POUR LA SCIENCE
Dernières nouvelles de L'INFINI
Hors-série numéro 125

Pour la Science HORS-SÉRIE

La science expliquée par ceux qui la font

n° 125 - 11.24/12.24

L 13264 - 125 H - F: 11,00 € - RD

Dernières nouvelles de L'INFINI

«Souvent, quand il s'agit de manipuler l'infini, les physiciens défrichent et les mathématiciens éclaircissent»

Jean-Paul Delahaye
professeur émérite
à l'université de Lille

Mathématiques, physique, cosmologie...

L'hypothèse du continu bientôt résolue

Aller au-delà du modèle standard ?

Comment composer avec les singularités ?

Le *JWST*, un œil sur l'infini

Édition française de Scientific American - BEL./LUX.: 12,50 € - SUISSE: 17,60 CHF - CAN.: 18,99 $CA - PORT. CONT.: 12,50 €

Pour la Science HORS-SÉRIE

D'un infini à l'autre

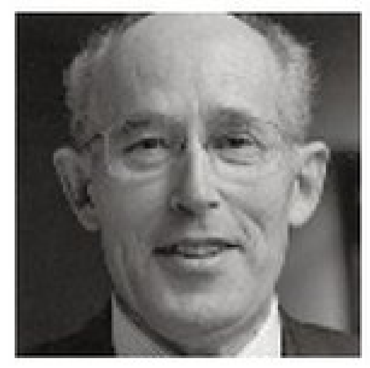
par **Loïc Mangin**
Rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

Selon Blaise Pascal, dans ses *Pensées*, l'être humain est: «Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant.» C'est-à-dire? Dans le passage que cette phrase conclut, le philosophe et mathématicien explique que plus le regard se porte au loin, suppléé ensuite par l'imagination, et plus le vertige de l'incommensurable nous prend. En un mot, nous sommes infiniment petits par rapport à l'Univers vu comme «une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part». La seconde partie de la phrase résume une invitation à un mouvement inverse, en commençant par considérer un ciron, un petit acarien puis, à descendre vers le toujours plus petit. Là encore, un vertige nous saisit, celui de l'insondable, de l'infiniment petit. Coincés entre ces deux extrêmes, nous sommes disproportionnés.

Toutefois, mathématiciens, physiciens et cosmologistes s'efforcent de remédier à ce tournis en rendant moins inconcevable l'infini, qu'il soit grand ou petit. C'est ce que ce *Hors-Série* donne à comprendre. Aussi peut-on reposer la question de Pascal: «Qu'est-ce qu'un être humain entre deux infinis?» Réponse: vous, lecteur de ce numéro! Et gageons qu'à la fin «le silence éternel de ces espaces infinis» ne vous effraiera plus!

Ont contribué à ce numéro

Jean-Michel Alimi
est directeur de recherche au CNRS et a dirigé le laboratoire Univers et théories (LUT), à l'observatoire de Paris-Meudon.



Marcel Berger
spécialiste de la géométrie différentielle, fut directeur de l'Institut des hautes études scientifiques et président de la Société mathématique de France.

Jean-Paul Delahaye
est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille).

Jean-Pierre Le Goff
est professeur de mathématiques et d'histoire des sciences et des techniques à l'IUFM et à l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (Irem) de l'université Caen-Normandie.

Mathématiques, physique, cosmologie…

Dernières nouvelles de L'INFINI

« L'infini est né avec l'arithmétique et la géométrie, dès lors qu'on a commencé à raisonner mathématiquement

01

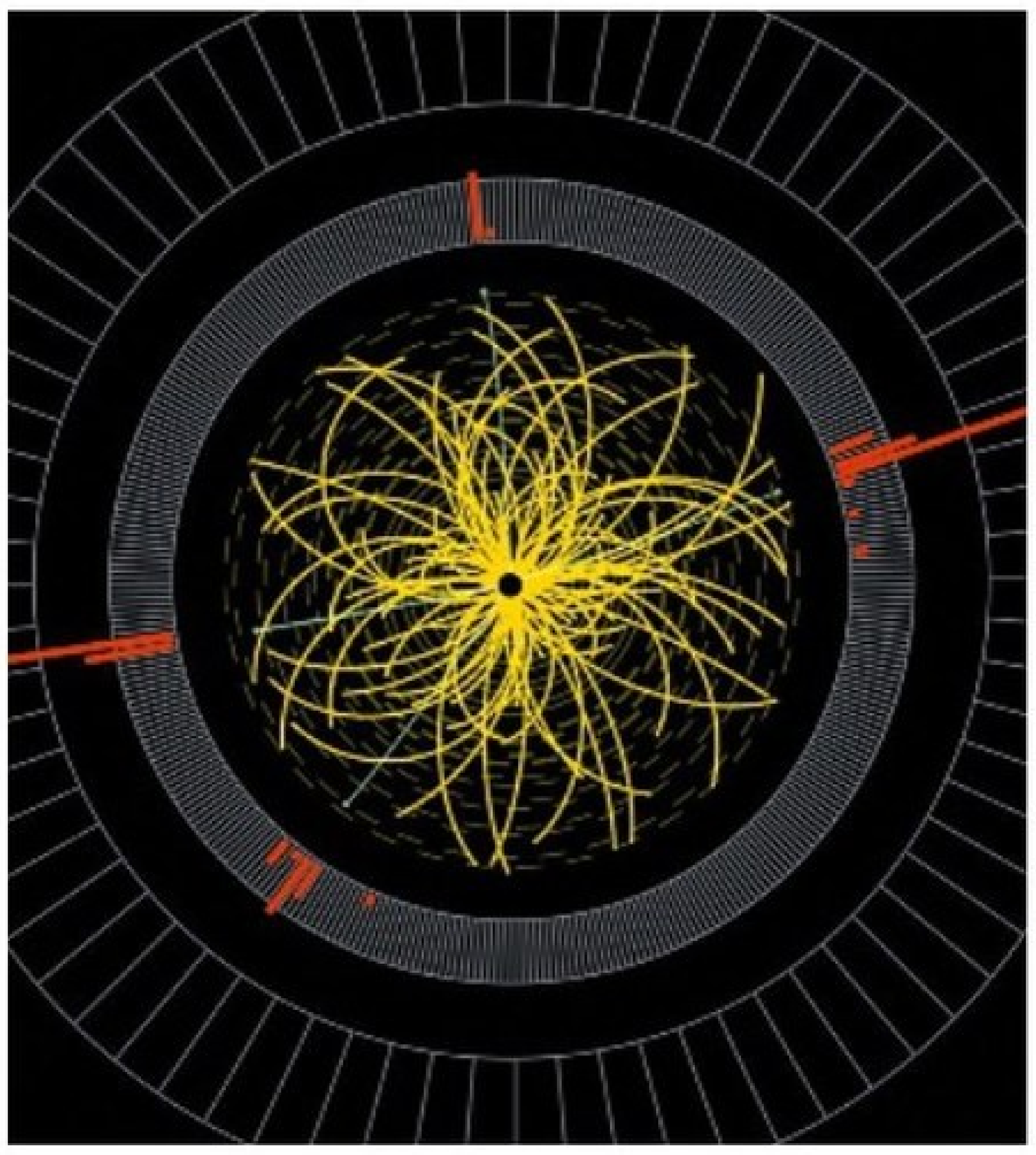
MATHS L'incommensurable

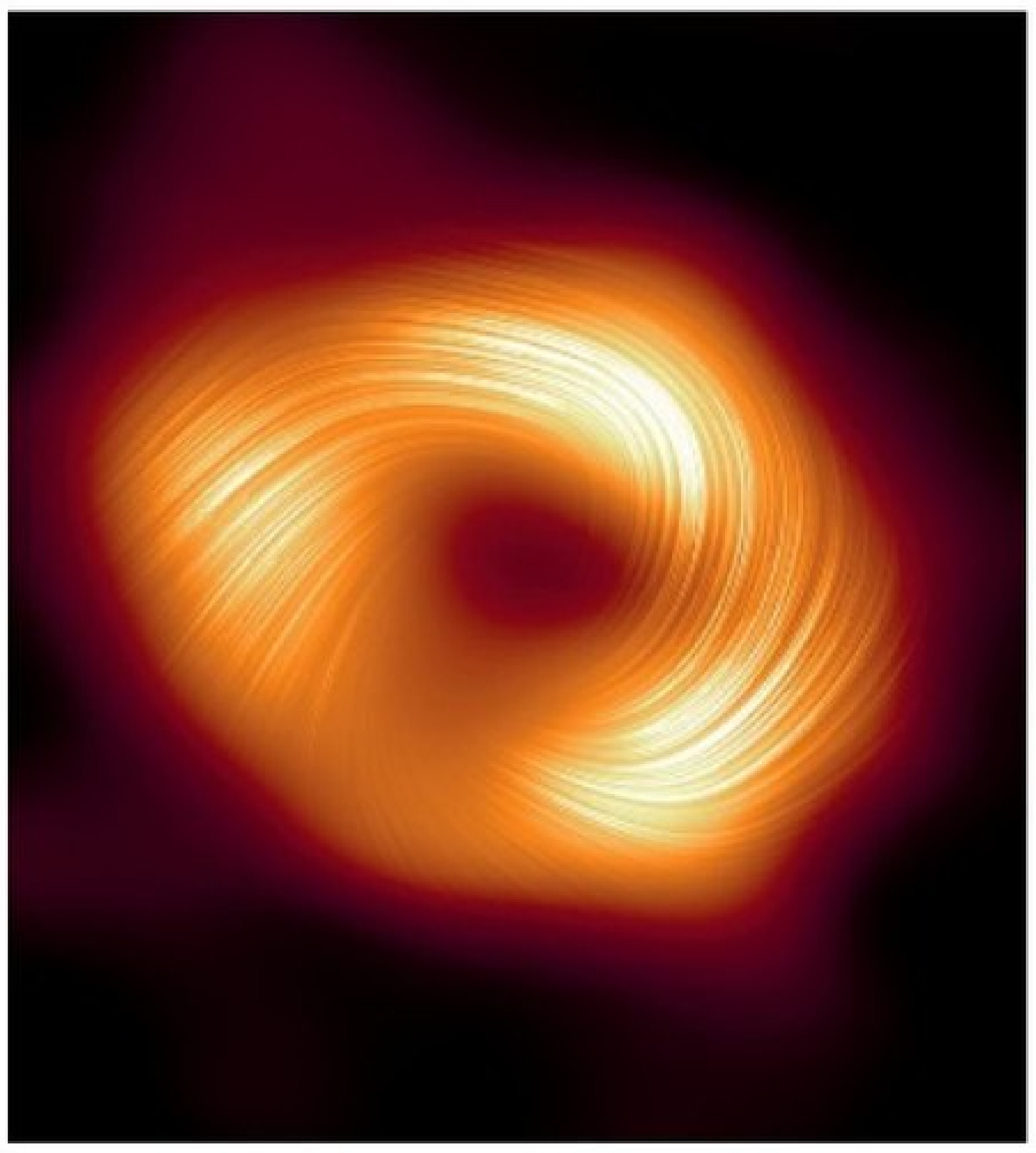
02

PHYSIQUE L'insondable

03

COSMOLOGIE L'inatteignable





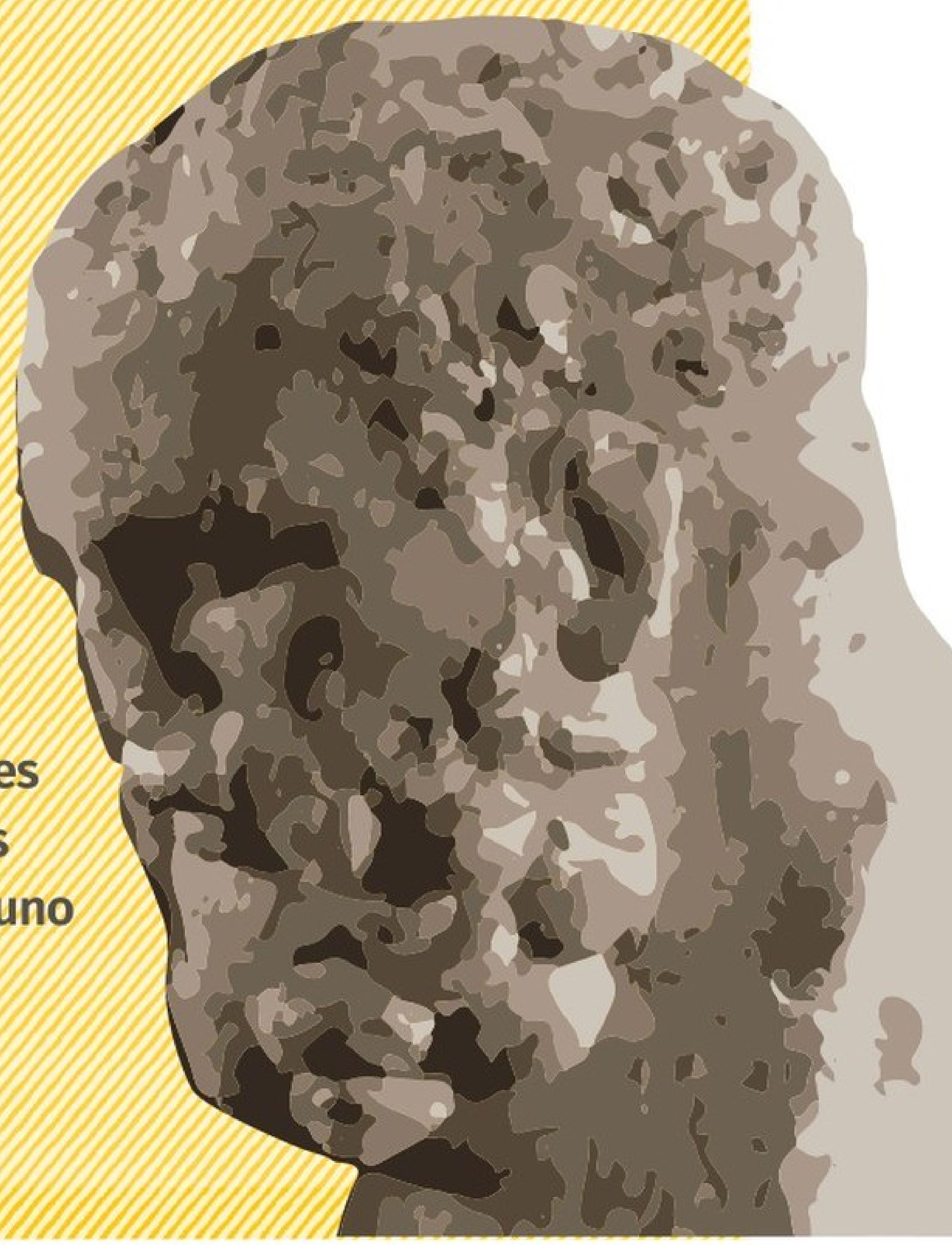
En couverture : ©sakkmesterke/Shutterstock

D’un infini à l’autre

Pour ne plus être effrayé par
le « silence éternel de ces espaces infinis ».

Penser l’infini

La notion d’infini, que l’on retrouve dès l’Antiquité aussi bien en Égypte, en Chine, en Inde… est abordée en Occident par les philosophes présocratiques, notamment Anaximandre. Leurs successeurs, à commencer par Aristote, distinguent l’infini en puissance de celui en acte. Le premier, qui ne peut être atteint, se fonde sur l’idée qu’il y a toujours un dépassement possible, comme dans l’énumération des nombres entiers. Le second infini, qui est longtemps resté impensable, est donné tel quel, comme une entité accomplie : c’est par exemple l’ensemble des entiers naturels. Depuis, mathématiciens, physiciens, philosophes se sont emparés du concept, l’ont affiné, précisé, utilisé… parfois au péril de leur vie : le 17 février 1600, le dominicain Giordano Bruno est condamné au bûcher pour avoir imaginé un univers infini constitué d’une infinité de mondes finis. Ces temps sont révolus et on peut naviguer d’un infini à l’autre sans souci majeur.



Tout un symbole

Le symbole représentant l’infini a été proposé en 1655 par l’astronome et mathématicien anglais John Wallis, précurseur du calcul différentiel et intégral, dans son traité *De sectionibus conicis*. Ce « 8 couché » serait une évolution du chiffre romain 1000, à une époque représenté par le symbole ꝏ, remplacé ultérieurement par la lettre M. D’autres y voient une déformation de la dernière lettre de l’alphabet grec, ω. Selon le mathématicien Georges Ifrah, l’origine est plutôt à chercher en Inde : l’*ananta*, un terme sanskrit signifiant « infini », correspond à un serpent cosmique associé au dieu Vishnou et est souvent représenté par un 8 couché. L’origine de l’infini est indéfinie…

Compter jusqu'à l'infini… ou presque

Préfixe			Nombre correspondant			
Nom	Symbole	Date	Puissance		Nom du nombre*	
			de 10	de 1000	Échelle longue	Échelle courte
Quetta	Q	2022	10^{30}	1000^{10}	Quintillion	Nonillion
Ronna	R	2022	10^{27}	1000^{9}	Quadrilliard	Octillion
Yotta	Y	1991	10^{24}	1000^{8}	Quadrillion	Septillion
Zetta	Z	1991	10^{21}	1000^{7}	Trilliard	Sextillion
Exa	E	1975	10^{18}	1000^{6}	Trillion	Quintillion
Péta	P	1975	10^{15}	1000^{5}	Billiard	Quadrillion
Téra	T	1960	10^{12}	1000^{4}	Billion	Trillion
Giga	G	1960	10^{9}	1000^{3}	Milliard	Billion
Méga	M	1960	10^{6}	1000^{2}	Million	
Kilo	k	1795	10^{3}	1000^{1}	Millier	
Hecto	h	1795	10^{2}	$1000^{2/3}$	Centaine	
Déca	da	1795	10^{1}	$1000^{1/3}$	Dizaine	
-	-	-	10^{0}	1000^{0}	Unité	
Déci	d	1795	10^{-1}	$1000^{-1/3}$	Dixième	
Centi	c	1795	10^{-2}	$1000^{-2/3}$	Centième	
Milli	m	1795	10^{-3}	1000^{-1}	Millième	
Micro	µ	1960	10^{-6}	1000^{-2}	Millionième	
Nano	n	1960	10^{-9}	1000^{-3}	Milliardième	Billionième
Pico	p	1960	10^{-12}	1000^{-4}	Billionième	Trillionième
Femto	f	1964	10^{-15}	1000^{-5}	Billiardième	Quadrillionième
Atto	a	1964	10^{-18}	1000^{-6}	Trillionième	Quintillionième
Zepto	z	1991	10^{-21}	1000^{-7}	Trilliardième	Sextillionième
Yocto	y	1991	10^{-24}	1000^{-8}	Quadrillionième	Septillionième
Ronto	r	2022	10^{-27}	1000^{-9}	Quardilliardième	Octillionième
Quecto	q	2022	10^{-30}	1000^{-10}	Quintillionième	Nonillionième

En 1940, le mathématicien américain Edward Kasner introduit les termes « gogol » et « gogolplex », inventés par son neveu de 8 ans.

Valeur	Nom
10^{100}	gogol
$10^{10^{100}}$	gogolplex

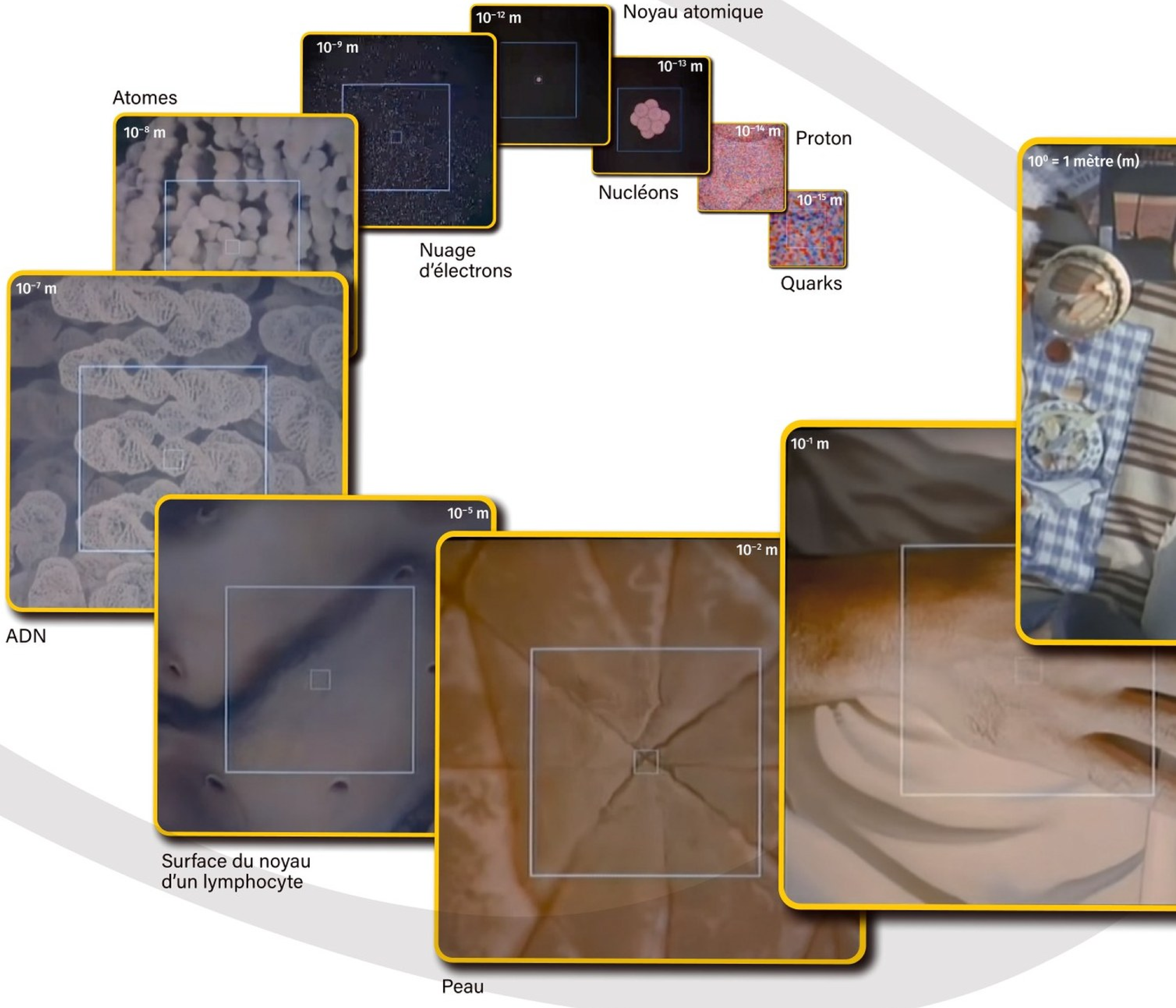
En 1996, John Horton Conway et Richard Guy suggèrent comme extension qu'un *N*-plex corresponde à 10^{N}. Avec ce système, un gogolplex vaut 10^{gogol} et un gogolplexplex vaut 10^{gogolpex}.

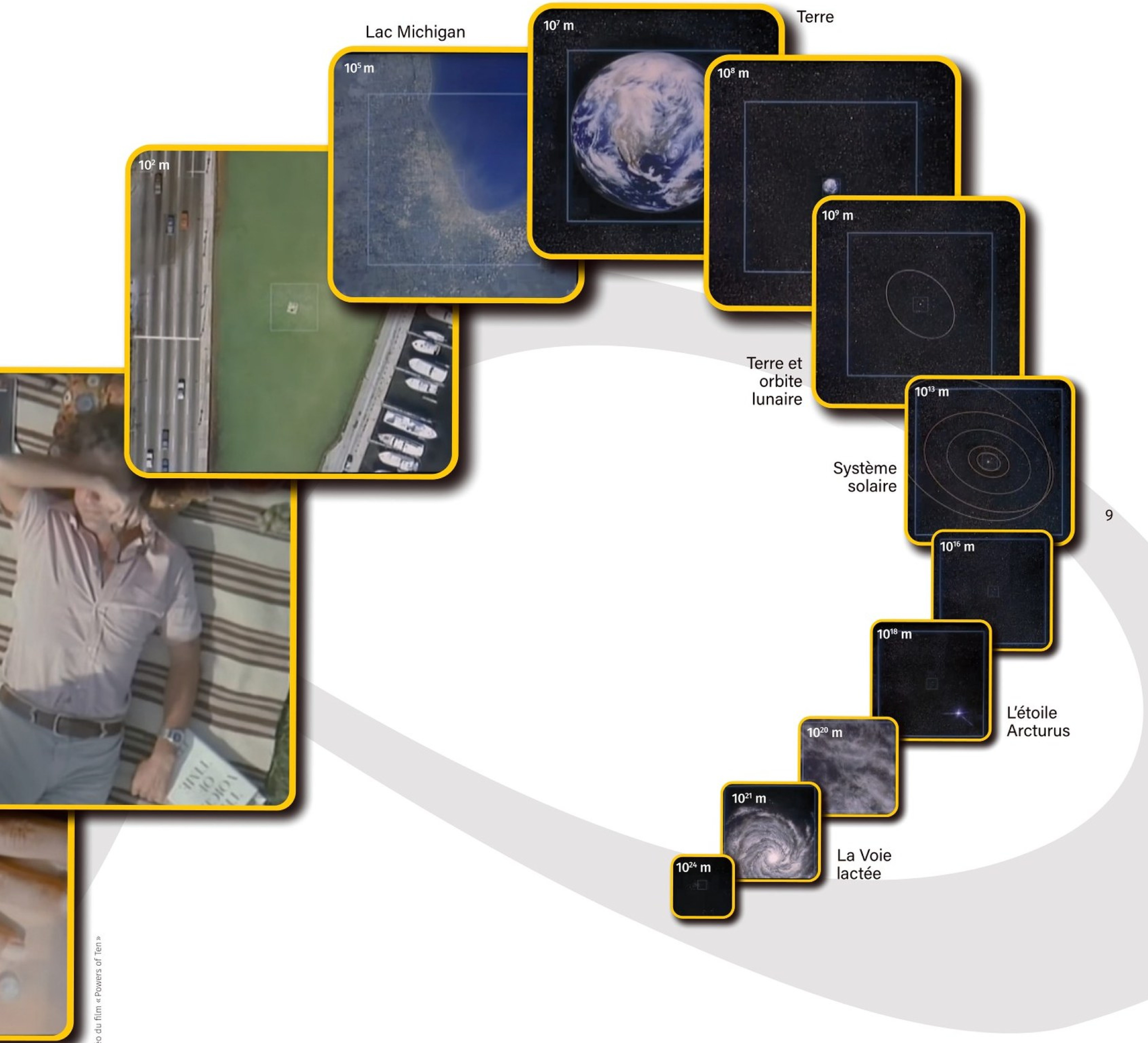
* L'échelle longue et l'échelle courte sont deux systèmes incompatibles de noms des grands nombres, nés en France respectivement aux XVe et XVIIe siècles. La première a pour base le million ; la seconde, dont l'usage est répandu dans les pays anglophones, est fondée sur le millier.

7

Les puissances de dix

Un pique-nique au bord du lac Michigan, à Chicago, aux États-Unis. C'est ainsi que commence *Powers of Ten*, le court-métrage de neuf minutes réalisé par les designers Charles et Ray Eames en 1977 pour répondre à une commande d'IBM. S'ensuit, par des effets de zoom en fondu enchaîné, un voyage vers l'infiniment grand (10^{24} mètres) puis l'infiniment petit (10^{-16} mètre), par des pas successifs d'un facteur 10. Le film est visible ici: youtu.be/0fKBhvDjuy0




Lac Michigan
Terre
10^7 m
10^5 m
10^8 m
10^2 m
10^9 m
Terre et orbite lunaire
10^{13} m
Système solaire
10^{16} m
10^{18} m
L'étoile Arcturus
10^{20} m
10^{21} m
La Voie lactée
10^{24} m

« L'infini est né avec les mathématiques »

Jean-Paul Delahaye
est professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal).

« Aristote distinguait l'infini en acte de celui en puissance

Peut-on dater, même approximativement, l'apparition de l'idée d'infini ?

Dès que fut disponible une forme de numération de position, comme la nôtre, où la signification d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre, et à l'inverse du système romain par exemple, il me semble que de façon implicite, on a eu accès à l'infini. De fait, il devenait possible de noter une infinité de nombres entiers, aussi grands que souhaité, et donc, d'une certaine façon, de les imaginer. Et les premiers systèmes positionnels datent du III^{e} millénaire avant notre ère !

De même, en géométrie, dès qu'il est question d'un plan (ou d'un espace), l'infini est là. Ainsi, l'un des axiomes d'Euclide met en jeu des parallèles, c'est-à-dire deux droites qui ne se croisent jamais. Il est sous-entendu que les deux droites sont infinies et, plus encore, qu'elles constituent deux infinis distincts ! Donc, selon moi, l'infini est né avec l'arithmétique et la géométrie, soit dès qu'on a commencé à raisonner mathématiquement.

En évoquant l'idée d'implicite, est-ce qu'on rejoint la distinction que faisait Aristote entre l'infini en acte de celui en puissance ?

L'infini en puissance serait plutôt celui auquel on pense. Cependant, quand on réfléchit en mathématicien, que ce soit en affirmant qu'il y a une infinité de nombres premiers, ou bien de façon plus prudente en disant qu'au-delà de tout entier, il y a encore un nombre premier, dans les deux cas, on a déjà une sorte d'infini en acte.

Toutefois, pendant très longtemps les mathématiciens ont été réticents à en convenir, et par exemple à parler d'intersection d'ensembles infinis. Ils ont contourné le problème et n'ont admis comme concept mathématique clair que l'infini en puissance. Pour eux, les entiers étaient certes quelque chose qui peut se développer indéfiniment, mais l'ensemble des entiers n'était pas un objet mathématique, comme un nombre ou un point géométrique. La raison principale était la possible « bijection » – ce n'était pas le terme employé –, c'est-à-dire la « mise en correspondance un à un » de l'ensemble des entiers (positifs) avec celui des entiers pairs. Qu'il puisse y avoir autant d'entiers (positifs) pairs que d'entiers apparaissait paradoxal.

La notion d'infini en acte semblait donc contradictoire, et on la laissait prudemment à Dieu, le seul à pouvoir penser l'infini! C'était notamment la position de Pascal.

Quand la situation a-t-elle changé?

Dans ce contexte, la révolution est venue à la fin du XIX^e siècle avec le mathématicien allemand Georg Cantor, le premier à montrer comment manipuler et comparer les ensembles infinis. Et désormais, renversement de situation, ce qui semblait empêcher de parler d'infini en acte est aujourd'hui utilisé pour définir la notion même d'infini: est infini un ensemble qui peut être mis en bijection avec une de ses parties propres.

L'édifice a un peu tremblé au début du XX^e siècle, lorsque ont été soulevées des «antinomies», des paradoxes, au moment de la crise des fondements, quand la cohérence des mathématiques a été interrogée. Il s'agissait d'être sûr, à partir d'un ensemble axiomatique, de ne pas pouvoir prouver un énoncé et son contraire.

La solution – et avec elle, le soulagement –, est venue rapidement de l'axiomatisation de la théorie des ensembles principalement par les Allemands Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel. Dès lors, les mathématiciens disposaient d'un outil confortable et fiable pour exercer leur art. Et de fait, cette axiomatisation des ensembles n'a jamais produit de contradiction. Ce fut une libération fantastique.

Est-ce qu'un jalon vers cette «libération» n'a pas été la notion du calcul infinitésimal, où l'infini est en quelque sorte un outil pour calculer?

Le calcul infinitésimal, et donc la question cette fois de l'infiniment petit, est un peu particulier, car avec des notations, comme «*dx*», qu'utilisent les physiciens, on arrive assez facilement à des contradictions. La tranquillité vis-à-vis du calcul infinitésimal n'a été obtenue qu'au XIX^e siècle en le contournant par les méthodes qui emploient des expressions du type «quel que soit epsilon positif, il existe delta…» et qui permettent des définitions logiquement bien établies des notions de limite, de continuité…

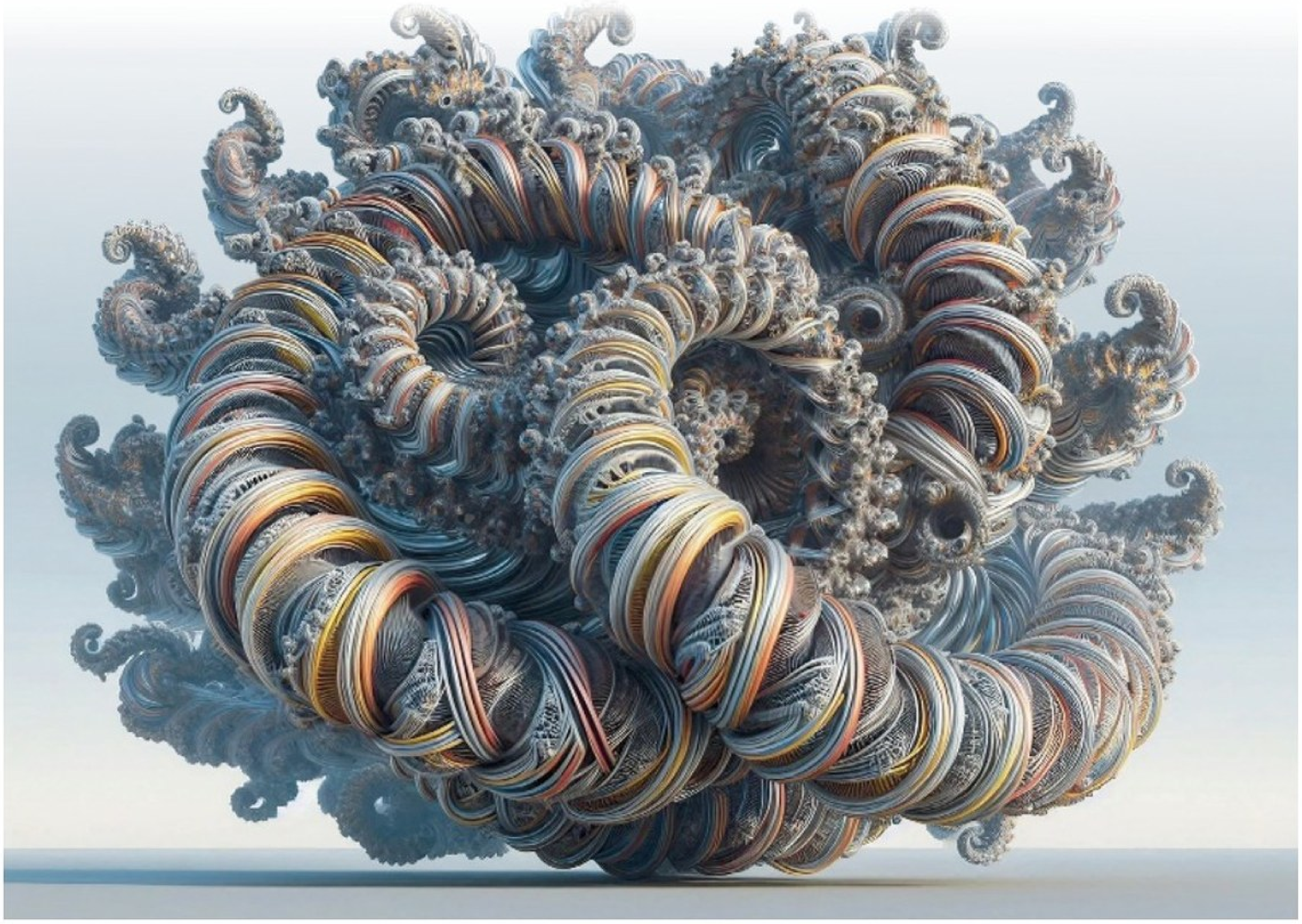
Plus tard, les infinitésimaux ont fini par être réhabilités quand Abraham Robinson a introduit dans les années 1960 un ensemble d'outils, réunis sous le terme d'«analyse non standard», grâce auquel la notion d'infiniment petit devenait manipulable de façon rigoureuse. Notons cependant que cette solution est aujourd'hui peu exploitée et que dans les cours de mathématiques – par exemple en classe préparatoire – c'est toujours la méthode des «epsilon-delta» qui donne sa rigueur au calcul infinitésimal, qu'on appelle plutôt «calcul différentiel et intégral», ou simplement «analyse».

Il existe donc un distinguo entre l'infiniment grand et l'infiniment petit. Plus largement, est-ce qu'il existe une typologie des infinis chez les mathématiciens?

Outre le fait que l'infiniment petit est théorisé par l'analyse non standard et l'infiniment grand par la théorie des ensembles, cette dernière distingue les cardinaux des ordinaux, qui correspondent à deux types d'infinis différents, malgré tout reliés. Les premiers relèvent, en première approximation, du nombre d'éléments dans un ensemble, les seconds tenant compte de leur ordonnancement.

Toutefois, aujourd'hui, en mathématiques, c'est surtout l'infiniment grand et toutes ses variétés qui est l'objet de toutes les attentions.

En mathématiques, quels exemples peut-on donner de cas où l'infini s'exprime de façon spectaculaire?



Une fractale, un objet à la structure infiniment fine.

La première idée est celle des fractales, qui offrent une façon assez fascinante de rencontrer et de visualiser l'infini. Par exemple, l'ensemble de Mandelbrot se définit relativement simplement avec une formule portant sur des nombres complexes. Mais quand on regarde ces fractales (*voir la figure ci-dessus*), on se rend compte que leur structure est infiniment fine et qu'elle se répète en variant à mesure que l'on s'en rapproche.

L'infini apparaît aussi dans le fameux raisonnement par récurrence, une des choses les plus importantes en mathématiques selon Henri Poincaré. Le principe est simple : pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout n, on prouve d'abord qu'elle est vraie pour $n = 0$ puis, en la supposant vraie pour n, qu'elle l'est pour $n + 1$. C'est un moyen très puissant d'accéder à des énoncés concernant l'infini. Et pourtant, il suffit d'être en mesure de penser les nombres entiers, de seulement les avoir appris à l'école, pour comprendre le principe de récurrence, qui semble tellement aller de soi.

Un processus d'itération, à l'œuvre dans les exemples précédents, se cache aussi dans les algorithmes. Comment l'informatique compose-t-elle avec l'infini ?

Dans ce domaine, on manipule l'infini de façon implicite sans arrêt. Évidemment, la machine est physiquement, matériellement finie, et en particulier sa capacité de mémoire. Pour autant, pour être efficace, les algorithmes sont conçus pour être potentiellement capables de fonctionner sur des machines disposant d'autant de mémoire que l'on peut imaginer. Par exemple, un algorithme dont la tâche est de tester si un nombre donné est premier a été pensé pour traiter tout nombre entier, pourvu qu'il dispose de suffisamment de ressources. En d'autres termes, l'informaticien se place toujours dans un monde un petit peu idéal, non limité, où l'infini ne fait pas peur et les contraintes matérielles ne sont pas une préoccupation.

En cosmologie le mot « singularité » signifie « je ne comprends pas »

Pourtant, dans quelle mesure n'est-ce pas un peu trop ambitieux, voire présomptueux, d'imaginer concevoir l'infini avec un objet, lui limité, à commencer par notre cerveau ?

On peut le penser en effet. Cependant, dès que l'on a appris à aligner des symboles pour représenter des nombres entiers, pour revenir à des choses simples, on a eu accès à l'infini sans avoir l'impression d'accomplir un exploit extraordinaire. Calculer par exemple le produit de 100 millions par 10000 milliards ne relève pas de la prouesse. Pourtant, cette capacité de multiplier des nombres entiers entre eux est clairement une façon de composer avec des objets aussi grands qu'on le souhaite, donc en quelque sorte de maîtriser l'infini.

De même, on l'a dit, la manipulation de l'infini par le principe de récurrence apparaît naturelle. Ensuite, pourquoi… je ne sais pas. Il y a un peu de merveilleux là-dedans.

Nous avons vu que les mathématiciens ont fait la paix, récemment, avec l'idée d'infini. Qu'en est-il des physiciens, eux aussi confrontés à l'infini ?

J'admire beaucoup la façon dont les physiciens se confrontent à l'infini parce qu'ils ont moins de prévention. En particulier, avec les infinitésimaux, ils ont continué à les manipuler, y compris quand les mathématiciens leur enjoignaient la prudence et les alertaient sur le risque de contradictions. Sans en tenir compte ni trop se poser de questions, ils concoctaient des recettes, qui fonctionnaient et livraient des résultats intéressants, mais sans être parfaitement formalisées avant que, justement, l'avènement de l'analyse non standard ne vienne régulariser la situation. En quelque sorte, les physiciens défrichent et les mathématiciens éclaircissent.

De ce point de vue, la « théorie des distributions » est un exemple remarquable, une distribution étant un objet qui généralise la notion de fonction et de mesure afin, entre autres, de tenir compte des irrégularités, des discontinuités. Les physiciens maniaient de tels objets un peu bizarres, comme la distribution de Dirac, utile dans le traitement du signal, et les traitaient comme des fonctions alors qu'ils n'en sont pas. Puis, les mathématiciens s'y sont attelés et ont proposé une formalisation de la notion de distribution qui, à ce moment-là, est devenue un objet tout à fait honorable et bien contrôlé. D'ailleurs, ces travaux valurent en 1950 la médaille Fields au mathématicien français Laurent Schwartz.

N'est-ce pas le même problème pour la renormalisation, qu'utilisent les physiciens dès qu'ils sont confrontés à des infinis, mais que les mathématiciens ont encore du mal à justifier ?

