'escompte est de permettre à une entreprise de disposer de liquidités à court terme.

Les conditions de l'escompte dépendent de trois partenaires : l'entreprise bénéficiaire ; l'entreprise cliente ; et la banque.

Pourquoi ne pas faire simplement un emprunt ?

L'entreprise bénéficiaire qui a besoin rapidement de liquidités peut envisager un emprunt auprès de la banque. La préférence est souvent pour l'escompte car il coûte moins cher à l'entreprise.

2.7 CALCUL DE L'ESCOMPTE

On appelle **valeur nominale** de l'effet de commerce, la somme qui doit être versée à l'échéance. On notera cette somme V.

On notera e la valeur de l'**escompte**. L'escompte se calcule en fonction de la durée j (en jours) séparant la date actuelle de la date d'échéance, de la valeur nominale de l'effet V et du taux d'escompte t.

On a le mode de calcul de l'**escompte** suivant :

$$e = V \times t \times \frac{j}{360}$$

Remarque : avec des notations différentes on reconnaît la formule des intérêts simples. Cette formule, valable en jours, est modifiable en mois, en remplaçant $\frac{j}{360}$ par $\frac{k}{12}$.

Copyright © 2011 Dunod.

La **valeur actuelle** (V_a) d'un effet de commerce se calcule à partir de la valeur nominale et de l'escompte :

$$V_a = V - e = V - V \times t \times \frac{j}{360} = V\left(1 - t \times \frac{j}{360}\right)$$

L'**agio** (noté a) est le coût réel de l'escompte. Il comprend donc, en plus de l'escompte, les frais et les taxes.

$$\text{Agio} = \text{Escompte} + \text{Frais} + \text{Taxes}$$

La valeur nette (V_n) se calcule à partir de la valeur nominale et de l'agio. Il s'agit d'une valeur actuelle réelle (avec prise en compte des frais et des taxes).

$$V_N = V - a$$

Le taux réel de l'escompte, appelé plus communément **taux effectif global** (TEG), est le taux qu'il faudrait appliquer à la valeur nominale pendant une durée séparant la date actuelle de la date d'échéance pour trouver l'agio :

$$a = V \times TEG \times \frac{j}{360}$$

2.8 ÉQUIVALENCE DE CAPITAUX

Un effet de commerce est renégociable. Une entreprise cliente peut demander à reporter la date d'échéance d'un effet de commerce. On recalcule la valeur nominale de ce nouvel effet de sorte que la valeur actuelle du nouvel effet et la valeur actuelle de l'ancien effet soient égales à la date de renégociation.

Cette méthode se généralise pour exprimer l'équivalence de capitaux.

On dit que deux capitaux sont **équivalents** à une date donnée s'ils ont la même valeur actuelle à cette date.

Remarque : l'idée de comparer des valeurs de capitaux à une même date est permanente en finance. Deux capitaux ne sont comparables que ramenés à une même date par un calcul d'actualisation.

Plus généralement un ensemble d'effets de commerce peut être remplacé par un unique effet, à condition que la valeur actuelle du nouvel effet soit égale à la somme des valeurs actuelles des anciens effets.

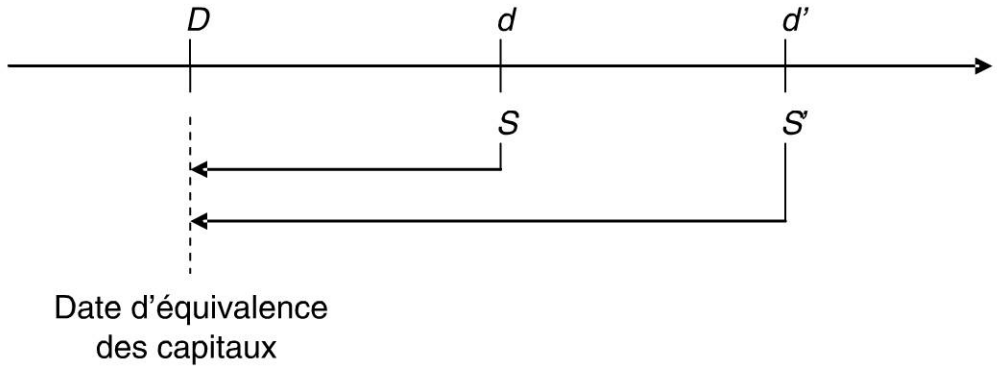
Copyright © 2011 Dunod.

On appelle **date d'équivalence** de deux effets la date pour laquelle deux capitaux ont même valeur actuelle.

Expression d'une équivalence de deux capitaux entre deux dates

On considère deux capitaux S et S' à échéance aux dates d et d'. On suppose que ces deux capitaux sont équivalents au taux t à la date antérieure D.

1. Schématisation de la situation (facultatif) :



2. Calcul des durées en jours entre les dates d et d' : j et entre D et d : j'.

3. Mise en équation et recherche d'une éventuelle inconnue :

$$S\left(1 - t \times \frac{j'}{360}\right) = S'\left(1 - t \times \frac{j + j'}{360}\right)$$

2.9 INTÉRÊTS PRÉCOMPTÉS

Le mode de calcul de la valeur actuelle d'un capital à l'aide d'un taux d'escompte est similaire à celui d'un emprunt à intérêts précomptés.

Dans un emprunt à **intérêts précomptés**, les intérêts sont payés en début d'emprunt au lieu d'être payés en fin d'emprunt.

a) Formalisation

On souhaite emprunter une somme C au taux précompté t'. On va recevoir cette somme au moment de l'emprunt. Laquelle somme sera minorée des intérêts à payer dès le début :

$$C \times t' \times \frac{j}{360}$$

Copyright © 2011 Dunod.

On ne va donc en réalité recevoir que :

$$C - C \times t' \times \frac{j}{360} = C\left(1 - t' \times \frac{j}{360}\right)$$

On remboursera le capital C (et uniquement ce capital) au terme de l'emprunt.

Remarque : on reconnaît la formule de la valeur actuelle. L'escompte est, d'un certain point de vue, un emprunt à intérêts précomptés.

b) Rapport entre le taux d'intérêt simple et le taux précompté

Plaçons-nous du point de vue du prêteur en intérêts précomptés. Celui-ci prête une somme réelle de $C\left(1 - t' \times \frac{j}{360}\right)$ et va recevoir, au terme de l'emprunt, la somme C. Il s'agit donc d'un placement financier. Si ce placement financier avait été un placement au taux d'intérêt simple t on aurait :

$$C\left(1 - t' \times \frac{j}{360}\right)\left(1 + t \times \frac{j}{360}\right) = C$$

soit

$$\left(1 - t' \times \frac{j}{360}\right)\left(1 + t \times \frac{j}{360}\right) = 1$$

donc

$$1 + t \times \frac{j}{360} = \frac{1}{1 - t' \times \frac{j}{360}}$$

$$\text{et } t \times \frac{j}{360} = \frac{1}{1 - t' \times \frac{j}{360}} - 1 = \frac{1 - 1 + t' \times \frac{j}{360}}{1 - t' \times \frac{j}{360}}$$

$$= \frac{t' \times \frac{j}{360}}{1 - t' \times \frac{j}{360}}$$

Copyright © 2011 Dunod.

ainsi :

$$t = \frac{t'}{1 - t' \times \dfrac{j}{360}}$$

Cette formule permet de comparer simplement un taux d'intérêt simple avec un taux d'intérêt précompté.

Exemple

Quel est le taux d'intérêt simple équivalent à un taux d'intérêt précompté de 10 % sur une durée de 100 jours ? Par application de la formule précédente, on trouve :

$$t = \frac{0,1}{1 - 0,7 \times \dfrac{100}{360}} \approx 0,1029 = 10,29\ \%$$

Remarque : on a toujours un taux d'intérêt simple équivalent supérieur au taux d'intérêt précompté correspondant.

POINTS CLEFS

➤ Mode de calcul des intérêts simples :

Formules	Valeur acquise	Intérêts
En jours	$C_j = C_0 \times \left(1 + t \times \dfrac{j}{360}\right)$	$I_j = C_0 \times t \times \dfrac{j}{360}$
En mois	$C_k = C_0 \left(1 + t \times \dfrac{k}{12}\right)$	$I_k = C_0 \times t \times \dfrac{k}{12}$
En années	$C_n = C_0(1 + n \times t)$	$I_n = n \times C_0 \times t$

➤ **Le décompte en quinzaines :** seules les quinzaines complètes sont prises en compte. On compte deux quinzaines complètes par mois. La première est du 1er au 15 du mois. La seconde est du 16 à la fin du mois.

➤ **Les versements constants.** La valeur acquise d'un ensemble de versements identiques tous les mois pendant M mois est de :

$$V = S \times M \times \left(1 + t \times \frac{M - 1}{24}\right)$$

juste après le dernier versement.

Copyright © 2011 Dunod.

- Le **taux moyen** de plusieurs placements de valeurs de placement différentes, de taux différents et de durées différentes est donné par la formule :

$$t_m = \frac{C_1 \times d_1 \times t_1 + C_2 \times d_2 \times t_2 + \cdots + C_n \times d_n \times t_n}{C_1 \times d_1 + C_2 \times d_2 + \cdots + C_n \times d_n}$$

- **Les livrets d'épargne réglementés les plus classiques** sont le Livret A, le Livret jeune, le Plan Épargne Logement (PEL), le Livret Développement Durable (LDD) et le Livret d'Épargne Populaire (LEP).
- L'objectif de l'**escompte** est de permettre à une entreprise de disposer de liquidités rapidement.
- La formule de l'**escompte** est :

$$e = V \times t \times \frac{j}{360}$$

- La valeur actuelle est :

$$V_a = V - e = V - V \times t \times \frac{j}{360} = V\left(1 - t \times \frac{j}{360}\right)$$

- On appelle **date d'équivalence** de deux capitaux la date pour laquelle les deux capitaux ont même valeur actuelle.
- Les **agios** prennent en compte les frais divers en plus de l'escompte. Un **taux effectif** peut être évalué pour prendre en compte les frais.
- Le principe du prêt en **intérêts précomptés** est de payer les intérêts au moment du prêt et non en fin de prêt.
- La **relation d'équivalence** entre taux d'intérêt simple et taux d'intérêt précompté est :

$$t = \frac{t'}{1 - t' \times \frac{j}{360}}$$

Copyright © 2011 Dunod.

EXERCICES

2.1 Application du cours

a) On place un capital de 800 € du 5 mai au 17 octobre sur un compte à 3 %. Déterminer la valeur acquise de ce placement.

b) Un capital de 7 800 € est placé pendant 8 mois, il rapporte un intérêt de 80 €. Quel a été le taux de placement ?

c) Quelle somme faut-il placer pendant 50 jours à 8 % pour obtenir une valeur acquise de 5 000 € ?

d) On place une somme de 8 000 € sur un compte à 4 % le 4 mars. À quelle date va-t-on obtenir une valeur acquise de 8 040 € ?

2.2 Mouvements sur un compte

On effectue les mouvements suivants sur un compte d'épargne à 8 %.

Date	Mouvement
5 janvier	Avoir de 5 000 €
8 mars	Retrait de 4 000 €
18 mars	Versement de 800 €
22 mai	Retrait de 1 500 €
6 juin	Versement de 1 000 €
7 juillet	Retrait de 1 000 €

a) Quelle somme reste-t-il sur le compte le 2 septembre si les intérêts ne sont pas comptés par quinzaine ?

b) Quelle somme reste-t-il sur le compte si les intérêts sont comptés par quinzaine ?

2.3 Comparaison de placements

Une personne place 2 000 € sur un compte à 8 % et une autre personne place 1 800 € sur un compte à 10 %. Au bout de combien de temps les sommes placées sur ces deux comptes auront-elles la même valeur acquise ?

Copyright © 2011 Dunod.

2.4 Offres de banques

Une banque propose le forfait suivant à ses clients :

– des frais de 10 € par an et aucun intérêt pour les comptes ayant une capitalisation inférieure ou égale à 800 € ;

– des frais de 10 € par an, des intérêts de 5 % sur le capital excédant 800 € et des frais de 1 % sur l'ensemble du capital pour les comptes ayant une capitalisation supérieure à 800 € et inférieure ou égale à 5 000 € ;

– des intérêts de 8 % sur le capital excédant 3 000 € et des frais de 2 % sur l'ensemble du capital pour les comptes ayant une capitalisation supérieure à 5 000 €.

a) Est-il intéressant de délaisser un compte sans intérêts ni frais pour ce forfait ?

b) Comment peut-on évaluer le taux réel de ce forfait ?

2.5 Versements réguliers

Un individu place, le premier de chaque mois, une somme de 1 000 € du 1er janvier au 1er septembre. Déterminer la valeur acquise de ses versements le 30 septembre (on supposera des mois d'une durée identique de 30 jours) avec un taux annuel de 5 %.

2.6 Valeurs acquises

Un capital de 3 000 € est placé du 1er mai au 30 juin au taux nominal de 5 % ; un deuxième capital de 5 000 € est placé du 1er mai au 31 juillet au taux nominal de 8 % et un troisième capital de 1 000 € est placé du 1er mai au 2 septembre au taux nominal de 2 %. Quel est le taux moyen de ce placement ?

2.7 Valeur d'un capital

Un capital placé une certaine durée à 8 % a rapporté 500 € d'intérêts. Ce même capital placé 100 jours de moins à 9 % aurait rapporté 480 € d'intérêts. Quelle est la valeur de ce capital ?

2.8 Escompte

Un effet de commerce de valeur nominale 10 000 € à échéance le 5 septembre est renégocié le 10 avril pour une date échéante du 15 décembre. Quelle est la valeur nominale de ce nouvel effet pour un taux d'escompte de 10 % ?

Copyright © 2011 Dunod.

2.9 Équivalence de traites

Un commerçant doit rembourser 3 traites :

– une première de 2 000 € à échéance le 1er mai ;

– une deuxième de 5 000 € à échéance le 1er juin ;

– une troisième de 6 000 € à échéance le 1er juillet.

Il décide, le 1er mars, de rembourser l'ensemble de ses traites par une unique traite à échéance du 1er mai. Quelle sera la valeur nominale de cette unique traite pour un taux d'escompte de 6 % ?

Remarque : une traite est similaire à un effet de commerce.

2.10 Taux d'escompte

Le 1er mars, à quel taux d'escompte un effet de nominal 2 000 € à échéance le 15 juin est-il équivalent à un effet de nominal 1 950 € à échéance le 15 avril ?

2.11 Date d'équivalence

À quelle date une traite de nominal 1 800 € à échéance le 12 juillet est-elle équivalente à une traite de 1 750 € à échéance le 12 mai ? Taux d'escompte 12 %.

2.12 Agios

Un effet de commerce de nominal 5 000 €, échéant le 5 mai, est présenté à l'escompte le 1er mars. Le taux d'escompte est de 7 %, la banque fixe des frais de dossier de 4 € et une majoration de 3 jours. On ne prend pas en compte les taxes. Calculer l'agio et le taux réel de l'escompte.

2.13 Taux précompté

Au bout de combien de temps un taux d'intérêt simple de 11 % est-il équivalent à un taux d'intérêt précompté de 10 % ?

2.14 Équivalence de taux

À quel taux d'intérêt précompté un taux d'intérêt simple de 10 % est-il équivalent en 150 jours ?

2.15 Comparaison de modes de paiement

Un commerçant propose deux modes de paiement pour un article :

– Mode 1 : paiement de 100 € comptant, 200 € dans 1 mois, 200 € dans 2 mois.

Copyright © 2011 Dunod.

– Mode 2 : paiement de 250 € dans 20 jours et de 250 € dans 50 jours.

Quel mode de paiement vous semble le plus intéressant pour un acheteur au taux d'escompte de 10 % ?

SOLUTIONS

Exercice 2.1

a) La durée du placement est de $31 - 5 + 30 + 31 + 31 + 30 + 17 = 165$ jours.

La valeur acquise de ce placement est :

$$800\left(1 + 0{,}03 \times \frac{165}{360}\right) = 811 \text{ €}$$

b) On cherche le taux de placement t. Il est donné par l'expression de l'intérêt :

$$80 = 7\,800 \times t \times \frac{8}{12}$$

Ainsi $t = \dfrac{80 \times 12}{7\,800 \times 8} \simeq 1{,}54\ \%$

c) La valeur C_0 à placer est donnée dans l'expression :

$$5\,000 = C_0\left(1 + 0{,}08 \times \frac{50}{360}\right)$$

Ainsi $C_0 = \dfrac{5\,000}{1 + 0{,}08 \times \dfrac{50}{360}} = 4\,945{,}05 \text{ €}$

d) Les intérêts acquis sont de 40 €. La durée en jours du placement est donnée dans l'expression :

$$40 = 8\,000 \times 0{,}04 \times \frac{j}{360} \text{ ainsi } j = \frac{40 \times 360}{8\,000 \times 0{,}04} = 45 \text{ jours}$$

Le placement débute le 4 mars, la valeur de 8 040 € sera acquise au bout de 45 jours soit le 18 avril.

Exercice 2.2

a) Dans ce premier cas on ne prend en compte que les durées en jours entre les opérations.

Copyright © 2011 Dunod.

Date	Durée entre les opérations	Valeur acquise
5 janvier	0 jour	5 000 €
8 mars	62 jours	$5\,000\left(1+0{,}08\times\frac{62}{360}\right)-4\,000=1\,068{,}89$ €
18 mars	10 jours	$1\,068{,}89\left(1+0{,}08\times\frac{10}{360}\right)+800=1\,871{,}26$ €
22 mai	65 jours	$1\,871{,}26\left(1+0{,}08\times\frac{65}{360}\right)-1\,500=398{,}29$ €
6 juin	15 jours	$398{,}29\left(1+0{,}08\times\frac{15}{360}\right)+1\,000=1\,399{,}62$ €
7 juillet	31 jours	$1\,399{,}62\left(1+0{,}08\times\frac{31}{360}\right)-1\,000=409{,}26$ €
2 septembre	57 jours	$409{,}26\left(1+0{,}08\times\frac{57}{360}\right)=414{,}45$ €

La valeur acquise sur le compte, le 2 septembre, est 414,45 €.

Pour gérer des mouvements sur un compte – sans prise en compte de quinzaines – il est nécessaire de recalculer une valeur acquise sur le compte aux instants consécutifs à un mouvement donné.

b) Un décompte par quinzaine est plus compliqué car il ne faut prendre en compte que les quinzaines complètes.

L'avoir de 5 000 € le 5 janvier travaille sur le compte jusqu'au 8 mars, mais les intérêts ne seront calculés que sur trois quinzaines : la seconde de janvier et les deux de février. La valeur acquise fin février est donc de :

$$5\,000\left(1+0{,}08\times\frac{3}{24}\right)=5\,050\text{ €}$$

Le retrait de 4 000 € a lieu le 8 mars, par conséquent les intérêts ne sont calculés la première quinzaine de mars que sur une somme de 5 050 – 4 000 = 10,50 €. Le versement de 800 € le 18 mars ne sera comptabilisé dans le calcul des intérêts qu'à partir d'avril. La valeur acquise à la fin de la seconde quinzaine de mars est de :

Copyright © 2011 Dunod.

$$1\,050\left(1+0{,}08\times\frac{2}{12}\right)+800=1\,857\ €$$

La valeur acquise de ce capital à la fin de la première quinzaine de mai est de :

$$1\,857\left(1+0{,}08\times\frac{3}{24}\right)=1\,875{,}57\ €$$

Le retrait de 1 500 € est déduit du calcul des intérêts dès le début de la seconde quinzaine de mai. Le versement de 1 000 € le 6 juin ne sera pris en compte dans le calcul des intérêts qu'à partir de la seconde quinzaine de juin. La valeur acquise à la fin de la première quinzaine de juin est donc :

$$(1\,875{,}57-1\,500)\left(1+0{,}08\times\frac{2}{24}\right)+1\,000=1\,378{,}07\ €$$

La valeur acquise fin juin est donc de :

$$1\,378{,}07\left(1+0{,}08\times\frac{1}{24}\right)=1\,382{,}67\ €$$

Le retrait de 1 000 € le 7 juillet est pris en compte dès la première quinzaine de juillet pour le calcul des intérêts. Il reste 4 quinzaines jusqu'au 2 septembre. La valeur acquise à cette date est donc de :

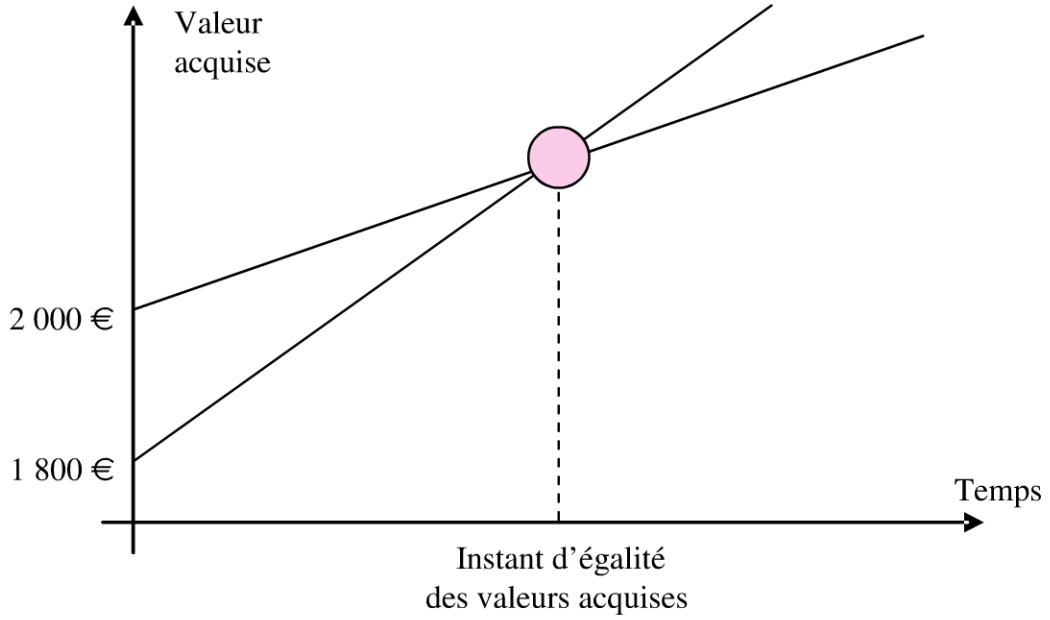
$$(1\,382{,}67-1\,000)\left(1+0{,}08\times\frac{4}{24}\right)=387{,}77\ €$$

Remarque : le mode de calcul par quinzaine est moins avantageux. On trouve un écart de 26,68 € entre les deux modes de calcul.

Exercice 2.3

La solution de cette question existe. Une somme faible à un taux d'intérêt fort va dépasser une somme plus importante placée à un taux plus faible. On peut le constater sur le graphique ci-après.

Copyright © 2011 Dunod.



Le nombre de jours nécessaire pour que les valeurs acquises soient égales est donné par l'équation :

$$2\,000\left(1+0{,}08\times\frac{j}{360}\right)=1\,800\left(1+0{,}1\times\frac{j}{360}\right)$$

ainsi :

$$2\,000+2\,000\times0{,}08\times\frac{j}{360}=1\,800+1\,800\times0{,}1\times\frac{j}{360}$$

$$\text{Donc } 2\,000-1\,800=\left(\frac{1\,800\times0{,}1}{360}-\frac{2\,000\times0{,}08}{360}\right)\times j$$

$$\text{Et } \quad j=\frac{2\,000-1\,800}{\dfrac{1\,800\times0{,}1-2\,000\times0{,}08}{360}}=3\,600 \text{ jours}$$

Autrement dit en comptant des années comptables de 360 jours, il faudrait exactement 10 ans pour atteindre une égalité entre ces deux capitaux.

Exercice 2.4

a) Il n'est pas possible de répondre dans l'absolu à cette question. De façon générale, ce compte est intéressant lorsque les intérêts dépassent les frais.

Ainsi si l'on dispose de moins de 800 €, ce compte n'est pas intéressant car il y a 10 € de frais et pas d'intérêts.

Copyright © 2011 Dunod.

Si l'on dispose d'une somme S comprise entre 800 € et 5 000 €, les frais sur une année sont de $10 + S \times 0{,}01$, les intérêts sont de 5 % sur le capital excédant 800 €, donc sur la somme $S - 800$ ainsi ils permettent des gains de $0{,}05 \times (S - 800)$ en un an. On souhaite donc pour ce compte avoir $0{,}05(S - 800) > 10 + 0{,}01 \times S$,

soit $0{,}05S - 40 > 10 + 0{,}01S$ d'où $0{,}04S > 50$ et par conséquent $S > 1\,250$ €.

Le compte est donc intéressant si l'on dispose d'un capital compris entre 1 250 € et 5 000 €.

Si l'on dispose d'une somme S supérieure à 5 000 €, les intérêts sont de 8 % sur le capital excédent 3 000 €. On gagne donc en un an un intérêt de $0{,}08(S - 3\,000)$. Les frais sont de 2 % sur l'ensemble du capital. Ils entraînent ainsi une perte de $0{,}02S$.

Le compte est alors intéressant si $0{,}08(S - 3\,000) > 0{,}02S$, soit $0{,}08S - 240 > 0{,}02S$, ainsi $0{,}06S > 240$ et donc, $S > 4\,000$ €.

Autrement dit comme on dispose d'une somme supérieure à 5 000 €, les intérêts sont supérieurs aux frais et le compte est intéressant.

En conclusion, ce compte n'est intéressant que si l'on dispose d'une somme supérieure à 1 250 €.

b) On ne peut évaluer le taux réel de ce forfait que lorsque ce dernier est assimilable à un compte d'épargne et permet de dégager des intérêts. On ne s'intéressera donc qu'au cas où la somme sur le compte est supérieure à 1 250 €.

Si la somme S est comprise entre 1 250 € et 5 000 €, on réalise un gain en un an sur le compte de $0{,}05(S - 800) - 10 - 0{,}01S = 0{,}04S - 50$.

Le gain réalisé avec un taux moyen annuel t serait de :

$$S \times t \text{ ainsi } S \times t = 0{,}04S - 50 \text{ et } \boxed{t = 0{,}04 - \frac{50}{S}}$$

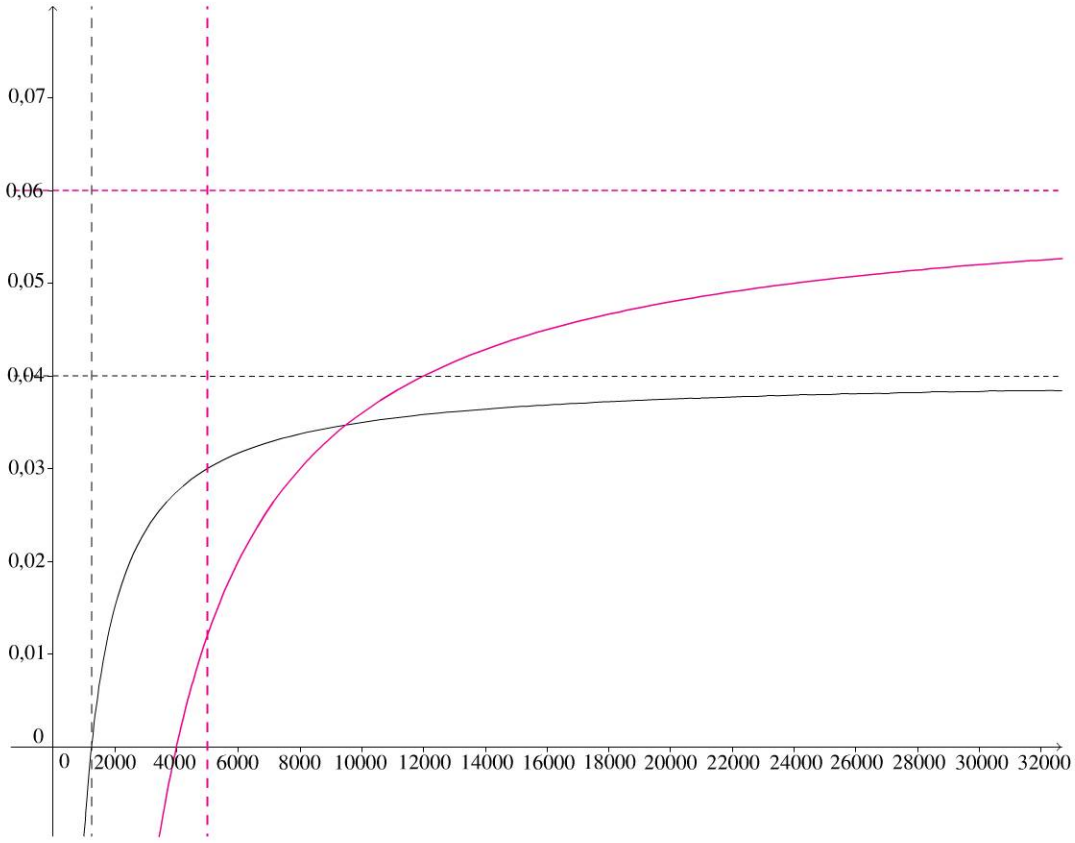
On remarque que le taux moyen dépend de la somme sur le compte.

Si la somme sur le compte est supérieure à 5 000 €, le gain réalisé est $0{,}08(S - 3\,000) - 0{,}02S = 0{,}06S - 240$.

Ainsi le taux moyen est donné par $S \times t = 0{,}06S + 240$ et

$$\boxed{t = 0{,}06 - \frac{240}{S}}$$

Copyright © 2011 Dunod.



Ce graphique représente les deux courbes des taux moyens en fonction de la somme sur le compte. La courbe noire est applicable pour une somme comprise entre 1 250 € et 5 000 € et la courbe rouge est valable pour une somme supérieure à 5 000 €.

On remarque que les taux de 4 % et 6 % marquent des limites pour les deux courbes. On note aussi que le passage d'un forfait à l'autre n'est pas intéressant dans un premier temps. On gagne plus avec 4 999 € et l'ancien forfait qu'avec 5 001 € et le nouveau forfait. À partir d'une somme de 9 500 € sur le compte, le nouveau forfait est réellement plus intéressant.

Exercice 2.5

Il s'agit d'un versement constant de 9 mensualités de 1 000 €. La valeur acquise de ces versements, juste après le dernier versement, est de :

$$1\,000 \times 9 \times \left(1 + 0{,}05 \times \frac{9-1}{24}\right) = 9\,150 \text{ €}$$

Cette somme est sur le compte le 1er septembre. Elle va encore profiter d'un mois de placement. La somme sur le compte le 30 septembre sera

Copyright © 2011 Dunod.

ainsi de :

$$9\,150\left(1+0{,}05\times\frac{1}{12}\right)=9\,188{,}13\ €$$

Exercice 2.6

Il s'agit de déterminer un taux moyen de placement. Les capitaux sont de 3 000 €, 5 000 € et 1 000 € pour des taux respectifs de 5 %, 8 % et 2 % et des durées respectives de 60 jours, 91 jours et 124 jours. Le taux moyen est donc de :

$$\frac{3\,000\times60\times0{,}05+5\,000\times91\times0{,}08+1\,000\times124\times0{,}02}{3\,000\times60+5\,000\times91+1\,000\times124}=6{,}31\ \%$$

Un capital placé une certaine durée à 8 % a rapporté 500 € d'intérêts. Ce même capital placé 100 jours de moins à 9 % aurait rapporté 480 € d'intérêts. Quelle est la valeur de ce capital ?

Exercice 2.7

Notons j la durée de placement en jours du capital C. On a :

$$500=C\times0{,}08\times\frac{j}{360}\ \text{et}\ 480=C\times0{,}09\times\frac{j-100}{360}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues. Un moyen pour trouver C est de substituer j dans la seconde équation par l'expression de j en fonction de C de la première équation.

On a $\quad j=\dfrac{360\times500}{C\times0{,}08}$

ainsi $\quad 480=C\times0{,}09\times\dfrac{\dfrac{360\times500}{C\times0{,}08}-100}{360}$

et $\quad 480\times360=C\times0{,}09\times\dfrac{360\times500-100\times C\times0{,}08}{C\times0{,}08}$

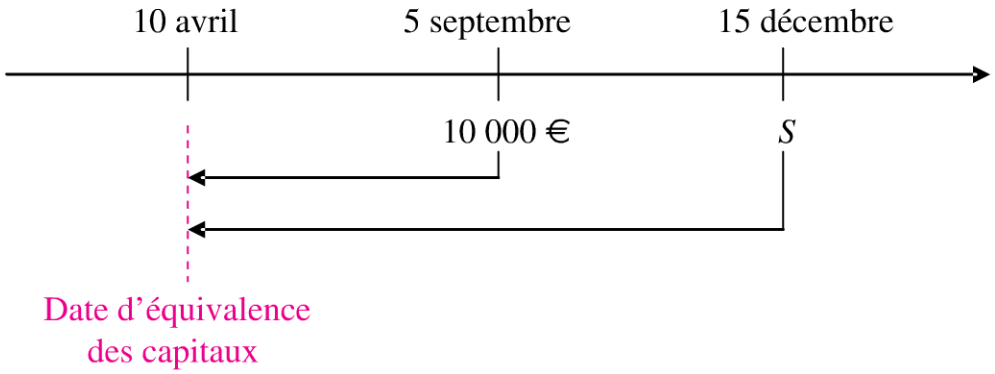
ainsi $\quad \dfrac{480\times360\times0{,}08}{0{,}09}=360\times500-100\times0{,}08\times C$

et $\quad C=\dfrac{360\times500-\dfrac{480\times360\times0{,}08}{0{,}09}}{100\times0{,}08}=3\,300\ €$

Copyright © 2011 Dunod.

Exercice 2.8

Représentons la situation schématiquement :



Le 10 avril est la date d'équivalence des 10 000 € à échéance du 5 septembre et de la somme S à échéance du 15 décembre.

On a 30 – 10 + 31 + 30 + 31 + 31 + 5 = 148 jours entre le 10 avril et le 5 septembre et 30 – 10 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 15 = 249 jours entre le 10 avril et le 15 décembre.

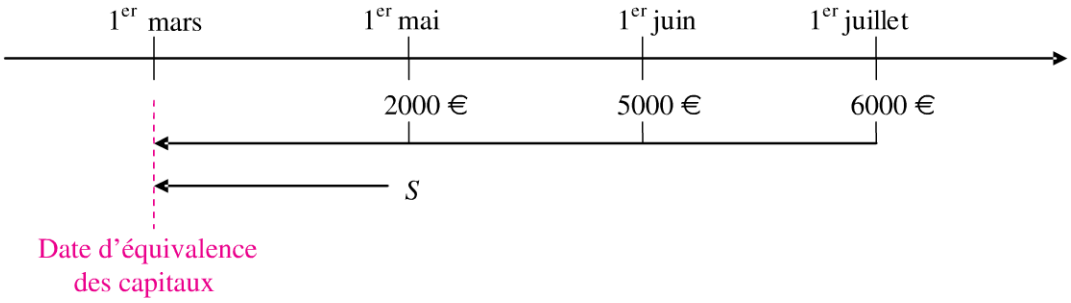
À la date d'équivalence des capitaux on a :

$$S\left(1 - 0{,}1 \times \frac{249}{360}\right) = 10\,000\left(1 - 0{,}1 \times \frac{148}{360}\right)$$

$$\text{ainsi } S = \frac{10\,000\left(1 - 0{,}1 \times \frac{148}{360}\right)}{1 - 0{,}1 \times \frac{249}{360}} = 10\,301{,}40 \text{ €}$$

Exercice 2.9

Représentons la situation schématiquement.



On a équivalence des capitaux le 1er mars.

Copyright © 2011 Dunod.

Ainsi :

$$S\left(1-0{,}06\times\frac{31-1+30+1}{360}\right)$$
$$=2\,000\left(1-0{,}06\times\frac{31-1+30+1}{360}\right)$$
$$+5\,000\left(1-0{,}06\times\frac{31-1+30+31+1}{360}\right)$$
$$+6\,000\left(1-0{,}06\times\frac{31-1+30+31+30+1}{360}\right)$$

Soit :

$$S\times 0{,}989833=12\,781$$

Ainsi : $S=12\,912{,}27$ €

On ne doit pas additionner les différents capitaux, cela reviendrait à les considérer à une même date, ce qui est contraire à l'énoncé.

Exercice 2.10

Le schéma représentatif de cette situation est similaire à celui de l'exercice 2.1. Le 1er mars est la date d'équivalence des capitaux. On cherche le taux d'intérêt t :

$$2\,000\left(1-t\times\frac{31-1+30+31+15}{360}\right)=1\,950\left(1-t\times\frac{31-1+15}{360}\right)$$

Ainsi : $2\,000-1\,950=t\left(2\,000\times\frac{106}{360}-1\,950\times\frac{45}{360}\right)$

On trouve donc : $t=\dfrac{2\,000-1\,950}{2\,000\times\frac{106}{360}-1\,950\times\frac{45}{360}}=14{,}49\ \%$

Exercice 2.11

Notons d la durée en jours séparant la date d'équivalence des deux capitaux du 12 mai. La durée séparant la date d'équivalence du 12 juillet est donc $d+31-12+30+12=d+61$ jours. On a alors :

$$1\,750\left(1-0{,}12\times\frac{d}{360}\right)=1\,800\left(1-0{,}12\times\frac{d+61}{360}\right)$$

Copyright © 2011 Dunod.

Ainsi :

$$1\,750 - 1\,750 \times 0{,}12 \times \frac{d}{360}$$

$$= 1\,800 - 1\,800 \times 0{,}12 \times \frac{d}{360} - 1\,800 \times 0{,}12 \times \frac{61}{360}$$

Soit :

$$(1\,800 - 1\,750) \times 0{,}12 \times \frac{d}{360}$$

$$= 1\,800 - 1\,750 - 1\,800 \times 0{,}12 \times \frac{61}{360}$$

Ainsi : $d = 804$ jours.

