Collection
Statistique
et probabilités
appliquées

Etienne Marceau

Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat

Modèles sur une période

Springer

Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat

Modèles sur une période

Springer

Paris
Berlin
Heidelberg
New York
Hong Kong
Londres
Milan
Tokyo

Étienne Marceau

Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat

Modèles sur une période

Springer

Étienne Marceau
École d'actuariat
Faculté des Sciences et de Génie
Université Laval
2425, rue de l'Agriculture
Pavillon Paul-Comtois, local 4177
Université Laval
Québec (Québec) G1V 0A6
Canada

ISBN 978-2-8178-0111-7 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, 2013

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant les paiements des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.
L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc., même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.
La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emplois. Dans chaque cas il incombe à l'usager de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

Maquette de couverture : Jean-François Montmarché

Collection
Statistique et probabilités appliquées

dirigée par Yadolah Dodge

Professeur Honoraire
Université de Neuchâtel
Suisse
yadolah.dodge@unine.ch

Comité éditorial :

Aurore Delaigle
Département de mathématiques
et de statistique
Université de Melbourne
Victoria 3010
Australie

Christian Genest
Département de mathématiques
et de statistique
Université McGill
Montréal H3A 2K6
Canada

Marc Hallin
Université libre de Bruxelles
Campus de la Plaine
CP 210
1050 Bruxelles
Belgique

Ludovic Lebart
Télécom-ParisTech
46, rue Barrault
75634 Paris Cedex 13
France

Christian Mazza
Département de mathématiques
Université de Fribourg
Chemin du Musée 23
CH-1700 Fribourg
Suisse

Stephan Morgenthaler
École Polytechnique Fédérale
de Lausanne
Département de Mathématiques
1015 Lausanne
Suisse

Louis-Paul Rivest
Département de mathématiques
et de statistique
Université Laval
Québec G1V OA6
Canada

Gilbert Saporta
Conservatoire national
des arts et métiers
292, rue Saint-Martin
75141 Paris Cedex 3
France

Dans la même collection :

- *Statistique. La théorie et ses applications*
  Michel Lejeune, avril 2004

- *Optimisation appliquée*
  Yadolah Dodge, octobre 2004

- *Le choix bayésien. Principes et pratique*
  Christian P. Robert, novembre 2005

- *Régression. Théorie et applications*
  Pierre-André Cornillon, Éric Matzner-Løber, janvier 2007

- *Le raisonnement bayésien. Modélisation et inférence*
  Éric Parent, Jacques Bernier, juillet 2007

- *Premiers pas en simulation*
  Yadolah Dodge, Giuseppe Melfi, juin 2008

- *Génétique statistique*
  Stephan Morgenthaler, juillet 2008

- *Maîtriser l'aléatoire. Exercices résolus de probabilités et statistique, 2e édition*
  Eva Cantoni, Philippe Huber, Elvezio Ronchetti, septembre 2009

- *Pratique du calcul bayésien*
  Jean-Jacques Boreux, Éric Parent, décembre 2009

- *Statistique. La théorie et ses applications, 2e édition*
  Michel Lejeune, septembre 2010

- *Le logiciel R*
  Pierre Lafaye de Micheaux, Rémy Drouilhet, Benoît Liquet, novembre 2010

- *Probabilités et processus stochastiques*
  Yves Caumel, avril 2011

Table des matières

1 Quelques notions de la théorie des probabilités **1**

1.1 Introduction 1
1.2 Variables aléatoires 3
1.2.1 Définitions 3
1.2.2 Variables aléatoires discrètes 4
1.2.3 Variables aléatoires continues 5
1.3 Espérance d'une variable aléatoire 6
1.3.1 Définition 6
1.3.2 Espérance d'une fonction 7
1.3.3 Moment d'ordre n 8
1.3.4 Espérance d'une fonction indicatrice 8
1.3.5 Intégrale de Riemann – Stieltjes 9
1.4 Espérance tronquée 9
1.4.1 Définition 9
1.4.2 Exemples 10
1.5 Variance 13
1.5.1 Définition 13
1.5.2 Écart type 14
1.5.3 Coefficient de variation 14
1.6 Moments centrés 14
1.7 Coefficient d'asymétrie 15
1.8 Fonction génératrice des moments 16
1.9 Fonction génératrice des probabilités 17
1.10 Fonction quantile 17
1.10.1 Définition de base 17
1.10.2 Variables aléatoires continues 18
1.10.3 Variables aléatoires discrètes 19
1.10.4 Cas non standards 19
1.10.5 Deuxième définition 20
1.10.6 Propriétés de la fonction quantile 21
1.11 Mesures de risque VaR et TVaR 23
1.11.1 Définitions 23
1.11.2 Propriétés 25
1.11.3 Exemples 26

1.11.4 Multiplication par un scalaire négatif 28
1.12 Fonction *stop-loss* et espérance limitée 32
1.12.1 Définitions 32
1.12.2 Exemples 33
1.13 Fonction d'excès-moyen 34
1.13.1 Définition 34
1.13.2 Exemples 35
1.14 Lois conjointes de n variables aléatoires 35
1.14.1 Définitions et propriétés 35
1.14.2 Variables aléatoires à support dénombrable 38
1.14.3 Variables aléatoires continues 39
1.15 Covariance et corrélation linéaire 39
1.16 Espérance conditionnelle 42
1.17 Quelques formules utiles 43
1.17.1 Formule de l'espérance totale 43
1.17.2 Formule de la variance totale 44
1.17.3 Formule de la covariance totale 44
1.17.4 Formule des probabilités totales 45
1.18 Construction de distributions avec mélange 45
1.19 Somme et différence de v.a. indépendantes 47
1.19.1 Somme de 2 v.a. discrètes indépendantes 48
1.19.2 Somme de 2 v.a. continues indépendantes 49
1.19.3 Somme de v.a. et f.g.m. 50
1.19.4 Différence de 2 v.a. discrètes indépendantes 52
1.19.5 Différence de 2 v.a. continues indépendantes 52
1.20 Notes bibliographiques 53
1.21 Exercices 53
1.22 Réponses 57

2 Modélisation des risques **61**
2.1 Introduction 61
2.2 Modèle stochastique pour un risque X 62
2.2.1 Modèle général pour X 62
2.2.2 Espérance de X 63
2.2.3 Variance de X 63
2.2.4 Fonction de répartition de X 64
2.2.5 Espérance tronquée de X 64
2.2.6 Mesure TVaR 65
2.2.7 Fonction génératrice des moments 65
2.3 Distributions de fréquence 66
2.3.1 Loi de Poisson 66
2.3.2 Loi binomiale 67
2.3.3 Loi binomiale négative 68
2.3.4 Comparaison des variances des trois lois composées . 68
2.4 Distributions du montant d'un sinistre 69

2.4.1 Loi exponentielle 69
2.4.2 Lois gamma et Erlang 70
2.4.3 Loi lognormale 72
2.4.4 Loi Weibull 72
2.4.5 Lois Pareto, Burr et F-généralisée 73
2.4.6 Lois mélanges d'exponentielles et d'Erlang 74
2.4.7 Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto 74
2.5 Distributions de sinistres *light* et *heavy tailed* 76
2.5.1 Existence de la f.g.m. 76
2.5.2 Fonction d'excès-moyen 76
2.5.3 Distribution sub-exponentielle 77
2.6 Approches indemnitaire et forfaitaire 77
2.6.1 Approche indemnitaire 78
2.6.2 Approche forfaitaire 79
2.6.3 Remarques 79
2.7 Généralisation des principales lois de fréquence 79
2.7.1 Lois Poisson-mélange 79
2.7.2 Loi Poisson-gamma ou binomiale négative 80
2.7.3 Loi Poisson-inverse gaussienne 84
2.7.4 Loi Poisson-lognormale 84
2.7.5 Modification de la masse à 0 85
2.8 Somme aléatoire et allocation 85
2.9 Pertes financières 87
2.10 Pertes financières *vs* coûts en assurance 90
2.11 Notes bibliographiques 93
2.12 Exercices 93
2.13 Réponses 98

3 Mutualisation des risques 103
3.1 Introduction 103
3.2 Agrégation des risques 104
3.2.1 Définitions et caractéristiques de base 104
3.2.2 Méthodes d'agrégation 105
3.3 Agrégation et cas particuliers 106
3.3.1 Loi Poisson composée 107
3.3.2 Loi binomiale négative composée 108
3.3.3 Loi binomiale composée 109
3.4 Mesures de risques et propriétés 109
3.4.1 Contexte 109
3.4.2 Propriétés désirables et cohérence 110
3.4.3 Autres propriétés désirables 112
3.4.4 Mesure VaR 112
3.4.5 Mesure TVaR 113
3.4.6 Mutualisation et mesures de risque 115
3.5 Mesure de solvabilité sur une période 116

3.6 Méthodes d'approximation fondées sur les moments 117
3.6.1 Approximation fondée sur la distribution normale . 118
3.6.2 Approximation fondée sur la distribution gamma translatée 119
3.6.3 Approximation fondée sur la distribution lognormale 120
3.6.4 Approximation fondée sur la distribution F-généralisée 120
3.7 Mutualisation et activités d'assurance 121
3.7.1 Mutualisation et coût moyen par contrat 121
3.7.2 Mutualisation et loi des grands nombres 125
3.7.3 Mutualisation et nécessité d'une marge positive de sécurité 129
3.7.4 Primes pures et primes majorées 133
3.8 Mutualisation et facteur aléatoire commun 134
3.8.1 Mutualisation, risque systématique et risque non systématique 134
3.8.2 Mutualisation et risque d'inflation 137
3.8.3 Mutualisation et mortalité stochastique 138
3.9 Mutualisation et risque de crédit 142
3.10 Mutualisation et risques extraordinaires 146
3.11 Mutualisation et risque financier 147
3.12 Mutualisation et catastrophes naturelles 149
3.13 Mutualisation et sinistre maximal 154
3.14 Notes bibliographiques 156
3.15 Exercices 156
3.16 Réponses 167

4 Principes de calcul de la prime majorée 173
4.1 Introduction 173
4.2 Propriétés désirables d'un principe de calcul de la prime majorée 173
4.3 Principaux principes de calcul de prime 174
4.3.1 Principe de la valeur espérée 175
4.3.2 Principe de la variance 175
4.3.3 Principe de l'écart type 175
4.3.4 Principe de la VaR 176
4.3.5 Principe de la TVaR 176
4.3.6 Approche top-down et principes adaptés de la VaR et de la TVaR 176
4.3.7 Principe exponentiel 176
4.3.8 Lien entre le principe de la variance et le principe exponentiel 177
4.4 Exemple 177
4.5 Notes bibliographiques 178
4.6 Exercices 178
4.7 Réponses 179

5 Méthodes de simulation stochastique **181**
5.1 Introduction 181
5.2 Génération de nombres pseudo-aléatoires 181
5.3 Méthodes de base 183
5.3.1 Simulation par la méthode inverse 183
5.3.2 Simulation de v.a. définies par un mélange 184
5.3.3 Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a. . 185
5.3.4 Simulation de somme aléatoire 185
5.4 Principes généraux 186
5.5 Évaluation des mesures de risque 189
5.5.1 Méthode 189
5.5.2 Considérations pratiques 191
5.5.3 Intervalle de confiance pour la mesure VaR 192
5.6 Notes bibliographiques 193
5.7 Exercices 193
5.8 Réponses 197

6 Méthodes récursives d'agrégation **201**
6.1 Introduction 201
6.2 Somme de v.a. discrètes 202
6.2.1 Somme de n v.a. discrètes indépendantes 202
6.2.2 Somme de n v.a. discrètes i.i.d. 202
6.2.3 Somme de n v.a. discrètes 206
6.3 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$ 207
6.3.1 Notions préliminaires 207
6.3.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence 207
6.3.3 Algorithme de Panjer 209
6.4 Méthodes de discrétisation 215
6.4.1 Méthodes *upper* et *lower* 216
6.4.2 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée 218
6.5 Transformée de Fourier rapide 221
6.5.1 Description de la méthode 221
6.5.2 Transformée de Fourier rapide et `R` 223
6.5.3 Somme de deux v.a. discrètes indépendantes 223
6.5.4 Somme de n v.a. discrètes indépendantes 224
6.5.5 Somme aléatoire (loi composée) 225
6.5.6 Pot-pourri 228
6.5.7 Commentaires 231
6.6 Distribution mélange d'Erlang 231
6.7 Approximation Poisson composée 236
6.7.1 Cas particulier 236
6.7.2 Cas général 238
6.8 Notes bibliographiques 240
6.9 Exercices 240

6.10 Réponses 246

7 Comparaison des risques **249**
7.1 Introduction 249
7.2 Ordres partiels 250
7.3 Ordre en dominance stochastique 250
7.3.1 Définition 250
7.3.2 Mesure VaR 251
7.3.3 Espérance 251
7.3.4 Fonctions croissantes univariées 252
7.3.5 Fonctions croissantes multivariées 252
7.3.6 Propriétés de fermeture 253
7.3.7 Condition suffisante 253
7.3.8 Lois paramétriques 253
7.3.9 Lois de Bernoulli et de Poisson 255
7.3.10 Méthodes de discrétisation *upper* et *lower* 255
7.3.11 Stochastiquement croissante 257
7.3.12 Variance et ordre en dominance stochastique 258
7.4 Ordres convexes 259
7.4.1 Définitions 259
7.4.2 Résultats 260
7.4.3 Propriétés de fermeture 260
7.4.4 Condition suffisante 261
7.4.5 Mesure TVaR 262
7.4.6 Lois paramétriques 262
7.4.7 Lois de Bernoulli et de Poisson 263
7.4.8 Lois Poisson - mélange 263
7.4.9 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée 266
7.4.10 Mutualisation des risques 267
7.5 Notes bibliographiques 268
7.6 Exercices 268
7.7 Réponses 273

8 Distributions multivariées et agrégation des risques **275**
8.1 Introduction 275
8.2 Classes de Fréchet 276
8.3 Comonotonicité 278
8.3.1 Définition 278
8.3.2 Comonotonicité et agrégation 279
8.3.3 Antimonotonicité 282
8.4 Lois multivariées et agrégation 284
8.4.1 Approche générale pour des v.a. continues 284
8.4.2 Approche générale pour des v.a. discrètes 285
8.5 Lois continues bivariées et multivariées 286

8.5.1 Loi exponentielle bivariée Eyraud - Farlie - Gumbel - Morgenstern (EFGM) 286
8.5.2 Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin 287
8.5.3 Loi gamma bivariée Cheriyan - Ramabhadran - Mathai - Moschopoulos (CRMM) 288
8.5.4 Loi normale multivariée 290
8.5.5 Loi normale mélange multivariée 292
8.5.6 Loi de Student multivariée 293
8.5.7 Lois multivariées construites par mélange commun . 294
8.5.8 Lois exponentielles bivariée mélange 295
8.5.9 Loi Pareto bivariée 296
8.6 Lois discrètes bivariées et multivariées 297
8.6.1 Loi de Poisson bivariée Teicher 297
8.6.2 Loi Poisson mélange bivariée 300
8.6.3 Loi Poisson-gamma bivariée 300
8.6.4 Loi Poisson mélange bivariée prise 2 301
8.6.5 Loi Poisson-gamma bivariée CRMM 301
8.6.6 Loi de Bernoulli multivariée Cossette - Gaillardetz - Marceau - Rioux (CGMR) 303
8.7 Lois composées multivariées 304
8.7.1 Notions préliminaires 304
8.7.2 Montants de sinistres de distributions gamma 306
8.7.3 Montants de sinistres de distributions mélanges d'Erlang 307
8.7.4 Montants de sinistres avec support arithmétique . . 309
8.7.5 Poisson composée bivariée 310
8.8 Poisson composée multivariée 312
8.9 Modèles avec chocs communs 315
8.10 Modèles avec mélange commun 318
8.11 Notes bibliographiques 322
8.12 Exercices 323
8.13 Réponses 329

9 Théorie des copules et agrégation des risques 333
9.1 Introduction 333
9.2 Copules bivariées 334
9.3 Propriétés des copules 335
9.3.1 Bornes de Fréchet 335
9.3.2 Fonction de densité 336
9.3.3 Copule de survie 336
9.3.4 Propriété d'invariance 337
9.3.5 Fonction de répartition conditionnelle 338
9.3.6 Simulation et fonction de répartition conditionnelle . 338
9.3.7 Copule complète 339
9.4 Principales copules bivariées 339

9.4.1 Copule d'indépendance 339
9.4.2 Copule de la borne supérieure de Fréchet 339
9.4.3 Copule de la borne inférieure de Fréchet 340
9.4.4 Copule de Fréchet 340
9.4.5 Copule de Cuadras-Augé 341
9.4.6 Copule de Marshall-Olkin 342
9.4.7 Copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) 344
9.4.8 Copule de Ali-Mikhail-Haq 344
9.4.9 Copule de Plackett 346
9.4.10 Copule de Clayton 347
9.4.11 Copule de Frank 347
9.4.12 Copule de Gumbel 350
9.4.13 Copule normale 351
9.4.14 Copule de Student 353
9.4.15 Remarque 355
9.4.16 Exemples 356
9.5 Copules et lois discrètes 357
9.6 Méthodes de construction des copules 358
9.6.1 Méthode d'inversion 358
9.6.2 Méthode algébrique 360
9.6.3 Méthode par mélange 360
9.7 Copules archimédiennes 360
9.8 Copules elliptiques 362
9.9 Méthodes d'agrégation de risques dépendants 362
9.9.1 Introduction 362
9.9.2 Bornes minimale et maximale pour la VaR 362
9.9.3 Méthode avec discrétisation 367
9.9.4 Méthode des carrés 368
9.9.5 Méthodes des rectangles 371
9.9.6 Commentaires sur la méthode avec discrétisation et la méthode des carrés 373
9.10 Mesures de dépendance 373
9.10.1 Mesure de corrélation linéaire 374
9.10.2 Mesures de corrélation des rangs et concordance . . 377
9.10.3 Mesures de corrélation des rangs et copule 379
9.10.4 Remarques 380
9.10.5 Dépendance de queue 381
9.11 Dépendance positive par quadrant 382
9.12 Copules multivariées 384
9.12.1 Définitions et propriétés 384
9.12.2 Copule d'indépendance 385
9.12.3 Copule borne supérieure de Fréchet 386
9.12.4 Copule de Clayton 386
9.12.5 Copule de Frank 386

9.12.6 Copule de Gumbel 387
9.12.7 Copule normale 387
9.12.8 Copule de Student 388
9.12.9 Remarques 388
9.12.10 Copules archimédiennes et méthode de Marshall-Olkin 389
9.13 Échangeabilité 391
9.14 Impact de la dépendance et ordre supermodulaire 393
9.14.1 Définitions 393
9.14.2 Ordre supermodulaire et ordre convexe univarié . . . 394
9.14.3 Ordre supermodulaire et comonotonicité 394
9.14.4 Ordre supermodulaire et indépendance 395
9.14.5 Ordre supermodulaire et copules 395
9.14.6 Ordre supermodulaire et loi de Poisson multivariée . 396
9.14.7 Ordre supermodulaire et lois composées multivariées 396
9.14.8 Ordre supermodulaire et bornes de Fréchet 396
9.15 Notes bibliographiques 397
9.16 Exercices 398
9.17 Réponses 404

10 Allocation du capital **409**
10.1 Introduction 409
10.2 Définitions 410
10.2.1 Motivations 410
10.2.2 Règle basée sur la covariance 411
10.2.3 Règles basées sur les mesures VaR et TVaR 412
10.2.4 Principe d'Euler et règles d'allocation 413
10.3 Applications 413
10.3.1 Lois multivariées avec support arithmétique 413
10.3.2 Lois multivariées continues 416
10.3.3 Lois multivariées composées 418
10.3.4 Loi Poisson composée multivariée 422
10.3.5 Méthode numérique basée sur la simulation 424
10.3.6 Allocation et positions financières 427
10.4 Notes bibliographiques 427
10.5 Exercices 427
10.6 Réponses 434

A Lois univariées continues **437**
1.1 Loi uniforme 437
1.2 Loi bêta 438
1.3 Loi exponentielle 440
1.4 Loi gamma 440
1.5 Loi Erlang 441
1.6 Loi Weibull 442
1.7 Loi Erlang généralisée 443

1.8 Loi normale 445
1.9 Loi lognormale 446
1.10 Loi inverse gaussienne 447
1.11 Loi Pareto 448
1.12 Loi F-généralisée 449
1.13 Loi Burr 450
1.14 Loi log-logistique 451
1.15 Loi de Student 453

B Lois univariées discrètes **455**
2.1 Loi avec support arithmétique 455
2.2 Loi de Poisson 456
2.3 Loi binomiale 456
2.4 Loi de Bernoulli 457
2.5 Loi binomiale négative 457
2.6 Loi géométrique 458
2.7 Loi logarithmique 459

C Lois univariées avec mélange **461**
3.1 Loi mélange d'exponentielles 461
3.2 Loi mélange d'Erlang 462

References **465**

Préface

À Hélène, Anne-Sophie et Geneviève.

Le présent ouvrage a pour objectif de fournir des outils à la modélisation et l'évaluation quantitative des risques en actuariat sur une période. Les modèles de risque sur plusieurs périodes sont traités dans un deuxième ouvrage à paraître. L'ouvrage est destiné à une audience large. Il peut être utilisé à des fins pédagogiques à un niveau sous-gradué ou gradué. Le principal pré-requis pour cet ouvrage est un cours de base en probabilité. Une part du contenu de cet ouvrage se retrouve classé généralement sous la rubrique de la théorie du risque en actuariat, qui est appliquée dans les différents domaines de l'actuariat. En raison de l'évolution récente de la science actuarielle, les outils développés dans le cadre de la théorie du risque peuvent être aussi appliqués dans le cadre plus large de la gestion quantitative des risques pour les institutions financières (*Quantitative Risk Management*) et des compagnies en général (*Entreprise Risk Management*).

À notre avis, pour parvenir à bien *sentir* les notions traitées dans cet ouvrage, il est essentiel de les appliquer concrètement. Pour cette raison, on a pris un soin tout particulier à la mise en pratique des notions traitées dans cet ouvrage, par le biais d'exemples et d'exercices. Plusieurs résultats des exemples et plusieurs réponses aux exercices sont obtenus à l'aide d'un outil informatique en utilisant généralement `R`, `Excel`® et parfois `Maple`®. Cet ouvrage pédagogique a connu plusieurs versions au cours des années. Son contenu a été expérimenté auprès de plus de mille étudiants dans le cadre de cours sous-gradués et gradués à l'École

d'actuariat (Université Laval, Québec, Canada), l'Institut des sciences financières et actuarielles (Université Claude-Bernard, Lyon, France), l'Institut des sciences actuarielles (UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique) et l'INSEA (Rabat, Maroc).

L'ouvrage est construit comme suit.

Le chapitre 1 propose un bref rappel des notions en théorie des probabilités qui seront utiles dans cet ouvrage, incluant aussi des notions sur les mesures de risque et de primes *stop-loss*.

Le chapitre 2 présente les modèles de base en actuariat pour décrire le comportement des risques en assurance sur une période. On explique aussi comment ce modèle peut être adapté pour décrire les pertes liées à titres comportant des risques de défaut. De plus, le chapitre comporte une section comparant le risque propre à l'assurance et les risques financiers.

Dans le chapitre 3, on examine la mutualisation de risques indépendants et de risques dépendants au sein d'un portefeuille d'assurance. La mutualisation des risques est le fondement des mécanismes d'assurance. Le risque global du portefeuille, résultant de la mutualisation des risques, peut être quantifié à l'aide de mesures de risques qui sont couramment utilisées dans le contexte des compagnies d'assurance et des institutions financières. Les mesures de risque telles que la mesure *Value-at-Risk* (VaR) ou la mesure *Tail-Value-at-Risk* (TVaR) servent éventuellement à établir le niveau de capital économique associé au portefeuille d'une compagnie d'assurance ou d'une institution financière. À partir du capital économique, la compagnie peut déterminer notamment la provision pour se protéger contre une expérience adverse du portefeuille. Un résultat fondamental de la théorie des probabilités, l'inégalité de Tchebychev, est évoqué pour démonter l'importance de demander une prime supérieure à l'espérance des coûts pour un contrat d'assurance. On traite aussi de l'impact de la mortalité stochastique et de l'impact des catastrophes sur la mutualisation des risques.

En assurance, l'espérance des coûts pour un contrat d'assurance correspond à la prime pure. Dans le chapitre 3, il est démontré qu'une prime supérieure à la prime pure, que l'on désigne par la prime majorée, doit être demandée par la compagnie d'assurance afin d'éviter un risque certain d'insolvabilité. Dans le chapitre 4, on fournit une brève introduction aux principaux principes de calcul de la prime majorée.

Pour une bonne compréhension des coûts d'un portefeuille ou pour l'application de différents outils de gestion des risques, il est essentiel de pouvoir évaluer le comportement aléatoire d'une somme de variables aléatoires ou d'une fonction de variables aléatoires. En plus des méthodes d'approximation fondées sur les moments dont certaines sont traitées au chapitre 3, il est essentiel de recourir à des méthodes basées sur la simulation stochastique et à des méthodes d'agrégation numériques. Le chapitre 5 présente les notions de base à la simulation stochastique et des applications pour l'évaluation quantitative des risques. Dans le chapitre 6,

on traite des méthodes numériques qui sont proposées pour l'évaluation de somme finie et de somme aléatoire des variables aléatoires. L'algorithme de Panjer et la transformée rapide de Fourier, les méthodes de discrétisation et l'approximation Poisson composée sont présentés.

Dans le chapitre 7, on présente une brève introduction aux ordres stochastiques univariés, qui sont utilisés afin de comparer et d'expliquer qualitativement le comportement des coûts d'un risque ou d'un portefeuille de risques.

Traditionnellement, il était supposé dans les modèles de risque sur une période que les risques d'un portefeuille étaient indépendants. Cependant, dans un bon nombre de situations, cette hypothèse n'est pas vérifiée. Depuis la fin des années 1990, il est maintenant reconnu en actuariat et en gestion quantitative des risques qu'il est très important de tenir compte des relations de dépendance entre les risques. Ignorer les relations de dépendance entre les risques peut conduire à une sous-évaluation ou à une sur-évaluation des mesures de risques liées aux coûts totaux d'un portefeuille. De plus, cela peut conduire à établir des moyens inefficaces de gestion des risques. Dans les chapitres 8 et 9, on traite des modèles multivariés de risque et de la théorie des copules. On aborde aussi les méthodes d'agrégation et les méthodes de simulation stochastique pour évaluer le comportement d'une somme et d'une fonction de variables dépendantes.

Pour un portefeuille composé d'un nombre fini de risques, on utilise les mesures VaR et TVaR pour déterminer le montant de capital économique à partir du comportement aléatoires des coûts totaux du portefeuille. Dans le chapitre 10, on présente une introduction aux règles d'allocation de capital qui servent à déterminer la part allouée à chaque risque du portefeuille.

Un tel projet n'aurait pas connu son aboutissement sans l'aide et l'implication de plusieurs personnes. Je remercie les personnes ayant relu des extraits de l'ouvrage et ayant travaillé à résoudre les solutions et les réponses aux exercices : Guillaume Gilbert, Michel Jacques, Élisabeth Lamarche, David Landriault, Etienne Larrivée-Hardy, Jean-Philippe LeCavalier, Jean-Philippe Lemay, Mélina Mailhot, Mhamed Mesfioui, Etienne Morin, Khouzeima Moutanabbir et Julien Trufin. Je tiens à souligner tout spécialement Marie-Pier Côté pour le formidable travail qu'elle a accompli au cours de l'année 2011, dans la relecture de la totalité de l'ouvrage et la vérification d'une grande part des exemples et des exercices de l'ouvrage. Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Hélène Cossette qui a relu la totalité de l'ouvrage, à plusieurs reprises. Je remercie aussi ces deux dernières pour m'avoir donné leurs exhortations afin de terminer l'ouvrage. Je suis aussi reconnaissant à toutes les étudiantes et à tous les étudiants qui, tout au long des dernières années, m'ont souligné les différentes erreurs dans les versions précédentes de l'ouvrage.

Je tiens à remercier mes principaux collaborateurs de recherche : Mathieu Bargès, Mathieu Boudreault, Hélène Cossette, Marie-Pier Côté, Michel

Denuit, Jan Dhaene, Thierry Duchesne, Patrice Gaillardetz, Christian Genest, David Landriault, Jean-Philippe Lemay, Stéphane Loisel, Mélina Mailhot, Fouad Marri, Esterina Masiello, Véronique Maume-Deschamp, Mhamed Mesfioui, Khouzeima Moutanabbir, Pierre Ribereau, Jacques Rioux et Florent Toureille.

Je suis aussi reconnaissant de l'aide financière fournie par la Chaire d'actuariat, de l'Université Laval, permettant d'engager trois étudiants qui ont travaillé sur les précédentes versions de cet ouvrage. J'exprime toute ma reconnaissance à Jean-Claude Augros, Michel Denuit, Stéphane Loisel et Véronique Maume-Deschamp pour leurs invitations à enseigner des cours où une partie du contenu de l'ouvrage a été présenté. Je tiens aussi à remercier Christian Genest pour avoir proposé cet ouvrage à l'équipe éditoriale de Springer-Verlag France. Je tiens aussi à remercier Robert Rousseau et Guy Gendron pour leur support et leurs encouragements. Je remercie Yalodah Dodge, président du comité scientifique, et Nathalie Huilleret (directrice), Claire Viader, Charles Ruelle et Dalila Goual de l'équipe éditoriale chez Springer-Verlag France, pour leur confiance, leurs encouragements et leur patience.

Je remercie aussi mes amis, mes proches, ma famille, Louise Hébert, David Landriault, Jean-Philippe Lemay, Stéphane Loisel, Esterina Masiello, Claire *Madame la Marquise* Renoirte et Pierre Ribereau pour leurs mots d'encouragement. Je voudrais aussi saluer François Dufresne, François Grenon et Hubert Tremblay pour leurs conseils et à qui j'avais déjà confié le désir de réaliser un tel livre. J'aimerais saluer la mémoire du professeur Florian Etienne De Vylder notamment pour sa passion, sa générosité et sa gentillesse.

À ma femme Hélène et à mes enfants Anne-Sophie et Geneviève, je vous dois toute ma gratitude de m'avoir soutenu, encouragé et enduré pendant cette vaste entreprise.

J'ai aussi une pensée pour mon étudiant au doctorat, Florent Toureille, qui nous a quitté subitement le 15 décembre 2010.

1

Quelques notions de la théorie des probabilités

1.1 Introduction

Depuis ses débuts, l'actuariat a progressé au rythme des avancements de la théorie des probabilités.

Notamment, Christian Huygens (14 avril 1629 – 8 juillet 1695), qui fut un mathématicien, un astronome et un physicien néerlandais, a été l'auteur du premier livre sur le calcul des probabilités, inspiré de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre Fermat. C'est dans ce livre qu'il introduit la notion d'espérance, liée à une situation d'incertitude. La notion d'espérance est fondamentale en actuariat. Blaise Pascal (19 juin 1623 – 19 août 1662), qui a été mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français, a contribué à la fondation de la théorie des probabilités et il a réfléchi à des problèmes liés à l'assurance. Un peu plus tard, on doit à Jacques (Jakob) Bernoulli (27 décembre 1654 – 16 août 1705), mathématicien et physicien suisse, la loi de Bernoulli et la première version de la loi des grands nombres, contribuant aussi à la fondation de la théorie des probabilités. La loi des grands nombres est aussi essentielle en actuariat. C'est à Thomas Bayes (env. 1702 – 17 avril 1761), mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, que l'on doit le fameux *théorème de Bayes*. On lui doit la définition de la probabilité conditionnelle. Le neveu de Jacques Bernoulli, Daniel Bernoulli (9 février 1700 - 17 mars 1782), médecin, physicien et mathématicien suisse, est l'auteur, notamment, de l'essai *Théorie sur la mesure du risque*. Il y a introduit les notions d'aversion au risque, de prime de

risque et d'utilité (aux frontières de la finance, de l'économie et de la théorie du risque). Abraham DeMoivre (26 mai 1667 – 27 novembre 1754), mathématicien français, amis de Newton, Leibniz et Halley, contribua de manière importante à l'avancement de la théorie des probabilités (et de l'actuariat), en publiant le traité *The Doctrine of Chances: a method of calculating the probabilities of events in play*, dans lequel il présente un premier exposé de la distribution normale. L'ouvrage traite aussi de l'évaluation des primes pour des contrats de rente et il contient des tables actuarielles de mortalité. On mentionne aussi Antoine Deparcieux (28 octobre 1703 – 2 septembre 1768), mathématicien français, qui est l'auteur de l'ouvrage *Essais sur les probabilités de la vie humaine, d'où l'on déduit la manière de déterminer les rentes viagères (...), précédé d'une courte explication sur les rentes à terme, ou annuités, et accompagné d'un grand nombre de tables*, qui est généralement considéré comme le premier ouvrage en actuariat. L'ouvrage fut très populaire et les tables de mortalité qu'on y trouve furent utilisées par les compagnies d'assurance-vie pendant tout le XIX^{e} siècle et le début du XX^{e}.

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet (17 septembre 1743 – 29 mars 1794), philosophe, mathématicien et homme politique français, a examiné le problème de ruine pour une compagnie d'assurance (maritime dans son illustration) afin de déterminer la prime par contrat. Il est considéré comme un précurseur de la mesure VaR. Pierre-Simon de Laplace (23 mars 1749 – 5 mars 1827), mathématicien, astronome et physicien français, a contribué considérablement au développement des probabilités et de la statistique. On lui doit notamment le théorème central limite, les fonctions génératrices des moments, les fonctions génératrices des probabilités, etc. Laplace a proposé une méthode pour évaluer approximativement la solution à un problème de Condorcet (voir la note historique dans la chapitre 4) qui a conduit au théorème central limite. Il est intéressant de mentionner que Laplace a été ministre de l'Intérieur sous le Consulat, comte d'empire (sous Napoléon 1er) et marquis sous la Restauration. C'est à Johann Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777 — 23 février 1855), mathématicien, astronome et physicien allemand, que l'on doit la fameuse loi normale (ou gaussienne), mais c'est à Laplace que l'on doit le théorème central limite. Enfin, Siméon-Denis Poisson (21 juin 1781 – 25 avril 1840), mathématicien français, géomètre et physicien, a proposé la loi de Poisson pour décrire le comportement de l'arrivée d'événements sur un intervalle de temps fixé (dans *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1838)). Ses superviseurs au doctorat furent Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace. La loi de Poisson est fondamentale en actuariat.

On mentionne aussi Harald Cramér (25 septembre 1893 – 5 octobre 1985), mathématicien suédois, actuaire et statisticien, et Bruno de Finetti (13 juin 1906 – 20 juillet 1985), probabiliste italien, statisticien et actuaire, qui ont grandement contribué à la théorie des probabilités, à la statistique

et la théorie du risque en actuariat. Emil Julius Gumbel (18 juillet 1891 – 10 septembre 1966), mathématicien et actuaire allemand, qui fut un des pères fondateurs de la théorie des extrêmes, a notamment publié l'ouvrage *La durée extrême de la vie humaine.*

Les notions de probabilité sont essentielles à la modélisation des risques en actuariat. Le présent chapitre vise à rappeler certaines notions de base en probabilité et à introduire certains concepts utiles en actuariat. Notamment, le nombre de sinistres, le montant d'un sinistre, le taux de rendement sur un investissement, les coûts d'un contrat d'assurance, les coûts pour un portefeuille d'assurance, les pertes liées à un portefeuille de placement et les coûts liés à une catastrophe sont modélisés par des variables aléatoires, qui peuvent être discrètes ou continues. Les notions d'espérance et de variance servent à avoir une idée des coûts ou des pertes espérés ainsi que de leur variabilité. On a recours à des mesures de risque pour quantifier de façon adéquate les engagements d'une compagnie d'assurance, d'une banque, etc. Les actuaires sont confrontés à l'évaluation du comportement aléatoire des coûts totaux ou des pertes totales d'un ensemble de risques, comme un portefeuille de contrats d'assurance, ce qui les conduit à devoir évaluer le comportement d'une somme de variables aléatoires.

Dans ce chapitre, on présente quelques notions de base de la théorie des probabilités qui serviront à la modélisation et à l'évaluation des risques en actuariat. On commence en traitant des notions relatives aux variables aléatoires et à l'espérance de fonctions de variables aléatoires. On présente les définitions des fonctions quantiles, *stop-loss* et excès-moyen ainsi que les définitions de mesures de risque. On aborde aussi brièvement la construction de variables aléatoires par mélange et l'évaluation de la distribution de sommes et de différences de variables aléatoires.

1.2 Variables aléatoires

1.2.1 Définitions

On définit une variable aléatoire (v.a.) comme étant le résultat d'une expérience ou d'un phénomène aléatoire. Une v.a. X est une fonction, souvent à valeurs réelles, définie sur un espace échantillonal. Cet espace correspond à l'ensemble des résultats possibles d'une expérience ou d'un phénomène aléatoire.

La v.a. X peut représenter e.g. le montant à verser à la suite d'un accident de voiture, les coûts à encourir pour un portefeuille d'assurance collective, les pertes liées à un investissement, les pertes encourues par tous les assureurs d'une région spécifique à la suite d'une catastrophe naturelle ou encore le montant total des rentes à verser par un régime de retraite pour la prochaine année.

Par convention, les v.a. sont désignées par des lettres majuscules et les réalisations des v.a. sont désignées par des lettres minuscules. On définit la fonction de répartition de la v.a. X par F_X où

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \leq x) \\ &= \Pr(\text{v.a. } X \text{ prenne une valeur inférieure ou égale à } x). \end{aligned}$$

Une fonction de répartition F_X possède les propriétés suivantes :

- F_X est non décroissante (croissante au sens large) ;
- F_X est semi-continue à droite ;
- $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(\infty) = 1$;
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Le complément de F_X, noté $\overline{F}_X(x)$, est appelé la fonction de survie de X et il est défini par $\overline{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$.

Il y a deux classes importantes de v.a. : les v.a. discrètes et les v.a. absolument continues.

1.2.2 Variables aléatoires discrètes

Une v.a. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou dénombrable de valeurs dans l'ensemble $A_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$. On définit sa fonction de masse de probabilité par f_X où

$$f_X(x) = \Pr(X = x), \ x \in A_X \subset \mathbb{R},$$

avec $0 \leq f_X(x) \leq 1$, $x \in A_X$ et $\sum_{x \in A_X} f_X(x) = 1$. Le support A_X et la fonction de masse de probabilité fournissent une description complète du comportement aléatoire de X. La plus importante classe de v.a. discrètes non positives est l'ensemble des v.a. avec support arithmétique i.e. $x_k = kh$, $k \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ est un scalaire.

Une description des principales distributions discrètes est fournie en annexe : binomiale, Poisson, binomiale négative, géométrique. Comme il est expliqué au chapitre 2, ces 4 lois discrètes sont souvent utilisées comme lois de fréquence en actuariat. Leurs fonctions de répartition F_X et de masse de probabilité f_X sont fournies dans plusieurs logiciels (e.g. en `R` et `Excel`®).

1.2.3 Variables aléatoires continues

On dit qu'une v.a. X est absolument continue s'il existe une fonction $f_X(x) \geq 0$, définie sur $\mathbb{R}$, de telle sorte que

$$\Pr(X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

et

$$\Pr(X \in C) = \int_C f_X(x)\,\mathrm{d}x,$$

où C est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Par exemple, l'ensemble C peut être $]-\infty, a]$. Ainsi, on a

$$\Pr(X \in C) = \Pr(X \in]-\infty, a]) = \Pr(X \leq a) = F_X(a).$$

Si $C =]a, b]$, alors

$$\begin{aligned} \Pr(X \in C) &= \Pr(X \in]a, b]) = \Pr(a < X \leq b) \\ &= \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

On nomme f_X la fonction de densité de la v.a. X. On établit la relation suivante entre F_X et f_X :

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \Pr(X \in]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\ \mathrm{d}y.$$

Puis, en dérivant des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,\mathrm{d}y = f_X(x).$$

La fonction de densité f_X peut donc être obtenue en dérivant la fonction de répartition. Contrairement à la fonction de répartition F_X, la fonction de densité f_X peut être supérieure à 1. Une interprétation heuristique de f_X est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x)\,\mathrm{d}x &\simeq \Pr(X \in (x,\, x + \mathrm{d}x]) \\ &= \Pr(\text{v.a. } X \text{ prenne une valeur entre } x \text{ et } x + \mathrm{d}x). \end{aligned}$$

En annexe, on présente une description des principales distributions continues utilisées en actuariat telles que les distributions normale, uniforme, bêta, exponentielle, gamma, Erlang, Pareto, lognormale, Weibull. Pour toutes ces distributions, l'expression de la fonction de densité est analytique. Pour les lois uniforme, exponentielle, Erlang, Pareto et Weibull, la fonction de répartition est explicite ce qui n'est pas le cas pour les lois normale, lognormale et gamma avec un paramètre α qui n'est pas entier.

Les fonctions de répartition F_X et de densité f_X pour plusieurs de ces distributions sont fournies avec plusieurs logiciels (e.g. `R` et `Excel`®). Comme on l'explique au chapitre 2, les lois exponentielle, gamma, Erlang, Pareto, lognormale et Weibull sont utilisées notamment pour la modélisation des montants de sinistres. La loi normale est fondamentale en théorie des probabilités, en actuariat et en gestion quantitative des risques. Comme on le verra dans cet ouvrage, elle n'est toutefois pas directement utilisée pour la modélisation des montants de sinistres.

1.3 Espérance d'une variable aléatoire

1.3.1 Définition

L'espérance d'une v.a. X désigne la valeur espérée que peut prendre cette v.a.

Si X est une v.a. discrète avec support fini i.e. prenant un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_m\}$ et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'espérance de cette v.a. est donnée par

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i \Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i \ f_X(x_i).$$

Si X est une v.a. discrète avec support dénombrable i.e. qui prend des valeurs dans l'espace dénombrable $A_X = \{x_1, x_2, x_3, ...\} \in \mathbb{R}$ et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'expression de son espérance est

$$E[X] = \sum_{x \in A_X} x \Pr(X = x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \ f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Lorsque X est une v.a. continue avec fonction de densité f_X, l'espérance de X est définie par

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

L'espérance possède la propriété de linéarité

$$E[aX + b] = E[aX] + b = aE[X] + b,$$

que X soit une v.a. discrète ou continue.

En actuariat, la notion d'espérance est importante. Par exemple, si la v.a. X représente les coûts pour un contrat d'assurance pour la prochaine année, alors on verra que l'espérance de X correspond à la prime pure de

ce contrat. Généralement, la prime chargée pour le contrat est supérieure à l'espérance de X. Différents modèles pour X sont étudiés au chapitre 2.

On a le résultat suivant pour une v.a. continue positive.

Proposition 1.1 *Soit une v.a. X continue positive dont l'espérance existe. Alors, on a $E[X] = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x$.*

Preuve. On a

$$E[X] = \int_0^\infty y f_X(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^y f_X(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

qui devient

$$E[X] = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^\infty \overline{F}_X(x)\mathrm{d}x.$$

■

On a aussi un résultat similaire pour une v.a. discrète définie sur un support arithmétique $\{0, 1h, 2h, ...\}$.

Proposition 1.2 *Soit une v.a. X discrète définie sur $\{0, 1h, 2h, ...\}$ dont l'espérance existe. Alors, on a $E[X] = h\sum_{k=0}^\infty \overline{F}_X(kh)$.*

Preuve. On déduit

$$E[X] = \sum_{j=0}^\infty jhf_X(jh) = h\sum_{j=0}^\infty \sum_{k=0}^j f_X(jh)$$

qui devient

$$E[X] = h\sum_{k=0}^\infty \sum_{j=k+1}^\infty hf_X(jh) = h\sum_{k=0}^\infty \overline{F}_X(kh).$$

■

1.3.2 Espérance d'une fonction

On examine l'espérance d'une fonction g de X.

Dans le cas où X est une v.a. discrète avec support fini et avec une fonction de masse de probabilité f_X, l'expression de $E[g(X)]$ est

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^m g(x_i) f_X(x_i).$$

Lorsque X est une v.a. discrète définie sur un support dénombrable et avec une fonction de masse de probabilité f_X, on a

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \ f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge.

Si X est une v.a. continue avec fonction de densité f_X, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) \ f_X(x) \, \mathrm{d}x.$$

1.3.3 Moment d'ordre n

Un exemple important de fonction g est le cas où $g(y) = y^n$, pour $n \in \mathbb{N}^+$. On définit $E[X^n]$ comme le moment d'ordre n de la v.a. X. Ainsi, si la v.a. X est discrète avec support fini, on a

$$E[X^n] = \sum_{i=1}^{m} x_i^n f_X(x_i).$$

Si la v.a. X est discrète avec support dénombrable, l'expression de $E[X^n]$ est

$$E[X^n] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \Pr(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n f_X(x_i),$$

en supposant que la somme converge. Pour une v.a. continue X, on a

$$E[g(X)] = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \ f_X(x) \, \mathrm{d}x,$$

en supposant que l'intégrale existe.

1.3.4 Espérance d'une fonction indicatrice

Soit la fonction g définie par $g(y) = 1_{\{y \in C\}}$, où $1_{\{y \in C\}}$ est une fonction indicatrice telle que

$$1_{\{y \in C\}} = \begin{cases} 1, & y \in C \\ 0, & y \notin C \end{cases},$$

où C est un sous-ensemble du support de X. Ainsi, on a $E\left[1_{\{X \in C\}}\right] = \Pr(X \in C)$.

Si $C = (-\infty, b]$, alors la fonction indicatrice $1_{\{y \in (-\infty, b]\}}$ est équivalente à $1_{\{y \leq b\}}$, où

$$1_{\{y\leq b\}} = \begin{cases} 1, & y \leq b \\ 0, & y > b \end{cases},$$

et l'expression de l'espérance devient

$$E\left[g\left(X\right)\right] = E\left[1_{\{X\leq b\}}\right] = F_X\left(b\right).$$

La fonction de répartition de la v.a. X peut donc s'écrire comme l'espérance de fonction indicatrice $1_{\{y\leq b\}}$. De façon similaire, à partir d'une fonction indicatrice $1_{\{y>b\}}$, soit

$$1_{\{y>b\}} = \begin{cases} 1, & y > b \\ 0, & y \leq b \end{cases},$$

on a

$$E\left[g\left(X\right)\right] = E\left[1_{\{X>b\}}\right] = \overline{F}_X\left(b\right),$$

qui correspond à la fonction de survie de X.

1.3.5 Intégrale de Riemann – Stieltjes

Il peut aussi advenir que la distribution d'une v.a. X soit mixte i.e. l'expression de sa fonction de répartition est $F_X\left(x\right) = \theta F_0\left(x\right) + \left(1-\theta\right) F_1\left(x\right)$, où F_0 est une fonction de répartition discrète avec fonction de masse de probabilité f_0 et F_1 est une fonction de répartition absolument continue avec fonction de densité de probabilité f_1. Alors, l'espérance de $g\left(X\right)$ est définie en fonction de l'intégrale de Riemann - Stieltjes

$$\begin{aligned} E\left[g\left(X\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right) \mathrm{d}F_X\left(x\right) \\ &= \theta \sum_{x\in A} g\left(x\right) f_0\left(x\right) + \left(1-\theta\right) \int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right) f_1\left(x\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

où A correspond à l'ensemble de tous les points de sauts de $F_X\left(x\right)$.

1.4 Espérance tronquée

1.4.1 Définition

L'espérance tronquée d'une v.a. X est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g où $g\left(y\right) = y \times 1_{\{y\leq d\}}$. On définit l'espérance tronquée à d de la v.a. X par $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right]$. On peut aussi s'intéresser au complément de cette espérance qui est

$$E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] = E\left[X\right] - E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right]. \tag{1.1}$$

Les espérances $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ et $E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$ sont utiles notamment pour définir l'expression de la mesure de risque TVaR, comme il est expliqué à la section 1.11.

Si X est une v.a. discrète avec un support fini, on a

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{m} x_i 1_{\{x_i \leq d\}} f_X\left(x_i\right).$$

Si X est une v.a. discrète avec un support dénombrable, on a

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{\{x_i \leq d\}} f_X\left(x_i\right),$$

en supposant que la somme converge.

Lorsque X est une v.a. continue, l'expression de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ est

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \int_{-\infty}^{d} x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

1.4.2 Exemples

Dans cette sous-section, on développe les expressions $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ et $E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right]$ pour certaines lois continues.

Exemple 1.3 *Soit la v.a. continue positive $X \sim Exp(\beta)$ dont la fonction de densité est $f_X\left(x\right) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. L'expression de l'espérance tronquée est*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^d x \beta \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{d}x = -d\mathrm{e}^{-\beta d} + \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right). \end{aligned}$$

De (1.1), on déduit aussi

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= \int_d^{\infty} x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} + d\mathrm{e}^{-\beta d} - \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right) \\ &= d\mathrm{e}^{-\beta d} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}. \ \square \end{aligned} \tag{1.2}$$

Exemple 1.4 *Soit la v.a. continue positive $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ où la fonction de densité est $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$, $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction de répartition est notée $H\left(x; \alpha, \beta\right)$ et la fonction de survie, $\overline{H}\left(x; \alpha, \beta\right)$. L'expression de*

$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ est donnée par

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x \frac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^d \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha+1-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha}{\beta} H\left(d; \alpha+1, \beta\right) = E\left[X\right] H\left(d; \alpha+1, \beta\right). \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= E\left[X\right] - E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] \\ &= E\left[X\right]\left(1 - H\left(d; \alpha+1, \beta\right)\right) \\ &= E\left[X\right] \overline{H}\left(d; \alpha+1, \beta\right). \square \end{aligned} \tag{1.3}$$

Exemple 1.5 *Soit la v.a. continue $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ où la fonction de densité est $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où la v.a. Z obéit à la loi normale standard, soit $Z \sim N\left(0, 1\right)$, dont la fonction de répartition F_Z est notée Φ et la fonction quantile, Φ^{-1}. Alors, la fonction de répartition de X est notée comme suit :*

$$F_X\left(x\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

L'expression de $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ est donnée par

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_{-\infty}^d x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^d \mu \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{-\infty}^d \left(x-\mu\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \mu\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] &= E\left[X\right] - E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] \\ &= \mu\overline{\Phi}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \square \end{aligned} \tag{1.4}$$

Exemple 1.6 *Soit la v.a. continue positive* $X \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$. *Comme* $X = \mathrm{e}^Y$ *où* $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, *alors l'expression de la fonction de répartition pour* X *est*

$$F_X(x) = F_Y(\ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right).$$

Si $c \in \mathbb{R}$, *alors on a* $cX \sim LN\left(\mu + \ln(c), \sigma^2\right)$, *car* $cX = c\mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^{Y+\ln(c)}$ *et* $Y + \ln(c) \sim N\left(\mu + \ln(c), \sigma^2\right)$. *De plus, on a* $X^{-1} \sim LN\left(-\mu, \sigma^2\right)$, *puisque* $X^{-1} = \mathrm{e}^{-Y}$ *et* $-Y \sim N\left(-\mu, \sigma^2\right)$. *L'expression de l'espérance tronquée est*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= E\left[\mathrm{e}^Y \times 1_{\{\mathrm{e}^Y \leq d\}}\right] = E\left[\mathrm{e}^Y \times 1_{\{Y \leq \ln(d)\}}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\ln(d)} \mathrm{e}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \\ &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \int_{-\infty}^{\ln(d)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(x - \left(\mu + \sigma^2\right)\right)}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

qui devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right).$$

Par la suite, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] = E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right). \square \tag{1.5}$$

Exemple 1.7 *Soit la v.a. continue positive* $X \sim Pa(\alpha, \beta)$ *avec* $\alpha > 1$ *et dont la fonction de densité est* $f_X(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. *L'expression de* $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right]$ *est donnée par*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= \int_0^d x \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \mathrm{d}x \\ &= -d\left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^\alpha + \int_0^d \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda + x)^\alpha} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

qui devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = -d\left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^\alpha + \frac{\lambda}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda + d)^{\alpha-1}}\right).$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] &= E[X] - E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}} + d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}. \square \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.5 Variance

1.5.1 Définition

Soit une v.a. X dont le moment d'ordre 2 existe. On définit la variance de la v.a. X par

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]. \tag{1.7}$$

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de (1.7) devient

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E[X])^2 f_X(x_i)$$

ou

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E[X])^2 f_X(x_i).$$

Dans le cas où X est une v.a. continue, on a

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

La variance de X s'interprète comme étant une mesure de la variabilité ou de la dispersion de la v.a. X par rapport à son espérance. Clairement, la variance est toujours positive ou nulle. Elle prend une valeur nulle dans le cas où la v.a. X est une constante.

En développant (1.7), on obtient l'expression

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2, \tag{1.8}$$

qui est couramment utilisée pour calculer la variance de X.

Soit la v.a. Y définie comme une transformation linéaire de X, i.e. $Y = aX + b$. Alors, la variance de Y est donnée par

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(aX + b) = \mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X).$$

1.5.2 Écart type

On définit l'écart type de la v.a. X par $\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$, qui est aussi une messure de dispersion ou de variabilité de la v.a. X par rapport à son espérance. L'écart type est de la même échelle que les valeurs pouvant être prises par la v.a. X. Comme la variance, l'écart type est positif ou nul. De plus, pour $Y = aX + b$, on a

$$\sqrt{\mathrm{Var}\,(Y)} = a\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}.$$

1.5.3 Coefficient de variation

On a également recours au coefficient de variation de la v.a. X, défini par $\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}{E[X]}$. Le coefficient de variation est perçu comme une mesure relative de variabilité ou de dispersion et il est aussi appelé le risque unitaire en gestion quantitative des risques.

Le coefficient de variation de la loi exponentielle est de 1, servant de point de comparaison pour les autres lois continues positives. Une loi avec un coefficient de variation supérieur (inférieur) à 1 est considérée comme une loi avec une variance élevée (faible).

Le coefficient de variation de la loi gamma est donné par $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et on observe qu'il est supérieur (inférieur) à 1 si le paramètre α est inférieur (supérieur) à 1. Le coefficient de la loi Erlang est toujours inférieur à 1. Le coefficient de variation d'une loi très utilisée en actuariat, la loi lognormale, est donné par $\sqrt{\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1}$ et il est toujours supérieur à 1. Si $\alpha > 2$, le coefficient de variation de la loi de Pareto, dont l'expression est $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}$, est aussi toujours supérieur à 1.

1.6 Moments centrés

Soit une v.a. X dont le moment d'ordre n existe. On définit le moment centré d'ordre n par $E\left[(X - E\left[X\right])^n\right]$. La variance est un cas particulier de moment centré avec $n = 2$.

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de $E\left[(X - E\left[X\right])^n\right]$ est donnée par

$$E\left[(X - E\left[X\right])^n\right] = \sum_{i=1}^{m} (x_i - E\left[X\right])^n f_X\left(x_i\right)$$

ou

$$E\left[(X - E\left[X\right])^n\right] = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\left[X\right])^n f_X\left(x_i\right).$$

Pour une v.a. continue X, on a

$$E\left[(X - E\left[X\right])^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\left[X\right])^n f_X\left(x\right) \mathrm{d}x.$$

En développant son expression, on a la relation suivante :

$$E\left[(X - E\left[X\right])^n\right] = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} E\left[X^j\right] E\left[X\right]^{n-j}. \tag{1.9}$$

Les moments centrés sont invariants à la translation. Soit la v.a. $Y = X + c$. Alors, on a

$$E\left[(Y - E\left[Y\right])^n\right] = E\left[(X - E\left[X\right])^n\right].$$

De plus, pour la v.a. $Y = cX$, on a

$$E\left[(Y - E\left[Y\right])^n\right] = c^n E\left[(X - E\left[X\right])^n\right].$$

Outre la variance, on est aussi intéressé par le moment centré d'ordre 3, qui permet de définir le coefficient d'asymétrie.

1.7 Coefficient d'asymétrie

Soit la v.a. X dont les trois premiers moments existent. Le coefficient d'asymétrie de la v.a. X, noté $\gamma\left(X\right)$, est défini par

$$\gamma(X) = \frac{E\left[(X - E\left[X\right])^3\right]}{\mathrm{Var}\left(X\right)^{\frac{3}{2}}},$$

où le troisième moment centré est donné par

$$E\left[(X - E\left[X\right])^3\right] = E\left[X^3\right] - 3E\left[X\right]E\left[X\right]^2 + 2E\left[X\right]^3, \tag{1.10}$$

selon (1.9).

Le coefficient d'asymétrie donne une information quant à la symétrie de la distribution de X par rapport à son espérance.

Dans le cas où $\gamma(X) = 0$, la distribution de la v.a. X est symétrique par rapport à son espérance. La loi normale est un exemple de distribution avec un coefficient d'asymétrie nul.

Si $\gamma(X) > 0$, l'asymétrie de la distribution de X est à gauche (positive), ce qui signifie que la distribution est plus étalée à droite de l'espérance. Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur beaucoup plus élevée que son espérance est élevée.

Le coefficient d'asymétrie de la distribution gamma est donné par $\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ et il décroît quand le paramètre de forme α augmente. Le coefficient d'asymétrie de la loi exponentielle est 2. Les distributions lognormale et de Pareto ($\alpha > 3$) ont aussi des coefficients d'asymétrie positifs. La loi de Poisson, la loi binomiale négative et la loi binomiale avec $q < \frac{1}{2}$ possèdent une asymétrie positive.

Quand $\gamma(X) < 0$, l'asymétrie de la distribution de X est à droite. Par exemple, la loi binomiale avec $q > \frac{1}{2}$ possède une asymétrie négative.

1.8 Fonction génératrice des moments

La fonction génératrice des moments (f.g.m.) d'une v.a. X est définie par

$$M_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right],$$

en supposant que l'espérance existe pour un ensemble de valeurs de $t \neq 0$. La f.g.m. est un cas particulier de l'espérance d'une fonction g de X où $g(y) = \mathrm{e}^{ty}$.

Si X est une v.a. discrète avec support fini ou dénombrable, l'expression de la f.g.m. de X est

$$M_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{tx_i} f_X(x_i)$$

ou

$$M_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}^{tx_i} f_X(x_i),$$

si la somme converge pour un ensemble de valeurs de $t \neq 0$. Dans le cas d'une v.a. continue X, on a

$$M_X(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\ \mathrm{d}x,$$

si l'intégrale existe pour des valeurs de $t \neq 0$.

La f.g.m. des distributions e.g. exponentielle, gamma et normale existe. En revanche, la f.g.m. des distributions e.g. de Pareto et de Burr n'existe pas. Quand elle existe, la f.g.m. de X permet d'identifier sa distribution.

Si la f.g.m. d'une v.a. X existe, le moment d'ordre m de X correspond à la m-ième dérivée de la f.g.m. évaluée à $t = 0$

$$E\left[X^m\right] = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} M_X(t)\bigg|_{t=0}.$$

En effet, on a

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\Big|_{t=0} = E\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\mathrm{e}^{tX}\right]\Big|_{t=0}$$

qui devient

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} M_X(t)\Big|_{t=0} = E\left[X^m \mathrm{e}^{tX}\right]\big|_{t=0} = E\left[X^m\right].$$

1.9 Fonction génératrice des probabilités

Soit une v.a. discrète X définie sur $\mathbb{N}$. La fonction génératrice des probabilités (f.g.p.) de la v.a. X est définie par

$$P_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_X(k) \tag{1.11}$$

si la somme converge pour un ensemble de valeurs de $t \neq 1$. On déduit les valeurs de $f_X(k)$ en dérivant (1.11) k fois par rapport à t, en posant $t = 0$ et en divisant par $k!$ selon la relation suivante :

$$f_X(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} P_X(t)\Big|_{t=0},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$ et avec $f_X(0) = P_X(0)$. De plus, on a

$$E[X] = \frac{d}{dt} P_X(t)\Big|_{t=1}.$$

1.10 Fonction quantile

1.10.1 Définition de base

On débute avec la définition de base de la fonction quantile.

Définition 1.8 *Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la fonction inverse F_X^{-1} de F_X par*

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) < u\},$$

pour $u \in (0,1)$. Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. La fonction inverse F_X^{-1} est aussi appelée la fonction quantile de X.

À partir de la définition 1.8, on déduit les propriétés suivantes.

Propriétés 1.9 *La fonction quantile satisfait les propriétés suivantes:*

1. F_X^{-1} *est non décroissante (croissante au sens large) ;*
2. F_X^{-1} *est semi-continue à gauche ;*
3. $F_X^{-1}\left(F_X\left(x\right)\right) \leq x$ *;*
4. $F_X\left(F_X^{-1}\left(x\right)\right) \geq u$.

1.10.2 Variables aléatoires continues

Si la v.a. X est continue, alors F_X^{-1} correspond à la seule valeur x_u telle que $F_X\left(x_u\right) = u$. Pour certaines lois continues, il est possible d'obtenir une expression explicite pour la fonction quantile. Cette démarche est illustrée dans les exemples suivants pour quelques lois continues.

Exemple 1.10 *Soit la v.a.* $X \sim Exp(\beta)$ *dont la fonction de répartition est* $F_X\left(x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$. *L'expression analytique de la fonction quantile est déterminée en isolant* x *dans la relation* $F_X\left(x\right) = u$. *On obtient* $F_X^{-1}\left(u\right) = -\frac{1}{\beta}\ln\left(1-u\right)$. □

Exemple 1.11 *Soit la v.a.* $X \sim Pa\left(\alpha, \lambda\right)$ *dont la fonction de répartition est* $F_X\left(x\right) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}$. *On détermine la fonction quantile en cherchant* x *tel que* $F_X\left(x\right) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha} = u$ *où* u *est fixé entre* $(0,1)$. *On obtient*

$$F_X^{-1}(u) = \frac{\lambda}{\left(1-u\right)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda, \quad u \in (0,1)\,. \; \square$$

Exemple 1.12 *Soit la v.a.* $X = bU$ *où* $b \in \mathbb{R}^+$ *et* $U \sim B\hat{e}ta\left(\alpha, 1\right)$ *avec* $F_U\left(x\right) = x^{\alpha}$, $x \in [0,1]$. *Alors, il suffit d'isoler* x *dans l'équation* $u = F_X\left(x\right) = \left(\frac{x}{b}\right)^{\alpha}$ *et on déduit que* $F_X^{-1}\left(u\right) = bu^{\frac{1}{\alpha}}$. □

Pour d'autres lois continues, on dispose d'une expression analytique pour $F_X\left(x\right)$ pour laquelle il est impossible d'isoler l'expression de la fonction quantile. Dans ces circonstances, on doit recourir à un outil d'optimisation pour calculer la valeur de la fonction quantile. C'est le cas notamment de la loi Erlang dont la fonction de répartition est

$$F_X\left(x\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(\beta x\right)^j}{j!}.$$

Les fonctions quantiles F_X^{-1} pour plusieurs distributions continues sont programmées dans des logiciels (e.g. `R` et `Excel`®).

1.10.3 Variables aléatoires discrètes

Pour les v.a. discrètes, il suffit d'appliquer directement la définition 1.8 comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 1.13 *Soit la v.a. discrète X définie avec*

$$\Pr(X=0)=0.2,\ \Pr(X=100)=0.3,\ \Pr(X=500)=0.35$$

et $\Pr(X=1000)=0.15$. *Les expressions des fonctions de répartition et quantile sont*

$$F_X(u)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.2, & 0\le x<100\\ 0.5, & 100\le x<500\\ 0.85, & 500\le x<1000\\ 1, & x\ge 1000\end{cases} \quad \text{et } F_X^{-1}(u)=\begin{cases}0, & 0\le u\le 0.2\\ 100, & 0.2<u\le 0.5\\ 500, & 0.5<u\le 0.85\\ 1000, & 0.85<u\le 1\end{cases}.$$

□

Les fonctions quantiles F_X^{-1} de plusieurs distributions discrètes sont fournies dans des logiciels (e.g. `R` et `Excel`®).

1.10.4 Cas non standards

L'identification de la fonction quantile devient plus délicate lorsque la fonction de répartition présente une forme non standard avec des portions à la fois monotones croissantes et des plateaux (ou des portions horizontales). Dans le prochain exemple, on présente le cas d'une v.a. X ayant une telle fonction de répartition non standard.

Exemple 1.14 *Soit la v.a. X dont la fonction de répartition est donnée par*

$$F_X(x)=\begin{cases}\left(\frac{x}{200}\right)^2, & 0\le x<100\\ 0.25, & 100\le x<200\\ 1-\left(\frac{300}{300+x}\right)^2, & x\ge 200\end{cases}.$$

La fonction de répartition est représentée sur le graphique de la figure 1.1.

Alors, l'expression de F_X^{-1} est donnée par

$$F_X^{-1}(u)=\begin{cases}200\left(u^{\frac{1}{2}}\right), & 0\le u\le 0.25\\ 200, & 0.25<u\le 0.64\\ 300\left((1-u)^{-\frac{1}{2}}-1\right), & 0.64\le u<1\end{cases}.$$

□

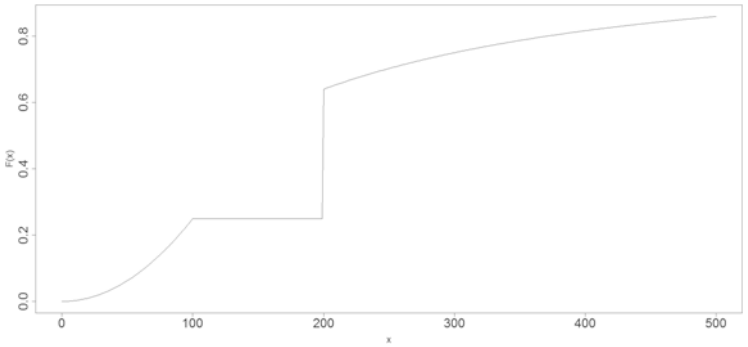

FIGURE 1.1. Courbe de $F_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{200}\right)^2, & 0 \leq x < 100 \\ 0.25, & 100 \leq x < 200 \\ 1 - \left(\frac{300}{300+x}\right)^2, & x \geq 200 \end{cases}$.

1.10.5 Deuxième définition

Dans certaines situations, on a aussi recours à une seconde définition donnée ci-dessous de la fonction quantile.

Définition 1.15 *Soit la v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit une deuxième version de la fonction inverse F_X^{-1+} de F_X par*

$$F_X^{-1+}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > u\} = \sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq u\},$$

pour $u \in (0,1)$. Par convention, $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$. Cette deuxième version de la fonction inverse F_X^{-1+} est aussi appelée une deuxième version de la fonction quantile de X.

Les propriétés de F_X^{-1+} sont :

- F_X^{-1+} est non décroissante (croissante au sens large) ;
- F_X^{-1+} est semi-continue à droite.

Si la v.a. X est continue, alors $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$.

Si X est une v.a. discrète et si u correspond à une partie horizontale de $F_X(x)$, alors $F_X^{-1}(u)$ correspond à l'extrémité gauche de l'intervalle et $F_X^{-1+}(x)$ correspond à l'extrémité droite de l'intervalle.

On illustre la distinction entre les deux fonctions F_X^{-1+} et F_X^{-1} dans les exemples qui suivent.

Exemple 1.16 *Soit la v.a. discrète X avec $\Pr(X = x) = \frac{1}{4}$, où $x \in \{1, 5, 10, 18\}$. Alors, $F_X^{-1}(0.4) = F_X^{-1+}(0.4) = 5$ mais $F_X^{-1}(0.5) = 5$ et $F_X^{-1+}(0.5) = 10$.* □

Exemple 1.17 *Soit la v.a. discrète X définie à l'exemple 1.13. Pour $u \in [0,1] \setminus \{0.2, 0.5, 0.85\}$, on a $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$. De plus, $F_X^{-1+}(0.2) = 100$, $F_X^{-1+}(0.5) = 500$ et $F_X^{-1+}(0.85) = 1000$.* □

Exemple 1.18 *Soit la v.a. X dont la fonction de répartition est définie à l'exemple 1.14. On a $F_X^{-1+}(u) = F_X^{-1}(u)$ pour toute valeur de $u \neq 0.25$. Pour $u = 0.25$, on a $F_X^{-1+}(0.25) = 200$ et $F_X^{-1}(0.25) = 100$.* □

1.10.6 Propriétés de la fonction quantile

On a le théorème suivant, dont l'une des applications importantes conduit à la méthode inverse utilisée dans la simulation stochastique (voir chapitre 5).

Théorème 1.19 ***Théorème de la fonction quantile.*** *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, la fonction de répartition de $F_X^{-1}(U)$ est F_X.*

Preuve. On fait la preuve en trois temps.

On suppose que la v.a. X est continue, ce qui implique

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right),$$

car les évènements $\left\{F_X^{-1}(U) \leq x\right\}$ et $\{U \leq F_X(x)\}$ coïncident. De la fonction de répartition de $U \sim U(0,1)$, on déduit

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x).$$

On suppose que la v.a. X est définie sur $\mathbb{N}$. Alors, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) = k\right) = \Pr\left(F_X(k-1) < U \leq F_X(k)\right),$$

puisque l'évènement $\left\{F_X^{-1}(U) = k\right\}$ correspond aussi à l'évènement $\{F_X(k-1) < U \leq F_X(k)\}$. Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} \Pr\left(F_X^{-1}(U) = k\right) &= \Pr\left(F_X(k-1) < U \leq F_X(k)\right) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1). \end{aligned}$$

Maintenant, on considère le cas général incluant les deux cas précédents mais aussi le cas d'une v.a. X dont la fonction de répartition peut avoir des sauts et des portions horizontales. D'abord, on suppose que $x \geq F_X^{-1}(u)$, ce qui implique, d'après les propriétés 1.9 de F_X^{-1}, que $F_X^{-1}(u) \geq x$. Ensuite, on suppose que $F_X(x) \geq u$, ce qui implique $x \geq F_X^{-1}(u)$. Par conséquent, on a aussi

$$\Pr\left(F_X^{-1}(U) \leq x\right) = \Pr\left(U \leq F_X(x)\right) = F_X(x).$$

■

La prochaine proposition est aussi importante.

Théorème 1.20 . ***Théorème "Probability Integral Transform"***. *Soit une v.a. continue X avec fonction de répartition F_X et fonction quantile F_X^{-1}. Soit une v.a. $U \sim U(0,1)$. Alors, $F_X(X) \sim U(0,1)$.*

Preuve. Pour tout $u \in (0,1)$, on développe l'expression de la fonction de répartition de $F_X(X)$

$$\Pr\left(F_X(X) \leq u\right) = \Pr\left(X \leq F_X^{-1}(u)\right) = F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u,$$

ce qui permet de déduire au résultat désiré. ■

Selon la proposition suivante, la fonction quantile d'une transformation croissante et continue d'une v.a. s'exprime comme la transformation de la fonction quantile de cette v.a.

Proposition 1.21 *Soit une v.a. X. Si φ est une fonction strictement croissante et continue, alors on a*

$$F_{\varphi(X)}^{-1}(u) = \varphi\left(F_X^{-1}(u)\right),$$

pour $u \in (0,1)$.

Preuve. Voir e.g. [24]. ■

On a le résultat suivant à propos de la relation entre la fonction quantile et l'espérance.

Proposition 1.22 *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X, fonction quantile F_X^{-1} et dont l'espérance existe. Alors, on a*

$$\begin{aligned}\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X \times 1_{\left\{X > F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right] \\ &\quad + F_X^{-1}(\kappa)\left(F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right) - \kappa\right) \qquad (1.12)\\ \int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u &= E\left[X \times 1_{\left\{X \leq F_X^{-1}(\kappa)\right\}}\right] \\ &\quad + F_X^{-1}(\kappa)\left(\kappa - F_X\left(F_X^{-1}(\kappa)\right)\right), \qquad (1.13)\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\int_0^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E[X].$$

Preuve. Le résultat est évident pour une v.a. discrète et pour un v.a. continue. Dans le cas général, on peut consulter [1]. ■

Les deuxièmes termes permettent de tenir compte des sauts éventuels dans la distribution de X. Si la v.a. X est continue, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.23 *Lorsque la v.a. X est continue, $F_X\left(F_X^{-1}(u)\right) = u$ et (1.12) et (1.13) deviennent*

$$\int_\kappa^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X > F_X^{-1}(\kappa)\}}\right] \tag{1.14}$$

$$\int_0^\kappa F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u = E\left[X \times 1_{\{X \leq F_X^{-1}(\kappa)\}}\right]. \tag{1.15}$$

1.11 Mesures de risque VaR et TVaR

Dans cette section, on présente les principales mesures de risque utilisées en actuariat et gestion quantitative des risques. Les propriétés de ces mesures sont étudiées au chapitre 3.

1.11.1 Définitions

La mesure *Value at Risk* (VaR) est une mesure de risque très populaire en gestion des risques et en science actuarielle.

Définition 1.24 *Soit $0 < \kappa < 1$. La mesure VaR avec un niveau de confiance κ associée à la v.a. X est définie par $VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa)$.*

Ainsi, la probabilité que la v.a. X prenne une valeur supérieure à la VaR est moindre ou égale à $1-\kappa$. Toutefois, la mesure VaR ne donne pas d'information sur le comportement de la distribution au delà de la VaR. Par exemple, pour une v.a. continue X et pour $\kappa = 99.99\%$, cela signifie qu'il y a une probabilité de 0.01% que la v.a. X prenne une valeur qui est supérieure à $VaR_{99.99\%}(X)$ sans nous préciser l'ampleur de la valeur que X peut prendre si elle excède la VaR.

La mesure *Tail Value at Risk* (TVaR) est proposée comme une alternative à la mesure VaR.

Définition 1.25 *Soit $0 \leq \kappa < 1$. La mesure TVaR avec un niveau de confiance κ est définie par*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u, \tag{1.16}$$

avec $TVaR_0(X) = \int_0^1 VaR_u(X)\,\mathrm{d}u = E[X]$.

En utilisant (1.12) avec (1.16), on obtient une expression alternative pour la mesure TVaR :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}\right] + VaR_\kappa(X)\left(F_X\left(VaR_\kappa(X)\right) - \kappa\right)}{1-\kappa}, \tag{1.17}$$

où $E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]$ est calculée directement ou en utilisant la relation

$$E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] = E[X] - E\left[X \times 1_{\{X\leq VaR_\kappa(X)\}}\right].$$

Selon (1.16), la mesure $TVaR_\kappa(X)$ peut être considérée comme une moyenne arithmétique des mesures $VaR_u(X)$ pour des valeurs de u supérieures à κ. Alors que la mesure VaR indique un seul point de la queue de la distribution, la mesure TVaR fournit une meilleure indication de l'épaisseur de la queue.

On présente aussi la définition de la mesure *Conditional Tail Expectation* (CTE).

Définition 1.26 *Soit* $0 \leq \kappa < 1$. *La mesure CTE avec un niveau de confiance* κ *associée à la v.a.* X *est définie par*

$$CTE_\kappa(X) = E[X|\, X > VaR_\kappa(X)],$$

qui peut aussi s'écrire comme suit :

$$CTE_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{\Pr(X > VaR_\kappa(X))}.$$

La mesure CTE est l'espérance de la v.a. X dans les cas où cette v.a. prend des valeurs supérieures à la VaR. La mesure CTE correspond à la moyenne des $100(1-\kappa)$ % valeurs les plus élevées que peut prendre X. On a $CTE_0(X) = E[X]$.

On analyse la relation entre les mesures de risque TVaR et CTE. Si la v.a. X est continue alors $F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa = 0$ et il en résulte que

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{1.18}$$

De plus, comme

$$\Pr(X > VaR_\kappa(X)) = \overline{F}_X(VaR_\kappa(X)) = 1-\kappa,$$

on obtient

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = CTE_\kappa(X). \tag{1.19}$$

On constate que la mesure CTE est égale à la mesure TVaR lorsque la v.a. X est continue, ce qui n'est pas le cas de façon générale. En fait, la mesure TVaR a été proposée initialement selon la définition 1.24 et la relation (1.19) a mené à la définition de la mesure CTE.

Pour éviter toute confusion, on utilise uniquement la mesure TVaR dans cet ouvrage. En gestion quantitative des risques, la mesure TVaR est souvent appelée *expected-shortfall*.

Exemple 1.27 *Soit une v.a. discrète X avec support*

$$\{0, 100, 200, 500, 1000\}$$

et dont les valeurs de la fonction de masse de probabilité sont fournies dans le tableau suivant :

x	0	100	200	500	1000
$f_X(x)$	0.3	0.4	0.15	0.10	0.05
$F_X(x)$	0.3	0.7	0.85	0.95	1.00

La valeur de $E[X]$ est 170. *Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$ et $CTE_\kappa(X)$ pour $\kappa = 0.22$, 0.3, 0.39, 0.8501, 0.95 et 0.9999 :*

κ	0.22	0.3	0.39	0.8501	0.95	0.9999
$VaR_\kappa(X)$	0	0	100	500	500	1000
$TVaR_\kappa(X)$	217.9487	242.8571	263.9344	666.7779	1000	1000
$CTE_\kappa(X)$	242.8571	242.8571	433.3333	1000	1000	*indéfinie*

Comme $VaR_{0.39}(X) = 100$, on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_{0.39}(X) &= \frac{E[X \times 1_{\{X > VaR_{0.39}(X)\}}]}{1 - 0.39} \\ &\quad + \frac{VaR_{0.39}(X)(F_X(VaR_{0.39}(X)) - 0.39)}{1 - 0.39} \\ &= \frac{200 \times 0.15 + 500 \times 0.1 + 1000 \times 0.05 + 100(0.7 - 0.39)}{1 - 0.39} \\ &= 263.934426 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} CTE_{0.39}(X) &= E[X | X > VaR_{0.39}(X)] \\ &= \sum_{x \in \{200,500,1000\}} \frac{x \Pr(X = x)}{\Pr(X > 100)} \\ &= \frac{200 \times 0.15 + 500 \times 0.1 + 1000 \times 0.05}{1 - 0.7} \\ &= 433.333333. \end{aligned}$$

On constate que la valeur de $CTE_\kappa(X)$ pour $\kappa > 0.95$ n'est pas définie, fournissant un argument supplémentaire à utiliser la mesure TVaR. □

1.11.2 Propriétés

Le résultat suivant est important pour la mesure VaR.

Proposition 1.28 *Soit une v.a. X. Pour une fonction croissante et continue φ de X, on a*

$$VaR_\kappa(\varphi(X)) = \varphi(VaR_\kappa(X)).$$

Preuve. Le résultat découle de la proposition 1.21. ■

De la proposition 1.28, on déduit les deux propriétés suivantes.

Propriété 1.29 ***Invariance à la multiplication par un scalaire positif.*** *Pour un scalaire $a \in \mathbb{R}^+$, on a*

$$VaR_\kappa(aX) = aVaR_\kappa(X) \text{ et } TVaR_\kappa(aX) = aTVaR_\kappa(X).$$

Preuve. Comme la fonction $\varphi(x) = ax$ est croissante et continue, l'application de la proposition 1.28 mène au premier résultat. Le deuxième résultat découle de la définition de base de la TVaR et du premier résultat. ■

Propriété 1.30 ***Invariance à la translation.*** *Pour un scalaire $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$VaR_\kappa(X+b) = VaR_\kappa(X) + b \text{ et } TVaR_\kappa(X+b) = TVaR_\kappa(X) + b.$$

Preuve. La fonction $\varphi(ax) = x + a$ est croissante et continue. Alors, avec la proposition 1.28, on obtient le premier résultat. On remplaçe ce dernier dans la définition de base de la TVaR ce qui mène au second résultat. ■

Les proprétés des mesures VaR et TVaR sont traitées en détail au chapitre 3.

Une autre illustration de la proposition 1.28 est fournie dans le prochain exemple.

Exemple 1.31 *Soient les v.a. X et $Y = \mathrm{e}^X$. Alors, $VaR_\kappa(Y) = \mathrm{e}^{VaR_\kappa(X)}$, car $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ est une fonction croissante et continue.* □

1.11.3 Exemples

On développe les expressions de la VaR et de la TVaR pour quelques lois continues.

Exemple 1.32 *Soit la v.a. $X \sim Exp(\beta)$. L'expression de la VaR est*

$$VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa).$$

Si $d = VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa)$ *dans (1.2), alors* $\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)} = 1-\kappa$. *On remplace cette dernière expression dans (1.18) et on déduit*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = VaR_\kappa(X) + \frac{1}{\beta}. \square$$

Exemple 1.33 *Soit la v.a.* $X \sim Ga(\alpha,\beta)$. *Il n'y pas de forme analytique pour la VaR. Sa valeur est calculée à l'aide d'un outil d'optimisation. On peut aussi utiliser la fonction quantile de la loi gamma programmée dans plusieurs logiciels (e.g.* `R`*) pour calculer sa valeur. Avec (1.3) et (1.18), on obtient*

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = \frac{E[X]\,\overline{H}(VaR_\kappa(X);\alpha+1,\beta)}{1-\kappa}. \square$$

Exemple 1.34 *Soit la v.a.* $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$. *On a la relation* $X = \mu + \sigma Z$, *où la v.a.* $Z \sim N(0,1)$, *dont la fonction de répartition* F_Z *est notée* Φ *et la fonction quantile,* Φ^{-1}. *L'expression de la VaR de* X *est*

$$VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa).$$

Il n'y pas de forme analytique pour la VaR. On peut avoir recours à la fonction quantile de la loi normale qui est programmée dans plusieurs logiciels (e.g. `R` *et* `Excel`®*).*

Avec $d = VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa)$ *dans (1.4) et (1.18), on déduit*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &= \frac{\mu\overline{\Phi}\left(\frac{\mu+\sigma F_Z^{-1}(\kappa)-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\mu+\sigma F_Z^{-1}(\kappa)-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}}{1-\kappa} \end{aligned}$$

qui devient

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}}. \tag{1.20}$$

À partir de (1.20), on obtient

$$TVaR_\kappa(Z) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(F_Z^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}},$$

ce qui permet de déduire que

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z),$$

confirmant les propriétés de multiplication par un scalaire positif 1.29 et de translation 1.30 de la TVaR. □

Exemple 1.35 *Soit la v.a.* $X \sim LN(\mu, \sigma)$. *Comme on peut écrire* $X = e^Y$ *où* $Y \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, *on déduit* $VaR_\kappa(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\kappa)}$ *avec la proposition 1.28. En appliquant conjointement (1.5) et (1.18) avec* $d = VaR_\kappa(X)$, *on obtient*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{1-\kappa} = \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\mu+\sigma\Phi^{-1}(\kappa)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{1-\kappa} \\ &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\Phi^{-1}(\kappa)-\sigma\right)}{1-\kappa}. \square \end{aligned}$$

Exemple 1.36 *Soit la v.a.* $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$, *avec* $\alpha > 1$. *On utilise conjointement (1.6) et (1.18) avec* $d = VaR_\kappa(X) = \lambda\left(\frac{1}{(1-\kappa)^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)$ *et on développe l'expression de la TVaR*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha-1}(1-\kappa)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + d(1-\kappa)}{1-\kappa} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} + d = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right). \square \end{aligned}$$

Dans l'exemple suivant, on compare deux lois ayant des espérances identiques et des VaR identiques pour une certaine valeur de κ.

Exemple 1.37 *Soient deux v.a.* $X_1 \sim Ga\left(0.5, 2000^{-1}\right)$ *et* $X_2 \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *telles que* $E[X_1] = E[X_2] = 1000$ *et*

$$VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 7879.4387.$$

Alors, on déduit que $\alpha = 4.474496$ *et* $\lambda = 3474.495631$. *Enfin, on constate que*

$$TVaR_{0.995}(X_1) = 9714.0349$$

et

$$TVaR_{0.995}(X_2) = 11\ 147.2322$$

confirmant que la mesure VaR ne donne pas une indication claire du comportement de la queue de la distribution. □.

1.11.4 Multiplication par un scalaire négatif

Soit une v.a. X pour laquelle on peut calculer $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$. On définit la v.a. $Y = -X$ où l'expression de la fonction de répartition est

donnée par

$$F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(X \geq -y). \tag{1.21}$$

On considère en premier lieu le cas où la v.a. est continue et on traite le cas plus général par la suite. Lorsque la v.a. X est continue, (1.21) devient

$$F_Y(y) = 1 - F_X(-y)$$

et on déduit l'expression suivante de $VaR_\kappa(Y)$ en fonction de $VaR_\kappa(X)$

$$VaR_\kappa(Y) = -VaR_{1-\kappa}(X). \tag{1.22}$$

Ensuite, on a

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(Y)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{1-u}(X)\,\mathrm{d}u. \tag{1.23}$$

En posant $s = 1-u$ avec $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}s$ dans (1.23), on obtient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^0 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(X)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{1.24}$$

En utilisant (1.12), (1.24) devient

$$TVaR_\kappa(Y) = -\frac{E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{1.25}$$

À partir de (1.24), on a aussi

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^1 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{1-\kappa}\int_{1-\kappa}^1 VaR_s(X)\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{1-\kappa}\left(E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right). \end{aligned} \tag{1.26}$$

On illustre les relations (1.22) et (1.26) dans l'exemple qui suit.

Exemple 1.38 *Un individu investit une somme $V(0) = 10\,000$ au temps 0 dans un fonds mutuel. Il ne fait aucun retrait et aucun dépôt au cours de la prochaine période. La valeur au temps 1 de son investissement est représentée par la v.a. $V(1) = V(0)\,Y$ où Y est une v.a. continue positive avec $E[Y] = 1.12$. La valeur de la perte liée à l'investissement est définie*

par $L = V(0) - V(1)$. *On dispose de l'information suivante :*

κ	$VaR_\kappa(Y)$	$E\left[Y \times 1_{\{Y \leq VaR_\kappa(Y)\}}\right]$
0.005	0.44444	0.00197
0.01	0.49014	0.00431
0.05	0.63192	0.02728
0.95	1.72122	1.02406
0.99	2.04150	1.09782
0.995	2.16755	1.10831

Alors, $E[L] = V(0) - V(0) E[Y] = 10\ 000\,(1 - 1.12) = -1\ 200$. *Ensuite, en appliquant la propriété de translation de la VaR et (1.22), on déduit*

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(L) &= VaR_{0.995}(V(0) - V(0) Y) \\ &= V(0) + V(0) \times (-VaR_{0.005}(Y)) \\ &= 10\ 000 + 10\ 000 \times (-0.44444) = 5555.6. \end{aligned}$$

Selon la propriété de translation de la TVaR, l'expression de la TVaR de L *est donnée par*

$$TVaR_\kappa(L) = TVaR_\kappa(V(0) - V(1)) = V(0) + TVaR_\kappa(-V(1)),$$

où

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(-V(1)) &= V(0) \times TVaR_\kappa(-Y) \\ &= V(0) \times -\frac{1}{1-\kappa} \int_0^{1-\kappa} VaR_s(Y)\, \mathrm{d}s \\ &= V(0) \times -\frac{1}{1-\kappa} E\left[Y \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(Y)\}}\right], \end{aligned}$$

avec (1.24) et (1.25). Alors, on déduit

$$TVaR_\kappa(L) = V(0)\left(1 - \frac{1}{1-\kappa} E\left[Y \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(Y)\}}\right]\right).$$

Pour $\kappa = 0.995$, *on obtient*

$$TVaR_{0.995}(L) = 10\ 000 \times \left(1 - \frac{0.00197}{1 - 0.995}\right) = 6060. \quad \square$$

On considère le cas général, où l'on suppose que la distribution de la v.a. X peut admettre des sauts, ce qui inclut le cas des distributions discrètes, continues ou mixtes. Il en résulte que l'expression de $VaR_\kappa(Y)$ devient

$$VaR_\kappa(Y) = -VaR^+_{1-\kappa}(X), \tag{1.27}$$

où $VaR_u^+(X) = F_X^{-1+}(u)$ pour $u \in (0,1)$. En fait, il est à préciser que $VaR_u(X)$ et $VaR_u^+(X)$ diffèrent uniquement lorsque u se trouve sur un plateau de F_X, comme c'est le cas lorsque la v.a. X est discrète.

Avec (1.27), l'expression de la TVaR est

$$TVaR_\kappa(Y) = -\frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s^+(X)\,\mathrm{d}s. \tag{1.28}$$

En adaptant (1.13), le développement de (1.28) conduit à

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(Y) &= -\frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}^+(X)\}}\right] \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}VaR_{1-\kappa}^+(X)\left(F_X\left(VaR_{1-\kappa}^+(X)\right) - (1-\kappa)\right). \end{aligned}$$

On illustre cette définition de $VaR_\kappa(Y)$ dans les deux prochains exemples.

Exemple 1.39 *Soit une v.a. X où $f_X(x) = \frac{1}{4}$ et $x \in \{1,5,10,18\}$. On définit la v.a. $Y = 21 - X$. D'après (1.27), on déduit que*

$$VaR_{0.3}(Y) = 21 - VaR_{1-0.3}^+(X) = 21 - 10 = 11$$

et

$$VaR_{0.75}(Y) = 21 - VaR_{1-0.75}^+(X) = 21 - 5 = 16.$$

Afin de vérifier les valeurs obtenues, on calcule directement les valeurs de $VaR_{0.3}(Y)$ et $VaR_{0.75}(Y)$. De plus, on a

$$TVaR_{0.3}(Y) = 21 - \frac{1}{1-0.3}\left(\frac{1+5+10}{4} - 10 \times (0.75 - 0.7)\right) = 16$$

et

$$TVaR_{0.75}(Y) = 21 - \frac{1}{1-0.75}\left(\frac{1+5}{4} - 5 \times (0.5 - 0.25)\right) = 20.$$

Clairement, on détermine que $f_Y(y) = \frac{1}{4}$, où $y \in \{3,11,16,20\}$, à partir de laquelle on confirme que $VaR_{0.3}(Y) = 11$, $VaR_{0.75}(Y) = 16$, $TVaR_{0.3}(Y) = 16$ et $TVaR_{0.75}(Y) = 20$. □

Exemple 1.40 *Soit une v.a. R représentant le taux de rendement instantané pour un fonds mutuel au cours de la prochaine période dont les valeurs de la fonction de masse de probabilité sont les suivantes :*

r	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.02	0.05	0.1
$f_R(r)$	0.05	0.05	0.1	0.2	0.3	0.25	0.05

On investit une somme $V(0) = 1000$ au début de la période et la valeur à la fin de la période est la v.a. $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ dont les valeurs de $f_{V(1)}(v)$

et de $F_{V(1)}(v)$ sont fournies dans le tableau suivant :

v	818.73	904.84	951.23	1000	1020.20	1051.27	1105.17
$f_{V(1)}(v)$	0.05	0.05	0.1	0.2	0.3	0.25	0.05
$F_{V(1)}(v)$	0.05	0.1	0.20	0.40	0.70	0.95	1.00

On définit la perte liée à cet investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$ et, à partir de (1.27), on déduit les valeurs suivantes de $VaR_\kappa(L)$:

κ	0.01	0.05	0.50	0.95	0.99
$VaR_{1-\kappa}(V(1))$	1105.17	1051.27	1020.20	818.73	818.73
$VaR^{+}_{1-\kappa}(V(1))$	1105.17	1105.17	1020.20	904.84	818.73
$VaR_\kappa(L)$	−105.17	−105.17	−20.20	95.11	181.27

Par exemple, on obtient aussi

$$\begin{aligned} TVaR_{0.95}(L) &= 1000 - \frac{(818.73 + 904.84) \times 0.05 - (904.84\,(0.1 - 0.05))}{1 - 0.95} \\ &= 181.27 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_{0.99}(L) &= 1000 - \frac{(818.73 \times 0.05 - 818.73\,(0.05 - 0.01))}{1 - 0.99} \\ &= 181.27. \end{aligned}$$

On peut obtenir directement les valeurs de $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$ en déterminant les valeurs de $f_L(l)$ et de $F_L(l)$ qui sont fournies dans le tableau suivant :

l	−105.17	−51.27	−20.20	0	48.77	95.11	181.27
$f_L(v)$	0.05	0.25	0.30	0.20	0.10	0.05	0.05
$F_L(v)$	0.05	0.30	0.60	0.80	0.90	0.95	1.00

□

1.12 Fonction *stop-loss* et espérance limitée

1.12.1 Définitions

La fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$ correspond à l'espérance d'une fonction $g(x) = \max(x - d; 0)$ telle que

$$\pi_X(d) = E[\max(X - d; 0)], \tag{1.29}$$

où $d \in \mathbb{R}$. On note que $\pi_X(0) = E[X]$. Cette fonction est importante en actuariat, notamment en réassurance.

Si la v.a. X obéit à une loi continue, (1.29) devient

$$\pi_X(d) = \int_d^\infty (x-d)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x. \tag{1.30}$$

De plus, si la v.a. X est continue positive, l'expression (1.30) pour la fonction *stop-loss* devient

$$\pi_X(d) = \int_d^\infty \overline{F}_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Si la v.a. $X = Kh$ $(h \in \mathbb{R}^+)$ où K obéit à une loi discrète dont le support est $\mathbb{N}$ et si $d = hk_0$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_X(d) = \sum_{k=0}^\infty \max(kh - k_0 h; 0)\, f_X(kh) = h \sum_{k=k_0+1}^\infty \overline{F}_X(kh).$$

Comme $\max(X-d;0) = X \times 1_{\{X>d\}} - d \times 1_{\{X>d\}}$, on a aussi

$$\pi_X(d) = E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d).$$

En posant $g(x) = \min(x;d)$, on obtient l'expression de l'espérance limitée, soit $E[\min(X;d)]$. Si la v.a. X obéit à une loi continue, (1.29) devient

$$E[\min(X;d)] = \int_{-\infty}^d (x-d)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x. \tag{1.31}$$

Lorsque la v.a. X est continue positive, l'expression (1.31) devient

$$E[\min(X;d)] = \int_0^d \overline{F}_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Quand la v.a. $X = Kh$ $(h \in \mathbb{R}^+)$ où K obéit à une loi discrète dont le support est $\mathbb{N}$ et si $d = hk_0$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_X(d) = \sum_{k=0}^\infty \min(kh; k_0 h)\, f_X(kh) = h \sum_{k=0}^{k_0} \overline{F}_X(kh).$$

Comme $X = \min(X;d) + \max(X-d;0)$, on a également la relation

$$E[\min(X;d)] = E[X] - E[\max(X-d;0)].$$

1.12.2 Exemples

On identifie l'expression de la fonction *stop-loss* pour certaines lois continues.

Exemple 1.41 *Soit la v.a.* $X \sim Exp(\beta)$. *La fonction* stop-loss *est donnée par*

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X-d;0)] = E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d) \\ &= d\mathrm{e}^{-\beta d} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d} - d\mathrm{e}^{-\beta d} = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}. \square\end{aligned}$$

Exemple 1.42 *Soit la v.a.* $X \sim Ga(\alpha,\beta)$. *La fonction* stop-loss *est donnée par*

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= E[\max(X-d;0)] = E\left[X \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right] - d\overline{F}_X(d) \\ &= E[X]\,\overline{H}(d;\alpha+1,\beta) - d\overline{H}(d;\alpha,\beta). \square\end{aligned}$$

Exemple 1.43 *Soit la v.a.* $X \sim LN(\mu,\sigma)$. *En utilisant (1.29), la fonction stop-loss est*

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d) \\ &= E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right) - d\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right). \square\end{aligned}$$

Exemple 1.44 *Soit la v.a.* $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$, *avec* $\alpha > 1$. *La fonction stop-loss est obtenue à partir de (1.29)*

$$\begin{aligned}\pi_X(d) &= E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] - d\overline{F}_X(d) \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}} + d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha} - d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}. \square\end{aligned}$$

1.13 Fonction d'excès-moyen

1.13.1 Définition

Pour l'analyse des durées de vie et de la distribution du montant d'un sinistre, on a recours à la fonction d'excès-moyen (espérance de durée de vie résiduelle en analyse des durées de vie) que l'on définit par

$$e_X(d) = E[X-d|\,X>d] = \frac{\pi_X(d)}{1-F_X(d)}. \tag{1.32}$$

Cette fonction est notamment utile dans l'analyse graphique effectuée lors de l'estimation des paramètres de lois continues.

1.13.2 Exemples

L'expression de la fonction d'excès moyen est développée pour certaines lois continues en appliquant (1.32).

Exemple 1.45 *Soit la v.a.* $X \sim Exp(\beta)$. *La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$e_X(d) = \frac{\pi_X(d)}{1 - F_X(d)} = \frac{\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d}}{\mathrm{e}^{-\beta d}} = \frac{1}{\beta}. \square$$

Exemple 1.46 *Soit la v.a.* $X \sim Ga(\alpha, \beta)$. *La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$\begin{aligned} e_X(d) &= \frac{E[X]\,\overline{H}(d;\alpha+1,\beta) - d\overline{H}(d;\alpha,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} \\ &= E[X]\,\frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d. \square \end{aligned}$$

Exemple 1.47 *Soit la v.a.* $X \sim LN(\mu, \sigma)$. *La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$\begin{aligned} e_X(d) &= \frac{E[X]\,\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right) - d\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)}{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)} \\ &= E[X]\,\frac{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu-\sigma^2}{\sigma}\right)}{\overline{\Phi}\left(\frac{\ln(d)-\mu}{\sigma}\right)} - d. \square \end{aligned}$$

Exemple 1.48 *Soit la v.a.* $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$, *avec* $\alpha > 1$. *La fonction d'excès moyen est donnée par*

$$e_X(d) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\frac{\frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+d)^{\alpha-1}}}{\frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda+d)^{\alpha}}} = E[X]\left(1 + \frac{d}{\lambda}\right). \square$$

1.14 Lois conjointes de n variables aléatoires

1.14.1 Définitions et propriétés

Soit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. La fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \Pr(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n).$$

Avant de présenter les propriétés de $F_{\underline{X}}$, on définit l'opérateur $\triangle_{a_i,b_i}$ où

$$\triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,x_n) - F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,x_n).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}\triangle_{a_j,b_j}\triangle_{a_i,b_i} F_{\underline{X}}(\underline{x}) &= \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,x_n) - \triangle_{a_j,b_j} F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,x_n)\\ &= F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,b_j...,x_n) - F_{\underline{X}}(x_1,...,b_i,...,a_j...,x_n)\\ &\quad -F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,b_j...,x_n) + F_{\underline{X}}(x_1,...,a_i,...,a_j...,x_n).\end{aligned}$$

Pour $n=2$, on écrit

$$\begin{aligned}\Pr(\underline{a} < \underline{X} \leq \underline{b}) &= \Pr(\underline{X} \in (a_1,b_1] \times (a_2,b_2])\\ &= \triangle_{a_1,b_1}\triangle_{a_2,b_2} F_{\underline{X}}(\underline{x})\\ &= F_{\underline{X}}(b_1,b_2) - F_{\underline{X}}(a_1,b_2)\\ &\quad -F_{\underline{X}}(b_1,a_2) + F_{\underline{X}}(a_1,a_2).\end{aligned}$$

Propriétés 1.49 *Une fonction de répartition multivariée $F_{\underline{X}}$ est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $[0,1]$ telle que :*

1. *$F_{\underline{X}}$ est non décroissante sur $\mathbb{R}^n$;*
2. *$F_{\underline{X}}$ est continue à droite sur $\mathbb{R}^n$;*
3. *$\lim_{x_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) = 0$, pour $i = 1,...,n$;*
4. *$\lim_{x_1 \to \infty,...,x_n \to \infty} F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) = 1$;*
5. *pour tout x, on a*

$$\triangle_{a_1,b_1}... \triangle_{a_n,b_n} F_{\underline{X}}(\underline{x}) \geq 0 \tag{1.33}$$

pour s'assurer que

$$\Pr(\underline{a} < \underline{X} \leq \underline{b}) = \Pr(\underline{X} \in (a_1,b_1] \times ... \times (a_n,b_n]) \geq 0.$$

Si $F_{\underline{X}}$ est dérivable, (1.33) est équivalent à

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_{\underline{X}}(x_1,...,x_n) \geq 0$$

sur $\mathbb{R}^n$.

On définit la fonction de répartition marginale de X_i par

$$F_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i \leq x_i) = F_{X_1,...,X_n}(\infty,...,\infty,x_i,\infty,...,\infty),$$

pour tout $i = 1,...,n$. On utilise fréquemment l'expression «marginale» au lieu de «fonction de répartition marginale».

La fonction de survie conjointe de $\underline{X}$ est définie par

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \Pr(X_1 > x_1,...,X_n > x_n).$$

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on a

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

et

$$\begin{aligned}\overline{F}_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) - F_{X_3}(x_3) \\ &\quad + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) + F_{X_1,X_3}(x_1,x_3) \\ &\quad + F_{X_2,X_3}(x_2,x_3) - F_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

La fonction de survie marginale de la v.a. X_i est définie par

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \Pr(X_i > x_i) = \overline{F}_{X_1,...,X_n}(0,...,0,x_i,0,...,0),$$

pour $i = 1,...,n$.

La f.g.m. multivariée est définie par

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1,...,t_n) = E\left[e^{t_1X_1}...e^{t_nX_n}\right]$$

si l'espérance existe.

Les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes si et seulement si on a

$$\begin{aligned}F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= F_{X_1}(x_1)...F_{X_n}(x_n), \\ \overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= \overline{F}_{X_n}(x_n)...\overline{F}_{X_1}(x_n).\end{aligned}$$

De plus, si les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes, on a

$$E[g_1(X_1)...g_n(X_n)] = E[g_1(X_1)]...E[g_n(X_n)],$$

pour toutes fonctions intégrables $g_1,...,g_n$. Par exemple, l'espérance du produit des v.a. X_i et X_j devient

$$E[X_iX_j] = E[X_i]E[X_j],$$

pour $i \neq j \in \{1,...,n\}$.

Les notions concernant les lois conjointes sont traitées de façon détaillée aux chapitres 8 et 9.

1.14.2 Variables aléatoires à support dénombrable

Soit le vecteur de n v.a. discrètes $(X_1, ..., X_n)$. La fonction de masse de probabilité conjointe de $(X_1, ..., X_n)$, désignée par $f_{X_1,...,X_n}$, est définie par

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \Pr(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n).$$

La fonction $f_{X_1,...,X_n}$ prend des valeurs dans $[0, 1]$.

Afin de simplifier la présentation, prenons le cas particulier où $X_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$, $i = 1, 2, ...$, et h est un scalaire strictement positif. On a les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & E[g_1(X_1)...g_n(X_n)] \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g_1(m_1h)...g_n(m_nh) f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & E[g(X_1, ..., X_n)] \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} g_1(m_1h, ..., m_nh) f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh). \end{aligned}$$

En particulier, la f.g.m. multivariée est

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{m_1ht_1}...\mathrm{e}^{m_nht_n} f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh).$$

De plus, on définit aussi la f.g.p. multivariée par

$$P_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_1=0}^{\infty} t_1^{m_1h}...t_n^{m_nh} f_{X_1,...,X_n}(m_1h, ..., m_nh).$$

Pour $n = 2$, on a la relation suivante pour la f.m.p. conjointe de (X_1, X_2) :

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h) = & F_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h) - F_{X_1,X_2}(m_1h - h, m_2h) \\ & - F_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h - h) \\ & + F_{M_1,M_2X_1,X_2}(m_1h - h, m_2h - h), \end{aligned}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et avec $F_{M_1,M_2}(m_1h, m_2h) = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$.

1.14.3 Variables aléatoires continues

Soit le vecteur de n v.a. continues $(X_1, ..., X_n)$. La fonction de densité conjointe est définie par

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial n}{\partial x_1 ... \partial x_n} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n).$$

La fonction de densité $f_{X_1,...,X_n}$ prend des valeurs positives qui peuvent être supérieures à 1 avec la propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n = 1.$$

Une interprétation heuristique de la fonction de densité conjointe est

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \simeq \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (x_i, x_i + \mathrm{d}x_i]\right).$$

Notamment, on a

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in (a_i, b_i]\right) = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n,$$

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i) \, f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n,$$

$$E\left[g(X_1, ..., X_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1, ..., x_n) \, f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n$$

et

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{t_1 x_1} ... \mathrm{e}^{t_n x_n} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) \, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n.$$

1.15 Covariance et corrélation linéaire

Soit une paire de v.a. (X, Y). On définit la covariance entre X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right] = E[XY] - E[X] E[Y].$$

La covariance entre X et Y permet de mesurer la relation de dépendance linéaire entre deux v.a.

Si les v.a. X et Y sont discrètes et dénombrables, l'expression de $E[XY]$ est donnée par

$$E[XY] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i \; y_j \; f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

On a aussi

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E[X])\,(y_j - E[Y]) \; f_{X,Y}(x_i, y_j).$$

Si les v.a. X et Y sont continues, l'expression de $E[XY]$ est

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \;\; f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

De plus, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])\,(y - E[Y]) \;\; f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

La covariance peut être positive, nulle ou négative. Une valeur positive (négative) indique une relation de dépendance linéaire positive (négative) entre X et Y.

Lorsque les v.a. X et Y sont indépendantes, on a $E[XY] = E[X]\,E[Y]$ et il en résulte que la covariance entre elles est nulle.

En revanche, comme il est illustré dans le prochain exemple, une covariance nulle entre les v.a. X et Y n'implique pas qu'elles soient indépendantes entre elles.

Exemple 1.50 *Soit la paire de v.a. discrètes* (X,Y) *où* $X \in \{-1,0,1\}$ *et* $Y \in \{-2,0,2\}$. *Les valeurs de la fonction de masse de probabilité conjointe de* (X,Y) *sont fournies dans le tableau suivant :*

$x\backslash y$	-2	0	2
-1	0	$\frac{1}{3}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

Clairement, on a $f_X(-1) = f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{3}$, $f_Y(-2) = f_Y(2) = \frac{1}{6}$ *et* $f_Y(0) = \frac{2}{3}$. *On calcule que la valeur de* $\mathrm{Cov}(X,Y)$ *est* 0. *Toutefois,* $f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0)\,f_Y(0) = \frac{2}{9}$. *Alors, les v.a.* X *et* Y *ne sont pas indépendantes bien que leur covariance soit nulle.* □

Les propriétés de la covariance sont fournies dans l'énoncé qui suit.

Propriétés 1.51 *Soient les v.a. X, Y, Z, W et les scalaires a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,X) &= \text{Var}(X), \\
\text{Cov}(X,Y) &= \text{Cov}(Y,X), \\
\text{Cov}(aX,bY) &= ab\text{Cov}(X,Y), \\
\text{Cov}(X+c,Y+d) &= \text{Cov}(X,Y), \\
\text{Cov}(aX+c,bY+d) &= ab\text{Cov}(X,Y), \\
\text{Cov}(X,Y+Z) &= \text{Cov}(X,Y)+\text{Cov}(X,Z), \\
\text{Cov}(X+W,Y+Z) &= \text{Cov}(X,Y)+\text{Cov}(W,Y) \\
&\quad +\text{Cov}(X,Z)+\text{Cov}(W,Z).
\end{aligned}$$

On définit le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ρ_P par

$$\rho_P(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\,\text{Var}(Y)}},$$

où

$$-1 \leq \rho_P(X,Y) \leq 1.$$

Si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est nul. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie car le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne mesure que la relation de dépendance linéaire entre les deux v.a. X et Y. Si $\rho_P(X,Y) = 0$, les v.a. X et Y sont dites non corrélées linéairement.

La notion de dépendance et les mesures de dépendance sont très importantes en actuariat. Elles sont traitées aux chapitres 8 et 9.

Soit un vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$. La matrice variance-covariance associée à $(X_1, ..., X_n)$ est définie par

$$\begin{pmatrix}
\text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_1,X_n) \\
\text{Cov}(X_2,X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdots & \text{Cov}(X_2,X_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\text{Cov}(X_n,X_1) & \text{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \text{Var}(X_n)
\end{pmatrix}.$$

On définit les v.a. $S = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ et $T = \sum_{i=1}^n b_i X_i$, où les scalaires $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$. Alors, on a les relations suivantes :

$$E[S] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i],\ E[T] = \sum_{i=1}^n b_i E[X_i],$$

$$\text{Var}(S) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j),$$

$$\mathrm{Var}\,(T) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \mathrm{Var}\,(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_i b_j \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$$

et

$$\mathrm{Cov}\,(S,T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)\,.$$

De façon similaire, on définit aussi la matrice de corrélation composée des coefficients de corrélation linéaire pour toutes les paires du vecteur $(X_1, ..., X_n)$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_P(X_1, X_2) & \cdots & \rho_P(X_1, X_n) \\ \rho_P(X_2, X_1) & 1 & \cdots & \rho_P(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_P(X_n, X_1) & \rho_P(X_n, X_1) & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.16 Espérance conditionnelle

Soient les v.a. X et Y. L'espérance conditionnelle d'une fonction g de la v.a. X sachant que la v.a. Y a pris la valeur y est désignée par $E\,[g\,(X)\,|Y = y]$. Cela signifie que l'on utilise cette information sur la v.a. Y et une relation de dépendance éventuelle entre X et Y pour évaluer la valeur espérée de $g\,(X)$. Toutefois, si les v.a. X et Y sont indépendantes, alors cette information est superflue et $E\,[g\,(X)\,|Y = y] = E\,[g\,(X)]$. On fournit un bref aperçu sur les espérances conditionnelles, que l'on applique fréquemment dans cet ouvrage.

Soient les v.a. discrètes X et Y définies sur les supports dénombrables $\{x_1, x_2, ...\}$ et $\{y_1, y_2, ...\}$. La fonction de répartition conditionnelle de X sachant Y est définie par

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y_j}(x_i) &= \Pr\,(X = x_i | Y = y_j) \\ &= \frac{\Pr\,(X = x_i, Y = y_j)}{\Pr\,(Y = y_j)} = \frac{f_{X,Y}\,(x_i, y_j)}{f_Y\,(y_j)}, \end{aligned}$$

pour $x_i \in \{x_1, x_2, ...\}$ et $y_j \in \{y_1, y_2, ...\}$. L'expression de l'espérance conditionnelle de $g\,(X)$ sachant $Y = y_j$ est donnée par

$$E\,[g\,(X)\,|Y = y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} g\,(x_i)\, f_{X|Y=y_j}\,(x_i)\,,$$

pour $y_j \in \{y_1, y_2, ...\}$. Ainsi, on a la fonction de répartition conditionnelle de X sachant $Y = y_j$ qui est

$$F_{X|Y=y_j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{x_i \leq x\}} f_{X|Y=y_j}(x_i),$$

pour $y_j \in \{y_1, y_2, ...\}$.

Soient les v.a. continues X et Y. La fonction de densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$ et quand $f_Y(y) > 0$. On obtient l'expression de l'espérance conditionnelle de $g(X)$ sachant $Y = y$ avec

$$E[g(X)|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y=y}(x) \, \mathrm{d}x$$

pour $y \in \mathbb{R}$.

1.17 Quelques formules utiles

Les formules de l'espérance totale et de la variance totale sont très utiles en actuariat.

1.17.1 Formule de l'espérance totale

Soient deux v.a. X et Y dont les espérances existent. Alors, selon la formule de l'espérance totale, on a

$$E[X] = E_Y[E[X|Y]]. \tag{1.34}$$

Si Y est une v.a. discrète avec support dénombrable, (1.34) devient

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} E[X|Y = y_i] f_Y(y_i). \tag{1.35}$$

Si Y est une v.a. continue, on réécrit (1.34) sous la forme suivante :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y] f_Y(y) \, \mathrm{d}y. \tag{1.36}$$

On mentionne que $E[X|Y]$ est aussi une v.a., puisqu'elle est une fonction de la v.a. Y.

La formule de l'espérance totale peut aussi être adaptée pour l'espérance d'une fonction g de X telle que

$$E\left[g\left(X\right)\right] = E_Y\left[E\left[g\left(X\right)|Y\right]\right]. \tag{1.37}$$

1.17.2 Formule de la variance totale

Soient deux v.a. X et Y dont les moments d'ordres 1 et 2 existent. Alors, selon la formule de la variance totale, on a

$$\mathrm{Var}\left(X\right) = E_Y\left[\mathrm{Var}\left(X|Y\right)\right] + \mathrm{Var}_Y\left(E_Y\left[X|Y\right]\right). \tag{1.38}$$

Si Y est une v.a. discrète avec support dénombrable, on déduit de (1.35)

$$E_Y\left[\mathrm{Var}\left(X|Y\right)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Var}\left(X|Y = y_i\right) f_Y\left(y_i\right)$$

et

$$\mathrm{Var}_Y\left(E\left[X|Y\right]\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(E\left[X|Y = y_i\right] - E\left[X\right]\right)^2 f_Y\left(y_i\right).$$

Quand Y est une v.a. continue, on obtient les relations suivantes à l'aide (1.36) :

$$E_Y\left[\mathrm{Var}\left(X|Y\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Var}\left(X|Y = y\right) f_Y\left(y\right) \mathrm{d}y$$

et

$$\mathrm{Var}_Y\left(E\left[X|Y\right]\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(E\left[X|Y = y\right] - E\left[X\right]\right)^2 f_Y\left(y\right) \mathrm{d}y.$$

1.17.3 Formule de la covariance totale

Soient trois v.a. X, Y et Z où la covariance entre X et Y est finie. La formule de la covariance est donnée par

$$\mathrm{Cov}\left(X, Y\right) = E\left[\mathrm{Cov}\left(X, Y|Z\right)\right] + \mathrm{Cov}\left(E\left[X|Z\right], E\left[Y|Z\right]\right), \tag{1.39}$$

où $\mathrm{Cov}\left(X, Y|Z\right)$, $E\left[X|Z\right]$ et $E\left[X|Z\right]$ sont des v.a. qui sont des fonctions de la v.a. Z.

Lorsque Y est une v.a. discrète avec support dénombrable, on a

$$E\left[\mathrm{Cov}\left(X, Y|Z\right)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cov}\left(X, Y|Z = z_i\right) f_Z\left(z_i\right)$$

et

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}\left(E\left[X|Z\right], E\left[Y|Z\right]\right) \\ = & \sum_{i=1}^{\infty}\left(E\left[X|Z=z_i\right]-E\left[X\right]\right)\left(E\left[Y|Z=z_i\right]-E\left[Y\right]\right)f_Z\left(z_i\right). \end{aligned}$$

Si Y est une v.a. continue, on écrit

$$E\left[\operatorname{Cov}\left(X,Y|Z\right)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{Cov}\left(X,Y|Z=z\right)f_Z\left(z\right)\mathrm{d}z$$

et

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}\left(E\left[X|Z\right], E\left[Y|Z\right]\right) \\ = & \int_{-\infty}^{\infty}\left(E\left[X|Z=z\right]-E\left[X\right]\right)\left(E\left[Y|Z=z\right]-E\left[Y\right]\right)f_Z\left(z\right)\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de l'espérance totale, on obtient la formule en (1.39) de la covariance totale.

1.17.4 Formule des probabilités totales

Soient deux v.a. X et Y. Soit la fonction $g\left(y\right)=1_{\{y\leq x\}}$. Alors, selon (1.37), on a

$$\begin{aligned} F_X\left(x\right) &= \Pr\left(X\leq x\right)=E\left[1_{\{X\leq x\}}\right]=E_Y\left[E\left[1_{\{X\leq x\}}|Y\right]\right] \\ &= E_Y\left[\Pr\left(X\leq x|Y\right)\right], \end{aligned} \tag{1.40}$$

qui correspond à la loi des probabilités totales pour la fonction de répartition de X. Si Y est une v.a. discrète avec support dénombrable, l'expression en (1.40) s'écrit sous la forme suivante :

$$F_X\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\Pr\left(X\leq x|Y=y_i\right)f_Y\left(y_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}F_{X|Y=y_i}\left(x\right)f_Y\left(y_i\right).$$

Si Y est une v.a. continue, (1.40) devient

$$F_X\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\Pr\left(X\leq x|Y=y\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{\infty}F_{X|Y=y}\left(x\right)f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y.$$

1.18 Construction de distributions avec mélange

La construction de distributions avec mélange est fréquemment utilisée dans la modélisation en actuariat.

Soit une v.a. discrète Θ, dite de *mélange*, où $\Theta \in A = \{\theta_1, \theta_2, ...\}$ avec $\Pr(\Theta = \theta) = f_\Theta(\theta)$, $\theta \in A$. Alors, la distribution de X est dite *avec mélange* si sa fonction de répartition est de la forme

$$F_X(x) = \sum_{\theta \in A} F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta), \tag{1.41}$$

où la fonction de répartition conditionnelle de X sachant $\Theta = \theta$, $F_{X|\Theta=\theta}$, est la fonction de répartition d'une loi connue dont les paramètres varient selon θ_i, $i \in \mathbb{N}^+$. Ainsi, selon la formule de l'espérance totale, on a

$$E[g(X)] = \sum_{\theta \in A} E[g(X)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta), \tag{1.42}$$

si les espérances existent. Par exemple, on déduit de (1.42) les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\theta \in A} E[X|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta), \\ E\left[X \times 1_{\{X>d\}}\right] &= \sum_{\theta \in A} E\left[X \times 1_{\{X>d\}}|\Theta = \theta\right] f_\Theta(\theta), \\ E[\min(X;d)] &= \sum_{\theta \in A} E[\min(X;d)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta). \end{aligned} \tag{1.43}$$

De même, en supposant les conditions d'existence respectées, on a

$$M_X(t) = \sum_{\theta \in A} M_{X|\Theta=\theta}(t) f_\Theta(\theta).$$

Dans le cas où la distribution conditionnelle de $(X|\Theta = \theta)$ est continue, on a

$$f_X(x) = \sum_{\theta \in A} f_{X|\Theta=\theta_i}(x) f_\Theta(\theta).$$

On suppose maintenant que la v.a. de mélange Θ est continue avec fonction de densité f_Θ. Alors, la fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X|\Theta=\theta}(x) f_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

et l'expression de l'espérance de $g(X)$ est

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} E[g(X)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) \, \mathrm{d}\theta.$$

Exemple 1.52 *On suppose que* $\Theta \sim Bin\,(2, 0.2)$ *et*

$$(X|\Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{1}{(\theta+1)\,10}\right).$$

Selon (1.41), la fonction de répartition de X *est donnée par*

$$F_X\,(x) = \sum_{\theta=0}^{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10(\theta+1)}}\right)\binom{2}{\theta}0.2^{\theta} \times 0.8^{2-\theta}.$$

Comme $E\,[X|\Theta] = 10\,(\Theta+1)$, *on déduit en appliquant la formule de l'espérance totale*

$$E\,[X] = E_{\Theta}\,[E\,[X|\Theta]] = E_{\Theta}\,[10\,(\Theta+1)] = 14.$$

La valeur $VaR_{0.99}\,(X) = 77.3672$ *est obtenue par optimisation numérique. On obtient* $TVaR_{0.99}\,(X) = 100.1224$ *en utilisant (1.43).* □

La distribution de Pareto peut être représentée sous la forme d'un mélange de lois exponentielles, tel qu'il est illustré dans le prochain exemple.

Exemple 1.53 *Soit la v.a.* $\Theta \sim Ga\,(\alpha, 1)$. *Si* $(X|\Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{\theta}{\lambda}\right)$, *l'expression de la fonction de survie de* X *est donnée par*

$$\begin{aligned}\overline{F}_X\,(x) &= \int_0^{\infty}\overline{F}_{X|\Theta=\theta}\,(x)\,f_{\Theta}\,(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda}x}f_{\Theta}\,(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= M_{\Theta}\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha},\end{aligned}$$

qui correspond à la fonction de survie de la distribution de Pareto. □

1.19 Somme et différence de v.a. indépendantes

Dans cette section, on traite brièvement du comportement d'une v.a. S définie par la somme d'un nombre fini n de v.a. indépendantes X_1, ..., X_n, i.e. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En raison de la propriété de linéarité de l'espérance, on a

$$E\,[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\,[X_i]\,.$$

Par ailleurs, puisque les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes, l'expression de la variance de S est donnée par

$$\mathrm{Var}\,(S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_i)\,.$$

En actuariat, on s'intéresse fortement au comportement aléatoire de S, en examinant en détails les caractéristiques de S et de l'évaluation de sa distribution. Les chapitres 3, 5 et 6 traitent de ce sujet primordial en actuariat.

Dans cette section, on examine aussi le comportement aléatoire de $S = X_1 - X_2$, où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes. L'expression de $E\,[S]$ est donnée par

$$E\,[S] = E\,[X_1 - X_2] = E\,[X_1] - E\,[X_2]\,,$$

en vertu de la propriété de linéarité de l'espérance. Comme les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, on a

$$\mathrm{Var}\,(S) = \mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(-X_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathrm{Var}\,(X_i)\,.$$

Le comportement de sommes et de différences de v.a. dépendantes est examiné de manière plus élaborée aux chapitres 8 et 9.

1.19.1 Somme de 2 v.a. discrètes indépendantes

Soient deux v.a. indépendantes discrètes X_1 et X_2 définies sur le support arithmétique $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$ avec $f_{X_1}(kh) = \Pr(X_1 = kh)$ et $f_{X_2}(kh) = \Pr(X_2 = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$. On veut calculer la fonction de masse de probabilité de $S = X_1 + X_2$, notée $f_S(kh) = \Pr(S = kh)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En conditionnant sur les valeurs possibles de X_1 et en raison de l'hypothèse d'indépendance entre X_1 et X_2, on déduit que

$$f_S(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(jh)\, f_{X_2}((k-j)\,h)\,.$$

Cette opération est appelée le produit de convolution de f_{X_1} et f_{X_2}, et elle est désignée sous la notation $f_{X_1} * f_{X_2}$. Ainsi, on a $f_S(kh) = f_{X_1} * f_{X_2}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.54 *Soient les v.a. indépendantes* $X_1 \sim Bin\,(5, 0.3)$ *et* $X_2 \sim Bin\,(10, 0.2)$. *On définit* $S = X_1 + X_2$. *Lorsque l'on effectue directement le produit de convolution avec* $h = 1$, *les valeurs obtenues de* $f_S(k)$ *pour*

$k = 0, 1, ..., 13$ *sont les suivantes :*

k	0	1	2	3	4	5	6
$f_S(k)$	0.01805	0.08379	0.18058	0.23967	0.21909	0.14614	0.07348
k	7	8	9	10	11	12	13
$f_S(k)$	0.02837	0.00848	0.00196	0.00035	0.00005	0.00001	0.00000

De plus, $f_S(k) = 0$, *pour* $k = 14, 15$. *La v.a.* S *n'obéit pas à une loi connue. Il est possible de vérifier que* $E[S] = \sum_{k=0}^{15} k f_S(k) = 3.5$ *qui est aussi égal à* $E[X_1] + E[X_2] = 1.5 + 2 = 3.5$. □

1.19.2 Somme de 2 v.a. continues indépendantes

On considère deux v.a. indépendantes continues positives X_1 et X_2 avec fonctions de densité f_{X_1} et f_{X_2} respectivement. L'expression de la fonction de densité f_S de $S = X_1 + X_2$ est donnée par

$$f_S(x) = \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

que l'on obtient en conditionnant sur les valeurs possibles de X_1 et en utilisant l'hypothèse d'indépendance entre X_1 et X_2. Ainsi, f_S correspond au produit de convolution de f_{X_1} et f_{X_2} que l'on désigne par $f_S(x) = f_{X_1} * f_{X_2}(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 1.55 *Soit* $S = X_1 + X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim U(0, b_i)$, $i = 1, 2$ *et* $0 < b_1 \leq b_2$. *L'expression de* f_S *est donnée par*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1}(y) f_{X_2}(x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{1}{b_1} I_{\{x \in [0,b_1]\}} \frac{1}{b_2} I_{\{(x-y) \in [0,b_2]\}} \mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} \frac{x}{b_1 b_2}, & 0 \leq x \leq b_1 \\ \frac{b_1}{b_1 b_2}, & b_1 \leq x \leq b_2 \\ \frac{b_1 + b_2 - x}{b_1 b_2}, & b_2 \leq x \leq b_1 + b_2 \end{cases}. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.56 *Soit* $S = X_1 + X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$ *et* $\beta_1 \neq \beta_2$. *L'expression de* f_S *est*

$$f_S(x) = \int_0^x \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 y} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 (x-y)} \mathrm{d}y = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x},$$

qui correspond à la fonction de densité de la loi Erlang généralisée. Il est aisé de montrer que $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$ *qui correspond aussi à* $E[X_1] + E[X_2]$. □

Exemple 1.57 *Soient les v.a. indépendantes* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 = cY_1$, $c \in \mathbb{R}^+$, $Y_1 \sim Bêta(2,1)$ *et* $X_2 \sim Exp(\beta)$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On obtient l'expression suivante pour* $f_S(x)$ *:*

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^{\min(x;c)} 2\left(\frac{y}{c}\right)\frac{1}{c}\beta \mathrm{e}^{-\beta(x-y)}\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{c}\mathrm{e}^{-\beta x}\left\{\left(\frac{\min(x;c)\,\mathrm{e}^{\beta\min(x;c)}}{c}\right) - \frac{1}{\beta c}\left(\mathrm{e}^{\beta\min(x;c)} - 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

□

1.19.3 Somme de v.a. et f.g.m.

Une méthode pour identifier la loi d'une somme d'un nombre fini de v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est d'utiliser la f.g.m. En effet, on a

$$E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right]. \tag{1.44}$$

L'idée est alors d'identifier la loi de S à partir de l'expression obtenue avec (1.44). On présente ci-dessous des exemples d'application de cette approche. Les résultats de ces exemples seront utiles tout au long de cet ouvrage.

Exemple 1.58 *Soient les v.a.* $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^n X_i$ *obéit également à une loi de Poisson de paramètre* $\lambda_1 + ... + \lambda_n$. *Pour le démontrer, on applique (1.44)*

$$E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^n E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{\lambda_i\left(\mathrm{e}^t - 1\right)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)\left(\mathrm{e}^t - 1\right)}$$

qui correspond à la f.g.m. de la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + ... + \lambda_n$. □

Pour chacun des prochains exemples, le résultat est démontré de manière identique à celle utilisée dans l'exemple 1.58.

Exemple 1.59 *Soient les v.a.* $X_i \sim Bin(r_i, q)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^n X_i$ *obéit également à une loi binomiale de paramètres* $r_1 + ... + r_n$ *et* q. □

Exemple 1.60 *Soient les v.a.* $X_i \sim BN(r_i, q)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^n X_i$ *obéit également à une loi binomiale négative de paramètres* $r_1 + ... + r_n$ *et* q. □

Exemple 1.61 *Soient les v.a.* $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *obéit à une loi gamma de paramètres* $\alpha_1 + ... + \alpha_n$ *et* β. □

Exemple 1.62 *Une v.a. de loi Erlang peut être représentée comme la somme de v.a. i.i.d de loi exponentielle. Soient les v.a. i.i.d.* $X_1, ..., X_n$ *de loi exponentielle avec paramètres* $\beta_i = \beta$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $T_n = X_1 + ... + X_n$ *obéit à une loi Erlang de paramètres* n *et* β *car*

$$M_{T_n}(t) = E\left[e^{tT_n}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{tX_i}\right] = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n.$$

Dans la proposition suivante, on utilise aussi la f.g.m. afin d'identifier la fonction de densité de la somme de n v.a. de loi gamma avec des paramètres β_1, ..., β_n différents.

Proposition 1.63 *Soient* n *v.a. indépendantes* $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, ..., n$. *On définit* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Alors, on a*

$$f_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h(x; \alpha + k, \beta), \tag{1.45}$$

où $p_k = \sigma \xi_k$, *pour* $k \in \mathbb{N}$, *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$,

$$\begin{aligned} \beta &= \max(\beta_1; ...; \beta_n), \quad \sigma = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i}, \\ \zeta_k &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{k} \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k, \quad (k = 1, 2, ...), \\ \xi_0 &= 1, \ \xi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \zeta_i \xi_{k-i}, \quad (k = 1, 2, ...). \end{aligned}$$

Remarque 1.64 *Dans le théorème 1.45, la distribution de* S *correspond à un mélange de lois gamma. Les probabilités* p_0, p_1, p_2, ... *sont calculées récursivement.*

Preuve. Voir [82]. ■

Exemple 1.65 *Soient les v.a. indépendantes* $X_1 \sim Ga\left(3.2, \frac{1}{5}\right)$ *et* $X_2 \sim Ga\left(1.4, \frac{1}{10}\right)$. *On définit* $S = X_1 + X_2$ *où l'on déduit* $E[S] = 30$. *À partir du théorème 1.45, on a calculé* $\alpha = 4.6$, $\beta = 0.2$ *et* $\sigma = 0.3789$ *ainsi que les valeurs de* p_k *pour* $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0.3789	0.2653	0.1592	0.0902	0.0496	0.0267

On obtient $F_X(30) = 0.5711$ *et* $F_X(100) = 0.9989$. *De plus, on déduit* $VaR_{0.9}(X) = 49.6950$, $VaR_{0.99}(X) = 75.9118$, $TVaR_{0.9}(X) = 61.2128$ *et* $TVaR_{0.99}(X) = 86.6667$. □

1.19.4 Différence de 2 v.a. discrètes indépendantes

Soient deux v.a. indépendantes discrètes X_1 et X_2 dont le support est arithmétique et avec $f_{X_i}(kh) = \Pr(X_i = kh)$, $k \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2)$ et $h \in \mathbb{R}^+$. Pour identifier l'expression générale de la fonction de masse de probabilité de $S = X_1 - X_2$, on distingue les trois cas $(k = 0)$, $(k < 0)$ et $(k > 0)$:

$$f_S(kh) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} f_{X_1}(jh) f_{X_2}(jh), & k = 0 \\ \sum_{j=0}^{\min(m_1-k;m_2)} f_{X_1}((j+k)h) f_{X_2}(jh), & k = 1, ..., m_1 \\ \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2+k)} f_{X_1}(jh) f_{X_2}((j-k)h), & k = -m_2, ..., -1 \end{cases}.$$

Exemple 1.66 *On suppose que* $X_1 = 1000M_1$ *et* $X_2 = 1000M_2$ *avec* $M_1 \sim Bin(4, 0.2)$ *et* $M_2 \sim Bin(6, 0.4)$. *On observe que*

$$E[S] = 1000(E[M_1] - E[M_2]) = -1600.$$

On obtient les valeurs suivantes de $f_S(1000k)$ *pour* $k \in \{-6, -5, ..., 0, ..., 4\}$:

k	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_S(1000k)$	0.001678	0.016777	0.072352	0.175636	0.262832	0.249908
k	0	1	2	3	4	–
$f_S(1000k)$	0.150626	0.056181	0.012442	0.001493	0.000075	–

□

1.19.5 Différence de 2 v.a. continues indépendantes

Soient deux v.a. continues positives indépendantes X_1 et X_2 avec fonctions de densité f_{X_1} et f_{X_2}. On définit la v.a. $S = X_1 - X_2$ dont l'expression de f_S est fournie par

$$f_S(x) = \begin{cases} \int_0^\infty f_{X_1}(y) f_{X_2}(y)\,\mathrm{d}y, & x = 0 \\ \int_0^\infty f_{X_1}(x+y) f_{X_2}(y)\,\mathrm{d}y, & x > 0 \\ \int_0^\infty f_{X_1}(y) f_{X_2}(y-x)\,\mathrm{d}y, & x < 0 \end{cases}.$$

Exemple 1.67 *On considère la v.a.* $S = X_1 - X_2$ *où* X_1 *et* X_2 *sont des v.a. indépendantes avec* $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$. *L'expression obtenue pour* f_S *est*

$$f_S(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_1+\beta_2}, & x = 0 \\ \frac{1}{\beta_1+\beta_2} \mathrm{e}^{-\beta_1 x}, & y > 0 \\ \frac{1}{\beta_1+\beta_2} \mathrm{e}^{-\beta_2 |x|}, & y < 0 \end{cases}$$

et correspond à la fonction de densité de la loi de Laplace (ou double exponentielle). Pour le vérifier, on constate $E[S] = \int_0^\infty x f_S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2}$*, ce qui correspond aussi à* $E[S] = E[X_1] - E[X_2]$*.* □

1.20 Notes bibliographiques

Il existe un important nombre d'ouvrages traitant des notions de base en probabilité (voir e.g. [53] et [94]). Pour un bon aperçu des notions de base en probabilité présentées dans un contexte actuariel, on suggère e.g. [89] et [93]. On peut consulter [1] et [81] ainsi que leurs références pour un exposé sur les mesures de risque. La construction de distributions par mélange est abordée dans e.g. [89] et [93]. L'évaluation de la distribution de la somme de v.a. indépendantes est traitée dans e.g. [89]. Pour les passionnés d'histoire et d'actuariat, ils sont invités à lire [91] et [90].