Je connais mal ce sujet, mais je pense qu'effectivement, c'est le même genre de situation, où les physiciens s'autorisent des choses que les mathématiciens ont du mal à expliquer.

Que peut-on dire des efforts des physiciens pour comprendre l'infiniment petit, ici celui de notre Univers ?

Pour ce que j'en comprends, je pense que les physiciens ne croient pas que l'infiniment petit existe. Selon eux, si on descend à un niveau suffisamment petit, à un moment donné, on rencontre des grains, des choses équivalentes à du discret. Ils ne considèrent pas que l'espace est indéfiniment divisible comme peut l'être un segment pour un mathématicien.

Il y a implicitement en physique, et d'ailleurs en mécanique quantique ça a une certaine importance, des hypothèses de finitude qui ne sont pas toujours formulées très clairement. Par exemple, les physiciens n'imaginent pas que l'on puisse stocker une infinité d'informations dans un volume fini d'espace. Je ne dis pas que c'est absolument général, mais je pense que c'est largement partagé. Alors que pour un mathématicien, aucun problème !

Une autre divergence concerne l'infini non dénombrable, c'est-à-dire celui qui ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$: une droite par exemple ne peut pas être mise en bijection avec l'ensemble des entiers, parce qu'elle contient trop de points. Cette notion de continu, l'idée qu'il y a des ensembles non dénombrables, comme celui des nombres réels, est complètement délaissée par les physiciens. Ces derniers modélisent certes le temps avec les nombres réels, mais ils ne les prennent pas vraiment au sérieux. Que les instants soient non dénombrables reste une abstraction, sans signification physique. Or peut-être y en a-t-il une… C'est une situation assez étrange.

Plus étonnant encore. Puisque les physiciens restent circonspects avec l'idée de continu, ils pourraient se tourner vers un corps de nombres discrets ou au moins dénombrable. Et il en existe en mathématiques, c'est le corps des nombres réels calculables, qui est un infini dénombrable. D'une certaine façon, il serait plus conforme à ce qu'ils semblent souhaiter. Mais comme il est très compliqué à manipuler, qu'il implique des notions de logique un peu difficiles, et surtout en apparence superflues pour les physiciens, ils ne l'utilisent pas.

De l'autre côté du spectre de l'infini, lorsqu'un physicien, ou plutôt un cosmologiste, se penche sur les singularités, par exemple celle du Big Bang ou d'un trou noir, ne laisse-t-il pas malgré tout un peu de place à l'infini ?

L'astrophysicien Aurélien Barreau résume bien les choses. Les singularités ne sont pas un problème de physique, mais un problème de nos modèles ! Dit autrement, le mot « singularité » signifie « je ne comprends pas ». De fait, on ignore tout de ce qui se passe au niveau d'une singularité. L'interprétation du réel trouve là ses limites, bloquée par quelque chose qui ressemble à un infini non maîtrisé.

Propos recueillis par Loïc Mangin

MATHS
L'incommensurable

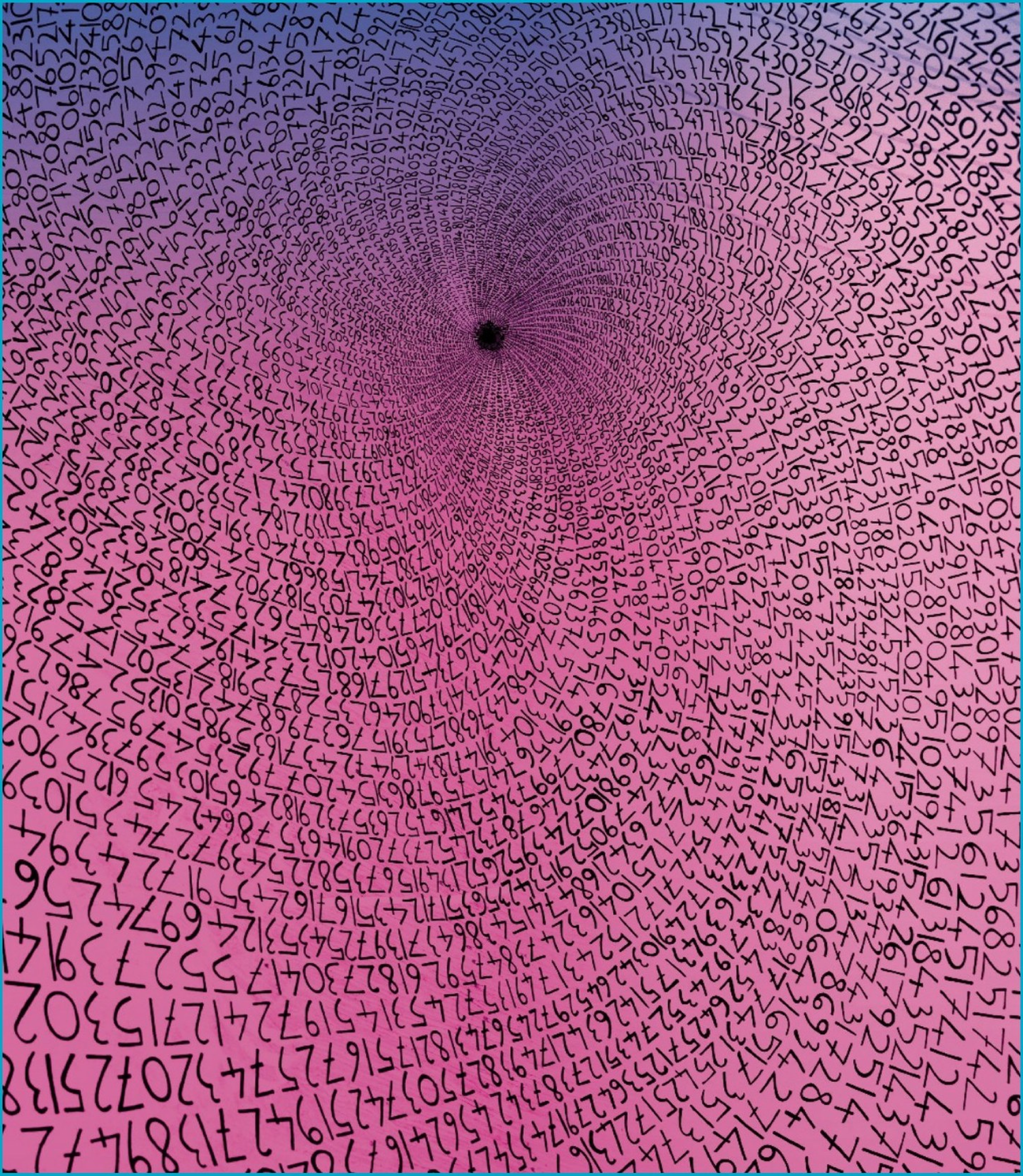
L'infini est né avec les mathématiques, dès lors que l'être humain a su compter. Cependant, la maîtrise de ce concept pour le moins évanescent a pris plusieurs siècles et des chemins détournés, l'art italien du Quattrocento en est un exemple. De plus, cette conquête n'a pas été exempte de débats houleux désormais apaisés. Aujourd'hui, tout semble rentré dans l'ordre… ou presque, car l'hypothèse du continu résiste encore aux assauts des mathématiciens, mais peut-être plus pour très longtemps.

01

L'hypothèse du continu est une question que mathématiciens et logiciens en arrivaient à croire impossible à trancher. L'Américain Hugh Woodin, lui, n'a jamais renoncé…

Un pont entre deux infinis

Jean-Paul Delahaye



En bref

> La théorie usuelle des ensembles, à la base des mathématiques, repose sur un système d'axiomes noté ZFC. Elle constitue une théorie des infinis, dont il existe toute une hiérarchie.

> Selon « l'hypothèse du continu », il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui des nombres entiers et celui des nombres réels. Dans la théorie ZFC, cette hypothèse est indémontrable.

> On cherche à compléter la théorie ZFC par des axiomes raisonnables qui permettraient de lever l'indécidabilité de l'hypothèse du continu.

> L'Américain Hugh Woodin a récemment indiqué une voie prometteuse vers cet objectif.

Le concept d'infini a toujours été problématique pour les philosophes et les théologiens. De leur côté, les mathématiciens n'ont commencé à le manier de façon précise et satisfaisante qu'à partir du XIX^e siècle. Une des difficultés tenait à ce que l'on ignorait comment caractériser ou comparer les différents types d'infini, et l'on faisait face à ce qui semblait des absurdités. Par exemple, en multipliant par 2 chaque nombre entier, on établit une correspondance biunivoque, ou bijection, entre les entiers et les nombres pairs, suggérant qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers pairs et impairs réunis !

Dans les années 1870, le mathématicien allemand Georg Cantor a proposé d'utiliser cette propriété de bijection pour comparer entre eux des ensembles composés d'une infinité d'éléments. Cela ne conduit directement à aucune contradiction, et l'on peut même définir, notre exemple le montre, un ensemble infini comme étant un ensemble en bijection avec une partie (au sens strict) de lui-même.

De là, Cantor a pu construire une théorie des ensembles qui constitue une théorie mathématique de l'infini devenue aujourd'hui le socle sur lequel se développent toutes les mathématiques. Et après la résolution de quelques difficultés, on dispose, depuis le début du XX^e siècle, d'un système d'axiomes qui n'a fait apparaître jusqu'ici aucune contradiction dans les travaux des mathématiciens.

Cette théorie axiomatique des ensembles est juste un peu faible en ce sens qu'elle laisse définitivement sans réponse certaines questions élémentaires comme celle dite « de l'hypothèse du continu », que l'on explicitera. Peut-on améliorer la théorie pour qu'elle réponde mieux à ces questions ?

DES QUESTIONS A PRIORI SANS RÉPONSE

Oui, de fait, des résultats très intéressants ont été obtenus dans cette direction ces dernières années, et l'un des protagonistes majeurs de cette histoire est Hugh Woodin, mathématicien à l'université Harvard, aux États-Unis. Il a la profonde conviction que l'énigme de l'hypothèse du continu dispose d'une solution, c'est-à-dire que cette hypothèse est soit vraie soit fausse, mais pas « indécidable », et cela l'a amené à proposer et à faire avancer deux programmes de recherche opposés.

Le premier devait établir que l'hypothèse du continu est fausse. Il y a quinze ans, le chercheur croyait possible son aboutissement. Mais il a changé d'avis et lancé un second programme de recherche qui porte sur ce qu'on dénomme le « L ultime » et qui, selon lui, conduira à une solution satisfaisante et définitive des principales énigmes posées par l'infini – notamment à la preuve que l'hypothèse du continu est vraie. Mais avant d'expliquer dans ses grandes lignes cette voie vers le L ultime, revenons un peu en arrière pour comprendre les termes du problème.

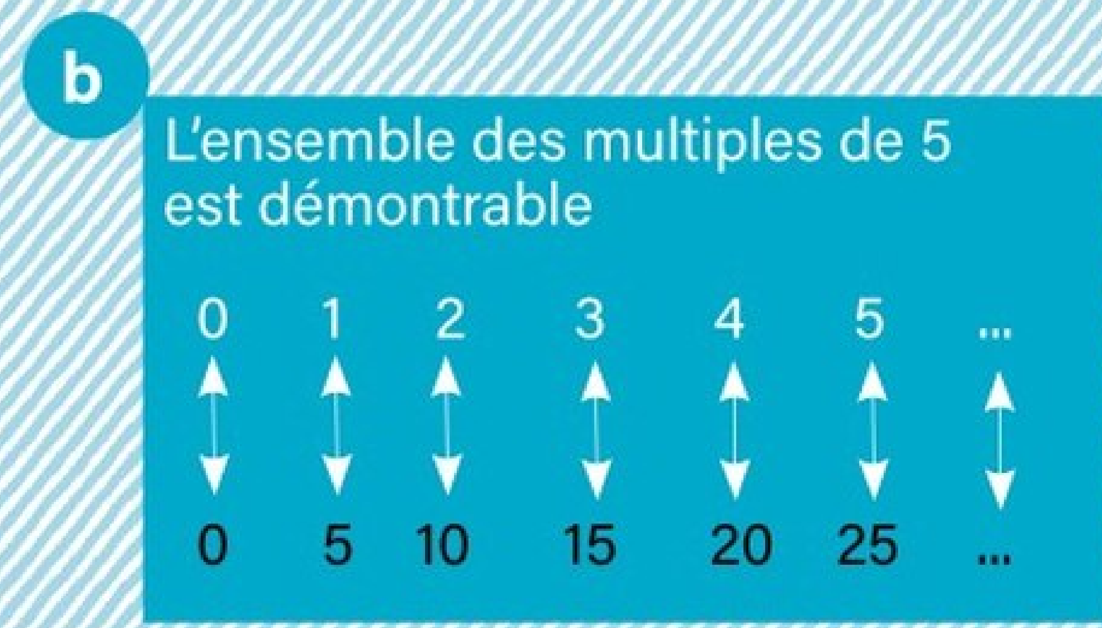
Découverte par Cantor et publiée en 1891, la vérité la plus simple concernant l'infini mathématique est qu'il en existe plusieurs sortes. De façon plus générale, le théorème de Cantor

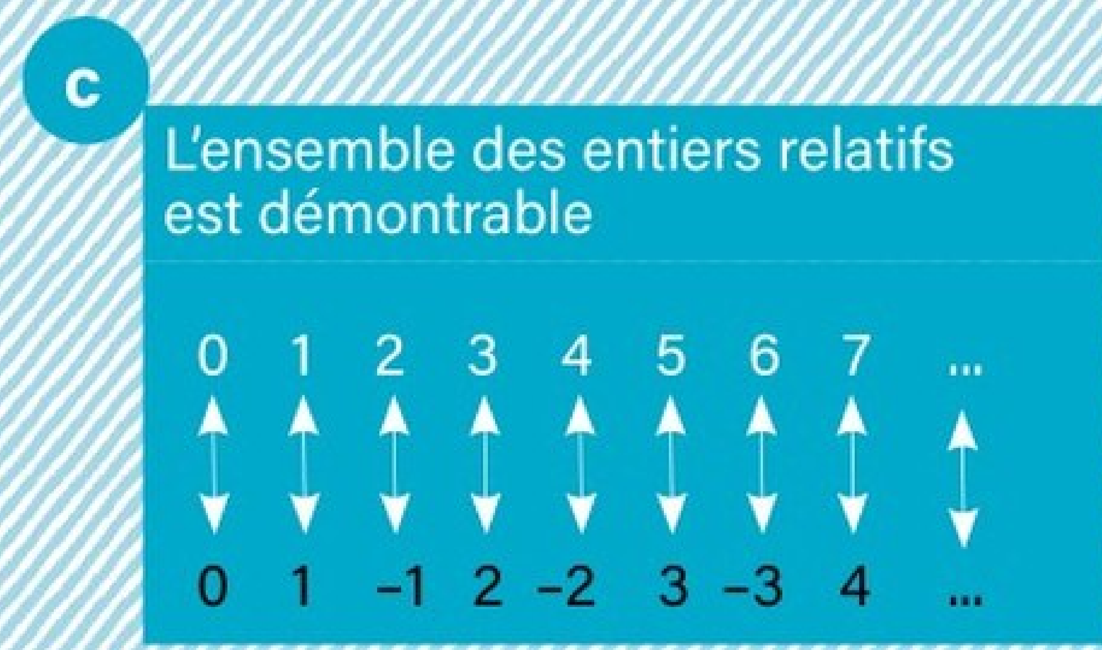
L'infini dénombrable et le continu

Pour comparer les tailles d'ensembles E1 et E2 constitués d'une infinité d'éléments, on cherche à savoir s'il existe une bijection (une correspondance biunivoque) entre les éléments de E1 et ceux de E2. Si c'est le cas, E1 et E2 sont dits « équipotents », ou qu'ils ont le même cardinal.
Un ensemble infini équipotent à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels est dit « dénombrable ». On constate aiséme nt que, par exemple, l'ensemble des nombres pairs *(a)*, l'ensemble des multiples de 5 *(b)*, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs *(c)* sont dénombrables. On peut aussi montrer facilement que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ceux qui peuvent s'écrire sous la forme p/q, où p et q sont des entiers) est dénombrable.
En revanche, l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 (par exemple) n'est pas dénombrable. En voici une démonstration. Supposons que cet ensemble [0, 1] soit dénombrable. On pourrait alors énumérer ses éléments un à un, ce qui donnerait une liste infinie (mais dénombrable) de nombres du type :

$0, d_{1,1}\, d_{1,2}\, d_{1,3}\, d_{1,4}\, d_{1,5}\, d_{1,6}...$
$0, d_{2,1}\, d_{2,2}\, d_{2,3}\, d_{2,4}\, d_{2,5}\, d_{2,6}...$
$0, d_{3,1}\, d_{3,2}\, d_{3,3}\, d_{3,4}\, d_{3,5}\, d_{3,6}...$
...

où les $d_{i,1}$, $d_{i,2}$, $d_{i,3}$... sont les chiffres du développement décimal du $i^{\text{ème}}$ nombre de la liste (on exclut ici les développements décimaux qui se terminent par une infinité de 9). Formons alors un nombre $x = 0, d_1\, d_2\, d_3\, d_4...$ tel que $d_1 \neq d_{1,1}$, $d_2 \neq d_{2,2}$, $d_3 \neq d_{3,3}$... (en évitant de choisir 9 pour les d_i).
On constate que x ne figure pas dans la liste ci-dessus (car quel que soit n, sa n-ième décimale diffère de la n-ième décimale du n-ième nombre de la liste), alors que x est bien un nombre réel compris entre 0 et 1. Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ est fausse.
Ainsi, les nombres réels compris entre 0 et 1 ne sont pas dénombrables. Leur infinité est d'un ordre supérieur à celle de $\mathbb{N}$ et l'on parle de l'infini continu, les nombres réels pouvant être représentés par les points d'une ligne continue. Cette représentation géométrique des nombres permet d'ailleurs de voir facilement que l'intervalle [0, 1] est équipotent à, par exemple, l'intervalle [0, 5] : deux intervalles de longueurs différentes ont la même infinité de points *(d)*... On peut aussi démontrer des choses plus étonnantes, par exemple que la surface d'un carré, ou le volume d'un cube, contient la même infinité de points qu'un segment de droite.





21

FERMAT ET LES GRANDS CARDINAUX

L'hypothèse du continu, ou HC, a été considérée la première fois par Georg Cantor. Elle affirme qu'entre l'infini des nombres entiers (l'infini dénombrable) et l'infini des nombres réels (le continu), il n'existe pas d'autre infini. Aucune intuition claire ne s'impose à propos de la vérité ou de la fausseté de HC. Ce n'est pas le cas pour les axiomes dits « de grands cardinaux », qui affirment l'existence d'ensembles infinis très grands, comme celle d'un ensemble qui, en taille, dépasserait chacun des infinis de la liste $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$...

On connaît une série d'axiomes de grands cardinaux. On les considère comme vrais *a priori*, car les refuser reviendrait à limiter l'infini, ce qui semble absurde. Ces axiomes permettent de prouver des résultats qu'on ne peut pas obtenir sans eux, et conduisent même à démontrer des résultats portant sur les nombres entiers.

Le mathématicien Alexandre Grothendieck a utilisé de tels axiomes dans ses travaux sur la théorie des catégories, et la démonstration du grand théorème de Fermat (selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que l'entier n est supérieur à 3), au moins dans un premier temps, semblait ne pas pouvoir s'en dispenser.

On a espéré que certains axiomes de grands cardinaux auraient pour conséquence HC ou non-HC, ce qui aurait résolu l'énigme de l'hypothèse du continu. On a malheureusement établi que cela ne pouvait pas être le cas. On est donc reparti à la recherche de nouveaux axiomes naturels qui fixeraient la vérité ou la fausseté de HC.

indique qu'à chaque fois que l'on considère un ensemble infini E, l'ensemble de ses parties (ou sous-ensembles), noté $\mathcal{P}(E)$, est d'une taille infinie strictement supérieure à celle de E. Il n'y a donc pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Ainsi, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ est strictement plus petit que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de ses parties, qui comprend par exemple $\mathbb{N}$ lui-même, l'ensemble des nombres pairs, celui des nombres premiers, celui des puissances de 2... Et en répétant l'opération, c'est-à-dire en considérant la suite $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$... on dispose, grâce au théorème de Cantor, d'une infinité d'ensembles infinis différents et de plus en plus grands.

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

L'infini des entiers naturels, $\mathbb{N}$, est le plus simple et le plus petit qui existe. On l'appelle l'« infini dénombrable », et tout ensemble infini qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit « dénombrable ». Un infini d'ordre supérieur est, on l'a vu, celui de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, le même que celui de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, car on démontre assez facilement qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$. Se pose la question suivante : existe-t-il des infinis intermédiaires entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$? N'en ayant jamais rencontré, les mathématiciens ont donc été amenés à supposer que de tels infinis intermédiaires n'existent pas : telle est l'hypothèse du continu, posée à l'origine par Cantor. Ici, le mot « continu » évoque l'infinité des nombres réels, ces nombres pouvant être représentés par les points d'une ligne continue.

Autrement dit, l'hypothèse du continu affirme que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est soit en bijection avec $\mathbb{N}$ (si c'est un « petit » infini), soit en bijection avec $\mathbb{R}$ lui-même (si c'est un « gros » sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$).

L'hypothèse du continu constitue la plus simple des questions non résolues concernant les infinis. On la juge importante et, d'ailleurs, le mathématicien allemand David Hilbert l'avait placée en tête de sa célèbre liste des 23 grands problèmes présentée en 1900 au Congrès international des mathématiciens, à Paris. Plus de cent vingt ans après, nul n'a su répondre définitivement à la


Georg Cantor (1845-1918)

question: on n'a jamais rencontré de partie infinie de ℝ qu'on ne sache pas mettre en bijection avec ℕ ou avec ℝ, mais on n'a pas démontré qu'une telle partie n'existait pas.

Les logiciens ont cependant obtenu d'intéressants résultats qui, dans un premier temps, ont épaissi le mystère. Ils portent sur la théorie des ensembles telle qu'elle a été formalisée au début du XXe siècle et qui repose sur un système d'axiomes élaboré par plusieurs chercheurs, en particulier les Allemands Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel. Ce système d'axiomes est noté ZFC, d'après les initiales de ces derniers, le C représentant l'axiome du choix, un axiome au statut particulier (il stipule qu'étant donné une collection d'ensembles non vides deux à deux disjoints, il existe toujours un ensemble ayant exactement un élément commun avec chacun de ces ensembles).

Or, en 1938, le logicien autrichien Kurt Gödel a prouvé que si la théorie des ensembles construite sur ZFC est non contradictoire (c'est-à-dire qu'elle ne conduit pas à une affirmation et son contraire), alors elle ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse. En d'autres termes, si l'on note HC l'hypothèse du continu («Il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui de ℕ et celui de ℝ») et non-HC sa négation («Il existe un infini intermédiaire entre celui de ℕ et celui de ℝ»), la théorie ZFC ne peut pas démontrer non-HC.

La surprise est surtout venue en 1963 de la preuve apportée par le mathématicien américain Paul Cohen que si la théorie ZFC n'est pas contradictoire, alors elle ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu. Ce résultat et celui de 1938 montrent donc que HC est logiquement indépendante des axiomes ZFC. Autrement dit, l'hypothèse du continu est un énoncé «indécidable» de la théorie ZFC.

DE NOUVEAUX AXIOMES ?

Une interprétation possible de cette indépendance vis-à-vis des axiomes ZFC est que les mathématiciens ont le choix de faire ce qui leur plaît: ajouter l'hypothèse du continu, HC, comme axiome à leur théorie, ou ajouter sa négation, non-HC. Mais cette interprétation est incompatible avec l'idée qu'il existe une réalité ensembliste unique, idée à laquelle Gödel croyait profondément. Pour lui, l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans la théorie ZFC signifiait que les axiomes ZFC ne donnent pas une description complète de cette réalité ensembliste à laquelle, comme beaucoup de mathématiciens, il ne voulait pas renoncer. D'où un programme: trouver de nouveaux axiomes et les ajouter à ZFC

ORDINAUX ET L ULTIME

Les ordinaux sont une généralisation des nombres entiers, très différente de celle que forment les nombres réels.
Ils constituent une façon de prendre au sérieux les infinis et de les ordonner. Après la série ordonnée des nombres entiers, on considère qu'il existe un nouveau nombre, noté ω. On ne s'arrête pas là et on postule que, de la même façon qu'après 0 il y a 1, après ω il y a ω + 1, puis ω + 2… Au-delà de cette deuxième série infinie, il y a ω·2, puis ω·3… Définissables à partir de l'ensemble vide, ces ordinaux s'organisent en une structure qu'on essaie de comprendre depuis que Cantor les a découverts. On les utilise en particulier pour définir des ensembles V_α de plus en plus grands, dont on montre qu'ils forment l'univers ensembliste dans sa totalité, noté V.
En jouant avec la définition des V_α, on construit des sous-univers du monde ensembliste (on parle de «modèles internes») qui, bien que plus petits que V, en ont les propriétés fondamentales. C'est avec l'un de ces sous-univers, noté L, que Gödel a montré que la théorie usuelle des ensembles est compatible avec l'hypothèse du continu, HC. Mais Paul Cohen a prouvé qu'elle était aussi compatible avec non-HC. L'idée exploitée pour définir L a été reprise sous le nom de «L ultime» et semble mener vers une solution concernant HC qui, finalement, serait vraie.

jusqu'à ce qu'ils permettent de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non. Et c'est tout le problème.

Pour comprendre les idées nouvelles introduites par Hugh Woodin, il nous faut maintenant expliquer brièvement l'univers ensembliste découvert par Cantor. La colonne vertébrale de cet univers est donnée par la suite des « ordinaux », qui sont les nombres offrant la possibilité de compter dans un ordre progressif les éléments d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini. Le début de cette suite est composé des nombres entiers naturels, définis sous une forme ensembliste et nommés dans ce contexte « entiers de von Neumann ». Ils se construisent en partant de l'ensemble vide (celui qui ne contient rien), noté ø, en posant : $0 = ø$, $1 = \{ø\}$, $2 = \{ø, \{ø\}\}$..., $n + 1 = n \cup \{n\}$..., où ∪ est le symbole de la réunion de deux ensembles. Dans cette représentation, l'entier n est donc constitué des entiers allant de 0 à $n-1$.

UNE CHAÎNE INFINIE ET CUMULATIVE

Les ordinaux ne s'arrêtent pas aux entiers. Le premier ordinal infini – on dit aussi transfini – est obtenu en prenant d'un coup tous les entiers, et est noté ω (oméga) : $\omega = \{0, 1, 2, ...\}$. On peut alors poursuivre : $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega+2 = (\omega+1) \cup \{\omega+1\}$... On arrive ainsi à $\omega+\omega$, noté $\omega \cdot 2$, puis, plus loin, à $\omega \cdot 3$, et ainsi de suite. Plus loin encore, on obtient ω^2, ω^3..., ω^ω...

Notons qu'il y a deux sortes d'ordinaux : ceux qui ont un prédécesseur, par exemple $\omega+1$

NEUTRALISER LE FORCING

Le forcing est la méthode conçue par Paul Cohen pour démontrer que non-HC (la négation de l'hypothèse du continu) est compatible avec la théorie ZFC. Elle est extrêmement puissante, au point même que c'est gênant : elle permet de prouver non seulement que non-HC est compatible avec la théorie ZFC, mais aussi que HC l'est. À elle seule, elle suffit à faire de HC un énoncé indécidable de la théorie ZFC.

Qui plus est, le forcing s'applique à d'autres questions mathématiques importantes et montre que celles-ci sont indécidables dans la théorie ZFC. Cette situation confirme qu'il faut ajouter des axiomes au système ZFC, et les ajouter si possible de façon à rendre inopérant le forcing. Un axiome X rend inopérant le forcing si l'on ne peut plus démontrer qu'à la fois HC et sa négation sont compatibles avec le système ZFC + X, autrement dit si l'ajout de X aux axiomes ZFC fixe une valeur de vérité à HC. Hugh Woodin a pu établir que l'axiome V = L ultime qu'il envisage serait compatible avec les axiomes de grands cardinaux, mais aussi qu'il rendrait inopérant le forcing. Ce serait donc un axiome en tout point satisfaisant pour supprimer le flou que ZFC laisse persister. La nouvelle théorie des ensembles apporterait ainsi la preuve que l'hypothèse du continu est vraie, et serait d'après lui la plus raisonnable des théories des ensembles.

ou ω^3+32, et ceux qui n'en ont pas, par exemple ω, $\omega\cdot 2$ ou ω^4, ces derniers étant appelés « ordinaux limites ».

Avec les ordinaux et l'opération $\mathscr{P}$, qui à un ensemble E associe l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de ses parties, on obtient une hiérarchie d'ensembles emboîtés qui sera le centre de notre discussion. On pose :

- $V_0=\emptyset$
- $V_{\alpha+1}=\mathscr{P}(V_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α
- V_β = la réunion de tous les V_α tels que $\alpha<\beta$, si β est un ordinal limite.

Les V_α sont donc des ensembles d'ensembles de plus en plus grands. Ils constituent la totalité du monde ensembliste. En effet, la théorie ZFC permet de démontrer que tout ensemble est dans l'un des V_α. On note alors V l'univers ensembliste obtenu en prenant tous les V_α. Puisque tout ensemble est dans l'un des V_α, tout provient de l'ensemble vide $\emptyset$: le monde ensembliste n'est constitué que du vide et de ce que sa présence implique !

Revenons à la preuve par Gödel, en 1938, que non-HC ne résulte pas des axiomes ZFC. Il a utilisé pour ce faire un procédé dont l'idée est facile à comprendre… même si tous les détails ne le sont pas ! Son point de départ était l'hypothèse que la théorie ZFC n'est pas contradictoire. En vertu de son théorème de complétude démontré en 1929, il existe alors une structure vérifiant tous les axiomes ZFC. Gödel en a déduit une autre structure vérifiant tous les axiomes ZFC ainsi que l'hypothèse du continu. Ce qui montre que le système ZFC+HC est non contradictoire – et donc que l'on ne peut pas déduire non-HC du système ZFC (en effet, si de ZFC on pouvait déduire non-HC, on pourrait aussi déduire non-HC du système ZFC+HC, lequel donnerait alors à la fois HC et non-HC, ce qui serait contradictoire).

CHANGER D'UNIVERS ENSEMBLISTE

Comment Gödel a-t-il obtenu la structure en question ? L'idée de la méthode est analogue à celle souvent exploitée en algèbre, où, partant d'une structure qui vérifie par exemple les axiomes de groupe, comme l'ensemble des nombres réels muni de l'opération d'addition, on considère tous les éléments dont l'existence se déduit de celle d'un élément particulier. Autrement dit, l'idée est de partir d'une structure vérifiant certains axiomes et d'en déduire une structure plus petite qui les vérifie aussi et qui, éventuellement, a d'autres propriétés intéressantes.

La méthode de Gödel part donc de l'univers V décrit plus haut et vérifiant les axiomes ZFC. Pour définir une sous-structure, qui sera notée L, il s'est inspiré de la définition des V_α en la modifiant légèrement :

- $L_0=\emptyset$
- $L_{\alpha+1}=\mathscr{P}_{def}(L_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α
- L_β = la réunion de tous les L_α tels que $\alpha<\beta$, si β est un ordinal limite.

Ici, $\mathscr{P}_{def}(E)$ désigne l'ensemble des parties constructibles de l'ensemble E, c'est-à-dire définissables par une formule, une expression écrite

Le monde ensembliste n'est constitué que du vide et de ce que sa présence implique

dans le langage formel de la théorie des ensembles et dont les paramètres sont dans E. Prenons l'ensemble $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3...\}$. Un exemple simple de partie constructible de $\mathbb{N}$ est l'ensemble X constitué des éléments x de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe un y de $\mathbb{N}$ vérifiant $x+y=5$ (tout cela peut se traduire par une formule). On a dans ce cas $X=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La différence entre $\mathscr{P}_{\text{def}}(\text{E})$ et $\mathscr{P}(\text{E})$ provient de ce que, en général, certaines parties d'un ensemble E n'ont pas une définition permettant de les caractériser. Par exemple, il n'existe qu'une infinité dénombrable de parties définissables de $\mathbb{N}$ (car il n'y a qu'une infinité dénombrable de formules), alors qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$.

La réunion de tous les L_α, notée L, est l'« univers des ensembles constructibles ». C'est un univers ensembliste inclus dans V, dans lequel tous les axiomes ZFC sont vrais. Le point important établi par Gödel est que, dans L, l'hypothèse du continu est vraie. La méthode de Gödel montre donc que, partant d'une structure qui vérifie ZFC, on sait en trouver une sous-structure qui vérifie ZFC+HC ; par conséquent, elle prouve que si ZFC est non contradictoire, alors ZFC+HC est non contradictoire.

Ce résultat de Gödel suggère que l'on pourrait ajouter au système ZFC l'axiome affirmant que tout ensemble est constructible, ce qui s'écrit V = L, et alors l'hypothèse du continu serait vraie. L'axiome V = L pourrait donc, à première vue, être l'axiome recherché pour compléter ZFC et lever l'indécidabilité de HC. Mais il faudrait pour cela avoir des arguments forts incitant à l'admettre. L'argument que tout ensemble doit être définissable à partir de ceux qui viennent avant lui est une justification intuitive ; Gödel l'a peut-être lui-même pris en considération. Malheureusement, l'idée de prendre V = L comme nouvel axiome n'est finalement pas défendable.

LE MIRACLE DES GRANDS CARDINAUX

Aux yeux d'un mathématicien convaincu que les ensembles existent et qu'il existe donc une vérité unique les concernant, on ne peut pas envisager d'ajouter comme axiome n'importe quelle formule indécidable de ZFC (une « formule », dans le contexte de la logique, est un énoncé). Un nouvel axiome doit affirmer une propriété dont nous percevons le sens et qui s'impose à partir de l'idée que nous nous faisons des ensembles. Le fait qu'un axiome possible n'introduise pas de contradiction ne suffit pas pour qu'on l'adopte.

Les critères permettant de juger si une formule (un énoncé) peut être ajoutée ou non comme axiome font l'objet de discussions délicates. Une idée cependant fait l'unanimité : si une

LE MONDE SELON HUGH WOODIN

Pour Hugh Woodin, la hiérarchie des grands cardinaux *(voir l'encadré page 22)* est aussi intrinsèque et absolue que celle des nombres entiers eux-mêmes. C'est selon lui une découverte majeure. Il est convaincu que les axiomes des grands cardinaux ne conduiront jamais à une contradiction, ce qui a pour conséquence que les énoncés qu'ils permettent de prouver sur les nombres entiers sont vrais, et que ces axiomes ont donc des répercussions concrètes, physiques. Il affirmait ainsi : « Dans les dix mille ans à venir, on ne trouvera aucune contradiction au sein de ces théories [affirmant l'existence de grands cardinaux]. Il s'agit d'une prédiction spécifique et non ambiguë sur l'univers physique. Elle ne se réduit à aucune vérité connue antérieurement. Elle découle du développement de la théorie des ensembles au cours des cinquante dernières années [...]. Elle se fonde sur ma conviction que la conception de l'univers transfini est pleinement sensée. Je fais cette prédiction indépendamment de toute spéculation sur les dispositifs informatiques susceptibles d'être développés au cours des dix mille prochaines années et qui pourraient avoir des effets sur l'efficacité de la recherche en mathématiques. »

formule affirme l'existence de grands ensembles infinis et qu'elle n'introduit pas de contradiction, alors il faut l'admettre. S'il existe vraiment un univers des ensembles, alors celui-ci est aussi grand que cela est possible et il faut donc accepter tout ce qui affirme qu'il est grand.

On connaît depuis longtemps des affirmations exprimant l'existence de très grands ensembles infinis, que l'on dénomme «axiomes de grands cardinaux». Leur définition précise dépasse le cadre de cet article, mais retenons qu'ils sont nombreux et font intervenir divers types de grands ensembles (cardinaux «inaccessibles», «mesurables», «supercompacts»…). Ils jouent dans l'étude de l'infini un rôle dont nous verrons plusieurs aspects.

Or un miracle se produit à propos des grands cardinaux. Bien que les propriétés qui les définissent soient sans rapport direct les unes avec les autres, et qu'*a priori* il aurait pu arriver que deux grands cardinaux distincts ne soient pas comparables (aucun des deux ne serait plus grand que l'autre), cela n'advient jamais: les grands cardinaux se rangent en une ligne ordonnée qui va du plus petit vers le plus grand.

Hugh Woodin et de nombreux mathématiciens voient dans ce fait un argument pour croire que les ensembles existent réellement et que ce ne sont pas des fictions: si derrière les formules qui définissent les grands cardinaux ne se trouvait aucune réalité, leur alignement selon un ordre bien déterminé serait incompréhensible.

On a espéré trouver un axiome de grand cardinal qui ait un effet sur l'hypothèse du continu, mais c'est impossible. Qui plus est, la prise en compte des grands cardinaux condamne sans appel l'axiome V = L comme solution possible à l'énigme de l'hypothèse du continu. En 1961, le mathématicien et informaticien américain Dana Scott a en effet prouvé que si l'on adopte comme axiome V = L, alors les cardinaux «mesurables» ne peuvent pas exister.

On ne donc peut pas à la fois adopter tous les axiomes de grands cardinaux, comme on croit nécessaire de le faire, et adopter l'axiome V = L. Hugh Woodin n'hésite pas à dire que le résultat de Dana Scott signifie que V = L est une affirmation fausse.

L'ÉLARGISSEMENT DE L

Pour trouver une issue, les mathématiciens et les logiciens ont alors considéré des variantes de L. Elles sont fondées sur des définitions utilisant le même principe que pour L: fixer une notion constructive pour passer d'un L_α à un $L_{\alpha+1}$, mais la choisir moins restrictive, de façon que les ensembles L_α soient plus grands que ceux définis par Gödel.

Ce processus d'élargissement de L a été répété plusieurs fois, mais à chaque étape, la nouvelle version de V = L s'est révélée incompatible avec certains axiomes de grands cardinaux. La situation semblait donc bloquée.

En 2010, cependant, une avancée spectaculaire s'est produite. Hugh Woodin a démontré que si l'on trouvait une variante de V = L compatible avec l'existence d'un cardinal «supercompact»,

Hugh Woodin

LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX ONT UNE CONSÉQUENCE INATTENDUE : L'INFINI JOUE SUR LE FINI, ET PLUS ON A D'INFINIS, PLUS ON EN SAIT SUR LE FINI

alors elle serait nécessairement compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux. On recherche donc aujourd'hui ce L miraculeux, dénommé « L ultime ». On dispose de pistes sérieuses pour y parvenir, et surtout, on sait, grâce à un autre résultat de Hugh Woodin, que l'axiome V = L ultime aurait pour conséquence que l'hypothèse du continu est vraie.

Un argument supplémentaire soutient ce V = L ultime : Hugh Woodin a établi en 2015 que cet axiome rendrait inopérant le « forcing », une méthode conçue par Paul Cohen (*voir l'encadré page 24*) qui permet la preuve de l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans le système ZFC. Mieux, elle s'applique aussi à d'autres énoncés de mathématiques en algèbre, en analyse..., dont elle montre l'indécidabilité dans la théorie ZFC.

Pour Hugh Woodin, la situation créée par ces indécidables est très insatisfaisante : qu'est donc cette science – les mathématiques fondées sur les axiomes ZFC – incapable de dire, pour nombre de ses énoncés, s'ils sont vrais ou faux ? Cette situation suggère un nouveau critère pour juger de l'ajout au système ZFC d'un axiome X : il sera bienvenu s'il rend inopérant le forcing de Paul Cohen, autrement dit si, en ajoutant X à ZFC, le forcing ne permet notamment plus de choisir comme on veut entre l'hypothèse du continu et sa négation.

Or l'axiome V = L ultime rendrait inopérant le forcing : une série de questions indécidables dans la théorie ZFC prendraient donc une valeur de vérité déterminée. Ainsi, le V = L ultime attendu, qui serait compatible avec l'existence d'un cardinal supercompact, ne serait pas seulement un axiome compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux (c'est une exigence *a priori*). Il limiterait aussi l'impuissance des mathématiques fondées sur ZFC à déterminer, pour toute une classe intéressante d'énoncés, si ceux-ci sont vrais ou faux.

À LA RECHERCHE DU L ULTIME

La situation n'est pas réglée pour autant. En effet, il reste à trouver la bonne définition du L ultime, telle que l'axiome V = L ultime soit compatible avec l'existence des grands cardinaux supercompacts. Plusieurs pistes sont aujourd'hui suivies et l'on peut espérer que les mathématiciens disposeront bientôt d'un argument sérieux pour enfin affirmer que l'hypothèse du continu est vraie.

Ces développements récents sont remarquables ; ils confirment que la compréhension de l'infini est un travail mathématique qui progresse régulièrement et sensiblement. On constate que la découverte des vérités mathématiques ne consiste pas seulement à élaborer des démonstrations à partir d'axiomes évidents, faciles à formuler et jamais remis en cause, mais qu'elle est aussi le résultat d'une discussion et d'un affinement de notre conception de l'infini.

Cette discussion se nourrit à la fois de théorèmes et de conjectures qui renforcent notre intuition. Certaines options s'offrant aux mathématiciens sont ainsi éliminées non pas parce qu'on apporte la preuve qu'elles sont logiquement absurdes, mais parce qu'elles ne sont pas intellectuellement satisfaisantes. L'infini mathématique se révèle intelligible et, comme pour d'autres sciences, nos connaissances dans ce domaine s'enrichissent d'année en année.