Si l'on compte des années de 360 jours, la durée est de 2 ans et 84 jours. Ainsi la date d'équivalence est le 17 février de l'année $N - 2$.

Exercice 2.12

On a : Agio = Escompte + Frais.

Ici l'escompte est $5\,000 \times 0{,}07 \times \frac{31 - 1 + 30 + 5}{360} = 63{,}19$ €. On a une majoration de 3 jours qui représente un coût de :

$$5\,000 \times 0{,}07 \times \frac{3}{360} = 2{,}92 \text{ €}$$

Les frais de dossier sont de 4 €.

Ainsi l'agio est $63{,}19 + 2{,}92 + 4 = 70{,}11$ €.

Le taux réel de l'escompte t est donné par la relation :

$$5\,000 \times t \times \frac{31 - 1 + 30 + 5}{360} = 70{,}11$$

ainsi $t = \frac{360 \times 70{,}11}{5\,000 \times 65} = 7{,}77$ %

Remarque : le taux réel est toujours supérieur au taux proposé comme il prend en compte les divers frais.

Copyright © 2011 Dunod.

Exercice 2.13

On a la relation suivante entre taux d'intérêt simple et taux d'intérêt précompté :

$$t = \frac{t'}{1 - t' \times \dfrac{j}{360}}$$

Ici $t = 11\ \%$ et $t' = 10\ \%$, on cherche j.

Ainsi $0{,}11 = \dfrac{0{,}10}{1 - 0{,}10 \times \dfrac{j}{360}}$ et $1 - 0{,}1 \times \dfrac{j}{360} = \dfrac{0{,}1}{0{,}11}$

puis $0{,}1 \times \dfrac{j}{360} = 1 - \dfrac{0{,}1}{0{,}11}$

d'où $j = \dfrac{360}{0{,}1} \times \left(1 - \dfrac{0{,}1}{0{,}11}\right) = 327$ jours

Exercice 2.14

Avec la même formule qu'à l'exercice 2.7, on a :

$$0{,}1 = \frac{t'}{1 - t' \times \dfrac{150}{360}} \text{ ainsi } 0{,}1\left(1 - t' \times \frac{150}{360}\right) = t'$$

d'où $0{,}1 - t' \times \dfrac{15}{360} = t'$ ainsi $t' = \dfrac{0{,}1}{1 + \dfrac{15}{360}} = 9{,}6\ \%$

Exercice 2.15

On va chercher à déterminer une valeur actuelle de ces différents modes de paiement.

– Pour le **mode 1**, la valeur actuelle est donnée par :

$$100 + 200\left(1 - 0{,}1 \times \frac{1}{12}\right) + 200\left(1 - 0{,}1 \times \frac{2}{12}\right) = 495\ €$$

– Pour le **mode 2**, la valeur actuelle est :

$$250\left(1 - 0{,}1 \times \frac{20}{360}\right) + 250\left(1 - 0{,}1 \times \frac{50}{360}\right) = 495{,}14\ €$$

Le mode 1 est donc plus favorable pour un acheteur.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 3

Les intérêts composés

OBJECTIFS

- Connaître la formule des intérêts composés.
- Savoir retrouver une durée, un taux ou une valeur de placement en intérêts composés.
- Calculer un taux équivalent et un taux proportionnel.
- Comparer des modes de paiement par des calculs de valeurs actuelles.
- Utiliser la formule de la valeur acquise de versements constants.
- Connaître la formule de la valeur acquise de versements en progression géométrique.
- Appliquer la formule de la valeur actuelle de versements constants à une rente.
- Comprendre le fonctionnement simplifié de la retraite par capitalisation.

PLAN

3.1 Calcul des intérêts composés

3.2 Taux proportionnels et taux équivalents

3.3 Versements constants

Copyright © 2011 Dunod.

3.1 CALCUL DES INTÉRÊTS COMPOSÉS

a) Valeur acquise

Le calcul des intérêts simples se fait uniquement sur la somme initialement placée sur le compte. Les intérêts composés sont eux calculés sur la somme l'année passée. Il peut donc y avoir une croissance des intérêts d'une année sur l'autre pour les intérêts composés, généralement appliqués pour des placements d'une durée supérieure à un an.

Notons S_0 la somme placée initialement sur un compte au taux d'intérêt composé i. Au bout d'un an, la somme sur le compte sera de $S_1 = S_0(1+i)$.

Remarque : on reconnaît la formule des intérêts simples au bout d'un an.

On calcule de la même manière la somme sur le compte au bout de deux ans :

$$S_2 = S_1(1+i) = S_0(1+i)(1+i) = S_0(1+i)^2$$

Au bout de trois ans, la somme sur le compte sera de :

$$S_3 = S_2(1+i) = S_0(1+i)^2(1+i) = S_0(1+i)^3$$

On déduit de ces premières observations la formule générale de la **valeur acquise d'un placement en intérêts composés au taux i** :

$$S_n = S_0(1+i)^n$$

Remarque : (S_n) est une suite géométrique de premier terme S_0 et de raison $(1+i)$.

Exemple

On place 1 000 € pendant 3 ans au taux d'intérêt 5 %. La valeur acquise de cette somme au bout des 3 ans sera de $1\,000(1+0{,}05)^3 = 1\,157{,}63$ €. Les intérêts acquis sur la période sont donc de 157,63 €.

b) Intérêts, valeur placée, durée et taux

La formule de la valeur acquise d'un placement en intérêts composés est utile pour répondre aux questions suivantes :

➤ Comment calculer les intérêts acquis lors d'un placement ?

Les **intérêts** se déduisent en retirant la somme placée de la valeur acquise :

$$I_n = S_0(1+i)^n - S_0 = S_0((1+i)^n - 1)$$

➤ Comment trouver une valeur placée ?

Si l'on dispose de la valeur acquise, de la durée de placement et du taux de placement, on peut trouver la valeur placée :

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n} = S_n(1+i)^{-n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

➤ Comment trouver une durée ?

Si l'on dispose de la valeur acquise, de la valeur placée et du taux de placement, on peut chercher à calculer la durée du placement en isolant n dans la formule : $S_n = S_0(1+i)^n$

On a : $(1+i)^n = \dfrac{S_n}{S_0}$

L'utilisation du logarithme est nécessaire pour « faire tomber la puissance ».

$$\ln((1+i)^n) = \ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)$$

ainsi $n \times \ln(1+i) = \ln\left(\dfrac{S_n}{S_0}\right)$

On trouve donc : $\boxed{n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_n}{S_0}\right)}{\ln(1+i)}}$

Exemple

En combien de temps un capital de 1 000 € peut-il atteindre une valeur acquise de 1 215,51 € au taux annuel de 5 % ? En appliquant la formule précédente, on trouve :

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{1\,215{,}51}{1\,000}\right)}{\ln(1{,}05)} = 4 \text{ ans}$$

➤ Comment trouver un taux ?

Si l'on dispose de la valeur acquise, de la valeur placée et de la durée de placement, on peut chercher à calculer le taux de placement i dans la formule : $S_n = S_0(1+i)^n$

On a : $(1+i)^n = \dfrac{S_n}{S_0}$

Ainsi $1+i = \left(\dfrac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}}$

Et $\boxed{i = \left(\dfrac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$

Copyright © 2011 Dunod.

Exemple

À quel taux peut-on obtenir une valeur acquise de 2 000 € avec un capital de 1 500 € en 10 ans ? En appliquant la formule précédente, on trouve

$$i = \left(\frac{2\,000}{1\,500}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 2{,}92\ \%$$

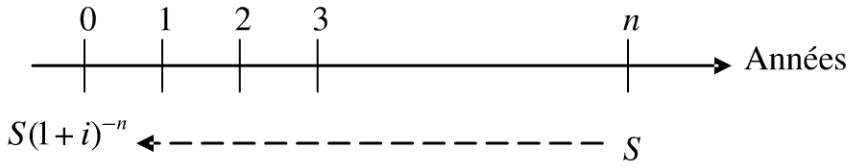
b) Actualisation

En finance, on ne peut comparer des sommes qu'à une même date.

En effet, une somme de 1 000 € aujourd'hui a plus de valeur qu'elle n'aura dans un an. D'une part, on peut placer ces 1 000 € sur un compte d'épargne aujourd'hui et profiter d'intérêts dans un an et, d'autre part, l'inflation peut faire varier la valeur de cette somme dans un an.

Pour connaître la valeur actuelle d'une somme à venir S dans n années, on peut actualiser cette somme par la formule :

$$S(1+i)^{-n}$$



Ce procédé opère à l'inverse du calcul de la valeur acquise des intérêts composés. On ne cherche plus à connaître la valeur future d'une somme actuelle mais à estimer la valeur actuelle d'une somme à venir.

L'actualisation est utile pour comparer des modes de paiement.

Exemple

Un magasin propose soit de payer un objet comptant 1 000 € soit de payer 520 € dans un an et 540 € dans deux ans. Quel mode de paiement choisir avec un taux d'actualisation de 5 % ?

On va chercher à actualiser les deux sommes du second mode de paiement pour pouvoir les comparer aux 1 000 € comptant.

On a ainsi : $520(1{,}05)^{-1} + 540(1{,}05)^{-2} = 985{,}03$ €.

Le second mode de paiement est par conséquent plus intéressant pour un taux de 5 % alors même qu'il conduit à payer 60 € de plus dans l'absolu.

Copyright © 2011 Dunod.

3.2 TAUX PROPORTIONNELS ET TAUX ÉQUIVALENTS

Les intérêts composés s'appliquent généralement à des placements de durées supérieures à un an. Le taux i utilisé dans la partie précédente est un taux annuel. Il serait utile dans certains cas de repasser à un taux d'une durée plus courte, par exemple un taux mensuel ou trimestriel.

L'idée intuitive est de calculer un **taux proportionnel** en divisant le taux annuel par le nombre de périodes concernées.

Une année compte 12 mois, le taux mensuel proportionnel est donc un douzième du taux annuel :

$$i_m = \frac{i}{12}$$

Le taux semestriel proportionnel est ainsi : $i_s = \frac{i}{2}$

et le taux trimestriel proportionnel est : $i_t = \frac{i}{4}$

Le taux proportionnel ne permet pas une équivalence exacte entre les taux.

Exemple

Considérons un placement de 1 000 € au taux annuel de 10 %. La valeur acquise de cette somme au bout d'un an sera de $1\,000 \times 1{,}1 = 1\,100$ €. Le taux trimestriel proportionnel est :

$$\frac{10\,\%}{4} = 2{,}5\,\%$$

Si l'on place 1 000 € à ce taux trimestriel pendant quatre trimestres (autrement dit un an), la valeur acquise de ce placement sera de $1\,000(1{,}025)^4 = 1\,103{,}81$ €. Il y a un écart de 3,81 € entre les deux modes de calcul.

Cet exemple illustre la nécessité d'introduire la notion de **taux équivalent**. On cherche un taux assurant une équivalence parfaite entre le taux annuel et le taux d'une période plus courte.

Reprenons l'exemple du taux trimestriel.

On place une somme S au taux annuel i et l'on souhaite que la valeur acquise de cette somme soit la même que celle obtenue au taux trimestriel i_t pendant quatre trimestres.

Copyright © 2011 Dunod.

On a donc $S(1+i) = S(1+i_t)^4$ ainsi $1+i = (1+i_t)^4$ donc $1+i_t = (1+i)^{\frac{1}{4}}$ et $\boxed{i_t = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1}$

Cette formule est la formule du taux trimestriel équivalent.

On trouve de la même façon un taux mensuel équivalent : $\boxed{i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1}$

et un taux semestriel équivalent :

$$\boxed{i_s = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1}$$

Exemple

Le taux trimestriel équivalent à un taux annuel de 10 % est donc :

$$1{,}1^{\frac{1}{4}} - 1 \simeq 2{,}41\ \%$$

On a :

$$\boxed{\text{Taux proportionnel} > \text{Taux équivalent}}$$

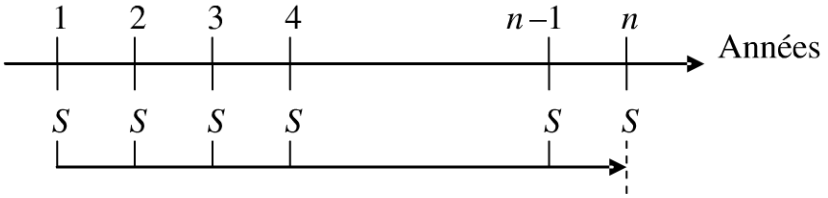
En pratique, les deux taux sont utilisés. Pour les emprunts, les banques optent pour le taux proportionnel alors que pour les placements le taux équivalent est plus souvent appliqué.

3.3 VERSEMENTS CONSTANTS

a) Valeur acquise d'un versement constant

On cherche à déterminer la valeur acquise d'un versement constant. On suppose qu'on place sur un compte d'épargne au taux annuel i une somme S tous les ans.

➤ Quelle sera la valeur acquise au bout de n années, juste après le dernier versement ?



– La première somme S placée l'année 1 reste $n-1$ années sur le compte. Sa valeur acquise est $S(1+i)^{n-1}$.

– La deuxième somme S placée l'année 2 reste $n-2$ années sur le compte. Sa valeur acquise est $S(1+i)^{n-2}$.

Copyright © 2011 Dunod.

– La somme placée l'année $n-1$ reste une année sur le compte. Sa valeur acquise est $S(1+i)$.

– La dernière somme S placée l'année n ne profite pas d'intérêts car on évalue l'ensemble des versements juste après ce placement.

Notons V la valeur acquise de l'ensemble des placements.

On a : $V = S + S(1+i) + S(1+i)^2 + \ldots + S(1+i)^{n-2} + S(1+i)^{n-1}$

On remarque que V est la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme S et de raison $1+i$.

Ainsi $V = S \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$

On a donc la formule de la **valeur acquise d'un versement constant** :

$$V = S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Exemple

On place 1 000 € par an pendant 4 ans au taux de 6 % ; la valeur acquise de ces placements juste après le dernier versement est :

$$1\,000 \times \frac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06} = 4\,374{,}62 \ \text{€}$$

La formule $V = S \times \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ n'est valable qu'à l'instant succédant le dernier versement, si l'instant d'observation est a années après le dernier versement, cette formule doit alors être adaptée et devient :

$$V = S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^a$$

Remarque : une résolution par équation suffit pour déterminer la durée en années n où la somme S versée tous les ans. En revanche, il est impossible de déterminer algébriquement une expression du taux i en fonction de V, S et n car i est présent sous deux formes dans l'équation.

Méthode graphique pour déterminer un taux *i*

On place tous les ans pendant 5 ans une somme de 1 000 €, la valeur acquise de ces versements est de 5 500 €. Quel est le taux de placement ?

Copyright © 2011 Dunod.

L'équation qui conduirait à une expression de i serait :

$$5\,500 = 1\,000 \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i}$$

Il n'est pas possible algébriquement d'isoler i dans cette équation. On choisit alors de procéder par tâtonnements. L'équation est :

$$5\,500 - 1\,000 \times \frac{(1+i)^5 - 1}{i} = 0$$

Posons alors $f(x) = 5\,500 - 1\,000 \times \dfrac{(1+x)^5 - 1}{x}$

On cherche une valeur approximative de x qui annule f. On peut calculer à l'aide d'une table les différentes valeurs de $f(x)$ en choisissant des valeurs de x évoluant avec un pas de 1 %. Présentons les résultats dans une table.

x	$f(x)$
0.01	398.99499
0.02	295.95984
0.03	190.86419
0.04	83.67744
0.05	– 25.63125

On remarque que $f(x)$ change de signe entre 4 % et 5 %. Ainsi la solution est entre 4 % et 5 %. Si l'on souhaite plus de précisions, on calcule à nouveau les valeurs de $f(x)$ pour x compris entre 4 % et 5 % et un pas de 0,1 %.

x	$f(x)$
0.04	83.67744
0.041	72.84256924
0.042	61.9864483
0.043	51.1090462
0.044	40.2103319
0.045	29.29027438
0.046	18.34884254
0.047	7.386005319
0.048	–3.598268416

Ainsi x est compris entre 4,7 % et 4,8 %. On peut obtenir encore plus de précisions avec un pas de 0,01 %.

x	$f(x)$
0.0471	6.288543102
0.0472	5.190866489
0.0473	4.092975448
0.0474	2.994869949
0.0475	1.896549961
0.0476	0.798015452
0.0477	– 0.30073361

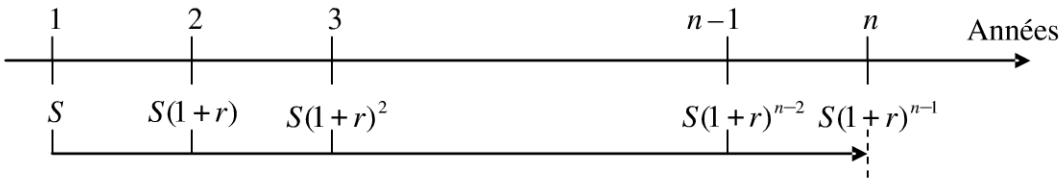
Copyright © 2011 Dunod.

Le taux est ainsi compris entre 4,76 % et 4,77 %. On peut réitérer le procédé jusqu'à obtenir la précision sur i que l'on souhaite.

b) Valeur acquise d'un versement en progression géométrique

➤ Quelle est la valeur acquise d'un versement en progression géométrique ?

La question se pose lorsqu'une personne a les moyens d'épargner chaque année r % de plus que l'année précédente. Supposons qu'une personne épargne une somme S l'année 1, les versements en progression géométrique sont schématisés ainsi :



La valeur acquise de la première somme est $S(1+i)^{n-1}$. La valeur acquise de la deuxième somme est $S(1+r)(1+i)^{n-2}$. La valeur acquise de l'avant-dernière somme est $S(1+r)^{n-2}(1+i)$. La valeur acquise de la dernière somme est $S(1+r)^{n-1}$.

L'ensemble des versements a donc pour valeur acquise :

$$W = S(1+i)^{n-1} + S(1+r)(1+i)^{n-2} + S(1+r)^2(1+i)^{n-3} + \ldots + S(1+r)^{n-2}(1+i) + S(1+r)^{n-}$$

En factorisant cette expression par $S(1+i)^{n-1}$ on trouve :

$$W = S(1+i)^{n-1}\left[1 + (1+r)(1+i)^{-1} + (1+r)^{-2}(1+i)^{-2} + \ldots + (1+r)^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}\right]$$

ainsi :

$$W = S(1+i)^{n-1}\left[1 + \left(\frac{1+r}{1+i}\right) + \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{n-1}\right]$$

On trouve une somme de n termes d'une suite géométrique de raison $\left(\frac{1+r}{1+i}\right)$

Copyright © 2011 Dunod.

Ainsi si $r \neq i$,

$$W = S(1+i)^{n-1} \times \frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{n} - 1}{\frac{1+r}{1+i} - 1}$$

$$= S \times \frac{(1+i)^n}{1+i} \times \frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{n} - 1}{\frac{1+r}{1+i} - 1}$$

Par conséquent : $W = S \times \dfrac{(1+r)^n - (1+i)^n}{1+r-(1+i)}$

On trouve la formule de la **valeur acquise d'une suite de versements en progression géométrique** :

$$W = S \times \frac{(1+r)^n - (1+i)^n}{r-i}$$

Si $r = i$, on trouve $W = N \times S(1+i)^{n-1}$

Exemple

On place 1 000 € l'année 1. On augmente ce placement de 2 % chaque année. Quelle sera la valeur acquise sur le compte au bout de 20 placements à 5 % ? On applique la formule précédente, ainsi :

$$W = 1\,000 \times \frac{(1+0{,}02)^{20} - (1+0{,}05)^{20}}{0{,}02 - 0{,}05} = 38\,911{,}68 \text{ €}$$

c) Valeur actuelle d'un versement constant et rentes

➤ Quelle est la valeur actuelle d'un versement constant ?

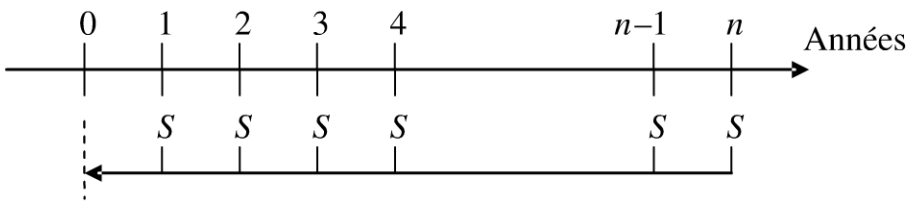
La question se pose pour une personne qui va percevoir une même somme tous les ans et qui cherche à évaluer la valeur actuelle d'un ensemble de versements à venir.

Une rente est un ensemble de sommes qu'un individu percevra à des dates à venir déterminées.

On utilise le terme général de rente en finance.

On notera R la valeur actuelle d'une rente. On cherche à évaluer la valeur actuelle des versements un an avant le premier versement.

Copyright © 2011 Dunod.



La somme S perçue dans 1 an a pour valeur actuelle $S(1+i)^{-1}$.
La somme S perçue dans 2 ans a pour valeur actuelle $S(1+i)^{-2}$.
La somme S perçue dans n années a pour valeur actuelle $S(1+i)^{-n}$.

On a ainsi :

$$R = S(1+i)^{-1} + S(1+i)^{-2} + \ldots + S(1+i)^{-(n-1)} + S(1+i)^{-n}.$$

Il s'agit de la somme de n termes d'une suite géométrique de premier terme $S(1+i)^{-1}$ et de raison $(1+i)^{-1}$.

$$\text{Ainsi : } R = S(1+i)^{-1} \times \frac{((1+i)^{-1}) - 1}{(1+i)^{-1} - 1}$$

$$\text{Soit : } R = S \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\dfrac{(1+i)^{-1} - 1}{(1+i)^{-1}}} = S \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{1 - \dfrac{1}{(1+i)^{-1}}}$$

$$= S \times \frac{(1+i)^{-n} - 1}{1 - (1+i)}$$

On a donc la formule de la **valeur actuelle d'un versement constant (ou rente)** :

$$R = S \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Cette formule n'est valable que pour une période avant le premier versement. Il est nécessaire d'adapter cette formule dans les cas suivants :

– Si l'instant d'observation est situé a années avant le premier versement, alors la valeur actuelle devient $R = S \times \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \times \dfrac{1}{(1+i)^{a-1}}$

– Si l'instant d'observation est situé a années après le premier versement, alors la valeur actuelle devient $R = S \times \dfrac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \times (1+i)^{a+1}$

Pour **une rente perpétuelle**, on peut envisager le cas où l'on perçoit une même somme S de façon perpétuelle. Cette éventualité est à prendre en

Copyright © 2011 Dunod.

compte lorsque la rente est transmissible à la génération suivante. On peut chercher à adapter la formule précédente : la seule donnée à changer est la durée des versements n. Pour une rente perpétuelle, cette durée est infinie. On peut donc faire tendre n vers l'infini dans la formule précédente pour trouver la valeur actuelle d'une rente perpétuelle.

On cherche mathématiquement la limite de $(1+i)^{-n}$ quand n tend vers l'infini. On a $\lim_{n\to\infty}(1+i)^n = +\infty$ car $1+i>1$

or $(1+i)^{-n} = \dfrac{1}{(1+i)^n}$ et ainsi $\lim_{n\to\infty}(1+i)^{-n} = 0$

On a donc pour une rente perpétuelle :

$$R = \lim_{n\to\infty} S \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = S \times \frac{1}{i}$$

Ainsi :

$$\boxed{R = \frac{S}{i}}$$

Cette formule n'est valable que pour une période avant le premier versement. Il est nécessaire de l'adapter dans les cas suivants :

– Si l'instant d'observation est situé a années avant le premier versement, alors la valeur actuelle devient :

$$R = \frac{S}{i} \times \frac{1}{(1+i)^{a-1}}$$

– Si l'instant d'observation est situé a années après le premier versement, alors la valeur actuelle devient :

$$R = \frac{S}{i} \times (1+i)^{a+1}$$

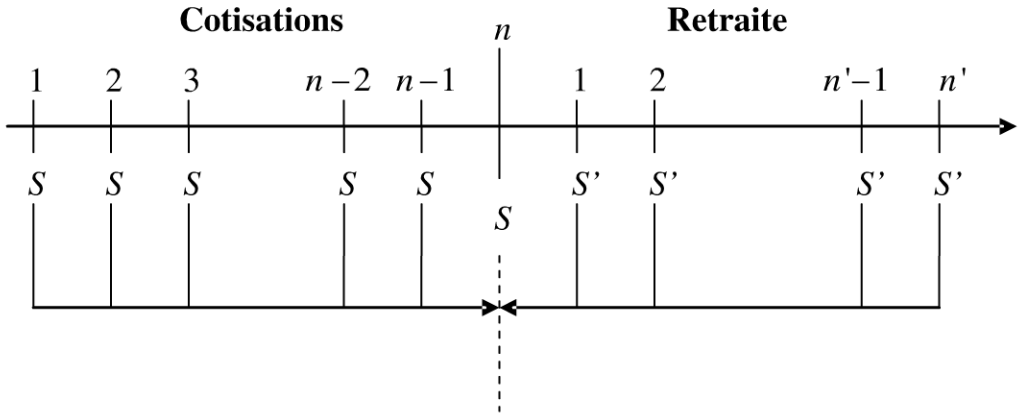
d) Retraite par capitalisation

Le principe d'une retraite par capitalisation est de placer une somme régulièrement sur un compte à intérêts pendant plusieurs années, – période de cotisations – puis de retirer régulièrement de l'argent de ce compte, – période de retraite.

Simplifions et formalisons le problème. On supposera que le taux d'intérêt du compte demeure constant sur l'ensemble de la période. La période de cotisations est constituée de n versements d'une somme S tous les ans. La période de retraite est constituée de n' retraits d'une somme S' tous les ans.

Copyright © 2011 Dunod.

On choisit comme date d'évaluation des capitaux l'instant après le dernier versement de la période de cotisations, autrement dit le début de la période de retraite.



Si l'on suppose que l'ensemble des cotisations sert à payer l'ensemble de la retraite. On a, au moment du départ en retraite, égalité entre la valeur acquise des cotisations et la valeur actuelle de la retraite :

$$S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S' \times \frac{1-(1+i)^{-n'}}{i}$$

Cette modélisation très simpliste pose certains problèmes :

– le taux d'intérêt i ne peut être envisagé constant sur une si longue période ;

– on place rarement une même somme S sur un compte tous les ans pendant la période de cotisations car le salaire évolue au fil des années ;

– il est possible d'évaluer la durée de cotisations mais il est impossible de connaître la durée de la retraite. En effet, on ne sait pas quand on va mourir. On peut remédier à ce problème en envisageant – par sécurité – une retraite perpétuelle. Ce qui conduit à la relation :

$$S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{S'}{i}$$

La formule de la valeur acquise d'un versement constant est construite juste après le dernier versement alors que la formule de la valeur actuelle d'un versement constant est construite une période avant le premier versement.

Il est donc important de ne pas se placer à une date pour laquelle les formules précédentes ne seraient plus valables.

Copyright © 2011 Dunod.

POINTS CLEFS

➤ Utilisation de la formule des intérêts composés :

– Pour trouver une valeur acquise :

$$S_n = S_0(1+i)^n$$

– Pour trouver une valeur actuelle :

$$S(1+i)^{-n}$$

– Pour trouver une durée :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

– Pour trouver un taux d'intérêt :

$$i = \left(\frac{S_n}{S_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

– Pour trouver des intérêts :

$$I_n = S_0((1+i)^n - 1)$$

➤ Taux équivalents et taux proportionnels

	Taux équivalent	**Taux proportionnel**
Mensuel	$i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}} - 1$	$i_m = \frac{i}{12}$
Trimestriel	$i_t = (1+i)^{\frac{1}{4}} - 1$	$i_t = \frac{i}{4}$
Semestriel	$i_s = (1+i)^{\frac{1}{2}} - 1$	$i_s = \frac{i}{2}$

➤ On a : taux proportionnel > taux équivalent.

➤ La valeur acquise d'un ensemble de versements constants est donnée par la formule :

$$V = S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

laquelle est valable juste après le dernier versement.

Copyright © 2011 Dunod.

➤ La valeur acquise d'un ensemble de versements en progression géométrique est donnée par la formule :

$$W = S \times \frac{(1+r)^n - (1+i)^n}{r-i} \text{ si } r \neq i$$

et par $W = N \times S(1+i)^{n-1}$ si $r = i$

➤ La valeur actuelle d'un ensemble de versements constants est donnée par la formule :

$$R = S \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

laquelle est aussi utilisée pour évaluer la valeur actuelle d'une rente.

➤ La valeur actuelle d'une rente perpétuelle est :

$$R = \frac{S}{i}$$

➤ La relation $S \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S' \times \frac{1-(1+i)^{-n'}}{i}$ permet d'évaluer une retraite par capitalisation.

EXERCICES

3.1 Placements

a) On place 1 500 € pendant 3 ans au taux annuel de 5 %. Quelle est la valeur acquise sur le compte au terme du placement ? Quel est le montant des intérêts ?

b) Une somme de 2 000 € rapporte 80 € d'intérêts en 6 ans. Quel est le taux d'intérêt ?

c) En combien de temps peut-on doubler un capital en intérêts composés au taux de 8 % ?

d) Quelle somme doit-on placer sur un compte à 6 % pour obtenir un intérêt de 50 € en 3 ans.

3.2 Comparaison de modes de paiement

On a le choix entre les deux modes de paiement suivants :

– Mode 1 : 1 000 € dans 1 an, 1 000 € dans 2 ans et 1 000 € dans 3 ans.

– Mode 2 : 2 000 € dans 2 ans et 800 € dans 3 ans.

a) Quel mode de paiement faut-il choisir au taux annuel de 5 % ?

b) Pour quel taux les deux modes de paiement sont-ils équivalents ?

Copyright © 2011 Dunod.

3.3 Donations

Une personne dispose d'un capital de 100 000 €. Elle souhaite faire une donation à trois associations de manière à ce que chacune dispose du même capital au moment de leur prochain projet. Le projet de la première association aura lieu dans 5 ans, celui de la deuxième association aura lieu dans 4 ans et celui de la dernière association aura lieu dans 10 ans. Comment cette personne doit-elle répartir son capital si elle dispose d'un compte d'épargne au taux de 8 % ?

3.4 Compte d'épargne et prime

Une banque propose un compte d'épargne à 2 % par an. La somme placée sur le compte pendant 5 ans donne droit (en plus des intérêts) à une prime égale à la moitié des intérêts. Quel est le taux réel de ce compte d'épargne.

Remarque : ce fonctionnement « ressemble » à celui du plan épargne logement en France.

3.5 Mouvements sur un compte

On place 10 000 € sur un compte en intérêts composés. Un an après on retire 10 000 €. Au bout de deux ans, après le premier placement, il reste 500 € sur le compte. Quel est le taux d'intérêt de ce compte ?

3.6 Recherche de capitaux

Deux capitaux sont placés pendant 3 ans. Le premier est placé sur un compte en intérêts simples de 8 %. Le second est placé en intérêts composés de 11 %. Le premier capital est de 50 € supérieur au second. Au bout des trois ans les deux capitaux ont même valeur acquise. Quelles sont les valeurs initiales de ces deux capitaux ?

3.7 Versements constants

Une personne place 1 000 € par an pendant 20 ans et retire 5 000 € tous les 5 ans. Au taux annuel de 4 %, que reste-t-il sur le compte au bout des 20 ans ?

3.8 Versements en progression géométrique

Une personne place 1 000 € l'année 1 et verse chaque année sur le compte à 5 % une somme 10 % supérieure à la somme précédente. Au bout de combien de temps cette personne atteindra-t-elle une somme de 15 000 € sur son compte ?

Copyright © 2011 Dunod.

3.9 Taux équivalent – Taux proportionnel

a) Quel est le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 15 % ?

b) Quel est le taux mensuel équivalent à un taux trimestriel de 8 % ?

c) Quel est le taux annuel équivalent à un taux trimestriel de 1 % ?

d) Un compte propose un taux de 3 % les trois premières années, de 6 % les trois années suivantes et de 8 % ensuite. Si l'on conserve ce compte 10 ans, quel est le taux annuel équivalent ? Quel est le taux trimestriel proportionnel ?

3.10 Devenir rentier

Une personne épargne toute sa vie 30 % de son salaire. Au bout de combien de temps pourra-t-elle arrêter de travailler sans changer son niveau de vie ? On répondra à cette question de façon générale, puis on donnera des valeurs numériques pour des taux annuels variant de 1 % à 10 %.

3.11 Préparer sa retraite

Quelle somme faut-il placer tous les ans pendant 40 ans sur un compte à 5 % pour envisager une retraite de 30 ans avec 2 000 € par mois ?

3.12 Mensualisation des retraites

Quel gain un retraité réalise-t-il en passant d'une retraite trimestrielle à une retraite mensuelle ?

3.13 Durée de retraite

Quelle durée de retraite peut-on envisager en plaçant 500 € par mois pendant n années au taux de 5 % sachant qu'on souhaite une retraite mensuelle de 1 500 € ? On donnera une application numérique pour $n = 20$ ans et $n = 40$ ans.

SOLUTIONS

Exercice 3.1

a) La valeur acquise est donnée par $1\,500(1{,}05)^3 = 1\,736{,}44$ €. Les intérêts sont donc de $1\,736{,}44 - 1\,500 = 236{,}44$ €.

b) Une somme de 2 000 € rapporte 80 € d'intérêts en 6 ans. La valeur acquise de cette somme est donc de 2 080 €. Le taux de placement est donné par : $i = \left(\frac{2\,080}{2\,000}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 = 0{,}66\ \%$

Copyright © 2011 Dunod.

c) La formule qui permet de trouver une durée est :

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

Or dans cette question on ne dispose ni de S_0 ni de S_n, mais on sait que $S_n = 2 \times S_0$ donc $\frac{S_n}{S_0} = 2$.

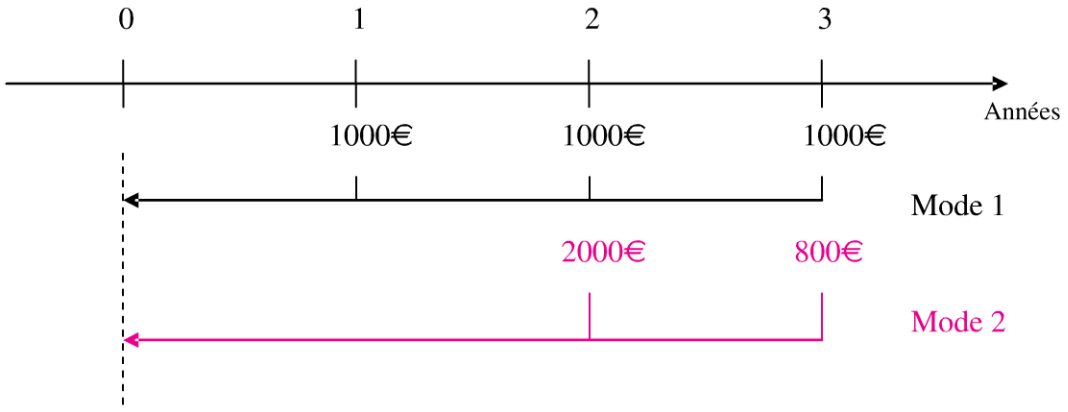
Cette information est suffisante pour calculer une durée : $n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)}$ $= 14{,}21$ ans soit environ 14 ans et 2 mois.

d) On cherche la somme à placer : S_0, sachant que $S_n = S_0 + 50$. On a donc la relation suivante $S_0 + 50 = S_0(1 + 0{,}06)^3$.

Ainsi $S_0(1{,}06^3 - 1) = 50$ et $S_0 = \frac{50}{1{,}06^3 - 1} = 261{,}76$ €

Exercice 3.2

a) La méthode pour comparer deux modes de paiement est l'actualisation. On évalue la valeur des différentes sommes à la date 0.



Pour le **mode 1**, la valeur actuelle des paiements est :

$$1\,000(1{,}05)^{-1} + 1\,000(1{,}05)^{-2} + 1\,000(1{,}05)^{-3} = 2\,723{,}25 \text{ €}$$

Pour le **mode 2**, la valeur actuelle des paiements est :

$$2\,000(1{,}05)^{-2} + 800(1{,}05)^{-3} = 2\,505{,}13 \text{ €}$$

Du point de vue d'un acheteur, le mode 2 est plus intéressant au taux de 5 %.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Les deux modes de paiement sont équivalents lorsque les valeurs actuelles des paiements sont égales.

On cherche ainsi un taux i vérifiant :

$$1\,000(1+i)^{-1} + 1\,000(1+i)^{-2} + 1\,000(1+i)^{-3} = 2\,000(1+i)^{-2} + 800(1+i)^{-3}$$

Multiplions cette équation par $(1+i)^3$:

$$1\,000(1+i)^{-1}(1+i)^3 + 1\,000(1+i)^{-2}(1+i)^3 + 1\,000(1+i)^{-3}(1+i)^3 = 2\,000(1+i)^{-2}(1+i)^3 + 800(1+i)^{-3}(1+i)^3$$

Ainsi :

$$1\,000(1+i)^2 + 1\,000(1+i) + 1\,000 = 2\,000(1+i) + 800$$

On a donc : $1\,000(1+i)^2 - 1\,000(1+i) + 200 = 0$

Posons $x = 1+i$, on a alors $1\,000x^2 - 1\,000x + 200 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré.

Résolution d'une équation du second degré

On cherche à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$.
2. Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solutions réelles.
3. Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution : $x = \dfrac{-b}{2a}$
4. Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

On a $\Delta = (-1\,000)^2 - 4 \times 1\,000 \times 200 = 200\,000 > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(1\,000) + \sqrt{200\,000}}{2 \times 1\,000} = 0{,}7236$$

et

$$x_2 = \frac{-(-1\,000) - \sqrt{200\,000}}{2 \times 1\,000} = 0{,}2764$$

Copyright © 2011 Dunod.