1.21 Exercices

1. On considère une v.a. discrète X avec les caractéristiques fournies dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
x_i	0	100	500	1000	5000	10 000
$\Pr(X = x_i)$	0.5	0.3	0.1	0.05	0.043	0.007

   (a) Calculer $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

   (b) Calculer $VaR_{0.4}(X)$, $VaR_{0.95}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$.

   (c) Calculer $TVaR_{0.4}(X)$, $TVaR_{0.95}(X)$, $TVaR_{0.995}(X)$.

   (d) Calculer $E[\max(X - 3000; 0)]$ et $E[\min(X; 7000)]$.

2. Pour les lois Weibull, Burr et log-logistique, développer les expressions de $E\left[X \times 1_{\{X \le d\}}\right]$, $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$.

3. Soit $X \sim Exp(\beta)$. Pour $VaR_{0.995}(X) = 2000$, calculer $TVaR_{0.995}(X)$. Pour $Y = -2X + 500$, calculer $VaR_{0.995}(Y)$ et $TVaR_{0.995}(Y)$.

4. Soit une v.a. continue X dont l'espérance est 2000 et la variance est 84 000 000. Dans les questions ci-dessous, certaines valeurs de VaR doivent être calculées avec un ordinateur.

   (a) Si X obéit à une loi gamma, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

   (b) Si X obéit à une loi lognormale, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

(c) Si X obéit à une loi inverse gaussienne, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

(d) Si X obéit à une loi de Pareto, déterminer ses 2 paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

(e) Si X obéit à une loi F-généralisée avec $\tau = 2$, déterminer les 2 autres paramètres et les valeurs $VaR_{0.995}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$.

5. Soit une v.a. $Y = 200\ 000X$ avec $X \sim Bêta(2, \beta = 1)$. Calculer $VaR_{0.995}(Y)$ et $TVaR_{0.995}(Y)$.

6. Soit une v.a. X dont la fonction de survie est $\overline{F}_X(x) = 0.8e^{-\frac{x}{1000}} + 0.2e^{-\frac{x}{6000}}$, $x \geq 0$.

   (a) Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.

   (b) Cacluler $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.995}(X)$ et $\pi_X(10\ 000)$.

7. Soit une v.a. $X = R \times Y$, où R et Y sont des v.a. indépendantes avec $Y \sim Burr(\lambda = 10\ 000, \alpha = 2, \tau = 2)$ et $\Pr(R = 1) = 0.5$, $\Pr(R = 1.3) = 0.4$, $\Pr(R = 2) = 0.1$. Calculer $E[X]$, $\Pr(X \leq 200)$ et $E[\max(X - 200; 0)]$.

8. Soient les v.a. i.i.d. $Z_1 \sim Z_2 \sim N(0, 1)$. On définit les v.a. $X_1 = Z_1$ et $X_2 = \rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2$.

   (a) Identifier les lois marginales de X_1 et X_2.

   (b) Développer l'expression de $\text{Cov}(X_1, X_2)$. Développer l'expression de $E\left[e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2}\right]$. Identifier la distribution du couple (X_1, X_2).

9. Soient les v.a. indépendantes $X \sim Bin(2, 0.2)$ et $Y \sim Bin(2, 0.3)$. On définit les v.a. $S = X + Y$ et $T = X - Y$.

   (a) Déterminer les valeurs possibles que peuvent prendre S et T ainsi que les valeurs des fonctions de masse de probabilité associées.

   (b) Calculer $E[S]$, $E[T]$, $\text{Var}(S)$ et $\text{Var}(T)$.

   (c) Calculer $VaR_{0.9}(S)$, $VaR_{0.9}(T)$, $TVaR_{0.9}(S)$ et $TVaR_{0.9}(T)$.

10. Soient deux v.a. indépendantes $X \sim Bêta(2, 1)$ et $Y \sim Bêta(1, 2)$. Développer l'expression de F_S pour $S = X + Y$.

11. On considère deux risques indépendants représentés par les v.a. X_1 et X_2 où $X_1 = 2000Y_1$ (où $Y_1 \sim Bêta(2, 1)$) et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$. On définit la v.a. S par $S = X_1 + X_2$.

    (a) Développer l'expression de $f_S(x)$.

    (b) Calculer $F_S(x)$ pour $x = 1500$ et 3000.

12. Soient deux v.a. indépendantes $X_1 \sim U(0,1)$ et $X_2 \sim Pa(2,1)$. On définit la v.a. S par $S = X_1 + X_2$.

    (a) Montrer que

$$\begin{aligned} F_S(y) &= \min(y;1) - \left(\frac{1}{(1+y-\min(y;1))} - \frac{1}{1+y} \right), \ y \geq 0, \\ &= \begin{cases} y - \left(1 - \frac{1}{1+y}\right), & 0 \leq y \leq 1, \\ 1 - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right), & y \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

    (b) Développer l'expression de $VaR_\kappa(S)$ pour $0.5 < \kappa < 1$. Note : $F_S(1) = 0.5$.

    (c) Calculer $VaR_{0.99}(S)$.

13. Soit une v.a. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ où α est le paramètre de forme et λ est le paramètre d'échelle. Le paramètre α a un fort impact sur la mesure de risque $TVaR_\kappa(X)$ et la fonction *stop-loss* $\pi_X(d)$. Les paramètres $\alpha > 1$ et λ sont fixés de telle sorte que $E[X] = \mu$.

    (a) Montrer que $\pi_X(d) = \mu(\frac{\mu(\alpha-1)}{\mu(\alpha-1)+d})^{\alpha-1}$ et

$$TVaR_\kappa(X) = \mu\alpha\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right) + \mu.$$

    (b) Pour $E[X] = \mu = 1000$, calculer $TVaR_{0.995}(X)$ et $\pi_X(10\,000)$ pour $\alpha = 1.1$, 2.5, 5 et 100.

    (c) Soit $Y \sim Exp(\beta)$ telle que $E[Y] = 1000$. Calculer $TVaR_{0.995}(Y)$ et $\pi_Y(10\,000)$.

14. Soient les v.a. indépendantes X, Y et Z où $E[X] = 100$, $E[Y] = 200$, $E[Z] = 1.1$, $\text{Var}(X) = 300^2$, $\text{Var}(Y) = 500^2$ et $\text{Var}(Z) = 1.9$. On définit la v.a. $S = (X+Y)Z$. Calculer l'espérance et la variance de S.

15. Soient deux v.a. indépendantes $X_1 \sim Ga(2.5, 0.1)$ et $X_2 \sim Ga(5, 0.2)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

    (a) Montrer que l'expression de $F_S(x)$ est donnée par

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; 7.5+k, 0.2),$$

    avec $p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}$.

    (b) Calculer $F_S(100)$ et $VaR_{0.99}(S)$.

16. Soient les v.a. indépendantes $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$ avec $\alpha_i \sim 0.5i$ et $\beta_i = \frac{i}{10}$, $i = 1, 2, 3$. Pour $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$, calculer $F_S(x)$ pour $x = 30$, 40 et 50, et $\pi_S(d)$, pour $d = 30$, 40, 50.

17. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p_{ij}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_1}{10i}}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x_2}{10j}}\right)$$

pour $x_1, x_2 \geq 0$. Hypothèse A : $p_{11} = 0.75$, $p_{22} = 0.15$, $p_{12} = p_{21} = 0.05$. Hypothèse B : $p_{11} = 0.61$, $p_{22} = 0.01$, $p_{12} = p_{21} = 0.19$. Les calculs se font pour les hypothèses A et B.

(a) Identifier les lois de X_1 et X_2. Calculer $\overline{F}_{X_1}(20)$.

(b) Calculer $\Pr(X_1 > 20, X_2 > 20)$ et $\Pr(X_1 > 20 | X_2 > 20)$.

(c) Développer l'expression de la fonction de densité conjointe de (X_1, X_2).

(d) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.

(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$.

(f) Calculer $E[X_1 | X_2 = 20]$ et $E[X_1 | X_2 > 20]$.

(g) Soit $S = X_1 + X_2$. Calculer $E[S]$, $\mathrm{Var}(S)$, $\overline{F}_S(20)$ et $E[\max(S - 20; 0)]$.

18. Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est définie par

$$f_{M_1,M_2}(k_1, k_2) = \sum_{l=\max(k_1+k_2-n;0)}^{\min(k_1;k_2)} \frac{n! \times p_{11}^{l} p_{10}^{k_1-l} p_{01}^{k_2-l} p_{00}^{n-k_1-k_2+l}}{l!\,(k_1-l)!\,(k_2-l)!\,(n-k_1-k_2+l)!}$$

pour $k_1, k_2 \in \{0, 1, ..., n\}$. La f.g.p. conjointe est

$$P_{M_1,M_2}(s_1, s_2) = E\left[s_1^{M_1} s_2^{M_2}\right] = (p_{00} + p_{10}s_1 + p_{01}s_2 + p_{11}s_1s_2)^n.$$

Hypothèse A : $p_{00} = 0.65$, $p_{11} = 0.25$, $p_{01} = p_{10} = 0.05$. Hypothèse B : $p_{00} = 0.41$, $p_{11} = 0.01$, $p_{10} = p_{01} = 0.29$.

Les calculs se font pour les hypothèses A et B et en supposant $n = 5$.

(a) En posant $s_2 = 1$, identifier la loi de M_1. Refaire pour identifier la loi de M_2. Calculer $f_{M_1}(2)$.

(b) Calculer $f_{M_1,M_2}(1,1)$, $\Pr(M_1 = 1|M_2 = 1)$ et

$$\Pr(M_1 = 1|M_2 > 1).$$

(c) Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$ et $\rho_P(M_1, M_2)$.

(d) Calculer $E\left[M_1 \times 1_{\{M_2=1\}}\right]$ et $E\left[M_1 \times 1_{\{M_2>1\}}\right]$.

(e) Calculer $E[M_1|M_2 = 1]$ et $E[M_1|M_2 > 1]$.

(f) Soit $N = M_1 + M_2$. Calculer $E[N]$, $\text{Var}(N)$, $f_N(k)$ $(k = 0, 1, 2)$, $E\left[N \times 1_{\{M_2=1\}}\right]$ et $E[N|M_2 = 1]$.

1.22 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

   (a) 415 et 1 680 775

   (b) 0, 1000 et 10 000

   (c) 691.666, 5700 et 10 000

   (d) 135 et 394

2. Réponses à la question 3 : 2377.47678, 496.2157486 et 498.109396

3. Réponses à la question 4 :

   (a) $\alpha = 1/21$, $\beta = 1/42\,000$, 63 378.58 et 94 546.13

   (b) $\mu = 2.278178$, $\sigma^2 = 10.64545$, 39 499.3350762 et 82 706.52

   (c) $\mu = 2000$, $\beta = 42\,000$, 58 096.26 et 34 695 110

   (d) $\alpha = 2.1$, $\lambda = 2200$, 25 225.29 et 50 157.37

   (e) $\alpha = 2.023256$, $\lambda = 1023.256$, 22 883.05 et 46 586.56

4. Réponses à la question 5 : 199 499.3734 et 199 749.7913

5. Réponses à la question 6 :

   (a) 2000, 12 000 000

   (b) 22 133.28, 28 133.28 et 226.6870

6. Réponses à la question :95.81858, 0.9197135 et 7.550436

7. Réponses à la question 9 :

(a) $S \in \{0,1,2,3,4\}$ avec probabilités

$$\{0.3136; 0.4256; 0.2116; 0.0456; 0.0036\}$$

et $T \in \{-2,-1,0,1,2\}$ avec probabilités

$$\{0.0576; 0.2976; 0.4516; 0.1736; 0.0196\}$$

(b) 1, -0.2, 0.74 et 0.74

(c) 2, 1, 2.528 et 1.196

8. Réponse à la question 10 : On obtient

$$F_S(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3}\left(2 - \frac{x}{2}\right), & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^4}{6} - \frac{2x^3}{3} + \frac{8x}{3} - \frac{5}{3}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

9. Réponses à la question 11 :

(a) $\frac{2}{2000^2} \mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}} \left(\frac{\min(x;2000)}{1000} \mathrm{e}^{\frac{\min(x;2000)}{1000}} - 1000 \left(\mathrm{e}^{\frac{\min(x;2000)}{1000}} - 1\right)\right)$

(b) 0.20093 et 0.79116

10. Réponses à la question 12 :

(a) Aucune réponse

(b) $\frac{-(1-\kappa)+\sqrt{(1-\kappa)^2+4(1-\kappa)}}{2(1-\kappa)}$

(c) 9.5125

11. Réponses à la question 13 :

(a) Aucune réponse

(b) $TVaR_{0.995}(X)$: 135 805.85, 19 313.83, 10427 et 6441.19, $\pi_{10\ 000}(X)$: 630.33, 47.11, 6.66 et 0.0729

(c) $TVaR_{0.995}(Y) = 6298.32$ et $\pi_Y(10\ 000) = 0.0454$

12. Réponses à la question 14 : 330 et 1 228 400

13. Réponses à la question 15 :

(a) Aucune réponse

(b) 0.982833 et 106.9051

14. Réponses à la question 16 :0.926288, 0.977254, 0.992807 ; 0.632217, 0.199291, 0.064521

15. Réponses à la question 17 :

    (a) A et B : 0.181844

    (b) A : 0.039016 et 0.214556 ; B : 0.031445 et 0.172923

    (c) Aucune réponse

    (d) A : 11 et $\frac{1}{16}$; B : -3 et $-3/176$

    (e) A : 2.437928 et B : 2.112366

    (f) A : 12.368581 et 13.406692 ; B : 11.899478 et 11.616357

    (g) A : 24, 372, 0.474911, 8.707156 ; B : 24, 346, 0.483182, 8.600402

16. Réponses à la question 18 :

    (a) A : 0.3087 ; B : 0.3087

    (b) A : 0.236864, 0.657682, 0.166729 ; B : 0.1173380025, 0.3258031444, 0.4278232715

    (c) A : 0.8, 0.761905 ; B : -0.4, -0.3809523810

    (d) A : 0.403025, 1.03695 ; B : 0.608825, 0.54303

    (e) A : 1.119047619 ; 2.197952436 ; B : 1.690476190 ; 1.151023782

    (f) A : 3, 3.7, 0.116029, 0.089253, 0.250595, 0.763175, 2.119048 ; B : 3, 1.3, 0.011586, 0.081947, 0.233263, 0.968975, 2.690476)

2
Modélisation des risques

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter les modèles de base utilisés pour décrire le comportement aléatoire d'un risque en actuariat pour une période fixe. Les coûts ou les pertes liés au risque sont représentés par la v.a. X. L'approche pour modéliser la v.a. X dépend du type de risque et de la nature de la perte qui peut être associée à ce risque.

On aborde dans un premier temps la modélisation de la v.a. X selon l'approche fréquence-sévérité où les coûts sont définis en fonction du nombre de sinistres et du montant d'un sinistre. Cette approche peut être utilisée par exemple pour modéliser, pour une période fixée, les coûts en sinistres d'un contrat d'assurance IARD ; les coûts en sinistres pour un contrat d'assurance en soins de santé ; ou le montant total des sinistres pour une ligne d'affaires. On examine les propriétés de ce modèle, notamment l'espérance, la variance, la fonction de répartition et l'évaluation des mesures de risque.

On présente les principales distributions pour le montant d'un sinistre et pour le nombre de sinistres. On aborde aussi certaines généralisations des principales lois de fréquence. On discute aussi de la classe de distributions pour les montants élevés de sinistres. On examine la modélisation des pertes liées aux risques financiers, e.g. les pertes découlant d'une position sur les marchés financiers. On compare la modélisation des coûts dans le contexte de l'assurance à celle des pertes liées à un investissement sur les marchés financiers.

Dans tous les cas, l'actuaire a recours à des modèles pour décrire les risques actuariels. Dans la modélisation des risques actuariels, il doit à la fois avoir un modèle assez simple pour qu'il soit aisément manipulable et assez élaboré afin de tenir compte de la complexité des risques actuariels analysés.

Dans le cas de l'assurance, il convient d'analyser les risques actuariels individuels puis d'examiner le risque actuariel global que représente le regroupement de ces contrats pour la compagnie d'assurance. Ces modèles jouent un rôle capital dans la compréhension de la mutualisation des risques notamment. Les modèles considérés dans ce chapitre se limitent à analyser les risques actuariels sur une courte période de temps, soit d'un an par exemple.

Les contextes d'application de l'assurance non vie sont e.g. l'assurance automobile, l'assurance habitation, l'assurance responsabilité, l'assurance maladie, la réassurance et l'assurance collective.

2.2 Modèle stochastique pour un risque X

2.2.1 Modèle général pour X

Selon le modèle général, on définit la v.a. X par une somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où la v.a. discrète M représente le nombre de sinistres et la v.a. positive B_k correspond au montant du k-ième sinistre. La fonction de masse de probabilité et la f.g.p. de M sont notées par f_M et P_M. Les v.a. B_1, B_2, ... sont supposées indépendantes entre elles et indépendantes de la v.a. M. De plus, les v.a. B_1, B_2, ... sont supposées identiquement distribuées et on convient que $B_k \sim B$, pour $k \in \mathbb{N}^+$. La fonction de répartition et la f.g.m. de B sont notées par F_B et M_B. Selon les hypothèses du modèle, le nombre de sinistres n'a pas d'influence sur les montants des sinistres. De plus, les montants de chaque sinistre ont le même comportement aléatoire et le montant du premier sinistre n'a pas d'incidence sur le montant du deuxième sinistre et ainsi de suite.

La v.a. X obéit à une loi dite composée. La v.a. M est appelée la v.a. de fréquence (de l'anglais *frequency*), de comptage (de l'anglais *counting*) ou de dénombrement. Le montant d'un sinistre est appelé sévérité (de l'anglais *severity*) ou gravité, d'où l'appellation fréquence-sévérité pour cette approche. Le choix de la loi pour la v.a. de fréquence M et de la loi pour le montant d'un sinistre B sont cruciaux. Les principales lois discrètes pour la v.a. M sont présentées aux sections 2.3 et 2.7. On discute des principales lois continues pour la v.a. B utilisées en actuariat dans

les sections 2.4 et 2.5. Dans les sous-sections qui suivent, on identifie les expressions de l'espérance, de la variance, de la fonction de répartition, de l'espérance tronquée, de la TVaR et de la f.g.m. de la v.a. X.

2.2.2 Espérance de X

On identifie l'expression de l'espérance de X en conditionnant sur M et en utilisant la formule de l'espérance totale

$$E[X] = E_M[E[X|M]], \tag{2.1}$$

où $E[X|M=0]=0$ et

$$E[X|M=k] = E[B_1 + ... + B_k] = k \times E[B] \ \ (k \in \mathbb{N}^+).$$

Ainsi, on déduit que

$$E[X|M] = M \times E[B]. \tag{2.2}$$

En remplaçant (2.2) dans (2.1), l'expression pour $E[X]$ est donnée par

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B]. \tag{2.3}$$

Selon (2.3), l'espérance des coûts pour un risque ($E[X]$) correspond au produit du nombre espéré de sinistres ($E[M]$) et du montant espéré d'un sinistre ($E[B]$). En actuariat, dans le contexte de l'assurance, l'espérance de la v.a. X correspond à la prime pure.

2.2.3 Variance de X

Afin d'obtenir l'expression de la variance de X, on conditionne à nouveau sur la v.a. M en ayant recours à la formule de la variance totale

$$\mathrm{Var}(X) = E_M[\mathrm{Var}(X|M)] + \mathrm{Var}_M(E[X|M]) \tag{2.4}$$

où $\mathrm{Var}(X|M=0)$ et

$$\mathrm{Var}(X|M=k) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^{k} B_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Var}(B_j) = k \times \mathrm{Var}(B) \ \ (k \in \mathbb{N}^+).$$

Alors, on a

$$\mathrm{Var}(X|M) = M \times \mathrm{Var}(B). \tag{2.5}$$

En remplaçant (2.5) ainsi que (2.2) dans (2.4), il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= E[M \times \mathrm{Var}(B)] + \mathrm{Var}(ME[B]) \\ &= E[M]\mathrm{Var}(B) + \mathrm{Var}(M)(E[B])^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Selon (2.4) ou (2.6), la variance des coûts pour le risque $\mathrm{Var}(X)$ est égale à la somme de la variance des coûts liés aux montants des sinistres, soit $E[\mathrm{Var}(X|M)] = E[M]\,\mathrm{Var}(B)$, et de la variance des coûts liés au nombre de sinistres, soit $\mathrm{Var}(E[X|M]) = \mathrm{Var}(M)\,(E[B])^2$.

2.2.4 Fonction de répartition de X

La fonction de répartition de X est obtenue en conditionnant sur la v.a. M telle que

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr(X \le x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(M=k)\Pr(X \le x|M=k) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\Pr(B_1+...+B_k \le x) \\ &= f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,F_{B_1+...+B_k}(x). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si $\Pr(M=0) > 0$, on note la présence d'une masse de probabilité à 0. Cette masse de probabilité est élevée pour des contrats individuels d'assurance non vie ou IARD (ex : automobile, habitation). Comme on le verra plus loin, l'expression (2.7) de F_X est intéressante lorsque l'on dispose d'une expression analytique pour $F_{B_1+...+B_n}$. Des exemples seront présentés dans le présent chapitre. Dans ce cas, la fonction de répartition F_X nous permet notamment de calculer la valeur $VaR_\kappa(X)$. Généralement, on doit avoir recours à un outil d'optimisation pour la calculer.

2.2.5 Espérance tronquée de X

On conditionne sur M pour développer l'expression de l'espérance tronquée de X, soit

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \le b\}}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(M=k)\,E\left[X \times 1_{\{X \le b\}}|M=k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,E\left[(B_1+...+B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k \le b\}}\right]. \end{aligned}$$

On déduit

$$E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\,E\left[(B_1+...+B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>b\}}\right]. \tag{2.8}$$

Il est possible d'évaluer (2.8) quand on possède une forme analytique pour $E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>b\}}\right]$.

2.2.6 Mesure TVaR

En remplaçant (2.7) et (2.8) dans (1.17), l'expression de $TVaR_\kappa(X)$ devient

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ = & \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ & + \frac{VaR_\kappa(X)(F_X(VaR_\kappa(X)) - \kappa)}{1-\kappa}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

qui peut être évaluée à la condition que l'on puisse calculer explicitement

$$E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>VaR_\kappa(X)\}}\right]$$

et $F_X(VaR_\kappa(X))$.

Supposons que la v.a. B est continue et strictement positive (i.e. elle n'admet pas de masse de probabilité à 0). Alors la distribution de X est mixte avec une masse de probabilité à 0 et une partie continue pour $x > 0$. Si $\kappa < \Pr(M = 0)$ alors $VaR_\kappa(X) = 0$. De plus, quand $\kappa > \Pr(M = 0)$, cela implique que $VaR_\kappa(X) > 0$ de telle sorte que $F_X(VaR_\kappa(X)) = \kappa$. Il en découle que le deuxième terme dans (2.9) est égal à 0 dans les deux cas et que l'expression pour $TVaR_\kappa(X)$ devient

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa}. \tag{2.10}$$

Il est à noter que (2.10) est intéressante quand $B_1 + ... + B_k$ appartient à une famille de distributions qui est fermée sous la convolution, telle que la distribution gamma.

2.2.7 Fonction génératrice des moments

On suppose que la f.g.m. de B et que la f.g.p. de M existent, ce qui implique que la f.g.m. de X existe aussi. Afin d'obtenir l'expression de la f.g.m. de X, notée $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$, on conditionne sur la v.a. M

$$E\left[e^{tX}\right] = E_M\left[E\left[e^{tX} | M\right]\right]. \tag{2.11}$$

Pour $M = 0$, $E\left[e^{tX} | M = 0\right] = 1$ et pour $M \in \mathbb{N}^+$, on déduit

$$E\left[e^{tX} | M = k\right] = E\left[e^{t(B_1+...+B_k)}\right] = E\left[e^{tB_1}\right] \times ... \times E\left[e^{tB_k}\right]$$

car les v.a. B_1, ..., B_k sont indépendantes. Comme elles sont aussi identiquement distribuées, il s'ensuit que

$$E\left[\mathrm{e}^{tX} \,|M\right] = M_B(t)^M. \tag{2.12}$$

On remplace (2.12) dans (2.11) et on obtient

$$E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = E_M\left[M_B(t)^M\right] = P_M\left(M_B(t)\right), \tag{2.13}$$

où P_M est la f.g.p. de M.

2.3 Distributions de fréquence

En actuariat, les principales lois pour la v.a. de fréquence sont les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative. Les lois de X correspondantes sont alors appelées lois Poisson composée, binomiale composée et binomiale négative composée. Comme la loi de Poisson est au cœur de la modélisation des risques en assurance IARD, on s'intéresse aussi aux extensions de cette loi obtenues par mélange. Pour cette raison, on décrit les lois Poisson-gamma (qui est aussi la loi binomiale négative), Poisson-inverse gaussienne et Poisson-lognormale. Pour chaque loi de fréquence, on indique les expressions de l'espérance, de la variance et de la f.g.m. de la loi composée correspondante, qui sont obtenues à partir de (2.2), (2.6) et (2.13).

2.3.1 Loi de Poisson

La loi de Poisson est fondamentale dans la modélisation du nombre de sinistres pour les risques en assurance IARD. Elle constitue en quelque sorte la loi de base. L'espérance et la variance de la loi de Poisson sont égales. Cette propriété est appelée l'équidispersion.

Lorsque $M \sim Pois\,(\lambda)$, il en découle que la v.a. X obéit à une loi Poisson composée avec les paramètres λ et F_B, notée $X \sim PComp\,(\lambda; F_B)$. L'espérance de X est $E[X] = \lambda E\,[B]$ et l'expression de la variance de X est

$$\mathrm{Var}\,(X) = \lambda \mathrm{Var}\,(B) + \lambda E\,[B]^2 = \lambda E\left[B^2\right].$$

La f.g.m. de X est $M_X\,(t) = \mathrm{e}^{\lambda(M_B(t)-1)}$.

Le moment centré d'ordre 3 est déterminé avec la relation (1.10) et le moment d'ordre 3 donné par

$$E\left[X^3\right] = \lambda E[B^3] + 3\lambda^2 E[B]E[B^2] + \lambda^3 E^3[B],$$

que l'on obtient en dérivant $M_X(t)$ à 3 reprises. On obtient

$$E\left[(X - E[X])^3\right] = \lambda E[B^3]$$

à partir duquel on détermine l'expression suivante pour le coefficient d'asymétrie :

$$\gamma(X) = \frac{E\left[(X - E[X])^3\right]}{(\mathrm{Var}(X))^{3/2}} = \frac{E[B^3]}{\sqrt{\lambda E[B^2]^3}} > 0.$$

On constate que la distribution Poisson composée est toujours positivement asymétrique.

2.3.2 Loi binomiale

Quand $M \sim Bin(n, q)$, il en résulte que X obéit à une loi binomiale composée avec les paramètres n, q et F_B, notée $X \sim BComp(n, q; F_B)$. L'espérance de X est $E[X] = nqE[B]$ et la variance de X est donnée par

$$\mathrm{Var}(X) = nq\mathrm{Var}(B) + nq(1-q)E[B]^2.$$

La f.g.m. de X est

$$M_X(t) = (1 - q + qM_B(t))^n.$$

En fixant $nq = \lambda$, la loi binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre λ lorsque le nombre n tend vers ∞. En effet, soit la v.a. $M_n \sim Bin(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} P_{M_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\lambda(t-1)}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)},$$

qui correspond à la f.g.p. de la loi de Poisson.

Le moment centré d'ordre 3 est donné par

$$E\left[(X - E[X])^3\right] = n(qE\left[B^3\right] - 3q^2E\left[B^2\right]E[B] + 2q^3E[B]^3), \quad (2.14)$$

avec lequel on obtient le coefficient d'asymétrie $\gamma(X)$. En réarrangeant les termes de l'équation (2.14), on obtient

$$E\left[(X - E[X])^3\right] = E[M]\times\left\{\begin{array}{c} E\left[(B - E[B])^3\right] + 3(1-q)E[B]\mathrm{Var}[B] \\ +(1-q)(1-2q)E[B]^3 \end{array}\right\}. \quad (2.15)$$

Selon (2.15), $\gamma(X)$ est positif si $E\left[(B - E[B])^3\right] > 0$, propriété souvent satisfaite pour la distribution d'un montant de sinistre (s'il existe), et si $q < 0.5$, ce qui est souvent les contextes d'application en actuariat.

2.3.3 Loi binomiale négative

Quand $M \sim BN(r,q)$, on déduit que la v.a. X obéit à une loi binomiale négative composée avec les paramètres r, q et F_B, notée $X \sim BNComp(r,q;F_B)$. L'espérance et la variance de X sont respectivement

$$E[X] = r\frac{1-q}{q}E[B]$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = r\frac{1-q}{q^2}E[B]^2 + r\frac{1-q}{q}\mathrm{Var}(B).$$

La f.g.m de X est $M_X(t) = \left(1 - \frac{1-q}{q}(M_B(t)-1)\right)^{-r}$.

Le moment centré d'ordre de X est

$$\begin{aligned} E\left[(X-E[X])^3\right] &= r\frac{(1-q)}{q}E\left[B^3\right] \\ &\quad +3r\frac{(1-q)^2}{q^2}E\left[B^2\right] \\ &\quad +E[B] + 2r\frac{(1-q)^3}{q^3}E[B]^3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Puisque (2.16) est toujours positif, on constate que la loi binomiale négative composée possède toujours une asymétrie positive.

2.3.4 Comparaison des variances des trois lois composées

Pour les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative, on sait que $\mathrm{Var}(M) = E[M]$, $\mathrm{Var}(M) \leq E[M]$ et $\mathrm{Var}(M) \geq E[M]$. On compare les variances de la loi binomiale composée et de la loi binomiale négative composée à la variance de la loi Poisson composée. Pour la binomiale composée, on a

$$\mathrm{Var}(X) = nq\left(\mathrm{Var}(B) + (1-q)E[B]^2\right) \leq nqE\left[B^2\right].$$

Pour la loi binomiale négative composée, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= r\frac{1-q}{q^2}E[B]^2 + r\frac{1-q}{q}\mathrm{Var}(B) \\ &= r\frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{q}E[B]^2 + \mathrm{Var}(B)\right) \geq r\frac{1-q}{q}E[B^2]. \end{aligned}$$

Par conséquent, si les paramètres des trois lois de fréquence pour M sont fixés de telle sorte que leur espérance est identique et si la loi de B est

identique pour les trois lois composées, on constate que

$$E\left[X^{BComp}\right] = E\left[X^{PComp}\right] = E\left[X^{BNComp}\right]$$

et

$$\text{Var}\left(X^{BComp}\right) \leq \text{Var}\left(X^{PComp}\right) \leq \text{Var}\left(X^{BNComp}\right).$$

2.4 Distributions du montant d'un sinistre

Le choix de la distribution du montant d'un sinistre est crucial dans la modélisation du risque X. En actuariat, on a généralement recours à une loi continue avec un support compris dans $\mathbb{R}^+$ pour modéliser le comportement aléatoire du montant d'un sinistre. Dans la majorités des contextes d'application en assurance dommage et en assurance maladie, les distributions des montants de sinistre possède une asymétrie positive.

Les principales lois considérées pour le montant d'un sinistre sont les lois exponentielle, gamma, lognormale et Pareto. Il y a aussi les lois Burr, Weibull (avec $\tau \in]0,1[$), log-logistique, F-généralisée et inverse-gaussienne.

Des lois construites à l'aide de mélange telles que la loi mélange d'exponentielles et la loi mélange d'Erlang sont aussi utilisées.

Dans la présente section, on présente brièvement les principales lois pour modéliser le montant d'un sinistre. Les principales caractéristiques de ces lois sont fournies en annexe. Les expressions de la fonction quantile, de la VaR, de la TVaR, de la fonction *stop-loss* et de la fonction d'excès-moyen sont développées au chapitre 1.

Le classement des distributions du montant d'un sinistre selon leur comportement dans leur queue, i.e. pour les valeurs élevés de montant de sinistre, est examiné à la section 2.5.

2.4.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est une loi fondamentale en actuariat et elles possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. Elle sert souvent de loi de référence par rapport aux autres lois continues utilisées pour la description du comportement d'un montant de sinistre. Elle est définie en termes d'un seul paramètre. Son mode est à 0 et la fonction d'excès moyen est une constante. Son coefficient d'asymétrie est égal à 2. En supposant $B \sim Exp(\beta)$, il est aussi possible d'obtenir des expressions analytiques de quantités définies en fonction de X, notamment la fonction de répartition, la TVaR et la prime *stop-loss* associées à X. En revanche, il est rare que la loi exponentielle soit utilisée directement pour modéliser un montant de sinistre.

La propriété suivante est propre à la loi exponentielle et elle est appelée la propriété sans mémoire.

Proposition 2.1 *Soit une v.a.* $X \sim Exp(\beta)$. *On définit la v.a.* $W(d) = (X-d)\,|X > d$, *correspondant à l'excédent de la v.a.* X *par rapport à* d *sachant que* X *dépasse* d. *Alors,* $W(d) \sim Exp(\beta)$.

Preuve. On identifie la distribution de $W(d)$ à partir de sa fonction de survie qui est donnée par

$$\begin{aligned}\overline{F}_{W(d)}(x) &= \Pr(W(d) > x) = \Pr((X-d) > x | X > d) \\ &= \frac{e^{-\beta(x+d)}}{e^{-\beta d}} = e^{-\beta x}.\end{aligned}$$

■

On mentionne aussi la propriété suivante relative au minimum de n v.a. indépendantes de loi exponentielle.

Proposition 2.2 *Soient les v.a. indépendantes* $X_1, ..., X_n$ *de loi exponentielle avec paramètres* $\beta_i > 0$ *pour* $i = 1, ..., n$. *Alors, la v.a.* $T_n = \min(X_1; ...; X_n)$ *obéit aussi à une loi exponentielle de paramètre* $\beta_1 + ... + \beta_n$

Preuve. La fonction de survie de T_n est donnée par

$$\begin{aligned}\overline{F}_{T_n}(x) &= \Pr(\min(X_1; ...; X_n) > x) = \Pr(X_1 > x, ..., X_n > x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \Pr(X_i > x) = e^{-(\beta_1 + ... + \beta_n)x},\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat désiré. ■

Cette propriété est utilisée notamment pour la contruction de la loi exponentielle bivariée de Marshall-Olkin au chapitre 8.

2.4.2 Lois gamma et Erlang

La loi gamma est une généralisation de la loi exponentielle. Avec ses deux paramètres α et β, elle offre plus de flexibilité dans la modélisation du montant d'un montant de sinistre. Si $\alpha > 1$, son mode est supérieur à 0 et sa fonction d'excès moyen est décroissante. Si $0 < \alpha < 1$, le mode se trouve à 0 et la fonction d'excès moyen est croissante. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$.

Dans le graphique de la figure 2.1, on représente la fonction de densité de la loi gamma pour des valeurs de $\alpha = 0.5$, 1, 5, et 100 et $\beta = \frac{\alpha}{5}$ tel que $E[B] = 5$.

De même que la loi exponentielle, on obtient des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ lorsque le montant d'un sinistre obéit à une loi gamma. Ces expressions sont présentées dans la prochaine proposition.

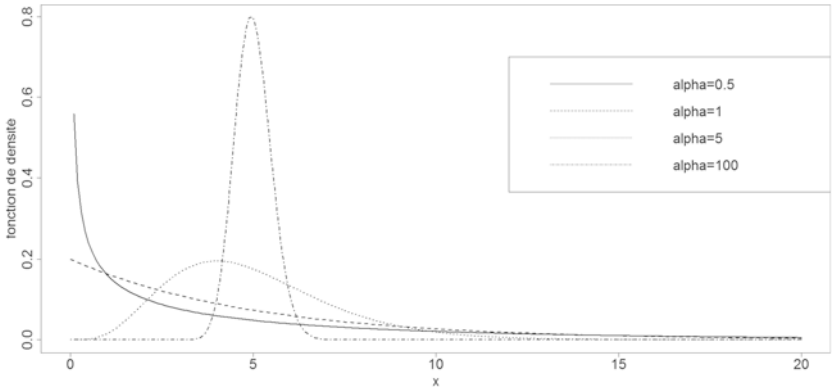

FIGURE 2.1. Valeurs de $f_B(x)$ où $B \sim Ga\left(\alpha, \frac{\alpha}{5}\right)$, pour $\alpha = 0.5$, 1, 5 et 100.

Proposition 2.3 *Supposons que* $B \sim Ga(\alpha, \beta)$. *Alors, on déduit*

$$F_X(x) = f_M(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) H(x; \alpha k, \beta), \tag{2.17}$$

$$E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b; \alpha k + 1, \beta) \tag{2.18}$$

et

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) \frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha k + 1, \beta). \tag{2.19}$$

□

Preuve. Dans le cas où $B \sim Ga(\alpha, \beta)$ avec $H(x; \alpha, \beta)$, on sait que $B_1 + ... + B_k \sim Ga(\alpha k, \beta)$. Alors, on remplace $F_{B_1+...+B_k}(x)$ par $H(x; \alpha k, \beta)$ dans (2.7) et on obtient (2.17). De plus, en remplaçant

$$E\left[(B_1 + ... + B_k) \times 1_{\{B_1+...+B_k>b\}}\right]$$

par

$$\frac{k\alpha}{\beta} \overline{H}(b; \alpha k + 1, \beta)$$

dans (2.8) et (2.10), on obtient (2.18) et (2.19). ■

Remarque 2.4 *La valeur de* $VaR_\kappa(X)$ *est calculée à partir de (2.17) en utilisant un outil d'optimisation (e.g.* `solveur` *en* `Excel`® *;* `optimize` *ou* `uniroot` *en* `R`*).*

La loi Erlang est aussi un cas particulier de la gamma avec $\alpha \in \mathbb{N}^+$, ce qui implique que sa fonction de répartition a la forme analytique suivante :

$$F_X(x) = H(x; n, \beta) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Ce n'est pas le cas lorsque le paramètre α de la loi gamma n'est pas entier. Bien que l'on n'utilise pas directement la loi Erlang dans la modélisation de la distribution d'un montant de sinistre, elle intervient fréquemment d'un point de vue calculatoire.

On illustre les résultats de la proposition 2.3 dans le prochain exemple.

Exemple 2.5 *Soit une v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *où* $\lambda = 1.4$ *et* $B \sim Ga\left(\alpha = 1.8, \beta = 1000^{-1}\right)$, *avec* $E[X] = 2520$. *On obtient les valeurs suivantes de* $VaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa(X)$ *:*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0	*0*	*2520*
0.5	*1834.662*	*4521.468*
0.95	*7767.176*	*9872.831*
0.99	*11 175.341*	*13 127.725*
0.995	*12 558.726*	*14 464.324*

□

2.4.3 Loi lognormale

La loi lognormale est fréquemment utilisée en actuariat, notamment pour la modélisation des montants de sinistres dans la modélisation des montants de sinistres en assurance dommage (e.g. IARD ou non-vie), et en gestion quantitative des risques. Son mode est supérieur à 0 et son coefficient d'asymétrie est positif. Sa fonction d'excès moyen est croissante. Avec ces deux paramètres, elle possède une très grande flexibilité pour la modélisation.

À la figure 2.2, on présente les graphiques de la fonction de densité et de la VaR de loi lognormale pour trois couples de paramètres (μ, σ). Dans les trois cas, les valeurs des paramètres ont été choisis de telle sorte que les 3 espérances soient identiques.

Si un montant d'un sinistre obéit à une loi lognormale, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. Toutefois, il est aisé d'appliquer les approches décrites aux chapitres 5 et 6 pour les évaluer approximativement.

2.4.4 Loi Weibull

Avec ses deux paramètres τ et β, la loi Weibull est une généralisation de la loi exponentielle. Si $\tau > 1$, elle est utile dans la modélisation des durées de

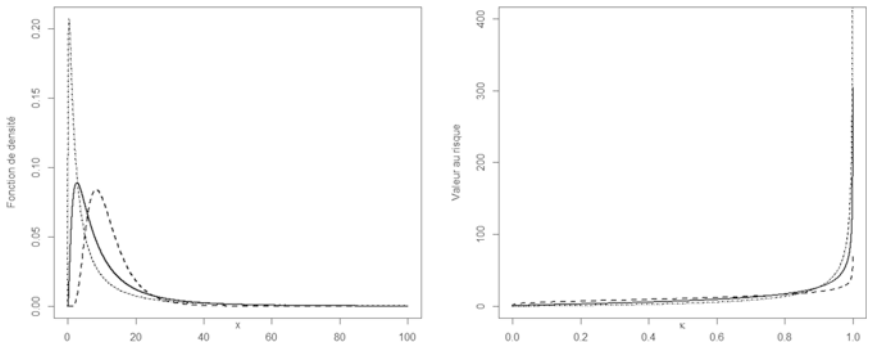

FIGURE 2.2. Valeurs de la la fonction de densité et de la VaR de $X \sim LN(\mu, \sigma)$ pour les couples suivants de (μ, σ) : $\left(2.375, \frac{1}{2}\right)$ (ligne avec petits traits), $(2, 1)$ (ligne continue) et $(0.875, 1.5)$ (ligne pointillée). Pour les 3 couples, l'espérance de X est 12.1825.

vie. Si $\tau < 1$, son mode se trouve à 0, son coefficient d'asymétrie est positif et sa fonction d'excédent moyen est croissante. Alors, avec $0 < \tau < 1$, elle peut être considérée pour modéliser la distribution d'un montant de sinistre. En revanche, si cette distribution est choisie, il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. Dans ce cas, il est conseillé d'appliquer les approches décrites aux chapitres 5 et 6 pour les évaluer approximativement.

La loi exponentielle correspond à un cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 1$.

2.4.5 Lois Pareto, Burr et F-généralisée

La loi de Pareto est aussi une loi fondammentale en actuariat pour la modélisation des montants de sinistres. Elle possède 2 paramètres et elle est fréquemment utilisée pour la modélisation des sinistres de montants élevés. Avec un mode se trouvant à 0, son espérance existe si $\alpha > 1$ et sa variance existe si $\alpha > 2$. Le moment d'ordre n existe à la condition que $\alpha > n$. Parmi ses caractéristiques importantes, on mentionne aussi que sa fonction d'excédent moyen est linéaire et croissante. À la section 1.18, on démontre que la loi Pareto peut être représentée comme un mélange de lois exponentielles où la loi mélange est gamma.

Les distributions Burr et F-généralisée sont deux généralisations de la loi Pareto. Leurs trois paramètres permettent notamment plus de flexibilité que la loi Pareto dans la modélisation, offrant la possibilité d'un mode supérieur à 0. Tout comme la loi Pareto, elles sont utilisées

pour la modélisation de montants de sinistres pouvant prendre des valeurs élevées. Elles font partie de la famille de lois ayant de comportement de type Pareto. La loi Burr peut être représentée comme un mélange de lois Weibull où la v.a. de mélange est de loi gamma. Quant à elle, la loi F-généralisée peut être représentée comme un mélange de lois gamma et la v.a. de mélange est aussi gamma

On ne peut obtenir des expressions analytiques de F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ si le montant d'un sinistre obéit à une loi Pareto, Burr ou F-généralisée. Malgré cet inconvénient, on peut évaluer approximativement ces quantités en utilisant les approches décrites aux chapitres 5 et 6.

2.4.6 Lois mélanges d'exponentielles et d'Erlang

Les lois obtenues par mélange permettent une plus grande flexibilité dans la modélisation de la distribution d'un montant de sinistre. Souvent, l'utilisation de mélange conduit à des lois de type *heavy tailed*. Il existe des lois avec mélanges finis, telles que la loi mélange d'exponentielle, des lois avec mélanges dénombrables, telles que la loi mélange d'Erlang, et des lois avec mélanges non dénombrables. À la section 1.18, on présente un exemple de cette troisième catégorie où il est démontré que la loi Pareto est un mélange non dénombrable de lois exponentielles. La loi Pareto tend vers la loi exponentielle de paramètre β lorsque le paramètre α de la loi Pareto tend vers ∞ tout en satisfaisant la contrainte que $\frac{\alpha}{\lambda-1} = \frac{1}{\beta}$.

La loi mélange d'exponentielle possède un mode à 0 et elle peut être une candidate dans la modélisation d'un montant de sinistre. Son coefficient de variation est toujours supérieur à 1. Au chapitre 6, on obtient des expressions analytiques pour F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$ pour la loi mélange d'exponentielle.

La loi mélange d'Erlang offre une grande flexibilité dans la modélisation. Cette loi comprend comme la loi exponentielle et la loi Erlang comme cas particulier. Il est aussi possible de représenter un loi mélange d'exponentielles comme une loi mélange d'Erlang. De plus, il est possible d'approximer toute distribution avec support positif par une loi mélange d'Erlang. Si on modélise un montant de sinistre par une loi mélange d'Erlang, on on obtient des expressions analytiques pour F_X, $E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right]$ et $TVaR_\kappa(X)$. On examine de façon plus détaillée les propriétés de la loi mélange d'Erlang au chapitre 6.

2.4.7 Comparaison des lois gamma, lognormale et de Pareto

Dans le prochain exemple, on compare les lois gamma, lognormale et de Pareto dont les 2 paramètres sont fixés de telle sorte que leur espérance et leur variance soient identiques. On illustre notamment que l'espérance et la variance d'une v.a. n'offre qu'une connaissance partielle et très limitée

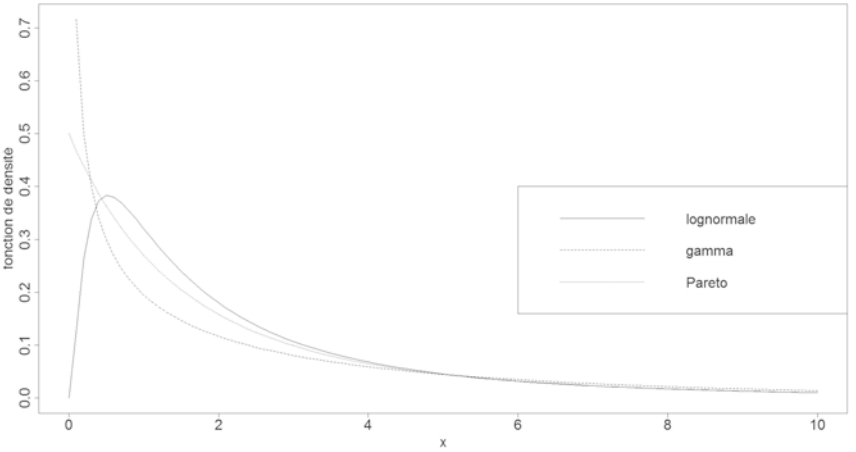

FIGURE 2.3. Courbes de f_{B_1}, f_{B_2} et f_{B_3} où $B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right)$, $B_2 \sim Ga(1/2, 1/6)$ et $B_3 \sim Pa(3, 6)$.

du comportement aléatoire de cette dernière, car il existe une panoplie de lois satisfaisant ces deux contraintes.

Exemple 2.6 *Soient les v.a. B_1, B_2 et B_3 représentant le montant d'un sinistre dont l'espérance et la variance sont 3 et 18 où*

$$B_1 \sim LN\left(\ln(3) - \frac{\ln(3)}{2}, \ln(3)\right),$$

$B_2 \sim Ga(1/2, 1/6)$ et $B_3 \sim Pa(3, 6)$. Dans la figure 2.3, il est clair que leurs fonctions de densité de B_1, B_2 et B_3.L'impact du choix de la loi sur les valeurs des mesures VaR et TVaR est significatif comme on l'observe dans les deux tableaux ci-dessous :

κ	$VaR_\kappa(B_1)$	$VaR_\kappa(B_2)$	$VaR_\kappa(B_3)$
0	*0*	*0*	*0*
0.5	*1.7321*	*1.3648*	*1.5595*
0.95	*9.7119*	*11.5244*	*10.2865*
0.99	*19.8392*	*19.9047*	*21.8495*
0.995	*25.7685*	*23.6383*	*29.0882*

κ	$TVaR_\kappa(B_1)$	$TVaR_\kappa(B_2)$	$TVaR_\kappa(B_3)$
0	*3*	*3*	*3*
0.5	*5.1163*	*5.5720*	*5.3393*
0.95	*16.5211*	*16.7460*	*18.4298*
0.99	*30.1768*	*25.3475*	*35.7743*
0.995	*37.9774*	*29.1421*	*46.6323*

Par conséquent, il est important, pour obtenir des résultats adéquats, de connaître la distribution du montant de sinistre. □

2.5 Distributions de sinistres *light* et *heavy tailed*

En actuariat, on a l'habitude de classifier les distributions à support positif pour les montants de sinistres en termes de distributions *light* et *heavy tailed*. Les distributions *heavy tailed* sont importantes pour modéliser des sinistres avec montants élevés, en particulier en réassurance. Généralement, on retrouve les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0,1[$, Burr, F-généralisée et log-logistique au sein de cette classe. Les distributions exponentielle, gamma et Weibull avec paramètre $\tau \in [1,\infty)$ font partie de la classe des distributions *light tailed*.

Il existe quelques critères pour établir la classification.

2.5.1 Existence de la f.g.m.

Les distributions dont la f.g.m. n'existe pas sont des distributions *heavy tailed*, alors que celles dont la f.g.m. existe font partie de la classe des distributions *light tailed*. Soit une v.a. X avec une fonction de répartition F_X. On dit que F_X appartient à la classe des distributions *heavy tailed* si on a

$$\lim \mathrm{e}^{rx}\overline{F}_X(x) \to \infty,$$

pour tout $r > 0$. Autrement, F_X fait partie de la classe des distributions *light tailed* si on a

$$\lim \mathrm{e}^{rx}\overline{F}_X(x) < \infty,$$

pour tout $r > 0$.

Selon ce critère, les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0,1[$, Burr, F-généralisée et log-logistique sont *heavy tailed* alors que les distributions exponentielle, gamma et Weibull paramètre $\tau \in [1,\infty)$ sont *light tailed*.

2.5.2 Fonction d'excès-moyen

On peut aussi recourir à la fonction d'excès-moyen définie par $e_X(d) = E[X - d | X > d] = \pi_X(d)\overline{F}_X(d)^{-1}$. Si $\lim_{d\to\infty} e_X(d)$ tend vers ∞, alors la distribution appartient à la classe des distributions *heavy tailed*. Lorsque $\lim_{d\to\infty} e_X(d)$ tend vers une constante, la distribution est *light tailed*. La fonction d'excès-moyen de la loi exponentielle est une constante peu importe la valeur de d, ce qui en fait une distribution *frontière*.

À nouveau, en se fondant sur ce critère, les distributions Pareto, lognormale, Weibull avec paramètre $\tau \in]0,1[$, Burr, F-généralisée et

log-logistique sont *heavy tailed* alors que les distributions gamma et Weibull avec paramètre $\tau \in [1, \infty)$ sont *light tailed*.

2.5.3 Distribution sub-exponentielle

On dit que la distribution de X est sub-exponentielle si, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\Pr(X_1 + ... + X_n > x) \sim n\overline{F}_X(x), \text{ quand } x \to \infty, \tag{2.20}$$

où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. et $X_i \sim X$ pour $i = 1, ..., n$.

Ce critère est équivalent à

$$\Pr(X_1 + ... + X_n > x) \sim \Pr(\max(X_1; ...; X_n) > x), \text{ quand } x \to \infty,$$

ce qui revient à dire que le comportement du sinistre le plus élevé explique en grande partie le comportement de l'ensemble du portefeuille.

En se basant sur ce critère, les distributions citées comme *heavy tailed* sont aussi sub-exponentielles.

Soit une v.a. X obéissant à une loi composée en fonction de la v.a. de fréquence M et de la v.a. du montant d'un sinistre B. Si la distribution de la v.a. B est sub-exponentielle, cela implique que

$$\overline{F}_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, \overline{F}_{B_1+...+B_k}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, k\overline{F}_B(x) = E[M]\, \overline{F}_B(x), \tag{2.21}$$

quand $x \to \infty$. En d'autres termes, le comportement aléatoire de X pour les valeurs élevées de x est grandement expliqué par le montant du sinistre le plus élevé. Ce résultat asymptotique est examiné à l'exemple 6.23.

2.6 Approches indemnitaire et forfaitaire

À la section 2.2, on a présenté un modéle général pour modéliser la v.a. X. Si M obéit à une loi Bernoulli (qui est un cas particulier de la loi binomiale), on convient de dire que la v.a. X est modélisée selon l'approche indemnitaire ou forfaitaire

$$X = M \times B = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases}.$$

D'un point de vue mathématique, les deux approches sont identiques. Seule l'interprétation de chacune d'elles diffère.

2.6.1 Approche indemnitaire

Selon l'approche indemnitaire, on suppose qu'un événement (sinistre ou perte) peut survenir pendant une période. Les coûts liés à l'événement fortuit sont définis par une v.a. positive B. Cette approche peut être appliquée pour décrire les coûts d'un contrat d'assurance vie temporaire 1 an, les coûts du volet de la protection incendie d'un contrat d'assurance habitation ou les pertes liées à un titre avec risque de défaut.

Les expressions (2.7), (2.2) et (2.6) de la fonction de répartition, de l'espérance et de la variance de X deviennent

$$F_X(x) = 1 - q + qF_B(x), \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.22}$$

$E[X] = qE[B]$ et $\text{Var}(X) = q\text{Var}(B) + q(1-q)E[B]^2$. On déduit de (2.22) une expression analytique pour la mesure $VaR_\kappa(X)$ qui est donnée par

$$VaR_\kappa(X) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < 1 - q \\ VaR_{\frac{\kappa-(1-q)}{q}}(B), & 1 - q < \kappa < 1 \end{cases}.$$

L'expression (2.8) de l'espérance tronquée devient

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \Pr(I = 1) E\left[B \times 1_{\{B \leq d\}}\right] = qE\left[B \times 1_{\{B \leq d\}}\right],$$

et, de la même façon, on obtient

$$E\left[X \times 1_{\{X > d\}}\right] = qE\left[B \times 1_{\{B > d\}}\right].$$

À partir de (2.9), on déduit l'expression suivante pour $TVaR_\kappa(X)$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{qE\left[B \times 1_{\{B > b\}}\right] + VaR_\kappa(X)(F_X(\kappa) - \kappa)}{1 - \kappa}.$$

Dans l'exemple qui suit, on considère le cas particulier d'un contrat d'assurance vie temporaire 1 an.

Exemple 2.7 *Pour un contrat d'assurance vie temporaire 1 an, les coûts correspondent à la prestation en cas de décès et ils sont nuls si aucun décès ne survient. On définit la v.a. X par $X = bI$, où $I \sim Bern(q)$ et la constante b correspond au montant de prestation à verser en cas de décès. La v.a. X peut prendre les valeurs 0 ou b avec les probabilités $\Pr(X = 0) = \Pr(I = 0) = 1 - q$ et $\Pr(X = b) = \Pr(I = 1) = q$. L'espérance et la variance des coûts sont données par $E[X] = bE[X] = bq$ et $\text{Var}(X) = b^2\text{Var}(I) = b^2q(1-q)$. La f.g.m. de la v.a. X est donnée par $M_X(t) = 1 - q + qe^{bt}$. Il est à noter que la probabilité de décès dépend des différentes caractéristiques de l'assuré telles que l'âge, le sexe, les habitudes de vie, etc.* □

2.6.2 Approche forfaitaire

Selon l'approche forfaitaire, le modèle décrivant les coûts pour un contrat en assurance non vie ou IARD est contruit de telle sorte que

$$I = \begin{cases} 1, \text{ si au moins un sinistre se produit} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases},$$

avec $\Pr(I = 1) = q$ et $\Pr(I = 0) = 1 - q$. La v.a. B correspond au coût total en sinistres encourus pour le contrat si au moins un sinistre se produit pendant la période. Par exemple, en assurance santé, la v.a. B représente la somme de tous les frais encourus si au moins une réclamation est faite au cours d'une période.

2.6.3 Remarques

L'appellation approche fréquence-sévérité est souvent utilisée lorsque l'on suppose que la v.a. M peut prendre des valeurs supérieures à 1. La fréquence désigne le nombre de sinistres et la sévérité, le montant d'un sinistre. En fait, on peut voir l'approche indemnitaire comme un cas particulier de l'approche fréquence-sévérité. L'approche forfaitaire est uniquement valide lorsqu'on ne possède pas les données sur le nombre de sinistres et le montant des sinistres.

2.7 Généralisation des principales lois de fréquence

Il est possible de procéder de différentes façons pour généraliser les trois principales lois discrètes : mélange de la loi de Poisson ; modication de la masse à 0 ; et composition.

2.7.1 Lois Poisson-mélange

Souvent, dans les applications pratiques, la loi de Poisson n'offre pas une description adéquate du comportement des données. Dans ces circonstances, les lois Poisson-mélange jouent un rôle important dans la modélisation du comportement de la fréquence.

Soit une v.a. Θ positive de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(t)$ existe. La v.a. Θ influence la v.a. M de la façon suivante. On suppose que la loi conditionnelle de M est donnée par $(M|\Theta = \theta) \sim Pois(\lambda\theta)$ avec $\lambda > 0$. Cela signifie que $E[M|\Theta] = \Theta\lambda$, $\mathrm{Var}(M|\Theta) = \Theta\lambda$ et $P_{M|\Theta}(t) = E\left[t^M|\Theta\right] = \mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}$. On peut s'imaginer que M correspond au nombre de sinistres pour un contrat d'assurance automobile. Comme on ne connaît pas les habitudes de conduite du conducteur, on introduit une incertitude quant au paramètre de la loi de Poisson.

Quelle est la loi de M ? Tout d'abord, en conditionnant sur Θ, on constate que

$$E[M] = E_\Theta[E[M|\Theta]] = E[\Theta\lambda] = \lambda \times 1 = \lambda. \tag{2.23}$$

Puis, en conditionnant à nouveau sur Θ, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(M) &= E_\Theta[\mathrm{Var}(M|\Theta)] + \mathrm{Var}_\Theta(E[M|\Theta]) \\ &= E[\Theta\lambda] + \mathrm{Var}_\Theta(\Theta\lambda) = \lambda + \lambda^2 \mathrm{Var}_\Theta(\Theta). \end{aligned} \tag{2.24}$$

En poursuivant l'interpétration fournie plus haut, l'incertitude quant au comportement du conducteur n'affecte pas l'espérance mais son influence conduit à une variance de M qui est supérieure à son espérance. Ainsi, la présence du mélange ajoute de la surdispersion par rapport à la loi de Poisson dans le comportement du nombre de sinistres.

On identifie la loi de M par l'intermédiaire de sa f.g.p. qui est donnée par

$$P_M(t) = E\left[t^M\right] = E_\Theta\left[E\left[t^M|\Theta\right]\right] = E\left[\mathrm{e}^{\Theta\lambda(t-1)}\right] = M_\Theta(\lambda(t-1)). \tag{2.25}$$

La v.a. Θ peut être discrète ou continue. Si la v.a. Θ est continue positive avec une fonction de densité f_Θ alors la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M = k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta,\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Autrement, si la v.a. Θ est discrète avec support $\mathbb{N}^+$, la fonction de masse de probabilité de M est donnée par

$$\Pr(M = k) = \sum_{\theta=1}^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!} \Pr(\Theta = \theta),\ k \in \mathbb{N}^+.$$

Le choix de la loi de Θ a un impact important sur le comportement de la v.a. M.

On examine trois cas particuliers de loi Poisson-mélange : la loi Poisson-gamma (ou binomiale négative), la loi Poisson-inverse gaussienne et la loi Poisson-lognormale.

2.7.2 Loi Poisson-gamma ou binomiale négative

Soit une v.a. $\Theta \sim Ga(\alpha = r, \beta = r)$ de telle sorte que $E[\Theta] = \frac{r}{r} = 1$, $\mathrm{Var}(\Theta) = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r}$ et $M_\Theta(t) = \left(\frac{r}{r-t}\right)^r$. Alors, la v.a. M obéit à la loi Poisson-gamma, notée $M \sim P - Ga(\lambda, r)$. En fait, la loi Poisson-gamma correspond à la loi binomiale négative. À partir de (2.23), (2.24) et (2.25),

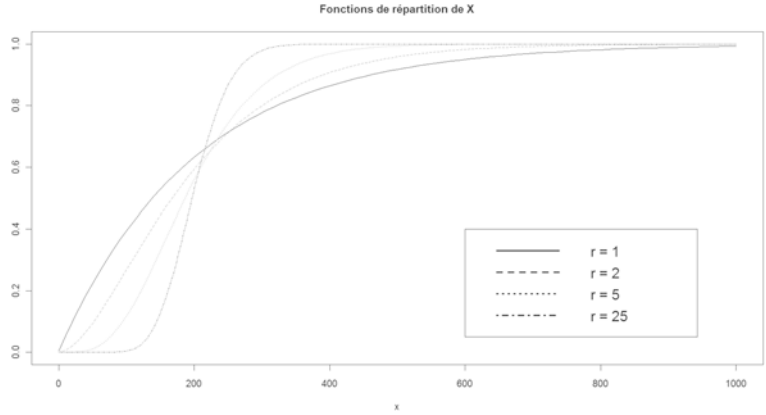

FIGURE 2.4. Courbes de $F_X(x)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

on obtient $E[M] = \lambda$, $\text{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r}$ et

$$P_M(t) = \left(\frac{r}{r-s}\right)^r = \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r. \tag{2.26}$$

En fixant $\frac{\lambda}{r} = \frac{1-q}{q}$ (ce qui implique $q = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{r}}$), on retrouve la première paramétrisation de la loi binomiale négative où

$$P_M(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{1-q}{q}(t-1)}\right)^r = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r,$$

avec $E[M] = \lambda = r\frac{1-q}{q}$ et

$$\text{Var}(M) = \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = r\frac{1-q}{q^2}.$$

Dans l'exemple suivant, on illustre l'impact du choix des paramètres r et q de la loi binomiale négative sur le comportement aléatoire des coûts d'un contrat d'assurance.

Exemple 2.8 *Les coûts pour une ligne d'affaires sont définis par la v.a.* $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, *avec* $B \sim Exp(\beta = 1)$. *Les paramètres* r *et* q *de la v.a. de fréquence* M *sont fixés de telle sorte que* $E[M] = 200$. *On considère 4 couples de valeurs pour* (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ *et* $\left(25, \frac{1}{9}\right)$. *On présente dans la figure 2.4 les courbes de la fonction de répartition* $F_X(x)$ *de* X *pour les quatre couples d'hypothèses.*

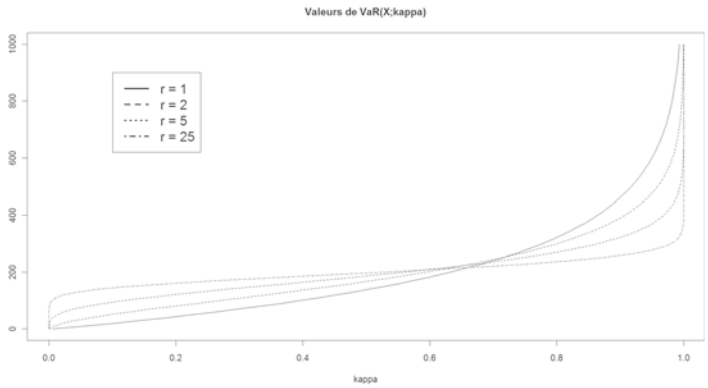

FIGURE 2.5. Courbes de $VaR_\kappa(X)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

On observe l'impact significatif des paramètres de la loi binomiale négative sur le comportement de la v.a. X.

Dans le tableau suivant, on indique les valeurs de $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.995}(X)$:

r	q	$VaR_{0.5}(X)$	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.5}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
1	$\frac{1}{201}$	*138.320*	*1063.959*	*339.320*	*1264.959*
2	$\frac{1}{101}$	*167.509*	*748.435*	*306.217*	*861.415*
5	$\frac{1}{41}$	*186.499*	*511.316*	*271.108*	*567.148*
25	$\frac{1}{9}$	*196.973*	*332.139*	*235.481*	*352.004*

Dans la figure 2.5, on reproduit les valeurs de $VaR_\kappa(X)$ pour les quatre couples de paramètres.

Les courbes de $TVaR_\kappa(X)$ pour les quatre couples de paramètres sont tracées dans le graphique de la figure 2.6.

Pour une valeur de κ fixée, on observe que la valeur de $TVaR_\kappa(X)$ augmente lorsque le paramètre r diminue (de telle sorte que l'espérance du nombre de sinistres reste identique). L'explication de ce comportement sera traité au chapitre 7. □

On observe également

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty} E[M] &= \lambda \\
\lim_{r\to\infty} \mathrm{Var}(M) &= \lim_{r\to\infty} \lambda + \frac{\lambda^2}{r} = \lambda \\
\lim_{r\to\infty} P_M(t) &= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{r}(t-1)}\right)^r = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}. \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

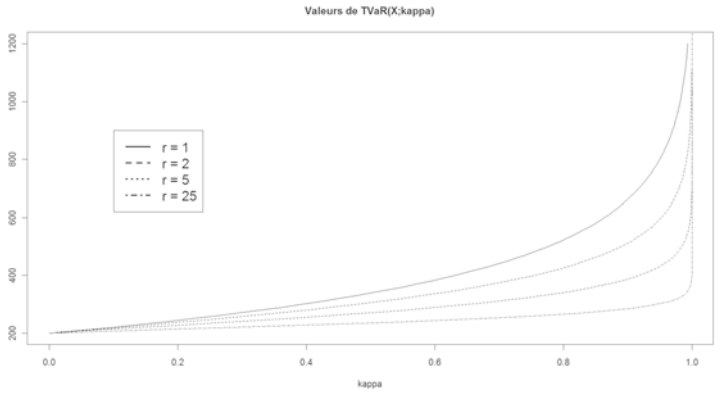

FIGURE 2.6. Courbes de $TVaR_\kappa(X)$ où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $B \sim Exp(1)$ et 4 couples de valeurs pour (r, q) : $\left(1, \frac{1}{201}\right)$, $\left(2, \frac{1}{101}\right)$, $\left(5, \frac{1}{41}\right)$ et $\left(25, \frac{1}{9}\right)$.

D'après (2.27), si $r \to \infty$ de telle sorte que l'espérance de M reste égale λ, la variance de M tend vers λ et la loi de M tend vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Exemple 2.9 *Soient les v.a.* M_1, ..., M_5 *où*

$$M_i \sim BN\left(r = r_i, q = \left(1 + \frac{2}{r_i}\right)^{-1}\right), \ i = 1, 2, 3, 4,$$

avec $r_1 = 0.5$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 100$, *et* $M_5 \sim Pois(\lambda = 2)$ *de telle sorte que* $E[M_i] = 2$, $i = 1, 2, ..., 5$. *Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs de la fonction de masse de probabilité pour les cinq v.a. :*

k	$f_{M_1}(k)$	$f_{M_2}(k)$	$f_{M_3}(k)$	$f_{M_4}(k)$	$f_{M_5}(k)$
0	*0.447214*	*0.333333*	*0.250000*	*0.138033*	*0.135335*
1	*0.178885*	*0.222222*	*0.250000*	*0.270653*	*0.270671*
2	*0.107331*	*0.148148*	*0.187500*	*0.267999*	*0.270671*
3	*0.071554*	*0.098765*	*0.125000*	*0.178668*	*0.180447*
4	*0.050088*	*0.065844*	*0.078125*	*0.090209*	*0.090224*
5	*0.036063*	*0.043896*	*0.046875*	*0.036791*	*0.036089*
10	*0.008461*	*0.005781*	*0.002686*	*0.000049*	*0.000038*
15	*0.002273*	*0.000761*	*0.000122*	*0.000000*	*0.000000*
20	*0.000646*	*0.000100*	*0.000005*	*0.000000*	*0.000000*

Quand la valeur de r augmente, les valeurs des fonctions de masse de probabilité tendent comme prévu vers celles de la loi de Poisson. □

2.7.3 Loi Poisson-inverse gaussienne

Soit $\Theta \sim IG(1,\beta)$ de telle sorte que $E[\Theta] = 1$ et $\mathrm{Var}(\Theta) = \beta$. On dit alors que la v.a. M obéit à la loi Poisson-inverse gaussienne, notée $M \sim P - IG(\lambda,\beta)$. D'après (2.23), (2.24) et (2.25), on déduit que $E[M] = \lambda$, $\mathrm{Var}(M) = \lambda + \lambda^2\beta$ et

$$P_M(t) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1 - \sqrt{1 - 2\beta\lambda(t-1)}\right)\right).$$

Il n'y pas d'expression analytique pour f_M car on ne peut évaluer explicitement

$$f_M(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\theta^3}}\exp\left(-\frac{1}{2\beta\theta}(\theta-1)^2\right)\mathrm{d}\theta.$$

On a recours à une relation récursive pour déterminer les valeurs de $f_M(k)$. Les points de départ sont

$$f_M(0) = P_M(0) = \exp\left(\frac{1}{\beta}\left(1 - \sqrt{1+2\beta\lambda}\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned} f_M(1) &= \left.\frac{\mathrm{d}P_M(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\beta\lambda(t-1)}}P_M(t)\right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2\beta\lambda}}f_M(0). \end{aligned}$$

Pour $k = 2, 3, ...$, on utilise la relation récursive

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \frac{2\lambda\beta}{1+2\lambda\beta}\left(1 - \frac{3}{2k}\right)f_M(k-1) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{(1+2\lambda\beta)k(k+1)}f_M(k-2). \end{aligned}$$

2.7.4 Loi Poisson-lognormale

Soit une v.a. $\Theta \sim LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ où $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$ de telle sorte que $E[\Theta] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) = 1$ et

$$\mathrm{Var}(\Theta) = \mathrm{e}^{\left(2\mu+\sigma^2\right)}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right) = \left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).$$

Il en résulte que la v.a. M obéit à une loi Poisson-lognormale avec paramètres λ et σ, notée $M \sim P - LN\left(\lambda,\sigma^2\right)$. À partir de (2.23), (2.24),

on obtient $E[M] = \lambda$ et $\text{Var}(M) = \lambda + \lambda^2\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$. Il n'y a pas de forme explicite pour la fonction de masse de probabilité. On doit utiliser des méthodes d'intégration numérique pour évaluer

$$f_M(k) = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}f_\Theta(\theta)\,d\theta = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta}\frac{(\lambda\theta)^k}{k!}\frac{1}{\theta\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln\theta+\frac{\sigma^2}{2})^2}{2\sigma^2}}d\theta.$$

Dans l'exemple, on compare les valeurs obtenues des fonctions de masse de probabilité pour la loi Poisson-gamma (binomiale négative) et la loi Poisson-lognormale.

Exemple 2.10 *Soient les v.a.* $M_1 \sim P - LN\left(\lambda = 2, \sigma^2 = 1\right)$ *et* $M_2 \sim BN(r, q)$ *où* $r = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) = 0.5820$ *et* $q = \left(1 + \frac{2}{r}\right)^{-1} = 0.2254$. *Les paramètres des deux lois sont fixés de telle sorte que* $E[M_1] = E[M_2] = 2$ *et* $\text{Var}(M_1) = \text{Var}(M_2) = 8.8731$. *Les valeurs obtenues de* $f_{M_1}(k)$ *et* $f_{M_2}(k)$, *pour* $k = 0, 1, ..., 5$ *sont indiquées dans le tableau ci-dessous :*

k	$f_{M_1}(k)$	$f_{M_2}(k)$
0	*0.3325*	*0.4202*
1	*0.2506*	*0.1894*
2	*0.1526*	*0.1161*
3	*0.0910*	*0.0774*
4	*0.0556*	*0.0537*
5	*0.0352*	*0.0381*

□

2.7.5 Modification de la masse à 0

Dans certaines applications, les lois de Poisson, binomiale, binomiale négative ou Poisson-mélange n'offrent pas une description adéquate de la masse à 0. Alors, il est possible de modifier la masse à 0 d'une loi discrète. Soient la v.a. discrète M' avec fonction de masse de probabilité $f_{M'}$ et la v.a. $I \sim Bern(q)$. On définit la v.a. discrète M avec une fonction de masse de probabilité $f_M(0) = (1-q) + qf_{M'}(0)$, $k = 0$, et $f_M(k) = qf_{M'}(k)$, $k \in \mathbb{N}^+$. Il en résulte que $E[M] = qE[M']$ et $\text{Var}(M) = qE\left[M'^2\right] - q^2E[M]^2$ et $P_M(r) = 1 - q + qP_{M'}(r)$.

2.8 Somme aléatoire et allocation

Soit une v.a. X définie selon une somme aléatoire $X = \sum_{k=1}^{M} B_k$, si $M > 0$, et $X = 0$ si $M = 0$. On suppose que la v.a. B est continue et positive

impliquant

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} B_j\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{k} B_j > VaR_\kappa(X)\right\}}\right].$$

On présente deux règles pour expliquer la valeur de $TVaR_\kappa(X)$ en fonction des deux sources qui définissent le comportement de X, soit les v.a. M et B.

Définition 2.11 ***Règle basée sur la variance.*** *Comme première approche, on peut recourir à une règle basée sur la* $\mathrm{Var}(X)$*. En effet, les parts allouées aux v.a.* M *et* B *sont définies par*

$$\begin{aligned} C_\kappa^{\mathrm{Var}}(M) &= \frac{\mathrm{Var}(E[X|M])}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{\mathrm{Var}(M)\, E[B]^2}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) \\ C_\kappa^{\mathrm{Var}}(B) &= \frac{E[\mathrm{Var}(X|M)]}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{E[M]\,\mathrm{Var}(B)}{\mathrm{Var}(X)} TVaR_\kappa(X). \end{aligned}$$

La règle basée sur la variance a l'avantage d'être simple et intuitive. De plus, elle se base sur l'expression (2.6) de la variance de X. Toutefois, cette approche se fonde uniquement sur les variances et espérances des v.a. M et B.

Définition 2.12 ***Règle basée sur la TVaR.*** *La deuxième approche se base sur la décomposition suivante :*

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X>b\}}\right] &= E_M\left[(X - E[X|M] + E[X|M]) \times 1_{\{X>b\}}\right] \\ &= E_M\left[(X - E[X|M]) \times 1_{\{X>b\}}\right] \\ &\quad + E\left[E[X|M] \times 1_{\{X>b\}}\right]. \end{aligned}$$

Comme

$$E_M\left[E[X|M] \times 1_{\{X>b\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} kE[B] \times f_M(k) \Pr(B_1 + ... + B_k > b),$$

on déduit la part allouée à la v.a. M *donnée par*

$$C_\kappa^{TVaR}(M) = \frac{E_M\left[E[X|M] \times 1_{\{X>VaR_\kappa(X)\}}\right]}{1-\kappa}.$$

La part allouée à la v.a. B *est*

$$C_\kappa^{TVaR}(B) = TVaR_\kappa(X) - Part_\kappa(M).$$

□

Dans l'exemple qui suit, on illustre l'impact du choix de la loi du montant d'un sinistre sur la $TVaR$ ainsi que les parts allouées aux v.a. M et B.

Exemple 2.13 *On considère une v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *avec* $B \sim Ga(\alpha, \beta)$. *On fixe les paramètres* α *et* β *de telle sorte que* $E[B] = 2$. *De plus, on a* $\lambda = 2$ *i.e.* $E[M] = 2$, *ce qui implique que* $E[X] = E[M]E[B] = 4$. *Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs de* $VaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa(X)$ *pour trois paires de paramètres* (α, β) *et pour* $\kappa = 0.995$ *:*

α	β	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
0.1	*0.05*	*57.74695*	*75.10465*
1	*0.5*	*19.43193*	*22.47014*
10	*5*	*13.66158*	*15.22953*

En supposant que le capital correspond à $TVaR_\kappa(X)$, *on indique les valeurs des contributions selon les deux approches pour trois paires de paramètres* (α, β) *et pour* $\kappa = 0.995$ *:*

α	β	$C^{\text{Var}}_{0.995}(M)$	$C^{\text{Var}}_{0.995}(B)$	$C^{TVaR}_{0.995}(M)$	$C^{TVaR}_{0.995}(B)$
0.1	*0.05*	*6.82770*	*68.27695*	*6.59984*	*68.50481*
1	*0.5*	*11.23507*	*11.23507*	*10.00647*	*12.46367*
10	*5*	*13.84502*	*1.38451*	*13.57499*	*1.65454*

□

2.9 Pertes financières

Jusqu'à présent, on s'est intéressé principalement à la modélisation des risques liés à des activités d'assurance ou à des activités similaires. Dans cette section, on traite brièvement de la modélisation des pertes liées à un investissement sur une période.

Soit un individu ou une société qui investit une somme $V(0)$ dans un fonds ABC pendant une période. Selon le contexte, la période est de 1 journée, 10 journées (banques), 1 mois, 1 trimestre ou 1 année. La valeur de l'investissement à la fin de la période est $V(1)$. Dans la gestion quantitative des risques, on est préoccupé par le fait que la valeur de $V(1)$ soit inférieure à l'investissement initial (ou à un objectif fixé), ce qui implique une perte financière L positive. On définit la perte liée à cet investissement par la v.a. L où $L = V(0) - V(1)$ avec $E[L] = V(0) - E[V(1)]$ et $\text{Var}(L) = \text{Var}(V(1))$. On définit le rendement instantané pour la période par la v.a. R. La valeur de l'investissement $V(1)$ correspond alors à $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$ et on a la perte $L = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^R$. On fera une perte si $V(1)$ prend des valeurs peu élevées c'est-à-dire si le rendement pour la période est négatif.

Supposons que la v.a. R est continue, ce qui implique que la v.a. $V(1)$ est aussi continue. En utilisant (1.22), on déduit que

$$VaR_\kappa(L) = V(0) + VaR_\kappa(-V(1)) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1)). \quad (2.28)$$

Ensuite, en appliquant (1.25) ou (1.26), on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(L) &= V(0) + TVaR_\kappa(-V(1)) \\ &= V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_{1-u}(V(1))\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

qui devient

$$TVaR_\kappa(L) = V(0) - \frac{\left\{E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]\right\}}{1-\kappa} \tag{2.29}$$

ou

$$TVaR_\kappa(L) = V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\left(E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)\right).$$

La valeur $VaR_{1-\kappa}(V(1))$ corrrespond au montant tel que la probabilité que la valeur de l'investissement au temps 1 soit inférieure à ce montant est $1-\kappa$. La quantité $\left\{E\left[X \times 1_{\{X \le VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right]\right\}$ correspond à l'espérance des valeurs de $V(1)$ inférieures à la $VaR(V(1))$.

Exemple 2.14 *Soit une v.a.* $R \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ *représentant le rendement instantané du fonds ABC pour la prochaine période. La valeur de l'investissement à la fin de la période correspond à la v.a.* $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^R$. *Alors,* $E[L] = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ *et*

$$\mathrm{Var}(L) = V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right) = V(0)^2\,\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right).$$

Avec (2.28), l'expression de $VaR_\kappa(L)$ *est donnée par*

$$VaR_\kappa(L) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1)) = V(0) - V(0)\,\mathrm{e}^{\mu+\sigma VaR_{1-\kappa}(Z)},$$

où $Z \sim N(0,1)$. *En utilisant (2.29), l'expression de* $TVaR_\kappa(L)$ *devient*

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(L) &= V(0) + TVaR_\kappa(-V(1)) \\ &= V(0) - \frac{1}{1-\kappa}\int_0^{1-\kappa} VaR_s(V(1))\,\mathrm{d}s \\ &= V(0) - V(0)\,\frac{1}{1-\kappa}E\left[\mathrm{e}^R \times 1_{\{\mathrm{e}^R \le VaR_{1-\kappa}(\mathrm{e}^R)\}}\right]. \end{aligned}$$

Puisque e^R *obéit à une loi lognormale, on a*

$$E\left[\mathrm{e}^R \times 1_{\{\mathrm{e}^R \le VaR_{1-\kappa}(\mathrm{e}^R)\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)F_Z\left(VaR_{1-\kappa}(Z) - \sigma\right),$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(L) &= V(0) - V(0)\frac{1}{1-\kappa}E\left[X \times 1_{\{X \leq VaR_{1-\kappa}(X)\}}\right] \\ &= V(0) - V(0)\frac{1}{1-\kappa}\exp(\mu+\sigma^2/2)F_Z\left(VaR_{1-\kappa}(Z) - \sigma\right). \end{aligned}$$

□

On applique les résultats de l'exemple 2.14 dans l'exemple suivant.

Exemple 2.15 *On suppose que* $V(0) = 10\ 000$, $\mu = 0.08$ *et* $\sigma = 0.2$. *L'espérance et la variance de la perte sont* $E[L] = -1051.71$ *et* $\mathrm{Var}(L) = 4\ 984\ 639.22$. *Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs* $VaR_{\kappa}(L)$ *et* $TVaR_{\kappa}(L)$ *pour* $\kappa = 0,\ 0.01,\ 0.5,\ 0.99$ *et* 0.995 *:*

κ	*0*	*0.005*	*0.01*	*0.5*	*0.99*	*0.995*
$VaR_{\kappa}(L)$	$-\infty$	*-8133.32*	*-7250.73*	*-832.87*	*3197.33*	*3528.43*
$TVaR_{\kappa}(L)$	*-1051.71*	*-1010.00*	*-976.50*	*700.20*	*3631.16*	*3914.81*

□

Il est important de souligner que, dans les contextes pratiques, la loi normale n'offre pas un choix adéquat pour modéliser le rendement R. Dans le prochain exemple, on présente une autre loi pour R.

Exemple 2.16 *Un individu investit une somme* $V(0) = 10\ 000$ *dans le fonds mutuel ABC pendant une année. La valeur de l'investissement à la fin de l'année est* $V(1) = V(0)\,\mathrm{e}^{R}$ *où le rendement instantané* R *est la somme des deux composantes* R_1 *et* R_2, *avec* $R_1 \sim N\left(\mu_1 = 0.2, \sigma_1^2 = 0.2^2\right)$. *La composante* R_2 *obéit à une loi Poisson composée avec*

$$R_2 = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où le nombre de sauts dans les rendements est la v.a. $M \sim Pois(\lambda = 0.2)$ *et les tailles des sauts* B_1, B_2, B_3, ... *se comportent comme* $B \sim N\left(-0.5, 0.04^2\right)$ *(les sauts ont une espérance négative). Les v.a.* R_1 *et* R_2 *sont indépendantes. On définit la perte liée à l'investissement par la v.a.* $L = V(0) - V(1)$. *L'espérance et la variance de* R *sont*

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2] = 0.2 + 0.2 \times (-0.5) = 0.1$$

et

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{Var}(R_1) + \mathrm{Var}(R_2) = 0.09032.$$

L'espérance de $V(1)$ *est*

$$\begin{aligned} E[V(1)] &= E\left[V(0)\,\mathrm{e}^{R}\right] = V(0)\,E\left[\mathrm{e}^{R}\right] = V(0)\,E\left[\mathrm{e}^{R_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{R_2}\right] \\ &= 10\ 000\mathrm{e}^{0.2+\frac{0.2^2}{2}}\mathrm{e}^{0.2\left(\mathrm{e}^{-0.5+\frac{0.04^2}{2}}-1\right)} = 11\ 518.89 \end{aligned}$$

et on a $E[L] = V(0) - E[V(1)] = -1518.89$. *Le deuxième moment de* $V(1)$ *est*

$$\begin{aligned} E\left[V(1)^2\right] &= E\left[V(0)^2\,\mathrm{e}^{2R}\right] = V(0)^2\,E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \\ &= V(0)^2\,E\left[\mathrm{e}^{2R_1}\right]E\left[\mathrm{e}^{2R_2}\right] \\ &= 10\ 000^2\mathrm{e}^{2\times 0.2+4\times\frac{0.2^2}{2}}\mathrm{e}^{0.2\left(\mathrm{e}^{-2\times 0.5+4\frac{0.04^2}{2}}-1\right)} = 142\ 448\ 694. \end{aligned}$$

On a $\mathrm{Var}(V(1)) = \mathrm{Var}(L) = 9\ 763\ 864$. *En conditionnant sur* M, *l'expression de* $F_{V(1)}(x) = \Pr(V(1) \leq x)$ *est*

$$\begin{aligned} F_{V(1)}(x) &= f_M(0)\Pr\left(10\ 000\mathrm{e}^{R_1} \leq x\right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\Pr\left(10\ 000\mathrm{e}^{R_1+B_1+\ldots+B_k} \leq x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\,F_Z\left(\frac{\ln x - \mu_1 - k\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + k\sigma_2^2}}\right). \end{aligned}$$

L'expression de la fonction de répartition de L *est donnée par*

$$\begin{aligned} F_L(x) &= \Pr(V(0) - V(1) \leq x) \\ &= \Pr(V(1) > V(0) - x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\,\overline{F}_Z\left(\frac{\ln\left(\frac{V(0)-x}{V(0)}\right) - \mu_1 - k\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + k\sigma_2^2}}\right) \end{aligned}$$

avec $x \in (-\infty, V(0)]$. *On obtient e.g.* $\Pr(L \leq 5000) = 0.9830$, $VaR_{0.995}(L) = 6142.08$ *et* $TVaR_{0.995}(L) = 6730.64$. □

2.10 Pertes financières *vs* coûts en assurance

En assurance, les coûts sont positifs et peuvent être nuls avec une forte probabilité. Dans cette section, on examine à l'aide d'un exemple l'impact de modéliser conjointement le risque d'assurance et le risque financier pour une seule entité. Ce thème est traité de façon plus détaillée au chapitre 3.

Exemple 2.17 *On définit les prestations de décès versées par un assureur à la fin de la prochaine année par la v.a.* $S = bN$, *où* $N \sim BN(r = 5, q = \frac{1}{5})$ *et* $b = 1000$. *L'assureur récolte les primes* $V(0)$ *au début de la période et les investit pour la durée de la période. Il compte utiliser les revenus totaux afin de payer les coûts en sinistres à la fin de la période. On suppose que l'assureur a deux options : (A) investir dans un titre sans risque avec un rendement instantané constant* δ *de 4 % ou (B) investir dans un titre avec risque dont le rendement instantané est représenté par la v.a.* R. *L'assureur calcule le montant* $V(0) = vE[S]$ *où la valeur de* v *est fixée selon l'option choisie. Approche A :* $v = \mathrm{e}^{-\delta}$ *avec* $\delta = 4$ % *; la perte de l'assureur est* $L_A = S - V_A(0)\mathrm{e}^{0.04}$. *Approche B :* $v = \frac{1}{E[\mathrm{e}^R]}$ *où* $R \sim N(0.08, 0.2^2)$ *; la perte de l'assureur est* $L_B = S - V_B(0)\mathrm{e}^R$. *On compare les comportements aléatoires des pertes* L_A *et* L_B.

Tout d'abord, la valeur de $V_A(0)$ *est* 19 215.789 *et celle de* $V_B(0)$ *est* 18 096.748. *À première vue, l'option B semble plus avantageuse. De plus, pour les deux options, les espérances de* L_A *et* L_B *sont nulles où*

$$E[L_A] = E[S] - V(0)\,\mathrm{e}^{0.06} = 0$$

et

$$E[L_B] = E[S] - V(0)\,E\left[\mathrm{e}^R\right] = 0.$$

Toutefois, les variances diffèrent :

$$\mathrm{Var}(L_A) = \mathrm{Var}(S) = 100\ 000\ 000$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(L_B) &= \mathrm{Var}(S) + V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right)\\ &= 100\ 000\ 000 + V(0)^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right)\\ &= 116\ 324\ 309.026 > \mathrm{Var}(L_A).\end{aligned}$$

On constate que l'option B est plus risquée en comparant seulement les variances de L_A *et* L_B. *En effet, l'option B combine à la fois le risque d'assurance et le risque financier rattaché à l'investissement.*

Les fonctions de répartition de L_A *et* L_B *sont*

$$F_{L_A}(x) = \Pr\left(S \le V_A(0)\,\mathrm{e}^{0.04} + x\right) = \Pr\left(N \le \frac{bE[N] + x}{b}\right)$$

et

$$\begin{aligned} F_{L_B}(x) &= \Pr\left(S \leq V_B(0)\,\mathrm{e}^R + x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k) \Pr\left(1000k \leq V_B(0)\,\mathrm{e}^R + x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k) \Pr\left(\mathrm{e}^R > \frac{1000k - x}{V_B(0)}\right). \end{aligned}$$

La probabilité que l'assureur ne remplisse pas ses engagements selon l'option A et l'option B sont $p_A = \Pr(L_A > 0) = 0.42067$ *et* $p_B = \Pr(L_B > 0) = 0.45381$.

Les expressions de $E\left[L_A \times 1_{\{L_A > d\}}\right]$ *et* $E\left[L_B \times 1_{\{L_B > d\}}\right]$ *sont*

$$\begin{aligned} & E\left[L_A \times 1_{\{L_A > d\}}\right] \\ = \; & E\left[\left(S - V_A(0)\,e^{0.04}\right) \times 1_{\{(S - V_A(0)e^{0.04}) > d\}}\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k) \left(1000k - V_A(0)\,e^{0.04}\right) \times 1_{\{(1000k - V_A(0)e^{0.04}) > d\}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & E\left[L_B \times 1_{\{L_B > d\}}\right] \\ = \; & E\left[\left(S - V_B(0)\,e^R\right) \times 1_{\{(S - V_B(0)e^R) > d\}}\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[\left(1000k - V_B(0)\,e^R\right) \times 1_{\{(1000k - V_B(0)e^R) > d\}}\right] \\ = \; & \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[1000k \times 1_{\left\{e^R \leq \frac{1000k - d}{V_B(0)}\right\}}\right] \\ & -V_B(0) \sum_{k=0}^{\infty} f_N(k)\, E\left[e^R \times 1_{\left\{e^R \leq \frac{1000k - d}{V_B(0)}\right\}}\right] \end{aligned}$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(L_A)$, $VaR_\kappa(L_B)$, $TVaR_\kappa(L_A)$ *et* $TVaR_\kappa(L_B)$ *sont présentées dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(L_A)$	$VaR_\kappa(L_B)$	$TVaR_\kappa(L_A)$	$TVaR_\kappa(L_B)$
0.005	*-17000*	*-22333.38*	*92.05*	*0*
0.5	*-1000*	*-1207.58*	*7760.36*	*376.82*
0.99	*30000*	*30637.54*	*35823.86*	*252226.00*
0.995	*34000*	*35109.83*	*40088.90*	*346849.70*

L'option A a le désavantage de requérir un investissement initial plus élevé que celui exigé par l'option B. En revanche, l'ajout du risque d'investissement augmente la variabilité et l'importance de la perte éventuelle à la fin de l'année. □

2.11 Notes bibliographiques

Parmi les ouvrages de référence, on mentionne e.g. [89], [66] et [93]. Les distributions univariées continues et discrètes sont traitées dans [59], [60] et [61]. Dans le contexte de l'actuariat, on consultera [27] pour un exposé fort élaboré sur les distributions de fréquence et [66] pour un exposé aussi complet sur les distributions du montant d'un sinistre. On peut consulter [81] pour un exposé détaillé concernant les pertes financières dans une perspective de gestion quantitative des risques. Les distributions *light* et *heavy tailed* sont traitées de manière fouillée dans [34].

2.12 Exercices

1. On considère un contrat d'assurance vie temporaire 1 an émis à un individu de 60 ans. Selon son âge et son état de santé, sa probabilité de décès est de 0.013. Le montant de la prestation de décès est de 100 000. On ne tient pas compte de l'intérêt.

   (a) Calculer l'espérance et l'écart type des coûts associés au contrat.

   (b) Calculer la probabilité que les coûts du contrat soient nuls.

2. On considère un contrat d'assurance vie temporaire 1 an émis à un individu de 35 ans. La prestation de décès de base est de 100 000. En cas de décès accidentel, la prestation de décès de base est triplée. La probabilité de décès non accidentel est de 0.02 et la probabilité de décès accidentel est de 0.005. La v.a. X représente l'ensemble des coûts éventuels pour le contrat.

   (a) Calculer l'espérance et la variance de coûts pour le contrat.

   (b) Si un décès survient, calculer la probabilité que les coûts soient de 300 000.

   (c) Calculer $VaR_{\kappa}(X)$ pour $\kappa = 0.95$, 0.99 et 0.995.

3. On définit la v.a. X par $X = B \times 1_{\{R \leq -0.1\}}$, représentant les coûts pour une institution financière à la suite d'une débâcle sur les marchés financiers. La v.a. $R \sim N\left(0.06, 0.2^2\right)$ correspond au rendement quotidien d'un indice boursier connu. La v.a. $B \sim Pa(1.5, 1000)$ est indépendante de la v.a. R.

   (a) Développer l'expression de $F_X(x)$.

   (b) Calculer $E[X]$.

   (c) Calculer $F_X(0)$ et $F_X(10\,000)$.

   (d) Calculer $VaR_{0.999}(X)$ et $TVaR_{0.999}(X)$.

4. Les coûts pour un contrat d'assurance santé sont définis par $X \sim BComp\,(n, q; F_B)$ où $n = 1$, $q = 0.3$ et $B \sim LN\left(7, 1.1^2\right)$ sont indépendantes.

   (a) Calculer $E\,[X]$ et $\sqrt{\text{Var}\,(X)}$.

   (b) Calculer $\Pr(X \leq 10\ 000)$.

   (c) Calculer $VaR_{0.99}\,(S)$ et $TVaR_{0.99}\,(X)$.

5. Les coûts d'un contrat d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour résidences unifamiliales sont définis par la v.a. $X \sim BComp\,(n, q; F_B)$ où $n = 1$ et $q = 0.1$. Par hypothèse, au plus un incendie peut survenir pour une résidence pendant une période. On définit $B = U \times c$, où $c = 200$ correspond à la valeur de la résidence et la v.a. U est la proportion de dommages à la suite d'un incendie. Compte tenu de la structure de la résidence, $U \sim Bêta\,(1.2, 1)$.

   (a) Calculer $E\,[X]$ et $\text{Var}\,(X)$.

   (b) Calculer la probabilité que X excède 150.

   (c) Calculer $VaR_{0.99}\,(X)$ et $TVaR_{0.99}\,(X)$.

6. Les coûts pour un contrat d'assurance IARD sont définis par la v.a. $X \sim PComp\,(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 0.2$ et $B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$.

   (a) Calculer $E\,[X]$ et $\text{Var}\,(X)$.

   (b) Calculer $\Pr\,(X > 3000)$.

   (c) Calculer $VaR_{0.99}\,(X)$ et $TVaR_{0.99}\,(X)$.

7. On examine le risque associé à un contrat d'assurance automobile émis à des assurés de la région ABC. L'actuaire croit que la population de la région ABC est composée de bons conducteurs (avec une proportion de 80 %) et de mauvais conducteurs (avec une proportion de 20 %). On modélise les coûts pour un contrat par l'approche fréquence-sévérité. Si l'assuré est un bon conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1. Si l'assuré est un mauvais conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.25. En cas de sinistre, le montant d'un sinistre obéit à une loi $Erl(2, \beta)$ de moyenne 3000 peu importe le type de conducteur. Au moment de l'émission d'un nouveau contrat, on ne dispose pas d'information sur le type de conducteur.

   (a) Pour un nouveau contrat, calculer la probabilité que le contrat ne produise aucun sinistre. Calculer la probabilité qu'il en produise 2 ou plus.

(b) Calculer l'espérance et la variance du nombre de sinistres pour un nouveau contrat.

(c) Calculer l'espérance et la variance des coûts pour un nouveau contrat.

8. Soit une v.a. M de fréquence obéissant à une loi Poisson mélange. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de la v.a. mélange Θ sont données ci-dessous :

θ	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
$f_\Theta(\theta)$	$\frac{17}{300}$	0.22	0.22	0.17	0.12	0.08	0.05	0.04	0.02	$\frac{7}{300}$

De plus, $(M|\Theta=\theta) \sim Pois(0.2\times\theta)$, $\theta \in \{0.25, 0.5, ..., 2.5\}$.

(a) Calculer $E[\Theta]$ et $\text{Var}(\Theta)$.

(b) Calculer $E[M]$ et $\text{Var}(M)$.

(c) Calculer $VaR_\kappa(M)$ et $TVaR_\kappa(M)$ pour $\kappa = 0.9$, 0.99 et 0.999.

(d) Soit une v.a. X représentant les coûts d'un contrat d'assurance IARD où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses habituelles avec $B_j \sim B \sim Ga\left(2, \frac{1}{1000}\right)$, $j \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

iii. Calculer les parts allouées de $TVaR_{0.99}(X)$ aux v.a. M et B selon les règles de la variance et de la TVaR.

9. Soit une v.a. M de fréquence obéissant à la loi Poisson généralisée de paramètres $\lambda > 0$ et $\tau \in [0, 1[$ où

$$\begin{aligned} f_M(k) &= \frac{\lambda(1-\tau)\left(\lambda(1-\tau)+\tau k\right)^{k-1}}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda(1-\tau)+\tau k)},\ k \in \mathbb{N}, \\ E[M] &= \lambda \text{ et } \text{Var}(M) = \frac{\lambda}{(1-\tau)^2}. \end{aligned}$$

La loi Poisson généralisée est aussi un exemple de loi Poisson-mélange. Si $\tau = 0$, $M \sim Pois(\lambda)$.

(a) Pour $\lambda = 0.25$ et $\tau = 0.5$, calculer $E[M]$ et $\text{Var}(M)$.

(b) Calculer $VaR_\kappa(M)$ et $TVaR_\kappa(M)$ pour $\kappa = 0.99$ et 0.999.

(c) Soit une v.a. X représentant les coûts d'un contrat où

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

selon les hypothèses habituelles avec $B_j \sim B \sim Ga\left(2, \frac{1}{1000}\right)$, $j \in \mathbb{N}^+$.

i. Calculer $E[X]$ et $\text{Var}(X)$.
ii. Calculer $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.
iii. Calculer les parts allouées de $TVaR_{0.99}(X)$ aux v.a. M et B selon les règles de la variance et de la TVaR.

10. Les coûts pour un contrat d'assurance automobile sont définis par la v.a. $X = (1+R)Y$ où $Y \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 2$, $q = \frac{2}{3}$ et $B \sim Exp(\beta)$. La v.a. R correspond à l'indexation éventuelle avec $R \in \{0.05, 0.2\}$, où $\Pr(R = 0.05) = 0.9$ et $\Pr(R = 0.2) = 0.1$. Les v.a. Y et R sont indépendantes.

    (a) Évaluer l'espérance et la variance de X.
    (b) Évaluer la probabilité que X excède son espérance.

11. Soit une v.a. $X \sim BNComp(1, q; F_B)$ où $B \sim Exp(\beta)$.

    (a) Montrer que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} B^*, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

    où $I \sim Bern(q^*)$ et $B^* \sim Exp(\beta^*)$.
    (b) Si $E[M] = 1.4$ et $E[B] = 1000$, identifier les valeurs de q^*et β^*. Calculer $\Pr(X > 3000)$.

12. Soit une v.a. $X \sim BNComp(r, q; F_B)$ où $r \in \mathbb{N}^+$ et $B \sim Exp(\beta))$.

    (a) Montrer que l'on peut exprimer la v.a. X sous la forme

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} B_j^*, & M^* > 0 \\ 0, & M^* = 0 \end{cases},$$

    où $M^* \sim Bin(r, q^*)$, B_1^*, B_2^*, ... sont i.i.d. ($B_1^* \sim B_2^* \sim ... \sim B^* \sim Exp(\beta^*)$) et indépendantes de M^*.
    (b) Si $r = 3$, $q = 0.2$ et $\beta = 1000^{-1}$, identifier les valeurs de q^*et β^*. Calculer $\Pr(X > 3000)$.

13. Une compagnie doit financer un montant $X = 1000\text{e}^{R_i}$ au temps 1, où $R_i \sim N\left(0.02, 0.01^2\right)$. Au temps 0, elle veut investir une somme $V(0)$ dans un fonds dont le rendement instantané pour une période est R_f. La valeur accumulée au temps 1 de la somme investie est la v.a. $V(1) = V(0)\,\text{e}^{R_f}$.

    Calculer $V(0)$ de telle sorte que $\Pr(V(1) \leq X) = 0.01$ pour les 3 hypothèses suivantes :

(a) $R_f = 0.04$.

(b) $R_f \sim N\left(0.08, 0.2^2\right)$; R_f et R_i sont indépendantes.

(c) $R_f \sim N\left(0.08, 0.2^2\right)$; coefficient de corrélation entre R_f et R_i est de 60 %.

14. Au début des 2 prochaines années, un individu veut investir une cotisation c de 10 000. Il choisit le fonds ABC. Le facteur d'accumulation pour l'année k ($k = 1, 2$) correspond à la v.a. U_k, où $\Pr(U_k = 1.10) = 0.8$ et $\Pr(U_k = 0.85) = 0.2$, avec $E[U_1] = E[U_2] = 1.05$. Les v.a. U_1 et U_2 sont indépendantes. La valeur accumulée de l'investissement à la fin de l'année k est $V(k)$, avec $V(k) = (V(k-1) + c)\, U_k$, pour $k = 1, 2$ et avec $V(0) = 0$. L'horizon de placement est $n = 2$.

(a) Déterminer l'espérance de $V(2)$.

(b) Indiquer l'ensemble des valeurs que peut prendre $V(2)$. Calculer la fonction de masse de probabilité de $V(2)$.

(c) Calculer la probabilité que $V(2)$ soit inférieure ou égale à la somme des cotisations versées, soit 20 000.

(d) On définit la perte liée à cet investissement par la v.a. $L = 20\,000 - V(2)$. Indiquer l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. L. Calculer la fonction de masse de probabilité de la v.a. L.

(e) Déterminer $VaR_{0.95}(L)$ et $TVaR_{0.95}(L)$.

15. Un individu investit une somme $V(0) = 10\,000$ dans le fonds mutuel ABC pendant une année. La valeur de l'investissement à la fin de l'année est $V(1) = V(0)\, e^R$ où le rendement instantané R est la somme de deux composantes R_1 et R_2 avec $R_1 \sim N\left(0.2, 0.2^2\right)$ et $R_2 \sim BComp(n, q; F_B)$ où $n = 1$, $q = 0.2$ et $B \sim N\left(-0.5, 0.04^2\right)$. Les v.a. R_1 et R_2 sont indépendantes.

On définit la perte liée à l'investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$.

(a) Calculer l'espérance et la variance de $V(1)$ et de L. Que signifie pour l'individu une perte négative ? une perte positive ?

(b) Développer les expressions de $F_{V(1)}(x)$ et $F_L(x)$. Calculer la probabilité que la perte soit positive.

16. Un individu investit une somme $V(0) = 10\,000$ dans le fonds mutuel ABC pendant une année. La valeur de l'investissement à la fin de l'année est $V(1) = V(0)\, e^R$ où le rendement instantané R est la somme de deux composantes R_1 et R_2, avec $R_1 \sim N\left(0.2, 0.2^2\right)$ et $R_2 \sim PComp(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 0.2$ et $B \sim N\left(-0.5, 0.04^2\right)$ (les sauts

ont une espérance négative). Les v.a. R_1 et R_2 sont indépendantes. On définit la perte liée à l'investissement par la v.a. $L = V(0) - V(1)$.

(a) Calculer l'espérance et la variance de R.

(b) Calculer l'espérance et la variance de $V(1)$ et de L.

(c) Développer les expressions de $F_L(x)$ et $F_{V(1)}(x)$. Calculer $F_L(5000)$ (pour des fins de calculs, on convient que $\Pr(M > 6) = 0$).

(d) Développer l'expression de la mesure $TVaR_\kappa(L)$. Si $VaR_{0.99}(L) = 6142$, calculer $TVaR_{0.99}(L)$.

17. On définit les prestations de décès versées par un assureur à la fin de la prochaine année par $X = bN$, où $N \sim Bin(n, q = \frac{1}{1000})$ et $b = 1000$. L'assureur récolte les primes $V(0)$ au début de la période et les investit pendant la période. Il compte utiliser les revenus totaux afin de payer les coûts en sinistres à la fin de la période. L'assureur prévoit d'investir dans un titre avec risque dont le rendement instantané est représenté par la v.a. R. L'assureur calcule le montant $V(0) = vE[S]$ où la valeur de v est fixée selon la politique d'investissement choisie: $v = \frac{1}{E[e^R]}$ où $R \sim N(0.06, 0.2^2)$. La perte de l'assureur est $L = S - V(0)Y$, où $Y = \exp(R)$. Note : on a $v = \frac{1}{E[Y]}$.

(a) On sait que $L \in (-\infty, nb]$. Développer l'expression de $F_L(x)$.

(b) Pour $n = 1000$, calculer $E[X]$, $E[Y]$, $V(0)$, $E[L]$ et $F_L(0)$.

(c) Pour $n = 1\,000\,000$, calculer $E[X]$, $E[Y]$, $V(0)$, $E[L]$ et $F_L(0)$.

18. Les coûts d'un contrat d'assurance automobile sont définis par la v.a. $X \sim PComp(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 2$ et $B \sim Pa(1.5, 5)$.

(a) Calculer la probabilité que les coûts soient nuls pour ce contrat.

(b) Calculer l'espérance des coûts pour ce contrat.

(c) Sachant que le nombre de sinistres pour le contrat est 1, calculer la probabilité que les coûts pour le contrat soient supérieurs à 700 et calculer la valeur de la VaR associée à ces coûts pour $\kappa = 0.999$.

(d) Utiliser l'approximation pour les distributions sub-exponentielles pour évaluer $\Pr(X > 700)$ et $VaR_{0.999}(X)$.

2.13 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

(a) 1300 et 11 327.40041

(b) 0.987

2. Réponses à la question 2 :

(a) 3500 et 637 750 000

(b) 0.2

(c) 0, 100 000 et 100 000

3. Réponses à la question 3 :

(a) $F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$ avec $q = \Pr(R \leq -0.1) = 0.2118554$

(b) 423.7108

(c) 0.7881446 et 0.994193017

(d) 34 538.0034755 et 36 538.0034756

4. Réponses à la question 4 :

(a) 602.4636 et 1922.065

(b) 0.9933258

(c) 8244.537 et 13947.056

5. Réponses à la question 5 :

(a) 10.909 et 1380.991557

(b) 0.029193

(c) 183.1887 et 191.6190

6. Réponses à la question 6 :

(a) 200 et 400 000

(b) 0.01194641

(c) 3192.006 et 4286.101

7. Réponses à la question 7 :

(a) 0.879630091 et 0.009042876

(b) 0.13 et 0.1336

(c) 390 et 1 787 400

8. Réponses à la question 8 :

(a) 1 et 0.28

(b) 0.2 et 0.2112

(c) 1, 2, 3 ; 1.231809, 2.221929, 3.185116

(d) On obtient :

i. 400, 1 244 800

ii. 5354.046 et 6851.703

iii. parts allouées aux v.a. M et B selon la règle de la variance : 4649.999 et 2201.704 ; selon la règle de la TVaR : 3329.779 et 3521.924

9. Réponses à la question 9 :

(a) 0.25 et 1

(b) 5, 12 ; 7.6231, 15.23454

(c) On obtient :

i. 500, 4 500 000

ii. 10 193.43, 16 274.93

iii. parts allouées aux v.a. M et B selon la règle de la variance : 144 66.61 et 1808.32 ; selon la règle de la TVaR : 14 313.60 et 1961.33

10. Réponses à la question 10 :

(a) 10 650 et 284 265 000

(b) 0.528742143

11. Réponses à la question 11 :

(a) Aucune réponse

(b) 0.583333 et $\frac{1}{2400}$; 0.1671277982

12. Réponses à la question 12 :

(a) Aucune réponse

(b) 0.8 et $\frac{1}{5000}$; 0.8900408

13. Réponses à la question 13 :

(a) 1003.26881

(b) 1500.578646

(c) 1479.486475

14. Réponses à la question 14 :

(a) 21 525

(b) $V(2) \in \{15\ 725, 17\ 850, 20\ 350, 23\ 100\}$ avec probabilités

$$\{0.04, 0.16, 0.16, 0.64\}$$

(c) 0.20

(d) $L \in \{-3100, -350, 2150, 4275\}$ avec probabilités

$$\{0.64, 0.16, 0.16, 0.04\}$$

(e) 2150 et 3850

15. Réponses à la question 15 :

(a) $E[L] = -1510.71702$ et $\text{Var}(L) = 90\ 664\ 033.22$

(b) 0.3127916

16. Réponses à la question 16 :

(a) 0.1 et 0.09032

(b) 11 518.89014, 9 763 864.143, −1518.89014 et 9 763 864.143

(c) 0.9830334

(d) −163.4617

17. Réponses à la question 17 :

(a) $\sum_{k=0}^{n} \Pr(N = k) \Pr\left(Y > \frac{bk-x}{V(0)}\right)$ où $Y \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$ avec $\mu = 0.06$ et $\sigma = 0.2$

(b) 1000 ; 1.083287 ; 1153.895 ; −250 ; et 0.6800672

(c) 1 000 000 ; 1.083287 ; 1153895 ; −250000 et 0.8427244

18. Réponses à la question 18 :

(a) 0.13534

(b) 20

(c) 0.00059727 et 495

(d) 0.0011945 et 788.700526

3
Mutualisation des risques

3.1 Introduction

La mutualisation des risques est fondamentale en actuariat. Les opérations d'assurance sont fondées sur la possibilité de mutualiser les risques.

On considère un ensemble ou un conglomérat de risques $X_1, ..., X_n$ que l'on convient d'appeler un portefeuille de risques. Ces risques peuvent être indépendants ou dépendants entre eux. Le risque global correspond à l'ensemble des coûts du portefeuille, que l'on représente par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par exemple, cela peut être un portefeuille d'une compagnie d'assurance avec n contrats pour une période fixe. Le portefeuille peut être aussi constitué de n risques (titres) avec risque de défaut. Comme autre exemple, le portefeuille peut être constitué de n lignes d'affaires d'une compagnie d'assurance ou de toute autre compagnie. La connaissance du comportement de S est cruciale pour l'institution qui détient ce portefeuille. Connaître la distribution de S est essentielle pour calculer les mesures de risque liées à un portefeuille, pour évaluer la solvabilité du portefeuille, etc.

Dans ce chapitre, on présente les caractéristiques et certains résultats analytiques relatifs à la distribution du montant total des sinistres. On décrit aussi des méthodes d'approximation de la distribution de S fondées sur les premiers moments de S. On examine l'effet de la mutualisation de risques indépendants et on démontre la nécessité d'inclure une marge relative de sécurité dans les primes. On s'intéresse aussi à l'adaptation de la mutualisation dans le contexte des risques extraordinaires. On considère l'impact du risque catastrophique et du risque financier sur la

mutualisation des risques. On traite aussi de l'impact de la présence d'un facteur aléatoire tel que le risque d'épidémie, le phénomène d'amélioration de la mortalité ou le risque climatique sur la mutualisation des risques. On étudie aussi le comportement aléatoire du montant maximal des sinistres pour un portefeuille en tenant compte de l'effet du choix de la distribution du montant d'un sinistre. Les méthodes basées sur la simulation et les méthodes récursives d'agrégation des risques sont présentées aux chapitres 5 et 6. La modélisation de la dépendance est traitée dans les chapitres 8 et 9.

3.2 Agrégation des risques

3.2.1 Définitions et caractéristiques de base

On s'intéresse au comportement aléatoire de la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, représentant les coûts d'un portefeuille de n risques. On commence par les caractéristiques de base.

L'espérance de S est donnée par

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i].$$

Il est important de noter qu'il n'est pas nécessaire que les risques individuels X_i soient indépendants pour trouver $E[S_n]$. La variance de la v.a. S est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

On suppose que les f.g.m. des v.a. X_1, ..., X_n existent. On développe l'expression de la f.g.m. de S pour 2 cas particuliers.

- **Cas 1** : On suppose que les v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes. On a

$$M_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t). \quad (3.1)$$

Cette hypothèse était tradionnellement faite pour faciliter les calculs. Toutefois, il existe plusieurs situations pratiques où cette hypothèse n'est plus appropriée.

- **Cas 2** : On suppose que les v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i.i.d. Il en résulte que

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = (M_X(t))^n .$$

La f.g.m. de S permet notamment de trouver $E\left[S^k\right]$ pour $k = 1, 2, ...$ et à identifier, si possible, la distribution de S. Le développement de la f.g.m. de S dans le cas général est traité au chapitre 8.

3.2.2 Méthodes d'agrégation

Pour bien quantifier le risque global auquel la compagnie d'assurance fait face en émettant des contrats, la connaissance de la fonction de répartition de S est importante.

On débute avec deux exemples simples.

Exemple 3.1 ***Portefeuille d'assurance vie temporaire 1 an.*** *On considère un portefeuille de* 10 *contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ où $I_i \sim Bern(q_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 10$. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Les v.a. I_1, ..., I_{10} sont indépendantes. On suppose que $q_i = 0.001i$ et $b_i = 1000(11 - i)$, $i = 1, 2, ..., 10$. L'espérance et la variance des coûts du portefeuille sont 220 et 1 161 600. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité $f_S(1000k)$ de S pour $k = 0, 1, ..., 5$ sont les suivantes :*

k	0	1	2	3	4	5
$f_S(1000k)$	0.946302	0.009559	0.008594	0.006748	0.007718	0.005849

Par exemple, $f_S(0) = \Pi_{i=1}^{10} f_{X_i}(0) = \Pi_{i=1}^{10} f_{I_i}(0)$ *et*

$$\begin{aligned} f_S(5000) &= f_{I_6}(1) \Pi_{i=1, i\neq 6}^{10} f_{I_i}(0) \\ &\quad + f_{I_7}(1) f_{I_{10}}(1) \Pi_{i=1, i\neq 7, i\neq 10}^{10} f_{I_i}(0) \\ &\quad + f_{I_8}(1) f_{I_9}(1) \Pi_{i=1, i\neq 8, i\neq 9}^{10} f_{I_i}(0) . \end{aligned}$$

□

Exemple 3.2 ***Portefeuille de deux contrats.*** *Pour une exposition à un risque spécifique i, les coûts au cours de la prochaine année pour un portefeuille sont définis par la v.a.*

$$X_i = \begin{cases} D_i, & I_i = 1, \\ 0, & I_i = 0, \end{cases}$$

où les v.a. $I_i \sim Bern(q_i = 0.1i)$ $(i = 1, 2)$, $D_i \sim Ga\left(\alpha = i, \beta_i = \frac{1}{1000}\right)$ $(i = 1, 2)$. Les v.a. D_1 et D_2 sont indépendantes entre elles et indépendantes

du couple (I_1, I_2). *On sait que* $f_{I_1,I_2}(1,1) = \Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) = 0.06$. *On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On observe que* $E[S] = 500$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 1\ 390\ 000$. *L'expression de* F_S *est donnée par*

$$\begin{aligned} F_S(x) &= f_{I_1,I_2}(0,0)) + f_{I_1,I_2}(1,0) F_{D_1}(x) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(0,1) F_{D_2}(x) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(1,1) F_{D_1+D_2}(x) \\ &= f_{I_1,I_2}(0,0)) + f_{I_1,I_2}(1,0) H(x;1;\beta) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(0,1) H(x;2;\beta) \\ &\quad + f_{I_1,I_2}(1,1) H(x;3;\beta), \end{aligned}$$

où $D_1 + D_2 \sim Ga\left(3, \frac{1}{1000}\right)$ *et* $H(x;\alpha,\beta)$ *est la fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres* α *et* β. *Par exemple,* $F_S(4000) = 0.972160$. □

Avec ces deux exemples, on constate rapidement que le calcul de la fonction de répartition de la somme de v.a. peut s'avérer difficile. En actuariat, plusieurs méthodes d'agrégation ont été proposées, en particulier pour des portefeuilles constitués de v.a. indépendantes. Récemment, plusieurs chercheurs se sont aussi intéressés aux méthodes d'agrégation pour des sommes de v.a. dépendantes ou toute autre fonction de v.a. dépendantes.

Dans ce chapitre, on examine tout d'abord l'agrégation de risques X_1, ..., X_n où les v.a. X_i sont modélisées de telle sorte qu'ils nous permettent d'obtenir une forme explicite pour la fonction de répartition de S. Pour la majorité des autres modèles de X_i, on doit avoir recours à des méthodes d'agrégation pour évaluer F_S. Ces méthodes sont expliquées aux chapitres 5 et 6 pour les portefeuilles de risques indépendants et aux chapitres 8 et 9 pour les portefeuilles de risques dépendants.

On regroupe en trois catégories les méthodes d'approximation pour évaluer F_S. La première catégorie est constituée des méthodes basées sur les moments et elle sera traitée dans le présent chapitre. La deuxième catégorie correspond aux méthodes de simulation stochastique (ou Monte-Carlo) et ses méthodes seront abordées au chapitre 5. La troisième catégorie regroupe les méthodes numériques récursives et l'étude de ces méthodes fait l'objet du chapitre 6.

3.3 Agrégation et cas particuliers

Dans cette section, on examine des cas particuliers pour lesquels il est possible d'identifier la loi de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

3.3.1 Loi Poisson composée

La proposition suivante contient un résultat important en actuariat.

Proposition 3.3 *Soient les v.a. indépendantes* X_1, ..., X_n *où*

$$X_i \sim PComp\left(\lambda_i; F_{B_i}\right), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp\left(\lambda_S, F_C\right)$, *où* $\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ *et*

$$F_C\left(x\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}\left(x\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}\left(x\right) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}\left(x\right).$$

Le résultat de la proposition 3.3 est valide peu importe que les f.g.m. de B_1, ..., B_n existent ou non. Néanmoins, on a choisi d'utiliser les f.g.m. pour démontrer ce résultat. Une démonstration à l'aide des transformées de Laplace est fournie dans [93].

Preuve. La f.g.m. de X_i est donnée par

$$M_{X_i}\left(t\right) = P_{M_i}\left(M_{B_i}\left(t\right)\right) = \mathrm{e}^{\left(\left\{\lambda_i\left(M_{B_i}(t)-1\right)\right\}\right)}, \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

À partir de (3.1), l'expression de la f.g.m. de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est

$$\begin{aligned} M_S\left(t\right) &= E\left[\mathrm{e}^{tS_n}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(t\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i\left(M_{B_i}(t)-1\right)} = \mathrm{e}^{\left(\left\{\lambda_S\left(M_C(t)-1\right)\right\}\right)}, \end{aligned}$$

en posant $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n$ et

$$M_C\left(t\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} M_{B_1}\left(t\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} M_{B_2}\left(t\right) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} M_{B_n}\left(t\right). \tag{3.2}$$

On déduit de (3.2) que la distribution de C est un mélange des distributions de B_1, ... , B_n. D'après (3.2), cela implique que F_C est une combinaison convexe de $F_{B_1}, ..., F_{B_n}$, soit

$$F_C\left(x\right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}\left(x\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}\left(x\right) + ... + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}\left(x\right).$$

Comme

$$M_S\left(t\right) = \mathrm{e}^{\lambda_S\left(M_C(t)-1\right)} = P_N\left(M_C\left(t\right)\right) \tag{3.3}$$

est la f.g.m. d'une loi Poisson composée, on déduit de (3.3) que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp\left(\lambda_S, F_C\right)$ telle que

$$S = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{N} C_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $N = \sum_{i=1}^{n} M_i \sim Pois(\lambda_S)$ et $C_k \sim C$ pour $k \in \mathbb{N}^+$. ■

Une interprétation de ce résultat fondamental en actuariat est fournie dans la remarque suivante.

Remarque 3.4 *Le risque global s'analyse en considérant le portefeuille comme une seule entité. Il importe peu de savoir de quel assuré (risque) provient un sinistre. Comme S obéit à une loi Poisson composée, tous les résultats liés à cette loi sont valides pour ce cas particulier. Pour que ce résultat soit valide, il n'est pas nécessaire de supposer que les v.a. $M_1, M_2, ..., M_n$ soient identiquement distribuées ou que les v.a. $B_1, B_2, ..., B_n$ soient identiquement distribuées.*

3.3.2 Loi binomiale négative composée

Le résultat de la prochaine proposition est moins général que celui de la proposition 3.3.

Proposition 3.5 *Soient les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n où*

$$X_i \sim BNComp(r_i, q; F_B), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BNComp(r_S, q; F_B)$, où $r_S = \sum_{i=1}^{n} r_i$.

Preuve. On sait que la f.g.m. de X_i est donnée par

$$M_{X_i}(t) = P_{M_i}(M_{B_i}(t)) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(M_B(t) - 1)\right)^{-r_i}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

On développe l'expression de la f.g.m. de S comme suit :

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[e^{tS}\right] = E\left[e^{t\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(M_B(t) - 1)\right)^{-r_i} \\ &= \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(M_B(t) - 1)\right)^{-r_S}, \end{aligned}$$

avec $r_S = \sum_{i=1}^{n} r_i$. Posons $N = \sum_{i=1}^{n} M_i$. Alors, on déduit que $N \sim BinNég(r_S, q)$ avec

$$P_N(t) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(t - 1)\right)^{-r_S}.$$

On déduit

$$M_S(t) = \left(1 - \frac{(1-q)}{q}(M_B(t) - 1)\right)^{-r_S} = P_N(M_B(t)),$$

ce qui implique que S obéit à une loi binomiale négative composée avec

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} B_k, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

où N est le nombre de sinistres pour l'ensemble du portefeuille et B_k correspond au montant du $k^{ième}$ sinistre produit par le portefeuille avec $B_k \sim B$ pour $k \in \mathbb{N}^+$. ■

L'interprétation du résultat de la proposition 3.5 est semblable à celle fournie à la remarque 3.4. On déduit de la proposition 3.5 que

$$F_S(x) = \Pr(N = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N = k) F_{B_1+B_2+...+B_k}(x), \ x \geq 0.$$

Il est important de mentionner que, si l'on relâche la contrainte sur les paramètres des lois de $M_1, ..., M_n$ ou la contrainte sur les lois des montants de sinistres, la loi de S_n n'est pas binomiale négative composée.

3.3.3 Loi binomiale composée

Le prochain résultat est semblable à la celui de la proposition 3.5.

Proposition 3.6 *Soient les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n où*

$$X_i \sim BComp(n_i, q; F_B), i = 1, 2, ..., n.$$

Alors, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp(n_S, q; F_B)$, où $n_S = \sum_{i=1}^{n} n_i$.

Preuve. La preuve est semblable à celle de la proposition 3.5. ■

3.4 Mesures de risques et propriétés

3.4.1 Contexte

Les principales mesures de risque sont la *Value-at-Risk* (VaR) et la *Tail-Value-at-Risk* (TVaR). On rappelle leurs définitions présentées à la section 1.11. Avec un niveau de confiance κ, la mesure VaR associée à la v.a. X est définie par

$$VaR_\kappa(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u\}.$$

La définition de la mesure TVaR est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{u}(X)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{E\left[X \times 1_{\{X>VaR_{\kappa}(X)\}}\right]}{1-\kappa} \\ &\quad + \frac{VaR_{\kappa}(X)\left(F_{X}\left(VaR_{\kappa}(X)\right)-\kappa\right)}{1-\kappa}. \end{aligned}$$

En actuariat et en gestion quantitiative des risques, les mesures de risque servent notamment à établir le niveau de capital économique associé au portefeuille d'une compagnie d'assurance ou d'une institution financière. On définit les coûts pour un portefeuille de n contrats d'assurance par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$. On détermine le capital total pour le portefeuille avec $\varsigma_{\kappa}(S)$, où ς_{κ} désigne une mesure de risque, notamment les mesures VaR et TVaR qui ont été définies au chapitre 1. L'indice κ correspond au niveau de confiance (e.g. 99 % ou 99.5 %). Le capital économique est en quelque sorte un coussin, soit

$$CE_{\kappa}(S) = \varsigma_{\kappa}(S) - E[S],$$

qui correspond à une provision servant à se protéger contre une expérience adverse du portefeuille.

Parmi les autres applications des mesures de risque, on voit au chapitre 4 que les mesures de risque peuvent être utilisées pour calculer la prime majorée. Elles servent aussi à quantifier des pertes éventuelles liées à des positions financières prises par un investisseur. De plus, elles sont aussi utilisées pour quantifier et comparer des stratégies d'investissement, notamment dans le contexte de gestion actif-passif. Enfin, les mesures de risque sont aussi appliquées comme outil de gestion dans le contexte des opérations de transaction des institutions financières.

3.4.2 Propriétés désirables et cohérence

On présente les propriétés désirables d'une mesure de risque ς_{κ}.

Propriété 3.7 ***Homogénéité.*** *Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}^{+}$. Une mesure ς_{κ} est homogène si*

$$\varsigma_{\kappa}(aX) = a\varsigma_{\kappa}(X),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Une modification d'unité monétaire apportée au risque X conduit à une modification du même ordre pour la valeur obtenue avec la mesure de risque.

Propriété 3.8 ***Invariance à la translation.*** *Soient un risque X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ς_κ est invariante à la translation si*

$$\varsigma_\kappa (X + a) = \varsigma_\kappa (X) + a,$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Par exemple, pour la v.a. perte définie par $L = X - \pi$ où π correspond à la prime associée à X, il est justifié d'avoir $\varsigma_\kappa (L) = \varsigma_\kappa (X) - \pi$.

Propriété 3.9 ***Monotonocité.*** *Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr (X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ς_κ est monotone si*

$$\varsigma_\kappa (X_1) \leq \varsigma_\kappa (X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Si le risque X_2 est plus dangereux que le risque X_1, il est raisonnable que la mesure de risque conduise à un capital plus élevé pour le risque X_2 que celui calculé pour le risque X_1.

Propriété 3.10 ***Sous-additivité.*** *Soient deux risques X_1 et X_2. La mesure ς_κ est sous-additive si*

$$\varsigma_\kappa (X_1 + X_2) \leq \varsigma_\kappa (X_1) + \varsigma_\kappa (X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

La propriété de sous-additivité est très importante relativement à la mutualisation des risques. En effet, il est intéressant d'examiner le bénéfice de mutualisation qui correspond

$$B_\kappa^\varsigma (S) = \sum_{i=1}^{n} \varsigma_\kappa (X_i) - \varsigma_\kappa (S)$$

et qui résulte de la mise en commun des risques X_1, ..., X_n. Comme la mutualisation des risques est le fondement de l'assurance, il serait souhaitable que $B_\kappa^\varsigma (S)$ soit positif.

La notion de mesure cohérente est due à [4].

Définition 3.11 ***Mesure de risque cohérente.*** *On dit qu'une mesure de risque ς_κ est* cohérente *si les propriétés 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10 sont satisfaites.*

3.4.3 Autres propriétés désirables

Dans la littérature actuarielle (voir e.g. [24]), les trois propriétés suivantes sont aussi jugées désirables.

Propriété 3.12 ***Marge de risque non excessive.*** *La mesure ς_κ ne doit pas induire une marge de risque excessive. Si $X \leq x_{\max}$, alors on a $\varsigma_\kappa(X) \leq x_{\max}$, pour $0 < \kappa < 1$.*

Il est injustifié de détenir un capital en excédent du montant maximal que les coûts d'un risque ou d'un portefeuille peut prendre.

Propriété 3.13 ***Marge de risque positive.*** *On doit avoir $\varsigma_\kappa(X) \geq E[X]$, pour $0 < \kappa < 1$.*

Le capital minimum doit excéder les coûts espérés sinon il y aura ruine certaine.

Propriété 3.14 ***Marge de risque justifiée.*** *Soit a une constante quelconque. On doit toujours avoir $\varsigma_\kappa(a) = a$, pour $0 < \kappa < 1$.*

Il n'est pas justifié de détenir un capital différent de a si les coûts pour un portefeuille correspondent à la constante a.

3.4.4 Mesure VaR

Comme $\varphi(x) = ax$ et $\varphi(x) = x + a$ sont des fonctions croissantes et continues, on déduit à l'aide de la proposition 1.21 que la mesure VaR est invariante à la translation et homogène.

La mesure VaR est monotone. Si $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$, alors on observe $F_{X_1}(x) \geq F_{X_2}(x)$ pour tout x, ce qui implique $VaR_\kappa(X_1) \leq VaR_\kappa(X_2)$ pour tout κ.

La mesure VaR n'est pas sous-additive comme il est illustré avec le contre-exemple suivant.

Exemple 3.15 *Soient les v.a. indépendantes X_1 et X_2 où $X_i \sim Exp(0.1)$. On sait que $X_1 + X_2 \sim Erlang(2, 0.1)$. Il est clair avec les valeurs de $VaR_\kappa(X_1 + X_2)$ et $VaR_k(X_1) + VaR_k(X_2)$ qui sont fournies dans le tableau suivant que la mesure VaR n'est pas sous-additive :*

κ	*0.1*	*0.2*	*0.5*	*0.8*	*0.9*
$VaR_k(X_1) + VaR_k(X_2)$	*0.2107*	*0.4463*	*1.3863*	*3.2189*	*4.6052*
$VaR_k(X_1 + X_2)$	*0.5318*	*0.8244*	*1.6783*	*2.9943*	*3.8897*

□

Dans plusieurs exemples numériques de cet ouvrage, on obtient l'inégalité

$$VaR_\kappa(S) > VaR_\kappa(X_1) + ... + VaR_\kappa(X_n).$$

Cela signifie que la mesure n'est pas sous-addtive et cela conduit à un bénéfice de mutualisation qui est négatif.

Comme $VaR_\kappa(X) \leq x_{\max}$ pour tout κ et $VaR_\kappa(a) = a$, la mesure VaR n'introduit pas une marge de risque excessive et la marge introduite par cette mesure est justifiée. En revanche, la mesure VaR peut introduire une marge de risque négative.

3.4.5 Mesure TVaR

La mesure TVaR est homogène. Pour $a \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(aX) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(aX)\,du \\ &= a\frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,du = aTVaR_\kappa(X), \end{aligned}$$

ce qui implique que la mesure TVaR est homogène.

La mesure TVaR est invariante à la translation. En effet, on obtient la relation désirée en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X+a) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X+a)\,du \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(X)\,du + \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 a\,du \\ &= TVaR_\kappa(X) + a. \end{aligned}$$

La mesure TVaR est monotone. Lorsque l'inégalité $VaR_\kappa(X_1) \leq VaR_\kappa(X_2)$ est vérifiée pour tout κ, alors il est clair que $TVaR_\kappa(X_1) \leq TVaR_\kappa(X_2)$ pour tout κ.

Dans le but de vérifier que la mesure TVaR est sous-additive, on suit l'approche expliquée dans [81]. On a recours au lemme suivant.

Lemme 3.16 *Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$. Alors, on a*

$$TVaR_\kappa(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} X_{j:n}}{[n(1-\kappa)]} \text{ (p.s.)}, \tag{3.4}$$

où $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n-1:n} \leq X_{n:n}$ sont les statistiques d'ordre de X_1, ..., X_n et $[u]$ correspond à la partie entière de u.