Par ailleurs, considérant ces avancées de la théorie des ensembles depuis un demi-siècle, Hugh Woodin défend l'idée que la théorie des grands cardinaux et les travaux sur l'axiomatisation complémentaire de ZFC ne sont pas un travail purement abstrait. La compréhension nouvelle qu'ils donnent de l'infini a, selon lui, des « conséquences physiques ». Expliquons son point de vue.

DE L'INFINI AU FINI

Les axiomes de grands cardinaux se classent les uns par rapport aux autres et quand un axiome X est plus fort que l'axiome Y, alors X permet de prouver l'énoncé affirmant « le système ZFC + Y est non contradictoire ». Or un tel énoncé s'exprime dans la théorie par une suite de symboles, et savoir s'il se démontre n'est qu'une question combinatoire, que l'on sait toujours traduire en question portant sur les nombres entiers. Même si c'est étonnant, les axiomes de grands cardinaux ont donc des conséquences sur ce qu'on sait démontrer concernant les nombres entiers : l'infini joue sur le fini, et plus on a d'infinis, plus on en sait sur le fini !

Ces effets sur les énoncés arithmétiques sont, d'une certaine façon, des effets physiquement testables. Penser qu'un axiome de grand cardinal X est acceptable – et Hugh Woodin clame que c'est le cas de beaucoup d'entre eux – signifie qu'en faisant fonctionner la théorie ZFC + X, on est certain qu'on ne tombera jamais sur une contradiction.

Or faire fonctionner une théorie, c'est dérouler les conséquences de ses axiomes, tâche que l'on peut confier à une machine. Croire en l'existence d'un grand cardinal, c'est donc croire que les machines utilisant le système ZFC complété par l'axiome correspondant à ce grand cardinal ne produiront jamais de résultats contradictoires. C'est donc un énoncé qui porte sur le monde physique, et il provient uniquement de notre compréhension de l'infini. Ainsi, mathématiciens et logiciens tissent un fil qui relie l'infini le plus grand à la réalité matérielle, allant des objets les plus abstraits aux plus concrets.

— L'auteur —

> Jean-Paul Delahaye
est professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au laboratoire
Cristal (Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille).

— À lire —

> N. Barton, Iterative Conceptions of Set, *Elements in the Philosophy of Mathematics*, 2024.

> T. Saarinen *et al.*, On the categoricity of complete second order theories, preprint, 2024 : arxiv.org/abs/2405.03428

> H. Woodin, In search of ultimate-L, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 23(1), pp. 1-109, 2017.

> J. Cavitt, *Set-theoretic Geology, the Ultimate Inner Model, and New Axioms*, thèse soutenue à l'université Harvard, 2017.

> C. Rittberg, How Woodin changed his mind : New thoughts on the Continuum Hypothesis, *Archive for History of Exact Sciences*, 2015.

> Conférence filmée de H. Woodin, 2015 : youtu.be/nVF4N1Ix5WI

> M. Heller et H. Woodin, *Infinity : New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011.

Lors d'un dîner, un géomètre recourt à ce qui l'entoure pour illustrer le rôle important de l'infini en géométrie : l'analyste et l'algébriste seront-ils convaincus ?

L'infini en géométrie

Marcel Berger

Le billard est une façon pratique d'aborder le rôle de l'infini en géométrie.

En bref

> L'algèbre et l'analyse sont deux branches des mathématiques où l'idée d'infini joue un rôle central. C'est aussi le cas en géométrie.

> Il intervient quand le nombre d'objets étudiés est infini ou bien lorsque l'espace étudié a une dimension infinie.

> De même, l'infini peut correspondre au nombre de fois qu'un processus est itéré.

> À chaque fois, l'infini aide à résoudre divers problèmes longtemps réputés inaccessibles.

Au sortir d'une conférence, un algébriste, un analyste et un géomètre, dignes représentants de la trinité des mathématiques, méditent la phrase de Hermann Weyl : « Les mathématiques sont la science de l'infini. » Les deux premiers, sûrs qu'il en est bien ainsi dans leur discipline, se tournent, perplexes, vers le géomètre. Observé avec insistance, celui-ci affirme également : « Oh ! c'est vrai aussi en géométrie. Puis-je vous proposer de vous le montrer devant un bon dîner ? » Les deux autres, intrigués, acceptent. Sur le chemin, le géomètre énumère en silence les différents domaines de sa discipline dans lesquels l'infini joue un rôle important. À chaque fois, il est présent sous trois aspects : lorsque l'on considère des objets en nombre infini ; quand on s'intéresse à des espaces de dimension infinie ; enfin, quand une opération est répétée un nombre infini de fois.

L'INFINI SELON PAPPUS

Nos trois mathématiciens franchissent le seuil de l'hôtel des Trois Faisans et patientent dans le corridor. Là, au bar, trois notaires passent le temps. Le géomètre saisit l'occasion. « En guise d'amuse-bouche, vous voyez, messieurs, nous trois alignés ici, et ces trois hommes là-bas, cela m'évoque le théorème de Pappus, dont une démonstration aisée recourt à l'infini. »

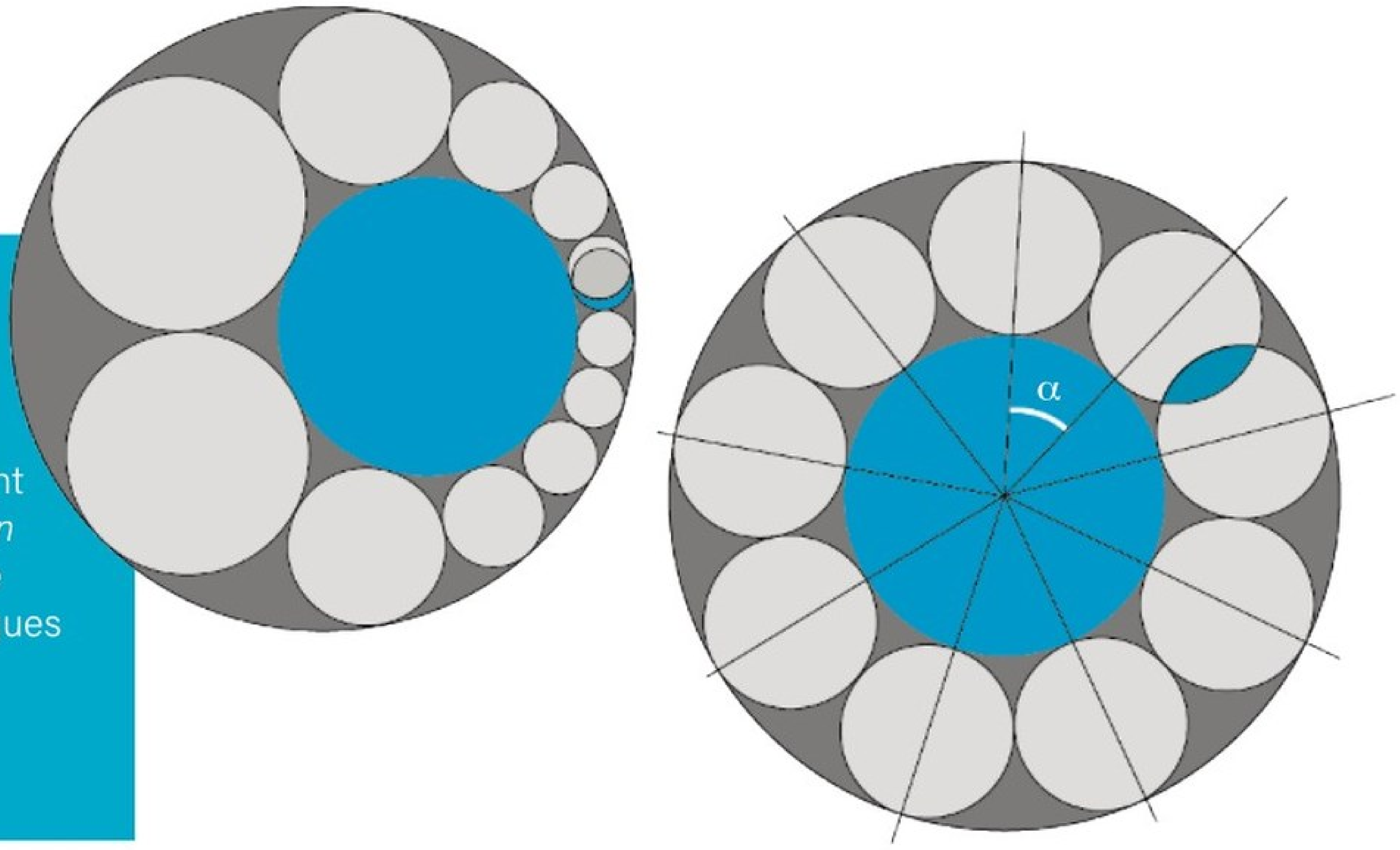
L'algébriste : « Ce théorème n'affirme-t-il pas que, pour deux triplets de points alignés (A, B et C) et (A', B'et C') sur deux droites distinctes, les points d'intersection *a* de (BC') et (B'C), *b* de (AC') et (A'C) et *c* de (AB') et (A'B) sont alignés ? (*voir la figure page 38*) »

Le géomètre confirme : « Exact, et la démonstration requiert de voir ce résultat dans un plan projectif, c'est-à-dire un plan affine (dans lequel les distances ne sont pas prises en compte), auquel on a adjoint une droite, dite « à l'infini ». Les points de cette droite sont les directions de toutes les droites du plan. Il n'y a plus de droites parallèles : celles qui l'étaient dans le plan seul sont maintenant sécantes en un point de la droite de l'infini. On décide, pour démontrer Pappus, que cette droite est la droite (*ab*), ce que l'on peut toujours faire par une projection convenable. Ainsi, dans sa nouvelle configuration, les droites (AC') et (A'C), d'une part, et (BC') et (B'C), d'autre part, sont parallèles. Montrer que les points *a*, *b* et *c* sont alignés revient à montrer que le point *c* est aussi sur la droite de l'infini, c'est-à-dire que les droites de la troisième paire, (AB') et (A'B), sont parallèles : le théorème de Thalès le prouve aisément. »

Et l'algébriste d'opiner : « Oui, évidemment, cette démonstration est beaucoup plus simple que de se placer dans un repère et de calculer les coordonnées de tous les points. »

Tous les trois ont rejoint leur table, où la rondeur des assiettes et la circularité des verres inspirent le géomètre.

« Vous connaissez tous les deux cette méthode qui nécessite l'infini pour calculer la longueur d'un cercle. On y inscrit un carré, puis, bâti sur ce carré, on construit un octogone régulier, dont on divise ensuite encore en deux chacun des huit côtés, afin d'avoir un polygone régulier à



L'étude des cercles *(en gris clair)* construits tangents à deux autres donnés *(en haut)* dont l'un est inclus dans l'autre *(en gris foncé et en bleu)* est évidente après une inversion : cette transformation géométrique rend concentriques les deux premiers cercles. Ainsi, les cercles construits sont égaux et il suffit d'étudier les rotations d'un angle α.

seize côtés, etc. On calcule les longueurs successives de ces polygones et, à la limite, quand le nombre de côtés tend vers l'infini, on obtient la longueur du cercle. Grâce à une telle itération, on calcule aussi la longueur d'une courbe fermée quelconque : on y inscrit des polygones de côtés de plus en plus petits, et la longueur de la courbe est la limite à l'infini, quand elle existe, de la suite des longueurs de ces polygones. »

« Je crois me souvenir, coupe l'algébriste, qu'on est capable de fabriquer des courbes de longueur infinie, même entre deux points quelconques. »

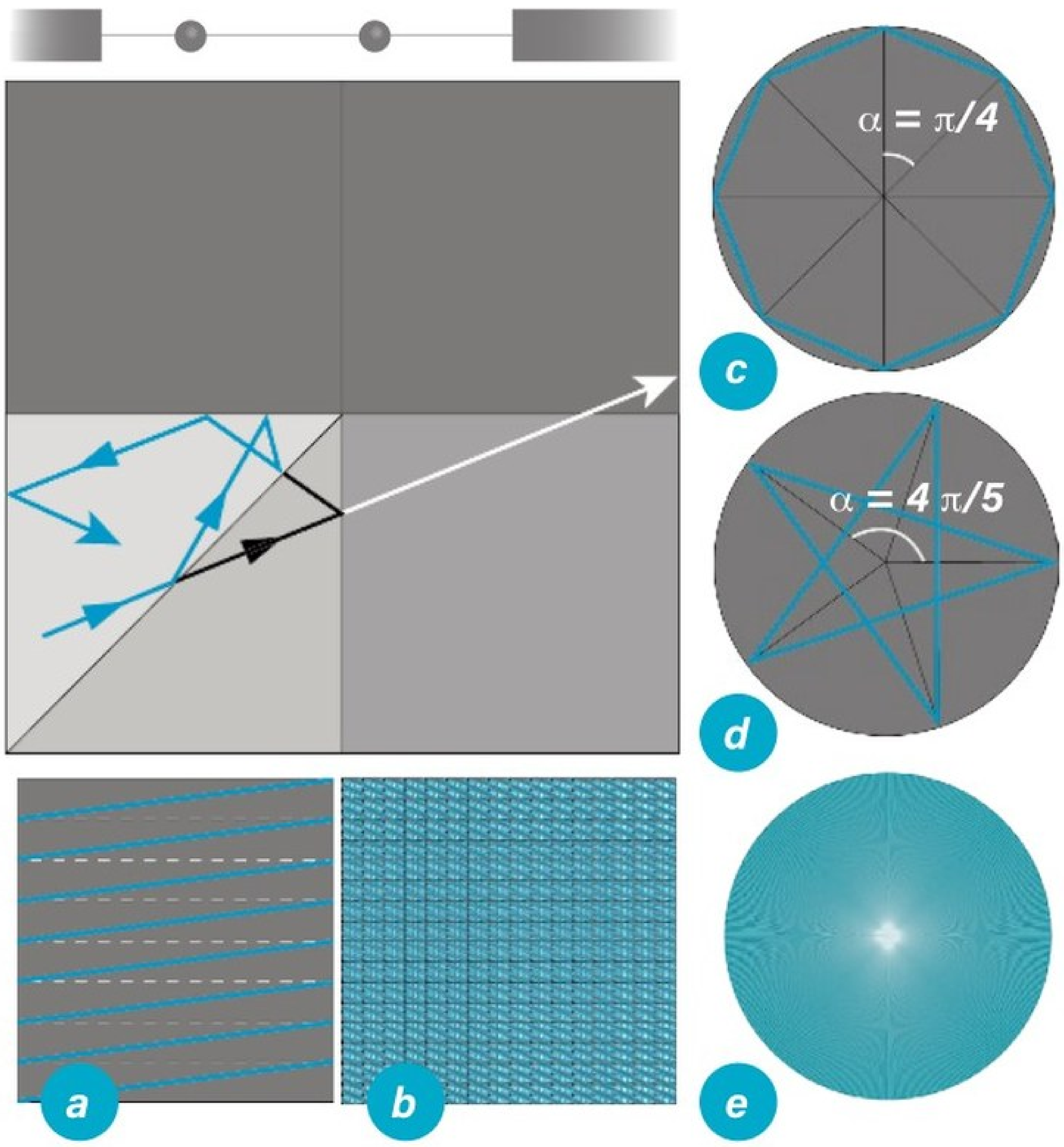
Le géomètre : « Oui, en revanche, on sait que, lorsque la courbe est donnée par une équation suffisamment douce, c'est-à-dire que la courbe n'a pas de pic, ou, en termes plus mathématiques, qu'elle est dérivable en chaque point, alors elle a une longueur finie. Dans un plan, pour calculer l'aire d'un triangle, on colle le long d'un côté un second triangle égal, donc de même aire : l'aire du triangle initial est le demi-produit de la base par la hauteur du parallélogramme obtenu.

Toutefois, le calcul du volume d'un polyèdre est plus subtil. Dans l'espace, on peut toujours décomposer un parallélépipède en tétraèdres ; cependant, on ne sait pas de façon évidente si deux tétraèdres qui ont la même hauteur et la même aire de base ont le même volume. Ils ne sont pas déduits l'un de l'autre par un déplacement, c'est-à-dire une transformation isométrique. Pour montrer que deux tels tétraèdres ont le même volume, on recourt à l'infini : on découpe les tétraèdres en tranches horizontales de plus en plus fines ; chaque tranche contient un prisme et un morceau supplémentaire. Dans les deux tétraèdres, les prismes de deux tranches de même niveau ont le même volume, puisque l'aire de leur base est identique. Lorsque le nombre de prismes tend vers l'infini, la somme des volumes des morceaux restants devient négligeable : les tétraèdres ont donc bien le même volume, car ils sont tous construits d'un nombre infini de prismes de volume équivalent. Le cas du plan reste exceptionnel, l'espace nécessite l'infini. »

ET LES CERCLES ?

L'apéritif servi, et encouragé par l'abondance des cercles des verres, des assiettes, des soucoupes… sur la table, le géomètre poursuit son exposé : « Avec la démonstration du théorème de Pappus, je vous ai montré que l'adjonction d'une droite à l'infini est parfaitement adaptée pour des problèmes de la géométrie des points et des droites. En revanche, elle n'est pas appropriée quand on s'intéresse à une géométrie de l'ensemble des cercles du plan euclidien, c'est-à-dire que l'on prend en compte la distance. La transformation du plan nommée "inversion" se révèle parfois pertinente. Elle consiste à se donner un point du plan, le centre d'inversion O. Tout point *m* autre que le centre est envoyé sur le point *m'* aligné avec O et *m*, et tel que le produit des longueurs O*m*.O*m'* est constant : cette inversion transforme les cercles en cercles, sauf ceux qui passent par le centre O, transformés en droites.

Grâce à cette inversion, l'étude de problèmes sur les cercles devient plus facile : par exemple,



Le comportement de deux particules qui rebondissent l'une contre l'autre sur un segment *(en haut)* ou les rotations d'un angle dans un cercle *(à droite)* sont équivalents à des itérations d'une même opération. Dans le premier cas, la position des deux particules est représentée par un point dans un repère *(un axe par particule)*. Puisqu'une particule ne peut pas passer par-dessus l'autre, la trajectoire de ce point est confinée dans un triangle rectangle isocèle. On développe ce triangle dans un carré, puis dans le plan entier : la trajectoire est alors une droite infinie que l'on ramène dans un seul carré. Dans le second, on s'intéresse à la trajectoire d'un rayon du cercle. Certaines trajectoires sont périodiques (*a*, *c* et *d*), elles repassent par leur point de départ, d'autres, apériodiques (*b* et *e*), approchent d'aussi près que l'on veut toutes les positions possibles.

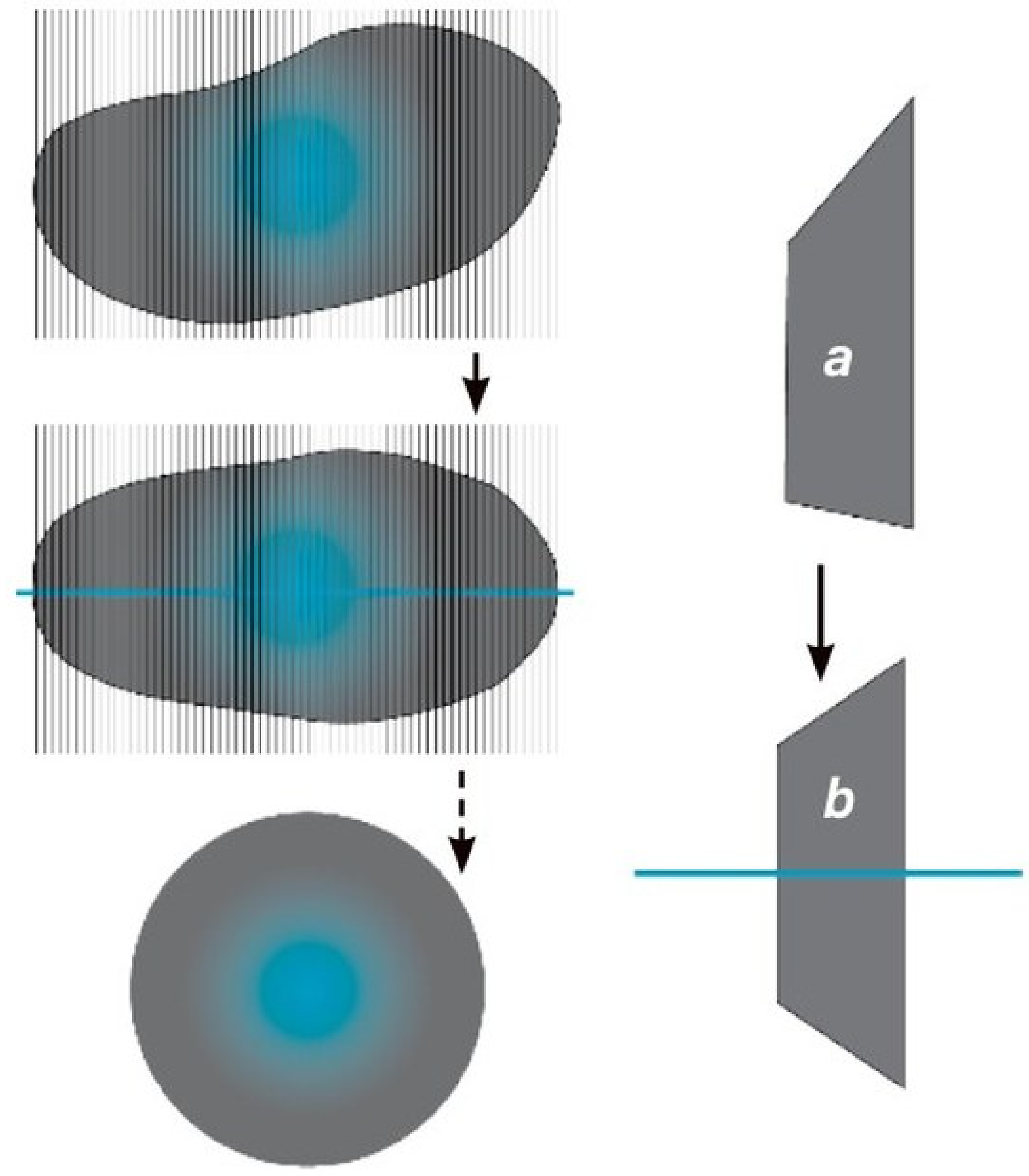
Jacob Steiner (1796-1863) a étudié le comportement de cercles tangents à deux autres donnés, le premier étant inclus dans le second (*voir la figure page précédente*). Un cercle est construit tangent aux deux premiers, le suivant est tangent aux trois précédents, et ainsi jusqu'à avoir parcouru le périmètre du cercle intérieur : le dernier cercle construit est-il tangent au premier construit ? Une judicieuse inversion rend concentriques les deux cercles donnés au départ. Les cercles ajoutés sont donc égaux, et il s'agit maintenant d'étudier le comportement de la droite joignant le centre des cercles concentriques à celui de ceux qui ont été construits : à chaque nouveau cercle, la droite pivote d'un angle constant… de la même façon que l'aiguille d'une horloge tourne à chaque minute.

UNE TRAJECTOIRE DENSE

Il convient alors d'examiner de telles itérations. Quel est l'effet sur un point du cercle de l'itération d'une rotation d'angle donné α ? Quand $\alpha = 2\pi/k$ (avec k entier), les images successives d'un point de départ donné constituent les sommets d'un polygone régulier à k côtés inscrit dans le cercle, (c'est le cas de la pendule pour laquelle $k = 60$) ; lorsque $\alpha = 2\pi p/q$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux, le polygone obtenu est étoilé, à q côtés et tournant p fois. Mais que se passe-t-il quand k est un nombre irrationnel ? La trajectoire du point ne se refermera jamais, quel que soit le nombre d'itérations, même infini.

On peut en savoir plus et montrer que la trajectoire est également dense partout dans le cercle : il y a une égale répartition des points "visités", aucune zone du cercle n'est négligée. En termes mathématiques, pour un ensemble infini $\{Ci\}_{i = 1, 2, 3, \dots}$ de points du cercle, on dit qu'il y a égale répartition sur un arc m de longueur L du cercle lorsque, k tendant vers l'infini, la limite du nombre de points $C_{i\ (i = 1, 2, 3, \dots, k)}$ qui sont sur l'arc m est toujours égale à $L/2\pi$ (si le cercle est de rayon unité), cela quel que soit l'arc m. »

L'analyste intervient, entre deux bouchées : « C'est bien joli, les itérations, mais elles restent des opérations discrètes. Or, dans la nature, un grand nombre de systèmes sont continus dans le temps. Les géomètres étudient-ils aussi ces phénomènes lorsque le temps continue très longtemps, c'est-à-dire tend vers l'infini ? »



La symétrisation d'un domaine réduit son périmètre en maintenant son aire constante. On découpe le domaine initial en tranches infiniment fines *(à gauche)*, puis on rassemble ces tranches symétriquement selon un axe perpendiculaire à celui des tranches. Lorsque cette opération est itérée un nombre infini de fois (en changeant la direction de l'axe), le domaine tend vers un cercle qui minimise le périmètre. Celui-ci diminue en vertu d'une propriété des trapèzes de même aire *(à droite)*: le périmètre du trapèze *b*, symétrique, est inférieur à celui du trapèze *a*.

«Bien sûr! En mécanique, on étudie le mouvement de deux billes de même masse sur un intervalle. Ces objets repartent en sens inverse avec la même vitesse quand ils se rencontrent. Quand on représente la position des deux billes par un point du plan (les axes correspondant chacun aux positions de l'une des deux), la trajectoire de celui-ci, confinée dans un triangle rectangle isocèle, est celle d'une boule de billard qui se réfléchit sur les côtés avec un angle d'incidence égal à l'angle de réflexion par rapport à la normale, la droite perpendiculaire au côté. Nous simplifions le problème en développant la trajectoire par symétrie: le billard devient alors un carré (*voir la figure page ci-contre*). Puis, quand on développe la symétrie dans le plan tout entier, la trajectoire devient une droite infinie.

C'EST DU BILLARD!

Vous remarquerez qu'il suffit de savoir ce qui se passe là où la trajectoire rencontre un bord du carré: le problème est alors de nouveau celui de l'itération d'un même procédé. Ici donc, deux cas se distinguent selon que la pente – le rapport des vitesses initiales des deux particules – est en rapport rationnel ou irrationnel avec le côté du carré (la longueur de l'intervalle entre les deux billes).

Dans le cas irrationnel, la trajectoire est partout dense et également répartie, c'est-à-dire que les deux particules occuperont toutes les positions possibles, et ce de façon équitablement répartie dans le temps. Sur un ordinateur, la trajectoire noircira l'écran de plus en plus, et de façon partout identique. Seule varie la vitesse de remplissage de l'écran. Dans le cas rationnel, la trajectoire est périodique; après un temps, le mouvement reprend comme au départ: l'écran est seulement biffé de quelques lignes.»

L'algébriste et l'analyste, songeurs: «Que se passe-t-il pour deux billes de masses différentes?» La réponse fuse: «Un calcul du choc élastique de particules de masses différentes, en tenant compte de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, montre que le problème devient alors celui du billard dans un triangle rectangle, mais non isocèle. Ici, les géomètres n'ont que peu de résultats, car ils ne peuvent plus développer le triangle en un pavage de carrés. Le résultat dépend essentiellement du rapport des masses; plus précisément, il s'agit de savoir quand l'angle α (un des angles du triangle), dont la tangente est égale au produit des racines carrées des deux masses, est en rapport rationnel ou non avec π.

Dans le cas rationnel, les trajectoires sont de trois types: dans des cas rares, elles sont périodiques; d'autres sont partout denses et bien réparties, c'est-à-dire qu'une zone du billard ne sera pas remplie avant une autre; enfin, le plus souvent, elles sont partout denses, mais mal réparties. Dans tous les cas, les directions prises par une trajectoire en chaque point du billard sont en nombre fini: on dit que le système n'est pas ergodique en phase. Cependant, il est ergodique en position, car la trajectoire passe par tous les points. Par ailleurs, on sait que l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à un nombre donné croît avec le carré de la longueur de l'intervalle entre les billes. »

L'analyste : « Et dans le cas irrationnel ? » « J'y venais, enchaîne le géomètre. À partir de l'étude du cas rationnel et en approximant les triangles à angle irrationnel par de nombreux triangles à angle rationnel, on montre que l'ergodicité des positions est obtenue à l'aide de la seule ergodicité d'espace du cas rationnel. Cependant, c'est une existence complètement abstraite ! On ne connaît aucune valeur de m et de m' qui permette de vérifier cette assertion. D'autre part, on ne connaît pas l'ordre de grandeur du nombre de trajectoires périodiques de longueur inférieure ou égale à une distance donnée. »

L'ART DE SYMÉTRISER

Le géomètre est intarissable : « Puisque nous parlons d'itérations, une autre apparaît dans la démonstration de l'inégalité isopérimétrique qui affirme que, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle est celle qui entoure la plus grande aire. La démonstration de Wilhelm Blaschke, dans les années 1920, utilise une opération appelée "symétrisation de Steiner" (*voir la figure page précédente*). À partir d'un domaine dont le bord est une courbe quelconque, cette opération consiste, pour une direction donnée du plan, à découper le domaine en tranches infiniment fines, puis à les disposer symétriquement autour d'un axe perpendiculaire à la direction donnée. Le domaine ainsi obtenu est de même aire, mais de périmètre plus petit que celui du domaine initial. »

L'algébriste confirme.

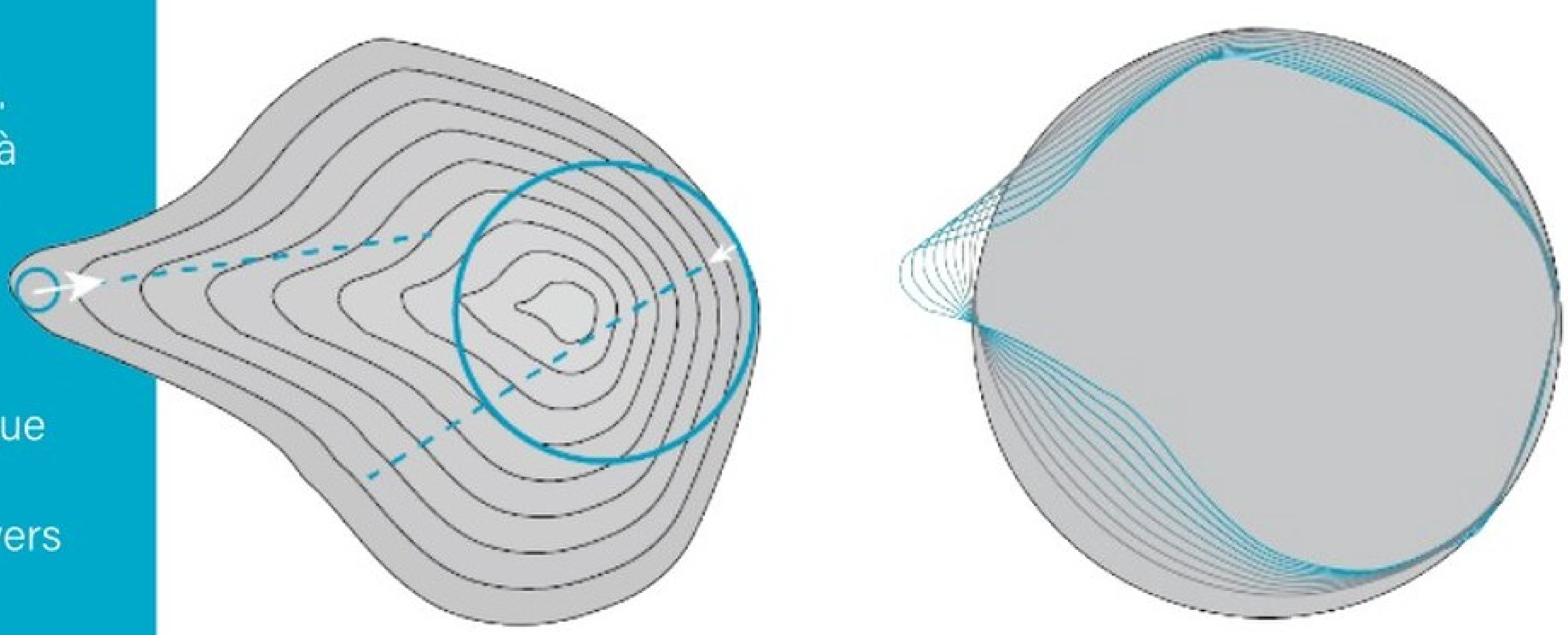
Le géomètre poursuit : « L'itération de ces symétrisations avec infiniment de directions différentes a une limite : c'est un cercle, car lui seul est symétrique dans toutes les directions. De surcroît, la symétrisation fonctionne en toute dimension. »

L'analyste et l'algébriste demandent alors : « Existerait-il une méthode plus naturelle pour minimiser le rapport de la longueur de la courbe frontière sur l'aire intérieure d'un domaine D ? »

Le géomètre répond : « Dans la réalité, on étudie plutôt le rapport du carré de la longueur sur l'aire pour manipuler des nombres sans dimensions. Il faut d'abord prouver l'existence d'une limite – une courbe – à ce rapport. Dans le plan, cette existence est démontrée. Toutefois, ce problème d'existence est à considérer ici dans l'espace de dimension infinie de toutes les courbes : jusque dans les années 1960, dans des espaces de dimensions infinies, aucun théorème d'existence d'objets limites au sein de familles d'objets géométriques, telles les courbes, et de limites de quantités elles aussi géométriques, telle l'aire d'un domaine, n'était disponible. Ce n'est qu'à la suite des travaux de Herbert Federer, alors à l'université Brown, qui constituent la théorie géométrique de la mesure, que l'existence de telles limites a été prouvée. On conclut alors, et ce en dimension quelconque, que le domaine limite est, en deux dimensions, un disque, et, au-delà, une boule.

Puisque nous évoquons la démonstration de l'inégalité isopérimétrique, nous pouvons aussi penser l'augmentation du rapport du carré de la longueur sur l'aire, non plus par l'opération de

Le périmètre le plus court pour une surface d'aire donnée *(à gauche, en gris)* est un cercle. L'une des méthodes pour le montrer consiste à déplacer les points du périmètre initial le long de leur normale d'une distance *(en blanc)* inversement proportionnelle au rayon du cercle osculateur *(en bleu)*. À gauche, le domaine tend vers un point. Cependant, lorsque les domaines sont renormalisés, c'est-à-dire maintenus à aire constante, le domaine tend vers un cercle *(à droite)*.



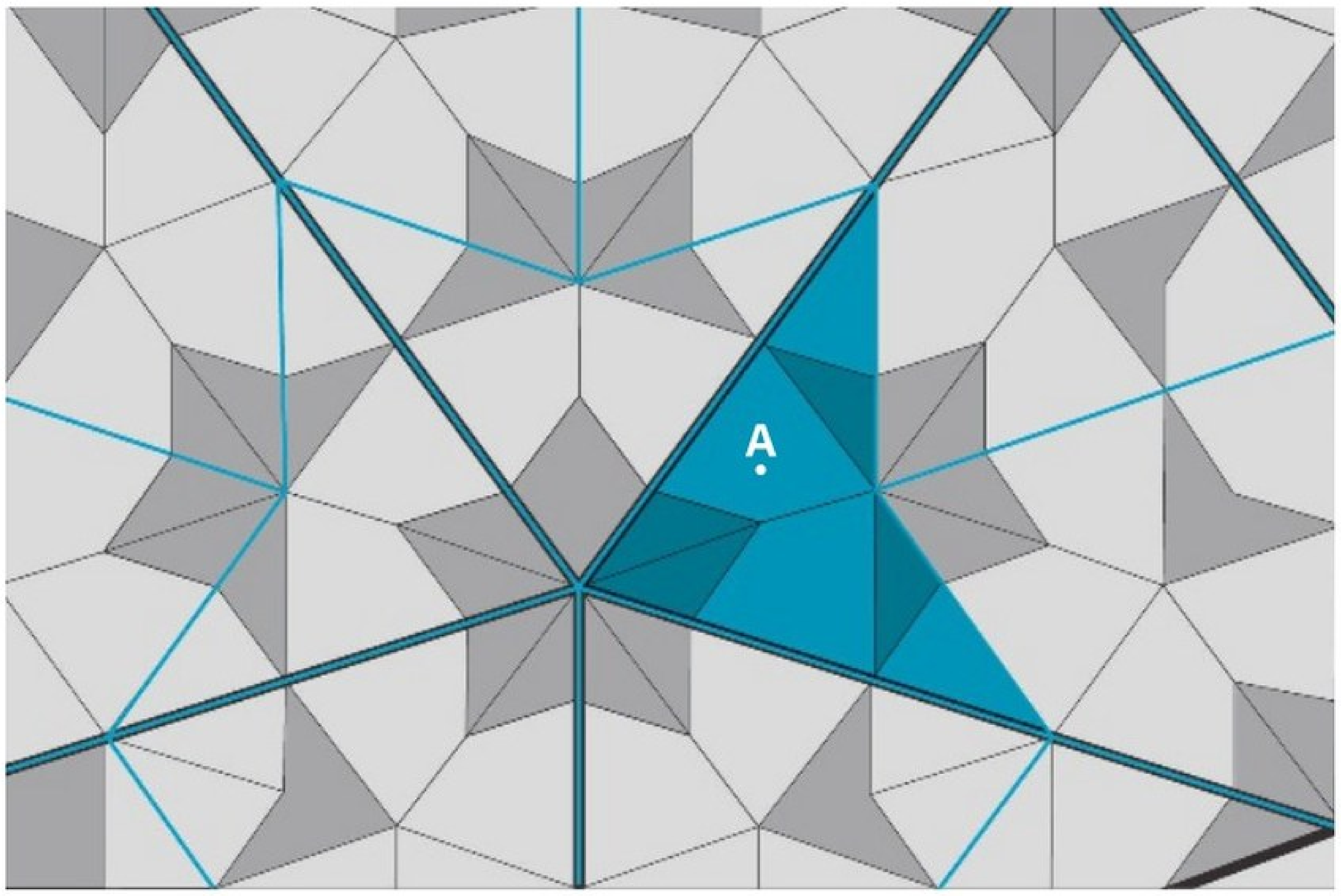
symétrisation, mais par une transformation continue, c'est-à-dire la déformation d'une courbe C en une courbe de plus en plus proche d'un cercle. Pour ce faire, on se souvient que les cercles sont des courbes dont la courbure est constante. »

L'algébriste intervient : « Tu peux nous rappeler ce qu'un géomètre entend par courbure ? »

LA COURBURE DU DESSERT

« Pour déterminer la courbure, le géomètre cherche le cercle osculateur à la courbe en un point. Pour cela, on considère le cercle tangent à la courbe en ce point et passant par un point voisin. Quand ce point voisin se rapproche du point étudié, ce cercle a une limite, c'est le cercle osculateur en ce point et son rayon est le rayon de courbure de la courbe. La courbure, elle, est par définition l'inverse de ce rayon. Ensuite, en chacun de ses points, la courbe initiale se déplace le long de sa normale (la droite perpendiculaire à la tangente en ce point) d'une quantité inversement proportionnelle à la courbure en ce point. De façon plus précise, on cherche une famille de courbes $C(t)$, où t est un paramètre continu, que l'on peut imaginer être le temps, tel que la dérivée le long des normales soit inversement proportionnelle à la courbure. L'équation aux dérivées partielles qui décrit cette famille de courbes admet des solutions pour des temps assez petits. En revanche, l'existence pour un temps infini est une étude difficile. »

L'analyste : « Lorsque t tend vers l'infini, les courbes $C(t)$ ne convergent-elles pas vers un point, plutôt que vers un cercle ? »



Un pavage de Penrose est un pavage du plan non périodique avec deux types de pavés *(en gris clair et foncé)*. Groupés, les pavés forment un second pavage non périodique constitué de deux types de pavés plus grands *(délimités par des traits fins en bleu)*. À partir de ce pavage, on en construit un nouveau d'ordre supérieur *(traits épais noirs)*. Dans chaque pavage, on associe à chaque type de pavés un chiffre (par exemple 1 pour les pavés convexes et 0 pour les pavés concaves). On montre que l'espace des pavages de Penrose est similaire à celui des suites de 0 ou 1 qui coïncident à partir d'un certain rang et dans lesquelles un 1 est toujours suivi d'un 0. Ces suites sont construites en identifiant pour chaque ordre de pavage le type de pavés dans lequel un point initial quelconque se trouve. Par exemple, le point A donne la suite 101…

« Oui, cependant, si on fait une renormalisation convenable, c'est-à-dire que l'échelle de chaque courbe est modifiée de façon à conserver l'aire du domaine, les courbes $C(t)$ convergent vraiment vers un cercle. Enfin, en 1986, Gage a montré que le rapport isopérimétrique décroît lorsque t augmente. Cette technique d'évolution géométrique peut être utilisée dans des contextes plus généraux, par exemple pour obtenir des géodésiques périodiques sur les surfaces…

Nous étudions dans ce cas un système dynamique continu dans lequel on décrit le mouvement d'une particule qui se meut sur une surface S donnée de l'espace, sans gravité. Depuis Bernoulli, on sait qu'un tel mouvement suit une géodésique de la surface, c'est-à-dire une courbe qui minimise le chemin parcouru entre deux points voisins. Que devient cette trajectoire, cette géodésique, lorsqu'on la prolonge indéfiniment ? Est-elle périodique ? Ou bien recouvre-t-elle toute la surface ? Plus encore, prend-elle toutes les directions quand elle repasse en chaque point ? Et s'il existe des trajectoires périodiques, peut-on évaluer leur nombre en fonction de leur longueur ?