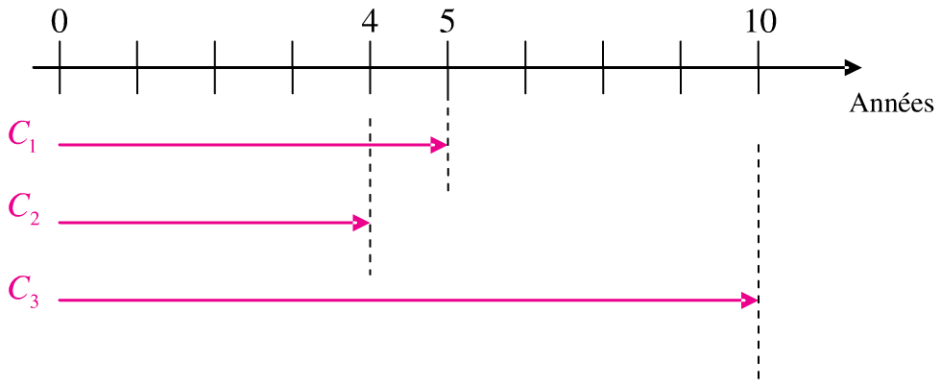
Ainsi l'on a deux solutions pour i :

$$i_1 = 0{,}7236 - 1 = 0{,}2764 \text{ et } i_2 = 0{,}2764 - 1 = -0{,}7236$$

Ces deux valeurs sont négatives. Aucun taux d'intérêt ne permet d'égaliser les deux modes de paiement. Le mode 2 est donc toujours préférable, quel que soit le taux considéré.

Exercice 3.3

S'il n'y avait pas de taux d'intérêt en jeu il suffirait de séparer la somme en trois parts égales. Cette personne ne souhaite pas séparer son capital en parts égales mais en parts équitables de sorte que chacune des associations dispose de la même somme au moment de leur projet. Notons C_1, C_2 et C_3 les parts à attribuer respectivement aux associations 1, 2 et 3.



On a ainsi égalité entre les valeurs acquises de ces capitaux : $C_1 \times 1{,}08^5 = C_2 \times 1{,}08^4 = C_3 \times 1{,}08^{10}$. De plus, cette personne cherche à répartir 100 000 €, donc $C_1 + C_2 + C_3 = 100\,000$. On a trois équations et trois inconnues, il est ainsi possible de trouver les solutions, à condition de poser une équation à une seule inconnue. Choisissons comme inconnue C_3. On a :

$$C_1 = \frac{1{,}08^{10}}{1{,}08^5} C_3 = 1{,}08^5 C_3 \text{ et } C_2 = \frac{1{,}08^{10}}{1{,}08^4} C_3 = 1{,}08^6 C_3$$

L'équation $C_1 + C_2 + C_3 = 100\,000$ peut ainsi s'écrire :
$1{,}08^5 C_3 + 1{,}08 C_3 + C_3 = 100\,000$

On a donc $C_3(1{,}08^5 + 1{,}08^6 + 1) = 100\,000$ soit :

$$C_3 = \frac{100\,000}{1{,}08^5 + 1{,}08^6 + 1} = 24\,653{,}66 \text{ €}$$

On trouve ensuite $C_1 = 1{,}08^5 \times 24\,653{,}60 = 36\,224{,}20$ €
et $C_2 = 1{,}08^6 \times 24\,653{,}60 = 39\,122{,}20$ €

Copyright © 2011 Dunod.

Exercice 3.4

Modélisons le placement. On place une somme S pendant 5 ans au taux de 2 %. Au bout du placement la valeur acquise est de $S(1+0{,}02)^5$. En plus des intérêts acquis, ce placement donne droit à une prime égale à la moitié des intérêts. Les intérêts sont de $S(1{,}02^5-1)$ pour ce placement.

La prime est donc de $\frac{1}{2}\times S\times(1{,}02^5-1)$.

Au total, ce placement permet donc une valeur acquise de $S\times 1{,}02^5 + 0{,}5\times S(1{,}02^5-1)$

Si la même somme avait été placée à un taux d'intérêt équivalent i pendant 5 ans, la valeur acquise de ce placement serait $S(1+i)^5$.

On a ainsi $S(1+i)^5 = S\times 1{,}02^5 + 0{,}5\times S(1{,}02^5-1)$. Factorisons l'expression par S :

$$S(1+i)^5 = S(1{,}02^5 + 0{,}5(1{,}02^5-1)) = S(1{,}5\times 1{,}02^5 - 0{,}5)$$

ainsi $(1+i)^5 = 1{,}5\times 1{,}02^5 - 0{,}5$

soit $1+i = (1{,}5\times 1{,}02^5 - 0{,}5)^{\frac{1}{5}}$

et $i = (1{,}5\times 1{,}02^5 - 0{,}5)^{\frac{1}{5}} - 1 = 2{,}94\ \%$

Il est cohérent de trouver un taux plus élevé ; ce nouveau taux prend en compte la prime.

Exercice 3.5

Initialement on a placé 10 000 € sur le compte. Au bout d'un an la valeur acquise de ce capital est $10\,000(1+i)$. On retire 10 000 €, il ne reste donc plus sur le compte que $10\,000(1+i) - 10\,000 = 10\,000\times i$. Au bout d'un an ce capital a acquis une valeur de 500 €. On a donc $10\,000\times i\times(1+i) = 500$. Développons cette expression :

$10\,000i + 10\,000i^2 = 500$.

On a ainsi $10\,000i^2 + 10\,000i - 500 = 0$

Il s'agit d'une équation du second degré.

On a $\Delta = 10\,000^2 - 4\times 10\,000\times(-500) = 120\,000\,000 > 0$. Cette équation a deux solutions :

$$i_1 = \frac{-10\,000 + \sqrt{120\,000\,000}}{2\times 10\,000} = 4{,}77\ \%$$

et

$$i_2 = \frac{-10\,000 - \sqrt{120\,000\,000}}{2\times 10\,000} = -1{,}04$$

Copyright © 2011 Dunod.

La seconde solution n'a pas de sens financier. Le taux de placement est donc 4,77 %.

Exercice 3.6

Posons les inconnues de ce problème : C_1 et C_2 les deux capitaux considérés. Le premier capital est de 50 € supérieur au second, ainsi $C_1 = C_2 + 50$. Au bout des trois ans les deux capitaux ont même valeur acquise. Le premier est placé au taux d'intérêt simple de 8 %, sa valeur acquise est donc de $C_1(1 + 0{,}08 \times 3)$, le second est placé au taux d'intérêt composé de 11 %, sa valeur acquise est donc $C_2(1 + 0{,}11)^3$.

On a alors $C_1(1 + 0{,}08 \times 3) = C_2(1{,}11)^3$.

Or $C_1 = C_2 + 50$ donc $(C_2 + 50)(1 + 0{,}08 \times 3) = C_2(1{,}11)^3$

Ainsi, $C_2(1 + 0{,}08 \times 3) + 50 \times (1 + 0{,}08 \times 3) = C_2(1{,}11)^3$

Par conséquent, $C_2(1{,}11^3 - (1 + 0{,}08 \times 3)) = 50(1 + 0{,}08 \times 3)$

On trouve ainsi $C_2 = \dfrac{50(1 + 0{,}08 \times 3)}{1{,}11^3 - (1 + 0{,}08 \times 3)} = 485{,}78$ €

et $C_1 = 485{,}78 + 50 = 535{,}78$ €.

Exercice 3.7

On peut chercher à évaluer d'une année à l'autre le solde sur le compte, sachant qu'un versement de 1 000 € est effectué de l'année 1 à l'année 20 et qu'un retrait de 5 000 € est effectué l'année 5, l'année 10, l'année 15 et l'année 20. Pour simplifier, il y a un retrait de 4 000 € les années 5, 10,15 et 20 et un versement de 1 000 € les autres années.

Présentons dans un tableau les valeurs acquises juste après la dernière opération (voir page ci-contre).

On constate qu'il reste 2 288,88 € sur le compte au bout des 20 ans. Le calcul des mouvements sur le compte peut s'avérer assez long dès lors que les mouvements ont lieu pendant plusieurs années. Un moyen pour trouver ce résultat plus rapidement est d'utiliser la formule de la valeur acquise d'un versement constant. Pour un versement de 1 000 € par an pendant 20 ans, la valeur acquise sur le compte est de $1\,000 \times \dfrac{1{,}04^{20} - 1}{0{,}04}$

$= 29\,778{,}08$ €.

La valeur acquise des retraits est obtenue en évaluant chacun des retraits à la date 20 :

$5\,000 \times 1{,}04^{15} + 5\,000 \times 1{,}04^{10} + 5\,000 \times 1{,}04^{5} + 5\,000 = 27\,489{,}20$ €.

Copyright © 2011 Dunod.

Année	Opération	Valeur acquise
1	1 000.00 €	1 000.00 €
2	1 000.00 €	2 040.00 €
3	1 000.00 €	3 121.60 €
4	1 000.00 €	4 246.46 €
5	– 4 000.00 €	416.32 €
6	1 000.00 €	1 432.98 €
7	1 000.00 €	2 490.29 €
8	1 000.00 €	3 589.91 €
9	1 000.00 €	4 733.50 €
10	– 4 000.00 €	922.84 €
11	1 000.00 €	1 959.76 €
12	1 000.00 €	3 038.15 €
13	1 000.00 €	4 159.67 €
14	1 000.00 €	5 326.06 €
15	– 4 000.00 €	1 539.10 €
16	1 000.00 €	2 600.67 €
17	1 000.00 €	3 704.69 €
18	1 000.00 €	4 852.88 €
19	1 000.00 €	6 047.00 €
20	– 4 000.00 €	2 288.88 €

Un retrait d'argent peut être interprété comme un versement d'une somme négative sur un compte. La valeur restante sur le compte est donc $29\,778{,}08 - 27\,489{,}20 = 2\,288{,}88$ €. On retrouve la valeur donnée à la fin du tableau. On remarque que l'ensemble des opérations à un total nul. Les intérêts sont gagnés grâce au décalage de temps entre les versements et les retraits.

Exercice 3.8

Il s'agit de versements en progression géométrique. Le taux de progression est 10 % et celui du compte est 5 %. La valeur acquise sur le compte est de 15 000 € au bout de n années. On a donc :

$$1\,000 \times \frac{(1+0{,}1)^n - (1+0{,}05)^n}{0{,}1 - 0{,}05} = 15\,000$$

On a ainsi $1{,}1^n - 1{,}05^n = \dfrac{15\,000}{1\,000} \times (0{,}1 - 0{,}05) = 0{,}75$

On cherche à résoudre $1{,}1^n - 1{,}05^n = 0{,}75$. Algébriquement cette équation est difficile à résoudre. On choisit donc de calculer $1{,}1^n - 1{,}05^n - 0{,}75 = f(n)$ pour déterminer quand les 15 000 € seront acquis pour la première fois.

Copyright © 2011 Dunod.

Années	$f(n)$
1	– 0.70
2	– 0.64
3	– 0.58
4	– 0.50
5	– 0.42
6	– 0.32
7	– 0.21
8	– 0.08
9	0.06
10	0.21
11	0.39
12	0.59
13	0.82
14	1.07
15	1.35

On constate un changement de signe entre l'année 8 et l'année 9. La première année à partir de laquelle les 15 000 € sont acquis est l'année 9.

Exercice 3.9

a) Le taux mensuel équivalent est :

$$i_m = (1 + 0{,}15)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1{,}17\ \%$$

b) Un trimestre est composé de 3 mois, ainsi la relation entre taux trimestriel et taux mensuel est donnée par $(1 + i_m)^3 = 1 + i_t$. Par conséquent :

$$i_m = (1 + i_t)^{\frac{1}{3}} - 1 = (1 + 0{,}08)^{\frac{1}{3}} - 1 = 2{,}60\ \%$$

c) On a la relation $i_t = (1 + i)^{\frac{1}{4}} - 1$, donc $1 + i_t = (1 + i)^{\frac{1}{4}}$

et $i = (1 + i_t)^4 - 1 = (1 + 0{,}01)^4 - 1 = 4{,}06\ \%$

d) Si l'on conserve ce compte 10 ans, un capital placé subira un taux de 3 % pendant 3 ans, de 6 % pendant 3 ans et de 8 % pendant 4 ans. Il sera donc multiplié par un coefficient $(1{,}03)^3(1{,}06)^3(1{,}08)^4$. En notant i le taux annuel équivalent de ce placement,

on a $(1 + i)^{10} = (1{,}03)^3(1{,}06)^3(1{,}08)^4$,

ainsi $1 + i = ((1{,}03)^3(1{,}06)^3(1{,}08)^4)^{\frac{1}{10}}$

et $i = ((1{,}03)^3(1{,}06)^3(1{,}08)^4)^{\frac{1}{10}} - 1 \simeq 5{,}88\ \%$

Copyright © 2011 Dunod.

Moyenne géométrique

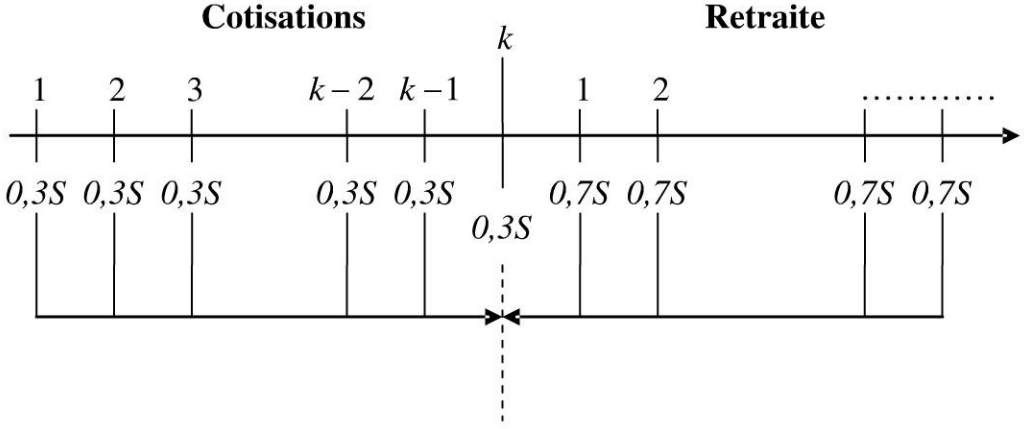
Pour trouver un taux moyen à partir de plusieurs taux composés, on réalise un calcul de **moyenne géométrique**. Notons $i_1, i_2, i_3, ..., i_k$ les taux appliqués pendant des durées $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$; le taux moyen sur la période de durée $n_1 + n_2 + ... + n_k$ est ainsi :

$$i_{\text{Moyen}} = \left((1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}...(1+i_k)^{n_k}\right)^{\frac{1}{n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k}} - 1$$

Exercice 3.10

Comment définir le niveau de vie d'un individu ? Le niveau de vie est différent du salaire. En effet, selon qu'une personne dépense beaucoup ou peu avec un même salaire son mode de vie ne sera pas identique. Pour simplifier, admettons que le niveau de vie corresponde à la quantité d'argent utilisée pour la consommation d'une personne. Ainsi pour cette personne qui gagne un salaire S, son épargne sera de $0,3S$ et sa consommation sera de $0,7S$. Après son départ en retraite, cette personne ne souhaite pas modifier son niveau de vie. Elle souhaite donc continuer à consommer $0,7S$ par mois.

Schématisons la situation ainsi :



Il s'agit d'une retraite par capitalisation dont les cotisations et les versements sont effectués mensuellement. On cherche le nombre de mois nécessaire pour arrêter de travailler. Pour cela l'ensemble des cotisations doit permettre de subvenir à l'ensemble de la retraite. Par sécurité, on envisage une retraite perpétuelle. On a donc à la date de départ en retraite :

$$0,3S \times \frac{(1+i_m)^k - 1}{i_m} = \frac{0,7S}{i_m}$$

Copyright © 2011 Dunod.

On cherche la durée de cotisations soit le paramètre k de l'équation. On peut simplifier l'égalité :

$$0{,}3((1+i_m)^k - 1) = 0{,}7, \text{ ainsi } (1+i_m)^k - 1 = \frac{0{,}7}{0{,}3}$$

et $(1+i_m)^k = 1 + \dfrac{0{,}7}{0{,}3}$

Par une utilisation du logarithme, on trouve :

$k \times \ln(1+i_m) = \ln\left(1 + \dfrac{0{,}7}{0{,}3}\right)$. On a donc $k = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{0{,}7}{0{,}3}\right)}{\ln(1+i_m)}$

On propose des taux annuels. Il est de ce fait nécessaire de convertir le taux mensuel en taux annuel.

On a $1 + i_m = (1+i)^{\frac{1}{12}}$ donc $\ln(1+i_m) = \dfrac{1}{12}\ln(1+i)$

et par conséquent $k = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{0{,}7}{0{,}3}\right)}{\dfrac{1}{12}\ln(1+i)}$

Il ne faudrait pas utiliser le taux proportionnel pour calculer le taux mensuel, si l'on cherche une équivalence entre deux types de versement, le taux équivalent est plus adapté.

Comme on s'intéresse au nombre d'années de cotisations mensuelles, on cherche $n = \dfrac{k}{12}$ soit $k = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{0{,}7}{0{,}3}\right)}{\ln(1+i)}$

On remarque que n ne dépend que de i et non de la somme placée chaque mois.

Voici les valeurs numériques de n pour des taux annuels variant de 1 % à 10 % (les arrondis sont effectués à l'année supérieure) :

Taux annuel	**1 %**	**2 %**	**3 %**	**4 %**	**5 %**	**6 %**	**7 %**	**8 %**	**9 %**	**10 %**
Nombre d'années de cotisation	121	61	41	31	25	21	18	16	14	13

Copyright © 2011 Dunod.

On remarque que le nombre d'années de cotisation décroît assez vite en fonction du taux annuel. Pour un taux de 3 %, on trouve un nombre d'années de cotisation de 41 ans, ce qui est proche du nombre d'années de cotisation pour la retraite par répartition.

Les taux des comptes d'épargne classique étant entre 1 % et 2 % en 2010 du fait de la crise, on constate qu'il serait nécessaire de cotiser plus de 61 ans pour une retraite par capitalisation si les taux ne s'améliorent pas.

Exercice 3.11

La schématisation est la même que dans l'exercice précédent. On cherche quelle somme placer tous les ans pour envisager une retraite mensuelle de 2 000 € pendant 30 ans. On a donc $S \times \dfrac{1{,}05^{40}-1}{0{,}05}$ $= 2\,000\dfrac{1-(1+i_m)^{-30\times 12}}{i_m}$

Le taux mensuel est $i_m = 1{,}05^{\frac{1}{12}} - 1$

Ainsi $S \times \dfrac{1{,}05^{40}-1}{0{,}05} = 2\,000\dfrac{1-(1+1{,}05^{\frac{1}{12}}-1)^{-30\times 12}}{1{,}05^{\frac{1}{12}}-1}$

On a donc $S \times \dfrac{1{,}05^{40}-1}{0{,}05} = 2\,000\dfrac{1-(1{,}05^{\frac{1}{12}})^{-30\times 12}}{1{,}05^{\frac{1}{12}}-1}$

soit : $S \times \dfrac{1{,}05^{40}-1}{0{,}05} = 2\,000\dfrac{1-1{,}05^{-30}}{1{,}05^{\frac{1}{12}}-1}$

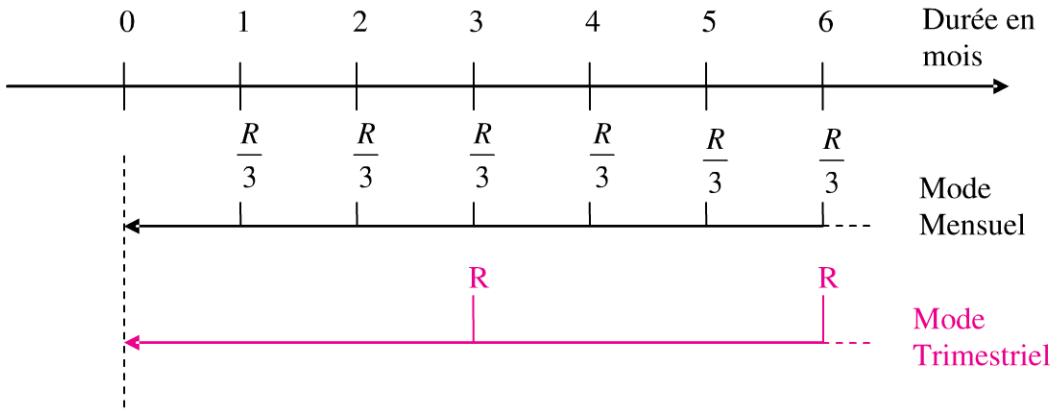
et par conséquent $S = 2\,000 \times \dfrac{1-1{,}05^{-30}}{1{,}05^{\frac{1}{12}}-1} \times \dfrac{0{,}05}{1{,}05^{40}-1}$

Ainsi $S = 3\,123{,}51$ €. En cotisant annuellement une somme de 3 123,51 € on peut avoir une retraite mensuelle de 2 000 € si le taux du marché est constant à 5 %.

Exercice 3.12

Supposons que l'on dispose d'une retraite trimestrielle de valeur R. On passe ensuite à une retraite mensuelle de valeur $\dfrac{R}{3}$. Présageons une retraite d'une durée initiale de t trimestres. Schématisons ci-après la situation.

Copyright © 2011 Dunod.



La valeur actuelle de la retraite trimestrielle est :

$$V_t = R\frac{1-(1+i_t)^{-t}}{i_t}$$

La valeur actuelle de la retraite mensuelle est :

$$V_m = \frac{R}{3} \times \frac{1-(1+i_m)^{-3t}}{i_m}$$

On a $i_m = (1+i_t)^{\frac{1}{3}} - 1$

ainsi $V_m = \dfrac{R}{3} \times \dfrac{1-(1+(1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1)^{-3t}}{(1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1}$

On a donc $V_m = \dfrac{R}{3} \times \dfrac{1-((1+i_t)^{\frac{1}{3}})^{-3t}}{(1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1}$

et $V_m = \dfrac{R}{3} \times \dfrac{1-(1+i_t)^{-t}}{(1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1}$

On a ainsi $\dfrac{V_m}{V_t} = \dfrac{\dfrac{R}{3} \times \dfrac{1-(1+i_t)^{-t}}{(1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1}}{R \times \dfrac{1-(1+i_t)^{-t}}{i_t}}$

Par conséquent $\dfrac{V_m}{V_t} = \dfrac{i_t}{3 \times ((1+i_t)^{\frac{1}{3}}-1)}$

Le rapport des valeurs actuelles nettes ne dépend que de la valeur de i_t et non du montant de la retraite R.

Copyright © 2011 Dunod.

Valeurs numériques en fonction de i_t

Valeurs de i_t	0,2 %	0,4 %	0,6 %	0,8 %	1 %	1,2 %	1,4 %	1,6 %	1,8 %	2 %
Rapport $\frac{V_m}{V_t}$	1,000 7	1,001, 3	1,002	1,002 7	1,003 3	1,004	1,004 7	1,005 3	1,006	1,006 6
Gain en %	+0,07	+0,13	+0,2	+0,27	+0,33	+0,4	+0,47	+0,53	+0,6	+0,66

On remarque que l'écart entre la valeur d'une retraite trimestrielle et d'une retraite mensuelle augmente avec le taux trimestriel.

Exercice 3.13

On place 500 € mensuellement pendant n années au taux de 5 %. On souhaite une retraite mensuelle de 1 500 €. Dans un premier temps le taux mensuel équivalent est $i_m = 1{,}05^{\frac{1}{12}} - 1$. La durée k en mois de la retraite est donnée par l'équation suivante :

$$500 \times \frac{(1+(1+0{,}05)^{\frac{1}{12}}-1)^{n\times 12-1}}{(1+0{,}05)^{\frac{1}{12}}-1} = 1\,500 \times \frac{1-(1+(1+0{,}05)^{\frac{1}{12}}-1^{-k}}{(1+0{,}05)^{\frac{1}{12}}-1}$$

ainsi l'on a $500(1{,}05^n - 1) = 1\,500(1 - 1{,}05^{-\frac{k}{12}})$

soit $\frac{500}{1\,500} \times (1{,}05^n - 1) = 1 - 1{,}05^{-\frac{k}{12}}$

d'où $1{,}05^{-\frac{k}{12}} = 1 - \frac{500}{1\,500} \times (1{,}05^n - 1)$

par conséquent : $-\frac{k}{12}\ln(1{,}05) = \ln(1 - \frac{500}{1\,500} \times (1{,}05^n - 1))$

et donc

$$k = -12\frac{\ln\left(1 - \frac{500}{1\,500} \times (1{,}05^n - 1)\right)}{\ln(1{,}05}$$

Copyright © 2011 Dunod.

Applications numériques

– Pour $n = 20$ ans, on trouve $k = 197$ mois, soit moins de 16 ans et 5 mois.

– Pour $n = 40$ ans, on a :

$$1 - \frac{500}{1\,500} \times (1{,}05^{40} - 1) = -1{,}013 < 0$$

Il n'est donc pas faisable d'appliquer la formule trouvée précédemment du fait du logarithme. L'interprétation de ce résultat est qu'il est possible d'envisager une retraite perpétuelle lorsque la durée de cotisation est de 40 ans.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 4

Emprunts indivis

OBJECTIFS

- Comprendre la relation entre les annuités de remboursement et le capital emprunté.
- Augmenter la fréquence de remboursement d'un emprunt.
- Savoir calculer un TEG.
- Connaître le taux d'usure.
- Évaluer le coût d'un emprunt.
- Construire un tableau de remboursement.
- Connaître les remboursements classiques (*in fine*, amortissements constants, annuités constantes).
- Comprendre la représentation graphique des remboursements classiques.
- Calculer un amortissement constant ou une annuité constante.
- Calculer les annuités d'un remboursement en progression géométrique ou arithmétique.

PLAN

4.1 Principe général

4.2 Modes de remboursement classiques

4.3 Remboursements évolutifs

Copyright © 2011 Dunod.

Le fonctionnement d'un emprunt se caractérise par un prêt d'argent d'un prêteur à un emprunteur. L'emprunteur rembourse cet argent plus tard avec des intérêts. Lorsque l'emprunteur s'adresse à un unique prêteur, on parle d'emprunts **indivis**. Ce chapitre présente le mode de calcul général d'un emprunt, des annuités de remboursement ainsi que des intérêts. Les emprunts les plus classiques (*in fine*, par amortissements constants

et par annuités constantes) seront détaillés. Des emprunts particuliers (annuités en progression géométrique ou arithmétique) liés à la capacité de l'emprunteur à augmenter son volume de remboursement d'une année à l'autre seront aussi étudiés.

4.1 PRINCIPE GÉNÉRAL

a) Mode de calcul

Schématisons le fonctionnement d'un emprunt. Un capital K est prêté à la date 0. Ce capital est remboursé chaque année par des annuités $A_1, A_2, \cdots, A_n$ pendant n années. On note i le taux annuel de l'emprunt.

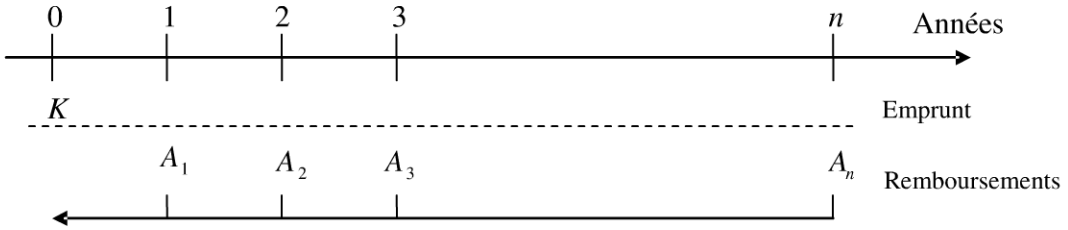


Schéma d'actualisation

En finance, on ne peut comparer des valeurs qu'à une même date. On choisit, par commodité, la date actuelle. On parle ainsi d'**actualisation** des valeurs.

L'égalité **Emprunt = Remboursements** se décline à la date 0 en :

$$K = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit l'emprunt considéré. Elle peut servir à calculer des valeurs de remboursement.

Exemple

Un emprunt de 10 000 € au taux annuel de 10 % est remboursé par un versement de 4 000 € l'année 1 et un versement de 3 000 € l'année 2. Que reste-t-il à rembourser l'année 3 pour clôturer le remboursement de l'emprunt ?

En appliquant la relation précédente, on a :

$$10\,000 = \frac{4\,000}{1+0,1} + \frac{3\,000}{(1+0,1)^2} + \frac{A_3}{(1+0,1)^3}$$

Copyright © 2011 Dunod.

ainsi $10\,000 - \dfrac{4\,000}{1+0,1} - \dfrac{3\,000}{(1+0,1)^2} = \dfrac{A_3}{(1+0,1)^3}$

et donc $A_3 = 1,1^3\left(10\,000 - \dfrac{4\,000}{1,1} - \dfrac{3\,000}{1,1^2}\right) = 5\,170$ €

L'égalité « Emprunt = Remboursements » se décline aux autres dates. Une date importante est la date de fin de l'emprunt : l'année n. L'égalité à cette date consiste en un calcul de **valeurs acquises**.

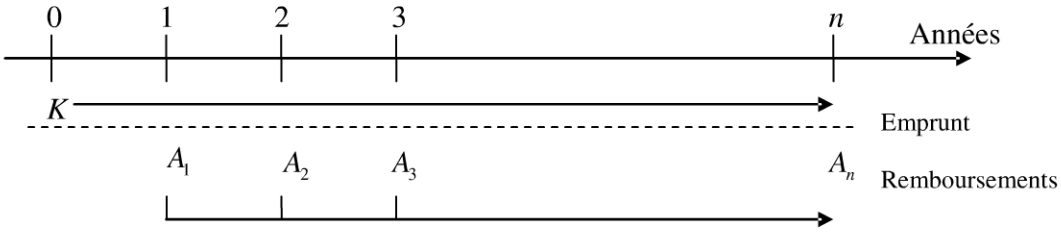


Schéma de valeurs acquises

La valeur acquise du capital est : $K(1+i)^n$.

La valeur acquise des remboursements est :

$$A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} + A_3(1+i)^{n-3} + \cdots + A_n$$

On a donc la relation :

$$K_1(1+i)^n = A_1(1+i)^{n-1} + A_2(1+i)^{n-2} + A_3(1+i)^{n-3} + \cdots + A_n$$

Remarque : la démarche pour construire cette nouvelle relation est différente mais les deux relations sont parfaitement équivalentes. L'une ou l'autre peut servir indifféremment pour calculer des valeurs de remboursement. On obtient la seconde relation en multipliant tous les membres de la première par $(1+i)^n$.

b) Coût d'un emprunt

Le **coût d'un emprunt** est la valeur payée par l'emprunteur en plus du remboursement du capital.
Il peut se calculer par différence entre la somme des annuités et le capital emprunté. Ainsi :

$$\text{Coût de l'emprunt} = A_1 + A_2 + \cdots + A_n - K$$

Copyright © 2011 Dunod.

Exemple

Dans l'exemple précédent, le capital emprunté était de 10 000 € et les annuités les années 1,2 et 3 étaient respectivement de 4 000 €, 3 000 € et 5 170 €. Le coût de cet emprunt est donc de :

$$4\,000 + 3\,000 + 5\,170 - 10\,000 = 2\,170 \text{ €}$$

Le coût d'un emprunt pourrait être aussi envisagé comme la somme des intérêts payés chaque année. Le calcul de ces intérêts n'étant pas simple, on préfère généralement utiliser la méthode soustractive précédente.

Remarque : plus on rembourse vite une somme empruntée moins le coût de l'emprunt est élevé.

c) Taux d'emprunt

Augmentation de la fréquence de remboursement

Les remboursements considérés jusqu'alors sont annuels. On peut envisager des remboursements plus fréquents par mensualité ou trimestrialité. *Quel taux choisir ? Un taux équivalent ou un taux proportionnel ?*

En France, **le taux proportionnel** est le taux légal à utiliser pour les emprunts immobiliers et les emprunts destinés aux professionnels ; il est majoritairement proposé par les banques.
Le **taux équivalent** est appliqué pour les crédits à la consommation.

Sauf précision particulière, le taux proportionnel sera donc retenu pour aborder les emprunts dont la fréquence de remboursement est mensuelle ou trimestrielle.

Taux effectif global (TEG)

Les établissements prêteurs proposent des taux d'emprunt qui ne prennent pas en compte les assurances, les garanties et les frais bancaires. Pour comparer des offres de prêt, il est pertinent pour l'emprunteur de prendre en compte l'ensemble des frais liés à un emprunt.

Un taux effectif global (TEG) est un taux qui prend en compte l'ensemble des frais.

Le calcul du TEG est utile pour comparer des offres bancaires entre elles.

Le TEG se calcule en actualisant les différentes dépenses liées à l'emprunt.

Copyright © 2011 Dunod.

Taux d'usure

Pour protéger les emprunteurs, la législation française limite à la hausse les taux d'emprunt proposés par les banques.

Le taux d'usure est le taux maximal légal déterminé par la Banque de France.

Chaque trimestre la Banque de France effectue une moyenne pondérée des taux effectifs proposés par les banques selon les catégories d'emprunt et fixe les seuils de taux d'usure à un tiers au-dessus de ces taux moyens pour le trimestre suivant.

Catégories de prêt	Taux effectif moyen (3e trimestre 2010)	Taux d'usure (4e trimestre 2010)
Prêts immobiliers à taux fixe	4,20 %	5,60 %
Prêts à la consommation d'un montant < 1 524 €	15,99 %	21,32 %
Prêts à la consommation d'un montant > 1 524 €	6,11 %	8,15 %
Prêts aux entreprises en vue d'achats ou de ventes	6,79 %	9,05 %

Remarque : proposer un emprunt à un taux supérieur au taux d'usure est un **délit d'usure** passible de 2 ans de prison et d'une amende de 45 000 €.

d) Tableaux de remboursement

En comptabilité on s'intéresse au détail du remboursement d'un emprunt. Quelle est la part de capital remboursé et quelle est la part d'intérêt dans une annuité de remboursement ?

Un **tableau de remboursement** permet de consigner l'ensemble des données importantes dans l'analyse du remboursement d'un capital.

Un tableau de remboursement se présente ainsi :

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités

La **date** est celle du remboursement considéré.

Le **capital restant** est le capital restant à rembourser juste avant le remboursement à la date considérée.

Copyright © 2011 Dunod.

Les **intérêts** sont ceux payés dans l'annuité de remboursement.

Le **capital remboursé** est la part de capital remboursé dans l'annuité de remboursement. Le capital remboursé est appelé aussi **amortissement**.

Les relations suivantes permettent de construire le tableau :

Intérêts = Taux d'emprunt × Capital restant

Annuité = Capital remboursé + Intérêts

Capital restant l'année a
= Capital restant l'année $(a - 1)$ – Capital remboursé l'année $(a - 1)$

Exemple

Pour l'emprunt précédent sur 3 ans de 10 000 € à 10 %, remboursé par des annuités de 4 000 €, 3 000 € et 5 170 € respectivement les années 1, 2 et 3. Les relations précédentes permettent de construire le tableau suivant.

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
Année 1	10 000 €	1 000 €	3 000 €	4 000 €
Année 2	7 000 €	700 €	2 300 €	3 000 €
Année 3	4 700 €	470 €	4 700 €	5 170 €

Ligne 1 : Le capital restant l'année 1 est le capital emprunté (10 000 €) car il n'y a pas encore eu de remboursement. Les intérêts sont de 10 % du capital restant, soit 1 000 €. Le capital remboursé se calcule par différence de l'annuité et des intérêts. On a donc remboursé l'année 1 : 4 000 – 1 000 = 3 000 €.

Ligne 2 : Le capital restant après le remboursement de 3 000 € l'année 1 n'est plus que de 7 000 €. Les intérêts sont de 10 % du capital restant, soit 700 €. Le capital remboursé se calcule par différence de l'annuité et des intérêts. On a donc remboursé 2 300 €.

Ligne 3 : Le capital restant après le remboursement de 2 300 € l'année 2 n'est plus que de 4 700 €. Les intérêts sont de 10 % du capital restant, soit 470 €. Le capital remboursé se calcule par différence de l'annuité et des intérêts. On a donc remboursé 4 700 €.

Remarque : le capital restant à rembourser chaque année diminue ; ainsi les intérêts payés dans chaque remboursement diminuent aussi.

Copyright © 2011 Dunod.

Éléments de vérification

Il est utile d'évaluer la cohérence des résultats dans un tableau de remboursement.

La dernière année clôture l'emprunt, ainsi le capital restant la dernière année doit être égal au capital remboursé. Dans l'exemple précédent on trouve un capital de 4 700 € pour ces deux valeurs.

L'ensemble des amortissements (le capital remboursé) doit est égal à la somme empruntée. On le vérifie dans le tableau précédent : 3 000 + 2 300 + 4 700 = 10 000 €.

Construction d'un tableau

Le problème se pose de savoir Comment construire un tableau lorsque l'annuité est plus faible que les intérêts ?

La relation : **Annuité = Intérêts + Capital remboursé** indiquerait que le capital remboursé est négatif dans ce cas. Cela ne semble pas avoir de sens financier.

Considérons un emprunt de 10 000 € à 10 % en deux ans dont l'annuité, la première année, serait de 500 €. En appliquant la méthode précédente, on peut construire le tableau suivant.

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	10 000 €	1 000 €	– 500 €	500 €
2	10 500 €	1 050 €	10 500 €	11 550 €

La dernière annuité de 11 550 € est-elle cohérente avec le principe du remboursement d'un emprunt ? La valeur acquise des remboursements et de l'emprunt indique que : $10\,000 \times 1{,}1^2 = 500 \times 1{,}1 + A_2$.