Preuve. Voir la preuve de la proposition 4.1 dans [1] ainsi que le développement aux pages 1494 et 1495 de cet article. ■

Le résultat du lemme fournit une interprétation intéressante pour la mesure TVaR. Une version adaptée du résultat du lemme est utilisée dans la

section 5.5 lorsque l'on a recours à la simulation stochastique pour évaluer la mesure TVaR.

Proposition 3.17 *La mesure TVaR est sous-additive.*

Preuve. On suit la démonstration fournie dans [81]. Il est aussi recommandé de consulter la démonstation présentée dans l'annexe A de [1]. Une autre démonstration est fournie dans [24].

Soit une suite de v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., n$. Pour un entier m tel que $1 \leq m+1 \leq n$, l'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_{j=m+1}^{n} X_{j:n} = \sup\left\{X_{i_{m+1}} + ... + X_{i_n}; 1 \leq i_{m+1} \leq ... \leq i_n \leq m+1\right\}.$$

Soit un couple de v.a. (X, Y) dont la fonction de répartition est désignée par $F_{X,Y}$. Soient la suite de couple de v.a. i.i.d. (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n) où $(X_i, Y_i) \sim (X, Y)$ pour $i = 1, 2, ...n$. On définit $S = X + Y$ et $S_i = X_i + Y_i$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Par le lemme 3.16, on a

$$TVaR_\kappa(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} S_{j:n}}{[n(1-\kappa)]} \text{ (p.s.)},$$

où $S_{1:n} \leq S_{2:n} \leq ... \leq S_{n-1:n} \leq S_{n:n}$ sont les statistiques d'ordre de S_1, ..., S_n et $[u]$ correspond à la partie entière de u. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} S_{j:n} &= \sup\left\{S_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + S_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&\leq \sup\left\{X_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + X_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&\quad + \sup\left\{Y_{i_{[n\kappa]+1}} + ... + Y_{i_n}; 1 \leq i_{[n\kappa]+1} \leq ... \leq i_n \leq [n\kappa]+1\right\} \\
&= \sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} X_{j:n} + \sum_{j=[n\kappa]+1}^{n} Y_{j:n}.
\end{aligned}$$

Il suffit de diviser par $[n(1-\kappa)]$ et de faire tendre $n \to \infty$ et on déduit le résultat voulu en appliquant le lemme 3.16. ■

On sait que $TVaR_0(X) = E[X]$. Pour vérifier que $TVaR_\kappa(X) \geq E[X]$, on dérive l'expression de la TVaR par rapport à κ et on obtient

$$\frac{dTVaR_\kappa(X)}{d\kappa} = \frac{-VaR_\kappa(X)}{1-\kappa} + \frac{TVaR_\kappa(X)}{1-\kappa}.$$

Puisque

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{u}(X)\,du \\ &\geq \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{\kappa}(X)\,du = VaR_{\kappa}(X), \end{aligned}$$

alors on a $\frac{dTVaR_{\kappa}(X)}{d\kappa} \geq 0$, ce qui implique que la TVaR est croissante en κ. On déduit que la mesure TVaR introduit une marge de risque positive.

La mesure TVaR ne conduit pas à une marge de risque excessive, car

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} VaR_{u}(X)\,du \\ &\leq \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} x_{\max} du = x_{\max}. \end{aligned}$$

Comme

$$TVaR_{\kappa}(a) = \frac{1}{1-\kappa}\int_{\kappa}^{1} a du = a,$$

on conclut que la mesure TVaR introduit une marge justifiée.

3.4.6 Mutualisation et mesures de risque

Dans l'exemple suivant, on examine la mutualisation des risques en ayant recours aux mesures VaR et TVaR. On met en évidence notamment que la mesure VaR ne satisfait pas la propriété de sous-additivité.

Exemple 3.18 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Toutes les durées de vie des assurés sont i.i.d. avec une probabilité de décès de 0.0017 (qui correspond à la probabilité de décès d'un individu d'une quarantaine d'année en Amérique du Nord). Le montant de prestation de décès est 100 000. Alors, les coûts pour le contrat i correspondent à* $X_i = 100\,000 I_i$ *où* $I_i \sim Bern(0.0017)$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *La prime pure pour un contrat est* $E[X_i] = 100\,000q = 170$. *De plus, on observe que* $VaR_{0.995}(X_i) = 0$ *et* $TVaR_{0.995}(X_i) = 34\,000$ *(*$i = 1, ..., n$*). On fournit dans le tableau ci-dessous les valeurs de* $VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ *et* $TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ *pour* $n = 100,\ 1000, 100\,000$ *et* $1\,000\,000$ *:*

n	*100*	*1000*	*100 000*	*1 000 000*
$VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$	*200 000*	*600 000*	*20 400 000*	*180 700 000*
$TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$	*214 640.5*	*646 349.1*	*20 889 484*	*182 036 101*

Les valeurs sont exactes puisque $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, 0.0017)$, *d'après la proposition 3.6. Selon la mesure VaR, on observe que le bénéfice de*

mutualisation est négatif quelle que soit la taille n du portefeuille :

$$B_{0.995}^{VaR}(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_{0.995}(X_i) - VaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq 0.$$

Comme la mesure TVaR est sous-additive, le bénéfice de mutualisation est positif pour tout n :

$$B_{0.995}^{VaR}(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - TVaR_{0.995}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \geq 0.$$

L'utilisation des VaR individuelles pour déterminer le capital total pour l'ensemble du portefeuille peut conduire à des conséquences financières désastreuses. En effet, en prenant le point de vue d'un gestionnaire de risque pour une institution financière, on suppose qu'il demande à chaque entité i ($i = 1, 2, ..., n$) dont le risque est défini par X_i d'établir le montant de capital à mettre de côté pour faire face à chaque risque et d'en faire le total. Si on utilise la VaR, il n'est pas nécessaire de financer le risque de décès puisque la probabilité de survie est supérieure à 99.5 %. Comme le montant de capital est 0 pour chaque entité, il en résulte que leur somme est aussi 0. En se basant sur la mesure TVaR, le montant à mettre de côté pour chaque risque serait de 34 000 pour une espérance de coûts de 170. Le coût en capital est exhorbitant. En profitant de la mutualisation des risques et pour n = 1000 (1 000 000), le montant global en se basant sur la TVaR est alors de 646 349.1 (182 036 101), soit 646.3491 (182.0361) par risque. Le bénéfice de mutualisation par risque est de 34 000 − 646.3491 = 33 353.6509 (34 000 − 182.0361 = 33 817. 9639).

Du point de vue d'un actuaire en tarification, l'utilisation éventuelle de la VaR pour le calcul de la prime est aussi problématique. En effet, selon la VaR, la prime pour un risque est 0, soit un montant inférieur à la prime pure. En utilisant la TVaR, une prime de 34 000 est disproportionnée par rapport à l'espérance des coûts, soit 170. Toutefois, en supposant que n contrats soient émis et que les coûts $X_1, ..., X_n$ soient i.i.d., on profite de la mutualisation des risques, ce qui permet de demander une prime moins élevée. Pour e.g. n = 100 000 et en utilisant la TVaR, la prime est de 208.8948. □

3.5 Mesure de solvabilité sur une période

La probabilité de ruine sur une période est une mesure de solvabilité qui permet d'évaluer le risque global associé au portefeuille. On peut utiliser la probabilité de ruine comme mesure de solvabilité associée au portefeuille. La probabilité de ruine correspond à la probabilité que la compagnie ne

rencontre pas ses engagements au cours de la prochaine période (e.g. une journée, une semaine, un mois, une année) en supposant un capital initial $u \geq 0$. Les coûts pour un portefeuille de n contrats d'assurance sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. X_i correspond aux coûts pour le contrat i et pour lequel une prime π_i est demandée, $i = 1, 2, ..., n$. La probabilité de ruine $\psi_n(u)$ est définie par

$$\psi_n(u) = \Pr\left(S_n > \sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) = 1 - F_{S_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right),$$

où $\sum_{i=1}^{n} \pi_i$ correspond au revenu total de primes du portefeuille pour la période. Il est requis de pouvoir évaluer de façon exacte ou approximative F_{S_n} afin de calculer $\psi_n(u)$.

3.6 Méthodes d'approximation fondées sur les moments

Plusieurs méthodes fondées sur les moments de la v.a. S ont été suggérées en actuariat et gestion quantitative des risques. L'idée de ces méthodes est d'approximer la v.a. S par la v.a. T dont il est aisé d'évaluer F_T et les différentes mesures de risque qui y sont associées. On détermine les paramètres de la distribution de T de telle sorte que $E\left[S^k\right] = E\left[T^k\right]$ pour $k = 1, 2, ..., m$, où le nombre m de moments est relativement petit, e.g. $m = 2$, 3 ou 4.

On peut classifier les méthodes basées sur les approximations sous trois approches.

Selon la première approche, on approxime la v.a. S par une v.a. T obéissant à une distribution connue, dont les plus fréquemment considérées sont les distributions normale, gamma, lognormal, inverse gaussienne, ou la distribution Pareto généralisée. L'approximation est basée sur les deux ou trois premiers moments. Il arrive aussi qu'un paramètre de translation soit ajouté. Souvent, la qualité de l'approximation ne peut pas être quantifiée. L'approximation basée sur la distribution normale est fondée sur le théorème central limite.

Selon la deuxième approche, les approximations sont des raffinements de l'approximation obtenue avec la distribution normale. Des exemples d'approximations sous cette deuxième approche sont l'approximation Normal Power, des approximations résultant de développements de la série d'Edgeworth et les approximations de type Cornish Fisher. Ces approximations sont basées uniquement sur les premiers moments de la v.a. S. En actuariat, l'approximation Normal Power est utilisée pour évaluer approximativement la distribution d'une somme aléatoire. En gestion quantitative des risques, l'approximation Cornish Fisher est

souvent employée pour faire des calculs liés à la mesure VaR. Un des principaux handicaps des méthodes relevant de la deuxième approche est qu'elle ne conduit pas à une distribution pour T. De plus, il est difficile de mesurer la qualité de ces approximations.

Selon la troisième approche, on approxime la distribution inconnue de S par un mélange de distributions connues. Il est proposé dans [38] une méthode d'approximation fondée sur les moments supposant que la v.a. T obéit à un mélange fini de lois exponentielles. On suggère dans [62] une approche similaire en supposant que la v.a. T obéit à un mélange fini de distributions Erlang avec des paramètres communs d'échelle.

Il n'est pas possible de traiter en détails dans le présent ouvrage les méthodes d'approximations fondées sur les moments. Dans cette section, on présente brièvement celles qui utilisent la loi normale, la loi gamma translatée, la loi lognormale et la loi F-généralisée.

3.6.1 Approximation fondée sur la distribution normale

La méthode basée sur la distribution normale, souvent appelée approximation normale, est fondée sur le théorème central limite. Les valeurs de $E[S]$ et $VaR(S)$ sont supposées connues. On approxime la v.a. S par la v.a. $T \sim N(E[T], \mathrm{Var}(T))$, où $E[T] = E[S]$ et $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(S)$. En utilisant les résultats de l'annexe (et démontrés au chapitre 1), il en résulte que

$$\begin{aligned} F_S(x) &\simeq F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right), \\ VaR_\kappa(S) &\simeq VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}VaR_\kappa(Z), \\ TVaR_\kappa(S) &\simeq TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}TVaR_\kappa(Z), \\ &= E[S] + \sqrt{\mathrm{Var}(S)}\frac{e^{-\frac{(VaR_\kappa(Z))^2}{2}}}{(1-\kappa)\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

où $Z \sim N(0,1)$.

La version classique du théorème central limite est la suivante.

Théorème 3.19 ***Théorème central limite (version classique).*** *Soient X_1, X_2, ..., X_n des v.a. i.i.d. avec $E[X_i] = \mu_X$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_X^2$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, avec $E[S_n] = n\mu_X$ et $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Alors, on a*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z,$$

quand $n \to \infty$.

Il existe plusieurs variantes au théorème central limite. On présente ci-dessous la version de ce théorème dans le cas où les.v.a. X_1, ...,X_n ne sont pas identiquement distribuées.

Théorème 3.20 ***Théorème central limite (variante).*** *Soient X_1, X_2, ..., X_n des v.a. indépendantes, dont les espérances et les variances existent. On définit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $E[S_n] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$ et $\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(S_i)$. Alors, on a*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z,$$

quand $n \to \infty$. La condition nécessaire et suffisante pour l'application du théorème, appelée condition de Lindeberg, est que, pour tout $s > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|y|>s\sigma} (y - \mu_i)^2 \, \mathrm{d}F_{X_i}(y) = 0.$$

Preuve. Voir e.g. [89]. ■

Remarque 3.21 *La condition de Lindeberg signifie que les variances des v.a. X_i doivent être petites par rapport à la variance de la somme S_n. Voir les détails dans e.g. [89].*

La qualité de l'approximation par la loi normale standard dépend du nombre de risques et du choix de la loi pour X. C'est une approximation simple à utiliser, mais elle n'est pas toujours satisfaisante, en particulier dans la queue de la distribution de S. En utilisant l'approximation normale, il y a donc de fortes chances qu'on évalue inadéquatement les mesures de risque. Pour remédier à ce problème, on a recours aux méthodes récursives (voir chapitre 6) et aux méthodes basées sur la simulation (voir chapitre 5).

3.6.2 Approximation fondée sur la distribution gamma translatée

L'approximation basée sur la distribution gamma translatée relève de la première approche. Comme la loi gamma possède une asymétrie positive, elle est jugée mieux adaptée que la loi normale pour approximer le comportement aléatoire du montant total des coûts pour un portefeuille. Soit la v.a. $T \sim Ga(\alpha, \beta)$. Alors, on approxime S par $T + x_0$ où $T + x_0$ obéit à une loi gamma translatée. Si x_0 est strictement positif, la v.a. S ne peut admettre de valeur nulle, contrairement à la réalité. Cependant, comme il a été mentionné, cette approximation ne sert habituellement qu'à analyser la portion de droite de la courbe de S. On identifie les trois paramètres

α, β, x_0 comme étant les solutions des trois équations suivantes :

$$E[S] = E[T + x_0] = E[T] + x_0 = \frac{\alpha}{\beta} + x_0,$$

$$\text{Var}(S) = \text{Var}(T + x_0) = \text{Var}(T) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$\gamma(S) = \frac{E\left[(S - E[S])^3\right]}{(\text{Var}(S))^{\frac{3}{2}}} = \gamma(T + x_0) = \gamma(T) = \frac{2}{\alpha^{\frac{1}{2}}}.$$

On obtient $\alpha = \frac{4}{(\gamma(S))^2}$, $\beta = \frac{2}{\gamma(S)\sqrt{\text{Var}(S)}}$ et $x_0 = E[S] - \frac{2\sqrt{\text{Var}(S)}}{\gamma(S)}$. L'approximation basée sur la distribution gamma translatée est valide pour analyser des valeurs supérieures à $E[S]$. Elle peut être utilisée notamment pour évaluer approximativement $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour des valeurs élevées de κ. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} VaR_\kappa(S) &\simeq VaR_\kappa(T) + x_0, \\ TVaR_\kappa(S) &\simeq TVaR_\kappa(T) + x_0. \end{aligned}$$

Si S possède une masse de probabilité non négligeable à 0, on peut écrire

$$F_S(x) = 1 - q + qF_{S'}(x),$$

où $q = F_S(0)$, et choisir d'approximer $S' = (S|S > 0)$ par $T + x_0$.

3.6.3 Approximation fondée sur la distribution lognormale

En actuariat et en gestion quantitative des risques, on est souvent confronté à évaluer le comportement aléatoire de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont indépendantes ou non, identiquement distribuées ou non et dont les marginales sont de loi lognormale. Une des premières approximations proposées et qui est fréquemment utilisée en pratique est d'approximer la v.a. S par la v.a. $T \sim LN\left(\mu_T, \sigma_T^2\right)$. On définit $\zeta_k = \frac{E\left[T^k\right]}{E[T]^k}$, $k = 1, 2$. Les expressions de μ_T et σ_T satisfaisant les relations $E[S] = E[T]$ et $E\left[S^2\right] = E\left[T^2\right]$ sont $\sigma_T = \sqrt{\ln \zeta_2}$ et $\mu = \ln(E[T]) - \frac{1}{2}\sigma_T^2$.

Dans le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. avec $X_i \sim LN\left(\mu, \sigma^2\right)$, l'approximation admet des résultats satisfaisants si $\sigma < 1$.

3.6.4 Approximation fondée sur la distribution F-généralisée

Soit la v.a. $T \sim FG(\alpha, \lambda, \tau)$ avec $E[T] = \frac{\lambda\tau}{\alpha - 1}$, $E\left[T^2\right] = \lambda^2 \frac{\tau(\tau+1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ et $E\left[T^3\right] = \lambda^3 \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$, en supposant que $\alpha > 3$. On définit $\zeta_k =$

$\frac{E[T^k]}{E[T]^k}$, $k = 1, 2, 3$. Les expressions de τ, α et λ satisfaisant les relations $E[S] = E[T]$, $E[S^2] = E[T^2]$ et $E[S^3] = E[T^3]$ sont données par

$$\tau = 2\frac{\zeta_3 - \zeta_2^2}{\zeta_2^2 + \zeta_2\zeta_3 - 2\zeta_3}, \quad \alpha = \frac{\tau + 1 - 2\tau\zeta_2}{\tau + 1 - \tau\zeta_2}$$

et $\lambda = E[T]\frac{\alpha - 1}{\tau}$.

3.7 Mutualisation et activités d'assurance

Il est connu que les activités d'assurance sont fondées sur la mutualisation des risques. En fait, ce sujet constitue le cœur du présent chapitre. Les modèles étudiés et les mesures présentées jusqu'à présent servent à quantifier, à comprendre et analyser la mutulisation des risques, ses bénéfices et ses limites.

3.7.1 Mutualisation et coût moyen par contrat

Pour comprendre la mutualisation des risques, il est intéressant d'examiner le comportement du coût moyen par contrat pour un portefeuille de contrats dont les coûts sont identiquement distribués.

Dans le mécanisme de l'assurance, chaque assuré transfère son risque (actuariel) individuel à la compagnie d'assurance. Le regroupement de ces risques individuels constitue le risque global de l'assureur. Pour comprendre l'impact de cette mutualisation des risques individuels, il est intéressant d'examiner le comportement aléatoire du coût moyen par contrat que l'on définit par W_n, où

$$W_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\text{Montant total réclamé}}{\text{Nombre de contrats}}.$$

Le coût moyen correspond en fait à la répartition du coût total (ou du risque global) sur l'ensemble du groupe d'assurés.

L'espérance de W_n est

$$E[W_n] = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S_n]$$

et, comme les risques individuels X_i sont identiquement distribués, $E[W_n]$ devient

$$E[W_n] = \frac{nE[X]}{n} = E[X],$$

ce qui signifie que l'espérance du coût moyen est égale à l'espérance du coût pour 1 seul contrat.

L'expression pour la variance de W_n est donnée par

$$\text{Var}\,(W_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}\,(S_n)\,.$$

Si l'on suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d., l'expression de $\text{Var}\,(W_n)$ devient

$$\text{Var}\,(W_n) = \frac{1}{n^2} n\ \text{Var}\,(X) = \frac{1}{n}\text{Var}\,(X) < \text{Var}\,(X)\,,$$

et on constate que la variance du coût moyen est inférieure à la variance du coût par contrat pour $n > 1$. Ainsi, la variabilité d'un risque individuel diminue en regroupant plusieurs risques individuels. Par ailleurs, lorsque n est très grand, on observe que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}\,(W_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\text{Var}\,(X) = 0,$$

ce qui implique que la variance du coût moyen tend vers 0 quand le nombre d'assurés indépendants augmente considérablement.

Si l'on suppose que les v.a. X_i sont seulement identiquement distribuées et si l'on ne suppose pas l'indépendance entre les risques individuels, la variance du coût moyen sera donnée par

$$\begin{aligned}\text{Var}\,(W_n) &= \frac{1}{n^2}\text{Var}\,(S_n) = \frac{1}{n^2}\left[n\text{Var}\,(X) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2)\right] \\ &= \frac{\text{Var}\,(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2).\end{aligned}$$

De plus, lorsque n est très grand, on observe que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Var}\,(W_n) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\text{Var}\,(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2)\right\} = \text{Cov}(X_1, X_2),$$

ce qui implique que la variance du coût moyen n'est pas éliminée quand le nombre d'assurés augmente.

Exemple 3.22 *Soient des risques individuels i.i.d.* X_1 *,...,* X_n *où* X_i *est défini par*

$$X_i = \begin{cases} B_i, & si\ I_i = 1 \\ 0, & si\ I_i = 0 \end{cases}, \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n).$$

Les v.a. I_i *et* B_i *sont indépendantes,* $I_i \sim Bern(0.2)$ *et* $B_i \sim B \sim Ga(0.1, 1/100)$*, pour* $i = 1, 2, ..., n$*. La part par contrat est définie par* $W_n = \frac{S_n}{n}$ *où* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp\,(n, q; F_B)$*. La fonction de densité du coût moyen* W_n *pour les valeurs de* $n = 100, 500, 1000$ *est présentée à la figure 3.1. Lorsque le nombre* n *de contrats augmente, la v.a.* W_n *tend à prendre des valeurs qui s'approche de* $E\,[W_n] = E\,[X] = 2$ *et la variance de* W_n *diminue.* □

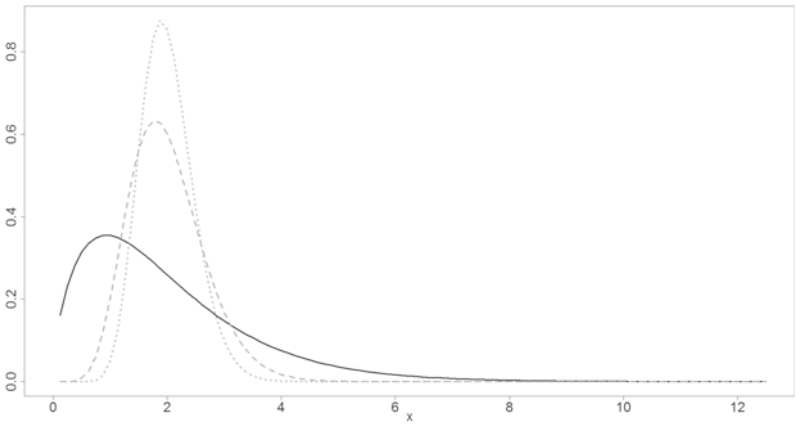

FIGURE 3.1. Courbes de $f_{W_n}(x)$ pour $n = 100$ (ligne continue), 500 (ligne avec petits traits) et 1000 (ligne pointillée) où $W_n = \frac{S_n}{n}$ et où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim BComp(n, q; F_B)$.

On examine le comportement de W_n via les mesures de risque VaR et TVaR pour un portefeuille de risques indépendants.

Exemple 3.23 *On considère un conglomérat de n risques i.i.d.* X_1, ..., X_n *où les coûts* $X_i \sim X$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *On suppose que* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *où* $\lambda = 1.4$ *et* $B \sim Ga\left(1.8, 1000^{-1}\right)$. *On sait que* $E[X] = 1.4 \times 1800 = 2520$. *On reproduit les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0	*0*	*2520*
0.5	*1834.662*	*4521.468*
0.95	*7767.176*	*9872.831*
0.99	*11 175.341*	*13 127.725*
0.995	*12 558.726*	*14 464.324*

À partir de la proposition 3.3, on déduit que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp(n\lambda, F_C)$ *avec* $C \sim Ga\left(1.8, 1000^{-1}\right)$. *Pour* $n = 100$, *on fournit les valeurs de* $VaR_\kappa(W_n)$ *et* $TVaR_\kappa(W_n)$ *dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(W_n)$	$TVaR_\kappa(W_n)$
0	*0*	*2520*
0.5	*2513.663*	*2731.835*
0.95	*2967.491*	*3089.056*
0.99	*3165.472*	*3266.675*
0.995	*3239.398*	*3334.715*

On constate l'influence de l'agrégation des risques sur les valeurs de la mesure TVaR. Comme prévu, on observe que

$$VaR_{0.5}(S_{100}) > VaR_{0.5}(X_1) + ... + VaR_{0.5}(X_{100})$$

alors que

$$TVaR_{\kappa}(S_{100}) \leq TVaR_{\kappa}(X_1) + ... + TVaR_{\kappa}(X_{100}),$$

pour toutes les valeurs de κ. Bref, comme la mesure VaR n'est pas cohérente, elle n'est pas adéquate pour analyser le comportement de W_n. À l'aide de la mesure TVaR, on observe que le bénéfice de mutualisation par contrat (à $\kappa = 0.995$) est

$$\begin{aligned} \frac{B_{\kappa}^{TVaR}(S)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) - \frac{1}{n} TVaR_{0.995}(S_n) \\ &= TVaR_{0.995}(X) - TVaR_{0.995}(W_n) \\ &= 14\ 464.324 - 3334.715 = 11\ 129.609, \end{aligned}$$

ce qui est significatif avec seulement $n = 100$ contrats. □

Dans le prochain exemple, on traite du comportement de W_n via les mesures de risque VaR et TVaR dans le contexte d'un portefeuille de risques dépendants.

Exemple 3.24 *Soit un portefeuille de n contrats d'assurance IARD. On considère le volet dommages matériels à la suite d'un accident d'un contrat d'assurance automobile. Les coûts encourus pour le contrat i ($i = 1, 2, ..., n$) sont définis par la v.a. X_i où la v.a. X_i est définie selon l'approche fréquence-sévérité avec*

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0. \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où M_i est une v.a. discrète et les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. M_i (convention : $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{10000}\right)$). La v.a. M est influencée par les conditions climatiques qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(M_i|\Theta = \theta_j) \sim Pois(0.05\theta_j)$ pour $i = 1, 2, ..., n$ avec $\theta_1 = 1$ et $\theta_2 = 4$ et $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.8$ et $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.2$.

On définit $S_n = \sum_{n=1}^{n} X_i$ et le coût moyen par contrat $W_n = \frac{1}{n} S_n$. L'espérance et la variance de M_1 sont $E[M_1] = 0.08$ et $\mathrm{Var}(M_1) = 0.0836$. On obtient les valeurs de $E[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1)$ avec

$$E[X_1] = E[M_1] E[B_1] = 800$$

et

$$\mathrm{Var}\left(X_1\right) = E\left[M_1\right]\mathrm{Var}\left(B_1\right) + \mathrm{Var}\left(M_1\right)E\left[M_1\right]^2 = 16\ 360\ 000.$$

Comme

$$\mathrm{Cov}\left(M_1, M_2\right) = \left(E\left[M_1M_2\right] - E\left[M_1\right]E\left[M_2\right]\right) = 0.0036,$$

on a

$$\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right) = E\left[B_1\right]E\left[B_2\right]\mathrm{Cov}\left(M_1, M_2\right) = 360\ 000.$$

Les valeurs de $f_{M_1}(k) = \sum_{j=1}^{2}\Pr\left(\Theta = \theta_i\right)\mathrm{e}^{-0.05\theta_j}\frac{(0.05j)^k}{k!}$ *pour* $k = 0, 1, 2$ *sont 0.924730, 0.070798 et 0.004226. De plus, la valeur de*

$$F_{X_1}(x) = f_{M_1}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{M_1}(k)\, F_{B_{1,1}+\ldots B_{1,k}}(x),$$

pour $x = 20\ 000$ *est 0.9885342.*

On constate que $\lim_{n\to\infty} E\left[W_n\right] = E\left[X_1\right] = 800$ *et*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(W_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\mathrm{Var}\left(X_1\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right)\right)\\ &= \mathrm{Cov}\left(X_1, X_2\right) = 360\ 000.\end{aligned}$$

Le risque global n'est pas complètement éliminé à la suite de la mutualisation en raison de la présence du facteur commun représentant le risque climatique. On a $F_{W_n}(x) = F_{S_n}(nx)$ *et, par la formule des probabilités totales, l'expression de* $F_{S_n}(x)$ *est donnée par*

$$F_{S_n}(x) = \sum_{j=1}^{2} f_\Theta\left(\theta_j\right) F_{S_n|\Theta=\theta_j}(x).$$

En appliquant la proposition 3.3, $\left(S_n|\Theta = \theta_j\right) \sim PComp\left(0.05\theta_j, F_B\right)$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de* $VaR_\kappa\left(W_n\right)$ *et de* $TVaR_\kappa\left(W_n\right)$ *pour* $n = 1,\ 100$ *et* $10\ 000$ *et* $\kappa = 99\ \%$ *:*

n	*1*	*100*	*10 000*
$VaR_\kappa\left(W_n\right)$	*21 453.347*	*3119.389*	*2104.876*
$TVaR_\kappa\left(W_n\right)$	*32 074.91*	*3466.654*	*2132.145*

□

3.7.2 Mutualisation et loi des grands nombres

La loi des grands nombres est souvent évoquée lorsqu'il est question du mécanisme d'assurance et de la mutualisation des risques.

Soit une suite de v.a. $X_1, ..., X_n$ i.i.d. dont l'espérance et la variance existent. On convient que $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$. On définit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $E[W_n] = E[X]$ et $\mathrm{Var}(W_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)$. On examine le comportement de la v.a. W_n lorsque n tend vers l'infini. Selon les différentes versions de la loi des grands nombres, on sait que W_n tend vers l'espérance de $E[W_n]$.

Avant de démontrer la loi des grands nombres, 2 résultats préliminaires, soient l'inégalité de Markov et l'inégalité de Chebychev, sont nécessaires.

Proposition 3.25 ***Inégalité de Markov.*** *Soit une v.a. Z ne prenant que des valeurs positives et dont l'espérance existe. Alors, on a* $\Pr(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a}$, *pour tout* $a > 0$.

Preuve. Soit Z une v.a. continue ne prenant que des valeurs positives. On a

$$\begin{aligned} E[Z] &= \int_0^\infty x f_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a x f_Z(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty x f_Z(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_a^\infty x f_Z(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^\infty a f_Z(x)\,\mathrm{d}x = a\Pr(Z > a) \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat désiré. Le cas avec une v.a. discrète peut être traité de façon similaire. ■

L'inégalité de Markov peut aussi être écrite sous la forme suivante :

$$\Pr(Z > a) \leq \frac{E[g(Z)]}{g(a)}, \text{ pour tout } a > 0,$$

où g est une fonction positive, croissante et dont l'espérance existe.

Dans la proposition suivante, on fournit un exemple d'application de l'inégalité de Markov afin d'obtenir une borne exponentielle à la probabilité de ruine $\psi_n(u)$.

Proposition 3.26 ***Borne exponentielle.*** *Soient les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n dont les f.g.m. existent. La v.a. X_i correspond aux coûts d'un contrat dont la prime est $\pi_i = (1 + \eta_i) E[X_i]$ avec une marge de sécurité η_i strictement positive, $i = 1, 2, ..., n$. Les coûts totaux pour l'ensemble du portefeuille sont définis par $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et le revenu total de primes est $\pi_S = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. On définit le coefficient ρ_B comme étant la solution strictement positive (si elle existe) de $E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \mathrm{e}^{t\pi_S}$, où $E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right]$. Alors, on a*

$$\psi_n(u) \leq \mathrm{e}^{-\rho_B u}, \; u \geq 0,$$

où u correspond au capital alloué en début de période pour le portefeuille.

Preuve. En appliquant la proposition 3.25 avec $g(y) = \mathrm{e}^{\rho y}$, on a

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= \overline{F}_S(u+\pi_S) = \Pr(S > \pi_S + u) \\ &= \Pr\left(\mathrm{e}^{\rho_B S} > \mathrm{e}^{\rho_B(\pi_S+u)}\right) \leq \frac{E\left[\mathrm{e}^{\rho_B S}\right]}{\mathrm{e}^{\rho_B \pi_S}\mathrm{e}^{\rho_B u}} = \mathrm{e}^{-\rho_B u},\ u \geq 0.\end{aligned}$$

■

On illustre la borne exponentielle de la proposition 3.26 dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 3.27 *Soit les v.a. indépendantes* $X_i \sim BNComp(r_i, q_i; F_{B_i})$ *avec* $r_i = i$, $q_i = \frac{r_i}{r_i+2}$, $B_i \sim Ga\left(0.5i, \frac{0.5i}{10}\right)$, $i = 1,2,3$. *De plus,* $\pi_i = (1+\eta_i)E[X_i]$, *avec* $\eta_i = 0.15 + 0.05i$, $i = 1,2,3$. *L'expression de* $E\left[\mathrm{e}^{tS}\right]$ *est*

$$E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = \prod_{i=1}^{3} E\left[\mathrm{e}^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{q_i}{1-(1-q_i)\left(1-\frac{t}{0.05i}\right)^{-0.5i}}\right)^{r_i}$$

et $\pi_S = 75$. *On déduit* $\rho_B = 0.011076$ *et* $\psi_n(u) \leq \mathrm{e}^{-0.011076u}$, $u \geq 0$. *Ainsi, avec un capital initial* $u = 340.79$, *la probabilité que les coûts totaux du portefeuille excèdent les revenus totaux de primes et le capital initial est inférieure à* 1 %. □

L'inégalité de Chebychev présentée dans le corollaire suivant est un cas particulier de l'inégalité de Markov.

Corollaire 3.28 ***Inégalité de Chebychev.*** *Soit la v.a.* Z *dont l'espérance* $E[Z]$ *et la variance* $\mathrm{Var}(Z)$ *existent. Pour tout* $k > 0$, *on a*

$$\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Preuve. Soit la v.a. $Y = \frac{(Z-E[Z])^2}{\mathrm{Var}(Z)}$ i.e. Y est une v.a. positive avec $E[Y] = 1$. Comme la v.a. Y est positive, on applique directement l'inégalité de Markov pour obtenir l'inégalité de Chebychev. En effet, on a $\Pr\left(Y > k^2\right) \leq \frac{E(Y)}{k^2}$ qui devient

$$\Pr\left(\frac{(Z-E[Z])^2}{\mathrm{Var}(Z)} > k^2\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

que l'on peut réécrire

$$\Pr\left(\left|\frac{Z-E[Z]}{\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}}\right| > k\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

ce qui implique que $\Pr\left(|Z-E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$. ■

Dans le corollaire 3.28, il est à noter que la probabilité

$$\Pr\left(|Z - E[Z]| > k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right)$$

correspond à

$$\Pr\left(Z - E[Z] \leq -k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right) + \Pr\left(Z - E[Z] \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(Z)}\right). \quad (3.5)$$

L'inégalité de Chebychev est utilisée notamment pour démontrer la loi des grands nombres.

Proposition 3.29 ***La loi des grands nombres.*** *Soient $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d. avec $E[X_i] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$, pour $i \in \mathbb{N}^+$. Soit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, où $E[W_n] = \mu$ et $\mathrm{Var}(W_n) = \frac{1}{n}\sigma^2$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, on a $\Pr[|W_n - \mu| > \varepsilon] \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Remarque 3.30 ***Interprétation en assurance.*** *Soit un portefeuille de n contrats dont les coûts sont i.i.d. satisfaisant les conditions de la loi des grands nombres. Selon le résultat de la proposition 3.29, quand le nombre de contrats augmente, la probabilité que le coût moyen W_n par contrat dévie d'une faible marge de son espérance μ s'approche de 0.*

Preuve. On applique l'inégalité de Chebychev

$$\Pr\left(|W_n - E[W_n]| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(W_n)}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

ce qui implique que

$$\Pr\left(|W_n - E[W_n]| \geq k\sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Il en découle donc que

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}. \quad (3.6)$$

Pour $\forall \varepsilon > 0$, on définit k tel que $k^2 = \frac{n\,\varepsilon^2}{\sigma^2}$. À partir de (3.6), on a

$$\Pr\left(|W_n - \mu| \geq \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

On montre avec l'inégalité de Chebychev que

$$\Pr(|W_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2},$$

pour $\forall\ n > 0$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|W_n - \mu| > \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} \to 0.$$

■

Selon les conditions et le résultat de la loi des grands nombres, le coût moyen par contrat tend en probabilité vers l'espérance du coût par contrat. On sait également que la variance du coût moyen par contrat est inférieure à la variance du coût individuel par contrat $\mathrm{Var}\left(W_n\right) < \mathrm{Var}\left(X\right)$ si n est supérieur à 1. Ainsi, le résultat

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|W_n - \mu| > \varepsilon\right) \to 0$$

n'implique pas que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|S_n - nu| \geq \varepsilon\right) \to 0.$$

En d'autres termes, le fait que le coût moyen par contrat s'approche de l'espérance du coût pour un contrat n'implique pas que le coût total tende vers n fois l'espérance du coût individuel par contrat. Cet aspect est analysé dans ce qui suit.

3.7.3 Mutualisation et nécessité d'une marge positive de sécurité

La mutualisation des risques n'est pas suffisante pour garantir que la compagnie soit en mesure de rester solvable en prenant en charge le plus grand nombre possible de contrats d'assurance.

On a recours à la probabilité de ruine pour démontrer la nécessité que la prime demandée pour un contrat comprenne une marge de sécurité positive. Pour cela, on essaie de savoir quel est le comportement de la probabilité de ruine $\psi_n\left(u\right)$ quand le nombre de contrats n augmente et que la prime π_i chargée est inférieure, égale ou supérieure à l'espérance du montant réclamé par contrat i $(i = 1, 2, ..., n)$.

On examine le comportement de $\psi_n\left(u\right)$ dans le cas où les coûts des contrats du portefeuille sont i.i.d.

Proposition 3.31 *Soient les v.a. i.i.d.* $X_1, ..., X_n$ *où* X_i *correspond aux coûts du contrat* i *d'un portefeuille de* n *contrats avec* $E\left[X_i\right] = E\left[X\right] < \infty$ *et* $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \mathrm{Var}\left(X\right) < \infty$, $i = 1, 2, ..., n$. *La prime chargée par contrat est* $\pi_i = \pi$, $i = 1, 2, ..., n$. *Alors, on a les deux résultats suivants :*

1. *si* $\pi > E\left[X\right]$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n\left(u\right) = 0$, $u \geq 0$;
2. *si* $\pi < E\left[X\right]$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n\left(0\right) = 1$.

Preuve. On utilise l'inégalité de Chebychev pour démontrer les deux résultats. Comme les v.a. sont i.i.d., l'expression de $\psi_n(u)$ est donnée par

$$\psi_n(u) = \Pr\left(S_n > \sum_{i=1}^{n} \pi_i + u\right) = \Pr(S_n > n\,\pi + u) \tag{3.7}$$

avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $E[S_n] = nE[X]$ et $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X)$.

1. Cas $\pi > E[X]$. On définit $\pi = \mu + \delta$ où $\delta > 0$. À partir de (3.7) et avec (3.5), on a

$$\psi_n(u) = \Pr(S_n - n\mu > n\delta + u) \leq \Pr(|S_n - n\mu| > n\delta + u).$$

En appliquant l'inégalité de Chebychev, on a alors

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &\leq \Pr(|S_n - n\mu| > n\delta + u) \\
&= \Pr\left(|S_n - n\mu| > \frac{n\delta + u}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\right) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(n\delta + u)^2} = \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta + u)^2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta+u)^2} = 0$.

2. Cas $\pi < E[X]$. On pose $\pi = \mu - \delta$ où $\delta > 0$. Avec (3.7) et (3.5), l'expression de $\psi_n(0)$ devient

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &= \Pr(S_n - n\mu > -n\delta) = 1 - \Pr(S_n - n\mu \leq -n\delta) \\
&\geq 1 - \Pr(|S_n - n\mu| > n\delta).
\end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité de Chebychev, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
\psi_n(u) &\geq 1 - \Pr(|S_n - n\mu| > n\delta) \\
&= 1 - \Pr\left(|S_n - E(S_n)| > \frac{n\delta}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}\right) \\
&\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(n\delta)^2}.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(n\delta)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n\delta)^2}\right) = 1.$$

■

Remarque 3.32 *On constate que la probabilité de ruine* $\psi_n(u)$ *tend vers 0 quand le nombre de contrats tend vers* ∞ *et que la prime chargée est supérieure à* $E[X]$*. Toutefois, si la compagnie d'assurance charge une prime inférieure à l'espérance du montant réclamé par contrat et qu'elle assure un grand nombre de risques, alors la ruine devient certaine si la compagnie possède un capital initial* u *qui est nul. Le cas où le capital initial est strictement supérieur à 0 est traité à la remarque 3.33.*

Remarque 3.33 *On considère la situation d'une compagnie qui alloue un capital* $0 < u < \infty$ *(fini et positif) pour le portefeuille décrit à la proposition 3.31 et charge une prime* $\pi < E[X]$*. Soit le plus petit nombre entier* n_0 *(fini puisque* u *est fini) de contrats tel que* $n_0 E[X] > n_0\pi + u$*. Alors, pour* $n \geq n_0$*, on a* $u + n\pi - nE[X] < 0$ *et on déduit*

$$\begin{aligned} & \psi_n(u) \\ = \; & \Pr(S_n > u + n\pi) \\ = \; & \Pr(S_n - E[S_n] > u + n\pi - nE[X]) \\ = \; & 1 - \Pr(S_n - E[S_n] \leq u + n\pi - nE[X]) \\ \geq \; & 1 - \Pr(|S_n - E[S_n]| > nE[X] - (u + n\pi)) \end{aligned}$$

qui devient

$$\psi_n(u) = 1 - \Pr\left(|S_n - E[S_n]| > \frac{nE[X] - (u + n\pi)}{\sqrt{nVar(X)}}\sqrt{nVar(X)}\right).$$

Avec l'inégalité de Chebychev, on a

$$\psi_n(u) \geq 1 - \frac{nVar(X)}{(nE[X] - (u + n\pi))^2}, \; n \geq n_0.$$

On obtient $\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) \to 1$.

La proposition 3.31 permet de constater que le regroupement de risques individuels ne permet pas de diminuer le risque global d'une compagnie d'assurance. Il faut également charger une prime qui soit supérieure à l'espérance.

De la preuve de la proposition 3.31, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.34 *Selon les conditions de la proposition 3.31 et si* $\pi > E[X]$*, alors on a*

$$\psi_n(u) \leq \min\left(\frac{n\mathrm{Var}(X)}{(n(\pi - E[X]) + u)^2}; 1\right)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$ *et* $u \geq 0$.

Le corollaire 3.34 se généralise au contexte d'un portefeuille de n contrats indépendants, sans être identiquement distribués.

Corollaire 3.35 *Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ dont les premiers et deuxièmes moments existent. La v.a. X_i correspond aux coûts d'un contrat dont la prime est $\pi_i = (1 + \eta_i) E[X_i]$ avec une marge de sécurité η_i strictement positive, $i = 1, 2, ..., n$. Les coûts totaux pour l'ensemble du portefeuille sont définis par $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et le revenu total des primes est $\pi_S = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$. Alors, on a*

$$\psi_n(u) \leq \min\left(\frac{\text{Var}(S)}{(\pi_S - E[S] + u)^2}; 1\right)$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$ et $u \geq 0$.

Les inégalités dans les corollaires 3.34 et 3.35 sont conservatrices. Néanmoins, elles permettent de démontrer que la probabilité de ruine décroît avec la taille du portefeuille à la condition que le revenu total de primes π_S excède les coûts totaux espérés $E[S]$.

Exemple 3.36 *On considère un portefeuille homogène de contrats d'assurance vie. Les durées de vie des assurés sont i.i.d. La probabilité q de décès est de 2 % et la prestation b en cas de décès est de 1000. L'espérance des coûts pour un contrat est 20. La probabilité de ruine est $\psi_n(0) = \overline{F}_{S_n}(n\pi)$, où $S_n = 1000N_n$, $N_n \sim Bin(n, q)$ et π est la prime pour un contrat. Dans la figure 3.2, on illustre le comportement de $\psi_n(0)$ lorsque la taille n du portefeuille augmente et pour π égal à 10, 30 et 40.*
□

Dans l'exemple suivant, on illustre la situation traitée à la remarque 3.33.

Exemple 3.37 *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance IARD dont les coûts sont définis par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n où $X_i \sim Ga\left(0.1, \frac{1}{10\ 000}\right)$, pour $i = 1, ..., n$. La compagnie d'assurance IARD possède montant important de capital. Afin d'augmenter sa part de marché, elle décide de charger une prime $\pi_i = \frac{E[X_i]}{2} = 500$ pour $i = 1, ..., n$ et de financer cette réduction de prime par l'allocation au portefeuille d'un capital $u = 1\ 000\ 000$. On définit la probabilité de ruine au cours de la prochaine année pour le portefeuille par $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + \sum_{i=1}^{n} \pi_i)$ où la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Ga(n0.1, \frac{1}{10\ 000})$ correspond au montant total des engagements pour la prochaine année. On indique certaines valeurs obtenues pour $\psi_n(u)$:*

n	*500*	*1000*	*1500*	*2006*
$\psi_n(u)$	*0*	*0.000006*	*0.024731*	*0.499063*
n	*2007*	*2500*	*3000*	*4000*
$\psi_n(u)$	*0.500473*	*0.946940*	*0.998838*	*1*

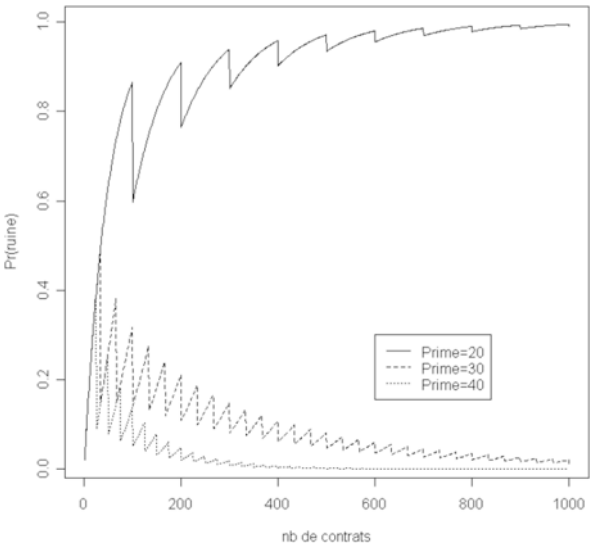

FIGURE 3.2. Trois courbes de $\psi_n(0) = \overline{F}_{S_n}(n\pi)$, où $S_n = 1000N_n$, $N_n \sim Bin(n,q)$ pour une prime π inférieure et deux primes π supérieures à la prime pure par contrat.

Si la compagnie décide de suivre cette stratégie, une croissance non contrôlée du nombre de contrats causera une augmentation de la probabilité d'être insolvable menant ultimement à une ruine certaine, comme prévu à la remarque 3.33. □

Dans les exercices, on examine le comportement de $\psi_n(u)$ dans certains cas où les risques ne sont pas indépendants.

3.7.4 Primes pures et primes majorées

La prime pure pour un contrat d'assurance correspond à l'espérance des coûts associés à un contrat d'assurance. On note la prime pure par $PP = E[X]$ où la v.a. X correspond aux coûts couverts pour un contrat. La prime pure ne contient pas de marge de sécurité et de marge de profit. La prime pure ne tient pas compte des dépenses. On définit également la prime majorée $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = PP(X) + MR(X)$. La prime majorée comprend la portion de $PP(X)$ associée au risque actuariel X et tient également compte de la marge de sécurité $MR(X)$. En (3.7.3), on a démontré la nécessité de la présence d'une marge de sécurité positive. La prime majorée (et la marge de sécurité) est calculée à l'aide de différentes méthodes de calcul des primes. Ces méthodes sont expliquées au chapitre 4.

3.8 Mutualisation et facteur aléatoire commun

La présence d'un facteur aléatoire commun a un impact considérable sur le risque global d'un portefeuille et elle met en évidence les limites de la mutualisation des risques. Le facteur aléatoire commun correspond à un facteur aléatoire affectant l'ensemble des risques d'un portefeuille d'une institution financière. Il se manifeste dans différents contextes des activités d'assurance et financières : risque climatique, risque d'inflation, risque de mortalité stochastique, etc. Ces contextes sont étudiés séparément.

On a recours à des modèles simples inspirés des modèles basés sur les mélanges communs. On considère les cas où la dépendance est introduite via un ou des facteurs communs pouvant affecter l'ensemble ou des parties du portefeuille.

3.8.1 Mutualisation, risque systématique et risque non systématique

La présence d'un facteur commun (mortalité stochastique, risque climatique, inflation, etc.) induit une relation de dépendance entre les risques. Afin de comprendre le comportement du risque global du portefeuille, on le scinde en deux composantes, soit le risque non systématique et le risque systématique. Le risque non systématique est le risque que l'on parvient à éliminer en mutualisant les contrats (risques individuels) alors que le risque systématique n'est pas éliminé en mutualisant les risques.

Soit un portefeuille de n risques dont les coûts sont définis par les v.a. $X_1, \ldots, X_n$. Les contrats du portefeuille sont exposés à un risque commun, représenté par la v.a. Θ, discrète ou continue. On définit les coûts totaux du portefeuille par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. L'espérance de la v.a. S est donnée par $E[S] = E_\Theta[E[S|\Theta]]$. Utilisant la formule de la variance totale, on décompose $\mathrm{Var}(S)$ sous la forme suivante

$$\mathrm{Var}(S) = E_\Theta[\mathrm{Var}(S|\Theta)] + \mathrm{Var}_\Theta(E[S|\Theta]),$$

où $E_\Theta[\mathrm{Var}(S|\Theta)]$ correspond à la composante de la variance de S expliquée par le risque non systématique (diversifiable par la mutualisation) et $\mathrm{Var}_\Theta(E[S|\Theta])$ est la composante qui explique le risque systématique (non diversifiable par la mutualisation).

Exemple 3.38 *On considère le volet dommages matériels suite à un accident d'un contrat d'assurance automobile. Les coûts encourus sont*

définis par la v.a. X définie selon l'approche fréquence-sévérité avec

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, M = 0 \end{cases},$$

où M est une v.a. discrète et les v.a. $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. M. De plus, $B_1 \sim B_2 \sim ... \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{10\ 000}\right)$. La v.a. M est influencée par les conditions climatiques qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(M|\Theta = \theta_j)$ obéit à une loi binomiale négative $(r = 0.2, \beta = 0.5 \times \theta_j)$ avec $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 2$ et $\theta_3 = 5$, et $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.8$, $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.15$ et $\Pr(\Theta = \theta_3) = 0.05$.

En premier lieu, on trouve en conditionnant sur la v.a. Θ que $E[M] = 0.095$ et $\mathrm{Var}(M) = 0.208975$ ce qui implique que $E[X] = 950$ et $\mathrm{Var}(X) = 30\ 397\ 500$. Les valeurs des mesures $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ sont données dans le tableau ci-dessous pour différentes valeurs de κ :

κ	$VaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa(X)$
0.5	*0*	*1900*
0.95	*3601.618*	*18 471.14*
0.995	*37 976.583*	*57 352.82*

Ensuite, pour un portefeuille de m contrats identiques, on examine la part allouée par contrat $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ où la v.a. $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$. L'espérance et la variance de W_n sont 950 et 4 072 500 pour $n = 10$ et elles sont 950 et 1 440 000 pour $n = 100$. On observe que $\lim_{n\to\infty} E[W_n] = E[X_1] = 950$ et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(W_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\right) \\ &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 1\ 147\ 500. \end{aligned}$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $n = 10$ et 100 et avec $\kappa = 0.95$ et 0.995 sont fournies dans le tableau ci-dessous :

κ	$VaR_\kappa(W_{10})$	$TVaR_\kappa(W_{10})$	$VaR_\kappa(W_{100})$	$TVaR_\kappa(W_{100})$
0.95	*4677.549*	*7796.20*	*3422.793*	*5144.924*
0.995	*12 147.825*	*15 986.83*	*6986.245*	*7894.919*

Pour expliquer la valeur de $\mathrm{Var}(W_n)$, on la décompose en deux termes : la composante diversifiable $E_\Theta[\mathrm{Var}(W_n|\Theta)]$ et la composante non diversifiable, $\mathrm{Var}_\Theta(E[W_n|\Theta])$. Les expressions de ces composantes sont

$$\begin{aligned} E_\Theta[\mathrm{Var}(W_n|\Theta)] &= \frac{E\left[rn0.5\Theta(1 + 0.5\Theta)\ 10\ 000^2 + rn0.5\Theta\ 10\ 000^2\right]}{n^2} \\ &= \frac{29\ 250\ 000}{n} \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n} rn0.5\Theta\ 10\ 000\right) = 1\ 147\ 500.$$

Pour $n = 1$, 10 et 100, on a :

n	$E_\Theta\left[\mathrm{Var}\left(W_n|\Theta\right)\right]$	$\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right)$	$\mathrm{Var}\left(W_n\right)$
1	*29 250 000*	*1 147 500*	*30 397 500*
10	*2 925 000*	*1 147 500*	*4 072 500*
100	*292 500*	*1 147 500*	*1 440 000*

On constate que $\lim_{n\to\infty} E\left[\mathrm{Var}\left(W_n|\Theta\right)\right] = 0$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right) = 1\ 147\ 500.$$

Bref, la valeur de $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *a deux sources :* $\frac{E_\Theta\left[\mathrm{Var}\left(W_n|\Theta\right)\right]}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}$ *est le pourcentage de la variance de* $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *que l'on obtient par mutualisation et* $\frac{\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right)}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}$ *est le pourcentage de la variance de* $\mathrm{Var}\left(W_n\right)$ *que l'on ne réduit pas via la mutualisation et qui est due à l'environnement aléatoire (conditions climatiques).*

On suppose que l'on fixe la prime pour un contrat par $\pi_{\kappa,n} = TVaR_\kappa\left(W_n\right)$. *On décompose la prime* $\pi_{\kappa,n}$ *de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
\pi_{\kappa,n} &= E\left[W_n\right] + \left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&= E\left[W_n\right] \\
&\quad + \frac{E_\Theta\left[\mathrm{Var}\left(W_n|\Theta\right)\right]}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}\left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{Var}_\Theta\left(E\left[W_n|\Theta\right]\right)}{\mathrm{Var}\left(W_n\right)}\left(TVaR_\kappa\left(W_n\right) - E\left[W_n\right]\right) \\
&= PP + CD_{\kappa,n} + CND_{\kappa,n}.
\end{aligned}$$

On interprète les trois termes comme suit : PP *est la prime pure,* $CD_{\kappa,n}$ *permet de financer le risque diversifiable et* $CND_{\kappa,n}$ *permet de financer le risque non diversifiable. Les valeurs de* PP, $CD_{\kappa,n}$, $CND_{\kappa,n}$ *pour* $n = 10$, *100 et* $\kappa = 0.95$, *0.995 sont :*

κ	PP	$CD_{\kappa,10}$	$CND_{\kappa,10}$	$CD_{\kappa,100}$	$CND_{\kappa,100}$
0.95	*950*	*4917.160*	*1929.040*	*852.094*	*3342.830*
0.995	*950*	*10 799.933*	*4236.897*	*1410.687*	*5534.232*

On observe qu'augmenter le nombre de contrats permet de diminuer la valeur de la prime $\pi_{\kappa,n} = TVaR_\kappa\left(W_n\right)$ *et que la composante diversifiable tend vers 0 lorsque le nombre de contrats devient élevé. En outre, le pourcentage de la variance expliqué par le risque diversifiable diminue de 71.8 % à 20.3 % en augmentant le nombre de contrats de 10 à 100. Bien que la mutualisation des risques permette d'éliminer le risque diversifiable, la compagnie d'assurance reste exposée au risque lié à la dépendance entre les assurés, induite par la v.a.* Θ. □

3.8.2 Mutualisation et risque d'inflation

La modélisation du risque d'inflation est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 3.39 ***Risque d'inflation.*** *On considère un portefeuille de n contrats d'assurance maladie. On veut examiner l'impact de l'inflation (indexation des frais médicaux) sur les coûts du portefeuille. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. X_i, où $X_i = \mathrm{e}^R \times Y_i$, avec*

$$Y_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

pour $i = 1, 2, 3, ..., n$. On suppose que les v.a. Y_1,...,Y_n sont indépendantes. Pour des fins de simplification, on suppose que le taux d'indexation R est une v.a. discrète avec $\Pr(R = r_j) = f_R(r_j)$ pour $j = 1, 2, ..., m$. On a

$$E[X_i] = E\left[\mathrm{e}^R \times Y_i\right] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times E[Y_i]$$

et

$$E\left[X_i^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R} \times Y_i^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E\left[Y_i^2\right],$$

pour $i = 1, 2, 3, ..., n$. De plus, on déduit

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \sum_{j=1}^{m} \Pr(R = r_j) \Pr(X_i \leq x | R = r_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \Pr(R = r_j) F_{Y_i}\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right), \end{aligned}$$

avec $F_{Y_i}(z) = 1 - q_i + q_i F_{B_i}(z)$, pour $i = 1, 2, 3, ..., n$. Pour $i \neq i'$, on mentionne que $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = E[X_i X_{i'}] - E[X_i] E[X_{i'}]$ avec

$$E[X_i X_{i'}] = E\left[\mathrm{e}^R \times Y_i \times \mathrm{e}^R \times Y_{i'}\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E[Y_i] E[Y_{i'}].$$

Après quelques manipulations, on obtient

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = E[X_i X_{i'}] - E[X_i] E[X_{i'}] = E[Y_i] E[Y_{i'}] \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right).$$

Le montant total des coûts pour le portefeuille est $S = \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathrm{e}^R T$ où $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. L'espérance de S est donnée par

$$E[S] = E\left[\mathrm{e}^R \times T\right] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times E[T].$$

Pour le calcul de la variance, on peut recourir à l'approche suivante $\mathrm{Var}(S) = E\left[S^2\right] - E[S]^2$ avec

$$E[S] = E\left[\mathrm{e}^{2R} \times T^2\right] = E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \times E\left[T^2\right]$$

et $E\left[T^2\right] = \mathrm{Var}\,(T) + E\,[T]^2$. *On peut aussi appliquer la formule de la variance totale*

$$\mathrm{Var}\,(S) = E_R\left[\mathrm{Var}\,(S|R)\right] + \mathrm{Var}_R\left(E\,[S|R]\right)$$

avec

$$\begin{aligned} E\,[S|R] &= E\,[T_{TOT}]\,\mathrm{e}^R \\ \mathrm{Var}\,(S|R) &= \mathrm{Var}\,(T_{TOT})\,\mathrm{e}^{2R}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} E_R\left[\mathrm{Var}\,(S|R)\right] &= \mathrm{Var}\,(T)\,E\left[\mathrm{e}^{2R}\right] \\ \mathrm{Var}_R\left(E\,[S|R]\right) &= E\,[T]^2\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^R\right). \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$F_S\,(x) = \sum_{j=1}^{m} f_R\,(r_j)\,\Pr\,(S \leq x|R = R_j) = \sum_{j=1}^{m} f_R\,(r_j)\,F_T\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right).$$

Dans le cas où $F_T\left(x\mathrm{e}^{-r_j}\right)$ *ne peut pas être évaluée de façon exacte, on a recours à des méthodes d'agrégation.* □

3.8.3 Mutualisation et mortalité stochastique

On examine un phénomène intéressant propre à une compagnie d'assurance de personnes. La mortalité stochastique est un sujet d'actualité. Par mortalité stochastique, on entend à la fois le risque d'amélioration des durées de vie des assurés d'un portefeuille de contrats de rente ou d'assurance ou le risque d'épidémie, par exemple.

Afin d'expliquer l'impact et la gestion du risque de mortalité stochastique, on a recours à un modèle simple. On considère deux portefeuilles d'une compagnie d'assurance de personnes. Le portefeuille 1 comporte n_1 contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Le portefeuille 2 comprend n_2 contrats d'assurance dotation pure 1 an. Un contrat d'assurance temporaire prévoit, en cas de décès pendant la prochaine année, le versement d'une prestation à la fin de l'année. En cas de survie jusqu'à la fin de la première année, le titulaire du contrat d'assurance dotation pure se voit verser une prestation à la fin de l'année.

L'ensemble des contrats des deux portefeuilles est exposé à la mortalité stochastique, représentée par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ avec $\alpha_j = \Pr\,(\Theta = \theta_j) = 0.5$, pour $j = 1, 2$. La v.a. Θ influence les durées de vie de tous les assurés des portefeuilles 1 et 2. On définit les coûts éventuels pour la prochaine année du contrat k du portefeuille i par la v.a. $X_{i,k}$. Pour le portefeuille 1,

on a

$$X_{1,k} = \begin{cases} b_k, \text{ si l'assuré } k \text{ décède pendant l'année} \\ 0, \text{ si l'assuré } k \text{ survit jusqu'à la fin de l'année} \end{cases},$$

alors que pour le portefeuille 2, on définit

$$X_{2,k} = \begin{cases} 0, \text{ si l'assuré } k \text{ décède pendant l'année} \\ c_k, \text{ si l'assuré } k \text{ survit jusqu'à la fin de l'année} \end{cases}.$$

Le montant total des sinistres pour le portefeuille i $(i = 1, 2)$ est représenté par la v.a. $S_i = X_{i,1} + ... + X_{i,n_i}$. Le montant total des sinistres pour les deux portefeuilles combinés est défini par la v.a. $S = S_1 + S_2$. La probabilité conditionnelle de décès de l'assuré k du portefeuille i sachant que $\Theta = \theta_j$ est désignée par $q_{i,k}^{(\theta_j)}$. De plus, la probabilité non conditionnelle de décès de l'assuré k du portefeuille i est $q_{i,k} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j q_{i,k}^{(\theta_j)}$. Tous les assurés sont distincts. Sachant Θ, les durées de vie des assurés sont conditionnellement indépendantes. On ne tient pas compte du taux d'intérêt dans les calculs.

Il est important de mentionner que les assurés des contrats d'assurance temporaire et les titulaires des contrats d'assurance dotation pure ne font pas partie du même groupe d'âge.

Il est clair que $E[X_{1,k}] = b_k q_{1,k}$, $E[X_{2,k}] = c_k (1 - q_{1,k})$, $\text{Var}(X_{1,k}) = b_k^2 (1 - q_{1,k})$, $\text{Var}(X_{2,k}) = c_k^2 (1 - q_{2,k}) q_{i2k}$. On quantifie le risque associé à chaque v.a. S_1, S_2 et S par leurs variances. Pour chacune de ces v.a., on utilise la formule de la variance totale pour décomposer la variance en deux composantes : une composante quantifiant la mortalité systématique et une deuxième composante quantifiant la mortalité non systématique:

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_i) &= E[\text{Var}(S_i|\Theta)] + \text{Var}(E[S_i|\Theta]), \ i = 1, 2 \\ \text{Var}(S) &= E[\text{Var}(S|\Theta)] + \text{Var}(E[S|\Theta]). \end{aligned}$$

Ainsi, deux sources expliquent la valeur des variances de S_1, S_2 et S :

- % de $\text{Var}(S_i)$ (ou $\text{Var}(S)$) expliqué par le risque non systématique (mutualisation) : $\frac{E[\text{Var}(S_i|\Theta)]}{\text{Var}(S_i)}$ (ou $\frac{E[\text{Var}(S|\Theta)]}{\text{Var}(S)}$) ;
- % de $\text{Var}(S_i)$ (ou $\text{Var}(S)$) expliqué par le risque systématique (mortalité stochastique) : $\frac{\text{Var}(E[S_i|\Theta])}{\text{Var}(S_i)}$ (ou $\frac{\text{Var}(E[S|\Theta])}{\text{Var}(S)}$).

On considère le problème suivant. Pour un portefeuille d'assurance dotation pure 1 an, on suppose que $\frac{\text{Var}(E[S_2|\Theta])}{\text{Var}(S_2)} >> \frac{E[\text{Var}(S_i|\Theta)]}{\text{Var}(S_i)}$, comme on s'y attend en pratique. Alors, on fusionne le portefeuille d'assurance dotation pure 1 an avec un portefeuille d'assurance temporaire 1. En procédant de la sorte, on espère que la source $\frac{\text{Var}(E[S|\Theta])}{\text{Var}(S)}$ du risque

systématique s'approche de zéro, ce qui implique que l'on a réussi à éliminer le risque systématique.

Il reste à déterminer sous quelle condition cela est possible. En fait, on veut que $\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)$ soit égal à zéro. Par convention, on suppose que

$$q_i^{(\theta_1)} > q_i > q_i^{(\theta_2)},$$

pour $i = 1, 2$. On suppose aussi que les quantités c, n_2 et b sont connues. De plus, les probabilités α_1, $q_1^{(\theta_1)}$, $q_2^{(\theta_1)}$, α_2, $q_1^{(\theta_2)}$, $q_2^{(\theta_2)}$ sont connues d'avance d'après le modèle. Il reste à déterminer le nombre n_1 de contrats.

À cette fin, on développe, en fonction des paramètres du modèle, les expressions de la composante quantifiant la mortalité systématique pour chaque v.a. S_1, S_2 et S. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(E\left[(S_1|\Theta)\right]\right) &= E\left[\left(E\left[(S_1|\Theta)\right] - E\left[S_1\right]\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \left(bn_1 q_1^{(\theta_j)} - bn_1 q_1\right)^2.\end{aligned}$$

Ensuite, l'expression de $\mathrm{Var}\left(E\left[(S_2|\Theta)\right]\right)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(E\left[(S_2|\Theta)\right]\right) &= E\left[\left(E\left[(S_2|\Theta)\right] - E\left[S_2\right]\right)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \left(cn_2\left(1 - q_2^{(\theta_j)}\right) - cn_2\left(1 - q_2\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Enfin, on déduit l'expression suivante pour $\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right)$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right) \\ =\ & E\left[\left(E\left[(S|\Theta)\right] - E\left[S\right]\right)^2\right] \\ =\ & E\left[\left(E\left[(S_1|\Theta)\right] - E\left[S_1\right] + E\left[(S_2|\Theta)\right] - E\left[S_2\right]\right)^2\right] \\ =\ & \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \left(E\left[(S_1|\Theta = \theta_j)\right] - E\left[S_1\right] + E\left[(S_2|\Theta = \theta_j)\right] - E\left[S_2\right]\right)^2\end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right) \\ =\ & \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \left(bn_1 q_1^{(\theta_j)} - bn_1 q_1 + cn_2\left(1 - q_2^{(\theta_j)}\right) - cn_2\left(1 - q_2\right)\right)^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

On veut trouver n_1 de telle sorte que (3.8) soit nulle. Alors, (3.8) devient

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Var}\left(E\left[(S|\Theta)\right]\right) \\
= & \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \left(bn_1 \left(q_1^{(\theta_j)} - q_1 \right) - cn_2 \left(q_2^{(\theta_j)} - q_2 \right) \right)^2 \\
= & \alpha_1 \left(bn_1 \alpha_2 \left(q_1^{(\theta_1)} - q_1^{(\theta_2)} \right) - cn_2 \alpha_2 \left(q_2^{(\theta_1)} - q_2^{(\theta_2)} \right) \right)^2 \\
& + \alpha_2 \left(bn_1 \alpha_1 \left(q_1^{(\theta_2)} - q_1^{(\theta_1)} \right) - cn_2 \alpha_1 \left(q_2^{(\theta_2)} - q_2^{(\theta_1)} \right) \right)^2 \\
= & \left(\alpha_1 \alpha_2^2 + \alpha_2 \alpha_1^2 \right) \left(bn_1 \left(q_1^{(\theta_1)} - q_1^{(\theta_2)} \right) - cn_2 \left(q_2^{(\theta_1)} - q_2^{(\theta_2)} \right) \right)^2 \\
= & \ 0. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Il faut que l'intérieur de la parenthèse en (3.9) soit nul. On isole n_1 et on obtient

$$n_1 = \frac{n_2 c \left(1 - q_2^{(\theta_2)} - \left(1 - q_2^{(\theta_1)} \right) \right)}{b \left(q_1^{(\theta_1)} - q_1^{(\theta_2)} \right)}. \qquad (3.10)$$

L'interprétation du ratio en (3.10) est donnée par

$$\frac{\text{écart entre les deux espérances conditionnelles de } S_2}{\text{écart entre les deux espérances conditionnelles de } S_1 \text{ divisé par } n_1}.$$

Bref, on cherche n_1 de telle sorte que l'écart entre deux espérances conditionnelles de S_2 soit égal à l'écart entre deux espérances conditionnelles de S_2.

Ces notions sont illustrées via l'exemple suivant.

Exemple 3.40 *Les hypothèses sont :* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ *; portefeuille 1 avec* n_1 *contrats (à déterminer), prestation de décès* $b_k = 10\,000$, $q_{1,k}^{(\theta_1)} = 0.0035$, $q_{1,k}^{(\theta_2)} = 0.0025$ *; portefeuille 2 avec* $n_2 = 2000$ *contrats, montant de dotation pure* $c_k = 10\,000$, $q_{2,k}^{(\theta_1)} = 0.04$, $q_{1,k}^{(\theta_2)} = 0.02$.

À partir de ces valeurs pour les paramètres du modèle, on obtient $n_1^* = 40\,000$. *De plus, on a* $E\left[S_1\right] = 1\,200\,000$, $E\left[S_2\right] = 19\,400\,000$ *et* $E\left[S\right] = 20\,600\,000$. *On obtient aussi*

$$\mathrm{Var}\left(S_1\right) = 5.1963 \times 10^{10} \ (0.189962),$$

$$\mathrm{Var}\left(S_2\right) = 4.58 \times 10^{10} \ (0.011031),$$

$$\mathrm{Var}\left(S\right) = 1.7763 \times 10^{10} \ (0.00647).$$

Le coefficient de variation (valeurs entre parenthèses) de S *est plus bas que le coefficient de variation de* S_1 *et que le coefficient de variation de* S_2.

Le pourcentage de la variance expliquée par la mortalité systématique pour S_1, S_2 *et* S *est* $\frac{\text{Var}(E[(S_1|\Theta)])}{\text{Var}(S_1)} = 76.97785\ \%$, $\frac{\text{Var}(E[(S_2|\Theta)])}{\text{Var}(S_2)} = 87.33624\ \%$ *et* $\frac{\text{Var}(E[(S|\Theta)])}{\text{Var}(S)} = 0$.

En unifiant les deux portefeuilles (avec le nombre n_1 *de contrats calculé adéquatement), on a réussi à éliminer le risque systématique. En composant un portefeuille d'un nombre approprié de contrats d'assurance vie temporaire et de contrats d'assurance dotation pure, on est parvenu à éliminer complètement le risque lié à la mortalité stochastique. Les compagnies d'assurance vie ont la possibilité de recourir à cette forme de couverture naturelle afin d'éliminer le risque lié à la mortalité stochastique, ce qui n'est pas le cas des régimes privés de retraite. Par ailleurs, compte tenu du nombre de contrats d'assurance vie que la compagnie d'assurance détient dans son portefeuille, elle peut établir la capacité maximale à émettre des contrats d'assurance dotation pure.* □

3.9 Mutualisation et risque de crédit

Une compagnie d'assurance ou une institution financière peuvent être exposées à des activités d'assurance et de crédit. On a recours à l'exemple simple suivant pour illustrer la mutualisation de ces deux types d'activités.

Exemple 3.41 ***Activités d'assurance et activités bancaires.*** *On considère l'institution financière ABC ayant des activités d'assurance et bancaires pendant une année. Le portefeuille d'activités d'assurance est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers (classe 1) et assurance habitation aux particuliers (classe 2). On suppose que tous les risques individuels sont indépendants. Les coûts pour un contrat* i *de la classe* j *sont représentés par la v.a.* $X_i^{(j)}$ *(*$i = 1, 2, ..., n^{(j)}$*;* $j = 1, 2$*).*

- *Assurance habitation : Nb de contrats* $n^{(1)} = 3000$, $E\left[X_i^{(1)}\right] = 100$ *et* $\text{Var}\left(X_i^{(1)}\right) = 300^2$, $i = 1, 2, ..., n^{(1)}$.
- *Assurance automobile : Nb de contrats* $n^{(2)} = 2000$, $E\left[X_i^{(2)}\right] = 120$ *et* $\text{Var}\left(X_i^{(2)}\right) = 400^2$, $i = 1, 2, ..., n^{(2)}$.

Pour un contrat i *de la classe* j*, la prime est égale à* $1.06 \times \frac{1}{1.04} \times E\left[X_i^{(j)}\right]$ *(*$i = 1, 2, ..., n^{(j)}$ *;* $j = 1, 2$*). Les revenus de primes sont investis à un taux annuel d'intérêt de* 4 %.

Le portefeuille d'activités bancaires est constitué de certificats de dépôt et de prêts personnels.

- *Certificats de dépôt 1 an. ABC a émis 1000 certificats de dépôt avec échéance 1 an. Pour chaque certificat, le montant investi est* $\frac{500}{1.04}$ *au temps 0. La valeur remboursée à l'échéance est 500.*

- *Prêts personnels 1 an. ABC a émis 650 prêts personnels avec échéance 1 an. Pour chaque prêt, la valeur prêtée est* $\frac{800}{1.05}$*. Chaque emprunteur doit rembourser 800 à échéance. La probabilité de défaut est de* $q = 2.5\ \%$*. En cas de défaut, l'emprunteur n'est pas en mesure de rembourser le montant de 800. La valeur remboursée au temps 1 par l'emprunteur* l $(l = 1, 2, ..., 650)$ *est représentée par la v.a.* Y_l *où* $Y_l = 800 \times J_l$*,* $J_l \sim Bern\,(1-q)$ $(l = 1, 2, ..., 650)$*. Tous les emprunteurs sont indépendants. Les activités d'assurance et les activités bancaires sont indépendantes.*

On utilise les notations et hypothèses suivantes :

- P *= revenu total des primes d'assurance accumulées au temps 1.*

- S *= montant total des sinistres que ABC devra rembourser au temps 1.*

- D *= montant total des versements que ABC doit faire par rapport aux certificats de dépôt au temps 1.*

- C *= montant total des prêts qui seront remboursés à ABC par les emprunteurs au temps 1.*

- L *= pertes au temps 1 = montant total des engagements à verser au temps 1 − montant total des sommes disponibles au temps 1 (pour payer ces engagements).*

On définit $L = S - P + D - C$ *où* S *et* C *sont des v.a. alors que* P *et* D *sont des constantes. Ainsi, pour les activités d'assurance, les entrées de fonds sont certaines et les sorties de fonds (sinistres) sont aléatoires. Pour les activités bancaires, les sorties de fonds sont certaines et les entrées de fonds (remboursement des prêts) sont aléatoires. L'espérance de* L *est donnée par*

$$E[L] = E[S] - P + D - E[C] = -39\ 400,$$

où

$$\begin{aligned} E[S] &= 3000 \times 100 + 2000 \times 120 = 540\ 000, \\ P &= 1.06 \times E[S] = 1.06 \times (3000 \times 100 + 2000 \times 120) = 572\ 400, \\ D &= 500\ 000 \text{ et } E[C] = 507\ 000. \end{aligned}$$

Ensuite, la variance de L est

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(S) &= 3000 \times 300^2 + 2000 \times 400^2 = 59\ 000\ 000,\\ \mathrm{Var}\,(C) &= 650 \times 800^2 \times 0.025\,(1-0.025) = 10\ 140\ 000,\\ \mathrm{Var}\,(L) &= \mathrm{Var}\,(S) + \mathrm{Var}\,(C) = 600\ 140\ 000.\end{aligned}$$

En ayant recours à l'approximation normale, la probabilité d'une perte positive est

$$\begin{aligned}\Pr\,(L>0) &= 1 - \Pr\,(L \leq 0) \simeq 1 - \Pr\left(Z \leq \frac{-\,(-39\ 400)}{\sqrt{600\ 140\ 000}}\right)\\ &= 0.0538836.\end{aligned}$$

En utilisant l'approximation normale, les valeurs de $VaR_\kappa\,(L)$ et $TVaR_\kappa\,(L)$ avec $\kappa = 99.5$ % sont 23 702.04 et 31 446.25. Bien que la probabilité d'une perte positive soit seulement de 5.39 %, la gravité de cette perte peut être très élevée. Dans cet exemple, on a supposé que les défauts liés aux prêts personnels sont indépendants alors qu'en réalité ils sont dépendants. Il en résulterait un effet à la hausse sur la TVaR. □

On présente ci-dessous un exemple illustrant l'impact des effets insidieux de titres avec risques de défaut.

Exemple 3.42 *On considère une compagnie d'assurance vie qui a émis* 300 000 *contrats d'assurance temporaire 1 an. Les durées de vie des assurés sont i.i.d. Le montant de prestation de décès est de 50. La probabilité de décès pour la période est $q = 0.01$. Le taux annuel d'intérêt déterministe est $i = 0.05$ (compte en banque).*

Toutefois, pour diminuer son prix, la prime pour le contrat d'assurance est calculée selon le principe d'équivalence avec un taux d'intérêt i_c, i.e. $PUN = b\frac{q}{1+i_c}$. Le taux i_c est calculé en supposant que le revenu total de primes est investi entièrement dans un portefeuille de titres à revenus fixes comportant un risque de défaut. Ces titres sont des prêts individuels d'un an (émis par la compagnie) avec un capital de $c = 1$ à rembourser à l'échéance (1 an). Un emprunteur a une probabilité de défaut de $r = \frac{1}{101}$ de ne pas payer le capital à échéance (en cas de défaut, l'emprunteur ne remboursera pas le capital associé au prêt). La valeur prêtée par l'institution correspond à l'espérance de la valeur présente (actualisée) du montant qui peut être recouvert par la compagnie :

$$VAL = c\frac{1-r}{1+i} = c\frac{1}{1+i_c},$$

où $1 + i_c = \frac{1+i}{1-r} = \frac{1.05}{1-\frac{1}{101}} = 1.0605$. Le revenu total de primes est noté par PUN^{TOT} et le nombre de prêts est $m = \frac{PUN^{TOT}}{VAL}$.

Les risques de défaut des emprunteurs sont influencés par les conditions économiques représentées par la v.a. Θ *où* $\Pr(\Theta = \theta_i) = \pi_i$ *(*$i = 1, 2$*) avec* $\theta_1 =$ *conditions normales et* $\theta_2 =$ *conditions de crise. Pour* $i = 1, 2, ..., m$*, on définit la v.a.* I_i *où* $I_i = 1$ *lorsque l'emprunteur* i *fait défaut et* $I = 0$*, sinon. On a* $\Pr(I_i = 1) = r = \frac{1}{101}$*. On note* $\Pr(I_i = 1|\Theta = \theta_j) = r^{(j)}$ *avec* $j = 1, 2$*. On fixe* $\pi_1 = 0.9$*,* $\pi_2 = 0.1$*,* $r^{(1)} = 0.009$ *et* $r^{(2)} = \frac{1.819}{101} = 0.01801$ *de telle sorte que la relation* $\Pr(I_i = 1) = \sum_{j=1}^{2} \pi_j r^{(j)} = r = \frac{1}{101}$ *soit satisfaite. Les conditions économiques influencent uniquement les risques des emprunteurs à faire défaut et n'affectent pas les temps de décès des assurés. On suppose que les risques des emprunteurs à faire défaut et que les durées de vie des assurés sont indépendants.*

Étant donné les conditions économiques qui prévalent, les emprunteurs sont conditionnellement indépendants. On définit les v.a. suivantes : $Z(1)$ *est la somme totale des prestations de décès à verser au temps 1 ;* $V(1)$ *est la valeur du portefeuille d'investissement au temps 1 correspondant à la somme totale des prêts remboursés et de la valeur résiduelle dans le certificat de dépôt ; et* $L(1)$ *est la perte au temps* 1 *avec* $L(1) = Z(1) - V(1)$*. On utilise l'approximation normale de façon appropriée pour évaluer le comportement de* $Z(1)$ *et* $V(1)$*.*

On a $PUN = 0.471475719$ *et* $VAL = 0.942951438$*. Il en résulte que le revenu total de primes est*

$$PUN^{TOT} = 0.471475719 \times 300\ 000 = 141\ 442.715\,7$$

et que le nombre de prêts est $m = \frac{0.471475719 \times 300\ 000}{0.942951438} = 150\ 000$*. On détermine* $E[Z(1)] = 150\ 000$ *et* $\mathrm{Var}(Z(1)) = 7\ 425\ 000$*. En outre, on a*

$$\begin{aligned} E[V(1)|\Theta = \theta_1] &= 148\ 650.0, \\ E[V(1)|\Theta = \theta_2] &= 147\ 298.514\,851 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(V(1)|\Theta = \theta_1) &= 1337.85, \\ \mathrm{Var}(V(1)|\Theta = \theta_2) &= 2652.8317. \end{aligned}$$

On utilise l'approximation normale de façon adéquate pour calculer la probablité que la perte $L(1)$ *soit positive*

$$\begin{aligned} \Pr(L(1) > 0) &= \Pr(Z(1) - V(1) > 0) \\ &= \pi_1 \Pr(Z(1) - V(1) > 0|\Theta = \theta_1) \\ &\quad + \pi_2 \Pr(Z(1) - V(1) > 0|\Theta = \theta_2) \\ &\simeq \pi_1 \Pr(W_1 > 0) + \pi_2 \Pr(W_2 > 0), \end{aligned}$$

où $W_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ *avec* $\mu_i = E\left[Z\left(1\right)\right] - E\left[V\left(1\right)|\Theta = \theta_i\right]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left(Z\left(1\right)\right) + \mathrm{Var}\left(V\left(1\right)|\Theta = \theta_i\right)$ *et*

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 150\ 000 - 148\ 650.0 = 1350, \\
\mu_2 &= 150\ 000 - 147\ 298.5149 = 2701.4851, \\
\sigma_1^2 &= 7\ 425\ 000 + 1337.85 = 7\ 426\ 337.85, \\
\sigma_2^2 &= 7\ 425\ 000 + 2652.8317 = 7\ 427\ 652.832.
\end{aligned}$$

Avec $Y \sim N\left(0,1\right)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\Pr\left(L\left(1\right) > 0\right) &\simeq \pi_1 \Pr\left(Y > \frac{-1350}{\sqrt{7\ 426\ 337.85}}\right) \\
&\quad + \pi_2 \Pr\left(Y > \frac{-2701.485149}{\sqrt{7\ 427\ 652.832}}\right) \\
&= 0.9 \Pr\left(Y > -0.495389\right) \\
&\quad + 0.1 \Pr\left(Y > -0.991235\right) \\
&= 0.704775.
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit $VaR_{0.995}\left(L\left(1\right)\right) = 8606.515$ *et* $TVaR_{0.995}\left(L\left(1\right)\right) = 7728.2$. *La probabilité d'une perte positive est très élevée.* □

3.10 Mutualisation et risques extraordinaires

On entend par risque extraordinaire les coûts couverts par une protection offerte aux dommages d'un barrage hydro-électrique, d'une raffinerie, d'une plate-forme d'extraction pétrolière, d'un avion, d'un satellite, etc.

Le mécanisme d'assurance fondé sur la mutualisation des risques ne peut pas être appliqué à ce type de risques. En fait, une compagnie d'assurance ne peut pas à elle seule assumer un tel risque. Il est impossible d'imaginer qu'une compagnie d'assurance dispose de la capacité financière nécessaire pour assumer un ensemble de risques relativement similaires. Les risques extraordinaires intéressent généralement les compagnies de réassurance.

Ce type de risques d'assurance est légèrement différent. On imagine un groupe de n compagnies de réassurance. On suppose aussi que le marché compte n risques extraordinaires $X_1, X_2, ..., X_n$ à assurer. Pour simplifier la présentation, on suppose que les v.a. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont i.i.d., ce qui implique que les risques extraordinaires sont indépendants et que leurs comportements aléatoires sont similaires. Donc, on a $E\left[X_i\right] = E\left[X\right]$ et $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \mathrm{Var}\left(X\right)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On sait que chaque compagnie de réassurance ne peut pas assumer la totalité d'un seul risque isolé, par exemple X_1, vu l'ampleur des coûts associés. On suppose alors que chaque compagnie de réassurance assume une part égale de chaque risque

X_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Ainsi, le risque global assumé par la compagnie de réassurance j est $S_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$. On observe que

$$E[S_j] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{n}{n} E[X] = E[X]$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_j) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) \\ &= \frac{n}{n^2} \text{Var}(X) = \frac{1}{n} \text{Var}(X) \end{aligned}$$

pour $j = 1, 2, ..., n$.

Ainsi, pour une compagnie de réassurance j, l'espérance des coûts reste identique qu'elle assume 1 seul rique ou n parts égales de n risques i.i.d. Cependant, quand la compagnie de réassurance assume n parts égales de n risques i.i.d., il est important de constater que la variabilité des coûts est nettement inférieure à la variabilité des coûts lorsqu'elle décide d'assumer en entier un seul contrat.

3.11 Mutualisation et risque financier

Lorsque le portefeuille de contrats d'assurance est exposé au risque financier, il en découle un impact important sur la mutualisation des risques. On considère via un exemple l'impact du risque financier sur la mutualisation au sein d'un portefeuille d'assurance.

Exemple 3.43 *On suppose que n contrats d'assurance temporaire 1 an sont émis à des assurés dont les durées de vie sont i.i.d. Pour tous les contrats, la prestation de décès est b et la probabilité de décès est $q = 0.01$. Le montant total des prestations à la fin de l'année est représenté par la v.a. S_n et la compagnie désire que l'espérance du montant disponible pour financer S_n soit égal à $(1 + \theta) E[S_n] = (1 + \theta) nbq$. La compagnie a le choix entre 2 stratégies de financement et elle calcule la prime pour chaque contrat selon chaque stratégie.*

- ***Stratégie 1**. La compagnie investit le revenu total de primes dans un placement dont le rendement instantané est assuré à 4 % (ex : titre obligataire avec échéance 1 an). La valeur de l'investissement à 0 est $V^{(1)}(0) = n \times \pi_{(n)}^{(1)}$, soit le revenu total des primes. La valeur de l'investissement au temps 1 est $V^{(1)}(1)$ où $V^{(1)}(1) = e^{0.04} \times V^{(1)}(0)$. La prime pour chaque contrat est déterminée de telle sorte que la*

relation

$$E\left[V^{(1)}(1)\right] = \mathrm{e}^{0.04} \times V^{(1)}(0) = \mathrm{e}^{0.04} n\pi_{(n)}^{(1)} = (1+\theta) E[S_n]$$

soit satisfaite. On obtient

$$\pi_{(n)}^{(1)} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta) E[S_n] = \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta) bq.$$

- ***Stratégie 2****. La compagnie investit le revenu total de primes dans un fonds d'actions dont le rendement instantané est une v.a. R. On suppose que la v.a. R obéit à une loi normale d'espérance* $0.1 - \frac{1}{2} \times 0.4^2$ *et de variance* 0.4^2*. La valeur de l'investissement à 0 est* $V(0) = n\pi_{(n)}^{(2)}$*, soit le revenu total des primes. La valeur de l'investissement au temps 1 est* $V(1)$ *où* $V(1) = \mathrm{e}^R \times V(0)$*. La prime pour chaque contrat est déterminée de telle sorte que la relation*

$$E[V(1)] = E\left[\mathrm{e}^R\right] \times V(0) = E\left[\mathrm{e}^R\right] n\pi_{(n)}^{(2)} = (1+\theta) E[S_n]$$

soit satisfaite. On obtient

$$\pi_{(n)}^{(2)} = \frac{1}{n}\frac{(1+\theta) E[S_n]}{E[\mathrm{e}^R]} = (1+\theta)\frac{bq}{E[\mathrm{e}^R]}.$$

Pour chaque stratégie $j = 1$ *et* 2*, on calcule* $P_{(n)}^{(j)} = \Pr\left(S_n \leq V^{(j)}(1)\right)$*, soit la probabilité que la compagnie remplisse ses engagements sous la stratégie* j*. On définit* N_n *le nombre de décès pour le portefeuille où* $N_n \sim Bin(n, q)$*. Les expressions pour chaque probabilité sont*

$$\begin{aligned} P_{(n)}^{(1)} &= \Pr\left(S_n \leq V^{(1)}(1)\right) = \\ &= \Pr\left(S_n \leq \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta) nbq\right) \\ &= \Pr\left(N_n \leq \mathrm{e}^{-0.04}(1+\theta) nq\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_{(n)}^{(2)} &= \Pr\left(S_n \leq V^{(2)}(1)\right) = \Pr\left(N_n \leq \frac{V^{(2)}(1)}{b}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) \Pr\left(\frac{n(1+\theta)\frac{bq}{E[\mathrm{e}^R]}\mathrm{e}^R}{b} > k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(N_n = k) \Pr\left(R > \ln\left(\frac{n(1+\theta) q}{E[\mathrm{e}^R]}\right)\right). \end{aligned}$$

On fixe $b = 10\ 000$ *et* $q = 0.001$. *Dans le tableau suivant, on calcule les valeurs de* $\pi_{(n)}^{(j)}$ *et* $P_{(n)}^{(j)}$ *pour chaque stratégie 1 et 2, pour* $n = 1000$ *et* $1\ 000\ 000$ *ainsi que pour différentes valeurs de* θ :

n	θ	$\pi_{(n)}^{(1)}$	$\pi_{(n)}^{(2)}$	$P_{(n)}^{(1)}$	$P_{(n)}^{(2)}$
1000	*20 %*	*11.52947*	*10.85805*	*0.7357589*	*0.6021346*
1 000 000	*20 %*	*11.52947*	*10.85805*	*1*	*0.6011207*
1000	*5 %*	*10.08829*	*9.500793*	*0.7357589*	*0.5468857*
1 000 000	*5 %*	*10.08829*	*9.500793*	*0.9440612*	*0.4694943*
1000	*0 %*	*9.607894*	*9.048374*	*0.7357589*	*0.527555*
1 000 000	*0 %*	*9.607894*	*9.048374*	*0.5084094*	*0.4214691*
1000	*-10 %*	*8.647105*	*8.143537*	*0.367695*	*0.488666*
1 000 000	*-10 %*	*8.647105*	*8.143537*	*0.000694*	*0.322501*

Cet exemple permet de visualiser l'interaction du risque financier et de la mutualisation de risques indépendants. Le risque de mortalité se diversifie alors que le risque financier ne se diversifie pas, car le revenu total de primes est investi dans le même fonds et que les fluctuations aléatoires du marché influencent par conséquent l'ensemble des contrats du portefeuille. L'impact du risque financier dépend à la fois de la marge de sécurité θ *(négative ou positive) et du nombre de contrats au sein du portefeuille.*

Si on fixe une marge relative de sécurité strictement positive, on constate que la probabilité de remplir les engagements tend vers 1 sous la stratégie 1 lorsque le nombre de contrats augmente (ce qui est démontré à la sous-section 3.7.3). Toutefois, si l'on choisit la stratégie 2, la prime est moins élevée car la stratégie est plus agressive mais on réduit de façon significative la probabilité de remplir les engagements (pour $\theta = 20\ \%$, $P_{(1\ 000\ 000)}^{(2)} = 60.11207\ \%$ *versus* $P_{(1\ 000\ 000)}^{(1)} = 100\ \%$*). Si la marge relative de sécurité est strictement négative et sous la stratégie 1, la probabilité de remplir les engagements tend vers 0 lorsque le nombre* n *de contrats augmente. En revanche, comme la stratégie 2 est plus agressive, elle permet de compenser la présence d'une marge négative de sécurité ce qui conduit à une probabilité non nulle de remplir les engagements.* □

3.12 Mutualisation et catastrophes naturelles

Les catastrophes naturelles induisent une forte dépendance dans la réalisation des sinistres d'un ensemble de contrats. La gestion du risque global associé à un ensemble de contrats exposés à des catastrophes ne peut pas être faite de façon similaire à la gestion du risque global d'un ensemble de contrats indépendants.

On considère un ensemble de n contrats d'assurance habitation dans une région exposée à un risque élevé de catastrophe (ex : tremblements de terre, inondations, ouragans ou toute autre catastrophe naturelle).

Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. X_i où $X_i = X_i^{N-CAT} + X_i^{CAT}$, où la v.a. X_i^{CAT} représente les coûts associés à la protection pour catastrophe et la v.a. X_i^{N-CAT} correspond aux coûts pour les autres protections. Les v.a. X_i^{N-CAT} et X_i^{CAT} sont indépendantes. On a $E[X_i] = E\left[X_i^{N-CAT}\right] + E\left[X_i^{CAT}\right]$ et $\text{Var}(X_i) = \text{Var}\left(X_i^{N-CAT}\right) + \text{Var}\left(X_i^{CAT}\right)$.

On se concentre sur la modélisation de X_i^{CAT} pour $i = 1, 2, ..., n$, en particulier sur les dommages matériels. La définition de la v.a. X_i^{CAT} comporte trois composantes, qui sont l'avènement d'une catastrophe (la fréquence), l'intensité de la catastrophe et les dommages matériels étant donné l'intensité de la catastrophe. Dans cette section, on a recours à une modélisation relativement simple.

Concernant la fréquence, on suppose qu'une seule catastrophe peut se produire au cours de la période fixée du contrat (ex : 1 an). On définit la v.a. $I^{CAT} \sim Bern\left(q^{CAT}\right)$ telle que I^{CAT} prend la valeur 1 si une catastrophe se produit au cours de la période et 0 sinon. En cas de catastrophe, l'intensité de la catastrophe est définie par la v.a. Θ^{CAT}, une v.a. positive discrète ou continue. Dans le contexte des tremblements de terre, Θ^{CAT} représente l'échelle d'intensité de Mercali (6, 7, ..., 12). Dans cette section, les v.a. Θ et I^{CAT} sont supposées indépendantes, mais cette hypothèse n'est pas toujours adéquate selon le contexte (notamment pour les tremblements de terre).

On définit la v.a. X_i^{CAT} par

$$X_i^{CAT} = \begin{cases} B_i^{CAT}, & I^{CAT} = 1 \\ 0, & I^{CAT} = 0 \end{cases},$$

où B_i^{CAT} représente les dommages matériels en cas de catastrophe pour le contrat i si une catastrophe se produit. La v.a. B_i^{CAT} $(i = 1, 2, ..., n)$ est définie par $B_i^{CAT} = U_i^{CAT} \times c_i$ où la v.a. U_i^{CAT} représente le pourcentage de dommages et la constante c_i représente la valeur de la résidence. La v.a. U_i^{CAT} peut prendre des valeurs entre 0 et 1. Le comportement de la v.a. U_i dépend de l'intensité Θ du tremblement de terre. Sachant que $\Theta = \theta$ $(\theta = 1, 2)$, les v.a. $(U_i \,|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes. Les spécifications de la distribution de $(U_i \,|\Theta = \theta)$ sont établies en fonction du type de catastrophe et des caractéristiques de la propriété i $(i = 1, 2, ..., n)$ à partir de données passées et des avis d'experts.

On obtient

$$E\left[X_i^{CAT}\right] = E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT}\right],$$

et

$$\text{Var}\left(X_i^{CAT}\right) = E\left[I^{CAT}\right] \text{Var}\left(B_i^{CAT}\right) + \text{Var}\left(I^{CAT}\right) E\left[B_i^{CAT}\right]^2,$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. De plus, on a

$$\text{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) = E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] - E\left[X_i^{CAT}\right] E\left[X_j^{CAT}\right],$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$. D'abord,

$$E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] = E_{I^{CAT}}\left[E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT}\right]\right]$$

avec

$$\begin{aligned} & E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT} = 1\right] \\ = \; & E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right] \\ = \; & \sum_{l=1}^{m} \Pr\left(\Theta = \theta_l\right) c_i c_j E\left[U_i^{CAT} | \Theta = \theta_l\right] E\left[U_j^{CAT} | \Theta = \theta_l\right] \end{aligned}$$

et

$$E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT} \middle| I^{CAT} = 0\right] = 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E\left[X_i^{CAT} X_j^{CAT}\right] &= E_{I^{CAT}}\left[I^{CAT} \times E\left[B_i^{CAT}\right] E\left[B_j^{CAT}\right]\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right]. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) &= \text{Cov}\left(X_1^{CAT}, X_2^{CAT}\right) \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT} B_j^{CAT}\right] \\ &\quad - E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_i^{CAT}\right] E\left[I^{CAT}\right] E\left[B_j^{CAT}\right], \end{aligned} \tag{3.11}$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. S avec $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ que l'on peut exprimer sous la forme $S = S^{N-CAT} + S^{CAT}$ où la v.a. $S^{N-CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{N-CAT}$ correspond à la somme des coûts pour les protections qui ne sont pas liées aux catastrophes et la v.a.

$$S^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{CAT} \tag{3.12}$$

correspond à la somme des coûts pour les protections liées aux catastrophes.

Concernant les coûts catastrophiques du portefeuille, on peut réécrire (3.12) sous la forme

$$S^{CAT} = \begin{cases} D^{CAT}, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases}, \tag{3.13}$$

où $D^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} B_i^{CAT}$. Selon (3.13), si une catastrophe survient, le portefeuille va encourir des coûts d'une ampleur considérable, représentés par la v.a. D^{CAT}. Cela est mis en évidence par le fait que l'on puisse exprimer S^{CAT} selon l'approche indemnitaire.

Selon l'équation (3.12), on déduit que

$$E\left[S^{CAT}\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^{CAT}\right] = E\left[I^{CAT}\right] \sum_{i=1}^{n} E\left[B_i^{CAT}\right].$$

Selon (3.13), on déduit aussi que

$$\begin{aligned} E\left[S^{CAT}\right] &= E_{I^{CAT}}\left[E\left[S^{CAT} \middle| I^{CAT}\right]\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] E\left[D^{CAT}\right] \\ &= E\left[I^{CAT}\right] \sum_{i=1}^{n} E\left[B_i^{CAT}\right]. \end{aligned}$$

En se basant sur (3.12), la variance de S^{CAT} est donnée par

$$\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_i^{CAT}\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_i^{CAT}, X_j^{CAT}\right) \tag{3.14}$$

ou, en utilisant la relation (3.13), son expression est

$$\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right) = E\left[I^{CAT}\right] \mathrm{Var}\left(D^{CAT}\right) + \mathrm{Var}\left(I^{CAT}\right) E\left[D^{CAT}\right]^2. \tag{3.15}$$

En développant (3.14) et (3.15), elles conduisent à la même expression de $\mathrm{Var}\left(S^{CAT}\right)$.

À partir de la relation (3.13), la fonction de répartition de S_{TOT}^{CAT} est déduite

$$\begin{aligned} F_{S_{TOT}^{CAT}}(x) &= \Pr\left(I^{CAT} = 0\right) + \Pr\left(I^{CAT} = 1\right) F_{D^{CAT}}(x) \\ &= \left(1 - q^{CAT}\right) + q^{CAT} F_{B_1^{CAT} + \ldots + B_n^{CAT}}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, la mutualisation ne permet pas à la compagnie d'assurance de réduire le risque lié aux protections pour catastrophes, car les coûts totaux se comportent comme les coûts d'un risque modélisé selon l'approche indemnitaire.

On mentionne que $E[S] = E\left[S^{NCAT}\right] + E\left[S^{CAT}\right]$ et

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(S^{NCAT}\right) + \text{Var}\left(S^{CAT}\right).$$

De plus, la fonction de répartition de S est donnée par

$$F_S(x) = \left(1 - q^{CAT}\right) F_{S^{NCAT}}(x) + q^{CAT} F_{S^{NCAT}+D^{CAT}}(x).$$

Souvent, comme on n'a pas la forme analytique pour $F_{S^{NCAT}}$ et $F_{S^{NCAT}+D^{CAT}}$, on a recours aux méthodes d'approximation (e.g. méthodes d'approximation basées sur les moments, méthodes récursives, méthodes par simulation) pour évaluer $F_{S^{NCAT}}$ et $F_{S^{NCAT}+D^{CAT}}$.

Exemple 3.44 *Une compagnie d'assurance a émis n contrats d'assurance habitation pour des résidences unifamiliales établies dans la région FGH exposée au risque de tremblements de terre.*

Pour une année, les coûts pour ces couvertures sont représentés par les v.a. X_i^{CAT} $(i = 1, ..., n)$. *Le nombre de tremblements de terre dans la région FGH est représenté par la v.a.* I *où* $I \sim Bern(0.05)$. *Lorsqu'un tremblement de terre se produit dans la région FGH, les coûts de sinistres pour le contrat* i *correspondent à la v.a.*B_i^{CAT} $(i = 1, 2, ..., 500)$ *où* $B_i^{CAT} = U_i \times c_i$ *où la v.a.* U_i *représente le pourcentage de dommage et la constante* c_i *représente la valeur de la résidence. La v.a.* U_i *peut prendre des valeurs entre 0 et 1.*

Le comportement de la v.a. U_i *dépend de l'intensité* Θ *du tremblement de terre. Sachant que* $\Theta = j$ $(j \in \{6, 7, ..., 12\})$, *les v.a.* $(U_i | \Theta = j)$ *sont i.i.d. avec* $(U_i | \Theta = j) \sim Bêta(\alpha_j, \beta_j)$. *Les valeurs de* (α_j, β_j) $(j = 6, ..., 12)$ *ainsi que les valeurs de la fonction de masse de probabilité de* Θ *sont fournies dans le tableau ci-dessous :*

j	α_j	β_j	$E[U_i \mid \Theta = j]$	$f_\Theta(j)$
6	*2.00314018*	*248.389382*	*0.008*	*0.75*
7	*4.53586011*	*297.854814*	*0.015*	*0.10*
8	*3.52042656*	*71.3822663*	*0.047*	*0.05*
9	*5.1238591*	*50.570261*	*0.092*	*0.04*
10	*4.12149349*	*16.6941302*	*0.198*	*0.03*
11	*6.89215975*	*21.3543966*	*0.244*	*0.02*
12	*8.0206085*	*13.4823633*	*0.373*	*0.01*

Les résidences ont toutes une valeur de 100. Ainsi, on a $E\left[B_i^{CAT}\right] = 2.808$, $\text{Var}\left(B_i^{CAT}\right) = 44.03484$ *et* $VaR_{0.99}\left(B_i^{CAT}\right) = 34.3845$ $(i = 1, 2, ..., n)$. *On définit les coûts totaux pour les* $n = 1000$ *contrats par la v.a.* $S^{CAT} = \sum_{i=1}^{n} X_i^{CAT}$. *On commence par calculer l'espérance des coûts totaux avec*

$$S^{CAT} = \begin{cases} D^{CAT}, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases}$$

où $E\left[S^{CAT}\right] = E\left[D^{CAT}\right] E[I]$. *On détermine* $E\left[D^{CAT}\right] = 2808$ *et* $\text{Var}\left(D^{CAT}\right) = 34\ 892\ 990$. *L'expression de* $F_{D^{CAT}}(x)$ *est donnée par*

$$\Pr\left(D^{CAT} \leq x\right) = \sum_{j=6}^{12} \Pr(\Theta = j) \Pr\left(D^{CAT} \leq x | \Theta = j\right).$$

Pour cet exemple seulement, on applique l'approximation normale pour évaluer $\Pr\left(D^{CAT} \leq x | \Theta = j\right)$ *pour chaque* $j = 6, 7, ..., 12$ *en procédant comme suit :*

$$\Pr\left(D^{CAT} \leq x\right) \simeq \sum_{j=6}^{12} \Pr(\Theta = j) \Phi\left(\frac{x - E\left[D^{CAT} | \Theta = j\right]}{\sqrt{\text{Var}\left(D^{CAT} | \Theta = j\right)}}\right).$$

On déduit que $VaR_{0,99}\left(D^{CAT}\right) \simeq 24\ 890$. □

3.13 Mutualisation et sinistre maximal

Comme on l'a déjà mentionné, le choix de la loi du montant de sinistre peut avoir un impact considérable sur la distribution du montant total des sinistres d'un portefeuille. Dans le prochain exemple, on examine l'effet combiné de la mutualisation et du choix de la loi d'un montant de sinistre sur le comportement du montant maximal de sinistre pour un portefeuille. À cette fin, on considère deux lois particulières, les lois exponentielle et de Pareto.

Proposition 3.45 *Les coûts totaux pour le portefeuille d'assurance IARD sont définis par la v.a.* $S_n \sim PComp(\lambda_n; F_B)$ *où* $\lambda_n = \gamma n$ *et* $n =$ *nombre de contrats i.i.d. constituant le portefeuille. Le montant du sinistre le plus élevé parmi tous les sinistres produits par le portefeuille est défini par la v.a.* $C_{\max,n}$. *L'expression de* $F_{C_{\max,n}}$ *est donnée par*

$$F_{C_{\max,n}}(x) = P_{N_n}(F_B(x)) = \exp(n\gamma(F_B(x) - 1)),$$

où $N_n \sim Pois(\gamma n)$. *En particulier, pour* $x \geq 0$, *on a*

$$F_{C_{\max,n}}(x) = \begin{cases} \exp\left(-n\gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^{\alpha}\right), & si\ B \sim Pa(\alpha, \lambda) \\ \exp\left(-n\gamma e^{-\beta\alpha}\right), & si\ B \sim Exp(\beta) \end{cases}.$$

Preuve. En conditionnant sur la v.a. $N_n \sim Pois(\gamma n)$, qui représente le nombre de sinistres du portefeuille, l'expression de $F_{C_{\max,n}}$ est donnée par

$$\begin{aligned} F_{C_{\max,n}}(x) &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \Pr(C_{\max,n} \leq x | N_n = k) \\ &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) \Pr(\max(B_1; ...; B_k) \leq x) \\ &= f_{N_n}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{N_n}(k) (F_B(x))^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{N_n}(k) (F_B(x))^k = P_{N_n}(F_B(x)) \\ &= \exp(n\gamma(F_B(x) - 1)). \end{aligned}$$

■

Dans le prochain exemple, on illustre le résultat de la proposition 3.45.

Exemple 3.46 *Les conditions de la proposition 3.45 sont supposées satisfaites. La valeur du paramètre γ est fixée à 1. Dans les tableaux ci-dessous, on illustre le comportement de $\overline{F}_{C_{\max,n}}(x) = 1 - F_{C_{\max,n}}(x)$, en considérant différentes valeurs de n, du paramètre α de la loi de Pareto et de x. Les paramètres sont choisis de telle sorte que $E[N_n] = n$ et $E[S_n] = n \times 10$.*

x $(n=1)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	*0.30780*	*0.06903*	*0.17506*	*0.22678*
$1.5 \times E[S_n]$	*0.19999*	*0.04626*	*0.11750*	*0.15146*
$2 \times E[S_n]$	*0.12658*	*0.03451*	*0.08556*	*0.10731*
$2.5 \times E[S_n]$	*0.07881*	*0.02739*	*0.06578*	*0.07958*
$3 \times E[S_n]$	*0.04857*	*0.02262*	*0.05256*	*0.06116*

x $(n=10)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	*0.000456*	*0.06500*	*0.09870*	*0.07498*
$1.5 \times E[S_n]$	*0*	*0.03930*	*0.05629*	*0.03506*
$2 \times E[S_n]$	*0*	*0.02885*	*0.03737*	*0.02002*
$2.5 \times E[S_n]$	*0*	*0.02267*	*0.02708*	*0.01286*
$3 \times E[S_n]$	*0*	*0.01860*	*0.02077*	*0.00892*

x $(n=100)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa(1.1;1)$	$Pa(1.5;5)$	$Pa(2.1;11)$
$1 \times E[S_n]$	*0*	*0.04883*	*0.03488*	*0.00750*
$1.5 \times E[S_n]$	*0*	*0.03155*	*0.01987*	*0.00322*
$2 \times E[S_n]$	*0*	*0.02310*	*0.01238*	*0.00178*
$2.5 \times E[S_n]$	*0*	*0.01812*	*0.00888*	*0.00111*
$3 \times E[S_n]$	*0*	*0.01485*	*0.00676*	*0.00076*

$x\ (n = 1000)$	$Exp\left(\frac{1}{10}\right)$	$Pa\,(1.1;1)$	$Pa\,(1.5;5)$	$Pa\,(2.1;11)$
$1 \times E\,[S_n]$	*0*	*0.03902*	*0.01111*	*0.00061*
$1.5 \times E\,[S_n]$	*0*	*0.02516*	*0.00606*	*0.00026*
$2 \times E\,[S_n]$	*0*	*0.01840*	*0.00394*	*0.00014*
$2.5 \times E\,[S_n]$	*0*	*0.01442*	*0.00282*	*0.00009*
$3 \times E\,[S_n]$	*0*	*0.01182*	*0.00215*	*0.00006*

Pour interpréter ces résultats, on considère x comme étant le revenu de primes ou la somme d'argent que l'assureur possède pour faire face à ses engagements au cours de la prochaine période. On constate que la probabilité que le montant du sinistre le plus élevé excède le double de l'espérance des coûts demeure élevée même si l'espérance du nombre de sinistres augmente (en supposant que les montants de sinistres obéissent à une loi de Pareto). Ainsi, la probabilité est fort élevée qu'un seul sinistre (celui dont le montant est le plus élevé) puisse mettre en péril la solvabilité d'une compagnie. □

3.14 Notes bibliographiques

Pour un exposé sur les mesures de risque et leurs propriétés, on consultera e.g. [1], [4], [81] et [24]. Voir e.g. [11], [21], [22] et [50] pour une synthèse sur les méthodes d'approximation basées sur les moments. L'approximation Pareto généralisée a été proposée par [104] et appliquée notamment par [74]. L'approximation par une loi lognormale est souvent appelée approximation Fenton-Wilkinson et elle a été proposée par [39] et [77]. Les principaux résultats de la théorie des probabilités tels que le théorème central limite et la loi des grands nombres sont exposés dans tout livre de base sur la théorie des probabilités (voir e.g. [53] et [94]). La variante du théorème central limite est fournie dans e.g. [89]. On peut consulter e.g. [16] et [74] pour une introduction sur les modèles de risque avec catastrophes.

3.15 Exercices

1. On considère un portefeuille de deux contrats dont les coûts sont définis par les v.a. indépendantes X_1 et X_2. Les v.a. ont pour support $\{0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000\}$. On définit les coûts pour l'ensemble du portefeuille par la v.a. $S = X_1 + X_2$. On dispose de l'information suivante :

k	0	1	2	3	4	5
$F_{X_1}\,(1000k)$	0.3	0.5	0.75	0.9	0.96	1
$F_{X_2}\,(1000k)$	0.2	0.5	0.85	0.95	0.98	1

   (a) Calculer $f_S\,(0)$ et $f_S\,(1000)$.

   (b) Calculer $VaR_\kappa\,(X_1)$, $VaR_\kappa\,(X_2)$ et $VaR_\kappa\,(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et et 0.995.

(c) Calculer $TVaR_{\kappa}(X_1)$, $TVaR_{\kappa}(X_2)$ et $TVaR_{\kappa}(S)$ avec $\kappa = 0.25$ et 0.995.

2. On considère un portefeuille constitué de n contrats d'assurance automobile. Les coûts pour le contrat i sont représentés par la v.a. X_i, $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. et elles se comportent comme la v.a. X. On suppose que $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 0.5$, $q = \frac{5}{6}$ et $B \sim Ga\left(0.5, \frac{1}{10\ 000}\right)$.

   Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$.

   (a) Indiquer la loi de S_n.

   (b) Calculer l'espérance de X et S_n (en fonction de n).

   (c) Calculer $F_X(10\ 000)$ et $F_{S_{200}}(10\ 000 \times 200)$.

   (d) Calculer $VaR_{0.5}(X)$ et $VaR_{0.99}(X)$.

   (e) Calculer $VaR_{0.5}(S_{200})$ et $VaR_{0.99}(S_{200})$.

   (f) Calculer $TVaR_{0.5}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$.

   (g) Calculer $TVaR_{0.5}(S_{200})$ et $TVaR_{0.99}(S_{200})$.

3. Les coûts totaux pour un portefeuille de $n = 20$ contrats indépendants d'assurance automobile sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a.

$$X_i \sim PComp(\lambda_i = 0.01; F_{B_i})$$

   avec $B_i \sim B \sim Exp\left(\frac{1}{4000}\right)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

   (a) Calculer $E[X_1]$, $\text{Var}(X_1)$ et $\Pr(X_1 > 8000)$.

   (b) Calculer $E[S]$, $\text{Var}(S)$ et $\Pr(S > 8000)$.

4. Pour la prochaine année, la compagnie d'assurance vie ABC Life prévoit d'émettre n contrats d'assurance temporaire 1 an. Pour tous les contrats, le montant de la prestation en cas de décès est de 1000. Pour tous les assurés, on suppose que la probabilité de décès est de 2 %. Le montant réclamé pour le contrat j est désigné par la v.a. X_j $(j = 1, 2, ..., n)$. On suppose que les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d.

   (a) Calculer l'espérance du montant qui peut être versé pour un contrat.

   (b) La compagnie demande une prime égale à 2 fois l'espérance pour chaque contrat. Pour n = 1, 2, 20 et 50, calculer la probabilité que la compagnie n'ait pas suffisamment d'argent pour remplir ses engagements envers l'assuré.

(c) Refaire le calcul de (b) pour une prime égale à 3 fois l'espérance.

5. On définit les coûts totaux pour un portefeuille de $n = 200$ contrats d'assurance vie temporaire 1 an par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = b_i I_i$ avec $b_i = 10\ 000$ et $I_i \sim Bern\,(q_i = 0.0012)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes.

   (a) Calculer $E[X_i]$, $VaR_{0.995}(X_i)$ et $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

   (b) Calculer $E[S_n]$, $VaR_{0.995}(S_n)$ et $TVaR_{0.995}(S_n)$.

   (c) Calculer les bénéfices de mutualisation $B_{0.995}^{VaR}(S_n)$ et $B_{0.995}^{TVaR}(S_n)$.

6. Pour la prochaine année, on suppose que $n = 1000$ contrats d'assurance automobile seront vendus par une compagnie d'assurance IARD. Les coûts pour un contrat d'assurance automobile (v.a. X) sont modélisés selon l'approche fréquence-sévérité. Le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson avec $\lambda = 0.005$. Le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000. Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les v.a. X_1, ..., X_n sont i.i.d. (convention : $X_i \sim X$ pour $i = 1, 2, ..., n$). On définit $W_n = \frac{S_n}{n}$.

   (a) Pour un contrat ...

      i. calculer $E[X_1]$ et $\text{Var}(X_1)$;
      ii. calculer $F_{X_1}(x)$, pour $x = 0, 5, 10$;
      iii. calculer $VaR_{0.99}(X_1)$ et calculer $TVaR_{0.99}(X_1)$.

   (b) Pour un portefeuille de $n = 1000$ contrats ...

      i. calculer $E[W_n]$ et $\text{Var}(W_n)$;
      ii. indiquer la loi de W_n et écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$;
      iii. calculer $F_{W_n}(x)$, pour $x = 0, 5, 10$;
      iv. calculer $VaR_{0.99}(W_n)$ et $TVaR_{0.99}(W_n)$.

   (c) Calculer les bénéfices de mutualisation par contrat $\frac{1}{n} B_{0.995}^{VaR}(S_n)$ et $\frac{1}{n} B_{0.995}^{TVaR}(S_n)$ pour $n = 1000$. (-14.4044 et 483.6472)

7. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance maladie de la région ABC. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $X_i =$ les coûts pour le contrat i, $i = 1, 2, ..., n$. Le portefeuille est exposé aux conditions climatiques de la région ABC qui sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$. Sachant que $\Theta = \theta_j$, $(X_i | \Theta = \theta_j) \sim Ga\left(0.25\theta_j, \beta = \frac{1}{4000}\right)$ avec $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 2$, $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.75$ et $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.25$. Les coûts par contrat sont définis par la v.a. $W_n = \frac{S_n}{n}$.

(a) Pour un contrat ...
   i. calculer $E[X_1]$ et $\text{Var}(X_1)$;
   ii. écrire l'expression de $F_{X_1}(x)$ et calculer $F_{X_1}(x)$, pour $x = 3000$ et 5000 ;
   iii. calculer $VaR_\kappa(X_1)$ et $TVaR_\kappa(X_1)$ pour $\kappa = 0.99$.

(b) Pour un portefeuille de $n = 10$ contrats ...
   i. calculer $E[W_n]$ et $\text{Var}(W_n)$;
   ii. écrire l'expression de $F_{W_n}(x)$ et calculer $F_{W_n}(x)$, pour $x = 3000$ et 5000 ;
   iii. calculer $VaR_\kappa(W_n)$ et $TVaR_\kappa(W_n)$ pour $\kappa = 0.99$.

(c) On décompose $\text{Var}(W_n)$ en deux termes : composante diversifiable $= E_\Theta[\text{Var}(W_n|\Theta)]$ et composante non diversifiable $= \text{Var}_\Theta(E[W_n|\Theta])$.
   i. Calculer les valeurs des deux composantes pour $n = 10$;
   ii. Calculer $\lim_{n\to\infty} \text{Var}_\Theta(W_n)$, $\lim_{n\to\infty} E_\Theta[\text{Var}(W_n|\Theta)]$ et
   $$\lim_{n\to\infty} \text{Var}_\Theta(E[W_n|\Theta]).$$
   iii. Commenter les résultats obtenus des trois limites en regard de la mutualisation des risques.

8. Au début de l'année, l'institution financière ABC a émis 200 certificats de dépôt d'un an avec un taux de rendement de 5 %. Les certificats de dépôt ont tous un capital b en vigueur de 1000. La valeur payée par les investisseurs individuels correspond à la valeur actualisée de b, i.e. dépôt $= \frac{1000}{1.05}$. On suppose que l'institution ABC versera le capital à échéance avec certitude. À la même date, l'institution ABC a émis $n = 100$ prêts d'un an avec un capital c en vigueur. Le capital est à rembourser à échéance. Un emprunteur a une probabilité de défaut de 2.77 % de ne pas payer le capital à échéance i.e. en cas de défaut, l'emprunteur ne remboursera pas la totalité du capital c du prêt. La valeur prêtée par l'institution correspond à l'espérance de la valeur actualisée du montant qui peut être recouvert par l'institution ABC i.e. montant prêté $= \frac{c}{1.05} \times 0.9723$. Le montant c est calculé de telle sorte que le montant total reçu en dépôt est égal au montant total prêté au début de l'année. On suppose l'indépendance entre les emprunteurs et les déposants.

(a) Calculer c.

(b) Calculer les revenus nets réalisés par l'institution ABC au début de l'année si un défaut seulement se réalise. Calculer la probabilité que cet événement se réalise.

(c) Calculer la probabilité que l'institution puisse remplir ses engagements.

(d) On définit la perte L pour l'institution ABC par la différence entre le montant total à verser pour les dépôts et le montant total des remboursements des prêts. Calculer l'espérance et l'écart type de L pour $n = 1, 10$ et 100.

9. Les coûts pour les contrats 1 et 2 d'un portefeuille d'assurance pour soins de santé et médicaments sont modélisés selon l'approche forfaitaire avec $X_i \sim BComp(1, q_i; F_{B_i})$ où $q_i = 0.1i$ et $B_i \sim Exp(0.0005i)$, pour $i = 1, 2$. Les v.a. I_1, I_2, B_1 et B_2 sont indépendantes. Les coûts totaux pour le portefeuille sont définis par la v.a. $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer $E[S]$ et $\text{Var}(S)$.

(b) Calculer la probabilité que les coûts totaux pour le portefeuille soient inférieurs à 4000.

10. On considère un portefeuille de 20 000 contrats d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. X_i, soit

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où les v.a. $B_{i,1}, B_{i,2}, ...$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. de fréquence M_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Par convention, on note $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2, ..., n;\ k = 1, 2, ...)$. On suppose que $B_i = U_i \times c_i$, où la v.a. $U_i \in [0, 1]$ représente le pourcentage de dommage et la constante c_i représente la valeur de la résidence. Pour chaque i, les v.a. U_i et M_i sont indépendantes. Les résidences sont classées selon deux types de structures. On a les informations suivantes :

	$E[U_i]$	$\text{Var}(U_i)$	$E[M_i]$	$\text{Var}(M_i)$
Type A	0.2	0.0225	0.021	0.024
Type B	0.5	0.0100	0.035	0.043

Les résidences sont classées aussi selon leur valeur. La répartition des contrats selon le type et la valeur de la résidence est la suivante :

	Valeur $= c_i = 200$	Valeur $= c_i = 300$	Total
Type A	3000	6000	9000
Type B	7000	4000	11 000
Total	10 000	10 000	20 000

Tous les contrats sont supposés indépendants. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. $S_{20\ 000} = X_1 + ... + X_{20\ 000}$.

(a) Calculer $E[S_{20\ 000}]$ et $\text{Var}(S_{20\ 000})$.

(b) Évaluer $VaR_{0.99}\left(S_{20\ 000}\right)$ à l'aide de l'approximation normale.

11. Un lundi 30 janvier, à 21h42, dans les bureaux de la compagnie ABC. Atmosphère tendue. Héloïse et Abélard doivent remettre le lendemain tôt en matinée les résultats pour les $n = 25$ sinistres relatifs à des incendies survenus l'année précédente mais dont on ne connaît pas encore les montants. Le montant du sinistre i est représenté par la v.a. B_i, $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. B_1,...,B_n sont indépendantes. Héloïse propose que $B \sim LN\left(2.08, 0.83^2\right)$. Ils définissent $S_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$. Abélard suggère d'approximer la distribution de S_n par la distribution de T où la v.a. $T \sim LN\left(\gamma, \varphi^2\right)$. Les valeurs de γ et φ sont calculées de telle sorte que $E\left[S_n\right] = E\left[T\right]$ et $\text{Var}\left(S_n\right) = \text{Var}\left(T\right)$.

(a) Calculer $E\left[S_n\right]$ et $\text{Var}\left(S_n\right)$.

(b) Calculer γ et φ.

(c) Utiliser l'approximation proposée pour évaluer $VaR_{0.99}\left(S_n\right)$ et $TVaR_{0.99}\left(S_n\right)$. (i.e. on approxime $VaR_{0.99}\left(S_n\right)$ par $VaR_{0.99}\left(T\right)$ et $TVaR_{0.99}\left(S_n\right)$ par $TVaR_{0.99}\left(T\right)$).

12. Deux contrats d'assurance maladie avec une durée de converture d'un an sont émis. Soit la v.a. X_i représentant le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour l'assuré i. La probabilité qu'au moins une réclamation se produise est de $q_i = 0.05i$ $(i = 1, 2)$. Si au moins une réclamation se produit, le montant total B_i (en milliers \$) obéit à une loi $Ga(2i, \beta = 1)$ $(i = 1, 2)$. Pour chaque i $(i = 1, 2)$, les v.a. I_i et B_i sont indépendantes. Les v.a. B_i $(i = 1, 2)$ sont indépendantes. On définit $S_2 = X_1 + X_2$.

(a) On suppose que les v.a. I_i $(i = 1, 2)$ sont indépendantes.

i. Calculer $E[S_2]$ et $\text{Var}\left(S_2\right)$.

ii. Calculer $\Pr(S_2 = 0)$, $\Pr(S_2 \leq 2)$ et $\Pr(S_2 > 4)$.

iii. Calculer $\Pr\left(X_1 = 0, X_2 \leq 4\right)$ et $\Pr\left(X_1 > 2, X_2 \leq 4\right)$.

(b) On suppose que $\Pr(I_1 = 1, I_2 = 1) = 0.04$.

i. Calculer $E[S_2]$ et $\text{Var}\left(S_2\right)$.

ii. Calculer $\Pr(S_2 = 0)$, $\Pr(S_2 \leq 2)$ et $\Pr(S_2 > 4)$.

iii. Calculer $\Pr\left(X_1 = 0, X_2 \leq 4\right)$ et $\Pr\left(X_1 > 2, X_2 \leq 4\right)$.

13. Les coûts totaux pour un portefeuille de n contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où la v.a. X_i = coûts pour le contrat i $(i = 1, 2, ..., n)$. Les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n sont i.i.d. avec $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$ où $E\left[X\right] = 2000$ et $\text{Var}\left(X\right) = 6000^2$. La compagnie d'assurance IARD possède beaucoup de capital. Afin

d'augmenter sa part de marché, elle décide de charger une prime $\pi_i = 1000$ pour $i = 1, ..., n$ et de financer cette réduction de prime par l'allocation au portefeuille d'un capital $u = 1\ 000\ 000$. La probabilité de ruine au cours de la prochaine année pour le portefeuille est $\psi_n(u) = \Pr(S_n > u + \sum_{i=1}^{n} \pi_i)$.

(a) En utilisant l'approximation normale, évaluer $\psi_{1600}(u)$.

(b) En utilisant l'approximation normale, déterminer le nombre n de contrats de telle sorte que $\psi_n(u) = 50\ \%$.

(c) En utilisant l'approximation normale, déterminer $\lim_{n\to\infty} \psi_n$.

(d) D'après la réponse obtenue en (c), qu'advient-il pour les activités du portefeuille si la compagnie vend un nombre trop important de contrats ? Expliquer brièvement pourquoi.

14. Une compagnie d'assurance veut émettre n contrats d'assurance responsabilité médicale. On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour le contrat i, avec $X_1 = (1+R)Y_1$, ..., $X_n = (1+R)Y_n$, où $Y_i \sim BComp(1, 0.2; F_{B_i})$, où $B_i \sim Exp(\frac{1}{10})$, $i = 1, ..., n$. L'actuaire croit que les coûts encourus pour tous les contrats vont être multipliés par le même facteur $(1+R)$ pour la prochaine année, où R est une v.a. discrète avec $\Pr(R = 0.1) = 0.7$ et $\Pr(R = 0.3) = 0.3$. Les v.a. Y_1, ..., Y_n, R sont indépendantes. Le montant total des coûts pour le portefeuille est défini par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Pour $n = 4$, calculer $\Pr(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 \leq 20, X_4 \leq 20)$.

(b) Pour $n = 2$, calculer $\Pr(S_n \leq 20)$.

(c) Pour $n = 100$, calculer $\Pr(S_n \leq 300)$ en utilisant l'approximation normale de façon appropriée.

15. On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance automobile aux particuliers et assurance habitation aux particuliers. On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.

Informations utiles :

- Assurance habitation : Modèle fréquence-sévérité pour les coûts pour un contrat. Le montant d'un sinistre est en multiple de 1000.

Classe	Nb	$E[M]$	$\mathrm{Var}(M)$	$E[B]$	$\mathrm{Var}(B)$	$E[X]$	$\mathrm{Var}(X)$
1	600	0.02	0.02×0.98	100	3300	2	69.92
2	400	0.04	0.04×0.96	150	7500	6	311.52

- Assurance automobile : Modèle fréquence-sévérité pour les coûts pour un contrat.

Classe	Nb	$E[M]$	Var (M)	$E[B]$	Var (B)	$E[X]$	Var (X)
1	600	0.02	0.02	20	500	0.4	18
2	900	0.04	0.04	10	200	0.4	12

L'actuaire veut établir le capital économique pour chaque ligne d'affaires et pour le portefeuille en entier. Il utilise l'approximation normale.

(a) Calculer le capital économique pour chaque ligne d'affaires en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 95$ %. Refaire le calcul avec la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 95$ %.

(b) Calculer le capital économique pour le portefeuille en entier en ayant recours à la mesure VaR avec $\kappa = 95$ %. Refaire le calcul avec la mesure $TVaR$ avec $\kappa = 95$ %.

16. Une compagnie d'assurance veut émettre des contrats d'assurance automobile. On définit par la v.a. X_i le montant qui peut être réclamé au cours de la prochaine année pour l'assuré i, où $i = 1, ..., n$ (Note : X_i peut être nulle). Les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes mais elles ne sont pas identiquement distribuées. Soient les nombres positifs a, b, c, d fixés (tels que $a \leq b$ et $c \leq d$). On suppose que $a \leq E[X_i] \leq b$ et $c \leq \text{Var}[X_i] \leq d$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$. La prime chargée pour chaque contrat i est $\pi_i = (1 + \theta)E[X_i]$ pour $i = 1, ..., n$. On définit $S_n = X_1 + ... + X_n$. Soit la probabilité de ruine $\psi_n(u)$ définie par

$$\psi_n(u) = P(S_n \geq \text{somme des primes} + u),$$

où u est le capital initial.

(a) Si $\theta > 0$, montrer que $\psi_n(0) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.

(b) Si $\theta < 0$, montrer que $\psi_n(0) \longrightarrow 1$ quand $n \longrightarrow \infty$.

17. On considère un portefeuille de contrats d'assurance temporaire 1 an dans une même région géographique. La répartition du portefeuille est donnée dans le tableau ci-dessous :

Classe j	$q^{(j)}$	$p^{(j)}$	$n^{(j)}$	$b^{(j)}$
1	0.004	0.996	3000	500
2	0.008	0.992	2000	200

Les contrats sont identiquement distribués au sein d'une même classe. Les probabilités de décès des assurés sont influencées par les conditions climatiques de la région. Les conditions climatiques de la région affectent l'ensemble du portefeuille et elles sont représentées par la v.a. $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$, où ($\theta_1$ = normales et θ_2 = mauvaises),

avec $\Pr(\Theta = \theta_1) = 0.8$ et $\Pr(\Theta = \theta_2) = 0.2$. On définit par $p^{(j)}$ la probabilité de survie dans les tables selon la classe j ($j = 1, 2$). Sachant que $\Theta = \theta_1$, la probabilité conditionnelle de survie pour un assuré de la classe j est $\left(p^{(j)}\right)^1$. Sachant que $\Theta = \theta_2$, la probabilité conditionnelle de survie pour un assuré de la classe j est $\left(p^{(j)}\right)^3$. Sachant les conditions climatiques, les contrats sont conditionnellement indépendants. Le montant total des sinistres pour le portefeuille est défini par la v.a. S. On utilise l'approximation normale de façon appropriée pour évaluer F_S.

(a) Calculer l'espérance de nombre de décès.

(b) Calculer l'espérance et la variance de S.

(c) Développer l'expression de la fonction de répartition de S et de son approximation.

(d) Évaluer la probabilité que le montant total des sinistres pour le portefeuille excède son espérance.

(e) Évaluer la $VaR_{0.99}(S)$, puis déterminer le capital économique associé au portefeuille.

(f) Évaluer la $TVaR_{0.99}(S)$, puis déterminer le capital économique associé au portefeuille.

18. On suppose que $n = 400$ contrats d'assurance temporaire 1 an sont émis à des assurés dont les durées de vie sont i.i.d.. Pour tous les contrats, la prestation de décès est de 20 000. La probabilité de décès est $q = 0.005$. Le montant total des prestations à la fin de l'année est représenté par la v.a. $S_{TOT}^{(n)}$. La compagnie a le choix entre deux primes calculées selon des stratégies de placement différentes.

Selon l'**approche A**, la prime pour chaque contrat est égale à $\pi_{(n)}^{(A)}$. On définit $\pi_{(n)}^{(A)} = \frac{1}{n} v \times (1+\theta)\, E\left[S_{TOT}^{(n)}\right]$, où $v = \mathrm{e}^{-0.04}$ et $\theta = 20\ \%$. En supposant que la compagnie investit le revenu total des primes dans un placement dont le rendement instantané est assuré à 4 % (ex : titres obligataires 1 an), $P^{(A)}$ représente la probabilité que la compagnie remplisse ses engagements. La valeur $V(0)$ de l'investissement au temps 0 est le revenu total des primes. Au temps 1, la valeur de l'investissement est $V(1)$, où $V(1) = \mathrm{e}^{0.04} \times V(0)$. On cherche $p^{(A)} = \Pr\left(S_{TOT}^{(n)} \leq V(1)\right)$.