Dans le cas de la sphère, toutes les trajectoires, en nombre infini, sont périodiques et de même période : ce sont les grands cercles (les équateurs) de la sphère. Pour toute surface de révolution, on peut montrer qu'il y a aussi une infinité de géodésiques périodiques.

Pour les surfaces générales, on cherche d'une part à montrer l'existence de géodésiques périodiques, et à les évaluer asymptotiquement ; d'autre part, à déterminer l'ergodicité (en positions ou en phases) des trajectoires non périodiques. Posé simplement, le problème n'en demeure pas moins ardu et est resté longtemps inaccessible. La raison essentielle était, comme pour l'inégalité isopérimétrique, l'absence d'un théorème d'existence de limites dans un espace géométrique de dimension infinie, ici celui des courbes fermées d'une surface. Ce n'est qu'en 1917 que George Birkhoff a démontré, sans recours à un théorème d'existence d'une forme limite, l'existence d'une géodésique périodique pour une surface quelconque.

Tout d'abord, il considère toutes les tapisseries de la surface, c'est-à-dire les familles de courbes allant d'une courbe réduite à un point *m* à une autre courbe réduite à un point *m'* : cette famille de courbes recouvre entièrement la surface étudiée. Dans chacune des tapisseries, il y a une courbe de plus grande longueur, et l'on recherche une tapisserie pour laquelle cette courbe est la plus petite possible. »

L'algébriste remarque : « En quelque sorte, il s'agit de rechercher une tapisserie économique. »

« À quelques subtilités près, c'est exact ! La plus grande courbe de cette tapisserie optimale est une géodésique périodique.

Reste à prouver l'existence d'une tapisserie économique. C'est là qu'intervient la deuxième idée de Birkhoff : passer d'un espace de dimension infinie à un espace de dimension finie. Il a cherché à fabriquer, à partir d'une tapisserie quelconque, une deuxième tapisserie dont toutes les courbes sont strictement plus petites, à l'exception des géodésiques périodiques. Une tapisserie minimale contient toujours une géodésique périodique ; sinon, la transformation de nouveau appliquée fournirait une tapisserie dont toutes les courbes seraient plus courtes, et la tapisserie précédente ne serait donc pas minimale.

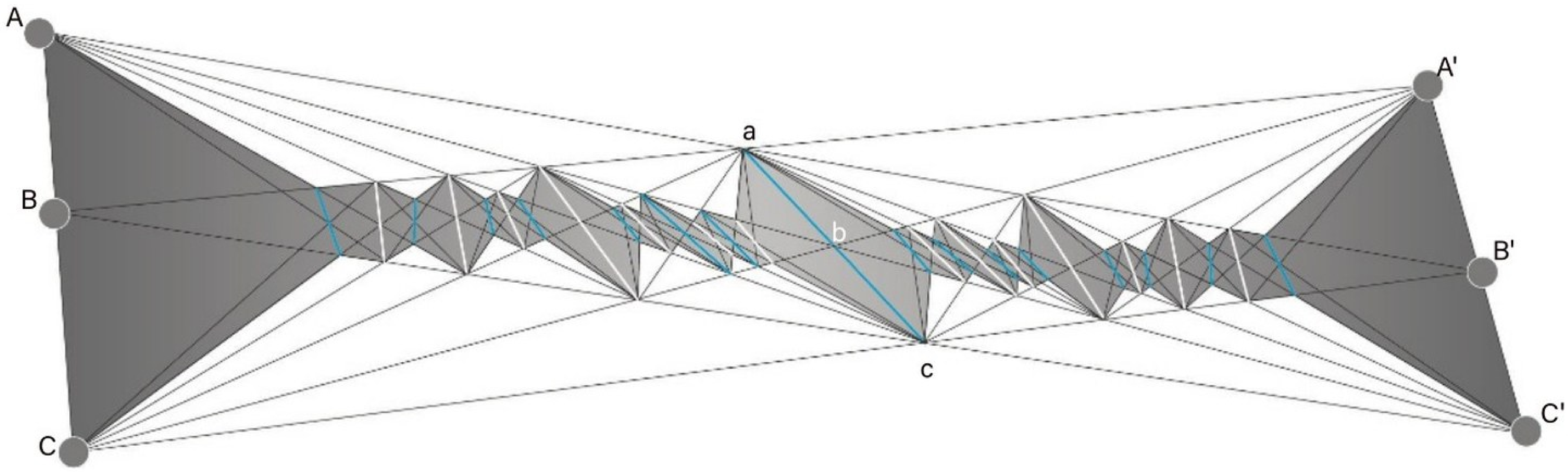
CLASSER LES PAVAGES DE PENROSE

Birkhoff a élaboré un procédé qui résout le problème en fournissant une géodésique périodique. Ce n'est qu'en 1992 que John Franks, et Victor Bangert, de l'université de Fribourg, en Allemagne, ont montré qu'il en existe une infinité. »

L'algébriste réagit : « Face à un espace géométrique de dimension infinie, Birkhoff se tire d'affaire, certes de façon élégante, en approximant cet espace – l'espace de toutes les courbes planes d'une surface – avec un espace de dimension finie. Mais je subodore que ce n'est pas toujours possible. »

« Vrai, examinons par exemple celui des pavages de Penrose, c'est-à-dire ceux qui, construits à partir de deux types de pavés, recouvrent le plan à l'infini, mais de façon

Le théorème de Pappus associe à deux triplets de points alignés (A, B, C) et (A', B', C') un troisième (*a*, *b*, *c*) : à partir des deux paires de triplets ainsi formées, le même procédé crée deux autres triplets. L'ensemble obtenu après l'itération à l'infini *(seules cinq sont représentées ici)* de cette opération est fractal.



nécessairement non périodique, à cause des règles de construction (*voir la figure page précédente*). En 1975, Robinson a montré que l'on peut complètement les classer. Il a remarqué qu'à partir d'un pavage donné P, on peut grouper les pavés afin qu'ils forment des pavés plus grands de deux types seulement. Le nouveau pavage obtenu P^1 est également non périodique. De P^1, par le même procédé, on obtient P^2, puis P^3, jusqu'à P^n, n tendant vers l'infini. Il s'agit ensuite de prendre un point quelconque à l'intérieur du pavage initial et de regarder dans quel type de pavé il est dans P^1, dans P^2, jusqu'à P^n: quand, à chaque type de pavé, à un niveau d'itération donné, correspond un chiffre 0 ou 1, on obtient une série de 0 et de 1. Ainsi, les pavages de Penrose forment un espace infini qui est similaire – en mathématiques, on dit "isomorphe" – à celui de l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 ou de 1 dans lesquelles tout 1 est nécessairement suivi d'un 0. Des pavages sont identiques quand leurs suites coïncident à partir d'un certain rang, et ce jusqu'à l'infini: cette caractéristique signifie que, dans un même pavage, deux points initiaux différents sont, à partir d'un certain ordre, dans des pavés de même type.»

Le dîner touchait à sa fin. Au moment du café, un cure-dents négligé roule et tombe sur plancher… à cheval sur deux lattes.

Le géomètre reprend: «Vous connaissez sans doute le problème des aiguilles de Buffon? Il s'agit de calculer la probabilité qu'une aiguille a de tomber à cheval sur deux lattes d'un plancher. Ce problème est le premier exemple connu de probabilités géométriques. Nous ne sommes pas éloignés des itérations, puisqu'une probabilité dans la pratique signifie répéter une opération un nombre infini de fois.»

DE NOUVEAU PAPPUS

Les mathématiciens sont sur le point de se séparer… «Messieurs, avant de nous quitter, et puisqu'il a beaucoup été question de cercles dans mon exposé, je terminerai par où j'ai commencé, à savoir avec le théorème de Pappus. En 1993, R. Schwarz a remarqué que Pappus associe, à toute paire de triplets de points alignés sur une droite, un troisième triplet du même type. Il est donc naturel d'itérer l'opération et, à partir de chacune des deux paires créées, de construire de nouveaux triplets (*voir la figure page ci-contre*). Que se passe-t-il quand cette opération est répétée à l'infini? L'ensemble des droites obtenues forme une fractale qui, de plus, a une structure que l'on retrouve dans tant de branches des mathématiques: la théorie des nombres, la théorie des groupes, la géométrie des surfaces, la théorie des nombres complexes…

Vous voyez, mes amis, conclut le géomètre alors que trois taxis se garent devant l'hôtel des Trois Faisans, à l'inverse de ce que vous pouviez penser, l'infini est omniprésent en géométrie et, mieux, il aide à relier nos trois disciplines.» Décidément, les mathématiques, toutes les mathématiques, sont bien la science de l'infini.

— L'auteur —

> **Marcel Berger** fut président de la Société mathématique de France et directeur de l'Institut des hautes études scientifiques.

— À lire —

> **M. Berger,** *Géométrie 1 & 2*, Cassini, coll. «Nouvelle bibliothèque mathématique», 2016.

> **M. Berger,** *Géométrie vivante ou l'Échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini, 2009.

Qui de Leibniz ou Newton a inventé le calcul infinitésimal ? Après deux siècles de débat, la réponse est claire : chacun y est parvenu de façon indépendante, en suivant son propre chemin.

La querelle des infinitésimaux

Marco Panza

En bref

> La « querelle de priorité » opposa Leibniz à Newton sur la paternité de la découverte du calcul infinitésimal.

> Avec en toile de fond des enjeux politiques et personnels, elle fut essentiellement alimentée par l'entourage des deux hommes, et non par eux-mêmes.

> Chacun y est parvenu par sa propre voie, les deux se distinguant par plusieurs aspects aussi bien théoriques que pratiques.

> Et selon que l'on suive l'une ou l'autre, les questions philosophiques soulevées ne sont pas les mêmes…

En 1708, John Keill, un mathématicien écossais, accuse Leibniz de plagiat dans les *Philosophical Transactions* à propos de son calcul infinitésimal. Keill soutient non seulement que Newton découvrit ce calcul en premier, mais que Leibniz se l'est approprié, après en avoir changé le nom et la notation symbolique. Cet événement marque le début de la « querelle de priorité » concernant la découverte du calcul infinitésimal. Elle mit du temps à s'éteindre, mais désormais, notamment grâce à la publication de la correspondance privée entre les deux grands hommes, les historiens sont convaincus que Leibniz et Newton ont découvert indépendamment le calcul infinitésimal. Et une étude détaillée montre que leurs méthodes suivent deux approches bien distinctes.

Dans une lettre à Leibniz datée du 17 juin 1713, Jean Bernoulli – le principal mathématicien qui, à la suite des résultats du savant allemand, développa les calculs différentiel et intégral – résume en une phrase l'arrière-fond mathématique de la querelle de priorité qui oppose Leibniz à Newton : avant de lire la *Nova Methodus*, publiée par Leibniz en 1684, Newton « connaissait les fluxions, mais pas le calcul des fluxions ». Cette remarque semble paradoxale, mais elle est fort à propos : en affirmant sa priorité vis-à-vis de son confrère, Newton soutenait avoir élaboré, bien avant 1684, une théorie dite « des fluxions » équivalente à celle de Leibniz ; Jean Bernoulli observe que cette théorie n'est pas un calcul, sous-entendant que celle de Leibniz en est un.

DEUX ALGORITHMES INVERSES

Newton parvint à la théorie des fluxions entre 1664 et 1666, après avoir étudié l'*Arithmetica infinitorum* (*Arithmétique des infinis*) du Britannique John Wallis et la seconde édition latine de la *Géométrie* de Descartes. En automne 1666, il en fit une première exposition dans un traité (connu sous le nom de *Traité d'octobre*) qu'il ne publia pas. Quelques années plus tard, il écrivit deux autres traités sur le même sujet, qui ne paraîtront qu'en 1711 et 1736. Plusieurs différences

Les jalons de la méthode de Leibniz. Il définit notamment le triangle caractéristique *(a)* : étant donné une courbe AC(C), on trace une sécante TC(C) à la courbe. De C et (C), on abaisse respectivement les perpendiculaires à l'axe des abscisses CB et (C)(B). De C, on trace CD parallèle à l'axe. Le triangle caractéristique est le triangle C(C)D. Autre étape : désignons ensuite *(b)* par τ la tangente et par σ la sous-tangente (la partie de l'axe des abscisses comprise entre l'abscisse B du point C de la courbe et l'intersection T de la tangente en ce point avec l'axe des abscisses, soit le trait TB). Les triangles de côtés respectifs dx, dy, ds et σ, y, τ (y est l'ordonnée du point où la tangente est cherchée) sont semblables. Par conséquent, $ds = (\tau/y)dy$. L'aire sous-tendue par la courbe C *(c)* est finalement composée d'une infinité de rectangles de hauteur y, de base dx, et d'aire ydx : l'aire entière est donc la somme de ces rectangles.

De quoi parle-t-on ?

Le calcul infinitésimal réunit deux approches inverses, le calcul différentiel et le calcul intégral. Le premier, adossé à la notion de dérivée, cherche à déterminer les taux de variation instantanés de la valeur d'une fonction par rapport aux variations (sur des intervalles infiniment petits) d'un ou plusieurs paramètres de cette fonction. Le second, qui s'appuie sur l'idée d'intégrale, s'intéresse au calcul de l'aire sous une courbe, en découpant celle-ci en «tranches» infiniment fines.

apparaissent entre les théories de Newton et de Leibniz.

Mais au fait, qu'est-ce qu'une fluxion? Le mot «fluxion» apparaît dans le traité de 1736 (le *Tractatus de methodis serierum* et *fluxionum*) pour remplacer différents termes («mouvement», «détermination d'un mouvement», «vitesse»...) employés dans les traités précédents pour désigner ce que nous pourrions qualifier de vitesse ponctuelle de «génération d'un segment». La méthode de Wallis reformulée par Newton permettait de carrer une courbe d'équation $y = A(x)$, où $A(x)$ est une somme de termes de la forme ax^θ, θ étant un exposant rationnel différent de -1. Autrement dit, cette méthode permettait de calculer l'aire du trapézoïde rectangle T contenu entre cette courbe, l'axe des abscisses et deux ordonnées orthogonales correspondant aux abscisses x_0 et x_1.

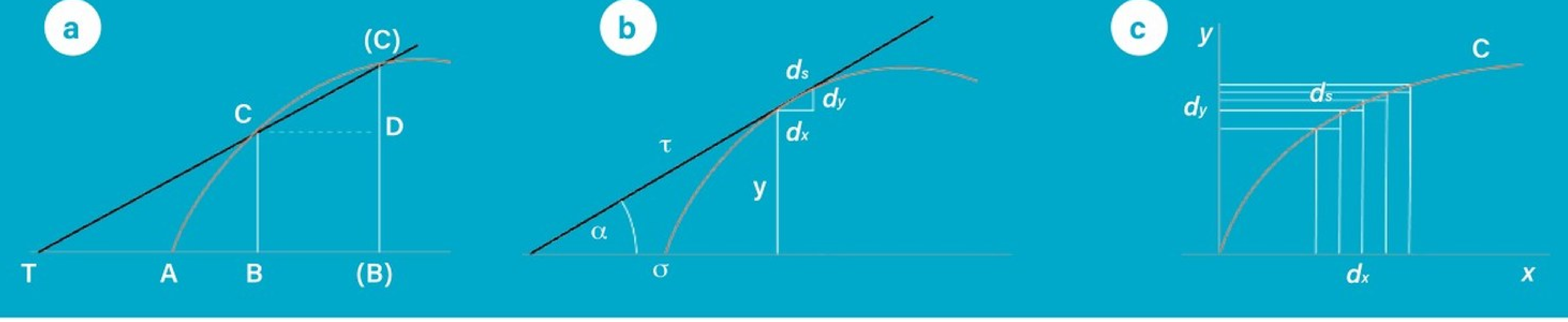
La méthode de Descartes reformulée par Newton donnait la sous-tangente FP en un point M d'une courbe d'équation $B(x, y) = 0$, où B est un polynôme à deux variables x et y.

Ces deux méthodes se fondaient sur des algorithmes qui, tout en s'appliquant à des expressions de nature différente, étaient inverses l'un de l'autre: dans le premier cas, il s'agissait de transformer un terme de la forme ax^θ en un terme de la forme $(a/(\theta + 1))x^{\theta+1}$; dans le second, l'idée est de passer d'un terme de la forme $ax^\nu y^\mu$ soit en un terme de la forme $\nu ax^{\nu-1}y^\mu$, soit en un terme de la forme $\mu ax^\nu y^{\mu-1}$.

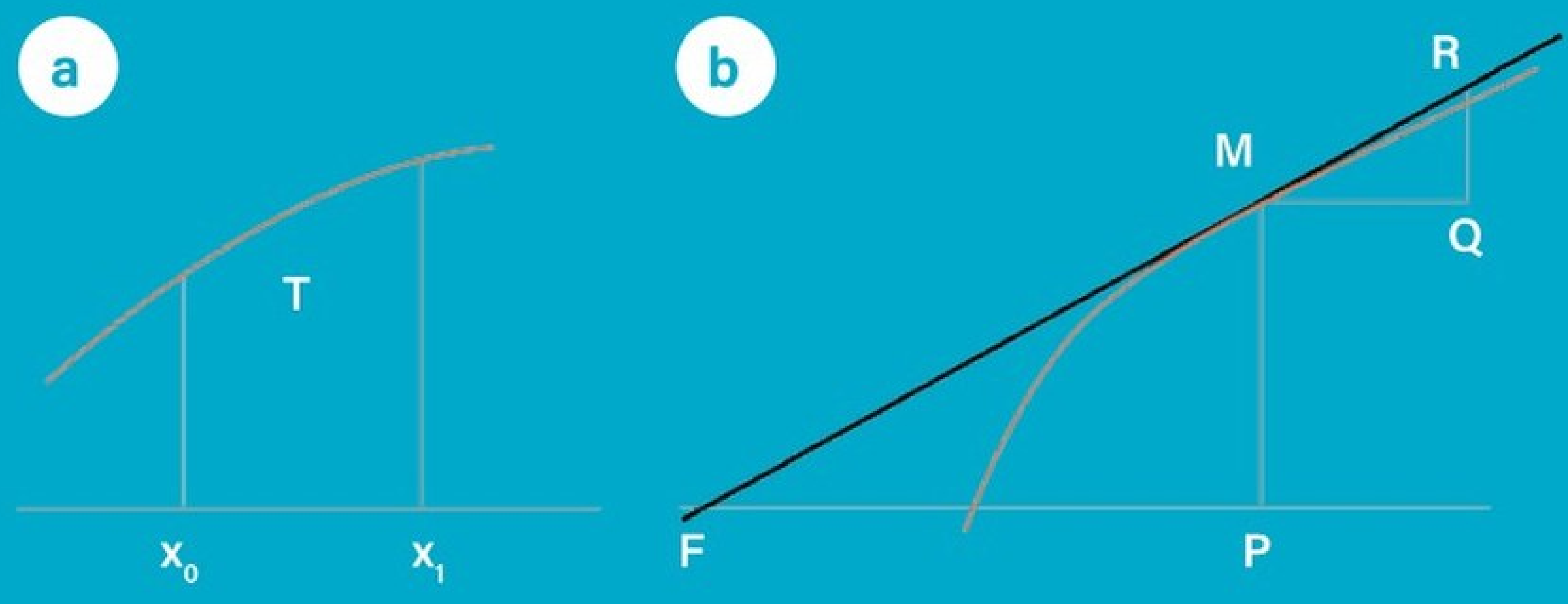
LES INFINITÉSIMAUX

Ce fait remarquable ne manqua pas d'attirer l'attention de Newton. En s'appuyant sur un théorème du mathématicien J. van Heuraet, il démontra que les problèmes des quadratures et des tangentes sont liés de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de la nature des courbes concernées, et que leur lien rend compte du caractère inverse des deux algorithmes.

Cela poussa Newton à rechercher une théorie générale, applicable tant à la solution du problème



La méthode de Wallis reformulée par Newton permet de calculer l'aire du trapézoïde rectangle T contenu entre une courbe C *(a, en orange)*, l'axe des abscisses et deux ordonnées orthogonales correspondant aux abscisses x_0 et x_1. La méthode de Descartes reformulée par Newton donne la sous-tangente FP en un point M d'une courbe d'équation B(*x*, *y*) = 0, où B est un polynôme à deux variables *x* et *y* *(b)*. La tangente est quant à elle l'hypoténuse du triangle rectangle MQR.



des quadratures qu'à celle du problème des tangentes, au sein de laquelle ces deux algorithmes seraient retrouvés sous la forme d'applications particulières. Il considéra une ligne comme la trace du mouvement d'un point et il concentra son attention sur la vitesse («ponctuelle») que ce mouvement a en chaque point de la ligne.

En imaginant que l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe sont engendrées respectivement par les mouvements rectilignes de deux points, le mouvement qui engendre cette courbe est la composition de ces deux mouvements rectilignes et la direction de sa vitesse ponctuelle est la tangente à la courbe. Pour trouver cette direction, il suffit donc de composer les vitesses des mouvements qui engendrent les coordonnées. Newton représente ces vitesses par des segments orientés qui préfigurent les vecteurs. La tangente est alors l'hypoténuse du triangle rectangle MQR dont les côtés MQ et QR sont dans le même rapport que les vitesses ponctuelles p et q des mouvements qui engendrent respectivement l'abscisse x et l'ordonnée y de la courbe (*voir la figure b, ci-dessus*).

Posons PM = y; les triangles FPM et MQR étant semblables, il s'ensuit que FP = $y(p/q)$. Dans ce cadre, on retrouve facilement les résultats que Newton avait obtenus en s'appuyant sur les méthodes de Descartes et de Wallis.

En ce qui concerne le problème des tangentes, il faut juste montrer que le produit du rapport p/q des vitesses ponctuelles des mouvements, qui déterminent les segments x et y liés par l'équation $B(x, y) = 0$, et de l'ordonnée y donne la sous-tangente de la courbe d'équation $B(x, y) = 0$. Ce que Newton fait à l'aide du plus simple des arguments infinitésimaux: le segment engendré en un temps t par un mouvement uniforme dont la vitesse ponctuelle est p a une longueur pt. De même, le segment créé en ce même temps par un mouvement uniforme dont la vitesse ponctuelle est q a une longueur qt; comme cela vaut pour tout t, Newton suppose que t est un temps o infiniment petit, de sorte que l'équation $B(x, y) = 0$ est maintenue en remplaçant x et y respectivement par $x + p$o et y + qo. On peut négliger les puissances de po et qo d'ordre supérieur à 1, car o est infiniment petit, et il suffit alors de résoudre une équation du premier degré pour obtenir le résultat cherché.

Cet argument est analogue à ceux de Leibniz quelques années plus tard, mais, contrairement à ceux-ci, il n'est pas posé comme fondement de la théorie. Il est seulement une justification pour une application particulière. C'est là la première différence entre les théories de Leibniz et de Newton: l'une est intrinsèquement infinitésimale, l'autre n'utilise des «infiniment petits» et «infiniment grands» que pour certaines applications.

LES AIRES ET LES SOMMES

Les résultats concernant la quadrature des courbes se retrouvent, dans le nouveau cadre proposé par Newton, de façon encore plus simple. L'aire d'un trapézoïde T (*voir la figure a, ci-dessus*) peut être considérée comme une variable z, dépendante de la base $x = x_1 - x_0$ de ce trapézoïde. Considérons alors la vitesse ponctuelle r du mouvement qui donne cette variable. Le rectangle de même base, dont la hauteur est constante et égale à 1, a une aire égale à x, et la vitesse ponctuelle p du mouvement qui engendre x est à r comme 1 est à y. Newton obtient donc l'égalité $r = yp$. En d'autres termes, pour trouver l'aire z de T, il convient juste de chercher l'expression en x d'un segment produit par un mouvement de vitesse ponctuelle yp, et de l'évaluer entre $x = x_0$ et $x = x_1$.

Le problème de la recherche de l'aire délimitée par une courbe se réduit alors à un problème inverse de la détermination des vitesses ponctuelles. En outre, comme la détermination de la vitesse ponctuelle du mouvement qui dessine une courbe équivaut à la détermination de la tangente à cette même courbe, on retrouve le lien entre problèmes de quadrature et des tangentes que Newton avait démontré auparavant de toute autre manière.

On comprend alors la deuxième grande différence entre les théories de Leibniz et de Newton: alors que Leibniz caractérise l'intégrale comme une somme représentant une aire et cherche ensuite à démontrer que cette somme est une primitive, Newton ne calcule aucune somme et identifie d'emblée l'aire d'une courbe à une primitive.

Quand il écrivit son traité *De methodis*, Newton ne se contenta pas d'introduire le terme «fluxion» pour désigner la vitesse du mouvement qui forme une ligne ou une aire. Il élimina tout intermédiaire entre variables et fluxions et définit la fluxion d'une variable (la «fluente») comme une autre variable exprimant le rythme ponctuel de variation de la première. Sous cette nouvelle présentation, la théorie des fluxions prit l'aspect d'une théorie générale de la variation. C'est la troisième grande différence avec la théorie de Leibniz, qui est en revanche essentiellement géométrique.

Malgré cette généralisation, Newton ne recentra jamais sa théorie sur les algorithmes dont il était parti. Ceux-ci continuèrent à jouer le rôle de règles particulières permettant, dans certains cas, de trouver des fluxions ou de repasser des fluxions aux fluentes. Contrairement à Leibniz, Newton ne songea pas à présenter sa théorie sous la forme d'une algèbre de deux opérateurs inverses, comme le sont d et $\int$ dans le calcul leibnizien. Telle est la quatrième grande distinction entre les deux théories, celle que Jean Bernoulli soulignera en 1713.

Dans un appendice au *De methodis*, Newton présenta une application géométrique de sa théorie, où les fluxions des segments sont proportionnelles aux incréments infinitésimaux qu'elles engendrent. Il en déduit la règle du produit des fluxions. Toutefois, elle se distingue de la règle de Leibniz, malgré son équivalence, car elle est conçue comme une conséquence de la théorie et non comme un de ses points de départ.

REFUS DE PRIORITÉ

Lorsqu'il publia les *Principia*, en 1687, trois ans après la parution de la *Nova Methodus* de Leibniz, Newton y inséra un lemme où il présenta à nouveau cette règle. Cependant, ce lemme reste isolé dans l'ensemble de l'ouvrage. Sa présence n'est justifiée que par la scolie qui la suit, où Newton affirme avoir communiqué à Leibniz, dix ans auparavant, le principe de sa théorie: il s'agit là de la première déclaration de priorité faite par Newton.

Entre 1691 et 1692, Newton rédigea un nouveau traité pour présenter sa théorie des fluxions, le *De quadrature curvarum*; l'année suivante, il en fit paraître un court résumé dans l'*Algebra* de Wallis, mais il ne le publia en entier, légèrement modifié, qu'en 1704, en appendice à son *Optiks*.

C'est là que Newton introduit la notation qui devint classique pour les fluxions et adopte une présentation plus proche de celle du calcul leibnizien. Mais ce dernier était désormais publié et connu, et il est difficile d'imaginer qu'il n'ait pas influencé Newton. Malgré ce rapprochement, les théories de Newton et Leibniz restèrent différentes dans leur structure. Cette différence se transforma, après la querelle de priorité, en une opposition idéologique qui marqua longtemps les relations scientifiques entre les communautés mathématiques anglaise et continentale.

— L'auteur —

> Marco Panza
est directeur de recherche au CNRS, historien et philosophe des mathématiques à l'Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques.

— À lire —

> M. Mugnai, Leibniz, le penseur de l'universel, *Les Génies de la science*, n° 28, 2006.

> G. W. Leibniz, *La Naissance du calcul différentiel: 26 articles des Acta Eruditorum*, trad. et commenté par M. Parmentier, Vrin, 2000.

Les mathématiciens ont réussi à faire de l'infini une « réalité » grâce au renfort des artistes du Quattrocento qui ont inventé la perspective.

L'infini en perspective

Jean-Pierre Le Goff

La Conversation sacrée a été peinte par Piero della Francesca pour l'église San Donato degli Osservanti en 1472.

En bref

> Durant la Grèce Antique, l'infini n'était que potentiel, en puissance.

> Il ne devient réel qu'au XVII^{e} siècle, grâce à la géométrie projective, née de l'union de la théorie de la perspective et de celle des coniques.

> L'infini géométrique acquiert alors une « dimension » humaine, une évidence perceptible.

Pour les philosophes et les géomètres de la Grèce antique, l'infini n'a pas de véritable existence ; sous l'influence d'Aristote, il n'est qu'un « potentiel », accessible en puissance. Dans ce contexte, la géométrie euclidienne reconnaît et intègre l'infini potentiel, mais s'arrête aux rives de l'infini « actuel », car l'infini inspire aux géomètres grecs méfiance et circonspection : la ligne droite, le plan ou le solide des géomètres strictement euclidiens sont finis, mais prolongeables à volonté.

Depuis cette époque, on débat du statut du cinquième postulat d'Euclide, selon lequel, formulé de façon moderne, par un point hors d'une droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule. Les géomètres se sont interrogés : peut-on démontrer ce postulat à partir des autres ? Les premières tentatives reposaient sur le prolongement indéfini des droites, c'est-à-dire leur prolongement potentiellement infini avec conservation de l'alignement.

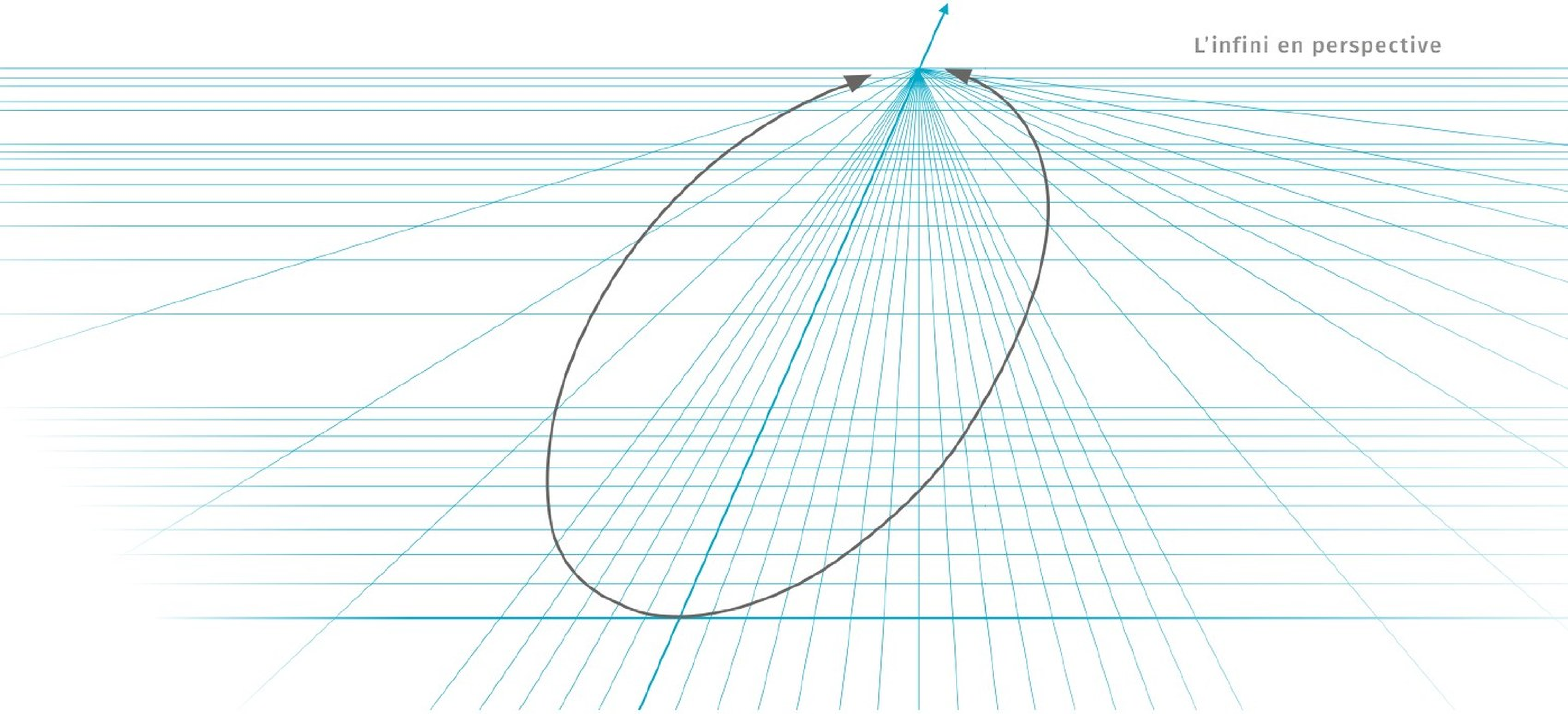
On sait aujourd'hui que ces tentatives étaient vaines, mais qu'elles ont conduit à la création de trois types de géométries. L'une, dite « euclidienne », admet ce postulat comme un axiome. Les deux autres, dites « non euclidiennes », ont été conçues à la fin du XIX^{e} siècle et posent comme axiome l'une des deux formes que peut prendre la négation du postulat des parallèles. Dans la géométrie hyperbolique, par un point passe plus d'une parallèle à une droite donnée, tandis que c'est aucune parallèle dans la géométrie elliptique.

On sait moins que l'émergence des géométries non euclidiennes n'est devenue possible qu'après celle de la géométrie projective, qui devait servir de cadre général aux trois modèles, et que cette géométrie projective est née de la conjonction, au XVII^{e} siècle, de la science de la perspective, issue de la géométrie pratique, et de la théorie des coniques d'Euclide et surtout d'Apollonios de Perga (III^{e} siècle avant notre ère). En somme, l'évolution des idées sur l'infini géométrique est passée par la question de la représentation de la troisième dimension dans un plan. Un moment à la fois crucial et fondateur fut l'invention, à la Renaissance, de la « perspective linéaire ».

UNE INVENTION DU QUATTROCENTO

Au travers de celle-ci (*voir l'encadré page 51*), l'infini géométrique actuel, l'espace actuellement infiniment étendu, a trouvé une première représentation dans le dessin, et ce avant même d'avoir été pensé.

La perspective linéaire, aussi nommée « perspective centrale » ou « projection conique » par les mathématiciens, consiste à projeter sur le plan du tableau les rayons rectilignes et imaginaires allant de l'objet à représenter jusqu'à l'œil, supposé ponctuel, du peintre ou du spectateur. Un ensemble de droites parallèles de l'espace a alors pour projection, sur le plan du tableau, un ensemble de droites parfois parallèles (lorsqu'elles sont parallèles au tableau), mais en général concourantes en un « point de fuite central », défini comme tel vers 1435 par Leon Battista Alberti (1404-1472). Les peintres et les architectes de la Renaissance italienne du XV^{e} siècle, comme Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti



et Piero della Francesca, ont codifié les règles de la construction légitime du dessin en perspective. Ils ont ainsi inauguré une pratique conventionnelle et géométrisée de la perspective, mais dont la grande adéquation avec la vision humaine, d'une part, et les conséquences pratiques, d'autre part, devaient assurer la postérité.

Ce faisant, ces artistes ont fourni le premier exemple de représentation visuelle d'un infini actuel : le point de fuite figure sur le tableau un point en réalité situé à l'infini, là où les droites parallèles « se rencontrent ». Sans qu'ils en aient eu conscience, leurs œuvres, bientôt relayées par la gravure et par l'imprimerie, donneront à voir une multitude d'occurrences de l'infini représenté. En effet, le point de fuite central sera bientôt flanqué des points de distance, dont on s'avisera ensuite que ce sont aussi des points de fuite, donc des représentations de l'infini. C'est encore l'horizon (la ligne sur le tableau, située à la hauteur de l'œil du spectateur) lui-même qui apparaîtra comme lieu d'une multitude – d'une infinité – de points de fuite ; puis, vers 1600, viendra enfin l'idée que tout point du tableau est, en dernière instance, un point de fuite.

LE CONCOURS À L'INFINI

Cette émergence d'une multiplicité de représentations visuelles de l'infini actuel devait conduire, au début du XVII^{e} siècle, en France, à une révolution dans le champ conceptuel de la géométrie. Girard Desargues (1591-1661), un géomètre lyonnais, va en effet théoriser ce que tout pratiquant de la perspective linéaire a vu sans toujours en croire ses yeux : il identifie le concours de droites ou de plans au parallélisme de ces objets. En d'autres termes, le parallélisme n'est rien d'autre qu'un concours à l'infini, et des droites parallèles ne sont rien d'autre que des droites qui se rencontrent en un point à l'infini.

Une parabole, courbe ouverte, peut devenir, en perspective, une ellipse, courbe fermée, les branches infinies se rejoignant en un même point de l'horizon.

Cette idée rompt avec la conception finitiste, héritée des Grecs, que l'on se faisait de la ligne droite, de la surface et du solide. Il faut dire que Desargues a derrière lui deux siècles de pratique de la perspective, qui ont contribué à éduquer l'œil du spectateur occidental. En particulier, il est deux points qu'il convient de préciser pour comprendre les idées du géomètre. Le premier, c'est que le cadre dans lequel l'artiste cherche à figurer une scène – une « fenêtre », selon Alberti – était conçu, dans un premier temps, comme une ouverture sur un au-delà à représenter. Le second, c'est que cette fenêtre était en principe disposée verticalement, sur un géométral horizontal. Or les artistes ont très vite transgressé ces deux contraintes.

D'une part, ils se sont autorisés à représenter quelques éléments de l'en deçà de la fenêtre : timidement, d'abord, et en trompe-l'œil, ils ont dessiné le cadre du tableau ou l'encadrement de ladite fenêtre, prise alors au sens propre, ou tel objet posé sur le rebord d'une ouverture feinte.

D'autre part, les peintres se sont abstraits de la contrainte du fil à plomb et du niveau, comme en témoignent les décors plafonnants (tel l'oculus de *La Chambre des époux* d'Andrea Mantegna), ou

Desargues a dépassé l'infini potentiel de Kepler et a posé le cône comme surface infinie à deux nappes

plus tard les décors baroques de la Contre-Réforme jésuite (ceux d'Andrea Pozzo, par exemple), et enfin les trompe-l'œil sur voûtes ou toutes sortes de surfaces irrégulières. Ces œuvres indiquent qu'un tableau, voire une fresque, n'est pas nécessairement situé dans un plan orthogonal au sol.

De telles images ne pouvaient qu'imprimer avec force l'idée que la fenêtre ne constitue pas une borne et qu'elle n'est pas nécessairement d'aplomb sur le géométral. Toutefois, il restait un pas à franchir. Desargues le fera, non dans le domaine de la représentation, mais dans celui de la conception: quand un rayon visuel théorique s'étend à l'infini comme une ligne droite, pourquoi s'arrêterait-il à l'œil? Pour le géomètre, un cône proprement dit est un cône à deux «nappes», obtenu en prolongeant en droites entières les demi-droites issues de son sommet. De façon analogue, on peut prolonger les rayons visuels en arrière de l'œil.

REPENSER LES CONIQUES

Desargues repensa alors les «coniques», des courbes (l'ellipse, la parabole et l'hyperbole) obtenues en coupant un cône à base circulaire par un plan. Considérons les rayons visuels qui joignent un œil ponctuel aux points d'un cercle réel. Ces rayons forment un cône à base circulaire dont le sommet est l'œil. Toute coupe du cône par un plan produit une courbe qui est une perspective du cercle. Autrement dit, une conique n'est jamais qu'un cercle, vu d'un bon point de vue.

Cela n'avait jamais été énoncé en ces termes auparavant, même si on concevait bien qu'une ellipse, courbe fermée, pouvait être l'image d'un cercle en perspective. Pourtant, il paraissait inconcevable que l'on puisse assimiler au cercle des courbes non fermées, ayant des branches infinies, comme la parabole, ou présentant des ruptures de continuité, comme l'hyperbole, telle que nous la définissons aujourd'hui.