On a donc $A_2 = 10\,000 \times 1{,}1^2 - 500 \times 1{,}1 = 11\,550$ €.

On retrouve bien la valeur indiquée dans le tableau.

La valeur qui semble manquer de cohérence est le capital restant. Il augmente l'année 2 par rapport à l'année 1. Le capital à rembourser a donc augmenté du fait que l'on n'a pas remboursé une somme suffisante – au moins égale aux intérêts – l'année 1.

En conclusion, le mode de construction du tableau reste donc le même dans ce cas, car il permet de calculer les annuités. La colonne « capital restant » semble cependant moins simple à interpréter.

Copyright © 2011 Dunod.

4.2 MODES DE REMBOURSEMENT CLASSIQUES

Cette partie présente les modes de remboursement les plus souvent proposés par les banques, à savoir le remboursement *in fine*, le remboursement par amortissements constants et le remboursement par annuités constantes.

a) Remboursement *in fine*

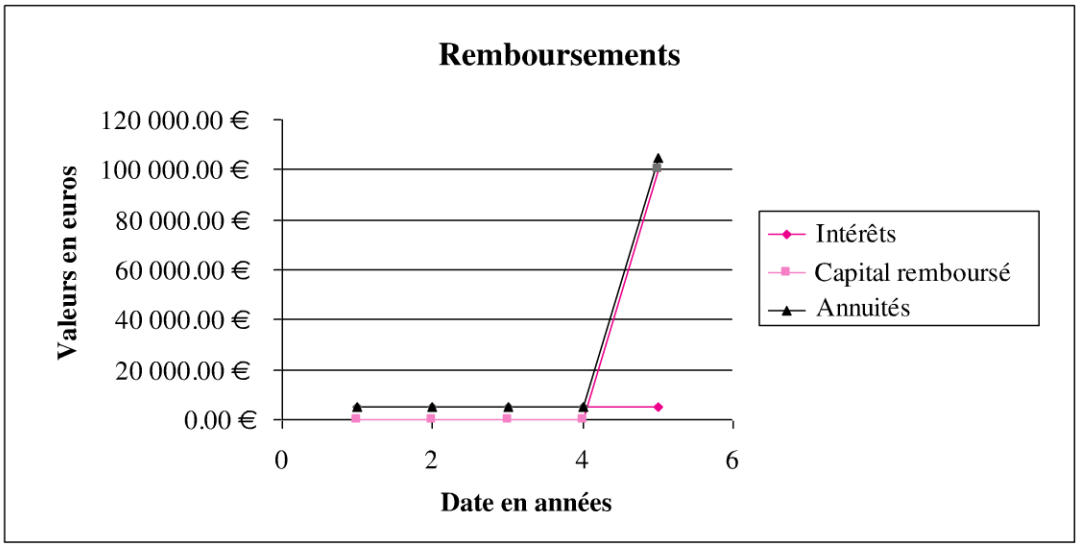
Le principe du remboursement *in fine* est de rembourser l'ensemble du capital la dernière année de l'emprunt. Chaque année l'emprunteur ne paye que les intérêts. Le tableau ci-dessous retrace le remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans, au taux de 5 %.

Remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans au taux de 5 %

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	100 000 €	5 000 €	0,00 €	5 000 €
2	100 000 €	5 000 €	0,00 €	5 000 €
3	100 000 €	5 000 €	0,00 €	5 000 €
4	100 000 €	5 000 €	0,00 €	5 000 €
5	100 000 €	5 000 €	100 000 €	105 000 €

Coût de l'emprunt : $5\,000 \times 5 = 25\,000$ €.

Graphiquement cet emprunt se représente comme ci-dessous.



Il est très simple pour un tel emprunt d'évaluer analytiquement les éléments du tableau de remboursement. Notons K le capital emprunté,

Copyright © 2011 Dunod.

i le taux d'emprunt annuel, N la durée en années des remboursements, R_n le capital restant l'année n, les intérêts payés l'année n, C_n le capital remboursé l'année n et A_n l'annuité l'année n.

On a ainsi tous les ans, sauf la dernière année :

$\boxed{R_n = K}$, $\boxed{I_n = A_n = i \times K}$ et $\boxed{C_n = 0}$

La dernière année :

$\boxed{R_N = K}$, $\boxed{I_N = i \times K}$, $\boxed{C_N = K}$

et $\boxed{A_N = K + i \times K = K(1+i)}$

Le **coût de l'emprunt** est donc : $\boxed{i \times K \times N}$

Un tel emprunt à un coût élevé dans la mesure où le capital est remboursé le plus tard possible.

Remarque : les intérêts payés chaque année sont identiques ; on pourrait aussi appeler ce type d'emprunt « remboursement par intérêts constants ».

b) Remboursement par amortissements constants

Un remboursement par amortissements constants consiste à rembourser la même fraction de capital tous les ans.

Avec les notations précédentes, on a donc $C_n = \dfrac{K}{N}$ tous les ans. On trouve par conséquent la relation du capital restant à rembourser : $R_{n+1} = R_n - \dfrac{K}{N}$. Il s'agit d'une suite arithmétique de premier terme $R_1 = K$ et de raison $-\dfrac{K}{N}$.

On trouve donc le capital restant l'année n :

$$R_n = R_1 - \frac{K}{N}(n-1) = K - \frac{K}{N}(n-1) = \frac{K}{N}(N-n+1)$$

Par conséquent, on peut en déduire le montant des intérêts l'année n :

$$I_n = i \times R_n = i \times \frac{K}{N}(N-n+1)$$

et l'annuité l'année n :

$$A_n = I_n + C_n = 1 \times \frac{K}{N}(N-n+1) + \frac{K}{N} = \frac{K}{N}(1+i(N-n+1))$$

Copyright © 2011 Dunod.

Le **coût de l'emprunt** est de $I_1 + I_2 + \cdots + I_N$. Il s'agit d'une somme de N termes d'une suite arithmétique de premier terme $I_1 = i \times K$ et de dernier terme $I_N = i \times \dfrac{K}{N}$.

Le coût de l'emprunt est donc de :

$$\frac{I_1 + I_N}{2} \times N = \frac{i \times K + i \times \dfrac{K}{N}}{2} \times N = \frac{i \times K \times N + i \times K}{2}$$
$$= i \times K \times \frac{N+1}{2}$$

Le tableau ci-dessous retrace le remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans, au taux de 5 %.

Remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans au taux de 5 %

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	100 000 €	5 000 €	20 000 €	25 000 €
2	80 000 €	4 000 €	20 000 €	24 000 €
3	60 000 €	3 000 €	20 000 €	23 000 €
4	40 000 €	2 000 €	20 000 €	22 000 €
5	20 000 €	1 000 €	20 000 €	21 000 €

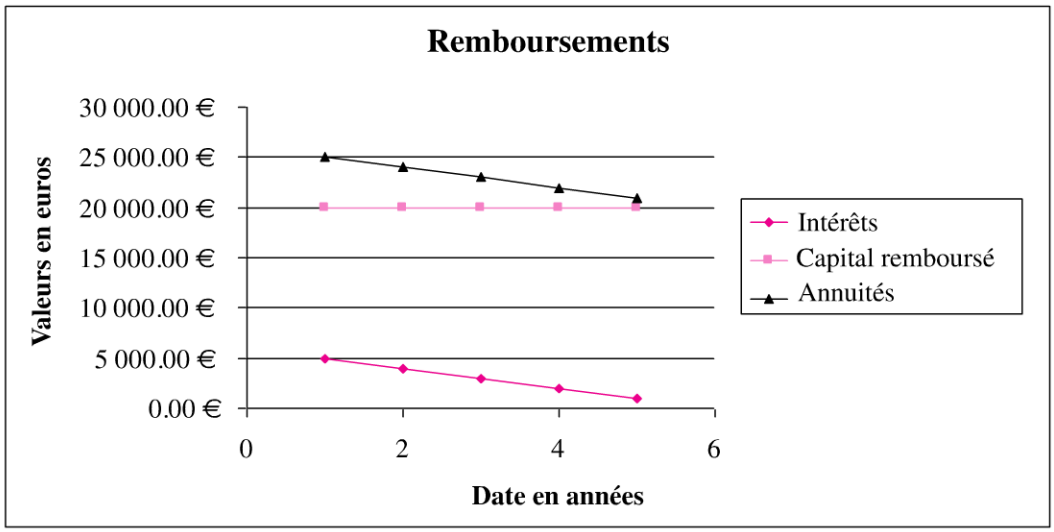
Le coût de l'emprunt est :

$$5\,000 + 4\,000 + 3\,000 + 2\,000 + 1\,000 = 15\,000 \text{ €}$$

On retrouve cette valeur par la formule précédente :

$$0{,}05 \times 100\,000 \times \frac{5+1}{2} = 15\,000 \text{ €}$$

Graphiquement cet emprunt se représente comme ci-dessous.



Copyright © 2011 Dunod.

Les intérêts et les annuités diminuent chaque année. Leurs évolutions peuvent être modélisées par des segments de droite.

c) Remboursement par annuités constantes

Ce mode de remboursement consiste à rembourser chaque année la même annuité. Il est très utilisé par les particuliers, car il est simple à gérer dans un budget.

Le calcul des annuités constantes en fonction des paramètres de l'emprunt est, en revanche, moins simple. On a la **relation** :

$$K(1+i)^N = A_1(1+i)^{N-1} + A_2(1+i)^{N-2} + A_3(1+i)^{N-3} + \cdots + A_N$$

valable pour tout type d'emprunt, et l'on souhaite que

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_N = A$$

On trouve ainsi :

$$K(1+i)^N = A(1+i)^{N-1} + A(1+i)^{N-2} + A(1+i)^{N-3} + \cdots + A$$

soit :

$$K(1+i)^N = A[(1+i)^{N-1} + (1+i)^{N-2} + (1+i)^{N-3} + \cdots + 1]$$

On reconnaît la somme de N termes d'une suite géométriques de raison $(1+i)$ et de premier terme 1 dans le crochet de l'expression,

ainsi : $K(1+i)^N = A \times \dfrac{(1+i)^N - 1}{1+i-1}$

On a donc $A = \dfrac{K(1+i)^N \times i}{(1+i)^N - 1}$

En divisant le numérateur et le dénominateur de cette expression par $(1+i)^N$ on trouve :

$$A = \frac{K \times i}{1 - \dfrac{1}{(1+i)^N}}$$

et donc $\boxed{A = \dfrac{K \times i}{1-(1+i)^{-N}}}$

Cette formule permet de calculer une annuité constante.

Copyright © 2011 Dunod.

Remarque : la démarche pour démontrer la formule de l'annuité constante est la même que celle pour trouver la valeur actuelle d'une suite de versements constants dans le chapitre 3.

Il reste à déterminer les expressions des autres éléments du tableau de remboursement. On a la relation : $I_n + C_n = A$.

De plus on a $I_n = i \times R_n$ et $R_{n+1} = R_n - C_n$.

On a donc $R_{n+1} = R_n - (A - I_n) = R_n - (A - i \times R_n)$

On trouve par conséquent $\boxed{R_{n+1} = (1+i)R_n - A}$

Il s'agit d'une suite aritmético-géométrique. La formule du chapitre 1 : $u_n = a^{n-k}\left(u_k - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$ permet de calculer R_n.

On a dans notre cas $a = 1+i$, $b = -A$ et $R_1 = K$, ainsi :

$$R_n = (1+i)^{n-1}\left(K + \frac{A}{1-(1+i)}\right) - \frac{A}{1-(1+i)}$$

On a donc $R_n = (1+i)^{n-1}\left(K - \dfrac{A}{i}\right) + \dfrac{A}{i}$

or $A = \dfrac{K \times i}{1-(1+i)^{-N}}$

donc $R_n = (1+i)^{n-1}\left(K - \dfrac{K}{1-(1+i)^{-N}}\right) + \dfrac{K}{1-(1+i)^{-N}}$

on trouve donc :

$$R_n = K(1+i)^{n-1}\left(\left(1 - \frac{1}{1-(1+i)^{-N}}\right)\right) + \frac{K}{1-(1+i)^{-N}}$$

ainsi $R_n = \dfrac{K(1+i)^{n-1}}{1-(1+i)^{-N}}[1-(1+i)^{-N} - 1 + (1+i)^{1-n}]$

et donc $R_n = \dfrac{K}{1-(1+i)^{-N}}[-(1+i)^{-N+n-1} + 1]$

par conséquent :

$$\boxed{R_n = K\frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}}$$

Copyright © 2011 Dunod.

comme $I_n = i \times R_n$ on trouve :

$$I_n = i \times K \frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$$

et comme $C_n = A - I_n$ on trouve :

$$C_n = A - i \times K \frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$$

$$= \frac{Ki}{1-(1+i)^{-N}} - iK \frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$$

par conséquent :

$$C_n = iK \frac{(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$$

Le **coût de l'emprunt** se détermine plus simplement d'une manière soustractive (différence entre la somme des annuités et le capital emprunté) que d'une manière additive (somme des intérêts). Ce coût est donc de :

$$N \times A - K = N \times \frac{Ki}{1-(1+i)^{-N}} - K = K\left(\frac{Ni}{1-(1+i)^{-N}} - 1\right)$$

Le tableau ci-dessous retrace le remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans, au taux de 5 %.

Remboursement d'un emprunt de 100 000 € sur 5 ans au taux de 5 %

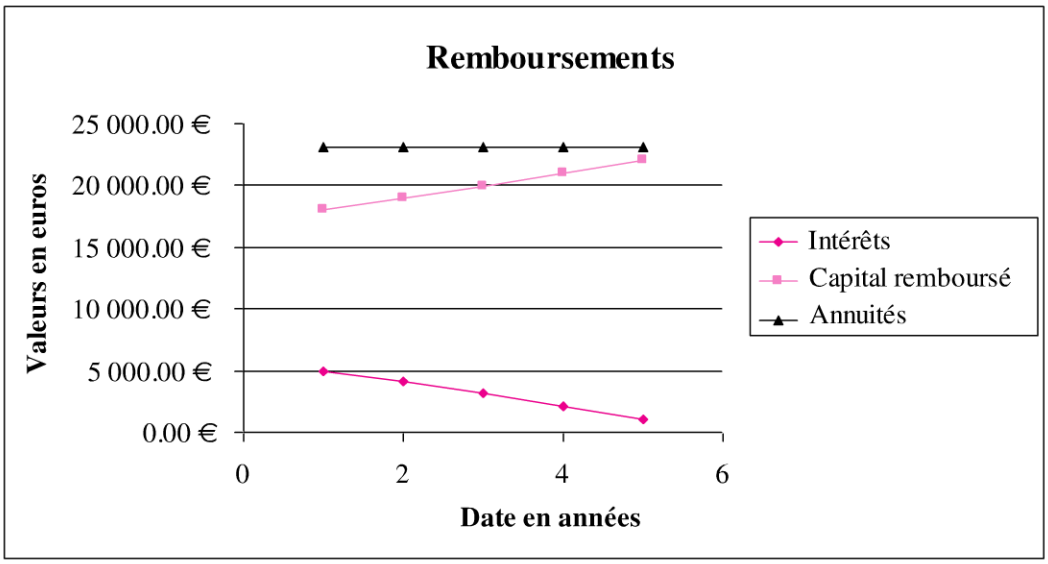
Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	100 000,00 €	5 000,00 €	18 097,48 €	23 097,48 €
2	81 902,52 €	4 095,13 €	19 02,35 €	23 097,48 €
3	62 900,17 €	3 145,01 €	19 952,47 €	23 097,48 €
4	42 947,69 €	2 147,38 €	20 950,10 €	23 097,48 €
5	21 997,60 €	1 099,88 €	21 997,60 €	23 097,48 €

Le coût de cet emprunt est de :

$5\,000 + 4\,095{,}13 + 3\,145{,}01 + 2\,147{,}38 + 1\,099{,}88 = 15\,487{,}40$ €.

Graphiquement cet emprunt se représente comme ci-dessous.

Copyright © 2011 Dunod.



Au fil des années la part des intérêts diminue alors que la part du capital augmente.

Remarque : entre les trois modes de remboursement présentés, **le mode par amortissements constants** est le plus économique, suivi du mode par annuités constantes puis du mode *in fine* qui est le plus mauvais.

4.3 REMBOURSEMENTS ÉVOLUTIFS

Dans les emprunts de longue durée, les particuliers peuvent envisager d'augmenter régulièrement leurs annuités de remboursement s'ils envisagent une augmentation à venir de leurs capacités de remboursement.

Le cas d'une diminution programmée des annuités est envisageable aussi. Même si celle-ci est moins courante, elle répond au principe de rembourser vite pour payer moins d'intérêts. On envisage deux progressions ; une progression géométrique et une progression arithmétique des remboursements.

a) Annuités en progression géométrique

On suppose que les annuités progressent d'une année à l'autre d'un taux de progression r. Ainsi avec $A_1 = A$, on a $A_2 = A(1+r)$, $A_3 = A(1+r)^2$ et $A_N = A(1+r)^{N-1}$.

Remarque : le cas d'une diminution des annuités est inclus dans ce cas en considérant $r < 0$.

La relation des valeurs actuelles d'un emprunt indique que :

$$K = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_N}{(1+i)^N}$$

Copyright © 2011 Dunod.

ainsi l'on a :

$$K = \frac{A}{1+i} + \frac{A(1+r)}{(1+i)^2} + \frac{A(1+r)^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A(1+r)^{N-1}}{(1+i)^N}$$

soit :

$$K = \frac{A}{1+i}\left(1 + \frac{1+r}{1+i} + \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{N-1}\right)$$

On retrouve la somme de N termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1+r}{1+i}$, ainsi si $i \neq r$ on a :

$$K = \frac{A}{1+i} \times \frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^N - 1}{\left(\frac{1+r}{1+i}\right) - 1} = A \times \frac{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^N - 1}{1+r-(1+i)}$$

On trouve donc : $\boxed{A = K\dfrac{r-i}{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^N - 1}}$

Si $i = r$ on a $K = \dfrac{A \times N}{1+i}$ et donc : $\boxed{A\dfrac{K}{N}(1+i)}$

Exemple

Quelle est la première annuité de remboursement d'un emprunt de 100 000 € au taux de 10 % si les annuités sont en progression géométrique de 5 % sur 20 ans ? L'annuité est donnée par l'expression précédente :

$$A = 100\,000\frac{0{,}05 - 0{,}1}{\left(\frac{1+0{,}05}{1+0{,}1}\right)^{20} - 1} = 8\,256{,}22\ €$$

b) Annuités en progression arithmétique

On suppose que les annuités progressent d'une même valeur S tous les ans. On a donc $A_1 = A$, $A_2 = A + S$, $A_3 = A + 2S$ et $A_N = A + (N-1)S$.

Remarque : le cas d'une diminution des annuités est inclus, dans ce cas, en considérant $S < 0$.

Copyright © 2011 Dunod.

La relation des valeurs actuelles d'un emprunt indique que $K = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_N}{(1+i)^N}$ ainsi l'on a

$$K = \frac{A}{1+i} + \frac{A+S}{(1+i)^2} + \frac{A+2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A+(N-1)S}{(1+i)^N}$$

Décomposant cette équation en deux parties :

$$K = \underbrace{\frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^N}}_{\text{Partie1}} + \underbrace{\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N}}_{\text{Partie2}}$$

La première partie $\frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^N}$ est simple à évaluer dans la mesure où elle correspond au calcul déjà réalisé des remboursements par annuités constantes.

On a donc :

$$\frac{A}{(1+i)} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^N} = A\frac{1-(1+i)^{-N}}{i}$$

que l'on obtient en inversant la formule des annuités constantes. La seconde partie :

$$\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N}$$

est moins simple car on ne peut assimiler cette somme ni à une somme de termes d'une suite arithmétique ni à une somme de termes d'une suite géométrique. Cependant la somme des termes d'une suite géométrique peut être utile pour donner une expression de cette somme. Considérons la fonction $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{N-1}$; cette fonction peut être interprétée comme la somme des termes d'une suite géométrique de raison x. Ainsi si $x \neq 1$, on trouve $f(x) = \frac{x^N - 1}{x - 1}$.

La fonction f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$, on peut calculer sa dérivée de deux manières : d'une part, $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (N-1)x^{N-2}$ et, d'autre part, avec la seconde expression

Copyright © 2011 Dunod.

$$f'(x) = \frac{Nx^{N-1}(x-1) - (x^N - 1)}{(x-1)^2}$$

ainsi l'on a :

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (N-1)x^{N-2} = \frac{Nx^{N-1}(x-1) - (x^N - 1)}{(x-1)^2}$$

Comment utiliser cette relation pour calculer l'expression précédente ?
Une factorisation permet de mettre en évidence l'expression de $f'(x)$.
On a :

$$\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N}$$

$$= \frac{S}{(1+i)^2}\left[1 + \frac{2}{1+i} + \frac{3}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{N-1}{(1+i)^{N-2}}\right]$$

En posant $x = \dfrac{1}{1+i} = (1+i)^{-1}$ on trouve :

$$\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N} = \frac{S}{(1+i)^2} f'(x)$$

ainsi

$$\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N}$$

$$= \frac{S}{(1+i)^2} \times \frac{N(1+i)^{1-N}((1+i)^{-1} - 1) - ((1+i)^{-N} - 1)}{((1+i)^{-1} - 1)^2}$$

or $(1+i)^{-1} - 1 = \dfrac{1}{1+i} - 1 = \dfrac{1-1-i}{1+i} = -\dfrac{i}{1+i}$

ainsi

$$\frac{S}{(1+i)^2} + \frac{2S}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{(N-1)S}{(1+i)^N}$$

$$= S\frac{-Ni(1+i)^{-N} + 1 - (1+i)^{-N}}{i^2} = S\frac{1 - (1+i)^{-N}(1+Ni)}{1^2}$$

On a une expression « simplifiée » de K :

$$K = A\frac{1 - (1+i)^{-N}}{i} + S\frac{1 - (1+i)^{-N}(1+Ni)}{i^2}$$

Copyright © 2011 Dunod.

La valeur de la première annuité d'un remboursement en progression arithmétique est donc :

$$A = \frac{i}{1-(1+i)^{-N}}\left[K - S\frac{1-(1+i)^{-N}(1+Ni)}{i^2}\right]$$

Exemple

Donner la première annuité du remboursement d'un emprunt de 100 000 € en progression arithmétique de 1 000 € sur 3 ans au taux de 10 %. Par application de la formule précédente, on trouve :

$$A = \frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-3}}\left[100\,000 - 1\,000\frac{1-(1+0,1)^{-3}(1+3\times 0,1)}{0,1^2}\right]$$

$$= 39\,274,92\ €$$

Remarque : l'expression de $f'(x)$ pour $x = 1$ n'a pas été développée dans la mesure où $x = 1$ correspond à $i = 0$, autrement dit un emprunt sans intérêts dont le calcul des annuités ne pose pas de difficultés.

POINTS CLEFS

- Relation d'actualisation pour le remboursement d'un emprunt :

$$K = \frac{A_1}{1+i} + \frac{A_2}{(1+i)^2} + \frac{A_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(1+i)^n}$$

- Le TEG se calcule en actualisant les différentes dépenses liées au remboursement d'un emprunt.
- Le taux d'usure est la limite de TEG légale en France.
- Le taux proportionnel est le taux légal utilisé en France pour augmenter la fréquence d'un remboursement.
- Le coût d'un emprunt se calcule de manière additive comme somme des intérêts payés, ou de manière soustractive comme différence entre la somme des annuités et le capital emprunté.
- Les relations suivantes permettent de construire un tableau d'amortissement :

  Intérêts = Taux d'emprunt × Capital restant.

  Annuité = Capital remboursé + Intérêts.

Copyright © 2011 Dunod.

Capital restant l'année a = Capital restant l'année $(a-1)$ – Capital remboursé l'année $(a-1)$.

Éléments de calculs des remboursements « classiques »

	In fine	**Amortissements constants**	**Annuités constantes**
Capital restant : R_n	K	$\frac{K}{N}(N-n+1)$	$K\frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$
Intérêts : I_n	$i \times K$	$i\frac{K}{N}(N-n+1)$	$i \times K\frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$
Amortissement : C_n	0 sauf la dernière année : K	$\frac{K}{N}$	$iK\frac{(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}}$
Annuité : A_n	$i \times K$ sauf la dernière année : $K(1+i)$	$\frac{K}{N}(1+i(N-n+1))$	$\frac{K \times i}{1-(1+i)^{-N}}$
Coût de l'emprunt	$i \times K \times N$	$i \times K \times \frac{N+1}{2}$	$K\left(\frac{Ni}{1-(1+i)^{-N}}-1\right)$

En termes de coûts, l'emprunt par amortissement constant est plus économique que celui par annuités constantes qui est, lui-même, plus économique que le remboursement *in fine*.

La première annuité d'un remboursement en **progression géométrique** de taux r est :

$$A = K\frac{r-i}{\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{N}-1} \text{ si } i \neq r$$

$$\text{et } A = \frac{K}{N}(1+i) \text{ sinon}$$

La première annuité d'un remboursement en **progression arithmétique** de raison S est :

$$A = \frac{i}{1-(1+i)^{-N}}\left[K - S\frac{1-(1+i)^{-N}(1+Ni)}{i^2}\right]$$

Copyright © 2011 Dunod.

EXERCICES

4.1 Reste à rembourser

Un individu emprunte un capital de 10 000 € au taux de 6 % qu'il rembourse par une annuité de 5 000 € l'année 1, une annuité de 1 000 € l'année 2, rien l'année 3 et le reste l'année 4. Que reste-t-il à rembourser l'année 4 ?

4.2 Annuités

Un individu emprunte 50 000 € au taux de 8 % qu'il rembourse en deux annuités identiques l'année 2 et l'année 4. Quel est le montant de ces annuités ?

4.3 Comparaison de modes de remboursement

Un individu emprunte 100 000 € en 5 ans au taux annuel de 10 % qu'il rembourse soit par mensualités constantes, soit par trimestrialités constantes, soit par annuités constantes. Quel est le mode de remboursement le plus économique ?

4.4 Finir plus vite

Un individu décide de rembourser un emprunt de 20 000 € au taux de 10 % sur 8 ans par annuités constantes. Il décide l'année 4 de terminer le remboursement de cet emprunt.

a) Quelle somme doit-il verser l'année 4 ?

b) Quelle économie a-t-il ainsi réalisée ?

4.5 Capacité d'emprunt

Quel capital peut-on emprunter à 5 % si l'on est en capacité de rembourser 1 000 € par mois pendant 10 ans ?

4.6 Durée de remboursement

En combien de temps peut-on rembourser un emprunt de 100 000 € au taux de 8 % par des annuités de 10 000 € ?

4.7 Taux d'emprunt

Un emprunt de 6 000 € est remboursé par une annuité de 4 000 € l'année 1 et une annuité de 3 000 € l'année 2. Quel est le taux de cet emprunt ?

Copyright © 2011 Dunod.

4.8 Comparaison d'offres

On souhaite réaliser un emprunt de 50 000 € à rembourser en 5 ans par annuités constantes. On compare les deux offres suivantes :

– banque A : taux de 6 %, assurance annuelle de 80 € et frais de 0,5 % du capital restant dû chaque année ;

– banque B : taux de 8 %, sans frais ni assurance.

Quelle proposition choisir ?

4.9 Calcul de TEG

Quel est le TEG d'un emprunt sur 5 ans *in fine* de 10 000 € au taux de 10 % dont on doit payer une assurance tous les ans de 50 € ?

4.10 Montant des intérêts

Pour un emprunt en remboursement *in fine*, au bout de combien de temps le cumul des intérêts payés est-il égal à la somme empruntée.

Même question pour un emprunt par amortissements constants.

Même question pour un emprunt par annuités constantes.

Remarque : on réalisera des applications numériques pour des taux variant de 1 % à 10 %.

4.11 Progression géométrique

Construire le tableau d'amortissement d'un emprunt sur 5 ans de 1 000 000 € au taux annuel de 5 % remboursé par des annuités en progression géométrique de 10 %.

4.12 Progression arithmétique

Construire le tableau d'amortissement d'un emprunt sur 5 ans de 1 000 000 € au taux annuel de 5 % remboursé par des annuités en progression arithmétique de 1 000 €.

4.13 Tableau de remboursement

Un individu réalise un emprunt de 1 000 000 € à 8 % annuels sur 3 ans par mensualités constantes.

a) Donner les deux premières lignes du tableau d'amortissement.

b) Donner les deux dernières lignes du tableau d'amortissement (sans utiliser les formules).

c) Déterminer la ligne 20 du tableau de remboursement.

d) Calculer le coût de cet emprunt.

Copyright © 2011 Dunod.

SOLUTIONS

Exercice 4.1

En appliquant la formule d'actualisation à cet emprunt on trouve, en notant R le reste à rembourser :

$$10\,000 = \frac{5\,000}{1{,}06} + \frac{1\,000}{1{,}06^2} + \frac{0}{1{,}06^3} + \frac{R}{1{,}06^4}$$

ainsi $10\,000 - \dfrac{5\,000}{1{,}06} - \dfrac{1\,000}{1{,}06^2} = \dfrac{R}{1{,}06^4}$

et $R = 1{,}06^4 \left(10\,000 - \dfrac{5\,000}{1{,}06} - \dfrac{1\,000}{1{,}06^2}\right) = 5\,546{,}09$ €

Exercice 4.2

Notons A le montant de ces deux annuités. Il ne s'agit pas d'annuités constantes puisqu'on ne rembourse rien les années 1 et 3. La formule d'actualisation indique que :

$$50\,000 = \frac{A}{1{,}08^2} + \frac{A}{1{,}08^4}$$

ainsi $A(1{,}08^{-2} + 1{,}08^{-4}) = 50\,000$

et $A = \dfrac{50\,000}{1{,}08^{-2} + 1{,}08^{-4}} = 31\,399{,}76$ €

Exercice 4.3

Pour chaque mode de remboursement, déterminons le coût de l'emprunt :

– **Mode par mensualités constantes.** Le taux annuel est de 10 %, le taux proportionnel mensuel est donc de :

$$i_m = \frac{0{,}1}{12} = 0{,}833\ \%$$

La formule des annuités constantes est $\dfrac{K \times i}{1 - (1+i)^{-N}}$, ainsi en adaptant cette formule à des mensualités, on trouve :

$$M = \frac{100\,000 \times \dfrac{0{,}1}{12}}{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}1}{12}\right)^{-5\times 12}} = 2\,124{,}70\ €$$

Copyright © 2011 Dunod.

Le coût de l'emprunt se calcule de manière soustractive : $5 \times 12 \times M - K = 27\,482{,}27$ €.

Il semblerait plus cohérent, mathématiquement, d'utiliser le taux équivalent pour des emprunts. En pratique, le taux proportionnel est utilisé, ce qui est à l'avantage du prêteur.

– **Mode par trimestrialités constantes.** Le taux proportionnel trimestriel est de $i_t = \dfrac{0{,}1}{4} = 2{,}5$ %. En adaptant la formule des annuités constantes aux trimestrialités constantes, on trouve :

$$T = \frac{100\,000 \times 0{,}025}{1 - 1{,}025^{-5\times 4}} = 6\,414{,}71 \text{ €}$$

Le coût de cet emprunt est alors : $5 \times 4 \times T - K = 28\,294{,}26$ €.

– **Mode par annuités constantes.** L'annuité de remboursement est de $A = \dfrac{100\,000 \times 0{,}1}{1 - 1{,}1^{-5}} = 26\,279{,}75$ €. Le coût de l'emprunt est donc de $5A - K = 31\,898{,}74$ €.

Le mode par annuités constantes est plus coûteux que celui par trimestrialités constantes, et celui-ci est plus coûteux que celui par mensualités constantes. Cette conclusion n'est pas surprenante. Payer à une fréquence plus importante revient à payer plus vite ; en effet un remboursement mensuel commencera à la fin du 1er mois alors qu'un remboursement annuel commencera seulement à la fin de la première année.

Exercice 4.4

a) Cet individu devait *a priori* payer 8 annuités constantes de :

$$\frac{20\,000 \times 0{,}1}{1 - 1{,}1^{-8}} = 3\,748{,}88 \text{ €}$$

Il en paye en réalité 3 et souhaite finir le remboursement de l'emprunt l'année 4. Notons R le reste à rembourser l'année 4. La formule d'actualisation des remboursements indique que :

$$20\,000 = \frac{3\,748{,}88}{1{,}1} + \frac{3\,748{,}88}{1{,}1^2} + \frac{3\,748{,}88}{1{,}1^3} + \frac{R}{1{,}1^4}$$

On a donc $\dfrac{R}{1{,}1^4} = 20\,000 - 3\,748{,}88(1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} + 1{,}1^{-3})$

Copyright © 2011 Dunod.

et, par conséquent,

$$R = 1{,}1^4 \times (20\,000 - 3\,748{,}88(1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} + 1{,}1^{-3}))$$
$$= 15\,632{,}33 \text{ €}$$

b) Au lieu de rembourser $8 \times 3\,748{,}88 = 29\,991{,}04$ €, cet individu rembourse $3 \times 3\,748{,}88 + 15\,632{,}33 = 26\,878{,}97$ €. Il réalise donc une économie de $29\,991{,}04 - 26\,878{,}97 = 3\,112{,}08$ €.

Exercice 4.5

On peut utiliser la formule des mensualités constantes pour répondre à cette question. On a :

$$1\,000 = \frac{K \times \dfrac{0{,}05}{12}}{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right)^{-10\times 12}}$$

$$\text{ainsi } K = 1\,000 \times \frac{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}05}{12}\right)^{-10\times 12}}{\dfrac{0{,}05}{12}} = 94\,281{,}35 \text{ €}$$

Exercice 4.6

La formule des annuités constantes permet de répondre à cette question. On cherche une durée en années n. On a :

$$10\,000 = \frac{100\,000 \times 0{,}08}{1 - (1 + 0{,}08)^{-n}}$$

$$\text{ainsi } 1 - 1{,}08^{-n} = \frac{100\,000 \times 0{,}08}{10\,000}$$

$$\text{d'où } 1{,}08^{-n} = 1 - \frac{100\,000 \times 0{,}08}{10\,000}$$

À l'aide du logarithme, on trouve :

$$-n \ln(1{,}08) = \ln\left(1 - \frac{100\,000 \times 0{,}08}{10\,000}\right)$$

$$\text{soit } n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{100\,000 \times 0{,}08}{10\,000}\right)}{\ln(1{,}08)} = 20{,}91$$

Copyright © 2011 Dunod.

On a donc besoin de 21 ans pour rembourser cet emprunt (sachant que la dernière année, cet individu remboursera une annuité plus faible).

Exercice 4.7

La formule d'actualisation des remboursements indique que $6\,000 = \dfrac{4\,000}{1+i} + \dfrac{3\,000}{(1+i)^2}$. Ainsi en multipliant cette égalité par $(1+i)^2$ on trouve $6\,000(1+i)^2 = 4\,000(1+i) + 3\,000$. Posons $x = 1+i$, on a alors $6\,000x^2 - 4\,000x + 3\,000 = 0$ soit $6x^2 - 4x - 3 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré. On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 6 \times (-3) = 88 > 0$, cette équation a donc deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{88}}{2 \times 6} = 1{,}1151$

et $x_2 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{88}}{2 \times 6} = -0{,}4484$.

Seule la première solution a un sens financier et indique un taux annuel de 11,51 %.

Exercice 4.8

Il s'agit de déterminer le TEG de la banque A pour pouvoir le comparer à celui de la banque B. Pour calculer les frais, il faut connaître le capital restant dû chaque année. Pour cela on peut donner le tableau d'amortissement d'un emprunt de 50 000 € en 5 ans à 6 % par annuités constantes. Les annuités calculées au taux de 6 % sont de :

$$\frac{50\,000 \times 0{,}06}{1 - 1{,}06^{-5}} = 11\,869{,}82 \text{ €}$$

Voir tableau ci-après.

Le tableau d'amortissement est complété par une colonne pour l'assurance, une pour les frais calculés à partir du capital restant, et la somme réelle que l'emprunteur dépense pour rembourser son emprunt. Cette somme est son annuité réelle. Le TEG se calcule donc à partir de ces sommes réellement dépensées. En notant i le TEG, la valeur actuelle d'un emprunt indique que :

$$50\,000 = \frac{12\,199{,}82}{1+i} + \frac{12\,155{,}47}{(1+i)^2} + \frac{12\,108{,}46}{(1+i)^3} + \frac{12\,058{,}53}{(1+i)^4} + \frac{12\,005{,}81}{(1+i)^5}$$

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

Tableau d'amortissement

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissement	Annuité calculée	Assurance	Frais	Annuité réelle
1	50 000,00 €	3 000 €	8 869,82 €	11 869,82 €	80 €	250,00 €	12 199,82 €
2	41 130,18 €	2 467,81 €	9 402,01 €	11 869,82 €	80 €	205,65 €	12 155,47 €
3	31 728,17 €	1 903,69 €	9 966,13 €	11 869,82 €	80 €	158,64 €	12 108,46 €
4	21 762,04 €	1 305,72 €	10 564,10 €	11 869,82 €	80 €	108,81 €	12 058,53 €
5	11 197,94 €	671,88 €	11 197,94 €	11 869,82 €	80 €	55,99 €	12 005,81 €

On ne peut résoudre cette équation que graphiquement. Notons :

$$f(x) = \frac{12\,199{,}82}{1+x} + \frac{12\,155{,}47}{(1+x)^2} + \frac{12\,108{,}46}{(1+x)^3} + \frac{12\,058{,}53}{(1+x)^4} + \frac{12\,005{,}81}{(1+x)^5} - 50\,000$$

On sait que le TEG est au-dessus de 6 % comme les dépenses sont majorées pour des frais. On cherche donc les valeurs de $f(x)$ pour $x > 0{,}06$. On a $f(0{,}06) = 1\,017 > 0$ et $f(0{,}07) = -337{,}8$, le TEG est compris entre 6 % et 7 %. On pourrait chercher à trouver progressivement une valeur plus précise du TEG. Ce n'est pas nécessaire pour cette question, on cherche seulement à comparer deux offres. La première propose un taux réel compris entre 6 % et 7 %, la seconde propose un taux de 8 %, la première offre est donc plus intéressante que la seconde.