D'après l'**approche B**, la prime pour chaque contrat est égale à $\pi_{(n)}^{(B)}$. La valeur de $\pi^{(n)}$ est définie par $\pi_{(n)}^{(B)} = \frac{1}{n} v \times (1+\theta)\, E\left[S_{TOT}^{(n)}\right]$, où $v = \mathrm{e}^{-E[R]}$ et $\theta = 20\ \%$. En supposant que la compagnie investit le revenu total de primes dans un fonds d'actions dont le rendement

instantané est une v.a. R (ex : fonds indiciel), $P^{(B)}$ est la probabilité que la compagnie remplisse ses engagements. On suppose que la v.a. $R = 0.3 - Y$, où $Y \sim Ga(\alpha = 1.523, \beta = 6.598)$. Au temps 0, la valeur de l'investissement est $V(0)$, qui correspond au revenu total des primes. La valeur de l'investissement au temps 1 est $V(1)$ où $V(1) = \mathrm{e}^R \times V(0)$. On cherche $p^{(B)} = \Pr\left(S_{TOT}^{(n)} \leq V(1)\right)$.

(a) Calculer $E\left[S_{TOT}^{(n)}\right]$, $\pi_{(n)}^{(A)}$, $\pi_{(n)}^{(B)}$.

(b) Calculer $p^{(A)}$ et $p^{(B)}$.

19. Les pertes totales pour le portefeuille d'une institution financière est définie par la v.a. $L = L_1 + L_2$ où L_1 correspond aux pertes pour les activités d'assurance et L_2 représente les pertes pour les activités bancaires.

Les pertes pour les activités d'assurance sont définies par $L_1 = S - P$ avec

- $S = \sum_{i=1}^{100} X_i = \sum_{i=1}^{100} 1000 \times I_i$: coûts totaux pour 100 contrats d'assurance vie temporaire 1 an avec une prestation de décès de 1000 (tous les assurés sont indépendants) ;
- $P = 5000$: montant total de primes pour financer les coûts d'assurance.

Les pertes pour les activités bancaires sont définies par $L_2 = D - T$ avec

- $D = 5000$: montant total des sommes à rembourser pour les certificats de dépôt ;
- $T = \sum_{i=1}^{6} Y_i = \sum_{i=1}^{6} 1000 \times J_i$: montant total des remboursements pour 6 prêts (tous les emprunteurs sont indépendants).

Hypothèses : $I_i \sim Bern\left(\frac{1}{20}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 100)$; $J_i \sim Bern\left(\frac{5}{6}\right)$ $(i = 1, 2, ..., 6)$; les v.a. I_1, ..., I_{100}, J_1, ..., J_6 sont indépendantes.

(a) Calculer $\Pr(L_1 > 0)$ et $\Pr(L_2 > 0)$. Interpréter ces deux probabilités.

(b) Indiquer les valeurs possibles que peut prendre la v.a. L.

(c) Calculer $\Pr(L = 1000k)$, pour $k = -6, -5, ..., -1, 0$.

(d) Calculer $\Pr(L > 0)$.

20. Pour la prochaine année, le marché est composé des compagnies d'assurance vie ABC et DEF, qui offrent des contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Pour la prochaine année, on prévoit que $2n$ nouveaux

assurés vont acheter des contrats d'assurance vie temporaire 1 an pour la première fois. Pour calculer les primes des contrats, les deux compagnies ont accès aux mêmes données, recueillies au cours de l'année précédente et présentées, selon la classe, dans le tableau suivant :

	Classe 1	Classe 2	Les deux classes
Nb de contrats	14 432	13 943	28 375
Nb de décès	124	351	475
Estimation de q	$\frac{124}{14432}$	$\frac{351}{13943}$	$\frac{475.0}{28375}$

Les classes sont basées sur des caractéristiques facilement observables et connues des deux compagnies lors de l'émission d'un contrat. Le paramètre q représente la probabilité de décès. Pour tous les $2n$ contrats, le montant de prestation est $b = 1000$. L'actuaire de la compagnie ABC charge des primes qui ne tiennent pas compte des caractéristiques observables. L'actuaire de la compagnie DEF charge des primes qui tiennent compte des caractéristiques observables. Pour les deux compagnies, la prime chargée est égale à 120 % de la prime pure. Tous les $2n$ nouveaux assurés demandent une évaluation aux deux compagnies d'assurance et choisissent la plus petite prime. Les $2n$ nouveaux assurés se répartissent également dans les deux classes. La probabilité de ruine pour la compagnie ABC (et DEF) est $\psi_n^{ABC}(u)$ (et $\psi_n^{DEF}(u)$) avec un surplus $u = 0$.

(a) Calculer les primes possibles qui peuvent être demandées par chaque compagnie d'assurance.

(b) Pour la compagnie ABC, calculer le revenu total de primes (motiver brièvement votre réponse). Quelle est la valeur (exacte) de $\psi_n^{ABC}(0)$ pour $n = 200$?

(c) Pour la compagnie DEF, calculer le revenu total de primes (motiver brièvement votre réponse). Quelle est la valeur (exacte) de $\psi_n^{DEF}(0)$ pour $n = 200$?

(d) Sans utiliser l'approximation normale, démontrer vers quelle limite tend $\psi_n^{ABC}(0)$ quand $n \to \infty$. Commenter brièvement votre résultat. Refaire pour $\psi_n^{DEF}(0)$.

21. On considère un portefeuille de 100 contrats d'assurance vie émis dans une région donnée. Pour tous les contrats, le montant de prestation est 10 000. On suppose que les temps des décès sont identiquement distribués et qu'ils sont affectés par les conditions climatiques. Les conditions climatiques sont représentées par la v.a. Θ où $\Theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$ avec $f_\Theta(\theta_1) = 0.8$ et $f_\Theta(\theta_2) = 0.2$. Les v.a. d'occurrence $I_1, ..., I_{100}$ sont définies de telle sorte que $\Pr(I_i = 1|\Theta = \theta_1) = 0.005$ et $\Pr(I_i = 1|\Theta = \theta_2) = 0.03$. De plus, sachant que $\Theta = \theta_j$, les v.a. $(I_1|\Theta = \theta_j), ..., (I_n|\Theta = \theta_j)$ sont conditionnellement indépendantes. On définit les coûts totaux pour le portefeuille par la v.a. S.

(a) Calculer $E[S]$ et $\text{Var}(S)$.

(b) Calculer $\Pr(S = 20\ 000)$.

(c) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

22. Soient les v.a. indépendantes X_1, ..., X_n représentant les coûts de n contrats d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. On suppose que $X_i \sim BNComp(r, q; F_B)$ où $r = 0,4$, $q = 0.8$, $B \sim Pa(2.1, 22\ 000)$, $i = 1, 2, ..., n$. La prime pour un contrat est égale à 120 % de l'espérance des coûts pour un contrat.

(a) Calculer la probabilité que les coûts pour un contrat soient nuls ainsi que l'espérance des coûts pour un contrat. (0.9146, 2000)

(b) On suppose que $n = 500$ contrats seront émis.

i. Déterminer le revenu total des primes pour le portefeuille.

ii. Calculer la probabilité que le montant de sinistre le plus élevé du portefeuille excède le revenu total des primes.

iii. Utiliser l'approximation pour les distributions *heavy tailed* pour évaluer approximativement $VaR_{0.9999}(S_n)$ où $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

3.16 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

(a) 0.06 et 0.19

(b) $\kappa = 0.25$: 0, 1000 et 2000 ; $\kappa = 0.995$: 5000, 5000 et 8000

(c) $\kappa = 0.25$: 2120.0, 1626.67, 3813.33 ; $\kappa = 0.995$: 5000 ; 5000 et 8800

2. Réponses à la question 2 :

(a) $r = 0.5n$, $q = \frac{5}{6}$

(b) 500 et $500n$

(c) 0.9836 et 1

(d) 0 et 14 184.01

(e) 95 586.21 et 211 586.3

(f) 1000 et 23 283.01

(g) 131 492 et 233 072

3. Réponses à la question 3 :

(a) 40, 320 000, 0.0014
(b) 800, 6 400 000, 0.0297

4. Réponses à la question 4 :

(a) 20
(b) 0.02, 0.0396, 0.3324, 0.0784
(c) 0.02, 0.0396, 0.0599, 0.0178

5. Réponses à la question 5 :

(a) 12, 0, 2400
(b) 2400, 20 000, 24 038.47
(c) $-20\,000$ et 455 961.53

6. Réponses à la question 6 :

(a) Pour un contrat ...
   i. 5 et 10 000
   ii. 0.995013 ; 0.995037 ; 0.995062
   iii. 0 ; 500
(b) Pour un portefeuille de $n = 1000$ contrats ...
   i. 5 et 10
   ii. Aucune réponse
   iii. 0.006738 ; 0.563917 ; 0.925608
   iv. 14.4044 et 16.3528
(c) -14.4044 et 483.6472

7. Réponses à la question 7 :

(a) On obtient :
   i. 1250 et 5 187 500
   ii. 0.8699 et 0.9361
   iii. 10 945.27 et 14 428.39
(b) On obtient les valeurs suivantes :
   i. 1250 et 687 500
   ii. 0.9592; 0.9986
   iii. 3884.84 et 4461.46
(c) On obtient les valeurs suivantes :
   i. 500 000 et 187 500

ii. 187 500, 0 et 187 500
iii. Aucune réponse

8. Réponses à la question 8 :

   (a) 2056.978299
   (b) 203 641.02 et 0.171675396
   (c) 0.474034178
   (d) 0, 0 et 0 ; 33 757.4581, 10 675.04556 et 3375.74581

9. Réponses à la question 9 :

   (a) 400 et 1 120 000
   (b) 0.980829

10. Réponses à la question 10 :

    (a) 55 580 et 8 049 450
    (b) 62 190.57177

11. Réponses à la question 11 :

    (a) 169.4402 et 1897.776
    (b) 5.100496 et 0.2529992
    (c) 295.6156 et 323.1212

12. Réponses à la question 12 :

    (a) On obtient :
        i. 0.5 et 2.13
        ii. 0.855, 0.8954 et 0.0492
        iii. 0.90882 et 0.01942
    (b) On obtient :
        i. 0.5 et 2.69
        ii. 0.89, 0.905175 et 0.058329
        iii. 0.92399 et 0.013261

13. Réponses à la question 13 :

    (a) 0.9937903
    (b) 1000
    (c) 1

(d) Aucune réponse

14. Réponses à la question 14 :

    (a) 0.5952829
    (b) 0.923708
    (c) 0.829875333

15. Réponses à la question 15 :

    (a) 671.293, 241.743, 816.235 et 303.1556
    (b) 713.494959 et 894.751464

16. Réponses à la question 17 :

    (a) 39.094643
    (b) 12 850.3002 et 58 340 308
    (c) Aucune réponse
    (d) 0.222600
    (e) 32 836.09 et 19 985.79
    (f) 34 202.82 et 21 352.52

17. Réponses à la question 18 :

    (a) 40 000, 115.29 et 111.97
    (b) 0.3233 et 0.6379

18. Réponses à la question 19 :

    (a) 0.3840 et 0.2632
    (b) Aucune réponse
    (c) $-6 : 0.001983$; $-5 : 0.012815$; $-4 : 0.040900$; $-3 : 0.085947$; $-2 : 0.133782$; $-1 : 0.164530$; $0 : 0.166532$
    (d) 0.3935112

19. Réponses à la question 20 :

    (a) 20.088, 10.3104 et 30.2088
    (b) 4017.6 et 0.5678931
    (c) 2062.08 et 0.2473173
    (d) Aucune réponse

20. Réponses à la question 21 :

(a) 10 000 et $10\ 000^2 \times 1.98$

(b) 0.105606107

(c) 60 000 et 69 216

21. Réponses à la question 22 :

(a) 0.9146, 2000

(b) On obtient les valeurs suivantes :

i. 1 200 000

ii. 0.010786

iii. 11 359 983

4

Principes de calcul de la prime majorée

4.1 Introduction

Soit une v.a. X représentant les coûts couverts par un contrat d'assurance et dont l'espérance est $E[X] < \infty$. Au chapitre 2, on a vu que la prime pure pour un contrat d'assurance correspond à l'espérance $E[X]$ des coûts associés à un contrat d'assurance. En 3.7.3, on a démontré l'importance de charger une prime, dite la prime majorée $\Pi(X)$, qui est strictement supérieure à la prime pure. Le principe de calcul de la prime majorée est une règle visant à calculer cette prime pour un contrat d'assurance. Dans le calcul de la prime pure et de la prime majorée, on ignore les marges pour dépenses et les marges pour le profit.

Dans ce chapitre, on présente les propriétés désirables pour les principes de prime et on expose ensuite les principes de calcul de la prime majorée. On termine avec des exemples numériques.

4.2 Propriétés désirables d'un principe de calcul de la prime majorée

Dans cette section, on présente les principales propriétés désirables pour les principes de calcul de la prime majorée. La liste n'est pas exhaustive.

Propriété 4.1 ***Marge de sécurité positive (P1).*** *Selon ce principe, la prime majorée doit être supérieure à la prime pure* $\Pi(X) \geq E[X]$.

Comme il est démontré à la section 3.7.3, la prime majorée doit inclure une marge de sécurité positive pour éviter l'insolvabilité.

Propriété 4.2 ***Exclusion de marge de sécurité non justifiée (P2).*** *Pour une constante $a > 0$, on dit avoir $\Pi(a) = a$.*

La prime ne doit pas inclure de marge injustifée dans le cas où les coûts pour un contrat correspondent à une valeur constante, puisque le contrat ne comporte pas de risque.

Propriété 4.3 ***Additivité (P3).*** *Soient X_1, X_2 deux risques indépendants. On doit avoir $\Pi(X_1 + X_2) = \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.*

Lorsque ce principe est satisfait, il n'y pas d'avantage (ou désavantage) pour un assuré ou pour la compagnie d'assurance à segmenter le risque couvert en plusieurs composantes de risque.

Propriété 4.4 ***Sous-additivité (P4).*** *Soient X_1, X_2 deux risques. On doit avoir $\Pi(X_1 + X_2) \leq \Pi(X_1) + \Pi(X_2)$.*

Ce principe prévient qu'un individu ou une compagnie d'assurance partage un risque en deux et qu'il en tire avantage. De plus, la mutualisation des coûts de plusieurs contrats doit conduire à une réduction des primes demandées pour l'ensemble des contrats.

Propriété 4.5 ***Invariance d'échelle (P5).*** *Pour une constante $a > 0$, on dit avoir $\Pi(aX) = a\Pi(X)$.*

Le changement d'échelle (e.g. changement d'unité monétaire) ne doit pas avoir d'impact sur la valeur de la prime. Cette propriété est aussi appelée la propriété d'homogénéité.

Propriété 4.6 ***Invariance à la translation (P6).*** *Pour une constante $a > 0$, on dit avoir $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$.*

Si l'on augmente les coûts associés au risque d'une constante, on s'attend à ce que la prime augmente d'un montant identique.

Propriété 4.7 ***Maximum (P7).*** *Si les coûts associés à un contrat ne peuvent excéder une valeur $x_{\max}$, alors on doit avoir $\Pi(X) \leq x_{\max}$.*

Si les coûts pour un contrat n'excède pas un montant $x_{\max}$, il serait injustifié que la prime majorée soit supérieur à ce montant.

4.3 Principaux principes de calcul de prime

Dans cette section, on aborde les principaux principes de calcul de la prime majorée. La prime majorée, notée $\Pi(X)$, s'exprime comme la somme de la prime pure et de la marge pour le risque i.e. $\Pi(X) = PP(X) + MR(X)$.

4.3.1 Principe de la valeur espérée

On définit la prime majorée $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = (1+\kappa)\, E(X) = E(X) + \kappa E(X)$, où $\kappa > 0$, pour éviter la ruine certaine. On en déduit que la marge de sécurité $MR(X)$ est égale à $\kappa E(X)$. Le principe de la valeur espérée satisfait aux propriétés P1, P3, P4, P5. La propriété P2 n'est pas satisfaite. En effet, si $X = a$, alors $\Pi(X) = \Pi(a) = (1+\eta)\, a > a$. De plus,

$$\Pi(X+a) = (1+\eta)\, E[X] + (1+\eta)\, a > \Pi(X) + a,$$

ce qui implique que la propriété P6 n'est pas rencontrée. Ainsi, le principe est invariant au changement d'échelle (P5) mais n'est pas consistant (P6). La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max}}{E[X]} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$. Ce principe a pour inconvénient de ne pas tenir compte de la variabilité et de la nature spécifique de la v.a. X. Le principe est très simple d'application.

4.3.2 Principe de la variance

On définit $\Pi(X)$ par $\Pi(X) = E(X) + \kappa \mathrm{Var}(X)$, où $\kappa > 0$. Dans ce cas, la prime de sécurité $MR(X)$ est égale à $MR(X) = \kappa \mathrm{Var}(X)$. Les propriétés P1, P2, P3 et P6 sont satisfaites. La principe de la variance est additif dans le cas de risques X_1 et X_2 non corrélés. Le principe est sous-additif à la condition que les risques X_1 et X_2 soient négativement corrélés. Comme on a

$$\Pi(aX) = aE[X] + \kappa a^2 \mathrm{Var}(X) \neq a\Pi(X),$$

le principe de la variance n'est pas invariant au changement d'échelle. La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max} - E[X]}{\mathrm{Var}(X)} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$.

4.3.3 Principe de l'écart type

La prime majorée est obtenue avec $\Pi(X) = E(X) + \kappa\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, où $\kappa > 0$. La marge de sécurité est donnée par $MR(X) = \kappa\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. On se doit de préciser que la valeur de κ change avec le principe de prime et également du nombre de contrats que l'assureur prévoit émettre. Les propriétés P1, P2 et P6 sont satisfaites. La principe de l'écart type n'est pas additif et n'est pas sous-additif. Puisque l'on a

$$\Pi(aX) = aE[X] + \kappa a\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = a\Pi(X),$$

le principe de l'écart type est invariant au changement d'échelle. La propriété P7 est satisfaite si κ n'excède pas $\frac{x_{\max} - E[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} - 1$, pour $x_{\max} < \infty$.

4.3.4 Principe de la VaR

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe de la VaR par $\Pi(X) = VaR_\kappa(X)$, où κ est élevé (e.g.$\kappa = 95$, 99, 99.5, 99.9 %). La marge de sécurité $MR(X)$ est définie par $MR(X) = VaR_\kappa(X) - E(X)$. Les propriétés 2, 5, 6 et 7 sont satisfaites. Comme on le sait, la VaR n'est pas une mesure sous-additive et par le fait même elle n'est pas additive. Pour certaines valeurs de κ, on a $VaR_\kappa(X) \leq E[X]$, ce qui conduit à introduire une marge de sécurité négative.

4.3.5 Principe de la TVaR

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe de la TVaR par $\Pi(X) = TVaR_\kappa(X)$, où κ est élevé (e.g.$\kappa = 95$, 99, 99.5, 99.9 %). La marge de sécurité $MR(X)$ est définie par $MR(X) = TVaR_\kappa(X) - E(X)$. Toutes les propriétés sont satisfaites.

4.3.6 Approche top-down et principes adaptés de la VaR et de la TVaR

Dans les principes de la VaR et de la TVaR, on ne tient pas compte du nombre de contrats potentiels qui peuvent être émis. En se basant sur l'approche *top-down*, on adapte ces deux principes en déterminant la prime globale pour n risques que l'on répartit ensuite parmi les n risques. Lorsque les risques sont identiquement distribués, cela revient à appliquer les principes de la VaR ou de la TVaR avec la v.a. W_n plutôt que sur la v.a. X seulement où $W_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$, où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont identiquement distribuées $X_1 \sim ... \sim X_n \sim X$. L'expression de la prime majorée $\Pi(X)$ est donnée par $\Pi(X) = VaR_\kappa(W_n)$ ou $\Pi(X) = TVaR_\kappa(W_n)$, où κ est élevé (e.g.$\kappa = 95$, 99, 99.5, 99.9 %).

La prime calculée avec $VaR_\kappa(W_n)$ satisfait les propriétés 2, 5, 6 et 7, et la prime obtenue à l'aide de $TVaR_\kappa(W_n)$ satisfait à toutes les propriétés. Notamment, elle profite de façon significative de la mutualisation des risques. L'économie qui résulte de la mutualisation est $TVaR_\kappa(W_n) - TVaR_\kappa(X)$.

4.3.7 Principe exponentiel

On obtient le montant de la prime majorée $\Pi(X)$ selon le principe exponentiel par $\Pi(X) = \frac{1}{\kappa} \ln\{M_X(\kappa)\}$ avec $\kappa > 0$. Le principe exponentiel satisfait à toutes les propriétés désirables.

4.3.8 Lien entre le principe de la variance et le principe exponentiel

Le développement du logarithme de la f.g.m. est

$$\ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right] = \sum_{m=1}^{\infty} \kappa_m \frac{t^m}{m!},$$

où les termes κ_m sont appelés les cumulants. Les termes κ_m sont définis par

$$\kappa_m = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} \ln E\left[\mathrm{e}^{tX}\right]\Big|_{t=0}.$$

On déduit que $\kappa_1 = E[X]$ et $\kappa_2 = \mathrm{Var}(X)$. On peut approximer la prime calculée selon le principe exponentiel par

$$\Pi(X) = \frac{1}{a} \ln E\left[\mathrm{e}^{aX}\right] \simeq \frac{1}{a}\left(aE[X] + \frac{a^2}{2!}\mathrm{Var}(X)\right) = E[X] + \frac{a}{2!}\mathrm{Var}(X),$$

et on reconnaît le principe de la variance.

4.4 Exemple

On illustre les principes de la section 4.3 dans l'exemple suivant.

Exemple 4.8 *On suppose que* $X \sim BNComp(r, q; F_B)$ *avec* $B \sim Exp(\beta)$ *et*

$$E\left[\mathrm{e}^{aX}\right] = \left(\frac{q}{\left(1-(1-q)\left(\frac{\beta}{\beta-a}\right)\right)}\right)^r.$$

Pour $r = 0.2$, $q = 0.5$ *et* $\beta = \frac{1}{1000}$, *on déduit que* $E[X] = 200$ *et* $\mathrm{Var}(X) = 600\,000$. *La prime pure est 200. Les valeurs de primes majorées selon les différents principes sont fournies dans le tableau suivant :*

Principes	$\Pi(X)$
Valeur espérée ($\kappa = 0.2$)	*240*
Écart type ($\kappa_1 = 0.2$)	*256.98*
Écart type ($\kappa_2 = 0.2$)	*265.28*
Variance ($\kappa = 0.00005$)	*230*
Exponentiel ($\kappa = 0.0001$)	*235.57*
VaR ($\kappa = 0.99$)	*4001.34*
TVaR ($\kappa = 0.99$)	*5679.49*

Les valeurs calculées selon les principes de la VaR et TVaR sont exactes. Le principe adapté de la VaR *avec* $n = 1000$ *et* $\kappa = 0.99$ *donne* $\Pi(X) = VaR_{0.99}(W_{1000}) = 260.3677$ *(valeur exacte) et le principe adapté de la* $TVaR$ *avec* $n = 1000$ *et* $\kappa = 0.99$ *mène à une prime majorée* $\Pi(X) = TVaR_{0.99}(W_{1000}) = 270.0610$ *(valeur exacte). Pour le principe de l'écart type, le paramètre* κ_1 *(ou* κ_2*) a été calculé en appliquant le principe adapté de la VaR (ou TVaR) où l'on évalue* $VaR_{0.99}(W_{1000})$ *(ou* $TVaR_{0.99}(W_{1000})$*) conjointement avec l'approximation normale. Selon les valeurs obtenues, les valeurs de primes calculées selon le principe de la variance et le principe exponentiel sont semblables. La disparité entre les valeurs produites avec ces deux principes augmentent avec le paramètre a. Il est intéressant de comparer les valeurs exactes et approximatives (avec l'approximation normale) de la prime majorée selon le principe adapté de la VaR (ou de la TVaR). Enfin, l'économie due à la mutualisation par contrat selon la TVaR est significative puisque* $TVaR_{0.99}(X) - TVaR_{0.99}(W_{1000}) = 5679.490 - 270.0610 = 5409.429$. □

4.5 Notes bibliographiques

Pour un exposé général et classique sur les principes de primes, on peut consulter [52]. On trouve une introduction récente sur le sujet dans [109]. Les principes de primes sont aussi traités dans [63] et [93].

4.6 Exercices

1. Pour la prochaine année, on suppose que 100 contrats d'assurance automobile seront vendus par une compagnie d'assurance IARD. Les coûts pour un contrat d'assurance automobile (v.a. X) sont modélisés selon l'approche fréquence-sévérité. Le nombre de sinistres obéit à une loi binomiale négative avec $r = 0.5$ et $q = \frac{1}{3}$. Le montant d'un sinistre obéit à une loi exponentielle de moyenne 1000. Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a. $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$ où les v.a. X_1, ..., X_{100} sont i.i.d. (convention : $X_i \sim X$ pour $i = 1, 2, ..., 100$). De plus, on définit $W_n = \frac{S_n}{n}$ pour $n = 100$.

   (a) Pour un contrat, calculer la prime $P^{(A1)}$ déterminée selon le principe basé sur la $VaR_{0.99}(X)$ et la prime $P^{(A2)}$ déterminée selon le principe basé sur la $TVaR_{0.99}(X)$.

   (b) Pour un portefeuille de 100 contrats, calculer la prime $P^{(B1)}$ déterminée selon la version adaptée du principe basé sur la $VaR_{0.99}(W_{100})$.

(c) Pour un portefeuille de 100 contrats, calculer la prime $P^{(A2)}$ déterminée selon la version adaptée du principe basé sur la $TVaR_{0.99}\left(W_{100}\right)$.

(d) Expliquer brièvement la distinction entre $P^{(A1)}$, $P^{(A1)}$, $P^{(B1)}$ et $P^{(B2)}$.

2. On considère les coûts pour un contrat d'assurance collective, définis par la v.a. $X \sim BNComp\left(r, q; F_B\right)$, avec $r = 5$, $q = \frac{1}{5}$ et $B \sim Ga(2, \frac{1}{5000})$. La prime pour le contrat est $\Pi_\kappa\left(X\right) = TVaR_\kappa(X)$. On décompose la prime $\Pi_\kappa\left(X\right)$ sous la forme

$$\Pi_\kappa\left(X\right) = \Pi^{(1)}\left(X\right) + \Pi_\kappa^{(2)}\left(X\right) + \Pi_\kappa^{(3)}\left(X\right),$$

où

$$\begin{aligned}
\Pi^{(1)}\left(X\right) &= E\left[X\right] \\
\Pi_\kappa^{(2)}\left(X\right) &= \frac{E_M\left[\mathrm{Var}\left(X|M\right)\right]}{\mathrm{Var}\left(X\right)}\left(TVaR_\kappa(X) - E\left[X\right]\right) \\
\Pi_\kappa^{(3)}\left(X\right) &= \frac{\mathrm{Var}_M\left(E\left[X|M\right]\right)}{\mathrm{Var}\left(X\right)}\left(TVaR_\kappa(X) - E\left[X\right]\right).
\end{aligned}$$

et $M \sim BN\left(r, q\right)$ est la v.a. de fréquence.

(a) Calculer $E\left[X\right]$ et $\mathrm{Var}\left(X\right)$.

(b) Calculer $F_X\left(x\right)$ pour $x = 500\,000$ et $600\,000$.

(c) Calculer $\Pi_{0.99}\left(X\right)$.

(d) Calculer $\Pi^{(1)}\left(X\right)$, $\Pi_{0.99}^{(2)}\left(X\right)$ et $\Pi_{0.99}^{(3)}\left(X\right)$.

(e) Expliquer brièvement ce que représente chacune des composantes $\Pi^{(1)}\left(X\right)$, $\Pi_\kappa^{(2)}\left(X\right)$ et $\Pi_\kappa^{(3)}\left(X\right)$ de la prime $\Pi_\kappa\left(X\right)$.

4.7 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

   (a) 9318.72 et 12 045.53

   (b) 1512.11

   (c) 1599.51

2. Réponses à la question 2 :

   (a) 0.9882 et 0.9974

   (b) 577 261.9

   (c) 200 000, 34 296.536 et 342 965.364

5
Méthodes de simulation stochastique

5.1 Introduction

Les méthodes de simulation stochastique s'avèrent un outil crucial en actuariat et en gestion quantitative des risques. Pour plusieurs modèles de risque, il est impossible de connaître la forme exacte de la distribution du montant total pour le portefeuille d'une compagnie d'assurance. L'objectif de ce chapitre est de présenter une introduction aux méthodes de simulation stochastique. On commence en abordant brièvement la génération de nombres pseudo-aléatoires. On explique ensuite comment procéder pour simuler des réalisations par la méthode inverse, des réalisations à partir d'une loi définie par un mélange et des réalisations à partir d'une loi composée. On fournit des exemples d'application en actuariat. On termine en expliquant la procédure pour évaluer les mesures de risque. Des algorithmes de simulation pour des vecteurs de v.a. avec composantes dépendantes sont fournis aux chapitres 8 et 9.

5.2 Génération de nombres pseudo-aléatoires

Les méthodes de simulation stochastique sont fondées sur la possibilité de produire de façon systématique des réalisations de la loi uniforme standard. Ces réalisations sont appelées des «nombres pseudo-aléatoires» et elles sont produites à l'aide de générateurs de nombres pseudo-aléatoires (GNPA).

L'objectif d'un bon GNPA est d'imiter le plus fidèlement possible la réalisation d'une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme standard. Il est souhaitable que le GNPA soit rapide, qu'il soit facile d'implantation et que les suites générées de nombres pseudo-aléatoires soient reproduisibles. Il doit y avoir un bon compromis entre vitesse, bonnes propriétés statistiques et imprévisibilité.

Le GNPA classique est le générateur congruentiel linéaire défini dans l'algorithme suivant.

Algorithme 5.1 ***GNPA congruentiel linéaire.*** *Le GNPA congruentiel linéaire est défini par la relation récurrente*

$$x_n = (ax_{n-1}) \bmod m,\ n \in \mathbb{N}^+,$$

où a et m sont des entiers positifs choisis soigneusement et x_0 est la valeur source. La n-ième réalisation de la v.a. $U \sim U(0,1)$ est obtenue avec $U^{(n)} = \frac{x_n}{m}$ pour $n \in \mathbb{N}^+$. Il est recommandé d'utiliser les valeurs $a = 41\ 358$ et $m = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$.

Remarque 5.2 *Les valeurs $a = 41\ 358$ et $m = 2^{31} - 1 = 2\ 147\ 483\ 647$ indiquées dans l'algorithme 5.1 sont recommandées par [71]. Elles ont été choisies afin de permettre une période maximale de cycle avant que la suite produite par le GNPA revienne à son point de départ.*

On considère l'exemple suivant.

Exemple 5.3 *En utilisant le GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec $x_0 = 343\ 463\ 463$, on obtient les valeurs suivantes de $x_1, ..., x_4$ et de $U^{(1)}, ..., U^{(4)}$:*

j	1	2	3	4
x_j	1 505 061 496	1 519 843 273	831 737 044	587 608 106
$U^{(j)}$	0.700848874	0.707732175	0.387307743	0.273626347

□

Dans le cadre du présent livre, le GNPA défini à l'algorithme 5.1 sera utilisé dans certains exemples et exercices afin de permettre de reproduire et vérifier les résultats obtenus. Toutefois, la théorie sur les générateurs des nombres pseudo-aléatoires est beaucoup plus élaborée et son exposé dépasse le cadre de ce livre. Chaque logiciel possède son propre générateur de nombres uniformes. En `R`, la fonction `runif()` produit des réalisations de la loi uniforme standard. Pour cette fonction, le logiciel `R` utilise par défaut le générateur Mersenne-Twister qui est parmi les générateurs les plus recommandés actuellement. Il est important de mentionner que le logiciel `R` propose aussi d'autres GNPA pouvant être spécifiés dans cette fonction.

5.3 Méthodes de base

5.3.1 Simulation par la méthode inverse

La simulation de réalisations d'une v.a. repose sur l'utilisation de réalisations issues de la distribution uniforme standard. La méthode de base pour simuler des v.a. est la méthode dite *inverse*. Pour utiliser cette méthode, on a recours à la fonction inverse de la fonction de répartition, dite aussi la fonction quantile, d'une v.a. X, qui est définie au chapitre 1.

Dans l'algorithme suivant, on décrit la méthode pour simuler une réalisation $X^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de la v.a. X dont la fonction de répartition est $F_X(x)$.

Algorithme 5.4 ***Méthode inverse.***

1. ***Étape 1.*** *On produit la réalisation $U^{(j)}$ de loi $U(0,1)$ à partir d'un GNPA.*

2. ***Étape 2.*** *On simule la réalisation $X^{(j)}$ de X où $X^{(j)} = F_X^{-1}\left(U^{(j)}\right)$.*

On répète les étapes 1 et 2 pour $j = 1, 2, ..., m$. □

L'algorithme 5.4 est fondée sur le théorème 1.19 de la fonction quantile (voir le chapitre 1 pour les détails sur les fonctions quantiles). L'algorithme est aisé d'application lorsque la fonction quantile est explicite comme il est illustré dans les deux exemples suivants.

Exemple 5.5 *Soit une v.a. $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{1000}\right)$ avec $F_X^{-1}(u) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-u)$. Avec 5 réalisations de la v.a. $U \sim U(0,1)$, on obtient les réalisations suivantes de la v.a. X :*

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.09727801	0.30285445	0.01541586	0.98764877	0.53034863
$X^{(j)}$	102.34065	360.76106	15.53592	4393.99927	755.76463

□

Exemple 5.6 *On suppose que la v.a. $X \sim Pa(2.1, 1100)$ avec $F_X^{-1}(u) = \lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$. À partir de 5 réalisations de la v.a. $U \sim U(0,1)$, on produit les réalisations suivantes de la v.a. X :*

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.09727801	0.30285445	0.01541586	0.98764877	0.53034863
$X^{(j)}$	54.934718	206.172573	8.168037	7814.603571	476.485653

□

Lorsque la fonction de répartition est explicite mais que la fonction quantile ne l'est pas, on peut utiliser un outil d'optimisation. Certains

logiciels (e.g. `R` et `Excel`®) fournissent les fonctions quantiles F_X^{-1} pour plusieurs distributions continues et discrètes.

Dans les prochaines sous-sections, on examine la simulation de v.a. définies par un mélange, de v.a. définie par une fonction d'un nombre fini de v.a. et de v.a. définie par une somme aléatoire.

5.3.2 Simulation de v.a. définies par un mélange

Soit une v.a. Θ discrète ou continue dite de mélange où $\Theta \in A_\Theta$. On définit une v.a. X dont la fonction de répartition conditionnelle de $(X \mid \Theta = \theta)$ est $F_{X|\Theta=\theta}$ et la fonction quantile de $(X \mid \Theta = \theta)$ par $F^{-1}_{X|\Theta=\theta}$. L'expression de la fonction de répartition de X est

$$F_X(y) = \begin{cases} \int\limits_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}(y)\, f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta, & \text{si } \Theta \text{ est continue,} \\ \sum_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}(y)\, f_\Theta(\theta), & \text{si } \Theta \text{ est discrète.} \end{cases}$$

Généralement, il n'y pas d'expression analytique de la fonction quantile de X. Les étapes permettant de simuler une réalisation de la v.a. X sont décrites dans l'algorithme suivant.

Algorithme 5.7 ***Simulation d'une v.a. définie avec un mélange.***

1. ***Étape 1.*** *On simule une réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de* Θ.
2. ***Étape 2.*** *On produit une réalisation* $X^{(j)}$ *de* X *avec la fonction quantile* $F^{-1}_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}$ *de la fonction de répartition conditionnelle de* $\left(X \mid \Theta = \Theta^{(j)}\right)$.

On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.

On illustre l'algorithme 5.7 dans l'exemple suivant.

Exemple 5.8 *Soit une v.a.* X *obéissant une distribution mélange d'exponentielle dont la fonction de répartition est donnée par*

$$F_X(x) = 0.2\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{100}x}\right) + 0.3\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{200}x}\right) + 0.5\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{300}x}\right) \quad (5.1)$$

que l'on réécrit sous la forme

$$F_X(x) = \sum_{\theta=1}^{3} f_\Theta(\theta)\, F_{X|\Theta=\theta}(x),$$

avec $(X \mid \Theta = \theta) \sim Exp\left(\frac{1}{100\theta}\right)$, $f_\Theta(1) = 0.2$, $f_\Theta(2) = 0.3$ *et* $f_\Theta(3) = 0.5$. *En utilisant le GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec* $x_0 = 20\ 120\ 303$, *on*

a produit les 3 réalisations suivantes de Θ *et de* X*:*

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$\Theta^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	*0.493284355*	*0.254340928*	*2*	*58.6974*
2	*0.032087844*	*0.089066452*	*1*	*9.3285*
3	*0.610318613*	*0.557198819*	*3*	*244.3903*

Par convention, on a regroupé par couple les réalisations produites par le GNPA, que l'on note $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$*. Ensuite, on produit* $\Theta^{(j)} = F_\Theta^{-1}\left(U_1^{(j)}\right)$ *et*

$$X^{(j)} = F^{-1}_{X|\Theta=\Theta^{(j)}}\left(U_2^{(j)}\right) = -\left(100\Theta^{(j)}\right)\ln\left(1-U_2^{(j)}\right),$$

pour $j = 1, 2, 3$*.* □

5.3.3 Simulation d'une fonction d'un nombre fini de v.a.

Soit une v.a. Z qui est définie en fonction des v.a. $X_1, ..., X_n$ i.e. $Z = \phi(X_1, ..., X_n)$. La forme explicite de la fonction de répartition F_Z ne peut être obtenue et on peut produire des réalisations de $X_1, ..., X_n$. La procédure pour simuler la réalisation j, $Z^{(j)}$ $(j = 1, ..., m)$, de la v.a. Z est décrite comme suit.

Algorithme 5.9 ***Simulation d'une fonction de v.a.***

1. ***Étape 1****. On simule les réalisations de* $\left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right)$ *de* $(X_1, ..., X_n)$*.*

2. ***Étape 2****. On évalue* $Z^{(j)} = \phi\left(X_1^{(j)}, ..., X_n^{(j)}\right)$*.*

On répète pour $j = 1, 2, ..., m$*.*

Un exemple de fonction intéressante pour analyser le comportement aléatoire du risque global d'un portefeuille d'assurance est $\phi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$.

5.3.4 Simulation de somme aléatoire

Soit X une v.a. définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où M est une v.a. discrète, $B_1, B_2, ...$ sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et qui sont aussi indépendantes de M.

La procédure pour produire des réalisations de X est la suivante.

Algorithme 5.10 ***Simulation à partir d'une somme aléatoire***

1. ***Étape 1.*** *On simule une réalisation* $M^{(j)}$ *de la v.a.* M.
2. ***Étape 2.*** *Si* $M^{(j)} = 0$, *alors* $X^{(j)} = 0$. *Sinon on passe à l'étape 3.*
3. ***Étape 3.*** *On simule* $M^{(j)}$ *réalisations de* B *et on obtient* $X^{(j)} = B_1^{(j)} + B_2^{(j)} + ... + B_{M^{(j)}}^{(j)}$.

On répète pour $j = 1, 2, ..., m$.

On illustre cette méthode dans le prochain exemple.

Exemple 5.11 *Soit une v.a.* $X \sim BNComp(r = 2, q = 0.5; F_B)$ *avec* $M \sim BN(2, 0.5)$ *et avec* $B \sim LN(4, 3^2)$. *On dispose des réalisations suivantes de loi uniforme standard :*

j	1	2	3	4
$U^{(j)}$	0.0371	0.6234	0.3469	0.8976

On déduit que $M^{(1)} = F_M^{-1}\left(U^{(1)}\right) = 0$, *ce qui implique* $X^{(1)} = 0$. *Ensuite, comme* $M^{(2)} = F_M^{-1}\left(U^{(2)}\right) = 2$, *il en résulte que*

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= B_1^{(2)} + B_2^{(2)} = F_B^{-1}\left(U^{(3)}\right) + F_B^{-1}\left(U^{(4)}\right) \\ &= 16.758 + 2450.342 = 2467.100. \end{aligned}$$

□

5.4 Principes généraux

Soit une v.a. X dont on parvient à produire m réalisations $X^{(1)}$, ..., $X^{(m)}$. L'approximation de $\theta = E[g(X)]$ d'une fonction intégrable de X est

$$\theta \simeq \widehat{\theta} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} g\left(X^{(j)}\right).$$

Par la loi des grands nombres, l'approximation $\widehat{\theta}$ converge vers θ avec probabilité 1 quand le nombre m de réalisations tend vers ∞.

Dans la figure 5.1, on illustre la convergence $\widehat{\theta}_m$ vers θ lorsque $g(x) = 1_{\{X \leq x\}}$ i.e $\theta = F_X(x)$ et $\widehat{\theta}_m =$ fonction de répartition empirique.

La variance de $\widehat{\theta}$ est

$$\text{Var}\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{1}{m}\text{Var}\left(g(X)\right).$$

En vertu du théorème central limite, l'erreur $\left(\widehat{\theta} - \theta\right)$ est approximativement normale avec moyenne 0 et écart type $\frac{\sqrt{\text{Var}(g(X))}}{\sqrt{m}}$, ce qui signifie que la

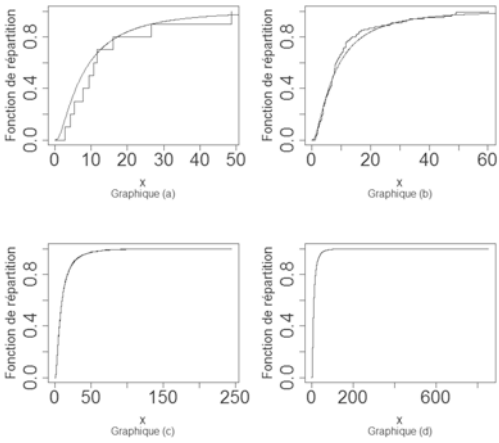

FIGURE 5.1. Valeurs de $F_X(x)$ (courbe) où $X \sim LN(2,1)$ et de $\widehat{\theta}_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{\{X^{(j)} \leq x\}}$ (escalier) pour $m = 10$ (graphique a), $m = 100$ (graphique b), $m = 1000$ (graphique c) et $m = 1\ 000\ 000$ (graphique d).

qualité de l'approximation obtenue par simulation s'améliore d'un facteur d'ordre $\sqrt{m}$. Le terme $\frac{\sqrt{\text{Var}(g(X))}}{\sqrt{m}}$ est habituellement appelé l'erreur standard. Dans le cas d'approximation numérique, cette amélioration est d'un facteur d'ordre m. Souvent, comme $\text{Var}(g(X))$ ne peut pas être évaluée avec exactitude, on l'estime à l'aide de l'estimateur échantillonnal classique

$$\widehat{\text{Var}}(g(X)) = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(g\left(X^{(j)}\right) - \widehat{\theta}\right)^2. \tag{5.2}$$

On se base sur la distribution asymptotique de l'erreur $\left(\widehat{\theta} - \theta\right)$ afin de construire un intervalle de confiance de niveau α (e.g. 95 %) pour $\widehat{\theta}$ dont les bornes sont fournies par

$$\widehat{\theta} \pm \frac{\sqrt{\text{Var}(g(X))}}{\sqrt{m}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Généralement, comme la valeur $\sqrt{\text{Var}(g(X))}$ ne peut pas être obtenue, on utilise (5.2) pour calculer les bornes de l'intervalle de confiance

$$\widehat{\theta} \pm \frac{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(g(X))}}{\sqrt{m}}\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

On met en pratique ces principes généraux dans le prochain exemple qui porte sur une somme de 2 v.a.

Exemple 5.12 *Soit une v.a.* $S = X_1 + X_2$ *où les v.a.* $X_1 \sim LN\left(6, 1^2\right)$ *et* $X_2 \sim Ga\left(0.6, 1/1000\right)$ *sont indépendantes. On utilise le GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec* $x_0 = 2012$*. On produit dans l'ordre* $m = 1\ 000\ 000$ *réalisations de* (X_1, X_2) *afin de produire les* m *réalisations de* S*. On indique dans le tableau ci-dessous les 2 premières réalisations de* (X_1, X_2) *et de* S *:*

j	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	*69.0344*	*416.8423*	*485.8767*
2	*418.63450*	*128.2339*	*546.8684*

On sait que $E[S] = 1265.1416$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 1\ 360\ 191$*. À partir des* m *réalisations, les approximations obtenues de* $E[S]$ *et* $\mathrm{Var}(S)$ *sont 1266.251 et 1 365 455. On indique ci-dessous les approximations obtenues pour*

$$\pi_S(2000k) = E[\max(S - 2000 \times k; 0)],$$

pour $k = 1, 2$ *ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :*

k	*borne inf.*	*approx.* $\pi_S(2000k)$	*borne sup.*	*erreur standard*
1	*210.8036*	*212.2769*	*213.7501*	*0.7517*
2	*45.6727*	*46.5121*	*47.3516*	*0.4283*

□

Le prochain exemple porte sur une somme aléatoire.

Exemple 5.13 *Soit la v.a.* $X \sim BNComp(r, q; F_B)$*, où le nombre de sinistres* $M \sim BN(r = 2, q = 0.25)$ *et le montant d'un sinistre* $B \sim LN\left(2, 1^2\right)$*. On obtient* $E[X] = 73.095$ *et* $\mathrm{Var}(X) = 5092.01$*. On utilise le GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec* $x_0 = 2012$ *dont les 15 premières réalisations sont : 0.03874874 ; 0.57059129 ; 0.51475679 ; 0.31126868 ; 0.45016136 ; 0.77352474 ; 0.43606789 ; 0.89568375 ; 0.68857085 ; 0.91326869 ; 0.96644073 ; 0.05564452 ; 0.34592826 ; 0.90081559 ; 0.93123886. On produit dans l'ordre les réalisations* $X^{(1)}$*, ...,* $X^{(100\ 000)}$ *de* X*. Pour* $j = 1, 2, 3$*, on obtient les réalisations suivantes de* $M^{(j)}$ *et* $X^{(j)}$*:*

j	$M^{(j)}$	$X^{(j)}$
1	*0*	*0*
2	*7*	$\sum_{k=1}^{7} B_k^{(2)} = 66.62456$
3	*6*	$\sum_{k=1}^{6} B_k^{(3)} = 143.69022$

Les approximations de $E[X]$ *et* $\mathrm{Var}(X)$ *sont 72.734 et 5070.965. On présente ci-dessous les approximations obtenues de* $\Pr(X > x)$ *ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance (avec un niveau de confiance de 95 %) de ces approximations :*

x	*borne inf.*	*approx.* $\Pr(X > x)$	*borne sup.*	*erreur standard*
100	*0.25785*	*0.26057*	*0.26329*	*0.001388*
200	*0.05818*	*0.05965*	*0.06112*	*0.000749*

Pour évaluer l'erreur standard de l'approximation $\widehat{\theta}$ *de* $\Pr(X > x) = E\left[1_{\{X>x\}}\right]$ *avec* $x = 100$ *et* 200*, on a utilisé (5.2) où* $g\left(X^{(j)}\right) = 1_{\left\{X^{(j)}>x\right\}}$.
□

5.5 Évaluation des mesures de risque

5.5.1 Méthode

Soit une v.a. X dont on a produit m réalisations $X^{(1)}$, ..., $X^{(m)}$. Une approximation de F_X est fournie à l'aide de la fonction de répartition empirique définie par

$$F^{(m)}(x) \simeq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} 1_{\left\{X^{(j)}\leq x\right\}}. \tag{5.3}$$

Puisque $F^{(m)}$ est une fonction de répartition associée à une distribution discrète, il en découle que l'approximation de $VaR_\kappa(X)$ est

$$VaR_\kappa(X) \simeq F^{(m)-1}(\kappa) = \inf\left\{X^{(j)}, i = 1, 2, ..., m\ ; F^{(m)}\left(X^{(j)}\right) \geq \kappa\right\}.$$

Soit le vecteur de réalisations classées en ordre croissant de X, que l'on note par $\left(X^{[1]}, ..., X^{[m]}\right)$. On fixe j_0 tel que $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$.

En utilisant les expressions (1.16) et (1.17) pour la mesure TVaR conjointement avec (5.3), l'approximation de $TVaR_\kappa(X)$ correspond à

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ \simeq\ & \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \times 1_{\left\{X^{(j)}>F^{(m)-1}(\kappa)\right\}}\right) \\ & + \frac{1}{1-\kappa}\left(F^{(m)-1}(\kappa)\left(F^{(m)}\left(F^{(m)-1}(\kappa)\right) - \kappa\right)\right) \\ \simeq\ & \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=j_0+1}^{m} X^{[j]} + X^{[j_0]}\left(F^{(m)}\left(X^{[j_0]}\right) - \kappa\right)\right). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Supposons que $m \times \kappa$ est un entier. Alors cet entier est j_0. Il en résulte que $\left(F^{(m)}\left(X^{[j_0]}\right) - \kappa\right) = 0$ et (5.4) devient

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &\simeq \frac{1}{m(1-\kappa)}\sum_{j=1}^{m} X^{(j)} \times 1_{\left\{X^{(j)}>X^{[j_0]}\right\}} \\ &= \frac{1}{m-j_0}\sum_{j=j_0+1}^{m} X^{[j]}, \end{aligned}$$

ce qui correspond à la moyenne des $m - j_0$ plus grandes réalisations de X. On note la similitude entre l'expression en (5.4) et celle en (3.4).

Dans le prochain exemple, on présente une application simple des résultats de cette section.

Exemple 5.14 *Soient les v.a. indépendantes* $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ *et* $X_2 \sim Pa\,(4, 300)$. *On définit* $S = X_1 + X_2$ *où* $E\,[S] = 200$ *et* $\mathrm{Var}\,(S) = 30\ 000$. *Dans le tableau ci-dessous, on fournit les réalisations de* $U_1 \sim U\,(0, 1)$ *et* $U_2 \sim U\,(0, 1)$ *à partir desquelles on a produit les réalisations de* X_1 *et* X_2 *:*

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	*0.260*	*0.018*	*30.111*	*1.365*	*31.476*
2	*0.003*	*0.536*	*0.300*	*63.489*	*63.789*
3	*0.627*	*0.550*	*98.618*	*66.284*	*164.902*
4	*0.965*	*0.238*	*335.241*	*21.094*	*356.335*
5	*0.832*	*0.909*	*178.379*	*246.212*	*424.591*
6	*0.590*	*0.931*	*89.160*	*285.341*	*374.501*

Les approximations de $F_S\,(400)$ *et* $E\,[\max\,(S - 350; 0)]$ *sont respectivement* $\frac{5}{6}$ *et* 17.571. *Ensuite, l'approximation de* $VaR_{0.75}\,(S)$ *est 374.501 et celle de* $TVaR_{0.75}\,(S) = 407.894$. *On rappelle que l'on doit produire un nombre important de simulations afin d'obtenir des approximations de qualité.* □

L'exemple suivant traite d'une application simple en gestion des risques financiers.

Exemple 5.15 *Un individu prévoit d'investir* $c_0 = 2000$ *au début de la présente année et* $c_1 = 1000$ *au début de la prochaine année dans un fonds mutuel. Les rendements instantanés pour les années 1 et 2 sont définis par les v.a. i.i.d.* R_1 *et* R_2 *où* $R_i \sim N\left(0.08, 0.3^2\right)$ *pour* $i = 1, 2$. *La valeur accumulée à la fin de l'année 2 est représentée par la v.a.* $V\,(2) = c_0 \mathrm{e}^{R_1+R_2} + c_1 \mathrm{e}^{R_2}$ *qui correspond à la somme de 2 v.a. dépendantes de loi lognormale. On déduit que* $E\,[V\,(2)] = c_0 E\left[\mathrm{e}^{R_1+R_2}\right] + c_1 E\left[\mathrm{e}^{R_2}\right] = 3701.199$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(V\,(2)) &= c_0^2 \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^{R_1+R_2}\right) + c_1^2 \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^{R_2}\right) \\
&\quad + 2c_0c_1 \mathrm{Cov}\left(\mathrm{e}^{R_1}\mathrm{e}^{R_2}, \mathrm{e}^{R_2}\right) \\
&= c_0^2 \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^{R_1+R_2}\right) + c_1^2 \mathrm{Var}\left(\mathrm{e}^{R_2}\right) \\
&\quad + 2c_0c_1 \left(E\left[\mathrm{e}^{R_1}\right] E\left[\mathrm{e}^{2R_2}\right] - E\left[\mathrm{e}^{R_1}\right] E\left[\mathrm{e}^{R_2}\right]^2\right)
\end{aligned}$$

et on obtient $\mathrm{Var}\,(V\,(2)) = 1\ 969\ 639$. *On définit la perte par rapport à l'espérance de la valeur de l'investissement à la fin de la deuxième année par la v.a.* $L = E\,[V\,(2)] - V\,(2)$ *où* $E\,[L] = 0$. *Dans le tableau ci-dessous, on fournit les réalisations de* $U_1 \sim U\,(0, 1)$ *et* $U_2 \sim U\,(0, 1)$ *à partir desquelles*

on produit les réalisations de R_1 *et* R_2 *:*

j	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$R_1^{(j)}$	$R_2^{(j)}$	$V(2)^{(j)}$	$L^{(j)}$
1	*0.260*	*0.018*	*-0.113*	*-0.549*	*1609.164*	*2092.035*
2	*0.003*	*0.536*	*-0.744*	*0.107*	*2170.688*	*1530.512*
3	*0.627*	*0.550*	*0.177*	*0.118*	*3811.497*	*-110.298*
4	*0.965*	*0.238*	*0.624*	*-0.134*	*4139.223*	*-438.023*
5	*0.832*	*0.909*	*0.369*	*0.480*	*6290.691*	*-2589.492*
6	*0.590*	*0.931*	*0.148*	*0.525*	*5610.677*	*-1909.477*

Les approximations de $F_{V(2)}(4000)$ *et* $E[\max(V(2) - 5000; 0)]$ *sont respectivement* $\frac{3}{6}$ *et* 316.895. *L'approximation de* $VaR_{0.75}(V(2))$ *est* 5610.677 *et celle de* $TVaR_{0.75}(V(2)) = 6064.020$. *D'après les réalisations de* L, *l'approximation de* $VaR_{0.95}(L)$ *est* 2092.035. *En ayant recours à la relation*

$$VaR_{0.95}(L) = E[V(2)] - VaR_{0.05}^{+}(V(2)),$$

on obtient aussi l'approximation de $VaR_{0.95}(L)$ *donnée par* $3701.199 - 1609.164 = 2092.035$. *Également, l'approximation de* $VaR_{0.5}(L)$ *via les réalisations de* L *est* -438.023 *et, en appliquant la relation* $VaR_{0.5}(L) = E[V(2)] - VaR_{0.5}^{+}(V(2))$, *elle est donnée par* $3701.199 - 4139.233 = -438.233$. □

5.5.2 Considérations pratiques

Prenons $\kappa = 0.99$. Si $m = 100$, alors les approximations de $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont $X^{[99]}$ et $X^{[100]}$ (la moyenne d'un seul terme). Si $m = 10\,000$, alors $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont respectivement $X^{[9900]}$ et

$$\frac{\sum_{j=9901}^{10\,000} X^{[j]}}{100}.$$

Si $m = 1\,000\,000$, alors $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$ sont respectivement $X^{[990\,000]}$ et

$$\frac{\sum_{j=990\,001}^{1\,000\,000} X^{[j]}}{10\,000}.$$

Ainsi, il faut produire un grand nombre de réalisations de X afin d'obtenir des approximations de qualité de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$. Plus la valeur de κ est élevée, plus le nombre de réalisations à produire pour obtenir une approximation de qualité de $VaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(X)$ doit être élevé.

Pour améliorer la qualité des approximations des mesures VaR et TVaR, on a deux options. La première consiste à produire un nombre m très élevé de réalisations. Cette option est limitée par la capacité de l'outil informatique et par le temps de calcul. Dans certains cas, il est possible de corriger cet inconvénient en améliorant l'efficacité du code informatique. La deuxième option est d'avoir recours à des méthodes de réduction de variance. L'option 2 permet d'améliorer la qualité de l'approximation VaR

et TVaR tout en se basant sur un nombre raisonnable de simulations. Les méthodes de réduction de la variance ne sont toutefois pas traitées dans le présent ouvrage.

5.5.3 Intervalle de confiance pour la mesure VaR

Parmi les approches qui existent pour établir un intervalle de confiance pour un quantile, on considère celle qui est fondée sur la loi binomiale.

Soit le vecteur de réalisations classées en ordre croissant de X, que l'on note par $\left(X^{[1]}, ..., X^{[m]}\right)$. On fixe j_0 tel que $F^{(m)-1}(\kappa) = X^{[j_0]}$. Le nombre $R_{m,\kappa}$ de réalisations qui sont inférieures ou égales à $X^{[j_0]}$ obéit à une loi binomiale de paramètres m et κ (i.e. $R_{m,\kappa} \sim Bin(m, \kappa)$). L'intervalle de confiance de niveau α est de la forme $\left(X^{[j_1]}, X^{[j_2]}\right)$, où $X^{[j_1]}$ et $X^{[j_2]}$ sont déterminées de telle sorte que

$$\Pr\left(X^{[j_1]} < VaR_\kappa(X) \leq X^{[j_2]}\right) = \Pr(j_1 < R_{m,\kappa} \leq j_2)$$

soient le plus près possible de α. Afin de déterminer les valeurs de j_1 et j_2 (et conséquemment les valeurs de $X^{[j_1]}$ et $X^{[j_2]}$) et si le nombre m de simulations est élevé, on approxime la loi binomiale par la loi normale et on calcule j_{diff} comme étant la valeur arrondie de $\left(\sqrt{\text{Var}(R_{m,\kappa})} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)$, où $\text{Var}(R_{m,\kappa}) = m \times \kappa \times (1 - \kappa)$. Ensuite, on fixe $j_1 = j_0 - j_{diff}$ et $j_2 = j_0 + j_{diff}$ et les bornes de l'intervalle de confiance sont $X^{[j_0 - j_{diff}]}$ et $X^{[j_0 + j_{diff}]}$.

Exemple 5.16 ***(Suite de l'exemple 5.12).*** *Dans le tableau suivant, on fournit les approximations de $VaR_\kappa(S)$ obtenues pour $\kappa = 0.50, 0.95, 0.99$ et 0.999 accompagnées des bornes de leurs intervalles de confiance avec un niveau de 95 % :*

κ	*borne inférieure*	*approx. de* $VaR_\kappa(X)$	*borne supérieure*
0.5	$X^{[499\ 020]} = 932.4$	$X^{[500\ 000]} = 934.4$	$X^{[500\ 980]} = 936.4$
0.95	$X^{[949\ 573]} = 3413.8$	$X^{[950\ 000]} = 3424.1$	$X^{[950\ 427]} = 3433.9$
0.99	$X^{[989\ 805]} = 5504.6$	$X^{[990\ 000]} = 5534.9$	$X^{[990\ 195]} = 5561.2$
0.999	$X^{[998\ 938]} = 9713.5$	$X^{[999\ 000]} = 9852.1$	$X^{[999\ 062]} = 10\ 038.2$
0.9999	$X^{[999\ 880]} = 16\ 528.5$	$X^{[999\ 900]} = 17\ 417.4$	$X^{[999\ 920]} = 18\ 201.4$

Comme prévu, l'intervalle de confiance pour $VaR_{0.5}(X)$ est beaucoup plus étroit que celui de $VaR_{0.9999}(X)$. □

5.6 Notes bibliographiques

Pour un exposé sur les GNPA, on suggère e.g. [28], [49], [71], [72] et [95]. On peut consulter [40], [49] et [95] à propos des méthodes de simulation stochastique. Pour des applications de ces méthodes en actuariat et en gestion quantitative du risque, on suggère e.g. [23], [51] et [66].

5.7 Exercices

1. Soient les trois réalisations $U^{(1)} = 0.325$, $U^{(2)} = 0.743$, $U^{(3)} = 0.622$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$. Produire trois réalisations de la v.a. M où $E[M] = 2$ dans les trois cas suivants :

   (a) $M \sim BN(1,q)$.

   (b) $M \sim Pois(\lambda)$.

   (c) $M \sim B(n,q)$ et $\text{Var}(M) = \frac{4}{3}$.

2. Soient les trois réalisations $U^{(1)} = 0.325$, $U^{(2)} = 0.743$, $U^{(3)} = 0.622$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$. On veut simuler trois réalisations de la v.a. B ayant une moyenne de 250 et une variance de 80 000. Produire trois réalisations de B dans les deux cas suivants :

   (a) B obéit à une loi lognormale.

   (b) B obéit à une loi de Pareto.

3. Soit X une v.a. définie par $X = I \times B$, où $I \sim Bern(0.3)$ et $B \sim Exp(0.01)$. Utiliser les trois réalisations $U^{(1)} = 0.325$, $U^{(2)} = 0.743$, $U^{(3)} = 0.622$ de la v.a. $U \sim U(0,1)$ pour produire trois réalisations de la v.a. X.

4. Soit une v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où les v.a. X_1, ..., X_n sont i.i.d. avec $X_i \sim LN\left(9, 1^2\right)$. Pour $n = 5$, utiliser la simulation pour évaluer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.001, 0.01, 0.99, 0.999$. On utilise l'algorithme 5.1 ($x_0 = 343\,463\,463$) et on produit dans l'ordre 10 000 réalisations $\left\{\left(X_1^{(j)}, ..., X_5^{(j)}\right), j = 1, 2, ..., 10\,000\right\}$.

5. Soient les v.a. indépendantes X_1 et X_2 où $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$ et $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{200}\right)$. On définit les v.a. $S = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

   On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec $x_0 = 343\,463\,463$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de X_1 et 100 000 réalisations de X_2 afin de produire les 100 000 réalisations de S et de T. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont 120.6806 et 92.3277. On sait que $E[S] = 300$ et $E[T] = -100$. À partir des 100 000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont 299.6533 et -98.90123.

   À partir des réalisations de S et T et pour $\kappa = 0.001, 0.01, 0.05, 0.5, 0.95, 0.99, 0.999$, calculer des approximations des mesures de risque suivantes:

   (a) $VaR_\kappa(S)$;

   (b) $VaR_\kappa(T)$;

(c) $TVaR_\kappa(S)$;

(d) $TVaR_\kappa(T)$.

6. Le montant total des sinistres pour un portefeuille de 100 contrats d'assurance automobile est représenté par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, où $X_i \sim BNComp(r, q; F_B)$ avec $r = 0.05$, $q = \frac{1}{3}$ et $B \sim LN\left(6, 0.8^2\right)$ (pour $i = 1, 2, ..., 100$). On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec $x_0 = 2012$ afin de produire les $m = 10\,000$ réalisations de X et de S.

   (a) Pour un contrat ...

      i. calculer $X^{(10)}$ et $X^{(11)}$ (note : $X^{(1)} = ... = X^{(9)} = 0$) ;

      ii. calculer les valeurs exactes de $E[X]$ et $\text{Var}(X)$;

      iii. utiliser les m réalisations de X pour calculer des valeurs approximatives de $E[X]$ et $\text{Var}(X)$;

      iv. utiliser les m réalisations de X pour calculer une valeur approximative de $VaR_{0.99}(X)$ et $TVaR_{0.99}(X)$;

      v. utiliser les m réalisations de X pour calculer une valeur approximative de $E[\max(X - 1000; 0)]$.

   (b) Pour un portefeuille de 100 contrats ...

      i. indiquer la loi de S et utiliser cette loi pour produire les réalisations de S ;

      ii. calculer $S^{(2)}$ (note : $S^{(1)} = 880.672$) ;

      iii. calculer les valeurs exactes de $E[S]$ et $\text{Var}(S)$;

      iv. utiliser les m réalisations de S pour calculer des valeurs approximatives de $E[S]$ et $\text{Var}(S)$;

      v. utiliser les m réalisations de S pour calculer une valeur approximative de $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

7. Au début de chaque année k pendant n ans, un individu prévoit de verser une cotisation c_k dans un compte du fonds mutuel ABC. Le rendement pour l'année k est représenté par la v.a. R_k pour $k = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $R_1, ..., R_n$ sont i.i.d. avec $R_k \sim N\left(0.06, 0.2^2\right)$ pour $k = 1, 2, ..., n$. La valeur du fonds à la fin de l'année k est définie par la v.a. $V(k)$ avec $V(0) = 0$. On a la relation récursive suivante :

$$V(k) = (V(k-1) + c)\, e^{R_k},$$

pour $k = 1, 2, ..., n$. On définit la perte par $L = E[V(n)] - V(n)$.

(a) Démontrer que les moments $E\left[V_n^m(c_1,...,c_n)\right]$ satisfont à la relation récursive suivante :

$$\begin{aligned} & E\left[V_n^m(c_1,c_2,...,c_n)\right] \\ = \; & E\left[\mathrm{e}^{mR_n}\right] \times \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} c_n^{m-k} E\left[V_{n-1}^k(c_1,c_2,...,c_{n-1})\right], \end{aligned}$$

pour $m \in \mathbb{N}^+$ et pour $n \in \{2,3,...\}$.

(b) Pour $n = 5$ et $c_k = 2000$ $(k = 1,2,...,5)$, calculer $E\left[V(5)\right]$ et $\mathrm{Var}\left(V(5)\right)$.

(c) On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 et avec $x_0 = 2012$ afin de produire (dans l'ordre) $n = 100\ 000$ réalisations $\left(R_1^{(j)},...,R_5^{(j)}\right)$ $(j = 1,2,...,n)$ pour obtenir les réalisations $V(5)^{(j)}$ de $V(5)$. On a

$$\begin{aligned} & \left(R_1^{(1)},...,R_5^{(1)}\right) \\ = \; & (-0.293079, 0.095576, 0.067400, -0.038451, 0.034949\}) \end{aligned}$$

et $V(5)^{(1)} = 10\ 291.76$. Calculer les valeurs de $\left(R_1^{(2)},...,R_5^{(2)}\right)$ et $V(5)^{(2)}$.

(d) Avec (c), calculer une approximation de $E\left[V(5)\right]$ et de $\mathrm{Var}\left(V(5)\right)$.

(e) Avec (c), calculer une approximation de $\Pr\left(V(5) > 10\ 000\right)$ et déterminer les bornes des intervalles de confiance (niveau de 95 %) de cette approximation.

(f) Avec (c), calculer une approximation de $VaR_\kappa\left(V(5)\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et 0.99 et déterminer les bornes des intervalles de confiance (niveau de 95 %) de ces approximations.

(g) Avec (c), calculer une approximation de $TVaR_\kappa\left(V(5)\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et 0.99.

(h) On approxime la v.a. $V(5)$ par la v.a. $T \sim LN\left(\mu = \gamma, \sigma^2 = \zeta^2\right)$ où les valeurs de (γ,ζ) sont calculées de telle sorte que $E\left[V(5)\right] = E\left[T\right]$ et $\mathrm{Var}\left(V(5)\right) = \mathrm{Var}\left(T\right)$. Calculer $\overline{F}_T\left(10\ 000\right)$ ainsi que $VaR_\kappa\left(T\right)$ et $TVaR_\kappa\left(T\right)$ pour $\kappa = 0.01$ et 0.99. Comparer avec les valeurs obtenues en (e), (f) et (g).

8. On modélise la v.a. M représentant le nombre de sinistres pour un contrat d'assurance automobile par une loi Poisson-lognormale. Soit une v.a. mélange $\Theta \sim LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ en fixant les paramètres $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$, ce qui implique $E\left[\Theta\right] = 1$ et $\mathrm{Var}\left(\Theta\right) = \mathrm{e}^{\sigma^2} - 1$. Sachant que $\Theta = \theta$, $(M|\Theta = \theta) \sim Pois\left(\lambda\theta\right)$.

(a) Montrer que $E[M] = \lambda$ et $\text{Var}(M) = \lambda + \lambda^2 \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$.

(b) Identifier λ et σ tel que $E[M] = 0.5$ et $\text{Var}(M) = 1.5^2$.

(c) On a produit la réalisation 1.47 de la loi normale standard $N(0,1)$ et on utilise les paramètres λ et σ identifiés en (b). Produire une réalisation $\Theta^{(1)}$ de Θ. Calculer les valeurs de $\Pr\left(M = k | \Theta = \Theta^{(1)}\right)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

(d) On a produit la réalisation 0.65 de la loi uniforme standard $U(0,1)$. Avec cette réalisation et l'information produite en (c), produire une réalisation $M^{(1)}$ de M. (2)

9. Selon un modèle très simplifié, les coûts totaux (v.a. S_{TOT}) d'un portefeuille d'une compagnie sont la somme des coûts catastrophiques (v.a. S_1) et des coûts non catastrophiques (v.a. S_2) i.e. $S_{TOT} = S_1 + S_2$. La v.a. S_1 est définie par $S_1 = I_1 \times B_1$ avec $I_1 \sim Bern(0.05)$ et $B_1 \sim Pa(1.8, 4\,000\,000)$. De plus, $S_2 \sim LN\left(14, 1^2\right)$. On fournit ci-dessous 20 réalisations de la paire de v.a. indépendantes $U \sim U(0,1)$ et $Z \sim N(0,1)$:

j	1	2	3	4	5
$U^{(j)}$	0.9952	0.9261	0.6397	0.8920	0.7451
$Z^{(j)}$	1.0525	−0.4001	−0.66	1.4115	−0.3681
j	6	7	8	9	10
$U^{(j)}$	0.6902	0.0583	0.2045	0.9923	0.7551
$Z^{(j)}$	0.2576	−0.7456	−0.6310	1.5309	−0.8955
j	11	12	13	14	15
$U^{(j)}$	0.5739	0.1159	0.1686	0.9707	0.0365
$Z^{(j)}$	−0.4936	−0.7097	0.9046	0.9270	1.9624
j	16	17	18	19	20
$U^{(j)}$	0.4533	0.8066	0.7913	0.3785	0.7837
$Z^{(j)}$	−0.1359	1.6503	0.2204	−0.5184	0.7431

Les réalisations de U sont utilisées pour produire des réalisations de la v.a. S_1 et celles de Z servent à produire des réalisations de la v.a. S_2.

(a) Calculer l'ensemble des réalisations pour S_1 et S_2.

(b) Utiliser les 20 réalisations de S_1 pour calculer une approximation de $VaR_{0.90}(S_1)$ et $TVaR_{0.90}(S_1)$.

(c) Utiliser les 20 réalisations de S_2 pour calculer une approximation de $VaR_{0.90}(S_2)$ et $TVaR_{0.90}(S_2)$.

(d) Avec les 20 réalisations de S_{TOT}, calculer une approximation de $VaR_{0.90}(S_{TOT})$ et $TVaR_{0.90}(S_{TOT})$.

(e) Comparer $(VaR_{0.9}(S_1) + VaR_{0.9}(S_2))$ et $VaR_{0.9}(S_{TOT})$. Comparer $(TVaR_{0.9}(S_1) + TVaR_{0.9}(S_2))$ et $TVaR_{0.9}(S_{TOT})$. Commenter relativement à une propriété bien connue des mesures de risque.

10. Soient les v.a. indépendantes $B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$, $C = 200\ 000W$ (avec $W \sim Bêta\,(2,1)$), $R_1 \sim N\left(0.2, 0.2^2\right)$ et R_2, qui est définie par $R_2 = M \times D$, où $M \sim Bern\,(0.2)$ et $D \sim N\left(-0.5, 0.04^2\right)$. On définit la v.a. $X = (B + C)\,\mathrm{e}^{R_1+R_2}$.

    (a) Calculer l'espérance et la variance de X.

    (b) On dispose des 5 réalisations suivantes de la loi uniforme standard que l'on doit utiliser comme il est indiqué : 0.5452 (pour B), 0.7349 (pour C), 0.1423 (pour R_1), 0.9437 (pour M) et 0.3821 (pour D). Produire une réalisation de la v.a. X.

5.8 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

    (a) 0, 3, 2

    (b) 1, 3, 2

    (c) 1, 3, 2

2. Réponses à la question 2 :

    (a) 109.6645, 299.4209, 219.5267

    (b) 89.4217, 326.1524, 228.5580

3. Réponses à la question 3 : 0, 15.4706, 0

4. Réponses à la question 4 : 13 061.49, 18 414.90, 216 345.01, 348 941.52, 67 085.14, 67 544.20, 277 535.75, 432 417.37

5. Réponses à la question 5 :

    (a) 5.973072, 20.674508, 51.120504, 244.653892, 734.417561, 1054.085245, 1541.841003

    (b) −1293.01609, −840.00630, −518.74468, −55.98788, 191.05851, 349.82731, 574.07111

    (c) 299.9492, 302.5430, 313.7001, 462.0958, 934.2968, 1253.2419, 1688.5967

    (d) −97.52118, −89.40482, −66.42151, 58.79661, 289.54373, 452.44638, 679.79481

6. Réponses à la question 6 :

    (a) On a obtenu les valeurs suivantes :

i. 0 ; 112.85
ii. 55.56 ; 120 269.3
iii. 53.63 ; 113 014.7
iv. 1577.637 et 2733.691
v. 19.9077

(b) On a obtenu les valeurs suivantes :

i. Aucune réponse
ii. 6100.005
iii. 5555.73 et 12 026 930
iv. 5534.67 et 12 190 754
v. 16 271.51 et 19 130.39

7. Réponses à la question 7 :

(a) Aucune réponse
(b) 12 794 et 16 450 067
(c) 0.210101 ; 0.027811 ; 0.311467 ; 0.158361 ; 0.332232 ; 20 759.3
(d) 12 770.42 et 16 306 053
(e) 0.73921 ; bornes = 0.73649 et 0.74193
(f) 6140.53 avec bornes = 6105.38 et 6181.18 ; 25 257.71 avec bornes 25 053.73 et 25 449.75
(g) 12 842.76 et 28 467.00
(h) 0.7393955 ; 5936.95 et 25 053.03 ; 12 868.99 et 27 959.16

8. Réponses à la question 8 :

(a) Aucune réponse
(b) 0.5 et 1.442027
(c) 2.944853, 0.229368, 0.337728, 0.248640 et 0.122035
(d) 2

9. Réponses à la question 9 :

(a) $S_1^{(1)} = 10\ 704\ 994$, $S_1^{(9)} = 7\ 309\ 343$, $S_1^{(14)} = 1\ 382\ 769$, $S_1^{(j)} = 0$ pour $j \neq \{1, 9, 14\}$, $S_2^{(1)} = 3\ 445\ 388$, $S_2^{(2)} = 806\ 054$, etc.
(b) 1 382 769 et 9 007 169
(c) 5 559 100 et 7 411 049
(d) 855 396 et 13 505 068
(e) Aucune réponse

10. Réponses à la question 10 :

    (a) 154 233.353312 et 4 834 363 623

    (b) 101 787.21

6
Méthodes récursives d'agrégation

6.1 Introduction

En actuariat, en gestion quantitative des risques et en probabilités appliquées, on est confronté à évaluer la distribution d'une somme de v.a., indépendantes ou non. La mutualisation des risques mène l'actuaire à évaluer la distribution des coûts pour un portefeuille. Au chapitre 3, on a présenté quelques méthodes d'approximation fondées sur les moments, alors qu'au chapitre 5 on a introduit les méthodes de simulation stochastique qui peuvent aussi servir pour la distribution de sommes de v.a. Dans le présent chapitre, on s'intéresse à des méthodes récursives d'agrégation offrant ainsi un complément aux notions étudiées aux chapitres 3 et 5.

Le chapitre est construit comme suit. On présente le produit de convolution pour la somme de v.a. discrètes. On présente un algorithme récursif pour le calcul de la fonction de masse de probabilité pour la somme de v.a. discrètes i.i.d. On s'intéresse ensuite à l'algorithme de Panjer pour déterminer la fonction de masse de probabilité d'une v.a. définie selon une loi composée qui satisfait certaines contraintes. On expose la méthode d'agrégation fondée sur la transformée de Fourier rapide. Par la suite, on explique comment appliquer ces méthodes dans un contexte actuariel. Dans la plupart des cas, ces applications requièrent que la distribution du montant des sinistres soit discrétisée. On présente des méthodes de discrétisation permettant d'approximer des distributions continues par des distributions avec support arithmétique. Enfin, on aborde la classe

de distributions mélange d'Erlang. On présente aussi des exemples pour illustrer les méthodes étudiées dans le chapitre.

6.2 Somme de v.a. discrètes

6.2.1 Somme de n v.a. discrètes indépendantes

Soient n v.a. indépendantes discrètes définies sur $\{0, 1h, 2h, ...\}$. On veut évaluer les valeurs de la fonction de masse de probabilité f_{S_n} de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En 1.19.1, on explique la procédure pour calculer les valeurs de f_{S_2}. On a recours à une procédure récursive pour déterminer les valeurs de f_{S_n} pour $n = 3, 4, ...$ qui requiert de connaître les valeurs de $f_{S_{n-1}}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} f_{S_n}(kh) &= \sum_{j=0}^{k} \Pr(S_{n-1} = (k-j)h) \Pr(X_n = jh) \\ &= \sum_{j=0}^{k} f_{S_{n-1}}((k-j)h) f_{X_n}(jh). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Exemple 6.1 *Soient les v.a. indépendantes discrètes X_1, ..., X_n avec*

$$X_i \sim BN(2, 1 - 0.01 \times i) \ \ (i = 1, 2, ..., 10)$$

et la v.a. $S_{10} = \sum_{i=1}^{10} X_i$. À l'aide de la relation récursive (6.1) que l'on applique avec $h = 1$, on obtient les valeurs suivantes de $f_{S_{10}}(k)$, pour $k = 0, 1, ..., 11$:

k	0	1	2	3	4	5
$f_{S_{10}}(k)$	0.319610	0.351571	0.205669	0.085080	0.027928	0.007742
k	6	7	8	9	10	11
$f_{S_{10}}(k)$	0.001884	0.000413	0.000083	0.000016	0.000003	0.000000

Avec ces valeurs, on obtient $E[S_{10}] = 1.183605$ et $\mathrm{Var}(S_{10}) = 1.274424$ que l'on vérifie aisément. □

6.2.2 Somme de n v.a. discrètes i.i.d.

Dans le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d., on note $f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh)$ le n-ième produit de convolution de f_X avec elle-même. Alors, on a

$$f_X^{*n}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_X^{*(n-1)}((k-j)h) f_{X_n}(jh),$$

pour $k \in \mathbb{N}$ et $n = 2, 3, ...$, que l'on a déduit de (6.1). Néanmoins, il est possible de recourir à une procédure plus rapide pour calculer les valeurs de $f_{S_n}(kh) = f_X^{*n}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 6.2 ***Algorithme de De Pril.*** *On a*

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} \left((n+1)\frac{j}{k} - 1 \right) f_X(jh) f_{S_n}((k-j)h) \tag{6.2}$$

dont le point de départ est

$$f_{S_n}(0) = f_X(0)^n .$$

Preuve. Pour identifier la formule récursive, on a recours aux f.g.p. de X et de S_n qui sont définies par

$$P_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(kh) \times t^{kh}$$

et

$$P_{S_n}(t) = E\left[t^{S_n}\right] = P_X(t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} f_{S_n}(kh) \times t^{kh}.$$

On poursuit en utilisant la procédure suivante qui est assez courante dans ce type de contexte. On dérive $P_{S_n}(t)$ par rapport t

$$P'_{S_n}(t) = nP_X(t)^{n-1} P'_X(t). \tag{6.3}$$

On multiplie les deux côtés de (6.3) par $tP_X(t)$

$$tP_X(t) P'_{S_n}(t) = tP_X(t) nP_X(t)^{n-1} P'_X(t),$$

où

$$P_X(t) tP'_{S_n}(t) = \{P_X(t)\}\left\{tP'_{S_n}(t)\right\} = \sum_{j=0}^{\infty} t^{jh} f_X(jh) \sum_{k=0}^{\infty} kht^{kh} f_{S_n}(kh) \tag{6.4}$$

et

$$\begin{aligned} n\{P_X(t)^n\}\left\{tP'_X(t)\right\} &= n\{P_S(t)\}\left\{tP'_X(t)\right\} \\ &= n\sum_{k=0}^{\infty} t^{kh} f_{S_n}(kh) \sum_{j=0}^{\infty} hjt^{jh} f_X(jh). \end{aligned} \tag{6.5}$$

On combine (6.4) et (6.5)

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^{jh} f_X(jh) \sum_{k=0}^{\infty} kht^{kh} f_{S_n}(kh) = n \sum_{k=0}^{\infty} t^{kh} f_{S_n}(kh) \sum_{j=0}^{\infty} jht^{jh} f_X(jh). \tag{6.6}$$

On doit identifier de part et d'autre de (6.6) les coefficients de t^{kh} pour $k \in \mathbb{N}^+$. Puis, à partir de ces coefficients, il est possible d'identifier la relation récursive voulue. Du côté gauche de (6.6), on a

$$\sum_{j=0}^{k-1} f_X(jh)\,((k-j)\,h)\, f_{S_n}((k-j)\,h). \tag{6.7}$$

On identifie du côté droit de (6.6) le terme suivant

$$n \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,(jh)\, f_{S_n}((k-j)\,h). \tag{6.8}$$

En combinant (6.7) et (6.8), on obtient

$$\sum_{j=0}^{k} f_X(jh)\,((k-j)\,h)\, f_{S_n}((k-j)\,h) = n \sum_{j=0}^{k} f_X(jh)\,(jh)\, f_{S_n}((k-j)\,h)$$

à partir de laquelle on isole $f_{S_n}(kh)$

$$\begin{aligned} & f_X(0h)\, kh f_{S_n}(kh) \\ & + \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,((k-j)\,h)\, f_{S_n}((k-j)\,h) \\ = \;& n \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,(jh)\, f_{S_n}((k-j)\,h). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} & f_X(0h)\, kh f_{S_n}(kh) \\ = \;& n \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,(jh)\, f_{S_n}((k-j)\,h) \\ & - \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,(k-j)\,h f_{S_n}((k-j)\,h) \\ = \;& \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\,(nj+j-k)\,h f_{S_n}((k-j)\,h) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} & f_X(0h)\, kh f_{S_n}(kh) \\ = & \sum_{j=1}^{k} f_X(jh)\left((n+1)j-k\right) h f_{S_n}\left((k-j)h\right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la relation récursive voulue

$$f_{S_n}(kh) = \frac{1}{f_X(0)} \sum_{j=1}^{k} f_X(jh) \left((n+1)\frac{j}{k} - 1\right) f_{S_n}\left((k-j)h\right),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. ■

Remarque 6.3 ***Application de l'algorithme de De Pril.***. *Comme l'algorithme de la proposition 6.2 est récursif, on doit connaître les valeurs de* $f_{S_n}(0h)$, ..., $f_{S_n}\left((k-1)h\right)$ *afin de calculer* $f_{S_n}(kh)$. *On commence par calculer* $f_{S_n}(0) = f_X(0)^n$. *Par la suite, on calcule*

$$f_{S_n}(1h) = \frac{1}{f_X(0h)} f_X(1h) \left((n+1)\frac{1}{1} - 1\right) f_{S_n}(0h).$$

Puis, on détermine

$$f_{S_n}(2h) = \frac{1}{f_X(0h)} \left\{ \begin{array}{c} f_X(1h)\left((n+1)\frac{1}{2} - 1\right) f_{S_n}(1h) \\ +f_X(2h)\left((n+1)\frac{2}{2} - 1\right) f_{S_n}(0h) \end{array} \right\}.$$

On poursuit pour $k \in \{3, 4, ...\}$. *Il est préférable de programmer la procédure dans un langage informatique. Dans certains cas, l'algorithme peut être instable numériquement et produire des valeurs incohérentes.*

Exemple 6.4 *On suppose que* $X_i \sim Bin(5, 0.2)$ *pour* $i = 1, 2, ..., 10$. *Les v.a.* $X_1, ..., X_{10}$ *sont aussi indépendantes. On veut calculer la fonction de masse de probabilité de* $S_{10} = X_1 + ... + X_{10}$. *À l'aide de l'algorithme présenté à la proposition 6.2, on obtient les valeurs suivantes pour* $f_{S_{10}}(k)$, $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$f_{S_{10}}(k)$	*0.000014*	*0.000178*	*0.001093*	*0.004371*	*0.012840*	*0.029531*

Puisque $S_{10} \sim Bin(50, 0.2)$, *il est possible de vérifier l'exactitude de ces valeurs.* □

Supposons que les v.a. i.i.d. $X_1, ..., X_n \in \{k_0 h, (k_0+1)h, ...\}$, ce qui implique que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \in \{nk_0 h, (nk_0+1)h, ...\}$. On définit $Y_i = X_i - k_0 h \in \{0, 1h, 2h, ...\}$, $i = 1, 2, ..., n$ et $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Alors, on évalue les valeurs de $f_T(kh)$ $(k \in \mathbb{N})$ avec l'algorithme récursif de la proposition 6.2 et on obtient celles de $f_S(kh)$ avec $f_S(kh) = f_T\left((k - nk_0)h\right)$ $(k = k_0 n, k_0 n + 1, ...)$.

6.2.3 Somme de n v.a. discrètes

Soit le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ dont la fonction de masse de probabilité conjointe est définie par $f_{X_1,...,X_n}(k_1 h, ..., k_n h)$ pour $k_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. Pour $n = 3$, on utilise

$$f_{S_3}(kh) = \sum_{k_1=0}^{k} \sum_{k_2=0}^{k_1} f_{X_1,X_2,X_3}(k_1 h, k_2 h, (k - k_1 - k_2) h), \tag{6.9}$$

pour $k \in \{0, 1h, 2h, ...\}$. Pour $n > 3$, il suffit d'adapter (6.9)

$$\begin{aligned} & f_{S_n}(kh) \\ = & \sum_{k_1=0}^{k} ... \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{X_1,...,X_n}\left(k_1 h, ..., k_{n-1} h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right) h\right). \end{aligned} \tag{6.10}$$

Le temps d'exécution de (6.10) devient rapidement long lorsque le nombre n de v.a. augmente.

La f.g.p. conjointe du vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ est définie par

$$P_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_n=0}^{\infty} t_1^{k_1 h} ... t_n^{k_n h} f_{X_1,...,X_n}(k_1 h, ..., k_n h). \tag{6.11}$$

Alors, la f.g.p. de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par

$$P_S(t) = P_{X_1,...,X_n}(t, ..., t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_S(kh)\, t^{kh} \tag{6.12}$$

à partir de laquelle on peut identifier la f.m.p. de S. Si les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, (6.11) et (6.12) deviennent

$$\begin{aligned} P_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} ... \sum_{k_m=0}^{\infty} t_1^{k_1 h} ... t_n^{k_n h} f_{X_1}(k_1 h) ... f_{X_n}(k_n h) \\ &= P_{X_1}(t_1) ... P_{X_n}(t_n) \end{aligned}$$

et

$$P_S(t) = P_{X_1}(t) ... P_{X_n}(t).$$

6.3 Algorithme de Panjer et lois de fréquence $(a, b, 0)$

6.3.1 Notions préliminaires

Soit une v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}, \tag{6.13}$$

où M est une v.a. discrète de fréquence, $B_1, B_2, ...$ est une suite de v.a. positives i.i.d. définies sur $\{0h, 1h, 2h, ...\}$ dont la distribution est la même que la v.a. canonique B ; et la suite de v.a. $B_1, B_2, ...$ est indépendante de M. Cela implique que X prend des valeurs dans $\{0h, 1h, 2h, ...\}$ et sa fonction de masse de probabilité est définie par $f_X(kh) = \Pr(X = kh)$, pour $k \in \mathbb{N}$.

L'approche générale pour calculer $f_X(kh)$ est

$$\begin{aligned} f_X(0) &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(0) \\ &= f_M(0) + \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(0) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_M(j) (f_B(0))^j = P_M(f_B(0)) \end{aligned} \tag{6.14}$$

et

$$f_X(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_{B_1+...+B_j}(kh) = \sum_{j=1}^{\infty} f_M(j) f_B^{*j}(kh), \tag{6.15}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. Bien que (6.14) soit aisée à évaluer, (6.15) demande plus de temps de calcul. En effet, on doit recourir au résultat de la proposition 6.2 pour évaluer les valeurs de $f_B^{*j}(kh)$ pour chaque $j \in \mathbb{N}^+$ et chaque $k \in \mathbb{N}^+$. Cela peut s'avérer fastidieux. En 1981, [88] a proposé un algorithme appelé désormais «algorithme de Panjer», qui est une relation récursive permettant le calcul des valeurs de f_X à la condition que la v.a. M fasse partie de la famille $(a, b, 0)$.

6.3.2 Famille (a,b,0) de lois de fréquence

Avant d'expliquer l'algorithme de Panjer, il est d'abord nécessaire de présenter une importante famille de distributions de fréquence appelée la famille $(a, b, 0)$. Une distribution de fréquence pour une v.a. M

appartient à la famille de distributions de fréquence $(a, b, 0)$ si sa fonction de masse de probabilité satisfait la relation récursive suivante : $f_M(k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)$ pour $k \in \mathbb{N}^+$. Le point de départ est $f_M(0) > 0$. Le fait que $f_M(0) > 0$ explique la raison de la présence du «0» dans le nom de la famille. Seules les lois de Poisson, binomiale et binomiale négative sont membres de cette famille.

On indique les valeurs de a et b pour les membres de la famille (a,b,0) :

- loi de Poisson : $a = 0$ et $b = \lambda$;
- loi binomiale négative (avec r, q) : $a = 1 - q$ et $b = (1-q)(r-1)$;
- loi binomiale négative (avec r, β) : $a = \frac{\beta}{1+\beta}$ et $b = \frac{\beta}{1+\beta}(r-1)$;
- loi binomiale : $a = -\frac{q}{1-q}$ et $b = (n+1)\frac{q}{1-q}$.

On peut déduire la relation suivante pour la f.g.p. d'une loi appartenant à cette famille. Cette relation récursive est utilisée dans le développement de l'algorithme de Panjer.

Proposition 6.5 ***Relation récursive.*** *On a*

$$P'_M(t) = a \times t \times P'_M(t) + (a+b) P_M(t), \tag{6.16}$$

où $P'_M(t) = \frac{\mathrm{d}\, P_M(t)}{\mathrm{d}t}$.

Preuve. On a

$$P_M(t) = E\left[t^M\right] = \sum_{k=0}^{\infty} f_M(k)\, t^k. \tag{6.17}$$

On prend la dérivée de (6.17) par rapport à t

$$P'_M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k)\, k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) f_M(k-1)\, k t^{k-1}.$$

Puis, on réarrange les termes

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, k t^{k-1} + b \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1)\, t^{k-1} \\ &= a \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times k \times t^{k-1} + b P_M(t). \end{aligned}$$

On remplace k par $k-1+1$

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1+1) \times t^{k-1} + bP_M(t) \\ &= a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1) \times t^{k-1} \\ &\quad + a\sum_{k=1}^{\infty} f_M(k-1) \times t^{k-1} + bP_M(t) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} P'_M(t) &= at\sum_{k=2}^{\infty} f_M(k-1) \times (k-1) \times t^{k-2} \\ &\quad + aP_M(t) + bP_M(t) \end{aligned}$$

menant à (6.16). ■

6.3.3 Algorithme de Panjer

L'algorithme de Panjer est une relation qui permet de calculer récursivement la fonction de masse de probabilité de X, lorsque la loi de M fasse partie de la classe (a,b,0).

Algorithme 6.6 ***Algorithme de Panjer.*** *Le point de départ de l'algorithme est*

$$f_X(0) = M_M\{\ln[f_B(0)]\} = P_M\{f_B(0)\}$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(a + b\frac{jh}{kh}\right) f_B(jh) f_X((k-j)h)}{1 - af_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

Preuve. On sait que $f_X(0) = P_M(f_B(0))$, ce qui fournit le point de départ de l'algorithme de Panjer. De plus, la f.g.p. de X est donnée par

$$P_X(t) = E\left[t^X\right] = P_M(P_B(t)).$$

On dérive la f.g.p. de X par rapport à t

$$P'_X(t) = P'_M(P_B(t)) \times P'_B(t). \tag{6.18}$$

On obtient la formule récursive (6.16)

$$P'_M(t) = a \times t \times P'_M(t) + (a+b) P_M(t),$$

que l'on remplace dans (6.18)

$$\begin{aligned} P'_X(t) &= a \times P_B(t) \times P'_M(P_B(t)) P'_B(t) + (a+b) P_M(P_B(t)) P'_B(t) \\ &= a \times P_B(t) \times P'_X(t) + (a+b) P_X(t) P'_B(t) \end{aligned} \tag{6.19}$$

On rappelle que

$$P_B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_B(jh) t^{jh}, \qquad P'_B(t) = \sum_{j=0}^{\infty} jh f_B(jh) t^{(j-1)h}$$

et

$$P_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(kh) t^{kh}, \qquad P'_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} kh f_X(kh) t^{(k-1)h}.$$

On utilise ces expressions dans (6.19)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kh f_X(kh) t^{(k-1)h} &= a \times \sum_{j=0}^{\infty} f_B(jh) t^{jh} \times \sum_{j=0}^{\infty} jh f_X(jh) t^{(j-1)j} \\ &\quad + (a+b) \sum_{j=0}^{\infty} f_X(jh) t^{jh} \sum_{j=0}^{\infty} jh f_B(jh) t^{(j-1)h} \end{aligned}$$

que l'on multiplie par t

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} kh f_X(kh) t^{kh} &= a \times \sum_{j=0}^{\infty} f_B(jh) t^{jh} \times \sum_{j=0}^{\infty} jh f_X(jh) t^{jh} \\ &\quad + (a+b) \sum_{j=0}^{\infty} f_X(jh) t^{jh} \sum_{j=0}^{\infty} jh f_B(jh) t^{jh}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

On examine les coefficients de t^{kh} pour trouver $f_X(kh)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Du côté gauche de (6.20), on a $khf_X(kh)$. Dans le premier terme du côté droit de (6.20), on trouve

$$a \times \sum_{j=0}^{k} f_B(jh) \times (k-j) h \times f_X((k-j) h) \tag{6.21}$$

et dans le deuxième, on a

$$(a+b) \times \sum_{j=0}^{k} f_B(jh) \times jh \times f_X((k-j)h). \tag{6.22}$$

On combine (6.20), (6.21) et (6.22)

$$\begin{aligned} khf_X(kh) &= a \times \sum_{j=0}^{k} f_B(jh) \times (k-j)h \times f_X((k-j)h) \\ &\quad + (a+b) \times \sum_{j=0}^{k} f_B(jh) \times jh \times f_X((k-j)h) \\ &= akhf_B(0) f_X((k-j)h) \\ &\quad + a \sum_{j=1}^{k} f_B(jh) \times ((k-j)h) f_X((k-j)h) \\ &\quad + (a+b) \sum_{j=1}^{k} f_B(jh) \times jh \times f_X((k-j)h) \\ &= akhf_B(0) f_X(kh) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k} (a(k-j)h + (a+b)jh) f_B(jh) \times f_X((k-j)h). \end{aligned}$$

En isolant $f_X(kh)$, on obtient la relation récursive voulue

$$f_X(kh) = \frac{1}{1 - af_B(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a + b\frac{jh}{kh}\right) f_B(jh) \times f_X((k-j)h).$$

■

On présente les cas particuliers de l'algorithme de Panjer dans le cas où M obéit respectivement à une loi de Poisson, à une loi binomiale négative et à une loi binomiale.

Algorithme 6.7 ***Poisson composée.*** *Soit $M \sim Pois(\lambda)$. Le point de départ est $f_X(0) = \mathrm{e}^{\lambda(f_B(0)-1)}$ et la relation récursive est donnée par*

$$f_X(kh) = \frac{\lambda}{k} \sum_{j=1}^{k} j f_B(jh) f_X((k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

Algorithme 6.8 ***Binomiale négative composée*** *(avec r et q). On suppose que $M \sim BN(r,q)$. Le point de départ est*

$$f_X(0) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\,f_B(0)}\right)^r$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(1-q+\frac{(1-q)(r-1)j}{k}\right) f_B(jh) f_X((x-j)\,h)}{1-(1-q)\,f_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. Il suffit de remplacer $q = \frac{1}{1+\beta}$ dans les deux relations pour retrouver les relations correspondantes pour la loi binomiale négative définie avec les paramètres r et β. □

Algorithme 6.9 ***Binomiale composée.*** *On suppose que $M \sim Bin(n,q)$. Le point de départ est*

$$f_X(0) = (1-q+qf_B(0))^n$$

et la relation récursive est donnée par

$$f_X(kh) = \frac{\sum_{j=1}^{k}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{k}\right) f_B(j) f_X((k-j)\,h)}{1-q+qf_B(0)},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. □

Dans l'exemple suivant, on applique l'algorithme de Panjer pour les lois composées.

Exemple 6.10 *La v.a. X est définie selon (6.13) où*

$$B \in \{1000, 2000, ..., 6000\}$$

avec les valeurs suivantes de $f_B(1000k)$:

k	0	1	2	3	4	5	6
$f_B(1000k)$	0	0.20	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05

Il en résulte que $E[B] = 2800$ et $\mathrm{Var}(B) = 2\ 060\ 000$. On considère trois hypothèses pour la distribution de la v.a. M.

- *Hypothèse 1. $M \sim Pois(\lambda = 1.25)$, ce qui implique $E[X] = 3500$ et $\mathrm{Var}(X) = 12\ 375\ 000$.*

- *Hypothèse 2. $M \sim Bin(n = 10, q = 0.125)$, ce qui implique $E[X] = 3500$ et $\mathrm{Var}(X) = 11\ 150\ 000$.*

- *Hypothèse 3.* $M \sim NB\,(r = 0.5, \beta = 2.5)$*, ce qui implique* $E[X] = 3500$ *et* $\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(X) = 36\ 875\ 000$.

On applique l'algorithme pour calculer les valeurs de $f_X\,(1000k)$ *(*$k = 0, 1, 2$*) selon l'hypothèse 1 :*

$$\begin{aligned} f_X\,(0) &= P_M\,(f_B\,(0)) = \exp\,(\lambda\,(f_B\,(0) - 1)) \\ &= \exp\,(-\lambda) = \exp\,(-1.25) = 0.286505 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X\,(1000) &= \frac{\lambda}{1}\sum_{j=1}^{1} j f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j)) \\ &= 1.25\,(1 \times f_B\,(1000) \times f_X\,(0)) \\ &= 1.25\,(1 \times 0.2 \times 0.286505) = 0.071626 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X\,(2000) &= \frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{2} j f_B(1000j) f_X(1000\,(2-j)) \\ &= \frac{1.25}{2}\,(1 \times f_B\,(1000) \times f_X\,(1000) + 2 \times f_B\,(2000) \times f_X\,(0)) \\ &= \frac{1.25}{2}\,(1 \times 0.2 \times 0.071626 + 2 \times 0.3 \times 0.286505) \\ &= 0.116393. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 2, on obtient les valeurs de $f_X\,(1000k)$ *(*$k = 0, 1, 2$*) de la façon suivante :*

$$f_X\,(0) = P_M\,(f_B\,(0)) = (1 - q + q f_B\,(0))^n = 0.263076$$

$$\begin{aligned} f_X\,(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(-q + \frac{(n+1)qj}{1}\right) f_B(1000j) f_X(1000\,(1-j))}{1 - q + q f_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125 + \frac{11 \times 0.125 \times 1}{1}\right) f_B\,(1000)\, f_X\,(0)}{1 - 0.125} \\ &= 0.075164 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(-q+\frac{(n+1)qj}{2}\right) f_B(1000j) f_X(1000(2-j))}{1-q+qf_B(0)} \\ &= \frac{\left(-0.125+\frac{11\times 0.125\times 1}{2}\right) 0.20\times 0.075164}{1-0.125} \\ &\quad + \frac{\left(-0.125+\frac{11\times 0.125\times 2}{2}\right) 0.30\times 0.263076}{1-0.125} \\ &= 0.122411. \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour l'hypothèse 3 en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} f_X(0) &= P_M(f_B(0)) = \left(\frac{1}{(1-\beta((f_B(0))-1))}\right)^r \\ &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r = \left(\frac{1}{1+2.5}\right)^{0.5} = 0.534522 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(1000) &= \frac{\sum_{j=1}^{1}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{1}\right) f_B(1000j) f_X(1000(1-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\ &= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{1}\right) 0.2\times 0.534522}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &= 0.038180 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_X(2000) &= \frac{\sum_{j=1}^{2}\left(\beta+\frac{\beta(r-1)j}{2}\right) f_B(1000j) f_X(1000(2-j))}{1+\beta-\beta f_B(0)} \\ &= \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)1}{2}\right) 0.2\times 0.038180}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &\quad + \frac{\left(2.5+\frac{2.5(0.5-1)2}{2}\right) 0.3\times 0.534522}{1+2.5-2.5\times 0} \\ &= 0.061361. \end{aligned}$$

En appliquant l'algorithme de Panjer, on obtient les valeurs $f_X(1000k)$ *dont certaines sont reproduites ci-dessous :*

k	*0*	*5*	*10*	*20*	*30*
$f_X(1000k)$ *hyp 1*	*0.286505*	*0.083659*	*0.020898*	*0.000368*	*0.000002*
$f_X(1000k)$ *hyp 2*	*0.263076*	*0.088471*	*0.020159*	*0.000177*	*0.000000*
$f_X(1000k)$ *hyp 3*	*0.534522*	*0.042620*	*0.016593*	*0.003770*	*0.000981*

□

6.4 Méthodes de discrétisation

Soient les v.a. indépendantes continues positives B_1, ..., B_n. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$. Afin d'utiliser les algorithmes récursifs de convolution, on approxime la v.a. B_i par une v.a. discrète $\widetilde{B}_i$ définie sur le support

$$A_h = \{0, 1h, 2h, 3h, ...\},$$

où $h > 0$ est appelé le pas de discrétisation. La fonction de masse de probabilité est $f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr\left(\widetilde{B}_i = kh\right)$, $k \in \mathbb{N}$, pour $i = 1, 2, ..., n$. On définit la v.a. $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i$, qui est aussi définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{S}$ peuvent être calculées avec les algorithmes récursifs de convolution. On approxime les quantités relatives à la v.a. S (e.g. F_S, $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$, prime *stop-loss*) par les quantitiés correspondantes qui sont relatives à $\widetilde{S}$.

Soit la v.a. X définie par la somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} B_j, M > 0 \\ 0, M > 0 \end{cases},$$

où les v.a. $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. et continues positives avec une fonction de répartition F_B et la v.a. M appartenant à la classe (a,b,0). Pour appliquer l'algorithme de Panjer ou tout autre algorithme récursif, on approxime les v.a. B_1, B_2, ... par les v.a. les v.a. discrètes $\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2$,... définies sur A_h. On définit la v.a. $\widetilde{X}$ par

$$\widetilde{X} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j, M > 0 \\ 0, M > 0 \end{cases},$$

en préservant les mêmes hypothèses et on observe que la v.a. $\widetilde{X}$ est définie sur A_h. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\widetilde{X}$ sont calculées avec l'algorithme de Panjer ou tout autre algorithme. Ensuite, on approxime les quantités relatives à la v.a. X (e.g. F_X, $VaR_\kappa(X)$, $TVaR_\kappa(X)$, prime *stop-loss*) par les quantitiés correspondantes de $\widetilde{X}$.

Un certain nombre de méthodes de discrétisation existent afin de définir la v.a. $\widetilde{B}$ qui approxime la v.a. B. On présente les principales méthodes dans les prochaines sous-sections.

6.4.1 Méthodes upper *et* lower

Selon la méthode *upper*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est

$$f_{\widetilde{B}}(0) = \Pr(B \leq h) = F_B(h)$$

et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h, 2h, 3h, ...$ sont

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr(kh \leq B < (k+1)h) = F_B((k+1)h) - F_B(kh)$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. La fonction de répartition $F_{\widetilde{B}}(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $0h$, $1h$, $2h$, ... et dont la première marche à 0 est d'une hauteur $F_{\widetilde{B}}(0) = F_B(h)$. On a

$$F_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} F_B(h), & 0 \leq x < h \\ F_B(2h), & h \leq x < 2h \\ F_B(3h), & 2h \leq x < 3h \\ & \cdots \end{cases}$$

Selon cette méthode, on a la relation $F_B(x) \leq F_{\widetilde{B}}(x)$, $x \geq 0$.

Pour la méthode *lower*, la valeur de la fonction de masse de probabilité à 0 est $f_{\widetilde{B}}(0) = 0$ et les valeurs de la fonction de masse de probabilité à $1h, 2h, 3h, ...$ sont

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr((k-1)h \leq B < kh) = F_B(kh) - F_B((k-1)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. La fonction de répartition $F_{\widetilde{B}}(x)$ est une fonction en escalier dont les sauts sont à $1h$, $2h$, ..., soit

$$F_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < h \\ F_B(h), & h \leq x < 2h \\ F_B(2h), & 2h \leq x < 3h \\ & \cdots \end{cases}.$$

On observe la relation $F_B(x) \geq F_{\widetilde{B}}(x)$, $x \geq 0$.

Sur le graphique de la figure 6.1, on illustre les deux méthodes de discrétisation appliquée à la fonction de répartition de la loi exponentielle.

Dans le prochain exemple, on applique les deux méthodes de discrétisation.

Exemple 6.11 *On applique l'algorithme de Panjer conjointement avec les méthodes upper et lower de discrétisation. Soit la v.a.* $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, *avec* $r = 1$, $q = 0.5$ *et* $B \sim Exp(0.2)$. *Pour cet exemple, on connaît la forme explicite de la fonction de répartition de* X *qui est donnée par*

$$F_X(x) = 1 - (1-q)\,e^{-\beta q x}, \qquad x \geq 0,$$

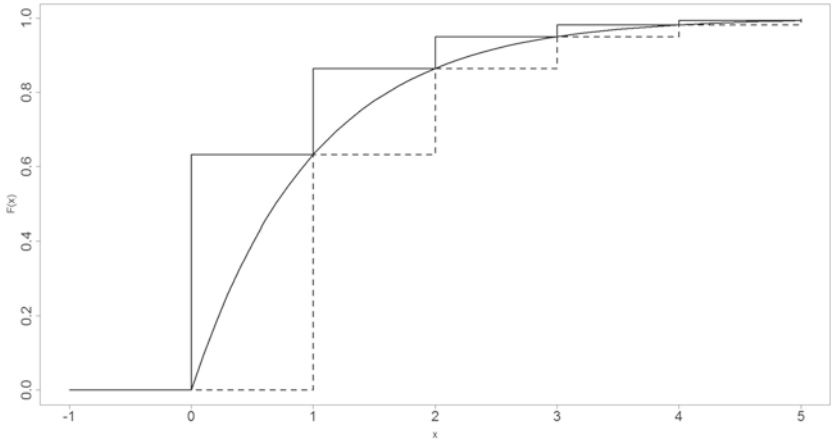

FIGURE 6.1. Valeurs de $F_B(x)$ où $B \sim Exp(1)$ ainsi que de $F_{\widetilde{B}^{(up)}}(x)$ (ligne continue en escalier) et $F_{\widetilde{B}^{(up)}}(x)$ (ligne avec petits traits en escalier).

(voir exercice 2.11) ce qui permet de comparer les valeurs obtenues avec les approximations. Dans le tableau ci-dessous, on illustre l'application de l'algorithme de Panjer en utilisant les techniques de discrétisation upper *et* lower. *Il est possible de comparer les valeurs obtenues par approximation et les valeurs exactes de* $F_X(x)$ *:*

x	$Low_{h=1}$	$Low_{h=\frac{1}{4}}$	$Low_{h=\frac{1}{16}}$	*Exacte*	$Up_{h=\frac{1}{16}}$	$Up_{h=\frac{1}{4}}$	$Up_{h=1}$
0	*0.50000*	*0.50000*	*0.500000*	0.5	*0.50313*	*0.51250*	*0.54983*
1	*0.54532*	*0.54702*	*0.54744*	0.54758	*0.55055*	*0.55944*	*0.59470*
2	*0.58653*	*0.58961*	*0.59038*	0.59064	*0.59344*	*0.60186*	*0.63510*
3	*0.62400*	*0.62820*	*0.62924*	0.62959	*0.63225*	*0.64020*	*0.67147*
4	*0.65808*	*0.66316*	*0.66442*	0.66484	*0.66735*	*0.67485*	*0.70421*
5	*0.68907*	*0.69483*	*0.69626*	0.69674	*0.69910*	*0.70616*	*0.73369*
10	*0.78737*	*0.81375*	*0.81549*	0.81606	*0.81778*	*0.82289*	*0.84246*
20	*0.92523*	*0.93062*	*0.93191*	0.93233	*0.93317*	*0.93565*	*0.94487*
30	*0.97109*	*0.97416*	*0.97487*	0.97511	*0.97549*	*0.97662*	*0.98071*
40	*0.98882*	*0.99037*	*0.99073*	0.99084	*0.99101*	*0.99151*	*0.99325*
50	*0.99568*	*0.99641*	*0.99658*	0.99663	*0.99670*	*0.99691*	*0.99764*

On constate que la différence entre les valeurs upper *et* lower *diminue avec h qui s'approche de 0. La valeur de h choisie dépend de l'échelle de la distribution de B. On présente dans le tableau ci-dessous les valeurs exactes et celles obtenues par approximation de* $VaR_\kappa(X)$ *:*

κ	$Up_{h=1}$	$Up_{h=\frac{1}{4}}$	$Up_{h=\frac{1}{16}}$	*Exacte*	$Low_{h=\frac{1}{16}}$	$Low_{h=\frac{1}{4}}$	$Low_{h=1}$
0.5	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
0.95	*21*	*22.5*	*22.9375*	*23.02585*	*23.125*	*23.5*	*25*
0.995	*43*	*45.875*	*45.875*	*46.05167*	*46.25*	*46.75*	*49*

□

Les approximations de F_X produites avec la discrétisation *upper* (*lower*) seront toujours supérieures (*inférieures*) aux valeurs exactes de F_X. Cette relation est démontrée dans le chapitre 7 portant sur la comparaison des risques.

Exemple 6.12 *On considère un portefeuille constitué de 100 contrats d'assurance automobile (indépendants). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *avec* $\lambda = 0.025$ *et* $B \sim Pa(3, 10)$. *On veut évaluer* F_S *où* $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, *les v.a.* X_i $(i = 1, 2, ..., 100)$ *sont i.i.d. et* $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., 100)$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs obtenues des approximations de* $F_S(x)$ *en appliquant l'algorithme de Panjer conjointement avec les techniques de discrétisation* upper *et* lower *(avec* $h = 1$ *et* $h = \frac{1}{4}$*) :*

x	$F_{\widetilde{S}^{low,h=1}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}}(x)$	$F_{\widetilde{S}^{up,h=1}}(x)$
0	*0.0820850*	*0.0820850*	*0.09812643*	*0.1528517*
1	*0.1331183*	*0.1403239*	*0.16071324*	*0.2188115*
5	*0.3320781*	*0.3545721*	*0.38149450*	*0.4391453*
10	*0.5364597*	*0.5616138*	*0.58571454*	*0.6310597*
20	*0.7836771*	*0.7998287*	*0.81308686*	*0.8355891*
30	*0.8962240*	*0.9045299*	*0.91096430*	*0.9214718*
40	*0.9472100*	*0.9513226*	*0.95443381*	*0.9594453*
50	*0.9712884*	*0.9733614*	*0.97491838*	*0.9774225*

On mentionne que la valeur exacte de $F_S(0)$ *est égale à 0.0820850. On constate que l'écart entre les bornes inférieures et supérieures diminue avec* h *qui décroît. On présente dans le tableau ci-dessous les valeurs obtenues des approximations de* $VaR_\kappa(S)$ *:*

κ	*0.5*	*0.95*	*0.995*
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=1}\right)$	*7*	*37*	*84*
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{up,h=\frac{1}{4}}\right)$	*7.75*	*38.75*	*85.25*
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=\frac{1}{4}}\right)$	*8.5*	*39.75*	*86.25*
$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}^{low,h=1}\right)$	*9*	*41*	*88*

□

6.4.2 Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée

On a besoin du résultat suivant pour la méthode de la dispersion de la masse.

Lemme 6.13 *Soient les scalaires* a, b, c, d *tels que* $a < b$, $p_a \geq 0$, $p_b \geq 0$, $0 \leq c < 1$ *et* $a < d < b$. *La solution au système de deux équations avec*

deux inconnues suivant

$$\begin{aligned} p_a + p_b &= c \\ ap_a + bp_b &= d \end{aligned}$$

est $p_a = \frac{bc-d}{b-a}$ *et* $p_b = \frac{d-ac}{b-a}$.

On procède par étape pour déterminer l'expression de la fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{B}}(kh) = \Pr\left(\widetilde{B} = kh\right)$. Pour chaque intervalle, on distribue la masse de cet intervalle à ses extrémités (gauche et droite) tout en conservant l'espérance attribuée à cet intervalle. Comme le point kh se trouve à la fois à la droite de l'intervalle $((k-1)h, kh]$ et à gauche de l'intervalle $(kh, (k+1)h]$, la valeur de la fonction de masse de probabilité $f_{\widetilde{B}}(kh)$ attribuée au point kh est la somme des deux de probabilité p^+_{kh} et p^-_{kh}.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on cherche les valeurs de p^-_{kh} et p^+_{kh+h} telles que les deux relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} p^-_{kh} + p^+_{kh+h} &= F_B((k+1)h) - F_B(kh) \\ p^-_{kh} kh + p^+_{kh+h}(k+1)h &= \int_{kh}^{(k+1)h} x f_B(x)\,\mathrm{d}x \\ &= E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right] \end{aligned}$$

À partir du résultat du lemme 6.13, on déduit :

$$\begin{aligned} p^-_{kh} &= \frac{(k+1)h}{h}\left\{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\right\} \\ &\quad -\frac{1}{h}\left\{E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right]\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p^+_{(k+1)h} &= \frac{1}{h}\left\{E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right]\right\} \\ &\quad -\frac{kh}{h}\left\{F_B((k+1)h) - F_B(kh)\right\}. \end{aligned}$$

Pour $k = 1, 2, ...$, la valeur de $f_{\widetilde{B}}(kh)$ est la somme de p^+_{kh} et p^-_{kh} :

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{B}}(kh) &= p^+_{kh} + p^-_{kh} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{c} 2E\left[B \times 1_{(-\infty,kh]}\right] - E\left[B \times 1_{(-\infty,(k-1)h]}\right] \\ -E\left[B \times 1_{(-\infty,(k+1)h]}\right] \end{array}\right\} \\ &\quad +\frac{1}{h}\left\{\begin{array}{c} -2khF_B(kh) + (k-1)hF_B((k-1)h) \\ +(k+1)hF_B((k+1)h) \end{array}\right\}. \end{aligned}$$

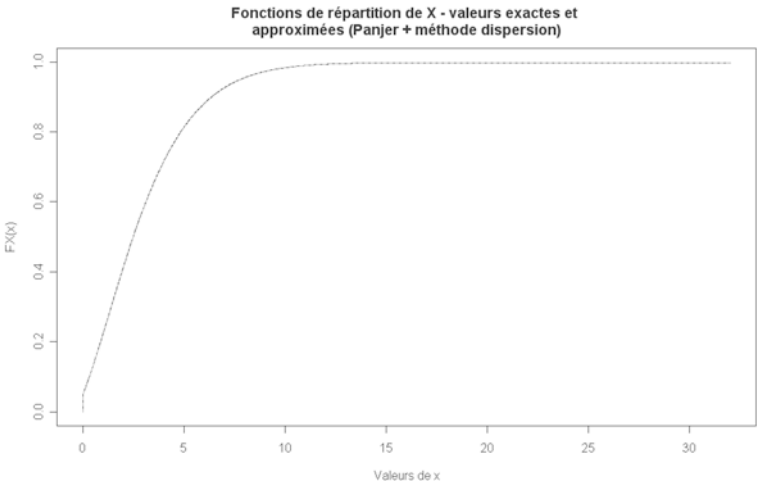

FIGURE 6.2. Valeurs exactes (ligne continue) et approximées (ligne avec petits traits) de $F_X(x)$, où $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ avec $\lambda = 3$ et $B \sim Exp(1)$. L'approximation est obtenue avec la méthode de dispersion.

Comme $E[\min(B;a)] = E\left[B \times 1_{(-\infty,a]}\right] + a(1 - F_B(a))$, on obtient

$$f_{\widetilde{B}}(kh) = \frac{1}{h}\left\{ \begin{array}{c} 2E[\min(B;kh)] - E[\min(B;(k-1)h)] \\ -E[\min(B;(k+1)h)] \end{array} \right\},$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$ et

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{B}}(0) &= p_0^- = \frac{F_B(h) \times h - E\left[B \times 1_{(-\infty,h]}\right]}{h} \\ &= 1 - \frac{E[\min(B;h)]}{h}, \end{aligned}$$

pour $k = 0$.

Exemple 6.14 *Soit la v.a.* $X \sim PComp(\lambda, F_B)$ *représentant les coûts pour un risque avec* $\lambda = 3$ *et* $B \sim Exp(\beta = 1)$. *L'espérance de* X *est égale à 3. Dans le cas présent, on peut évaluer les valeurs exactes de* F_X. *Pour illustrer la méthode de dispersion avec préservation de l'espérance, on utilise un pas* $h = \frac{1}{100}$ *pour discrétiser la loi de* B *sur le support* $\left\{0, \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, ...\right\}$ *puis on applique l'algorithme de Panjer pour évaluer les valeurs de* $F_{\widetilde{X}}\left(\frac{k}{100}\right)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$. *Les valeurs sont reportées dans le graphique de la figure 6.2. Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes et approximées*

de $VaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa(X)$ *:*

κ	$VaR_\kappa(X)$ *exacte*	$VaR_\kappa(X)$ *approx.*	$TVaR_\kappa(X)$ *exacte*	$TVaR_\kappa(X)$ *approx.*
0.5	*2.48268*	*2.48*	*4.86835*	*4.86836*
0.95	*7.72886*	*7.73*	*9.56856*	*9.56856*
0.995	*11.91371*	*11.91*	*13.57670*	*13.57690*

On présente aussi les valeurs exactes et approximées de la prime stop-loss $\pi_X(d) = E[\max(X-d;0)]$ *:*

d	*0*	*1*	*2*	*5*	*10*	*15*
$\pi_X(d)$ *exacte*	*3*	*2.133987*	*1.454502*	*0.378085*	*0.025710*	*0.001237*
$\pi_X(d)$ *approx.*	*3*	*2.133989*	*1.454504*	*0.378087*	*0.025711*	*0.001237*

Les valeurs approximatives de la prime stop-loss *sont équivalentes aux valeurs à 5 décimales près indiquant la très bonne qualité de la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée. La valeur approximative et la valeur exacte de* $E[X]$ *sont identiques, confirmant que l'espérance est préservée. Enfin, on observe que les valeurs approximées de TVaR et de primes* stop-loss *sont supérieures ou égales aux valeurs exactes. Cette relation d'ordre est expliquée au chapitre 7 à l'aide des ordres convexes.* □

6.5 Transformée de Fourier rapide

6.5.1 Description de la méthode

La transformée de Fourier rapide (en anglais *Fast Fourier Transform,* avec l'acronyme FFT) est un algorithme performant pour déterminer la transformée de Fourier pour une v.a. discrète. La FFT est programmée dans plusieurs logiciels notamment en `R`.

L'idée de la méthode est assez simple. On doit faire un bref rappel des nombre complexes. Soit le nombre complexe $z = x + yi$ présenté sous sa forme cartésienne où $i = \sqrt{-1}$ est l'unité imaginaire, x désigne la partie réelle de z (notée $\mathrm{Re}(z)$) et y désigne la partie imaginaire (notée $\mathrm{Im}(z)$). Les règles d'addition et de multiplication sont $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i$ et $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\,i$. Le nombre z peut être représenté sous sa forme polaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, où $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et θ correspond à l'argument de z, soit l'angle du vecteur z dans le plan complexe. Selon la formule d'Euler, on a la relation $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Cette relation permet de déduire que $z = r\mathrm{e}^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On sait qu'il est possible d'identifier la loi d'une v.a. à partir de sa f.g.m. Si la v.a. est discrète, on peut aussi identifier sa loi à partir de sa f.g.p.

Soit une v.a. X de loi discrète définie sur $\mathbb{N}$ avec fonction de masse de probabilité f_X. On définit la fonction caractéristique $\widetilde{f}_X$ pour cette v.a. par

$$\widetilde{f}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} f_X(k).$$

La fonction caractéristique est une généralisation de la f.g.m. Elle existe pour toute loi (et même dans le cas des lois où la f.g.m. n'existe pas). La fonction caractéristique est aussi appelée la transformée de Fourier (voir e.g. [66]). Les principales propriétés liées aux f.g.m. sont aussi valides pour les fonctions caractéristiques. Si $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où $X_1, ..., X_n$ sont des v.a. indépendantes, alors on a

$$\widetilde{f}_S(t) = \widetilde{f}_{X_1}(t) \times ... \times \widetilde{f}_{X_n}(t).$$

Dans le cas où la v.a. X est définie par

$$X = \begin{cases} B, I = 1 \\ 0, I = 0 \end{cases},$$

avec $I \sim Bern(q)$, alors on a

$$\widetilde{f}_X(t) = P_I\left(\widetilde{f}_B(t)\right) = 1 - q + q\widetilde{f}_B(t).$$

Si la v.a. X est définie selon une loi composée avec les hypothèses usuelles

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où la v.a. M obéit à une loi de fréquence, alors on a

$$\widetilde{f}_X(t) = P_M\left(\widetilde{f}_B(t)\right).$$

Soit le vecteur $\underline{f} = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})$. Le résultat de la FFT appliquée à $\underline{f}$ est un vecteur $\underline{\widetilde{f}} = \left(\widetilde{f}_0, ..., \widetilde{f}_{n-1}\right)$ où

$$\widetilde{f}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n} jk} f_k, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

La FFT produit aussi l'application inverse, la transformée inverse de Fourier rapide (notée IFFT), sous la forme suivante :

$$f_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}_k^{-\frac{2\pi i}{n} jk} \widetilde{f}_k, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Généralement, le résultat de la FFT dépend de la longueur n du vecteur. Le qualificatif «rapide» de la FFT vient du fait que l'algorithme sépare le vecteur en deux avant de produire les applications et il additionne les résultats. Pour une utilisation efficiente de la FFT, le vecteur $\underset{\sim}{\widetilde{f}}$ doit compter un nombre de composantes d'une longueur $n = 2^m$, où m est un entier élevé (ex : $m = 14$, 15, 16 ou plus).

6.5.2 Transformée de Fourier rapide et `R`

La FFT est programmée dans plusieurs logiciels, dont le logiciel `R`. Généralement, la fonction FFT programmée dans le logiciel permet de déterminer la fonction caractéristique d'une v.a. X à partir d'un vecteur des valeurs de sa fonction de masse de probabilité. Elle permet aussi de calculer les valeurs de la fonction de masse de probabilité d'une v.a. X à partir de sa fonction caractéristique. On explique comment appliquer la FFT en `R` dans différents contextes.

6.5.3 Somme de deux v.a. discrètes indépendantes

Soit une v.a. S où $S = X + Y$. Les v.a. X et Y sont des v.a. discrètes indépendantes avec fonctions de masse de probabilité f_X et f_Y. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_S de la v.a. S.

Algorithme 6.15 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire les vecteurs* $\underset{\sim}{f}_X$ *et* $\underset{\sim}{f}_Y$. *Ils doivent être de même longueur* 2^m, *ce qui est possible en ajoutant suffisamment de 0 à chacun des vecteurs.*
2. *Utiliser la fonction* `fft` *pour produire les vecteurs* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ *et* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$ *à partir des vecteurs* $\underset{\sim}{f}_X$ *et* $\underset{\sim}{f}_Y$.
3. *Faire le produit des deux vecteurs* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ *et* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$: $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_S = \underset{\sim}{\widetilde{f}}_X \times \underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$ *(i.e. la composante* i *de* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ *multiplie la composante* i *de* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$*)*
4. *Utiliser la fonction* `fft (inverse)` *pour produire le vecteur* $\underset{\sim}{f}_S$ *à partir du vecteur* $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_S$.

La procédure est illustrée dans le langage `R`. Les vecteurs $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ et $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$ doivent comporter chacun 2^m éléments où m est fixé de telle sorte que 2^m excède le nombre de valeurs non nulles de la fonction de masse de probabilité de la v.a. S. Par exemple, si $X \in \{0, 1, ..., 10\}$ (11 éléments) et $Y \in \{0, 1, ..., 20\}$ (21 éléments) alors $S \in \{0, 1, ..., 30\}$ (31 éléments). Donc, $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ et $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$ doivent avoir au moins 2^5 éléments. Il faut ajouter 21 «0» dans le vecteur de $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_X$ et 11 «0» dans le vecteur de $\underset{\sim}{\widetilde{f}}_Y$.

Exemple 6.16 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous un exemple de fonction* `R` *qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction* `fft` *déjà programmée en* `R`*. Ainsi, on choisit m préférablement grand (ex : m = 14, 15, 16 ou plus) pour obtenir des résultats de qualité.*

```
fft.directconvo<-function(m=16, fx, fy)
{
    aa <- 2^m
    nx <- length(fx)
    ny <- length(fy)
    ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
    fty <- fft(c(fy, rep(0, aa - ny)))
    fs <- Re(fft(ftx*fty, TRUE))/aa
    return(fs)
} □
```

On applique, dans l'exemple qui suit, la fonction `R` présentée à l'exemple 6.16.

Exemple 6.17 *Soit une v.a.* $S = X_1 + X_2$ *où les v.a. indépendantes* $X_1 \sim Pois\,(\lambda = 2.3)$ *et* $X_2 \sim BN\left(r = 3, q = \frac{1}{4}\right)$*. On obtient les valeurs suivantes avec la méthode fft en utilisant la* `fft.directconvo` *fournie à l'exemple 6.16 :*

k	0	10	20	30	40	50
$f_S\,(k)$	0.001567	0.070021	0.018271	0.002436	0.000250	0.000022

Les valeurs obtenues sont identiques à celles produites à l'exemple 6.1. □

6.5.4 Somme de n v.a. discrètes indépendantes

Soit une v.a. S où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les v.a. X_1, ..., X_n sont des v.a. discrètes indépendantes définies sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$ et avec fonctions de masse de probabilité f_{X_1}, ..., f_{X_n}. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_S de la v.a. S.

Algorithme 6.18 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire les vecteurs* $\underline{f}_{X_1}$, ..., $\underline{f}_{X_n}$ *avec un nombre égal à* 2^m *composantes, ce qui est fait en ajoutant suffisamment de 0.*
2. *Utiliser la fonction* `fft` *pour produire les vecteurs* $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}$, ..., $\underline{\widetilde{f}}_{X_n}$ *à partir des vecteurs* $\underline{f}_{X_1}$, ..., $\underline{f}_{X_n}$.
3. *Faire le produit des n vecteurs* $\underline{\widetilde{f}}_{X_1}$, ..., $\underline{\widetilde{f}}_{X_n}$: $\underline{\widetilde{f}}_S = \underline{\widetilde{f}}_{X_1} \times ... \times \underline{\widetilde{f}}_{X_n}$.
4. *Utiliser la fonction* `fft (inverse)` *pour produire le vecteur* $\underline{f}_S$ *à partir du vecteur* $\underline{\widetilde{f}}_S$.

On fournit un exemple de fonction R construite pour appliquer cette procédure.

Exemple 6.19 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous un exemple de fonction R qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction* `fft` *déjà programmée en* `R` *:*

```
fft.nrisks<-function(matff,v.n,m=14)
{
aa <- 2^m
nbrisks<-dim(matff)[1]
fx<-matff[1,]
nx <- length(fx)
ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
fts<-(ftx)^v.n[1]
    for (i in 2:nbrisks)
        {
        fx<-matff[i,]
        nx <- length(fx)
        ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
        fts<-fts*(ftx^v.n[i])
    }
    ffs <- Re(fft(fts, TRUE))/aa
return(ffs)
} □
```

Dans l'exemple suivant, on utilise la fonction de l'exemple 6.19.

Exemple 6.20 *Pour des fins d'illustration, on suppose un portefeuille de 200 contrats et on examine le nombre de sinistres pour l'ensemble du portefeuille. On suppose que* $X_i \sim BN(r_i, q_i)$ *où* $r_i = 2$, $i = 1, 2, ..., 100$, $r_i = 3$, $i = 101, 102, ..., 200$, $q_i = \frac{8}{10}$, $i = 1, 2, ..., 60$, $q_i = \frac{9}{10}$, $i = 61, 62, ..., 100$, $q_i = \frac{8.5}{10}$, $i = 101, 102, ..., 170$, $q_i = \frac{9.5}{10}$, $i = 171, 172, ..., 200$. *On obtient les valeurs suivantes de* f_S *où* $S = \sum_{i=1}^{200} X_i$ *en utilisant la fonction* `R` `fft.nrisks` *de l'exemple 6.19 :*

k	70	80	90	100	110	120
$f_S(k)$	0.023570	0.040784	0.024751	0.006029	0.000656	0.000035

À l'aide des valeurs obtenues pour f_S, *on détermine que* $E[S] = 80.68455$ *et que* $\mathrm{Var}(S) = 95.9613$. *Ces valeurs sont vérifiables car on sait évaluer les valeurs exactes de l'espérance et la variance de* S. □

6.5.5 Somme aléatoire (loi composée)

Soit une v.a. X qui obéit à une loi composée avec $X = B_1 + ... + B_M$ si $M > 0$ ou $X = 0$ si $M = 0$ en supposant les hypothèses usuelles. On suppose que les v.a. B_1, B_2, ... prennent des valeurs définies sur le support

$\{0, 1h, 2h, ...\}$. On veut calculer la fonction de masse de probabilité f_X de la v.a. X qui est aussi définie sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$.

Algorithme 6.21 *Les étapes sont les suivantes :*

1. *Construire le vecteur* $\underline{f}_B$. *Il important d'ajouter suffisamment de 0.*
2. *Utiliser la fonction* `fft` *pour produire le vecteur* $\widetilde{\underline{f}}_B$ *à partir du vecteur* $\underline{f}_B$.
3. *Faire le calcul à l'aide de la f.g.p. de* M *et du vecteur* $\widetilde{\underline{f}}_B$: $\widetilde{\underline{f}}_X = P_M\left(\widetilde{\underline{f}}_B\right)$.
4. *Utiliser la fonction* `fft (inverse)` *pour produire le vecteur* $\underline{f}_X$ *à partir du vecteur* $\widetilde{\underline{f}}_X$.

Une application de cet algorithme est donnée dans le prochain exemple.

Exemple 6.22 ***Exemple de fonction R.*** *On reproduit ci-dessous une fonction* `R` *construite dans le cas de la loi Poisson composée qui permet de faire ce calcul en ayant recours à la fonction* `fft` *déjà programmée en* `R`.

```
fft.poiscomposee<-function(lam, n, fx)
{
# 2**n = longueur du vecteur
# prendre n eleve (ex : n=12 ou plus)
# premiere masse de fx est Pr(X=0)
    aa <- 2^n
    nx <- length(fx)
    ftx <- fft(c(fx, rep(0, aa - nx)))
    fts<-exp(lam * (ftx - 1))
    fs <- Re(fft(fts, T))/aa
    return(fs)
} □
```

Avec les mêmes hypothèses que l'exemple 6.10 illustrant l'application de l'algorithme de Panjer dans le cas de la loi Poisson composée, on obtient des valeurs identiques pour f_X. On traite l'exemple suivant.