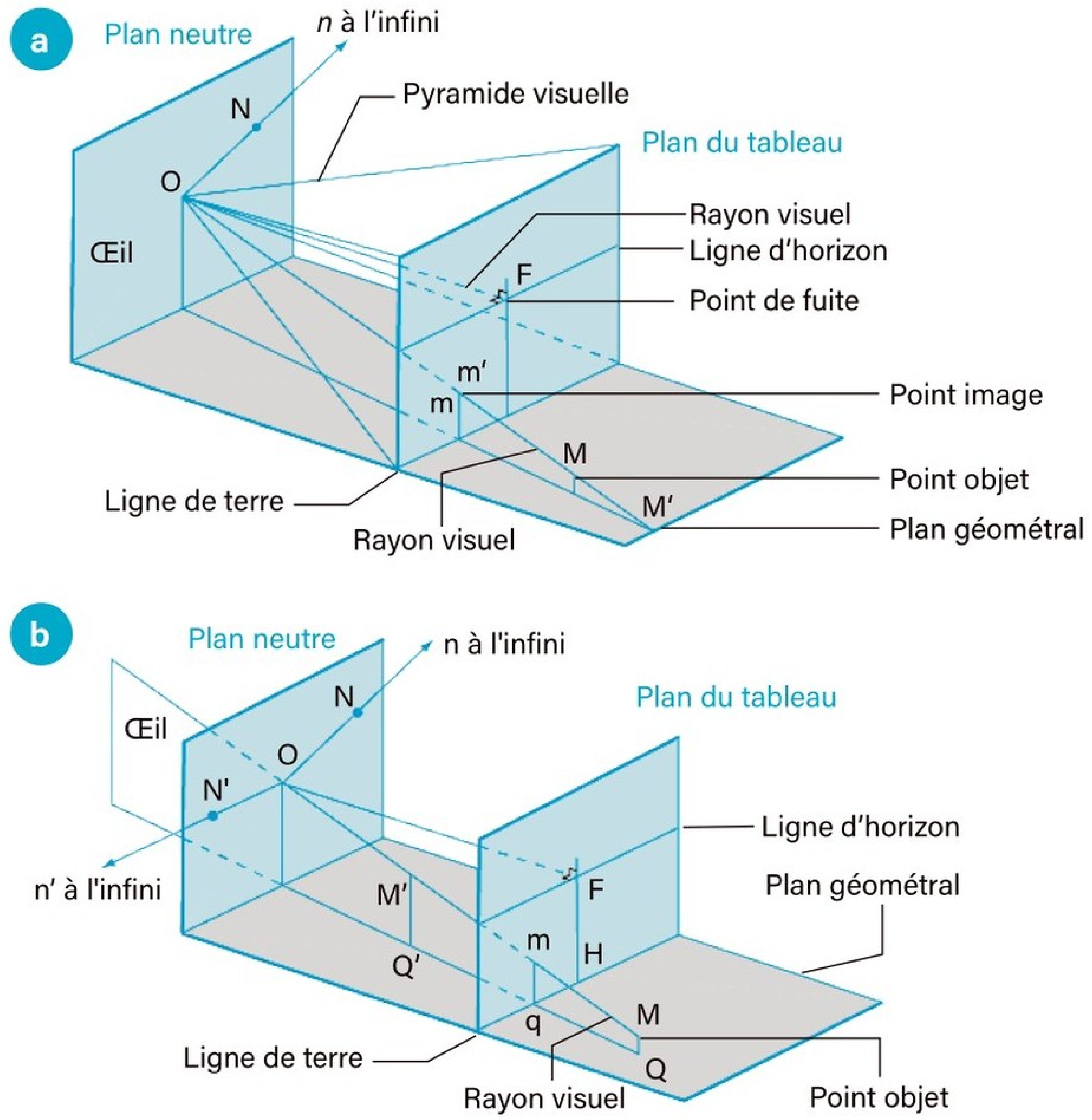
Cette *Annonciation* de Pâris Bordone (1500-1571) illustre le procédé singulier des « vues de l'en deçà » : l'artiste peint ce qu'il voit dans le cadre fictif dont il entoure la scène, mais aussi ce qu'il voit « en deçà » du cadre, en l'occurrence devant, sur un plan plus élevé que celui de l'observateur.

Kepler, dans son *Optique*, avait certes remarqué, par exemple, qu'une parabole n'est jamais qu'une ellipse dont l'un des foyers se serait éloigné à l'infini, la courbe ouvrant ses bras en quelque sorte. Mais Desargues est allé plus loin: il a dépassé l'infini potentiel de Kepler et a posé d'emblée le cône comme surface infinie à deux nappes.

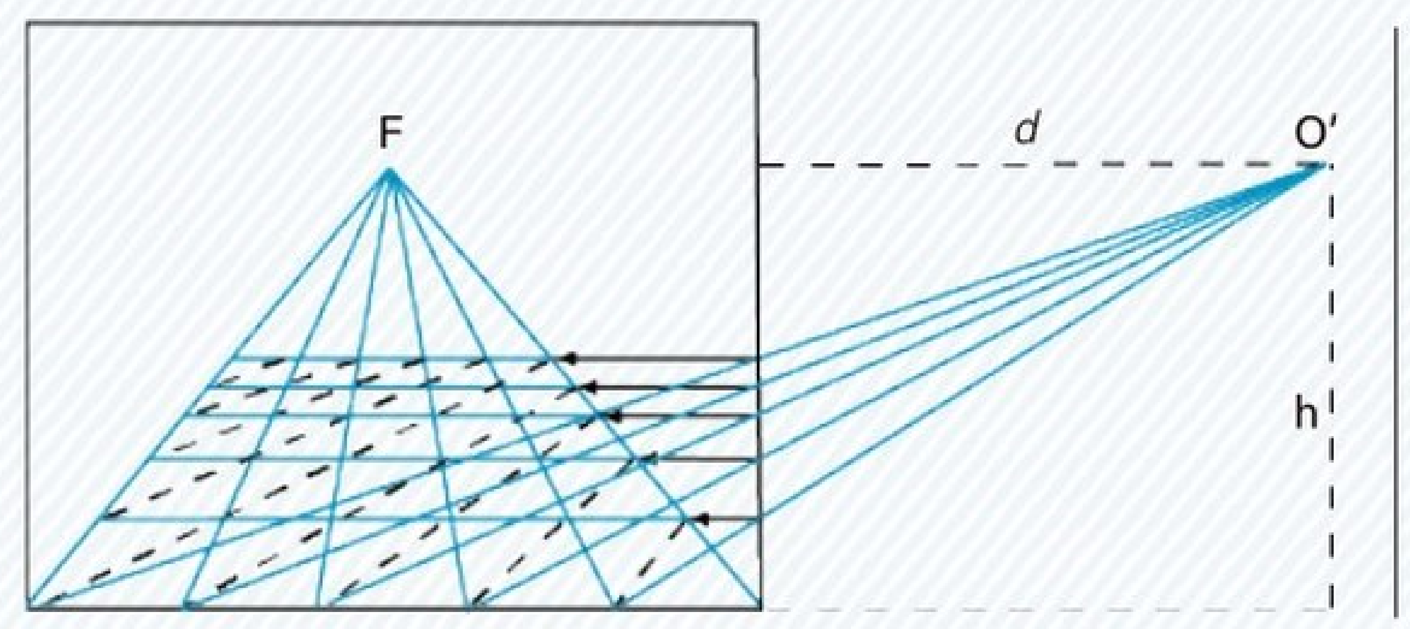
Plus encore, en assimilant faisceaux de droites parallèles et faisceaux de droites concourantes, Desargues fut amené à concevoir qu'une droite n'est jamais qu'un cercle de rayon infini,

LA PERSPECTIVE CENTRALE

Une perspective centrale, ou linéaire, est, géométriquement parlant, une projection de l'espace dans un plan P, menée à partir d'un point fixe O extérieur. Chaque point M de l'espace a pour image le point m, lorsqu'il existe, intersection de la droite (OM) et du plan P. Le point O *(a)* représente le centre de projection, c'est-à-dire un œil ponctuel, situé au-dessus du plan au sol, nommé «géométral». Toutes les demi-droites issues de O – les rayons visuels – forment une pyramide ou un cône dits «visuels», s'appuyant sur le cadre du tableau, qui est une partie du plan de projection P.
Le tableau et le géométral se coupent selon la ligne de terre. Le rayon visuel principal est perpendiculaire au tableau et y détermine le point de fuite principal F. Ce point détermine ensuite le niveau d'une ligne parallèle à la ligne de terre passant par lui, la ligne d'horizon. Cette ligne est aussi l'intersection du tableau avec le plan horizontal principal, parallèle au géométral et passant par O. Enfin, le plan parallèle au tableau passant par O, qui contient tous les rayons visuels parallèles au tableau, est le plan neutre. Un point M situé au-delà de la fenêtre aura pour image perspective ou pour apparence un point m du tableau par intersection du rayon visuel (OM) avec le tableau *(b)*; un point M' aligné avec O et M aura la même image que M dans le tableau (m'= m).
La perspective centrale primitive ne considère que l'au-delà de la fenêtre, tandis que la projection conique moderne considère tous les points de l'espace, positionnés sur toutes les droites passant par O. Dans ce cas, les rayons visuels traversent l'œil et «cherchent» aussi tous les points qui se trouvent en deçà du tableau: ceux-ci peuvent alors être situés entre l'œil et le tableau (un cadre en trompe-l'œil, par exemple); ou bien l'œil O, devenu purement géométrique, peut être interposé entre l'objet visé et le tableau. Notons enfin qu'un point N ou N' du plan neutre n'a pas d'image n ou n' à distance finie dans le tableau; en géométrie projective, on dira que l'horizon de la direction des plans parallèles au tableau est la droite à l'infini du tableau. Le problème du dessin en perspective consiste, pour chaque point M de la scène à représenter, à déterminer le point m correspondant dans le tableau. Pour obtenir cette image, il existe plusieurs procédés, dont celui, dit aujourd'hui «de la double projection», qui permet de repérer, au sol, l'écart qH de la projection q de *m* par rapport à la ligne FH, et, de profil, la hauteur mq du point m par rapport au sol.
Cette méthode, probablement celle que Brunelleschi, consiste à croiser les informations données par deux projections orthogonales, l'une sur le plan horizontal, l'autre sur un plan vertical, et qui peuvent être une vue de face et une vue de profil.



Un carrelage vu de dessus représenté par l'Italien Leon Battista Alberti : il trace d'abord le faisceau de droites qui concourent au point de fuite principal F. Il place ensuite un point O' de côté, à une distance *d* du tableau (celle entre O et F) et à la même hauteur que F. De O', il trace les segments de droite allant jusqu'aux points de départ des droites concourantes en F. L'intersection de ces segments avec le bord vertical droit du tableau fournit les niveaux auxquels doivent être placées les lignes transversales du carrelage.



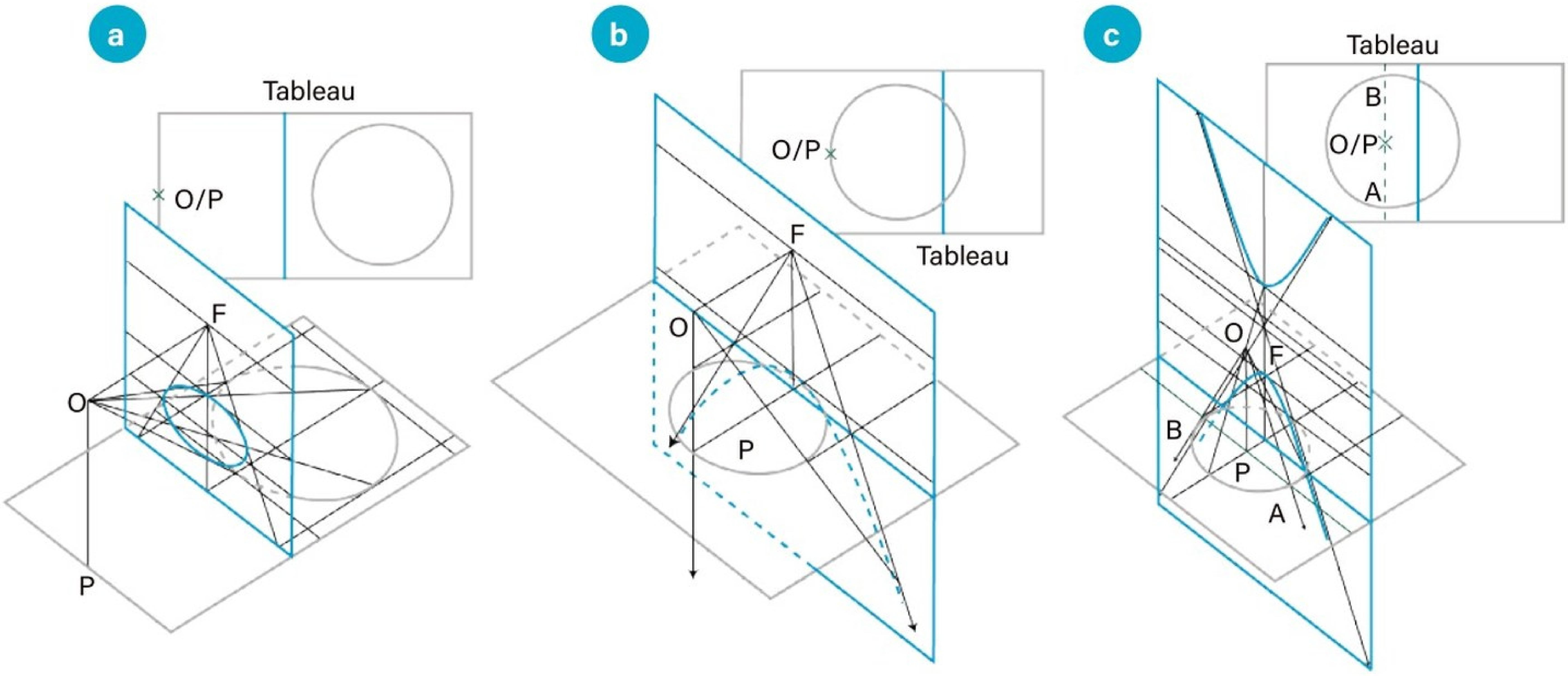
et un cylindre à base circulaire, un cône dont le sommet se trouve à l'infini.

Pour mieux comprendre comment, dans le contexte de la perspective, les diverses coniques apparaissent comme des projections du cercle, imaginons une situation picturale banale : un peintre qui observe un bassin circulaire au travers de la « fenêtre » fictive où il souhaite le représenter, le tableau étant orthogonal au sol. On ferait apparaître les diverses coniques en variant l'inclinaison du tableau par rapport au sol, mais aussi en modifiant les positions relatives de l'œil, du tableau et du bassin (*voir la figure page ci-contre*).

Les découvertes de Desargues ont ouvert le champ à une théorie générale des projections, à laquelle s'emploieront les géomètres de la première moitié du XIXe siècle, comme Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles… À son tour, la géométrie projective construite par ces mathématiciens conduira à entrevoir la possibilité des géométries non euclidiennes et à en concevoir des modèles euclidiens. On y rencontre aussi des représentations de l'infini. Par exemple, dans les modèles d'Henri Poincaré ou d'Eugenio Beltrami pour le « plan hyperbolique », l'infini est ramené à distance finie en assimilant les points à l'infini à un cercle dont l'intérieur constitue le « plan » : les « droites » deviennent des arcs circulaires orthogonaux au contour. Il s'agit d'un modèle euclidien d'une géométrie non euclidienne, puisque, par un point extérieur à une « droite », passent une infinité de « droites » parallèles à la droite en question. On notera que les extrémités des droites sont situées sur le contour, c'est-à-dire à l'infini. Le monde clos des Anciens fait son retour…

UNE PERSPECTIVE UN PEU CAVALIÈRE

Qu'en est-il de la perspective dite « cavalière » dont nous n'avons pas parlé ? Les projections parallèles, projections où les rayons qui partent de l'objet à représenter sont parallèles à une direction donnée, semblent connues de longue date, au moins depuis l'architecte romain Vitruve (Ier siècle de notre ère). En fait, il ne s'agit que de tentatives empiriques de représenter localement la profondeur pour des objets isolés. Elles ne peuvent en aucun cas



Selon la position du peintre par rapport à l'objet à dessiner, la représentation change. En perspective centrale, où l'œil du peintre O constitue le centre de la projection, la représentation d'un bassin circulaire *(en gris)* sur le plan du tableau *(en bleu)* peut être une ellipse *(a)*, une parabole *(b)* ou une hyperbole *(c)*. On obtient la première lorsque le bassin se trouve au-delà du peintre, la deuxième lorsque les pieds P du peintre sont sur le pourtour du bassin, et la dernière lorsque le peintre est debout à l'intérieur du bassin.

relever d'une volonté de « représenter l'espace » de façon globale, cohérente et homogène. On ne peut véritablement parler de perspective cavalière qu'à partir du moment où ses règles ont été codifiées géométriquement. Or celles-ci, bien que nettement plus simples que celles de la perspective centrale, n'ont été édictées qu'après celles de la perspective centrale du Quattrocento.

Dans les perspectives parallèles, on considère les rayons visuels parallèles. Comme l'a montré Desargues, on peut aussi dire que ces rayons visuels se rencontrent à l'infini. En d'autres termes, la perspective cavalière équivaut à une perspective centrale où l'œil du dessinateur est « rejeté à l'infini », ce qui a fait dire en 1925 au peintre russe Lissitzky : « Le suprématisme a fait reculer l'extrémité de la pointe de la pyramide visuelle à l'infini… » Il lui semblait qu'on en avait terminé avec l'idée de point de vue. Le peintre s'assimilait alors au Créateur par le regard venu de l'infini. Pourtant, une exclusion n'est pas une absence : dans une perspective parallèle, le point de vue est toujours présent, tout rejeté à l'infini qu'il soit.

— L'auteur —

> Jean-Pierre Le Goff est professeur de mathématiques et d'histoire des sciences et des techniques à l'IUFM et à l'Irem de Basse-Normandie.

— À lire —

> R. Taton, *L'Œuvre mathématique de Girard Desargues*, PUF, 1951 (réédition Vrin, 1988).

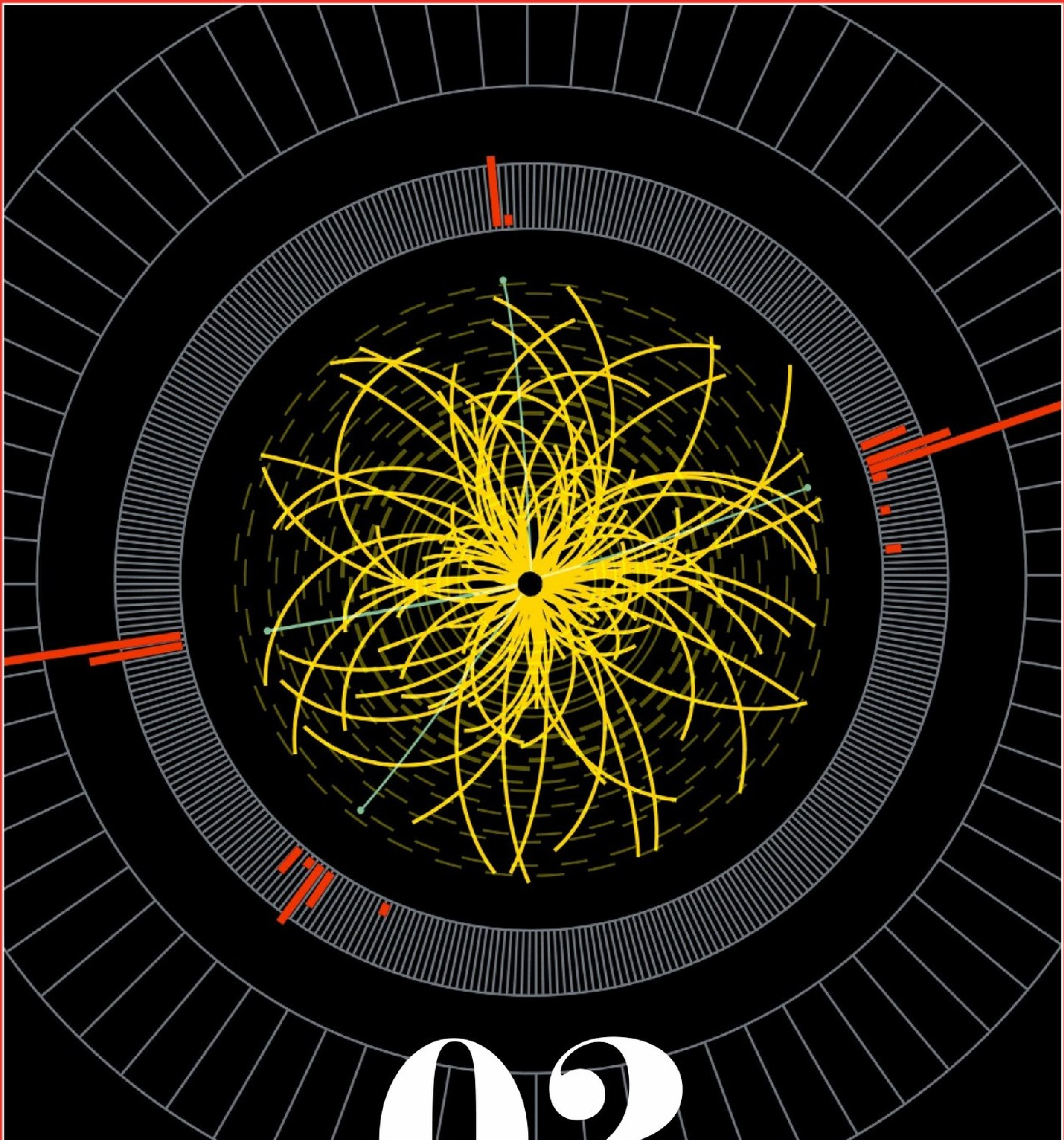
> P. Comar, *La Perspective en jeu. Les dessous de l'image*, Éditions Gallimard/La Découverte, 1992.

> J.-P. Le Goff, « Desargues et la naissance de la géométrie projective », *in* J. Dhombres et J. Sakarovitch (dir.), *Desargues en son temps*, Blanchard, 1994.

> J.-P. Le Goff, *Piero della Francesca. De la perspective en peinture*, Medias Res, 1998.

PHYSIQUE
L'insondable

Les physiciens ont une position paradoxale vis-à-vis de l'infini. Dès qu'il surgit dans leurs calculs, ils se font fort de le faire disparaître par un recours massif à des outils mathématiques, comme la renormalisation, dont les fondements posent encore problème. Mais, par ailleurs, ils n'ont de cesse de s'en rapprocher quand il s'agit de plonger dans les tréfonds de la matière pour en découvrir les composants ultimes. Ou bien quand ils rivalisent d'ingéniosité pour créer des impulsions laser infiniment brèves, ou presque.

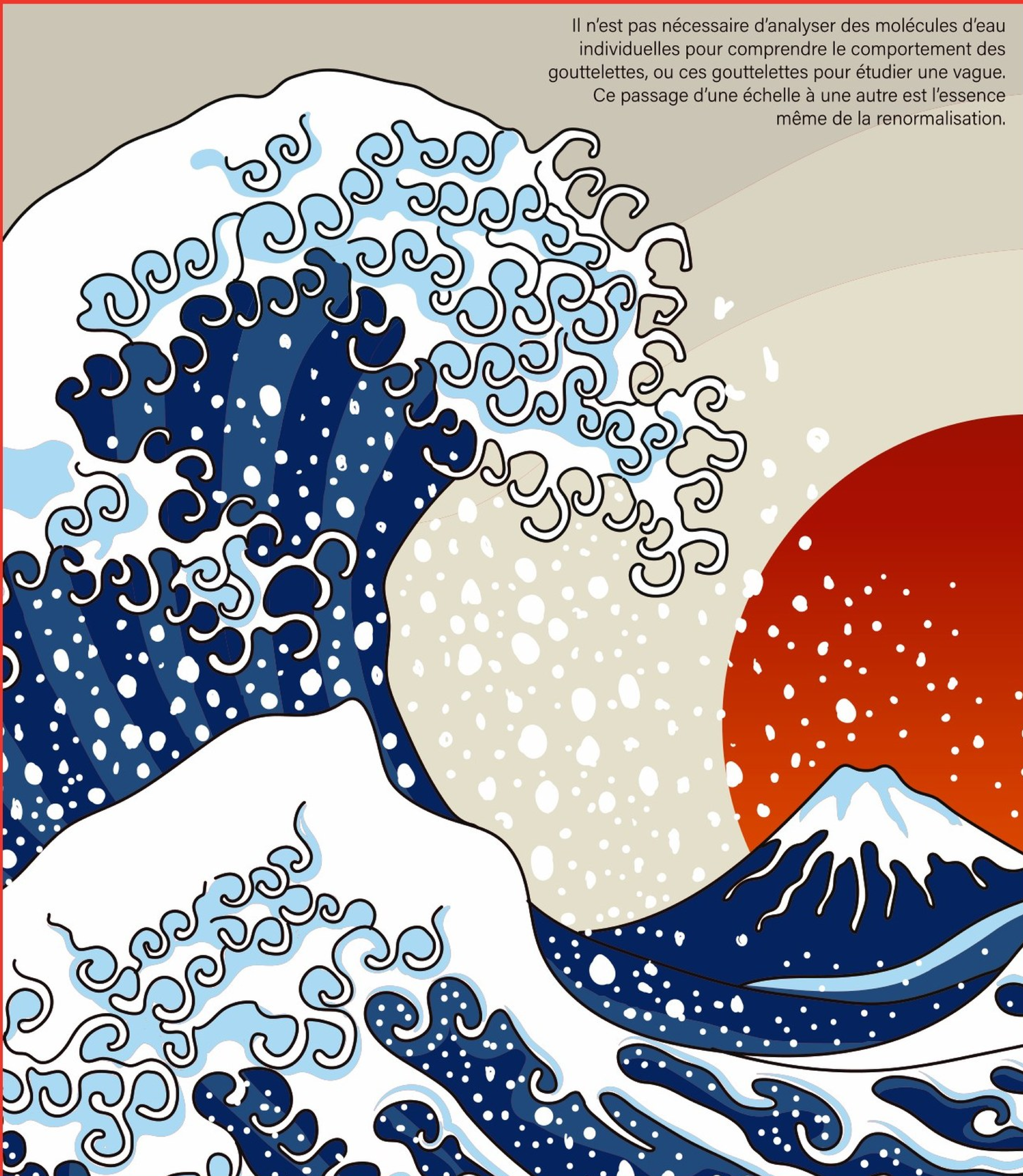


02

La renormalisation est une astuce qui permet de s'affranchir des infinis gênants dans les calculs. Elle a sauvé la physique des particules, mais quel est son bien-fondé mathématique ?

Faire fi de l'infini

Charlie Wood



Il n'est pas nécessaire d'analyser des molécules d'eau individuelles pour comprendre le comportement des gouttelettes, ou ces gouttelettes pour étudier une vague. Ce passage d'une échelle à une autre est l'essence même de la renormalisation.

En bref

> La renormalisation a été inventée pour soutenir la théorie quantique des champs et l'empêcher de s'effondrer sous le coup d'infinis apparaissant dans les calculs.

> Cependant, aucune justification n'existait pour cette technique qui s'apparentait à un « procédé douteux ».

> Elle a finalement trouvé sa légitimité avec l'étude du magnétisme et doit désormais être vue comme une façon de découper l'Univers selon différentes échelles.

À la fin des années 1920, plusieurs physiciens, comme Werner Heisenberg, Paul Dirac, Pascual Jordan, Wolfgang Pauli… font disparaître les particules ! À la place, ils préfèrent y voir des ondulations dans un champ, une sorte d'océan dans lequel, en chaque point, la valeur d'une grandeur physique est donnée. Ainsi, une vague dans ce champ est un électron, une autre un photon, et leurs interactions semblent expliquer tous les événements électromagnétiques.

Devenue un des piliers conceptuels de la description physique de l'Univers et l'explication incontournable de nombreux phénomènes, cette théorie quantique des champs n'a qu'un seul problème : elle est adossée à une technique que l'on a longtemps supposée provisoire et regardée avec suspicion, la renormalisation. Elle n'en est pas moins restée indispensable pour composer avec les infinis rédhibitoires qui apparaissent dans les calculs. D'où un sentiment inconfortable, même chez ceux qui ont l'élaborée, d'utiliser un outil qui s'apparente à un château de cartes bâti sur un artifice mathématique tordu.

« C'est un procédé douteux, écrira plus tard Richard Feynman. Devoir recourir à de tels tours de passe-passe nous a empêchés de prouver que la théorie de l'électrodynamique quantique est mathématiquement cohérente. »

Une justification de la renormalisation a pourtant été trouvée, des décennies plus tard, et en provenance d'une branche de la physique apparemment sans rapport. Le regard des physiciens sur cette « hérésie » a alors changé la façon de la considérer. En effet, des chercheurs étudiant le magnétisme ont découvert que le processus ne concernait pas du tout les infinis, mais s'apparentait plutôt à une séparation de l'Univers en royaumes de tailles indépendantes, et cette nouvelle vision guide aujourd'hui de nombreux domaines de la physique. Quoi qu'il en soit, la renormalisation est, de l'avis de David Tong, théoricien à l'université de Cambridge, « sans doute l'avancée la plus importante de ces cinquante dernières années en physique théorique ».

L'HISTOIRE DE DEUX CHARGES

Selon certains critères, les théories des champs sont les plus abouties de toute la science. L'une d'elles, la théorie de l'électrodynamique quantique (QED), qui constitue l'un des fondements du modèle standard de la physique des particules, a permis des prédictions théoriques qui s'accordent aux résultats expérimentaux avec une précision de 1 partie sur 1 milliard.

Mais dans les années 1930 et 1940, l'avenir de la théorie était loin d'être assuré. L'approximation du comportement complexe des champs conduisait souvent à des réponses absurdes mettant en jeu l'infini, au point que des théoriciens ont envisagé que les théories des champs soient une impasse.

Richard Feynman et d'autres, notamment Freeman Dyson, ont donc cherché de nouvelles voies. Certaines auraient peut-être remis les particules sur le devant de la scène, mais, à la place,

> Paul Dirac, à propos de la renormalisation : « Ce ne sont tout simplement pas des mathématiques raisonnables »

ils ont abouti à un tour de magie. Ils ont découvert que les équations de la QED menaient à des prédictions acceptables, à condition d'être corrigées par cette procédure impénétrable qu'est la renormalisation. En première approximation, la recette est la suivante: lorsqu'un calcul de QED conduit à une série divergente, on abrège celle-ci en intégrant la partie qui tend à s'envoler vers l'infini dans un coefficient (un nombre fixe) placé devant la somme. Puis on remplace ce coefficient par une mesure finie issue d'expérimentations, et l'on peut ensuite laisser la série désormais apprivoisée repartir vers l'infini.

Certains ont vu dans ce procédé un jeu de dupes, à commencer par Paul Dirac, pionnier de la théorie des champs, qui déplorait: « Ce ne sont tout simplement pas des mathématiques raisonnables. »

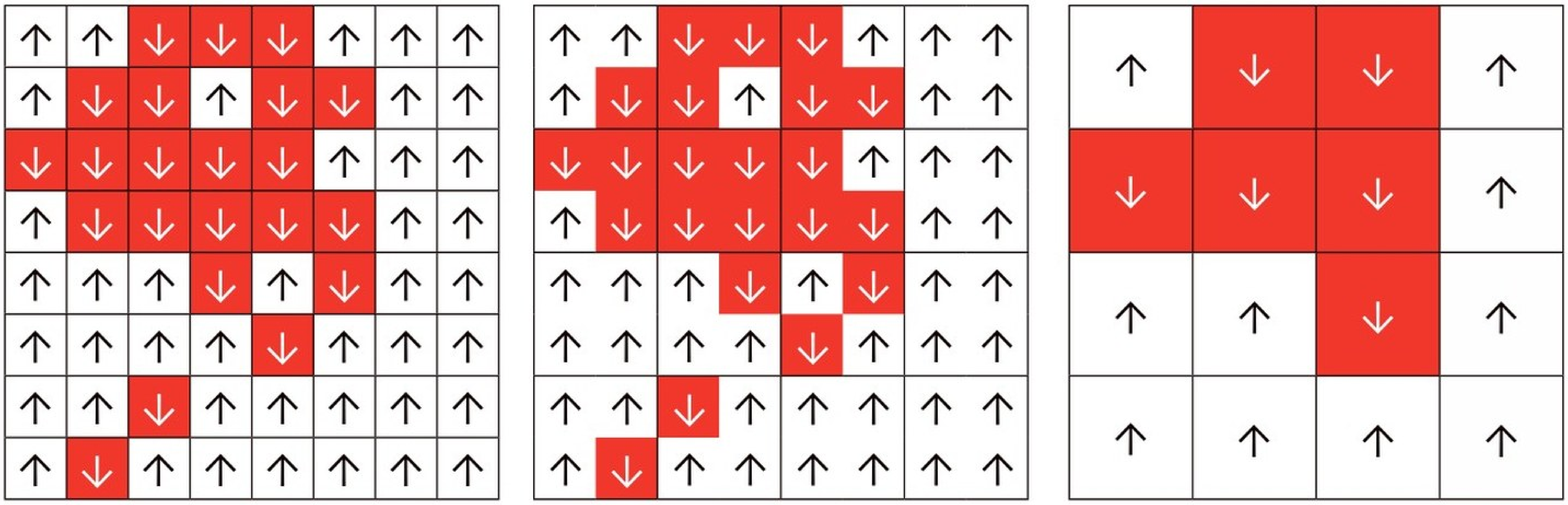
Le cœur du problème – et une piste pour sa solution – se trouve dans la façon dont les physiciens ont considéré la charge de l'électron. Dans le mécanisme décrit, la charge électrique naît du fameux coefficient qui « avale l'infini » durant la tambouille mathématique. Pour les théoriciens qui s'interrogent sur la signification physique de la renormalisation, la QED laisse supposer que l'électron a deux charges: une charge théorique, qui est infinie, et la charge mesurée, qui ne l'est pas. Peut-être que le cœur de l'électron contient une charge infinie, mais elle serait masquée dans la pratique par les effets du champ quantique (que l'on peut se représenter ici comme un nuage virtuel de particules positives) : en fin de compte, les expérimentateurs ne mesurent qu'une charge nette modeste.

Deux physiciens, Murray Gell-Mann et Francis Low, ont pris à bras-le-corps cette idée en 1954. Ils ont relié les deux charges de l'électron à une charge « effective » qui varie selon la distance. Plus on se rapproche (et plus on pénètre le « manteau positif » de l'électron), plus la charge est importante. Leurs travaux ont été les premiers à lier la renormalisation à l'idée d'échelle. Ils laissaient entendre que les physiciens quantiques avaient trouvé la bonne réponse à la mauvaise question. Plutôt que de se préoccuper des infinis, ils auraient dû s'attacher à relier le minuscule à l'énorme.

La renormalisation est « la version mathématique d'un microscope », explique Astrid Eichhorn, physicienne à l'université du Danemark du Sud, qui utilise la renormalisation pour rechercher des théories de la gravité quantique. « Et, inversement, on peut commencer par le système microscopique et faire un zoom arrière. C'est l'association du microscope et du télescope. »

LES AIMANTS DU PONT NEUF

Un deuxième indice, après la piste de l'échelle, est venu du monde de la matière condensée, où les physiciens se demandaient comment l'approximation rudimentaire d'un aimant – le modèle d'Ising – parvient à saisir les



Dans la renormalisation par la technique de « blocs de spins », élaborée par Leo Kadanoff, une grille de spins individuels est moyennée en blocs de plus en plus grands.

moindres détails de certaines transformations. Ce modèle n'est guère plus qu'une grille dans laquelle chaque case est dotée d'une flèche, représentant le moment magnétique d'un atome, qui pointe soit vers le haut, soit vers le bas. Et pourtant, il prédit le comportement d'aimants réels avec une précision remarquable.

À basse température, la plupart des moments magnétiques des atomes s'alignent (toutes les flèches de la grille pointent dans la même direction) et le matériau est donc magnétique. À l'inverse, à haute température, le désordre domine, et l'aimantation disparaît. Entre ces deux extrêmes se niche un point de transition critique caractérisé par la coexistence d'îlots d'atomes alignés de toutes tailles. Le point essentiel est que la façon dont certaines quantités varient autour de ce « point critique » semble identique dans le modèle d'Ising, dans les aimants réels de différents matériaux et même dans des systèmes qui n'ont aucun rapport, tels que la transition à haute pression, où l'eau liquide devient indiscernable de la vapeur d'eau.

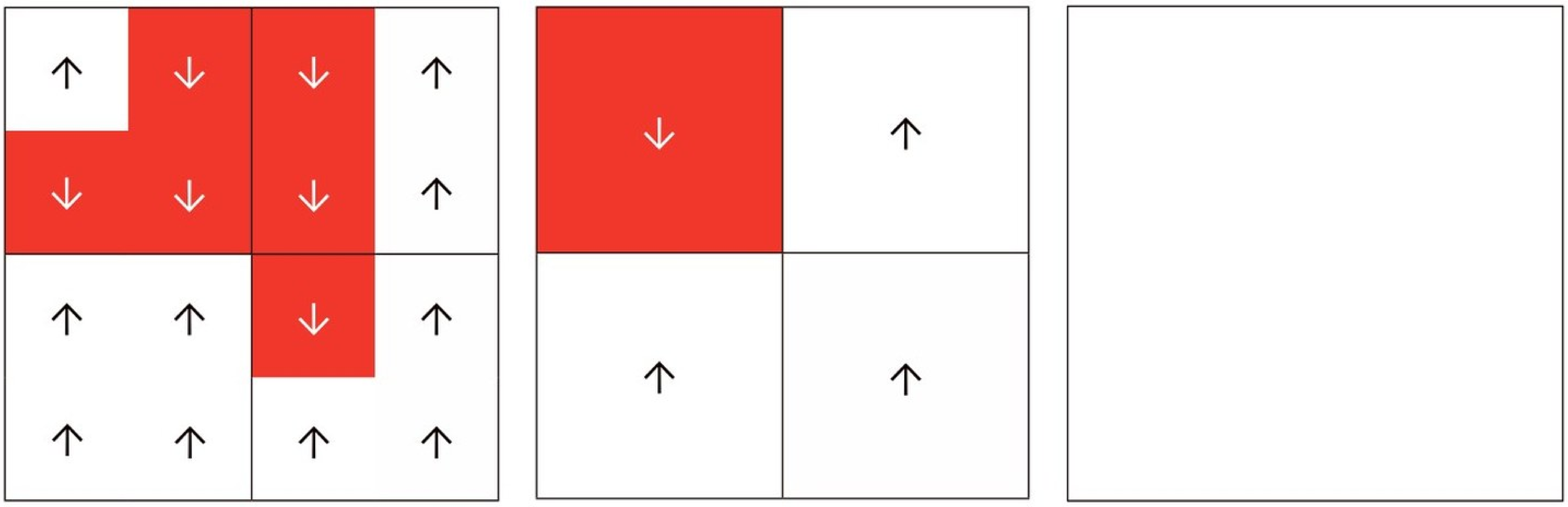
La mise au jour de ce phénomène ubiquitaire, que les théoriciens ont donc appelé « universalité », était aussi bizarre qu'une improbable découverte révélant qu'éléphants et aigrettes se déplacent exactement à la même vitesse maximale.

Les physiciens n'ont pas l'habitude de s'occuper d'objets de tailles différentes en même temps. Mais le comportement universel autour des points critiques les a obligés à tenir compte de toutes les échelles de longueur à la fois. Leo Kadanoff, spécialiste de la matière condensée, a trouvé comment y parvenir en 1966 en mettant au point une technique dite « par blocs de spins ».

ZOOM ARRIÈRE

Elle consiste à diviser une grille d'Ising trop complexe pour être abordée de front en blocs plus petits et à déterminer pour chacun d'eux l'orientation moyenne, en l'occurrence celle de la majorité des flèches qu'ils contiennent. Tout le bloc prend alors cette valeur (haut ou bas), et l'on répète le processus. Ce faisant, les détails du réseau sont lissés, comme si un zoom arrière révélait le comportement global du système (*voir la figure ci-dessus*).

Enfin, Kenneth Wilson, un ancien étudiant de Murray Gell-Mann qui avait un pied dans le monde de la physique des particules et un autre dans celui de la matière condensée, a uni les idées de son mentor et de Francis Low à celles de Leo



Kadanoff. Son «groupe de renormalisation», qu'il a décrit pour la première fois en 1971, a justifié les calculs tortueux de la QED et a fourni une échelle permettant de gravir les échelons des systèmes universels. Ce travail a valu à Kenneth Wilson le prix Nobel de physique en 1982... et a changé la physique pour toujours.

Selon Paul Fendley, théoricien de la matière condensée à l'université d'Oxford, la meilleure façon de s'imaginer le groupe de renormalisation de Wilson est de le voir comme une «théorie des théories» reliant le microscopique au macroscopique. Considérons la grille magnétique. Au niveau microscopique, il est facile d'écrire une équation reliant l'orientation des flèches dans deux cases voisines. Mais extrapoler cette simple formule à des trillions de particules est impossible, parce que vous raisonnez à la mauvaise échelle.

Le groupe de renormalisation de Kenneth Wilson décrit la transformation d'une théorie des éléments constitutifs en une théorie des structures. Vous commencez par une théorie adaptée à de petites pièces, par exemple les atomes d'une bille de billard, puis vous actionnez la «moulinette mathématique» de Kenneth Wilson afin d'obtenir une théorie, cette fois pertinente pour des groupes de ces pièces, par exemple les molécules de la bille. En réitérant l'opération, vous serez finalement en mesure de calculer quelque chose d'intéressant, comme la trajectoire d'une bille entière.

C'est la magie du groupe de renormalisation: il met en évidence les quantités à grande échelle qu'il est utile de mesurer et les détails microscopiques alambiqués qui peuvent être ignorés. Un surfeur s'intéresse à la hauteur des vagues, et non à la bousculade des molécules d'eau. De même, en physique subatomique, la renormalisation indique aux physiciens quand ils peuvent s'occuper d'un proton plutôt que de l'enchevêtrement des quarks qui le constituent.

DU GRAND AU PETIT

Le groupe de renormalisation de Kenneth Wilson a également suggéré que les malheurs de Richard Feynman et de ses contemporains venaient du fait qu'ils essayaient de comprendre l'électron d'un point de vue infiniment proche. De fait, «nous ne nous attendons pas à ce que [les théories] soient valables jusqu'à des échelles [de distance] arbitrairement petites», concède James Fraser, philosophe de la physique à l'université de Durham, au Royaume-Uni. Les physiciens comprennent aujourd'hui que couper mathématiquement les sommes et disperser l'infini est la bonne façon de faire un calcul lorsque votre théorie a une taille de grille minimale intégrée. C'est comme si, explique James Fraser, «la coupure absorbait notre ignorance de ce qui se passe aux niveaux inférieurs» pour lesquels on ne dispose d'aucune information, d'aucune grille.