Exercice 4.9

Avec l'assurance de 50 € on rembourse les intérêts de 1 000 € pendant les quatre premières années soit une annuité de 1 050 €. La dernière année, on rembourse le capital de 10 000 €, les intérêts de 1 000 € et l'assurance de 50 € soit un total de 11 050 €. Notons i le TEG. On a par actualisation des sommes remboursées :

$$10\,000 = \frac{1\,050}{1+i} + \frac{1\,050}{(1+i)^2} + \frac{1\,050}{(1+i)^3} + \frac{1\,050}{(1+i)^4} + \frac{11\,050}{(1+i)^5}$$

On pourrait chercher la solution approximative de cette équation graphiquement. Il est plus simple de constater pour cet emprunt *in fine* que le TEG est de 10,5 %. En effet, un taux de 10,5 % induit les mêmes annuités de paiement chaque année qu'un emprunt de 10 % avec une assurance de 50 €.

Exercice 4.10

a) Pour un emprunt *in fine*, le cumul des intérêts sur N années est de $N \times i \times K$. Le cumul des intérêts est donc égal au capital emprunté lorsque $N \times i \times K = K$ soit $N = \frac{1}{i}$. Numériquement on trouve les résultats suivants :

i	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
N	100	50	33,33	25	20	16,67	14,29	12,5	11,11	10

Copyright © 2011 Dunod.

b) Pour un emprunt par amortissements constants, le cumul des intérêts sur N années est de :

$$i \times K \times \frac{N+1}{2}$$

On a donc $i \times K \times \dfrac{N+1}{2} = K$

ainsi $i\dfrac{N+1}{2}$ soit $N = \dfrac{2}{i} - 1$

On trouve les résultats suivants :

i	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
N	199	99	65,67	49	39	32,33	27,57	24	21,22	19

c) Pour un emprunt par annuités constantes, le cumul des intérêts est de :

$$K\left(\frac{Ni}{1-(1+i)^{-N-1}}\right), \text{ ainsi } K\left(\frac{Ni}{1-(1+i)^{-N-1}}\right) = K$$

soit $\dfrac{Ni}{1-(1+i)^{-N}} - 1 = 1$ donc $Ni = 2(1-(1+i)^{-N})$

ainsi $Ni - 2(1-(1+i)^{-N}) = 0$

On ne peut pas résoudre cette équation analytiquement. On pose alors $f(x) = xi - 2(1-(1+i)^{-x})$ et l'on cherche selon les valeurs de i, les valeurs de x qui annulent $f(x)$. On trouve les résultats suivants :

i	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
N	158,82	79,13	52,57	39,29	31,32	26,01	22,22	19,37	17,16	15,38

Remarque : on constate que les durées ne dépendent que du taux d'emprunt et non de la somme empruntée. Les résultats pour l'amortissement constant sont plus élevés que ceux pour l'annuité constante, eux mêmes plus élevés que ceux pour l'emprunt *in fine*. Ces résultats sont cohérents car ils classent les emprunts en concordance avec leurs coûts respectifs.

Exercice 4.11

La première annuité de cet emprunt est donnée par :

$$A = K\frac{r-i}{\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^N - 1} = 1\,000\,000\frac{0,1-0,05}{\left(\dfrac{1,1}{1,05}\right)^5 - 1} = 190\,929,53\ €$$

Copyright © 2011 Dunod.

On complète ensuite le tableau d'amortissement en augmentant chaque année l'annuité de 10 % par rapport à l'année précédente :

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	1 000 000,00 €	50 000,00 €	140 929,53 €	190 929,53 €
2	859 070,47 €	49 953,52 €	167 068,96 €	210 022,48 €
3	692 001,51 €	34 600,08 €	196 424,66 €	231 024,73 €
4	495 576,85 €	24 778,84 €	229 348,36 €	254 127,20 €
5	266 228,49 €	13 311,42 €	266 228,50 €	279 539,92 €

Exercice 4.12

La première annuité de cet emprunt est donnée par :

$$A = \frac{0{,}05}{1 - 1{,}05^{-5}} \left[1\,000\,000 - 1\,000 \frac{1 - (1{,}05)^{-5}(1 + 5 \times 0{,}05)}{0{,}05^2} \right]$$

$$= 229\,072{,}28 \text{ €}$$

On complète ensuite le tableau en augmentant chaque année l'annuité de 1 000 € :

Date	Capital restant	Intérêts	Capital remboursé	Annuités
1	1 000 000 €	50 000,00 €	179 072,28 €	229 072,28 €
2	820 927,72 €	41 046,39 €	189 025,89 €	230 072,28 €
3	631 901,83 €	31 595,09 €	199 477,19 €	231 072,28 €
4	432 424,64 €	21 621,23 €	210 451,05 €	232 072,28 €
5	221 973,59 €	11 098,68 €	221 973,60 €	233 072,28 €

Exercice 4.13

Il serait trop long de calculer l'intégralité d'un tableau d'amortissement constitué de 36 lignes de calcul.

a) Pour calculer les deux premières lignes du tableau, il est utile dans un premier temps de déterminer le montant de l'annuité constante :

$$A = \frac{1\,000\,000 \dfrac{0{,}08}{12}}{1 - \left(1 + \dfrac{0{,}08}{12}\right)^{-12 \times 3}} = 31\,336{,}37 \text{ €}$$

Copyright © 2011 Dunod.

On utilise le taux mensuel proportionnel : $i_m = \dfrac{0{,}08}{12}$

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissement	Annuités
1	1 000 000 €	6 666,67 €	24 669,70 €	31 336,37 €
2	975 330,30 €	6 502,20 €	24 834,16 €	31 336,37 €

b) Pour calculer simplement les deux dernières lignes sans utiliser de formules, on peut utiliser les propriétés du tableau d'amortissement. Notons x le capital restant la dernière année, la dernière année clôture l'emprunt, ainsi l'amortissement est aussi x, les intérêts sont de $x\dfrac{0{,}08}{12}$. L'annuité est constante de 31 336,37 €. On a ainsi $x + x\dfrac{0{,}08}{12} = 31\,336{,}37$ comme l'annuité est la somme des intérêts et de l'amortissement. On a donc $x\left(1 + \dfrac{0{,}08}{12}\right) = 31\,336{,}37$ soit $x = \dfrac{31\,336{,}37}{1 + \dfrac{0{,}08}{12}} = 31\,128{,}84$ €. On a le tableau suivant :

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissement	Annuités
35	y	$y\dfrac{0{,}08}{12}$	z	31 336,37 €
36	31 128,84 €	207,53 €	31 128,84 €	31 336,37 €

Notons y le capital restant le mois 35 et z l'amortissement le mois 35. On a les équations suivantes : $y - z = 31\,128{,}84$ pour calculer le capital restant le mois 36, et $y\dfrac{0{,}08}{12} + z = 31\,336{,}37$ pour le calcul de l'annuité. On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} y - z = 31\,128{,}84 \\ y\dfrac{0{,}08}{12} + z = 31\,336{,}37 \end{cases}$$

En additionnant les deux lignes de ce système on trouve :

$$y\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right) = 31\,128{,}84 + 31\,336{,}37$$

Copyright © 2011 Dunod.

ainsi $y = \dfrac{31\,128{,}84 + 31\,336{,}37}{1 + \dfrac{0{,}08}{12}} = 62\,051{,}53$ €

On trouve ensuite $z = 62\,051{,}53 - 31\,128{,}84 = 30\,922{,}69$ €. Les deux dernières lignes du tableau sont donc :

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissement	Annuités
35	62 051,53 €	413,68 €	30 922,69 €	31 336,37 €
36	31 128,84 €	207,53 €	31 128,84 €	31 336,37 €

c) Pour la ligne 20, l'annuité est toujours de 31 336,37 €. Le capital restant est donné par :

$$K\frac{1-(1+i)^{-N+n-1}}{1-(1+i)^{-N}} = 1\,000\,000\frac{1-\left(1+\dfrac{0{,}08}{12}\right)^{-36+20-1}}{1-\left(1+\dfrac{0{,}08}{12}\right)^{-36}}$$

$$= 502\,060{,}92 \text{ €}$$

Les intérêts sont donc de $502\,060{,}92\dfrac{0{,}08}{12} = 3\,347{,}07$€.

L'amortissement est de :

$$31\,336{,}37 - 3\,347{,}07 = 27\,989{,}30 \text{ €}$$

Le tableau d'amortissement pour cette ligne est donc :

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissement	Annuité
20	502 060,92 €	3 347,07 €	27 989,30 €	31 336,37 €

d) Le coût de l'emprunt se calcule de manière soustractive par différence entre la somme des annuités et le capital emprunté : $36 \times 31\,336{,}37 - 1\,000\,000 = 128\,109{,}32$ €.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

PARTIE 2

Les projets d'investissement

Chapitre 5	**Outils d'évaluation d'un investissement**	119
Chapitre 6	**Emprunts obligataires**	145
Chapitre 7	**Valeur des actions**	171

Qu'est-ce qu'un investissement ? Comment évaluer un investissement ? Peut-on évaluer financièrement un projet en avenir incertain ? Les outils développés dans la partie précédente servent à évaluer des opérations financières. La différence essentielle dans cette partie est l'indéterminée des données. Lors d'un calcul de placement financier sur un compte réglementé, l'ensemble des éléments du calcul est connu. Lors d'un projet d'investissement les bénéfices à venir d'une entreprise ou les dividendes envisagés par un actionnaire ne sont qu'une spéculation. Il sera donc nécessaire d'ajouter aux éléments du calcul financier, des éléments de prise de décisions pour l'investisseur ainsi que des mesures du risque.

Le chapitre 5 « Outils d'évaluation d'un investissement » présente du point de vue de l'entreprise, les critères de choix pour réaliser un projet d'investissement. Le chapitre 6 « Emprunts obligataires » modélise un emprunt à plusieurs préteurs pour une entreprise et pour un investisseur sur le marché financier des obligations. Le chapitre 7 « Valeur des actions » construit des outils de prise de décisions quant à l'achat ou la vente de titres sur le marché des actions.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 5

Outils d'évaluation d'un investissement

OBJECTIFS

- Calculer et interpréter le résultat d'une valeur actuelle nette.
- Comprendre le choix du taux d'actualisation.
- Calculer un taux de rentabilité interne.
- Envisager l'éventualité d'un investissement avec les outils de la VAN et du TRI.
- Calculer et interpréter un délai de récupération.
- Calculer et interpréter un indice de profitabilité.
- Adapter les formules de VAN, de TRI et d'indice de profitabilité au cas où le coût du capital n'est pas le taux de réinvestissement.
- Comprendre les critères de comparaison entre deux projets.
- Comparer des projets d'investissement et de durées différentes.
- Utiliser le critère de la valeur actuelle nette en avenir incertain.
- Connaître des stratégies de prise de décisions en avenir incertain.

PLAN

5.1 Éléments d'analyse d'un projet d'investissement

5.2 Comparaison de deux projets d'investissement

5.3 Prise de décision en avenir incertain

Copyright © 2011 Dunod.

5.1 ÉLÉMENTS D'ANALYSE D'UN PROJET D'INVESTISSEMENT

Un projet d'investissement se caractérise financièrement par une somme investie I. Cette somme donnera lieu pendant n années à des recettes $R_1, R_2, \ldots, R_n$ et à des dépenses $D_1, D_2, \ldots, D_n$. En fin de projet, l'investissement peut éventuellement avoir une valeur résiduelle R.

Exemple

Une entreprise achète un ordinateur 2 000 € pour 5 ans d'utilisation. Pendant cette période, ce matériel va permettre un gain de 600 € par an et pourra être revendu 800 € au bout des 5 ans. On a dans cet exemple $I = 2\,000$ €, $R_1 - D_1 = R_2 - D_2 = \ldots = R_5 - D_5 = 600$ € et $R = 800$ €.

a) La valeur actuelle nette (*VAN*)

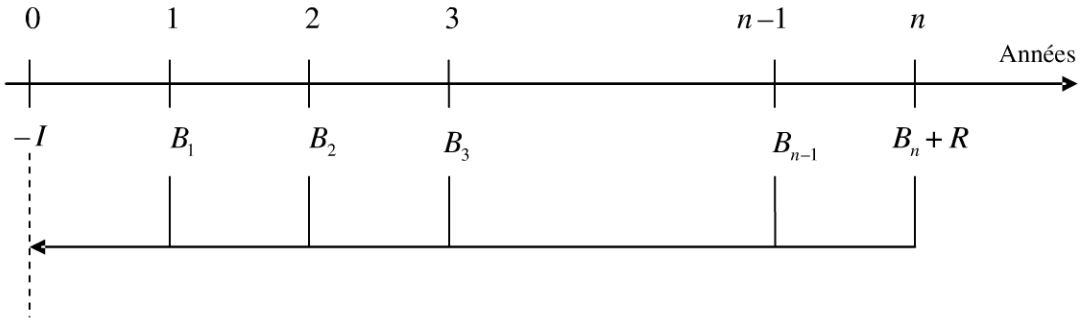
➤ À quelle condition est-il intéressant de réaliser un projet d'investissement ?

Notons $B_1 = R_1 - D_1$, $B_2 = R_2 - D_2, \ldots, B_n = R_n - D_n$ les bénéfices anticipés les années 1,2,...,n. Un projet peut sembler intéressant si les dépenses engendrées par celui-ci sont moins importantes que les recettes ; autrement dit si $-I + B_1 + B_2 + \ldots + B_n + R > 0$.

Cette condition nécessaire pour réaliser un projet n'est pas suffisante. En effet, chacun des termes de la somme précédente correspond à une date à venir différente. Une somme de 1 000 € dans un an a plus de valeur aujourd'hui que 1 000 € dans 5 ans.

Il est donc essentiel pour envisager un investissement de connaître la valeur « **aujourd'hui** » des différents gains à venir. Autrement dit, on cherche à **actualiser** les différents termes de la somme précédente.

Les flux financiers liés à l'investissement se présentent chronologiquement ainsi :



En appliquant un taux d'actualisation i aux différents flux financiers, on calcule **la valeur actuelle nette** (*VAN*) du projet d'investissement.

La **valeur actuelle nette** se formalise ainsi :

$$VAN = -I + \frac{B_1}{1+i} + \frac{B_2}{(1+i)^2} + \frac{B_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+i)^n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

La valeur actuelle nette est aussi appelée **bénéfice actualisé**.

➤ Comment interpréter la valeur actuelle nette ?

La valeur actuelle nette permet de déterminer si un investissement va rapporter davantage qu'un placement au taux i. En supposant que tous les gains financiers puissent être réinvestis au taux i, le critère $VAN > 0$ indique que le projet est plus intéressant pour l'entreprise qu'un placement au taux i.

Exemple

Considérons un projet d'investissement de 1 000 € qui rapporte 1 150 € dans un an (valeur résiduelle comprise). Au taux d'actualisation 10 % la valeur actuelle nette est : $VAN = -1\,000 + \dfrac{1\,150}{1+0{,}1} = 45{,}45 \text{ €} > 0$.
Le projet semble donc acceptable compte tenu d'un taux d'actualisation de 10 %. Le gain réalisé par ce projet au bout d'un an est de 150 €. Dans un placement au taux 10 % le gain réalisé au bout d'un an est de 100 €. Ainsi le critère $VAN > 0$ indique une préférence pour l'investissement comparativement au placement.

La valeur actuelle nette est un premier **critère de décision** dans le choix d'un investissement.

– Si $VAN > 0$ le projet est plus intéressant qu'un placement au taux i.

– Si $VAN < 0$ le projet est à rejeter pour préférer un placement au taux i.

Formalisation simplifiée

Dans le cas particulier où $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = B$, autrement dit lorsque les bénéfices sont identiques chaque année, on a :

$$VAN = -I + \frac{B}{1+i} + \frac{B}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{B}{(1+i)^n} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

On reconnaît la suite de termes présents dans le calcul des annuités constantes, ainsi :

$$VAN = -I + B\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

➤ Comment déterminer le taux d'actualisation ?

Le taux d'actualisation peut correspondre au **coût du capital**, autrement dit à ce que coûtent les capitaux à l'entreprise. Le coût du capital cor-

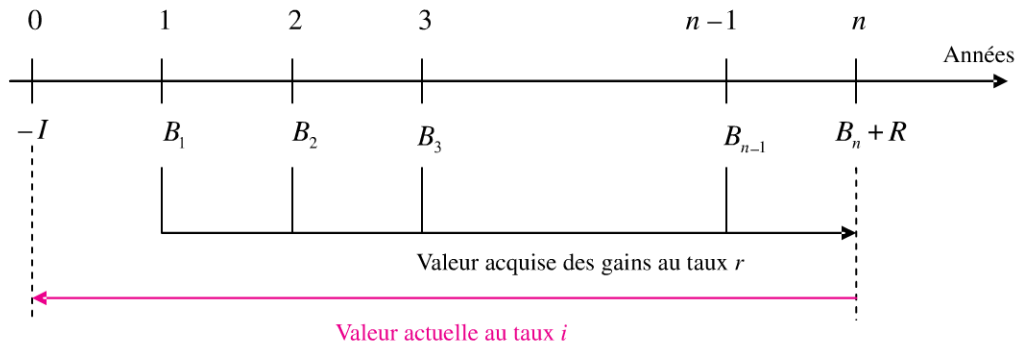
Copyright © 2011 Dunod.

respond au taux moyen pondéré des différents financements de l'entreprise. Le coût du capital exprime un niveau de risque pour l'ensemble de l'entreprise, ce niveau de risque ne correspond pas nécessairement au risque spécifique du projet.

On peut aussi considérer un **taux de réinvestissement** des flux de trésorerie pendant la durée de vie de l'investissement de manière à pouvoir comparer l'investissement à un placement. Généralement on fait l'hypothèse : **coût du capital = taux de réinvestissement**. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée.

Valeur actuelle nette globale (*VANG*)

Lorsque le taux de réinvestissement r est différent du coût du capital i, on peut chercher à calculer une **valeur actuelle nette globale** en actualisant au taux i les valeurs acquises au taux r des gains financiers liés à l'investissement :



La **valeur actuelle nette globale** se formalise ainsi :

$$VANG = -I + \frac{B_1(1+r)^{n-1} + B_2(1+r)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(1+r) + B_n + R}{(1+i)^n}$$

On retient ainsi un projet si $VANG > 0$.

➤ Comment prendre en compte l'inflation ?

Dans une période d'inflation, il est nécessaire de corriger les valeurs des gains à venir pour les exprimer dans la même unité que la somme investie. Si les gains à venir n'intègrent pas l'inflation, on peut corriger le taux d'actualisation i à l'aide du taux d'inflation g. On utilise alors **un taux d'actualisation déflaté** : $(1+i)(1+g)-1$

Remarque : $(1+i)(1+g)-1 = 1+i+g+ig-1 = i+g-ig$. Or $ig \ll i+g$, on fait donc généralement l'approximation d'un taux d'actualisation déflaté égal à $i+g$.

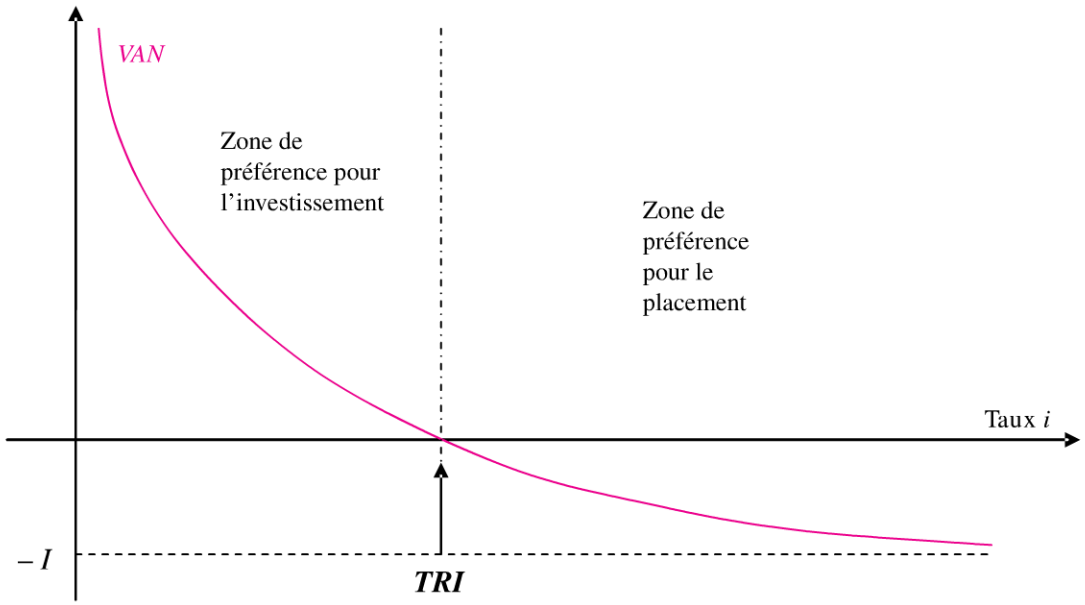
Copyright © 2011 Dunod.

b) Le taux de rentabilité interne (*TRI*)

Le **taux interne de rentabilité** est le taux qui annule la valeur actuelle nette. Il est déterminé par l'équation :

$$VAN = -I + \frac{B_1}{1+TRI} + \frac{B_2}{(1+TRI)^2} + \frac{B_3}{(1+TRI)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+TRI)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+TRI)^n} = 0$$

Si les valeurs $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont positives, la courbe représentative de la valeur actuelle nette en fonction du taux i se présente ainsi :



Remarque : on comprend l'allure décroissante de la courbe représentative de la valeur actuelle nette en fonction de i ; plus le taux i augmente plus le placement devient intéressant comparativement à l'investissement.

Le taux de rentabilité interne est un seuil en dessous duquel on peut envisager l'investissement.

On a le **critère de décision** suivant en notant i le taux d'actualisation.

– Si $i > TRI$ le projet d'investissement est à rejeter car $VAN < 0$.

– Si $i < TRI$ le projet d'investissement est à accepter car $VAN > 0$.

Le taux de rentabilité interne est aussi la rémunération maximale envisageable pour les fournisseurs de capitaux. On souhaite par conséquent avoir un taux de rentabilité interne supérieur au coût des capitaux pour accepter un investissement.

Copyright © 2011 Dunod.

Le taux de rentabilité interne se détermine de manière graphique ; il n'existe pas de formalisation générale de ce taux en fonction des paramètres de l'investissement.

Problèmes liés au calcul du *TRI*

Lorsque les bénéfices dégagés chaque année ne sont pas tous positifs, le calcul du *TRI* ne conduit pas nécessairement à une solution unique ou même simplement à une solution.

Exemples. Pour des projets d'une durée de 2 ans

– Si $I = 1\,000$ €, $B_1 = 5\,000$ € et $B_2 = -5\,000$ €, l'équation qui permet de déterminer le TRI est $-1\,000 + 5\,000(1+i)^{-1} - 5\,000(1+i)^{-2} = 0$. En multipliant cette équation par $(1+i)^2$, on trouve une équation du second degré qui admet deux solutions : $i_1 = 38\ \%$ et $i_2 = 262\ \%$.

– Si $I = 1\,000$ €, $B_1 = -5\,000$ € et $B_2 = 5\,000$ €, l'équation qui permet de déterminer le TRI est $-1\,000 - 5\,000(1+i)^{-1} + 5\,000(1+i)^{-2} = 0$. En multipliant cette équation par $(1+i)^2$, on trouve une équation du second degré qui admet deux solutions négatives, donc deux solutions qui ne peuvent être interprétées en taux de rentabilité interne.

Taux de rentabilité interne global (TRIG)

Le **taux de rentabilité interne global** est le taux qui annule la valeur actuelle nette globale.

Il est donné par l'équation :

$$VANG = -I + \frac{B_1(1+r)^{n-1} + B_2(1+r)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(1+r) + B_n + R}{(1+TRIG)^n} = 0$$

On a donc :

$$I = \frac{B_1(1+r)^{n-1} + B_2(1+r)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(1+r) + B_n + R}{(1+TRIG)^n}$$

Soit

$$(1+TRIG)^n = \frac{B_1(1+r)^{n-1} + B_2(1+r)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(1+r) + B_n + R}{I}$$

Copyright © 2011 Dunod.

et

$$TRIG = \left(\frac{B_1(1+r)^{n-1} + B_2(1+r)^{n-2} + \ldots + B_{n-1}(1+r) + B_n + R}{I} \right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

On retient le projet si son taux de rentabilité interne global est supérieur au coût moyen du capital.

Remarque : comme pour la VANG, le TRIG est un indicateur utile lorsque le coût du capital et le taux de placement sont différents.

c) Délai de récupération

Le **délai de récupération** est le moment à partir duquel un projet devient rentable à un taux d'actualisation fixé.

Un délai de récupération court est un élément positif dans l'analyse d'un projet d'investissement.

Dans le **cas particulier** où les bénéfices annuels envisagés sont identiques et où la valeur résiduelle est nulle, on a à la date du délai de récupération : $-I + B\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 0$

ainsi $B\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = I$ soit $1-(1+i)^{-n} = \dfrac{iI}{B}$

d'où $1 - \dfrac{iI}{B} = (1+i)^{-n}$

En utilisant le logarithme, on trouve :

$$-n\ln(1+i) = \ln\left(1 - \frac{iI}{B}\right) \text{ ainsi } \quad n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{iI}{B}\right)}{\ln(1+i)}$$

Dans le **cas général**, la méthode pour calculer le délai de récupération est d'évaluer une valeur actuelle nette chaque année pour déterminer la première année à partir de laquelle la valeur actuelle nette devient positive.

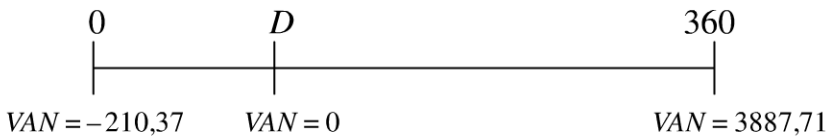
Exemple

Un investissement de 10 000 € permet des bénéfices de 3 000 € l'année 1 ; de 4 000 €, l'année 2 ; de 5 000 € l'année 3 ; et de 6 000 € l'année 4. On utilise un taux d'actualisation de 10 %.

Copyright © 2011 Dunod.

Année	*VAN*
1	$-10000+\frac{3000}{1{,}1}=-7272{,}73<0$
2	$-10000+\frac{3000}{1{,}1}+\frac{4000}{1{,}1^2}=-3966{,}94<0$
3	$-10000+\frac{3000}{1{,}1}+\frac{4000}{1{,}1^2}+\frac{5000}{1{,}1^3}=-210{,}37<0$
4	$-10000+\frac{3000}{1{,}1}+\frac{4000}{1{,}1^2}+\frac{5000}{1{,}1^3}+\frac{6000}{1{,}1^4}=3887{,}71>0$

Le délai de récupération correspond donc à une date pendant l'année 3. À cette date, on a une valeur actuelle nette nulle. La situation se schématise ainsi :



En supposant une linéarité dans les écarts entre les valeurs :

$$\frac{D-0}{0-(-210{,}37)}=\frac{360-0}{3\,887{,}71-(-210{,}37)}$$

ainsi $D=\dfrac{360\times 210{,}37}{3\,887{,}71+210{,}37}=18{,}41$ jours

Le délai de récupération est donc de 3 ans et 19 jours.

On généralise cet exemple, en notant V_k la dernière valeur actuelle nette négative, et V_{k+1} la première valeur actuelle nette positive, le **délai de récupération** est de ***k* ans et *j* jours** où $\boxed{j=-\dfrac{360\times V_k}{V_{k+1}-V_k}}$

Remarque : il est possible de calculer un délai de récupération non actualisé ; celui-ci est moins pertinent car il ne prend pas en compte le paramètre de risque lié à des estimations de gains à venir.

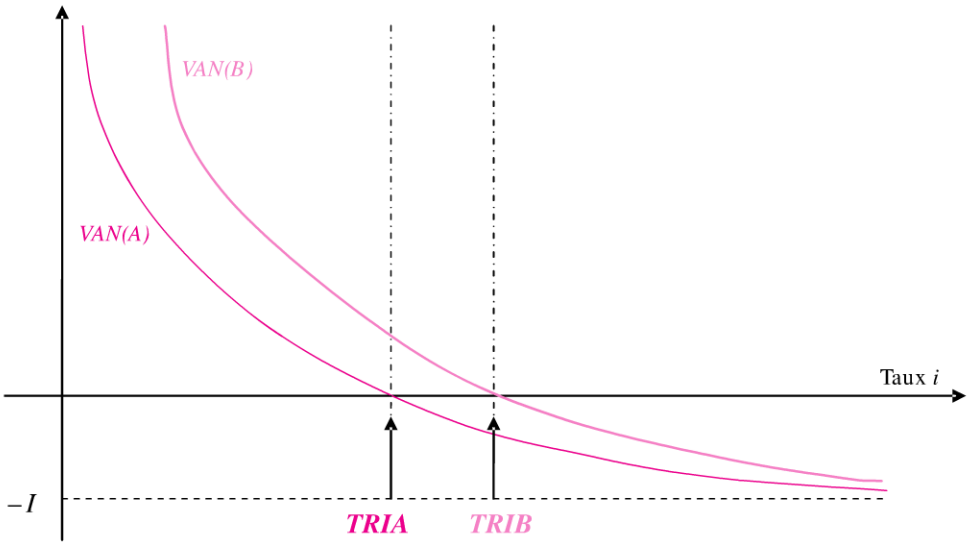
Copyright © 2011 Dunod.

5.2 COMPARAISON DE DEUX PROJETS D'INVESTISSEMENT

a) Pour des projets de tailles et de durées identiques

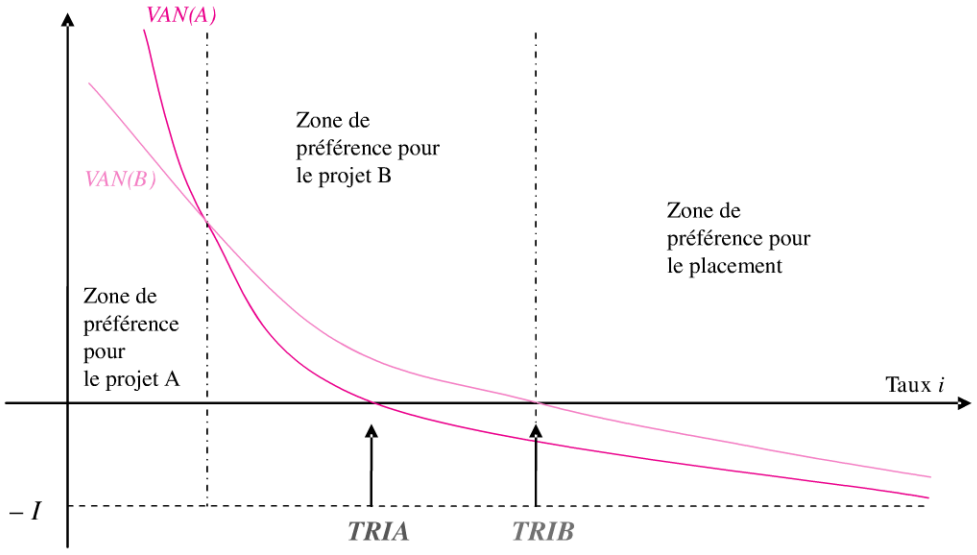
Entre deux projets d'investissement, on préférera celui qui rapporte le plus et le plus vite. Pour un taux d'actualisation fixé, on retiendra celui qui a la valeur actuelle nette la plus grande, celui qui a le délai de récupération le plus court et celui qui a le taux de rentabilité interne le plus important.

Considérons les deux courbes suivantes :



Le projet B est meilleur que le projet A car on a $VAN(B) > VAN(A)$, quel que soit le taux considéré et $TRI(A) < TRI(B)$.

Entre deux projets, les critères de valeur actuelle nette et de taux de rentabilité interne ne sont pas toujours concordants. Considérons l'exemple graphique suivant :



Copyright © 2011 Dunod.

On a $TRI(A) < TRI(B)$ et pour certaines valeurs de i : $VAN(B) < VAN(A)$; les deux critères ne sont donc pas concordants. On observe trois zones dans ce graphique :

– Si le taux d'actualisation est inférieur à un taux égalisant les valeurs actuelles nettes des deux projets, la préférence est pour le projet A.

– Si le taux d'actualisation est compris entre le taux égalisant les valeurs actuelles nettes des deux projets et le taux de rentabilité interne du projet B alors la préférence est pour le projet B.

– Au-delà du taux de rentabilité interne du projet B, la préférence est pour le placement.

Le point d'intersection des deux courbes est appelé **point de Fisher**.

➤ Quel critère doit-on retenir ?

Si l'on dispose d'un taux d'actualisation pertinent, on ne retient que le critère de la valeur actuelle nette car le taux de rentabilité interne n'informe que sur la rentabilité éventuelle des projets.

Le taux de rentabilité interne est intéressant tout de même car il ne dépend que des données intrinsèques du projet et non du choix d'un taux d'actualisation. Ce paramètre pourra alors être considéré dans un second temps si l'on manque d'informations pour calculer un taux d'actualisation pertinent.

➤ Pourquoi les critères de VAN et de TRI sont-ils parfois discordants ?

La cause principale pour des projets de durées identiques est la répartition des bénéfices au fil des années. Une répartition très différente entre deux projets peut entraîner une discordance entre la *VAN* et le *TRI*.

b) Projets d'investissements différents

Pour comparer des projets d'investissements différents, on calcule **l'indice de profitabilité**. L'indice de profitabilité permet d'évaluer pour un euro investi quel projet rapporte le plus. On formalise le calcul de l'indice de profitabilité ainsi :

$$\Pi = \frac{VAN + I}{I}$$

Remarque : un projet n'est acceptable que si son indice de profitabilité est supérieur à 1.

Copyright © 2011 Dunod.

Exemple

Un projet A d'investissement 1 000 € a une valeur actuelle nette de 600 €. Un projet B d'investissement 3 000 € a une valeur actuelle nette de 800 €. Quel projet choisir ?

On calcule l'indice de profitabilité de chacun de ces projets :

$$\Pi_A = \frac{600 + 1\,000}{1\,000} = 1{,}6 \quad \text{et} \quad \Pi_B = \frac{3\,000 + 800}{3\,000} = 1{,}27$$

ainsi l'on a $\Pi_A > \Pi_B$, ce qui indique une préférence pour le projet A.

Indice de profitabilité global

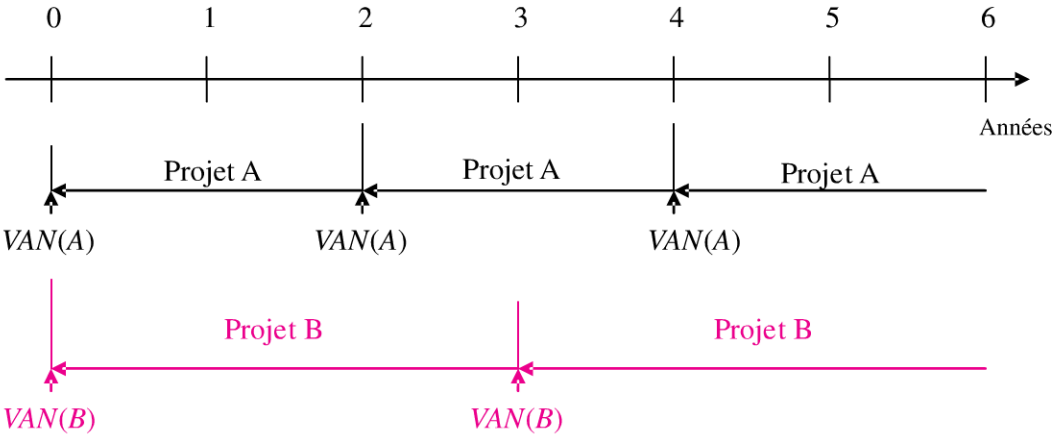
Un indice de profitabilité global peut aussi être calculé par la formule $\Pi^G = \dfrac{VANG + I}{I}$ lorsque $VAN \neq VANG$.

c) Projets de durées différentes

Il n'est pas possible de comparer des projets de durées différentes par une simple comparaison des valeurs actuelles nettes. En effet, la VAN n'a un sens que pour une durée déterminée, or un projet long est plus risqué qu'un projet court. On cherche par conséquent une **période commune** aux deux projets sur laquelle il est possible de les comparer.

Considérons le projet A d'une durée de 2 ans et de valeur actuelle nette 200 € au taux de 10 % et le projet B d'une durée de 3 ans et de valeur actuelle nette de 300 € au taux de 10 %. Quelle période choisir ?

Il n'est pas envisageable de considérer une période durant laquelle l'un des deux projets n'est pas complètement réalisé car les gains engendrés par un projet ne sont pas répartis régulièrement dans le temps. Ainsi un



Copyright © 2011 Dunod.

demi-projet n'implique pas nécessairement un demi-investissement et des demi-gains. On choisit au contraire de réaliser plusieurs fois de suite les projets A et B jusqu'à trouver une période commune utile à la comparaison. Dans cet exemple, la période commune est de 6 ans. En 6 ans on peut réaliser 3 fois le projet A ou 2 fois le projet B.

Comparer $3 \times VAN(A)$ et $2 \times VAN(B)$; cette comparaison n'a un sens que si l'on réalise 3 fois le projet A (ou 2 fois le projet B) simultanément, or on envisage les projets successivement de manière à occuper une période commune de 6 ans.