Exemple 6.23 *Soit une v.a.* X *définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles et $B \sim Pa(1.5, 5)$. *On teste le résultat asymptotique qui est fourni en (2.21) au chapitre 2 et qui concerne les distributions subexponentielles, soit*

$$\overline{F}_X(x) \simeq E[M]\,\overline{F}_B(x),$$

quand $x \to \infty$. *À cette fin, deux hypothèses sont considérées pour la distribution de la fréquence : (1)* $M \sim Pois(\lambda = 10)$ *et (2)* $M \sim BN\left(r = 0.5, q = \frac{r}{r+\lambda}\right)$ *de telle sorte que* $E[M] = 10$, *pour les deux hypothèses. Afin d'évaluer* $F_X(x)$, *on discrétise* F_B *en appliquant les méthodes* lower *et* upper *avec un pas* $h = 1$. *Les valeurs obtenues des trois approximations pour* $F_X(x)$ *sont les suivantes :*

x	$\overline{F}_X(x)$ *hyp(1) lower*	$\overline{F}_X(x)$ *hyp(2) lower*	$E[M]\overline{F}_B(x)$
1000	*0.00412294*	*0.00774507*	*0.00350918*
5000	*0.00032593*	*0.00035019*	*0.00031575*
10 000	*0.00011350*	*0.00011737*	*0.00011172*
50 000	*0.00001003*	*0.00001009*	*0.00001000*
100 000	*0.00000354*	*0.00000355*	*0.00000354*
500 000	*0.00000032*	*0.00000032*	*0.00000032*

x	$\overline{F}_X(x)$ *hyp(1) upper*	$\overline{F}_X(x)$ *hyp(2) upper*	$E[M]\overline{F}_B(x)$
1000	*0.00404723*	*0.00679330*	*0.00350918*
5000	*0.00032483*	*0.00034628*	*0.00031575*
10 000	*0.00011331*	*0.00011678*	*0.00011172*
50 000	*0.00001003*	*0.00001008*	*0.00001000*
100 000	*0.00000354*	*0.00000355*	*0.00000354*
500 000	*0.00000032*	*0.00000032*	*0.00000032*

De plus, les valeurs obtenues pour l'approximation de $VaR_\kappa(X)$ *sont fournies dans le tableau suivant :*

κ	$VaR_\kappa(X)$ *hyp(1) lower*	$VaR_\kappa(X)$ *hyp(2) lower*	$F_B^{-1}\left(1 - \frac{1-\kappa}{E[M]}\right)$
0.9	*181*	*275*	*102.7217*
0.99	*595*	*899*	*495*
0.999	*2 420*	*2 673*	*2315.794*
0.9999	*10 873*	*11 091*	*10 767.17*
0.99999	*50 101*	*50 313*	*49 995*
0.999999	*232 180*	*232 391*	*232 074.4*

κ	$VaR_\kappa(X)$ *hyp(1) upper*	$VaR_\kappa(X)$ *hyp(2) upper*	$F_B^{-1}\left(1 - \frac{1-\kappa}{E[M]}\right)$
0.9	*169*	*247*	*102.7217*
0.99	*584*	*843*	*495*
0.999	*2409*	*2632*	*2315.794*
0.9999	*10 862*	*11 058*	*10 767.17*
0.99999	*50 090*	*50 281*	*49 995*
0.999999	*232 169*	*232 360*	*232 074.4*

Pour des valeurs très élevées de x, *le résultat asymptotique est satisfaisant, i.e. le choix de la loi de* M *n'affecte par le comportement asymptotique de* $\overline{F}_X(x)$. *Comme approximation de* $\overline{F}_X(x)$, *le résultat asymptotique doit être utilisé avec prudence, notamment pour l'approximation de la mesure* VaR, *qu'elle a tendance à sous-estimer. Néanmoins, il peut être employé afin de produire une valeur approximative de la VaR pour des valeurs élevées de* κ, *e.g.* $\kappa > 0.9999$, *en particulier quand le paramètre* α *de la loi de Pareto est entre 1 et 2.* □

6.5.6 *Pot-pourri*

La FFT est notamment très utile pour agréger les coûts de plusieurs risques (notamment des lignes d'affaires). On a recours à l'exemple suivant pour l'expliquer.

Exemple 6.24 *On considère le portefeuille d'une compagnie d'assurance IARD. Le portefeuille est composé de deux lignes d'affaires : assurance habitation aux particuliers et assurance automobile aux particuliers. On suppose que tous les risques individuels sont indépendants.*

- *Assurance habitation (120 contrats). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a.* X *où*

$$X = \begin{cases} B, & I = 1, \\ 0, & I = 0, \end{cases}$$

avec $E[I] = 0.008$ *et* $B = U \times c$. *La v.a.* U *représente le pourcentage de dommage et la constante* c *représente la valeur de la résidence. Les v.a.* U *et* I *sont indépendantes. On suppose que*

$$\Pr\left(U = \frac{j}{20}\right) = \frac{0.25 \times 0.75^{j-1}}{1 - 0.75^{20}}, \quad j = 1, 2, ..., 20,$$

et que $c = 200\ 000$. *La v.a.* S^H_{TOT} *représente le montant total des sinistres pour l'ensemble de la ligne d'affaires en assurance habitation.*

- *Assurance automobile (100 contrats). Les 100 contrats sont divisés en deux classes A (75 contrats) et B (25 contrats). Les coûts pour un contrat sont représentés par la v.a.* X *où* $X \sim PComp(\lambda; F_C)$ *:*
  - ***Classe A****. On suppose que* $\lambda = 0.036$ *et que* $f_C(10\ 000j) = \Pr(C = 10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, *pour* $j \in \mathbb{N}^+$.
  - ***Classe B****. On suppose que* $\lambda = 0.054$ *et que* $f_C(10\ 000j) = \Pr(C = 10\ 000j) = 0.5 \times 0.5^{j-1}$, *pour* $j \in \mathbb{N}^+$.

  On définit la v.a. S^A_{TOT} *comme étant la somme des coûts pour l'ensemble de la ligne d'affaires en assurance automobile.*

Le montant total des sinistres pour l'ensemble du portefeuille est représenté par la v.a. S_{TOT} *où* $S_{TOT} = S^H_{TOT} + S^A_{TOT}$. *On constate que la v.a.* S^H_{TOT} *obéit à une loi binomiale composée et que* S^A_{TOT} *obéit à une loi Poisson composée. Avec les méthodes étudiées dans ce chapitre, on peut recourir à deux approches pour évaluer les valeurs de* $f_{S^A_{TOT}}$, $f_{S^H_{TOT}}$ *et* $f_{S_{TOT}}$. *Approche 1 : on évalue* $f_{S^A_{TOT}}$ *et* $f_{S^H_{TOT}}$ *à l'aide de l'algorithme de Panjer et on calcule en suite les valeurs de* $f_{S_{TOT}}$ *à l'aide du produit de convolution. Approche 2 : on calcule directement les valeurs de* $f_{S^A_{TOT}}$, $f_{S^H_{TOT}}$ *et* $f_{S_{TOT}}$ *à l'aide de la FFT. L'approche 2 est plus rapide que*

l'approche 1. On obtient les valeurs exactes suivantes de $f_{S_{TOT}^H}(10\ 000k)$, $f_{S_{TOT}^A}(10\ 000k)$ *et* $f_{S_{TOT}}(10\ 000k)$ *pour* $k = 0, 1, ..., 5$ *:*

k	$f_{S_{TOT}^A}(10\ 000k)$	$f_{S_{TOT}^H}(10\ 000k)$	$f_{S_{TOT}}(10\ 000k)$
0	*0.01742237*	*0.38141754*	*0.006645199*
1	*0.03057627*	*0.09257200*	*0.013275149*
2	*0.04400042*	*0.08056924*	*0.021016747*
3	*0.05554270*	*0.06966835*	*0.028935462*
4	*0.06437072*	*0.05989944*	*0.036412691*
5	*0.07015226*	*0.05124033*	*0.042980930*

De plus, on déduit que $VaR_{0.995}\left(S_{TOT}^A\right) = 300\ 000$, $VaR_{0.995}\left(S_{TOT}^H\right) = 240\ 000$ *et* $VaR_{0.995}(S_{TOT}) = 280\ 000$. □

L'exemple suivant traite d'un portefeuille avec une structure de dépendance fondée sur les chocs communs.

Exemple 6.25 *Soit un portefeuille avec trois lignes d'affaires dont les coûts sont représentés par les v.a.* X_1, X_2, X_3 *où* $X_i \sim PComp(\lambda_i; F_{B_i})$ *pour* $i = 1, 2, 3$. *Soient les v.a. indépendantes* $K_i \sim Pois(\alpha_i)$ *(*$i = 1, 2, 3$*),* $K_{12} \sim Pois(\alpha_{12})$, $K_{23} \sim Pois(\alpha_{23})$, $K_{13} \sim Pois(\alpha_{13})$, $K_{123} \sim Pois(\alpha_{123})$. *Le nombre de sinistres pour la ligne d'affaires* i *est défini par* M_i *(*$i = 1, 2, 3$*) où*

$$\begin{aligned} M_1 &= K_1 + K_{12} + K_{13} + K_{123}, \\ M_2 &= K_2 + K_{12} + K_{23} + K_{123}, \\ M_3 &= K_3 + K_{13} + K_{23} + K_{123}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que (M_1, M_2, M_3) *obéit à une loi de Poisson multivariée où*

$$\begin{aligned} M_1 &\sim Pois(\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{123}), \\ M_2 &\sim Pois(\lambda_2 = \alpha_2 + \alpha_{12} + \alpha_{23} + \alpha_{123}), \\ M_3 &\sim Pois(\lambda_3 = \alpha_3 + \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{123}). \end{aligned}$$

L'expression de la f.g.p. de (M_1, M_2, M_3) *est*

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2M_3}(t_1, t_2, t_3) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 t_1 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_2 t_2 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_3 t_3 - 1} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{12} t_1 t_2 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{13} t_1 t_3 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{23} t_2 t_3 - 1}\mathrm{e}^{\alpha_{123} t_1 t_2 t_3 - 1}. \end{aligned}$$

Les montants de sinistres sont indépendants de (M_1, M_2, M_3). *On suppose que* $B_1 \sim LN\left(\mu_1 = 4.625, \sigma_1^2 = 1^2\right)$, $B_2 \sim LN\left(\mu_2 = 4, \sigma_2^2 = 1.5^2\right)$ *et* $B_3 \sim LN\left(\mu_3 = 5, \sigma_3^2 = 0.5^2\right)$. *On note que* $E[B_i] = 168.1741$, $i = 1, 2, 3$. *De plus,* $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2.5$, $\alpha_3 = 3.5$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{13} = 1.2$, $\alpha_{23} = 1.5$ *et* $\alpha_{123} = 0.4$. *On veut évaluer* F_S *où* $S = X_1 + X_2 + X_3$. *On déduit que*

$E[S] = 2791.691$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 2\ 319\ 520$. *De plus, on sait que*

$$\widetilde{f}_S(t) = P_{M_1,M_2M_3}\left(\widetilde{f}_{B_1}(t), \widetilde{f}_{B_2}(t), \widetilde{f}_{B_3}(t)\right). \tag{6.23}$$

Afin d'utiliser (6.23), on approxime B_1, B_2 *et* B_3 *par les v.a. discrètes* B_1', B_2' *et* B_3' *en ayant recours à la méthode de dispersion de la masse avec préservation de l'espérance (avec* $h = 100$*). Alors, on approxime la v.a.* S *par la v.a.* S' *où*

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}_{S'}(t) &= P_{M_1,M_2M_3}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t), \widetilde{f}_{B_2'}(t), \widetilde{f}_{B_3'}(t)\right). \\
&= \mathrm{e}^{\alpha_1\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_2\left(\widetilde{f}_{B_2'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_3\left(\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{12}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_2'}(t)-1\right)} \\
&\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{13}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{23}\left(\widetilde{f}_{B_3'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}\mathrm{e}^{\alpha_{123}\left(\widetilde{f}_{B_1'}(t)\widetilde{f}_{B_2'}(t)\widetilde{f}_{B_3'}(t)-1\right)}.
\end{aligned}$$

On utilise la transformée rapide de Fourier pour obtenir $\widetilde{f}_{S'}(t)$ *et ensuite l'inverser afin de produire les valeurs de* $f_{S'}(kh)$, $k \in \mathbb{N}$. *On choisit* $h = 1$ *pour la discrétisation et on calcule* $f_{B_i'}(kh)$ *pour* $k = 0, 1, ..., 10^6$. *Les calculs ont été effectués en* `R` *en fixant* $2^{22} = 4\ 194\ 304$. *Comme prévu, on obtient* $E[S'] = 2791.691$ *et* $\mathrm{Var}(S') = 2\ 319\ 713$, *légèrement supérieure à* $\mathrm{Var}(S)$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $f_{S'}(kh)$ *pour* $k = 1000, 2000, ..., 10\ 000$:

k	$f_{S'}(kh)$	$F_{S'}(kh)$
1000	*0.00012552*	*0.03626635*
2000	*0.00036790*	*0.30295692*
3000	*0.00028575*	*0.65045957*
4000	*0.00013118*	*0.85406644*
5000	*0.00005080*	*0.93915836*
6000	*0.00001995*	*0.97195940*
7000	*0.00000864*	*0.98533744*
8000	*0.00000420*	*0.99143206*
9000	*0.00000227*	*0.99454508*
10 000	*0.00000134*	*0.99629763*

On utilise $VaR_\kappa(S')$ *et* $TVaR_\kappa(S')$ *pour produire une approximation de* $VaR_\kappa(S)$ *et* $TVaR_\kappa(S)$ *avec* $\kappa = 0.5$, *0.95, 0.99, 0.995, 0.999 :*

κ	$VaR_\kappa(S')$	$TVaR_\kappa(S')$
0.5	*2534*	*3791.523*
0.95	*5239*	*6984.296*
0.99	*7694*	*10 662.34*
0.995	*9213*	*12 989.67*
0.999	*14 622*	*21 035.57*

Il est démonté au chapitre 7 que l'approximation de $TVaR_\kappa(S)$ *par* $TVaR_\kappa(S')$ *est conservatrice pour toute valeur de* κ. □

6.5.7 Commentaires

L'évaluation par la FFT est très efficace en termes de temps de calcul. Dans les exemples présentés dans ce chapitre, les temps de calcul obtenus par la FFT ont été plus rapides que ceux obtenus avec les autres méthodes récursives. La méthode est simple d'application.

6.6 Distribution mélange d'Erlang

Soit la v.a. Y obéissant à la loi mélange d'Erlang avec un paramètre d'échelle commun dont la fonction de densité et la fonction de répartition sont

$$f_Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k h(x; k, \beta) \text{ et } F_Y(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),$$

où ζ_i est un poids positif attribué à la i-ème distribution d'Erlang et β est le paramètre d'échelle commun. On peut aussi tenir compte du cas où il y a une masse de probabilité non nulle à 0, ce qui conduit à

$$F_Y(x) = \zeta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k H(x; k, \beta),$$

où $\zeta_0 = \Pr(K = 0) \geq 0$. La loi mélange d'Erlang s'interprète aussi comme une somme aléatoire où

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} C_k, & K > 0 \\ 0, & K = 0 \end{cases}, \tag{6.24}$$

avec $C_k \sim Exp(\beta)$ et K est une v.a. discrète dont la fonction de masse de probabilité est $f_K(k) = \Pr(K = k) = \zeta_k$, $k \in \mathbb{N}$, et la f.g.p. est $P_K(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k s^k$. Aussi, la f.g.m. de la v.a. Y est $M_Y(r) = P_K(M_C(r))$ avec $M_C(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$. On utilise la notation $Y \sim MixErl(\underline{\zeta}, \beta)$ avec $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, ...)$. L'interprétation de la distribution mélange d'Erlang sous la forme d'une somme aléatoire permet d'écrire directement l'expression pour la $TVaR_\kappa(Y)$

$$TVaR_\kappa(Y) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{k}{\beta} \overline{H}(VaR_\kappa(Y); k+1, \beta).$$

Les autres caractéristiques de la distribution sont fournies en annexe.

La classe des distributions mélange d'Erlang est dense dans la classe des distributions avec support positif comme l'indique le théorème suivant.

Théorème 6.26 ***Théorème de Tijms.*** *Soit une v.a. positive X avec une fonction de répartition F_X. On définit la fonction de répartition F_h par*

$$F_h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(F_X(jh) - F_X((j-1)h)\right) H\left(x; j, \frac{1}{h}\right), \ x \geq 0.$$

Alors, on a

$$\lim_{h \to \infty} F_h(x) = F_X(x),$$

en tout point de continuité x de F_X.

Preuve. Ce résultat est démontré dans [102]. ■

Il est donc possible d'approximer toute distribution avec support positif par une distribution mélange d'Erlang.

La classe des distributions mélange d'Erlang contient bien entendu la distribution exponentielle et la distribution Erlang comme cas particulier. La distribution mélange d'exponentielles fait aussi partie de cette classe.

Proposition 6.27 ***Mélange d'exponentielles.*** *Soit une v.a. Y obéissant à une loi mélange d'exponentielles avec*

$$f_Y(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x},$$

où $p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. De plus, on suppose que $\beta_i < \beta_m$ pour $i = 1, 2, ..., m-1$ (sans perte de généralité). Alors, on démontre que $Y \sim MixErl\left(\underset{\sim}{\zeta}, \beta_m\right)$ avec $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) + p_m$, et

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{m-1} p_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_m}\right) \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}, \tag{6.25}$$

pour $k \in \{2, 3, ...\}$. On cesse de calculer les valeurs de ζ_k à k_0 de telle sorte que $\sum_{k=1}^{k_0} \zeta_k = 1$.

Preuve. La f.g.m. de Y est donnée par

$$M_Y(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}. \tag{6.26}$$

Pour $i = 1, 2, ..., m-1$, on peut écrire (voir l'expression (2.1) dans [108])

$$\begin{aligned}\frac{\beta_i}{\beta_i - t} &= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta_m}}{1-\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)\frac{\beta_m}{\beta_m - t}}\right) \\ &= \frac{\beta_m}{\beta_m - t}\frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^k\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k \\ &= \frac{\beta_i}{\beta_m}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\beta_i}{\beta_m}\right)^{k-1}\left(\frac{\beta_m}{\beta_m - t}\right)^k, \end{aligned} \tag{6.27}$$

ce qui correspond à la fonction de répartition d'une loi mélange d'Erlang dont le paramètre d'échelle est β_m. On remplace (6.27) dans (6.26) en obtient la relation en (6.25). ■

Ce résultat est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 6.28 *Soit la v.a. Y obéissant au mélange d'exponentielles dont la fonction de densité est*

$$f_Y(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{24}\mathrm{e}^{-\frac{1}{24}x} + \frac{2}{3}\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}x}, \quad x \geq 0.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= 0.75h\left(x; 1, 6^{-1}\right) + 0.0625h\left(x; 2, 6^{-1}\right) + ... \\ &\quad + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^9 h\left(x; 10, 6^{-1}\right) + ... + \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^{99} h\left(x; 100, 6^{-1}\right). \end{aligned}$$

Pour cet exemple, on observe que $\sum_{k=1}^{100}\zeta_k = 1$. □

On a aussi le résultat suivant lié à la composition.

Proposition 6.29 ***Distribution composée avec montants de sinistres de loi mélange d'Erlang.*** *Soit une v.a. X qui obéit à une loi composée telle que*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où $B \sim MixErl\left(\underline{\zeta}, \beta\right)$ avec $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, ...)$. Alors, on a

$$M_X(r) = P_M(M_B(r)) = P_M(P_K(M_C(r))) = P_{M^*}(M_C(r)),$$

où $P_{M^*}(s) = P_M(P_K(s)) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k s^k$ est la f.g.p. de M^* et $M_C(r)$ est la f.g.m. de $C \sim Exp(\beta)$. Cela signifie que $X \sim MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$ avec

$\underline{\xi} = (\xi_0, \xi_1, ...)$ *i.e. que l'on peut exprimer la v.a.* X *sous la forme*

$$X = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M^*} C_k, & M^* > 1 \\ 0, & M^* = 0 \end{cases}, \tag{6.28}$$

où la v.a. discrète M^* *est définie par*

$$M^* = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} K_j, & M > 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

et K_1, K_2, ... *forment une suite de v.a. i.i.d. distribuées comme la v.a.* K. *La f.m.p. de* M^* *est désignée par* $\Pr(M^* = k) = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$. *Les v.a.* C_1, C_2, ... *sont i.i.d (avec* $C_i \sim C$*). Elles sont aussi indépendantes de* M^*. *Les valeurs de* ξ_k $(k \in \mathbb{N})$ *sont calculées avec l'algorithme de Panjer (si la distribution de* M *appartient à la classe (a,b,0) ou la FFT.* □

Preuve. Voir [108]. ■

Le résultat de la proposition 6.29 est mis en pratique à l'exemple suivant.

Exemple 6.30 *Soient les v.a. indépendantes* $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$ *avec* $\lambda_i = i$ *et* $B_i \sim Erl\left(6-i, \frac{1}{100}\right)$ *pour* $i = 1, 2, ..., 5$. *La v.a.* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp(\lambda = 15, F_D)$ *où* $F_D(x) = \sum_{i=1}^{5} \frac{\lambda_i}{15} H\left(x; 6-i, \frac{1}{100}\right)$. *En appliquant la proposition 6.29,* S *obéit aussi à une loi* $MixErl\left(\underline{\xi}, \beta = \frac{1}{100}\right)$. *On indique quelques valeurs de* ξ_k *pour* $k = 0, 1, 2, 20, 21, 22$ *dans le tableau suivant :*

k	0	1	2
ξ_k	3.059×10^{-7}	1.5295×10^{-6}	5.0474×10^{-6}
k	20	21	22
ξ_k	0.01444919	0.01693319	0.01952672

On déduit les valeurs suivantes de $VaR_\kappa(S)$ *pour* $\kappa = 0.5,\ 0.95,\ 0.995$ *: 3409.363, 5589.821, 7031.789.* □

On présente un dernier résultat lié à la convolution.

Proposition 6.31 ***Somme finie de v.a. obéissant à des mélanges d'Erlang.*** *On considère un portefeuille de* n *risques indépendants* X_1, ..., X_n *où* $X_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta_i\right)$ *avec* $\underline{\zeta}^{(i)} = \left(\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, ...\right)$ *et* $\zeta_k^{(i)} = \Pr(K_i = k)$, $\beta_i = \beta$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *On définit* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Alors,* $S \sim MixErl(\underline{\nu}, \beta)$ *avec* $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$ *i.e. la v.a.* S *obéit aussi à un mélange d'Erlang avec* $\nu_k = \Pr(K_1 + ... + K_n = k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$. *En effet, on a*

$$\begin{aligned} M_S(r) &= E\left[e^{rS}\right] = \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{rX_i}\right] \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_{K_i}(M_C(r)) = P_{K_1+...+K_n}(M_C(r)), \end{aligned}$$

où $P_{K_1+...+K_n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k s^k$ *est la f.g.p. de* $K_1 + ... + K_n$. *Les valeurs de* ν_k *sont obtenues, soit avec l'algorithme de produit de convolution, soit avec la FFT.* □

Preuve. Voir [108]. ■

On illustre le résultat de la proposition 6.31 dans le prochain exemple.

Exemple 6.32 *Soient les deux v.a.*

$$X_1 \sim BNComp\left(r_1 = 2, q_1 = 0.25; F_{B_1}\right)$$

et

$$X_2 \sim BNComp\left(r_2 = 1.5, q_2 = 0.5; F_{B_2}\right),$$

où les v.a. B_1 *et* B_2 *obéissent à des lois mélanges d'exponentielles dont les fonctions de densité sont*

$$\begin{aligned} f_{B_1}(x) &= \frac{1}{5}\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}x} + \frac{4}{5}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},\ x \geq 0, \\ f_{B_2}(x) &= \frac{1}{10}\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}x} + \frac{9}{10}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},\ x \geq 0. \end{aligned}$$

On montre que $S = X_1 + X_2 \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$. *Afin d'obtenir les valeurs de* $\underline{\nu}$, *on procède par étapes.*

En premier lieu, on utilise le résultat de la proposition (6.27) pour représenter les distributions de B_1 *et* B_2 *sous forme de mélange d'Erlang i.e.* $B_i \sim MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$ *où il faut calculer les valeurs des composantes de* $\underline{\zeta}^{(i)}$ *pour* $i = 1, 2$.

Ensuite, on applique le résultat de la proposition (6.29) afin de représenter les distributions de X_1 *et* X_2 *sous forme de mélange d'Erlang (*$X_i \sim MixErl\left(\underline{\xi}^{(i)}, \beta = \frac{1}{2}\right)$*) et de calculer les valeurs des composantes de* $\underline{\zeta}^{(i)}$ *pour* $i = 1, 2$.

Finalement, on a recours à la proposition (6.31) pour représenter la distribution de S *sous la forme d'un mélange d'Erlang (*$S \sim MixErl\left(\underline{\nu}, \beta = \frac{1}{2}\right)$*) et pour calculer les valeurs des composantes de* $\underline{\nu}$. *Les premières valeurs de* ν_k *pour* $k = 0, 1, ..., 4$ *sont fournies dans le tableau suivant :*

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
ν_k	*0.022097*	*0.042924*	*0.055101*	*0.059488*	*0.058952*

Il est alors possible de calculer les valeurs de $VaR_\kappa(S)$ *pour* $\kappa = 0.5, 0.95, 0.995$ *: 19.7584, 78.6563, 133.2851.* □

6.7 Approximation Poisson composée

On examine maintenant l'application de l'approximation Poisson composée dans l'évaluation de la distribution des coûts totaux pour un portefeuille dont les risques sont modélisés selon l'approche indemnitaire (ex : risques vie ou de crédit) ou l'approche forfaitaire (ex : risques IARD ou soins médicaux).

L'approche pour évaluer la distribution de S selon l'approximation Poisson composée se fait en deux temps. On approxime la v.a. discrète S par une v.a. T qui obéit à une loi Poisson composée. Le calcul de f_T (et, par le fait même, de F_T) est réalisé avec l'algorithme de Panjer ou la FFT. On utilise F_T pour évaluer approximativement F_S . On présente l'approximation Poisson composée dans le cas particulier de l'approche indemnitaire et le cas général des approches indemnitaire ou forfaitaire.

6.7.1 Cas particulier

On considère un portefeuille composé de m contrats d'assurance vie sur une période fixe (e.g. un an). Pour le contrat i, on note le montant de prestation par b_i $(i = 1, 2, ..., m)$ que l'on suppose entier. La probabilité de décès de l'assuré est représentée par q_i $(i = 1, 2, ..., m)$. La valeur attribuée à q_i dépend de divers facteurs liés à la tarification notamment l'âge, le sexe, etc. On définit la v.a. $X_i = b_i \times I_i$, où I_i est une v.a. de Bernoulli telle que

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } i \text{ décède} \\ 0, & \text{si l'assuré } i \text{ survit} \end{cases},$$

avec $\Pr(I_i = 1) = q_i = 1 - \Pr(I_i = 0) = 1 - p_i$. La v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ désigne le montant total des sinistres pour le portefeuille. Pour l'ensemble de la section, on suppose que les coûts individuels des assurés sont indépendants. On procède selon les deux étapes suivantes pour définir la v.a. T de loi Poisson composée.

À la première étape, on approxime chaque $X_i = b_i I_i$ $(i = 1, ..., m)$ par une v.a. Y_i définie par $Y_i = b_i \times M_i$, où la v.a. $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., m)$. On peut faire deux choix pour définir λ_i :

- **choix 1 :** on définit λ_i de telle sorte que $E[N_i] = \lambda_i = E[I_i] = q_i \quad (i = 1, ..., m)$;
- **choix 2 :** on définit λ_i de telle sorte que $\Pr(N_i = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda_i} = \Pr(I_i = 0) = 1 - q_i \quad (i = 1, ..., m)$, ce qui implique que $\lambda_i = -\ln(1 - q_i)$, pour $i = 1, ..., m$.

Cette approximation est possible parce que la valeur de q_i est relativement petite, ce qui implique que la probabilité que N_i prenne

des valeurs supérieures à 1 est presque nulle i.e. $\Pr(N_i > 1) \cong 0$. Cela est illustré dans le prochain exemple.

Exemple 6.33 *Soit la v.a.* $M \sim Pois(\lambda)$. *Dans le tableau suivant, on présente les valeurs de* $\Pr(M > 1) = 1 - e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$ *dans les cas où* λ *est défini selon les choix 1 et 2 avec des valeurs plausibles de probabilités de décès :*

q	$\lambda = q$	$\lambda = -\ln(1-q)$
0.0001	*0.000000*	*0.000000*
0.0005	*0.000000*	*0.000000*
0.0010	*0.000000*	*0.000001*
0.0050	*0.000012*	*0.000013*
0.0100	*0.000050*	*0.000050*
0.0500	*0.001209*	*0.001271*
0.1000	*0.004679*	*0.005176*
0.2000	*0.017523*	*0.021485*

Les probabilités de décès pour une personne de 20, 40, 60 et 80 ans sont de l'ordre de 0.0004, 0.0013, 0.0092, 0.0741. Dans le contexte des risques de crédit, les probabilités de défaut sont généralement inférieures à 10 %. □

Dans une deuxième étape, on définit la v.a. T comme étant la somme des v.a. Y_1, ..., Y_n, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. En appliquant la proposition 3.3, il en résulte que la v.a. $T \sim PComp(\lambda, F_C)$, avec $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} 1_{[b_1,\infty)}(x) + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda} 1_{[b_m,\infty)}(x).$$

Ensuite, on approxime la v.a. S par la v.a. T. On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour calculer les valeurs de la f_T. Si on définit les λ_i selon le choix 1, il en résulte que $E[T] = E[S]$. Par contre, si l'on fixe les λ_i selon le choix 2, on a $\Pr(T = 0) = \Pr(S = 0)$.

Dans le prochain exemple, on présente une application élaborée de l'approximation Poisson composée permettant de comparer les valeurs résultant de l'approximation avec les valeurs exactes qui ont été obtenues en utilisant directement la FFT.

Exemple 6.34 *On considère un portefeuille d'assurance vie temporaire 1 an de 100 participants. Les montants de prestation (exprimés en multiples de 10 000) sont 1, 2, 3, 4 et 5. Les participants peuvent être âgés de 25, 35 ou 45 ans. Les taux de décès proviennent de la table de mortalité GAM-83. La répartition des participants par âge et montant de prestation est présentée dans le tableau suivant :*

montant	$q_{25} = 0.000464$	$q_{35} = 0.00086$	$q_{45} = 0.002183$	*Total*
10 000	*4*	*5*	*8*	*17*
20 000	*8*	*10*	*6*	*24*
30 000	*7*	*9*	*5*	*21*
40 000	*4*	*7*	*10*	*21*
50 000	*5*	*6*	*6*	*17*
Total	*28*	*37*	*35*	*100*

On déduit que le montant total des sinistres S peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 2\ 970\ 000\}$. L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 3600$ et $\sqrt{\text{Var}(S)} = 11\ 445.26$. On présente dans le tableau suivant les valeurs exactes de F_S obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T produites avec l'algorithme de Panjer où on suppose que $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 100$) :

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	*0.88575*	*0.88584*	*9*	*0.99972*	*0.99970*
1	*0.90671*	*0.90677*	*10*	*0.99993*	*0.99992*
2	*0.92948*	*0.92952*	*11*	*0.99996*	*0.99996*
3	*0.94945*	*0.94946*	*12*	*0.99998*	*0.99998*
4	*0.97654*	*0.97652*	*13*	*0.99999*	*0.99999*
5	*0.99593*	*0.99588*	*14*	*1.00000*	*1.00000*
6	*0.99725*	*0.99721*	*15*	*1.00000*	*1.00000*
7	*0.99832*	*0.99828*	*..*	*...*	*...*
8	*0.99913*	*0.99911*	*297*	*1.00000*	*1.00000*

On constate que les valeurs de F_T sont très près de F_S, ce qui justifie fortement l'utilisation de l'approximation Poisson composée.

On suppose que le nombre de participants dans chaque classe du régime est multiplié par 5, c'est-à-dire que le nombre total de participants est de 500. Le montant total des sinistres S peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{0, 10\ 000, 20\ 000, ..., 14\ 850\ 000\}$. L'espérance et l'écart type de S sont $E[S] = 18\ 100$ et $\sqrt{\text{Var}(S)} = 25\ 592.4$. Les valeurs exactes de F_S obtenues avec la FFT et les valeurs de F_T produites avec l'algorithme de Panjer selon l'approche où $\lambda_i = q_i$ pour $i = 1, 2, ..., 500$ sont présentées dans le tableau suivant :

k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$	k	$F_S(10\ 000k)$	$F_T(10\ 000k)$
0	*0.54521*	*0.54548*	*15*	*0.99951*	*0.99950*
1	*0.60971*	*0.60990*	*20*	*0.99998*	*0.99998*
2	*0.68284*	*0.68301*	*21*	*0.99999*	*0.99999*
3	*0.75099*	*0.75108*	*22*	*0.99999*	*0.99999*
4	*0.84404*	*0.84405*	*23*	*1.00000*	*1.00000*
5	*0.91838*	*0.91829*	*...*	*...*	*...*
10	*0.99211*	*0.99205*	*1485*	*1.00000*	*1.00000*

La qualité de l'approximation de F_S par F_T demeure excellente. □

6.7.2 Cas général

La présente sous-section est une extension du contenu de la sous-section précédente. On définit les coûts du portefeuille par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

$(i = 1, ..., m)$. À nouveau, on procède en deux étapes pour définir la v.a. T de la loi Poisson composée qui approxime la v.a. S. La première étape

réside à approximer chaque v.a. X_i par une v.a. Y_i définie par

$$Y_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N_i} B_{i,j}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où la v.a. $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $(i = 1, 2, ..., m)$ et $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... est une suite de v.a. i.i.d. (convention : $B_{i,j} \sim B_i$) indépendantes de M_i. Comme précédemment, on peut faire les choix 1 et 2 pour définir λ_i $(i = 1, 2, ..., m)$. À la deuxième étape, on définit la v.a. T comme étant la somme des v.a. Y_i $(i = 1, 2, ..., m)$ de la loi Poisson composée, soit $T = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. En vertu de la proposition 3.3, il en résulte que $T \sim PComp(\lambda, F_C)$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et

$$F_C(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} F_{B_1}(x) + ... + \frac{\lambda_m}{\lambda} F_{B_m}(x).$$

On utilise l'algorithme de Panjer ou la FFT pour évaluer f_T. Dans le cas où les v.a. B_1, ..., B_m sont continues, il en résulte que la v.a. C est aussi continue. Il suffit de discrétiser F_C et d'appliquer l'algorithme de Panjer ou la FFT pour une loi Poisson composée.

Exemple 6.35 *Les coûts pour un portefeuille composé de 200 titres avec risques de défaut répartis en 8 classes sont définis par la v.a. S où*

$$S = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{i,j,k}.$$

La v.a. $X_{i,j,k}$ représente les pertes éventuelles pour le titre k de la classe (i, j), avec $k = 1, 2, ..., n_{ij}$, $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2$. On définit $X_{i,j,k} = B_{i,j,k} \times I_{i,j,k}$ avec $I_{i,j,k} \sim Bern(q_j)$ et $B_{i,j,k} \sim B_i$, $k = 1, 2, ..., n_{ij}$, $i = 1, 2, 3, 4$ et $j = 1, 2$. Selon les caractéristiques du titre, la probabilité de défaut est q_j, où $q_j = 0.01$ ou 0.05. De plus, les coûts résultants d'un défaut B_i prennent des valeurs qui n'excèdent par leur capital en vigueur $m_i \in \{1000, 2000, 5000, 10\,000\}$. La fonction de masse de probabilité de B_j est désignée par f_{B_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$. Les informations à propos du portefeuille sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

i	j	q_j	m_i	n_{ij}	i	j	q_j	m_i	n_{ij}
1	1	0.01	1000	30	1	2	0.05	1000	10
2	1	0.01	2000	40	2	2	0.05	2000	20
3	1	0.01	5000	25	3	2	0.05	5000	35
4	1	0.01	10 000	25	4	2	0.05	10 000	15

De plus, on a les informations suivantes :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{B_1}(1000k)$	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_2}(1000k)$	0.6	0.4	–	–	–	–	–	–	–	–
$f_{B_3}(1000k)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1	–	–	–	–	–
$f_{B_4}(1000k)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05

On construit l'approximation Poisson composée en définissant les paramètres de la loi de Poisson selon le choix 1. On déduit que $\lambda = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} n_{ij}q_j = 5.2$ *et*

$$\begin{aligned} f_C(1000k) &= \frac{0.8}{5.2}f_{B_1}(1000k) + \frac{1.4}{5.2}f_{B_2}(1000k) \\ &\quad + \frac{2}{5.2}f_{B_3}(1000k) + \frac{0.95}{5.2}f_{B_4}(1000k), \end{aligned}$$

pour $k = 1, 2, ..., 10$ *et* $f_C(k) = 0$ *ailleurs. Dans le tableau ci-dessous, on reproduit les valeurs de* $F_S(k)$ *et* $F_T(k)$*, ce qui nous permet d'apprécier la qualité de l'approximation Poisson composée :*

k	$F_S(1000k)$	$F_T(1000k)$
0	0.004944	0.005517
10	0.345661	0.350454
20	0.804856	0.802274
30	0.969703	0.967215
40	0.997156	0.996545
50	0.999822	0.999744

À partir des valeurs obtenues, on détermine que $E[T] = 14.26$*, qui est égale à* $E[S]$ *puisque l'approximation est bâtie sur le choix 1. Au chapitre 7, on compare le comportement de* S *et* T *(en fonction des choix 1 et 2).* □

6.8 Notes bibliographiques

L'algorithme de Panjer, initialement proposé dans [88], est très populaire en actuariat. On peut trouver des détails concernant l'algorithme de Panjer dans [66], ainsi que dans e.g. [89] et [93]. Voir aussi [99] pour un exposé récent et complet sur les méthodes récursives. Les méthodes de discrétisation sont discutées dans e.g. [29], [66] et [89]. L'algorithme de convolution pour une somme de v.a. i.i.d. est présenté dans e.g. [29] , [66] et [93]. La transformée rapide de Fourier est présentée dans e.g. [66] et [93]. Une comparaison de l'algorithme de Panjer et la transformée rapide de Fourier est faite dans [35]. On lira [107] et [108] pour une introduction à la distribution mélange d'Erlang. L'approximation Poisson composée est aussi traitée dans e.g. [66] et [93]. Voir aussi e.g. [6] pour un exposé général sur l'approximation Poisson.

6.9 Exercices

1. Le nombre total de sinistres pour un portefeuille d'assurance automobile composé de 3 classes est défini par la v.a. $N = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j} M_{j,i}$ où $n_1 = 40$, $n_2 = 50$, $n_3 = 30$, $M_{1,i} \sim Pois(0.04)$

$(i = 1, 2, ..., n_1)$, $M_{2,i} \sim BN(2, 0.97)$ $(i = 1, 2, ..., n_2)$, $M_{3,i} \sim BN(3, 0.99)$ $(i = 1, 2, ..., n_3)$, v.a. $M_{j,i}$ = nombre de sinistres pour le contrat i de la classe j $(j = 1, 2, 3)$. Tous les contrats sont indépendants.

Calculer $f_N(k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

2. Les coûts pour un portefeuille de $n = 100$ contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les coûts des contrats $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. Pour $i = 1, 2, ..., n$, $X_i \sim X \sim BNComp(r, q; F_B)$ avec $r = 0.2$, $q = \frac{1}{1.2}$ et $f_B(1000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.

   En utilisant l'algorithme de Panjer, évaluer $f_S(1000j)$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.

3. On considère un contrat d'assurance habitation pour le volet protection incendie pour la résidence unifamiliale seulement. On suppose qu'au plus un incendie peut survenir pour une résidence au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par X, où

$$X = \begin{cases} B, & I = 1 \\ 0, & I = 0 \end{cases},$$

   avec $E[I] = 0.005$ et $B = U \times c$. La v.a. U représente le pourcentage de dommage et la constante c représente la valeur de la résidence. Les v.a. U et I sont indépendantes. On suppose que $\Pr\left(U = \frac{1}{2}\right) = 0.6$, $\Pr\left(U = \frac{2}{2}\right) = 0.4$ et que $c = 200\ 000$. On suppose que le même type de contrat est émis à 100 résidences. Les contrats sont supposés indépendants. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ en prenant la convention que $X_i \sim X$, $i = 1, 2, ..., 100$.

   Calculer $f_S(100\ 000k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

4. Les coûts totaux pour portefeuille d'assurance automobile de la compagnie d'assurance générale ABC sont définis par la v.a. $S = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}$ où la v.a. $X_{j,i}$ représente les coûts pour le contrat i dans la classe j, pour $i = 1, 2, ..., n_j$ $(j = 1, 2)$. Les v.a. $X_{1,1}$, ..., X_{1,n_1}, $X_{2,1}$, ..., X_{1,n_2} sont indépendantes. De plus, $X_{j,i} \sim PComp(\lambda_j; F_{B_j})$ avec $\lambda_1 = 0.036$, $\lambda_2 = 0.054$, $f_{B_1}(10\ 000k) = 0.4 \times 0.6^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ et $f_{B_2}(10\ 000k) = 0.5 \times 0.5^{k-1}$ $(k \in \mathbb{N}^+)$. On mentionne que $E[B_1] = 25\ 000$, $E[B_2] = 20\ 000$, $n_1 = 120$ et $n_2 = 80$.

   (a) Calculer l'espérance S.

   (b) Indiquer la loi et les paramètres de la loi de S.

   (c) Utiliser l'algorithme de Panjer pour calculer $f_S(10\ 000k)$ pour $k = 0$, 10, 20, 30.

(d) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$, pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

5. Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes avec $X_1 \sim LN\left(8, 1^2\right)$ et $X_2 \sim Ga\left(4, \frac{1}{1000}\right)$. Pour $i = 1, 2$, on approxime X_i par $\widetilde{X}_i$ en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 (suggestion : il est suffisant de discrétiser sur le support $\{0, 1000, ..., 500\ 000\}$. On approxime la v.a. S par la v.a. $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0, 1000, ...\}$

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$, pour $k = 10$, 20 et 30.

   (b) Utiliser $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ pour approximer $VaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995.

6. Les coûts pendant une semaine pour une compagnie sont définis par la v.a. X où $X \sim BNComp(r, q; F_B)$, avec $r = 0.4$, $q = \frac{2}{3}$, $B = \min(C; 5000)$ et $C \sim Weibull\left(0.8, \frac{1}{1000}\right)$. On utilise la méthode *lower* pour approximer la v.a. B par la $\widetilde{B} \in \{1000, 2000, ..., 5000\}$. Cela conduit à l'approximation de la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, ...\}$.

   (a) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{B}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 5$.

   (b) Calculer les valeurs de $f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 7$.

   (c) Approximer $VaR_{0.99}(X)$ par $VaR_{0.99}\left(\widetilde{X}\right)$.

7. Les coûts d'un contrat d'assurance IARD sont définis par la v.a. $X \sim PComp(\lambda; F_B)$ où $\lambda = 2$ et $B \sim Exp\left(\frac{1}{10\ 000}\right)$. On évalue approximativement la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X}$ qui résulte de la discrétisation de la v.a. B avec un pas de discrétisation $h = 1000$. Cela signifie que $\widetilde{B}$ et $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, ...\}$. On a recours à trois approches pour discrétiser la v.a. B.

   (a) Évaluer $E[X]$.

   (b) Méthode *upper*. Avec l'algorithme de Panjer ou la FFT, déterminer les valeurs $f_{\widetilde{X}}(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de ces valeurs, évaluer $F_{\widetilde{X}}(1000k)$, pour $k = 0, 5, 10$, $E\left[\widetilde{X}\right]$ et $E\left[\max\left(\widetilde{X} - 150\ 000; 0\right)\right]$.

   (c) Méthode *lower*. Avec l'algorithme de Panjer ou la FFT, déterminer les valeurs $f_{\widetilde{X}}(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de ces valeurs, évaluer $F_{\widetilde{X}}(1000k)$, pour $k = 0, 5, 10$, $E\left[\widetilde{X}\right]$ et $E\left[\max\left(\widetilde{X} - 150\ 000; 0\right)\right]$.

(d) Méthode *dispersion de la masse*. Avec l'algorithme de Panjer ou la FFT, déterminer les valeurs $f_{\widetilde{X}}(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$. À l'aide de ces valeurs, évaluer $F_{\widetilde{X}}(1000k)$, pour $k = 0, 5, 10$, $E\left[\widetilde{X}\right]$ et $E\left[\max\left(\widetilde{X} - 150000; 0\right)\right]$. Note : Les valeurs exactes de $F_X(1000k)$, pour $k = 0, 5, 10$, sont 0.1353353, 0.2690121 et 0.3942969.

8. On considère un contrat d'assurance auto dont les coûts (v.a. X) sont modélisés selon l'approche fréquence-sévérité. L'actuaire constate que la loi de Poisson n'est pas appropriée pour décrire le comportement du nombre de sinistres pour un contrat (représenté par la v.a. M). Il choisit plutôt de modifier la loi de Poisson de telle sorte que

$$F_M(k) = (1-\theta) + \theta F_{M'}(k), \ (k \in \mathbb{N}),$$

où $\theta = 0.05$ et $M' \sim Pois(1)$. La fonction de masse de probabilité du montant d'un sinistre est donnée par $f_B(10\,000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$.

(a) Calculer $E[M]$ et $E[X]$.

(b) Donner l'expression de la f.g.p. de M.

(c) Calculer $f_X(10\,000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

9. Soient les v.a. $X = 5000e^R$ = valeur d'un investissement dans un titre boursier et $Y = 4000 - I \times B$ = valeur d'un investissement dans un titre avec risque de défaut où $R \sim N\left(0.08, 0.2^2\right)$, $I \sim Bern(0.1)$, $B = 4000U$ et $U \sim Bêta(2, 1)$. Les v.a. R, I et U sont indépendantes.

On définit les v.a. $V = X + Y$ = valeur totale de l'investissement et $L = 9000 - V$ = valeur de la perte associée à l'investissement.

On utilise la méthode *lower* pour approximer les v.a. X et B par les v.a. $\widetilde{X} \in \{3000, 4000, 6000, ...\}$ et $\widetilde{B} \in \{1000, 2000, 3000, 4000\}$. L'approximation résultante de Y, V et L sont notées par les v.a. $\widetilde{Y}$, $\widetilde{V}$ et $\widetilde{L}$.

(a) Calculer $f_{\widetilde{X}}(1000k)$ pour $k = 3, 4, 5$. (Note : on convient que $f_{\widetilde{X}}(1000k) = 0$, pour $k = 0$, 1, 2).

(b) Calculer $f_{\widetilde{Y}}(1000k)$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) Calculer $f_{\widetilde{V}}(1000k)$ pour $k = 3, 4, 5$. (Note : $f_{\widetilde{V}}(1000k) = 0$, pour $k = 0$, 1, 2).

(d) Calculer $f_{\widetilde{L}}(1000k)$ pour $k = 4, 5, 6$. (Note : $f_{\widetilde{L}}(1000k) = 0$, pour $k = 7$, 8, 9).

(e) Évaluer approximativement $VaR_{0.99}(L)$ et $TVaR_{0.99}(L)$ avec $VaR_{0.99}\left(\widetilde{L}\right)$ et $TVaR_{0.99}\left(\widetilde{L}\right)$.

10. On examine le risque associé à un contrat d'assurance automobile émis à des assurés du Québec. L'actuaire croit que la population du Québec est composée de bons conducteurs (avec une proportion de 80 %) et de mauvais conducteurs (avec une proportion de 20 %). On modélise les coûts pour un contrat (v.a. X) par l'approche fréquence-sévérité. Si l'assuré est un bon conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.1. Si l'assuré est un mauvais conducteur, le nombre de sinistres obéit à une loi de Poisson de moyenne 0.25. En cas de sinistre, le montant d'un sinistre obéit à une loi discrète de moyenne 3000 quel que soit le type de conducteur, où $f_B(1000j) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1}$, pour $j \in \mathbb{N}^+$. Au moment de l'émission d'un nouveau contrat, on ne dispose pas d'information sur le type de conducteur.

Calculer $f_X(1000j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$.

11. Un individu investit une somme S_0 de 1000 dans un fonds d'investissement. Il prévoit de retirer le montant investi après 4 périodes. Les rendements pour les périodes 1, 2, 3 et 4 sont définis par les v.a. i.i.d. R_1, R_2, R_3 et R_4, où $\Pr(R_i = r) = f_R(r)$, avec $r = -0.2$, 0, 0.2 et $f_R(-0.2) = 0.3$, $f_R(0) = 0.1$ et $f_R(0.2) = 0.6$. La valeur accumulée de la somme investie après 4 périodes est $S_4 = S_0 e^{R_1+...+R_4}$.

(a) Calculer l'espérance de R.

(b) Calculer l'espérance et la variance de S_4.

(c) Identifier les valeurs possibles de S_4 et déterminer les valeurs non nulles de la fonction de masse de probabilité de S_4.

12. Les coûts pour un portefeuille de 1000 contrats d'assurance IARD sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Les v.a. X_1, ..., X_{1000} sont i.i.d. avec $X_i \sim BNComp(r, q; F_B)$, où $r = 0.01$, $q = \frac{1}{4}$ et $B \sim Pa(2.5, 15\,000)$. On évalue approximativement la v.a. X par la v.a. $\widetilde{X}$ qui résulte de la discrétisation de la v.a. B avec un pas de discrétisation $h = 1000$. Cela signifie que $\widetilde{B}$ et $\widetilde{X} \in \{0, 1000, 2000, ..., 40000 \times 1000\}$. On a recours à la méthode *lower* pour discrétiser la v.a. B. On évalue approximativement S par $\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{1000} \widetilde{X}_i$.

(a) Calculer l'espérance de S.

(b) Déterminer les valeurs de $f_{\widetilde{S}}(1000k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et évaluer $E\left[\widetilde{S}\right]$, $E\left[\max\left(\widetilde{S} - 2\,000\,000; 0\right)\right]$, $F_{\widetilde{S}}(500\,000)$, $F_{\widetilde{S}}(1\,000\,000)$ et $F_{\widetilde{S}}(2\,000\,000)$.

13. On considère un portefeuille de contrats d'assurance maladie au cours des 2 prochaines années. Les coûts pour l'année k sont définis par la v.a. W_k, pour $k = 1, 2$. On définit la valeur actualisée des coûts pour les 2 prochaines années par la v.a. $Z = vW_1 + v^2W_2$. Les v.a. W_1 et W_2 sont i.i.d. avec $W_i \sim W$, $(i = 1, 2)$. De plus, $W \sim BNComp\,(r, q; F_B)$, avec $r = 2$, $\beta = 1$ et $B \sim Pa\,(3, 4000)$. On note que $v = 0.95$.

    Pour évaluer $VaR_\kappa\,(Z)$, on approxime la v.a. Z par la v.a. discrète $\widetilde{Z} \in \{0, 1000, 2000, ...\}$. On utilise des algorithmes récursifs en appliquant la méthode *lower* de discrétisation avec un pas de discrétisation de 1000 pour définir $\widetilde{Z}$ et obtenir les valeurs de $f_{\widetilde{Z}}\,(1000k)$, $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Calculer l'espérance et la variance des coûts totaux Z.

    (b) Calculer $\Pr(\widetilde{Z} = 1000k)$ pour $k = 0, 10$ et 20.

    (c) Utiliser $VaR_\kappa\left(\widetilde{Z}\right)$ pour évaluer approximativement $VaR_\kappa\,(Z)$ pour $\kappa = 99\ \%$.

14. Soient les v.a. indépendantes $X_i \sim PComp\,(\lambda_i, F_{B_i})$ avec $\lambda_i = i$ et $B_i \sim Exp\left(\frac{i}{150}\right)$ pour $i = 1, 2, 3$. On définit $S = X_1 + X_2 + X_3$.

    (a) Montrer que la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim PComp\,(\lambda = 6, F_D)$ où $F_D\,(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{6}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{i}{150}x}\right)$. Montrer que S obéit aussi à une loi $MixErl\left(\underline{\xi}, \beta\right)$, $\underline{\nu} = (\nu_0, \nu_1, ...)$. Identifier la valeur de β et les valeurs de ξ_k pour $k = 0, 1, 2, 3$.

    (b) Calculer les valeurs de $VaR_\kappa\,(S)$, pour $\kappa = 0.9$, 0.99 et 0.999.

    (c) Calculer les valeurs de $TVaR_\kappa\,(S)$, pour $\kappa = 0.9$, 0.99 et 0.999.

15. On considère un portefeuille de 200 contrats d'assurance vie temporaire 1 an. Les contrats sont divisés en 5 classes. Pour la classe j, la prestation de décès pour un contrat est $b^{(j)}$, la probabilité de décès est $q^{(j)}$ et le nombre de contrats est $n^{(j)}$. Tous les contrats sont indépendants. On ne tient pas compte de l'intérêt. On a les informations suivantes :

j	$b^{(j)}$	$q^{(j)}$	$n^{(j)}$
1	10 000	0.0012	50
2	10 000	0.0034	60
3	20 000	0.0089	30
4	20 000	0.0110	40
5	30 000	0.0065	20

    On définit le montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille par la v.a. S, qu'on évalue approximativement par une v.a. T, qui

obéit à une loi Poisson composée. L'approximation Poisson composée est construite de telle sorte que les paramètres des lois Poisson sont égaux aux paramètres des lois Bernoulli. Il en résulte que $E[T] = E[S]$.

(a) Calculer l'espérance et la variance de S. Indiquer les paramètres de la loi de T.

(b) Utiliser l'algorithme de Panjer pour évaluer $f_T(10\ 000k)$, pour $k = 0, 1, ..., 6$.

(c) Utiliser l'approximation pour évaluer la $VaR_{0.75}(S)$ et la $TVaR_{0.75}(S)$ avec la $VaR_{0.75}(T)$ et la $TVaR_{0.75}(T)$.

6.10 Réponses

1. Réponses à la question 1 : 0.00388570, 0.02137138 et 0.05896362
2. Réponses à la question 2 : 0.026084, 0.034779, 0.045212 et 0.053637
3. Réponses à la question 3 : 0.605770, 0.182644, 0.149022, 0.039030 et 0.017681
4. Réponses à la question 4 :
   (a) 194 400
   (b) $PComp(\lambda_S; F_C)$ avec $\lambda_S = 8.64$ et
   $$f_C(10\ 000k) = \frac{4.32}{8.64} f_{B_1}(10\ 000k) + \frac{4.32}{8.64} f_{B_2}(10\ 000k), \ k \in \mathbb{N}^+$$
   (c) 0.0001768869, 0.0319965088, 0.0461447937, 0.0179883727
   (d) 340 000 et 394 190; 460 000 et 498 659.2
5. Réponses à la question 5 :
   (a) 0.0759764307, 0.0079879659 et 0.0017421834
   (b) 21 000 et 44 000
6. Réponses à la question 6 :.
   (a) 0, 0.63212056, 0.19255220, 0.08535235, 0.04172844, 0.04824644
   (b) 0.850283, 0.071664, 0.032400, 0.017898, 0.010513, 0.009401, 0.003526, 0.001863
   (c) 5000

7. Réponses à la question 7 :
   (a) 20 000
   (b) 0.1637074, 0.3014824, 0.4275775; 19 016.66 et 1.663969
   (c) 0.1353353, 0.2633829, 0.3850314; 21 016.66 et 2.538898
   (d) 0.1490831, 0.2821541, 0.4062135; 20 000 et 2.056268

8. Réponses à la question 8 :
   (a) 0.05 et 1250
   (b) $1 - \theta + \theta e^{\lambda(\theta-1)}$
   (c) 0.968393, 0.007358, 0.005886 et 0.004611

9. Réponses à la question 9 :
   (a) 0.001567769, 0.063227599 et 0.279782891
   (b) 0.9, 0.04375, 0.03125, 0.01875, 0.00625, 0.9
   (c) 0.0000685899, 0.0028152, 0.01424576
   (d) 0.01424576, 0.0028152, 0.0000685899
   (e) 4000 et 4267.80194

10. Réponses à la question 10 : 0.879630, 0.037109, 0.025682, 0.017770

11. Réponses à la question 11 :
   (a) 6 %
   (b) 1352.75 et 217 463.2
   (c) $S_4 \in \{1000e^{-4\times0.2}, 1000e^{-3\times0.2}, ..., 1000e^{4\times0.2}\}$ avec probabilités {0.0081, 0.0108, 0.0702, 0.0660, 0.2161, 0.1320, 0.2808, 0.0864, 0.1296}

12. Réponses à la question 12 :
   (a) 300 000
   (b) 315 410.6, 256.3234, 0.888116, 0.996582 et 0.999757

13. Réponses à la question 13 :
   (a) 7410 et 68 680 250
   (b) 0.0625, 0.04269752, 0.01351135
   (c) 42000

14. Réponses à la question 14 :

(a) $\frac{1}{50}$; 0.002478752, 0.01156751, 0.02864336, 0.05043190

(b) 833.624, 1349.049, 1825.227

(c) 1060.059, 1555.809, 2013.548

15. Réponses à la question 15 :

(a) 20 680 et 422 476 420 ; $\lambda = 1.101$, $f_C\,(10\ 000) = 0.2397820$, $f_C\,(20\ 000) = 0.6421435$, $f_C\,(30\ 000) = 0.1180745$

(b) 0.33253838 0.08779013 0.24669293 0.10631738 0.10278244 0.05473552 0.03354139

(c) 30 000, 49 515.53

7
Comparaison des risques

7.1 Introduction

Dans plusieurs situations, on est confronté à comparer des risques selon leur degré de *dangerosité*. La comparaison entre des risques (v.a.) est basée sur des résultats qui portent sur les ordres stochastiques. La théorie des ordres stochastiques est utilisée, notamment, pour comparer des mesures de risque, pour établir des bornes sur des mesures de risque ou des quantités liées aux risques. En fait, les ordres stochastisques permettent de démontrer des relations observées dans des applications pratiques en actuariat.

L'idée se présente comme suit. On veut identifier les conditions pour comparer deux v.a. X et Y permettant de conclure e.g. $E[X] \leq E[Y]$, $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$, $\pi_X(d) \leq \pi_Y(d)$, $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(Y)$, $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(Y)$ ou $\Pi^{\mathrm{Var}}(X) \leq \Pi^{\mathrm{Var}}(Y)$. Dans ce chapitre, on considère uniquement les ordres stochastiques univariés.

On commence par définir les ordres partiels et présenter les propriétés désirables des ordres stochastiques. Par la suite, on présente deux cas d'ordres stochastiques : l'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes. L'ordre en dominance stochastique permet de comparer l'ampleur de deux v.a. et l'ordre convexe compare leur variabilité.

7.2 Ordres partiels

L'ordre en dominance stochastique et les ordres convexes sont des ordres partiels.

Définition 7.1 *Soit A un ensemble de fonctions de répartition ainsi que F_X, F_Y, F_Z des éléments de A. Une relation binaire $\preceq$ définie sur A est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :*

1. ***Transitivité.*** *Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_Z$, alors $F_X \preceq F_Z$.*
2. ***Réflexivité.*** *$F_X \preceq F_X$.*
3. ***Anti-symétrie.*** *Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_X$, alors $F_X \equiv F_Y$.*

Sur le plan de la notation, la relation d'ordre est établie entre fonctions de répartition ou entre v.a. On écrit indifféremment $X \preceq Y$ et $F_X \preceq F_Y$.

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont indiquées dans la remarque suivante.

Les propriétés désirables sont la fermeture sous le mélange, la fermeture sous la convolution et la fermeture sous la composition.

Propriété 7.2 ***Fermeture sous le mélange.*** *Soient les v.a. X, X' et Θ. On dit que l'ordre stochastique $\preceq$ est fermé sous le mélange si $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$ pour tout θ implique $X \preceq X'$.*

Propriété 7.3 ***Fermeture sous la convolution.*** *Soient deux suites de v.a. indépendantes $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ et $\underline{X}' = \{X_i', i \in \mathbb{N}^+\}$ avec $X_i \preceq X_i'$ pour tout $i \in \mathbb{N}^+$. On dit que l'ordre stochastique $\preceq$ est fermé sous la convolution si $\sum_{i=1}^n X_i \preceq \sum_{i=1}^n X_i'$ est satisfait.*

Propriété 7.4 ***Fermeture sous la composition.*** *Soient deux suites de v.a. indépendantes $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ et $\underline{X}' = \{X_i', i \in \mathbb{N}^+\}$ avec $X_i \preceq X_i'$ pour tout $i \in \mathbb{N}^+$. Si l'ordre est fermé sous le mélange et sous la convolution alors l'ordre satisfait la relation $\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^N X_i'$ où N est une v.a. discrète. On dit alors que l'ordre est fermé sous la composition. D'autre part, si la relation suivante est satisfaite $\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$ pour $N \preceq N'$ on dit aussi que l'ordre est fermé sous la composition.*

7.3 Ordre en dominance stochastique

7.3.1 Définition

L'ordre en dominance stochastique est défini comme suit.

Définition 7.5 *Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre en dominance stochastique,*

notée $X \preceq_{sd} X'$, *si* $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$ *(ou de façon équivalente* $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_{X'}(x)$*) pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Dans les sous-sections qui suivent, on présente un certain nombre de résultats de base qui découlent de l'ordre en dominance stochastique et qui sont pertinents pour l'actuariat.

7.3.2 Mesure VaR

Si on établit l'ordre en dominance stochastique entre deux risques, alors on déduit la relation suivante pour leurs mesures VaR.

Proposition 7.6 *Soient deux v.a.* X *et* X' *telles que* $X \preceq_{sd} X'$. *Alors, on a* $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ *pour tout* $0 < \kappa < 1$.

Preuve. Voir [24]. ■

En effet, puisque $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ pour tout $0 < \kappa < 1$.

7.3.3 Espérance

Selon le théorème suivant, l'ordre en dominance stochastique mène à ordonner les espérances de deux v.a.

Théorème 7.7 *Soient les v.a.* X *et* X' *telles que* $E[X] < \infty$ *et* $E[X'] < \infty$.

1. *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *alors* $E[X] \leq E[X']$.
2. *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *et* $E[X] = E[X']$ *alors* X *et* X' *ont la même distribution.*

Preuve. Voir e.g. [24], [64], [84] ou [96]. ■

Par conséquent, si X est inférieure à X' selon l'ordre en dominance stochastique, alors l'espérance de X est inférieure à l'espérance de X'. Cette relation se généralise pour l'espérance de fonctions croissantes univariées.

Théorème 7.8 *Soient les deux v.a.* X *et* X'. *Alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$ *si et seulement si* $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ *pour toute fonction croissante* ϕ.

Preuve. Voir e.g. [24], [64], [84] ou [96]. ■

Pour comparer les moments d'ordre m, on a recours au théorème suivant qui découle du théorème 7.8.

Théorème 7.9 *Soient les v.a.* X *et* X' *telles que* $E[X^m] < \infty$ *et* $E[X'^m] < \infty$, *pour* $m \in \mathbb{N}^+$. *Si on a* $X \preceq_{sd} X'$, *alors*

1. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1, 3, 5, \ldots$;

2. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, *pour* $m = 1, 2, 3, ...$ *si les v.a.* X *et* Y *sont positives.*

Preuve. Voir e.g. [24], [84] ou [96]. ■

7.3.4 Fonctions croissantes univariées

Le résultat suivant a plusieurs applications en actuariat.

Théorème 7.10 *Soient les deux v.a.* X *et* X'. *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *alors on a* $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$ *pour toute fonction croissante* ϕ.

Preuve. Voir e.g. [24], [84] ou [96]. ■

Des exemples d'application en actuariat et en gestion quantitative des risques du théorème 7.10 sont fournis dans la remarque suivante.

Remarque 7.11 *En vertu du théorème 7.10, si* $X \preceq_{sd} X'$, *alors ...*

1. $\exp(X) \preceq_{sd} \exp(X')$;
2. $\min(X; d) \preceq_{sd} \min(X'; d)$, *pour toute limite* d ;
3. $\max(X - d; 0) \preceq_{sd} \max(X' - d; 0)$, *pour toute franchise* d ;
4. $X \times 1_{\{X>d\}} \preceq_{sd} X' \times 1_{\{X'>d\}}$, *pour toute franchise* d ;
5. $cX \preceq_{sd} cX'$, *pour tout scalaire* $c \in \mathbb{R}^+$.

7.3.5 Fonctions croissantes multivariées

Le prochain théorème permet de comparer les résultats de fonctions de deux ensembles de v.a.

Théorème 7.12 *Soient* $X_1, ..., X_n$ *et* $X'_1, ..., X'_n$ *des v.a. indépendantes avec* $X_i \preceq_{sd} X'_i$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *On suppose que* $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est une fonction croissante. Alors, on a* $\psi(X_1, ..., X_n) \preceq_{sd} \psi(X'_1, ..., X'_n)$.

Preuve. Voir e.g. [24], [64], [84] ou [96]. ■

Des exemples de fonctions croissantes sont indiqués dans la remarque suivante.

Remarque 7.13 *Des exemples de fonctions croissantes* ψ *pour le théorème 7.12 sont :*

1. $\psi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$;
2. $\psi(x_1, ..., x_n) = \max(x_1; ...; x_n)$;
3. $\psi(x_1, ..., x_n) = \min(x_1; ...; x_n)$.

7.3.6 Propriétés de fermeture

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition. Les preuves des théorèmes suivants se trouvent dans e.g. [24], [64], [84] ou [96].

Théorème 7.14 ***Fermeture sous la convolution.*** *Soient $X_1, ..., X_n$ et $X'_1, ..., X'_n$ des v.a. indépendantes avec $X_i \preceq_{sd} X'_i$ pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, on a $\sum_{i=1}^{n} X_i \preceq_{sd} \sum_{i=1}^{n} X'_i$.*

Théorème 7.15 ***Fermeture sous le mélange.*** *Soient les v. a. X, X' et Θ définies de telle sorte que $X|\Theta = \theta \preceq_{sd} X'|\Theta = \theta$ pour tout θ sur le support de Θ. Alors, on a $X \preceq_{sd} X'$.*

Théorème 7.16 ***Fermeture sous la composition.*** *Soient les v.a. X et X' définies par*

$$X = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} B_i, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

et

$$X' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} B'_i, & M' > 0 \\ 0, & M' = 0 \end{cases} .$$

Si $B_i \preceq_{sd} B'_i$, si $M \preceq_{sd} M'$ et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a $X \preceq_{sd} X'$.

7.3.7 Condition suffisante

On dispose aussi d'une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour déterminer l'ordre en dominance stochastique.

Critère 7.17 ***Condition suffisante.*** *Soient deux v.a. X et Y ayant la propriété qu'il existe un nombre réel $a \geq 0$ tel que*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F_X(x) &\geq \mathrm{d}F_Y(x) \quad \text{pour } x \in (-\infty, a) \\ \mathrm{d}F_X(x) &\leq \mathrm{d}F_Y(x) \quad \text{pour } x \in (a, \infty) \end{aligned}$$

Alors $X \preceq_{sd} Y$.

7.3.8 Lois paramétriques

Dans les 2 remarques suivantes, on indique sous quelles conditions l'ordre en dominance stochastique est satisfait pour certaines lois paramétriques.

Remarque 7.18 *Soient deux v.a. X et X' obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que $X \preceq_{sd} X'$:*

1. $X \sim Exp(\beta)$ *et* $X' \sim Exp(\beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$;
2. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha, \beta')$ *avec* $\beta \geq \beta'$;
3. $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta)$ *avec* $\alpha \leq \alpha'$;
4. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha, \lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$;
5. $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda)$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$;
6. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$;
7. $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN(\mu', \sigma^2)$ *avec* $\mu \leq \mu'$;
8. $X \sim U(a, b)$ *et* $X' \sim U(a', b')$ *avec* $a \leq a'$ *et* $b \leq b'$.

Remarque 7.19 *Soient deux v.a.* X *et* X' *obéissant à la même loi discrète mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que* $X \preceq_{sd} X'$:

1. $X \sim Pois(\lambda)$ *et* $X' \sim Pois(\lambda')$ *avec* $\lambda \leq \lambda'$;
2. $X \sim Bin(n, q)$ *et* $X' \sim Bin(n, q')$ *avec* $q \leq q'$;
3. $X \sim Bin(n, q)$ *et* $X' \sim Bin(n', q)$ *avec* $n \leq n'$;
4. $X \sim BN(r, q)$ *et* $X' \sim BN(r, q')$ *avec* $q \leq q'$.

On considère les exemples suivants.

Exemple 7.20 *Soient* $X \sim Exp(0.002)$ *et* $X' \sim Exp(0.001)$. *On obtient*

$$VaR_{95\ \%}(X) = 1497.87 \leq VaR_{95\ \%}(X') = 2995.73.$$

Pour confirmer que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0, 1)$, *on constate que* $X \preceq_{sd} X'$ *selon la remarque 7.18. Puis, on a* $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ *pour* $\kappa \in (0, 1)$ *en appliquant la proposition 7.6.* □

Exemple 7.21 *Soient* $X \sim PComp(\lambda = 1, F_B)$, $X' \sim PComp(\lambda = 1, F_{B'})$ *avec* $B \sim Exp(0.002)$ *et* $B' \sim Exp(0.001)$. *On a calculé*

$$VaR_{95\ \%}(X) = 1959.02 \leq VaR_{95\ \%}(X') = 3918.04.$$

On vérifie que cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0, 1)$. *Selon la remarque 7.18,* $B_i \preceq_{sd} B_i'$ *pour* $i \in \mathbb{N}^+$. *En utilisant la propriété de fermeture sous la composition (théorème 7.16), on déduit que* $X \preceq_{sd} X'$. *Enfin, il résulte de la proposition 7.6 que* $VaR_\kappa(X) \leq VaR_\kappa(X')$ *pour* $\kappa \in (0, 1)$. □

7.3.9 Lois de Bernoulli et de Poisson

Il est aussi possible de comparer des v.a. dont les lois paramétriques diffèrent.

Proposition 7.22 *Soient les v.a.* $M \sim Bern(q)$ *et* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = -\ln(1-q)$. *Alors, on a* $M \preceq_{sd} M'$.

Preuve. Comme $\lambda = -\ln(1-q)$, on a $F_M(0) = F_{M'}(0) = (1-q)$. Puisque $F_M(k) = 1 \geq F_{M'}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, il en découle le résultat désiré. ■

On applique la proposition 7.22 pour justifier le choix de la définition du paramètre $\lambda = -\ln(1-q)$ dans l'approximation Poisson composée décrite au chapitre 6.

Proposition 7.23 *Soit la v.a.* X *définie par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, \ldots$ *sont i.i.d. (avec* $B_k \sim B$*) et indépendantes de la v.a. de fréquence* $M \sim Bern(q)$.

Soit la v.a. correspondante X' *définie par*

$$X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, \ldots$ *sont i.i.d. (avec* $B_k \sim B$*) et indépendantes de la v.a. de fréquence* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = -\ln(1-q)$. *Alors, on a* $X \preceq_{sd} X'$.

Preuve. Le résultat découle de l'application combinée de la proposition 7.22 et du théorème 7.16. ■

7.3.10 Méthodes de discrétisation upper *et* lower

En appliquant les résultats liés à l'ordre en dominance stochastique, on examine l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower* qui sont expliquées au chapitre 6.

Soit la v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases}, \tag{7.1}$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, \ldots$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes de la v.a. de fréquence M. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(u,h)}$ définie à la suite de l'application de la méthode de discrétisation *upper* avec un pas de discrétisation h pour

approximer la v.a. B_j par la v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}$ où

$$\widetilde{X}^{(u,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(u,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{7.2}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(u,h)}, \widetilde{B}_j^{(u,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(l,h)}$ définie de façon similaire en appliquant la méthode de discrétisation *lower* où

$$\widetilde{X}^{(l,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(l,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{7.3}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(l,h)}, \widetilde{B}_j^{(l,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. Dans les deux cas, $\widetilde{X}^{(u,h)}$ et $\widetilde{X}^{(l,h)} \in \{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$.

On a les deux propositions suivantes qui démontrent l'intérêt d'utiliser ces deux méthodes de discrétisation.

Proposition 7.24 *Soient les v.a.* $\widetilde{X}^{(u,h')}$, $\widetilde{X}^{(u,h)}$, X, $\widetilde{X}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{X}^{(l,h')}$ *définies selon (7.1), (7.2) et (7.3). Alors, on a*

$$\widetilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{X}^{(l,h')} \tag{7.4}$$

pour $0 < h \leq h'$.

Preuve. Selon les deux méthodes et pour $0 < h \leq h'$, on a

$$F_{\widetilde{B}^{(u,h')}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(u,h)}}(x) \geq F_B(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h)}}(x) \geq F_{\widetilde{B}^{(l,h')}}(x),$$

pour $x \geq 0$. Il en résulte que

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

En appliquant le théorème 7.16, on obtient (7.4). ■

Proposition 7.25 *Soient les v.a.* $\widetilde{S}^{(u,h')}$, $\widetilde{S}^{(u,h)}$, S, $\widetilde{S}^{(l,h)}$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h')}$ *définies par* $\widetilde{S}^{(u,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(u,h)}$, $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$ *et* $\widetilde{S}^{(l,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B_i}^{(l,h)}$ *avec* $0 < h \leq h'$. *Alors, on a*

$$\widetilde{S}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(u,h)} \preceq_{sd} S \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{S}^{(l,h')}. \tag{7.5}$$

Preuve. Dans la preuve de la proposition 7.24,

$$\widetilde{B}^{(u,h')} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(u,h)} \preceq_{sd} B \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h)} \preceq_{sd} \widetilde{B}^{(l,h')}.$$

On déduit (7.5) en se basant sur le théorème 7.14. ■

Ces deux propositions expliquent l'intérêt d'utiliser les méthodes de discrétisation *upper* et *lower* pour évaluer différentes quantités de risque. Selon ces deux propositions, ces méthodes permettent de déduire des bornes inférieures et supérieures pour F_X (ou $\overline{F}_X$) et pour F_S (ou $\overline{F}_S$). De plus, en appliquant la proposition 7.6, on obtient aussi des bornes pour $VaR_k(X)$ et $VaR_k(S)$. En diminuant la longueur de l'intervalle de discrétisation h, la valeur approximative $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(l,h)}\right)$ (et $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(u,h)}\right)$) va s'approcher de la valeur exacte $VaR_\kappa(X)$ tout en lui restant supérieure (inférieure). Il n'est pas possible d'obtenir de telles bornes lorsque l'on utilise une approximation basée sur la méthode des moments ou une méthode basée sur la simulation stochastique.

Exemple 7.26 *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de $VaR_{0.995}(X)$ et les valeurs approximatives de $VaR_{0.995}(X)$ obtenues avec les méthodes de discrétisation upper et lower qui ont été produites à l'exemple 6.11 :*

κ	*Up* $h=1$	*Up* $h=\frac{1}{4}$	*Up* $h=\frac{1}{16}$	*Exacte*	*Low* $h=\frac{1}{16}$	*Low* $h=\frac{1}{4}$	*Low* $h=1$
0.995	*43*	*45.875*	*45.875*	*46.05167*	*46.25*	*46.75*	*49*

On observe

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(u,1)}\right) &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(u,\frac{1}{4}\right)}\right) \\ &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(u,\frac{1}{16}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}(X) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} VaR_{0.995}(X) &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(l,\frac{1}{16}\right)}\right) \\ &\leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{\left(l,\frac{1}{4}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(l,1)}\right). \end{aligned}$$

Ces relations d'ordre sont confirmées pour toute valeur $\kappa \in (0,1)$ en appliquant conjointement la proposition 7.24 avec la proposition 7.6. □

7.3.11 Stochastiquement croissante

On ajoute l'indice θ à une v.a., notée X_θ, lorsque l'on veut indiquer explicitement que sa distribution dépend d'un paramètre unique θ.

Définition 7.27 *Une v.a. X_θ est dite stochastiquement croissante si et seulement si $X_\theta \preceq_{sd} X_{\theta'}$, quand $\theta \leq \theta'$.*

Dans les exemples suivants, on présente quelques cas de v.a. stochastiquement croissantes.

Exemple 7.28 *Soit une v.a. positive W. La v.a. X_θ définie par $X_\theta = \theta W$ ($\theta \in \mathbb{R}$) est stochastiquement croissante.*

Exemple 7.29 *Soit une suite de v.a. i.i.d. positives* B_1, B_2, ... *La v.a.* X_θ *définie par* $X_\theta = \sum_{k=1}^{\theta} B_k$ $(\theta \in \mathbb{N})$ *est stochastiquement croissante.*

Exemple 7.30 *La v.a.* $M_\theta \sim Pois(\theta\lambda)$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}^+$, *est stochastiquement croissante.*

Exemple 7.31 *La v.a.* $X_\theta \sim Exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}^+$, *est stochastiquement croissante.*

Exemple 7.32 *La v.a.* $X_\theta \sim N\left(\theta, \sigma^2\right)$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}$, *est stochastiquement croissante.*

Soient les v.a. indépendantes Θ et la v.a. X_θ. On utilise la notation X_Θ pour désigner une v.a. dont la fonction de répartition est définie par

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{\theta \in A_\Theta} F_{X|\Theta=\theta}(x)\, \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_{\theta \in A_\Theta} F_{X_\theta}(x)\, \mathrm{d}F_\Theta(\theta), \end{aligned}$$

où $A_\Theta \subseteq \mathbb{R}$ est le support de la v.a. de mélange Θ.

Le résultat suivant est important lorsque l'on doit travailler avec des lois définies par un mélange.

Proposition 7.33 *Si* $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$, *alors* $X_\Theta \preceq_{sd} X_{\Theta'}$.

Preuve. Voir [24]. ■

Exemple 7.34 *Soit la v.a.* $X_\theta \sim Exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$, *avec* $\beta = 1/1000$. *On définit les v.a.* Θ, $\Theta' \in \{1, ..., 5\}$ *avec* $(\Theta - 1) \sim Bin(4, 0.2)$ *et* $(\Theta' - 1) \sim Bin(4, 0.3)$. *La v.a.* X_θ *est indépendante des v.a.* Θ *et* Θ'. *Alors,* X_Θ *et* $X_{\Theta'}$ *obéissent à la distribution mélange d'exponentielles. On observe que* $VaR_{0.99}(X_\Theta) = 10\ 156.609$ *est inférieure à* $VaR_{0.99}(X_{\Theta'}) = 12\ 116.566$. *En vertu de la remarque 7.19,* $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$. *Selon la proposition 7.33 et avec la proposition 7.6, il en résulte que* $VaR_\kappa(X_\Theta) \leq VaR_\kappa(X_{\Theta'})$ *pour tout* $\kappa \in (0, 1)$. □

7.3.12 Variance et ordre en dominance stochastique

On peut se demander si $X \preceq_{sd} Y$ permet de déduire que $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$. On examine cette question dans l'exemple suivant.

Exemple 7.35 *Soient les v.a.* X *et* X' *où* $X \sim U(0, b)$ *et* $Pr(X' = b) = 1$. *Comme* $F_X(x) \geq F_{Y'}(x)$, $x \geq 0$, *alors* $X \preceq_{sd} Y$ *ce qui implique* $E[X^m] \leq E[X'^m]$ *pour* $m \in \mathbb{N}^+$. *Toutefois,* $\mathrm{Var}(X) = \frac{b^2}{12} > \mathrm{Var}(X') = 0$. □

Bref, l'ordre en dominance stochastique n'est pas suffisant pour comparer les variances. La raison est que $\text{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$ et $\phi(x) = (x-a)^2$ n'est pas une fonction croissante.

Comme $\max(x-d;0)$ et $x \times 1_{\{x>d\}}$ sont des fonctions croissantes, si $X \preceq_{sd} X'$, alors $\pi_X(d) \leq \pi_{X'}(d)$ et $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$.

7.4 Ordres convexes

7.4.1 Définitions

Dans certaines situations, l'actuaire doit comparer des risques qui ont des espérances identiques mais dont les «variabilités» sont différentes. Comme l'ordre en dominance stochastique n'est d'aucun secours, on doit recourir aux ordres convexes.

Définition 7.36 *Une fonction ϕ est dite convexe si $\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$ pour tout x et y et pour tout $0 < \alpha < 1$.*

Une fonction ϕ est dite concave si $-\phi$ est convexe.

Définition 7.37 *Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre convexe, noté $X \preceq_{cx} X'$, si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe ϕ et en supposant que les espérances existent.*

Définition 7.38 *Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre convexe croissant, noté $X \preceq_{icx} X'$, si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.*

Définition 7.39 *Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre concave croissant, noté $X \preceq_{icv} X'$, si $\mathbb{E}[\phi(X)] \leq \mathbb{E}[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle concave croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.*

En actuariat, l'ordre suivant a aussi été défini.

Définition 7.40 *Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre* stop-loss, *noté $X \preceq_{sl} X'$, si $E[(X-d)_+] \leq E[(X'-d)_+]$, pour tout $d \in \mathbb{R}$, où $(u)_+ = \max(u;0)$.*

En actuariat, l'ordre convexe correspond à l'ordre *stop-loss* avec moyenne égale. La fonction $\phi(x) = \max(x-d;0) = (x-d)_+$ est convexe croissante. La fonction $\phi(x) = (x-a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. On a $X \preceq_{icv} Y$ si et seulement si $-X \succeq_{icx} -Y$.

7.4.2 Résultats

Pour les démonstrations des résultats suivants, on peut se référer à e.g. [24], [84] ou [96].

Théorème 7.41 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \preceq_{cx} X'$;
2. $X \preceq_{icx} X'$ *et* $E[X] = E[X']$.

Preuve. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), il est clair que $X \preceq_{cx} X'$ mène à $X \preceq_{icx} X'$. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), voir e.g. [24], [84] ou [96]. ■

L'ordre *stop-loss* et l'ordre convexe croissant sont équivalents.

Théorème 7.42 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $X \preceq_{icx} X'$;
2. $X \preceq_{sl} X'$.

Preuve. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) découle du fait que la fonction $\phi(x) = \max(x-d;0)$ est convexe croissante. Pour (b) $\Rightarrow$ (a), voir e.g. [84] ou [96]. ■

Ainsi, $X \preceq_{cx} X'$ implique e.g. $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ et $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$. De plus, $X \preceq_{icx} X'$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ mais n'implique pas $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$ car la fonction $\phi(x) = (x-a)^2$ est convexe mais elle n'est pas croissante. Enfin, $X \preceq_{icx} X'$ avec $E[X] = E[X']$ implique $\pi_d(X) \leq \pi_d(X')$ pour tout $d \geq 0$ et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(X')$.

On considère les relations entre les ordres convexes et l'ordre en dominance stochastique.

Remarque 7.43 *Si* $X \preceq_{sd} X'$ *alors cela implique* $X \preceq_{icx} X'$ *mais cela n'implique pas* $X \preceq_{cx} X'$.

7.4.3 Propriétés de fermeture

Les ordres $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ et $\preceq_{sl}$ sont fermés sous le mélange, la convolution et la composition. Dans les trois théorèmes suivants, $\preceq_v$ désigne $\preceq_{cx}$,$\preceq_{icx}$ ou $\preceq_{sl}$. On trouve les preuves des théorèmes suivants dans e.g. [24], [64], [84] ou [96].

Théorème 7.44 ***Fermeture sous la convolution.*** *Soient les v.a. indépendantes* $X_1, ..., X_n$ *et* $X'_1, ..., X'_n$ *avec* $X_i \preceq_v X'_i$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$. *Alors, on a* $\sum_{i=1}^n X_i \preceq_v \sum_{i=1}^n X'_i$.

Théorème 7.45 ***Fermeture sous le mélange.*** *Soient les v. a. X, X' et Θ définies de telle sorte que $X|\Theta = \theta \preceq_v X'|\Theta = \theta$ pour tout θ sur le support de Θ. Alors, on a $X \preceq_v X'$.*

Théorème 7.46 ***Fermeture sous la composition.*** *Soient les v.a. S et S' définies par*

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M} X_i, \ M > 0 \\ 0, \ M = 0 \end{cases} \quad et \ S' = \begin{cases} \sum_{i=1}^{M'} X'_i, \ M' > 0 \\ 0, \ M' = 0 \end{cases} .$$

Si $X_i \preceq_v X'_i$, si $M \preceq_v M'$ et si toutes les v.a. sont indépendantes, alors, on a $S \preceq_v S'$.

7.4.4 Condition suffisante

Une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour établir l'ordre convexe croissant (ou *stop-loss*) s'énonce comme suit.

Critère 7.47 ***Critère de Karlin-Novikoff.*** *Soient deux v.a. X et X' telles que $E[X] \leq E[X'] < \infty$. S'il existe un nombre $c > 0$ tel que*

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_{X'}(x), \qquad x < c \\ F_X(x) &\geq F_{X'}(x), \qquad x \geq c \end{aligned}$$

alors $X \preceq_{icx} X'$ ou $X \preceq_{sl} X'$.

Preuve. Voir e.g. [24], [64], [84] ou [96]. ■

On considère les exemples suivants.

Exemple 7.48 *Soient les v.a. X et X' où $X \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\mu}\right)$ et $X' = \mu$ avec probabilité 1. Comme $E[X] = E[X'] = \mu$, $F_X(x) > F_{X'}(x)$, $0 \leq x < \mu$ et $F_X(x) \leq F_{X'}(x)$, $x \geq \mu$, on déduit du critère de Karlin-Novikoff que $X' \preceq_{icx} X$ avec $E[X] = E[X']$ ce qui est équivalent à $X' \preceq_{cx} X$. Par conséquent, $\mathrm{Var}(X') \leq \mathrm{Var}(X)$, ce qui est en effet le cas puisque $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$ et $\mathrm{Var}(X') = 0$. Pour confirmer, on a $E[\max(X - d; 0)] = \mu e^{-\frac{d}{\mu}}$ et $E[\max(X' - d; 0)] = \mu - d$, $0 \leq d < \mu$, et $E[\max(X' - d; 0)] = 0$, $d \geq \mu$.* □

Exemple 7.49 *Soient les v.a. X, Y et Z où $X \sim U(a, b)$, $\Pr\left(Y = \frac{a+b}{2}\right) = 1$, $\Pr(Z = a) = \Pr(Z = b) = \frac{1}{2}$. Comme*

$$\begin{aligned} F_X(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \ et \ F_X(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\ F_Z(x) &> F_Y(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \ et \ F_Z(x) \leq F_Y(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \\ F_Z(x) &> F_X(x), \quad x < \frac{a+b}{2}, \ et \ F_Z(x) \leq F_X(x), \quad x \geq \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

on déduit que $Y \preceq_{icx} X \preceq_{icx} Z$ *selon le critère de Karlin-Novikoff. Puis, comme* $E[X] = E[Y] = E[Z] = \frac{a+b}{2}$, *il résulte du théorème 7.41 que* $Y \preceq_{cx} X \preceq_{cx} Z$. □

7.4.5 Mesure TVaR

On indique la relation entre l'ordre convexe croissant et la mesure de risque $TVaR$.

Proposition 7.50 *Soient les v.a.* X *et* X'. *Alors, on a* $X \preceq_{icx} X'$ *si et seulement si* $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$, *pour tout* $0 < \kappa < 1$.

Preuve. Voir [24]. ■

7.4.6 Lois paramétriques

On indique sous quelles conditions les relations d'ordre convexe et d'ordre convexe croissant sont satisfaites pour certaines distributions univariées connues.

Remarque 7.51 *Soient deux v.a.* X *et* X' *obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que* $X \preceq_{icx} X'$:

- $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha'}{\beta'}$;
- $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda')$ *avec* $\alpha \geq \alpha'$ *et* $\frac{\lambda}{\alpha-1} \leq \frac{\lambda'}{\alpha'-1}$;
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma \leq \sigma'$;
- $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\mu \leq \mu'$ *et* $\sigma = \sigma'$.

Remarque 7.52 *Soient deux v.a.* X *et* X' *obéissant à la même loi continue mais dont les paramètres diffèrent. On indique ci-dessous les conditions sur les paramètres de certaines lois connues pour que* $X \preceq_{cx} X'$:

- $X \sim Ga(\alpha, \beta)$ *et* $X' \sim Ga(\alpha', \beta')$ *avec* $E[X] = E[X']$ *et* $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ *et* $X' \sim Pa(\alpha', \lambda')$ *avec* $E[X] = E[X']$ *et* $\alpha \geq \alpha'$;
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim N\left(\mu, (\sigma')^2\right)$ *avec* $\sigma \leq \sigma'$;
- $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *et* $X' \sim LN\left(\mu', (\sigma')^2\right)$ *avec* $\sigma \leq \sigma'$, $\mu = a - \frac{1}{2}\sigma^2$ *et* $\mu' = a - \frac{1}{2}(\sigma')^2$ *(*$a \in \mathbb{R}$*), tels que* $E[X] = E[X'] = \mathrm{e}^a$.

7.4.7 Lois de Bernoulli et de Poisson

On a la proposition suivante concernant les lois de Bernoulli et de Poisson.

Proposition 7.53 *Soient les v.a.* $M \sim Bern(q)$ *et* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = q$. *Alors, on a* $M \preceq_{cx} M'$.

Preuve. Comme $F_M(0) = 1-q \leq F_{M'}(0) = \mathrm{e}^{-q}$ et $F_M(k) = 1 \geq F_{M'}(k)$, pour $k \in \mathbb{N}^+$, on applique le critère de Karlin-Novikov pour obtenir le résultat désiré. ■

La proposition 7.53 sert à justifier le choix de la définition du paramètre $\lambda = q$ dans l'approximation Poisson composée expliquée au chapitre 6.

Proposition 7.54 *Soient les v.a.* X *et* X' *définies par*

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M > 0 \\ 0, & M > 0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, & M' > 0 \\ 0, & M' > 0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, \ldots$ *sont i.i.d. (avec* $B_k \sim B$*), indépendantes de la v.a. de fréquence* $M \sim Bern(q)$ *et indépendantes de la v.a. de fréquence* $M' \sim Pois(\lambda)$ *où* $\lambda = q$. *Alors, on a* $X \preceq_{cx} X'$.

Preuve. L'application combinée de la proposition 7.53 et du théorème 7.16 mène au résultat désiré. ■

7.4.8 Lois Poisson - mélange

Soit une v.a. X_Θ obéissant à une loi Poisson-mélange. On examine l'impact de la v.a. de mélange Θ sur le comportement de la v.a. X_Θ.

Proposition 7.55 *Soient la v.a. positive* Θ *et la v.a.* $X_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$, *pour* $\theta \in \mathbb{R}^+$. *Les v.a.* Θ *et* X_θ *sont indépendantes. Alors,* $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$ *implique* $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$.

Preuve. La preuve est due à [63]. Il faut montrer que $\Theta \preceq_{sl} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{sl} X_{\Theta'}$, ce qui est équivalent à $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$ en raison du théorème 7.42. Soit une v.a. $Y_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$. Pour simplifier la présentation, on pose $\lambda = 1$. On introduit la fonction $\pi_d(\theta) = E[\max(Y_\theta - d; 0)]$. On a $X_\Theta \preceq_{sl} X_{\Theta'}$ si et seulement si $E[\pi_d(\Theta)] \leq E[\pi_d(\Theta')]$ pour tout d. Pour y parvenir, on démontre que $\pi_d(\theta)$ est convexe croissante. On a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-d; 0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \max(k-d; 0) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta} &= \sum_{k=1}^{\infty}\max(k-1-(d-1);0)\,\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{k-1}}{(k-1)!}\\ &\quad -\sum_{k=1}^{\infty}\max(k-d;0)\,\frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{k}}{k!}\\ &= \pi_{d-1}(\theta)-\pi_d(\theta)\geq 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que la dérivée $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est positive. De plus, $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est croissante car $Y_\theta \preceq_{sd} Y_{\theta'}$ quand $\theta \leq \theta'$. Puisque $\frac{\mathrm{d}\pi_d(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ est croissante et positive, alors $\pi_d(\theta)$ est convexe croissante et on déduit le résultat désiré. ■

Corollaire 7.56 *Dans la proposition 7.55, si* $E[\Theta] = E[\Theta'] = 1$, *alors* $E[X] = E[X'] = \lambda$ *et, par le théorème 7.41,* $\Theta \preceq_{cx} \Theta'$ *implique* $X_\Theta \preceq_{cx} X_{\Theta'}$.

En actuariat, la loi Poisson-mélange est souvent utilisée pour justifier la présence d'hétérogénéité dans les données d'assurance dommage. Soient deux contrats d'assurance dont les coûts sont définis par les v.a. X et X' avec

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, & M>0 \\ 0, & M>0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M'} B_j, & M'>0 \\ 0, & M'>0 \end{cases},$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes des v.a. M et M' de loi Poisson-mélange qui sont définies comme dans la proposition 7.55. Alors, on a $X \preceq_{cx} X'$ en appliquant la proposition 7.55 et le théorème 7.16. Par exemple, les primes calculées selon le principe de la variance sont ordonnées i.e. $\Pi^{\mathrm{Var}}(X) \leq \Pi^{\mathrm{Var}}(X')$. De même, on a $TVaR_\kappa(X) \preceq_{cx} TVaR_\kappa(X')$. Par conséquent, une plus grande hétérogénéité dans la définition de la loi de fréquence conduit notamment à des valeurs plus élevées dans la prime selon le principe de la variance et de la TVaR.

Exemple 7.57 *À l'exemple 2.8, on traite du comportement de la v.a.* $X \sim BNComp(r,q;F_B)$, *avec* $B \sim Exp(\beta=1)$ *et* $q = \left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}$. *Les paramètres* r *et* q *de la v.a. de fréquence* M *sont fixés de telle sorte que* $E[M] = 200$. *On obtient les valeurs suivantes de* $VaR_{0.5}(X)$, $VaR_{0.995}(X)$, $TVaR_{0.5}(X)$, $TVaR_{0.995}(X)$ *pour 4 couples de valeurs pour* (r,q) *:*

r	q	$VaR_{0.5}(X)$	$VaR_{0.995}(X)$	$TVaR_{0.5}(X)$	$TVaR_{0.995}(X)$
1	$\frac{1}{201}$	*138.320*	*1063.959*	*339.320*	*1264.959*
2	$\frac{1}{101}$	*167.509*	*748.435*	*306.217*	*861.415*
5	$\frac{1}{41}$	*186.499*	*511.316*	*271.108*	*567.148*
25	$\frac{1}{9}$	*196.973*	*332.139*	*235.481*	*352.004*

Notamment, on observe que

$$TVaR_{0.995}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq TVaR_{0.995}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right), \qquad (7.6)$$

pour $r \geq r'$. La loi binomiale négative de paramètres r et $q = \left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}$ correspond à la loi Poisson-gamma de paramètres λ et r où la v.a. de mélange Θ obéit à une loi gamma de paramètres $\alpha = r$ et $\beta = r$. Dans cet exemple, $\lambda = 200$. Ainsi, selon la remarque 7.51, l'inégalité $r \geq r'$ implique la relation d'ordre $\Theta^{(r)} \preceq_{cx} \Theta^{(r')}$. Avec la proposition 7.55, on déduit $M^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)} \preceq_{cx} M^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}$. Puis, d'après le théorème 7.46, on a $X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)} \preceq_{cx} X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}$, ce qui conduit à

$$TVaR_{\kappa}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq TVaR_{\kappa}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right)$$

pour tout $\kappa \in (0,1)$ en raison de la proposition 7.50 et ce qui confirme (7.6). De plus, on a

$$\mathrm{Var}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq \mathrm{Var}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right).$$

En effet, pour les 4 couples de valeurs pour (r,q), on a les valeurs suivantes de variance :

r	q	$\mathrm{Var}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right)$
1	$\frac{1}{201}$	40 200
2	$\frac{1}{101}$	20 200
5	$\frac{1}{41}$	8200
25	$\frac{1}{9}$	1800

On constate aussi que le résultat concernant la loi Poisson-mélange ne conduit pas à un résultat équivalent pour la VaR, car

$$VaR_{0.5}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \geq VaR_{0.5}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right)$$

et

$$VaR_{0.995}\left(X^{\left(r,\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{-1}\right)}\right) \leq VaR_{0.995}\left(X^{\left(r',\left(1+\frac{\lambda}{r'}\right)^{-1}\right)}\right),$$

pour $r \geq r'$. □

7.4.9 *Méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée*

On examine la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée, décrite au chapitre 6, conjointement avec les résultats sur l'ordre convexe.

Soit la v.a. X définie par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_j, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{7.7}$$

où les v.a. continues $B_1, B_2, ...$ sont i.i.d. (avec $B_k \sim B$) et indépendantes de la v.a. de fréquence M. Soit la v.a. $\widetilde{X}^{(d,h)}$ définie à la suite de l'application de la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée avec un pas de discrétisation h pour approximer la v.a. B_j par la v.a. $\widetilde{B}_j^{(d,h)}$ où

$$\widetilde{X}^{(d,h)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \widetilde{B}_j^{(d,h)}, \ M > 0 \\ 0, \ M > 0 \end{cases}, \tag{7.8}$$

où les v.a. $\widetilde{B}_j^{(d,h)}, \widetilde{B}_j^{(d,h)}, ...$ sont des v.a. i.i.d. concentrées sur le support $\{0, 1h, 2h, 3h, ...\}$. On sait que $E\left[\widetilde{X}^{(d,h)}\right] = E[X]$.

Les deux prochaines propositions expliquent l'intérêt d'utiliser la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée.

Proposition 7.58 *Soient les v.a. X, $\widetilde{X}^{(d,h)}$ et $\widetilde{X}^{(d,h')}$ définies selon (7.7) et (7.8) avec $0 < h \leq h'$. Alors, on a*

$$X \preceq_{cx} \widetilde{X}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{X}^{(d,h')}. \tag{7.9}$$

Preuve. Dans [84], il est montré que

$$B \preceq_{cx} \widetilde{B}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{B}^{(d,h')}. \tag{7.10}$$

Puis, par le théorème 7.46, on déduit (7.9). ■

Proposition 7.59 *Soient les v.a. S, $\widetilde{S}^{(d,h)}$ et $\widetilde{S}^{(d,h')}$ définies par $S = \sum_{i=1}^{n} B_i$ et $\widetilde{S}^{(d,h)} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_i^{(d,h)}$ avec $0 < h \leq h'$. Alors, on a*

$$S \preceq_{cx} \widetilde{S}^{(d,h)} \preceq_{cx} \widetilde{S}^{(d,h')}. \tag{7.11}$$

Preuve. En utilisant conjointement (7.10) et le théorème 7.44, on obtient (7.11). ■

On illustre la pertinence d'utiliser la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée dans l'exemple suivant.

Exemple 7.60 *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $VaR_\kappa(X)$, $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$, $TVaR_\kappa(X)$ *et* $TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$ *obtenues à l'exemple 6.14:*

κ	$VaR_\kappa(X)$	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$	$TVaR_\kappa(X)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$
0.5	*2.48268*	*2.48*	*4.86835*	*4.86836*
0.95	*7.72886*	*7.73*	*9.56856*	*9.56856*
0.995	*11.91371*	*11.91*	*13.57670*	*13.57690*

On présente ci-dessous aussi les valeurs $\pi_d(X)$ *et* $\pi_d\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$*:*

d	*0*	*1*	*2*	*5*	*10*	*15*
$\pi_d(X)$	*3*	*2.133987*	*1.454502*	*0.378085*	*0.025710*	*0.001237*
$\pi_d\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$	*3*	*2.133989*	*1.454504*	*0.378087*	*0.025711*	*0.001237*

Par exemple, on constate que

$$TVaR_{0.995}(X) \leq TVaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right).$$

Cette inégalité est valide pour tout $\kappa \in (0,1)$*, en vertu de la proposition 7.58 et de la proposition 7.50. De plus, on a*

$$\pi_{10}(X) \leq \pi_{10}\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right).$$

Cette inégalité est valide pour tout $d \geq 0$ *en raison de la proposition 7.58 et du fait que* $\max(x-d;0)$ *est une fonction convexe. Toutefois, on observe que*

$$VaR_{0.995}(X) \leq VaR_{0.995}\left(\widetilde{X}^{(d,\frac{1}{100})}\right)$$

n'est pas vérifée pour tout $\kappa \in (0,1)$ *puisque la méthode de dispersion de la masse avec espérance préservée n'est pas valide pour construire une borne pour la VaR. Dans ce contexte, il a été expliqué qu'il faut recourir aux méthodes de discrétisation upper et lower.* □

7.4.10 Mutualisation des risques

Soit un portefeuile composé de n risques représentés par les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n. On définit la v.a. $W_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. La prochaine proposition est intéressante du point de vue de la mutualisation des risques.

Proposition 7.61 *On a*

$$W_{n+1} \preceq_{icx} W_n,$$

pour $n \in \mathbb{N}^+$*.*

Preuve. Voir [24]. ■

En appliquant conjointement (7.61) et (7.50), on déduit que

$$TVaR_{\kappa}\left(W_{n+1}\right) \leq TVaR_{\kappa}\left(W_{n}\right),$$

pour toute valeur de $\kappa \in (0,1)$.

7.5 Notes bibliographiques

Le domaine des ordres stochastiques univariés est vaste et d'autres ordres stochastiques univariés ont été étudiés, notamment l'ordre exponentiel, l'ordre du ratio de vraisemblance, l'ordre de Laplace, l'ordre de la fonction de hasard, etc. Pour un exposé complet sur le sujet, on recommande [84] et [96]. Plusieurs chercheurs en actuariat ont démontré l'intérêt des ordres stochastiques en actuariat. Pour une présentation concernant les ordres stochastiques univariés dans le contexte de l'actuariat, on suggère [24], [22], [63] et [64].

7.6 Exercices

1. Soient les v.a. X et X' qui représentent les coûts pour un contrat d'assurance automobile et qui sont définies par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases} \quad \text{et } X' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B'_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

avec les hypothèses usuelles, $B_i \sim LN\left(4, 1^2\right)$ $(i = 1, 2, ...)$ et $B'_i \sim LN\left(5, 1^2\right)$ $(i = 1, 2, ...)$. Le contrat comporte une limite par sinistre, notée $l > 0$. Les coûts à rembourser par contrat sont définis par

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} \min\left(B_k; l\right), & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

et

$$Y' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} \min\left(B'_k; l\right), & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}.$$

Déterminer la relation entre $VaR_{\kappa}\left(Y\right)$ et $VaR_{\kappa}\left(Y'\right)$ ainsi qu'entre $E\left[Y\right]$ et $E\left[Y'\right]$.

2. Soient les v.a. i.i.d. X_1, ..., X_n avec $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et les v.a. i.i.d. X'_1, ..., X'_n avec $X'_i \sim X'$ $(i = 1, 2, ..., n)$. De plus, $X \preceq_{sd} X'$.

(a) On définit les v.a. $V_n = \min(X_1; ...; X_n)$, $V'_n = \min(X'_1; ...; X'_n)$, $W_n = \max(X_1; ...; X_n)$ et $V'_n = \max(X'_1; ...; X'_n)$. Sans recourir au théorème 7.12, montrer $V_n \preceq_{sd} V'_n$ et $W_n \preceq_{sd} W'_n$.

(b) On définit $Y = b \times 1_{\{V_n > a\}}$, $Y' = b \times 1_{\{V'_n > a\}}$, $Z = b \times 1_{\{W_n > a\}}$ et $Z' = b \times 1_{\{W'_n > a\}}$. Montrer que $E[Y] \leq E[Y']$ et $E[Z] \leq E[Z']$.

3. Soient les v.a. $R_1 \sim N(0.04, 0.2^2)$ et $R_2 \sim N(0.06, 0.2^2)$, qui représentent les rendements instantanés pour les titres 1 et 2 durant une période. On définit la valeur accumulée de $V(0)$ dans les titres 1 et 2 par les v.a. $V_1(1) = V(0)\,e^{R_1}$ et $V_2(1) = V(0)\,e^{R_2}$.

(a) Calculer $E[V_1(1)]$ et $E[V_2(1)]$.

(b) Déterminer la relation entre $VaR_\kappa(V_1(1))$ et $VaR_\kappa(V_2(1))$ pour tout $\alpha \in (0,1)$.

(c) Les pertes liées aux investissements sont définies par les v.a. $L_1 = V(0) - V_1(1)$ et $L_2 = V(0) - V_2(1)$, avec $V(0) = 1000$. Déterminer la relation entre $VaR_\kappa(L_1)$ et $VaR_\kappa(L_2)$ pour tout $\alpha \in (0,1)$.

(d) Les engagements d'une compagnie pour un portefeuille de contrats d'assurance vie temporaire 1 an sont définis par la v.a. $S = bN$, où $N \sim Bin(10\,000, 0.0008)$ et $b = 100$. Les pertes liées aux investissements sont définies par les v.a. $L_1 = S - V_1(1)$ et $L_2 = S - V_2(1)$, avec $V(0) = 1000$. Déterminer la relation entre les probabilités que la compagnie ne rencontre pas ses engagements selon le titre 1 et le titre 2, soit $\Pr(L_1 > 0)$ et $\Pr(L_2 > 0)$. Déterminer la relation entre $\Pr(L_1 > x)$ et $\Pr(L_2 > x)$, $x \in (-\infty, 1\,000\,000]$.

4. On considère un contrat d'assurance habitation avec protection incendie dont les coûts sont définis par

$$X = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles et en supposant $M \sim Bern(q)$ (i.e. il peut se produire au plus un incendie par année). La v.a. B est définie par $B = b \times U$ où $U \sim Bêta(1.5, 1)$. On pose $\mu = E[B]$. On définit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont i.i.d. avec $X_i \sim X$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

(a) On définit $Y = bM$. Déterminer la relation entre les mesures $VaR_\kappa(X)$ et $VaR_\kappa(Y)$, pour $\kappa \in (0,1)$. On définit $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et les v.a. $Y_1, ..., Y_n$ sont i.i.d. avec $Y_i \sim Y$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Déterminer la relation entre les mesures $VaR_\kappa(S_n)$ et $VaR_\kappa(T_n)$, pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) On définit $Y = \mu M$. Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(Y)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Déterminer aussi la relation entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. X et Y. On définit $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et les v.a. $Y_1, ..., Y_n$ sont i.i.d. avec $Y_i \sim Y$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_\kappa(S_n)$ et $TVaR_\kappa(T_n)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Déterminer aussi la relation entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. S_n et T_n.

(c) On définit

$$Y = \begin{cases} C, & M = 1 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

où $\Pr(C = 0) = p_0 = 1 - \frac{\mu}{b}$, $\Pr(C = b) = p_b = \frac{\mu}{b}$ et $p_0 + p_b = 1$. Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_\kappa(X)$ et $TVaR_\kappa(Y)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Déterminer aussi la relation entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. X et Y. On définit $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et les v.a. $Y_1, ..., Y_n$ sont i.i.d. avec $Y_i \sim Y$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_\kappa(S_n)$ et $TVaR_\kappa(T_n)$, pour $\kappa \in (0,1)$. Déterminer aussi la relation entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. S_n et T_n.

5. On compare deux vecteurs de v.a. $(I_1, ..., I_n)$ et $(M_1, ..., M_n)$ où $I_i \sim Bern(q_i)$ et $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. On définit $J = \sum_{i=1}^n I_i$ et $N = \sum_{i=1}^n M_i$.

(a) On suppose que $E[I_i] = E[M_i]$, pour $i = 1, 2, ..., n$.

i. En utilisant les ordres stochastiques, montrer que

$$E[\max(J - d; 0)] \leq E[\max(N - d; 0)]$$

pour $d \geq 0$.

ii. En utilisant les ordres stochastiques, montrer que

$$TVaR_\kappa(J) \leq TVaR_\kappa(N),$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

(b) On suppose que $\Pr(I_i = 0) = \Pr(M_i = 0)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. En utilisant les ordres stochastiques, montrer que

$$VaR_\kappa(J) \leq VaR_\kappa(N),$$

pour $\kappa \in (0,1)$.

6. Soient les v.a. $R_1 \sim N\left(0.075, 0.1^2\right)$ et $R_2 \sim N\left(0.06, 0.2^2\right)$, qui représentent les rendements instantanés pour les titres 1 et 2 durant une période. On définit la valeur accumulée de $V(0) = 1000$ dans les titres 1 et 2 par les v.a. $V_1(1) = V(0)\,e^{R_1}$ et $V_2(1) = V(0)\,e^{R_2}$.

Les pertes liées aux investissements sont définies par les v.a. $L_1 = V(0) - V_1(1)$ et $L_2 = V(0) - V_2(1)$.

(a) Calculer $E[V_1(1)]$ et $E[V_2(1)]$.

(b) Calculer $\text{Var}(V_1(1))$ et $\text{Var}(V_2(1))$.

(c) Montrer que

$$\text{Var}(V_1(1)) \leq \text{Var}(V_2(1))$$

et que

$$\text{Var}(L_1) \leq \text{Var}(L_2).$$

(d) Montrer que

$$TVaR_\kappa(V_1(1)) \leq TVaR_\kappa(V_2(1))$$

et

$$TVaR_\kappa(L_1) \leq TVaR_\kappa(L_2),$$

pour tout $\alpha \in (0,1)$.

7. Soient les v.a. X, Y et Z où $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}$,

$$F_Y(x) = \frac{4}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{4x}{10}}\right) + \frac{1}{5}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{40}}\right)$$

et

$$F_Z(x) = \frac{5}{6}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{5x}{10}}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{50}}\right).$$

On observe $E[X] = E[Y] = E[Z] = 10$.

Utiliser les ordres stochastiques pour déterminer les relations entre les variances de X, Y et Z ; entre les TVaR de X, Y et Z ; entre les primes *stop-loss* de X, Y et Z.

8. On considère deux risques dont les coûts sont définis par

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases}$$

et

$$Y = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M} C_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0 \end{cases},$$

avec les hypothèses usuelles, $B \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\mu}\right)$ avec $\mu < \infty$ et $C \sim Pa(\alpha, \lambda)$ tel que $E[C] = \mu < \infty$.

(a) Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_\kappa(B)$ et $TVaR_\kappa(C)$; entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. B et C.

(b) Déterminer la relation entre les mesures $TVaR_{\kappa}(X)$ et $TVaR_{\kappa}(Y)$; entre les primes *stop-loss* associées aux v.a. X et Y.

9. Un portefeuille de 500 contrats indépendants d'assurance IARD est séparé en deux classes. Les coûts pour le contrat i de la classe j sont définis par $X_i^{(j)}$ où

$$X_i^{(j)} = \begin{cases} B_i^{(j)}, I_i^{(j)} = 1 \\ 0, I_i^{(j)} = 0 \end{cases},$$

avec $B_i^{(j)} \sim U\left(a^{(j)}, b^{(j)}\right)$ et $I_i^{(j)} \sim Bern\left(q^{(j)}\right)$ pour $i = 1, ..., n^{(j)}$, $j = 1, 2$. On a le tableau suivant :

j	$n^{(j)}$	$q^{(j)}$	$a^{(j)}$	$b^{(j)}$
1	400	0.006	100	500
2	100	0.015	200	400

Le montant total des coûts pour le portefeuille est représenté par la v.a. S. On utilise une approximation pour évaluer la distribution de S, construite comme suit. On approxime les v.a. $I_i^{(j)}$ par des v.a. obéissant à des lois de Poisson. Quatre approximations de $B^{(j)}$ sont envisagées :

- Approche 1 : on approxime $B^{(j)}$ par $\widetilde{B}^{(j,1)}$ où $f_{\widetilde{B}^{(j,1)}}\left(a^{(j)}\right) = 1$;
- Approche 2 : on approxime $B^{(j)}$ par $\widetilde{B}^{(j,2)}$ où $f_{\widetilde{B}^{(j,2)}}\left(b^{(j)}\right) = 1$;
- Approche 3 : on approxime $B^{(j)}$ par $\widetilde{B}^{(j,3)}$ où

$$f_{\widetilde{B}^{(j,3)}}\left(\frac{a^{(j)} + b\,(j)}{2}\right) = 1 ;$$

- Approche 4 : on approxime $B^{(j)}$ par $\widetilde{B}^{(j,4)}$ où $f_{\widetilde{B}^{(j,4)}}\left(a^{(j)}\right) = f_{\widetilde{B}^{(j,4)}}\left(b^{(j)}\right) = \frac{1}{2}$.

On choisit les paramètres des lois de Poisson et on choisit une seule approche l (parmi $l = 1, 2, 3, 4$) qui permet de produire une approximation conservatrice de la VaR de S. On définit par T la v.a. qui résulte de cette approximation de la v.a. S.

(a) Indiquer clairement et justifier brièvement votre choix des paramètres des lois de Poisson et de l'approche i d'approximation (vous pouvez avoir recours à des graphiques).

(b) Calculer $\Pr(T \leq 0)$ et $\Pr(T \leq 2000)$ dans le but d'évaluer approximativement $\Pr(S \leq 0)$ et $\Pr(S \leq 2000)$.

(c) Calculer $VaR_{0.99}(T)$ afin d'évaluer approximativement la valeur de $VaR_{0.99}(S)$.

7.7 Réponses

1. Réponses à la question 3 :
   (a) 1061. 837 et 1083.287
   (b) Aucune réponse
   (c) Aucune réponse
   (d) Aucune réponse
2. Réponses à la question 6 :
   (a) 1083.287 et 1083.287
   (b) 11 793.980 et 47 891.887
   (c) Aucune réponse
   (d) Aucune réponse
3. Réponses à la question 9 :
   (a) Aucune réponse
   (b) 0.049869 et 0.649646
   (c) 4300

8

Distributions multivariées et agrégation des risques

8.1 Introduction

Depuis le milieu des années 1990, on observe en actuariat et en gestion quantitative des risques un intérêt croissant pour la modélisation de la dépendance entre les risques. Il est devenu essentiel pour l'actuaire de connaître des modèles multivariés et des méthodes pour en construire. La dépendance a un impact sur la mutualisation des risques. Désormais, il est devenu crucial de tenir compte de la dépendance dans les modélisations d'un portefeuille de risques.

Dans un cours de base en probabilité, l'exemple le plus fréquemment présenté de distribution multivariée est la distribution normale multivariée. En fait, il existe pour chaque loi paramétrique, continue ou discrète, plusieurs extensions multivariées. Des lois multivariées peuvent aussi être créées en se basant sur la théorie des copules. Il existe aussi différentes approches pour construire des modèles multivariés de risque : modèles avec chocs communs, modèles avec mélange commun, etc.

Au chapitre 1, on présente les notions de base relatives aux distributions multivariées. Dans ce chapitre, on aborde un certain nombre de lois multivariées dont on présente les principales caractéristiques. Ainsi, on considère des lois exponentielles, gamma, de Pareto, de Poisson, binomiale négative, de Bernoulli multivariées. Ensuite, on examine les cas où il est possible de trouver une expression exacte pour les fonctions de répartition de la somme des risques. On suggère aussi des méthodes adéquates d'évaluation dans les autres cas. On présente aussi les méthodes avec

chocs communs et avec mélange commun pour construire des modèles multivariés de risque afin d'incorporer une relation de dépendance entre les risques. On s'intéresse aussi à la notion de la comonotonicité et à ses principales propriétés. Enfin, il est impossible de traiter de la modélisation de la dépendance sans aborder la théorie des copules. Étant donné son importance, ce sujet fait l'objet du chapitre 9 au complet.

8.2 Classes de Fréchet

Soient $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ des fonctions de répartition univariées. On suppose que les marginales $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$ sont fixées (pas nécessairement identiques).

Définition 8.1 *On définit la classe de Fréchet* $\Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ *par l'ensemble de toutes les fonctions de répartition multivariées ayant pour marginales* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$.

On peut montrer que toute fonction de répartition $F_{X_1,...,X_n}$ membre de la classe de Fréchet $\Gamma(F_{X_1}, ..., F_{X_n})$ est comprise entre deux bornes dites les bornes de Fréchet. On a recours à la proposition suivante pour montrer ce résultat.

Proposition 8.2 *Soient deux événements* A *et* B. *On a*

$$\max(P(A) + P(B) - 1; 0) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A); P(B)). \quad (8.1)$$

Preuve. Ce résultat est élémentaire en probabilité. D'une part, on sait que $P(A \cap B)$ doit nécessairement satisfaire les inégalités suivantes :

$$P(A \cap B) \leq P(A) \text{ et } P(A \cap B) \leq P(B),$$

ce qui implique que $P(A \cap B) \leq \min(P(A); P(B))$. Maintenant, on désire démontrer la validité de la borne inférieure de $P(A \cap B)$ donnée à l'équation (8.1). On sait que

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B). \quad (8.2)$$

Étant donné que $P(A \cup B) \leq 1$ et $P(A \cap B) \geq 0$ alors, (8.2) devient $P(A \cap B) = \max(P(A) + P(B) - 1; 0)$. ■

À partir de (8.1), on déduit le résultat suivant.

Proposition 8.3 *Soit la classe de Fréchet* $\Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$ *générée à partir des marginales* F_{X_1} *et* F_{X_2}. *Alors, on a*

$$F^{-}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \leq F^{+}_{X_1,X_2}(x_1, x_2), \quad (8.3)$$

où

$$\begin{aligned} F^{-}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \max\left(F_{X_1}(x_1)+F_{X_2}(x_2)-1;0\right) \\ F^{+}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \min\left(F_{X_1}(x_1);F_{X_2}(x_2)\right). \end{aligned}$$

Les bornes obtenues dépendent seulement des marginales F_{X_1} et F_{X_2}. Ainsi, peu importe la structure de dépendance qui relie les v.a. X_1 et X_2, la fonction de répartition conjointe de la paire (X_1, X_2) satisfait (8.3). Une généralisation de la proposition 8.3 est fournie dans le théorème qui suit.

Théorème 8.4 *Soit $F_{X_1,...,X_n}$ une fonction de répartition appartenant à l'ensemble $\Gamma(F_{X_1},...,F_{X_n})$. Alors, on a*

$$F^{-}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) \leq F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) \leq F^{+}_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n),$$

où

$$F^{-}_{X_1,...,X_n}(\underline{x}) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1);0\right),$$

$$F^{+}_{X_1,...,X_n}(\underline{x}) = \min\left(F_1(x_1);...;F_n(x_n)\right).$$

Preuve. On a

$$F_{X_1,...,X_n}(\underline{x}) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\}\right).$$

Comme

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\} \subset \{X_i \leq x_i\}$$

pour tout $i = 1, 2, ..., n$, alors $F_{X_1,...,X_n}(\underline{x}) \leq F_{X_i}(x_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, ce qui mène à la seconde inégalité. La première inégalité découle de

$$\begin{aligned} \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\}\right) &= 1 - \Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{X_i > x_i\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n}\Pr(X_i > x_i) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

■

La borne $F^{+}_{X_1,...,X_n}$ correspond à la borne supérieure de Fréchet et elle est une fonction de répartition. La borne $F^{-}_{X_1,...,X_n}$ est appelée la borne inférieure de Fréchet. Pour $n > 2$, $F^{-}_{X_1,...,X_n}$ n'est pas une fonction de répartition (voir [57]). Pour $n = 2$, $F^{-}_{X_1,X_2}$ est une fonction de répartition.

8.3 Comonotonicité

8.3.1 Définition

Un cas particulier de relation de dépendance est la comonotonicité. Depuis la fin des années 1990, cette notion est fréquemment évoquée en actuariat.

Définition 8.5 *Un vecteur de v.a.* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *est comonotonique si et seulement si il existe une v.a.* Z *et des fonctions non décroissantes* ϕ_1,...,ϕ_n *telles que*

$$(X_1, ..., X_n) =_d \left(\phi_1(Z), ..., \phi_n(Z)\right).$$

Par exemple, on définit un vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ où les composantes sont données par

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U), \tag{8.4}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Alors, par la définition 8.5, les composantes de $\underline{X}$ sont dites comonotones. La relation en (8.4) a des conséquences pour l'agrégation des risques que l'on suppose comonotones.

La proposition suivante fait le lien entre un vecteur de v.a. $\underline{X}$ dont les composantes sont comonotones et la borne supérieure de Fréchet.

Proposition 8.6 *Le vecteur de v.a.* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *a des composantes comonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne supérieure de Fréchet* F^+.

Preuve. Pour le vecteur de v.a. $\underline{X}$ définie en (8.4), on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) &= \Pr\left(F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n\right) \\ &= \Pr\left(U \leq F_{X_1}(x_1), ..., U \leq F_{X_n}(x_n)\right) \\ &= \Pr\left(U \leq \min\left(F_{X_1}(x_1); ...; F_{X_n}(x_n)\right)\right) \\ &= F_{\underline{X}}^{+}(\underline{x}), \end{aligned}$$

telle que définie au théorème 8.4. ■

La relation de comonotonicité correspond à la dépendance positive parfaite. Toutes les composantes du vecteur dépendent d'une seule v.a. On a aussi le résultat suivant dans le contexte de v.a. continues.

Proposition 8.7 *Soit un vecteur de v.a. continues* $\underline{X}$ *dont les marginales sont* $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$. *Les composantes de* $\underline{X}$ *sont comonotones si, et seulement si,*

$$X_i = F_{X_i}^{-1}\left(F_{X_j}(X_j)\right), \tag{8.5}$$

pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$ *et tous les* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *avec* $i \neq j$.

Preuve. Pour simplifier la présentation, on fixe $i = 1$ sans perte de généralisation. Si les composantes sont comonotones, on utilise (8.4) conjointement avec le théorème 1.20

$$X_i = F_{X_i}^{-1}(U) = F_{X_i}^{-1}(F_{X_1}(X_1))$$

pour $i = 2, ..., n$. L'implication inverse se démontre de façon similaire. ■

8.3.2 Comonotonicité et agrégation

Soit un conglomérat de n v.a. comonotones $X_1, ..., X_n$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. À partir de (8.4), on a

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U). \tag{8.6}$$

Dans la prochaine proposition, on traite d'abord le cas de la somme de v.a. continues.

Proposition 8.8 ***(Additivité des VaR et des TVaR).*** *Soient les v.a. comonotones et continues $X_1, ..., X_n$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, on a*

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i). \tag{8.7}$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i). \tag{8.8}$$

Preuve. À partir de (8.6), on a

$$S = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) = \varphi(U).$$

Alors, avec la proposition 1.28, on a

$$VaR_\kappa(S) = VaR_\kappa(\varphi(U)) = \varphi(VaR_\kappa(U))$$

qui devient

$$VaR_\kappa(S) = \varphi(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(\kappa) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i).$$

On remplace (8.7) dans la définition de base de $TVaR_\kappa(S)$ et on a

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 VaR_u(S)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-\kappa}\int_\kappa^1 \sum_{i=1}^n VaR_u(X_i)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{i=1}^n TVaR_\kappa(X_i). \end{aligned}$$

■

Dans le prochain exemple, on constate qu'il est plus aisé d'agréger des v.a. continues comonotones que d'agréger des v.a. continues indépendantes.

Exemple 8.9 *Soit le triplet de v.a. comonotones* (X_1, X_2, X_3) *où* $X_1 \sim U(0,200)$, $X_2 \sim Pa(3,200)$ *et* $X_3 \sim Exp\left(\frac{1}{100}\right)$. *On définit* $S = X_1 + X_2 + X_3$. *Comme* $E[X_i] = 100$, $i = 1,2,3$, *on a* $E[S] = 300$. *On déduit les expressions suivantes de* $VaR_\kappa(S)$ *et de* $TVaR_\kappa(S)$ *:*

$$VaR_\kappa(S) = 200\kappa + 200\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) + (-100)\ln(1-\kappa)$$

et

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= 200\frac{(1+\kappa)}{2} + (-100)(\ln(1-\kappa)+1) \\ &\quad +200\left(\frac{3}{3-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{3}} - 1\right), \end{aligned}$$

pour $\kappa \in (0,1)$. *On note que* $TVaR_0(S) = E[S]$. □

Dans certains cas, il est possible d'identifier la loi de $S = \sum_{i=1}^n X_i$, comme il est illustré dans les trois exemples suivants.

Exemple 8.10 *Soit un vecteur de v.a. où les composantes sont comonotones et identiquement distribuées* ($F_{X_i} = F_X$ *et* $X_i \sim X$ *pour* $i = 1,2,...,n$). *À partir de (8.4), on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n X_i = F_X^{-1}(U) + ... + F_X^{-1}(U) \\ &= nF_X^{-1}(U) = nX. \end{aligned}$$

Si les v.a. X_i *sont comonotones et identiquement distribuées, cela revient à dire qu'elles prennent toutes la même valeur.* □

Exemple 8.11 *Soient les v.a. comonotones* $X_i \sim Exp(\beta_i)$ *avec* $\overline{F}_{X_i}(x) = \exp(-\beta_i x)$ *(*$i = 1, 2, ..., n$*). Pour* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$*, on a*

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{1}{\beta_1}\ln(1-U)\right) + ... + \left(-\frac{1}{\beta_n}\ln(1-U)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\beta_1} + ... + \frac{1}{\beta_n}\right)\ln(1-U), \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire que $S \sim Exp\left(\frac{1}{\frac{1}{\beta_1}+...+\frac{1}{\beta_n}}\right)$. □

Exemple 8.12 *Soient les v.a. comonotones* $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$ *avec* $F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + x}\right)^{\alpha}$ *et* $F_{X_i}^{-1}(u) = \frac{\lambda_i}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_i$ *(*$i = 1, 2, ..., n$*). Pour* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$*, on a*

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} X_i = \left(\frac{\lambda_1}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_1\right) + ... + \left(\frac{\lambda_n}{(1-u)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda_n\right) \\ &= \frac{\lambda^*}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}} - \lambda^*, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $S \sim Pa(\alpha, \lambda^*)$ *où* $\lambda^* = \lambda_1 + ... + \lambda_n$. □

On ne peut pas évoquer directement la proposition 8.8 pour la somme de v.a. discrètes. Néanmoins, la relation (8.6) reste valide comme on l'illustre dans le prochain exemple.

Exemple 8.13 *On considère un portefeuille de 10 risques individuels. Les coûts associés au risque i sont modélisés par la v.a.* $X_i = b_i I_i$ *où* I_i *obéit à une loi de Bernoulli de moyenne* q_i *et* b_i *est une constante positive (*$i = 1, 2, ..., 10$*). Les caractéristiques des risques du portefeuille sont données dans le tableau suivant :*

i	q_i	b_i	i	q_i	b_i
1	0.091	100	6	0.031	300
2	0.064	100	7	0.014	400
3	0.049	200	8	0.023	400
4	0.019	200	9	0.058	500
5	0.027	300	10	0.065	500

Les v.a. I_1*,...,* I_{10} *sont comonotones. La v.a.* S *représente les coûts totaux pour le portefeuille. On représente la v.a.* S *par* $S = \sum_{i=1}^{10} b_i F_{I_i}^{-1}(U)$ *où*

$U \sim U(0,1)$. On déduit que

i	q_i	$1-q_i$	b_i	*ordre de* $1-q_i$
1	*0.091*	*0.809*	*100*	*1*
2	*0.064*	*0.936*	*100*	*3*
3	*0.049*	*0.951*	*200*	*5*
4	*0.019*	*0.981*	*200*	*9*
5	*0.027*	*0.973*	*300*	*7*
6	*0.031*	*0.969*	*300*	*6*
7	*0.014*	*0.986*	*400*	*10*
8	*0.023*	*0.977*	*400*	*8*
9	*0.058*	*0.942*	*500*	*4*
10	*0.065*	*0.935*	*500*	*2*

et on obtient

x	$\Pr(S=x)$	$\Pr(S\leq x)$
0	*0.809*	*0.809*
100	*0.126*	*0.935*
600	*0.001*	*0.936*
700	*0.006*	*0.942*
1200	*0.009*	*0.951*
1400	*0.018*	*0.969*
1700	*0.004*	*0.973*
2000	*0.004*	*0.977*
2400	*0.004*	*0.981*
2600	*0.005*	*0.986*
3000	*0.014*	*1.000*

□

La proposition 8.8 peut être généralisée aux cas de v.a. comonotones qui sont ne pas nécessairement continues.

Proposition 8.14 ***(Additivité des VaR et des TVaR).*** *Soient les v.a. comonotones $X_1, ..., X_n$. Alors, pour $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a*

$$VaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i) \quad et \; TVaR_\kappa(S) = \sum_{i=1}^{n} VaR_\kappa(X_i).$$

Preuve. Voir [36]. ■

8.3.3 Antimonotonicité

Alors que la comonotonicité correspond à la relation de dépendance positive parfaite, on définit l'antimonotonicité comme étant la relation de dépendance négative parfaite.

Définition 8.15 *Un couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ est antimonotone si, et seulement si, il existe une v.a. Z, une fonction croissante ϕ_1 et une fonction*

décroissante ϕ_2 *telles que*

$$(X_1, X_2) =_d \quad (\phi_1(Z), \phi_2(Z)).$$

Ainsi, un couple de v.a. $\underline{X} = (X_1, X_2)$ dont les composantes sont définies par

$$X_1 = F_{X_1}^{-1}(U) \text{ et } X_2 = F_{X_2}^{-1}(1-U) \tag{8.9}$$

est antimonotone en vertu de la définition 8.5.

L'expression de la fonction de répartition conjointe d'un couple de v.a. $\underline{X}$ antimonotones est fournie dans la prochaine proposition.

Proposition 8.16 *Le couple de v.a.* $\underline{X} = (X_1, X_2)$ *a des composantes antimonotones si, et seulement si, sa fonction de répartition conjointe est la borne inférieure de Fréchet* $F^-_{X_1,X_2}$.

Preuve. Pour le couple de v.a. $\underline{X}$ définie en (8.9), on a

$$\begin{aligned} F_{\underline{X}}(x_1, x_2) &= \Pr\left(F_1^{-1}(U) \leq x_1, F_2^{-1}(1-U) \leq x_2\right) \\ &= \Pr\left(U \leq F_1(x_1), 1-U \leq F_2(x_2)\right). \end{aligned}$$

Puis, on observe

$$\Pr\left(U \leq F_1(x_1), 1-U \leq F_2(x_2)\right) = \Pr\left(U \leq F_1(x_1), U > 1-F_2(x_2)\right)$$

qui correspond à $F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1$, si $F_1(x_1) \geq 1 - F_2(x_2)$, ou à 0, si $F_1(x_1) < 1 - F_2(x_2)$. Alors, on déduit

$$\begin{aligned} \Pr\left(U \leq F_1(x_1), 1-U \leq F_2(x_2)\right) &= \max\left(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1; 0\right) \\ &= F^-_{X_1,X_2}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

telle que définie au théorème 8.4. ■

Pour un couple de v.a. continues $\underline{X}$ dont les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}, on peut aussi montrer que les composantes de $\underline{X}$ sont antimonotones si, et seulement si,

$$(X_1, X_2) =_d \left(X_{X_1}, F_{X_2}^{-1}\left(\overline{F}_{X_1}(X_1)\right)\right).$$

Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$ où $\underline{X}$ est un couple de v.a. antimonotones. Alors, avec (8.9), on a

$$S = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(1-U). \tag{8.10}$$

On illustre la relation dans le prochain exemple. On applique ce résultat pour un couple de v.a. (X_1, X_2) ayant des marginales identiques.