> La renormalisation capture la tendance de la nature à se distribuer en mondes essentiellement indépendants

En d'autres termes, la QED et le modèle standard ne peuvent tout simplement rien dire de la charge nue de l'électron à une distance de zéro nanomètre. Il s'agit de ce que les physiciens appellent des théories « effectives », qui fonctionnent mieux sur des distances bien définies. L'un des principaux objectifs de la physique des hautes énergies est de découvrir ce qui se passe exactement quand on réduit ces distances.

DU GRAND AU PETIT

Aujourd'hui, le « procédé douteux » de Feynman est devenu aussi omniprésent en physique que le calcul, et ses rouages révèlent les raisons de certains des plus grands succès de la discipline et de ses défis actuels. Au cours de la renormalisation, les couches submicroscopiques complexes à prendre en compte ont tendance à disparaître : elles existent bel et bien, mais elles n'ont pas d'incidence sur le tableau d'ensemble. « La simplicité est une vertu », résume Paul Fendley.

Les fondements de la renormalisation illustrent la tendance de la nature à se répartir en mondes essentiellement indépendants. Lorsque les ingénieurs conçoivent un gratte-ciel, ils ignorent superbement les molécules individuelles de l'acier. Les chimistes font de même avec les quarks et les gluons quand ils analysent les liaisons moléculaires. La séparation des phénomènes en fonction de leur échelle, quantifiée par le groupe de renormalisation, a permis aux scientifiques de passer progressivement du grand au petit au fil des siècles, plutôt que de s'attaquer simultanément à toutes les échelles.

Cependant, l'hostilité de la renormalisation à l'égard des détails microscopiques va à l'encontre des efforts des physiciens modernes, dans leur quête de comprendre le toujours plus petit. La séparation des échelles suggère qu'ils devront creuser en profondeur pour surmonter le penchant de la nature à dissimuler ses points les plus fins à des géants curieux comme nous.

« La renormalisation nous aide à simplifier le problème », explique Nathan Seiberg, physicien théoricien à l'Institut d'études avancées, à Princeton, aux États-Unis. Mais « elle cache aussi ce qui se passe à plus courte distance. On ne peut pas avoir le beurre et l'argent du beurre... »

— L'auteur —

> Charlie Wood
diplômé en physique à l'université Brown, aux États-Unis, est journaliste au magazine *Quanta*.

Cet article est une traduction de « How mathematical'hocus-pocus'saved particle physics », paru sur Quantamagazine.org le 17 septembre 2020.

— À lire —

> K. Wilson, Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture, *Phys. Rev. B*, 1971.

Afin d'explorer des mouvements infiniment rapides, il faut des impulsions lumineuses infiniment brèves : celles des lasers attosecondes.

Un Nobel pour l'infiniment bref

Charlie Wood

Des flashs ultrarapides, indispensables
pour observer des événements fugaces.

En bref

> Espérer observer le comportement des électrons impose de disposer de flashs lumineux ultrabrefs.

> Des gaz rares comme l'argon éclairés par laser émettent de telles impulsions : des harmoniques dont la fréquence est de l'ordre de l'attoseconde.

> C'est pour cette découverte qu'Anne L'Huillier, Pierre Agostini et Ferenc Krausz ont reçu le prix Nobel de physique en 2023.

> Les applications attendues sont nombreuses et concernent même la biologie.

Pour espérer entrapercevoir les particules du monde subatomique, dont la vitesse est inimaginablement rapide, des éclairs de lumière d'une brièveté tout aussi inimaginable sont nécessaires. Anne L'Huillier, Pierre Agostini et Ferenc Krausz se partagent le prix Nobel de physique 2023 pour leur travail de pionnier dans le développement de ces « flashs » ultracourts.

Entre les années 1980 et le début des années 2000, les trois physiciens ont mis au point des techniques à même de produire des impulsions laser d'une durée d'à peine quelques attosecondes, soit des milliards de milliards de fois plus fugitives qu'une seconde. Le monde ralentit lorsqu'on l'observe avec de tels éclairs, et le battement d'ailes d'un colibri devient une éternité. Même les virevoltants atomes semblent arrêtés. De fait, à l'échelle de l'attoseconde, les physiciens ont accès au mouvement des électrons eux-mêmes, dans leur danse effrénée sur le pourtour des atomes, sautant d'un endroit à l'autre.

« La capacité de générer des impulsions lumineuses attosecondes a ouvert la voie à une échelle de temps minuscule – extrêmement minuscule. Ce faisant, elle rendait accessible le monde des électrons », a déclaré Eva Olsson, physicienne à l'université technologique de Chalmers, à Göteborg, en Suède, et présidente du comité Nobel de physique.

Outre qu'elle constitue un moyen fondamentalement nouveau d'étudier les électrons, cette méthode de visualisation en mouvement ultralent peut conduire à une multitude d'applications. Selon Mats Larsson, membre du comité Nobel, cette technique a le mérite d'avoir lancé le domaine de l'« attochimie », c'est-à-dire la faculté de manipuler des électrons individuels à l'aide de la lumière. Et de poursuivre : « Si l'on envoie des impulsions laser attosecondes sur un semi-conducteur, le matériau passe presque instantanément d'un état résistant – il bloque le passage de l'électricité – à celui de conducteur, ce qui rend envisageable la conception de dispositifs électroniques ultrarapides. » Ferenc Krausz, l'un des colauréats, tente également d'exploiter la puissance des impulsions attosecondes pour détecter les changements subtils dans les cellules sanguines, possibles indicateurs des premiers stades d'un cancer.

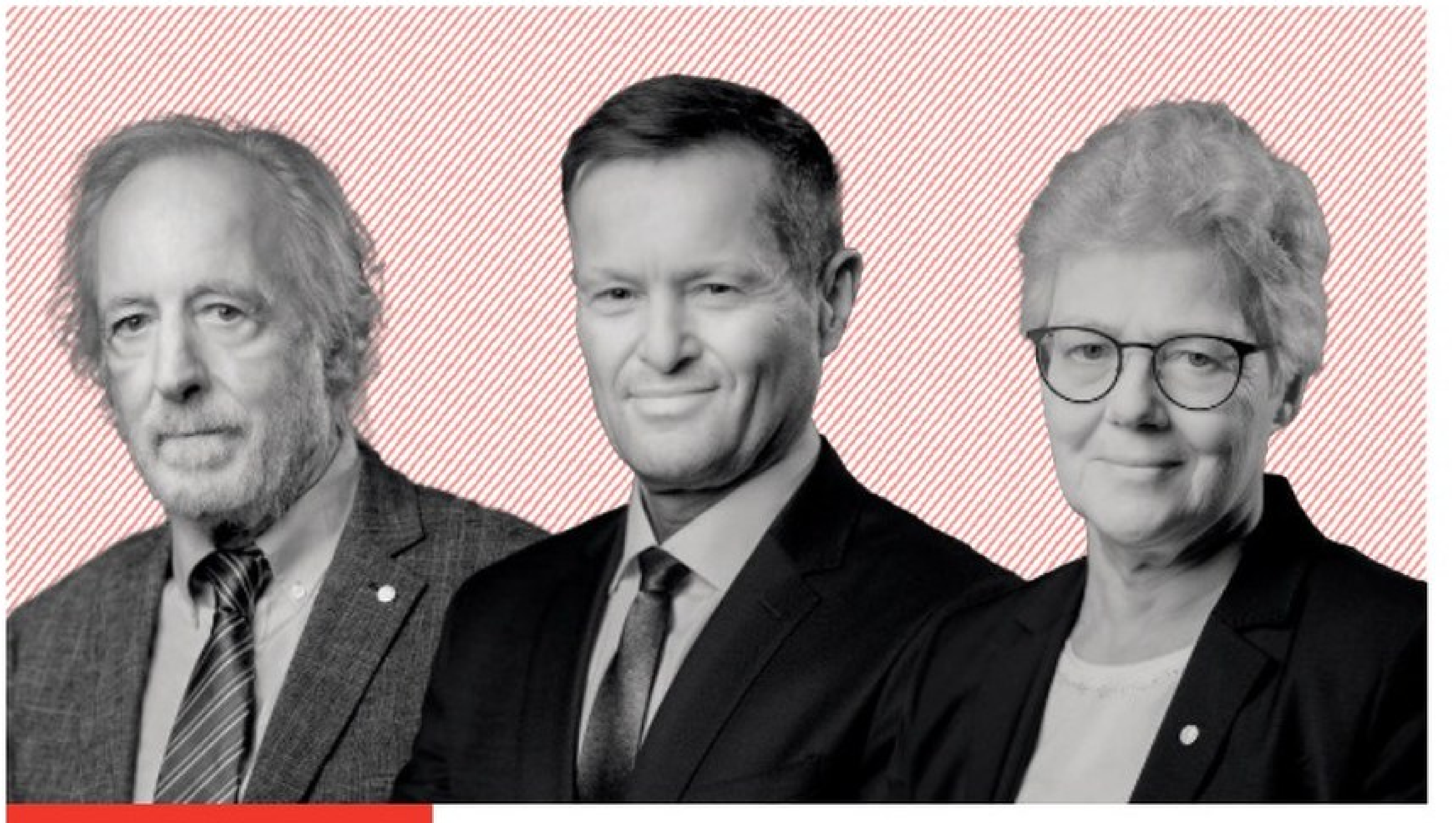
Le monde de l'ultrarapide diffère radicalement du nôtre, mais grâce aux travaux d'Anne L'Huillier, Pierre Agostini et Ferenc Krausz, et d'autres, il commence à se révéler. Mais qu'est-ce qu'une attoseconde ?

BEAUCOUP DE ZÉROS

Une attoseconde correspond à un trillionième de seconde, soit 0,000000000000000001 seconde (10^{-18} seconde). Il s'écoule plus d'attosecondes en une seconde qu'il ne s'est écoulé de secondes depuis la naissance de l'Univers (de l'ordre de 10^{17}).

Pour mesurer les mouvements des planètes, nous utilisons les jours, les mois et les années. Pour mesurer la course d'un humain sur 100 mètres, nous utilisons des secondes ou des centièmes de seconde. Mais lorsque nous plongeons dans le monde submicroscopique, les

Werner Heisenberg a sous-estimé l'ingéniosité des physiciens du xx^e siècle!



Pierre Agostini, Ferenc Krausz et Anne L'Huillier

objets se déplacent plus rapidement. Pour mesurer les mouvements quasi instantanés, tels que la danse des électrons, nous avons besoin de chronomètres avec des marques de tic-tac beaucoup plus fines: les attosecondes.

En 1925, Werner Heisenberg, l'un des pionniers de la mécanique quantique, a affirmé que le temps nécessaire à un électron pour faire le tour d'un atome d'hydrogène était inobservable. Dans un sens, il avait raison. Les électrons ne tournent pas autour d'un noyau atomique comme les planètes autour des étoiles. Les physiciens les considèrent plutôt comme des ondes de probabilité: celles-ci indiquent les «chances» de les observer en tel endroit à un certain moment, de sorte qu'il est impossible de mesurer un électron qui vole littéralement dans l'espace.

Mais Heisenberg a sous-estimé l'ingéniosité de physiciens du xxe siècle! Certes, la probabilité qu'un électron soit ici ou là varie d'un moment à l'autre, d'une attoseconde à l'autre. Cependant, grâce à des impulsions laser attosecondes capables d'interagir avec les électrons, les chercheurs peuvent sonder directement les comportements de ces particules. Encore faut-il produire des impulsions attosecondes!

Dans les années 1980, Ahmed Zewail, de l'institut de technologie de Californie, a développé des lasers émettant des impulsions de quelques femtosecondes (des milliers d'attosecondes). Ces travaux, qui ont valu à leur auteur le prix Nobel de chimie en 1999, étaient suffisants pour autoriser l'étude du déroulement des réactions chimiques entre les atomes dans les molécules. On a alors parlé de «la caméra la plus rapide du monde».

Pendant un temps, faire mieux semblait inaccessible, car on ignorait comment faire osciller la lumière plus rapidement. Mais en 1987, Anne L'Huillier, aujourd'hui à l'université de Lund, en Suède, et ses collaborateurs ont fait une observation intrigante: si vous éclairez certains gaz avec une lumière laser, leurs atomes sont excités et réémettent des photons qui oscillent plusieurs fois plus vite, c'est-à-dire avec des fréquences plus élevées, que ceux du laser d'origine. Le groupe de la physicienne a découvert qu'avec des gaz comme l'argon, certaines de ces «harmoniques» supplémentaires apparaissaient plus brillantes que d'autres, mais selon un schéma inattendu. Ce phénomène laissait alors perplexe.

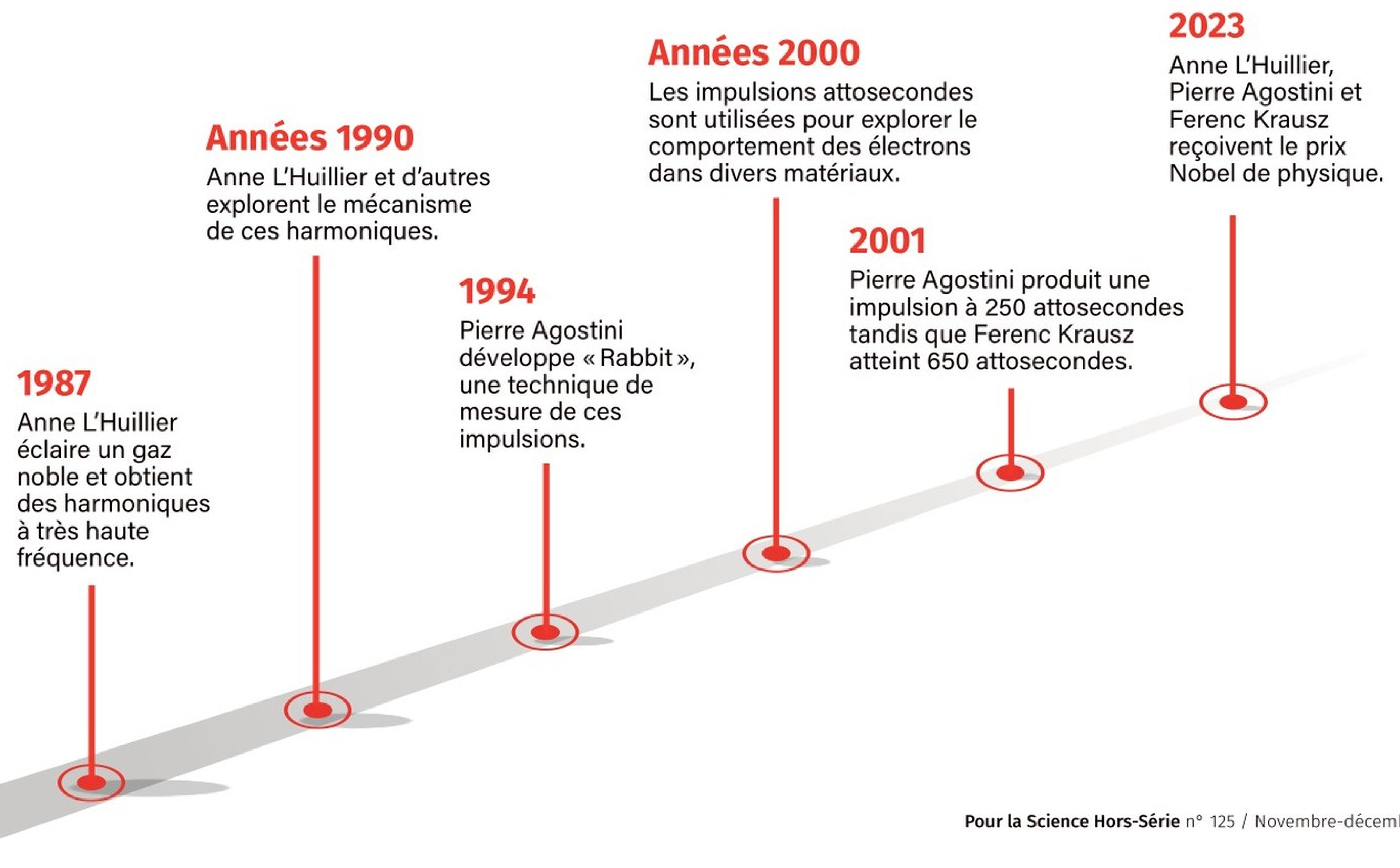
LE LAPIN À LA RESCOUSSE

Au début des années 1990, Anne L'Huillier et d'autres chercheurs ont utilisé la mécanique quantique pour calculer les intensités des diverses harmoniques. Ils ont alors pu prédire exactement comment, lorsqu'un laser infrarouge oscillant lentement frappait un nuage d'atomes, ces derniers émettaient à leur tour de la lumière «ultraviolette extrême» oscillant rapidement. Une fois compris à quelles harmoniques il fallait s'attendre, ils ont trouvé comment les superposer de façon à obtenir une nouvelle impulsion, dont cette fois la fréquence est à l'échelle de l'attoseconde. Amener des collectifs géants d'atomes à produire de concert ces ondes

> Des flashs attosecondes, en éclairant le sang, révéleraient des cancers, à un stade précoce

finement réglées est un processus que Mats Larsson compare à un orchestre produisant de la musique, synchronisée donc.

Au cours des années suivantes, les physiciens ont exploité cette compréhension détaillée des harmoniques pour créer des impulsions attosecondes en laboratoire. Pierre Agostini, maintenant à l'université d'État de l'Ohio, aux États-Unis, et ses collègues ont mis au point une technique appelée « Rabbit » (pour *Reconstruction of attosecond beating by interference of two-photon transitions*, soit « Reconstruction d'un battement attoseconde par interférence de transitions à deux photons »). Grâce à Rabbit (« lapin » en français), le groupe a créé en 2001 une série d'impulsions laser d'une durée de 250 attosecondes chacune. La même année, le groupe de Ferenc Krausz, de l'institut Max-Planck d'optique quantique, à Garching, en Allemagne, a utilisé une méthode légèrement différente,



connue sous le nom de « streaking », pour produire et étudier des salves individuelles d'une durée de 650 attosecondes chacune. En 2003, Anne L'Huillier et ses collaborateurs les ont tous deux surpassés avec une impulsion laser d'une durée de 170 attosecondes seulement.

Mais que peut-on faire avec des impulsions attosecondes? Elles permettent aux physiciens de détecter tout ce qui change sur une période de quelques dizaines à quelques centaines d'attosecondes. La première application a consisté à essayer ce que les physiciens avaient longtemps cru impossible (ou du moins extrêmement improbable) : voir exactement le comportement des électrons.

VOIR LES ÉLECTRONS

En 1905, Albert Einstein a donné le coup d'envoi de la mécanique quantique en expliquant l'effet photoélectrique, qui consiste en une émission d'électrons par une plaque métallique éclairée (cette découverte lui vaudra le prix Nobel de physique en 1921). Avant l'avènement de la physique de l'attoseconde, les physiciens supposaient généralement que la chaîne de réactions qui conduisait à la libération des électrons était instantanée.

En 2010, Ferenc Krausz et ses collègues ont démontré le contraire. Ils ont utilisé des impulsions attosecondes pour chronométrer les électrons libérés par des atomes de néon et ont notamment constaté qu'un électron dans un état de basse énergie fuyait son hôte 21 attosecondes plus vite qu'un électron dans un état de haute énergie. En 2020, un autre groupe a montré que les électrons s'échappent de l'eau liquide des dizaines d'attosecondes plus rapidement que de la vapeur d'eau.

D'autres applications des impulsions attosecondes sont en cours de développement. La technique pourrait aider à sonder toute une série de phénomènes liés aux électrons, notamment la façon dont les particules portent et bloquent la charge électrique, celle dont les électrons rebondissent les uns sur les autres et celle dont ces particules se comportent collectivement. Ferenc Krausz illumine également le sang humain de flashs attosecondes. En 2022, il a contribué à montrer que de minuscules changements dans la signature spectroscopique d'un échantillon sont de possibles indices d'un cancer, à un stade précoce.

Dans la matinée du 3 octobre 2023, le comité Nobel a eu du mal à joindre Anne L'Huillier pour l'informer qu'elle était la cinquième femme de l'histoire à recevoir le prix Nobel de physique. Lorsqu'il a finalement réussi, après trois ou quatre appels manqués, elle était en train de donner une conférence à ses étudiants. Elle est parvenue à la terminer, même si la dernière demi-heure fut très difficile... Ce fut une éternité, surtout quand elle est comptée en attosecondes!

— L'auteur —

> Charlie Wood
diplômé en physique
à l'université Brown,
aux États-Unis, est journaliste
au magazine *Quanta*.

Cet article est une traduction de « Physicists who explored tiny glimpses of time win Nobel Prize », paru sur le site Quantamagazine.org le 3 octobre 2023.

— À lire —

> M. Zigman *et al.*, 90P Infrared molecular fingerprinting: A new in vitro diagnostic platform technology for cancer detection in blood-based liquid biopsies, *Annals of Oncology*, 2022.

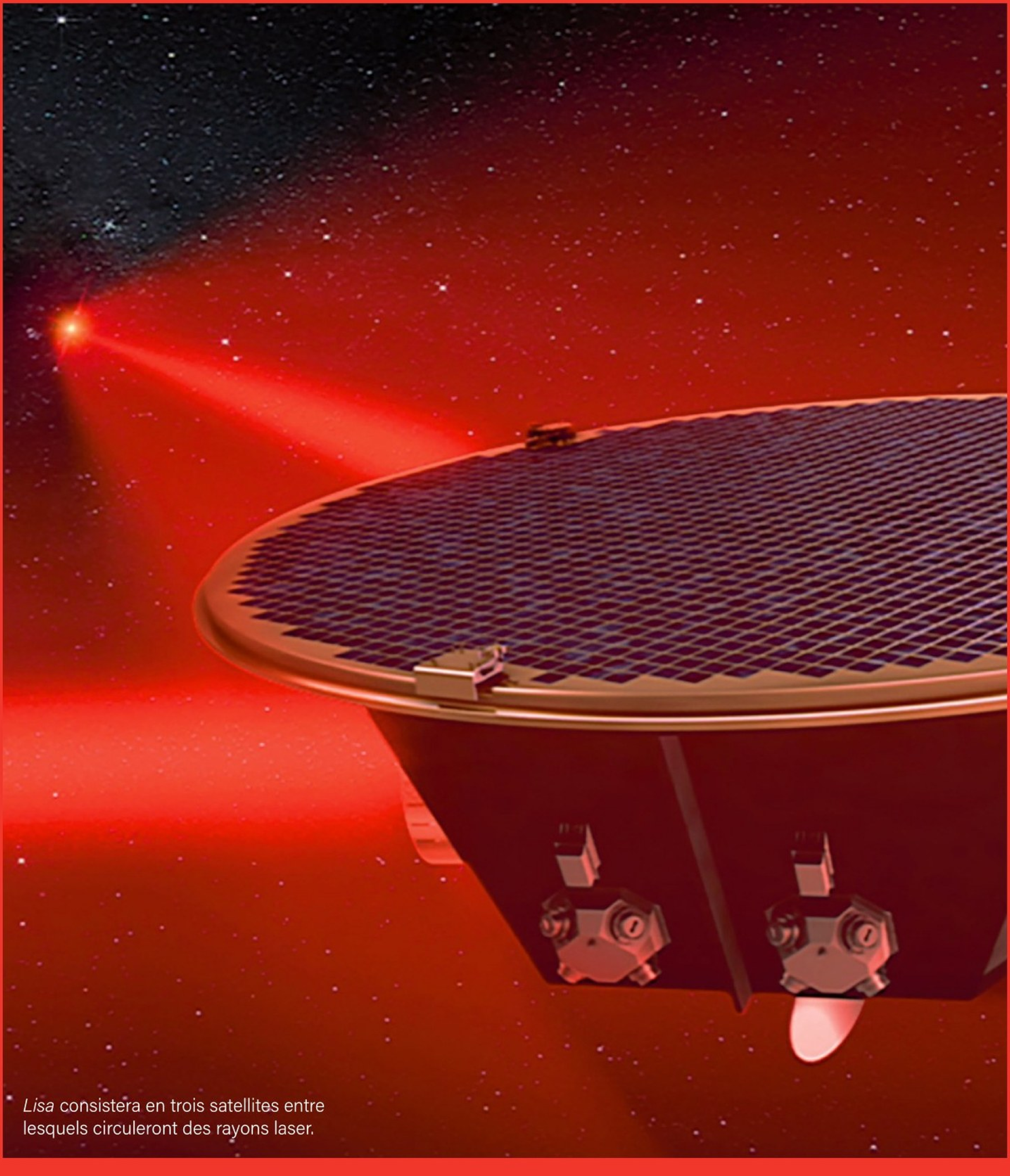
> I. Jordan *et al.*, Attosecond spectroscopy of liquid water, *Science*, 2020.

> P. M. Paul *et al.*, Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation, *Science*, 2001.

Physiciens et cosmologistes comptent plus sur l'observatoire spatial d'ondes gravitationnelles « Lisa » que sur le plus grand des collisionneurs de particules pour, entre autres, aller au-delà du modèle standard.

Vers l'infini et au-delà

Elise Cutts



Lisa consistera en trois satellites entre lesquels circuleront des rayons laser.

En bref

> Les ondes gravitationnelles primordiales sont des outils de choix pour étudier la physique à très haute énergie, inaccessible au plus grand des collisionneurs de particules.

> Ainsi, *Lisa*, l'observatoire spatial d'ondes gravitationnelles de l'ESA, prévu pour 2035, sera à même de détecter les ondulations de l'espace-temps créées au tout début de l'Univers.

> Les théoriciens espèrent ainsi dépasser la physique du « modèle standard » et tester différentes hypothèses liées à des extensions de ce dernier.

Il y a quelques années, au Japon, David Dunsky a assisté à une conférence sur les ondes gravitationnelles, ces ondulations dans le tissu de l'espace-temps créées par l'accélération d'objets massifs tels que les étoiles et les trous noirs. Rien d'étonnant, sauf que l'auditeur était spécialiste en physique des particules… cette discipline qui a pour objet la traque des lois les plus fondamentales et des composants les plus élémentaires de la matière. Pour ce faire, les outils de prédilection sont depuis longtemps les collisionneurs avec lesquels on teste les hypothèses en faisant se fracasser les unes contre les autres des particules à des énergies gigantesques. Des événements observés, les théoriciens accèdent à l'infinie petitesse de phénomènes qui ne se produisent qu'à très petite échelle, et renseignent du même coup sur les premiers instants de l'Univers, lorsqu'il était minuscule, dense et incroyablement chaud.

Mais, durant l'exposé, David Dunsky a appris que les futurs observatoires d'ondes gravitationnelles, à commencer par *Lisa* (*Laser interferometer space antenna*, soit Antenne spatiale à interférométrie laser), de l'Agence spatiale européenne (ESA), seront utiles pour étudier la physique des hautes énergies. Le dispositif serait notamment à même de repérer des « cordes cosmiques », des objets hypothétiques imaginés par Tom Kibble dans les années 1970 qui consistent en de vastes brins d'énergie concentrée nés d'une brisure spontanée de symétrie peu après la naissance de l'Univers. « J'ai voulu en savoir plus, concède le désormais cosmologiste et physicien des particules à l'université de New York, et comprendre comment les ondes gravitationnelles primordiales peuvent éclairer la physique à des énergies bien supérieures à celles que l'on peut espérer avec un collisionneur. »

Il n'est pas le seul à voir dans la piste des ondes gravitationnelles une voie d'avenir pour la physique des particules. De fait, douze années se sont écoulées depuis la dernière découverte majeure effectuée dans un collisionneur de particules, celle du boson de Higgs au Grand collisionneur de hadrons (LHC) en 2012. Cette prouesse a apporté la dernière pièce du « modèle standard », qui récapitule particules et forces connues. Depuis, bien des théories ont été proposées pour élargir ce modèle standard, mais les collisionneurs adaptés pour les tester manquent.

LE LHC DÉPASSÉ

« On imagine de construire, dans les cinquante prochaines années, des collisionneurs dix fois plus puissants que le LHC », déclare Raman Sundrum, de l'université du Maryland. Et d'ajouter : « Toutefois, pour tester les théories unifiées, qui rassembleraient les trois forces du modèle standard en une seule plus fondamentale, un collisionneur devrait être 10 milliards de fois plus puissant… » D'où l'idée de se tourner vers la nature, et plus précisément vers les échos gravitationnels des processus qui se sont déroulés peu après le Big Bang, quand l'Univers était si énergique qu'une physique dépassant le modèle standard aurait régné.

C'est l'espoir que mettent des physiciens en *Lisa*. La mission est imaginée au début des années 1980 et fut d'abord menée conjointement par l'ESA et la Nasa. Mais les Américains se sont retirés en 2011 pour des raisons budgétaires, obligeant l'Europe à faire cavalier seul. En janvier dernier, *Lisa* a finalement reçu le feu vert de l'ESA, désormais en quête de partenaires industriels. Cette annonce faisait suite au succès, en 2015 et 2016, d'une mission pilote, *Lisa Pathfinder*, qui a permis de tester les technologies clés du futur observatoire.

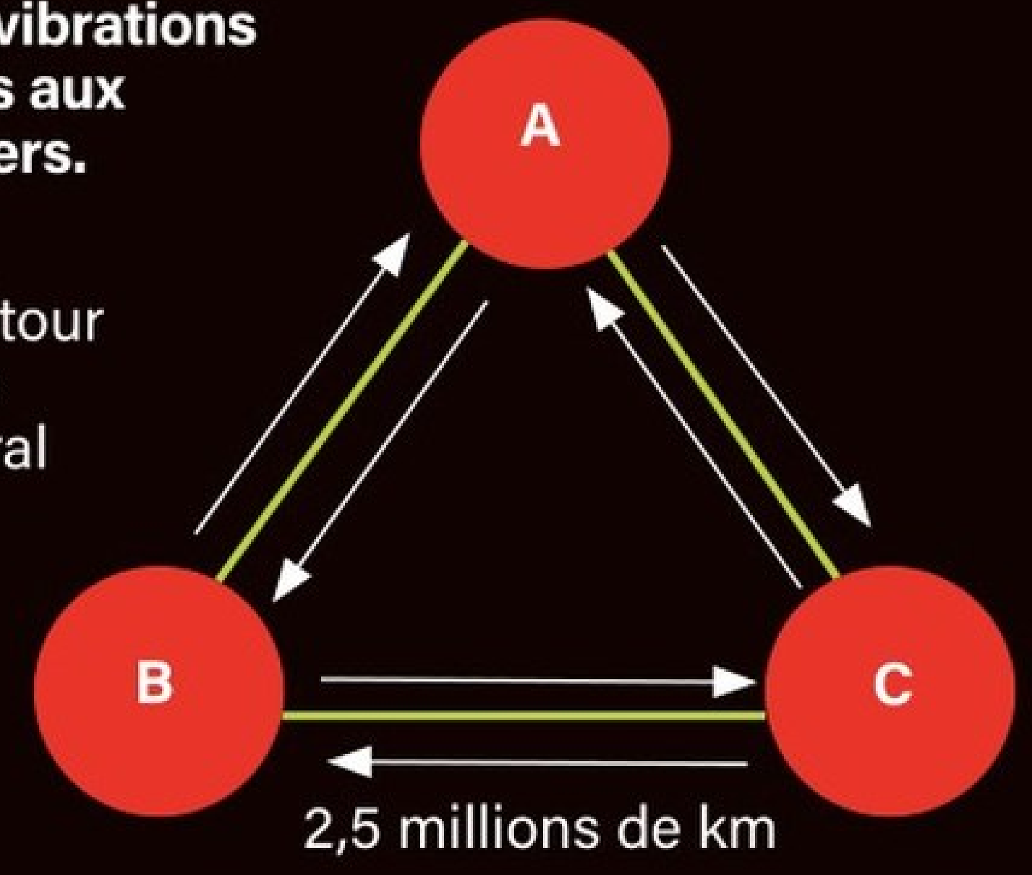
Le lancement de *Lisa* est planifié pour 2035. Pendant quatre ans, trois satellites aux sommets d'un triangle équilatéral de 2,5 millions de kilomètres de côté seront à l'affût des ondulations de l'espace-temps (*voir la figure ci-contre*). « Pour la première fois, nous aurons, peut-être, des signaux de cette époque très précoce de l'Univers », s'enthousiasme Isabel García García, de l'université de Washington. Ce serait un coup de chance cosmique extraordinaire !

Aucun télescope « classique », aussi performant soit-il, ne peut espérer pénétrer ces premiers instants, car tous ne captent que des ondes électromagnétiques. Or, durant les 380000 premières années qui ont suivi le Big Bang, l'Univers était rempli d'un plasma ionisé qui dispersait les photons, le rendant imperméable aux ondes lumineuses et jetant sur lui une sorte de voile cosmique. Les ondes gravitationnelles, qui n'ont pas ce problème, circulaient librement dans l'Univers primordial. « C'est comme si on entendait quelque chose dans le brouillard », confirme Raman Sundrum.

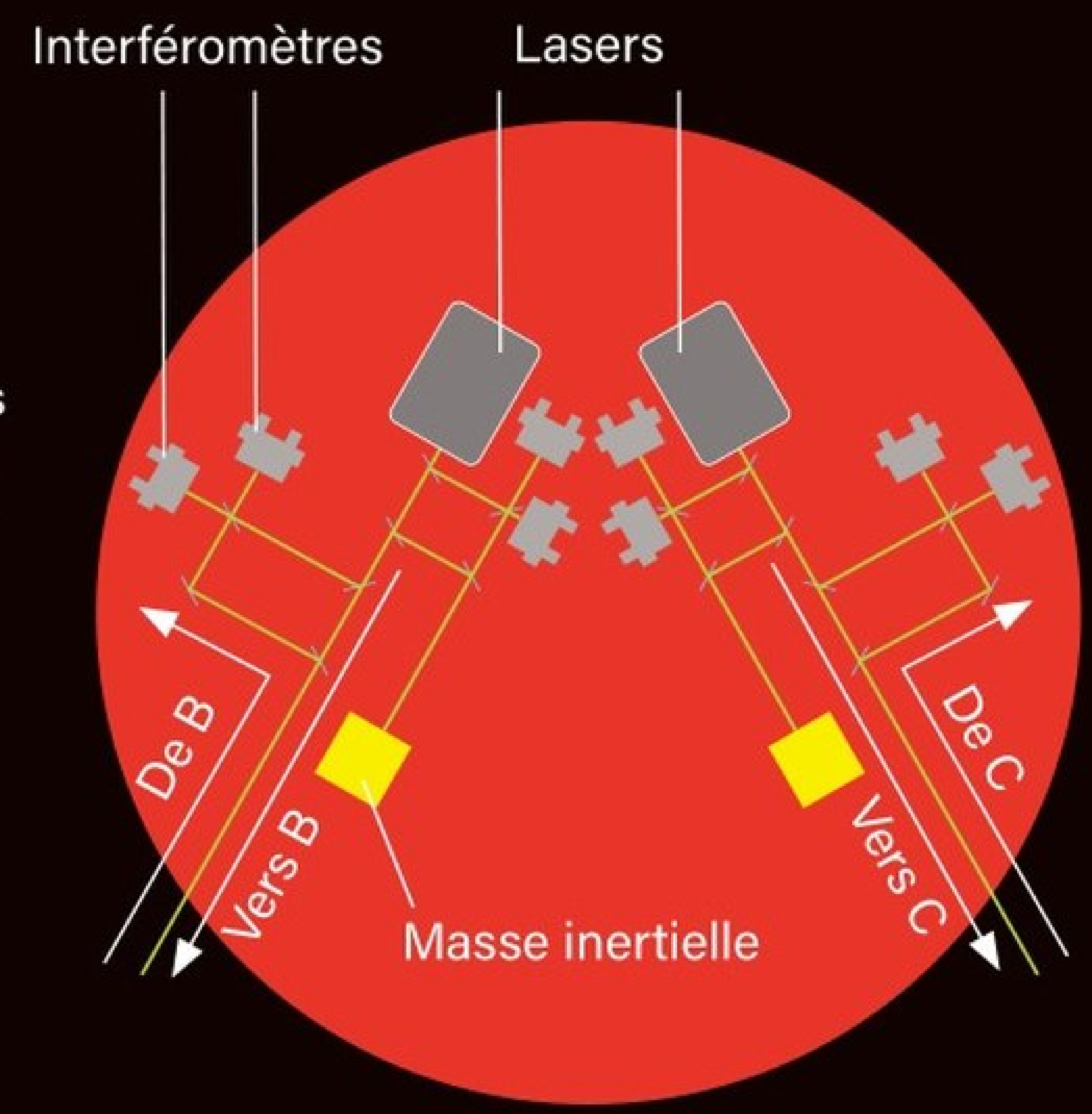
LISA, MODE D'EMPLOI

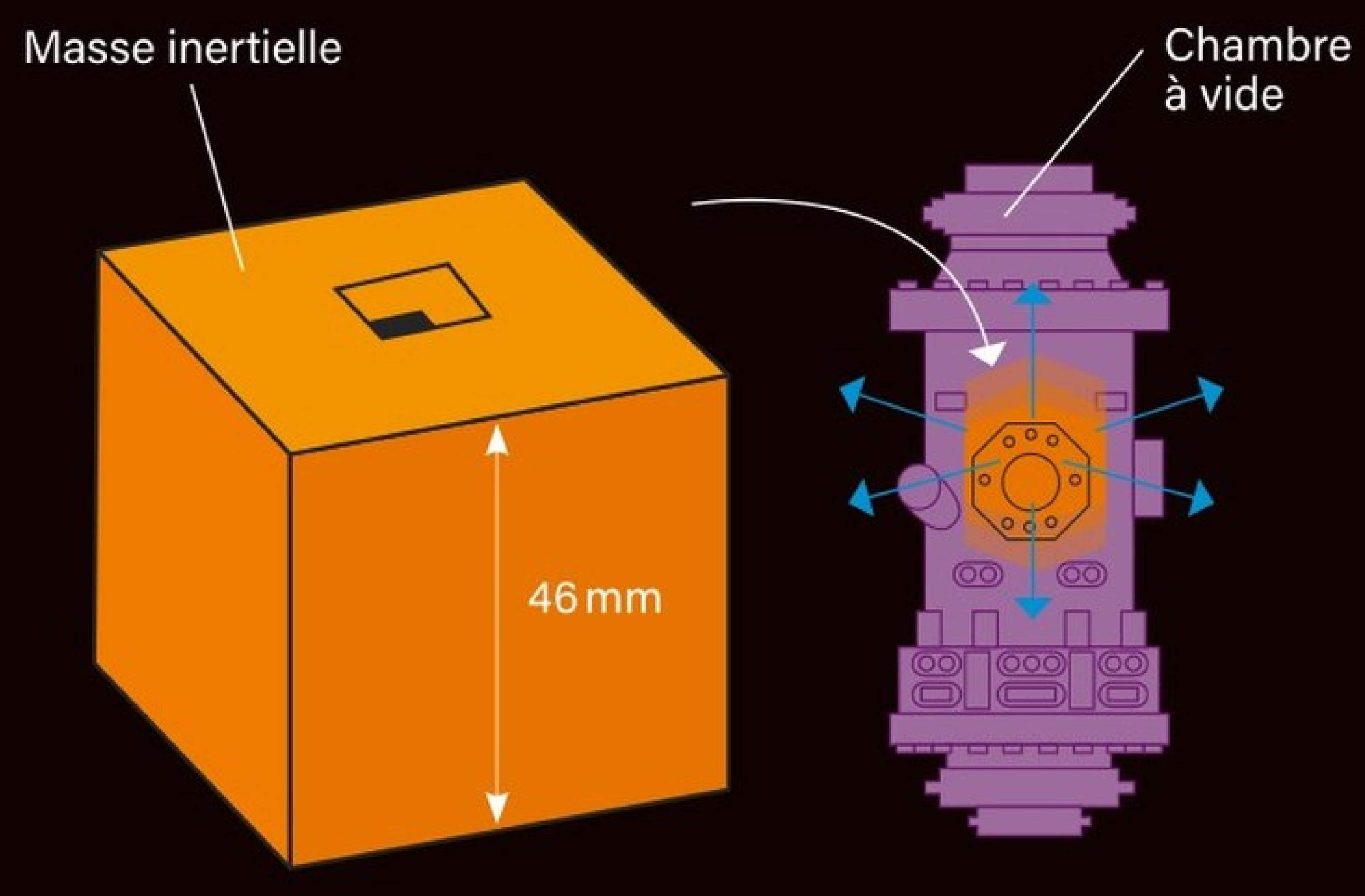
Une constellation de trois satellites traquera les plus infimes vibrations de l'espace-temps émises aux premiers temps de l'Univers.

Des lasers font l'aller et retour entre les engins, disposés selon un triangle équilatéral de 2,5 millions de kilomètres de côté.



Chaque satellite combine son propre laser avec ceux des deux autres dans des interféromètres. Ces derniers mesurent la distance entre les engins.





Les rayons lumineux rebondissent dans des cubes d'or et de platine, des masses inertielles, flottant en chute libre dans chaque satellite.

> Beaucoup ont proposé des extensions du modèle standard, mais sans preuves expérimentales possibles, ces idées restent de purs édifices intellectuels

Les observatoires existants, comme *Ligo* et *Virgo*, ne sont probablement pas sensibles à ces ondes primordiales, mais *Lisa* serait en mesure de les détecter. Les trois installations fonctionnent néanmoins sur le même principe. Lorsqu'une onde gravitationnelle passe, elle étire et contracte l'espace-temps. Cela se traduit par une légère différence dans la longueur des « bras » des dispositifs, que l'instrument peut déceler en suivant le désalignement des crêtes et des creux de faisceaux laser qui les parcourent.