La valeur actuelle nette est la valeur du projet au moment de l'investissement ; par conséquent il est nécessaire d'actualiser les valeurs actuelles nettes des projets qui ne commencent pas à la date 0. La comparaison doit donc se faire entre $VAN(A) + \frac{VAN(A)}{(1+i)^2} + \frac{VAN(A)}{(1+i)^4}$ et $VAN(B) + \frac{VAN(B)}{(1+i)^3}$. Numériquement, on a, au taux 10 % , $VAN(A) + \frac{VAN(A)}{(1+i)^2} + \frac{VAN(A)}{(1+i)^4} = 200 + \frac{200}{1,1^2} + \frac{200}{1,1^4} = 501,89$ € et $VAN(B) + \frac{VAN(B)}{(1+i)^3} = 300 + \frac{300}{1,1^3} = 525,39$ €.

Le projet B est donc plus intéressant que le projet A.

Comparer des projets de durées différentes

La méthode pour comparer des projets de durées différentes se schématise ainsi :

1. Recherche d'une période commune de comparaison.
2. Actualisation des valeurs actuelles nettes des projets successifs.
3. Comparaison des résultats.

Comment déterminer la période commune de comparaison ? Toute période multiple à la fois de la durée du projet 1 et de la durée du projet 2 est valable pour réaliser la comparaison. Cependant, pour la rapidité des calculs on préférera le **Plus Petit Commun Multiple** (PPCM) des deux périodes.

Cette méthode est-elle réaliste ? Si l'on considère trois projets de durées respectives 3 ans, 11 ans et 13 ans, la période commune de comparaison est de 429 ans. Cette durée n'est pas un horizon réaliste de prévision pour une entreprise ; elle n'est en réalité pertinente que lorsque la période commune n'excède pas 20 ans.

5.3 PRISE DE DÉCISION EN AVENIR INCERTAIN

La prévision des bénéfices à venir est liée à un environnement dont une entreprise ne maîtrise pas l'ensemble des paramètres. Généralement une entreprise envisage trois hypothèses de gains à venir ; une hypothèse

Copyright © 2011 Dunod.

pessimiste ; une hypothèse moyenne ; et une hypothèse optimiste. Pour un maximum de sécurité, un projet est retenu si l'hypothèse pessimiste permet une valeur actuelle nette positive à un taux d'actualisation fixé. Si l'hypothèse pessimiste ne permet pas une rentabilité du projet, celui-ci n'est pas nécessairement rejeté, le choix de réaliser ou non le projet dépend de la **prise de risque** envisageable pour la société.

En effet, généralement chacune des hypothèses n'est pas équiprobable, on peut estimer une probabilité associée à chacune d'entre elles et calculer une **valeur actuelle nette moyenne** et **l'écart type** de la valeur actuelle nette.

En probabilité, la formule de l'espérance d'une variable aléatoire est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$

la variance se détermine par la formule

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ avec } E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i$$

L'écart type est la racine carrée de la variance. L'espérance mesure une tendance centrale de la variable ; l'écart type mesure une tendance à la dispersion de la variable. L'importance de l'écart type est à relativiser par rapport à l'espérance par un calcul de coefficient de variation :

$$CV = \frac{\text{écart type}}{\text{espérance}}$$

Un projet est généralement retenu lorsque sa **valeur actuelle nette moyenne** est positive. La valeur actuelle nette moyenne se calcule à l'aide de l'espérance des gains à venir :

$$E(VAN) = E\left(-I + \frac{B_1}{1+i} + \frac{B_2}{(1+i)^2} + \frac{B_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+i)^n}\right)$$

Si les variables représentant les bénéfices d'une année à l'autre sont indépendantes alors la valeur actuelle nette moyenne se détermine par la formule :

$$E(VAN) = -I + \frac{E(B_1)}{1+i} + \frac{E(B_2)}{(1+i)^2} + \frac{E(B_3)}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{E(B_{n-1})}{(1+i)^{n-1}} + \frac{E(B_n) + E(R)}{(1+i)^n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

La variance de la valeur actuelle nette est :

$$V(VAN) = V\left(-I + \frac{B_1}{1+i} + \frac{B_2}{(1+i)^2} + \frac{B_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+i)^n}\right)$$

Si les variables des bénéfices sont indépendantes, alors

$$V(VAN) = \frac{V(B_1)}{(1+i)^2} + \frac{V(B_2)}{(1+i)^4} + \frac{V(B_3)}{(1+i)^6} + \ldots + \frac{V(B_{n-1})}{(1+i)^{2n-2}} + \frac{V(B_n + V(R)}{(1+i)^{2n}}$$

L'écart type de la valeur actuelle nette est la racine carrée de la variance :

$$\sigma(VAN) = \sqrt{V(VAN)}$$

Remarque : I n'est pas dans l'expression de la variance car I n'est pas une variable aléatoire mais une donnée du problème. Ainsi il n'y a pas d'incertitudes sur I et sa variance est nulle.

Exemple

Supposons un projet d'un investissement de 1 000 €, qui rapporte dans une hypothèse pessimiste 800 € dans un an, ou 1 500 € dans un an avec une hypothèse optimiste. L'hypothèse optimiste a 50 % de chance de se réaliser et l'on envisage un taux d'actualisation de 10 %. Que pensez-vous de ce projet ?

L'espérance du gain l'année 1 est $E(B_1) = 0{,}5 \times 800 + 0{,}5 \times 1\,500 = 1\,150$ €. La valeur actuelle nette moyenne à 10 % est donc $E(VAN) = -1\,000 + \frac{1\,150}{1{,}1} = 45{,}45$ €. Cet indicateur est positif, en moyenne le projet est rentable. La variance du gain l'année 1 est $V(B_1) = 0{,}5 \times 800^2 + 0{,}5 \times 1\,500^2 - 1\,150^2 = 122\,500$. La variance de la valeur actuelle nette est donc de $V(VAN) = \frac{122\,500}{1{,}1^2} = 101\,240$, ainsi l'écart type de la valeur actuelle nette est $\sigma(VAN) = \sqrt{101\,240} = 318{,}18$. Cet écart type est très important, il est plus grand que la moyenne comme l'indique le coefficient de variations : $CV = \frac{318{,}18}{45{,}45} = 7 > 1$. Le projet est donc très risqué.

Copyright © 2011 Dunod.

En pratique il n'est pas toujours envisageable d'attribuer une probabilité à un scénario. Selon le comportement de l'entreprise vis-à-vis du risque, elle peut utiliser différentes stratégies de prises de décision.

Les stratégies de prises de décision sont nombreuses en contexte incertain. Considérons deux projets d'investissement de même investissement et d'une durée de deux ans.

Le premier projet génère une perte de – 100 € la première année et un gain de 900 € la seconde année. Le second projet génère une perte de – 200 € la première année et un gain de 1 100 € la seconde année. Voici plusieurs stratégies classiques.

➤ La stratégie de Wald

L'entreprise privilégie le projet qui engendre une perte éventuelle minimale. Cette stratégie favorise le premier projet dont la perte, la première année, est plus faible que la perte du second projet.

Cette stratégie est une stratégie de sécurité.

➤ La stratégie du gain maximal

L'entreprise privilégie le projet qui réalise le gain éventuel le plus important. Le second projet serait choisi car son gain, la seconde année, est plus important que celui du projet 1.

Cette stratégie est plus risquée mais peut conduire à un projet éventuellement plus rentable.

➤ La stratégie du regret maximal minimal

L'entreprise évalue chaque année l'écart entre le meilleur des gains et le gain de chaque projet. Elle privilégie en fin de compte le projet qui a le plus petit regret maximal.

Projet	Année 1	Année 2	Écart année 1	Écart année 2	Regret maximal
1	– 100 €	900 €	– 100–(–100)=0 €	1100 – 900 = 300 €	300 €
2	– 200 €	1 100 €	–100–(–200)=100 €	1100 – 1100 = 0 €	100 €

Le projet 2 est donc privilégié avec cette stratégie.

➤ La stratégie de Laplace

L'entreprise privilégie le projet dont la moyenne arithmétique des gains est la plus élevée. Pour le projet 1 la moyenne est de $\frac{-100+900}{2} = 400$ € et pour le projet 2 la moyenne est de $\frac{-200+1\,100}{2} = 450$ €.

Le projet 2 est donc privilégié avec cette stratégie.

Copyright © 2011 Dunod.

POINTS CLEFS

➤ Critères d'aide à la décision :

Éléments	Interprétation	Critère de choix
Valeur actuelle nette	Mesure de la rentabilité d'un projet relativement à un taux d'actualisation	$VAN > 0$
Taux de rentabilité interne	Informe du taux d'actualisation maximal acceptable pour envisager le projet	$TRI >$ Coût du capital
Indice de profitabilité	Mesure la rentabilité d'un projet pour un euro investi	$\Pi > 1$
Délai de récupération	Indique la date à partir de laquelle le projet commence à être rentable	Délai de récupération minimal

➤ Formules :

– Valeur actuelle nette :

$$VAN = -I + \frac{B_1}{1+i} + \frac{B_2}{(1+i)^2} + \frac{B_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+i)^n}$$

– Taux de rentabilité interne :

$$-I + \frac{B_1}{1+TRI} + \frac{B_2}{(1+TRI)^2} + \frac{B_3}{(1+TRI)^3} + \ldots + \frac{B_{n-1}}{(1+TRI)^{n-1}} + \frac{B_n + R}{(1+TRI)^n} = 0$$

– Indice de profitabilité :

$$\pi = -\frac{VAN + I}{I}$$

– Délai de récupération : k années et j jours où

$$j = -\frac{360 \times V_k}{V_{k+1} - V_k}$$

➤ Si le taux de réinvestissement n'est pas le coût du capital, les formules précédentes se calculent de manière globale en actualisant la valeur acquise au taux de réinvestissement des gains.

➤ Comparaison de deux projets :

Projets	Critères de choix
Projets de même durée et de même investissement	En priorité la *VAN* sinon le *TRI*
Projets d'investissements différents	L'indice de profitabilité
Projets de durées différentes	La valeur actuelle nette actualisée pour une succession de projets identiques déterminés sur une période commune

Copyright © 2011 Dunod.

➤ En avenir incertain :

– Si l'on connaît les probabilités de réalisation des différents scénarios, on calcule la valeur actuelle nette moyenne et son écart type par les formules :

$$E(VAN) = -I + \frac{E(B_1)}{1+i} + \frac{E(B_2)}{(1+i)^2} + \frac{E(B_3)}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{E(B_{n-1})}{(1+i)^{n-1}} + \frac{E(B_n) + E(R)}{(1+i)^n}$$

$$\text{et } V(VAN) = \frac{V(B_1)}{(1+i)^2} + \frac{V(B_2)}{(1+i)^4} + \frac{V(B_3)}{(1+i)^6} + \ldots + \frac{V(B_{n-1})}{(1+i)^{2n-2}} + \frac{V(B_n) + V(R)}{(1+i)^{2n}}$$

puis $\sigma(VAN) = \sqrt{V(VAN)}$

– Si ces probabilités ne sont pas connues, on peut développer des stratégies plus ou moins risquées comme la stratégie de Wald, la stratégie du gain maximal, la stratégie du regret maximal minimal ou la stratégie de Laplace.

EXERCICES

5.1 Critères de choix

On considère un projet d'une durée de 4 ans et d'investissement de 10 000 € qui génère des bénéfices de 3 000 € l'année 1 ; de 5 000 € l'année 2 ; de 3 000 € l'année 3 ; et de 4 000 € l'année 4. Sa valeur résiduelle est nulle.

a) Calculer la valeur actuelle nette de cet investissement au taux de 10 %.

b) Déterminer le taux de rentabilité interne de cet investissement.

c) Calculer le délai de récupération de cet investissement au taux de 10 %.

d) Corriger le calcul de la valeur actuelle nette si l'inflation est de 2 % par an.

5.2 Comparaison avec un placement

On considère un investissement de 1 000 € qui rapporte 200 € par an pendant 6 ans. Sa valeur résiduelle est nulle.

a) Calculer la valeur actuelle nette de cet emprunt au taux de 5 %. Commenter cette valeur.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Calculer le gain réalisé par un placement sur 6 ans au taux de 5 %.

c) Calculer le gain réalisé par l'investissement au bout des 6 ans au taux de 5 %. Ce résultat est-il cohérent avec le calcul de la valeur actuelle nette ?

5.3 Taux de réinvestissement

On considère un investissement de 1 000 € qui rapporte 200 € par an pendant 5 ans. Sa valeur résiduelle est de 100 €.

a) Quel coût du capital ne doit-t-on pas dépasser ?

b) Quel est le taux de réinvestissement des gains minimaux si le taux d'actualisation est de 8 % ?

c) Déterminer le taux de rentabilité interne global si le taux de réinvestissement est de 20 %.

5.4 Comparaison des deux projets

On cherche à comparer deux projets d'une durée de 4 ans, d'investissement 1 000 € et de valeur résiduelle nulle.

Le projet A rapporte 500 € par an et le projet B rapporte 800 € l'année 1 ; 200 € l'année 2 ; 100 € l'année 3 et 900 € l'année 4.

a) Au taux d'actualisation de 10 %, quel projet choisir ?

b) Calculer le taux de rentabilité interne des deux projets.

c) Commenter les résultats obtenus.

5.5 Investissements différents

Un premier projet d'investissement de 1 000 € rapporte 500 € par an pendant 5 ans. Un second projet de 10 000 € rapporte 5 000 € par an pendant 5 ans. Au taux de 5 %, quel projet vous semble le plus intéressant ?

5.6 Durées différentes

Un premier projet d'une durée de 13 ans a pour valeur actuelle nette 1 100 € au taux de 7 % et un second projet d'une durée de 11 ans a pour valeur actuelle nette 1 000 € au taux de 7 %. Quel projet vous semble favorable ?

5.7 Scénarios pour un projet

Un projet d'investissement de 10 000 € d'une durée de 4 ans peut être envisagé sous trois scénarios :

Copyright © 2011 Dunod.

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Scénario optimiste	– 4 000 €	5 000 €	7 000 €	15 000 €
Scénario moyen	– 5 000 €	3 000 €	6 000 €	10 000 €
Scénario pessimiste	– 6 000 €	1 000 €	5 000 €	5 000 €

Le scénario pessimiste a 20 % de chance de se produire ; le scénario moyen a 40 % de chance de se produire ; le scénario optimiste a 40 % de chance de se produire.

Déterminer la valeur actuelle nette moyenne à 8 % et son écart type. Commenter les résultats.

5.8 Stratégies de choix

On cherche à comparer trois projets ayant le même investissement et une durée de 4 ans. Voici les gains envisagés chaque année :

Projet	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
A	– 400 €	600 €	800 €	1 000 €
B	– 700 €	800 €	1 000 €	1 400 €
C	– 800 €	800 €	800 €	1 500 €

Quel projet va-t-on retenir selon les stratégies de Wald, du gain maximal, du regret minimal et de Laplace ?

SOLUTIONS

Exercice 5.1

a) La valeur actuelle nette est donnée par :

$$VAN = -10\,000 + \frac{3\,000}{1,1} + \frac{5\,000}{1,1^2} + \frac{3\,000}{1,1^3}\frac{4\,000}{1,1^4} = 1\,845,5 \text{ €}$$

$$> 0$$

Le projet est donc rentable.

b) Le taux de rentabilité interne se détermine graphiquement par :

$$-10\,000 + \frac{3\,000}{1+i} + \frac{5\,000}{(1+i)^2} + \frac{3\,000}{(1+i)^3} + \frac{4\,000}{(1+i)^4} = 0$$

On trouve TRI = 18,11 %.

Copyright © 2011 Dunod.

c) Calculons la valeur actuelle nette au taux 10 % chaque année :

Année 1 : $VAN = -10\,000 + \dfrac{3\,000}{1,1} = -7\,272,73 < 0$

Année 2 : $VAN = -10\,000 + \dfrac{3\,000}{1,1} + \dfrac{5\,000}{1,1^2} = -3\,140,5 < 0$

Année 3 :

$$VAN = -10\,000 + \frac{3\,000}{1,1} + \frac{5\,000}{1,1^2} + \frac{3\,000}{1,1^3} = -886,55 < 0$$

Année 4 :

$$VAN = -10\,000 + \frac{3\,000}{1,1} + \frac{5\,000}{1,1^2} + \frac{3\,000}{1,1^3} + \frac{4\,000}{1,1^4} = 1\,845,5 < 0$$

Le délai de récupération est donc compris entre 3 ans et 4 ans. Le nombre de jours est de :

$$j = -\frac{360 \times V_k}{V_{k+1} - V_k} = -\frac{360 \times (886,55)}{1\,845,5 - (-886,55)} = 116,82 \text{ jours.}$$

Le délai de récupération est donc de 3 ans et 117 jours.

d) Si le taux d'inflation est de 2 %, le taux d'actualisation déflaté est $1,1 \times 1,02 - 1 = 12,2$ %. Ainsi la valeur actuelle nette corrigée est de

$$VAN = -10\,000 + \frac{3\,000}{1,122} + \frac{5\,000}{1,122^2} + \frac{3\,000}{1,122^3} + \frac{4\,000}{1,122^4}$$

$$= 1\,293,5 \text{ €} > 0.$$

Exercice 5.2

a) Les gains sont constants chaque année, il est donc possible d'utiliser la formule simplifiée : $VAN = -1\,000 + 200\dfrac{1 - 1,05^{-6}}{0,05} = 15,14 \text{ €} > 0.$

Le projet est donc rentable au taux 5 %. Il est *a priori* plus intéressant qu'un placement sur 6 ans au taux 5 %.

b) Le gain réalisé par un placement est le montant des intérêts sur la durée du placement : $1\,000 \times 1,05^6 - 1\,000 = 340,10$ €.

c) L'erreur serait de calculer le gain brut : $6 \times 200 - 1\,000 = 200$ € qui est inférieur au gain du placement et contredit le critère de la valeur actuelle nette. On suppose au contraire que les gains réalisés par l'investissement sont placés au taux annuel de 5 %. La valeur acquise des bénéfices est donc de $200 \times 1,05^5 + 200 \times 1,05^4 + 200 \times 1,05^3 + 200 \times 1,05^2 + 200 \times 1,05 + 200 = 1\,360,38$ €. Le gain réalisé par l'investissement au bout des 6 ans est donc de $1\,360,38 - 1\,000 = 360,38$ €.

Copyright © 2011 Dunod.

Cette valeur est supérieure à celle du placement, ce qui concorde avec le critère de la valeur actuelle nette positive.

Exercice 5.3

a) On cherche dans cette question à déterminer le taux de rentabilité interne. Il est donné par la formule :

$$0 = -1\,000 + 200\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} + \frac{100}{(1+i)^5}$$

Après résolution graphique on trouve $TRI = 3{,}07\ \%$.

b) Le taux de réinvestissement minimal est le taux r pour lequel la valeur actuelle nette globale est positive :

$$VANG = -1\,000 + 1{,}08^{-5}\left(200\frac{(1+r)^5-1}{r} + 100\right) > 0$$

Cette formule est obtenue en utilisant la valeur acquise d'un versement constant au taux r. Cette inéquation ne peut se résoudre que graphiquement, ainsi l'on trouve $r > 15{,}78\ \%$. Si le coût du capital est de 8 %, le projet n'est rentable que si le taux de réinvestissement des bénéfices du projet est supérieur à 15,78 %.

c) Le taux de rentabilité interne global i pour un taux de réinvestissement de 20 % est donné par :

$$VANG = -1\,000 + (1+i)^{-5}\left(200\frac{(1{,}2)^5-1}{0{,}2} + 100\right) = 0$$

Ainsi $(1+i)^{-5}\left(200\dfrac{(1{,}2)^5-1}{0{,}2} + 100\right) = 1\,000$

donc $(1+i)^{-5} = \dfrac{1\,000}{200\dfrac{(1{,}2)^5-1}{0{,}2} + 100} = 0{,}629596$

Par conséquent $1 + i = 0{,}629596^{-\frac{1}{5}}$ et $i = 9{,}70\ \%$

Exercice 5.4

a) Au taux d'actualisation 10 %, le calcul de la valeur actuelle nette permet de choisir un des deux projets.

– Pour le projet A :

$$VAN(A) = -1\,000 + 500\frac{1-1{,}1^{-4}}{0{,}1} = 584{,}93\ €$$

Copyright © 2011 Dunod.

– Pour le projet B :

$$VAN(B) = -1\,000 + \frac{800}{1,1} + \frac{200}{1,1^2} + \frac{100}{1,1^3} + \frac{900}{1,1^4} = 582,41 \text{ €}$$

La valeur actuelle nette du projet A est supérieure à celle du projet B. Le projet A est donc préférable au taux 10 %.

b) Le taux de rentabilité interne se détermine graphiquement dans les deux cas.

– Pour le projet A : $-1\,000 + 500\dfrac{1-(1+i)^{-5}}{i} = 0$

soit TRI(A) = 34,90 %.

– Pour le projet B :

$$-1\,000 + \frac{800}{1+i} + \frac{200}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3} + \frac{900}{(1+i)^4} = 0$$

soit TRI(B) = 35,95 %.

Le taux de rentabilité interne du projet B est supérieur à celui du projet A. Le projet B est donc préférable en considérant uniquement le critère du taux de rentabilité interne.

c) Les critères de valeur actuelle nette et de taux de rentabilité interne ne sont pas concordants au taux de 10 %. Pour choisir entre les deux projets, on donne la priorité au critère de valeur actuelle nette.

Exercice 5.5

Le calcul de la valeur actuelle nette indique pour le projet 1 :

$$VAN1 = -1\,000 + 500\frac{1-1,05^{-5}}{0,05} = 1\,164,74 \text{ €}$$

et pour le projet 2 :

$$VAN2 = -10\,000 + 5\,000\frac{1-1,05^{-5}}{0,05} = 11\,647,38 \text{ €}$$

Avec le seul critère de la valeur actuelle nette, le projet 2 semble plus intéressant. Cependant ces deux projets ne nécessitent pas le même investissement, le critère de l'indice de profitabilité est donc plus pertinent pour comparer ces projets. Pour le projet 1, l'indice de profitabilité est de :

$$\Pi_1 = \frac{1\,164,74 + 1\,000}{1\,000} = 2,16$$

Copyright © 2011 Dunod.

et pour le projet 2, l'indice de profitabilité est de :

$$\Pi_2 = \frac{11\,647{,}38 + 10\,000}{10\,000} = 2{,}16$$

On a $\Pi_1 = \Pi_2$, pour un euro investi les deux projets sont donc équivalents.

Exercice 5.6

La méthode pour comparer ces deux projets consiste à déterminer une période commune de comparaison. Le plus petit commun multiple de 11 et de 13 est $11 \times 13 = 143$ ans. Cette durée – bien qu'elle ne soit pas un horizon raisonnable de prévision pour une entreprise – va servir à comparer la réalisation de 11 fois le projet 1 et de 13 fois le projet 2. La valeur actuelle nette de 11 réalisations successives du projet 1 est de :

$$1\,100 + \frac{1\,100}{1{,}07^{13}} + \frac{1\,100}{1{,}07^{2\times13}} + \frac{1\,100}{1{,}07^{3\times13}} + \ldots + \frac{1\,100}{1{,}07^{10\times13}}$$
$$= 1\,880{,}11\ €$$

La valeur actuelle nette de 13 réalisations successives du projet 2 est de :

$$1\,000 + \frac{1\,000}{1{,}07^{11}} + \frac{1\,000}{1{,}07^{22}} + \ldots + \frac{1\,000}{1{,}07^{132}} = 1\,904{,}98\ €$$

Le projet 2 est donc préférable au projet 1 au taux d'actualisation de 7 %.

Exercice 5.7

Calculons dans un premier temps l'espérance et la variance du gain chaque année :

	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4
Espérance	– 4 800 €	3 400 €	6 200 €	11 000 €
Variance	560 000	2 240 000	560 000	14 000 000

Le mode de calcul est le suivant :

Pour l'espérance l'année 1 :

$$0{,}4 \times (-4\,000) + 0{,}4 \times (-5\,000) + 0{,}2(-6\,000) = -4\,800\ €$$

Pour la variance l'année 1 :

$$0{,}4 \times (-4\,000)^2 + 0{,}4 \times (-5\,000)^2 + 0{,}2 \times (-6\,000)^2 - (-4\,800)^2$$
$$= 560\,000\ €$$

Copyright © 2011 Dunod.

La **valeur actuelle nette moyenne** est donc :

$$VAN = -10\,000 + \frac{-4\,800}{1{,}08} + \frac{3\,400}{1{,}08^2} + \frac{6\,200}{1{,}08^3} + \frac{11\,000}{1{,}08^4}$$

$$= 1\,477{,}6\ €$$

Cette valeur est positive, le projet est donc rentable en moyenne.

La **variance** de la valeur actuelle nette est :

$$V(VAN) = \frac{560\,000}{1{,}08^2} + \frac{224\,000}{1{,}08^4} + \frac{560\,000}{1{,}08^6} + \frac{14\,000\,000}{1{,}08^8}$$

$$= 10\,043\,235{,}98$$

Ainsi **l'écart type** est de $\sqrt{10\,043\,235{,}98} = 3\,169{,}11$ €.

Cet écart type est important comparativement à la moyenne, le projet est donc en moyenne rentable mais très risqué.

Exercice 5.8

Selon la **stratégie de Wald** : on privilégie le **projet A** car sa perte maximale de 400 € est moins importante que celle des autres projets.

Selon la **stratégie du gain maximal** : on privilégie le **projet C** car son gain maximal de 1 500 € est supérieur à celui des autres projets.

Selon la **stratégie du regret minimal** :

Projet	Écart année 1	Écart année 2	Écart année 3	Écart année 4	Regret maximal
A	– 400 –(–400)=0	800 – 600 = 200	1 000–800 = 200	1 500–1 000 = 500	500 €
B	– 400 (– 700) = 300	800–800 = 0	1 000–1 000 = 0	1 500–1400 = 100	**300 €**
C	– 400 (– 800) = 400	800–800 = 0	1 000–800 = 200	1 500–1500 = 100	**400 €**

Le **projet B** est privilégié selon cette stratégie.

Selon la **stratégie de Laplace** :

$$\text{Moyenne du projet A} = \frac{-400 + 600 + 800 + 1\,000}{4} = 500\ €.$$

$$\text{Moyenne du projet B} = \frac{-700 + 800 + 1\,000 + 1\,400}{4} = 625\ €.$$

$$\text{Moyenne du projet C} = \frac{-800 + 800 + 800 + 1\,500}{4} = 575\ €.$$

Le **projet B** est privilégié.

Copyright © 2011 Dunod.

Il semblerait que la stratégie du regret maximal minimal et la stratégie de Laplace conduisent aux mêmes conclusions. Ce n'est pas toujours le cas ; en effet si l'on considère les gains de ces deux projets :

Projet 1	250 €	800 €	350 €
Projet 2	500 €	700 €	150 €

La moyenne des gains du projet 1 est de $\frac{250 + 800 + 350}{3} = 466{,}67$ €.

La moyenne des gains du projet 2 est de $\frac{500 + 700 + 150}{3} = 450$ €.

Ainsi le projet 1 est favorisé avec la stratégie de Laplace. L'écart maximal est de 250 € pour le projet 1 et l'écart maximal est de 200 € pour le projet 2, ainsi l'écart maximal est minimal pour le projet 2 et celui-ci est alors favorisé.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

CHAPITRE 6

Emprunts obligataires

OBJECTIFS

- ➤ Connaître le principe de fonctionnement d'un emprunt obligataire.
- ➤ Connaître les éléments de définition d'une obligation.
- ➤ Comprendre le contexte des marchés obligataires.
- ➤ Savoir calculer un taux de rendement actuariel.
- ➤ Calculer un coût d'emprunt pour une entreprise.
- ➤ Construire un tableau d'amortissement avec ou sans prime de remboursement.
- ➤ Connaître les facteurs de risque tels que la sensibilité et la duration.

PLAN

6.1 Principe de fonctionnement

6.2 Tableaux d'amortissement pour les obligations à taux fixe

6.3 Analyse du risque

Copyright © 2011 Dunod.

La différence essentielle entre les emprunts obligataires et les emprunts indivis est le nombre de prêteurs. À l'inverse des emprunts indivis, un emprunt obligataire concerne plusieurs prêteurs pour un unique emprunteur. Les emprunts obligataires se font sur les marchés financiers par une émission d'obligations. Juridiquement, une obligation est un titre de créance représentatif d'une part du capital prêté. L'intérêt de faire des emprunts obligataires pour une société est d'accéder, par le moyen terme des marchés financiers, à de plus grands volumes de capitaux. Pour le prêteur, l'intérêt réside dans la répartition du risque lié à l'emprunt entre plusieurs individus. Les émetteurs d'emprunts obligataires ne sont pas, par conséquent, des particuliers mais des entreprises privées et publiques, des collectivités ou des États.

6.1 PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

Une entreprise souhaite emprunter un capital K sur les marchés financiers, elle souhaite émettre cet emprunt sous forme de N obligations. La **valeur nominale** d'une obligation est $\frac{K}{N}$, elle représente la part de capital contenue dans l'obligation.

Le **taux nominal** est le taux qui permet de calculer les intérêts. Ce taux peut être fixe ou variable.

Un **coupon** est un paiement d'intérêts associé à une obligation à une date déterminée.

Exemple

Une obligation de 1 000 € remboursée dans 5 ans au taux fixe nominal de 5 % donne droit à un coupon annuel de $0{,}05 \times 1\,000 = 50$ €.

a) Émission et remboursement

Les modes de remboursement classiques sont – comme pour les emprunts indivis – le remboursement *in fine*, le remboursement par amortissements constants et le remboursement par annuités constantes.

Le marché obligataire étant concurrentiel, pour attirer les investisseurs une entreprise peut choisir d'émettre ses obligations **en dessous du pair** ; autrement dit elle émet ses obligations à une valeur inférieure à la valeur nominale. Il s'agit d'une prime à l'émission. Les intérêts sont, en revanche, calculés à partir de la valeur nominale. Un autre moyen d'attirer les investisseurs est de rembourser les obligations **au-dessus du pair** ; autrement dit de rembourser chaque obligation à une valeur supérieure à leur valeur nominale. On parle alors de prime de remboursement.

b) Durée de vie

Le marché obligataire est un marché à long terme. La durée de vie moyenne des obligations se situe autour de 10 ans pour l'ensemble des obligations, et de 15 ans pour les obligations d'État.

c) Valeur et cotation des obligations

Les obligations sont des titres négociables pendant leur durée de vie. La **cotation** d'une obligation se fait en pourcentage de sa valeur nominale et non en unité monétaire comme les actions. Cela rend plus facile la comparaison des obligations entre elles.

Copyright © 2011 Dunod.

La valeur d'une obligation est évaluée par la valeur actuelle de ses flux à venir. On actualise les flux à venir à un taux correspondant au risque de l'obligation.

Exemple

Une obligation de 100 €, de taux nominal 5 % est émise et remboursée au pair dans 5 ans. Le taux du marché passe à 8 % l'année 3. Quelle est la valeur de l'obligation cette année ?

Les flux de capitaux à venir sont de 5 € dans un an (l'année 4) et de 105 € dans deux ans (l'année 5). La valeur de l'obligation est donc de : $\frac{5}{1{,}08} + \frac{105}{1{,}08^2} = 94{,}65$ €.

Remarque : dans le calcul d'actualisation, on ne prend pas en compte le coupon couru l'année de l'évaluation.

Si le cours était passé à 3 %, la valeur de l'obligation serait de $\frac{5}{1{,}03} + \frac{105}{1{,}03^2} = 103{,}83$ €. On constate qu'une baisse des taux (par rapport au taux nominal) induit une hausse de la valeur de l'obligation et, inversement, une hausse des taux induit une baisse de la valeur de l'obligation.

d) Taux de rendement actuariel

Le **taux de rendement actuariel** est le taux qui permet d'égaliser la valeur d'émission et les valeurs actuelles des flux à venir engendrés par l'obligation.

En notant E la valeur d'émission, R la valeur de remboursement, n la durée de vie de l'obligation, N le nominal de l'obligation, t le taux nominal de l'obligation ; le taux de rendement actuariel i d'une obligation est exprimé par l'équation :

$$E = \frac{Nt}{(1+i)} + \frac{Nt}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{Nt}{(1+i)^{n-1}} + \frac{Nt+R}{(1+i)^n}$$

On reconnaît l'expression de la valeur actuelle d'une suite de versement constant, l'équation se résume ainsi à :

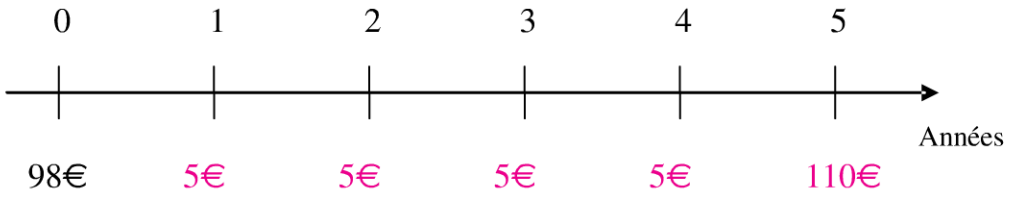
$$E = Nt\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

Remarque : cette équation est analogue à l'équation qui permet de calculer le taux de rentabilité interne pour un projet d'investissement.

Exemple

Une obligation de nominal 100 € au taux nominal de 5 % est émise à 98 € et remboursée dans 5 ans à 105 €. Les flux liés à l'obligation sont représentés ci-dessous :



Le coupon est de 5 € et la valeur de remboursement est de 105 €, ainsi la dernière année cette obligation va permettre de gagner $5 + 105 = 110$ €. Le **taux de rendement actuariel** i est donné par :

$$98 = \frac{5}{1+i} + \frac{5}{(1+i)^2} + \frac{5}{(1+i)^3} + \frac{5}{(1+i)^4} + \frac{110}{(1+i)^5}$$

On trouve graphiquement un taux de rendement actuariel de 6,36 %.

Remarque : Il n'est pas surprenant de trouver un taux supérieur au taux nominal car le taux actuariel prend en compte les primes à l'émission et les primes de remboursement qui induisent des plus-values plus importantes. Si l'obligation avait été émise et remboursée au pair (à la valeur nominale) alors le taux de rendement actuariel et le taux nominal seraient identiques.

Le taux de rendement actuariel représente le taux de rentabilité qu'obtiendrait un investisseur qui achèterait l'obligation le jour de son émission et la garderait jusqu'à son remboursement en réinvestissant les intérêts à ce taux actuariel.

Un outil analogue d'évaluation d'une obligation pendant sa durée de vie est le **taux de rendement à l'échéance**. Ce taux permet d'égaliser la valeur d'acquisition d'une obligation et les flux de capitaux à venir. La formule est analogue à la précédente, la valeur d'acquisition (V_a) et la durée de vie restante k sont les seuls paramètres qui diffèrent :

$$V_a = Nt\frac{1-(1+i)^{-k}}{i} + \frac{R}{(1+i)^k}$$

Copyright © 2011 Dunod.

Exemple

Une obligation de nominal 100 € cote 103 %. Son taux nominal est de 5 %, elle sera remboursée au pair dans 2 ans. La valeur d'échange de l'obligation est donc de $1{,}03 \times 100 = 103$ €. Le taux de rendement à l'échéance est donné par l'équation : $103 = \frac{5}{1+i} + \frac{105}{(1+i)^2}$. La solution de cette équation est 3,42 %.

On constate d'une autre manière qu'une hausse de la valeur de l'obligation induit aussi une baisse du taux de rendement à l'échéance par rapport au taux nominal. Si la valeur d'une obligation augmente, elle coûtera davantage, tout en ayant des gains à venir fixés par son taux nominal et sa valeur nominale. On comprend que sa rentabilité diminue.

Cas particulier. Les obligations zéro-coupon ne donnent pas droit à des intérêts. Elles sont émises en dessous de la valeur de remboursement. Seul l'écart entre l'émission et le remboursement permet d'envisager des gains.

Il est possible d'évaluer analytiquement le taux de rendement actuariel pour ce type d'obligations. Notons E la valeur d'émission, R la valeur de remboursement au bout de n années et i le taux de rendement actuariel. On a :

$$E = \frac{R}{(1+i)^n}, \text{ ainsi } (1+i)^n = \frac{R}{E} \text{ d'où } \boxed{i = \left(\frac{R}{E}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

e) Risques des obligations

Les principaux risques des obligations sont les suivants :

➤ Le risque de défaut de l'émetteur. Si l'émetteur de l'obligation dépose le bilan, le détenteur de son obligation prend le risque de ne pas être remboursé du capital de l'obligation.

➤ Le risque de liquidité. Un manque d'acheteurs sur un marché rend impossible la vente d'une obligation et contraint le détenteur de l'obligation à la conserver.

➤ Le risque de taux. Une hausse des taux du marché induit une baisse de la valeur de l'obligation et par conséquent une impossibilité de faire une plus-value en la revendant. Un moyen d'éviter le risque de taux est de conserver l'obligation jusqu'à son remboursement.

Remarque : les obligations sont des titres réputés moins risqués que les actions ou les autres produits financiers.

Copyright © 2011 Dunod.

f) Fiscalité des obligations

Pour un souscripteur, il est nécessaire de distinguer deux types de gains liés aux obligations.

Les **revenus** concernent les coupons et éventuellement la prime de remboursement. Ces revenus sont taxés à 30,1 % dont 12,1 % de prélèvements sociaux.

Les **plus-values** réalisées lors d'une vente de l'obligation avant le remboursement sont imposables à 30,1 % seulement si le total des plus-values sur l'année dépasse 25 730 €.

g) Coût actuariel

Le **coût actuariel** est le coût subi par l'émetteur de l'obligation en prenant en compte l'ensemble des frais liés à l'obligation.