Exemple 8.17 *Soit un couple de v.a.* (X_1, X_2) *antimonotones où* $X_1 \sim X_2 \sim Exp(\beta)$. *Alors, on a*

$$VaR_\kappa(X_1 + X_2) = \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right).$$

On déduit l'expression de F_S

$$F_{X_1+X_2}(s) = \sqrt{1 - 4e^{-\beta x}},\ x \geq \frac{1}{\beta} \ln 4.$$

L'expression de la TVaR est donnée par

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X_1 + X_2) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_\kappa^1 VaR_u(X_1 + X_2)\, \mathrm{d}u \\ &= 2\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{1-\kappa} \left(\frac{1}{\beta}\right) \ln\left(1 - \frac{1-\kappa}{2}\right). \square \end{aligned}$$

8.4 Lois multivariées et agrégation

8.4.1 Approche générale pour des v.a. continues

Pour simplifier, on considère un couple de v.a. continues positives (X_1, X_2) dont la fonction de densité conjointe est donnée par f_{X_1,X_2}. On veut examiner le comportement de $S = X_1 + X_2$, en évaluant notamment $f_S(s)$ et $F_S(s) = \Pr(X_1 + X_2 \leq s)$ pour $s \in \mathbb{R}^+$. Alors, la fonction de densité de S s'exprime en termes de f_{X_1,X_2} sous la forme suivante :

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1, s - x_1)\, \mathrm{d}x_1. \tag{8.11}$$

La généralisation de (8.11) pour $n > 2$ risques se fait comme suit. Soit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ avec fonction de densité $f_{\underline{X}}$. La fonction de densité de $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est obtenue avec

$$\begin{aligned} & f_S(s) \\ = & \int_0^s \int_0^{s-x_1} \cdots \int_0^{s-\sum_{i=1}^{n-2} x_i} f_{\underline{X}}\left(x_1, x_2, \ldots, s - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) \mathrm{d}x_{n-1} ... \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_1. \end{aligned}$$

Dans certaines circonstances, on a recours à la f.g.m. multivariée de S, donnée par

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E\left[\mathrm{e}^{tS}\right] = E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] = M_{X_1,...,X_n}(t,...,t), \end{aligned} \tag{8.12}$$

pour identifier sa distribution.

8.4.2 Approche générale pour des v.a. discrètes

Soit une paire de v.a. discrètes (X_1, X_2) avec support arithmétique, i.e. où $X_i \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ avec un pas $h > 0$ et dont la fonction de masse de probabilité conjointe est donnée par $f_{X_1,X_2}(m_1h, m_2h)$. La fonction de masse de probabilité de S est déterminée avec

$$f_S(kh) = \sum_{m_1=0}^{k} f_{X_1,X_2}(m_1h, kh - m_1h). \tag{8.13}$$

La version généralisée de (8.13) pour $n > 2$ risques est fournie en (6.10), que l'on reproduit ci-dessous :

$$\begin{aligned} & f_{S_n}(kh) \\ = & \sum_{k_1=0}^{k}\sum_{k_2=0}^{k_1}...\sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} f_{\underline{X}}\left(k_1h, k_2h, ..., k_{n-1}h, \left(k - \sum_{j=1}^{n-1} k_j\right)h\right). \end{aligned}$$

Dans le cas où la f.g.m. $M_{X_1,...,X_n}(t_1,...,t_n) = E\left[\mathrm{e}^{t_1X_1}...\mathrm{e}^{t_nX_n}\right]$ de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ existe, alors la f.g.m. de $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par

$$M_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{t(X_1+...+X_n)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right] = M_{X_1,...,X_n}(t,...,t). \tag{8.14}$$

Le résultat en (8.14) permet dans certains cas d'identifier la distribution de S. L'atout de ce résultat est que l'on peut l'appliquer conjointement avec la FFT. En effet, soit un vecteur de v.a. discrètes $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$. Alors, pour $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a

$$\widetilde{f}_S(t) = E\left[\mathrm{e}^{tX_1}...\mathrm{e}^{tX_n}\right].$$

Ce résultat sera illustré dans les prochaines sections.

8.5 Lois continues bivariées et multivariées

Un nombre impressionnant de lois multivariées continues existent et sont proposées encore actuellement. Seuls quelques exemples sont présentés dans cette section.

8.5.1 Loi exponentielle bivariée Eyraud - Farlie - Gumbel - Morgenstern (EFGM)

La fonction de répartition de la loi exponentielle bivariée EFGM est donnée par

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}\right)\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, \end{aligned} \tag{8.15}$$

avec un paramètre de dépendance $-1 \leq \theta \leq 1$ et avec $\beta_i > 0$. On déduit que les lois marginales de X_1 et X_2 sont exponentielles i.e. $X_i \sim Exp(\beta_i)$ $(i = 1, 2)$. Cette loi inclut l'indépendance comme cas particulier avec $\theta = 0$. La fonction de densité conjointe est

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= (1+\theta)\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} + \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2} \\ &\quad - \theta 2\beta_1\mathrm{e}^{-2\beta_1 x_1}\beta_2\mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} - \theta\beta_1\mathrm{e}^{-\beta_1 x_1}2\beta_2\mathrm{e}^{-2\beta_2 x_2}. \end{aligned}$$

Cette distribution bivariée admet une relation de dépendance modérée, qui peut être positive ou négative. Elle peut être interprétée sous la forme d'une perturbation de la loi exponentielle bivariée avec indépendance. Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1,X_2) = \frac{\theta}{4}$. De plus, la f.g.m. conjointe de (X_1,X_2) est

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= (1+\theta)\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad - \theta\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right) \\ &\quad + \theta\left(\frac{2\beta_1}{2\beta_1-t_1}\right)\left(\frac{2\beta_2}{2\beta_2-t_2}\right). \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2$. En utilisant (8.11) avec

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x, s-x) &= (1+\theta)\,\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &\quad + \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)} \\ &\quad - \theta 2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)} \\ &\quad - \theta\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} 2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_2(s-x)}, \end{aligned}$$

on déduit l'expression de $F_S(s)$. Alors, on a

$$\begin{aligned} F_S(s) &= (1+\theta)\,G(s;\beta_1;\beta_2) + \theta G(s;2\beta_1;2\beta_2) \\ &\quad - \theta G(s;2\beta_1;\beta_2) - \theta G(s;\beta_1;2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$G(s;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\gamma x}\sum_{j=0}^{1}\frac{(\gamma x)^j}{j!}, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\gamma_j}{\gamma_j-\gamma_i}\right)(1-\mathrm{e}^{-\gamma_i x}), & \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

Ainsi, la distribution de S est une combinaison linéaire de lois Erlang ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) ou de lois Erlang généralisées ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). On déduit aisément l'expression de $TVaR_\kappa(S)$

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(S) &= \frac{1}{1-\kappa}(1+\theta)\,\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,\beta_2) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,2\beta_2) \\ &\quad - \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);2\beta_1,\beta_2) \\ &\quad - \frac{1}{1-\kappa}\theta\zeta(VaR_\kappa(S);\beta_1,2\beta_2), \end{aligned}$$

où

$$\zeta(b;\gamma_1,\gamma_2) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\gamma b}\sum_{j=0}^{2}\frac{(\gamma b)^j}{j!}, & \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \\ \sum_{i=1}^{2}\left(\prod_{j=1,j\neq i}^{2}\frac{\gamma_j}{\gamma_j-\gamma_i}\right)\mathrm{e}^{-\gamma_i b}\left(b+\frac{1}{\gamma_i}\right), & \gamma_1 \neq \gamma_2 \end{cases}.$$

8.5.2 Loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin

On considère trois v.a. indépendantes de loi exponentielle $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$ pour $i = 0, 1, 2$. On définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_i = \min(Y_i; Y_0)$ pour

$i = 1, 2$. Pour $i = 1, 2$, on observe que

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_i}(x_i) &= \Pr(X_i > x_i) \\
&= \Pr(\min(Y_i; Y_0) > x_i) = \Pr(Y_i > x_i, Y_0 > x_i) \\
&= \Pr(Y_i > x_i) \Pr(Y_0 > x_i) \\
&= \overline{F}_{Y_i}(x_i) \overline{F}_{Y_0}(x_i) = \exp(-(\lambda_i + \lambda_0) x_i),
\end{aligned}$$

ce qui implique $X_i \sim Exp(\lambda_i + \lambda_0)$, $i = 1, 2$. La fonction de survie de (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \Pr(Y_1 > x_1) \Pr(Y_2 > x_2) \Pr(Y_0 > \max(x_1; x_2)) \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 x_1} \mathrm{e}^{-\lambda_2 x_2} \mathrm{e}^{-\lambda_0 \max(x_1; x_2)} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_0) x_1} \mathrm{e}^{-(\lambda_2+\lambda_0) x_2} \mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1; x_2)}.
\end{aligned}$$

On fixe $\beta_i = \lambda_i + \lambda_0$ $(i = 1, 2)$ et $0 \leq \lambda_0 \leq \min(\beta_1; \beta_2)$. Alors, l'expression de la fonction de survie de (X_1, X_2) devient

$$\begin{aligned}
\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2} \mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1; x_2)} \\
&= \overline{F}_{X_1}(x_1) \overline{F}_{X_2}(x_2) \mathrm{e}^{\lambda_0 \min(x_1; x_2)},
\end{aligned}$$

qui permet de déduire que la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin est une forme de perturbation de la loi exponentielle bivariée supposant l'indépendance. Cette loi incorpore une relation de dépendance positive seulement.

La fonction de densité de (X_1, X_2) est

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x_1} (\beta_2 - \lambda_0) \mathrm{e}^{-(\beta_2-\lambda_0) x_2}, & x_1 > x_2, \\ (\beta_1 - \lambda_0) \mathrm{e}^{-(\beta_1-\lambda_0) x_1} \beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2 x_2}, & x_1 < x_2, \\ \lambda_0 \mathrm{e}^{-\beta_1 x} \mathrm{e}^{-\beta_2 x} \mathrm{e}^{\lambda_0 x}, & x_1 = x_2 = x, \end{cases}$$

avec une singularité sur la diagonale $x_1 = x_2 = x$. Le coefficient de corrélation de Pearson est $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\lambda_0}{\beta_1+\beta_2-\lambda_0}$.

La méthode utilisée pour construire la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est appelée la méthode *choc commun* et elle s'adapte aisément afin de construire des lois exponentielles multivariées.

8.5.3 Loi gamma bivariée Cheriyan - Ramabhadran - Mathai - Moschopoulos (CRMM)

La loi gamma bivariée CRMM est construite comme suit. Soient trois v.a. indépendantes Y_0, Y_1 et Y_2 où $Y_0 \sim Ga(\gamma_0, \beta_0)$, $Y_1 \sim Ga(\alpha_1 - \gamma_0, \beta_1)$ et

$Y_2 \sim Ga\,(\alpha_2 - \gamma_0, \beta_2)$, avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min\,(\alpha_1; \alpha_2)$. On définit les v.a. X_1 et X_2 par $X_i = \frac{\beta_0}{\beta_i} Y_0 + Y_i$ pour $i = 1, 2$. Il en résulte que (X_1, X_2) obéit à une loi gamma bivariée avec $X_i \sim Ga\,(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$, et $\rho_P\,(X_1, X_2) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}$. Le paramètre γ_0 correspond au paramètre de dépendance. L'expression de la f.g.m. de (X_1, X_2) est donnée par

$$\begin{aligned} M_{X_1,X_2}\,(t_1, t_2) &= E\left[\mathrm{e}^{t_1 X_1} \mathrm{e}^{t_2 X_2}\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{t_1 Y_1}\right] E\left[\mathrm{e}^{t_2 Y_2}\right] E\left[\mathrm{e}^{\left(\frac{\beta_0}{\beta_1} t_1 + \frac{\beta_0}{\beta_2} t_2\right) Y_0}\right] \\ &= \left(1 - \frac{t_1}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2 - \gamma_0)} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{t_1}{\beta_1} - \frac{t_2}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0}. \end{aligned}$$

On définit $S = X_1 + X_2$. En utilisant la relation $M_S\,(t) = M_{X_1,X_2}\,(t, t)$, la f.g.m. de S est donnée par

$$M_S\,(t) = \left(1 - \frac{t}{\beta_1}\right)^{-(\alpha_1 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-(\alpha_2 - \gamma_0)} \left(1 - \frac{t}{\beta_1} - \frac{t}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0},$$

ce qui correspond à la f.g.m. d'une somme de 3 v.a. indépendantes de loi gamma dont les paramètres d'échelle diffèrent, impliquant que la v.a. S n'obéit pas à une loi gamma.

On utilise le résultat fourni à la proposition 1.63 pour déduire que la v.a. S obéit à un mélange de lois gamma dont la fonction de densité est donnée par

$$f_S\,(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k h\,(x; \alpha + k, \beta)\,,$$

où $\beta = \max\left(\beta_1; \beta_2; \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-1}\right)$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma_0$. Les probabilités p_k, $k \in \mathbb{N}$, sont définies par $p_k = \sigma \times \xi_k$ où

$$\sigma = \beta^{-\gamma_0} \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)^{-\gamma_0} \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{\alpha_i - \gamma_0},$$

et

$$\xi_0 = 1,\ \xi_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} i \zeta_i \xi_{k-i},\ k \in \mathbb{N}^+,$$

avec

$$\zeta_k = \frac{\gamma_0}{k}\left(1 - \left(\beta\left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}\right)\right)^{-1}\right)^k + \sum_{i=1}^{2} \frac{(\alpha_i - \gamma_0)}{k}\left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^k,$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$.

On déduit que $F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k H(x; \alpha + k, \beta)$ et

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{\alpha + k}{\beta} \overline{H}(x; \alpha + k + 1, \beta).$$

Exemple 8.18 *Soit le couple de v.a.* (X_1, X_2) *obéissant à une loi gamma bivariée CRMM avec* $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$. *On définit* $S = X_1 + X_2$. *On obtient les valeurs suivantes :*

γ_0	κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$
0	*0.95*	*72.2301*	*84.5060*
0	*0.995*	*100.2088*	*111.6268*
0.5	*0.95*	*75.0652*	*89.2894*
0.5	*0.995*	*107.6104*	*121.4649*
1	*0.95*	*77.7790*	*93.4458*
1	*0.995*	*113.6537*	*128.8391*

Les valeurs de $\mathrm{Var}(S)$ *sont de 300, 350 et 400 pour* $\gamma_0 = 0$, *0.5 et 1.* □

8.5.4 Loi normale multivariée

On considère la loi normale multivariée pour le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ avec le vecteur des moyennes $\underline{\mu} = (\mu_1, ..., \mu_n)^t$ et la matrice variance-covariance

$$\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix},$$

où $\underline{\Sigma}$ est une matrice semi-définie positive et $()^t$ désigne la transposée d'une matrice ou d'un vecteur. En outre, $E[X_i] = \mu_i$, $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) = \sigma_{ii'} = \rho_{ii'}\sigma_i\sigma_{i'}$, $(i,\ i' = 1, 2, ..., n)$, où $\rho_{ii'}$ est le coefficient de corrélation de Pearson de la paire $(X_i, X_{i'})$. L'expression de la fonction de densité de $\underline{X}$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{\mu})^t \underline{\Sigma}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où $|\underline{\Sigma}|$ est le déterminant de $\underline{\Sigma}$. De plus, la f.g.m. multivariée de $\underline{X}$ est

$$M_{\underline{X}}(\underline{s}) = \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\underline{s}^t \underline{\Sigma} \underline{s}}.$$

Dans le cas univarié, pour une v.a. $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, on a la relation $X = \mu + \sigma Z$, où $Z \sim N(0,1)$. Dans le cas multivarié, la relation devient

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{8.16}$$

où $\underline{\sigma}^t = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ et $\underline{Z}$ obéit à une loi normale multivariée standard avec un vecteur de moyenne $(0, ..., 0)^t$ et une matrice variance-covariance

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

La fonction de répartition conjointe de $\underline{Z}$ est désignée par le symbole $\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}$ de telle sorte que

$$\overline{\Phi}_{\underline{\rho}}(x_1, ..., x_n) = F_{Z_1,...,Z_n}(x_1, ..., x_n).$$

De plus, pour $\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \underline{Z}$, l'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X}$ est donnée par

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \overline{\Phi}_{\underline{\rho}}\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}, ..., \frac{x_n - \mu_n}{\sigma_n}\right).$$

L'algorithme de simulation de réalisations pour la loi normale multivariée standard se décrit comme suit.

Algorithme 8.19 ***Algorithme de simulation pour la loi normale multivariée standard.*** *Soit un vecteur de v.a. $(Z_1, ..., Z_n)$ de loi normale multivariée avec $Z_i \sim N(0,1)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et une matrice de corrélation (supposée définie positive)*

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire $\underline{\rho} = \underline{B}\ \underline{B}^t$ où $\underline{B}^t$ est la matrice transposée de la matrice $\underline{B}$. La matrice $\underline{B}$ est obtenue à l'aide de la décomposition de Choleski

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

où

$$bij = \frac{\rho_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{il} b_{jl}}{\sqrt{1 - \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}^2}},$$

où $1 \leq j \leq i \leq n$ *et* $\sum_{l=1}^{0} () = 0$.

1. *On génère des réalisations* $Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}$ *des v.a.* $Y_1, ..., Y_n$ *indépendantes de loi normale standard.*

2. *On calcule* $\underline{Z}^{(j)} = \underline{B}\ \underline{Y}^{(j)}$ *où* $\underline{Z}^{(j)} = \left(Z_1^{(j)}, ..., Z_n^{(j)}\right)^T$ *et* $\underline{Y}^{(j)} = \left(Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}\right)^T$.

Soit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors, à l'aide de la f.g.m. de $\underline{X}$, on déduit que $S \sim N\left(\mu_S, \sigma_S^2\right)$ où $\mu_S = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}.$$

8.5.5 Loi normale mélange multivariée

On considère une généralisation de la loi normale multivariée. Soit un vecteur de v.a. $\underline{Z} = (Z_1, ..., Z_n)^t$ qui obéit à la loi normale multivariée standard dont le vecteur espérance est $(0, ..., 0)^t$ et dont la matrice variance-covariance est

$$\underline{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ en adaptant la relation en (8.16)

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \sqrt{\Theta}\underline{\sigma}^t \underline{Z}, \tag{8.17}$$

où Θ est une v.a. mélange positive indépendante de $\underline{Z}$. D'après (8.17), $(\underline{X}|\Theta = \theta)$ obéit à une loi normale multivariée avec un vecteur des moyennes $\underline{\mu}$ et avec une matrice variance-covariance $\sqrt{\theta}\underline{\Sigma}$

$$\sqrt{\theta}\underline{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{\theta}\sigma_1^2 & \sqrt{\theta}\sigma_{12} & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_{1n} \\ \sqrt{\theta}\sigma_{21} & \sqrt{\theta}\sigma_2^2 & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\theta}\sigma_{n1} & \sqrt{\theta}\sigma_{n2} & \cdots & \sqrt{\theta}\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $\underline{X}$ obéit à une loi normale mélange multivariée.

Par exemple, si la v.a. Θ est discrète avec $f_{\Theta}(\theta_j) = \Pr(\Theta = \theta_j)$, $j = 1, 2, ..., n$, alors

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{m} f_{\Theta}(\theta_j) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\theta_j^n} |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\theta_j}(\underline{x}-\underline{\mu})^t \underline{\Sigma}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$M_{\underline{X}}(\underline{s}) = \sum_{j=1}^{m} f_{\Theta}(\theta_j) \mathrm{e}^{\underline{s}^t \underline{\mu} + \frac{1}{2}\theta_i \underline{s}^t \underline{\Sigma} \underline{s}}.$$

De plus, on déduit que

$$M_S(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{\Theta}(\theta_j) \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n} \mu_i t + \frac{1}{2}\theta_j \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1, i' \neq i}^{n} \sigma_{ii'}\right) t^2},$$

ce qui correspond à la f.g.m. d'un mélange de loi normale univariée.

Dans la prochaine sous-section, on considère un autre cas particulier de loi normale mélange multivariée.

8.5.6 Loi de Student multivariée

On suppose que la v.a. $\frac{\nu}{\Theta}$ obéit à une loi du khi-deux avec un degré de liberté $\nu > 2$ (i.e. $\frac{\nu}{\Theta} \sim Ga\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$). Il en résulte que le vecteur de v.a. $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ obéit à une loi de Student multivariée. La fonction de densité de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)^t$ est

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{(\nu\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) |\underline{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\underline{x} - \underline{\mu})^t \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right)^{-\frac{(\nu+n)}{2}},$$

pour $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur moyenne et la matrice variance-covariance de $\underline{X}$ sont $\underline{\mu}$ et $\frac{\nu}{\nu-2}\underline{\Sigma}$. Si $\underline{\mu} = (0, ..., 0)$ et $\underline{\Sigma} = \underline{\rho}$, on dit que $\underline{X}$ obéit à une loi de Student standard multivariée où la matrice de corrélation est $\underline{\rho}$, avec une fonction de répartition désignée par $t_{\nu,\underline{\rho}}$. Par conséquent, si $\underline{X}$ obéit à une loi de Student multivariée avec un vecteur moyenne $\underline{\mu}$ et une matrice variance-covariance $\frac{\nu}{\nu-2}\underline{\Sigma}$ et si $\underline{X}'$ obéit à une loi de Student standard multivariée, alors on a la relation suivante :

$$\underline{X} = \underline{\mu} + \underline{\sigma}^t \sqrt{\frac{\nu - 2}{\nu}} \underline{X}'.$$

L'algorithme pour simuler des réalisations à partir d'une loi de Student standard multivariée se décrit comme suit.

Algorithme 8.20 ***Algorithme de simulation pour la loi de Student standard multivariée.***

1. *On simule une réalisation* $\left(Y_1^{(j)}, ..., Y_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Y_1, ..., Y_n)$ *de loi normale multivariée standard avec une matrice de corrélation* $\underline{\rho}$.

2. *On simule une réalisation* $W^{(j)}$ *de la v.a.* W *de loi du khi-deux avec un degré de liberté* ν *(i.e.* $W \sim Ga\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$*).*

3. *On calcule* $Z_i^{(j)} = \frac{Y_i^{(j)}}{\sqrt{W^{(j)}/\nu}}$, $i = 1, 2, ..., n$.

8.5.7 Lois multivariées construites par mélange commun

La méthode de construction de lois multivariées par mélange commun est due à [80] et [87]. On peut aussi consulter [57] sur cette méthode. On considère une v.a. discrète ou continue Θ avec support positif A_Θ. Pour fins de simplifications, on suppose que la f.g.m. de Θ, notée $M_\Theta(t)$, existe. On considère deux v.a. X_1 et X_2. On suppose que leur comportement aléatoire est influencé par la v.a. Θ de mélange. En conditionnant sur Θ, les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes avec des fonctions de survie conditionnelles données par

$$\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) = \Pr(X_i > x_i|\Theta = \theta) = \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \tag{8.18}$$

pour $i = 1, 2$ où Y_1 et Y_2 sont des v.a. indépendantes. Alors, la fonction de survie conditionnelle bivariée de (X_1, X_2) est

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2) &= \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2|\Theta = \theta) \\ &= \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\,\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)^\theta. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_i}(x_i) &= \int_{\theta\in A_\Theta} \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_{\theta\in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_i}(x_i)\right)\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \int_{\theta\in A_\Theta} \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2)\,\mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \int_{\theta\in A_\Theta} \left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\,\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)^\theta \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= M_\Theta\left(\ln\left(\overline{F}_{Y_1}(x_1)\,\overline{F}_{Y_2}(x_2)\right)\right). \end{aligned} \tag{8.20}$$

D'après (8.18) et (8.19), on observe les relations suivantes :

- si $\theta \leq \theta'$, alors $\overline{F}_{X_i|\Theta=\theta}(x_i) \geq \overline{F}_{X_i|\Theta=\theta'}(x_i)$, pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$;
- si $\theta \leq \theta'$, alors $\overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta}(x_1, x_2) \geq \overline{F}_{X_1,X_2|\Theta=\theta'}(x_1, x_2)$, pour tout x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

Dans la sous-section 8.5.8, on considère le cas où $Y_i \sim Exp(1)$, pour $i = 1, 2$. La méthode de construction décrite ci-dessus est aussi appelée *common frailties*.

8.5.8 Lois exponentielles bivariée mélange

Dans l'approche décrite à la sous-section 8.5.7, on suppose que $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, pour $i = 1, 2$, ce qui amène à

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \int_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_i}{\lambda_i}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta(-x_i)$$

et

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \int_{\theta \in A_\Theta} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_1}{\lambda_1}} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_2}{\lambda_2}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = M_\Theta\left(-\left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)\right).$$

On observe que

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \int_{\theta \in A_\Theta} \frac{\theta}{\lambda_1} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_1}{\lambda_1}} \frac{\theta}{\lambda_2} \mathrm{e}^{-\theta \frac{x_2}{\lambda_2}} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=-\left(\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)}. \end{aligned}$$

Soit la v.a. $S = X_1 + X_2$. On déduit que la distribution conditionnelle de $S|\Theta = \theta$ est une loi Erlang généralisée (voir en annexe pour les détails sur cette loi), ce qui implique que

$$\begin{aligned} f_{S|\Theta=\theta}(x) &= \frac{\frac{\theta}{\lambda_2}}{\frac{\theta}{\lambda_2} - \frac{\theta}{\lambda_1}} \frac{\theta}{\lambda_1} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda_1}x} + \frac{\frac{\theta}{\lambda_1}}{\frac{\theta}{\lambda_1} - \frac{\theta}{\lambda_2}} \frac{\theta}{\lambda_2} \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{\lambda_2}x} \\ &= \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}} \theta \mathrm{e}^{-\theta \frac{x}{\lambda_1}} + \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}} \theta \mathrm{e}^{-\theta \frac{x}{\lambda_2}}, \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$. Ensuite, on obtient l'expression de f_S

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_{\theta \in A_\Theta} f_{S|\Theta=\theta}(x) \mathrm{d}F_\Theta(\theta) \\ &= \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_2^{-1} - \lambda_1^{-1}} \left.\frac{\mathrm{d}M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-\frac{x}{\lambda_1}} + \frac{\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}} \left.\frac{\mathrm{d}M_\Theta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-\frac{x}{\lambda_2}}, \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

Grâce à cette méthode, on déduit la loi de Pareto bivariée décrite à la prochaine sous-section.

8.5.9 Loi Pareto bivariée

En suivant l'approche décrite aux sous-sections 8.5.7 et 8.5.8, on suppose que $Y_i \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, pour $i = 1, 2$, et que $\Theta \sim Ga(\alpha, 1)$. Alors, il en résulte que la fonction de survie bivariée de (X_1, X_2) est

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = \left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^{\alpha}, \quad (8.21)$$

et l'on déduit que la fonction de densité bivariée de (X_1, X_2) est

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2}, \ x_1, x_2 > 0.$$

La loi résultante est la loi de Pareto bivariée. On observe aussi que $X_i \sim Pa(\alpha, \lambda_i)$, $i = 1, 2$. Pour $\alpha > 2$, l'expression de la covariance est

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha - 2} - \frac{1}{\alpha - 1}\right),$$

pour $\alpha > 2$.

On définit $S = X_1 + X_2$. En supposant $\lambda_2 > \lambda_1$ sans perte de généralité, l'expression de f_S est

$$\begin{aligned} f_S(x) &= \int_0^x f_{X_1,X_2}(y, x-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda_1\lambda_2}\left(\frac{1}{1 + \frac{y}{\lambda_1} + \frac{x-y}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{\alpha}{\lambda_2 - \lambda_1}\left\{\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha+1}\right\} \end{aligned}$$

et celle de F_S correspond à

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \int_0^x f_S(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(1-\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_2}}\right)^{\alpha}\right) \\ &\quad -\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(1-\left(\frac{1}{1+\frac{x}{\lambda_1}}\right)^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Comme on a

$$\frac{x_i}{\lambda_i} = \overline{F}_{X_i}(x_i)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1,$$

on peut réécrire la fonction de survie de (X_1, X_2) en termes des fonctions de survie marginales de X_1 et X_2

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) &= \left(1+\frac{x_1}{\lambda_1}+\frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} \\ &= \left(\overline{F}_{X_1}(x_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + \overline{F}_{X_2}(x_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha} \\ &= \left(\overline{F}_{X_1}(x_1)^{-\frac{1}{\alpha}} + \overline{F}_{X_2}(x_2)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

La loi Pareto bivariée n'a pas de paramètre de dépendance. On voit au chapitre 9 que cette loi bivariée est importante afin de déduire l'expression de la copule de Clayton.

8.6 Lois discrètes bivariées et multivariées

Il existe un grand nombre de versions bivariées et multivariées des lois discrètes présentées au chapitre 1. Dans cette section, on traite de quelques exemples pouvant être pertinents en actuariat.

8.6.1 Loi de Poisson bivariée Teicher

La loi de Poisson bivariée Teicher (voir [101]) est la loi bivariée la plus simple pour le couple de v.a. (M_1, M_2) dont les marginales sont Poisson avec paramètres λ_1 et λ_2. Le paramètre de dépendance est $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1;\lambda_2)$. Elle est construite comme suit. Soient les v.a. indépendantes K_0, K_1, K_2 avec $K_i \sim Pois(\alpha_i)$, $i = 0,1,2$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1;\lambda_2)$,

$\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$ et $\alpha_2 = \lambda_2 - \alpha_0$. On définit

$$M_1 = K_1 + K_0 \text{ et } M_2 = K_2 + K_0.$$

Clairement, $M_i \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. De plus, les expressions de la f.m.p. conjointe et de la f.g.p. conjointe de (M_1, M_2) sont

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!}, \tag{8.22}$$

et

$$P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) = E\left[t_1^{M_2} t_2^{M_1}\right] = \mathrm{e}^{(\lambda_1-\alpha_0)(t_1-1)} \mathrm{e}^{(\lambda_2-\alpha_0)(t_2-1)} \mathrm{e}^{\alpha_0(t_1t_2-1)}.$$

Enfin, on a

$$\mathrm{Cov}(M_1, M_2) = \mathrm{Var}(M_0) = \alpha_0.$$

On déduit que $0 \leq corr(M_1, M_2) \leq \frac{\min(\lambda_1;\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$. Cette loi introduit seulement une dépendance positive au sein de (M_1, M_2). En utilisant les propriétés de la loi de Poisson, on peut aussi montrer que

$$E[M_1|M_2 = m_2] = (\lambda_1 - \alpha_0) + \frac{\alpha_0}{\lambda_2} m_2.$$

On utilise la notation $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1, \lambda_2, \alpha_0)$ avec λ_1, $\lambda_2 > 0$, $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$.

Exemple 8.21 *Soit* $(M_1, M_2) \sim PBiv(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \alpha_0 = 1)$. *On définit* $N = M_1 + M_2$ *où* $E[N] = 5$ *et* $\mathrm{Var}(N) = 7$. *De plus,* $N \sim PComp(\lambda = 4, F_B)$ *où* $f_B(1) = 0.75$, $f_B(2) = 0.25$ *et* $f_B(k) = 0$ *pour* $k \neq 1$ *ou 2. Avec la FFT, on trouve les valeurs exactes suivantes de la f.m.p. de N:* $f_N(0) = 0.01831564$, $f_N(5) = 0.14698300$ *et* $f_N(10) = 0.02644007$. □

On peut adapter cette méthode de construction afin de construire des lois multivariées Poisson, comme il est illustré dans l'exemple suivant.

Exemple 8.22 *On considère un portefeuille avec 10 lignes d'affaires, où le nombre de sinistres pour la ligne d'affaires i est défini par la v.a.* M_i $(i = 1, 2, ..., 10)$. *On suppose que* $(M_1, M_2, ..., M_{10})$ *obéit à une loi de Poisson multivariée dont les paramètres des marginales Poisson sont* λ_1, ..., λ_{10} *et dont la distribution conjointe est construite comme suit. Soient les v.a. indépendantes*

$$\begin{aligned} K_1 &\sim P(\alpha_1), ..., K_{10} \sim P(\alpha_{10}), \\ K_{11} &\sim P(\alpha_{11}),\ K_{12} \sim P(\alpha_{12}),\ K_{13} \sim P(\alpha_{13}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_{13} \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_{10}), \\ 0 &\leq \alpha_{11} \leq \min(\lambda_1 - \alpha_{13}; ...; \lambda_5 - \alpha_{13}), \\ 0 &\leq \alpha_{12} \leq \min(\lambda_6 - \alpha_{13}; ...; \lambda_{10} - \alpha_{13}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda_1 - \alpha_{11} - \alpha_{13}, \ ..., \ \alpha_5 = \lambda_5 - \alpha_{11} - \alpha_{13}, \\ \alpha_6 &= \lambda_6 - \alpha_{12} - \alpha_{13}, \ ..., \ \alpha_{10} = \lambda_{10} - \alpha_{12} - \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On définit les v.a. M_1, ..., M_{10} *par*

$$\begin{aligned} M_i &= K_i + K_{11} + K_{13}, \ i = 1, 2, ..., 5 \\ M_i &= K_i + K_{12} + K_{13}, \ i = 6, 7, ..., 10. \end{aligned}$$

L'expression de la f.g.p. de $\underline{M} = (M_1, ..., M_{10})$ *est*

$$\begin{aligned} P_{\underline{M}}(t_1, ..., t_{10}) &= \mathrm{e}^{\alpha_1 t_1 - 1} ... \mathrm{e}^{\alpha_{10} t_{10} - 1} \mathrm{e}^{\alpha_{11} t_1 ... t_5 - 1} \\ &\quad \times \mathrm{e}^{\alpha_{12} t_6 ... t_{10} - 1} \mathrm{e}^{\alpha_{13} t_1 ... t_{10} - 1} \end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 + \alpha_{11} + \alpha_{13}, \ ..., \ \lambda_5 = \alpha_5 + \alpha_{11} + \alpha_{13}, \\ \lambda_6 &= \alpha_6 + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \ ..., \ \lambda_{10} = \alpha_{10} + \alpha_{12} + \alpha_{13}. \end{aligned}$$

On définit $N = \sum_{i=1}^{10} M_i$ *dont l'espérance et la variance sont* $E[N] = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i$ *et*

$$\mathrm{Var}(N) = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i + 2 \times 5 \times \alpha_{11} + 2 \times 5 \times \alpha_{12} + 2 \times 10 \times \alpha_{13}.$$

On observe que $N \sim PComp(\lambda, F_B)$ *où*

$$\lambda = \sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 4\alpha_{11} - 4\alpha_{12} - 9\alpha_{13}$$

et $f_B(1) = \frac{\sum_{i=1}^{10} \lambda_i - 5\alpha_{11} - 5\alpha_{12} - 10\alpha_{13}}{\lambda}$, $f_B(5) = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{\lambda}$, $f_B(10) = \frac{\alpha_{13}}{\lambda}$, *et* $f_B(k) = 0$, *pour* $k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 5, 10\}$. *On suppose que* $\lambda_1 = ... = \lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = ... = \lambda_{10} = 3$, $\alpha_{11} = 0.8$, $\alpha_{12} = 1$ *et* $\alpha_{13} = 0.4$. *Alors,* $E[N] = 25$, $\mathrm{Var}(N) = 51$. *Bien que* $N \in \mathbb{N}$, *on indique les valeurs exactes de* $f_N(k)$ *pour* $k = 10$, *20 et 30 qui ont été obtenues avec la FFT :* $f_N(10) = 0.01415874$, $f_N(20) = 0.04136522$ *et* $f_N(30) = 0.03032717$. □

Cette méthode de construction est simple. Toutefois, elle introduit uniquement une dépendance positive.

8.6.2 Loi Poisson mélange bivariée

Soit une v.a. Θ positive, continue ou discrète. On considère un couple de v.a. (M_1, M_2) tel que $(M_1|\Theta = \theta)$ et $(M_2|\Theta = \theta)$ sont conditionnellement indépendantes et $(M_i|\Theta = \theta) \sim Pois(\theta\lambda_i)$ pour $i = 1, 2$. On suppose que la v.a. Θ est définie de telle sorte que $E[\Theta] = 1$. Alors, on a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= E\left[t_1^{M_1}t_2^{M_2}\right] = E_\Theta\left[E\left[t_1^\Theta t_2^\Theta|\Theta\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta\lambda_1(t_1-1)}\mathrm{e}^{\Theta\lambda_2(t_2-1)}\right] = E\left[\mathrm{e}^{\Theta(\lambda_1(t_1-1)+\lambda_2(t_2-1))}\right] \\ &= M_\Theta\left(\left(\lambda_1(t_1-1)+\lambda_2(t_2-1)\right)\right). \end{aligned}$$

À la prochaine sous-section, on traite le cas particulier quand Θ obéit à une loi gamma.

8.6.3 Loi Poisson-gamma bivariée

On suppose que $\Theta \sim Ga(r, r)$ tel que $E[\Theta] = 1$. Alors, on déduit

$$P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) = \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda_1}{r}(t_1-1)-\frac{\lambda_2}{r}(t_2-1)}\right)^r$$

et les lois marginales de M_1 et M_2 sont des lois binomiales négatives. La fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1, M_2) est donnée par

$$\begin{aligned} & f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) \\ = & \int_0^\infty \Pr(M_1 = m_1|\Theta=\theta)\Pr(M_2 = m_2|\Theta=\theta) f_\Theta(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ = & \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta\lambda_1}\mathrm{e}^{-\theta\lambda_2}\frac{(\theta\lambda_1)^{m_1}(\theta\lambda_2)^{m_2}}{m_1!m_2!}\mathrm{e}^{-r\theta}\frac{r^r(\theta)^{r-1}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

qui devient

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \int_0^\infty \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}r^r}{m_1!m_2!}\frac{(\theta)^{m_1+m_2+r-1}\,\mathrm{e}^{-\theta(\lambda_1+\lambda_2+r)}}{\Gamma(r)}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}r^r\Gamma(m_1+m_2+r)}{(\lambda_1+\lambda_2+r)^{(m_1+m_2+r)}\,m_1!m_2!\Gamma(r)}, \end{aligned}$$

pour $m_1 \in \mathbb{N}$ et $m_2 \in \mathbb{N}$. Cette définition d'une loi Poisson-gamma (ou binomiale négative) bivariée pose problème car une seule relation de dépendance est possible pour les paramètres des marginales $(\lambda_1, \lambda_2, r)$

fixés. On note l'absence de paramètre de dépendance. Cela est vrai quelle que soit la loi choisie pour Θ.

8.6.4 Loi Poisson mélange bivariée prise 2

Le problème soulevé dans la sous-section précédente est résolu en procédant comme suit. Soit un couple de v.a. (Θ_1, Θ_2). Le couple de v.a. (M_1, M_2) est défini de telle sorte que $(M_1|\Theta_1 = \theta_1)$ et $(M_2|\Theta_2 = \theta_2)$ sont conditionnellement indépendantes et $(M_i|\Theta_i = \theta_i) \sim Pois(\theta_i \lambda_i)$ pour $i = 1, 2$. À nouveau, on suppose que $E[\Theta_i] = 1$, pour $i = 1, 2$. Alors, on a

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1, t_2) &= E\left[t_1^{M_1} t_2^{M_2}\right] = E_{\Theta_1,\Theta_2}\left[E\left[t_1^{\Theta_1} t_2^{\Theta_2}|\Theta_1, \Theta_2\right]\right] \\ &= E\left[\mathrm{e}^{\Theta_1\lambda_1(t_1-1)}\mathrm{e}^{\Theta_2\lambda_2(t_2-1)}\right] \\ &= M_{\Theta_1,\Theta_2}(\lambda_1(t_1-1), \lambda_2(t_2-1)). \end{aligned}$$

On déduit aussi que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(M_1, M_2) &= E_{\Theta_1,\Theta_2}[\mathrm{Cov}(M_1, M_2|\Theta_1, \Theta_2)] \\ &\quad + \mathrm{Cov}_{\Theta_1,\Theta_2}(E[M_1|\Theta_1], E[M_2|\Theta_2]) \\ &= 0 + \mathrm{Cov}(\Theta_1\lambda_1, \Theta_2\lambda_2) = \lambda_1\lambda_2\mathrm{Cov}(\Theta_1, \Theta_2), \end{aligned}$$

ce qui implique que la covariance entre M_1 et M_2 est négative ou positive si la covariance entre Θ_1 et Θ_2 est négative ou positive.

8.6.5 Loi Poisson-gamma bivariée CRMM

On construit une loi Poisson-gamma bivariée en supposant que (Θ_1, Θ_2) obéit à la loi gamma bivariée CRMM.

À cette fin, on suppose que (Θ_1, Θ_2) obéit à la loi gamma bivariée avec une f.g.m. définie par

$$M_{\Theta_1,\Theta_2}(t_1, t_2) = \left(1 - \frac{t_1}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \left(1 - \frac{t_2}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \left(1 - \frac{t_1}{r_1} - \frac{t_2}{r_2}\right)^{-\gamma_0},$$

de telle sorte que $\Theta_i \sim Ga(r_i, r_i)$ pour $i = 1, 2$ et le paramètre de dépendance γ_0 est fixé de telle sorte que $0 \leq \gamma_0 \leq \min(r_1; r_2)$. Il en résulte

que la f.g.p. de (M_1, M_2) est

$$\begin{aligned} P_{M_1,M_2}(t_1,t_2) &= M_{\Theta_1,\Theta_2}(\lambda_1(t_1-1),\lambda_2(t_2-1)) \\ &= \left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)} \\ &\quad\times\left(1-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad\times\left(1-\frac{\lambda_1(t_1-1)}{r_1}-\frac{\lambda_2(t_2-1)}{r_2}\right)^{-\gamma_0}, \quad (8.23) \end{aligned}$$

ce qui correspond à la f.g.p. d'une loi binomiale négative bivariée de paramètres r_1, r_2, γ_0, $\beta_1 = \frac{\lambda_1}{r_1}$ et $\beta_2 = \frac{\lambda_2}{r_2}$. Les marginales de M_1 et M_2 sont des distributions binomiales négatives de paramètres r_i et $\beta_i = \frac{\lambda_i}{r_i}$ pour $i = 1, 2$.

De (8.23), on déduit que

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \left(\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{m_2} \\ &\quad\times\left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)}\left(1+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad\times\sum_{j_1=0}^{m_1}\sum_{j_2=0}^{m_2}\frac{\Gamma(j_1+j_2+\gamma_0)\prod_{i=1}^{2}\omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)}}{\Gamma(\gamma_0)j_1!j_2!\left(1+\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)^{\gamma_0+j_1+j_2}}, \end{aligned}$$

où

$$\omega_{(r_i,\lambda_i,\gamma_0,m_i,j_i)} = \frac{\Gamma(r_i-\gamma_0+m_i-j_i)}{\Gamma(r_i-\gamma_0)\Gamma(m_i-j_i+1)}\left(1+\frac{\lambda_i}{r_i}\right)^{-(m_i-j_i)},$$

pour $j_i = 0, ..., m_i$, $m_i = 0, 1, ...$ et $i = 1, 2$.

On définit la v.a. $N = M_1 + M_2$. La f.g.p. de N est obtenue à partir de la f.g.p. de (M_1, M_2)

$$\begin{aligned} P_N(t) &= \left(1-\frac{\lambda_1(t-1)}{r_1}\right)^{-(r_1-\gamma_0)}\left(1-\frac{\lambda_2(t-1)}{r_2}\right)^{-(r_2-\gamma_0)} \\ &\quad\times\left(1-\left(\frac{\lambda_1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{r_2}\right)(t-1)\right)^{-\gamma_0}, \end{aligned}$$

qui correspond au produit des f.g.p. de 3 v.a. indépendantes de loi binomiale négative avec les paramètres suivants : $\left(r_1-\gamma_0, \frac{\lambda_1}{r_1}\right)$, $\left(r_2-\gamma_0, \frac{\lambda_2}{r_2}\right)$ et

$\left(\gamma_0, \left(\frac{\lambda_1}{r_1} + \frac{\lambda_2}{r_2}\right)\right)$. Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de N sont obtenues avec la FFT (aisément) ou avec le produit de convolution.

Exemple 8.23 ***Loi Poisson-gamma bivariée CRRM.*** *On fixe* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$ *et* $r_2 = 3$. *On déduit que* $M_1 \sim BN\left(r = 4, \beta = \frac{1}{4}\right)$ *et* $M_2 \sim BN\left(r = 3, \beta = \frac{2}{3}\right)$. *Pour* $N = M_1 + M_2$, *on a* $E[N] = 3$. *Pour* $\gamma_0 = 0$ *et 2, on détermine les valeurs de* $\mathrm{Var}(N)$ *comme étant 4.5833 et 9.2974. De plus, on obtient les valeurs suivantes de* f_{M_1,M_2}*:*

γ_0	$f_{M_1,M_2}(0,0)$	$f_{M_1,M_2}(0,1)$	$f_{M_1,M_2}(1,0)$	$f_{M_1,M_2}(1,1)$
0	*0.0884736*	*0.1061683*	*0.0707888*	*0.0849347*
2	*0.1045293*	*0.1145278*	*0.0690802*	*0.0851726*

Enfin, on fournit les valeurs obtenues de $VaR_\kappa(N)$ *et* $TVaR_\kappa(N)$ *pour* $\gamma_0 = 0$ *et* 2 *:*

γ_0	κ	$VaR_\kappa(N)$	$TVaR_\kappa(N)$
0	*0.95*	*7*	*8.4546*
0	*0.995*	*10*	*11.7585*
2	*0.95*	*7*	*9.0237*
2	*0.995*	*11*	*12.7468*

On observe l'impact du paramètre de dépendance γ_0 *sur les mesures de risque* $VaR_\kappa(N)$ *et* $TVaR_\kappa(N)$. *En fait on peut démontrer en utilisant les ordres stochastiques multivariés que* $TVaR_\kappa$ *augmente quand la relation positive de dépendance s'intensifie entre les composantes de la paire* (M_1, M_2). □

8.6.6 Loi de Bernoulli multivariée Cossette - Gaillardetz - Marceau - Rioux (CGMR)

On procède comme suit pour construire la loi de Bernoulli CGMR. Soient les v.a. indépendantes J_0, J_1, ..., J_n où $J_i \sim Bern(r_i)$ $(i = 0, 1, ..., n)$. On définit le vecteur de v.a. $(I_1, ..., I_n)$ où

$$I_i = \min(J_0 + J_i; 1), \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

On déduit que $I_i \sim Bern(q_i)$ avec

$$\overline{q}_i = 1 - q_i = (1 - r_i)(1 - r_0) = \overline{r}_i \overline{r}_0, \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

On suppose que les paramètres q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont fixés. Ainsi, le paramètre de dépendance r_0 doit satisfaire la contrainte $\max(\overline{q}_1; ...; \overline{q}_n) \leq$

$\overline{r}_0 \leq 1$ ou $0 \leq r_0 \leq \min(q_1; ...; q_n)$. La f.g.p. est définie par

$$\begin{aligned} P_{I_1,...,I_n}(s_1,...,s_n) &= r_0 s_1 ... s_n + \overline{r}_0 \prod_{\iota=1}^{n} (\overline{r}_i + r_i s_i) \\ &= r_0 s_1 ... s_n + \overline{r}_0^{-(n-1)} \prod_{\iota=1}^{n} (\overline{q}_i + (q_i - r_0) s_i). \end{aligned}$$

On observe que

$$\begin{aligned} f_{I_i,I_{i'}}(i_i, i_{i'}) &= r_0 1_{\{i_i i_{i'}=1\}} \\ &\quad + \overline{r}_0 r_i^{i_i} \overline{r}_i^{1-i_i} \; r_{i'}^{i_{i'}} \overline{r}_{i'}^{1-i_{i'}} \\ &= r_0 1_{\{i_i i_{i'}=1\}} \\ &\quad + \overline{r}_0^{-1} (q_i - r_0)^{i_i} (\overline{q}_i)^{1-i_i} \quad (q_{i'} - r_0)^{i'_i} (\overline{q}_{i'})^{1-i_{i'}}, \end{aligned}$$

pour $i \neq i' \in \{1, 2, ..., n\}$. Il en découle que l'expression de la covariance entre I_i et $I_{i'}$ est

$$\mathrm{Cov}(I_i, I_{i'}) = r_0 + \overline{r}_0^{-1} (q_i - r_0)(q_{i'} - r_0) - q_i q_{i'},$$

pour $i \neq i' \in \{1, 2, ..., n\}$.

Enfin, on a

$$f_{I_1,...,I_n}(i_1, ..., i_n) = r_0 1_{\left\{\prod_{i=1}^{n} i_i = 1\right\}} + \overline{r}_0^{-(n-1)} \prod_{i=1}^{n} (q_i - r_0)^{i_i} (\overline{q}_i)^{1-i_i},$$

pour $i_i \in \{0, 1\}$ et $i = 1, 2, ..., n$. Comme il est expliqué dans [18], il est possible d'ajouter des variantes à la présente version de la loi de Bernoulli multivariée.

8.7 Lois composées multivariées

8.7.1 Notions préliminaires

Au chapitre 2, on modélise les risques d'assurance par des sommes aléatoires. On présente dans cette section une extension multivariée de cette modélisation. On considère un portefeuille de n risques dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n. La v.a. X_i est définie par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{8.24}$$

où la f.m.p. conjointe de $(M_1, ..., M_n)$ est donnée par

$$f_{M_1,...,M_n}(m_1, ..., m_n) = \Pr(M_1 = m_1, ..., M_n = m_n) = q_{m_1,...,m_n},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$. Pour chaque i, les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... forment une suite de v.a. i.i.d. Les suites $\{B_{1,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$, ..., $\{B_{n,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ sont indépendantes entre elles et elles sont indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1, ..., M_n)$. La covariance entre X_i et X_j est

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[B_i] E[B_j] \mathrm{Cov}(M_i, M_j), \quad \text{pour } i \neq j.$$

Il est à la fois intéressant d'évaluer le comportement aléatoire de la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et le comportement aléatoire conjoint du vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$. La relation de dépendance entre les v.a. X_1,...,X_n est introduite via les v.a. $(M_1, ..., M_n)$. La f.g.m. de $(X_1, ..., X_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} M_{X_1,...,X_n}(t_1, ..., t_n) &= E\left[e^{t_1 X_1} ... e^{t_n X_n}\right] \\ &= P_{M_1,...,M_n}(M_{B_1}(t_1), ..., M_{B_n}(t_n)). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Ensuite, la f.g.m. de S est obtenue avec (8.12). On peut utiliser (8.12) avec la FFT pour évaluer la distribution de S. Pour déterminer le comportement aléatoire conjoint du vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$, il est nécessaire d'apporter plus de précision dans la modélisation.

L'expression de la fonction de répartition conjointe de $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ est

$$\begin{aligned} & F_{\underline{X}}(x_1, ..., x_n) \\ = \; & q_{0,...,0} \\ & + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \Pr\left(\bigcap_{j=1}^{n} \left\{\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{1,i_j} \leq x_j\right\}\right), \end{aligned}$$

pour x_1, ..., $x_n \geq 0$.

En conditionnant sur les différentes valeurs de $(M_1, ..., M_n)$, l'expression générale pour la fonction de répartition de S est

$$\begin{aligned} F_S(x) &= q_{0,...,0} \\ &\quad + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \Pr\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} \leq x\right), \end{aligned} \quad (8.26)$$

où $\sum_{j=1}^{0} u_j = 0$ par convention.

L'expression de l'espérance tronquée de S est

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \times E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right)>b\right\}}\right]. \tag{8.27}$$

Avec (8.27), on déduit que l'expression de la $TVaR_\kappa(S)$ est donnée par

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} \times E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right) \times 1_{\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j}\right)>VaR_\kappa(S)\right\}}\right]. \tag{8.28}$$

Les expressions (8.26) et (8.28) sont intéressantes lorsque les v.a. représentant la sévérité des sinistres appartiennent à une famille de distribution qui est fermée sous la convolution, comme les familles gamma et mélange d'Erlang.

Il est possible de considérer plusieurs structures de dépendance pour $(M_1, ..., M_n)$, notamment les versions bivariées des distributions discrètes communes comme les lois de Poisson et binomiale négative présentées plus tôt. Les distributions bivariées pour (M_1, M_2) peuvent également être construites avec des copules, comme il est expliqué au chapitre 9.

8.7.2 Montants de sinistres de distributions gamma

Dans la proposition suivante, on présente les expressions de F_S et de $TVaR_\kappa(S)$ quand les montants de sinistres obéissent à des lois gamma avec des paramètres de forme différents et des paramètres d'échelle identiques.

Proposition 8.24 ***Loi composée avec montants de sinistres de loi gamma.*** *On suppose que, dans l'équation (10.13), les montants de sinistres $B_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. On obtient les expressions suivantes pour F_S et $TVaR_\kappa(S)$:*

$$F_S(x) = q_{0,\ldots,0} + \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,\ldots,m_n} H\left(x; \sum_{j=1}^{n} m_j\alpha_j; \beta\right) \tag{8.29}$$

et

$$TVaR_{\kappa}(S) = \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,\ldots,m_n=0\}}}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{q_{m_1,\ldots,m_n} \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j}{(1-\kappa)\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j + 1; \beta\right), \tag{8.30}$$

où $b = VaR_{\kappa}(S)$.

Preuve. Les expressions en (8.29) et (8.30) se déduisent à partir de (8.26) et (8.28) en sachant que $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} \sim Ga\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j; \beta\right)$. ■

Les résultats de la proposition 8.24 sont illustrés numériquement dans le prochain exemple.

Exemple 8.25 *Dans la proposition 8.24, on suppose que* $n = 2$, $B_i \sim Ga\left(2, \frac{1}{10}\right)$ *pour* $i = 1, 2$. *De plus,* (M_1, M_2) *obéit à la loi Poisson-gamma bivariée CRRM, avec les paramètres fournis à l'exemple 8.23, soit* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$ *et* $r_2 = 3$. *On calcule* $E[S] = 60$. *Pour des fins calculatoires, on constate que* $S = X_1 + X_2$ *obéit à une loi composée et que l'on peut exprimer* S *sous la forme*

$$S = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} C_i, & N > 0 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

où $C \sim Ga\left(2, \frac{1}{10}\right)$ *et la fonction de masse de probabilité de* $N = M_1 + M_2$ *a été calculée à l'exemple 8.23. Pour* $\gamma_0 = 0, 1, 2$, *on déduit les valeurs suivantes de* F_S *et* π_S *:*

γ_0	$F_S(100)$	$F_S(200)$	$F_S(300)$	$\pi_S(100)$	$\pi_S(200)$	$\pi_S(300)$
0	*0.8137*	*0.9850*	*0.9992*	*44.8639*	*6.5150*	*0.5212*
1	*0.8110*	*0.9829*	*0.9989*	*45.8663*	*7.4981*	*0.7211*
2	*0.8082*	*0.9807*	*0.9985*	*46.8707*	*8.4607*	*0.9296*

Pour une valeur d fixée, la valeur de $\pi_S(d)$ *augmente quand le paramètre de dépendance* γ_0 *de la distribution conjointe de* (M_1, M_2) *devient plus élevé.* □

8.7.3 Montants de sinistres de distributions mélanges d'Erlang

Dans la prochaine proposition, on obtient les expressions de F_S, $E\left[S \times 1_{\{S>d\}}\right]$ et de $TVaR_{\kappa}(S)$ lorsque les montants de sinistres obéissent à des distributions mélanges d'Erlang.

Proposition 8.26 ***Loi composée avec montants de sinistres de loi mélange d'Erlang.*** *On suppose que, dans l'équation (10.13),* $B_i \sim$

$MixErl\left(\underline{\zeta}^{(i)},\beta\right)$ avec $\underline{\zeta}^{(i)}=\left(\zeta_0^{(i)},\zeta_1^{(i)},...\right)$, $\zeta_k^{(i)}=\Pr\left(K_i=k\right)$ $(k\in\mathbb{N})$. Alors, les expressions de $F_S\left(x\right)$, de $E\left[S\times 1_{\{S>d\}}\right]$ et $TVaR_\kappa\left(S\right)$ sont respectivement :

$$F_S\left(x\right)=\xi_{0,...,0}+\sum_{\substack{j_1=0\\ \setminus\{j_1=0,...,j_n=0\}}}^{\infty}...\sum_{j_n=0}^{\infty}\xi_{j_1,...,j_n}H\left(x;\sum_{i=1}^{n}j_i;\beta\right),$$

$$E\left[S\times 1_{\{S>d\}}\right]=\sum_{\substack{j_1=0\\ \setminus\{j_1=0,...,j_n=0\}}}^{\infty}...\sum_{j_n=0}^{\infty}\xi_{j_1,...,j_n}\frac{\sum_{i=1}^{n}j_i}{\beta}\overline{H}\left(d;\sum_{i=1}^{n}j_i+1;\beta\right),$$

et

$$TVaR_\kappa\left(S\right)=\frac{1}{1-\kappa}\sum_{\substack{j_1=0\\ \setminus\{j_1=0,...,j_n=0\}}}^{\infty}...\sum_{j_n=0}^{\infty}\xi_{j_1,...,j_n}\frac{\sum_{i=1}^{n}j_i}{\beta}\overline{H}\left(b;\sum_{i=1}^{n}j_i+1;\beta\right),$$

où $b=VaR_\kappa\left(S\right)$ et les valeurs de $\xi_{j_1,...,j_n}$ sont calculées avec (8.32).

Preuve. On a $M_{B_i}\left(t\right)=P_{K_i}\left(M_C\left(r\right)\right)$, où $P_{K_i}\left(s\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta_k^{(i)}s^k$. On trouve l'expression de F_S à partir de la f.g.m. de S donnée par

$$M_S\left(t\right)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}...\sum_{m_n=0}^{\infty}q_{m_1,...,m_n}M_{B_1}\left(t\right)^{m_1}M_{B_2}\left(t\right)^{m_2}...M_{B_n}\left(t\right)^{m_n}. \tag{8.31}$$

Comme dans l'équation (6.29), on définit les v.a. M_1^*, M_2^*, ..., M_n^* par

$$M_i^*=\begin{cases}\sum_{j_i=1}^{M_i}K_{i,j_i}, & M_i>0\\ 0, & M_i=0\end{cases},$$

où $K_{i,j_i}\sim K_i$ pour $i=1,\ 2,\ ...,\ n$. Alors, chaque composante X_i de $(X_1,...,X_n)$ s'exprime sous la forme

$$X_i=\begin{cases}\sum_{j_i=1}^{M_i^*}C_{i,j_i}, & M_i^*>0\\ 0, & M_i^*=0\end{cases},$$

où la f.m.p. conjointe de $(M_1^*,M_2^*,...,M_n^*)$ est

$$f_{M_1^*,...,M_n^*}\left(j_1,...,j_n\right)=\Pr\left(M_1^*=j_1,...,M_n^*=j_n\right)=\xi_{j_1,...,j_n},$$

pour j_1, j_2, ..., $j_n \in \mathbb{N}$. Les v.a. $C_{i,j_i} \sim Exp(\beta)$ pour tout i et j_i ($i = 1, 2, ..., n$). Alors, l'expression (8.31) de $M_S(t)$ devient

$$M_S(t) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\sum_{i=1}^{n} j_i},$$

à partir de laquelle on déduit les trois résultats désirés de la propostion. Les valeurs de $\xi_{j_1,...,j_n}$ sont calculées avec la relation suivante :

$$\xi_{j_1,...,j_n} = \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \prod_{i=1}^{n} \zeta_{j_i}^{(i)*m_i}, \tag{8.32}$$

pour j_1, ..., $j_n \in \mathbb{N}$, où $\zeta_j^{(i)*m_i} = \Pr(K_{i,1} + ... + K_{i,m_i} = j)$ ($j \in \mathbb{N}$), $\zeta_0^{(i)*0} = 1$, et $\zeta_k^{(i)*0} = 0$, pour $k \neq 0$. Les valeurs de $\xi_j^{(i)*m_i}$ sont calculées avec les algorithmes récursifs présentés au chapitre 6. ■

8.7.4 Montants de sinistres avec support arithmétique

On considère un portefeuille de n risques dont les coûts sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n. La v.a. X_i est définie par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}.$$

Pour chaque i, les v.a. $B_{i,1}$, $B_{i,2}$, ... forment une suite de v.a. i.i.d. Les suites $\{B_{1,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$, ...,$\{B_{n,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$ sont indépendantes entre elles et elles sont indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1, ..., M_n)$. Les montants de sinistres B_1, ..., B_n sont définis sur le support $\{0, 1h, 2h, ...\}$. Il en résulte que les v.a. X_1, ..., X_n et S sont aussi définies sur $\{0, 1h, 2h, ...\}$. La fonction de masse de probabilité conjointe de $(X_1, ..., X_n)$ est donnée par

$$\begin{aligned} & f_{X_1,...,X_n}(k_1 h, ..., k_n h) \\ = & \sum_{m_1=0}^{\infty} ... \sum_{m_m=0}^{\infty} f_{M_1,...,M_n}(m_1, ..., m_n) f_{B_1}^{*m_1}(k_1 h) ... f_{B_n}^{*m_n}(k_n h), \end{aligned} \tag{8.33}$$

pour k_1, ..., $k_n \in \mathbb{N}$, avec $f_{B_i}^{*0}(0) = 1$ et $f_{B_i}^{*0}(k_i h) = 0$, si $k_i \in \mathbb{N}^+$. Pour évaluer (8.33), différentes stratégies sont possibles. Une première stratégie est de calculer les valeurs $f_{B_i}^{*m_i}(k_i h)$ pour $i = 1, 2, ..., n$ et $m_i \in \mathbb{N}^+$ avec les outils récursifs appris au chapitre 6. En `R`, l'utilisation de la FFT s'avère utile car elle permet d'accélérer considérablement les calculs.

Exemple 8.27 *On suppose que (M_1, M_2) obéit à une loi Poisson-gamma bivariée CRMM définie en 8.6.5. On fixe $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$*

et $\gamma_0 = 1$. *Ainsi,* $M_1 \sim BN\left(r = 4, \beta = \frac{1}{4}\right)$ *et* $M_2 \sim BN\left(r = 3, \beta = \frac{2}{3}\right)$. *De plus, on suppose que* $f_{B_1}(10\ 000j) = 0.4 \times 0.6^{j-1}$, *pour* $j = 1, 2, ...,$ *et que* $f_{B_2}(10\ 000j) = 0.5 \times 0.5^{j-1}$, *pour* $j \in \mathbb{N}^+$. *Les espérances de* X_1, X_2 *et* S *sont* $E[X_1] = 25\ 000$, $E[X_2] = 40\ 000$ *et* $E[S] = 65\ 000$. *On obtient* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 5\ 965\ 758\ 777$ *et* $\mathrm{Var}(S) = 4\ 082\ 735\ 088$.

On calcule les valeurs de $f_{B_1}^{*m_1}(k_1 h)$ *et* $f_{B_2}^{*m_2}(k_2 h)$ *avec la FFT. Les valeurs obtenues de* $f_{X_1,X_2}(10\ 000k_1, 10\ 000k_2)$ *sont indiquées dans le tableau suivant :*

$k_1 \vert k_2$	0	1	2
0	0.09616696	0.05519147	0.04873429
1	0.02809748	0.01699810	0.01532773
2	0.02201725	0.01346002	0.01211938

On obtient les résultats suivants :

κ	$VaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	$TVaR_\kappa(X_1)$	$TVaR_\kappa(X_2)$
95 %	100 000	120 000	126 184.2	157 515.2
99 %	150 000	180 000	166 508.4	209 591.7

et

κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$
95 %	170 000	215 188.9
99 %	240 000	282 509.1

□

8.7.5 Poisson composée bivariée

En 8.6.1, on présente les caractériques de la loi de Poisson bivariée Teicher pour le couple de v.a. (M_1, M_2). L'expression de la f.m.p. conjointe de (M_1, M_2) est

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0} \sum_{j=0}^{\min(m_1;m_2)} \frac{\alpha_0^j}{j!} \frac{(\lambda_1-\alpha_0)^{m_1-j}}{(m_1-j)!} \frac{(\lambda_2-\alpha_0)^{m_2-j}}{(m_2-j)!},$$

dont les paramètres sont $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ et $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$.

À la proposition 6.5, on fournit une relation récursive pour la fonction de masse de probabilité d'une loi de Poisson. Dans la proposition suivante, on fournit une relation analogue pour la fonction de masse de probablité conjointe $f_{M_1,M_2}(m_1, m_2)$.

Proposition 8.28 *La fonction de masse de probabilité de la loi de Poisson bivariée Teicher satisfait les relations récursives décrites comme suit. Le point de départ est* $f_{M_1,M_2}(0,0) = \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2+\alpha_0}$. *Pour* $m_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $m_2 = 0$, *on a*

$$f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = \frac{(\lambda_1-\alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1-1, 0).$$

Pour $m_1 = 0$ *et* $m_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) = \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1 - 1, 0).$$

Pour $m_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $m_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \frac{(\lambda_1 - \alpha_0)}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2) \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{m_1} f_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1,m_2) &= \frac{(\lambda_2 - \alpha_0)}{m_2} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) \\ &\quad + \frac{\alpha_0}{m_2} f_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1). \end{aligned}$$

Preuve. Voir [55]. ■

Dans la proposition qui suit, on présente une extension de l'algorithme de Panjer pour calculer de façon récursive la fonction de masse de probabilité conjointe de (X_1, X_2), dans le cas où B_1 et B_2 sont définis sur le support arithmétique $\{0, 1h, 2h, ...\}$ et (M_1, M_2) obéit à une loi Poisson bivariée Teicher.

Proposition 8.29 ***Algorithme de Hesselager.*** *Le point de départ est* $f_{X_1,X_2}(0,0) = P_{M_1,M_2}(f_{B_1}(0), f_{B_2}(0))$.

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ *et* $k_2 = 0$, *on a*

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1 h, 0) \\ = \; & \frac{\lambda_1 - \alpha_0}{k_1} \sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1 h) f_{X_1,X_2}((k_1 - j_1)h, 0) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_1} \sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1 h) f_{B_2}(0) f_{X_1,X_2}((k_1 - j_1)h, 0). \end{aligned}$$

Pour $k_1 = 0$ *et* $k_2 \in \mathbb{N}^+$, *on a*

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(0, k_2 h) \\ = \; & \frac{\lambda_2 - \alpha_0}{k_2} \sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_2}(j_2 h) f_{X_1,X_2}(0, (k_2 - j_2)h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_2} \sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_1}(0) f_{B_2}(j_2 h) f_{X_1,X_2}(0, (k_2 - j_2)h). \end{aligned}$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et pour $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1h, k_2h) \\ = \; & \frac{\lambda_1 - \alpha_0}{k_1} \sum_{j_1=1}^{k_1} j_1 f_{B_1}(j_1 h)\, f_{X_1,X_2}((k_1 - j_1)\, h, k_2 h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_1} \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} j_1 f_{B_1}(j_1 h)\, f_{B_2}(j_2 h)\, f_{X_1,X_2}((k_1 - j_1)\, h, (k_2 - j_2)\, h) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & f_{X_1,X_2}(k_1h, k_2h) \\ = \; & \frac{\lambda_2 - \alpha_0}{k_2} \sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_2}(j_2 h)\, f_{X_1,X_2}(k_1 h, (k_2 - j_2)\, h) \\ & + \frac{\alpha_0}{k_2} \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} j_2 f_{B_1}(j_1 h)\, f_{B_2}(j_2 h)\, f_{X_1,X_2}((k_1 - j_1)\, h, (k_2 - j_2)\, h)\,. \end{aligned}$$

Preuve. Voir [55]. ■

Les relations récursives de la proposition 8.29 sont intéressantes mais elles peuvent devenir coûteuses en temps de calcul.

8.8 Poisson composée multivariée

On suppose que $(M_1, ..., M_n)$ obéit à une loi de Poisson multivariée construite avec un choc commun selon la même approche que la loi de Poisson bivariée décrite à la sous-section 8.6.1. Soient les v.a. indépendantes K_0, K_1, ..., K_n avec $K_0 \sim Pois(\alpha_0)$, avec $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$, et $K_i \sim Pois(\alpha_i = \lambda_i - \alpha_0)$, pour $i = 1, 2, ..., n$. Les éléments du vecteur de v.a. de fréquence $(M_1, ..., M_n)$ sont définis par $M_i = K_i + K_0$, ce qui implique que $M_i \sim Pois(\lambda_i)$ $(i = 1, ..., n)$. De plus, la fonction de masse de probabilité conjointe et la f.g.p. conjointe de $(M_1, ..., M_n)$ sont respectivement données par

$$q_{m_1,...,m_n} = \sum_{j=0}^{\min(m_1;...;m_n)} \mathrm{e}^{-\alpha_0} \frac{\alpha_0^j}{j!} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-(\lambda_i - \alpha_0)} \frac{(\lambda_i - \alpha_0)^{(m_i - j)}}{(m_i - j)!},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} P_{M_1,...,M_n}(s_1,...,s_n) &= E\left[s_1^{M_1}...s_n^{M_n}\right] \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_0(s_1...s_n-1)}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{(\lambda_i-\alpha_0)(s_i-1)}, \end{aligned} \tag{8.34}$$

où α_0 correspond au paramètre de dépendance. Quand $\alpha_0 = 0$, cela signifie que les composantes de $(M_1, ..., M_n)$ sont indépendantes.

Quand $(M_1, ..., M_n)$ obéit à une loi de Poisson multivariée, cela implique que $(X_1, ..., X_n)$ obéit à une loi Poisson composée multivariée.

Dans la prochaine proposition qui est une généralisation de la proposition 3.3, on identifie la distribution de $S = \sum_{l=1}^{n} X_l$.

Proposition 8.30 *Étant donné les définitions de* $(M_1, ..., M_n)$ *et* $(X_1, ..., X_n)$*, la v.a.* $S = \sum_{l=1}^{n} X_l$ *obéit à une loi Poisson composée avec les paramètres* $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0$ *et*

$$F_D(x) = \frac{\lambda_1-\alpha_0}{\lambda_S}F_{B_1}(x) + ... + \frac{\lambda_n-\alpha_0}{\lambda_S}F_{B_n}(x) + \frac{\alpha_0}{\lambda_S}F_{B_1+...+B_n}(x), \tag{8.35}$$

i.e. on a

$$S = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} D_j, & N > 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases},$$

où $N \sim Pois(\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0)$ *et la fonction de répartition de* D_j $(j = 1, 2, ...)$ *est* F_D*.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} M_S(r) &= E\left[\mathrm{e}^{rS}\right] = M_{X_1,...,X_n}(r,...,r) \\ &= P_{M_1,...M_n}(M_{B_1}(r),...,M_{B_n}(r)). \end{aligned} \tag{8.36}$$

En remplaçant (8.34) dans (8.36), on obtient l'expression suivante pour la f.g.m. de S

$$M_S(r) = \mathrm{e}^{\alpha_0\left(M_{B_1}(r)...M_{B_n}(r)-1\right)}\prod_{l=1}^{n}\mathrm{e}^{(\lambda_l-\alpha_0)\left(M_{B_l}(r)-1\right)} = \mathrm{e}^{\lambda_S(M_D(r)-1)},$$

où $\lambda_S = \lambda_1 + ... + \lambda_n - (n-1)\alpha_0$ et

$$M_D(r) = \frac{\alpha_0}{\lambda_S}\prod_{l=1}^{n}M_{B_l}(r) + \sum_{l=1}^{n}\frac{(\lambda_l-\alpha_0)}{\lambda_S}M_{B_l}(r). \tag{8.37}$$

L'expression de F_D découle de la f.g.m. en (8.37). ■

En se basant sur la proposition 8.30, les expressions de F_S et $TVaR_\kappa(S)$ sont

$$F_S(x) = \Pr(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N=k) \Pr(D_1 + ... + D_k \leq x), \quad (8.38)$$

et

$$TVaR_\kappa(S) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(N=k) E\left[\left(\sum_{j=1}^{k} D_j\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{k} D_j > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]}{1-\kappa}. \quad (8.39)$$

Pour produire les résultats du prochain exemple, il est possible d'utiliser les relations récursives de la proposition 8.29. Toutefois, on a appliqué les résultats de la proposition 8.30 et une méthode de discrétisation présentée au chapitre 6 pour les obtenir.

Exemple 8.31 *On considère un portefeuille constitué de deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par le couple de v.a.* (X_1, X_2) *obéissant à la loi Poisson composée bivariée décrite ci-dessus. Les paramètres de la loi de Poisson bivariée sont* $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ *et* $\alpha_0 = 1$. *Le montant d'un sinistre de la ligne* i, *représenté par la v.a.* B_i, *est défini par* $B_i = 100U_i$ *où* U_i *obéit à une loi bêta de paramètres* $a_i = 3 - i$ *et* $b_i = i$ *pour* $i = 1, 2$. *On définit* $S = X_1 + X_2$. *On déduit que* $E[X_1] = 133.33$, $E[X_2] = 100$ *et* $E[S] = 233.33$. *La valeur de* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ *est 13 333.33 et la variance de* S *est 43 888.89. Afin d'effectuer les prochains calculs, on a recours à une approximation des v.a.* U_1 *et* U_2 *par les v.a.* $\widetilde{U}_1$ *et* $\widetilde{U}_2$ *en utilisant la méthode de dispersion de la masse avec préservation de l'espérance et avec un pas de discrétisation* $h = 1$. *Cela conduit à une approximation des v.a.* B_1 *et* B_2 *par les v.a.* $\widetilde{B}_1$ *et* $\widetilde{B}_2$, *puis de la paire de v.a.* (X_1, X_2) *par la paire de v.a.* $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ *et enfin de la v.a.* S *par la v.a.* $\widetilde{S}$. *Dans le tableau ci-dessous, on présente les valeurs obtenues de* $VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i\right)$ *(*$i = 1, 2$*),* $TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i\right)$ *(*$i = 1, 2$*), de* $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *et de* $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ *servant d'approximation aux mesures* $VaR_\kappa(X_i)$ *(*$i = 1, 2$*),* $TVaR_\kappa(X_i)$ *(*$i = 1, 2$*), de* $VaR_\kappa(S)$ *et de* $TVaR_\kappa(S)$ *:*

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$VaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$
95 %	*320*	*230*	*380.5665*	*277.1934*
99.5 %	*460*	*330*	*510.7144*	*372.353*

et

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$
95 %	*490*	*573.1105*
99.5 %	*680*	*750.0120*

□

8.9 Modèles avec chocs communs

Les modèles avec chocs communs sont construits en s'inspirant de la définition de la loi Poisson composée multivariée décrite à la section 8.8. Dans la définiton suivante, on présente un exemple assez général de modèles avec chocs communs.

Définition 8.32 ***Modèle général avec choc communs.*** *Un portefeuille d'assurance est exposé à m types de risque et il est composé de n lignes d'affaires. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a.* X_1, ...,X_n *où*

$$X_i = \sum_{k_1=1}^{M^{(1)}} I_{i,k_1}^{(1)} \times B_{i,k_1}^{(1)} + ... + \sum_{k_m=1}^{M^{(m)}} I_{i,k_m}^{(m)} \times B_{i,k_m}^{(m)}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. *Les hypothèses du modèle sont données comme suit.*

Les v.a. $M^{(1)}$, ..., $M^{(m)}$, *qui représentent le nombre d'événements pour le type j de risque, sont indépendantes avec* $M^{(j)} \sim Pois\left(\gamma_j\right)$, $j = 1, 2, ..., m$. *Pour un type j fixé de risque,* $\left(B_{1,k_j}^{(j)}, ..., B_{n,k_j}^{(j)}\right)$ *forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où*

$$\left(B_{1,k_j}^{(j)}, ..., B_{n,k_j}^{(j)}\right) \sim \left(B_1^{(j)}, ..., B_n^{(j)}\right),$$

pour $k_j \in \mathbb{N}^+$. *Pour un type j fixé de risque,* $\left(I_{1,k_j}^{(j)}, ..., I_{n,k_j}^{(j)}\right)$ *forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où*

$$\left(I_{1,k_j}^{(j)}, ..., I_{n,k_j}^{(j)}\right) \sim \left(I_1^{(j)}, ..., I_n^{(j)}\right),$$

pour $k_j \in \mathbb{N}^+$. *On a*

$$\Pr\left(I_1^{(j)} = i_1^{(j)}, ..., I_n^{(j)} = i_n^{(j)}\right) = f_{I_1^{(j)}, ..., I_n^{(j)}}\left(i_1^{(j)}, ..., i_n^{(j)}\right),$$

pour $i_1^{(j)}, ..., i_n^{(j)} \in \{0, 1\}$. *De plus,* $I_i^{(j)} \sim Bern\left(q_i^{(j)}\right)$. *Les suites*

$$\left\{\left(B_{1,k_1}^{(1)}, ..., B_{n,k_1}^{(1)}\right), k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}, ..., \left\{\left(B_{1,k_m}^{(m)}, ..., B_{n,k_m}^{(m)}\right), k_m \in \mathbb{N}^+\right\},$$
$$\left\{\left(I_{1,k_1}^{(1)}, ..., I_{n,k_1}^{(1)}\right), k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}, ..., \left\{\left(I_{1,k_m}^{(m)}, ..., I_{n,k_m}^{(m)}\right), k_m \in \mathbb{N}^+\right\}$$

et les v.a. $M^{(1)}$,...,$M^{(m)}$ *sont indépendantes.*

Lorsque le k_j*-ième choc de type j survient, il entraîne des coûts d'un montant* $B_{i,k_j}^{(j)}$, *si* $I_{i,k_j}^{(j)} = 1$, *pour la ligne d'affaires i* ($i = 1, 2, ..., n$).

Clairement, $(X_1, ..., X_n)$ *forme un vecteur de v.a. dont les composantes sont dépendantes.*

Les principaux résultats associés au modèle décrit à la définition 8.32 sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 8.33 *Pour le modèle décrit à la définition 8.32, on a les résultats suivants:*

1. *Chaque composante obéit à une loi Poisson composée i.e.* $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{C_i})$ *où* $\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} q_i^{(j)} \gamma_j$ *et*

$$F_{C_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{q_i^{(j)} \gamma_j}{\lambda_i} F_{B_i^{(j)}}(x), \tag{8.40}$$

   pour $i = 1, 2, ..., n$.

2. *La covariance de* $(X_i, X_{i'})$ *est*

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, X_{i'}) &= \sum_{j=1}^{m} E\left[M^{(j)}\right] \mathrm{Cov}\left(I_i^{(j)} B_i^{(j)}, I_{i'}^{(j)} B_{i'}^{(j)}\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Var}\left(M^{(j)}\right) E\left[I_i^{(j)} B_i^{(j)}\right] E\left[I_{i'}^{(j)} B_{i'}^{(j)}\right]. \end{aligned}$$

3. *On définit* $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (a) *Pour* $n = 2$, *l'expression de* $M_S(t)$ *est*

$$M_S(t) = \prod_{j=1}^{3} \mathrm{e}^{\gamma_j \left(M_{D^{(j)}}(t) - 1\right)}, \tag{8.41}$$

   où

$$\begin{aligned} M_{D^{(j)}}(t) &= f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,0) + f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,0) M_{B_1^{(j)}}(t) \\ &\quad + f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,1) M_{B_2^{(j)}}(t) \\ &\quad + f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) M_{B_1^{(j)} B_2^{(j)}}(t, t), \end{aligned}$$

   pour $j = 1, 2, 3$.

(b) Pour $n = 2$, on déduit de (8.41) que $S \sim PComp(\lambda, F_D)$ avec $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ et

$$\begin{aligned} F_D(x) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) F_{B_1^{(j)}+B_2^{(j)}}(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,0) F_{B_1^{(j)}}(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,1) F_{B_2^{(j)}}(x), \end{aligned}$$

pour $x \geq 0$.

(c) Pour $n > 2$, l'expression de $M_S(t)$ se développe aisément mais elle devient trop lourde pour être présentée.

Preuve. Le résultat en 1 découle de l'application de 1.44. Le résultat en 2 suit des propriétés de la covariance. Pour obtenir les résultats en 3, on applique 8.12. ■

Dans le prochain exemple, on applique les notions présentées à la proposition 8.33.

Exemple 8.34 *Avec la notation utilisée à la proposition 8.33, on suppose $n = 2$ lignes d'affaires, $m = 3$ types de risques, $\gamma_j = 0.6 \times j$,*

$$I_i^{(j)} \sim Bern\left(q_i^{(j)} = 0.9 - 0.02i \times j\right),$$

$$f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) = 0.84 - 0.04 \times j, i = 1,2,\ j = 1,2,3$$

et l'expression de

$$F_{B_1^{(j)}, B_2^{(j)}}(100k_1, 100k_2) = \mathrm{e}^{-\left\{\sum_{l=1}^{2}\left(-\ln\left(1-\left(\frac{200}{200+100k_l}\right)^{2.4+0.1j}\right)\right)^{2+j}\right\}^{(1/(2+j))}},$$

pour $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+$. On définit $S = X_1 + X_2$. Les espérances de X_1, X_2 et S sont 562.5502, 495.0654 et 1057.616. La valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ *est 333 939.8. Comme* $\mathrm{Var}(X_1) = 283\ 668.3$ *et* $\mathrm{Var}(X_2) = 196\ 594.8$*, on obtient* $\mathrm{Var}(S) = 1\ 148\ 143$.

En raison de la définition du modèle, on déduit que $S \sim PComp(\lambda, F_D)$ *avec* $\lambda = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ *et*

$$\begin{aligned} f_D(0) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,0), \\ f_D(100k) &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,0) f_{B_1^{(j)}}(100k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(0,1) f_{B_2^{(j)}}(100k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} \frac{\gamma_j}{\lambda} f_{I_1^{(j)}, I_2^{(j)}}(1,1) f_{B_1^{(j)}+B_2^{(j)}}(100k), \end{aligned}$$

pour $k \in \mathbb{N}^+$. *Les valeurs de* $f_S(100k)$ *pour* $k = 0, 1, 2$ *sont 0.0273237, 0.01493067 et 0.06926792. On obtient* $VaR_{0.95}(S) = 2800$ *et* $TVaR_{0.95}(S) = 3177.407$ □

8.10 Modèles avec mélange commun

Dans les modèles avec mélange commun, la dépendance entre des risques est induite via une v.a. commune ou plusieurs v.a. communes représentant des conditions économiques communes, des conditions climatiques communes ou tout autre facteur externe commun. Ce mécanisme externe peut être représenté par une v.a. Θ positive, pouvant être discrète ou continue, dont la fonction de répartition est notée par G_Θ.

La méthode de construction basée sur les mélanges communs, aussi appelée *common frailties*, est due à [80]. Elle a été déjà utilisée aux sous-sections 8.5.7, 8.5.8, 8.5.9, 8.6.2, 8.6.3, 8.6.4 et 8.6.5. On traite aussi de cette méthode à la section 3.8. Dans la présente section, on utilise cette méthode afin de construire une loi de Bernoulli multivariée. La méthode peut être adaptée aisément.

On définit

$$\Pr(I_i = 1 \mid \Theta = \theta) = 1 - {r_i}^\theta \text{ et } \Pr(I_i = 0 \mid \Theta = \theta) = {r_i}^\theta, \tag{8.42}$$

où $(I_i \mid \Theta = \theta)$ $(i = 1, ..., n)$ sont des v.a. de loi de Bernoulli et r_i est le paramètre de base de la distribution conditionnelle de $(I_i \mid \Theta = \theta)$. Chaque v.a. I_i $(i = 1, ..., n)$ est influencée par les valeurs possibles de la v.a. Θ. Pour une valeur fixée de r_i, la probabilité conditionnelle de non-occurrence sachant que $\Theta = \theta$ est une fonction décroissante de θ. On suppose aussi que $(I_1 = 1 \mid \Theta = \theta)$, ..., $(I_n = 1 \mid \Theta = \theta)$ sont conditionnellement

indépendantes. Étant donné la distribution G_Θ de la v.a. Θ et les marginales fixées pour I_1, ..., I_n, on a $r_i = \mathrm{e}^{M_\Theta^{-1}(p_i)}$, puisque

$$\Pr(I_i = 0) = 1 - q_i = p_i = \int_0^\infty (r_i)^\theta \ \mathrm{d}G_\Theta(\theta) = M_\Theta(\ln r_i),$$

où $M_\Theta(t)$ est la f.g.m. de la v.a. Θ. On suppose que $M_\Theta(t)$ existe pour certaines valeurs de $t \neq 0$.

Compte tenu de la méthode de construction, la fonction de masse de probabilité conjointe correspond à

$$f_{I_1,...,I_n}(i_1, ..., i_n) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(\left(r_i^{\theta(1-i_i)} \times \left(1 - r_i^\theta\right)^{i_i} \right) \right) \mathrm{d}G_\Theta(\theta),$$

pour $i_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, ..., n$. La f.g.p. conjointe de $\underline{I} = (I_1, ..., I_n)$ est donnée par

$$P_{\underline{I}}(\underline{t}) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta + \left(1 - r_i^\theta\right) t_i \right) \ \mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

La covariance entre I_i et I_j est donnée par

$$\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = E[I_i I_j] - E[I_i] E[I_j] = \int_0^\infty (1 - r_i^\theta)(1 - r_j^\theta) \mathrm{d}G_\Theta(\theta) - q_i q_j,$$

pour $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Soit un portefeuille de risques X_1, ..., X_n définis selon une loi composée multivariée comme en (8.24),

$$X_i = \begin{cases} B_i, & I_i = 1 \\ 0, & I_i = 0 \end{cases},$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Les composantes du vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ sont dépendantes en raison de la dépendance entre les v.a. I_i $(i = 1, 2, ..., n)$. À partir de (8.25), on a

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \int_0^\infty \prod_{i=1}^n \left(r_i^\theta + \left(1 - r_i^\theta\right) M_{B_i}(t_i) \right) \mathrm{d}G_\Theta(\theta),$$

qui peut être réécrit sour la forme

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \int_0^\infty M_{\underline{X}|\Theta=\theta}(\underline{t}) \mathrm{d}G_\Theta(\theta). \tag{8.43}$$

Il résulte de (8.43) que la f.g.m. de la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est

$$\begin{aligned} M_S(t) &= M_{\underline{X}}(t, ..., t) = \int_0^\infty M_{\underline{X}|\Theta=\theta}(t, ..., t) \, \mathrm{d}G_\Theta(\theta) \\ &= \int_0^\infty M_{S|\Theta=\theta}(t) \; \mathrm{d}G_\Theta(\theta), \end{aligned} \tag{8.44}$$

où $(S \mid \Theta = \theta)$ est la somme des v.a. $(X_i \mid \Theta = \theta)$ $(i = 1, ..., n)$ conditionnellement indépendantes. Alors, il est clair que

$$F_S(s) = \int_0^\infty F_{S|\Theta=\theta}(s) \; \mathrm{d}G_\Theta(\theta). \tag{8.45}$$

Certains choix de distribution pour Θ conduisent à des résultats intéressants. Dans le cas où Θ est une v.a. discrète, alors on a

$$F_S(s) = \sum_{k=1}^m \Pr(\Theta = \theta_k) \, F_{S|\Theta=\theta_k}(s).$$

Quand $m = 1$, on a une distribution dégénérée pour Θ qui correspond au cas où les v.a. $I_1, ..., I_n$ sont indépendantes. Dans le cas où Θ est une v.a. discrète, on utilise les méthodes d'agrégation de v.a. indépendantes pour évaluer $F_{S|\Theta=\theta}(s)$ pour chaque valeur de θ. Si Θ est continue, il suffit de l'approximer par une v.a. discrète, comme on l'a vu au chapitre 6.

Étant donné la construction du modèle, la prime *stop-loss* avec une limite de rétention d s'exprime sous la forme d'un mélange de prime *stop-loss*

$$\pi_S(d) = E[\max(S - d; 0)] = \int_0^\infty \pi_{S|\Theta=\theta}(s) \, \mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

Des expressions semblables peuvent se déduire pour d'autres espérances de fonctions de S. Par exemple, on a

$$E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_0^\infty E\left[S \times 1_{\{S>b\}} | \Theta = \theta\right] \mathrm{d}G_\Theta(\theta).$$

On s'intéresse au cas où les v.a. I_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées et les v.a. B_i $(i = 1, ..., n)$ sont identiquement distribuées. Pour la v.a. $N = I_1 + ... + I_n$, on déduit sa fonction de masse de probabilité

$$\begin{aligned} \Pr(N = k) &= \int_0^\infty \Pr(N = k \mid \Theta = \theta) f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\infty \binom{n}{k} \left(1 - r^\theta\right)^k r^{\theta(n-k)} f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{8.46}$$

En utilisant la relation $(a+b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$, (8.46) devient

$$\begin{aligned} &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^\infty r^{\theta j} r^{\theta(n-k)} f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^\infty r^{\theta(n+j-k)} f_\Theta(\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j M_\Theta((n+j-k)\ln r), \end{aligned} \tag{8.47}$$

pour $k = 0, 1, ..., n$. Comme les v.a. $B_1, ..., B_n$ sont i.i.d. et indépendantes de la v.a. N, alors la forme explicite de S est donnée par

$$F_S(x) = f_N(0) + \sum_{k=1}^n f_N(k) F_B^{*k}(x),$$

où F_B^{*k} est le k-ième produit de convolution de F_B avec elle-même.

Exemple 8.35 *On examine les courbes des valeurs de $VaR_\kappa(S)$ et des primes $TVaR_\kappa(S)$ pour 3 portefeuilles de 20 risques identiquement distribués. Les hypothèses suivantes tiennent pour les trois portefeuilles : $B_i \sim Exp(1)$, $i = 1, 2, ..., 20$; $I_i \sim Bern(0.1)$, $i = 1, ..., 20$; Θ obéit à une loi logarithmique de paramètre $\gamma \in]0, 1[$ avec une fonction de masse de probabilité*

$$\Pr(\Theta = k) = \frac{\gamma^k}{-k \ln(1-\gamma)}, k = 1, 2, ...,$$

et une f.g.p.

$$P_\Theta(t) = M_\Theta(\ln t) = \frac{\ln(1-\gamma t)}{\ln(1-\gamma)}, \quad |t| < 1. \tag{8.48}$$

On déduit que $r = \frac{1-(1-\gamma)^{1-q}}{\gamma}$. *En combinant (8.47) et (8.48), on obtient*

$$f_N(k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\ln(1-\gamma r^{n+j-k})}{\ln(1-\gamma)},$$

$k = 0, 1, ..., n$. *Pour les trois portefeuilles, on a* $E[S] = 2$. *Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs exactes de VaR et TVaR pour* $\gamma = 0.5$, *0.95 et 0.999999 :*

(γ, r)	κ	*0.5*	*0.95*	*0.99*	*0.995*
(0.5,0.92823)	$VaR_\kappa(S)$	*1.33136*	*6.43860*	*9.77851*	*11.18750*
(0.5,0.92823)	$TVaR_\kappa(S)$	*3.58875*	*8.50638*	*11.78524*	*13.16668*
(0.95,0.98162)	$VaR_\kappa(S)$	*0.69271*	*8.42254*	*13.90466*	*16.03086*
(0.95,0.98162)	$TVaR_\kappa(S)$	*3.90516*	*11.77061*	*16.80402*	*18.75002*
(0.9999,0.99985)	$VaR_\kappa(S)$	*0.00015*	*12.23754*	*19.92491*	*22.27512*
(0.9999,0.99985)	$TVaR_\kappa(S)$	*4.00000*	*16.96255*	*23.02277*	*25.05146*

De plus, les valeurs correspondantes de $\mathrm{Var}(S)$ *sont 4.93929, 11.27882 et 18.56217. Il est clair d'après les valeurs produites dans le tableau que le comportement de* Θ *a un impact significatif sur les valeurs de* $VaR_\kappa(S)$ *et* $TVaR_\kappa(S)$. *On observe que la TVaR est croissante en fonction du paramètre* γ *de la distribution logarithmique.* □

8.11 Notes bibliographiques

Un exposé complet sur les lois multivariées continues est fourni dans [69]. On recommande [67] et [58], une monographie semblable sur les lois multivariées discrètes. Concernant les méthodes de construction de lois bivariées et multivariées, on suggère e.g. [5], [57] et [105].

Différentes versions multivariées de la loi exponentielle univariée ont été proposées dans la littérature au cours des dernières années. La loi exponentielle bivariée de EFGM a été proposée notamment par [54]. La loi gamma bivariée a été étudiée, notamment par [75].

La méthode utilisée pour définir la loi bivariée exponentielle Marshall-Olkin est due à [78] et [79]. Elle peut être adaptée pour construire des lois exponentielles multivariées. La loi gamma bivariée et sa version multivariée ont été suggérées par [12] et [92].

La loi de Poisson multivariée a été suggérée pour la première fois en actuariat par [101]. Voir aussi [67] et [105]. La modélisation pour des lois composées multivariées a été considérée par [20], [19] et [105].

On peut consulter [57] et [85] pour une introduction générale aux notions de la dépendance. Pour un traitement de la dépendance dans le contexte de l'actuariat et de la gestion quantitative des risques, on mentionne [24] et [81] ainsi que les références citées dans la bibliographie de ces ouvrages.

Pour les modèles avec mélanges communs, on suggère [17], [57], [81], [80] et [87]. Le modèle avec choc commun est étudié dans e.g. [20], [74] et [105]. Des suggestions pour adapter les méthodes d'agrégation dans le cadre de modèles avec chocs communs et avec mélanges communs sont fournies dans [17] et [46].

Des extensions des algorithmes récursifs, tels que l'algorithme de Panjer, pour des vecteurs de v.a. ont été tout d'abord proposées par [55]. Un ouvrage de référence sur le sujet est [99].

Pour des applications de la notion de la comonotonicité en actuariat, on renvoie le lecteur à e.g. [24], [30], [31] et [63].

8.12 Exercices

1. Soient les v.a. comonotones X_i de loi exponentielle avec paramètre $\beta_i = \frac{1}{10i}$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

   (a) Identifier la loi de S.

   (b) Calculer $\Pr(S \leq 200)$.

   (c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

2. Soient les v.a. comonotones X_i de loi de Pareto avec paramètres $\alpha = 3$ et $\lambda_i = 20i$ où $i = 1, 2, 3, 4, 5$. On définit la v.a. $S = \sum_{i=1}^{5} X_i$.

   (a) Identifier la loi de S.

   (b) Calculer $\Pr(S \leq 200)$.

   (c) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

3. On considère un couple de v.a. (X_1, X_2) comonotones où $X_1 \sim LN\left(4, 2^2\right)$ et $X_2 \sim Pa(2.1, 440)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$.

   Calculer les valeurs exactes de $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$. (2857.417)

4. On considère l'exercice annuel d'une institution financière. À la fin de l'année, les engagements de l'institution sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{2} X_i$ où $X_i = c_i e^{a_i R + b_i}$, $i = 1, 2$. On a $R \sim N\left(0.05, 0.015^2\right)$ et

i	a_i	b_i	c_i
1	-3.2	-0.12	1000
2	-4.3	-0.35	2000

   À noter que $VaR_{0.995}(Z) = 2.575829$ où $Z \sim N(0, 1)$.

   (a) Calculer l'espérance et l'écart type de S.

   (b) Calculer $VaR_{0.005}(R)$ et $VaR_{0.995}(R)$.

(c) Calculer $VaR_{0.005}(S)$ et $VaR_{0.995}(S)$.

5. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi gamma bivariée Cheriyan – Ramabhadran – Mathai – Moschopoulos avec $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 5$. On définit $S = X_1 + X_2$.

   (a) Développer l'expression de $F_S(x)$.

   (b) Calculer $E[S]$ et $\text{Var}(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1 et 2.

   (c) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\gamma_0 = 0, 1$ et 2 et $\kappa = 0.99$.

6. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à une loi exponentielle bivariée EFGM avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$. On définit $S = X_1 + X_2$.

   (a) Développer les expressions de f_S, F_S et $E\left[S \times 1_{\{S>b\}}\right]$.

   (b) Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$ pour $\theta = -1$, 0, 1.

   (c) Calculer $E[S]$ et $\text{Var}(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1.

   (d) Calculer $VaR_\kappa(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1 et $\kappa = 0.99$.

   (e) Calculer $TVaR_\kappa(S)$ pour $\theta = -1$, 0, 1 et $\kappa = 0.99$.

7. On considère le modèle Poisson choc commun pour le vecteur aléatoire $(M_1, ..., M_n)$ qui est défini avec $M_i = J_i + J_0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Les v.a. J_0, J_1, ..., J_n sont indépendantes où $J_0 \sim Pois(\gamma_0)$ avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ et $J_i \sim Pois(\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0)$. Le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ obéit à une loi Poisson composée multivariée où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$ avec les hypothèses usuelles et $B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i \sim Ga(\alpha_i, 1/1000)$ pour $i = 1, 2, ..., n$. De plus, on définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Les hypothèses addtionnelles sont : $n = 1000$; $\lambda_i = 0.003$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\lambda_i = 0.004$, $i = 501, 502, ..., 1000$; $\alpha_i = 2$, $i = 1, 2, ..., 500$; $\alpha_i = 1$, $i = 501, 502, ..., 1000$.

   (a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.

   (b) Calculer $VaR_\kappa(X_i)$, $TVaR_\kappa(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 1000$ et $\kappa = 0.995$.

   (c) Calculer $VaR_\kappa(S)$, $TVaR_\kappa(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 0.001, 0.002 et $\kappa = 0.995$.

8. On considère le modèle Poisson choc commun pour le vecteur aléatoire (M_1, M_2) qui est défini avec $M_1 = J_1 + J_0$ et $M_2 = J_2 + J_0$, où J_0, J_1, J_2 sont des v.a. indépendantes avec $J_0 \sim Pois(\gamma_0)$ et $J_i \sim Pois(\gamma_i = \lambda_i - \gamma_0)$ $(i = 1, 2)$ avec $0 \leq \gamma_0 \leq \min(\lambda_1; \lambda_2)$. Le vecteur de v.a. (X_1, X_2) obéit à une loi Poisson composée multivariée où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$ avec les hypothèses usuelles et

$B_{i,1} \sim B_{i,2} \sim ... \sim B_i \sim Exp\,(i/1000)$ pour $i = 1, 2$. De plus, on définit $S = X_1 + X_2$. Les hypothèses additionnelles sont : $\lambda_1 = 4$; $\lambda_2 = 3$.

(a) Indiquer les caractéristiques de la loi de S.

(b) Calculer $VaR_\kappa\,(X_i)$, $TVaR_\kappa\,(X_i)$ pour $i = 1, 2, ..., 1000$ et $\kappa = 0.995$.

(c) Calculer $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$ pour $\gamma_0 = 0$, 1, 2 et $\kappa = 0.995$.

9. On considère un portefeuille constitué de deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par le couple de v.a. (X_1, X_2) obéissant à la loi Poisson composée bivariée décrite ci-dessus. Les paramètres de la loi de Poisson bivariée sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ et $\alpha_0 = 0.5$. Le montant d'un sinistre de la ligne i est définie par la v.a. $B_i = 100U_i$ où $\Pr\left(U_i = \frac{k}{5}\right) = \binom{4}{k-1} (0.6i - 0.4)^{k-1} (1.4 - 0.6i)^{4-(k-1)}$ pour $i = 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(b) Calculer la covariance de $\mathrm{Cov}\,(X_1, X_2)$.

(c) Calculer la variance de S.

(d) Calculer $\Pr\,(S = 100k)$, pour $k = 0, 1, ..., 5$.

(e) Calculer $VaR_\kappa\,(X_1)$, $TVaR_\kappa\,(X_1)$, $VaR_\kappa\,(X_2)$, $TVaR_\kappa\,(X_2)$, $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$, pour $\kappa = 0.99$ et $\kappa = 0.995$.

10. On considère un portefeuille de n contrats d'assurance vie. Les coûts pour le contrat i sont définis par la v.a. $X_i = bI_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ avec $b = 1000$. Les v.a. I_1, ..., I_n sont i.i.d.. La v.a. I_i obéit à une loi de Bernoulli de moyenne 0.05. On suppose le modèle avec mélange commun pour décrire la relation de dépendance entre les v.a. I_1, ..., I_n. On suppose que

$$\Pr(I_i = 1 \mid \Theta = \theta) = 1 - r^\theta \text{ et } \Pr(I_i = 0 \mid \Theta = \theta) = r^\theta,$$

avec $\theta > 0$. Sachant $\Theta = \theta$, les v.a. I_1,..., I_n sont conditionnellement indépendantes. On suppose que Θ obéit à une loi $Ga\,(\alpha, \alpha)$ de moyenne 1. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Isoler la valeur de r pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(b) Pour $n = 10$, calculer $\Pr\,(S = kb)$ pour $k = 0, 1$,...,5 et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(c) Calculer $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$ et pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(d) Calculer $\mathrm{Var}\,(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(e) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(f) Calculer $TVaR_{0.99}(S)$ pour $\alpha = 0.1$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$.

(g) Calculer $\text{Var}(S)$, $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$ en supposant l'indépendance entre les v.a. I_1, ..., I_{10}.

11. On considère un portefeuille composé de 2 lignes d'affaires, qui est exposé à 1 seul type de catastrophe. Les coûts pour les lignes d'affaires sont définis par les v.a. X_1,X_2 où

$$X_i = \sum_{k_i=1}^{M^{(i)}} B_{i,k_i}^{(i)} + \sum_{k_0=1}^{M^{(0)}} B_{i,k_0}^{(0)}$$

pour $i = 1, 2, ..., n$. Les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes avec $M^{(j)} \sim Pois\left(\gamma_j\right)$, $j = 0, 1, 2$. Pour le type 0 fixé de risque, $\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right)$ forment une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. où

$$\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right) \sim \left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right),$$

pour $k_0 \in \mathbb{N}^+$. De plus, $\left\{B_{i,k_i}^{(i)}, k_i \in \mathbb{N}^+\right\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. où $B_{i,k_i}^{(i)} \sim B_i^{(i)}$ pour $i = 1, 2$. Les suites $\left\{\left(B_{1,k_0}^{(0)}, B_{2,k_0}^{(0)}\right), k_0 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{1,k_1}^{(1)}, k_1 \in \mathbb{N}^+\right\}$, $\left\{B_{2,k_2}^{(2)}, k_2 \in \mathbb{N}^+\right\}$ et les v.a. $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ sont indépendantes. Le couple $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$ obéit à une loi exponentielle bivariée EFGM avec $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$. De plus, $B_1^{(1)} \sim Exp\left(\frac{5}{8}\right)$ et $B_2^{(2)} \sim Exp\left(\frac{5}{9}\right)$. Enfin, $\gamma_j = j + 1$ pour $j = 0, 1, 2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(b) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(c) Calculer la covariance entre X_1 et X_2 pour $\theta = -1$, 0, 1 (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(d) Calculer la variance de S pour $\theta = -1$, 0, 1 (paramètre de la loi bivariée de $\left(B_1^{(0)}, B_2^{(0)}\right)$).

(e) Indiquer les caractéristiques des lois de X_1, X_2 et S. Calculer $F_S(20)$.

(f) Calculer $VaR_{0.99}(S)$. (37.3761, 38.2743, 39.1082)

12. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2)\, H(x_1;i_1,\beta)\, H(x_2;i_2,\beta),$$

où $p_{1,2}(i_1,i_2)$ sont des probabilités i.e. $p_{1,2}(i_1,i_2) \geq 0$ (pour $i_1,\ i_2 \in \{1,2\}$) et $\sum_{i_1=1}^{2}\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = 1$. De plus, on a $\sum_{i_1=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = p_2(i_2)$ et $\sum_{i_2=1}^{2} p_{1,2}(i_1,i_2) = p_1(i_1)$. On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$. On définit $S = X_1 + X_2$.

Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \backslash i_2$	1	2
1	0.42	0.18
2	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \backslash i_2$	1	2
1	0.55	0.05
2	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \backslash i_2$	1	2
1	0.32	0.28
2	0.38	0.02

Les calculs ci-dessous doivent être faits avec les hypothèses H1, H2, H3 :

(a) Calculer $F_{X_1,X_2}(30,20)$.

(b) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2>20\}}\right]$.

(c) Calculer $E[\max(X_1 - 30;0)\max(X_2 - 20;0)]$.

(d) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$, $E[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$.

(e) Calculer $F_S(50)$.

13. Soit un couple de v.a. (I_1,I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}(i_1,i_2)$, $i_1,\ i_2 \in \{0,1\}$. Soient les n vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1},I_{2,1})$, ..., $(I_{1,n},I_{2,n})$ où $(I_{1,i},I_{2,i}) \sim (I_1,I_2)$, pour $i = 1,2,...,n$. On définit le couple (M_1,M_2) où $M_j = \sum_{i=1}^{n} I_{j,i}$, $j = 1,2$. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1,X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1,2,...\}$ forme une suite de v.a. i.i.d. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1,2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1,2,...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1,2,...\}$ et (M_1,M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. de (M_1,M_2) et de N. Identifier la f.m.p. de (M_1,M_2) et de N.

(b) Développer l'expression de la covariance de (M_1,M_2).

(c) Identifier la f.g.m. de (X_1,X_2) et de S.

(d) Développer l'expression de la covariance de (X_1,X_2).

(e) Calculer les espérances de X_1, X_2 et S.

(f) Calculer les variances de X_1 et X_2.

(g) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$ et $n = 10$. Hypothèses additionnelles :

Hypothèse H1		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.42	0.18
1	0.28	0.12

Hypothèse H2		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.55	0.05
1	0.15	0.25

Hypothèse H3		
$i_1 \vert i_2$	0	1
0	0.32	0.28
1	0.38	0.02

Questions pour les 3 hypothèses H1, H2, H3 :

i. Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et $\text{Var}(S)$.

ii. Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

14. Soit un couple de v.a. (I_1, I_2) dont la fonction de masse de probabilité conjointe est $f_{I_1,I_2}(i_1, i_2)$, i_1, $i_2 \in \{0, 1\}$. On a $f_{I_1,I_2}(1,1) = f_{I_1,I_2}(0,0) = \frac{(1+\rho)}{4}$ pour $-1 \leq \rho \leq 1$. Le paramètre ρ correspond au coefficient de corrélation entre (I_1, I_2). Soit une suite de vecteurs aléatoires i.i.d. $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... où $(I_{1,i}, I_{2,i}) \sim (I_1, I_2)$, pour $i \in \mathbb{N}^+$. Soient les v.a. indépendantes K_0, K_1 et K_2 où $K_i \sim Pois(\gamma_i)$, $i = 0, 1, 2$. On définit le couple (M_1, M_2) où $M_j = K_j + \sum_{i=1}^{K_0} I_{j,i}$, $j = 1, 2$. La suite $(I_{1,1}, I_{2,1})$, $(I_{1,1}, I_{2,1})$, ... est indépendante de K_0, K_1 et K_2. On définit $N = M_1 + M_2$. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $X_i = \sum_{k=1}^{M_i} B_{i,k}$, où $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ forme une suite i.i.d. de v.a. avec $B_{i,k} \sim B_i$ $(i = 1, 2)$. De plus, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$, $\{B_{i,k}, k = 1, 2, ...\}$ et (M_1, M_2) sont indépendants. Enfin, $B_1 \sim B_2 \sim Exp(\beta)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de (M_1, M_2).

(b) Identifier la f.g.p. et la f.m.p. de N.

(c) Développer l'expression de la covariance de (M_1, M_2).

(d) Identifier la f.g.m. de (X_1, X_2) et de S.

(e) Développer l'expression de la covariance de (X_1, X_2).

(f) On suppose que $\beta = \frac{1}{10}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\gamma_0 = 3$ $\gamma_i = \lambda_i - 1.5$. Questions à faire pour $\rho = -0.9$, 0, 0.9 :

i. Calculer $E[N]$ et $E[S]$.

ii. Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$ et $\text{Var}(N)$.

iii. Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

iv. Calculer $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et $\text{Var}(S)$.

v. Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

15. On considère le volet incendie d'un contrat d'assurance pour un commerce. On suppose qu'au plus un incendie peut se produire au cours d'une année. Les coûts pour un contrat sont définis par la v.a. $X = I \times B$ avec $I \sim Bern(0.1)$. La v.a. B est définie par $B = C_1 + C_2$, où la v.a. C_1 correspond aux dommages matériels au

commerce et la v.a. C_2 représente les coûts résultant des pertes en affaires. La paire de v.a. (C_1, C_2) obéit à la loi de Pareto bivariée avec $\alpha = 3$, $\lambda_1 = 20$ et $\lambda_2 = 40$. De plus, la v.a. I est indépendante du couple de v.a. (C_1, C_2).

(a) Calculer $E[B]$, $\text{Cov}(C_1, C_2)$ et $\text{Var}(B)$.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X.

(c) Trouver l'expression de f_B et F_B.

(d) Calculer $\Pr(X > 70)$.

8.13 Réponses

1. Réponses à la question 1 :

   (a) Aucune réponse

   (b) 0.7364

   (c) 449.3598

2. Réponses à la question 2 :

   (a) $S \sim Pa(3, 300)$

   (b) 0.784

   (c) 514.3253

3. Réponse à la question 3 : 2857.417

4. Réponses à la question 4 :

   (a) 1895.742 et 109.886

   (b) 0.011363 et 0.088637

   (c) 1630.606 et 2197.418

5. Réponses à la question 5 :

   (a) Aucune réponse

   (b) 50 ; 375, 475, 575

   (c) 106.9051, 116.6298, 124.3175 ; 119.1410, 132.1081, 141.5135

6. Réponses à la question 6 :

   (a) Aucune réponse

   (b) -1.5 ; 0; 1.5

(c) 5 ; 10, 13, 16

(d) 15.5235 ; 16.9914 ; 18.0635

(e) 18.3810 ; 20.0310 ; 21.1530

7. Réponses à la question 7 :

(a) Aucune réponse

(b) $VaR_\kappa(X_i) = 0$, $TVaR_\kappa(X_i) = 1200$, $i = 1, 2, ..., 500$, $TVaR_\kappa(X_i) = 800$, $i = 501, 2, ..., 1000$

(c) pour $\gamma_0 = 0$, $VaR_\kappa(S) = 17\ 492.6589$, $TVaR_\kappa(S) = 19\ 695.9894$; pour $\gamma_0 = 0.001$, $VaR_\kappa(S) = 14\ 831.6164$, $TVaR_\kappa(S) = 314\ 154.6613$; pour $\gamma_0 = 0.002$, $VaR_\kappa(S) = 11\ 685.9003$, $TVaR_\kappa(S) = 608\ 843.8334$

8. Réponses à la question 8 :

(a) Aucune réponse

(b) $VaR_\kappa(X_1) = 13\,914.4683$, $VaR_\kappa(X_2) = 5956.8409$; $TVaR_\kappa(X_1) = 15\ 698.8919$, $TVaR_\kappa(X_2) = 13\ 576.8744$

(c) pour $\gamma_0 = 0$, 15 913.1920 et 17 733.2420 ; pour $\gamma_0 = 1$, 16 446.1595 et 18 348.6563 ; pour $\gamma_0 = 2$, 16 937.1281 et 18 913.4494

9. Réponses à la question 9 :

(a) 72, 84, 156

(b) 3024

(c) 13 440

(d) 0.0821, 0.0738, 0.0525, 0.0253, 0.0091, 0.0026

(e) 240 et 260 ; 266.0705 et 287.3639 ; 340 et 380 ; 391.1109 et 424.2009 ; 500 et 540 ; 560.6506 et 605.5765

10. Réponses à la question 10 :

(a) $\alpha = 1 : r = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{0.95}-1\right)} = 0.948729$

(b) $\alpha = 1$ et $k = 0, 1, 2$: 0.655172, 0.233990, 0.077997, 0.023999, 0.006720, 0.001680

(c) 15 984.0902, 2261.9048, 236.2676

(d) 1 913 568.118, 678 571.432, 496 264.084

(e) 7000, 3000, 3000

(f) 8320.8983, 4149.4253, 3170.7031

(g) 475 000, 3000, 3109.5026.

11. Réponses à la question 11 :

    (a) 5.2, 8.4, 13.6
    (b) 18.24, 37.44
    (c) 4.5, 6, 7.5
    (d) 64.68, 67.68, 70.68
    (e) 0.8048, 0.8027, 0.8004
    (f) 37.3761, 38.2743, 39.1082

12. Réponses à la question 12 :

    (a) A : 0.6976496 ; B : 0.7029052; C : 0.6936068
    (b) A : 3.03151 ; B : 3.38338 ; C : 2.76084
    (c) A : 11.60274 ; B : 11.47135 ; C : 11.70381
    (d) H1 : 0, 27, 315 ; H2 : 13, 27, 341 ; H : -10 ; 27 ; 295
    (e) A : 0.8938773 ; B : 0.8865779 ; C : 0.8994923

13. Réponses à la question 13 :

    (a) Aucune réponse
    (b) Aucune réponse
    (c) Aucune réponse
    (d) Aucune réponse
    (e) 40, 30, 70
    (f) 640, 510
    (g) On obtient les valeurs suivantes :
        i. 0, 1300, -500 ; 1150, 3750, 150
        ii. 166.3084, 176.2958, 157.2414 ; 185.2271, 196.8551, 174.4567

14. Réponses à la question 14 :

    (a) Aucune réponse
    (b) Aucune réponse
    (c) $\gamma_0\left(\frac{1+\rho}{4}\right)$
    (d) Aucune réponse
    (e) $100\gamma_0\left(\frac{1+\rho}{4}\right)$
    (f) On obtient les valeurs suivantes :

i. 5 et 80
ii. pour $\rho = -0.9$, 0.075 et 5.15 ; pour $\rho = 0$, 0.75 et 6.5 ; pour $\rho = 0.9$, 1.425 et 7.85
iii. pour $\rho = -0.9$, 12 et 13.5188 ; pour $\rho = 0$, 12 et 13.1331 ; pour $\rho = 0.9$, 13 et 14.0756
iv. pour $\rho = -0.9$, 7.5 et 1015 ; pour $\rho = 0$, 75 et 1150 ; pour $\rho = 0.9$, 142.5 et 1285
v. pour $\rho = -0.9$, 161.4387 et 182.0162 ; pour $\rho = 0$, 151.8923 et 173.1822 ; pour $\rho = 0.9$, 158.1031 et 180.6798

15. Réponses à la question 15 :

(a) 30, 200 et 3400
(b) 3 et 421
(c) Aucune réponse
(d) 0.008519

9

Théorie des copules et agrégation des risques

9.1 Introduction

Depuis le milieu des années 1990, la théorie des copules a connu un essor important. D'un thème confidentiel de recherche qui intéressait un groupe restreint de chercheurs en mathématiques, en théorie des probabilités et en statistique, la théorie des copules est devenue aujourd'hui un thème important de recherche. Désormais, elle intéresse les chercheurs en actuariat, en finance quantitative, en statistique, en économétrie, etc.

La théorie des copules est devenue un thème incontournable dans le contexte de la modélisation des risques en actuariat et en gestion quantitative des risques. Elle permet d'analyser les relations de dépendance entre les v.a. et de construire une large variété de modèles multivariés incorporant des relations de dépendance spécifiques.

Dans ce chapitre, on présente une introduction à la théorie des copules. On aborde en premier lieu les copules bivariées, en indiquant certaines propriétés et en présentant les principales familles de copules. On traite aussi de l'utilisation des copules pour construire des distributions discrètes multivariées. On considère des contextes d'application des copules pour la construction de modèles multivariés appliqués à des risques d'un portefeuille en actuariat et gestion quantitative des risques. Pour évaluer la distribution de la somme de v.a. dont la distribution conjointe est définie via une copule, on peut recourir aux méthodes de simulation stochastique et, à cette fin, on présente des algorithmes de simulation liés à certaines copules. On expose aussi trois méthodes d'agrégation de v.a. : la méthode

pour établir des bornes minimales et maximales pour la VaR d'une somme de v.a., la méthode des carrés et la méthode basée sur la discrétisation. On discute aussi des mesures de dépendance et on aborde brièvement les notions liées aux ordres stochastiques multivariés.

9.2 Copules bivariées

La notion de copule a été introduite par [98]. Une copule C est la fonction de répartition sur $[0,1]^2$ d'un vecteur de v.a. $\underline{U} = (U_1, U_2)$ dont toutes les composantes U_i $(i = 1, 2)$ obéissent à la loi uniforme $(0, 1)$.

Définition 9.1 *Une copule $C(u_1, u_2)$ est une application $[0,1]^2 \to [0,1]$ ayant les propriétés suivantes (celles d'une fonction de répartition conjointe en fait) :*

- *$C(u_1, u_2)$ est non décroissante sur $[0,1]^2$;*
- *$C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $[0,1]^2$;*
- *$\lim_{u_i \longrightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$ pour $i = 1, 2$;*
- *$\lim_{u_1 \longrightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$ et $\lim_{u_2 \longrightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$;*
- *on a $\triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} C(u_1, u_2) \geq 0$, pour tout $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, où*

$$\begin{aligned} \triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} C(u_1, u_2) &= C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) \\ &\quad - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2). \end{aligned}$$

On mentionne que

$$\triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} C(u_1, u_2) = \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2),$$

ce qui correspond à la probabilité que le couple (U_1, U_2) prenne des valeurs dans le rectangle $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$. Selon cette propriété, C est une copule à la condition qu'elle soit définie de telle sorte qu'elle place une masse positive sur tout rectangle inclus dans $[0,1]^2$.

Le résultat fondamental de la théorie des copules est le théorème de Sklar.

Théorème 9.2 ***Théorème de Sklar.*** *Soit $F \in \Gamma(F_1, F_2)$ ayant des fonctions de répartition marginales F_1 et F_2. Alors, il existe une copule C telle que, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$,*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Si F_1 et F_2 sont continues, alors C est unique. Sinon, C est uniquement déterminée sur $RanF_1 \times RanF_2$ ($RanF$ = support de F). Inversement, si C est une copule et si F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

est une fonction de répartition bivariée avec les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2.

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

Selon la première partie du théorème de Sklar, il est possible de déduire une copule C à partir d'une fonction de répartition continue. Cela est résumé dans le corollaire suivant.

Corollaire 9.3 *Soit F une fonction de répartition bivariée avec des marginales continues F_1, F_2 et la copule C. Alors, pour tout (u_1, u_2) dans $[0,1]^2$,*

$$C(u_1, u_2) = F\left(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)\right).$$

Ce corollaire conduit à une méthode de construction de copules dite par inversion, comme il est discuté à la sous-section 9.6.1.

En se basant sur la seconde partie du théorème de Sklar, une copule permet de jumeler différentes lois marginales afin de créer une loi bivariée. La copule $C(u_1, u_2)$ décrit la relation de dépendance entre les deux v.a. X_1 et X_2 alors que les marginales décrivent le comportement de chacune des deux v.a. Dans le cas de v.a. continues, la copule contient toute l'information relative à la relation de dépendance entre les deux v.a. On peut dès lors étudier les marginales et la copule séparément. Le cas de marginales discrètes est traité à la section 9.5.

9.3 Propriétés des copules

On présente certaines propriétés des copules.

9.3.1 Bornes de Fréchet

Soit $C(u_1, u_2)$ une copule définie sur $[0,1]^2$. Alors, avec la proposition 8.3, on a

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2),$$

où $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$ et $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1; u_2)$ correspondent aux copules borne inférieure et borne supérieure de Fréchet.

9.3.2 Fonction de densité

On note la fonction de densité associée à la copule par

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2).$$

Pour une paire de v.a. continues (X_1, X_2) avec

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)),$$

la fonction de densité est donnée par

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2),$$

où $f_{X_i}(x_i)$ est la fonction de densité de X_i i.e. $f_{X_i}(x_i) = \frac{\mathrm{d}F_{X_i}(x_i)}{\mathrm{d}x_i}$ pour $i = 1, 2$.

9.3.3 Copule de survie

Soit $C(u_1, u_2)$ une copule définie sur $[0, 1]^2$. Il est aussi possible de définir une copule, désignée $\widehat{C}(u_1, u_2)$, qui est associée à la copule initiale $C(u_1, u_2)$ et qui relie les fonctions de survie marginales $\overline{F}_{X_1}$et $\overline{F}_{X_2}$ de X_1 et X_2 selon la relation

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}\left(\overline{F}_{X_1}(x_1), \overline{F}_{X_2}(x_2)\right).$$

En effet, on a

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$$

qui devient

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1 + C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} \overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \overline{F}_{X_1}(x_1) + \overline{F}_{X_2}(x_2) - 1 \\ &\quad + C\left(1 - \overline{F}_{X_1}(x_1), 1 - \overline{F}_{X_2}(x_2)\right). \end{aligned} \tag{9.1}$$

De (9.1), on déduit l'expression de la copule de survie $\widehat{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule $C(u_1, u_2)$:

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

On peut vérifier que $\widehat{C}(u_1, u_2)$ est elle-même une copule et on a

$$C^-(u_1, u_2) \leq \widehat{C}(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2),$$

pour tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$. Cela implique que l'on peut définir des fonctions de répartition à l'aide de la copule de survie $\widehat{C}(u_1, u_2)$ et les fonctions de répartition marginales F_{X_1}et F_{X_2} de X_1 et X_2 selon la relation

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \widehat{C}(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)).$$

Il est aussi important de distinguer la copule de survie et la fonction de survie conjointe pour la paire (U_1, U_2). On suppose un couple de v.a. (U_1, U_2) dont la fonction de répartition conjointe est donnée par C. Alors, on a

$$\overline{F}_{U_1,U_2}(u_1, u_2) = \Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$$

mais

$$\Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \neq \widehat{C}(u_1, u_2).$$

En fait, à partir de la définition de $\widehat{C}$, on a

$$\Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_2) = \widehat{C}(1 - u_1, 1 - u_2).$$

La fonction de densité associée à $\widehat{C}(u_1, u_2)$ est

$$\widehat{c}(u_1, u_2) = c(1 - u_1, 1 - u_2),$$

où c est la fonction de densité associée à la copule C.

9.3.4 Propriété d'invariance

Un des intérêts de l'utilisation des copules découle de la propriété d'invariance.

Propriétés 9.4 *Soient X_1 et X_2 des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie avec la copule C. Soient ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule C.*

2. *Si ϕ_1 est non décroissante et ϕ_2 est non croissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_1 - C(u_1, 1 - u_2)$.*

3. *Si ϕ_1 est non croissante et ϕ_2 est non décroissante, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $u_2 - C(1 - u_1, u_2)$.*

4. *Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non croissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est la copule $\widehat{C}$.*

On souligne que la forme de la copule ne dépend pas de la forme de ϕ_1 et ϕ_2, ce qui est important pour l'estimation.

Exemple 9.5 *On suppose que les rendements instantanés sur les titres 1 et 2 sont définis par les v.a. R_1 et R_2. De plus, la copule associée au couple (R_1, R_2) est C. La valeur au temps 1 du titre i par la v.a. $S_i(1) = S_i(0)\exp(R_i)$, où le scalaire $S_i(0)$ est la valeur du titre i au temps 0. Alors, la copule associée au couple $(S_1(1), S_2(1))$ est aussi C.* □

9.3.5 Fonction de répartition conditionnelle

Soit la copule C pour laquelle les dérivées partielles par rapport à u_1 et u_2

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \text{ et } C_{1|2}(u_1|u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$$

existent. Ainsi, les expressions des fonctions de répartition conditionnelles de $X_2|X_1 = x_1$ et de $X_1|X_2 = x_2$ pour un couple de v.a. continues (X_1, X_2) sont données par

$$F_{X_2|X_1=x_1}(x_2) = C_{2|1}(F_{X_2}(x_2)|F_{X_1}(x_1))$$

et

$$F_{X_1|X_2=x_2}(x_1) = C_{1|2}(F_{X_1}(x_1)|F_{X_2}(x_2)).$$

9.3.6 Simulation et fonction de répartition conditionnelle

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par les marginales F_{X_1} et F_{X_2} ainsi que la copule C. On veut produire les m réalisations $\left(X_1^{(1)}, X_2^{(1)}\right)$, ..., $\left(X_1^{(m)}, X_2^{(m)}\right)$ de la paire (X_1, X_2). À cette fin, il suffit de produire m réalisations $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$, ..., $\left(U_1^{(m)}, U_2^{(m)}\right)$ du couple (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est la copule C et de calculer $X_i^{(j)} = F_{X_i}^{-1}\left(U_i^{(j)}\right)$ pour $i = 1, 2$ en appliquant la méthode inverse. Une approche générale pour produire la réalisation $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ de (U_1, U_2) est d'utiliser la fonction de répartition conditionnelle en appliquant la procédure décrite ci-dessous.

Algorithme 9.6 ***Procédure générale***

1. *On simule les réalisations $V_1^{(j)}$ et $V_2^{(j)}$ des v.a. indépendantes V_1 et V_2 où $V_i \sim U(0,1)$ pour $i = 1, 2$.*

2. *On calcule* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)} = C_{2|1}^{-1}\left(V_2^{(j)}|U_1^{(j)}\right)$ *où* $C_{2|1}^{-1}(v|u_1)$ *est la fonction inverse de* $C_{2|1}(u_2|u_1)$*, obtenue en trouvant la solution de* $C_{2|1}(u_2|u_1) = v$*.*

3. *On répète pour* $j = 1, 2, ..., m$*.*

Il y a aussi des méthodes spécifiques de simulation associées à certaines copules. Elles sont décrites à la section suivante.

9.3.7 Copule complète

On dit qu'une copule est *complète* si elle inclut la copule borne supérieure de Fréchet, la copule d'indépendance et la copule borne inférieure de Fréchet comme cas particuliers ou cas limites.

9.4 Principales copules bivariées

Dans cette section, on présente brièvement les copules fréquemment utilisées, leurs principales caractéristiques et, dans certains cas, un algorithme de simulation spécifique pour la copule.

9.4.1 Copule d'indépendance

L'expression de la copule indépendance (appelée aussi copule produit) est $C^{\perp}(u_1, u_2) = u_1 u_2$. Sa fonction de densité est $c(u_1, u_2) = 1$.

Algorithme 9.7 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i = 1, 2$*.*

2. *On calcule* $U_i^{(j)} = V_i^{(j)}$*,* $i = 1, 2$*.*

Les réalisations produites par la copule sont uniformément réparties sur la surface $[0,1] \times [0,1]$ (voir figure 9.1).

9.4.2 Copule de la borne supérieure de Fréchet

La copule borne supérieure de Fréchet est définie par $C^{+}(u_1, u_2) = \min(u_1; u_2)$.

Algorithme 9.8 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim U(0,1)$*.*

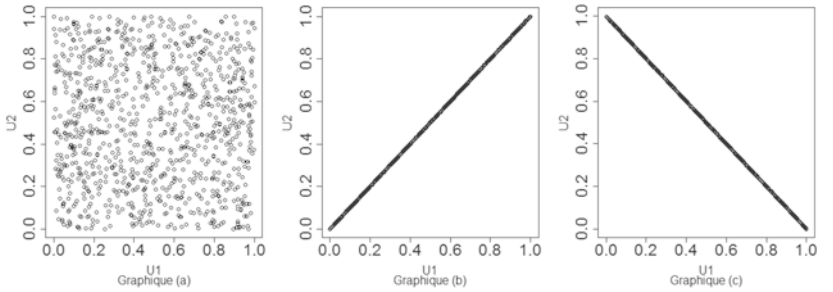

FIGURE 9.1. Les graphiques (a), (b) et (c) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule indépendance, borne supérieure de Fréchet et borne inférieure de Fréchet.

2. *On calcule* $U_i^{(j)} = V^{(j)}$, $i = 1, 2$.

Les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$ (voir figure 9.1).

9.4.3 Copule de la borne inférieure de Fréchet

La copule borne supérieure de Fréchet correspond à $C^- (u_1, u_2) = \max (u_1 + u_2 - 1; 0)$.

Algorithme 9.9 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim U(0,1)$.

2. *On calcule* $U_1^{(j)} = V^{(j)}$ *et* $U_2^{(j)} = 1 - V^{(j)}$.

Les réalisations se trouvent uniformément distribuées sur la diagonale $u_1 = 1 - u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$ (voir figure 9.1).

9.4.4 Copule de Fréchet

La copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules borne inférieure de Fréchet, indépendance et borne supérieure de Fréchet avec

$$C_{\alpha,\beta} (u_1, u_2) = \alpha C^+ (u_1, u_2) + \beta C^- (u_1, u_2) + (1 - \alpha - \beta) C^\perp (u_1, u_2),$$

pour $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta \leq 1$. Les cas particuliers sont $C_{0,0} (u_1, u_2) = C^\perp (u_1, u_2)$, $C_{1,0} (u_1, u_2) = C^+ (u_1, u_2)$ et $C_{0,1} (u_1, u_2) = C^- (u_1, u_2)$. La copule de Fréchet est complète.

Algorithme 9.10 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{\perp(j)}, V_2^{\perp(j)}\right)$ *de la copule indépendance.*

2. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{+(j)}, V_2^{+(j)}\right)$ *de la copule borne supérieure de Fréchet.*

3. *On simule une réalisation* $\left(V_1^{-(j)}, V_2^{-(j)}\right)$ *de la copule borne supérieure de Fréchet.*

4. *On simule une réalisation* $J^{(j)}$ *de la v.a. discrète* J *où* $f_J(0) = \alpha$, $f_J(1) = \beta$ *et* $f_J(2) = 1 - \alpha - \beta$.

5. *On calcule* $U_i^{(j)} = 1_{\{J=0\}} \times V_i^{+(j)} + 1_{\{J=1\}} \times V_i^{-(j)} + 1_{\{J=2\}} \times V_i^{\perp(j)}$, *pour* $i = 1, 2$.

La copule de Fréchet comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface $[0,1] \times [0,1]$ et deux portions singulières avec réalisations distribuées uniformément sur les diagonales $u_1 = u_2$ et $u_1 = 1 - u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$.

En posant $\beta = 0$, on obtient la copule de Spearman dont l'expression est

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \alpha C^+(u_1, u_2) + (1 - \alpha) C^\perp(u_1, u_2),$$

pour $\alpha \in [0,1]$. La copule de Spearman introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$. Cette copule comprend une portion continue avec des réalisations qui se trouvent distribuées uniformément sur la surface $[0,1] \times [0,1]$ et une portion singulière avec réalisations distribuées uniformément sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans $[0,1] \times [0,1]$.

9.4.5 Copule de Cuadras-Augé

La copule de Cuadras-Augé se présente sous la forme d'une moyenne géométrique des copules indépendance et borne supérieure de Fréchet

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1, u_2) &= C^+(u_1, u_2)^\alpha \, C^\perp(u_1, u_2)^{1-\alpha} \\ &= \begin{cases} u_1 u_2^{1-\alpha}, & \text{si } u_1 \leq u_2 \\ u_1^{1-\alpha} u_2, & \text{si } u_1 \geq u_2 \end{cases}, \end{aligned}$$

pour $\alpha \in [0,1]$.

Les cas particuliers sont $C_0(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$ et $C_1(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$.

Algorithme 9.11 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2) ***pour*** $\alpha \in (0,1)$

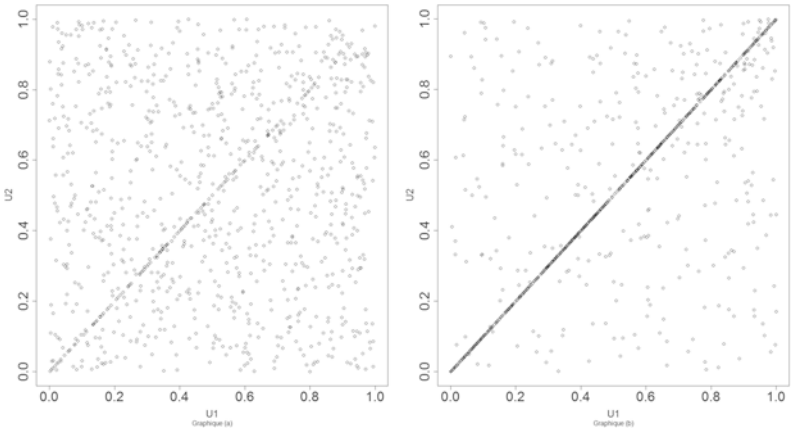

FIGURE 9.2. Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé pour α égal à 0.2 (a) et 0.8 (b).

1. *On simule les réalisations* $Y_0^{(j)}$, $Y_1^{(j)}$ *et* $Y_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* $Y_0 \sim Exp(\alpha)$ *et* $Y_1 \sim Y_2 \sim Exp(1-\alpha)$.

2. *On calcule* $X_i^{(j)} = \min\left(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)}\right)$ *pour* $i = 1, 2$.

3. *On calcule* $U_i^{(j)} = 1 - \exp\left(-X_i^{(j)}\right)$, *pour* $i = 1, 2$.

Dans la figure 9.2, on reproduit deux graphiques de réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé.