Éloigné de l'environnement bruyant de la Terre, *Lisa* sera beaucoup plus sensible que ses homologues terrestres, qui ont déjà révélé les ondes gravitationnelles associées à des collisions de trous noirs et d'étoiles à neutrons. Il sera également beaucoup plus grand : chacun de ses bras sera près de 400 fois plus long que le rayon de la Terre. Malgré sa démesure, *Lisa* détectera des variations de distance qui resteront extrêmement faibles – environ 50 fois plus petits qu'un atome. « C'est assez fou, si l'on y réfléchit », avoue Nora Lützgendorf, de l'ESA.

Sensible à des longueurs d'ondes gravitationnelles de quelques centaines de milliers de kilomètres à quelques milliards, là où *Ligo* se « limitait » à une gamme entre 30 et 30 000 kilomètres, *Lisa* aura ainsi accès à d'autres types d'événements astrophysiques, notamment les fusions de trous noirs supermassifs (et non plus ceux de la taille d'une étoile). De plus, la bande de longueurs d'onde de *Lisa* correspond exactement à celles que les physiciens ont calculées pour les ondes gravitationnelles (aujourd'hui gigantesques du fait de l'expansion de l'Univers) créées durant les 10^{-17} à 10^{-10} premières secondes après le Big Bang, c'est-à-dire pratiquement au début du temps.

« On peut voir une miraculeuse coïncidence », concède Chiara Caprini, de l'université de Genève et du Cern, dans la correspondance entre « la bande de fréquence de détection de *Lisa* et cette époque particulière de l'évolution de l'Univers qui marque une frontière en physique des particules ». En effet, jusqu'à cette limite, le modèle standard (*voir la figure page 76*) explique très bien comment les dix-sept particules élémentaires qui le composent interagissent avec trois forces (électromagnétique, nucléaire forte et nucléaire faible). Mais personne ne pense que ce modèle, bien que fort de ses énormes succès, est le niveau le plus fondamental d'explication de l'Univers.

AU-DELÀ DU MODÈLE STANDARD

De fait, la théorie a ses faiblesses. Par exemple, la masse du boson de Higgs semble arbitraire et étonnamment petite par rapport aux échelles d'énergie bien plus grandes de l'Univers. En outre, le modèle standard n'offre aucune place à la matière noire ni à l'énergie sombre, ce moteur de l'accélération de l'expansion de l'Univers. Autre souci, l'antimatière et la matière se comportent exactement de la même façon sous l'effet des trois forces du modèle standard, ce qui est paradoxal puisque la matière seule prédomine. Sans compter la gravité, la quatrième force fondamentale qu'ignore le modèle standard et qui requiert sa propre théorie, la relativité générale.

« Beaucoup ont donc essayé de modifier le modèle standard et d'en proposer des extensions », explique Pierre Auclair, de l'université catholique de Louvain, en Belgique. Mais sans preuves expérimentales possibles, ces idées restent de purs édifices intellectuels. Le physicien est un théoricien, mais il « essaie autant que possible de se relier à des expériences ». C'est pourquoi il s'intéresse à *Lisa*, car selon lui les extensions du modèle standard conduisent souvent à des scénarios différents d'événements extrêmes dans l'Univers primitif.

De même, les promesses de *Lisa* en matière de physique des hautes énergies ont incité Isabel García García à repenser sa carrière: il y a quelques années, elle a commencé à étudier les ondes gravitationnelles et la façon dont la physique au-delà du modèle standard laisserait des empreintes détectables par *Lisa*.

DES MURS DE BULLES

L'année dernière, avec ses collègues, elle a publié des travaux sur la signature des ondes gravitationnelles des « murs de bulles ». De quoi s'agit-il? À mesure de son expansion, l'Univers s'est refroidi et a connu, tout comme l'eau qui gèle, des transitions de phase, notamment celle qui a vu une force « électrofaible » unique se scinder en deux forces distinctes, la force électromagnétique et la force faible. Selon le modèle standard, cet événement se déroula en douceur. Mais selon certaines approches alternatives, ce fut plus violent et l'Univers se serait retrouvé constitué de bulles, des « poches d'espace », séparées par des barrières énergétiques.

Explication. Les champs quantiques qui imprègnent l'Univers ont des états d'énergie minimale, ou « états fondamentaux ». Lors du refroidissement, de nouveaux états fondamentaux à plus faible énergie se sont développés, mais certains champs ont été empêchés de les atteindre immédiatement, et ont été piégés dans des minima locaux, stables en apparence seulement. Cependant, un petit morceau d'Univers rejoignait parfois son véritable état fondamental par un tunnel quantique, créant ainsi une bulle de vide en expansion rapide, dont l'énergie était inférieure à celle de l'Univers extérieur.

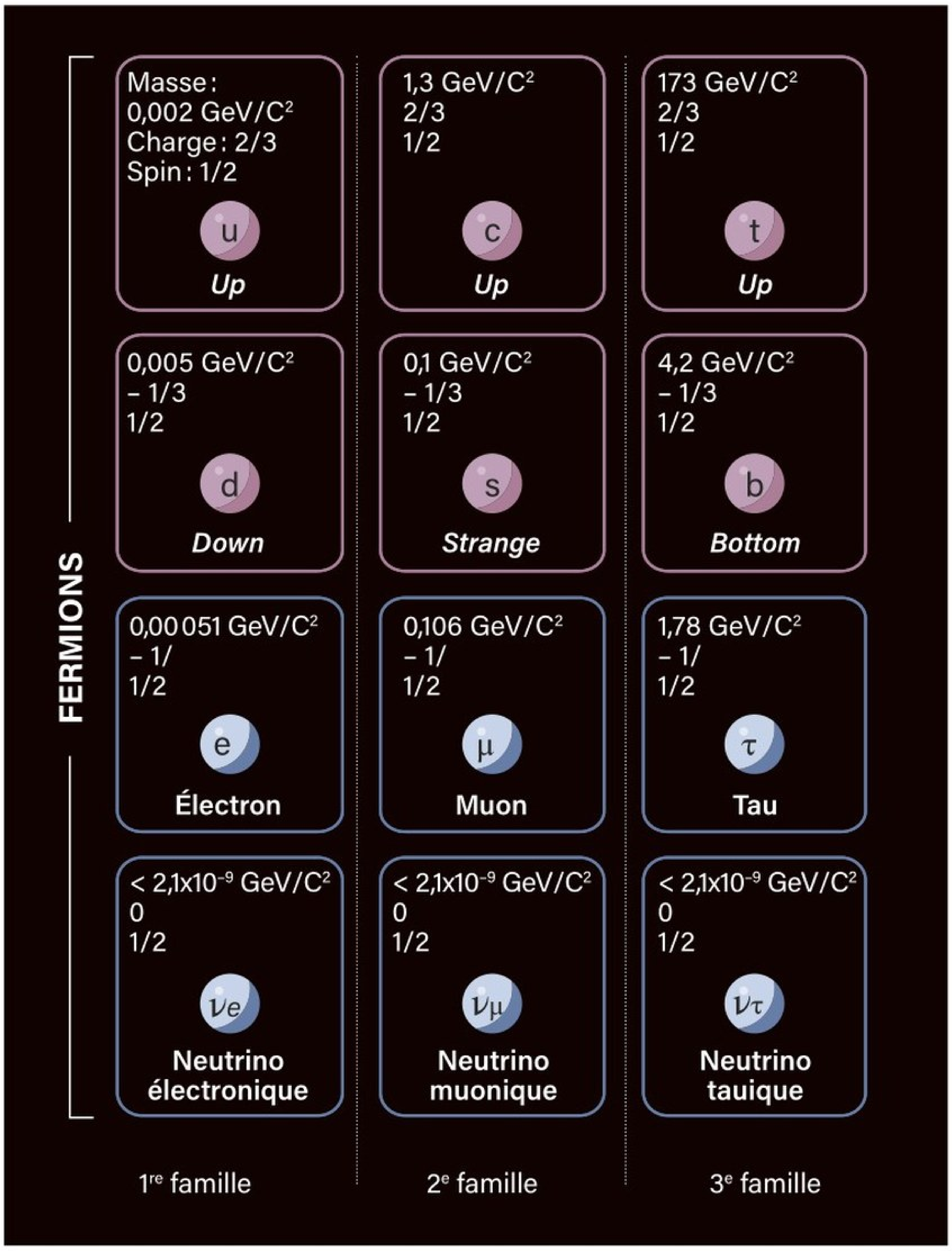
« Ces bulles, très énergétiques, se déplacent à une vitesse proche de celle de la lumière en raison de la différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur, explique David Dunsky. Lorsqu'elles entrent en collision, on assiste à un choc violent entre ces deux objets très relativistes, un peu comme les trous noirs qui émettent de fortes ondes gravitationnelles lors de leur coalescence. »

De façon plus spéculative, les transitions de phase dans l'Univers primordial ont également pu créer d'énormes cordes et feuilles d'énergie dense. De telles structures, respectivement nommées

Les collisions d'hypothétiques bulles cosmiques ont pu émettre de fortes ondes gravitationnelles «cordes cosmiques» et «murs de domaine», apparaîtraient quand l'état fondamental d'un champ quantique change et devient multiple, chacun étant tout aussi valable qu'un autre. Il peut en résulter des défauts le long des frontières entre les poches de l'Univers qui sont tombées dans des états fondamentaux différents.

Dans certaines roches constituées de domaines caractérisés par leur propre orientation du champ magnétique, celui des régions frontalières présente une distorsion importante pour passer d'une direction à l'autre. De même, les champs quantiques dans les différentes régions de l'Univers «sont contraints aux frontières» détaille David Dunsky, «ce qui se traduit en ces zones par de grandes densités d'énergie : ce sont les murs de domaine et les cordes cosmiques».

S'ils existent, ces derniers se sont vraisemblablement étendus pour couvrir la quasi-totalité de l'Univers à mesure de son expansion, et créent des ondes gravitationnelles lorsqu'ils se déforment. Mais les échelles d'énergie de ces ondes ont été fixées pour l'essentiel lors de la formation des objets dans les premiers instants



Élaboré dans les années 1960 et 1970, le modèle standard décrit mathématiquement les composants élémentaires de la matière *(ci-contre)* et les interactions *(médiées par des bosons, des gluons et des photons)* qui les régissent.

de l'Univers et sont, peut-être, dans le domaine de sensibilité de *Lisa*.

Les ondes gravitationnelles du tout début de l'Univers ne nous parviennent pas sous la forme bien nette de celles qui sont associées aux collisions de trous noirs. Parce qu'ils se sont produits très tôt dans le temps, ces signaux se sont depuis étirés dans tout l'espace, se sont répercutés dans toutes les directions, de tous les points du cosmos, en même temps. Il s'agit plus d'un « bourdonnement gravitationnel » de fond, mais continu. « Un bruit pour le commun des mortels, concède Raman Sundrum, mais qui recèle un code caché. »

MICROPHONE OU TÉLESCOPE ?

Un indice important sera le spectre du signal, c'est-à-dire son intensité à différentes fréquences, car les ondes gravitationnelles libérées lors de transitions de phase ou produites par des cordes cosmiques ou des murs de domaine seraient plus fortes à des fréquences spécifiques. Pierre Auclair a travaillé sur le calcul des signatures spectrales des cordes cosmiques, qui émettent des ondes gravitationnelles à des longueurs d'onde caractéristiques lorsque leurs nœuds et leurs boucles évoluent. Quant à Chiara Caprini, elle étudie la possible marque des transitions de phase violentes sur le bruit de fond des ondes gravitationnelles. Toutefois, selon elle, ce bruit présente pratiquement les mêmes caractéristiques que celui de l'instrument. Dès lors, comment les distinguer?

Une autre approche, suivie par Raman Sundrum et ses collègues depuis 2018, consiste à essayer de cartographier l'intensité globale de l'arrière-plan dans le ciel. L'objectif est de traquer les anisotropies, c'est-à-dire des zones qui sont juste un tout petit peu plus bruyantes ou plus silencieuses que la moyenne.

Lisa ressemble davantage à un microphone qu'à un télescope. Au lieu de scruter une direction particulière, il écoutera tout le ciel à la fois. L'écho des ondes gravitationnelles primordiales sera perdu au milieu de celles des trous noirs en fusion, des étoiles à neutrons et des nombreuses paires d'étoiles naines blanches au sein de notre galaxie. Distinguer le signal des premières reviendra à repérer le son d'une brise printanière sur un chantier de construction!

Raman Sundrum choisit toutefois de garder espoir: « Ce sera difficile pour les expérimentateurs. Pour les théoriciens aussi. Mais avec un peu de chance… »

— L'autrice —

> Elise Cutts,
diplômée de l'institut de technologie du Massachussetts, est journaliste scientifique indépendante, installée à Graz, en Autriche.

Cet article est une traduction de « Hopes of Big Bang discoveries ride on a future spacecraft », paru sur le site Quantamagazine.org le 17 avril 2024.

— À lire —

> A. Bodas *et al.*, Large primordial fluctuations in gravitational waves from phase transitions, *J. High Energ. Phys.*, 2023.

> I. García García *et al.*, Reflections on bubble walls, *J. High Energ. Phys.*, 2023.

> M. Geller *et al.*, Primordial anisotropies in the gravitational wave background from cosmological phase transitions, *Phys. Rev. Lett.*, 2018.

> S. Bailly, La détection des ondes gravitationnelles: une nouvelle fenêtre sur l'Univers, *Pour la Science*, n° 462, avril 2016.

COSMOLOGIE
L'inatteignable

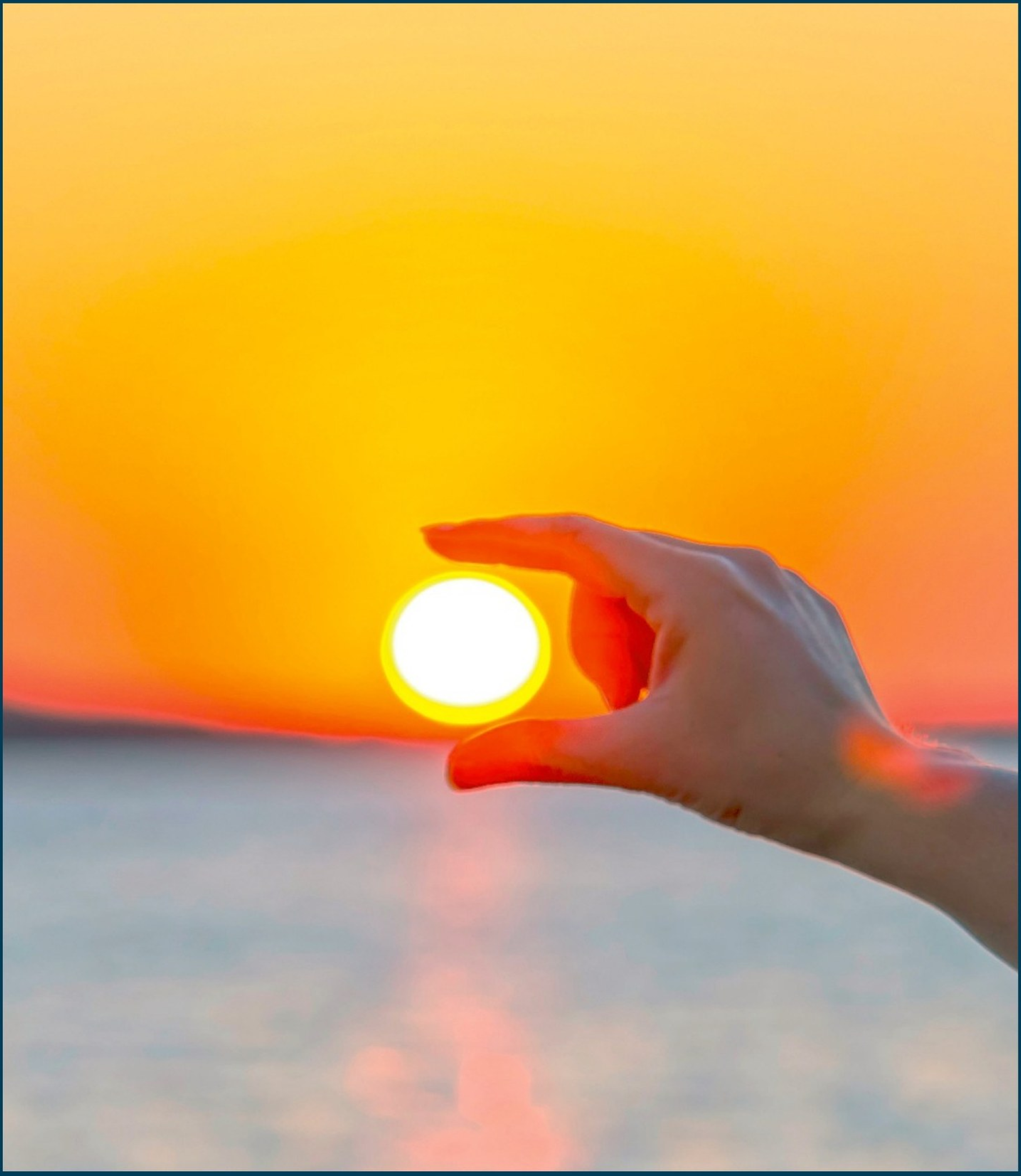
L'infini est le terrain de jeu des astrophysiciens et des cosmologistes, notamment quand ils se prennent à sonder l'Univers lointain aussi bien dans l'espace que dans le temps. Ils ont désormais à leur disposition des outils remarquables, par exemple le télescope spatial *James-Webb*. Cependant, ils sont désarmés lorsque l'infini se manifeste dans des singularités, ces points de densité infinie terrés au cœur des trous noirs et du Big Bang. Ce défi à l'entendement humain restera-t-il insurmontable ?

03

Les dimensions gigantesques mises en jeu dans le cosmos dépassent les limites de l'entendement humain. Est-ce une raison pour renoncer à le comprendre ?

Vertige de l'infini

Phil Plait



En bref

> Le Système solaire, les galaxies et l'Univers s'étendent sur des échelles de distances faramineuses.

> Pour les étudier et les « circonscrire », les astronomes ont imaginé des unités adaptées, comme l'unité astronomique ou l'année-lumière.

> Si les dimensions correspondantes restent au-delà de l'imagination, elles aident toutefois à comprendre ce qui s'apparente à l'infini.

L'espace est grand, très grand, et c'est pourquoi nous l'appelons «espace». Mais qu'entend-on par «grand»? La notion est relative. Pour un astronome, quelque chose de «proche» peut se situer à quelques millions de kilomètres (s'il s'agit d'astéroïdes), à quelques dizaines de milliers de milliards (pour les étoiles) ou à quelques dizaines de milliards de milliards (pour les galaxies).

Dans tous les cas, l'objet est très loin. Les astronomes se facilitent la tâche en ayant recours à de grandes unités pour mesurer les distances, notamment l'année-lumière, qui correspond à la distance parcourue en un an par la lumière, la chose la plus rapide de l'Univers. Une année-lumière représente environ 10000 milliards de kilomètres. Mais tout cela reste assez abstrait pour le lecteur lambda qui lit des articles sur des exoplanètes «proches» ou des galaxies «lointaines».

DE LA TERRE À LA LUNE

Pour mieux appréhender ces échelles, il convient de procéder par étapes. La Lune est l'objet astronomique le plus proche de la Terre dans tout l'Univers. En moyenne, sur sa trajectoire orbitale, elle se trouve à environ 380000 kilomètres de notre planète. C'est déjà beaucoup. Près de trente Terres (avec un diamètre de près de 13000 kilomètres) pourraient se tenir alignées sur cette distance ! Et les astronautes de la mission *Apollo*, qui voyageaient plus vite que n'importe quel autre être humain avant eux, ont mis trois jours pour atteindre le voisinage de la Lune.

Le Soleil est quelque 400 fois plus éloigné de nous que la Lune : 150 millions de kilomètres. Quelle est cette distance? En imaginant construire une route vers l'étoile, il faudrait environ cent trente ans pour s'y rendre à la vitesse autorisée sur autoroute. Mieux vaut prévoir un pique-nique… Un avion commercial, volant à 900 kilomètres par heure, serait plus efficace et ne mettrait «que» dix-neuf ans.

Quand les astronomes étudient et «manipulent» des objets du Système solaire, il est pratique d'utiliser la distance Terre-Soleil comme une sorte de mètre cosmique : c'est l'unité astronomique, ou UA, et elle est définie par l'Union astronomique internationale (le gardien de tous les nombres, noms et autres conventions astronomiques) comme étant exactement 149597870,7 kilomètres. Mercure est située à environ 0,4 UA du Soleil et Vénus à environ 0,7. Leur distance par rapport à la Terre dépend de la position de toutes les planètes sur leur orbite et augmente lorsque les planètes respectives se trouvent de part et d'autre du Soleil. Ainsi, Vénus est à une distance comprise entre 0,3 et 1,7 UA de la Terre.

Neptune, la planète la plus éloignée du soleil, est située à 4,5 milliards de kilomètres, soit 30 UA. Pluton se trouve à peu près à la même distance, et elle est très éloignée de nous. La sonde *New Horizons* a mis plus de neuf ans pour s'y rendre, malgré une vitesse de plus de 50000 kilomètres par heure.

Ces chiffres sont encore difficiles à comprendre. Lorsque je me rendais dans les écoles

Comment rendre compte de l'échelle d'un amas de galaxies ?

pour faire des démonstrations d'astronomie aux enfants, l'un de mes accessoires préférés était la corde du Système solaire : un gros fil de 15 mètres de longueur qui représentait la distance moyenne entre le Soleil et Pluton. Les élèves se voyaient confier des photos de planètes et devaient se placer correctement sur la corde, à la bonne distance du Soleil. Les quatre planètes intérieures étaient si proches les unes des autres que les enfants étaient pratiquement les uns sur les autres, mais les planètes extérieures étaient très éloignées : nous devions soit trouver un long couloir, soit aller dehors pour la démonstration.

De cette leçon, j'ai tiré une feuille de calcul permettant à quiconque de calculer le Système solaire à la bonne échelle. Il est basé sur la taille de notre étoile, vous pouvez donc passer de la valeur par défaut de 1 mètre à la taille d'un grain de raisin, par exemple, et découvrir la taille et l'éloignement des planètes. Cela ouvre les yeux.

Une autre façon de faire, efficace, consiste à considérer la distance entre objets en fonction de la taille de l'un d'eux. Par exemple, le Soleil mesure 1,4 million de kilomètres de diamètre. Le système stellaire le plus proche du Soleil, Alpha du Centaure, qui se trouve à 41 000 milliards de kilomètres, est donc éloigné d'environ 30 millions de « Soleils ». Les étoiles sont très petites par rapport à la distance qui les sépare, et c'est l'une des raisons pour lesquelles il n'y a pas lieu de s'inquiéter qu'une d'entre elles entre un jour en collision avec le Soleil !

BONNE ANNÉE-LUMIÈRE À TOUS !

C'est également la raison pour laquelle nous utilisons les années-lumière pour mesurer ces distances : c'est une unité plus acceptable pour les voyages interstellaires. Alpha du Centaure se trouve à 4,3 années-lumière du Système solaire. La nébuleuse d'Orion est située à environ 1 250 années-lumière. Le centre de la Voie lactée est à 26 000 années-lumière, et la Galaxie elle-même est un disque plat de quelque 120 000 années-lumière de diamètre.

La grande galaxie la plus proche de la Voie lactée est Andromède, éloignée de 2,5 millions d'années-lumière. Ce chiffre est intéressant, car il ne correspond qu'à vingt fois la taille de la Voie lactée.

À l'intérieur des galaxies, les étoiles n'entrent que très rarement en collision, car elles sont très éloignées les unes des autres par rapport à leur taille. En revanche, les galaxies, dont la plupart ont des dimensions similaires, sont plus serrées dans l'espace, et il n'est donc pas surprenant que les collisions entre ces formations soient non seulement fréquentes, mais même monnaie courante. La Voie lactée a atteint sa taille gigantesque en entrant en collision et en fusionnant avec

> En raison de son expansion, on estime que l'Univers observable s'étend sur environ 90 milliards d'années-lumière !

d'autres galaxies et, en fait, toutes les grandes galaxies résultent d'un processus semblable.

La Voie lactée et Andromède sont les deux plus grandes galaxies d'une assemblée d'environ une centaine que nous nommons le « groupe local ». Ce dernier s'étend sur environ 10 millions d'années-lumière, mais il existe des groupes encore plus grands et plus peuplés, les « amas de galaxies ». Le plus proche est celui de la Vierge, qui compte plus de 1000 galaxies et se situe à environ 50 millions d'années-lumière. Il existe également des groupes plus petits et moins éloignés.

Les amas de galaxies sont maintenus ensemble par la gravité de leurs membres et peuvent atteindre des dizaines de millions d'années-lumière de longueur. Ce n'est pas tout… Les amas se regroupent parfois dans le cosmos pour former des amas d'amas, des « superamas » ! L'amas de la Vierge et le groupe local font ainsi partie du superamas de Laniakea, qui pourrait contenir plus de 100000 galaxies et s'étendrait sur 500 millions d'années-lumière.

UN SECRET DÉVOILÉ

Allons jusqu'au bout. L'Univers a 13,8 milliards d'années. On peut donc imaginer que les objets les plus reculés que nous puissions voir se trouvent à peu près à cette distance en années-lumière. Ce n'est pas aussi simple, car le cosmos est en expansion et celle-ci s'accélère de surcroît. Pendant le temps qu'il a fallu à la lumière des objets lointains pour nous parvenir, ce mouvement les a éloignés de nous. En conséquence, on estime que l'Univers observable s'étend sur environ 90 milliards d'années-lumière !

Après ce voyage aux confins du cosmos, il importe de dévoiler un secret : nous, les astronomes, et même les plus aguerris, sommes incapables de saisir vraiment ces échelles. Nous les manipulons, nous travaillons avec, mais nos cerveaux de primates ont encore du mal à comprendre ne serait-ce que la distance qui nous sépare de la Lune. Or l'Univers est 2 millions de milliards de fois plus grand.

Alors, oui, l'espace est grand et nous sommes très, très petits. Ces échelles semblent écrasantes. Mais bien que le cosmos soit immense, au-delà de ce que nous pouvons saisir, en utilisant les mathématiques, la physique et notre cerveau, nous pouvons en fait le comprendre. Et c'est ce qui fait de nous des êtres assez grands.

— L'auteur —

> Phil Plait
est astronome, diplômé de l'université du Michigan, et vulgarisateur scientifique, installé près de Charlottesville, en Virginie.

Cet article est une traduction de « The scale of space will break your brain », paru dans *Scientific American* en juin 2024.

— À lire —

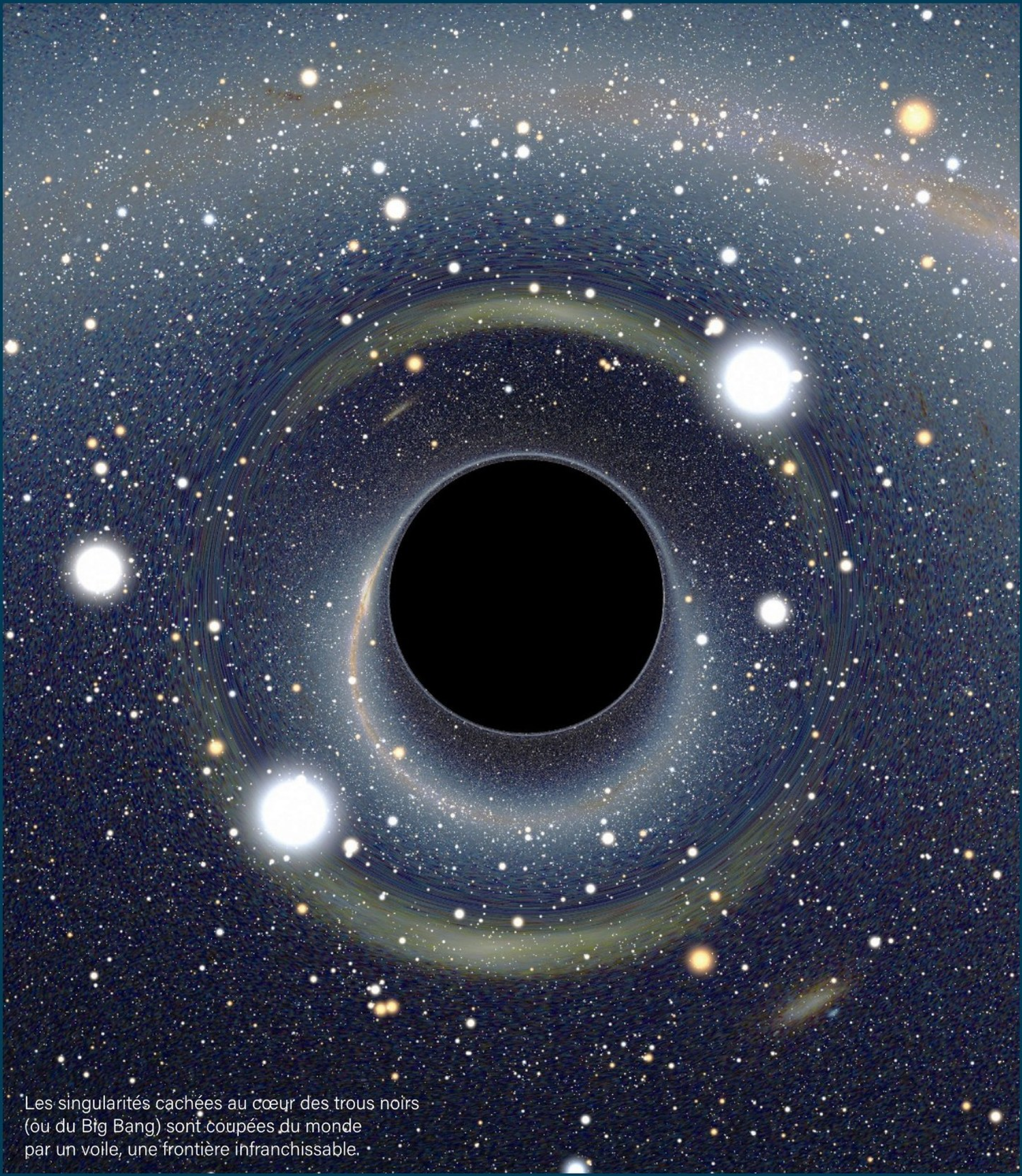
> P. Plait, *Under Alien Skies*, Norton, 2023.

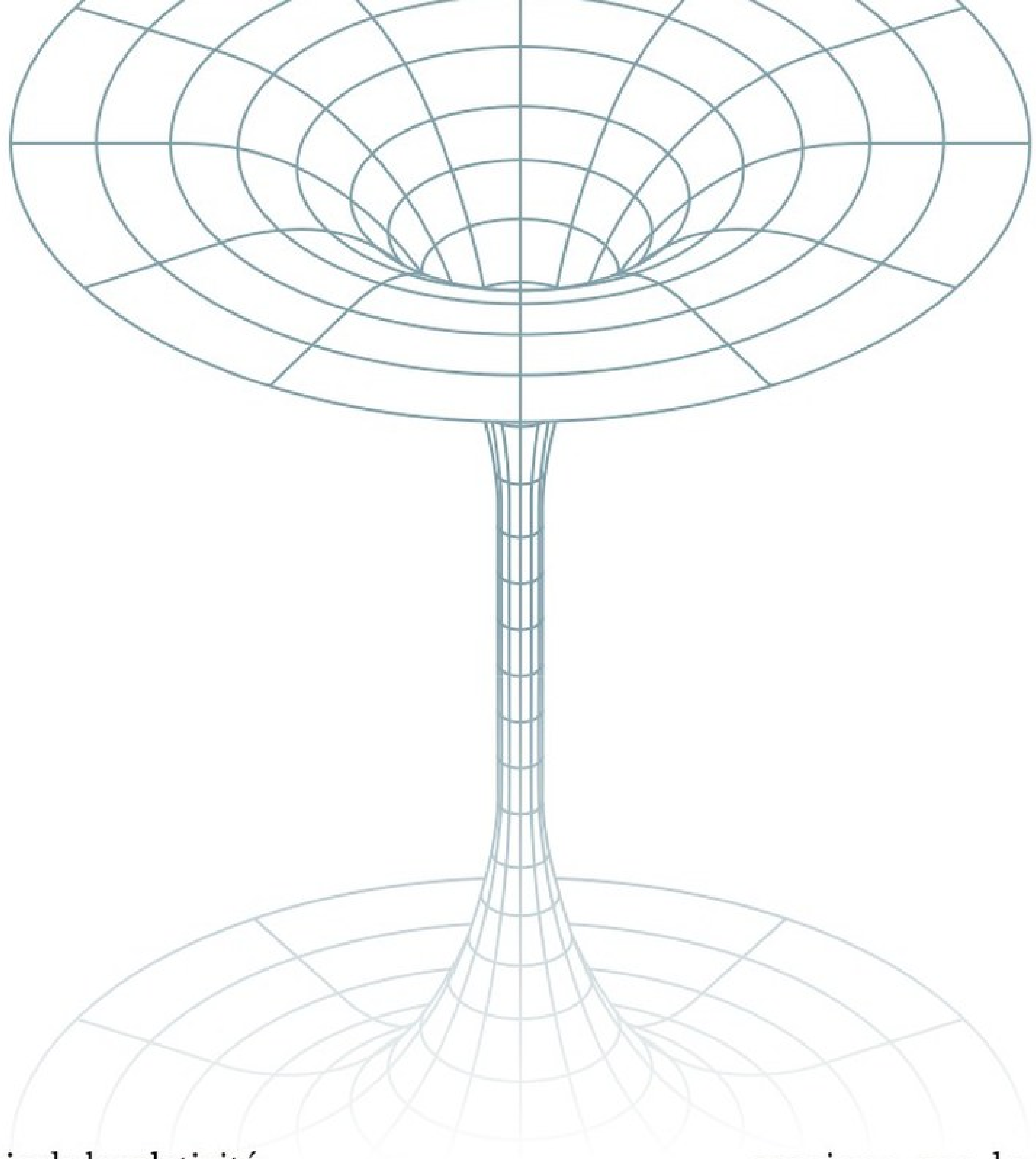
> P. Plait, *Bad Astronomy: Misconceptions and Misuses Revealed, from Astrology to the Moon Landing "Hoax"*, John Wiley & Sons, 2002.

La relativité générale prédit l'existence de points de densité infinie où les lois de la physique s'effondrent: les singularités. Elles sont masquées par un voile de chaos que l'on espère un jour traverser…

Singularités
L'infini censuré

Jean-Michel Alimi et Jérôme Perez


Les singularités cachées au cœur des trous noirs (ou du Big Bang) sont coupées du monde par un voile, une frontière infranchissable.



En bref

> Une singularité est un point où la densité, la pression, la température… sont infinies : les lois de la physique y sont inopérantes.

> Elles sont nichées au cœur des trous noirs et à l'instant zéro de l'Univers, le Big Bang.

> À l'approche de cette singularité initiale, la dynamique de l'Univers était chaotique.

> Pour l'étudier, on doit tenir compte de la matière noire, de l'énergie sombre, mais aussi de substances exotiques, tel un fluide hyperrigide, voire de dimensions supplémentaires.

Au début du XXe siècle, la théorie de la relativité générale, proposée par Albert Einstein, mit fin à la vision selon laquelle l'espace et le temps sont absolus, rigides et donnés une fois pour toutes. Ils perdaient alors leur statut d'objets de la physique, en revanche, ils devenaient indissolublement liés entre eux et avec la matière. Les mouvements des corps s'interprètent comme des glissements le long des déformations géométriques de l'espace-temps dues à la présence de corps massifs. L'Univers devient alors un objet physique comme les autres, capable de se déformer, de s'effondrer ou de s'étendre selon la quantité d'énergie qu'il contient.

Ainsi, la relativité générale est fondamentalement une théorie cosmologique grâce à laquelle nous construisons des modèles de l'Univers pour tenter de prédire son évolution et de reconstruire son histoire. Un de ses aspects les plus fascinants est qu'elle a révélé un infini particulièrement mystérieux : la singularité initiale à l'origine de l'Univers, où la densité de matière et la température deviennent infinies, et où les lois de la physique élaborées par Albert Einstein ne s'appliquent plus. Les phénomènes inconnus qui se déroulent peut-être à la singularité ne devraient-ils pas affecter l'Univers contemporain ? On a montré que la relativité générale nous isole de cet « instant zéro » en le repoussant, en quelque sorte, à l'infini : si nous remontions le temps, nous verrions l'Univers passer par une série infinie d'états distincts impossibles à prédire avant d'atteindre le Big Bang.

Avant de poursuivre, voyons comment les cosmologistes parviennent à décrire l'évolution du cosmos de façon univoque. La relativité nous enseigne que le temps est relatif : les durées mesurées dépendent de l'état de mouvement de l'observateur. Dès lors, puisque tous les corps de l'Univers sont en mouvement, quel sens peut avoir la datation des événements constituant l'histoire cosmique ?

LA CENSURE COSMIQUE

Il se trouve que, dans le cas particulier où l'on suppose que l'Univers est homogène (identique en chacun de ses points) et isotrope (il a le même aspect dans toutes les directions), on peut définir de façon rigoureuse un « temps cosmique » commun à chacun de ses points. Par conséquent, il devient possible d'étudier l'évolution de l'espace au cours du temps.

La relativité générale prédit que cet espace est en expansion, ce qui a été confirmé par les observations. Cela ne signifie pas que l'Univers « gonfle » dans un espace plus grand qui le contiendrait, mais que la distance qui sépare deux points quelconques est multipliée par un « facteur d'échelle » $R(t)$ qui croît au cours du temps. Les équations d'Einstein relient l'évolution de $R(t)$ à la matière et à l'énergie contenues dans l'Univers. D'après ces équations, l'accélération de $R(t)$, c'est-à-dire la dérivée de sa dérivée, est négative tant que le contenu de l'Univers satisfait une condition mathématique particulière signifiant que l'énergie reste toujours positive. Par ailleurs, puisqu'on observe une fuite des galaxies, on en déduit que l'espace est en expansion et que la vitesse de $R(t)$ – sa dérivée – est

La relativité générale nous isole de la singularité initiale en la repoussant à l'infini

positive. Ces deux propriétés établissent que la courbe décrivant l'évolution du facteur d'échelle au cours du temps est une courbe concave et, par conséquent, qu'elle s'annule nécessairement à une date finie dans le passé que l'on choisit comme origine des temps.

Ainsi, avec un Univers homogène et isotrope, l'expansion cosmique ne dure que depuis un temps fini et qu'à l'instant fixé comme zéro – le Big Bang –, toute la matière et l'énergie étaient concentrées en un point où les notions de durée et d'étendue n'existaient pas, et où la température, la densité et la pression étaient infinies. La prédiction d'un tel point – la singularité –, où toutes les lois de la relativité générale qui l'on prédit deviennent obsolètes, semble constituer un aveu d'échec de cette théorie elle-même.

Puisque l'existence de la singularité initiale semble découler des hypothèses d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers, on peut se demander si, en y renonçant, la singularité initiale disparaît. À ce stade, il est important de noter que ces hypothèses ne sont pas de simples artifices introduits par les théoriciens en vue de faciliter leurs calculs.

Tout d'abord, le « principe cosmologique » qui postule que nous n'occupons pas une place privilégiée dans l'Univers équivaut à dire que le cosmos est homogène et isotrope. De plus, les observations, notamment les travaux de cartographie de l'Univers à grande échelle, ont montré que ces hypothèses sont une très bonne approximation de la réalité.

Le fond diffus cosmologique ne varie pas de plus de 1 partie pour 100000 d'un point à l'autre

QU'EST-CE QU'UNE SINGULARITÉ ?

En mathématiques, une fonction est dite « singulière » en un point (nommé « singularité ») de son domaine de définition quand elle n'est pas analytique en ce point, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut pas la développer en série entière. De façon générale, dans un contexte purement mathématique, une singularité est un point pour lequel une équation, une surface ou une fonction perd ses propriétés essentielles ou bien dégénère.

En physique, des singularités qui apparaissent dans les équations ont diverses significations. Certaines résultent de la discontinuité d'une valeur physique (la densité, par exemple). Ces singularités sont dites « factices » en ce sens qu'elles ne sont dues qu'à la pauvreté du modèle utilisé pour représenter le système physique étudié. Il est des singularités plus fondamentales qui ne peuvent être comprises qu'à l'aide d'une modification radicale du contexte théorique utilisé.