On parle de coût actuariel net si, parmi ces frais, on compte les impôts ; l'on parle de coût actuariel brut sinon. Le coût actuariel est une donnée importante pour l'entreprise. Il s'agit de son taux réel d'emprunt. Notons V_E la somme dont dispose l'entreprise juste après l'émission et le paiement des frais d'émission, F_1, F_2, $\cdots$, F_n les flux d'argent liés au remboursement de l'emprunt. Le **coût actuariel** i de l'emprunt est donné par l'équation :

$$V_E = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Exemple

Soit un emprunt *in fine* de 1 000 obligations émises et remboursées au pair à 1 000 € au taux nominal 8 % dans 5 ans avec des frais à l'émission de 2 € par obligation et des frais de remboursement de 3 € par obligation. Le coût actuariel de cet emprunt (en ne prenant en compte que ces données) est fixé par :

$$1\,000(1\,000-2) = \frac{80\times 1\,000}{1+i} + \frac{80\times 1\,000}{(1+i)^2} + \frac{80\times 1\,000}{(1+i)^3} + \frac{80\times 1\,000}{(1+i)^4} + \frac{(1\,000+80+3)\times 1\,000}{(1+i)^5}$$

Le coût actuariel de cet emprunt est donc de 8,10 %.

Remarque : pour un emprunt *in fine*, le nombre d'obligations n'est pas un paramètre déterminant du coût actuariel de l'emprunt.

Copyright © 2011 Dunod.

h) Les obligations assimilables au Trésor

Les obligations assimilables au Trésor (OAT) sont les obligations émises par l'État français sur les marchés financiers.

L'État est le principal émetteur d'obligations. Les obligations d'État ont une durée de vie comprise entre 7 ans et 50 ans. Elles sont à taux fixe majoritairement et sont – jusqu'à présent – très bien évaluées par les agences de notation.

6.2 TABLEAUX D'AMORTISSEMENT POUR LES OBLIGATIONS À TAUX FIXE

La gestion d'un emprunt obligataire à taux fixe est programmable pour une entreprise. Les éléments de détermination du remboursement sont plus complexes que dans les emprunts indivis car il n'est possible de rembourser qu'un nombre entier d'obligations à chaque période. Par exemple, pour un emprunt de 3 000 obligations sur 7 ans, il n'est pas possible de réaliser un remboursement par amortissements parfaitement constant dans la mesure où 3 000 n'est pas divisible par 7. Les primes éventuelles de remboursement sont aussi à prendre en compte.

Les remboursements *in fine* sont les plus simples à gérer car l'ensemble des obligations est remboursé en fin d'emprunt. En revanche, les emprunts par amortissements constants et par annuités constantes sont à étudier spécifiquement.

Remarque : pour les remboursements par annuités constantes ou par amortissements constants, l'ordre de remboursement des obligations est généralement fixé par un tirage au sort. Ainsi un investisseur ne sait pas nécessairement quand son obligation sera remboursée au moment de l'achat.

a) Amortissement constant

Considérons un emprunt sur 7 ans de 3 000 obligations d'un nominal de 100 €, émises à 98 € au taux nominal de 5 % et remboursées à 105 € par amortissement constant.

Le nombre d'obligations remboursées annuellement ne peut être constant car $\frac{3\,000}{7} \approx 428{,}57$. On cherche donc à égaliser au mieux le nombre d'obligations remboursées par an. On rembourse alors alternativement 428 obligations ou 429 obligations chaque année. On teste les différentes possibilités.

Copyright © 2011 Dunod.

Nombre de remboursement de 428 obligations	Nombre de remboursement de 429 obligations	Nombre d'obligations remboursées au total
0	7	$0 \times 428 + 7 \times 429 = 3\,003$
1	6	$1 \times 428 + 6 \times 429 = 3\,002$
2	5	$2 \times 428 + 5 \times 429 = 3\,001$
3	4	$3 \times 428 + 74 \times 429 = 3\,000$
4	3	$4 \times 428 + 3 \times 429 = 2\,999$
5	2	$5 \times 428 + 2 \times 429 = 2\,998$
6	1	$6 \times 428 + 1 \times 429 = 2\,997$
7	0	$7 \times 428 + 0 \times 429 = 2\,996$

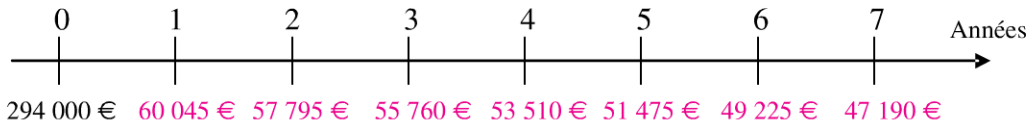
La seule possibilité pour rembourser 3 000 obligations est de rembourser 3 fois 428 obligations et 4 fois 429 obligations. Afin de bien répartir le remboursement des obligations, on commence par rembourser 429 obligations l'année 1.

La prime d'émission ne concerne pas les remboursements ; cependant il est utile de prendre en compte la prime de remboursement de 5 € par obligation.

Le tableau de remboursement se présente ainsi (voir page suivante).

L'amortissement est égal à 100 fois le nombre d'obligations remboursées. La prime est de 5 fois le nombre d'obligations remboursées. L'annuité est la somme des intérêts, de l'amortissement et de la prime.

À partir de ce tableau, on peut calculer le coût actuariel de l'emprunt pour l'entreprise :



L'année 0 l'entreprise reçoit des souscripteurs $3\,000 \times 98 = 294\,000$ €, elle rémunère ensuite les souscripteurs par les annuités calculées précédemment. Le coût de l'emprunt i est donné par :

$$294\,000 = \frac{60\,045}{1+i} + \frac{57\,795}{(1+i)^2} + \frac{55\,760}{(1+i)^3} + \frac{53\,510}{(1+i)^4} + \frac{51\,475}{(1+i)^5} + \frac{49\,225}{(1+i)^6} + \frac{47\,190}{(1+i)^7}$$

On trouve graphiquement un coût actuariel de l'emprunt de 6,78 %.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

Tableau de remboursement

Date	Capital restant	Intérêt	Amortissement	Nombre d'obligations	Prime	Annuité
1	300 000.00 €	15 000.00 €	42 900.00 €	429	2 145.00 €	60 045.00 €
2	257 100.00 €	12 855.00 €	42 800.00 €	428	2 140.00 €	57 795.00 €
3	214 300.00 €	10 715.00 €	42 900.00 €	429	2 145.00 €	55 760.00 €
4	171 400.00 €	8 570.00 €	42 800.00 €	428	2 140.00 €	53 510.00 €
5	128 600.00 €	6 430.00 €	42 900.00 €	429	2 145.00 €	51 475.00 €
6	85 700.00 €	4 285.00 €	42 800.00 €	428	2 140.00 €	49 225.00 €
7	42 900.00 €	2 145.00 €	42 900.00 €	429	2 145.00 €	47 190.00 €

2 Les projets d'investissement

Remarque : Le coût de l'emprunt est supérieur au taux nominal du fait de la prime d'émission et de la prime de remboursement.

b) Annuités constantes

Considérons le même emprunt de 3 000 obligations de nominal 100 € au taux nominal de 5 % sur 7 ans par annuités constantes. Les obligations sont émises à 98 €. Nous allons considérer le cas où elles sont remboursées au pair (sans prime de remboursement) et le cas où elles sont remboursées avec une prime de remboursement de 5 € par obligations.

Sans prime de remboursement

Calculons dans un premier temps l'annuité théorique de remboursement. Par application de la formule des annuités constantes sur un capital de 300 000 € au taux de 5 % sur 7 ans, on trouve une annuité de :

$$A = \frac{300\,000 \times 0{,}05}{1 - 1{,}05^{-7}} = 51\,845{,}95 \text{ €}$$

Considérons la ligne 1 du tableau d'amortissement : l'annuité théorique est de 51 845,95 €, les intérêts sont de 5 % du capital restant à rembourser à savoir $0{,}05 \times 300\,000 = 15\,000$ €. L'amortissement théorique est la différence entre l'annuité théorique et les intérêts. Ainsi l'amortissement théorique est de $51\,845{,}95 - 15\,000 = 36\,845{,}95$ €. Cet amortissement théorique permet de rembourser $\frac{36\,845{,}95}{100} = 368{,}46$ obligations. Or les obligations sont indivisibles. On doit donc arrondir cette valeur à l'entier le plus proche et ne rembourser en fait que 368 obligations. L'amortissement réel est donc de $368 \times 100 = 36\,800$ €. L'annuité réelle est ainsi de $36\,800 + 15\,000 = 51\,800$ €. On constate une différence entre l'annuité réelle et l'annuité théorique de $51\,800 - 51\,845{,}95 = -45{,}95$ €. On cherche donc à compenser cette lacune de remboursement en augmentant l'annuité suivante. L'annuité théorique, la seconde année, sera de $51\,845{,}95 + 45{,}95 = 51\,891{,}89$ €. Le tableau se complète alors en respectant les relations suivantes :

Annuité théorique l'année n
= Annuité théorique initiale – Différence de l'année $(n - 1)$

Capital restant l'année n
= Capital restant l'année $(n - 1)$ – Amortissement réel l'année $(n - 1)$

Amortissement théorique = Annuité théorique – Intérêts

$$\text{Nombre d'obligations} = \frac{\text{Amortissement théorique}}{\text{Nominal d'une obligation}} \text{ (arrondi à l'entier)}$$

Copyright © 2011 Dunod.

Amortissement réel = Nominal d'une obligation × Nombre d'obligations

Annuité réelle = Amortissement réel + Intérêts

Différence = Annuité réelle – Annuité théorique

Remarque 1 : Pour calculer l'annuité théorique, on n'utilise pas l'annuité théorique de l'année précédente mais l'annuité théorique initialement calculée par la formule des annuités constantes.

Le tableau est complété ainsi (voir page suivante).

Remarque 2 : la dernière année, le nombre d'obligations remboursées devait être 493 car $\frac{49\,296{,}89}{100} \approx 493$. On choisit de rembourser pourtant 494 obligations car il s'agit de la dernière année de remboursement et l'on souhaite voir l'ensemble des obligations remboursées. Un écart d'une ou deux obligations est possible en fin de tableau. Il faut alors corriger cet écart pour rembourser l'intégralité de l'emprunt.

Avec prime de remboursement

Le principe général de construction du tableau est le même sauf que l'annuité prend en compte non seulement les intérêts et l'amortissement mais aussi la prime de remboursement.

On calcule dans un premier temps un taux d'intérêt qui permettrait de trouver les mêmes intérêts mais avec une valeur de remboursement supérieure. Les intérêts la première année sont de $3\,000 \times 100 \times 0{,}05$. La valeur de remboursement des obligations est de 105 €, et le taux considéré i est donné par l'équation $3\,000 \times 100 \times 0{,}05 = 3\,000 \times 105 \times i$ ainsi :

$$i = \frac{100}{105} \times 0{,}05 = 0{,}047619$$

La formule générale pour calculer ce taux est :

$$i = \frac{\text{Nominal de l'obligation}}{\text{Valeur de remboursement de l'obligation}} \times \text{Taux nominal}$$

On peut ainsi calculer une annuité théorique avec ce taux qui prenne en compte la prime de remboursement sans modifier le calcul des intérêts. L'annuité théorique est de :

$$A = \frac{3\,000 \times 105 \times 0{,}047619}{1 - 1{,}047619^{-7}} = 53\,969{,}50\ €$$

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

Tableau d'amortissement

Date	Capital restant	Intérêt	Amortissement théorique	Amortissement	Nombre d'obligations	Annuité théorique	Annuité	Différence
1	300 000.00 €	15 000.00 €	36 845.95 €	36 800.00 €	368	51 845.95 €	51 800.00 €	– 45.95 €
2	263 200.00 €	13 160.00 €	38 731.89 €	38 700.00 €	387	51 891.89 €	51 860.00 €	14.05 €
3	224 500.00 €	11 225.00 €	40 606.89 €	40 600.00 €	406	51 831.89 €	51 825.00 €	– 20.95 €
4	183 900.00 €	9 195.00 €	42 671.89 €	42 700.00 €	427	51 866.89 €	51 895.00 €	49.05 €
5	141 200.00 €	7 060.00 €	44 736.89 €	44 700.00 €	447	51 796.89 €	51 760.00 €	– 85.95 €
6	96 500.00 €	4 825.00 €	47 106.89 €	47 100.00 €	471	51 931.89 €	51 925.00 €	79.05 €
7	49 400.00 €	2 470.00 €	49 296.89 €	49 400.00 €	494	51 766.89 €	51 870.00 €	24.05 €

On complète le tableau de la même manière que précédemment en incluant la prime.

La prime sert aux formules suivantes :

Annuité réelle = Amortissement réel + Intérêts + Prime

$$\text{Nombre d'obligations} = \frac{\text{(Amortissement + Prime) théorique}}{\text{Valeur de remboursement}} \text{ (arrondi à l'entier)}$$

Prime = Prime d'une obligation × Nombre d'obligations.

Le tableau est complété ainsi (voir page suivante).

6.3 ANALYSE DU RISQUE

Certains outils permettent d'évaluer le risque d'une obligation à taux fixe ; la duration et la sensibilité en sont les principaux.

a) Duration

La durée de vie d'une obligation est un paramètre majeur lors de l'évaluation du risque. Plus une durée de vie est importante, plus l'obligation – *a priori* – est risquée. Il est essentiel de prendre en compte aussi les flux intermédiaires liés à une obligation. Pour cela, on calcule la duration.

La duration est la moyenne arithmétique des durées pondérées par les flux actualisés au taux du marché.

Mathématiquement, la duration s'exprime ainsi :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} k \times F_k (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} F_k (1+i)^{-k}}$$

avec F_k le flux engendré par l'obligation dans une durée k et i le taux du marché.

Remarque : la duration peut se calculer pour une obligation comme pour un emprunt obligataire dans son ensemble.

Le calcul de la moyenne des flux non actualisé semblerait aussi mesurer une idée de délai de récupération et donc pourrait être un élément de mesure du risque. Si les flux ne sont pas actualisés, le taux n'est pas pris en compte et donc on ne prend pas en compte le risque de taux. Le calcul de duration prend en compte le taux, on a la relation suivante entre le taux et la duration :

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

Tableau d'amortissement

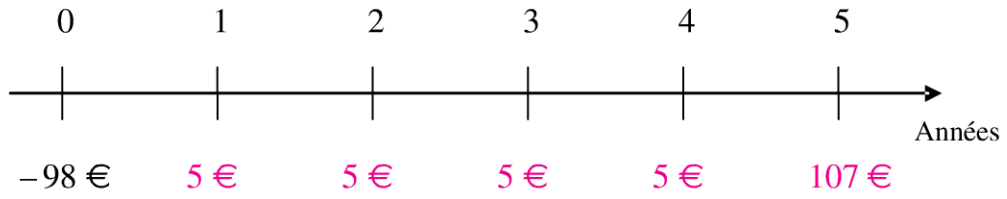
Date	Capital restant	Intérêt	Amortissement+ Prime théorique	Amortissement	Prime	Nombre d'obligations	Annuité théorique	Annuité	Différence
1	300 000.00 €	15 000.00 €	38 969.50 €	37 100.00 €	1 855.00 €	371	53 969.50 €	53 955.00 €	– 14.50 €
2	262 900.00 €	13 145.00 €	40 839.00 €	38 900.00 €	1 945.00 €	389	53 984.00 €	53 990.00 €	20.50 €
3	224 000.00 €	11 200.00 €	42 749.00 €	40 700.00 €	2 035.00 €	407	53 949.00 €	53 935.00 €	– 34.50 €
4	183 300.00 €	9 165.00 €	44 839.00 €	42 700.00 €	2 135.00 €	427	54 004.00 €	54 000.00 €	30.50 €
5	140 600.00 €	7 030.00 €	46 909.00 €	44 700.00 €	2 235.00 €	447	53 939.00 €	53 965.00 €	– 4.50 €
6	95 900.00 €	4 795.00 €	49 179.00 €	46 800.00 €	2 340.00 €	468	53 974.00 €	53 935.00 €	– 34.50 €
7	49 100.00 €	2 455.00 €	51 549.00 €	49 100.00 €	2 455.00 €	491	54 004.00 €	54 010.00 €	40.50 €

– Si le taux **augmente** alors la duration **diminue**.

– Si le taux **diminue** alors la duration **augmente**.

Exemple

Considérons une obligation de nominal 100 € au taux fixe nominal de 5 % émise à 98 € et remboursée dans 5 ans à 102 €. Les flux financiers liés à cette obligation sont les suivants :



Supposons que le taux du marché demeure constant à 5 % pendant toute la durée de vie de l'obligation. On calcule ainsi la duration l'année 0 :

Années	Flux	Flux actualisés	Flux actualisés × Durée
1	5 €	4,76 €	4,76
2	5 €	4,54 €	9,08
3	5 €	4,31 €	12,93
4	5 €	4,11 €	16,44
5	107 €	83,84 €	419,20
Total		**101,56 €**	**462,41**

$$D = \frac{462{,}41}{101{,}56} = 4{,}55 \text{ ans.}$$

La duration est toujours inférieure à la durée de vie restante de l'obligation. Plus la duration est grande plus l'obligation est risquée.

Si l'on anticipe une hausse des taux, le cours de l'obligation va baisser ; une faible duration est donc préférable. Le raisonnement est inverse dans le cas d'une baisse des taux.

Remarque : pour les obligations zéro-coupon, la duration est égale à la durée de vie puisqu'il n'y a pas de flux intermédiaires avant le remboursement.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Sensibilité

La sensibilité est la variation du cours d'une obligation lorsque le taux du marché obligataire augmente d'un point.

Mathématiquement, la sensibilité se calcule à partir de la duration selon la formule :

$$S = -\frac{D}{(1+i)}$$

Avec les données précédentes, on trouve :

$$S = -\frac{4{,}55}{1{,}05} = -4{,}33$$

Cela signifie que si le taux du marché augmente de 1 %, le cours de l'obligation va baisser de 4,33 % et inversement si le taux du marché baisse de 1 %, le cours de l'obligation va monter de 4,33 %.

La sensibilité mesure le degré d'exposition au risque de taux d'une obligation.

Remarque : Plus la duration est courte plus la valeur de la sensibilité est faible et plus la sensibilité est faible moins l'obligation est sensible aux variations de taux, et donc moins l'obligation est risquée.

POINTS CLEFS

- Une obligation à taux fixe est déterminée par sa valeur nominale, son taux nominal, sa valeur d'émission, sa valeur de remboursement et sa durée de vie.
- Un emprunt obligataire est réalisé sur les marchés financiers par l'émission de plusieurs obligations. Les modes de remboursement classiques sont le remboursement *in fine*, le remboursement par amortissement constant et le remboursement par annuités constantes.
- Le taux de rendement actuariel est le taux obtenu en égalisant la valeur d'acquisition d'une obligation et les flux à venir que celle-ci va engendrer par l'équation :

$$E = Nt\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

De façon analogue le taux de rendement à l'échéance est exprimé par :

$$V_a = Nt\frac{1 - (1+i)^{-k}}{i} + \frac{R}{(1+i)^k}$$

- Le coût actuariel est le taux de revient de l'emprunt pour l'entreprise émettrice d'obligations, il est donné par l'équation :

$$V_E = \frac{F_1}{1+i} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

- Dans les tableaux d'amortissement, les contraintes de ne rembourser qu'un nombre entier d'obligations et d'avoir une prime de remboursement induisent de nouvelles relations à respecter :
  - Annuité théorique l'année n = Annuité théorique initiale – Différence de l'année $n-1$.
  - Nombre d'obligations = $\frac{\text{(Amortissement + Prime) théorique}}{\text{Valeur de remboursement}}$ (arrondi à l'entier).
  - Amortissement réel = Nominal d'une obligation × Nombre d'obligations.
  - Prime = Prime d'une obligation × Nombre d'obligations.
  - Annuité réelle = Amortissement réel + Intérêts + Prime.
- Les risques liés aux obligations sont le risque de contrepartie, le risque de liquidité et le risque de taux. Le risque de taux est le risque de voir les taux du marché augmenter et d'induire, du fait de l'actualisation, une baisse de la valeur des obligations.
- La sensibilité et la duration sont des facteurs d'évaluation du risque de taux.
  - La duration est déterminée par $D = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k \times F_k(1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} F_k(1+i)^{-k}}$
  - La sensibilité est déterminée par $S = -\dfrac{D}{(1+i)}$

Copyright © 2011 Dunod.

EXERCICES

6.1 Valeur d'échange

Soit une obligation de nominal 1 000 €, au taux nominal 7 %, émise au pair et remboursée au pair *in fine* dans 8 ans. Une première personne achète cette obligation à l'émission pour la revendre à une seconde personne après paiement du 3e coupon quand le taux du marché est à 9 %. Cette seconde personne vend l'obligation après paiement du 6e coupon au moment où le taux du marché est à 5 %.

a) Représenter sur un axe les flux prévisibles liés à cette obligation.

b) Déterminer les valeurs d'échange et la cotation de l'obligation à chaque achat.

c) Quel est le taux de rendement à l'échéance au moment de chaque achat ?

d) Quel est le taux de rendement de l'opération effectuée par le second acheteur ?

6.2 Amortissement constant

Soit un emprunt de 1 000 obligations de nominal 100 € au taux nominal de 6 %, émises à 97 € et remboursées à 105 €. Cet emprunt est remboursé par amortissement constant en 6 ans.

a) Construire le tableau d'amortissement de cet emprunt.

b) Déterminer le coût actuariel de cet emprunt pour l'entreprise.

c) Déterminer le taux de rendement actuariel pour un souscripteur dont l'obligation est remboursée au premier tirage.

d) Même question pour une obligation remboursée au dernier tirage.

e) Calculer la sensibilité et la duration de cet emprunt au taux 6 %.

6.3 Évolution en fonction des taux

Soit une obligation à taux fixe 5 % et de valeur nominale 1 000 € émise et remboursée au pair dans 5 ans.

a) Calculer la valeur actuelle à l'émission, la duration et la sensibilité de l'obligation pour des taux sur le marché obligataire variant de 1 % à 10 %.

b) Représenter graphiquement l'évolution de la valeur actuelle, de la duration et de la sensibilité en fonction des taux sur le marché obligataire.

Copyright © 2011 Dunod.

6.4 Prise en compte des frais

Soit un emprunt obligataire de 10 000 obligations de nominal 500 €, émises à 499 € au taux nominal de 5 % et remboursée *in fine* dans 10 ans à 510 €. Pour l'entreprise, les frais d'émission sont de 5 € par obligation, les frais liés au paiement du coupon sont de 2 % du coupon, et les frais de remboursement sont de 4 € par obligation.

a) Déterminer le taux de rendement pour un souscripteur.

b) Déterminer le coût de revient pour l'emprunteur.

6.5 Annuités constantes

Une société émet un emprunt obligataire d'une durée de 5 ans, au taux de 8 %. Les 6 000 obligations émises ont une valeur nominale de 100 €. Le prix d'émission est fixé à 99 €. Le remboursement s'effectue au moyen d'annuités constantes, le prix de remboursement de chaque obligation étant de 105 €.

a) Dresser le tableau d'amortissement de cet emprunt.

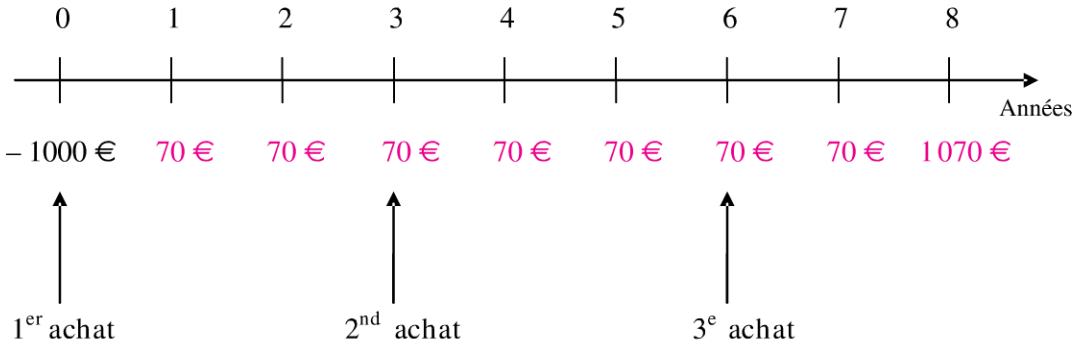
b) Calculer le coût actuariel de l'emprunt.

c) Déterminer le taux de rendement actuariel d'une obligation remboursée au dernier tirage avec prise en compte d'une fiscalité de 30,1 % de prélèvement sur les revenus.

SOLUTIONS

Exercice 6.1

a) L'obligation donne droit à des coupons annuels de 70 €. Les flux liés à cette obligation se représentent ainsi :



b) Au premier achat l'obligation est à sa valeur d'émission soit 1 000 €, il s'agit aussi de sa valeur nominale donc sa cotation est de 100 %. Au deuxième achat la valeur d'échange de l'obligation est la valeur actuelle au taux du marché de 9 % des flux à venir :

Copyright © 2011 Dunod.

$$\frac{70}{1{,}09}+\frac{70}{1{,}09^2}+\frac{70}{1{,}09^3}+\frac{70}{1{,}09^4}+\frac{1\,070}{1{,}09^5}$$

$$=70\frac{1-1{,}09^{-5}}{0{,}09}+\frac{1\,000}{1{,}09^5}=922{,}21\ €$$

Sa cotation est donc de $\frac{922{,}21}{1\,000}=92{,}22\ \%$. Au moment du troisième achat la valeur d'échange de l'obligation est de $\frac{70}{1{,}05}+\frac{1\,070}{1{,}05^2}=1\,037{,}19\ €$. Sa cotation est de $\frac{1\,037{,}19}{1\,000}=103{,}72\ \%$.

c) Au moment du premier achat le taux de rendement est de 7 %, il est identique au taux nominal car l'émission et le remboursement s'effectuent au pair. Au moment du deuxième achat de l'obligation à 922,21 €, le taux de rendement à l'échéance est donné par :

$$922{,}21=70\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}+\frac{1\,000}{(1+i)^5}$$

Par identification avec la question précédente, la solution de cette équation est de 9 % soit le taux du marché. De même, au moment du troisième achat le taux de rendement à l'échéance sera de 5 % soit le taux du marché. Ainsi, le taux de rendement à l'échéance est fixé par le taux du marché.

d) Le second acheteur acquiert l'obligation à 922,21 € pour la revendre 3 ans plus tard à 1 037,19 € en ayant gagné 3 coupons de 70 €. Le taux de rendement de son opération est donné par :

$$922{,}21=\frac{70}{1+i}+\frac{70}{(1+i)^2}+\frac{70+1\,037{,}19}{(1+i)^3}$$

La solution graphique de cette équation est 11,31 %. Ce taux de rendement, très important, est permis par la diminution du taux du marché entre l'année 3 et l'année 6.

Exercice 6.2

a) Pour rembourser cet emprunt par amortissements constants, on doit rembourser le même nombre d'obligations chaque année. Or $\frac{1\,000}{6}\simeq 166{,}67$, ainsi on remboursera soit 166 obligations soit 167 obligations. On remarque que $166\times 2+167\times 4=1\,000$ obligations.

Il sera nécessaire de rembourser 4 fois 167 obligations et 2 fois 166 obligations. Pour équilibrer les amortissements, on choisit par exemple de

Copyright © 2011 Dunod.

rembourser 167 obligations l'année 1 ; 166 obligations l'année 2 ; 167 l'année 3 ; 167 l'année 4 ; 166 l'année 5 ; et 167 l'année 6. La prime de remboursement est de 5 € par obligation. Le tableau de remboursement se construit de la façon suivante :

Date	Capital restant	Intérêts	Amortissements	Prime	Obligations	Annuité
1	100 000 €	6 000 €	16 700 €	835 €	167	23 535 €
2	83 300 €	4 998 €	16 600 €	830 €	166	22 428 €
3	66 700 €	4 002 €	16 700 €	835 €	167	21 537 €
4	50 000 €	3 000 €	16 700 €	835 €	167	20 535 €
5	33 300 €	1 998 €	16 600 €	830 €	166	19 428 €
6	16 700 €	1 002 €	16 700 €	835 €	167	18 537 €

b) Le coût actuariel de l'emprunt pour l'entreprise est donné par :

$$97 \times 1\,000 = \frac{25\,535}{1+i} + \frac{22\,428}{(1+i)^2} + \frac{21\,537}{(1+i)^3} + \frac{20\,535}{(1+i)^4} + \frac{19\,428}{(1+i)^5} + \frac{18\,537}{(1+i)^6}$$

Par résolution graphique, on trouve un coût d'emprunt de 8,39 %.

c) Une obligation remboursée au premier tirage est acquise à 97 € pour être remboursée à 105 € avec un coupon de 6 €. Le taux de rendement de cet investissement est donné par $97 = \frac{105+6}{1+i}$, ainsi $1+i = \frac{111}{97}$ et $\boxed{i = \frac{111}{97} - 1 \simeq 14{,}43\ \%}$

d) Une obligation remboursée au dernier tirage est acquise à 97 € pour être remboursée dans 6 ans à 105 € avec un coupon de 6 € chaque année. Le taux de rendement est donné par $97 = 6\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} + \frac{105}{(1+i)^6}$, on trouve graphiquement 7,33 %.

On remarque que le coût actuariel est compris entre les valeurs du taux de rendement au premier tirage (le plus élevé) et du taux de rendement au dernier tirage (le plus bas), il s'agit aussi d'un taux de rendement actuariel moyen pour l'ensemble de l'emprunt.

e) La duration est la moyenne des durées pondérées par les flux actualisés. On a ainsi :

$$D = \frac{1 \times 23\,535 \times 1{,}06^{-1} + 2 \times 22\,428 \times 1{,}06^{-2} + \cdots + 5 \times 19\,428 \times 1{,}06^{-5} + 6 \times 18\,537 \times 1{,}06^{-6}}{23\,535 \times 1{,}06^{-1} + 22\,428 \times 1{,}06^{-2} + \cdots + 19\,428 \times 1{,}06^{-5} + 18\,537 \times 1{,}6^{-6}}$$

Copyright © 2011 Dunod.

La sensibilité est de $S = -\dfrac{3{,}19}{1{,}06} = -3{,}01$

Ainsi, une hausse de 1 % des taux entraîne une baisse de 3,01 % de la valeur de l'emprunt.

Exercice 6.3

a) L'expression de la valeur actuelle à l'émission est :

$$V_a = 50\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} + \frac{1\,000}{(1+i)^5}$$

L'expression de la duration est :

$$D = \frac{1\times 50\times(1+i)^{-1} + 2\times 50\times(1+i)^{-2} + \cdots + 5\times 1\,050\times(1+i)^{-5}}{V_a}$$

La sensibilité est $S = -\dfrac{D}{(1+i)}$

Pour des taux d'actualisation variant entre 1 % et 10 %, on trouve les résultats suivants :

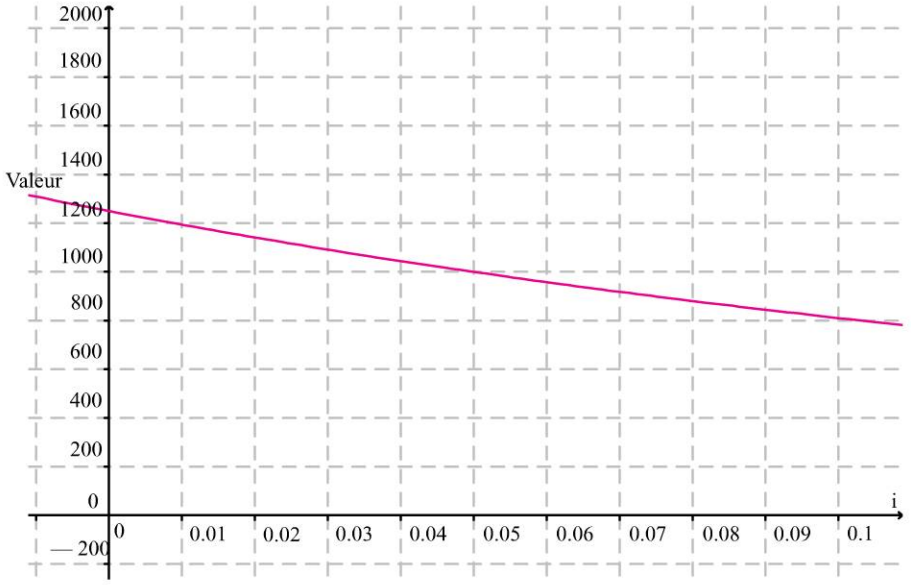
Taux d'actualisation	1 %	2 %	3 %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %	9 %	10 %
Valeur actuelle en euros	1 194,14	1141,40	1091,59	1044,52	1000	957,88	918	880,22	844,41	810,46
Duration en années	4 590	4 579	4 568	4 557	4 546	4 535	4 523	4 512	4,5	4 489
Sensibilité en valeurs négatives	4 544	4 489	4 435	4 382	4 329	4 278	4 227	4 177	4 128	4,08

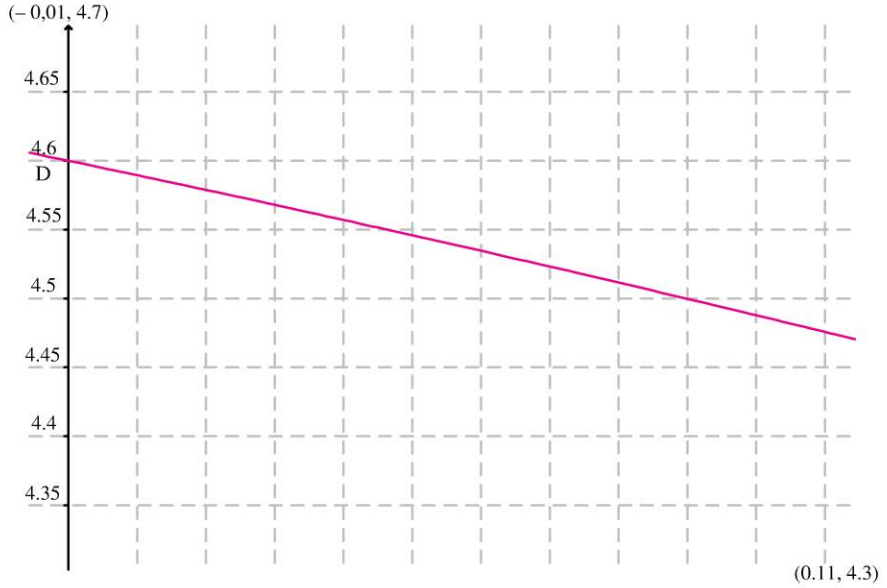
b) Représentation graphique de la valeur actuelle en fonction du taux d'actualisation (voir graphe 1 page suivante).

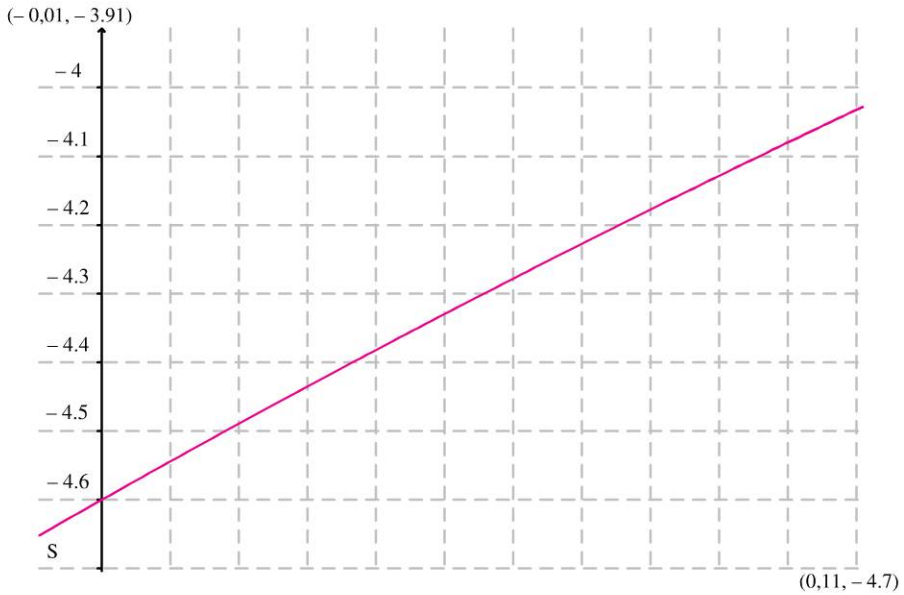
Représentation graphique de la duration en fonction du taux d'actualisation (voir graphe 2 page suivante).

Représentation graphique de la sensibilité en fonction du taux d'actualisation (voir graphe 3 page suivante).

Copyright © 2011 Dunod.







Copyright © 2011 Dunod.

Exercice 6.4

a) Le souscripteur achète l'obligation à 499 €, il reçoit 10 coupons de 25 € et son obligation est remboursée à 510 € dans 10 ans. Pour le souscripteur, le taux de rendement actuariel est exprimé par l'équation :

$$499 = 25\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} + \frac{510}{(1+i)^{10}}$$

Graphiquement on trouve un taux de rendement de 5,18 %.

Remarque : dans cet exercice le nombre d'obligations émises n'est pas un paramètre à prendre en compte dans la mesure où elles sont toutes remboursées au même moment.

b) L'émetteur va percevoir réellement $499 - 5 = 494$ € à l'émission, le coupon à payer est majoré de 2 % de frais ; ainsi chaque année le paiement du coupon reviendra à $25 \times 1{,}02 = 25{,}5$ €. Le remboursement est majoré de 4 €, ainsi le remboursement reviendra à $510 + 4 = 514$ €. Le coût de revient pour l'emprunteur est déterminé par :

$$494 = 25{,}5\frac{1-(1+i)^{-10}}{i} + \frac{514}{(1+i)^{10}}$$

Graphiquement on trouve un taux de revient de 5,48 %. Le coût de revient est plus important que le taux de rendement du souscripteur du fait des frais.