La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$. La copule comporte une portion continue avec

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, u_2^{-\alpha}, & \text{si } u_1 < u_2 \\ (1-\beta)\, u_1^{-\alpha}, & \text{si } u_1 > u_2 \end{cases}$$

et une portion singulière dont la masse se trouve concentrée sur la diagonale $u_1 = u_2$ dans la surface $[0,1] \times [0,1]$.

9.4.6 Copule de Marshall-Olkin

La copule de Marshall-Olkin est définie par

$$C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \min\left(u_1^{1-\alpha} u_2; u_1 u_2^{1-\beta}\right) = \begin{cases} u_1^{1-\alpha} u_2, & \text{si } u_1^{\alpha} \geq u_2^{\beta} \\ u_1 u_2^{1-\beta}, & \text{si } u_1^{\alpha} \leq u_2^{\beta} \end{cases},$$

pour $\alpha, \beta \in [0,1]$.

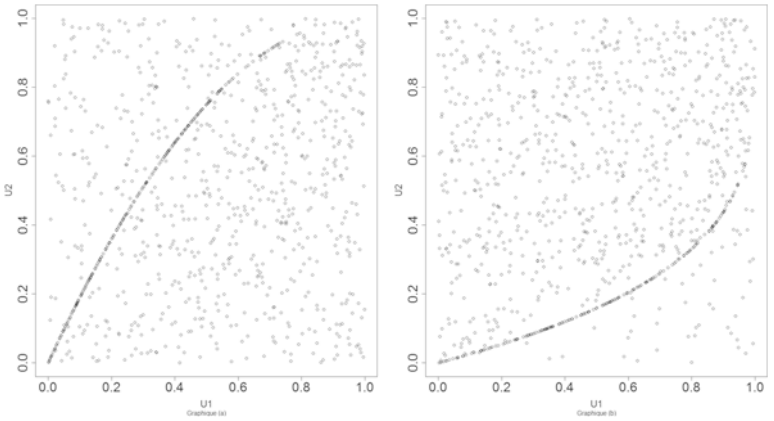

FIGURE 9.3. Les graphiques (a) et (b) reproduisent 1000 réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Cuadras-Augé pour des valeurs pour (α, β) de $(0.6, 0.3)$ (a) et $(0.2, 0.8)$ (b).

Les cas particuliers sont $C_{0,0}(u_1, u_2) = C^{\perp}(u_1, u_2)$ et $C_{1,1}(u_1, u_2) = C^{+}(u_1, u_2)$. Avec $\beta = \alpha$, la copule de Marshall-Olkin devient la copule de Cuadras-Augé. En fait, la copule de Marshall-Olkin est aussi appelée copule de Cuadras-Augé généralisée.

Algorithme 9.12 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2) ***pour*** $\alpha, \beta \in (0, 1)$

1. *On simule les réalisations* $Y_0^{(j)}$, $Y_1^{(j)}$ *et* $Y_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* $Y_0 \sim Exp(1)$, $Y_1 \sim Exp\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ *et* $Y_2 \sim Exp\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$.

2. *On calcule* $X_i^{(j)} = \min\left(Y_i^{(j)}; Y_0^{(j)}\right)$ *pour* $i = 1, 2$.

3. *On calcule* $U_1^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_1^{(j)}}{\alpha}\right)$ *et* $U_2^{(j)} = 1 - \exp\left(-\frac{X_2^{(j)}}{\beta}\right)$.

On représente des réalisations de (U_1, U_2) provenant de la copule de Marshall-Olkin à la figure 9.3.

La copule introduit une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$. Tout comme la copule de Cuadras-Augé, la copule a une portion continue avec

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha,\beta}(u_1, u_2) = \begin{cases} (1-\alpha)\, u_1^{-\alpha}, & \text{si } u_1^{\alpha} > u_2^{\beta} \\ (1-\beta)\, u_2^{-\beta}, & \text{si } u_1^{\alpha} < u_2^{\beta} \end{cases}$$

et une portion singulière dont la masse se trouve concentrée sur la courbe $u_1^{\alpha} = u_2^{\beta}$ dans la surface $[0, 1] \times [0, 1]$.

9.4.7 Copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM)

La copule de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM) se présente comme une forme de pertubation de la copule indépendance

$$C_\alpha(u_1,u_2) = u_1u_2 + \alpha u_1u_2(1-u_1)(1-u_2), \tag{9.2}$$

pour $\alpha \in [-1,1]$. Le cas particulier est $C_0(u_1,u_2) = C^\perp(u_1,u_2)$. La fonction de densité est

$$c(u_1,u_2) = 1 + \alpha(1-2u_1)(1-2u_2).$$

Algorithme 9.13 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i=1,2$.

2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.

3. *On définit* $W_1^{(j)} = \alpha\left(2U_1^{(j)}-1\right)-1$ *et*

$$W_2^{(j)} = \left(1-\alpha\left(2U_1^{(j)}-1\right)\right)^2 + 4\alpha V_2^{(j)}\left(2U_1^{(j)}-1\right).$$

4. *On calcule* $U_2^{(j)} = \frac{2V_2^{(j)}}{\left(\sqrt{W_2^{(j)}}-W_1^{(j)}\right)}$.

Dans la figure 9.4, on présente un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité.

La copule introduit une relation de dépendance modérée qui peut être positive ($\alpha > 0$) ou négative ($\alpha < 0$). Pour $\alpha > 0$ ($\alpha > 0$), on observe une concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1-u_2$) de la surface $[0,1]\times[0,1]$.

9.4.8 Copule de Ali-Mikhail-Haq

L'expression de la copule de Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$\begin{aligned} C_\alpha(u_1,u_2) &= \frac{u_1u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)} \\ &= u_1u_2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha(1-u_1)(1-u_2)\right)^k, \end{aligned} \tag{9.3}$$

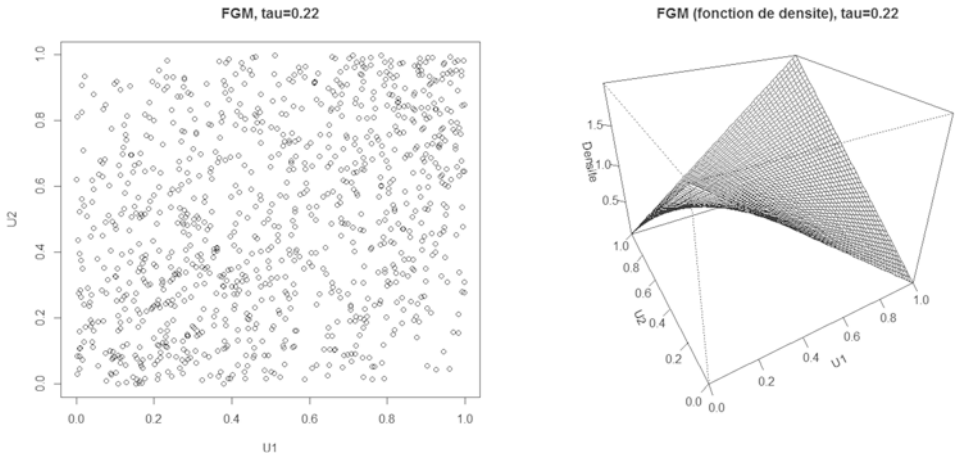

FIGURE 9.4. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de EFGM et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

pour $\alpha \in [-1,1]$. Le cas particulier est $C_0(u_1,u_2) = C^{\perp}(u_1,u_2)$. La fonction de densité est

$$c(u_1,u_2) = \frac{1-\alpha+2\alpha\frac{u_1u_2}{1-\alpha(1-u_1)(1-u_2)}}{(1-\alpha(1-u_1)(1-u_2))^2}.$$

Algorithme 9.14 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$ *et* $V_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1 *et* V_2 *où* $V_i \sim U(0,1)$ *pour* $i=1,2$.
2. *On pose* $U_1^{(j)} = V_1^{(j)}$.
3. *On définit* $A = 1-U_1^{(j)}$, $B = -\alpha\left(2AV_2^{(j)}+1\right)+2\alpha^2A^2\times V_2^{(j)}+1$ *et*
$$C = \alpha^2\left(4A^2V_2^{(j)}-4AV_2^{(j)}+1\right)-\alpha\left(4AV_2^{(j)}-4V_2^{(j)}+2\right).$$
4. *On calcule* $U_2^{(j)} = \frac{2\times V_2^{(j)}(A\alpha-1)^2}{\left(B+\sqrt{C}\right)}$.

On présente Un graphique avec des réalisations de la copule de EFGM et un graphique représentant sa fonction de densité sont reproduits dans la figure 9.5.

La copule permet d'introduire une relation de dépendance modérée qui peut être positive ou négative. Pour $\alpha > 0$ ($\alpha > 0$), on observe une

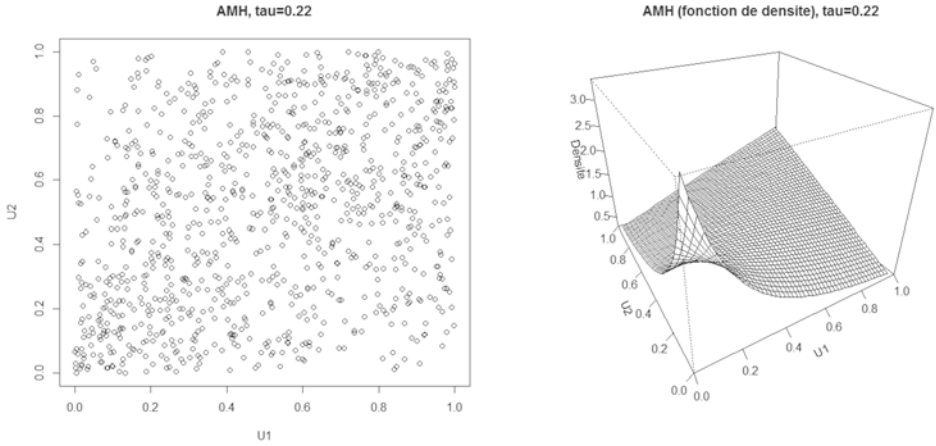

FIGURE 9.5. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de AMH et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

concentration modérée des réalisations de la copule autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1 - u_2$) de la surface $[0,1] \times [0,1]$.

9.4.9 Copule de Plackett

La copule de Plackett est définie par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \frac{(1 + (\alpha - 1)(u_1 + u_2))}{2(\alpha - 1)} - \frac{\sqrt{(1 + (\alpha - 1)(u_1 + u_2))^2 - 4u_1 u_2 \alpha (\alpha - 1)}}{2(\alpha - 1)},$$

pour $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Les cas limites sont $\lim_{\alpha \to 1} C_\alpha(u_1, u_2) = C^\perp(u_1, u_2)$, $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha(u_1, u_2) = C^+(u_1, u_2)$ et $\lim_{\alpha \to 0} C_\alpha(u_1, u_2) = C^-(u_1, u_2)$. Lorsque $\alpha > 1$ ($\alpha < 1$), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de $\underline{U}$. La dépendance est modérée aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et de la queue à droite. La copule est complète. On utilise la procédure générale de l'algorithme 9.6 pour produire des réalisations de la copule de Plackett.

9.4.10 Copule de Clayton

La copule de Clayton est représentée par

$$C_\alpha(u_1,u_2)=\left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$ et $\alpha>0$. Les cas limites sont $\lim_{\alpha\to 0} C_\alpha(u_1,u_2)=C^{\perp}(u_1,u_2)$ et $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha(u_1,u_2)=C^{+}(u_1,u_2)$. L'expression de la fonction de densité est

$$c(u_1,u_2)=\frac{1+\alpha}{(u_1u_2)^{\alpha+1}}\left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-2-\frac{1}{\alpha}}.$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1)=\frac{1}{u_1^{\alpha+1}}\left(u_1^{-a}+u_2^{-a}-1\right)^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Algorithme 9.15 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. On simule les réalisations $Z_1^{(j)}$ et $Z_2^{(j)}$ des v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 où $Z_i\sim Exp(1)$ pour $i=1,2$. On simule la réalisation $\Theta^{(j)}$ de la v.a. $\Theta\sim Ga\left(\frac{1}{\alpha},1\right)$.

2. On calcule $U_i^{(j)}=\left(1+\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$, $i=1,2$.

Les figures 9.6 et 9.7 reproduisent des graphiques des réalisations de la copule de Clayton et des graphiques de sa fonction de densité.

La copule induit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$. La copule introduit une relation de dépendance forte aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et faible aux valeurs extrêmes de la queue à droite.

9.4.11 Copule de Frank

L'expression de la copule de Frank est

$$C_\alpha(u_1,u_2)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right)}\right),$$

pour $u_i\in[0,1]$, $i=1,2$ et $\alpha\neq 0$.

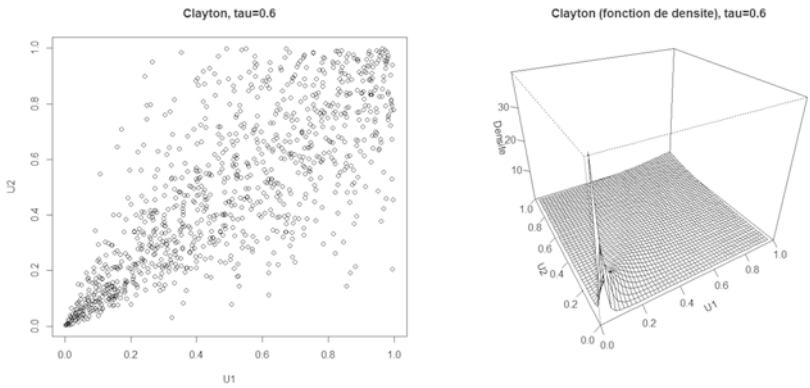

FIGURE 9.6. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

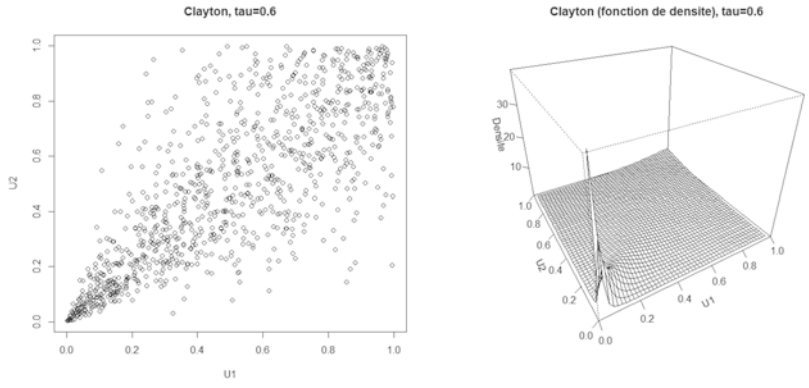

FIGURE 9.7. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Clayton et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.6).

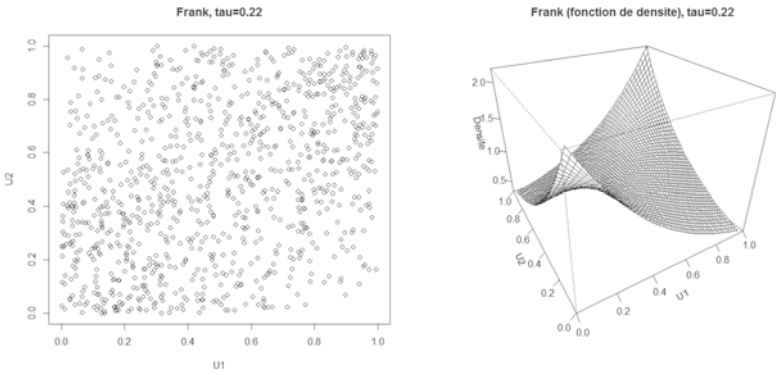

FIGURE 9.8. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

Les cas limites sont $\lim_{\alpha\to--\infty} C_\alpha(u_1,u_2) = C^-(u_1,u_2)$, $\lim_{\alpha\to 0} C_\alpha(u_1,u_2) = C^\perp(u_1,u_2)$ et $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha(u_1,u_2) = C^+(u_1,u_2)$. La fonction de densité est

$$c(u_1,u_2) = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha(u_1+u_2)}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha(u_1+u_2)} - \mathrm{e}^{-\alpha u_1} - \mathrm{e}^{-\alpha u_2} + \mathrm{e}^{-\alpha}\right)^2}.$$

On a aussi

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u_1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{-\alpha}-1\right) + \left(\mathrm{e}^{-\alpha u_1}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-\alpha u_2}-1\right)}.$$

La copule de Frank est complète.

Algorithme 9.16 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$ *et* $Z_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1 *et* Z_2 *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i=1,2$.
2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi logarithmique avec paramètre* $\gamma = 1-\mathrm{e}^{-\alpha}$.
3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \frac{\ln\left(1-\gamma \mathrm{e}^{-\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}}\right)}{\ln(1-\gamma)}$, $i=1,2$.

Un aperçu des réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité est fourni dans les figures 9.8 et 9.9.

Lorsque $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de $\underline{U}$. Les réalisations se concentrent autour de la diagonale $u_1 = u_2$ ($u_1 = 1-u_2$) sur la surface

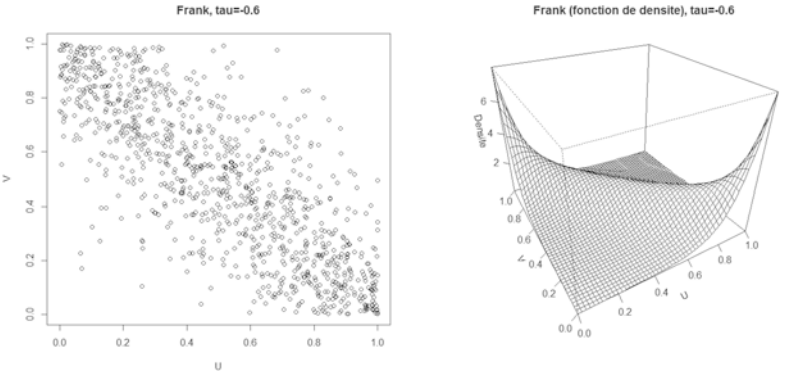

FIGURE 9.9. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Frank et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).

$[0,1] \times [0,1]$. La dépendance est modérée aux valeurs extrêmes de la queue à gauche et de la queue à droite.

9.4.12 Copule de Gumbel

On définit la copule de Gumbel par

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \exp\left(-\left\{(-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right\}^{(1/\alpha)}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$ et $\alpha \geq 1$. Les cas limites sont $\lim_{\alpha\to 1} C_\alpha(u_1,u_2) = C^\perp(u_1,u_2)$ et $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha(u_1,u_2) = C^+(u_1,u_2)$. La fonction de densité est

$$\begin{aligned} & c(u_1,u_2) \\ = \; & C_\alpha(u_1,u_2) \times \frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln u_2)^{\alpha-1}}{u_1 u_2} \\ & \times \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\alpha - 1 + \left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right). \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = C_\alpha(u_1,u_2)\frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}}{u_1}\left((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

Algorithme 9.17 ***Simulation des réalisations de*** (U_1,U_2)

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$ *et* $Z_2^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1 *et* Z_2 *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i = 1,2$.

2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ *où* $\varphi = \frac{1}{\alpha}$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^{\alpha}$ *(*$\alpha > 1$*).*

3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \exp\left(-\left(\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $i = 1, 2$.

Comme il est expliqué dans [86], il existe plusieurs paramétrisation de la loi stable. Dans le présent contexte, la loi *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$, avec les paramètres indiqués, est définie sur $\mathbb{R}^+$. La transformée de Laplace associée à la loi *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ est $\mathrm{e}^{-t^{\varphi}}$.

Algorithme 9.18 ***Simulation d'une réalisation*** $W^{(j)}$ ***d'une v.a.*** W ***obéissant à une loi*** *Stable* $(\varphi, 1, \gamma, 0)$ ***avec*** $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$

1. *On simule une réalisation* $R^{(j)}$ *de la v.a.* $R \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

2. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim Exp\,(1)$.

3. *On calcule*

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin\left(\varphi\left(R^{(j)} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(\cos\left(R^{(j)}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}} \\ B &= \left(\frac{\cos\left(\varphi\frac{\pi}{2} + (\varphi - 1)\,R^{(j)}\right)}{V^{(j)}}\right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}}. \end{aligned}$$

4. *On calcule* $W^{(j)} = A \times B$.

On peut exprimer $W = \gamma Y$ *où* Y *obéit à une loi stable standard* *Stable* $(\varphi, 1, 1, 0)$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi\varphi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\varphi}}$. *Le présent algorithme est une adaptation d'un algorithme fourni dans [86] permettant de simuler une réalisation de* Y.

Des réalisations de la copule de Gumbel et sa fonction de densité sont représentées dans les figures 9.10 et 9.11.

La copule introduit uniquement une relation de dépendance positive entre les composantes de $\underline{U}$. La copule introduit une relation de dépendance plus forte entre les valeurs extrêmes de la queue à droite et plus faible entre les valeurs extrêmes de la queue à gauche. La copule est aussi appelée «Gumbel-Hougard».

9.4.13 Copule normale

La copule normale est définie par

$$C_{\alpha}^{N}(u_1, u_2) = \overline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)\right),$$

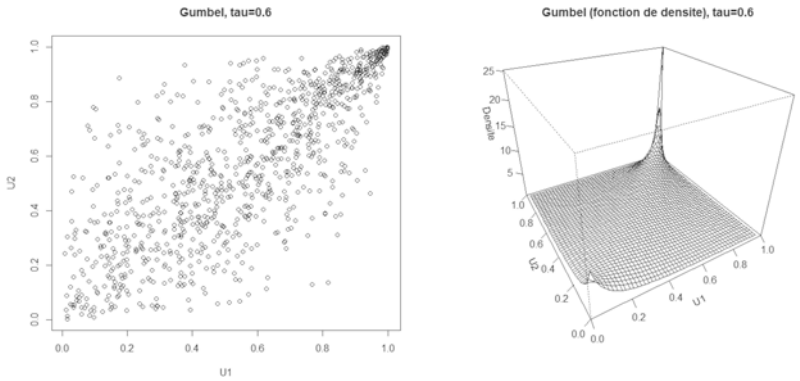

FIGURE 9.10. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

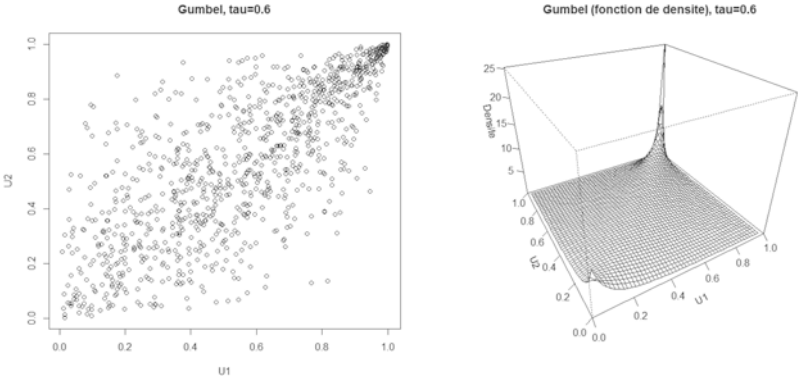

FIGURE 9.11. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule de Gumbel et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.6).

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [-1,1]$. Contrairement aux copules présentées précédemment, la copule normale n'a pas de forme analytique. Les cas particuliers sont $C_0(u_1,u_2) = C^{\perp}(u_1,u_2)$, $C_1(u_1,u_2) = C^{+}(u_1,u_2)$ et $C_{-1}(u_1,u_2) = C^{-}(u_1,u_2)$. L'expression de la fonction de densité $c(u_1,u_2)$ est

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2) + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2\left(1-\alpha^2\right)}} \mathrm{e}^{\frac{\left(\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2\right)}{2}}.$$

On a

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(u_2) - \alpha\Phi^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

Lorsque $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), la copule introduit une relation de dépendance positive (négative) entre les composantes de $\underline{U}$. La copule normale est complète.

Algorithme 9.19 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}\right)$ *de la paire de v.a.* (Z_1, Z_2) *où* (Z_1, Z_2) *obéit à une loi normale bivariée standard avec un coefficient de corrélation* α.

2. *On calcule* $U_i^{(j)} = \Phi\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1,2$.

Dans les figures 9.12 et 9.13, on présente des graphiques avec des réalisations de la copule normale et avec sa fonction de densité.

Les réalisations de la copule normale prennent la forme d'une ellipse. Pour $\alpha > 0$, cette ellipse se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre α) autour de la diagonale entre le point inférieur gauche et le point supérieur droit de la surface $[0,1] \times [0,1]$. Pour $\alpha < 0$, l'ellipse de points se concentre (faiblement, modérément ou fortement selon la valeur du paramètre α) autour de la diagonale entre le point supérieur gauche et le point inférieur droit de la surface $[0,1] \times [0,1]$.

9.4.14 Copule de Student

L'expression de la copule de Student est

$$C^S_{\nu,\alpha}(u_1,u_2) = t_{\nu,\underline{\alpha}}\left(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)\right),$$

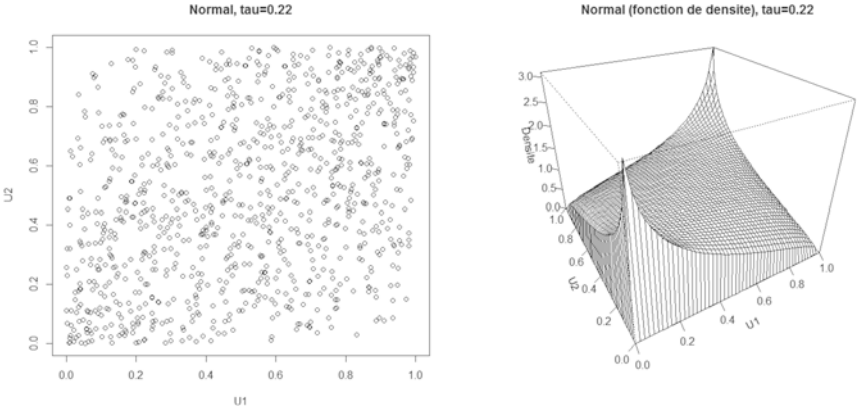

FIGURE 9.12. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale et de sa fonction de densité (tau de Kendall = 0.22).

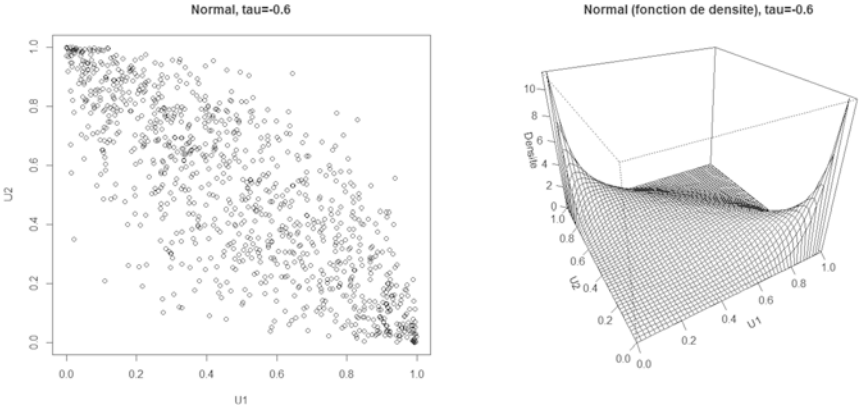

FIGURE 9.13. Graphiques avec 1000 réalisations de la copule normale et de sa fonction de densité (tau de Kendall = -0.6).

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2$, et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in [-1,1]$. Les cas limites sont $\lim_{\alpha \to 0} C^S_{\nu,\alpha}(u_1,u_2) = C^{\perp}(u_1,u_2)$ et $\lim_{\alpha \to \infty} C^S_{\nu,\alpha} = C^{+}(u_1,u_2)$. La fonction de densité est

$$\begin{aligned} & c(u_1,u_2) \\ = \; & \alpha^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\Gamma(\frac{\nu}{2})\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\right)^2} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)^2 - 2\alpha t_\nu^{-1}(u_1) t_\nu^{-1}(u_2) + t_\nu^{-1}(u_2)^2}{\nu(1-\alpha^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \\ & \times \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_1)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \left(1 + \frac{t_\nu^{-1}(u_2)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}}. \end{aligned}$$

La copule conditionnelle est

$$C_{2|1}(u_2|u_1) = t_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu + \left(t_\nu^{-1}(u_1)\right)^2}} \frac{t_\nu^{-1}(u_2) - \alpha t_\nu^{-1}(u_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right).$$

La copule de Student tend vers la copule normale quand $\nu \to \infty$. Comme la copule normale, la copule de Student n'a pas de forme explicite. La copule de Student est complète.

Algorithme 9.20 ***Simulation des réalisations de*** (U_1, U_2)

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}\right)$ *de la paire de v.a.* (Z_1, Z_2) *où* (Z_1, Z_2) *obéit à une loi de Student bivariée standard avec un coefficient de corrélation* α *et un degré de liberté* ν.

2. *On calcule* $U_i^{(j)} = t_\nu\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1,2$ *où* t_ν *est la fonction de répartition d'une loi de Student.*

9.4.15 Remarque

La provenance des algorithmes de simulation pour les copules de Clayton, de Gumbel et de Frank est basée sur la représentation des copules archimédiennes selon l'approche dite *common frailties*. Cette représentation est due à [80].

9.4.16 Exemples

Comme la copule EFGM est une perturbation de la copule d'indépendance, il est possible dans certains cas d'obtenir des résultats explicites pour F_S où $S = X_1 + X_2$ ou pour l'espérance de fonctions intégrables de (X_1, X_2).

Exemple 9.21 *On considère un couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont la structure de dépendance est définie par la copule EFGM et* $X_1 \sim X_2 \sim Bêta\,(2,1)$. *Alors, on obtient la fonction de densité pour la v.a.* $S = X_1 + X_2$ *qui correspond à*

$$f_S(s) = \begin{cases} \int_0^s f_{X_1,X_2}(x, s-x)\mathrm{d}x, & 0 < s \leq 1, \\ \int_{s-1}^1 f_{X_1,X_2}(x, s-x)\mathrm{d}x, & 1 < s \leq 2, \end{cases}.$$

On trouve

$$f_S(s) = \begin{cases} (1+\alpha)\frac{2s^3}{3} - \alpha\frac{4s^5}{5} + \alpha\frac{4s^7}{35}, & 0 < s \leq 1, \\ (1+\alpha)\left(2sy + \frac{2}{3}(1-y^3)\right) & \\ -\alpha\left(4s(1-y^4) - \frac{16}{5}(1-y^5)\right) & \\ +4\alpha\left(\frac{1}{35} + \frac{y}{5} + \frac{3y^2}{5} + y^4 - y^4 - \frac{3y^5}{5} - \frac{y^6}{5} - \frac{y^7}{35}\right), & 1 < s \leq 2, \end{cases}$$

avec $y = s - 1$. *L'expression de* $F_S(s)$ *est donnée par*

$$F_S(s) \begin{cases} (1+\alpha)\frac{s^4}{6} - \alpha\frac{2s^6}{15} + \alpha\frac{s^8}{70}, & 0 < s \leq 1 \\ \frac{1}{6} + \frac{\alpha}{21} + (1+\alpha)\left(y^2 - \frac{2y^3}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{y^6}{6}\right) & \\ -2\alpha\left(s^2 - 1 - \frac{2sy^5}{5} - \frac{8y}{5} + \frac{y^6}{3}\right) & \\ +4\alpha\left(\frac{y}{35} + \frac{y^2}{10} + \frac{y^3}{5} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{10} - \frac{y^7}{35} - \frac{y^8}{280}\right), & 1 < s \leq 2 \end{cases},$$

avec $y = s - 1$. □

Dans l'exemple suivant, on a recours à `Maple`® pour effectuer les calculs.

Exemple 9.22 *On considère un conglomérat de deux contrats représentés par les v.a.* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 \sim X_2 \sim Exp\,(1)$. *Les coûts pour le conglomérat sont définis par la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On suppose que la loi conjointe de* (X_1, X_2) *est définie par la copule de Frank avec un paramètre de dépendance* α *et les deux marginales de* X_1 *et* X_2. *On sait que* $E[S] = 2$, $VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 5.298317$ *et que* $TVaR_{0.995}(X_1) = TVaR_{0.995}(X_2) = 6.298317$. *Le bénéfice de la mutualisation en se basant sur la mesure TVaR est*

$$B_{0.995}^{TVaR}(S) = TVaR_{0.995}(S) - \sum_{i=1}^{2} TVaR_{0.995}(X_i).$$

Dans le tableau ci-dessous, on a produit avec Maple® *les valeurs suivantes pour* $\alpha = -10$ *et* 10 *et avec* R *pour les cas où* (X_1, X_2) *sont indépendants et comonotones :*

α	$VaR_{0.995}(S)$	$TVaR_{0.995}(S)$	$B_{0.995}^{TVaR}(S)$
-10	6.1173	7.1165	5.4801
indépendance	7.4301	8.5488	4.0479
10	9.0802	10.3011	2.2955
comonotonicité	10.5966	12.5966	0

Pour κ *fixé, on constate que* $TVaR_\kappa(S)$ *augmente lorsque la valeur du paramètre de dépendance* α *croît. Il en résulte que le bénéfice de mutualisation augmente lorsque* α *dimimue.* □

9.5 Copules et lois discrètes

Soit le couple de v.a. (M_1, M_2) dont la structure de dépendance est définie par une copule C et leurs marginales. La fonction de répartition conjointe F_{M_1,M_2} de (M_1, M_2) avec les marginales F_{M_1} et F_{M_2} est définie par

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C\left(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)\right), \tag{9.4}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$. La f.m.p. conjointe de (M_1, M_2) est donnée par

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(m_1, m_2) &= F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) - F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2) \\ &\quad - F_{M_1,M_2}(m_1, m_2 - 1) + F_{M_1,M_2}(m_1 - 1, m_2 - 1), \end{aligned} \tag{9.5}$$

pour $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ et avec $F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = 0$ si $m_1 < 0$ ou $m_2 < 0$.

Modéliser la dépendance avec des copules comme dans l'équation (9.4) est une approche adéquate et intéressante pour construire une distribution bivariée. Plusieurs propriétés de dépendance stochastique d'une copule sont également valides pour la distribution bivariée obtenue avec l'équation (9.4). Par exemple, les relations d'ordres stochastiques sont préservées. Il est important de rappeler que la copule déduite à partir d'une loi discrète bivariée n'est pas unique.

Dans le prochain exemple, on illustre l'impact du choix d'une copule sur la distribution de la somme de v.a.

Exemple 9.23 *On veut illustrer le choix d'une copule sur la distribution d'un couple de v.a.* (M_1, M_2) *où* $M_i \sim NB(\alpha_i, q_i)$, $i = 1, 2$. *On considère les copules de Frank, de Clayton et de Gumbel. On définit* $N = M_1 + M_2$. *On fixe* $\alpha_1 = 3$, $q_1 = \frac{1}{6}$, $\alpha_2 = 2$ *et* $q_2 = \frac{1}{9}$. *Pour chaque copule, on fixe le paramètre de dépendance de telle sorte que la covariance pour* (M_1, M_2) *est 0.5* $\times \sqrt{\mathrm{Var}(M_1)\,\mathrm{Var}(M_2)}$. *On calcule* $E[N] = 31$ *et* $\mathrm{Var}(N) = 379.1206$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de*

$VaR_\kappa(N)$ et $TVaR_\kappa(N)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995 :

Copule	*Frank*	*Clayton*	*Gumbel*
θ	*4.118*	*1.774*	*1.410*
$VaR_{0.95}(N)$	*67*	*65*	*66*
$VaR_{0.995}(N)$	*93*	*91*	*104*
$TVaR_{0.95}(N)$	*78.40738*	*76.63825*	*82.74425*
$TVaR_{0.995}(N)$	*103.3001*	*100.8877*	*119.8066*

On constate que le choix de la copule a un impact non négligeable sur le comportement de N. □

Dans la proposition suivante, on a fourni l'expression simple de la fonction de masse de probabilité conjointe du couple (M_1, M_2) lorsque la structure de dépendance est définie par la copule EFGM.

Proposition 9.24 *Soit le couple de v.a. discrètes (M_1, M_2) dont la fonction de répartition est définie par les marginales F_{M_1} et F_{M_2} ainsi que la copule EFGM. Alors, la fonction de masse de probabilité conjointe de (M_1, M_2) est donnée par*

$$\begin{aligned} f_{M_1,M_2}(k_1,k_2) &= f_{M_1}(k_1) f_{M_2}(k_2) \\ &\quad + \theta \prod_{i=1}^{2} f_{M_i}(k_i)\left(1 - 2F_{M_i}(k_i) - f_{M_i}(k_i)\right), \end{aligned}$$

où f_{M_1} et f_{M_2} sont les fonctions de masse de probabilité univariées de M_1 et M_2.

Preuve. L'expression est déduite de (9.5). ■

9.6 Méthodes de construction des copules

Les méthodes de construction de copules sont décrites avec beaucoup de détails notamment dans [85] : inversion, algébrique, mélange et géométrique. Dans cette section, on traite des trois premières méthodes.

9.6.1 Méthode d'inversion

La méthode d'inversion se base sur le théorème de Sklar. On génère la copule à partir d'une distribution continue bivariée donnée.

Soit un couple de v.a. contiues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2} et les marginales sont F_{X_1} et F_{X_2}. Alors, l'unique copule correspondante C est obtenue en utilisant la transformation inverse $x_1 = F_{X_1}^{-1}(u_1)$ et $x_2 = F_{X_2}^{-1}(u_2)$

$$C(u_1,u_2) = F_{X_1,X_2}\left(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)\right) = \Pr(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2),$$

où (U_1, U_2) est un couple de v.a. de loi uniforme standard et dont la fonction de répartition (sur $[0,1] \times [0,1]$) est la copule C.

On peut aussi appliquer la même approche pour générer une copule de survie. En effet, à partir de $\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, $\overline{F}_{X_1}(x_1)$ et $\overline{F}_{X_2}(x_2)$, on obtient la copule de survie

$$\widehat{C}(u_1, u_2) = \overline{F}_{X_1,X_2}\left(\overline{F}_{X_1}^{-1}(u_1), \overline{F}_{X_2}^{-1}(u_2)\right).$$

On mentionne ci-dessous un exemple de copule générée par la fonction de survie conjointe d'une loi bivariée.

Exemple 9.25 *La copule de Clayton est générée par la loi fonction de survie conjointe de la loi bivariée Pareto définie en (8.21) à la sous-section 8.5.9 par*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \left(1 + \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2}\right)^{-\alpha}, \; x_1, x_2 \geq 0. \tag{9.6}$$

Comme $\overline{F}_{X_i}(x_i) = \left(1 + \frac{x_i}{\lambda_i}\right)^{-\alpha_i}$, *on déduit que*

$$\overline{F}_{X_i}^{-1}(u_i) = x_i = \lambda_i \left(u_i^{-\frac{1}{\alpha_i}} - 1\right), \tag{9.7}$$

pour $i = 1, 2$. *On remplace (9.7) dans (9.6) et on obtient*

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u_1, u_2) &= \left(1 + \frac{\lambda_1\left(u_1^{-\frac{1}{\alpha_1}} - 1\right)}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2\left(u_2^{-\frac{1}{\alpha_2}} - 1\right)}{\lambda_2}\right)^{-\alpha} \\ &= \left(u_1^{-\frac{1}{\alpha_1}} + u_2^{-\frac{1}{\alpha_2}} - 1\right)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

qui correspond à l'expression de la copule de Clayton. □

La copule EFGM en (9.2) est générée en remplaçant x_i dans la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée exponentielle EFGM en (8.15) par $-\ln(1 - u_i)$, $i = 1, 2$.

La copule Marshall-Olkin est aussi obtenue à partir de la fonction de survie conjointe de la loi exponentielle bivariée Marshall-Olkin. La copule normale est générée par la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée normale et la copule de Student est générée par la fonction de répartition conjointe de la loi bivariée de Student.

9.6.2 Méthode algébrique

Selon la méthode algébrique, on génère la copule comme une perturbation de la copule d'indépendance. Les copules d'Ali-Mikhail-Haq et de Plackett sont des exemples de copules obtenues par la méthode algrébrique. La copule EFGM peut aussi être obtenue par cette méthode.

Selon (9.3), l'expression de la copule Ali-Mikhail-Haq est donnée par

$$C_\alpha(u_1, u_2) = u_1 u_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(1-u_1)(1-u_2))^k,$$

où le premier terme correspond à la copule d'indépendance et le second terme est interprété comme une pertubation de la copule d'indépendance.

9.6.3 Méthode par mélange

On peut générer une copule en prenant une combinaison convexe de plusieurs copules. Par exemple, la copule de Fréchet est une combinaison convexe des copules $C^\perp$, C^- et C^+.

Généralement, on a

$$C_M(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{\theta_i}(u_1, u_2),$$

où C_{θ_1}, ..., C_{θ_n} sont différentes copules et α_1, ..., α_n sont des masses de probabilité telles que α_1, ..., $\alpha_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Exemple 9.26 *Pour tenir compte à la fois de la dépendance aux extrémités des queues à gauche et à droite, on construit une copule à partir des copules de Clayton et de Gumbel par le biais d'un mélange*

$$C(\alpha, \beta) = \alpha C_{\theta_1}^{Clayton}(u_1, u_2) + (1-\alpha) C_{\theta_2}^{Gumbel}(u_1, u_2)$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. □

9.7 Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes constituent une famille importante de copules, qui comprend notamment les copules de Clayton, de Frank, de Gumbel et de Ali-Mikhail-Haq. Les copules de Spearman, de Fréchet, de Cuadras-Augé, de Marshall-Olkin, EFGM, de Plackett et normale ne font pas partie de cette famille.

On définit une copule archimédienne bivariée par le biais d'un générateur ϕ qui doit posséder les propriétés suivantes : $\phi : [0, 1] \to [0, \infty)$

est une fonction continue, strictement décroissante et convexe ; et $\phi(1) = \lim_{t\to 1}\phi(t) = 0$. De plus, si $\phi(0) = \infty$, le générateur est dit *strict* et l'inverse ϕ^{-1} de ϕ existe. Autrement, on a recours à la fonction pseudo-inverse de ϕ qui est définie par

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \le t \le \phi(0) \\ 0, & \phi(0) < t < \infty \end{cases}.$$

Une copule C est dite archimédienne si

$$C(u_1, u_2) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \phi(u_2)). \tag{9.8}$$

Si le générateur ϕ est strict, alors (9.8) devient

$$C(u_1, u_2) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)). \tag{9.9}$$

Soit $\phi(t) = -\ln(t)$ qui est un générateur strict avec $\phi^{[-1]}(t) = \phi^{-1}(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Alors, en appliquant (9.9), on obtient

$$C(u_1, u_2) = \mathrm{e}^{-(-\ln(u_1)-\ln(u_2))} = u_1 u_2,$$

qui correspond avec la copule indépendance.

Les générateurs des copules de Clayton, de Gumbel, de Frank et de Ali-Mikhail-Haq avec les paramètres indiqués ci-dessous sont tous stricts :

- Clayton : $\phi(t) = \frac{(t^{-\alpha}-1)}{\alpha}$, $\alpha > 0$;
- Gumbel : $\phi(t) = \left\{\ln(\frac{1}{t})\right\}^{\alpha}$, $\alpha \ge 1$;
- Frank : $\phi(t) = \ln\left\{\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}-1}{\mathrm{e}^{-\alpha t}-1}\right\}$, $\alpha > 0$;
- Ali-Mikhail-Haq : $\phi(t) = \ln\left(\frac{1-\alpha(1-t)}{t}\right)$, $\alpha \in [-1, 1)$.

Si le générateur n'est pas strict, alors la copule est de la forme

$$C(u_1, u_2) = \max(...; 0)$$

introduisant une composante singulière. Par exemple, le générateur $\phi(t) = \frac{(t^{-\alpha}-1)}{\alpha}$ n'est pas strict pour $\alpha \in [-1, 0)$ et il conduit à la version généralisée de la copule de Clayton qui est donnée par

$$C(u_1, u_2) = \left(\max\left(u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1; 0\right)\right)^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{9.10}$$

D'après (9.10) et avec $\alpha \in [-1, 0)$, la relation de dépendance entre les composantes du couple est négative. De plus, si $\alpha = -1$, la copule en (9.10) devient la copule borne inférieure de Fréchet.

On peut consulter [85] pour une liste plus importante de copules archimédiennes

9.8 Copules elliptiques

La famille des copules elliptiques comprend notamment la copule normale et la copule de Student. Elles sont couramment utilisées en finance. Elles se caractérisent par des graphiques en points de forme elliptique. L'étude des propriétés de cette famille n'est pas abordée dans cet ouvrage.

9.9 Méthodes d'agrégation de risques dépendants

9.9.1 Introduction

Les méthodes d'agrégation se regroupent en quelques catégories : bornes inférieures et supérieures, expressions exactes, méthodes basées sur la simulation et méthodes numériques. On a déjà présenté les méthodes de simulation. Dans cette section, on aborde l'évaluation de bornes minimale et maximale pour la VaR, la méthode fondée sur la discrétisation et la méthode des carrés.

9.9.2 Bornes minimale et maximale pour la VaR

On examine les bornes stochastiques pour une somme finie de v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 2$. On se limite au cas $n = 2$.

En pratique, il advient qu'on puisse modéliser de façon adéquate les comportements marginaux de deux risques mais qu'il soit difficile de spécifier la relation de dépendance entre deux risques en raison d'un manque d'information. Cela peut survenir dans le contexte de risques environnementaux notamment.

Dans cette section, on présente les bornes minimale et maximale de F_S sans spécifier la relation de dépendance entre les v.a. X_1 et X_2. L'intérêt de ces bornes est qu'elles permettent d'obtenir des bornes pour $VaR_\kappa(S)$, pour $\kappa \in]0,1[$. Ce problème aurait été formulé par Kolmogorov.

Soit une v.a. X avec fonction de répartition F_X. On définit la limite à gauche par $F_X^-(x) = \Pr(X < x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 9.27 *Soient deux v.a. X_1 et X_2 avec fonctions de répartition F_{X_i} et limite à gauche $F_{X_i}^-$, $i = 1, 2$. Alors, on a*

$$F_S^{\min}(s) \leq F_S(s) \leq F_S^{\max}(s),$$

où

$$\begin{aligned} F_S^{\min}(s) &= \inf_{x\in\mathbb{R}} \max\left(F_{X_1}^-(x) + F_{X_2}^-(s-x) - 1; 1\right) \\ F_S^{\max}(s) &= \inf_{x\in\mathbb{R}} \min\left(F_{X_1}(x) + F_{X_2}(s-x); 1\right), \end{aligned}$$

pour $s \in \mathbb{R}$. Ces bornes sont les meilleures pour chaque point s. Ce résultat se traduit comme suit :

$$\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S), \ \kappa \in]0,1[,$$

où

$$\begin{aligned} \underline{VaR}_\kappa(S) &= \sup_{\max(u_1+u_2-1;0)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\ &= \sup_{u\in[0,\kappa]} \left\{F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(\kappa-u)\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{VaR}_\kappa(S) &= \inf_{\max(u_1+u_2-1;0)=\kappa} \left\{F_{X_1}^{-1}(u_1) + F_{X_2}^{-1}(u_2)\right\} \\ &= \inf_{u\in[\kappa,1]} \left\{F_{X_1}^{-1}(u) + F_{X_2}^{-1}(1-(\kappa-u))\right\}. \end{aligned}$$

Preuve. Voir e.g. [25] ou [106]. ■

On obtient des expressions explicites pour $F_S^{\min}(s)$ et $F_S^{\max}(s)$ lorsque les marginales sont des lois exponentielles.

Exemple 9.28 ***Lois exponentielles.*** *Soient les v.a. $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{\gamma_i}\right)$, $i = 1,2$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Alors, on a $\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \overline{VaR}_\kappa(S)$ pour $\kappa \in]0,1[$ où*

$$\begin{aligned} \underline{VaR}_\kappa(S) &= -\max(\gamma_1;\gamma_2)\ln(1-\kappa), \\ \overline{VaR}_\kappa(S) &= -(\gamma_1+\gamma_2)\ln(1-\kappa) + (\gamma_1+\gamma_2)\ln(\gamma_1+\gamma_2) \\ &\quad -\gamma_1\ln(\gamma_1) - \gamma_2\ln(\gamma_2). \end{aligned}$$

Les détails des calculs sont fournis dans [25]. □

L'exemple suivant applique les résultats de l'exemple 9.28.

Exemple 9.29 *Soit le couple de (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est inconnue et dont les marginales sont $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, $i = 1,2$. Soient les couples de v.a. $\left(X_1^-, X_2^-\right)$, $\left(X_1^\perp, X_2^\perp\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ où les composantes sont respectivement antimonotones, indépendantes et comonotones et où les marginales sont identiques à celles de X_1 et X_2. On définit les v.a. $S = X_1 + X_2$, $S^- = X_1^- + X_2^-$, $S^\perp = X_1^\perp + X_2^\perp$ et $S^+ = X_1^+ + X_2^+$. Selon*

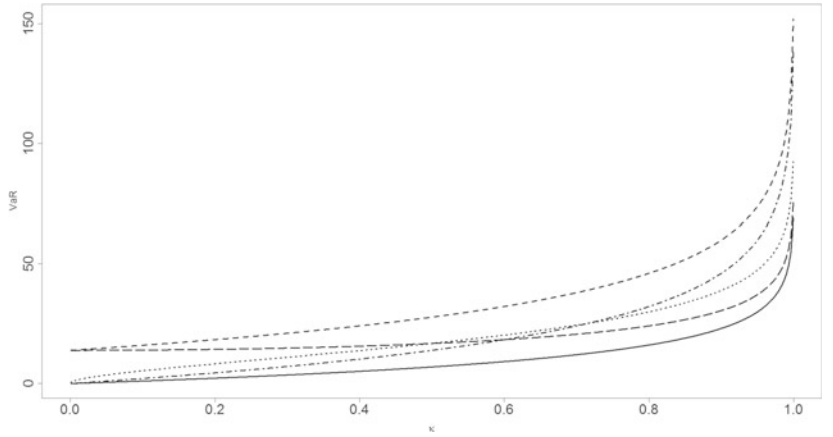

FIGURE 9.14. Valeurs $\underline{VaR}_\kappa(S)$, $\overline{VaR}_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S^-)$, $VaR_\kappa(S^\perp)$ et $VaR_\kappa(S^+)$.

l'exemple 8.17, on a

$$VaR_\kappa(S^-) = -10\ln\left(1-\frac{1-\kappa}{2}\right) + -10\ln\left(\frac{1-\kappa}{2}\right).$$

D'après l'exemple 8.11, on a

$$VaR_\kappa(S^+) = -2\times 10\ln(1-\kappa).$$

Comme $S^\perp \sim Erl\left(2,\frac{1}{10}\right)$, *on a* $VaR_\kappa(S^\perp) = H^{-1}\left(\kappa;2,\frac{1}{10}\right)$.

À la figure 9.14, on représente sur graphiques les valeurs $\underline{VaR}_\kappa(S)$, $\overline{VaR}_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(S^-)$, $VaR_\kappa(S^\perp)$ *et* $VaR_\kappa(S^+)$ *dont quelques unes sont aussi fournies dans le tableau ci-dessous :*

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$VaR_\kappa(S^-)$	$VaR_\kappa(S^\perp)$	$VaR_\kappa(S^+)$
0.5	*6.9315*	*27.7259*	*16.7398*	*16.7835*	*13.8629*
0.95	*29.9573*	*73.7776*	*37.1420*	*47.4386*	*59.9146*
0.99	*46.0517*	*105.9663*	*53.0333*	*66.3835*	*92.1034*
0.995	*52.9832*	*119.8293*	*59.9397*	*74.3013*	*105.9663*
0.999	*69.0776*	*152.0180*	*76.0140*	*92.3341*	*138.1551*

. □

Des expressions explicites pour $F_S^{\min}(s)$ et $F_S^{\max}(s)$ sont aussi produites quand les marginales sont des lois de Pareto.

Exemple 9.30 ***Lois de Pareto.*** *Soient les v.a.* $X_i \sim Pa(\alpha,\lambda_i)$, $i=1,2$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *Alors, on a* $\underline{VaR}_\kappa(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq$

$\overline{VaR}_\kappa(S)$ *pour* $\kappa \in]0,1[$ *où*

$$\begin{aligned}\underline{VaR}_\kappa(S) &= \max(\lambda_1;\lambda_2)\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)\\ \overline{VaR}_\kappa(S) &= \widetilde{\lambda}\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)+\widetilde{\lambda}-\lambda_1-\lambda_2,\end{aligned}$$

où $\widetilde{\lambda} = \left(\lambda_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}+\lambda_1^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$. *À nouveau, les détails des calculs sont présentés dans [25].* □

On met en application dans le prochain exemple les résultats de l'exemple 9.30.

Exemple 9.31 *Soient les v.a.* $X_i \sim Pa(1.5,1)$, $i=1,2$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $\underline{VaR}_\kappa(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa(S)$. *De plus, on présente les valeurs de* $VaR_\kappa(S)$ *en supposant la comonotonicité entre les 2 v.a. :*

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$VaR_\kappa(S)$ *comon.*
0.5	*0.5874*	*3.0397*	*1.1748*
0.95	*6.3681*	*21.3921*	*12.7361*
0.99	*20.5443*	*66.3990*	*41.0887*
0.995	*33.1995*	*106.5767*	*66.3990*
0.999	*99.0000*	*315.4802*	*198.0000*

□

Il est rare que l'on puisse obtenir des expressions explicites pour $F_S^{\min}(s)$, $F_S^{\max}(s)$, $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$. Il est toutefois possible de recourir à la méthode numérique suivante pour évaluer approximativement $F_S^{\min}(s)$, $F_S^{\max}(s)$, $\underline{VaR}_\kappa(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa(S)$.

Pour simplifier la présentation, on suppose que F_{X_1} et F_{X_2} sont continues. On fixe un entier n (très grand de préférence) et $\varepsilon > 0$ (très petit de préférence). Alors, on a

$$\underline{VaR}_{\frac{k}{n}}^{(n)}(S) = \sup_{j=0,1,\ldots,k}\left\{F_{X_1}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)+F_{X_2}^{-1}\left(\frac{k-j}{n}\right)\right\}$$

et

$$\overline{VaR}_{\frac{k}{n}}^{(n)}(S) = \inf_{j=k,k+1,\ldots,n}\left\{F_{X_1}^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)+F_{X_2}^{-1}\left(1-\frac{(j-k)}{n}\right)\right\}.$$

Dans le cas où la distribution de X_i est définie sur un support borné $[a_i,b_i]$, alors $F_{X_i}^{-1}(0)=a_i$ et $F_{X_i}^{-1}(1)=b_i$ pour $i=1,2$. Par contre, si le support de la distribution de X_i n'est pas borné, alors on fixe $F_{X_i}^{-1}(0) \simeq F_{X_i}^{-1}(0+\varepsilon)$ et $F_{X_i}^{-1}(1) \simeq F_{X_i}^{-1}(1-\varepsilon)$.

Exemple 9.32 *Soient les v.a.* $X_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$, $i = 1, 2$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$ *avec* $E[S] = 10$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs exactes de* $\underline{VaR}_\kappa(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa(S)$ *ainsi que les valeurs de* $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *pour* $n = 10^6$ *:*

κ	$\underline{VaR}_\kappa(S)$	$\overline{VaR}_\kappa(S)$	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.5	*6.9315*	*27.7259*	*6.9315*	*27.7259*
0.95	*29.9573*	*73.7776*	*29.9573*	*73.7776*
0.99	*46.0517*	*105.9663*	*46.0517*	*105.9663*
0.995	*52.9833*	*119.8293*	*52.9832*	*119.8293*
0.999	*69.0776*	*152.0180*	*69.0776*	*152.0180*

On constate que les valeurs approximatives sont identiques aux valeurs exactes à la 4^e *décimale près. De plus, il est important de mentionner que les valeurs de* $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *sont très faciles à calculer en* `R`. □

Exemple 9.33 *Soient les v.a.* $X_i \sim Pa(\alpha_i, 10(\alpha_i - 1))$, $i = 1, 2$, *avec* $\alpha_1 = 1.5$, $\alpha_2 = 1.8$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$ *avec* $E[S] = 10$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *pour* $n = 10^6$ *:*

κ	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.5	*3.7579*	*16.8553*
0.95	*34.2556*	*107.4999*
0.99	*102.7217*	*308.4762*
0.995	*165.9976*	*478.3064*
0.999	*495.0000*	*1307.0970*

□

Exemple 9.34 *Soient les v.a.* $X_i \sim LN\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, 2$ *(avec* $\mu_1 = 0.06$, $\mu_2 = 0.07$, $\sigma_1 = 0.2$, $\sigma_2 = 0.3$*) où* X_i *représente la valeur à la fin d'une période d'un montant 1 investi au début de la période dans le titre* i, *pour* $i = 1, 2$. *La valeur totale du portefeuille à la fin de la période est représentée par la v.a.* $S = X_1 + X_2$, *où* $E[S] = 2.2052$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs de* $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *et* $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ *pour* $n = 10^6$ *:*

κ	$\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$	$\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$
0.0001	*0.8215*	*2.0898*
0.001	*0.9496*	*2.0906*
0.01	*1.1299*	*2.0984*
0.5	*1.8187*	*2.5089*
0.99	*2.7082*	*4.0802*
0.999	*3.1924*	*4.9054*

Par exemple, les valeurs approximatives des bornes inférieure et supérieure de la $VaR_{0.01}(S)$ *sont 1.1299 et 2.0984.* □

9.9.3 Méthode avec discrétisation

On considère un couple de v.a. continues (X_1, X_2) dont la structure de dépendance est définie par une copule C et les marginales continues F_{X_1} et F_{X_2} i.e.

$$F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right).$$

On définit $S = X_1 + X_2$ et on veut évaluer $F_S(s)$ pour $s \in \mathbb{R}$. La fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = c\left(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)\right) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2).$$

On sait que la fonction de densité de S s'exprime en termes de f_{X_1,X_2} avec

$$f_S(s) = \int_0^s f_{X_1,X_2}(x_1, s - x_1)\,\mathrm{d}x_1.$$

De plus, on déduit que $F_S(s) = \int_0^s f_S(t)\,\mathrm{d}t$. Néanmoins, la tâche est impossible pour la majorité des copules à moins de recourir à l'intégration numérique (en utilisant par exemple un logiciel tel que Maple®).

On explique une méthode basée sur la discrétisation des marginales F_{X_1} et F_{X_2}. L'idée est d'évaluer approximativement les v.a. continues X_1 et X_2 par des v.a. discrètes $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ où

$$\widetilde{X}_i \in \{0h, 1h, 2h, ...\},$$

pour $i = 1, 2$ et pour un pas de discrétisation $h > 0$. On choisit une méthode de discrétisation parmi celles qui sont expliquées au chapitre 6. La fonction de répartition conjointe $F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}$ de $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$ est définie en fonction de la même copule C que celle qui est associée à F_{X_1,X_2} et des fonctions de répartition marginales $F_{\widetilde{X}_i}(x_i)$ de $\widetilde{X}_i$ $(i = 1, 2)$:

$$F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = C\left(F_{\widetilde{X}_1}(k_1h), F_{\widetilde{X}_2}(k_2h)\right),$$

pour k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$.

Les valeurs de la fonction de masse de probabilité de $\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2\right)$,

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1h, k_2h) = \Pr\left(\widetilde{X}_1 = k_1h, \widetilde{X}_2 = k_2h\right),$$

sont déterminées comme suit. Pour $k_1 = 0, k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, 0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, 0).$$

Pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 = 0$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, 0) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, 0) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, 0).$$

Pour $k_1 = 0$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, k_2 h) = F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, k_2 h) - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(0, (k_2 - 1)h).$$

Enfin, pour $k_1 \in \mathbb{N}^+$ et $k_2 \in \mathbb{N}^+$, on a

$$\begin{aligned} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) &= F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, k_2 h) \\ &\quad - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(k_1 h, (k_2 - 1)h) \\ &\quad - F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, k_2 h) \\ &\quad + F_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}((k_1 - 1)h, (k_2 - 1)h). \end{aligned}$$

On approxime la v.a. S par la $\widetilde{S} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 \in \{0h, 1h, 2h, ...\}$. La fonction de masse de probabilité de $\widetilde{S}$ est donnée par

$$f_{\widetilde{S}}(kh) = \sum_{j=0}^{k} f_{\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2}(jh, (k-j)h),$$

pour $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, il est aisé de calculer $F_{\widetilde{S}}(kh)$ et toutes fonctions de $\widetilde{S}$, notamment les mesures de risque $VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ et $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$.

Exemple 9.35 *On suppose que $X_i \sim Pa(\alpha_i, \lambda_i)$ avec $\lambda_1 = 11$, $\lambda_2 = 12$, $\alpha_1 = 2.1$, $\alpha_2 = 2.2$. On définit $S = X_1 + X_2$. La fonction de répartition conjointe de (X_1, X_2) est $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$, où $C(u_1, u_2)$ est une copule de Clayton avec paramètre de dépendance $\alpha = 10$. On discrétise les variables aléatoires X_1 et X_2 jusqu'à 5000 avec les trois méthodes de discrétisation et un pas de $h = 1$ pour évaluer la fonction de répartition de S. Le tableau suivant présente les valeurs des VaR obtenues avec les trois méthodes d'arithmétisation :*

κ	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$upper	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$*dispersion*	$VaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$ lower
0.95	*72*	*73*	*74*
0.995	*215*	*216*	*217*

□

9.9.4 Méthode des carrés

Soit le couple de v.a. positives continues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2}. On présente la méthode des carrés pour évaluer F_S où $S = X_1 + X_2$. Cette méthode est une variante simplifiée de la méthode AEP proposée par [3]. Évaluer $F_S(s)$ revient à évaluer la probabilité que (X_1, X_2) prenne valeur dans le triangle dont les coordonnées dans le plan

cartésien sont $(0,0)$, $(0,s)$ et $(s,0)$. L'idée de la méthode des carrés est de recouvrir la surface triangulaire par des carrés. On définit la probabilité attribuée au carré $(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]$ par

$$\begin{aligned}\zeta_{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]} &= \triangle_{a_1,b_1}\triangle_{a_2,b_2}F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\\ &= \Pr(a_1<X_1\leq b_1, a_2<X_2\leq b_2).\end{aligned}$$

À la première étape, on commence par évaluer approximativement $F_S(s)$ par $\varphi_1(s)=\zeta_{(0,\frac{s}{2}]\times(0,\frac{s}{2}]}$, la probabilité que (X_1,X_2) se trouve dans le carré $\left(0,\frac{s}{2}\right]\times\left(0,\frac{s}{2}\right]$. À la deuxième étape, on ajoute la probabilité que (X_1,X_2) prenne valeur dans

$$\left(0,\frac{1s}{4}\right]\times\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{4}\right]\cup\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}+\frac{s}{4}\right]\times\left(0,\frac{1s}{4}\right]$$

et l'approximation devient

$$\varphi_2(s)=\varphi_1(s)+\zeta_{\left(0,\frac{1s}{4}\right]\times\left(\frac{2s}{4},\frac{2s}{4}+\frac{1s}{4}\right]}+\zeta_{\left(\frac{2s}{4},\frac{2s}{4}+\frac{1s}{4}\right]\times\left(0,\frac{1s}{4}\right]}.$$

À la troisième étape, on a

$$\begin{aligned}\varphi_3(s) &= \varphi_2(s)+\zeta_{\left(0,\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{6s}{8},\frac{6s}{8}+\frac{1s}{8}\right]}+\zeta_{\left(\frac{2s}{8},\frac{2s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{4s}{8},\frac{4s}{8}+\frac{1s}{8}\right]}\\ &\quad+\zeta_{\left(\frac{4s}{8},\frac{4s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{2s}{8},\frac{2s}{8}+\frac{1s}{8}\right]}+\zeta_{\left(\frac{6s}{8},\frac{6s}{8}+\frac{1s}{8}\right]\times\left(\frac{0s}{8},\frac{0s}{8}+\frac{1s}{8}\right]}.\end{aligned}$$

Bref, on déduit la relation récursive

$$\varphi_m(s)=\varphi_{m-1}(s)+\sum_{j=0}^{2^{m-1}-1}\zeta_{\left(\frac{2js}{2^m},\frac{2js}{2^m}+\frac{s}{2^m}\right]\times\left(\frac{2\left(2^{m-1}-1-j\right)s}{2^m},\frac{2\left(2^{m-1}-1-j\right)s}{2^m}+\frac{s}{2^m}\right]},$$

pour $m=1,2,...$ avec $\varphi_0(s)=0$. Il est aussi possible d'écrire

$$\varphi_m(s)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\zeta_{\left(\frac{2js}{2^k},\frac{2js}{2^k}+\frac{s}{2^k}\right]\times\left(\frac{2\left(2^{k-1}-1-j\right)s}{2^k},\frac{2\left(2^{k-1}-1-j\right)s}{2^k}+\frac{s}{2^k}\right]}.$$

La contruction des carrés est illustrée à la figure 9.15.

Pour tout s, $\varphi_m(s)$ va tendre vers $F_S(s)$, lorsque $m\longrightarrow\infty$. On évalue approximativement $F_S(s)$ par $\varphi_m(s)$ pour m élevé, en choisissant m de telle sorte que la différence $\varphi_m(s)-\varphi_{m-1}(s)$ soit inférieure au degré de précision choisi ε. La valeur de m dépend de s et ε. Étant donné la construction de l'approximation, on mentionne que $\varphi_m(s)\leq F_S(s)$ et qu'il en résulte que $VaR_\kappa(S)\leq\phi_m^{-1}(\kappa)$.

Exemple 9.36 *On considère le couple de v.a.* (X_1,X_2) *dont la loi conjointe est définie par la copule de Frank avec un paramètre de*

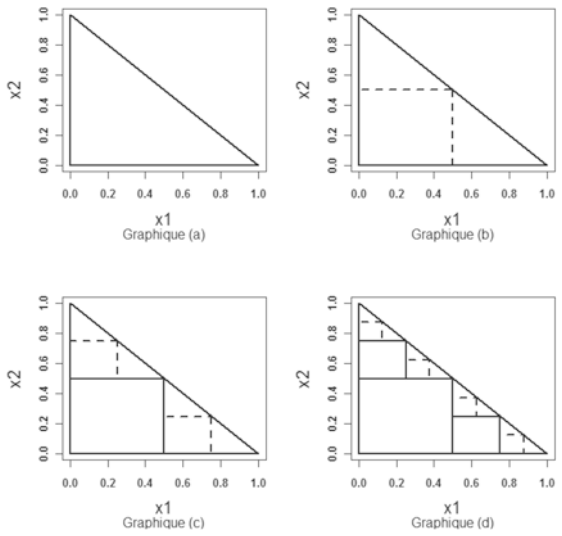

FIGURE 9.15. La méthode des carrés est illustrée pour les étapes 1 (graphique b), 2 (graphique c) et 3 (graphique d).

dépendance α *et les deux marginales de* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 \sim X_2 \sim Exp(1)$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On sait que* $E[S] = 2$, $VaR_{0.995}(X_1) = VaR_{0.995}(X_2) = 5.298317$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs* exactes *de* $VaR_{0.995}(S)$ *(obtenues avec* Maple® *pour* $\alpha = -10$ *et 10) et les valeurs obtenues de* $\varphi_m(VaR_{0.995}(S))$ *avec la méthode des carrés :*

α	$VaR_{0.995}(S)$	$m=1$	$m=10$	$m=19$	$m=20$
-10	*6.11728655*	*0.9060989*	*0.9949849*	*0.995*	*0.995*
10	*9.08023745*	*0.9796857*	*0.9949826*	*0.995*	*0.995*

On constate que la convergence est fort satisfaisante. □

Exemple 9.37 *On considère le couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont la loi conjointe est définie par la copule de Frank avec un paramètre de dépendance* α *et les deux marginales de* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 \sim Pa(1.5, 0.5)$ *et* $X_2 \sim Pa(1.8, 0.8)$. *On définit la v.a.* $S = X_1 + X_2$. *On déduit que* $E[S] = 2$. *Dans le tableau ci-dessous, on indique les valeurs obtenues* $\varphi_m(VaR_{0.995}(S))$ *avec la méthode des carrés et en fixant* $VaR_{0.995}(S) \simeq \phi_{20}^{-1}(0.995)$ *:*

α	$VaR_{0.995}(S)$	$m=1$	$m=10$	$m=19$	$m=20$
-10	*23.99940*	*0.9851983*	*0.9949958*	*0.995*	*0.995*
10	*27.86633*	*0.9885939*	*0.9949958*	*0.995*	*0.995*

À nouveau, la convergence de l'approximation est satisfaisante. □

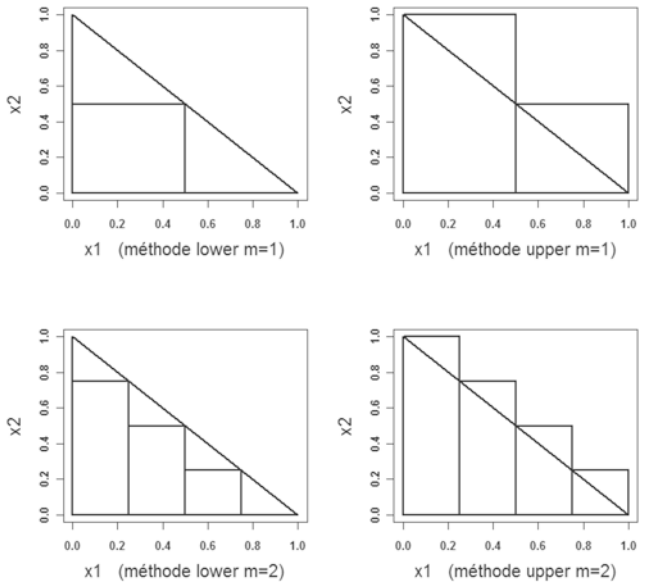

FIGURE 9.16. Illustration des méthodes *lower* et *upper* des rectangles pour $m = 1$ et $m = 2$.

9.9.5 Méthodes des rectangles

Soit le couple de v.a. positives continues (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est F_{X_1,X_2}. On définit $S = X_1 + X_2$. Deux approximations de $F_S(s)$, que l'on appelle les méthodes *lower* et *upper* des rectangles, sont aussi construites en recouvrant la surface triangulaire par des rectangles.

Selon la méthode *lower* des rectangles, on additionne les masses de probabilité associées aux $2^m - 1$ rectangles se trouvant en-dessous de la diagonale $x_1 + x_2 = s$ et on produit l'approximation $A_S^{(l,m)}(s)$ de $F_S(s)$ donnée par

$$\begin{aligned} & A_S^{(l,m)}(s) \\ = & \sum_{i=1}^{2^m-1} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s \right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{(i-1)}{2^m}s, \frac{2^m-i}{2^m}s \right) \right). \end{aligned}$$

De même, pour la méthode *upper* des rectangles, on fait la somme des masses de probabilité associées aux 2^m rectangles se trouvant en-dessus de la diagonale $x_1 + x_2 = s$ menant à l'approximation $A_S^{(u,m)}(s)$ de $F_S(s)$ qui

est définie par

$$\begin{aligned} & A_S^{(u,m)}(s) \\ = & \sum_{i=1}^{2^m} \left(F_{X_1,X_2}\left(\frac{i}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s \right) - F_{X_1,X_2}\left(\frac{i-1}{2^m}s, \frac{2^m+1-i}{2^m}s \right) \right). \end{aligned}$$

Les méthodes *lower* et *upper* des rectangles sont illustrées à la figure 9.16 pour $m=1$ et $m=2$. Clairement, on a

$$A_S^{(l,m)}(s) \leq A_S^{(l,m+k)}(s) \leq F_S(s) \leq A_S^{(u,m+k)}(s) \leq A_S^{(u,m)}(s), \quad (9.11)$$

pour $s \geq 0$ et $m, k \in \mathbb{N}^+$. De plus, on a

$$\lim_{m\to\infty} A_S^{(l,m)}(s) \to F_S(s) \text{ et } \lim_{m\to\infty} A_S^{(u,m)}(s) \to F_S(s).$$

Si on définit

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(l,m)}(S) = \inf\left\{ s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(l,m)}(s) \geq \kappa \right\}$$

et

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(u,m)}(S) = \inf\left\{ s \in \mathbb{R}^+, A_S^{(u,m)}(s) \geq \kappa \right\},$$

alors l'inégalité

$$\widetilde{VaR}_\kappa^{(u,m)}(S) \leq VaR_\kappa(S) \leq \widetilde{VaR}_\kappa^{(l,m)}(S) \quad (9.12)$$

est satisfaite pour $0 < \kappa < 1$.

Exemple 9.38 *On considère le couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance* $\alpha = 4$ *et les deux marginales de* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 \sim Exp(0.1)$ *et* $X_2 \sim Exp(0.2)$. *Les valeurs obtenues pour les deux approximations (avec* $m = 20$*) de* $F_S(s)$ *où* $S = X_1 + X_2$ *sont présentées dans le tableau suivant :*

s	$A_S^{(l,m)}(s)$	$A_S^{(u,m)}(s)$
5	*0.2713069*	*0.2713072*
10	*0.4656194*	*0.4656197*
20	*0.7184929*	*0.7184933*
30	*0.8632002*	*0.8632005*
50	*0.9753317*	*0.9753318*
100	*0.9998158*	*0.9998158*

□

Exemple 9.39 *On considère le couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont la loi conjointe est définie par la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance* $\alpha = 4$ *et les deux marginales de* X_1 *et* X_2 *où* $X_1 \sim Pareto\,(0.9, 1)$ *et* $X_2 \sim Pareto\,(1.8, 1)$. *On reproduit dans le tableau suivant les valeurs des deux approximations (avec* $m = 20$*) de* $F_S\,(s)$ *où* $S = X_1 + X_2$ *:*

s	$A_S^{(l,m)}\,(s)$	$A_S^{(u,m)}\,(s)$
1	*0.3158349*	*0.3158351*
100	*0.9836904*	*0.9836904*
10000	*0.9997487*	*0.9997487*
1000000	*0.9999960*	*0.9999960*

Cet exemple est suggéré par [3]. □

Pour m et s fixés, la méthode des carrés et la méthode *lower* des rectangles produisent des valeurs identiques. Les deux méthodes des rectangles sont très simples d'application. Comme l'indiquent (9.11) et (9.12), ces méthodes permettent d'encadrer la valeur exacte de $F_S\,(s)$ et $VaR_\kappa\,(S)$.

9.9.6 Commentaires sur la méthode avec discrétisation et la méthode des carrés

La méthode avec discrétisation permet d'évaluer toute fonction de (X_1, X_2) alors que, dans sa forme actuelle, la méthode des carrés sert à évaluer F_S et de déduire la $VaR_\kappa\,(S)$. Pour les deux méthodes, il est possible de s'approcher de la valeur exacte avec un degré voulu de précision. Dans [3], on présente la méthode AEP, une généralisation plus performante de la méthode des carrés, améliorant la vitesse de convergence de l'approximation. Décrites dans [15], les deux méthodes des rectangles ont l'avantage d'approcher de la valeur exacte avec le degré voulu de précision tout en produisant des bornes inférieure et supérieure pour cette valeur.

9.10 Mesures de dépendance

Il existe différentes mesures pour quantifier la relation de la dépendance ou l'association entre deux v.a. X_1 et X_2. Dans cette section, on présente brièvement la mesure de corrélation linéaire, deux mesures de corrélation de rangs et deux mesures de dépendance de queue.

On débute en indiquant les propriétés souhaitables pour une mesure de dépendance.

Propriétés 9.40 *Les propriétés désirables pour une mesure de dépendance* $\pi(X_1, X_2)$ *sont les suivantes :*

1. *Symétrie :* $\pi(X_1, X_2) = \pi(X_2, X_1)$;
2. *Normalisation :* $-1 \leq \pi(X_1, X_2) \leq 1$;
3. *Comonotonicité :* $\pi(X_1, X_2) = 1$ *si et seulement si* X_1 *et* X_2 *sont comonotones ;*
4. *Antimonotonicité :* $\pi(X_1, X_2) = -1$ *si et seulement si* X_1 *et* $-X_2$ *sont comonotones (ou* X_1 *et* X_2 *sont antimonotones) ;*
5. *Invariance : pour toute fonction strictement monotone* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\pi(\phi(X_1), X_2) = \begin{cases} \pi(X_1, X_2), \text{ si } \phi \text{ est croissante} \\ -\pi(X_1, X_2), \text{ si } \phi \text{ est décroissante} \end{cases}.$$

9.10.1 Mesure de corrélation linéaire

La définition du coefficient de corrélation de Pearson est fournie au chapitre 1. Le coefficient de corrélation de Pearson mesure la relation de dépendance linéaire entre les v.a. X_1 et X_2. En effet, si $X_2 = a + bX_1$ et $b > 0$, alors

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\,\text{Var}(X_2)}} = \frac{b\text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\, b^2 \text{Var}(X_1)}} = 1.$$

Au contraire, si l'on suppose que $X_2 = a + bX_1$ avec $b = -c$ où $c > 0$, il en résulte que

$$\rho_P(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\,\text{Var}(X_2)}} = \frac{-c\text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1)\, c^2 \text{Var}(X_1)}} = -1.$$

Le coefficient de corrélation de Pearson est invariant par rapport aux transformations linéaires. Soient deux scalaires b_1, $b_2 > 0$. Alors, on a

$$\rho_P(a_1 + b_1 X_1, a_2 + b_2 X_2) = \rho_P(X_1, X_2).$$

Toutefois, il ne permet pas de mesurer adéquatement la concordance (ou l'association) entre deux v.a. Il existe des mesures dites invariantes au changement d'échelle, dont les deux plus populaires sont le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Il y a plusieurs problèmes de perception liés au coefficient de corrélation de Pearson. Notamment, il est faux de croire que les marginales et la corrélation pour un couple de v.a. déterminent leur distribution conjointe.

En effet, il est possible de construire différentes distributions pour le couple (X_1, X_2) à partir des mêmes marginales F_{X_1} et F_{X_2} et de différentes copules. De plus, il est important de souligner que la valeur du coefficient de corrélation de Pearson dépend des marginales.

Il est aussi erroné de croire que, pour toutes marginales F_1 et F_2 et pour tout coefficient de corrélation $\rho_P(X_1, X_2) \in [-1, 1]$, il est toujours possible de construire une fonction de répartition conjointe dont les marginales sont F_1 et F_2 et la corrélation $\rho_P(X_1, X_2)$.

Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson ne satisfait pas toutes les propriétés désirables d'une mesure de dépendance, soient celles qui sont liées à la comonotonicité, l'antimonotonicité et l'invariance.

Proposition 9.41 *Soit un couple de v.a.* (X_1, X_2) *dont les marginales ont des espérances et des variances finies ainsi qu'une fonction de répartition non spécifiée. Alors, on a*

1. *les valeurs atteignables de* $\rho_P(X_1, X_2)$ *sont comprises dans l'intervalle*

$$\left[\rho_P^{\min}, \rho_P^{\max}\right] \subseteq [-1, 1] \ ;$$

2. *la valeur* $\rho_P^{\min}$ *est atteinte si et seulement si les v.a.* X_1 *et* $-X_2$ *sont comonotones ;*

3. *la valeur* $\rho_P^{\max}$ *est atteinte si et seulement si les v.a.* X_1 *et* X_2 *sont comonotones.*

Preuve. Voir e.g. [33] et [81]. ■

Si les v.a. (X_1, X_2) sont non corrélées linéairement i.e. $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, cela n'implique pas qu'elles soient indépendantes.

L'exemple suivant fournit une illustration d'un cas où $\rho_P(X_1, X_2)$ est strictement inférieur à 1 bien que X_1 et X_2 soient comonotones.

Exemple 9.42 *Soit le couple de v.a. comonotones* (X_1, X_2) *où* $X_1 \sim Exp(1)$ *et* $X_2 \sim U(0, 1)$. *On a* $X_1 = -\ln(1 - U)$ *et* $X_2 = U = 1 - \exp(-X_1)$. *Tout d'abord, on déduit*

$$E[X_1 X_2] = E[X_1 (1 - \exp(-X_1))] = E[X_1] - E[X_1 \exp(-X_1)],$$

où

$$E[X_1 \exp(-X_1)] = \int_0^\infty x \exp(-x) \exp(-x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Il en résulte que $E[X_1 X_2] = \frac{3}{4}$ *et* $\rho_P(X_1, X_2) = \frac{1}{4}\sqrt{12} = 0.866$. □

Dans l'exemple suivant, on calcule les bornes pour $\rho_P(X_1, X_2)$ dans le cas où les marginales obéissent à des lois lognormales.

Exemple 9.43 *Soient les v.a.* $X_i \sim LN\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$ *pour* $i = 1, 2$. *Si* (X_1, X_2) *forme un couple de v.a. comonotones ou antimonotones, on déduit que*

$\rho_P^+(X_1,X_2) = \frac{(e^{\sigma_1\sigma_2}-1)}{\sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}}$ *ou* $\rho_P^-(X_1,X_2) = \frac{\left(e^{-\sigma_1\sigma_2}-1\right)}{\sqrt{\left(e^{\sigma_1^2}-1\right)\left(e^{\sigma_2^2}-1\right)}}$. *Pour* $\sigma_1 = 2$ *et* $\sigma_2 = 3$, *on obtient* $\rho_P^+(X_1,X_2) = 0.6107$ *et* $\rho_P^-(X_1,X_2) = -0.0015$. □

Dans l'exemple suivant, on considère lois conjointes où la corrélation est nulle et on les compare à la loi conjointe avec indépendance.

Exemple 9.44 *Soit une couple de v.a.* (U_1,U_2) *où* $U_i \sim U(0,1)$ $(i=1,2)$ *et avec* $Cov(U_1,U_2) = 0$. *On définit* $S = U_1 + U_2$. *Quatre hypothèses considérées pour la loi conjointe de* (U_1,U_2) *:*

- *hypothèse 1 (copule de Fréchet) :* $F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = \frac{1}{2}\max(u_1+u_2-1;0) + \frac{1}{2}\min(u_1;u_2)$;
- *hypothèse 2 (indépendance) :* $F_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = u_1u_2$;
- *hypothèse 3 :* $U_1 = U$ *et* $U_2 = |2U-1|$ *où* $U \sim U(0,1)$;
- *hypothèse 4 :* $U_1 = U$ *et* $U_2 = 1-|2U-1|$ *où* $U \sim U(0,1)$.

Pour les 4 hypothèses, la valeur de $\rho_P(U_1,U_2)$ *est nulle. Les expressions de* F_S *pour chaque hypothèse sont les suivantes :*

- *hypothèse 1 :* $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$;
- *hypothèse 2 :* $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$;
- *hypothèse 3 :* $F_S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}(2x-1), & \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \frac{x+1}{3}, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$;
- *hypothèse 4 :* $F_S(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{3}(4x-3), & 1 \le x \le \frac{3}{2} \\ 1, & \frac{3}{2} \le x \le 2 \end{cases}$.

Bien que les v.a. U_1 *et* U_2 *soient non-corrélées pour les 4 hypothèses, on constate dans la figure 9.17 que les valeurs de* F_S *diffèrent clairement.* p□

9.10.2 Mesures de corrélation des rangs et concordance

On considère une paire de v.a. continues (X_1,X_2). Les deux principales mesures de corrélation des rangs sont le tau de Kendall et le rho de Spearman.

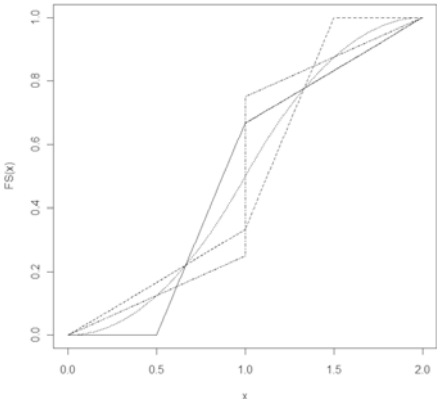

FIGURE 9.17. Courbes de $F_S(s)$ (hypothèse 1 = ligne avec traits et points; hypothèse 2 = ligne pointillée; hypothèse 3 = ligne continue ; hypothèse 4 = ligne avec traits).

Définition 9.45 *Le tau de Kendall associé au couple* (X_1, X_2) *est défini par*

$$\begin{aligned} \tau(X_1, X_2) &= \Pr\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0\right) \\ &\quad - \Pr\left((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0\right), \end{aligned} \tag{9.13}$$

où (X_1', X_2') *est indépendant de* (X_1, X_2) *et possède les mêmes marginales que* (X_1, X_2).

L'interprétation de (9.13) est donnée par

$$\tau(X_1, X_2) = \Pr(\text{concordance}) - \Pr(\text{discordance}).$$

Les valeurs possibles du tau de Kendall sont $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$. Si X_1 et X_2 sont comonotones (antimonotones), cela implique que $\tau(X_1, X_2) = 1$ (-1). De plus, si les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, cela implique que $\tau(X_1, X_2) = 0$. La valeur du tau de Kendall ne dépend pas des marginales du couple (X_1, X_2). Le premier (deuxième) terme mesure la probabilité d'observer des valeurs concordantes (discordantes). Ainsi, plus la relation de dépendance entre (X_1, X_2) est positive (négative) plus la valeur s'approchera de 1 (-1).

Le tau de Kendall est aussi appelé le coefficient de corrélation des rangs de Kendall.

Définition 9.46 *Le rho de Spearman associé au couple* (X_1, X_2) *est défini par*

$$\begin{aligned}\rho_S(X_1, X_2) &= 3\Pr\left(\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) > 0\right) \\ &\quad - 3\Pr\left(\left(X_1 - X_1^{\perp}\right)\left(X_2 - X_2^{\perp}\right) < 0\right),\end{aligned}$$

où $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ *est indépendant de* (X_1, X_2)*,* $\left(X_1^{\perp}, X_2^{\perp}\right)$ *possède les mêmes marginales que* (X_1, X_2) *et les composantes sont indépendantes.*

Les valeurs possibles du rho de Spearman sont $-1 \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq 1$. Si X_1 et X_2 sont comonotones (anti-monotones), cela implique que $\rho_S(X_1, X_2) = 1$ (-1). Dans le cas où les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, cela implique que $\rho_S(X_1, X_2) = 0$. Si la v.a. X_1 a tendance à augmenter (décroître) quand X_2 augmente, alors le rho de Spearman prendra une valeur positive (négative).

Il est possible d'établir un lien entre rho de Spearman et le coefficient de corrélation linéaire de Pearson. En effet, le rho de Spearman correspond à

$$\begin{aligned}\rho_S(X_1, X_2) &= \rho_P\left(F_{X_1}(X_1), F_{X_2}(X_2)\right) \qquad (9.14) \\ &= \frac{E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{\mathrm{Var}(U_1)\mathrm{Var}(U_2)}} \\ &= 12\left(E[U_1U_2] - \frac{1}{4}\right), \qquad (9.15)\end{aligned}$$

où (9.15) est équivalent à

$$\begin{aligned}&\rho_S(X_1, X_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) - F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\right)dF_{X_1}(x_1)\,dF_{X_2}(x_2).\end{aligned}$$

La transformation en (9.14) permet de tenir compte des rangs en éliminant l'effet des marginales.

Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont invariants aux transformations monotones. Si ϕ_1, ϕ_2 sont deux fonctions croissantes, (décroissantes) alors

$$\tau\left(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)\right) = \tau(X_1, X_2)$$

et

$$\rho_S\left(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2)\right) = \rho_S(X_1, X_2).$$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman satisfont les 5 propriétés désirables d'une mesure de dépendance. Cela signifie que le tau de Kendall et le rho de Spearman sont des mesures de concordance. Les v.a. X et Y sont concordantes si les valeurs élevées de l'une tendent à être associées aux

valeurs élevées de l'autre et si les valeurs petites de l'une tendent à être associées aux valeurs petites de l'autre.

Il existe une relation entre le tau de Kendall et le rho de Spearman donnée dans la proposition suivante.

Proposition 9.47 *Soit un couple de v.a. continues* (X_1, X_2).

1. *Pour* $0 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 1$, *on a*

$$\frac{3\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{1 + 2\tau(X_1, X_2) - \tau(X_1, X_2)^2}{2}.$$

2. *Pour* $-1 \leq \tau(X_1, X_2) \leq 0$, *on a*

$$\frac{\tau(X_1, X_2)^2 + 2\tau(X_1, X_2) - 1}{2} \leq \rho_S(X_1, X_2) \leq \frac{3\tau(X_1, X_2) + 1}{2}.$$

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

9.10.3 Mesures de corrélation des rangs et copule

Soit une paire de v.a. continues (X_1, X_2). L'expression en (9.13) du tau de Kendall devient

$$\tau(X_1, X_2) = 2\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - 1.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\Pr((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) &= \Pr(X_1 > X_1', X_2 > X_2') \\ &\quad + \Pr(X_1 < X_1', X_2 < X_2').\end{aligned}$$

On peut montrer que

$$\Pr(X_1 > X_1', X_2 > X_2') = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\, \mathrm{d}C(u_1, u_2)$$

et

$$\Pr(X_1 < X_1', X_2 < X_2') = \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\, \mathrm{d}C(u_1, u_2)$$

Il en résulte que l'on peut s'exprimer le tau de Kendall en fonction de la copule associée à leur distribution conjointe

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= 4\int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2)\, \mathrm{d}C(u_1, u_2) - 1 \\ &= 4E[C(U_1, U_2)] - 1.\end{aligned}$$

En appliquant (9.15), l'expression du rho de Spearman peut aussi s'écrire en fonction de la copule associée

$$\begin{aligned}\rho_S(X_1, X_2) &= 12\left(\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 - \frac{1}{4}\right)\\ &= 12\int_0^1\int_0^1 u_1u_2\mathrm{d}C(u_1, u_2) - 3\\ &= 12E[C(U_1, U_2)] - 1.\end{aligned}$$

On indique dans le tableau ci-dessous les expressions du tau de Kendall et du rho de Spearman associées à certaines copules :

Copule	$\tau(X_1, X_2)$	$\rho_S(X_1, X_2)$
Clayton	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	–
Normale	$\frac{2}{\pi}\arcsin(\alpha)$	$\frac{6}{\pi}\arcsin(\alpha)$
Gumbel	$\frac{\alpha-1}{\alpha}$	–
Fréchet	$\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2)}{3}$	$(\alpha-\beta)$
EFGM	$\frac{2\alpha}{9}$	$\frac{\alpha}{3}$
Marshall-Olkin	$\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\alpha\beta}$	$\frac{3\alpha\beta}{2\alpha+\beta-2\alpha\beta}$

Le tau de Kendall et le rho de Spearman pour une copule donnée sont identiques à ceux de la copule de survie qui lui est associée.

9.10.4 Remarques

On a la remarque suivante concernant l'application de mesures de corrélations des rangs aux v.a. discrètes.

Remarque 9.48 ***Mesures de corrélation des rangs et v.a. discrètes.*** *Il n'est pas possible d'appliquer directement le tau de Kendall et le rho de Spearman pour mesurer la dépendance entre deux v.a. discrètes. Ce sujet n'est pas traité dans le présent ouvrage.*

La prochaine remarque est relative à la relation entre les mesures de dépendance et l'indépendance.

Remarque 9.49 ***Mesures de dépendance et indépendance.*** *Si les v.a. X_1 et X_2 sont indépendantes, on a $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, $\tau(X_1, X_2) = 0$ et $\rho_S(X_1, X_2) = 0$. Toutefois, $\rho_P(X_1, X_2) = 0$, $\tau(X_1, X_2) = 0$ ou $\rho_S(X_1, X_2) = 0$, n'implique pas l'indépendance.*

9.10.5 Dépendance de queue

Afin d'examiner la dépendance de queue d'un couple de v.a. continues (X_1, X_2), on a recours aux coefficients de dépendance de queue.

Définition 9.50 *Le coefficient de dépendance de queue supérieure est défini par*

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 1^-} \Pr\left(X_1 > F_{X_1}^{-1}(\kappa) \,|X_2 > F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right),$$

si cette limite existe.

Définition 9.51 *Le coefficient de dépendance de queue inférieure est défini par*

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lim_{\kappa \to 0^+} \Pr\left(X_1 \leq F_{X_1}^{-1}(\kappa) \,|X_2 \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa)\right),$$

si cette limite existe.

Les coefficients de dépendance de queue sont des mesures locales alors que le tau de Kendall et le rho de Spearman mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution conjointe de la paire (X_1, X_2). Elles sont intéressantes pour analyser l'avènement simultané de valeurs très élevées ou très faibles de (X_1, X_2).

Si $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$, on dit que les v.a. X_1 et X_2 sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution. Si $\lambda_U(X_1, X_2) = 0$, les v.a. X_1 et X_2 sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de la distribution.

De même, si $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$, les v.a. X_1 et X_2 sont asymptotiquement dépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution. Si $\lambda_L(X_1, X_2) = 0$, les v.a. X_1 et X_2 sont dites asymptotiquement indépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution.

Dans le contexte de l'assurance, le concept de dépendance de queue supérieure se révèle important. Soit un portefeuille avec deux lignes d'affaires dont les coûts sont définis par les v.a. X_1 et X_2 avec $\lambda_U(X_1, X_2) \in (0, 1]$. Si un sinistre d'un montant élevé survient dans une ligne d'affaires alors la probabilité est non nulle qu'un sinistre avec un montant élevé survienne dans l'autre ligne d'affaires.

Le concept de dépendance de queue inférieure est aussi important dans le contexte des risques financiers où les v.a. X_1 et X_2 correspondent aux rendements des titres 1 et 2. Si le titre 1 obtient un rendement fortement négatif au cours d'une période et si $\lambda_L(X_1, X_2) \in (0, 1]$, alors la probabilité est non négligeable que le titre 2 enregistre aussi un rendement fortement négatif au cours de la même période.

En fait, pour un couple de v.a. continues (X_1, X_2), les coefficients de dépendance de queue dépendent uniquement de la copule C associée à leur distribution conjointe. Ainsi, on a

$$\lambda_U(X_1, X_2) = \lambda_U = \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u},$$

et

$$\lambda_L(X_1, X_2) = \lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u,u)}{u},$$

si les limites existent.

Pour les principales copules archimédiennes, les expressions des coefficients de dépendance de queue sont :

Famille	λ_L	λ_U
Clayton	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
Frank	0	0
Gumbel	0	$2-2^{\frac{1}{\alpha}}$
Ali-Mikhail-Haq	0	0

Pour la copule de survie associée à la copule C, les valeurs des coefficients de dépendance de queue λ_L et λ_U sont interchangées. Ainsi, pour la copule de survie associée à la copule de Clayton, le coefficient de dépendance de queue inférieure est nul et le coefficient de dépendance de queue supérieure est $2^{-\frac{1}{\alpha}}$.

Pour la copule normale avec $\alpha \in]0,1[$, les coefficients de dépendance de queue sont nuls, i.e. $\lambda_L = \lambda_U = 0$.

En revanche, pour la copule de Student de paramètres ν et α, on a

$$\lambda_L = \lambda_U = 2t_{\nu+1}\left(-\frac{\sqrt{1+\nu}\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha}}\right).$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on observe que $\lambda_L = \lambda_U$ tend vers 0 lorsque ν tend vers ∞.

9.11 Dépendance positive par quadrant

On considère le couple (X_1, X_2) avec fonction de répartition $F_{X_1,X_2} \in \Gamma(F_{X_1}, F_{X_2})$.

Définition 9.52 *On dit que le couple (X_1, X_2) est positivement dépendant par quadrant (PQD) si*

$$\Pr(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1)\Pr(X_2 > x_2),$$

pour x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$. Ainsi, la probabilité que les v.a. X_1 et X_2 prennent simultanément des valeurs élevées est supérieure si elles sont positivement dépendantes par quadrant que si elles sont indépendantes.

On a aussi une définition équivalente pour la dépendance positive par quadrant.

Définition 9.53 *Le couple (X_1, X_2) est PQD si*

$$\overline{F}_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq \overline{F}_{X_1}(x_1)\,\overline{F}_{X_2}(x_2).$$

ou

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2).$$

Dans la proposition suivante, on compare le comportement aléatoire conditionnel de X_1 sachant le comportement aléatoire de X_2 et le comportement aléatoire marginal de X_1.

Proposition 9.54 *La paire (X_1, X_2) est PQD si et seulement si on a*

$$\Pr(X_1 > x_1 | X_2 > x_2) \geq \Pr(X_1 > x_1).$$

Dans la proposition suivante, on indique que la mesure de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman sont positifs si l'on sait que le couple (X_1, X_2) est PQD.

Proposition 9.55 *Si la paire (X_1, X_2) est PQD alors*

$$\begin{aligned} \rho_P(X_1, X_2) &\geq 0, \\ \tau(X_1, X_2) &\geq 0, \\ \rho_S(X_1, X_2) &\geq 0. \end{aligned}$$

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

Comme il est indiqué dans la proposition suivante, la propriété PQD est conservée à la suite de transformations continues non décroissantes.

Proposition 9.56 *Si (X_1, X_2) est PQD, alors $(\phi_1(X_1), \phi_2(X_2))$ est PQD pour des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 continues non décroissantes.*

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

La relation entre la propriété PQD pour un couple de v.a. continues et la copule associée à leur distribution conjointe est fournie dans la proposition suivante.

Proposition 9.57 *Soit un couple de v.a. continues (X_1, X_2) possédant la copule C. Alors (X_1, X_2) est PQD si et seulement si*

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2,$$

pour tout $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$.

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

Exemple 9.58 *La copule de Gumbel et de Clayton impliquent une dépendance positive par quadrant. De plus, la copule de Frank implique une dépendance positive par quadrant si $\alpha \geq 0$.*

La proposition tisse le lien entre la notion de dépendance positive par quadrant et la covariance.

Proposition 9.59 *Le couple* (X_1, X_2) *est PQD si et seulement si*

$$\mathrm{Cov}\left(\phi_1\left(X_1\right), \phi_2\left(X_2\right)\right) \geq 0,$$

pour des fonctions ϕ_1, ϕ_2 *non décroissantes.*

On peut aussi définir la notion de dépendance négative par quadrant.

Définition 9.60 *On considère un couple de v.a.* (X_1, X_2) *avec fonction de répartition* $F_{X_1,X_2} \in \Gamma\left(F_{X_1}, F_{X_2}\right)$. *On dit que* (X_1, X_2) *est négativement dépendant par quadrant (NQD) si*

$$\Pr\left(X_1 > x_1, X_2 > x_2\right) \leq \Pr\left(X_1 > x_1\right) \Pr\left(X_2 > x_2\right),$$

pour x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

La notion NQD s'interprète comme suit. La probabilité que les v.a. X_1, X_2 prennent simultanément des valeurs élevées est inférieure si elles sont négativement dépendantes par quadrant que si elles sont indépendantes.

9.12 Copules multivariées

9.12.1 Définitions et propriétés

On présente une brève introduction aux copules multivariées.

Définition 9.61 *Une copule multivariée* $C\left(u_1, ..., u_n\right)$ *est une application* $[0,1]^n \to [0,1]$ *ayant les propriétés suivantes :*

1. $C\left(0, ..., 0\right) = 0$ *;*
2. $C\left(1, ..., 1\right) = 1$ *;*
3. *si une des composantes de* C *est* u *et les autres sont 1, alors la copule prend la valeur* u *;*
4. *si au moins une des composantes de* C *est* 0*, alors la copule prend la valeur* 0 *;*
5. *la probabilité sur* $(a_1, b_1] \times ... \times (a_n, b_n]$ *est positive i.e.*

$$\triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} ... \triangle_{a_n,b_n} C\left(u_1, u_2, ..., u_n\right) \geq 0,$$

pour tout $a_1 \leq b_1$, ..., $a_n \leq b_n$ *où*

$$\begin{aligned} & \triangle_{a_1,b_1} \triangle_{a_2,b_2} ... \triangle_{a_n,b_n} C\left(u_1, u_2, ..., u_n\right) \\ = & \sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+...+i_n} C\left(u_{1i_1}, ..., u_{ni_n}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

avec $u_{j1} = a_j$ *et* $u_{j2} = b_j$ *pour* $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

On présente la version multivariée du théorème de Sklar.

Théorème 9.62 ***Théorème de Sklar*** *Soit* $F \in \Gamma(F_1, ..., F_n)$ *ayant des fonctions de répartition marginales* F_1, ..., F_n. *Alors, il existe une copule* C *telle que pour tout* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

Si F_1, ..., F_n *sont continues, alors* C *est unique. Sinon,* C *est uniquement déterminée sur* $RanF_1 \times ... \times RanF_n$. *Inversement, si* C *est une copule et* F_1 ... F_2 *sont des fonctions de répartition alors la fonction définie par*

$$F(x_1, ..., x_2) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

est une fonction de répartition multivariée avec les fonctions de répartition marginales F_1 ... F_n.

Preuve. Voir e.g. [57] ou [85]. ■

On présente l'expression de certaines copules multivariées accompagnées de la méthode de simulation spécifique à chacune. Soient des v.a. X_1, ..., X_n avec des marginales F_{X_1}, ..., F_{X_n} et dont la distribution conjointe est définie par la copule C. Alors, on déduit $X_i = F_{X_i}(U_i)$, $i = 1, ..., n$. Pour chaque copule C, on indique la méthode permettant de produire une réalisation du vecteur $(U_1, ..., U_n)$ associée à la copule C.

9.12.2 Copule d'indépendance

La copule indépendance est définie par

$$C^I(u_1, ..., u_n) = u_1 ... u_n,$$

pour $u_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Algorithme 9.63 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule les réalisations* $V_1^{(j)}$, ..., $V_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* V_1, ..., V_n *où* $V_i \sim U(0, 1)$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$.
2. *On calcule* $U_i^{(i)} = V_i^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$.

9.12.3 Copule borne supérieure de Fréchet

La copule borne supérieure de Fréchet est représentée par

$$C^+(u_1, ..., u_n) = \min(u_1; ...; u_n),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$.

Algorithme 9.64 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule une réalisation* $V^{(j)}$ *de la v.a.* $V \sim U(0,1)$.
2. *On calcule* $U_i^{(j)} = V^{(j)}$, $i = 1, 2, ...n$.

9.12.4 Copule de Clayton

L'expression de la copule de Clayton est

$$C_\alpha(u_1, ..., u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{-\alpha} - (n-1) \right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$ et $\alpha > 0$.

Algorithme 9.65 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$, ..., $Z_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1, ..., Z_n *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$.
2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* $\Theta \sim Ga\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$.
3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \left(1 + \frac{Z_i^{(j)}}{Y}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$, $i = 1, ..., n$.

9.12.5 Copule de Frank

On définit par la copule de Frank par

$$C_\alpha(u_1, ..., u_n) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^{n} (\mathrm{e}^{-\alpha u_i} - 1)}{(\mathrm{e}^{-\alpha} - 1)^{n-1}} \right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, ..., n$ et $\alpha > 0$.

Algorithme 9.66 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1, ..., U_n)$

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$, ..., $Z_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1, ..., Z_n *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$.
2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi logarithmique avec paramètre* $\gamma = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha}$.
3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \frac{\ln(1 - \gamma \mathrm{e}^{-\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}})}{\ln(1-\gamma)}$, $i = 1, ..., n$.

9.12.6 Copule de Gumbel

La copule de Gumbel est définie par

$$C_\alpha(u_1,...,u_n) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^{n}(-\ln u_i)^\alpha\right\}\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,2,...,n$ et $\alpha \geq 1$.

Algorithme 9.67 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1,...,U_n)$

1. *On simule les réalisations* $Z_1^{(j)}$, ..., $Z_n^{(j)}$ *des v.a. indépendantes* Z_1, ..., Z_n *où* $Z_i \sim Exp(1)$ *pour* $i = 1,2,...,n$.

2. *On simule la réalisation* $\Theta^{(j)}$ *de la v.a.* Θ *de loi Stable* $(\varphi,1,\gamma,0)$ *où* $\varphi = \frac{1}{\alpha}$ *et* $\gamma = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right)^\alpha$ *(*$\alpha > 1$*).*

3. *On calcule* $U_i^{(j)} = \exp\left(-\left(\frac{Z_i^{(j)}}{\Theta^{(j)}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $i = 1,...,n$.

9.12.7 Copule normale

On définit la copule normale par

$$C_{\underline{\alpha}}(u_1,...,u_n) = \underline{\Phi}_{\underline{\alpha}}\left(\Phi^{-1}(u_1),...,\Phi^{-1}(u_n)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,...,n$ et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha_{ij} \in [0,1]$, $i < j \in \{1,2,...,n\}$.

Algorithme 9.68 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1,...,U_n)$

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)},...,Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Z_1,...,Z_n)$ *où* $(Z_1,...,Z_n)$ *obéit à une loi normale multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation* $\underline{\alpha}$.

2. *on calcule* $U_i^{(j)} = \Phi\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1,...,n$.

9.12.8 Copule de Student

La copule de Student est définie par

$$C_{\nu,\underline{\alpha}}(u_1,...,u_n) = t_{\nu,\underline{\alpha}}\left(t_\nu^{-1}(u_1),...,t_\nu^{-1}(u_n)\right),$$

pour $u_i \in [0,1]$, $i = 1,...,n$ et avec

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_{ij} \in [0,1]$, $i < j \in \{1,2,...,n\}$.

Algorithme 9.69 ***Simulation des réalisations de*** $(U_1,...,U_n)$

1. *On simule une réalisation* $\left(Z_1^{(j)},...,Z_n^{(j)}\right)$ *du vecteur de v.a.* $(Z_1,...,Z_n)$ *où* $(Z_1,...,Z_n)$ *obéit à une loi de Student multivariée standard avec une matrice de coefficients de corrélation* $\underline{\alpha}$.
2. *On calcule* $U_i^{(j)} = t_\nu\left(Z_i^{(j)}\right)$, $i = 1,...,n$.

Si $\underline{\alpha}$ est égale à la matrice identité, cela n'implique pas l'indépendance comme c'est le cas pour la copule normale.

9.12.9 Remarques

Pour les copules de Frank, de Clayton et de Gumbel, on remarque que le paramètre de dépendance α est le même pour toutes les paires de v.a. au sein de la copule. En revanche, les copules normale et de Student permettent d'avoir des paramètres de dépendance différents selon les paires de v.a. de la copule. Il existe aussi des extensions multivariées aux copules de Marshall-Olkin, de Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern (EFGM), de de Ali-Mikhail-Haq et Plackett mais l'espace manque afin de les présenter.

9.12.10 Copules archimédiennes et méthode de Marshall-Olkin

On peut construire des copules archimédiennes multivariées avec le générateur ϕ par le biais de la relation

$$C(u_1,...,u_n) = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + ... + \phi(u_n)\}. \tag{9.16}$$

Il est démontré dans [65] que, si ϕ est un générateur strict d'une copule archimédienne, (9.16) correspond à une copule pour tout n si et seulement

si ϕ^{-1} est une fonction complètement monotone. Une fonction décroissante g est complètement monotone sur $[a,b]$ si elle satisfait la propriété suivante

$$(-1)^k \frac{d^k g(t)}{dt^k} \geq 0, \ k \in \mathbb{N}, \ t \in (a,b).$$

Les fonctions inverses des générateurs des copules de Frank, de Clayton et de Gumbel sont complètement monotones sur $[0,\infty]$, ce qui signifie que l'on puisse construire avec (9.16) une version multivariée de ces copules pour toute dimension n voulue.

Une fonction inverse d'un générateur qui est complètement monotone sur $[0,\infty]$ correspond (à une constante près) à la transformée de Laplace associée à une distribution de probabilité définie sur $\mathbb{R}^+$. Soit une fonction de répartion F_Θ d'une distribution de probabilité définie sur $\mathbb{R}^+$ avec $F_\Theta(0) = 0$. Alors, on définit la transformée de Laplace-Stieltjes par

$$\widehat{F}_\Theta(t) = \int_0^\infty e^{-t\theta} dF_\Theta(\theta), \ t \geq 0.$$

En supposant que $\widehat{F}_\Theta(\infty) = 0$, il est possible de montrer que $\widehat{F}_\Theta$ est complètement comonotone.

On observe la relation suivante entre la transformée de Laplace et la f.g.m. d'une loi :

$$\widehat{F}_\Theta(t) = M_\Theta(-t).$$

Dans le cas de la copule de Clayton, l'expression de l'inverse du générateur est donnée par

$$\phi^{-1}(t) = (1+s\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

ce qui correspond à la transformée de Laplace de la distribution gamma avec paramètres $\frac{1}{\alpha}$ et 1.

L'inverse du générateur de la copule de Frank, défini par

$$\phi^{-1}(t) = \frac{-1}{\alpha} \ln\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)\mathrm{e}^{-s}\right),$$

est la transformée de Laplace de la loi discrète logarithmique. En effet, en posant $-\alpha = \ln(1-\gamma)$ et $-s = t$, on retrouve la f.g.m. de la loi logarithmique (voir [66] pour une description de la loi logarithmique).

Pour la copule de Gumbel, l'inverse du générateur est

$$\phi^{-1}(t) = e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}$$

est la transformée de Laplace de la loi stable. On peut consulter [86] pour un exposé détaillé de la loi stable.

Afin de montrer le lien entre une copule archimédienne et l'utilisation de la transformée de Laplace, on rappelle brièvement la méthode de construction de lois multivariées par mélange commun qui est due à [80] et [87] et qui est expliquée à la sous-section 8.5.7. Soient les v.a. indépendantes $Y_i \sim Exp(1)$, pour $i = 1, 2, ...n$, et la v.a. Θ définie sur $\mathbb{R}^+$ avec $F_\Theta(0) = 0$ et transformée de Laplace $\widehat{F}_\Theta$. Alors, on définit la fonction de survie conjointe du vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ avec

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \int_0^\infty \prod_{\iota=1}^n \mathrm{e}^{-\theta x_i} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \widehat{F}_\Theta\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \tag{9.17}$$

dont les fonctions de survie marginales sont

$$\overline{F}_{X_i}(x_i) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\theta x_i} \mathrm{d}F_\Theta(\theta) = \widehat{F}_\Theta(x_i), \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{9.18}$$

En posant $x_i = \widehat{F}_\Theta^{-1}\left(\overline{F}_{X_i}(x_i)\right)$ que l'on remplace dans (9.17), on obtient

$$\overline{F}_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \widehat{F}_\Theta\left(\sum_{i=1}^n \widehat{F}_\Theta^{-1}\left(\overline{F}_{X_i}(x_i)\right)\right).$$

On applique la méthode par inversion de construction des copules et on obtient des copules

$$C(u_1, ..., u_n) = \widehat{F}_\Theta\left(\widehat{F}_\Theta^{-1}(u_1) + ... + \widehat{F}_\Theta^{-1}(u_n)\right). \tag{9.19}$$

En posant $\widehat{F}_\Theta = \phi^{-1}$ et $\widehat{F}_\Theta^{-1} = \phi$, on retrouve l'expression en (9.16).

Cette approche a conduit à la méthode de construction de Marshall-Olkin décrite dans [43], [57] et [81]. On en donne un bref aperçu dans la proposition suivante.

Proposition 9.70 *Soit la v.a. Θ définie sur $\mathbb{R}^+$ avec $F_\Theta(0) = 0$ et transformée de Laplace $\widehat{F}_\Theta$. On pose $\widehat{F}_\Theta(\infty) = 0$. Soit le vecteur de v.a. $(U_1, ..., U_n)$ qui sont conditionnellement indépendantes sachant Θ avec*

$$F_{U|\Theta=\theta}(u_i) = \exp\left(-\theta \widehat{F}_\Theta^{-1}(u_i)\right), \ \textit{pour } u_i \in [0, 1] \ \textit{ et } i = 1, 2, ..., n.$$

Alors

$$F_{U_1,...,U_n}(u_1, ..., u_n) = \widehat{F}_\Theta\left(\widehat{F}_\Theta^{-1}(u_1) + ... + \widehat{F}_\Theta^{-1}(u_n)\right)$$

est une copule archimedienne avec le générateur $\phi = \widehat{F}_\Theta^{-1}$. Voir aussi e.g. [43], [57] et [81]

Preuve. La preuve est indiquée dans le développement ci-dessus. Voir aussi e.g. [43], [57] et [81]. ■

La proposition 9.70 conduit à l'algorithme suivant de simulation des réalisations de la copule définie en (9.19).

Algorithme 9.71 ***Simulation pour une copule archimédienne avec transformée de Laplace telle que définie en (9.19).***

1. On simule n v.a. indépendantes $Z_1, ..., Z_n$ de loi exponentielle avec moyenne 1.
2. On simule une v.a. Y de loi dont la tranformée de Laplace $\widehat{F}_Y$ correspond à l'inverse du générateur de la copule voulue.
3. On calcule $U_i = \widehat{F}_Y\left(\frac{Z_i}{Y}\right)$, $i = 1, ..., n$.

Les cas particuliers de l'algorithme 9.71 dans le cas des copules de Frank, de Clayton et de Gumbel sont fournis dans les sous-sections 9.12.5, 9.12.4 et 9.12.6.

9.13 Échangeabilité

Un vecteur de v.a. $X = (X_1, ..., X_n)$ est échangeable si

$$(X_1, ..., X_n) \overset{d}{=} \left(X_{p(1)}, ..., X_{p(n)}\right),$$

pour toute permutation $(p(1), ..., p(n))$ de $(1, ..., n)$. Une copule est dite échangeable si elle est la fonction de répartition de v.a. échangeables de loi $U(0, 1)$. Les copules de Clayton, de Frank et de Gumbel sont des exemples de copules multivariées avec composantes échangeables. En fait, les copules archimédiennes définies par le biais d'un seul générateur $\phi : C(u_1, ..., u_n) = \phi^{-1}\{\phi(u_1) + ... + \phi(u_n)\}$ ont des composantes échangeables.

Exemple 9.72 *On considère un portefeuille de m titres avec risques de défaut. Pour le titre i ($i = 1, 2, ..., m$), le montant en vigueur est m et la durée jusqu'au défaut est représentée par la v.a. T_i ($i = 1, 2, ..., m$). On suppose une perte totale du montant en vigueur en cas de défaut. On examine le comportement aléatoire du nombre de défauts pour l'ensemble du portefeuille $N = \sum_{i=1}^{m} 1(T_i \leq 1)$ où*

$$1(T_i \leq 1) = \begin{cases} 1, \textit{ si } T_i \leq 1 \textit{ (le défaut survient durant l'année)} \\ 0, \textit{ si } T_i > 1 \textit{ (sinon)} \end{cases}.$$

La fonction de répartition de $(T_1, ..., T_m)$ est définie par la copule multivariée et les marginales

$$F_{T_1,...,T_m}(t_1, ..., t_m) = C_\alpha\left(F_{T_1}(t_1), ..., F_{T_m}(t_m)\right).$$

Le vecteur de v.a. $(T_1, ..., T_m)$ *est échangeable. On calcule les valeurs exactes de la fonction de masse de probabilité* $\Pr\left(N^{PTF} = k\right)$ *(pour* $k = 0, 1, ..., m$*) en procédant selon l'approche décrite comme suit. On définit l'événement* E_k^m *comme étant l'ensemble de toutes les permutations comptant* k *titres faisant défaut et* $m - k$ *titres ne faisant pas défaut. L'ensemble* $E^{(k,m)}$ *comporte* $\binom{m}{k}$ *éléments*

$$E^{(k,m)} = \left\{ e_i^{(k,m)}, i = 1, ..., \binom{m}{k} \right\},$$

où $e_i^{(k,m)}$ *est le* i*-ème élément. Puisque les v.a.* $T_1, ..., T_m$ *sont identiquement distribuées, on a*

$$\Pr\left(\left\{e_i^{(k,m)}\right\}\right) = \Pr\left(\left\{e_{i'}^{(k,m)}\right\}\right),$$

pour $i \neq i'$*. On peut voir* $e_i^{(k,m)}$ *comme un vecteur avec* k *«1» et* $m - k$ *«0». Par exemple, pour* $m = 3$*, on a*

$$\begin{aligned} E^{(0,3)} &= \{(0,0,0)\} \\ E^{(1,3)} &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ E^{(2,3)} &= \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \\ E^{(3,3)} &= \{(1,1,1)\}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\Pr(N = k) = \Pr\left(E^{(k,m)}\right) = \binom{m}{k} \Pr\left(\left\{e_1^{(k,m)}\right\}\right). \tag{9.20}$$

On évalue $\Pr\left(\left\{\mathrm{e}_1^{(k,m)}\right\}\right)$ *avec*

$$\Pr\left(\left\{e_1^{(k,m)}\right\}\right) = \sum_{i=k}^{m} (-1)^{i-k} \binom{m}{k} \Pr\left(\cap_{j=1}^{i} \{T_j \leq 1\}, \cap_{j=i+1}^{m} \{T_j \leq \infty\}\right), \tag{9.21}$$

où l'on convient que

$$\begin{aligned} \Pr\left(\cap_{j=1}^{m} \{T_j \leq 1\}, \cap_{j=m+1}^{m} \{T_j \leq \infty\}\right) &= \Pr\left(\cap_{j=1}^{m} \{T_j \leq 1\}\right), \\ \Pr\left(\cap_{j=1}^{0} \{T_j \leq 1\}, \cap_{j=0+1}^{m} \{T_j \leq \infty\}\right) &= \Pr\left(\cap_{j=1}^{m} \{T_j \leq \infty\}\right). \end{aligned}$$

□

Dans le prochain exemple, on fournit une illustration numérique de l'exemple 9.72.

Exemple 9.73 *Dans l'exemple 9.72, on fixe* $m = 20$, $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{8}\right)$ *avec* $F_{T_i}(1) = 0.117503097$ *(pour* $i = 1, 2, ..., 20$*) et on considère la copule de Clayton avec* $\alpha = 1$ *et 3. Peu importe la valeur du paramètre de dépendance* α, $E[N] = 2.350062$. *À partir des relations de l'exemple 9.72, on a obtenu les valeurs suivantes :*

α	*1*	*3*
$\mathrm{Var}(N)$	*20.54639*	*32.27652*
$\Pr(N = 0)$	*0.62766*	*0.80112*
$\Pr(N = 1)$	*0.08357*	*0.01980*
$\Pr(N = m)$	*0.00661*	*0.04331*
$VaR_{0.95}(N)$	*14*	*19*
$TVaR_{0.95}(N)$	*17.01131*	*19.86622*

Comme l'indiquent les résultats obtenus, lorsque la relation de dépendance augmente, la probabilié d'avoir un nombre élevé de défauts augmente de façon significative. Le phénomène devient plus marquant quand le nombre de titres du portefeuille augmente. □

9.14 Impact de la dépendance et ordre supermodulaire

Afin d'examiner l'impact de la dépendance sur le comportement aléatoire des coûts d'un portefeuille, on a recours à l'ordre supermodulaire. Ce dernier est un ordre stochastique multivarié qui permet de comparer les structures de dépendance de vecteurs de v.a. qui ont les mêmes distributions marginales. Dans cette section, on se limite à présenter les résultats en indiquant les références pour les détails dans les notes à la fin du chapitre.

9.14.1 Définitions

On introduit la notion de fonction supermodulaire.

Définition 9.74 *Une fonction* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est dite supermodulaire si*

$$\begin{aligned} & g(x_1, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_j + \delta, ..., x_m) - g(x_1, ..., x_i + \varepsilon, ..., x_j, ..., x_m) \\ \geq\ & g(x_1, ..., x_i, ..., x_j + \delta, ..., x_m) - g(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_m) \end{aligned}$$

est vraie pour tout $\underline{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq j \leq m$ *et tout* $\varepsilon, \delta > 0$.

Proposition 9.75 *Si une fonction* g *est dérivable deux fois, alors* g *est dite supermodulaire si et seulement si*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} g(\mathbf{x}) \geq 0,$$

pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ *and* $1 \leq i \leq j \leq m$.

Preuve. Voir e.g. [9] et [80]. ■

Par exemple, les fonctions $g(x_1,...,x_m) = \sum_{i=1}^{m} x_i$, $g(x_1,...,x_m) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - d)^2$ et $g(x_1,...,x_m) = (\sum_{i=1}^{m} x_i - d)_+$ sont supermodulaires.

Définition 9.76 *Soient les vecteurs aléatoires* $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ *et* $\underline{X}' = \left(X_1',...,X_n'\right)$ *où, pour chaque* i, X_i *et* X_i' *ont les mêmes distributions marginales (i.e.* $X_i \sim X_i'$ *pour* $i = 1,2,...,n$*). Alors,* $\underline{X}$ *est inférieur à* $\underline{X}'$ *selon l'ordre supermodulaire, noté* $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$*, si on a* $E[g(\underline{X})] \leq E\left[g(\underline{X}')\right]$ *pour toutes les fonctions supermodulaires* g*, quand les espérances existent.*

Dans le cas où $n = 2$, l'ordre supermodulaire correspond à l'ordre en concordance ou à l'ordre en corrélation.

9.14.2 Ordre supermodulaire et ordre convexe univarié

Soient deux vecteurs de v.a. $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ et $\underline{X}' = \left(X_1',...,X_n'\right)$ où, pour chaque i, les v.a. X_i et X_i' ont la même distribution marginale F_i (i.e. $X_i \sim X_i'$ pour $i = 1,2,...,n$). On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S' = \sum_{i=1}^{n} X_i'$. En raison des hypothèses concernant $\underline{X}$ et $\underline{X}'$, on a $E[S] = E[S']$. La proposition suivante permet de déduire la relation entre S et S' en se basant sur la relation d'ordre entre $\underline{X}$ et $\underline{X}'$.

Proposition 9.77 *Si* $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$*, alors on a* $S \preceq_{cx} S'$.

Preuve. Voir e.g. [9]. ■

Par conséquent, si on parvient à établir l'ordre supermodulaire entre $\underline{X}$ et $\underline{X}'$ alors on a $S \preceq_{cx} S'$. Cela implique que $\pi_d(S) \leq \pi_d(S')$ pour tout niveau de rétention $d \geq 0$ et $TVaR_\kappa(S) \leq TVaR_\kappa(S')$ pour tout $0 < \alpha < 1$.

9.14.3 Ordre supermodulaire et comonotonicité

On présente certains cas où il est possible d'établir l'ordre supermodulaire entre deux vecteurs de v.a. $\underline{X}$ et $\underline{X}'$. La proposition suivante correspond à l'inégalité de Lorentz. La proposition permet de comparer selon l'ordre supermodulaire un vecteur de v.a. avec une relation de dépendance quelconque et un vecteur de v.a. comonotones.

Proposition 9.78 *Soient les vecteurs aléatoires* $\underline{X} = (X_1,...,X_n)$ *et* $\underline{X}^{cm} = (X_1^{cm},...,X_n^{cm})$ *où, pour chaque* i, X_i *et* X_i^{cm} *ont les mêmes distributions marginales (i.e.* $X_i \sim X_i^{cm}$ *pour* $i = 1,2,...,n$*) et les composantes* $X_1^{cm},...,X_n^{cm}$ *sont comonotoniques. Alors, on a* $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}^{cm}$.

Preuve. Voir e.g. [9]. ■

Selon la proposition précédente, la comonotonicité correspond à la plus forte relation de dépendance selon l'ordre supermodulaire.

9.14.4 Ordre supermodulaire et indépendance

La proposition suivante permet de comparer selon l'ordre supermodulaire un vecteur de v.a. dont les composantes sont indépendantes avec un vecteur de v.a. ayant une relation de dépendance quelconque entre les composantes.

Proposition 9.79 *Soient les vecteurs aléatoires* $\underline{X} = (X_1, ..., X_n)$ *et* $\underline{X}^{ind} = \left(X_1^{ind}, ..., X_n^{ind}\right)$ *où, pour chaque* i, X_i *et* X_i^{ind} *ont les mêmes distributions marginales (i.e.* $X_i \sim X_i^{ind}$ *pour* $i = 1, 2, ..., n$*) et les composantes* $X_1^{ind}, ..., X_n^{ind}$ *sont indépendantes. De plus, on suppose que les composantes de* $\underline{X}$ *sont positivement corrélées. Alors, on a* $\underline{X}^{ind} \preceq_{sm} \underline{X}$.

Preuve. Voir [84]. ■

9.14.5 Ordre supermodulaire et copules

Il est possible de relier l'ordre supermodulaire au paramètre de dépendance d'une copule multivariée.

Proposition 9.80 *Soient les vecteurs aléatoires* $\underline{X}^{\alpha} = (X_1^{\alpha}, ..., X_n^{\alpha})$ *et* $\underline{X}^{\alpha'} = (X_1^{\alpha'}, ..., X_n^{\alpha'})$ *où* $X_i^{\alpha} \sim X_i^{\alpha'}$*, pour* $i = 1, 2, ..., n$*. La structure de dépendance de* $\underline{X}^{\alpha}$ *(et de* $\underline{X}^{\alpha'}$*) est définie par la copule* C_{α} *(et la copule* $C_{\alpha'}$*). On a les résultats suivants :*

- *Si* C_{α} *et* $C_{\alpha'}$ *sont des copules de Frank et si* $\alpha \leq \alpha'$*, alors, on a* $\underline{X}^{\alpha} \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.
- *Si* C_{α} *et* $C_{\alpha'}$ *sont des copules de Clayton et si* $\alpha \leq \alpha'$*, alors, on a* $\underline{X}^{\alpha} \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.
- *Si* C_{α} *et* $C_{\alpha'}$ *sont des copules de Gumbel et si* $\alpha \leq \alpha'$*, alors, on a* $\underline{X}^{\alpha} \preceq_{sm} \underline{X}^{\alpha'}$.

Preuve. Voir e.g. [25]. ■

Remarque 9.81 *Dans les exemples 9.22, 9.23 et 9.73, l'impact du paramètre de dépendance* α *sur la TVaR se vérifie en utilisant les propositions 9.80, 9.77 et 7.50.*

9.14.6 Ordre supermodulaire et loi de Poisson multivariée

Dans la proposition suivante, on cite un résultat relativement à la loi de Poisson multivariée définie via les chocs communs.

Proposition 9.82 *Soient les v.a. indépendantes* K_0, K_1, ..., K_n *avec* $K_i \sim P(\alpha_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ *et* $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$, $\alpha_1 = \lambda_1 - \alpha_0$, ... $\alpha_n = \lambda_n - \alpha_0$*. On définit* $M_1 = K_1 + K_0$, ..., $M_n = K_n + K_0$*. Ainsi*

$\underline{M}^{(\alpha_0)} = \left(M_1^{(\alpha_0)}, ..., M_n^{(\alpha_0)}\right)$ *obéit à la loi de Poisson multivariée avec* $M_i^{(\alpha_0)} \sim Pois(\lambda_i)$, $i = 1, 2, ..., n$, *et avec un paramètre de dépendance* $0 \leq \alpha_0 \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$. *Alors, on a* $\underline{M}^{(\alpha_0)} \preceq_{sm} \underline{M}^{(\alpha_0')}$ *quand* $0 \leq \alpha_0 \leq \alpha_0' \leq \min(\lambda_1; ...; \lambda_n)$.

Preuve. Voir [84]. ■

9.14.7 Ordre supermodulaire et lois composées multivariées

Dans la prochaine proposition, on compare deux vecteurs de v.a. obéissant à des lois composées multivariées.

Proposition 9.83 *Soient les vecteurs de v.a.* $\underline{N}$ *et* $\underline{N}'$. *On définit* $X_i = \sum_{k=1}^{N_i} B_{i,k}$ *où* $B_{i,1}, ..., B_{i,N_i}$ *sont i.i.d. (on note* $B_{i,k} \sim B_i$*) et indépendants de* N_i. *On définit aussi* $X_i' = \sum_{k=1}^{N_i} B_{i,k}'$ *où* $B_{i,1}', ..., B_{i,N_i'}'$ *sont i.i.d. (on note* $B_{i,k}' \sim B_i'$*) et indépendants de* N_i. *On suppose que* $B_i \sim B_i'$, $(i = 1, 2, ..., n)$. *Si* $\underline{N} \preceq_{sm} \underline{N}'$, *alors* $\underline{X} \preceq_{sm} \underline{X}'$.

Preuve. Voir e.g. [25]. ■

Remarque 9.84 *Pour l'exemple 8.24, l'impact du paramètre de dépendance* α_0 *sur la TVaR est démontré en appliquant successivement les propositions 9.82, 9.83, 9.77 et 7.50.*

9.14.8 Ordre supermodulaire et bornes de Fréchet

Soit un couple de v.a. (X_1, X_2) où F_{X_1,X_2} appartient à la classe de Fréchet générée à partir des marginales F_{X_1} et F_{X_2}. On définit les deux paires de v.a. $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ où

$$\begin{aligned} X_1^- &= F_{X_1}^{-1}(U), \, X_2^- = F_{X_2}^{-1}(1-U), \\ X_1^+ &= F_{X_1}^{-1}(U), \, X_2^+ = F_{X_2}^{-1}(1-U), \end{aligned}$$

où $U \sim U(0,1)$. Les fonctions de répartition conjointes de $\left(X_1^-, X_2^-\right)$ et $\left(X_1^+, X_2^+\right)$ correspondent respectivement aux bornes inférieure et supérieure de Fréchet, i.e.

$$\begin{aligned} F_{X_1^-,X_2^-}(x_1, x_2) &= \max\left(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) - 1; 0\right), \\ F_{X_1^+,X_2^+}(x_1, x_2) &= \min\left(F_{X_1}(x_1); F_{X_2}(x_2)\right). \end{aligned}$$

Proposition 9.85 *Pour tout couple* (X_1, X_2), *on a*

$$\left(X_1^-, X_2^-\right) \preceq_{sm} (X_1, X_2) \preceq_{sm} \left(X_1^+, X_2^+\right).$$

Preuve. Voir e.g. [24]. ■

En appliquant simultanément la proposition 9.85 et la proposition 9.77, on déduit que

$$X_1^- + X_2^- \preceq_{cx} X_1 + X_2 \preceq_{cx} X_1^+ + X_2^+,$$

ce qui implique notamment

$$TVaR_\kappa\left(X_1^- + X_2^-\right) \leq TVaR_\kappa\left(X_1 + X_2\right) \leq TVaR_\kappa\left(X_1^+ + X_2^+\right),$$

pour $\kappa \in (0,1)$, et

$$\pi_{X_1^- + X_2^-}(d) \leq \pi_{X_1 + X_2}(d) \leq \pi_{X_1^+ + X_2^+}(d),$$

pour $d \geq 0$.

9.15 Notes bibliographiques

On recommande [57] et [85] pour un exposé général sur les copules, sur les mesures de dépendance et les notions de PQD. De plus, pour un traitement de la dépendance dans le contexte de l'actuariat et de la gestion quantitative des risques, on mentionne [10], [13], [24], [81] et [105] ainsi que les références mentionnées dans la bibliographie de ces ouvrages. Une excellente introduction aux copules dans le contexte de l'actuariat, ayant fortement contribué à la diffusion de la théorie des copules hors des cercles restreints des passionnés, est présentée dans [43]. De plus, [33] a aussi servi à faire connaître la modélisation via les copules en gestion quantitative des risques. On peut aussi consulter [103] pour une introduction à la modélisation des copules. On mentionne aussi [47] et [68] pour une brève introduction à la théorie des copules. De plus, il est aussi intéressant de consulter [48] concernant une étude sur les progrès de la recherche dans la théorie des copules en mathématiques, en statistique, en actuariat et en finance. Pour obtenir plus de détails sur la famille de copules archimédiennes, on peut consulter e.g. [43], [57], [81] et [85], où l'on traite aussi des copules archimédiennes non échangeables.

Une excellente synthèse sur l'utilisation des copules avec des distributions de fréquence est réalisée dans [46].