Exercice 6.5

a) Le taux à prendre en compte pour calculer les annuités avec prise en compte de la prime de remboursement en conservant les intérêts est fixé par $\frac{100}{105} \times 0{,}08 = 7{,}619$ %. L'annuité théorique de référence de cet emprunt est donc $\frac{6\,000 \times 105 \times 0{,}07619}{1-(1{,}07619)^{-5}} = 156\,206{,}52$ €. Les intérêts la première année sont de $6\,000 \times 100 \times 0{,}08 = 48\,000$ €. L'amortissement et la prime théorique représentent ainsi $156\,26{,}52 - 48\,000 = 108\,206{,}52$ €. Le nombre d'obligations à rembourser la première année est : $\frac{108\,206{,}52}{105} = 1\,030{,}54$. On choisit donc de rembourser 1 031 obligations qui représentent un amortissement de $1\,031 \times 100 = 103\,100$ € et une prime de $1\,031 \times 5 = 5\,155$ €. L'annuité réelle à payer est ainsi de $48\,000 + 103\,100 + 5\,155 = 156\,255$ €. On a donc remboursé $156\,255 - 156\,206{,}52 = 48{,}48$ €

Copyright © 2011 Dunod.

de trop par rapport à l'annuité de référence. On corrige cela en choisissant pour annuité théorique $156\,206{,}52 - 48{,}48 = 156\,158{,}04$ € pour la seconde année. On poursuit la construction du tableau d'amortissement sur ce mode (voir tableau page suivante).

b) Le coût actuariel de l'emprunt est fixé par :

$$99 \times 6\,000 = \frac{156\,255}{1+i} + \frac{156\,197}{(1+i)^2} + \frac{156\,145}{(1+i)^3} + \frac{156\,261}{(1+i)^4} + \frac{156\,166}{(1+i)^5}$$

Ainsi graphiquement on trouve un coût actuariel de 9,88 %.

c) La fiscalité de 30,1 % sur les revenus minore le coupon :

$8 \times (1 - 0{,}301) = 5{,}592$ €

et minore la prime :

$5 \times (1 - 0{,}301) = 3{,}495$ €.

Une obligation remboursée au dernier tirage permet un taux de rendement exprimé par :

$$99 = 5{,}592\frac{1-(1+i)^{-5}}{i} + \frac{103{,}495}{(1+i)^5}$$

Graphiquement on trouve un taux de rendement de 6,45 %.

Copyright © 2011 Dunod.

Copyright © 2011 Dunod.

Tableau d'amortissement

Date	Capital restant	Intérêts	(Amortissement +Prime) théorique	Amortissement	Prime	Nombre d'obligations	Annuités théoriques	Annuités réelles	Différence
1	600 000	48 000	108 206,52	103 100	5 155	1 031	156 206,52	156 255	+ 48,48
2	496 900	39 752	116 406,04	110 900	5 545	1 109	156 158,04	156 197	+ 38,96
3	386 000	30 880	125 287,56	119 300	5 965	1 193	156 167,56	156 145	– 22,56
4	266 700	21 336	134 893,08	128 500	6 425	1 285	156 229,08	156 261	+ 31,92
5	138 200	11 056	145 118,60	138 200	6 910	1 382	156 174,60	156 166	– 8,60

CHAPITRE 7

Valeur des actions

OBJECTIFS

- Utiliser la valeur actuelle pour estimer la valeur d'un titre.
- Connaître les cas particuliers de dividendes constants et de dividendes en progression géométrique.
- Calculer et utiliser le *PER*.
- Comprendre le modèle de Bates.
- Savoir calculer le délai de recouvrement d'un investissement.
- Calculer la rentabilité d'un titre.
- Évaluer les risques d'une action par un calcul de volatilité.
- Appréhender le lien entre un titre le marché par un calcul de covariance ou du coefficient β.

PLAN

7.1 Modes d'évaluation

7.2 Risque et rentabilité

Copyright © 2011 Dunod.

Du point de vue d'un investisseur, une action est un titre de propriété qui donne droit périodiquement à des dividendes. Ces dividendes sont distribués périodiquement et dépendent des bénéfices réalisés par la société.

Ce chapitre présente des moyens d'évaluer la valeur d'une action. Comme pour les projets d'investissement et les emprunts obligataires, la valeur d'une action dépend des flux à venir de capitaux qu'elle va engendrer. Cependant, à l'inverse des emprunts obligataires à taux fixe, ces flux ne sont pas déterminés au moment de l'achat d'un titre. Par conséquent la « valeur d'une action » est moins fiable que celle d'une obligation et dépend beaucoup des prévisions faites sur les bénéfices à venir de la société. C'est pourquoi il sera aussi utile d'évaluer le risque lié à l'achat d'un titre sur les marchés financiers.

7.1 MODES D'ÉVALUATION

La valeur d'une action est par convention la valeur d'échange de cette action à un moment donné. Il s'agit donc de son cours boursier. Pour se positionner sur un marché en acheteur ou en vendeur, il est utile d'évaluer une action sur sa « valeur réelle » pour savoir si sa valeur d'échange est surestimée, auquel cas il serait bon de vendre le titre, ou sous-estimée, auquel cas il serait bon d'acheter le titre.

a) Valeur actuelle

Par analogie avec les obligations, un calcul de valeur actuelle est un mode possible d'évaluation d'une action. Notons $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ les dividendes par action à venir à la date d'évaluation du titre. *A priori* on peut envisager une suite de dividendes infinie dans la mesure où rien ne permet de prédire la fin de l'activité d'une société.

➤ À quel taux actualiser ces dividendes ?

Le taux de rendement exigé par les actionnaires du secteur d'activité de la société est généralement utilisé, il permet d'évaluer l'entreprise dans son environnement.

La valeur actuelle de l'action est ainsi :

$$V = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+i)^n} + \ldots$$

Dans le cas particulier où les dividendes sont constants ; $D = D_1 = D_2 = \ldots = D_n = \ldots$ on retrouve la formule d'une **rente perpétuelle** :

$$V = \frac{D}{i}$$

Exemple

Considérons une action dont le dividende par action est estimé à 8 € et le taux de rendement exigé par les actionnaires de 12 %. La valeur de l'action, selon ce modèle, est de $V = \dfrac{8}{0,12} = 66,67$ €.

Une estimation des dividendes sur une durée infinie n'est pas fiable. On peut limiter les prévisions sur les dividendes à un horizon limité à n années. On doit alors connaître aussi une prévision du prix de vente du

Copyright © 2011 Dunod.

titre P dans n années. La valeur actuelle du titre – juste après paiement du dernier dividende – est ainsi de :

$$V = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n + P}{(1+i)^n}$$

Ce modèle est le modèle d'**Irving Fisher**.

Si les dividendes sont constants pendant la période d'observation alors on retrouve une formule similaire à la Valeur Actuelle Nette dans le cas des projets d'investissement à bénéfices constants :

$$V = D\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Exemple

Considérons une action dont les dividendes annuels par action seront de 8 € pendant 5 ans. Le prix de vente de l'action est estimé à 70 € dans 5 ans. Sa valeur actuelle est de $V = 8\frac{1-1{,}12^{-5}}{0{,}12} + \frac{70}{1{,}12^5} = 68{,}56$ € si le taux de rentabilité est de 12 %.

Lorsque les dividendes évoluent en progression géométrique de raison g, on a $D_1 = D$, $D_2 = (1+g)D$ et $D_n = (1+g)^{n-1}D$ ainsi la valeur actuelle de l'action est de $V = \frac{D}{1+i} + \frac{D(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{D(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n} + \frac{P}{(1+g)^n}$. On a alors

$$V = \frac{D}{1+i}\left(1 + \frac{(1+g)}{(1+i)} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right)$$

$$+\frac{P}{(1+g)^n} \text{ soit } V = \frac{D}{1+i}\left(\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1+g}{1+i}}\right) + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

On trouve ainsi $V = D\dfrac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + \dfrac{P}{(1+i)^n}$

Copyright © 2011 Dunod.

Si $i > g$ et qu'il n'est pas envisagé de revendre l'action. Cette formule se simplifie en faisant tendre n vers l'infini :

$$V = \frac{D}{i - g}$$

Ce modèle est le modèle de **Gordon** et **Shapiro**.

Exemple

Si une action permet un dividende de 8 € l'année 1 et une croissance de ses dividendes de 1 % par an, sa valeur actuelle au taux 5 % est de $\frac{8}{0{,}05 - 0{,}01} = 200$ €.

Remarque : l'hypothèse d'une croissance constante des dividendes est souvent trop simplificatrice. On peut complexifier la formule en envisageant plusieurs phases de croissances dans un projet.

b) Le *Price Earning Ratio* (*PER*)

Le ***PER (Price Earning Ratio)*** est le rapport du cours de l'action sur le bénéfice par action :

$$PER = \frac{\text{Cours de l'action}}{\text{Bénéfice net par action}}$$

Le *PER* indique le nombre de fois que le bénéfice est pris en compte dans le cours de l'action. Plus le *PER* est élevé, plus le cours de l'action est important par rapport au bénéfice. Le *PER* doit être comparé à une norme sur un secteur d'activité ; sa valeur seule n'a pas d'intérêts. Il peut être ainsi pertinent pour un investisseur d'acheter un titre lorsque le *PER* est en dessous de cette norme car cela indique que le cours de l'action est sous-évalué relativement au bénéfice et, inversement, il peut être intéressant de vendre lorsque le *PER* est au-dessus de cette norme.

Le modèle de **Bates** permet de prévoir les évolutions du *PER* d'un titre.

Ce modèle suppose plusieurs hypothèses :

– les bénéfices sont en croissance géométrique ;

– le taux de distribution est constant.

Par analogie avec le modèle de Gordon et Shapiro, notons g le taux de croissance des bénéfices et d le taux de distribution.

Copyright © 2011 Dunod.

Le **taux de distribution** est la part des bénéfices distribuée aux actionnaires sous forme de dividendes.

Notons D_k et B_k le dividende par action et le bénéfice par action l'année k.

Ainsi on a une année k :

$$d = \frac{D_k}{B_{k-1}}$$

Le dividende distribué l'année k est calculé sur le bénéfice réalisé l'année $k-1$. Les bénéfices sont en croissance géométrique, ainsi $B_k = (1+g)^k B$ où B est le bénéfice l'année 0. D'après le modèle d'Irving Fisher, la valeur d'une action est donnée par :

$$V = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n + P}{(1+i)^n}$$

or $D_k = dB_{k-1} = d(1+g)^{k-1}B$

Ainsi la valeur d'une action est :

$$V = \frac{dB}{(1+i)} + \frac{dB(1+g)}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{dB(1+g)^{n-1} + P}{(1+i)^n}$$

soit

$$\begin{aligned} V &= \frac{dB}{(1+i)}\left(1 + \frac{1+g}{1+i} + \ldots + \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n-1}\right) + \frac{P}{(1+i)^n} \\ &= dB\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + \frac{P}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

En supposant que le cours de l'action corresponde à la valeur de l'action, on a :

$$PER_0 = \frac{V}{B} \quad \text{et} \quad PER_n = \frac{P}{B_n} = \frac{P}{B(1+g)^n}$$

car P est le prix de revente l'année n. On a par conséquent en divisant l'égalité précédente par B :

$$\frac{V}{B} = d\frac{1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + \frac{P/B}{(1+i)^n}$$

Copyright © 2011 Dunod.

$$\text{et donc } PER_0 = d\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + \frac{PER_n(1+g)^n}{(1+i)^n}$$

$$\text{ainsi } PER_n = \left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n \left(PER_0 - d\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} \right)$$

$$\text{et } \boxed{PER_n = \left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n PER_0 - d\frac{\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n - 1}{i-g}}$$

Exemple

Le *PER* actuel d'une action est de 25. Les bénéfices progressent annuellement de 5 %, le taux de distribution est de 10 % et le taux de rendement exigé par les actionnaires est de 12 %. Selon le modèle de Bates, le *PER* dans 10 ans sera :

$$PER_{10} = \left(\frac{1{,}12}{1{,}05}\right)^{10} \times 25 - 0{,}1\frac{\left(\frac{1{,}12}{1{,}05}\right)^{10} - 1}{0{,}12 - 0{,}05} = 46{,}37$$

Remarque : si le taux de rendement exigé par les actionnaires est supérieur au taux de croissance des bénéfices, le *PER* augmentera ; autrement il diminuera.

Le **délai de recouvrement** est la durée minimale de conservation de l'action pour retrouver son investissement. Le délai de recouvrement correspond au délai de récupération pour les projets d'investissement.

Dans le cas particulier du modèle de Bates, il s'agit de l'année N pour laquelle :

$$V < dB\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^N}{i-g}$$

$$\text{ainsi } \frac{PER_0}{d}(i-g) < 1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^N$$

$$\text{soit } \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^N < 1 - \frac{PER_0}{d}(i-g)$$

Copyright © 2011 Dunod.

et $$N = \frac{\ln\left(1 - \frac{PER_0}{d}(i-g)\right)}{\ln\left(\frac{1+g}{1+i}\right)}$$

Le délai de recouvrement ne se calcule, dans ce modèle, que si $1 - \frac{PER_0}{d}(i-g) > 0$.

7.2 RISQUE ET RENTABILITÉ

a) Rentabilité et volatilité

La **rentabilité** d'un titre sur une période k est donnée par la formule suivante :

$$R_k = \frac{D_k + P_k - P_{k-1}}{P_k}$$

où D_k est le dividende de la période k, P_k et P_{k-1} sont les cours de l'action, respectivement en fin de période k et de période $k-1$.

Exemple

Une action voit son cours passer de 100 € à 105 € sur une période. Son dividende est de 2 € sur cette période. La rentabilité de cette action est donc de :

$$R = \frac{2 + 105 - 100}{100} = 7\ \%$$

La rentabilité moyenne sur n périodes se formalise par :

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k$$

Il ne faut pas confondre **rentabilité** et **rendement**. La rentabilité ne prend pas en compte la durée pendant laquelle une valeur progresse. Par exemple une action achetée 100 €, rapportant un dividende de 5 € dans un an et revendue 100 € dans 2 ans, aura une rentabilité de $\frac{100 + 5 - 100}{100} = 5\%$ alors que son rendement sera fixé par $100 = \frac{5}{1+i} + \frac{100}{(1+i)^2}$ soit un taux de rendement annuel de 2,53 %. Le rendement sur les 2 ans est ainsi de $1,0253^2 - 1 = 5,13\%$, ce qui est plus important que la rentabilité car on prend en compte ici le fait que le dividende est distribué l'année 1 et non en fin de placement.

Copyright © 2011 Dunod.

L'écart type des rentabilités mesure la dispersion des rentabilités. Par conséquent, l'écart type est une mesure de la volatilité d'un titre et donc de **son risque**.

L'écart type peut se calculer comme la racine carrée de la différence entre la moyenne des carrés et la moyenne au carré :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k\right)^2}$$

Exemple

Le cours d'un titre passe de 100 € l'année 0 à 105 € l'année 1 puis à 108 € l'année 2. Les dividendes distribués sont de 2 € chaque année.

La rentabilité l'année 1 est de 7 % ; la rentabilité l'année 2 est de $\frac{2 + 108 - 105}{105} = 4{,}76\ \%$. La rentabilité moyenne est donc de $\frac{0{,}0476 + 0{,}07}{2} = 5{,}88\ \%$. L'écart type est ainsi de $\sqrt{\frac{0{,}07^2 + 0{,}0476^2}{2} - 0{,}0588^2} = 1{,}12\ \%$.

Remarque : l'utilisation de l'écart type n'a de sens que si l'on suppose que la distribution des rentabilités suit approximativement une loi normale.

b) Lien entre un titre et le marché

Pour comprendre l'évolution d'un titre, il peut être utile de connaître son lien avec le marché. Est-ce que ce titre évolue dans le même sens que le marché ou en sens inverse ? Comment modéliser le lien entre le marché et le titre ? Le titre amplifie-t-il ou atténue-t-il les mouvements du marché ?

La **covariance** est une mesure du lien entre deux grandeurs.

Une covariance **positive** indique que des grandeurs évoluent dans le même sens. Une covariance **négative** indique que les grandeurs évoluent en sens contraire. Une covariance **nulle** indique que les grandeurs sont indépendantes.

On formalise ainsi la covariance entre un titre et le marché :

$$\text{cov(Titre, Marché)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k R_k^m - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k^m\right)$$

Copyright © 2011 Dunod.

où R_k et R_k^m sont respectivement la rentabilité du titre et la rentabilité du marché à la période k.

Le **coefficient de corrélation linéaire** mesure le lien et informe sur le degré d'alignement de l'ensemble des points dont les coordonnées sont la rentabilité du marché et la rentabilité du titre. Ce coefficient permet éventuellement de justifier une régression linéaire pour modéliser le lien entre la rentabilité d'un titre et la rentabilité du marché.

On formalise le coefficient de corrélation linéaire ainsi :

$$r = \frac{\text{cov(Titre, Marché)}}{\sigma_{\text{Titre}} \times \sigma_{\text{Marché}}}$$

Ce coefficient est compris entre -1 et 1.

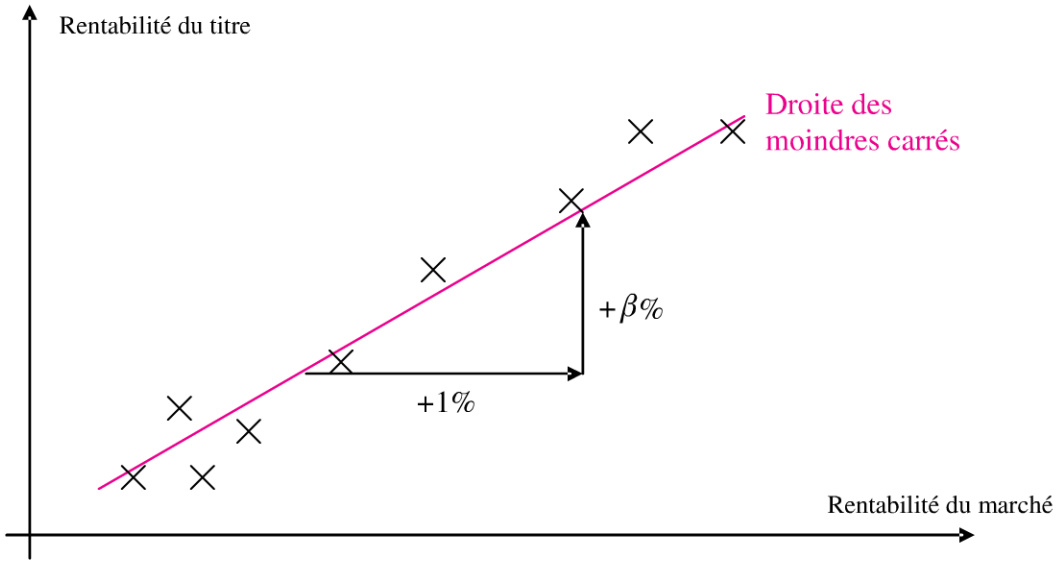
- Si $r = 1$, la corrélation est parfaite et positive, ainsi les rentabilités évoluent dans le même sens et les points sont alignés.
- Si $r = -1$, la corrélation est parfaite et négative, ainsi les rentabilités évoluent en sens contraire et les points sont alignés.
- Si $r = 0$, la corrélation est nulle, on ne constate aucun lien entre les deux variables.
- Si le coefficient de corrélation linéaire est proche de 1 ou de -1, on peut modéliser le lien entre les deux rentabilités par une droite.

La droite des moindres carrés est la droite passant au plus proche de tous les points.

En choisissant pour abscisse la rentabilité du marché et pour ordonnée la rentabilité du titre, l'équation de cette droite est $y = \beta x + b$ où $\beta = \dfrac{\text{cov(Titre, Marché)}}{\text{var(Marché)}}$ et $b = \overline{R} - \beta\overline{R_m}$. Le coefficient directeur de cette droite est un **coefficient d'amplification**. Selon cette modélisation, lorsque le marché évolue de +1 %, le titre va évoluer de $+\beta$ %.

Ainsi si $|\beta| > 1$, le titre amplifie les mouvements du marché et si $|\beta| < 1$, le titre atténue les mouvements du marché.

Copyright © 2011 Dunod.



Exemple

On considère le même titre que précédemment sur une période de 3 ans. L'année 0 l'indice CAC40 était à 3 700 ; il passe l'année 1 à 4 200 et l'année 2 à 4 500. On suppose que le CAC40 représente le marché. La rentabilité du CAC40 est de $\frac{4\,200 - 3\,700}{3\,700} = 13{,}51\,\%$ l'année 1 et de $\frac{4\,500 - 4\,200}{4\,200} = 7{,}14\,\%$ l'année 2. La covariance entre le titre et le marché est de $\text{cov} = \frac{1}{2}(0{,}07 \times 0{,}1351 + 0{,}0476 \times 0{,}0714) - 0{,}0588 \times \frac{1}{2}(0{,}1351 + 0{,}0714) = 0{,}0355\ \% > 0$.

Le marché et le titre évoluent ainsi dans le même sens. L'écart type du marché est de :

$$\sqrt{\frac{1}{2}(0{,}1351^2 + 0{,}0714^2) - \left(\frac{1}{2}(0{,}1351 + 0{,}0714)\right)^2} = 3{,}17\ \%$$

ainsi le coefficient de corrélation linaire est de :

$$r = \frac{0{,}000355}{0{,}0317 \times 0{,}0112} = 99{,}8\ \%$$

la modélisation du lien entre la rentabilité de cette action et la rentabilité du CAC40 par une droite semble donc appropriée.

On a $\beta = \frac{0{,}000355}{0{,}0317^2} = 0{,}35 < 1$, ainsi le titre atténue les mouvements du marché.

Copyright © 2011 Dunod.

POINTS CLEFS

➤ La valeur actuelle d'une action est :

$$V = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n}{(1+i)^n} + \ldots$$

– Si les dividendes sont **constants** : $V = \frac{D}{i}$

– Si les dividendes évoluent en **progression géométrique** : $V = \frac{D}{i-g}$

➤ La valeur actuelle d'une action avec estimation d'un prix de vente futur est :

$$V = \frac{D_1}{(1+i)} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{D_n + P}{(1+i)^n}$$

– Si les dividendes sont **constants** :

$$V = D\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

– Si les dividendes évoluent **en progression géométrique** :

$$V = D\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g} + \frac{P}{(1+i)^n}$$

➤ Le *Price Earning Ratio* est exprimé par :

$$PER = \frac{\text{Cours de l'action}}{\text{Bénéfice net par action}}$$

comparé à une norme de secteur, le PER est utilisé pour conseiller l'investisseur.

➤ Le modèle de Bates permet de déterminer le PER dans *n* années avec l'hypothèse de taux de distribution constant et de bénéfices en progression géométrique :

$$PER_n = \left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n PER_0 - d\frac{\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n - 1}{i-g}$$

Copyright © 2011 Dunod.

- Le délai de recouvrement est le temps nécessaire à l'investisseur pour retrouver son investissement.
- La rentabilité d'un titre est exprimée par :

$$R_k = \frac{D_k + P_k - P_{k-1}}{P_k}$$

- La volatilité d'un titre est mesurée par l'écart type des rentabilités :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k\right)^2}$$

- La covariance mesure le lien entre un titre et le marché :

$$\text{cov(Titre, Marché)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k R_k^m - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} R_k^m\right)$$

- Le coefficient de corrélation linéaire mesure le degré de linéarité entre le marché et le titre :

$$r = \frac{\text{cov(Titre, Marché)}}{\sigma_{\text{Titre}} \times \sigma_{\text{Marché}}}$$

- Le coefficient β est un coefficient d'amplification qui permet d'estimer si un titre va amplifier ou atténuer les mouvements du marché :

$$\beta = \frac{\text{cov(Titre, Marché)}}{\text{var (Marché)}}$$

Copyright © 2011 Dunod.

EXERCICES

7.1 Achat ou vente ?

Les dividendes estimés pour une action sont de 3 € ; 3,5 € ; 3,2 € ; 4 € ; 4,5 € ; 6 € ; 6,1 € les années $N+1$, $N+2$, …, $N+7$. On estime le cours de l'action à 80 € en $N+7$. En N le cours de l'action est de 50 €.

a) Les actionnaires du secteur souhaitent un taux de rendement de 12 %. Est-il plus pertinent d'acheter ou de vendre cette action en N ?

b) Quel est le taux de rendement d'une action achetée en N et vendue en N+7 ?

7.2 Délai de recouvrement

Un investisseur achète une action au cours de 45 € en N. Le dividende de cette action en $N + 1$ est de 2 €. Les dividendes vont évoluer en progression géométrique de 2 % les années suivantes. Le taux de rendement exigé par les actionnaires sur ce titre est de 6 %.

a) Quel est le prix minimal de vente acceptable en $N + 12$?

b) L'achat du titre est-il une opportunité si l'on souhaite le conserver ?

c) Quel est le délai de recouvrement de cet investissement ?

7.3 Modèle de Bates

On considère une entreprise et son secteur d'activité. En N, le *PER* de l'entreprise est de 23, celui du secteur est de 25. Par conséquent un investisseur va acheter des titres de l'entreprise. Le taux de distribution dans le secteur est en moyenne de 12 %, le taux de distribution de l'entreprise est de 3 %. Les bénéfices sont en progression constante de 5 % par an dans le secteur et dans l'entreprise. Le taux de rendement exigé par les actionnaires du secteur est de 8 %.

a) À partir de quelle année le conseil sur le titre de l'entreprise deviendra t-il à la vente ?

b) Que devrait changer l'entreprise pour ne pas voir arriver un conseil à la vente ?

7.4 Évolution d'un titre

On considère le cours de fin d'année de l'action Total, ses dividendes par action et l'indice CAC40 depuis 2003.

Fin d'année	Indice CAC40	Cours Total	Dividende Total
2003	3557.9	36.85	
2004	3821.16	40.17	1.35
2005	4715.23	53.05	1.62
2006	5541	54.65	1.87
2007	5614	56.83	2.07
2008	3217.97	38.91	2.28
2009	3936.33	45.005	2.28

a) Quel est le taux de rendement d'un titre acheté fin 2003 et vendu fin 2006 ?

b) Même question pour un titre vendu fin 2008.

c) Calculer le taux de rentabilité annuel de l'action Total et du CAC40.

Copyright © 2011 Dunod.

d) Calculer la volatilité de l'action Total.

e) Déterminer la covariance, le coefficient de corrélation linéaire et le coefficient β entre le CAC40 et le titre Total. Commenter ces résultats.

SOLUTIONS

Exercice 7.1

a) Pour répondre à cette question, il est possible de calculer la valeur actuelle du titre en N et la comparer au cours de l'action. La valeur actuelle au taux 12 % est de :

$$\frac{3}{1,12}+\frac{3,5}{1,12^2}+\frac{3,2}{1,12^3}+\frac{4}{1,12^4}+\frac{4,5}{1,12^5}+\frac{6}{1,12^6}+\frac{6,1}{1,12^7}$$
$$+\frac{80}{1,12^7}=54,83\ €$$

Le cours de l'action en N est inférieur à sa valeur actuelle estimée ; ainsi la valeur d'échange du titre semble sous-estimée par rapport à sa valeur réelle. Le conseil pour un investisseur est par conséquent à l'achat.

b) Le taux de rendement i d'un titre acheté en N et vendu en $N+7$ est exprimé dans l'équation suivante :

$$\frac{3}{1+i}+\frac{3,5}{(1+i)^2}+\frac{3,2}{(1+i)^3}+\frac{4}{(1+i)^4}+\frac{4,5}{(1+i)^5}+\frac{6}{(1+i)^6}$$
$$+\frac{6,1}{(1+i)^7}+\frac{80}{(1+i)^7}=50$$

Graphiquement on trouve 13,74 % > 12 %, ce qui confirme le conseil à l'achat de la question 1.

Exercice 7.2

a) En $N+12$ le prix minimal de vente P doit vérifier la relation du modèle de Gordon et Shapiro :

$$V=D\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n}{i-g}+\frac{P}{(1+i)^n}$$

ainsi l'on a $45=2\dfrac{1-\left(\frac{1+0,02}{1+0,06}\right)^{12}}{0,06-0,02}+\dfrac{P}{(1+0,06)^{12}}$

Copyright © 2011 Dunod.

$$\text{soit } P = 1{,}06^{12}\left(45 - 2\frac{1-\left(\frac{1{,}02}{1{,}06}\right)^{12}}{0{,}06-0{,}02}\right) = 53{,}35\ €$$

b) La valeur actuelle du titre est donnée par :

$V = \dfrac{2}{0{,}06-0{,}02} = 50\ €$ si l'on souhaite le conserver indéfiniment.

Cette valeur actuelle est supérieure au cours de l'action en *N*. Par conséquent, l'achat de ce titre est une opportunité à 6 %.

c) Le délai de recouvrement est la date à partir de laquelle l'investissement est retrouvé. Il est donné par :

$$V < D\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{n}}{i-g}$$

$$\text{soit } 45 = 2\frac{1-\left(\frac{1{,}02}{1{,}06}\right)^{n}}{0{,}06-0{,}02}$$

$$\text{ainsi } \left(\frac{1{,}02}{1{,}06}\right)^{n} = 1 - \frac{45(0{,}06-0{,}02)}{2}$$

$$\text{Par conséquent, } n \ln\left(\frac{1{,}02}{1{,}06}\right) = \ln\left(1 - \frac{45(0{,}06-0{,}2)}{2}\right)$$

$$\text{et } n = \frac{\ln\left(1 - \frac{45(0{,}06-0{,}2)}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}02}{1{,}06}\right)} = 59{,}86 \text{ ans}$$

Ainsi, il faut 60 ans pour recouvrir cet investissement si l'on n'envisage pas de revendre le titre.

Exercice 7.3

a) On conseille généralement à un investisseur d'acheter lorsque le *PER* de l'entreprise est inférieur à celui du secteur – ce qui est le cas l'année *N* – et de vendre lorsque le *PER* de l'entreprise est au-dessus du PER du secteur.

Le taux de distribution est constant et les bénéfices ont une progression constante. Par conséquent le modèle de Bates s'applique pour déterminer le *PER* à venir du secteur et de l'entreprise. On utilise donc la formule :

Copyright © 2011 Dunod.

$$PER_n = \left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n \; PER_0 - d\frac{\left(\frac{1+i}{1+g}\right)^n - 1}{i-g}$$

Appliquée au secteur, cette formule indique que :

$$PER_n(\text{Secteur}) = \left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n \times 25 - 0{,}12\frac{\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n - 1}{0{,}08 - 0{,}05}$$

Appliquée à l'entreprise, cette formule indique que :

$$PER_n(\text{Entreprise}) = \left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n \times 23 - 0{,}03\frac{\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n - 1}{0{,}08 - 0{,}05}$$

On vend lorsque $PER_n(\text{Entreprise}) > PER_n(\text{Secteur})$ soit lorsque :

$$\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n \times 23 - 0{,}03\frac{\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n - 1}{0{,}08 - 0{,}05}$$

$$> \left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n \times 25 - 0{,}12\frac{\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n - 1}{0{,}08 - 0{,}05}$$

ainsi :

$$\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n \left[23 - \frac{0{,}03}{0{,}08 - 0{,}05} - 25 + \frac{0{,}12}{0{,}08 - 0{,}05}\right]$$

$$> \frac{0{,}12}{0{,}08 - 0{,}05} - \frac{0{,}03}{0{,}08 - 0{,}05}$$

soit $\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)^n > 3$

donc $n \ \ln\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right) > \ln(3)$

et par conséquent $n > \dfrac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{1{,}08}{1{,}05}\right)} = 38{,}99$ ans

En conclusion, le conseil est à la vente à partir de la 39e année.

Copyright © 2011 Dunod.

b) Si la progression des bénéfices de l'entreprise est la même que celle du secteur, on peut supposer que cette progression dépend principalement de facteurs externes à l'entreprise ; ainsi l'entreprise a peu de moyens de voir cette évolution changer.

Le taux de rendement exigé par les actionnaires est un facteur externe. En revanche, le taux de distribution est déterminé par l'entreprise. Il est dans ce modèle de 3 % contre 12 % pour le secteur. Ainsi, les investisseurs voyant la même progression des bénéfices dans l'entreprise et dans le secteur vont se détourner progressivement de l'entreprise pour acheter des titres d'autres entreprises du secteur proposant des taux de distribution plus importants. L'entreprise a donc intérêt à augmenter son taux de distribution si elle souhaite rester attractive sur les marchés boursiers.

Exercice 7.4

a) Le taux de rendement i est exprimé par la relation :

$$36{,}85 = \frac{1{,}35}{1+i} + \frac{1{,}62}{(1+i)^2} + \frac{1{,}87+54{,}65}{(1+i)^3}$$

Graphiquement, on trouve un taux de rendement de 17,84 %.

b) Si le titre est vendu fin 2008 le taux de rendement i est exprimé par :

$$36{,}85 = \frac{1{,}35}{1+i} + \frac{1{,}62}{(1+i)^2} + \frac{1{,}87}{(1+i)^3} + \frac{2{,}07}{(1+i)^4} + \frac{38{,}91+2{,}28}{(1+i)^5}$$

Graphiquement, on trouve un taux de rendement de 5,91 %. La conservation du titre a induit une forte baisse du taux de rendement du fait de la baisse des cours consécutive à la crise économique.

c) d) e) Les résultats sont résumés dans le tableau ci-après.

c) Les **rentabilités** du CAC40 sont les variations relatives de l'indice entre deux périodes. Les rentabilités de l'action Total sont calculées par la formule :

$$R_k = \frac{D_k + P_k - P_{k-1}}{P_k}$$

Pour le premier calcul on a une rentabilité de :

$$\frac{40{,}17+1{,}35-36{,}85}{36{,}85} = 12{,}67\ \%$$

d) La **volatilité** du cours Total est calculée par l'écart type de ses rentabilités. On trouve un écart type de 24,85 %. Celui-ci est très grand par rapport à sa moyenne, il est principalement le fait de la chute importante des cours en 2008. Le titre est donc assez volatil sur la période.

Copyright © 2011 Dunod.

e) La **covariance** entre le CAC40 et l'action Total est de 4,07 %, elle est positive. Les deux variables évoluent dans le même sens, ce qui n'est pas surprenant dans la mesure où Total est le titre le plus important du CAC40.

Le **coefficient de corrélation linéaire** est de 77 %, ainsi une modélisation par une droite du lien entre le CAC40 et l'action Total est une bonne modélisation.

Le **coefficient β** est de 0,65, ainsi l'action Total atténue les variations du marché, selon notre modélisation une progression de 1 % du CAC40 induit une progression de 0,65 % du cours de l'action Total.

Fin d'année	Indice CAC40	Cours Total	Dividende Total	Rentabilité du CAC40	Rentabilité de l'action Total
2003	3557,9	36,85			
2004	3821,16	40,17	1,35	7,40 %	12,67 %
2005	4715,23	53,05	1,62	23,40 %	36,10 %
2006	5541	54,65	1,87	17,51 %	6,54 %
2007	5614	56,83	2,07	1,32 %	7,78 %
2008	3217,97	38,91	2,28	– 42,68 %	– 27,52 %
2009	3936,33	45,005	2,28	22,32 %	21,52 %
			Moyenne	4,88 %	9,52 %
			Écart type	24,85 %	21,19 %
			Covariance	4,07 %	
			Corrélation	0,772318149	
			Béta	0,658438986	

Copyright © 2011 Dunod.

Index

A

action 172
actualisation 58, 86, 147
agio 35
amortissements constants 93, 151, 146
annuités 91, 107
annuités constantes 95, 146, 154

B

bénéfice 120, 121
bénéfice actualisé 121

C

capital 24
coefficient β 182
coefficient d'amplification 179
coefficient de corrélation linéaire 179
coupon 146
coût actuariel 150
coût d'un emprunt 87, 93
coût du capital 121
covariance 178

D

date d'équivalence 36
défaut 149
délai de recouvrement 176
délai de récupération 125, 126
dividende 172
duration 157

E

écart type 131, 132, 178
effet de commerce 33
émetteur 145
équivalence de capitaux 35
escompte 34
espérance 131, 141

I

in fine 92, 146
indice de profitabilité 128
intérêt(s) 24, 25, 26, 56
intérêts composés 55
intérêts précomptés 36
intérêts simples 24

L

liquidité 149

M

mensualités 106
modèle de Bates 174
modèle de Gordon et Shapiro 174
modes de paiement 42, 69
modes de remboursement 92, 146
moyenne 177

O

OAT 151
obligations 146, 147

P

PPCM (plus petit commun multiple) 130
prime à l'émission 146
prime de remboursement 146

Copyright © 2011 Dunod.

progression arithmétique 99
progression géométrique 63, 98
projet d'investissement 119

Q

quinzaine 28

R

raison 4, 8
réglementation 32
rentabilité 177
rente 64
rente perpétuelle 65, 172
retraite 66

S

sensibilité 160
somme des termes d'une suite arithmétique 6
somme des termes d'une suite géométrique 10
souscripteur 163
suites arithmético-géométriques 12
suites arithmétiques 4
suites géométriques 8

T

tableau de remboursement 89
taux 149
taux actuariel 148
taux d'intérêt 24
taux d'intérêt composé 56
taux d'intérêt précompté 38
taux d'usure 89
taux de distribution 175
taux de réinvestissement 122
taux de rendement 172
taux de rendement à l'échéance 148
taux de rendement actuariel 147, 148
taux de rentabilité interne (TRI) 123
taux de rentabilité interne global 124
taux effectif global 35, 88, 109, 111
taux équivalent 59, 88
taux moyen 31, 32
taux nominal 146, 148
taux précompté 36
taux proportionnel 59, 88
terme général 5, 9
trimestrialité 107

V

valeur acquise 55, 87
valeur acquise d'un versement constant 61
valeur actuelle 35, 65, 172
valeur actuelle nette (VAN) 120
valeur actuelle nette globale 122
valeur d'échange 172
valeur nominale 34, 146
valeur résiduelle 119
variance 141
versements constants 29, 60
volatilité 178

Z

zéro-coupon 149, 159