Dans [7] et [18], on développe des expressions analytiques de la fonction de répartition et de la TVaR de la somme de v.a. dont la distribution conjointe est définie par une copule. Pour un traitement général des bornes inférieure et supérieure de la VaR, on recommande [106] qui poursuit et développe les résultats obtenus par [42], [41] et [76]. Cette méthode a été introduite en actuariat par [25] et elle a été aussi examinée en profondeur par [36] et [37]. La méthode est aussi présentée dans [24] et [81]. La méthode

d'agrégation avec discrétisation est décrite dans [7]. La méthode des carrés est une version simplifiée de la méthode AEP qui est présentée dans [3].

Le concept de dépendance positive par quadrant a été introduit par [73]. Les deux principaux ouvrages généraux sur les ordres multivariés sont [84] et [96]. L'ordre supermodulaire a été défini par [97] et il a été introduit en actuariat par [8] et [83]. Pour des applications en actuariat, on peut consulter e.g. [26] et [56].

9.16 Exercices

1. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) où $F_{X_1,X_2} \in \Gamma(F_1, F_2)$ où F_1 est la fonction de répartition d'une loi $Bêta(\alpha = 2, \beta = 1)$ et F_2 est la fonction de répartition d'une loi $U(0, 1)$. Calculer les valeurs minimale et maximale que peut prendre le coefficient de corrélation de Pearson $\rho_P(X_1, X_2)$.

2. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de survie $\overline{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule de Clayton $C(u_1, u_2)$ (avec un paramètre de dépendance $\alpha = 5$), une marginale Pareto pour X_1 ($X_1 \sim Pa(2.5, 1.5)$) et une marginale Pareto pour X_2 ($X_2 \sim Pa(2.2, 1.8)$).

   (a) Développer l'expression de la copule de survie $\widehat{C}(u_1, u_2)$ associée à la copule de Clayton.

   (b) Développer l'expression de F_{X_1,X_2}. Calculer $F_{X_1,X_2}(25, 30)$ et $\Pr(X_1 > 25, X_2 > 30)$.

   (c) Développer les expressions de $\widehat{C}_{2|1}(u_1, u_2)$ et de $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$. Calculer $F_{X_2|X_1=25}(30)$.

   (d) Développer les expressions de $\widehat{c}(u_1, u_2)$ et de f_{X_1,X_2}. Calculer $f_{X_1,X_2}(25, 30)$.

   (e) On définit $S = X_1 + X_2$. Utiliser la méthode des carrés pour évaluer une approximation de $\Pr(S \leq 40)$ avec $n = 20$.

3. Soient la copule de Clayton, la copule de survie associée à la copule de Clayton et la copule de Gumbel dont les paramètres de dépendance sont calculés de telle sorte que le tau de Kendall est de 50 %. Calculer $C(u_1, u_2)$ pour les trois copules ainsi que la copule d'indépendance et la copule borne supérieure de Fréchet en fixant $u_1 = u_2 = 0.99$.

4. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Gumbel (avec un paramètre de dépendance $\alpha = 5$), une marginale exponentielle pour X_1 ($X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{20}\right)$) et une marginale gamma pour X_2 ($X_2 \sim Ga(2, 0.2)$).

(a) Développer l'expression de F_{X_1,X_2}. Calculer $F_{X_1,X_2}(50,30)$ et $\Pr(X_1 > 50, X_2 > 30)$.

(b) Développer les expressions de $C_{2|1}(u_1,u_2)$ et de $F_{X_2|X_1=x_1}(x_2)$. Calculer $F_{X_2|X_1=50}(30)$.

(c) Développer les expressions de $c(u_1,u_2)$ et de f_{X_1,X_2}. Calculer $f_{X_1,X_2}(50,30)$.

(d) On définit $S = X_1 + X_2$. Utiliser la méthode de discrétisation *lower* avec $h = 1$ pour évaluer $\Pr(S \leq 150)$. Évaluer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

(e) Utiliser la méthode de discrétisation *lower* avec $h = 1$ pour évaluer $E[g(X_1,X_2)]$ avec

$$g(x_1,x_2) = \min\{x_1,100\} + \min\left\{\max\left\{\frac{x_1}{100} - 0.1; 0\right\}; 0.6\right\} x_2. \tag{21.4798}$$

5. Soient les v.a. $X_1 \sim Pa(1.5,5)$ et $X_2 \sim LN\left(6,2^2\right)$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2$. Calculer les valeurs $\underline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ et $\overline{VaR}_\kappa^{(n)}(S)$ pour $\kappa = 0.95$ et 0.995 avec $n = 10^6$.

6. Soit le copule de v.a. (X_1,X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Frank, $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$ et $X_2 \sim LN\left(5,2^2\right)$. On définit les v.a. $S = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1, où la relation récurrente est $x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m$ $(n = 1,2,...)$ avec $a = 41\,358$, $c = 0$, $m = 2\,147\,483\,647$ et $x_0 = 343\,463\,463$. La n-ième réalisation produite par GNPA est désignée par $V^{(n)} = \frac{x_n}{m}$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1,X_2) en utilisant la méthode conditionnelle afin de produire les 100 000 réalisations de S et de T. Simuler dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme i.e. on doit avoir

j	$V_1^{(2j-1)}$	$V_2^{(2j)}$
1	0.318375756	0.384504876
2	0.352653871	0.058777102

Pour la réalisation j, on utilise $\left(V^{(2j-1)},V^{(2j)}\right)$ pour produire la réalisation $\left(U_1^{(j)},U_2^{(j)}\right)$ du couple (U_1,U_2) associée à la copule. On sait que $E[S] = 1596.6332$ et $E[T] = -596.6332$.

(a) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est -10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont 603.403 et 84.63605. À partir des 100 000

réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont 1583.671 et -587.705.

(b) On suppose que le paramètre de dépendance α de la copule de Frank est 10. À partir des réalisations de S et T, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$, $VaR_\kappa(T)$, $TVaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(T)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1 et X_2 sont 603.4032 et 685.338. À partir des 100 000 réalisations, les approximations obtenues de $E[S]$ et $E[T]$ sont 1614.672 et -618.706.

7. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule C, une marginale Pareto pour X_1 ($X_1 \sim Pa(1.5, 15)$) et une marginale Pareto pour X_2 ($X_2 \sim Pa(2.2, 18)$). On définit $S = X_1 + X_2$. Dans les questions suivantes, on considère les copules de Clayton et de Gumbel de telle sorte que le tau de Kendall est de 0.6.

   (a) Calculer $\Pr(X_1 > 100, X_2 > 200)$ et $\Pr(X_1 > 100 | X_2 > 200)$.

   (b) Utiliser la méthode des carrés pour évaluer $\Pr(S \leq 500)$ avec $n = 20$.

8. Soit la v.a. $X = B \times 1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}$, représentant les coûts pour une institution financière à la suite d'une débâcle sur les marchés financiers. Les v.a. R_1 et R_2 représentent les rendements quotidiens de deux indices boursiers connus. La v.a. $B \sim Pa(1.5, 1000)$ est indépendante du couple de v.a. (R_1, R_2). La loi bivariée entre R_1 et R_2 est définie par les marginales

$$\begin{aligned} R_1 &\sim N\left(0.08, 0.2^2\right), \\ R_2 &\sim N\left(0.085, 0.3^2\right), \end{aligned}$$

   ainsi que par la copule de Gumbel avec $\alpha = 4$.

   (a) Développer l'expression de $E[\max(X - d; 0)]$.

   (b) Calculer $E\left[1_{\{\{R_1 \leq -0.1\} \cup \{R_2 \leq -0.1\}\}}\right]$.

   (c) Calculer $E[\max(X - d; 0)]$ avec $d = 9000$.

9. Soit le vecteur de v.a. (X_1, X_2, X_3) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule multivariée C, $X_1 \sim LN\left(5, 2^2\right)$, $X_2 \sim Exp\left(\frac{1}{500}\right)$ et $X_3 \sim Pa(2.8, 1800)$. On suppose que $\tau(X_1, X_2) = 0.5$, $\tau(X_1, X_3) = 0.7$ et $\tau(X_2, X_3) = 0.3$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2 + X_3$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1, avec $a = 41\ 358$, $c = 0$, $m = 2\ 147\ 483\ 647$ et $x_0 = 343\ 463\ 463$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1, X_2, X_3) en utilisant

les algorithmes de simulation propres aux copules normale et de Student afin de produire les 100 000 réalisations de S. La valeur de $E[S]$ est 2596.633.

(a) La copule C est la copule normale. À partir des réalisations de S, calculer des approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 425.6796, 748.3264 et 672.461. À partir des 100 000 réalisations, l'approximation obtenue pour $E[S]$ est 2584.252.

(b) La copule C est la copule de Student avec $\nu = 4$. On utilise les mêmes réalisations de loi normale qu'en (a) et, ensuite, on produit les 100 000 réalisations de la loi du khi-deux (nécessaires pour l'application de l'algorithme de simulation). À partir des réalisations de S, évaluer approximativement $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.5$ et 0.995. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 643.5938, 935.6793 et 758.5113. À partir des 100 000 réalisations, l'approximation obtenue pour $E[S]$ est 2572.15.

10. Un portefeuille est constitué de 2 lignes d'affaires. Le nombre de sinistres pour la ligne i est représenté par la v.a. M_i pour $i = 1, 2$ où $M_1 \sim BN(r = 4, q = 0.5)$ et $M_2 \sim Pois(3)$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Clayton, de la copule de Gumbel ou de la copule de survie associée à la copule de Clayton. Le paramètre de dépendance de chaque copule est fixé de telle sorte que la covariance de (M_1, M_2) soit égale à $0.5(\text{Var}(M_1)\,\text{Var}(M_2))^{\frac{1}{2}}$. On définit $S = M_1 + M_2$. Les questions suivantes sont faites pour les trois copules.

(a) Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$ et le paramètre de dépendance de chaque copule.

(b) Calculer $f_{M_1,M_2}(8, 9)$.

(c) Développer l'expression de $f_S(k) = \Pr(S = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et calculer $f_S(k)$ pour $k = 0$, 1 et 10.

(d) Calculer $VaR_{0.95}(S)$ et $TVaR_{0.95}(S)$.

(e) Calculer $E\left[X_1 \times 1_{\{X_2 > VaR_{0.99}(X_2)\}}\right]$.

11. On considère le couple de v.a. (M_1, M_2) où $M_i \sim Pois(10)$ pour $i = 1, 2$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Clayton avec un paramètre de dépendance $\gamma = 5$. On définit $N = M_1 + M_2$.

(a) Calculer $f_{M_1,M_2}(5, 6)$ et $f_{M_1,M_2}(7, 7)$.

(b) Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$.

(c) Calculer $E[N]$ et $\text{Var}(N)$.
(d) Calculer $\Pr(N=0)$, $\Pr(N=10)$ et $\Pr(N=20)$.
(e) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

12. On considère le couple de v.a. (M_1, M_2) où $M_i \sim Pois(10)$ pour $i = 1, 2$. La loi conjointe de (M_1, M_2) est définie en fonction de la copule de Frank avec un paramètre de dépendance $\gamma = 10.889335$. On définit $N = M_1 + M_2$.

(a) Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$.
(b) Calculer $E[N]$ et $\text{Var}(N)$.
(c) Calculer $\Pr(N=0)$, $\Pr(N=10)$ et $\Pr(N=20)$.
(d) Calculer $VaR_{0.99}(N)$ et $TVaR_{0.99}(N)$.

13. On suppose que les coûts qui surviennent à la suite d'un sinistre sont représentés par la paire de v.a. B_1 (coûts en sinistres) et B_2 (frais de règlement) dont les lois marginales sont $B_1 \sim Pa(2.4, 14\,000)$ et $B_2 \sim Exp\left(\frac{1}{5000}\right)$. La dépendance entre les v.a. B_1 et B_2 est définie par la copule de Clayton avec $C(u_1, u_2) = \left(u_1^{-\gamma} + u_2^{-\gamma} - 1\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ avec $\gamma = 8$.

On veut produire une réalisation $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$ de (B_1, B_2) selon la méthode conditionnelle. On a produit une réalisation

$$\left(V_1^{(1)} = 0.24, V_2^{(1)} = 0.78\right)$$

de (V_1, V_2) où V_1 et V_2 sont des v.a. indépendantes de loi uniforme $(0, 1)$. On utilise la réalisation $\left(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}\right)$ et $F_{U_2|U_1=u_1}(u_2)$ pour produire la réalisation $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ de (U_1, U_2). On se sert de $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ pour produire $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$. Calculer $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ et $\left(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\right)$.

14. On considère un portefeuille de 4 titres avec risque de défaut. Pour le titre i $(i = 1, 2, 3, 4)$, le montant en vigueur est 10 000 et la durée jusqu'au défaut T_i obéit à une loi exponentielle d'espérance 20. On suppose une perte totale du montant en vigueur en cas de défaut. On examine le risque global du portefeuille sur une année. Le taux annuel d'intérêt est nul. À cette fin, il est important de bien comprendre le comportement du nombre de défauts pour l'ensemble du portefeuille $N = \sum_{i=1}^{4} 1(T_i \leq 1)$ où

$$1(T_i \leq 1) = \begin{cases} 1, \text{ si } T_i \leq 1 \text{ (défaut survient durant l'année)} \\ 0, \text{ si } T_i > 1 \text{ (sinon)} \end{cases}.$$

La structure de dépendance entre les v.a. $T_1, ..., T_4$ est définie à l'aide de la copule de Clayton. Pour des fins de comparaison, on a aussi fait les calculs pour les cas où les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes et comonotones.

(a) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont indépendantes. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

(b) On suppose que les v.a. $T_1, ..., T_4$ sont comonotones. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1, ..., 4$.

(c) On suppose que la structure de dépendance entre les v.a. $T_1, ..., T_4$ est définie à l'aide de la copule de Clayton où $\alpha = 5$. Calculer $\Pr(N = k)$, pour $k = 0, 1$.

15. On considère un portefeuille avec deux risques dont les coûts sont définis par les v.a. X_1 et X_2 avec $X_i \sim BComp(n, q; F_B)$, où $n = 2$, $q = 0.15$, $B \sim Exp\left(\frac{1}{1000}\right)$, pour $i = 1, 2$. Le nombre de sinistres pour les deux contrats sont définis par les v.a. M_1 et M_2. On suppose que

$$F_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = C_\alpha\left(F_{M_1}(m_1), F_{M_2}(m_2)\right),$$

où C_α est la copule de Frank avec $\alpha = 10$. Les montants de sinistres sont indépendants d'un contrat à l'autre. On définit les v.a. $N = M_1 + M_2$ et $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer $f_{M_1,M_2}(0, 0)$ et $f_{M_1,M_2}(1, 2)$.

(b) Calculer $\Pr(N = k)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) Calculer $\Pr(S \leq 1500)$.

(d) Calculer l'espérance et la variance de N.

(e) Calculer l'espérance et la variance de S.

16. Soit le couple de v.a. (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est définie par la copule de Fréchet avec $\alpha = 1 - \beta$ et les marginales sont de loi uniforme standard. Le paramètre β de la copule est fixé de telle sorte que le coefficient de corrélation de Pearson pour (U_1, U_2) soit nul. Soit le couple de v.a. (V_1, V_2) indépendantes et de loi uniforme standard.

(a) Calculer la valeur de β.

(b) Développer l'expression de $F_S(x)$ pour $S = U_1 + U_2$.

(c) Développer l'expression de $F_T(x)$ pour $T = V_1 + V_2$.

(d) Comparer les valeurs de F_S et F_T et commenter.

17. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition est définie par la copule de Fréchet avec $\alpha = 1 - \beta$ et les marginales sont de loi exponentielle avec paramètre 1. Le paramètre β de la copule est fixé de telle sorte que le coefficient de corrélation de Pearson pour (X_1, X_2) soit nul. Soit le couple de v.a. (Y_1, Y_2) indépendantes et de loi exponentielle avec paramètre 1.

    (a) Calculer la valeur de β.

    (b) Développer l'expression de $F_S(x)$ pour $S = X_1 + X_2$.

    (c) Développer l'expression de $F_T(x)$ pour $T = Y_1 + Y_2$.

    (d) Comparer les valeurs de F_S et F_T et commenter.

9.17 Réponses

1. Réponse à la question 1 : ± 0.979796

2. Réponses à la question 2 :

    (a) Aucune réponse

    (b) 0.998194 et 0.000760

    (c) 0.015924

    (d) 3.903×10^{-7}

    (e) 0.997439

3. Réponses à la question 3 : 0.980294, 0.987071, 0.985887, 0.9801, 0.99

4. Réponses à la question 4 :

    (a) 0.917994, 0.017346

    (b) 0.999709

    (c) 0.084613

    (d) 0.996153, 126, 151.6081

    (e) 21.4798

5. Réponses à la question 5 : pour $\kappa = 0.95$: 10 826.01 et 11 520.08 ; pour $\kappa = 0.995$: 69 679.30 et 72 901.94

6. Réponses à la question 6 :

    (a) approximations de $VaR_{0.5}(S)$, $VaR_{0.995}(S)$, $VaR_{0.5}(T)$, $VaR_{0.995}(T)$: 758.3392, 25 133.2932, 182.4789, 2593.3892 ; approximations de $TVaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(T)$: 60 086.75 et 3072.59

(b) approximations de $VaR_{0.5}(S)$, $VaR_{0.995}(S)$, $VaR_{0.5}(T)$, $VaR_{0.995}(T)$: 518.3507, 28 134.7303, 86.9555, 1385.1414 ; approximations de $TVaR_{0.995}(S)$ et $TVaR_{0.995}(T)$: 65 024.72 et 1823.89

7. Réponses à la question 7 :

   (a) Clayton : 0.000723 et 0.174610 ; Gumbel : 0.000410 et 0.990378

   (b) Clayton : 0.993580 ; Gumbel : 0.992154

8. Réponses à la question 8 :

   (a) Aucune réponse

   (b) 0.292908

   (c) 184.7977

9. Réponses à la question 9 :

   (a) pour $\kappa = 0.5$, 1127.942 et 4636.997 ; pour $\kappa = 0.995$, 37 763.923 et 75563.6

   (b) pour $\kappa = 0.5$, 1139.944 et 4604.548 ; pour $\kappa = 0.995$, 37 669.383 et 74 169.77

10. Réponses à la question 10 :

    (a) 2.449, 1.502, 1.451, 0.813

    (b) 0.002345, 0.000117, 0.000098

    (c) Clayton : 0.034975, 0.032695, 0.067078 ; Gumbel : 009510, 0.030092, 0.056735 ; survie Clayton : 0.005395, 0.024906, 0.054192

    (d) Clayton : 14, 16.1589 ; Gumbel : 14, 17.4095 ; survie Clayton : 15, 17.5932

    (e) Clayton : 0.071634 ; Gumbel : 0.129659 ; survie Clayton : 0.137673

11. Réponses à la question 11 :

    (a) 0.008118265 et 0.048331476

    (b) 8.2921

    (c) 20 et 36.5843

    (d) 0.000040, 0.025721 et 0.061763

    (e) 34 et 35.4475

12. Réponses à la question 12 :
    (a) 8.2921
    (b) 20 et 36.5843
    (c) 0, 0.020056 et 0.062354
    (d) 34 et 36.1406

13. Réponses à la question 13 : $B_1^{(1)} = 1696.001766$ et $B_2^{(1)} = 1683.091503$)

14. Réponses à la question 14 :
    (a) 0.818731, 0.167909, 0.012913 0.000441, 0.000006)
    (b) 0.951229, 0, 0, 0, 0.048771
    (c) 0.859163 et 0.099478

15. Réponses à la question 15 :
    (a) 0.656385, 0.016796
    (b) 0.656385, 0.129109, 0.176770, 0.033591, 0.004144
    (c) 0.841543
    (d) 0.6 et 0.844820
    (e) 600 et 1 444 820.129

16. Réponses à la question 16 :
    (a) 0.5
    (b) $F_S(x) = \left(\frac{x}{4}\right) \times 1_{\{x<1\}} + \left(\frac{2+x}{4}\right) \times 1_{\{x\geq 1\}}$, pour $x \in [0,2]$
    (c) $F_T(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right) \times 1_{\{x<1\}} + \left(1 - \frac{(2-x)^2}{2}\right) \times 1_{\{x\geq 1\}}$, pour $x \in [0,2]$
    (d) Aucune réponse

17. Réponses à la question 17 :
    (a) 0.39207
    (b) $F_S(x) = 0.39207\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) \times 1_{\{x>0\}} + 0.60793\sqrt{1-4e^{-x}} \times 1_{\{x\geq \ln(4)\}}$
    (c) $F_T(x) = H(x;2,1)$
    (d) Aucune réponse

10
Allocation du capital

10.1 Introduction

On considère un portefeuille de n risques, dont les coûts ou les pertes sont représentés par les v.a. X_1, ..., X_n, d'une institution financière (banque, compagnie d'assurance) ou toute autre entité responsable de la gestion des risques.

Après avoir établi la structure de dépendance pour $(X_1, ..., X_n)$, on établit le montant de capital associé au montant total des coûts ou des pertes pour l'ensemble du portefeuille $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ à l'aide d'une mesure de risque, comme la mesure VaR ou la mesure TVaR. Il devient ensuite important d'établir la contribution de chaque risque X_i au montant de capital, en tenant compte à la fois du comportement aléatoire marginal de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ et du comportement aléatoire conjoint du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$. Comme il est souhaité que la mutualisation des risques ait un effet bénéfique, la contribution de chaque risque doit être inférieure au capital qui serait établi de façon individuelle pour chaque risque.

Le portefeuille peut être celui d'une compagnie d'assurance, d'un investisseur (individuel ou institutionnel), d'une banque ou d'un régime de retraite. Les pertes éventuelles associées au risque i sont définies par la v.a. L_i $(i = 1, 2, ..., n)$. En assurance, le portefeuille est constitué de contrats d'assurance (ou lignes d'affaires) et les risques correspondent aux coûts éventuels associés aux contrats (ou lignes d'affaires). Pour une institution financière, le portefeuille est celui d'une banque (ou d'une compagnie

d'assurance) et les risques représentent les pertes (ou profits) associées à une ligne d'affaires. Le portefeuille peut être constitué de prêts ou de titres avec risques de défaut. Les risques sont les pertes résultant d'un défaut d'un prêt ou d'un titre. Du point de vue d'un investisseur, le portefeuille est constitué de positions financières sur différents marchés (actions, obligations, positions longues ou courtes dans des produits dérivés).

On établit la procédure suivante pour l'allocation du capital :

- Établir la loi multivariée (conjointe) pour les coûts ou les pertes $X_1, ..., X_n$.
- Choisir une mesure de risque pour établir le capital total.
- Appliquer la mesure de risque sur le montant total des coûts ou des pertes.
- Dans le cas d'un effet de diversification positif, choisir un principe d'allocation pour établir la part de capital par risque.

On fixe le capital total de risque pour l'ensemble du portefeuille à l'aide d'une mesure de risque choisie ς, $\varsigma(S) = C_{TOT}(S)$ et le capital économique est $CE_{TOT}(S) = C_{TOT}(S) - E[S]$. On définit par C_i la part du capital (contribution au risque) allouée au risque i $(i = 1, 2, ..., n)$. La régle d'allocation doit tenir compte des relations de dépendance entre les risques. La règle doit être additive, ce qui signifie que la relation $C_{TOT}(S) = \sum_{i=1}^{n} C_i$ doit être respectée. Elle doit aussi pouvoir être appliquée pour un portefeuille de plusieurs contrats. Elle doit permettre un juste partage entre les risques du bénéfice réalisé à la mutualisation des risques.

Dans ce chapitre, on présente les règles d'allocation de capital, notamment les règles basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR. On étudie en détails l'évaluation des contributions selon les règles basées sur la TVaR.

10.2 Définitions

10.2.1 Motivations

Soit un portefeuille constitué des n risques X_1, ..., X_n. Le montant de capital associé $\varsigma(S)$ au montant total des coûts ou des pertes pour l'ensemble du portefeuille $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est supposé supérieur à $E[S]$.

Selon une première approche simple d'allocation basée sur l'espérance, la contribution du risque X_i est

$$C_i = E[X_i] + \frac{E[X_i]}{\sum_{i=1}^{n} E[X_i]} \{\varsigma(S) - E[S]\}.$$

Bien que sa simplicité puisse rendre cette approche attrayante, cette approche a le désavantage d'ignorer la structure de dépendance entre les v.a. X_1, ..., X_n et la variabilité associée à chaque risque X_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Exemple 10.1 *Soient les n risques d'un portefeuille représenté par les v.a.* $(X_1, ..., X_n)$ *obéissant à une loi normale multivariée avec* $\underline{\mu} = (30, 30, 30)$ *et* $\underline{\sum} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 25 & 10 \\ 3 & 10 & 100 \end{pmatrix}$. *Selon l'approche basée sur l'espérance, la part allouée à chaque risque est* $\frac{1}{3}$ *du capital total associé ignorant les différences importantes dans la variabilité de chaque risque.* □

Une deuxième approche simple, basée sur la variance, propose que la contribution du risque X_i soit

$$C_i = E[X_i] + \frac{\text{Var}(X_i)}{\sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)} \{\varsigma(S) - E[S]\}.$$

Quoique cette approche semble offrir une alternative intéressante à l'approche basée sur l'espérance, elle ne tient pas compte de la structure de dépendance du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$.

Il est aisé de vérifier que les deux approches simples satisfont la relation $C_{TOT}(S) = \sum_{i=1}^{n} C_i$.

Pour déterminer les valeurs de $C_1, ..., C_n$, les règles généralement considérées sont la règle basée sur la covariance, la règle basée sur la VaR et la règle basée sur la TVaR.

10.2.2 Règle basée sur la covariance

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la covariance est donnée par

$$C_i = E[X_i] + \frac{\text{Cov}(X_i, S)}{\text{Var}(S)} \{\varsigma(S) - E[S]\} \tag{10.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, S) &= \text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \text{Var}(X_i) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \text{Cov}(X_i, X_j). \end{aligned} \tag{10.2}$$

La relation $C_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ est satisfaite.

La règle basée sur la covariance est assez simple d'application et tient compte de la relation de dépendance linéaire entre les risques via la covariance. Le principe de la covariance peut être appliqué quel que

soit le choix fait pour la mesure de risque. En revanche, la méthode peut rapidement devenir difficile d'application. En effet, si le portefeuille contient un nombre n important de risques, il faudra calculer préalablement les covariances pour $\frac{n(n-1)}{2}$ paires de v.a.

10.2.3 Règles basées sur les mesures VaR et TVaR

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la VaR est

$$C_i = VaR_\kappa(X_i; S) = E\left[X_i | S = VaR_\kappa(S)\right]. \tag{10.3}$$

On vérifie que la relation

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i &= \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i | S = VaR_\kappa(S)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | S = VaR_\kappa(S)\right] \\ &= E\left[S | S = VaR_\kappa(S)\right] = VaR_\kappa(S)\end{aligned}$$

est satisfaite.

Selon la règle basée sur la mesure TVaR, la contribution au risque X_i est donnée par

$$C_i = TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa}, \tag{10.4}$$

avec

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq VaR_\kappa(S)) - \kappa)}{\Pr(S = VaR_\kappa(S))}, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa(S)\right) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr\left(S = VaR_\kappa(S)\right) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} TVaR_\kappa(X_i; S) \\ =\ & \sum_{i=1}^{n} \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\ =\ & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + E\left[S \times 1_{\{S = VaR_\kappa(S)\}}\right]\beta}{1-\kappa} \\ =\ & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + VaR_\kappa(S)\Pr\left(S = VaR_\kappa(S)\right)\beta}{1-\kappa} \\ =\ & \frac{E\left[S \times 1_{\{S > VaR_\kappa(S)\}}\right] + VaR_\kappa(S)\left(\Pr\left(S \leq VaR_\kappa(S)\right) - \kappa\right)}{1-\kappa} \\ =\ & TVaR_\kappa(S),\end{aligned}$$

confirmant que la relation $C_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ est satisfaite.

Les deux règles tiennent compte de la structure de dépendance du vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$. Au premier abord, elles semblent difficiles d'application. À cette fin, on examine en détail l'application de ces deux règles. En premier lieu, on va identifier quelques cas où il est possible d'obtenir l'expression analytique de la contribution de X_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Ensuite, on va traiter des méthodes pour évaluer les contributions lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir des expressions analytiques. De plus, on verra qu'il est beaucoup plus aisé d'appliquer la règle basée sur la TVaR (et sur la VaR) que la règle basée sur la covariance dans le contexte de portefeuille avec un grand nombre de risques comme c'est souvent le cas en pratique.

10.2.4 Principe d'Euler et règles d'allocation

Les règles basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR peuvent être obtenues en appliquant le principe d'Euler. Toutefois, la démonstration de ces règles en utilisant le principe d'Euler n'est pas abordée dans cet ouvrage. Des arguments économiques peuvent aussi justifier l'utilisation de ce principe pour développer des règles d'allocation.

10.3 Applications

10.3.1 Lois multivariées avec support arithmétique

On considère le cas où $X_1, ..., X_n, S \in \{0, 1h, 2h, ...\}$ et on pose $VaR_\kappa(S) = k_0 h$. Alors, on a

$$E[X_i | S = VaR_\kappa(S)] = \frac{E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]}{\Pr(S = k_0 h)},$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr\left(X_i = jh, \sum_{l=1, l\neq i}^{n} X_l = (k_0 - j)\, h\right),$$

permettant le calcul de la contribution selon la règle basée sur la VaR. La part allouée au risque X_i correspond à la somme pondérée des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S prenne la valeur $k_0 h$.

La contribution du risque X_i selon la règle basée sur la TVaR est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>k_0 h\}}\right] + E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]\beta}{1 - \kappa},$$

où

$$\beta = \begin{cases} \frac{(\Pr(S \leq k_0 h) - \kappa)}{\Pr(S = k_0 h)}, \text{ si } \Pr(S = k_0 h) > 0 \\ 0, \text{ si } \Pr(S = k_0 h) = 0 \end{cases}.$$

On déduit

$$E\left[X_i \times 1_{\{S > k_0 h\}}\right] = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=kh\}}\right]$$

ou

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S > k_0 h\}}\right] &= E[X_i] - E\left[X_i \times 1_{\{S \leq k_0 h\}}\right] \\ &= E[X_i] - \sum_{k=0}^{k_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=kh\}}\right]. \end{aligned}$$

Bref, la difficulté revient à évaluer $E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]$. En définissant $S_{-i} = \sum_{l=1, l \neq i}^{n} X_l$, on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh \Pr(X_i = jh, S_{-i} = (k_0 - j)h). \tag{10.5}$$

Selon (10.5), $E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right]$ correspond à la somme des valeurs que prend la v.a. X_i de telle sorte que la v.a. S soit égale à $k_0 h$.

Pour le cas où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, (10.5) devient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0 h\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} jh f_{X_i}(jh) f_{S_{-i}}((k_0 - j)h). \tag{10.6}$$

On constate que (10.6) est le produit de convolution de $\{jh f_{X_i}(jh), j \in \mathbb{N}\}$ et $\left\{f_{S_{-i}}(jh)\, j \in \mathbb{N}\right\}$, ce qui est intéressant d'un point de vue pratique puisque l'on peut utiliser les outils déjà étudiés aux chapitres 1 et 6 sur les produits de convolution.

On applique l'expression en (10.6) dans les deux prochains exemples.

Exemple 10.2 *Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ où $X_i \sim Pois(\lambda_i)$ $i = 1, 2, ..., n$. On définit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ce qui implique $S \sim Pois(\lambda_S)$ et $S_{-i} \sim Pois(\lambda_S - \lambda_i)$. Alors, avec $h = 1$, (10.6) devient*

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0\}}\right] = \sum_{j=0}^{k_0} j \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^j}{j!} \frac{e^{-(\lambda_S - \lambda_i)} (\lambda_S - \lambda_i)^{k_0 - j}}{(k_0 - j)!}.$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=k_0\}}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S}\lambda_S^{k_0}}{k_0!}\sum_{j=0}^{k_0} j\frac{k_0!}{j!\,(k_0-j)!}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^j\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right)^{k_0-j} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_S}\lambda_S^{k_0}}{k_0!}k_0\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right) = \Pr\left(S=k_0\right)k_0\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_S}\right). \end{aligned}$$

□

Exemple 10.3 *Soient les v.a. indépendantes* $X_1,...,X_n$ *où* $X_i \sim PComp\left(\lambda_i, F_i\right)$, $i=1,2,...,n$. *On sait que*

$$S_{-1} \sim PComp\left(\lambda_S-\lambda_1; F_{C_{-1}}\right),$$

avec

$$F_{C_{-1}}\left(kh\right) = \sum_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_S-\lambda_i}F_i\left(kh\right).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S=k_0\}}\right] &= \sum_{j=0}^{k_0} hj\Pr\left(X_1=hj, X_2+...+X_n=hk_0-hj\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k_0} hj\Pr\left(X_1=hj\right)\Pr\left(S_{-1}=k_0-hj\right), \end{aligned}$$

où $\Pr\left(X_1=hj\right)$ *et* $\Pr\left(S_{-1}=k_0-hj\right)$ *sont calculées avec l'algorithme de Panjer ou la FFT.* □

Dans l'exemple suivant, on considère un couple de v.a. discrètes dépendantes.

Exemple 10.4 ***(Suite de l'exemple 8.23).*** *Pour le couple* (M_1, M_2) *obéissant à une loi Poisson-gamma bivariée CRMM, le capital total pour le portefeuille est* $TVaR_\kappa\left(N\right)$. *On détermine les contributions suivantes pour* M_1 *et* M_2 *en se basant sur les règles de la covariance et de la TVaR :*

γ_0	κ	$TVaR_\kappa\left(M_1;N\right)$	$TVaR_\kappa\left(M_2;N\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(M_1;N\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(M_2;N\right)$
0	*0.95*	*2.2432*	*6.2114*	*2.4876*	*5.9670*
0	*0.995*	*2.6536*	*9.1049*	*3.3887*	*8.3698*
2	*0.95*	*2.7023*	*6.3215*	*3.3370*	*5.6867*
2	*0.995*	*3.6509*	*9.0959*	*4.7814*	*7.9654*

□

10.3.2 Lois multivariées continues

On considère un portefeuille où les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont continues ce qui implique que $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est aussi continue. En posant $VaR_\kappa(S) = s_0$, l'expression de la contribution selon la règle basée sur la VaR de X_i $(i = 1, ..., n)$ devient

$$VaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S=s_0\}}\right]}{f_S(s_0)},$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \int_0^s x f_{X_i, S_{-i}}(x, s-x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.7}$$

avec $S_{-i} = \sum_{l=1, l\neq i}^{n} X_l$.

De même, selon la règle basée sur la TVaR, la contribution du risque X_i est donnée par

$$TVaR_\kappa(X_i; S) = \frac{E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right]}{1-\kappa}, \tag{10.8}$$

où

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_{s_0}^{\infty} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s.$$

On a aussi

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = E[X_i] - E\left[X_i \times 1_{\{S\leq s_0\}}\right],$$

avec

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>s_0\}}\right] = \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]\mathrm{d}s. \tag{10.9}$$

Dans le prochain exemple, on traite un portefeuille constitué de deux risques indépendants.

Exemple 10.5 *Soient les v.a. indépendantes $X_i \sim Exp(\beta_i)$, $i = 1, 2$, avec $\beta_1 > \beta_2$. On sait que $S = X_1 + X_2$ obéit à une loi Erlang généralisée avec*

$$F_S(x) = \frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_2 x}\right).$$

L'expression en (10.7) devient

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_1}(x)\, f_{X_2}(s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_1 x}\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_2(s-x)}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

et on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] = \beta_1\beta_2\left(\frac{s\mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{\beta_1-\beta_2} + \frac{\mathrm{e}^{-\beta_s s}-\mathrm{e}^{-\beta_1 s}}{(\beta_1-\beta_2)^2}\right). \tag{10.10}$$

Ensuite, on remplace (10.10) dans (10.9)

$$\begin{aligned} E\left[X_1 \times 1_{\{S\leq s_0\}}\right] &= \int_0^{s_0} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s \\ &= \frac{\beta_1\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\left(\frac{s_0\mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{\beta_1} + \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\right)}{\beta_1^2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_s s_0}\right)}{\beta_2\left(\beta_1-\beta_2\right)^2} - \frac{\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\right)}{\beta_1\left(\beta_1-\beta_2\right)^2}\right). \end{aligned}$$

□

On considère un exemple constitué de n risques indépendants obéissant à des lois gamma de paramètres de forme différents et de paramètres d'échelle identiques.

Exemple 10.6 *Soient les v.a. indépendantes $X_1, ..., X_n$ avec $X_i \sim Ga(\alpha_i, \beta)$. Alors, $S = \sum_{i=1}^n X_i \sim Ga(\alpha_S, \beta)$ avec $\alpha_S = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Pour établir la contribution de X_i, on a besoin de trouver $E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right]$ où*

$$\begin{aligned} E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] &= \int_0^s x f_{X_i}(x) f_{S_{-i}}(s-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^s x h(x;\alpha_i,\beta) h(s-x;\alpha_S-\alpha_i,\beta)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\alpha_i}{\beta} h(s;\alpha_S+1,\beta). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$E\left[X_i \times 1_{\{S>b\}}\right] = \int_b^\infty E\left[X_i \times 1_{\{S=s\}}\right] \mathrm{d}s = \frac{\alpha_i}{\beta}\overline{H}(b;\alpha_S+1,\beta). \tag{10.11}$$

En remplaçant (10.11) dans (10.8), il en résulte que

$$TVaR_\kappa(X_i;S) = \frac{\alpha_i}{\beta}\frac{\overline{H}\left(VaR_\kappa(S);\alpha_S+1,\beta\right)}{1-\kappa}, \tag{10.12}$$

fournissant un rare cas où le montant alloué selon la règle basée sur la TVaR coïncide avec celui déterminé selon la règle simple basée sur l'espérance. □

Dans le prochain exemple, on considère le cas d'une paire de v.a. dépendantes (X_1, X_2).

Exemple 10.7 *Soit la paire de v.a.* (X_1, X_2) *obéissant à la loi bivariée exponentielle EFGM. On définit* $S = X_1 + X_2$. *Les expressions de* f_S, F_S *et* $TVaR_\kappa(S)$ *sont fournies à la sous-section 8.5.1. De plus, avec (10.8), on obtient le montant alloué au risque* 1 *selon la règle d'allocation basée sur la TVaR qui est donnée par*

$$\begin{aligned}
& TVaR_\kappa(X_1; S) \\
= \; & \frac{1+\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{\beta_1}\right)}{\beta_1-\beta_2}+\frac{\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_2 s_0}-\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{(\beta_1-\beta_2)^2}\right) \\
& +\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{2\beta_1}\right)}{2\beta_1-2\beta_2}+\frac{2\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_2 s_0}-2\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}}{(2\beta_1-2\beta_2)^2}\right) \\
& -\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{2\beta_1}\right)}{2\beta_1-\beta_2}+\frac{2\beta_1 \mathrm{e}^{-\beta_2 s_0}-\beta_2 \mathrm{e}^{-2\beta_1 s_0}}{(2\beta_1-\beta_2)^2}\right) \\
& -\frac{\theta}{1-\kappa}\left(-\frac{2\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}\left(s_0+\frac{1}{\beta_1}\right)}{\beta_1-2\beta_2}+\frac{\beta_1 \mathrm{e}^{-2\beta_2 s_0}-2\beta_2 \mathrm{e}^{-\beta_1 s_0}}{(\beta_1-2\beta_2)^2}\right),
\end{aligned}$$

où $s_0 = VaR_\kappa(S)$. □

Dans les exemples précédents, on a traité de cas spécifiques où il est possible d'obtenir une expression analytique pour les contributions calculées selon la règle basée sur la TVaR. Souvent, il n'est pas possible d'y parvenir. On peut alors utiliser la méthode numérique basée sur la discrétisation expliquée au chapitre 9 pour évaluer $TVaR_\kappa(S)$ et les contributions selon la règle de la TVaR. Cette méthode est expliquée en détail dans [7].

10.3.3 Lois multivariées composées

On considère maintenant un vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$ obéissant à une loi composée multivariée où

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{10.13}$$

dont la fonction de masse de probabilité de $(M_1, ..., M_n)$ est donnée par

$$f_{M_1,...,M_n}(m_1, ..., m_n) = \Pr(M_1 = m_1, ..., M_n = m_n) = q_{m_1,...,m_n},$$

pour m_1, ..., $m_n \in \mathbb{N}$. Pour chaque i, $(B_{i,1}, B_{i,2}, ...)$ forme une suite de v.a. i.i.d. Enfin, les suites de v.a. $(B_{1,1}, B_{1,2}, ...)$, $(B_{2,1}, B_{2,2}, ...)$, ..., $(B_{n,1}, B_{n,2}, ...)$ sont indépendantes entre elles et indépendantes du vecteur de v.a. $(M_1, ..., M_n)$. Les v.a. $B_1, B_2, ..., B_n$ sont supposées continues et strictement positives. Les expressions de F_S et $TVaR_\kappa(S)$ sont données par les relations (8.26) et (8.28). Selon la règle basée sur la TVaR, la contribution $TVaR_\kappa(X_i; S)$ du risque X_i est donnée par

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{\substack{m_1=0 \\ \setminus\{m_1=0,...,m_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \times E\left[\left(\sum_{i_i=1}^{m_i} B_{i,i_i}\right) \times 1_{\left\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i_j=1}^{m_j} B_{j,i_j} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right]. \quad (10.14)$$

L'expression (10.14) est intéressante dans le cas où les distributions des v.a. représentant les montants des sinistres appartiennent à une famille de distributions fermées sous la convolution.

Corollaire 10.8 ***Loi composée multivariée avec montants de sinistres de loi gamma.*** *Soient les conditions de la proposition 8.24. L'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_1; S)$ au risque X_1 selon la règle basée sur la TVaR est*

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{m_1=1}^{\infty} ... \sum_{m_n=0}^{\infty} q_{m_1,...,m_n} \frac{m_i \alpha_i}{\beta} \overline{H}\left(VaR_\kappa(S); \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i + 1; \beta\right).$$

□

Corollaire 10.9 ***Loi composée avec montants de sinistres de distribution mélanges d'Erlang****. Soient les conditions de la proposition 8.26. On obtient*

$$E\left[X_1 \times 1_{\{S>b\}}\right] = \sum_{\substack{j_1=0 \\ \setminus\{j_1=0,...,j_n=0\}}}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \frac{j_1}{\beta} \overline{H}\left(b; \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right),$$

qui conduit à l'expression de la contribution à X_1 selon la règle basée sur la TVaR

$$TVaR_\kappa(X_1; S) = \frac{1}{1-\kappa} \sum_{j_1=1}^{\infty} ... \sum_{j_n=0}^{\infty} \xi_{j_1,...,j_n} \frac{j_1}{\beta} \overline{H}\left(VaR_\kappa(S); \sum_{i=1}^{n} j_i + 1; \beta\right).$$

L'exemple suivant est une application de la proposition 8.24 du chapitre 8 et du corollaire 10.8.

Exemple 10.10 *On considère une loi composée bivariée pour* (X_1, X_2) *où la distribution bivariée de* (M_1, M_2) *est définie à l'aide de la copule de Frank et en supposant que* $M_1 \sim Pois\,(4)$ *et* $M_2 \sim NB\left(r = 4, q = \frac{1}{2}\right)$. *On suppose que* $B_1 \sim Ga\,(0.5, 0.1)$ *et* $B_2 \sim Ga\,(0.25, 0.1)$. *On déduit que* $E\,[X_1] = 20$, $E\,[X_2] = 10$ *et* $E\,[S] = 30$. *De plus, on a* $\mathrm{Var}(X_1) = 300$ *et* $\mathrm{Var}\,(X_2) = 150$. *Dans le tableau suivant, on fournit les valeurs de* $\rho_P\,(M_1, M_2)$, $\rho_P\,(X_1, X_2)$ *et* $\mathrm{Var}\,(S)$ *pour* $\alpha = -20,\ 0,\ 20$ *:*

α	$\rho_P\,(M_1, M_2)$	$\rho_P\,(X_1, X_2)$	$\mathrm{Var}\,(S)$
-20	-0.8544	-0.2848	329.1742
0	0	0	450
20	0.8949	-0.2981	576.5658

Les valeurs de $VaR_\kappa(X_i)$ *et* $TVaR_\kappa(X_i)$ $(i = 1, 2)$ *sont fournies pour* $\kappa = 0.25,\ 0.5,\ 0.95,\ 0.99$ *et* 0.995 *dans le tableau ci-dessous :*

κ	$VaR_\kappa(X_1)$	$VaR_\kappa(X_2)$	$\sum_{i=1}^{2} VaR_\kappa(X_i)$
0.25	*6.9217*	*1.0908*	*8.0125*
0.50	*15.7603*	*5.6480*	*21.4083*
0.95	*53.9412*	*34.8943*	*88.8355*
0.99	*76.9342*	*54.8506*	*131.7848*
0.995	*86.4245*	*63.3218*	*149.7463*

κ	$TVaR_\kappa(X_1)$	$TVaR_\kappa(X_2)$	$\sum_{i=1}^{2} TVaR_\kappa(X_i)$
0.25	*25.6606*	*13.2490*	*38.9096*
0.50	*32.8983*	*16.6516*	*49.5499*
0.95	*68.1707*	*47.2722*	*115.4429*
0.99	*90.4176*	*66.9989*	*157.4165*
0.995	*99.6833*	*75.3916*	*175.0749*

Dans le tableau suivant, on présente les valeurs de $VaR_\kappa\,(S)$, $TVaR_\kappa\,(S)$, *ainsi que les contributions calculées selon les règles basées sur la TVaR* $(C_\kappa^{TVaR}\,(X_i) = TVaR_\kappa\,(X_i; S)$, $i = 1, 2)$ *et sur la covariance* $(C_\kappa^{cov}\,(X_i)$, $i = 1, 2)$ *pour* $\alpha = -20$, *0 et 20 :*

α	κ	$VaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(X_1; S)$	$TVaR_\kappa\,(X_2; S)$
-20	*0.25*	*16.6480*	*36.3532*	*24.4554*	*11.8978*
-20	*0.50*	*26.4895*	*43.7817*	*29.8411*	*13.9406*
-20	*0.95*	*64.6230*	*78.4609*	*56.4538*	*22.0071*
-20	*0.99*	*86.9787*	*100.0683*	*73.9654*	*26.1029*
-20	*0.995*	*96.1888*	*109.0645*	*81.4277*	*27.6368*

α	κ	$VaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(S)$	$TVaR_\kappa\,(X_1; S)$	$TVaR_\kappa\,(X_2; S)$
0	*0.25*	*14.1330*	*37.3878*	*24.9954*	*12.4341*
0	*0.50*	*25.7459*	*46.1640*	*30.8236*	*15.3404*
0	*0.95*	*70.6887*	*86.6448*	*57.5097*	*29.1350*
0	*0.99*	*96.4965*	*111.3889*	*73.5011*	*37.8878*
0	*0.995*	*107.0218*	*121.5988*	*80.0301*	*41.5687*

α	κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$	$TVaR_\kappa(X_2;S)$
20	*0.25*	*11.6701*	*38.2026*	*25.3437*	*12.8590*
20	*0.50*	*24.7506*	*48.2819*	*31.6894*	*16.5925*
20	*0.95*	*76.5806*	*94.5817*	*59.6693*	*34.9124*
20	*0.99*	*105.7425*	*122.2356*	*75.9766*	*46.2590*
20	*0.995*	*117.4702*	*133.5039*	*82.5761*	*50.9278*

Les valeurs de $TVaR_\kappa(S)$ *augmentent lorsque le paramètre* α *de dépendance de la copule augmente comme il est prévu par l'application successive des propositions 9.80, 9.83, 9.77 et 7.50. On observe aussi que* $VaR_\kappa(X_1) + VaR_\kappa(X_2) \leq VaR_\kappa(S)$ *pour* $\kappa = 0.25$, *0.5 et pour* $\alpha = -20, 0, 20$. *Pour chaque* $i = 1, 2$, *pour toutes les valeurs de* κ *et pour toutes les valeurs de* α, *les contributions* $TVaR_\kappa(X_i;S)$ *calculées selon la règle basée sur la TVaR sont inférieures aux valeurs de* $TVaR_\kappa(X_i)$ *(*$i = 1, 2$*). On remarque, pour* $\kappa = 0.995$, *que les bénéfices d'agrégation sont* $175.0749 - 109.0645 = 66.0104$, $175.0749 - 121.5988 = 53.4761$ *et* $175.0749 - 133.5039 = 41.5710$. □

Dans l'exemple suivant, on traite du cas de lois composées multivariées avec des montants de sinistres définis sur un support arithmétique.

Exemple 10.11 ***Suite de l'exemple 8.27****. Dans le tableau suivant, on fournit les valeurs des contributions déterminées selon la règle basée sur la TVaR :*

κ	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$	$TVaR_\kappa(X_1;S)$
95 %	*170 000*	*215 188.9*	*87 427.8*	*127 761.1*
99 %	*240 000*	*282 509.1*	*116 337.9*	*166 171.2*

□

On poursuit en considérant dans le prochain exemple un cas de lois composées multivariées avec des montants des sinistres continus que l'on a approximés par des v.a. définies sur un support arithmétique.

Exemple 10.12 ***(Suite de l'exemple 8.31).*** *Pour le portefeuille de 2 lignes d'affaires décrit à l'exemple 8.31), on a obtenu les résultats suivants :*

κ	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_1\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_2\right)$	$TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$
95 %	*380.5665*	*277.1934*	*573.1105*
99.5 %	*510.7144*	*372.3530*	*750.0120*

Le capital pour le portefeuille correspond à l'approximation $TVaR_\kappa\left(\widetilde{S}\right)$. *Les contributions calculées selon les règles basées sur la TVaR et sur la covariance sont fournies dans le tableau suivant :*

κ	$C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_1\right)$	$C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_2\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_1\right)$	$C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_2\right)$
95 %	*348.3879*	*224.7226*	*326.1799*	*246.9307*
99.5 %	*460.5728*	*289.4393*	*426.5834*	*323.4287*

où $C_\kappa^{TVaR}\left(\widetilde{X}_i\right) = TVaR_\kappa\left(\widetilde{X}_i;\widetilde{S}\right)$ *et* $C_\kappa^{cov}\left(\widetilde{X}_i;\widetilde{S}\right)$, $i = 1, 2$. □

10.3.4 Loi Poisson composée multivariée

Pour déterminer la contribution $TVaR_{\kappa}(X_i;S)$ pour chaque risque, la relation en (10.14) peut devenir difficile d'application quand le nombre n de risques devient grand. Néanmoins, dans le cas où $(X_1,...,X_n)$ obéit à la loi Poisson composée multivariée décrite en 8.8, il est possible de miser sur la construction expliquée en 8.6.1 de la loi de $(M_1,...,M_n)$ pour déterminer l'expression de la contribution $TVaR_{\kappa}(X_i;S)$. On doit établir la distribution conjointe de (X_i,S_{-i}) dont les composantes sont définies par

$$X_i = \begin{cases} \sum_{k_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases}, \tag{10.15}$$

et $S_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} X_l$. La f.g.m. $M_{S_{-i}}(r)$ de S_{-i} est donnée par

$$\begin{aligned} M_{S_{-i}}(r) &= \mathrm{e}^{\alpha_0\left(\prod_{l=1,l\neq i}^{n} M_{B_l}(r)-1\right)} \prod_{l=1,l\neq i}^{n} \mathrm{e}^{(\lambda_l-\alpha_0)\left(M_{B_l}(r)-1\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\alpha_0\left(M_{C_{-i}}(r)-1\right)}\mathrm{e}^{\lambda_{-i}\left(M_{D_{-i}}(r)-1\right)}, \end{aligned} \tag{10.16}$$

où $M_{C_{-i}}(r) = \prod_{l=1,l\neq i}^{n} M_{B_l}(r)$, $M_{D_{-i}}(r) = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} \frac{\lambda_l-\alpha_0}{\lambda_{-i}} M_{B_l}(r)$ et $\lambda_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} \lambda_l - \alpha_0$.

L'expression en (10.16) implique que les fonctions de répartition de C_{-i} et D_{-i} sont

$$F_{C_{-i}}(x) = F_{\sum_{l=1,l\neq i}^{n} B_l}(x) \tag{10.17}$$

et

$$F_{D_{-i}}(x) = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} \frac{\lambda_l-\alpha_0}{\sum_{l=1,l\neq i}^{n}(\lambda_l-\alpha_0)} F_{B_l}(x). \tag{10.18}$$

Soit la v.a. $J_{-i} = \sum_{l=1,l\neq i}^{n} K_l \sim Pois(\lambda_{-i})$, où J_{-i} est interprétée comme la somme des chocs individuels provenant de tous les risques à l'exception du $i-$ième risque. Alors, la v.a. S_{-i} peut être écrite comme la somme de deux composantes. La première d'entre elles est associée aux sinistres liés aux chocs individuels alors que la deuxième composante correspond aux sinistres liés au choc commun. Il en résulte que

$$S_{-i} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J_0} C_{-i,j}, & J_0 > 0 \\ 0, & J_0 = 0 \end{cases} + \begin{cases} \sum_{j_{-i}=1}^{J_{-i}} D_{-i,j_{-i}}, & J_{-i} > 0 \\ 0, & J_{-i} = 0 \end{cases}, \tag{10.19}$$

où $C_{-i,1} \sim ... \sim C_{-i,j} \sim C_{-i}$ et $D_{-i,1} \sim ... \sim D_{-i,n_{-i}-j} \sim D_{-i}$.

Ensuite, on définit la paire (M_i, N_{-i}) avec les composantes

$$\begin{aligned} M_i &= K_i + K_0, \\ N_{-i} &= J_{-i} + K_0, \end{aligned}$$

où J_{-i}, K_i et K_0 sont indépendantes. La fonction de masse de probabilité conjointe de (M_i, N_{-i}) est donnée par

$$f_{M_i,N_{-i}}(k_i, n_{-i}) = \sum_{j=0}^{\min(k_i;n_{-i})} f_{J_i}(k_i - j)\, f_{J_{-i}}(n_i - j)\, f_{J_0}(j), \quad (10.20)$$

pour k_i, $n_{-i} \in \mathbb{N}$.

Enfin, nous avons tous les ingrédients pour développer l'expression de la contribution $TVaR_\kappa(X_i; S)$.

Proposition 10.13 *L'expression de la contribution* $TVaR_\kappa(X_i; S)$ *(*$i = 1, 2, ..., n$*) est*

$$\frac{1}{1-\kappa} \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{n_{-i}=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(k_i,n_{-i})} \vartheta_1(k_i - j, n_{-i} - j, j)\, \vartheta_2(k_i - j, n_{-i} - j, j), \quad (10.21)$$

où

$$\vartheta_1(k_i - j, n_{-i} - j, j) = f_{K_i}(k_i - j)\, f_{J_{-i}}(n_{-i} - j)\, f_{K_0}(j)$$

et

$$\begin{aligned} &\vartheta_2(k_i - j, n_{-i} - j, j) \\ &= E\left[\left(\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l}\right) \times 1_{\left\{\sum_{l=1}^{k_i} B_{i,l} + \sum_{m=1}^{n_{-i}-j} D_{-i,m} + \sum_{r=1}^{j} C_{-i,r} > VaR_\kappa(S)\right\}}\right] \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant (10.20), (10.15) et (10.19), on obtient (10.21). ■

Les résultats de la proposition 8.30 et de la proposition 10.13 sont mis en pratique dans l'exemple suivant.

Exemple 10.14 *On considère un portefeuille de* $n_1 + n_2$ *risques* $X_1, ..., X_{n_1+n_2}$*. On définit* $S = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i$ *où* $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$*,* $\lambda_i = 0.003$ *pour* $i = 1, ..., n_1$ *et* $\lambda_i = 0.004$*, pour* $i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$*. Aussi, on suppose que* $B_i \sim Ga\left(\gamma_i, \frac{1}{1000}\right)$*,* $\gamma_i = 2$ *pour* $i = 1, ..., n_1$ *et* $\gamma_i = 1$*, pour* $i = n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$*. Les valeurs de* $E[X_i]$*,* $\mathrm{Var}(X_i)$*,* $VaR_{0.995}(X_i)$ *et* $TVaR_{0.995}(X_i)$ *sont fournies dans le tableau suivant*

pour $i = 1, ..., n_1 + n_2$ *:*

i	$E[X_i]$	$\mathrm{Var}(X_i)$	$VaR_{0.995}(X_i)$	$TVaR_{0.995}(X_i)$
$1, ..., n_1$	6	18 000	0	1200
$n_1 + 1, ..., n_1 + n_2$	4	8000	0	800

On sait que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \alpha_0 E[B_i] E[B_j]$ *pour* $i \neq j$*. Alors,* $E[S] = n_1 6 + n_2 4$ *et*

$$\mathrm{Var}(S) = n_1 18\,000 + n_2 8000 + n_1 (n_1 - 1) \alpha_0 6^2 + n_2 (n_2 - 1) \alpha_0 4^2 + n_1 n_2 6 \times 4.$$

Les valeurs de $VaR_\kappa(S)$*,* $TVaR_\kappa(S)$ *et* $TVaR_\kappa(X_i; S)$ *(*$i = 1, n_1 + 1$*) pour* $\kappa = 0.995$ *sont fournies dans le tableau suivant :*

$\alpha_0 = 0$					
n_1	n_2	$VaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(S)$	$TVaR_\kappa(X_1; S)$	$TVaR_\kappa(X_{n_1+1}; S)$
10	10	3652.76	4878.43	376.61	111.23
100	100	8139.83	9683.90	73.48	23.36
500	500	17 492.66	19 695.98	27.90	11.49
$\alpha_0 = 0.001$					
10	10	3435.55	9730.09	678.48	294.53
100	100	7386.39	67 204.62	453.85	218.20
500	500	14 831.62	314 154.66	419.58	208.73
$\alpha_0 = 0.002$					
10	10	3018.49	14 541.84	971.43	482.76
100	100	6392.17	124 789.34	883.89	414.00
500	500	11 685.90	608 843.80	811.43	406.26

On observe que $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} VaR_{0.995}(X_i) = 0$ *pour toute valeur de* n_1*,* $n_2 \in \mathbb{N}^+$*;* $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} TVaR_{0.995}(X_i) = n_1 1200 + n_2 800$ *pour toute valeur de* n_1 *et* n_2*. De plus, on mentionne que* $VaR_{0.995}(S) > 0 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} VaR_{0.995}(X_i)$ *pour toute valeur de* n_1*,* $n_2 \in \mathbb{N}^+$*, ce qui met en évidence le problème d'incohérence de la mesure VaR. Aussi, on observe* $TVaR_{0.995}(S) \leq \sum_{i=1}^{n} TVaR_{0.995}(X_i) = n_1 1200 + n_2 800$ *pour toute valeur de* n_1*,* $n_2 \in \mathbb{N}^+$*. On constate que la contribution de chaque risque calculée selon la règle de la TVaR décroît en fonction de* n_1 *et de* n_2*. Le bénéfice d'agrégation des risques augmente avec* n_1 *et* n_2 *mais il décroît lorsque le paramètre de dépendance* α_0 *augmente.* □

10.3.5 Méthode numérique basée sur la simulation

On considère un portefeuille d'un nombre n élevé de risques représentés par le vecteur de v.a. $(X_1, ..., X_n)$. Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Pour parvenir à évaluer les différentes quantités de risque (e.g. mesures de risque, mesures de solvabilité, primes *stop-loss*, etc.) définies en fonction des coûts totaux du portefeuille et à évaluer les contributions associées à chaque risque, il arrive en pratique que la seule possibilité repose sur les méthodes fondées sur la simulation stochastique. Dans cette section, on explique la procédure pour

évaluer approximativement les contributions selon les règles basées sur la covariance, sur la VaR et sur la TVaR.

On suppose que l'on a produit les réalisations

$$\left\{\left(X_1^{(j)},...,X_n^{(j)}\right), j=1,2,...,m\right\}$$

de $(X_1,...,X_n)$ et $\left\{S^{(j)}, j=1,2,...,m\right\}$ de S.

La valeur de $VaR_\kappa(S)$ est déterminée approximativement par $F_n^{-1}(\kappa)$ où F_n est la fonction de répartition empirique déterminée à partir des réalisations $\left\{S^{(j)}, j=1,2,...,m\right\}$. On fixe $VaR_\kappa(S) \simeq \widehat{VaR}_\kappa(S) = F_m^{-1}(\kappa) = s_0$. On rappelle l'expression en (5.4) de l'approximation de $TVaR_\kappa(S)$:

$$\widehat{TVaR}_\kappa(S) \simeq \frac{1}{1-\kappa}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} S^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}>s_0\right\}} + s_0\left(F_m(s_0)-\kappa\right)\right).$$

À partir des réalisations $\left\{\left(X_1^{(j)},...,X_n^{(j)}\right), j=1,2,...,m\right\}$, on a aussi construit la matrice variance-covariance empirique désignée par

$$\begin{pmatrix} \widehat{\mathrm{Var}}(X_1) & \widehat{\mathrm{Cov}}(X_1,X_2) & \cdots & \widehat{\mathrm{Cov}}(X_1,X_n) \\ \widehat{\mathrm{Cov}}(X_1,X_2) & \widehat{\mathrm{Var}}(X_2) & \cdots & \widehat{\mathrm{Cov}}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\mathrm{Cov}}(X_1,X_n) & \widehat{\mathrm{Cov}}(X_2,X_n) & \cdots & \widehat{\mathrm{Var}}(X_n) \end{pmatrix}.$$

La contribution au risque X_i selon la règle basée sur la covariance est évaluée par l'approximation

$$\begin{aligned} \widehat{C}_\kappa^{cov}(X_i) &= E[X_i] \\ &\quad + \frac{\widehat{\mathrm{Var}}(X_i) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \widehat{\mathrm{Cov}}(X_1,X_n)}{\widehat{\mathrm{Var}}(S)}\left(\widehat{\varsigma}_\kappa(S) - E[S]\right), \end{aligned}$$

qui est adaptée de (10.1) et (10.2).

On utilise (10.3) et (10.4) pour déduire les approximations des contributions au risque X_i selon les règles basées sur la VaR et la TVaR qui sont données respectivement par

$$\widehat{VaR}_\kappa(X_i;S) = \frac{\sum_{j=1}^{m} X_i^{(j)} \times 1_{\left\{S^{(j)}=s_0\right\}}}{\sum_{j=1}^{m} 1_{\left\{S^{(j)}=s_0\right\}}},$$

et

$$\begin{aligned}
&\widehat{TVaR}_{\kappa}\left(X_i;S\right)\\
=\;&\frac{1}{(1-\kappa)\,m}\sum_{j=1}^{m}X_i^{(j)}\times 1_{\left\{S^{(j)}>s_0\right\}}\\
&+\frac{1}{(1-\kappa)\,m}\sum_{j=1}^{m}X_i^{(j)}\times 1_{\left\{S^{(j)}=s_0\right\}}\frac{\left(\left(F_m\left(s_0\right)-\kappa\right)\right)}{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}1_{\left\{S^{(j)}=s_0\right\}}},
\end{aligned}$$

pour $i=1,2,...,n$, où $\widehat{\varsigma}_{\kappa}\left(S\right)$ désignent $\widehat{VaR}_{\kappa}\left(S\right)$ ou $\widehat{TVaR}_{\kappa}\left(S\right)$. Dans certaines applications, s'il n'est pas possible de calculer les valeurs exactes de $E\left[X_1\right]$, ..., $E\left[X_n\right]$ et $E\left[S\right]$, on les remplace par leurs valeurs empiriques correspondantes.

Exemple 10.15 *Soit le couple v.a.* (X_1,X_2) *dont la distribution conjointe est définie par la copule de survie de Clayton* ($\alpha=10$) *et où* $X_1\sim LN\left(5,2^2\right)$ *et* $X_2\sim Pa\left(2.5,1500\right)$. *On a produit les réalisations des v.a. indépendantes* $V_1\sim V_2\sim U\left(0,1\right)$. *On a utilisé la méthode conditionnelle pour obtenir les réalisations* $\left(U_1^{(j)},U_2^{(j)}\right)$ *du couple de v.a. uniforme* (U_1,U_2) *dont la fonction de répartition est la copule inverse de Clayton. Les réalisations* $\left(X_1^{(j)},X_2^{(j)}\right)$ *de* (X_1,X_2) *sont produites par la méthode inverse. On a obtenu les résultats suivants :*

j	$V_1^{(j)}$	$V_2^{(j)}$	$U_1^{(j)}$	$U_2^{(j)}$	$X_1^{(j)}$	$X_2^{(j)}$	$S^{(j)}$
1	*0.13*	*0.41*	*0.13*	*0.11718445*	*15.5991*	*76.6790*	*92.2781*
2	*0.69*	*0.55*	*0.69*	*0.69199324*	*400.0945*	*902.5208*	*1302.6153*
3	*0.33*	*0.57*	*0.33*	*0.34055277*	*61.56993*	*271.8185*	*333.3888*
4	*0.89*	*0.72*	*0.89*	*0.89825239*	*1725.1275*	*2241.8087*	*3966.9368*
5	*0.67*	*0.31*	*0.67*	*0.63844369*	*357.7471*	*753.3097*	*1111.0568*
6	*0.19*	*0.08*	*0.19*	*0.04871314*	*25.6414*	*30.2651*	*55.9064*
7	*0.78*	*0.63*	*0.78*	*0.78830205*	*695.3299*	*1291.2877*	*1986.6178*
8	*0.51*	*0.86*	*0.51*	*0.58263051*	*156.0440*	*627.5657*	*783.6097*
9	*0.34*	*0.54*	*0.34*	*0.34267343*	*65.0446*	*274.1028*	*339.1474*
10	*0.23*	*0.77*	*0.23*	*0.30722565*	*33.8624*	*237.2189*	*271.0813*

On désigne par $S^{\{1\}}$, ..., $S^{\{10\}}$ *l'ensemble des réalisations triées en ordre croissant de* S. *On obtient* $\widehat{VaR}_{0.7}\left(S\right)=S^{\{7\}}=1111.0568$. *Le montant* $\widehat{TVaR}_{0.75}\left(S\right)=2418.7233$ *correspond à la moyenne empirique des 3 réalisations les plus élevées de* S, *soit* $S^{\{8\}}$, $S^{\{9\}}$ *et* $S^{\{10\}}$. *Les montants* $\widehat{VaR}_{0.7}\left(X_1;S\right)=357.7471$ *et* $\widehat{VaR}_{0.7}\left(X_2;S\right)=753.3097$ *sont les réalisations de* X_1 *et* X_2 *qui ont contribué à* $S^{\{7\}}$. *Le montant* $\widehat{TVaR}_{0.7}\left(X_i;S\right)$ *est donné par la moyenne empirique des 3 réalisations de* X_i ($i=1,2$) *ayant contribué à* $S^{\{8\}}$, $S^{\{9\}}$ *et* $S^{\{10\}}$. *On obtient* $\widehat{TVaR}_{0.7}\left(X_1;S\right)=940.1840$ *et* $\widehat{TVaR}_{0.7}\left(X_2;S\right)=1478.5393$. □

Il est clair d'après l'exemple 10.15 que le calcul des contributions selon les règles basées sur la VaR et la TVaR sont faciles à réaliser même pour un portefeuille comportant un nombre n élevé de risques (e.g. $>$ 1000). En revanche, pour appliquer la règle basée sur la covariance, il est requis de calculer la matrice variance-covariance empirique pour toutes les combinaisons du portefeuille ($\frac{n\times(n-1)}{2}$), ce qui peut rapidement devenir difficile d'un point de vue pratique.

Il faut être prudent dans l'application de la simulation stochastique pour l'évaluation des contributions selon les règles basées sur la VaR et la TVaR. Dans le premier cas, elle peut conduire à des résultats aberrants. Pour le deuxième cas, il faut s'assurer que le nombre $(1-\kappa)\,m$ soit assez grand pour obtenir une approximation fiable de $TVaR_{\kappa}(S)$ et des contributions $TVaR_{\kappa}(X_1;S)$, ..., $TVaR_{\kappa}(X_n;S)$.

10.3.6 Allocation et positions financières

On considère un investisseur avec un portefeuille composé de positions financières. On a $L_{TOT} = \sum_{i=1}^{m} L_i$ où la v.a. L_i correspond à la perte que l'investisseur peut encourir pour la position i sur une courte période h. La perte pour la position i est définie par la v.a. $L_i = V_i(0) - V_i(1)$ où $V_i(0)$ est la valeur de la position i au temps 0 (connue au temps 0 et donc une constante) et la v.a. $V_i(1)$ est la valeur de la position à la durée 1. La durée h dépend du contexte. Elle peut être d'une journée, d'une semaine, d'un mois, etc. L'investisseur détermine le capital associé à l'ensemble du portefeuille et la part allouée à chaque position. Il suffit d'utiliser les règles d'allocation en remplaçant la v.a. S par la v.a. L_{TOT} et les v.a. X_i par les v.a. L_i $(i = 1, ..., n)$.

10.4 Notes bibliographiques

Pour une introduction aux notions concernant l'allocation de capital, on recommande [2], [81] et [100]. Pour des applications en actuariat et en gestion quantitative des risques de la règle d'allocation basée sur la TVaR, on peut consulter e.g. [7], [12], [14], [19], [32], [44], [45] et [70].

10.5 Exercices

1. On considère un portefeuille constitué de trois risques dont les coûts sont représentés par les v.a. indépendantes X_1, X_2 et X_3. Les fonctions de masse de probabilité de X_1, X_2 et X_3 sont données dans

le tableau ci-dessous :7

k	$\Pr(X_1 = 1000k)$	$\Pr(X_2 = 1000k)$	$\Pr(X_3 = 1000k)$
0	0.7	0.5	0.2
1	0.25	0.3	0.3
2	0.05	0.2	0.5

Les coûts pour l'ensemble du portefeuille sont définis par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$.

(a) Calculer $\Pr(S = 1000k)$ pour $k = 0, 1, ..., 6$.

(b) Calculer $VaR_{0.95}(S)$.

(c) Calculer $TVaR_{0.95}(S)$.

(d) En utilisant la règle d'allocation basée sur la covariance, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque risque.

(e) En utilisant la règle d'allocation basée sur la $TVaR$, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque risque, $TVaR_{0.95}(X_1 ; S)$, $TVaR_{0.95}(X_2 ; S)$ et $TVaR_{0.95}(X_3 ; S)$.

2. On considère un portefeuille d'une compagnie d'assurance constitué de 3 lignes d'affaires. Les coûts totaux pour la ligne d'affaires i sont représentés par la v.a. X_i où $X_i \sim Ga\left(2^{i-1}, \frac{1}{20000}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$. Les v.a. X_1, X_2, X_3 sont indépendantes. Le montant total des coûts pour l'ensemble du portefeuille est défini par la v.a. $S = \sum_{i=1}^{3} X_i$. Le capital total requis pour l'ensemble du portefeuille est calculé à l'aide de la $TVaR_\kappa(S)$. Le bénéfice de diversification correspond à

$$B_\kappa^{TVaR}(S) = \sum_{i=1}^{3} TVaR_\kappa(X_i) - TVaR_\kappa(S).$$

La contribution allouée à chaque ligne d'affaires est calculée selon la règle basée sur la $TVaR$.

(a) Calculer $VaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $VaR_{0.995}(S)$.

(b) Calculer $TVaR_{0.995}(X_i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $TVaR_{0.995}(S)$.

(c) Déterminer $B_\kappa^{TVaR}(S)$. Commenter.

(d) En utilisant la règle d'allocation basée sur la $TVaR$, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque ligne d'affaires. Est-ce que la part allouée à la ligne $i \geq TVaR_{0.995}(X_i)$ ou $\leq TVaR_{0.995}(X_i)$? Commenter.

3. On considère deux v.a. X_1 et X_2 indépendantes avec $X_i \sim Exp(\beta_i)$ pour $i = 1, 2$ et $\beta_1 = 0.1$ et $\beta_2 = 0.2$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

(b) Calculer les parts allouées du capital total déterminé avec $TVaR_{0.99}(S)$ aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la $TVaR$.

4. On considère une loi composée bivariée pour (X_1, X_2) où la distribution bivariée de (M_1, M_2) est définie à l'aide de la copule de Gumbel (avec un paramètre de dépendance $\alpha = 5$) et en supposant que $M_1 \sim Pois(3)$ et $M_2 \sim NB\left(r = 2, q = \frac{2}{5}\right)$. On suppose que $B_1 \sim Ga(0.5, 0.1)$ et $B_2 \sim Ga(0.25, 0.1)$. On définit $S = X_1 + X_2$.

(a) Calculer $E[X_1]$, $E[X_2]$ et $E[S]$.

(b) Calculer $\text{Var}(X_1)$ et $\text{Var}(X_2) = 150$.

(c) Calculer $\text{Cov}(M_1, M_2)$, $corr(M_1, M_2)$, $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et $\text{Var}(S)$ pour $\alpha = 5$.

(d) Calculer $VaR_\kappa(X_i)$ et $TVaR_\kappa(X_i)$ $(i = 1, 2)$ pour $\kappa = 0.995$.

(e) Calculer $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.995$.

(f) Le capital total est établi avec $TVaR_{0.995}(S)$. Calculer les parts allouées aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la covariance.

(g) Le capital total est établi avec $TVaR_{0.995}(S)$. Calculer les parts allouées aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

5. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la distribution conjointe est définie par la copule de Gumbel ($\alpha = 2$) et où $X_1 \sim LN\left(5, 2^2\right)$ et $X_2 \sim Pa(2.5, 1500)$. On a produit les réalisations des v.a. indépendantes $V_1 \sim V_2 \sim U(0, 1)$. On a utilisé la méthode conditionnelle pour obtenir les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ du couple de v.a. uniforme (U_1, U_2) dont la fonction de répartition est la copule de Gumbel. Les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ de (X_1, X_2) sont produites par la méthode inverse. On a obtenu les résultats suivants :

j	$V_1^{(j)}$	$V_2^{(j)}$	j	$V_1^{(j)}$	$V_2^{(j)}$
1	0.13	0.41	6	0.19	0.08
2	0.69	0.55	7	0.78	0.63
3	0.33	0.57	8	0.51	0.86
4	0.89	0.72	9	0.34	0.54
5	0.67	0.31	10	0.23	0.77

(a) Produire les réalisations $\left(U_1^{(j)}, U_2^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2, ..., 10$.

(b) Produire les réalisations $\left(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}\right)$ pour $j = 1, 2, ..., 10$.

(c) Calculer l'approximation de $VaR_{0.75}(S)$ et de $TVaR_{0.75}(S)$.

(d) Le capital associé à S est évalué avec $TVaR_{0.75}(S)$. Calculer l'approximation des parts allouées aux risques X_1 et X_2 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

6. Soit le couple de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Clayton (paramètre de dépendance $\alpha = 2$), $X_1 \sim N\left(0.08, 0.2^2\right)$ et $X_1 \sim N\left(0.1, 0.3^2\right)$. La v.a. X_i représente le rendement instantané du titre $i = 1, 2$. On définit la v.a. $L = V(0) - V(1)$ où $V(0) = v_1 + v_2$ et $V(1) = v_1 e^{X_1} + v_2 e^{X_2}$ avec $v_1 = v_2 = 1000$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 avec $x_0 = 343\,463\,463$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1, X_2) en utilisant la méthode conditionnelle pour résoudre les questions demandées. La valeur de $E[L]$ est -261.2104883. Les premières réalisations de X_1, X_2 et L sont 0.18536871, 0.14072057 et -354.76510. On définit $L = L_1 + L_2$ avec $L_i = v_i - v_i e^{X_i}$, $i = 1, 2$.

(a) Calculer les approximations de $\text{Cov}(X_1, X_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.

(b) Calculer les approximations de $\text{Cov}(L_1, L_2)$ et $\rho_P(X_1, X_2)$.

(c) Calculer les approximations de $E[L]$ et $\text{Var}(L)$.

(d) Calculer les approximations de $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$ pour $\kappa = 0.995$.

(e) Calculer les approximations des parts allouées aux pertes L_1 et L_2 selon la règle d'attribution basée sur la covariance.

(f) Calculer les approximations des parts allouées aux risques L_1 et L_2 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

7. Soit le vecteur de v.a. (X_1, X_2, X_3) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule multivariée C, $X_1 \sim LN\left(5, 2^2\right)$, $X_2 \sim Ga\left(0.5, \frac{1}{500}\right)$ et $X_3 \sim Pa(3.5, 2500)$. On suppose que $\tau(X_1, X_2) = 0.5$, $\tau(X_1, X_3) = 0.7$ et $\tau(X_2, X_3) = 0.3$. On définit la v.a. $S = X_1 + X_2 + X_3$. On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 avec $x_0 = 343463463$. On produit dans l'ordre 100 000 réalisations de (X_1, X_2, X_3) en utilisant la méthode de simulation propre à chaque copule afin de produire les 100 000 réalisations de S. La valeur de $E[S]$ est 2346.633158.

(a) La copule C est la copule normale. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 425.67965, 145.6160393 et 935.314.

i. Calculer les approximations de $E[S]$ et $\text{Var}(S)$.

ii. Calculer les approximations de $\text{Cov}(X_i, X_j)$ et $r(X_i, X_j)$ (pour $i \neq j$).

iii. Calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.995$.

iv. Calculer les approximations des parts allouées aux risques X_1, X_2 et X_3 selon la règle d'attribution basée sur la covariance.

v. Calculer les approximations des parts allouées aux risques X_1, X_2 et X_3 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

(b) La copule C est la copule de Student avec $\nu = 4$. Les premières réalisations de X_1, X_2 et X_3 sont 643.5938, 161.552453 et 1148.110.

i. Calculer les approximations de $E[S]$ et $\text{Var}(S)$.

ii. Calculer les approximations de $\text{Cov}(X_i, X_j)$ et $r(X_i, X_j)$ (pour $i \neq j$).

iii. Calculer les approximations de $VaR_\kappa(S)$ et $TVaR_\kappa(S)$ pour $\kappa = 0.995$.

iv. Calculer les approximations des parts allouées aux risques X_1, X_2 et X_3 selon la règle d'attribution basée sur la covariance.

v. Calculer les approximations des parts allouées aux risques X_1, X_2 et X_3 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

8. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) ayant une distribution composée bivariée avec

$$X_i = \begin{cases} \sum_{j_i=0}^{M_i} B_{i,j_i}, & M_i > 0 \\ 0, & M_i = 0 \end{cases},$$

où la paire de v.a. (M_1, M_2) obéit à une loi de Poisson bivariée avec $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\alpha_0 = 2$. Pour chaque i, $(B_{i,1}, B_{i,2}, , ...)$ forme une suite de v.a. i.i.d.. Les suites $(B_{1,1}, B_{1,2}, , ...)$ et $(B_{2,1}, B_{2,2}, , ...)$ sont indépendantes entre elles et indépendantes de (M_1, M_2). De plus, $B_{1,1} \sim B_{1,2} \sim ... \sim B_1 \sim Ga\left(3, \frac{1}{10}\right)$ et $B_{2,1} \sim B_{2,2} \sim ... \sim B_2 \sim Ga\left(2, \frac{1}{10}\right)$.

(a) Développer les expressions de $E[X_i]$ $\text{Var}(X_i)$ $(i = 1, 2)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2)$. Indiquer la loi X_i pour $i = 1, 2$.

(b) Développer les expressions de $F_S(x)$, $TVaR_\kappa(S)$ et

$$TVaR_\kappa(X_i\ ; S).$$

(c) Calculer $E[S]$ et $\text{Var}(S)$.

(d) Calculer $\Pr(S > 100)$.

(e) Calculer $VaR_{0.99}(S)$ et $TVaR_{0.99}(S)$.

(f) En utilisant la règle d'allocation basée sur la covariance, la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque risque.

(g) En utilisant la règle d'allocation basée sur la $TVaR$, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque risque (avec $\kappa = 0.99$).

9. Au temps 0, un investisseur détient 100 dans l'indice 1 et 100 dans l'indice 2. Les deux indices sont considérés comme des titres financiers avec risque. Au temps 0, la valeur totale $V(0)$ de son portefeuille est de 200. On examine l'évolution de son portefeuille pendant deux périodes. L'évolution des deux titres est indiquée avec $S_i(t) = R_i(t) \times S_i(t-1)$ pour $t = 1, 2$ avec $S_1(0) = S_2(0) = 100$. Les couples de v.a. $(R_1(1), R_2(1))$ et $(R_1(2), R_2(2))$ sont i.i.d. avec les valeurs de $\Pr(R_1(1) = r_1, R_2(1) = r_2)$ fournies dans le tableau ci-dessous :

$r_2 \mid r_1$	1.3	0.7
1.2	0.2	0.3
0.9	0.4	0.1

L'investisseur ne modifie pas la composition de son portefeuille pendant les deux périodes et il n'ajoute ou ne retire pas d'argent. La valeur du portefeuille au temps t est $V(t) = S_1(t) + S_2(t)$ pour $t = 0, 1, 2$. On définit la perte par

$$L = V(0) - V(2) = L_1 + L_2,$$

où une perte négative représente un gain et $L_i = S_i(0) - S_i(2)$ (pour $i = 1, 2$).

(a) Calculer $E[L_1]$, $E[L_2]$, $E[L]$, $\mathrm{Var}(L_1)$, $\mathrm{Var}(L_2)$, $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$ et $\mathrm{Var}(L)$.

(b) Déterminer les valeurs possibles l de la v.a. L et les valeurs de la fonction de masse de probabilité f_L de L.

(c) Calculer $\Pr(L > 0)$. Calculer $VaR_{0.95}(L)$ et $TVaR_{0.95}(L)$.

(d) En utilisant la règle d'allocation basée sur la covariance, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque perte L_1 et L_2.

(e) En utilisant la règle d'allocation basée sur la $TVaR$, calculer la part (du capital total déterminé avec $TVaR_{0.95}(S)$) allouée à chaque perte L_1 et L_2, $TVaR_{0.95}(L_1 ; L)$ et $TVaR_{0.95}(L_2 ; L)$.

10. Soit la paire de v.a. (X_1, X_2) dont la fonction de répartition conjointe est définie par la copule de Clayton (paramètre de dépendance $\alpha = 5$), $X_1 \sim N(0.0040, 0.044^2)$ et $X_2 \sim N(0.0006, 0.047^2)$. La v.a. X_i représente le rendement mensuel instantané de l'indice $i = 1, 2$.

On définit la v.a. $L = V(0) - V(1)$ où $V(0) = v_1 + v_2$ et $V(1) = v_1 e^{X_1} + v_2 e^{X_2}$ avec $v_1 = v_2 = 2000$.

On a recours au GNPA défini à l'algorithme 5.1 avec $x_0 = 20\,111\,221$. On produit dans l'ordre $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2) en utilisant la méthode conditionnelle afin de produire les 1000 réalisations de L. On définit $L = L_1 + L_2$ avec $L_i = v_i - v_i e^{X_i}$, $i = 1, 2$.

En simulant dans l'ordre les paires de réalisations indépendantes de la loi uniforme standard, on doit obtenir

j	$V_1^{(2j-1)}$	$V_2^{(2j)}$
1	0.318375756	0.384504876
2	0.352653871	0.058777102
...		
1000	0.601626189	0.055934591

(a) Produire $m = 1000$ réalisations de (U_1, U_2) à partir de la copule de Clayton en ayant recours à la méthode conditionnelle. Indiquer les réalisations 1 et 2 de (U_1, U_2).

(b) À partir des $m = 1000$ réalisations de(U_1, U_2), produire $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2). Indiquer les réalisations 1 et 2 de (X_1, X_2).

(c) À partir des $m = 1000$ réalisations de (X_1, X_2), produire $m = 1000$ réalisations de (L_1, L_2). Indiquer les réalisations 1 et 2 de (L_1, L_2).

(d) À partir des $m = 1000$ réalisations de (L_1, L_2), produire $m = 1000$ réalisations de L. Indiquer les réalisations 1 et 2 de L.

(e) On utilise les $m = 1000$ réalisations de (L_1, L_2) et L pour faire les calculs qui suivent.

i. Calculer les approximations de $E[L_i]$, $\mathrm{Var}(L_i)$ $(i = 1, 2)$, $E[L]$ et $\mathrm{Var}(L)$.

ii. Calculer les approximations de $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$ et $\rho_P(L_1, L_2)$ (coefficient de corrélation de Pearson).

iii. Calculer les approximations de $VaR_\kappa(L)$ et $TVaR_\kappa(L)$ pour $\kappa = 0.99$.

iv. Calculer les approximations des parts de $TVaR_{0.99}(L)$ (le capital a été calculé selon la TVaR) allouées aux pertes L_1 et L_2 selon la règle d'attribution basée sur la covariance.

v. Calculer les approximations des parts de $TVaR_{0.99}(L)$ (le capital a été calculé selon la TVaR) allouées aux risques L_1 et L_2 selon la règle d'attribution basée sur la TVaR.

10.6 Réponses

1. Réponses à la question 1 :
   (a) 0.07 ; 0.172 ; 0.3235 ; 0.2525 ; 0.1415 ; 0.0355 ; 0.005
   (b) 4000
   (c) 4910
   (d) $C_1 = 891.7771$; $C_2 = 1709.1115$; $C_3 = 2309.1115$
   (e) 1241.5194 ; 1760.0353 ; 1908.4452

2. Réponses à la question 2 :
   (a) 105 966.3 ; 148 602.6 ; 219 549.5 ; 313 193.5
   (b) 125 966.3 ; 170 975.0 ; 245 371.7 ; 342 906.7
   (c) 1 999 406.4
   (d) 48 986.67 ; 97 973.33 ; 195 946.67

3. Réponses à la question 3 :
   (a) 52.958 ; 62.97
   (b) 53.117 ; 9.854

4. Réponses à la question 4 :
   (a) 15 ; 7.5 ; 22.5
   (b) 225 ; 182.8125
   (c) 4.37233 ; 0.756206 ; 54.65413 ; 517.1208
   (d) $i = 1$: 75.18044, 87.7266 ; $i = 2$: 58.6805, 70.9453
   (e) 110.8247, 122.5465
   (f) 69.1042 et 53.4423
   (g) 71.1516 et 51.3949

5. Réponses à la question 5 :
   (a) pour $j = 1$ $(0.13, 0.180109)$
   (b) pour $j = 1$ $(15.5992, 124.0105)$
   (c) 1241.2428 et 2627:9788
   (d) 999.3918 et 1628.5876

6. Réponses à la question 6 :
   (a) 0.040733 et 0.680801

(b) 59 297.42 et 0.7517

(c) 262.2939 et 293 597.2

(d) 673:0907 et 739.4484

(e) 265.3391 et 474.1093

(f) 282.9832 et 456.4652

7. Réponses à la question 7 :

   (a) On obtient les valeurs suivantes :

      i. 2337.403 et 57 655 550

      ii. pour $(1,2)$, 780 851.6 et 0.3401422 ; pour $(1,3)$, 5 508 701 et 0.5722647 ; pour $(2,3)$, 179685.2 et 0.3448239

      iii. 33 354.96 et 73 089.77

      iv. 60 845.54, 1580.55, 10 663.68

      v. 60 463.03, 1398.574, 11228.16

   (b) On obtient les valeurs suivantes :

      i. 2325.37 et 45 453 347

      ii. pour $(1,2)$, 892 529 et 0.463938 ; pour $(1,3)$, 5 754 211 et 0.718619 ; pour $(2,3)$, 224 453 et 0.428441

      iii. 35 424.5 et 69 326.9

      iv. 54 216.8 ; 2082.03 ; 13 028.1

      v. 55 974.8 ; 1771.5 ; 11 580.6

8. Réponses à la question 8 :

   (a) 90, 80 ; 25 200, 26 400 ; 1200 ; $X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i})$ avec $B_i \sim Ga(\alpha_i, \beta_i)$, $i = 1, 2$

   (b) Aucune réponse.

   (c) 170 et 54 000

   (d) 0.760926

   (e) 426.1426 et 470.2277

   (f) 236.7779867 et 233.4497133

   (g) 265.1683 et 205.0595

9. Réponses à la question 9 :

   (a) -12.36 ; -10.25 ; -22.61 ; 2016.2304 ; 501.1875 ; -397.44 ; 1722.5379

(b)

l	-113	-77	-50	-35	
$f_L(l)$	0.04	0.16	0.16	0.12	
l	1	7	28	43	70
$f_L(l)$	0.28	0.09	0.08	0.06	0.01

(c) 0.52, 43 et 48.4

(d) 58.62, -10.22

(e) 51 et -2.6

10. Réponses à la question 10 :

(a) (0.318376, 0.305911), (0.352654, 0.224268)

(b) (-0.016779,-0.023251), (-0.012639,-0.035019)

(c) (33.27765, 45.96626), (25.11947, 68.82655)

(d) 79.24391, 93.94602

(e) On obtient les valeurs suivantes :

i. -9.686586, -5.174407, 7670.734, 8632.42, -14.86099, 30021.75

ii. 6852.44, 0.842

iii. 395.3112 et 462.1263

iv. 221.0584 et 241.0679

v. 218.9449 et 243.1814

Annexe A
Lois univariées continues

1.1 Loi uniforme

- Notation : $X \sim U(a,b)$
- Paramètres : $-\infty < a < b < \infty$
- Support : $x \in [a,b]$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{b-a} \times 1_{\{x \in [a,b]\}}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$
- Espérance : $E[X] = \frac{a+b}{2}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \frac{\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{at}}{(b-a)t}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{d^2 - a^2}{2(b-a)}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = a + (b-a)\kappa$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = a + \frac{(b-a)}{2}(1+\kappa)$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{(b-d)^2}{2(b-a)}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{b-d}{2}$
- Espérance limitée : $E[\min(X;d)] = \frac{d^2-a^2}{2(b-a)} + d\frac{b-d}{b-a}$

1.2 Loi bêta

- Notation : $X \sim B\hat{e}ta(\alpha,\beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in [0,1]$
- Fonction bêta incomplète ($x \in [0,1]$) :

$$I(x;\alpha,\beta) = \int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u$$

- Fonction bêta complète : $I(\alpha,\beta) = I(1;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{1}{I(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \times 1_{\{x\in[0,1]\}}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \frac{I(x;\alpha,\beta)}{I(\alpha,\beta)}$, notée $B(x;\alpha,\beta)$
  - Si $\beta = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^\alpha, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
  - Si $\alpha = 1$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-(1-x)^\beta, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$
  - Si α, $\beta \in \mathbb{N}^+$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{j=\alpha}^{\alpha+\beta-1} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{j!(\alpha+\beta-1-j)!}x^j(1-x)^{\alpha+\beta-1-j}, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

- Fonction génératrice des moments :

$$M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha + j}{\alpha + \beta + j} \right) \frac{t^k}{k!}$$

- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+k)}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(d; \alpha+1, \beta)$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha d^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
  - Si $\alpha = 1$, $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = -d(1-d)^{\beta} + \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$
- Mesure VaR : outil d'optimisation
  - Si $\beta = 1$, $VaR_{\kappa}(X) = \kappa^{\frac{1}{\alpha}}$
  - Si $\alpha = 1$, $VaR_{\kappa}(X) = 1 - (1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - B(VaR_{\kappa}(X); \alpha+1, \beta))$
  - Si $\beta = 1$, $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{(1-\kappa)} \frac{\alpha}{\alpha+1}(1 - \kappa^{(\alpha+1)/\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $TVaR_{\kappa}(X) = 1 - \frac{\beta}{\beta+1}(1-\kappa)^{\frac{1}{\beta}}$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - B(d; \alpha+1, \beta)) - d(1 - B(d; \alpha, \beta))$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1}(1 - d^{\alpha+1}) - d(1-d^{\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $\pi_d(X) = \frac{(1-d)^{\beta+1}}{1+\beta}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{1-B(d;\alpha+1,\beta)}{1-B(d;\alpha,\beta)} - d$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $e_d(X) = \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{1-d^{\alpha+1}}{1-d^{\alpha}} - d$
  - Si $\alpha = 1$, $e_d(X) = \frac{(1-d)}{1+\beta}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(d; \alpha+1, \beta) + \beta(1 - B(d; \alpha, \beta))$, $d \in [0,1]$
  - Si $\beta = 1$, $E[\min(X; d)] = \frac{\alpha}{\alpha+1} d^{\alpha+1} + d(1-d^{\alpha})$
  - Si $\alpha = 1$, $E[\min(X; d)] = \frac{1-(1-d)^{\beta+1}}{\beta+1}$
- Loi associée : la loi uniforme avec $a = 0$ et $b = 1$ est un cas particulier de la loi bêta avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

1.3 Loi exponentielle

- Notation : $X \sim Exp(\beta)$
- Paramètre : $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \beta \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \left(\frac{1}{\beta}\right)^k k!$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta d}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = -\frac{1}{\beta}\ln(1-\kappa)$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = VaR_\kappa(X) + E[X]$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta d} = E[X]\,\overline{F}(x)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_X(d) = \frac{1}{\beta}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{1}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\right)$

1.4 Loi gamma

- Notation : $X \sim Ga(\alpha, \beta)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : notée $H(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$
- Fonction de survie : notée $\overline{H}(x; \alpha, \beta)$, forme non explicite pour $\alpha \notin \mathbb{N}^+$

- Espérance : $E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $\alpha \neq 1$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(VaR_\kappa(X); \alpha+1, \beta)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{\alpha}{\beta}\overline{H}(d; \alpha+1, \beta) - d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\overline{H}(d;\alpha+1,\beta)}{\overline{H}(d;\alpha,\beta)} - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{\alpha}{\beta} H(d; \alpha+1, \beta) + d\overline{H}(d; \alpha, \beta)$
- Lois associées :
  - la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma (avec $\alpha = 1$) ;
  - la loi du khi-deux avec paramètre $\nu \in \mathbb{N}^+$ (nombre de degrés de liberté) correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = \frac{\nu}{2}$ et $\beta = 2$;
  - la loi Erlang avec paramètre $n \in \mathbb{N}^+$ correspond à une loi gamma de paramètres $\alpha = n$ et β.

1.5 Loi Erlang

- Notation : $X \sim Erl(n, \beta)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}^+$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\beta^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-\beta x} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$

- Espérance : $E[X] = \frac{n}{\beta}$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{n}{\beta^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^n$, $t < \beta$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n+i)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{n}{\beta}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta d}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\beta d)^j}{j!}\right)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation si $n \neq 1$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{n}{\beta}\left(\mathrm{e}^{-\beta VaR_\kappa(X)}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\beta VaR_\kappa(X))^j}{j!}\right)$$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{n}{\beta}\overline{H}(d; n+1, \beta) - d\overline{H}(d; n, \beta)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{n}{\beta}\frac{\overline{H}(d;n+1,\beta)}{\overline{H}(d;n,\beta)} - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{n}{\beta}H(d; n+1, \beta) + d\overline{H}(d; n, \beta)$

1.6 Loi Weibull

- Notation : $X \sim We(\tau, \beta)$
- Paramètres : $\tau > 0$, $\beta > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \beta\tau(\beta x)^{\tau-1}\mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
- Fonction de répartition : $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \mathrm{e}^{-(\beta x)^\tau}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)$
- Variance : $\text{Var}(X) = \frac{1}{\beta^2}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \left(\frac{1}{\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\right)^2$
- Fonction génératrice des moments (pour $\alpha > 1$) :

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{\beta^k k!}\Gamma\left(1 + \frac{k}{\tau}\right)$$

- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{1}{\beta^k}\Gamma\left(1+\frac{k}{\tau}\right)$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})H(d^\tau; 1+\frac{1}{\tau}, \beta^\tau)$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \frac{1}{\beta}(-\ln(1-\kappa))^{\frac{1}{\tau}}$
- Mesure $TVaR$: $TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\beta(1-\kappa)}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\overline{H}(-\ln(1-\kappa); 1+\frac{1}{\tau}, 1)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \frac{1}{\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\overline{H}(d^\tau; 1+\frac{1}{\tau}, \beta^\tau) - d\mathrm{e}^{-(\beta d)^\tau}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \frac{e^{(\beta d)^\tau}}{\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\overline{H}(d^\tau; 1+\frac{1}{\tau}, \beta^\tau) - d$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \frac{1}{\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})H(d^\tau; 1+\frac{1}{\tau}, \beta^\tau) + d\mathrm{e}^{-(\beta d)^\tau}$
- Cas particuliers :
  - la loi exponentielle est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 1$;
  - la loi Raleigh est un cas cas particulier de la loi Weibull avec $\tau = 2$.

1.7 Loi Erlang généralisée

- Notation : $X \sim ErlG(\beta_1, ..., \beta_n)$
- Paramètres : β_1, ..., $\beta_n > 0$ et $\beta_1, ..., \beta_n$ distincts
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité de X :

$$f_X(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}\right)\beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$$

- Fonction de répartition de X :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$$

- Fonction de survie de X : $\overline{F}_X(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n}\frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i}\right)\mathrm{e}^{-\beta_i x}$

- Espérance de X : $E[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i}$
- Variance de X : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^2}$
- Fonction génératrice des moments de X : $M_X(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(k+1)}{\beta_i^k}$
- Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(-d\mathrm{e}^{-\beta_i d} + \frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ = \; & \frac{1}{1-\kappa} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \mathrm{e}^{-\beta_i VaR_\kappa(X)} \left(VaR_\kappa(X) + \frac{1}{\beta_i} \right) \end{aligned}$$

- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)$
- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\beta_i d}}{\beta_i} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) \left(\mathrm{e}^{-\beta_i d} \right)}$
- Remarque :
  - les termes $\left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right)$ sont négatifs ou positifs et leur somme est égale à 1 : $\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{\beta_j}{\beta_j - \beta_i} \right) = 1$;
  - la loi Erlang généralisée de la v.a. X est l'équivalent de la loi d'une somme de n v.a. indépendantes Y_1, ..., Y_n de lois exponentielles indépendantes avec paramètres β_1, ..., β_n, e.g. $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $Y_i \sim Exp(\beta_i)$ pour $i = 1, ..., n$.

1.8 Loi normale

- Notation : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma^2 > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction de répartition : notée $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, forme non explicite
- Espérance : $E[X] = \mu$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \mathrm{e}^{t\mu + t^2 \frac{\sigma^2}{2}}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \mu\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\kappa) = \mu + \sigma VaR_\kappa(Z)$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \mu + \frac{1}{1-\kappa}\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\Phi^{-1}(\kappa)\right)^2}{2}} = \mu + \sigma TVaR_\kappa(Z)$$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_d(X) = (\mu + d)(1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction d'excès-moyen : $e_d(X) = \mu + d - \frac{1}{1-\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Espérance limitée : $E[\min(X; d)] = \mu\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(d-\mu)^2}{2\sigma^2}} + d[1 - \Phi(\frac{d-\mu}{\sigma})]$
- Remarque :
  - lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit par convention que X obéit à une loi normale standard ;
  - par convention, Φ est la notation pour la fonction de répartition d'une loi normale standard.

1.9 Loi lognormale

- Notation : $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$
- Paramètres : $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})$
- Espérance : $E[X] = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$
- Fonction génératrice des moments : forme non analytique
- Moments d'ordre k : $E[X^k] = \mathrm{e}^{k\mu + k^2\frac{\sigma^2}{2}}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})$
- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \exp(\mu + \sigma VaR_\kappa(Z))$
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{1-\kappa}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(VaR_\kappa(Z) - \sigma))$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{1}{[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]}\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}(1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma})) - d$$

- Espérance limitée :

$$E[\min(X; d)] = \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}\Phi(\frac{\ln d - \mu - \sigma^2}{\sigma}) + d[1 - \Phi(\frac{\ln d - \mu}{\sigma})]$$

- Loi associée : $X = \mathrm{e}^Y$, où $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, impliquant $E[X^k] = M_Y(k)$

1.10 Loi inverse gaussienne

- Notation : $X \sim IG(\mu, \beta)$
- Paramètres : μ, $\beta \in \mathbb{R}^+$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\beta x^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta x}(x-\mu)^2\right)$
- Fonction de répartition :

$$F_X(x) = \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x-\mu)\right) + \mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(x+\mu)\right)$$

- Espérance : $E[X] = \mu$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \mu\beta$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = e^{\frac{\mu}{\beta}\left(1-\sqrt{(1-2\beta t)}\right)}$
- Espérance tronquée :

$$\begin{aligned} E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] &= d - (2d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \\ &\quad -(2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} TVaR_\kappa(X) &= \frac{1}{1-\kappa}\left(\mu - d + (2d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\right) \\ &\quad + \frac{1}{1-\kappa}\left((2d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right), \end{aligned}$$

avec $d = VaR_\kappa(X)$

- Fonction *stop-loss* :

$$\begin{aligned} \pi_d(X) &= (\mu-d)\left(1-\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right) \\ &\quad +(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$\begin{aligned} e_d(X) &= \frac{(\mu-d)\left(1-\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)\right)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right)+\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \\ &\quad + \frac{+(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right)}{1-\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d-\mu)\right)+\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-\sqrt{\frac{1}{\beta x}}(d+\mu)\right)\right)} \end{aligned}$$

- Espérance limitée :

$$\begin{aligned} E[\min(X;d)] &= d-(d-\mu)\Phi\left((d-\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \\ &\quad -(d+\mu)\mathrm{e}^{\frac{2\mu}{\beta}}\Phi\left(-(d+\mu)\sqrt{\frac{1}{\beta d}}\right) \end{aligned}$$

1.11 Loi Pareto

- Notation : $X \sim Pa(\alpha,\lambda)$
- Paramètres : $\alpha>0$, $\lambda>0$
- Support : $x\in\mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x)=\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}$
- Fonction de répartition : $F(x)=1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\alpha$
- Espérance (pour $\alpha>1$) : $E[X]=\frac{\lambda}{\alpha-1}$
- Variance (pour $\alpha>2$) : $\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k (pour $\alpha>k\in\mathbb{N}^+$): $E\left[X^k\right]=\frac{\lambda^k k!}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right]=\frac{\lambda^k\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha)}$, si $-1<k<\alpha$

- Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda + d)^{\alpha-1}}\right) - d\left(\frac{\lambda}{\lambda + d}\right)^{\alpha}$$

- Mesure VaR : $VaR_{\kappa}(X) = \lambda\left((1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
- Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) : $TVaR_{\kappa}(X) = \lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}(1-\kappa)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)$
- Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) : $\pi_d(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}(\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}$
- Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) : $e_d(X) = \frac{\lambda+d}{\alpha-1}$, si $\alpha > 1$
- Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) : $E[\min(X; d)] = \frac{\lambda}{\alpha-1}[1 - (\frac{\lambda}{\lambda+d})^{\alpha-1}]$

1.12 Loi F-généralisée

- Notation : $X \sim FG(\alpha, \lambda, \tau)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)\lambda^{\alpha}x^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(\lambda+x)^{\alpha+\tau}}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = B(\frac{x}{\lambda+x}; \tau, \alpha)$
- Espérance (pour $\alpha > 1$) : $E[X] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}$
- Variance (pour $\alpha > 2$) : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda^2\tau(\tau-\alpha+1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k (pour $\alpha > k$) : $E\left[X^k\right] = \lambda^k \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\tau+i)}{\prod_{i=1}^{k}(\alpha-i)}$
- Espérance tronquée (pour $\alpha > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \frac{\lambda\tau}{\alpha - 1}B\left(\frac{d}{\lambda + d}; \tau + 1, \alpha - 1\right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation

- Mesure $TVaR$ (pour $\alpha > 1$) :

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa}\frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{VaR_{\kappa}(X)}{\lambda + VaR_{\kappa}(X)}; \tau+1, \alpha-1\right)$$

- Fonction *stop-loss* (pour $\alpha > 1$) :

$$\pi_d(X) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) - d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

- Fonction d'excès-moyen (pour $\alpha > 1$) :

$$e_d(X) = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}\frac{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right)}{\overline{B}\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha\right)} - d$$

- Espérance limitée (pour $\alpha > 1$) :

$$E[\min(X; d)] = \frac{\lambda\tau}{\alpha-1}B\left(\frac{d}{\lambda+d}; \tau+1, \alpha-1\right) + d\overline{B}(\frac{d}{\lambda+d}; \tau, \alpha)$$

- Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi F-généralisée avec $\tau = 1$.
- Remarque : la loi F-généralisée est parfois appelée la loi de Pareto généralisée.

1.13 Loi Burr

- Notation : $X \sim Burr(\alpha, \lambda, \tau)$
- Paramètres : $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f_X(x) = \frac{\alpha\tau\lambda^{\alpha}x^{\tau-1}}{(\lambda+x^{\tau})^{\alpha+1}}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+x^{\tau}}\right)^{\alpha}$
- Espérance : $E[X] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \frac{\lambda^{2/\tau}}{\Gamma(\alpha)}\left(\Gamma(1+\frac{2}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{2}{\tau}) - \frac{(\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau}))^2}{\Gamma(\alpha)}\right)$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas

- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{k/\tau}\Gamma(1+\frac{k}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{k}{\tau})$, $-\tau < k < \alpha\tau$
- Espérance tronquée :

$$\begin{aligned} & E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})B\left(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = (\lambda\left\{(1-\kappa)^{-1/\alpha}-1\right\})^{1/\tau}$
- Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ = & \frac{\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})}{(1-\kappa)\Gamma(\alpha)}\overline{B}\left(\frac{VaR_\kappa(X)^\tau}{\lambda+VaR_\kappa(X)^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\begin{aligned} \pi_d(X) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right) \\ & -d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d^\tau}\right)^\alpha \end{aligned}$$

- Fonction d'excès-moyen :

$$e_d(X) = \frac{(\lambda+d^\tau)^\alpha\Gamma(1+\frac{1}{\tau})\Gamma(\alpha-\frac{1}{\tau})}{\lambda^{\alpha-1/\tau}\Gamma(\alpha)}\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right)-d$$

- Espérance limitée :

$$\begin{aligned} & E\left[\min(X;d)\right] \\ = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{1/\tau}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda+d^\tau};1+\frac{1}{\tau},\alpha-\frac{1}{\tau}\right) \\ & +d\left(\frac{\lambda}{\lambda+d^\tau}\right)^\alpha \end{aligned}$$

- Loi associée : la loi de Pareto est un cas particulier de la loi Burr avec $\tau = 1$.

1.14 Loi log-logistique

- Notation : $X \sim LL(\lambda,\tau)$

- Paramètres : λ, $\tau > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}^+$
- Fonction de densité : $f(x) = \frac{\frac{\tau}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}\right)^2} = \frac{\tau x^{\tau-1}}{(\lambda^\tau+x^\tau)^2}$
- Fonction de répartition : $F(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{-\tau}} = \frac{x^\tau}{\lambda^\tau+x^\tau}$
- Espérance (pour $\tau > 1$) : $E[X] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$
- Variance (pour $\tau > 2$) :

$$\text{Var}(X) = \lambda^2\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{\tau}\right) - \left(\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\right)^2\right)$$

- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \lambda^k\Gamma\left(1+\frac{k}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{\tau}\right)$, $-\tau < k < \tau$
- Espérance tronquée (pour $\tau > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

- Mesure VaR : $VaR_\kappa(X) = \lambda\left(\kappa^{-1}-1\right)^{-1/\tau}$
- Mesure $TVaR$ (pour $\tau > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{\lambda}{1-\kappa}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\kappa; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right)$$

- Fonction *stop-loss* (pour $\tau > 1$) :

$$\begin{aligned}\pi_d(X) &= \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) \\ &\quad -\frac{d\lambda^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}\end{aligned}$$

- Fonction d'excès-moyen (pour $\tau > 1$) :

$$e_d(X) = \frac{\lambda^\tau+d^\tau}{\lambda^{\tau-1}}\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)\overline{B}\left(\frac{d^\tau}{\lambda^\tau+d^\tau}; 1+\frac{1}{\tau}, 1-\frac{1}{\tau}\right) - d$$

- Espérance limitée (pour $\tau > 1$) :

$$E\left[\min\left(X;d\right)\right] = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\tau}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\tau}\right)B\left(\frac{d^{\tau}}{\lambda^{\tau}+d^{\tau}};1+\frac{1}{\tau},1-\frac{1}{\tau}\right) + \frac{d\lambda^{\tau}}{\lambda^{\tau}+d^{\tau}}$$

1.15 Loi de Student

- Notation : $X \sim St(\nu)$
- Paramètre : $\nu > 0$
- Support : $x \in \mathbb{R}$
- Fonction de densité : $f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$
  - Si $\nu = 1$, $f\left(x\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}$
  - Si $\nu = 2$, $f\left(x\right) = \frac{1}{(2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
- Fonction de répartition :

$$F\left(x\right) = 1 - \frac{1}{2}B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu};\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right),$$

  désignée par $t_{\nu}\left(x\right)$
  - Si $\nu = 1$, $F\left(x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(x\right)$
  - Si $\nu = 2$, $F\left(x\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)$
- Fonction de survie : $\overline{F}\left(x\right) = \frac{1}{2}B\left(\frac{\nu}{x^2+\nu};\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)$
- Espérance : $E\left[X\right] = 0$, $\nu > 1$
- Variance : $\mathrm{Var}\left(X\right) = \frac{\nu}{\nu-2}$, $\nu > 2$
- Fonction génératrice des moments : n'existe pas
- Moments d'ordre k :

$$E\left[X^k\right] = \begin{cases} 0, & 0 < k \text{ impair} < \nu \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-k}{2}\right)\nu^{\frac{k}{2}}\right), & 0 < k \text{ pair} < \nu \end{cases}$$

- Espérance tronquée (pour $\nu > 1$) :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & d > 0 \end{cases}$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$ (pour $\nu > 1$) :

$$TVaR_\kappa(X) = \begin{cases} -\frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) < 0 \\ \frac{1}{1-\kappa} \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{VaR_\kappa(X)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}, & VaR_\kappa(X) > 0 \end{cases}$$

- Espérance limitée (pour $\nu > 1$) :

$$E\left[\min\left(X; d\right)\right] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d < 0 \\ \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{d^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}} + d\overline{F}(d), & d > 0 \end{cases}$$

- Note : la loi de Student converge en loi vers la loi normale lorsque $\nu \to \infty$.

Annexe B

Lois univariées discrètes

On présente les caractéristiques des principales lois discrètes qui seront fréquemment utilisées. Souvent, en `Excel`® ou `R`, les fonctions de densité, de répartition et quantile sont déjà programmées.

2.1 Loi avec support arithmétique

- Support : $X \in \{0, 1h, 2h, ...\}$
- Fonction de masse de probabilité : $f(kh) = \Pr(X = kh)$, $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^+$
- Espérance : $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} khf_X(kh)$
- Variance : $\text{Var}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (kh - E[X])^2 f_X(kh)$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tkh} f_X(kh)$
- Fonction génératrice des probabilités : $P_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{kh} f_X(kh)$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X \leq k_0 h\}}\right] = \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh)$
- Mesure $TVaR$:

$$\begin{aligned} & TVaR_\kappa(X) \\ = & \frac{1}{1-\kappa}\left\{E[X] - \sum_{k=0}^{k_0} khf_X(kh) + k_0 h\left(\Pr(X \leq k_0 h) - \kappa\right)\right\}, \end{aligned}$$

où $VaR_\kappa(X) = k_0 h$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$

2.2 Loi de Poisson

- Notation : $M \sim Pois(\lambda)$
- Paramètre : $\lambda > 0$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$
- Espérance : $E[M] = \lambda$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = \lambda$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = \exp\{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)\}$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = \exp\{\lambda(t - 1)\}$

2.3 Loi binomiale

- Notation : $M \sim Bin(n, q)$
- Paramètres : $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \{0, 1, ..., n\}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{n}{k} (q)^k (1 - q)^{n-k}$
- Espérance : $E[M] = nq$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = nq(1 - q)$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = (q\mathrm{e}^t + 1 - q)$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = (qt + 1 - q)$
- Loi associée : la loi de Bernoulli est un cas particulier de la loi binomiale avec $n = 1$.

2.4 Loi de Bernoulli

- Notation : $M \sim Bern(q) \sim Bin(1, q)$
- Paramètre : $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \{0, 1\}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = (q)^k (1 - q)^{1-k}$
- Espérance : $E[M] = q$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = q(1 - q)$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = (q\mathrm{e}^t + 1 - q)$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = (qt + 1 - q)$

2.5 Loi binomiale négative

Selon les auteurs, on rencontre deux paramétrisations pour la loi binomiale négative qui sont équivalentes.

Les principales caractéristiques pour la première paramétrisation sont :

- Notation : $M \sim BN(r, q)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $q \in (0, 1)$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \binom{r+k-1}{k} (q)^r (1 - q)^k$
- Espérance : $E[M] = r\frac{1-q}{q}$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = r\frac{1-q}{q^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)\mathrm{e}^t}\right)^r$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = \left(\frac{q}{1-(1-q)t}\right)^r$

Les principales caractéristiques pour la deuxième paramétrisation sont :

- Notation : $M \sim BN(r, \beta)$
- Paramètres : $r \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$
- Support: $k \in \mathbb{N}$

- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(X = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k$
- Espérance : $E[X] = r\beta$
- Variance : $\mathrm{Var}\,(X) = r\beta(1+\beta)$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = (1-\beta(\mathrm{e}^t-1))^{-r}$
- Fonction génératrice des probabilités : $P_X(t) = (1-\beta(t-1))^{-r}$
- Lien entre la 1^{re} paramétrisation et la 2^e paramétrisation : $q = \frac{1}{1+\beta}$ ou $\beta = \frac{1-q}{q}$
- Note :
  - si $r \in \mathbb{N}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Pascal ;
  - si $r \in \mathbb{R}^+$, la distribution binomiale négative est parfois appelée la distribution de Polya.
- Loi associée : la loi géométrique est un cas particulier de la loi binomiale négative avec $r = 1$.

2.6 Loi géométrique

- Notation : $M \sim Geom(q)$
- Paramètre : $q \in]0,1[$
- Support : $k \in \mathbb{N}$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = q\,(1-q)^k$
- Fonction de répartition : $F_M\,(k) = 1-(1-q)^{k+1}$
- Espérance : $E\,[M] = \frac{1-q}{q}$
- Variance : $\mathrm{Var}\,(M) = \frac{1-q}{q^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = \frac{q}{(1-(1-q)\mathrm{e}^t)}$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = \frac{q}{(1-(1-q)t)}$

2.7 Loi logarithmique

- Notation : $M \sim Log(\gamma)$
- Paramètre : $\gamma \in]0,1[$
- Support : $k \in \mathbb{N}^+$
- Fonction de masse de probabilité : $\Pr(M = k) = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)} \frac{\gamma^k}{k}$
- Espérance : $E[M] = \frac{-1}{\ln(1-\gamma)} \frac{\gamma}{1-\gamma}$
- Variance : $\mathrm{Var}(M) = \frac{\gamma + \ln(1-\gamma)}{(1-\gamma)^2 (\ln(1-\gamma))^2}$
- Fonction génératrice des moments : $M(t) = \frac{\ln(1-\gamma e^t)}{\ln(1-\gamma)}$
- Fonction génératrice des probabilités : $P(t) = \frac{\ln(1-\gamma t)}{\ln(1-\gamma)}$

Annexe C

Lois univariées avec mélange

3.1 Loi mélange d'exponentielles

- Notation : $X \sim MxExp(\{(p_i, \beta_i), i = 1, 2, ..., n\})$
- Paramètres : $\beta_i > 0$, $0 \leq p_i \leq 1$, $p_1 + ... + p_n = 1$
- Fonction de densité : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \beta_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
- Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x}\right)$, $x > 0$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{e}^{-\beta_i x}$, $x > 0$
- Espérance : $E[X] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{2}{\beta_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\right)^2$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}$
- Moments d'ordre k : $E\left[X^k\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\right)^k k!$
- Espérance tronquée :

$$E\left[X \times 1_{\{X \leq d\}}\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta_i d}\right) - d\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$$

- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{1}{\beta_i}\left(\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_{\kappa}(X)}\right) + d\mathrm{e}^{-\beta_i VaR_{\kappa}(X)} \right)$$

- Fonction *stop-loss* : $\pi_X(d) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\mathrm{e}^{-\beta_i d}$
- Espérance limitée : $E[\min(X;d)] = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{1}{\beta_i}\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_i d}\right)$

3.2 Loi mélange d'Erlang

- Notation : $X \sim MxErl(\{(p_k,\beta), k=1,2,...\})$
- Paramètres : $\beta > 0$, $0 \leq p_k \leq 1$ $(k=1,2,...)$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$
- Fonction de densité : $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h(x;k,\beta)$, $x>0$
- Fonction de répartition : $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k H(x;k,\beta)$, $x>0$
- Fonction de survie : $\overline{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \overline{H}(x;k,\beta)$, $x>0$
- Espérance : $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}$
- Variance : $\mathrm{Var}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)}{\beta^2} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}\right)^2$
- Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - t}\right)^k$
- Moments m : $E[X^m] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k(k+1)...(k+m-1)}{\beta^k}$
- Espérance tronquée : $E\left[X \times 1_{\{X\leq d\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta} H(d;k+1,\beta)$
- Mesure VaR : outil d'optimisation
- Mesure $TVaR$:

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{1-\kappa}\sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{k}{\beta}\overline{H}(VaR_{\kappa}(X);k+1,\beta)$$

- Fonction *stop-loss* :

$$\pi_d(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left(\frac{k}{\beta}\overline{H}(d;k+1,\beta) - d\overline{H}(d;k,\beta)\right)$$

- Espérance limitée :

$$E\left[\min\left(X;d\right)\right]=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\left(\frac{k}{\beta}H\left(d;k+1,\beta\right)+d\overline{H}\left(d;k,\beta\right)\right)$$

- Note : $H\left(x;k,\beta\right)$, $\overline{H}\left(x;k,\beta\right)$ et $h\left(x;k,\beta\right)$ sont les fonctions de répartition, de survie et de densité de la loi Erlang (k,β).

References

[1] Acerbi, C., Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance* 26 (7), 1487–1503.

[2] Albrecht, P. (2005). Risk based capital allocation, dans *Encyclopedia of Actuarial Science* (édité par Teugels, J., Sundt, B.). Wiley, New York.

[3] Arbenz, P., Embrechts, P., Puccetti, P. (2011). The AEP algorithm for the fast computation of the distribution of the sum of dependent random variables. *Bernoulli* 17(2), 562–591.

[4] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9 (3), 203–228.

[5] Balakrishnan, N., Lai, C.-D. (2009). *Continuous Bivariate Distributions* (2^e édition). Springer, New York.

[6] Barbour, A.D., Holst, L., Janson, S., (1992). *Poisson Approximation.* Oxford University Press, Oxford.

[7] Bargès, M., Cossette, H., Marceau, E. (2009). TVaR-based capital allocation with copulas. *Insurance : Mathematics and Economics* 45 (3), 348–361.

[8] Bäuerle, N., Müller, A. (1998). Modelling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bulletin* 28, 59–76.

[9] Bäuerle, N., Müller, A. (2006). Stochastic orders and risk measures: Consistency and bounds. *Insurance: Mathematics & Economics* 38 (1), 132–148.

[10] Bouye, E., Nikeghbali, A., Riboulet, G., Roncalli, T. (2000). *Copulas for Finance. A reading guide and some applications.* Rapport technique du Groupe de recherche opérationnelle, Crédit Lyonnais.

[11] Chaubey, Y.P., Garrido, J., Trudeau, S. (1998). On the computation of aggregate claims distributions: Some new approximations. *Insurance: Mathematics & Economics* 23: 215–230.

[12] Cheriyan, K. (1941). A bivariate correlated gamma-type distribution function. *Journal of the Indian Mathematical Society* 5, 133–144.

[13] Cherubini, U., E. Luciano, Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance.* NewYork, Wiley.

[14] Chiragiev, A., Landsman, Z. (2007). Multivariate pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences. *Scandinavian Actuarial Journal* (4), 261–280.

[15] Cossette, H., Côté, M.-P., Mailhot, M., Marceau, E. (2012). Numerical bounds for the cumulative and the product of dependent risks. Submitted for publication.

[16] Cossette, H., Duchesne, T., Marceau, E. (2003). Modelling catastrophes and their Impact on Insurance Portfolios, *North American Actuarial Journal* 7(4), 1–22.

[17] Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E. (2002). Common mixtures in the individual risk model. *Bulletin de l'Association suisse des actuaires*, 131–157.

[18] Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., Rioux, J. (2002). On two dependent individual risk models. *Insurance: Mathematics and Economics* 30, 153–166.

[19] Cossette, H., Mailhot, M., Marceau, E. (2011). TVaR-based capital allocation for multivariate compound distributions. *Insurance: Mathematics and Economics* 50(2), 247-256.

[20] Cossette, H., Marceau, E. (2000). The discrete-time risk model with correlated Classes of buiness. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 133–149.

[21] Daykin, C.D., Pentikäinen, T. et Pesonen, H. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries.* Chapman-Hall, New York.

[22] Denuit, M., Charpentier, A. (2004a). *Mathématiques de l'assurance non vie* (tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque). Economica, Paris.

[23] Denuit, M., Charpentier, A. (2004b). *Mathématiques de l'assurance non vie* (tome 2 : tarification et provisonnement). Economica, Paris.

[24] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M.J., Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models.* Wiley, New York.

[25] Denuit, M., Genest, C., Marceau, E. (1999). Stochastic Bounds on Sums of Dependent Risks. *Insurance: Mathematics and Economics* 25, 85–104.

[26] Denuit, M. Genest, C., Marceau, E. (2002). Criteria for the stochastic ordering of random sums, with actuarial applications. *Scandinavian Actuarial Journal*, 3–16.

[27] Denuit, M., Marechal, X., Pitrebois, P., Walhin, J.-F. (2007). *Actuarial Modelling of Claim Counts: Risk Classification, Credibility and Bonus-Malus Systems.* Wiley, New York.

[28] Devroye, L. (1986). *Non-Uniform Random Variate Generation.* Springer-Verlag, New York.

[29] Dickson, D.C.M. (2005). *Insurance Risk and Ruin.* Cambridge University Press, New-York.

[30] Dhaene, J. Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory, *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 3–33.

[31] Dhaene, J. Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D. (2002a). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications, *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 133–161.

[32] Dhaene, J., Henrard, L., Landsman, Z., Vandendorpe, A., Vanduffel, S. (2008). Some results on the CTE-based capital allocation rule. *Insurance: Mathematics & Economics* 42 (2), 855–863.

[33] Embrechts, P., McNeil, A., Straumann, D. (2001). Correlation and and dependence in risk management: properties and pitfalls. Dans *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (édité par Dempster, M., Moffatt, H.K.), Cambridge University Press.

[34] Embrechts, P. Klüppelberg, C., Mikosch, T. (2003). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance Springer-Verlag* (4^e impression, 1ère édition 1997). Springer-Verlag, New York.

[35] Embrechts, P., Frei, M. (2009). Panjer recursion versus FFT for compound distributions. *Mathematical Methods of Operations Research* 69 (3), 497–508.

[36] Embrechts, P., Hoeing, A., Juri, A. (2003). Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks. *Finance & Stochastics* 7(2), 145–167.

[37] Embrechts, P, Puccetti, G. (2006). Bounds for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*, 10, 341–352.

[38] Feldmann, A., and W. Whitt. 1998. Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models. *Performance Evaluation* 31(8), 963-976.

[39] Fenton, L.F. (1960). The sum of log-normal probability distibutions in scattered transmission systems. *IRE Trans. Commun. Systems* 8: 57–67.

[40] Fishman, G.S. (1996). *Monte Carlo: concepts, algorithms, and application.* Springer-Verlag, New York.

[41] Frank, M.J., Nelsen, R.B., Schweizer, B. (1987). Best-possible bounds on the distribution of a sum—a problem of Kolmogorov. *Probability Theory and Related Fields* 74, 199–211.

[42] Frank, M.J., Schweizer, B. (1979). On the duality of generalized infimal and supremal convolutions. *Rendiconti di Matematica* 12 (6), 1–23.

[43] Frees, E. W., Valdez, E. A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal* 2, 1–25.

[44] Furman, E., Landsman, Z. (2005). Risk capital decomposition for a multivariate dependent gamma portfolio. *Insurance: Mathematics & Economics* 37 (3),635 649

[45] Furman, E., Landsman, Z. (2008). Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks. *ASTIN Bulletin* 38(2), 601–619.

[46] Genest, C., Nešlehovà, J. (2007). A primer on copulas for count data. *Insurance: ASTIN Bulletin* 37(2), 475–515.

[47] Genest, C., Favre, A.-C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12, 347-368.

[48] Genest, C., Gendron, M., Bourdeau-Brien, M. (2009). The advent of copulas in finance. *European Journal of Finance*, 15, 609-618.

[49] Gentle, J.E. (2003). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods* (2^e édition). Springer-Verlag, New York.

[50] Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* S.S. Huebner Foundation. University of Pennsylvania. Philadelphie.

[51] Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering.* Springer-Verlag. New York.

[52] Goovaerts, M.J., De Vylder, F., Haezendonck, J.(1984). *Insurance Premiums: Theory and Applications.* North Holland, Amsterdam.

[53] Grimmett, G., Stirzaker, D. (2002). *Probability and Random processes.* Oxford University Press.

[54] Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association* 55, 698–707.

[55] Hesselager, O. (1996). Recursions for certain bivariate counting distributions and their compound distributions. *ASTIN Bulletin* 26, 35-52.

[56] Hu, T., Wu, Z. (1999). On dependence of risks and stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics* 24, 323–332.

[57] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts.* Chapman and Hall, London.

[58] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1997). *Discrete Multivariate Distributions.* Wiley, New York.

[59] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Univariate Continuous Distributions (Vol.1).* Wiley, New York.

[60] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Univariate Continuous Distributions (Vol.2).* Wiley, New York.

[61] Johnson, N.L., Kotz, S., Kemp, A.W.. (1992). *Univariate Discrete Distributions.* Wiley, New York.

[62] Johnson, M.A. and M. R. Taaffe. 1989. Matching moments to phase distributions: Mixtures of Erlang distribution of common order. *Stochastic Models* 5: 711-743.

[63] Kaas, R., Goovaerts, M.J., Dhaene, J., Denuit, M. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory: Using R.* Springer-Verlag, New York.

[64] Kaas, R., van Heerwaarden, A.E., Goovaerts, M.J. (1994). *Ordering of Actuarial Risks.* Caire Education Series 1, Amsterdam.

[65] Kimberling, C.H. (1974). A probabilistic interpretation of complete monotonicity. *Aequationes Mathematicae* 10, 152–164.

[66] Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. (2008). *Loss models: From data to decisions* (3^e édition). Wiley, New York.

[67] Kocherlakota, S., Kocherlakota, K. (1992). *Bivariate Discrete Distributions*. Marcel Dekker, New York.

[68] Kolev, N., U. dos Anjos, de M. Mendes, B.V. (2006). Copulas: A review and recent developments. *Stochastic Models* 22(4), 617–660.

[69] Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L. (2002). *Continuous Multivariate Distributions, Volume 1, Models and Applications*. Wiley, New York.

[70] Landsman, Z.M., Valdez, E.A. (2003). Tail conditional expectations for elliptical distributions. *North American Actuarial Journal* 7 (4), 55–71.

[71] L'Écuyer, P. (1994). Uniform random number generation. *Annals of Operations Research* 53, 77-120.

[72] L'Ecuyer, P. (1998). Random number generation. In Banks, J., editor, Handbook of Simulation, pages 93–137. Wiley. chapter 4.

[73] Lehman, E.H. (1966). Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics* 37, 1137–1153.

[74] Lindskog, F., McNeil, A. J. (2003). Common Poisson shock models: applications to insurance and credit risk modelling. *ASTIN Bulletin*, 33(2), 209–238.

[75] Mathai, A.M., Moschopoulos, P.G. (1991). On a multivariate gamma. *Journal of Multivariate Analysis* 39, 135–153.

[76] Makarov, G.D. (1981). Estimates for the distribution function of a sum of two random variables when the marginal distributions are fixed. *Theory of Probability and its Applications* 26, 803–806.

[77] Marlow, N.A. (1967). A normal limit theorem for power sums of independent random variables. *Bell System Technical J.* 46: 2081–2089.

[78] Marshall, A. W., Olkin, I.(1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association* 62, 30–44.

[79] Marshall, A. W., Olkin, I.(1967). A generalised bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability* 4, 291–302.

[80] Marshall, A.W., Olkin, I. (1988). Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association* 83, 834–841.

[81] McNeil, A., Frey, R., Embretchs, P.. (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton Press, Princeton.

[82] Moschopoulos, P.G. (1985). The distribution of the sum of independent gamma random variables. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 37, 541–544.

[83] Müller, A. (1997). Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics* 21, 219–223

[84] Müller, A., Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley, New York.

[85] Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas* (Second edition). Springer, New York.

[86] Nolan, J. P. (2012). Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data. Birkhauser, Boston. En cours de rédaction. (Chapitre 1 disponible en ligne à http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf).

[87] Oakes, D. (1989). Bivariate Survival Models Induced by Frailties. *Journal of the American Statistical Association* 84, pp. 487-493.

[88] Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin* 12 (1), 22–26.

[89] Panjer, H. H., Willmot, G.E. (1992). *Insurance Risk Models*. SOA, Chicago.

[90] Picard, P. (2007). Hasard et probabilité. Vuibert, Paris.

[91] Pradier, P.-C. (2003). L'actuariat au siècle des Lumières: Risque et décisions économiques et statistiques. *Revue économique*, 54(1), 139–156.

[92] Ramabhadran, V. (1951). A multivariate gamma-type distribution. *Journal of Multivariate Analysis* 38, 213–232.

[93] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, New York.

[94] Ross, S. M. (2009). *A First Course in Probability Theory*. Prentice-Hall, New York.

[95] Rubinstein, R. Y., Kroese, D.P. (2008). *Simulation and the Monte Carlo method* (2e édition). Wiley, New York.

[96] Shaked, M., Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic orders and their applications* (2e édition). Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York.

[97] Shaked, M. & Shantikumar, J. G. (1997). Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors. *Journal of Multivariate Analysis* 61, 86–101.

[98] Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 8, 229-231.

[99] Sundt, B., Vernic, R. (2009). *Recursions for convolutions and compound distributions with insurance applications.* EAA Lecture notes. Springer-Verlag, New York.

[100] Tasche, D., (1999). Risk contributions and performance measurement. Working Paper, Technische Universitatt Mnchen.

[101] Teicher (1954). On the multivariate Poisson distribution, *Skandinavisk Actuariedskift* (Scandinavian Actuarial Journal) 5.

[102] Tijms, H. (1994). *Stochastic Models: An Algorithm Approach.* John Wiley, Chiester.

[103] Trivedi, P.K., Zimmer, D.M. (2005). *Copula modeling: An introduction for practitioners.* Foundations and Trends in Econometrics 1: 1–111.

[104] Venter, G. (1983). Transformed beta and gamma distributions and aggregate losses. *Proc. Cas. Act. Soc.*, pages 156{193

[105] Wang, S. (1998). Aggregation of correlated risk portfolios: Models and Algorithms. *Proc. Cas. Act. Soc.*, 848–939.

[106] Williamson, R.C., Downs, T. (1990). Probabilistic arithmetic I: Numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds. *International Journal of Approximate Reasoning* 4, 89–158.

[107] Willmot, G.E., Lin J.K. (2010). Risk modelling with the mixed Erlang distribution. *Applied Stochastic Models in Business and Industry.* In press.

[108] Willmot, G.E., Woo J.K., 2007. On the class of Erlang mixtures with risk theoretic applications. *North American Actuarial Journal* 11(2), 99–115.

[109] Young, V. (2004). Premium Principles. Dans *"Encyclopedia of Actuarial Science"* (édité par Teugels, J.L., Sundt, B.). Wiley, New York.