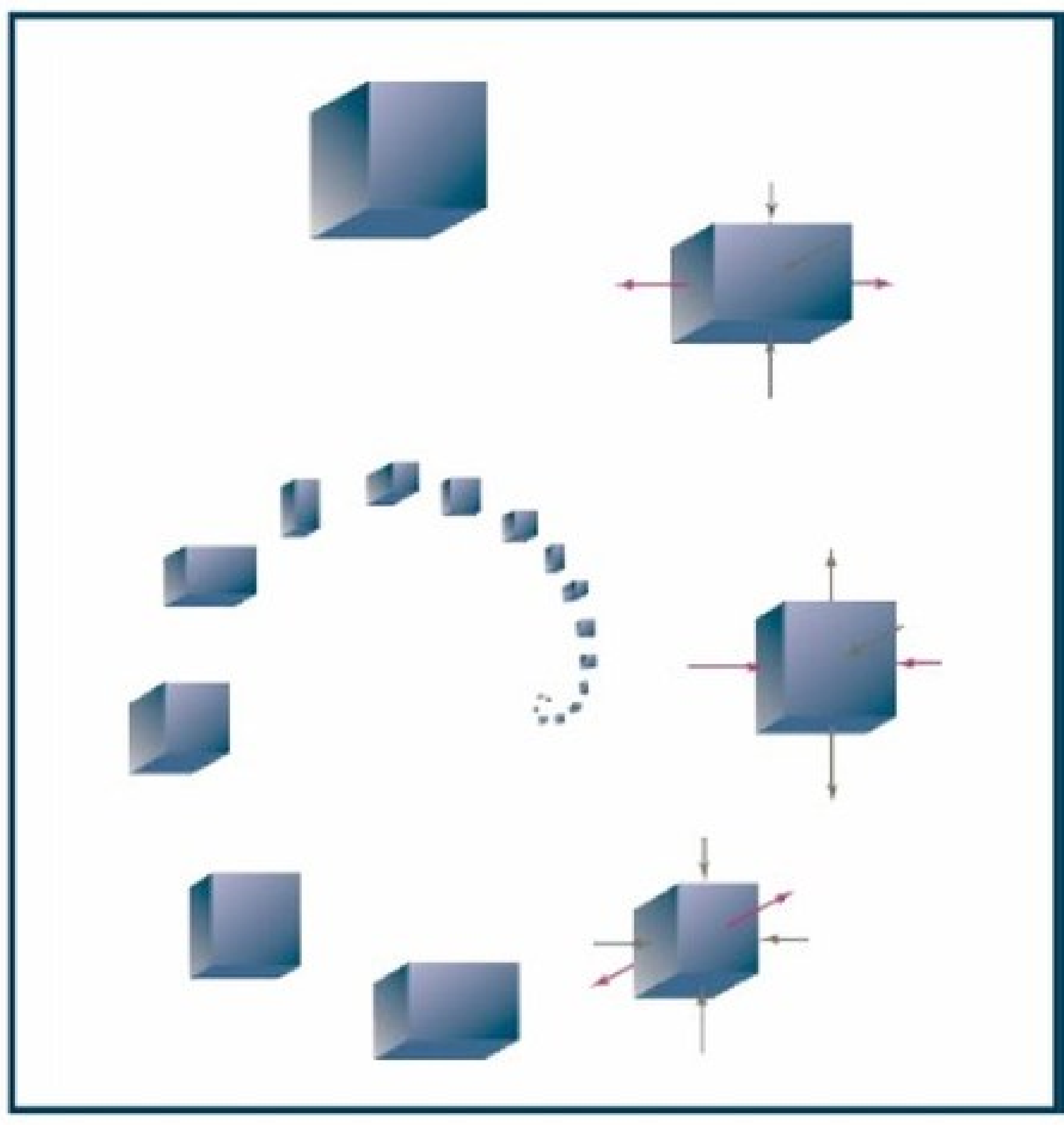
Le champ gravitationnel présente deux singularités déroutantes. La première a un statut intermédiaire. Il s'agit de la singularité de Schwarzschild : lorsqu'on décrit la géométrie de l'espace-temps autour d'un trou noir, il apparaît une surface sphérique (l'horizon) sur laquelle les durées semblent tendre vers l'infini.

L'autre type de singularité qu'on trouve au cœur d'un trou noir ou à l'origine de l'Univers est plus fondamental : il s'agit de points où les densités de matière et d'énergie deviennent infinies. Après avoir tenté de montrer que ces points étaient des singularités dépourvues de sens physique, les physiciens ont dû se rendre à l'évidence : ces points correspondent à quelque chose de réel, même si la description des phénomènes qui s'y rapportent nécessite une théorie quantique de la gravitation.

de la voûte céleste. Nous en déduisons que l'Univers est homogène et isotrope à grande échelle, c'est-à-dire sur des distances supérieures à 300 millions d'années-lumière environ. Toutefois, ces résultats n'imposent pas que le cosmos ait été aussi régulier aux plus petites échelles et à chaque instant.

Ainsi, si les modèles d'Univers homogène et isotrope sont des approximations tout à fait valables pour décrire le cosmos durant l'essentiel de son histoire, il n'est pas impossible que d'importantes anisotropies aient existé lorsque l'Univers primordial était encore très petit, avant que des mécanismes encore discutés, par exemple l'inflation, ne lui aient conféré les propriétés régulières que nous lui connaissons.

Que devient la singularité initiale quand nous assouplissons nos hypothèses? Dès 1933, l'astrophysicien belge Georges Lemaître montra que la singularité initiale persiste à apparaître dans un modèle particulier d'Univers, solution des équations de la relativité générale, homogène, mais anisotrope. À la fin des années 1960, Roger Penrose et Stephen Hawking utilisèrent des méthodes de topologie pour démontrer un résultat plus général: même en renonçant aux hypothèses simplificatrices sur les symétries de l'Univers, la singularité demeure, à condition que l'Univers soit empli de matière et d'énergie satisfaisant des conditions physiques raisonnables (incluant notamment les lois de la causalité). Dès lors, tous les modèles d'univers décrits par la relativité générale contiennent une singularité initiale (dite «ouverte»), le Big Bang, et des singularités (dites «fermées») qui ne sont autres que les trous noirs.



Dans le modèle d'Univers de Bianchi IX, un volume d'Univers initialement cubique évolue vers la singularité *(au centre)*. Au cours de chaque ère dite «de Kasner», il se contracte selon deux directions de l'espace *(en vert)* et se dilate selon la troisième *(en rouge)*. L'Univers passe par une succession infinie d'ères de Kasner, alors que son volume tend vers zéro.

Ainsi, la relativité générale ne peut éviter de prédire des situations qu'elle ne peut décrire complètement, et ce ne fut pas sans jeter un certain opprobre sur cette théorie. Toutefois, dans tous les cas connus, les singularités au cœur des trous noirs sont, pour ainsi dire, coupées du monde: elles sont entourées d'un horizon, une frontière intangible d'où rien ne peut s'échapper et qui nous protège d'éventuels phénomènes exotiques se produisant à l'intérieur. Et certains physiciens postulèrent que cette «censure cosmique» ne serait jamais transgressée.

Aujourd'hui, ce postulat n'est toujours pas démontré, mais nous avons établi qu'une autre forme de censure cosmique nous sépare du Big Bang. Nous pouvons donc continuer à utiliser la relativité générale pour décrire l'Univers, même si nous ne disposons pas encore d'une théorie à même d'expliquer la singularité.

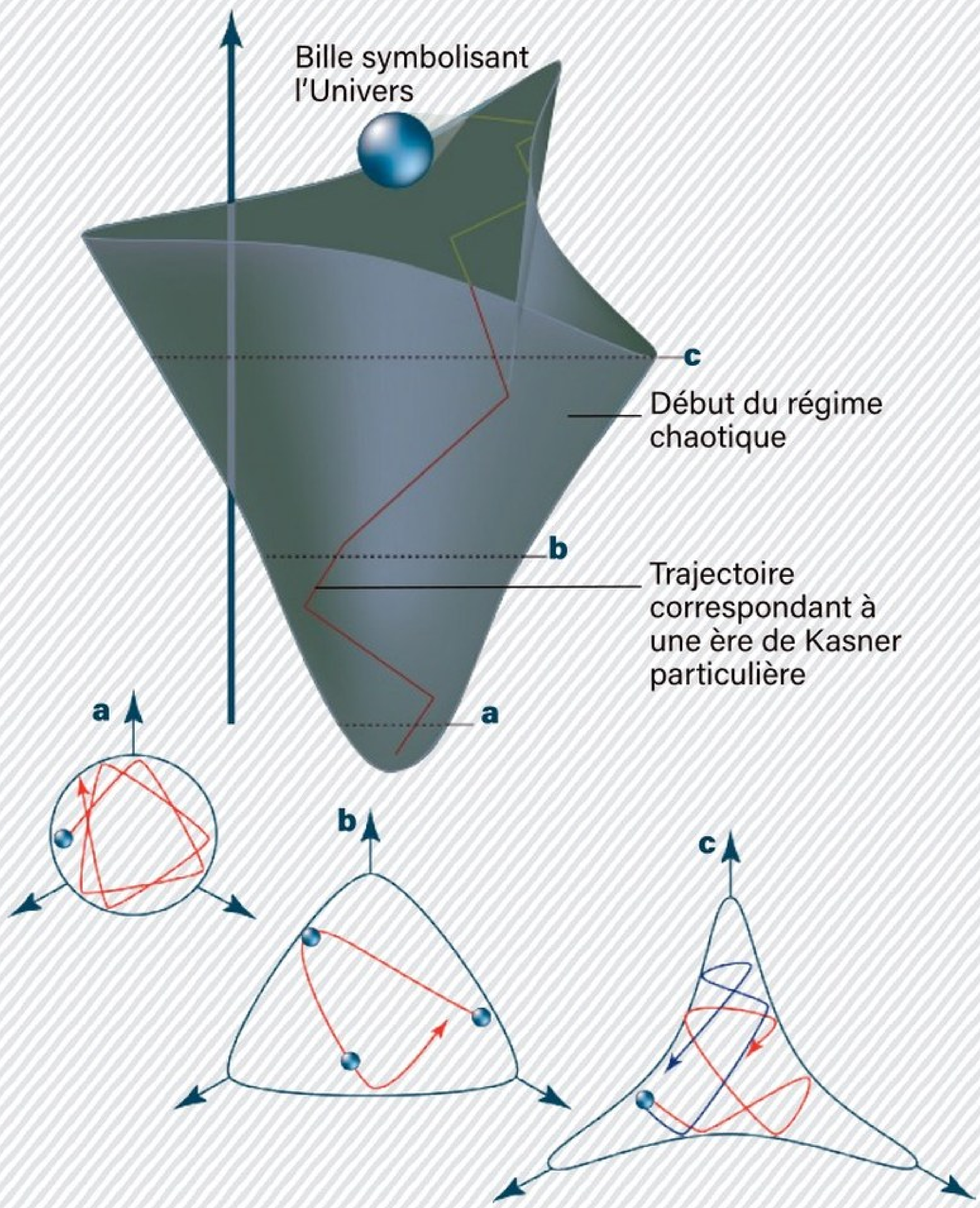
L'UNIVERS MALAXÉ

Dès 1918, le mathématicien Luigi Bianchi établit la liste des types de cosmos homogènes et anisotropes ayant trois dimensions d'espace et une de temps, et qui satisfont les équations de la relativité générale. Il en dénombra dix, parmi lesquels le neuvième est celui qui a les propriétés les plus générales. Dans ce modèle, nommé Univers de Bianchi IX, l'espace est semblable à l'hypersurface (à trois dimensions) d'une hypersphère (à quatre dimensions). C'est un univers fermé; sa courbure est positive et identique en tout point: il est homogène. Il admet un Big Bang et un Big Crunch, c'est-à-dire qu'il présente deux singularités de même nature, une à son origine, l'autre à sa disparition. De plus, l'Univers de Bianchi IX étant anisotrope, au lieu de se dilater de la même façon dans toutes les directions, il a trois facteurs d'échelle distincts correspondant aux trois dimensions de l'espace, qui peuvent évoluer dans des sens opposés.

Que se passe-t-il lorsque cet Univers s'approche de l'une de ses singularités ? En s'effondrant, il se comporte un peu comme une balle de pâte à modeler que l'on chercherait à comprimer. Il se dilate selon une direction tout en se contractant selon les deux autres. Ainsi, l'Univers de Bianchi IX en effondrement est « malaxé », il passe par une succession d'états, nommés « ères de Kasner », caractérisés par des directions de contraction et de dilatation différentes.

Dans les années 1970, les travaux de l'école russe de cosmologie, et notamment ceux de Vladimir Belinski, Isaak Khalatnikov, Evgueni Lifchitz et Lev Landau, ont suggéré que, dans le cas particulier d'un Univers de Bianchi IX vide de toute matière, les transitions se succèdent de plus en plus vite à mesure que le cosmos se contracte, au point que la série des ères de Kasner est infinie ! De plus, cette série est chaotique: la plus petite incertitude sur ses conditions initiales la rend parfaitement imprévisible… Dans ce cas particulier, la singularité initiale devient alors inaccessible, car rejetée à l'infini. Par conséquent, la singularité ouverte du Big Bang est « isolée » de l'Univers normal, tout comme, nous l'avons vu, les singularités fermées des trous noirs. Cette hypothèse de « censure » de la singularité à l'aide d'un voile de chaos a déchaîné les passions. Afin de mieux comprendre, il restait à démontrer ce résultat d'une façon plus rigoureuse et générale.

La démonstration vint d'une modélisation mathématique originale dans laquelle l'étude de l'évolution de l'Univers est ramenée à celle de la trajectoire d'une bille sur un billard. En effet, les équations de la relativité générale peuvent être réécrites sous une forme spécifique où l'énergie totale de l'Univers est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (*voir l'encadré ci-contre*). Sous cette forme, dite « hamiltonienne », l'évolution de l'Univers devient celle d'un point représentant l'état de l'Univers circulant dans une portion d'un espace abstrait dont les frontières sont fixées par l'énergie potentielle.



Un billard cosmique

L'évolution d'un Univers homogène et anisotrope vers sa singularité initiale peut être modélisée par celle d'une bille dans un billard dont les contours sont en expansion et se déforment. Chaque portion rectiligne de la trajectoire de la bille correspond à un état particulier de l'univers, nommé « ère de Kasner », caractérisé par une contraction selon deux dimensions et une expansion selon la troisième. Loin de la singularité, la bille rebondit dans un billard elliptique dont les bandes, dites « contractantes », sont de courbure positive *(a)*: la trajectoire est quasi périodique. Plus près de la singularité *(c)*, les bandes du billard, dites « diffusantes », sont hyperboliques (leur courbure est négative) et les rebonds de la bille, tout comme l'évolution de l'univers, deviennent chaotiques: des conditions initiales de la bille aussi proches que l'on veut *(en rouge et en bleu)* donnent rapidement lieu à des trajectoires différentes impossibles à prévoir. On a montré que la transition *(b)* entre ces deux comportements n'a lieu qu'une seule fois.

En 1970, Charles Misner, de l'université du Maryland, le démontra pour le cas particulier étudié par les cosmologistes russes et calcula la forme du billard où se meut la bille. Le point qui caractérise l'état de l'Univers roule en ligne droite sur une surface délimitée par une frontière jouant le rôle des bandes du billard. Lorsque la bille-Univers s'approche de l'une d'elles, sa trajectoire s'incurve fortement – la bille rebondit et s'élance dans une nouvelle direction. On montre que chaque portion rectiligne de la trajectoire correspond à l'une des ères de Kasner.

Notre première description de l'effondrement de l'Univers nécessitait trois paramètres : les trois facteurs d'échelle de l'Univers de Bianchi IX. Dans le modèle du billard, l'état de l'Univers est donné par les deux coordonnées de la bille sur la surface. Avons-nous réduit le nombre de paramètres ? Non. Une troisième quantité, inversement proportionnelle au volume de l'Univers, détermine l'écartement entre les bandes du billard. Ainsi, les états parcourus par l'Univers de Bianchi IX évoluant vers une singularité (Big Bang ou effondrement final) sont représentés par des rebonds d'une bille roulant sur un billard dont les frontières sont en expansion.

Dans le cas simplifié d'un Univers vide, on montre que la vitesse d'expansion de la frontière du billard est inférieure à la vitesse de la bille. Celle-ci finit donc toujours par percuter l'une des bandes. Après chaque rebond, la vitesse de la bille diminue, ainsi que la vitesse d'expansion du billard, mais la bille est toujours assez rapide pour atteindre une bande. Par conséquent, il se produit une infinité de rebonds avant que les deux vitesses ne s'annulent, lorsque le billard atteint une taille infinie, c'est-à-dire au moment de la singularité.

Pourquoi cette série de rebonds est-elle chaotique ? À cause de la forme du billard associé à la dynamique d'un Univers de Bianchi IX. Lorsque l'énergie du système est basse (l'Univers est encore loin de la singularité), la courbure de la frontière est partout positive : les bandes ont la forme d'une ellipse ou d'un cercle. Les trajectoires de la bille sont périodiques ou quasi périodiques, et il n'y a pas de chaos.

Toutefois, au-delà d'un seuil d'énergie, quand on s'approche de la singularité, les bandes s'infléchissent et ressemblent de plus en plus à la branche d'hyperbole (de courbure négative). Dans ce billard, une bille est « diffusée » de façon désordonnée après chacun des rebonds qui deviennent chaotiques : l'évolution de l'Univers (la trajectoire de la bille) est alors impossible à prédire.

> DES DIMENSIONS SUPPLÉMENTAIRES PRIVERAIENT LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE DE SA CAPACITÉ À CENSURER LE BIG BANG

LE FLUIDE HYPERRIGIDE

Le seuil d'énergie correspondant à cette transition a été calculé précisément et il a été montré qu'il est unique, c'est-à-dire que l'Univers s'approchant de la singularité ne retrouve jamais un régime pour lequel on pourrait à nouveau prédire ses états successifs. Ces résultats sont valables, que l'Univers soit vide ou non. Que se passe-t-il dans un Univers de Bianchi IX où on ajoute de la matière ? On ne fait que ralentir la vitesse de la bille à l'intérieur du billard, sans pouvoir empêcher la bille de rejoindre la bande qui s'évade. Ces résultats confirment une fois pour toutes qu'un voile de chaos masque la singularité dans le cas d'un Univers de Bianchi IX.

Les physiciens sont rassurés par cette barrière quant aux modèles cosmologiques qui découlent de la relativité générale. Cependant, nous savons aujourd'hui que ces modèles sont trop simples, parce qu'ils supposent que l'Univers ne contient que de la matière ordinaire et du rayonnement. Ils ne tiennent pas compte, par exemple, de l'énergie dite « sombre », une substance dont les propriétés sont encore inconnues, mais qui aurait pour effet d'accélérer l'expansion de l'Univers.

Par ailleurs, il n'est pas exclu que des substances exotiques emplissant l'Univers présentent des propriétés particulières lorsqu'il devient très dense, à l'approche de la singularité. En particulier, certaines d'entre elles ont pu emplir l'Univers primordial de ce que les théoriciens nomment un « fluide hyperrigide », une substance où la vitesse du son est égale à celle de la lumière. Et de fait, beaucoup de physiciens des hautes énergies – notamment ceux qui s'intéressent à la théorie des supercordes – prédisent que le cosmos doit être empli de champs semblables à des fluides hyperrigides. Or seuls ces derniers sont, dans le modèle du billard, susceptibles de ralentir suffisamment la bille pour l'empêcher d'atteindre les bandes: le nombre de rebonds devient fini et le voile du chaos se lève !

DE NOUVEAUX MURS DANS LE BILLARD

En outre, de nombreux physiciens en quête d'une théorie quantique de la gravitation pensent que l'espace a plus de trois dimensions. Cela se traduirait, dans notre modèle, par l'apparition de « trous » dans les bandes du billard, par où la bille serait susceptible de s'échapper pour ne plus jamais rebondir. Dans ce cas, une bille ne rebondit plus et la suite des états de Kasner est finie. On en déduit que des dimensions supplémentaires priveraient la relativité générale de sa capacité à censurer le Big Bang.

Des résultats théoriques récents nous obligent à introduire dans les modèles d'Univers des ingrédients – fluide hyperrigide ou dimensions supplémentaires – qui déchirent le voile de chaos masquant le Big Bang. Toutefois, l'histoire n'est pas terminée. En effet, des développements prenant en compte à la fois ce caractère multidimensionnel et les contributions énergétiques imposées par la théorie des supercordes font apparaître de nouveaux murs dans le billard, qui obstruent ces ouvertures. Dans ce cadre, l'Univers proche de la singularité redevient chaotique.

La relativité générale est venue avec le mystère lié aux singularités. Toutefois, à l'usage, les physiciens se sont aperçus que la théorie d'Einstein isolait de l'Univers ordinaire ces « monstres » où la physique semble s'arrêter. Cette forme de censure par le chaos existe-t-elle réellement ? Nous ne le saurons avec certitude que lorsque nous disposerons d'une théorie complète de la gravitation quantique. Toutefois, de façon remarquable cette censure constitue peut-être un point d'accord entre la théorie d'Einstein et une prétendante à sa succession, la théorie des supercordes.

— Les auteurs —

> Jean-Michel Alimi
directeur de recherche au CNRS, a dirigé le laboratoire Univers et théories (LUT), à l'observatoire de Paris-Meudon.

> Jérôme Perez
est professeur à l'Ensta ParisTech où il enseigne la gravitation.

— À lire —

> L. Landau et E. Lifchitz, *Physique théorique – Théorie des champs*, Ellipses, 1998.

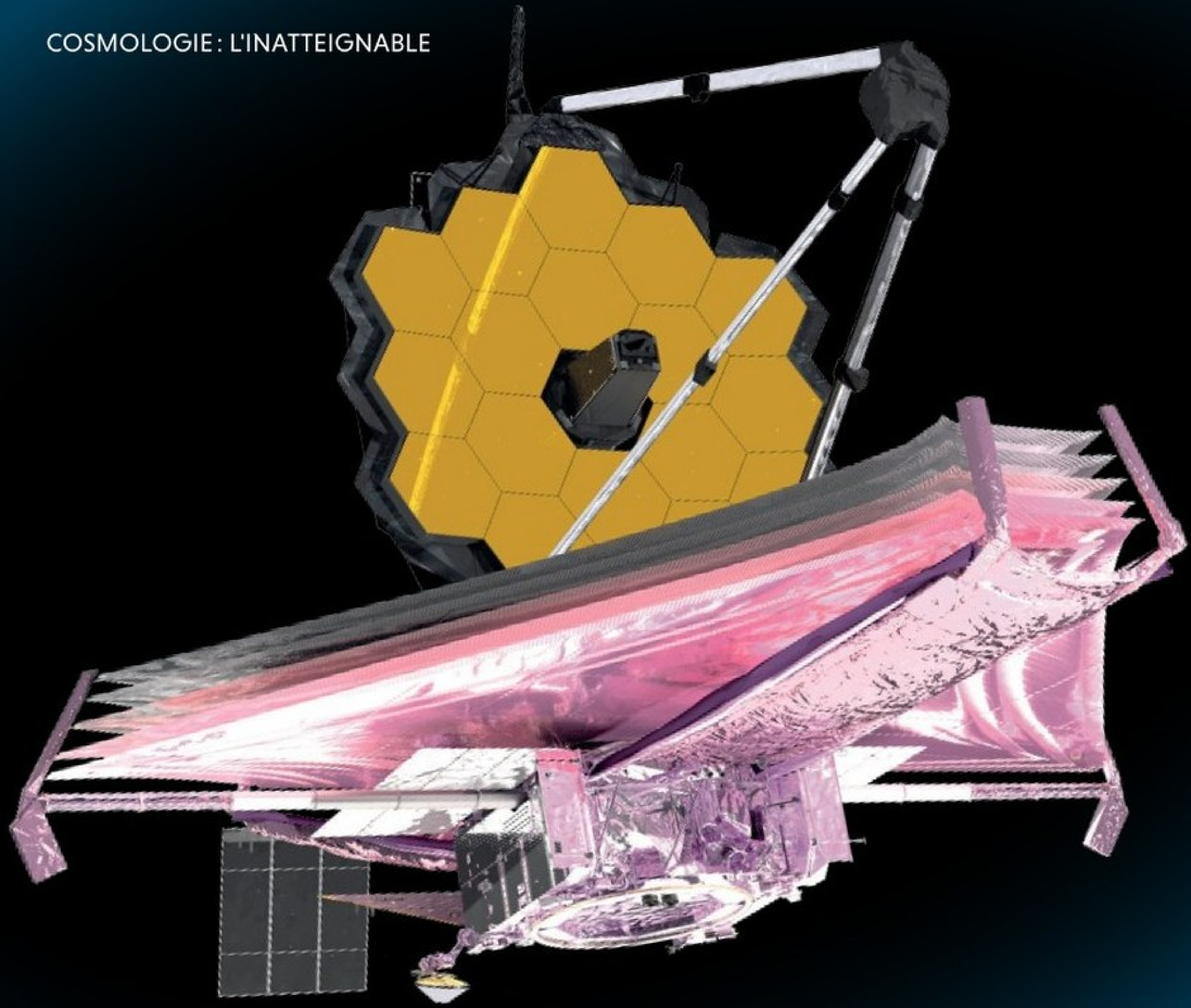
> C. Misner, K. Thorne et J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman, 1973.

Aux confins de l'infini

Depuis son lancement en décembre 2021 et sa mise en service en juin 2022, le télescope spatial « James-Webb » repousse les limites de nos connaissances sur l'Univers, notamment sa jeunesse, et porte son œil plus loin que jamais. Pas tout à fait à l'infini, mais presque.

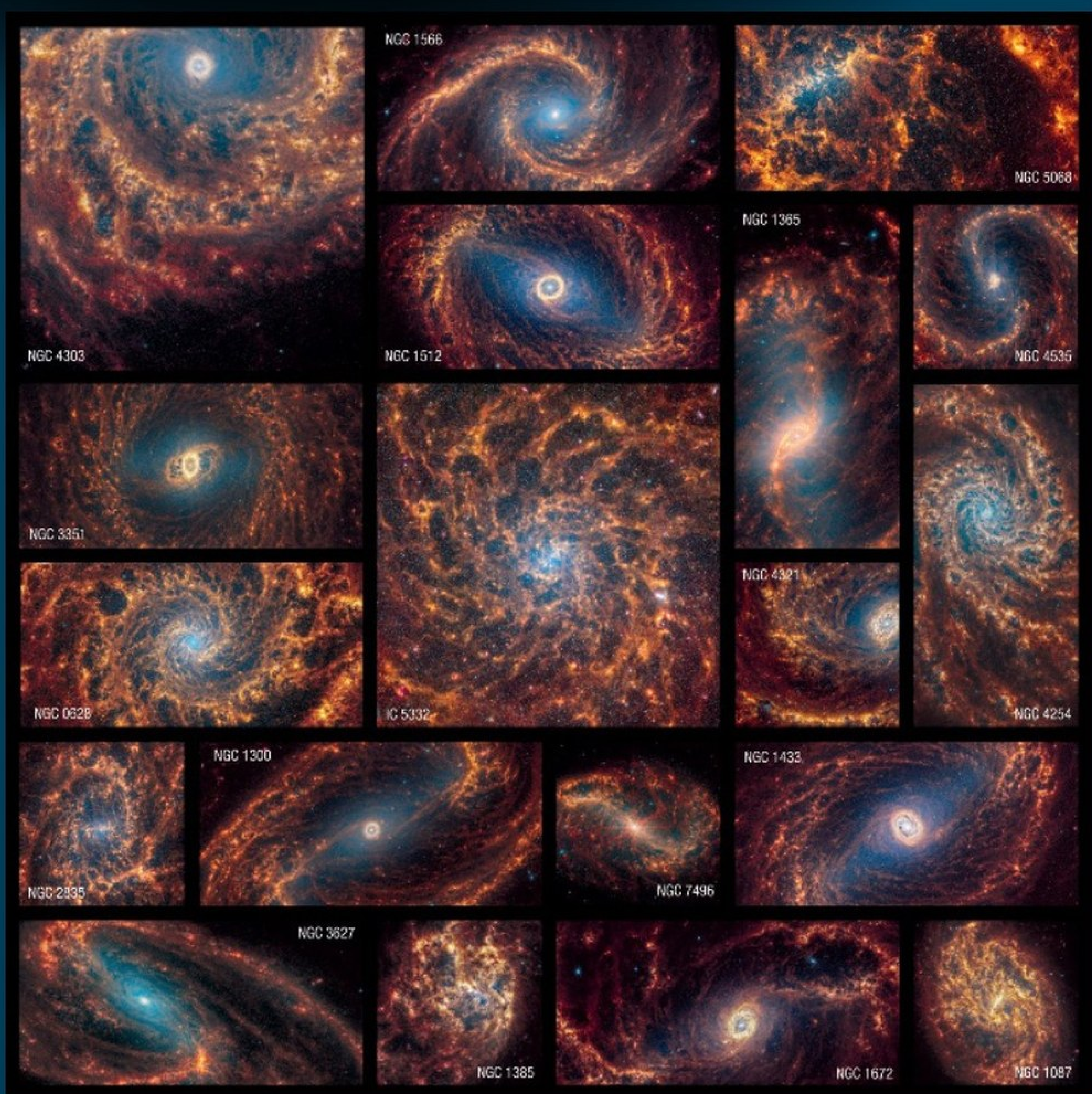
Deux valent mieux qu'une

Les objets de Herbig-Haro (notés HH) sont de petites nébulosités associées à de très jeunes étoiles. Le halo résulte de la collision de la matière éjectée par une telle étoile avec les nuages de gaz et de poussières environnants. Ici, parmi le millier compterait la galaxie, est photographié le HH 797 *(en bas)*, situé à proximité de la pouponnière d'étoiles IC 348, dans la constellation de Persée, à environ 1000 années-lumière. En fait, il résulterait de l'activité d'une proto-double étoile, et non pas d'une étoile unique, comme on le pensait auparavant. En haut de l'image, l'objet brillant abriterait également deux étoiles en formation.



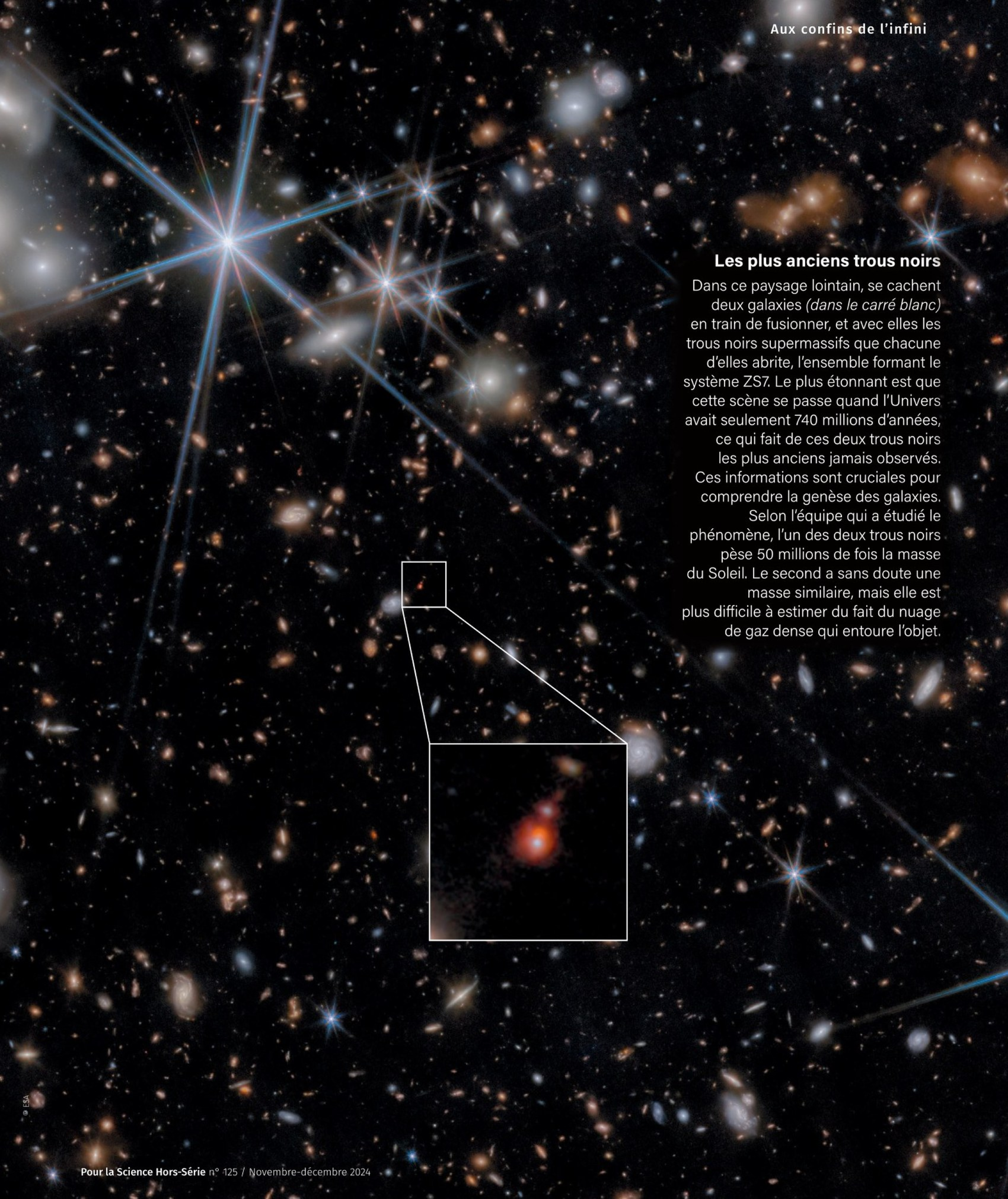
Un satellite de compétition

Le télescope spatial *James-Webb (JWST, ici, une vue d'artiste)* a été développé par la Nasa, en collaboration avec les agences spatiales européenne (ESA) et canadienne (ASC). L'engin, doté d'instruments essentiellement sensibles aux infrarouges, est en orbite, à 1,5 million de kilomètres de la Terre, autour du point de Lagrange L_2 du système Soleil-Terre. Sa mission est prévue pour une durée de cinq ans.



Un catalogue de galaxies

Les galaxies ne se ressemblent pas, et même celles dites « spirales » adoptent des formes différentes. Ici, 19 sont représentées avec un luxe de détails jamais atteint en dehors de la Voie lactée. Les plus vieilles étoiles *(en bleu)* sont rassemblées autour du centre. Les étoiles qui ne sont pas complètement formées, encore enveloppées de gaz et de poussière, apparaissent en rouge vif. Ces images, en très haute définition, révèlent également des « trous » dans les bras, de possibles traces d'étoiles ayant explosé.

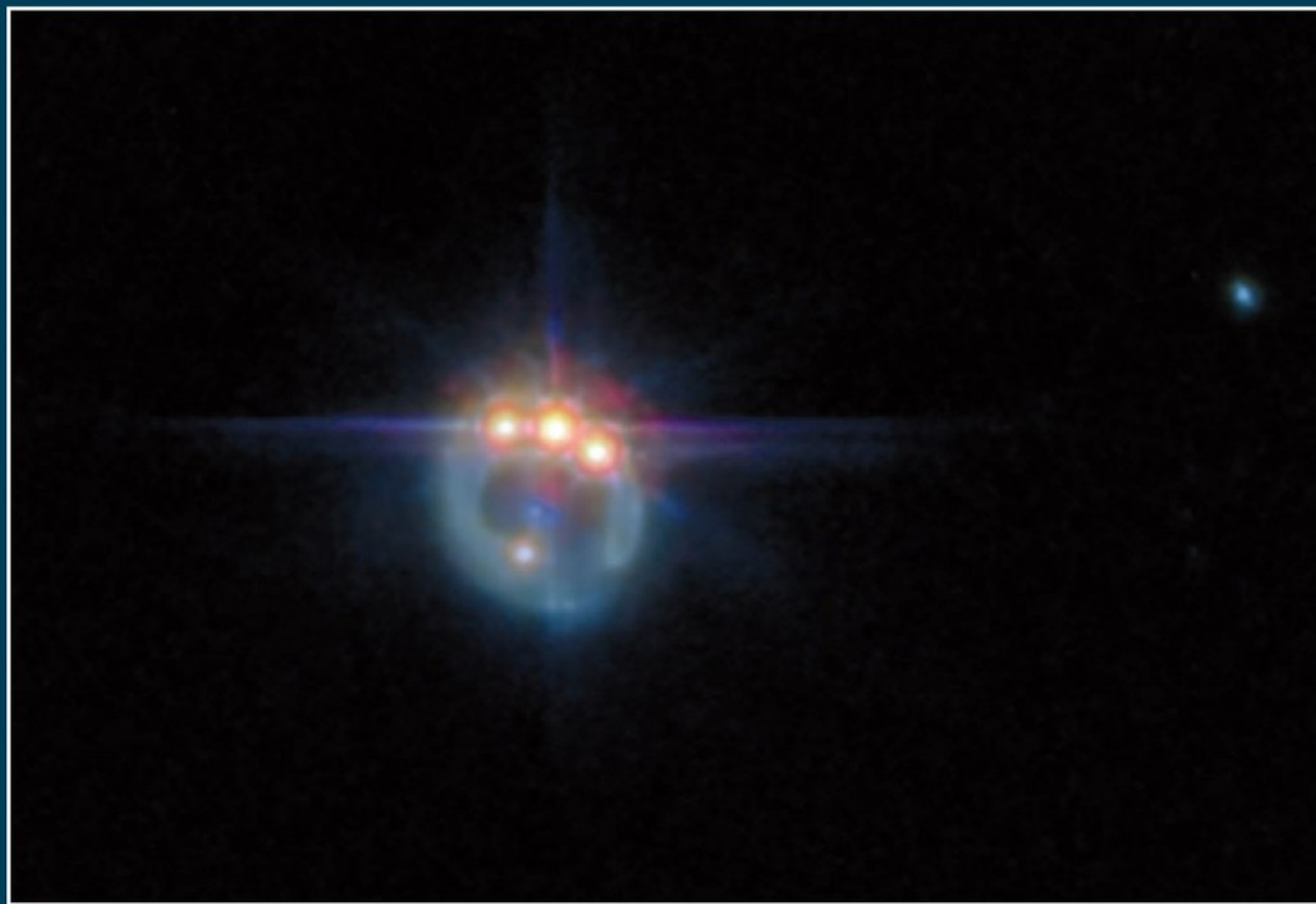


Les plus anciens trous noirs

Dans ce paysage lointain, se cachent deux galaxies *(dans le carré blanc)* en train de fusionner, et avec elles les trous noirs supermassifs que chacune d'elles abrite, l'ensemble formant le système ZS7. Le plus étonnant est que cette scène se passe quand l'Univers avait seulement 740 millions d'années, ce qui fait de ces deux trous noirs les plus anciens jamais observés. Ces informations sont cruciales pour comprendre la genèse des galaxies. Selon l'équipe qui a étudié le phénomène, l'un des deux trous noirs pèse 50 millions de fois la masse du Soleil. Le second a sans doute une masse similaire, mais elle est plus difficile à estimer du fait du nuage de gaz dense qui entoure l'objet.

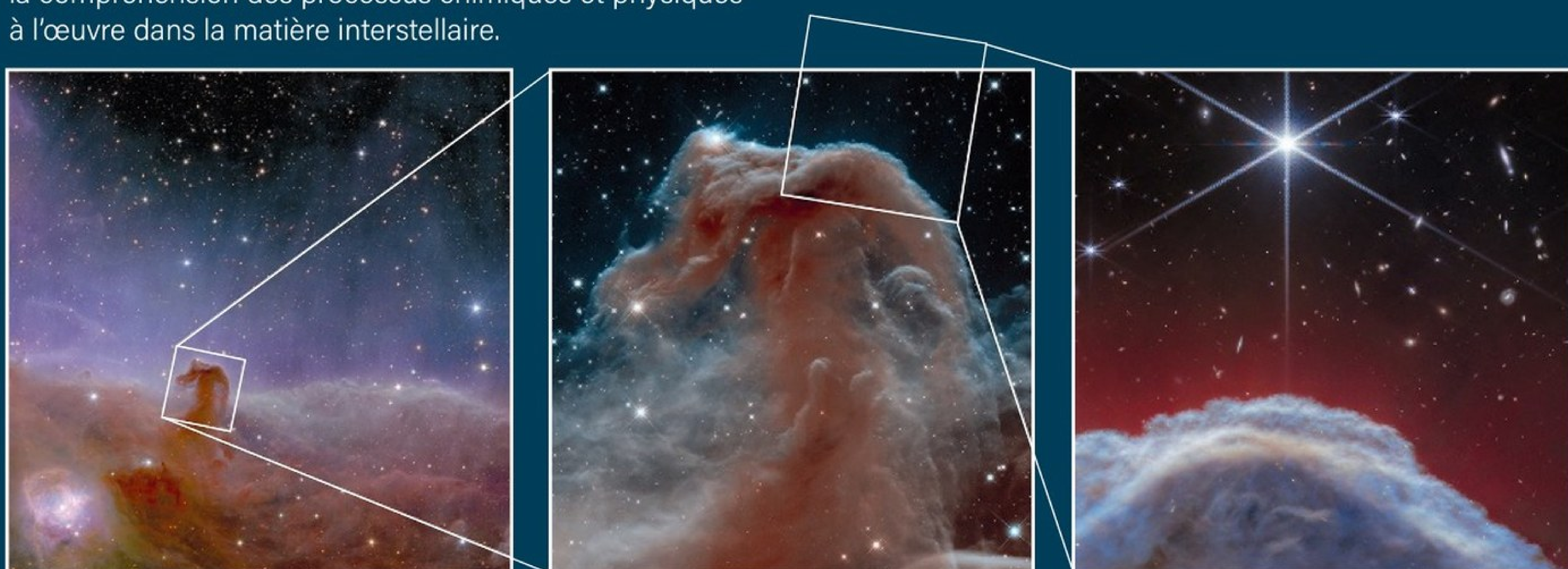
La bague et la lentille

Cette bague à quatre joyaux (un, moins brillant, est situé en bas de l'anneau) n'en a en fait qu'un. Il s'agit du quasar RX J1131-1231, situé à quelque 6 milliards d'années-lumière, dans la constellation de la Coupe. L'objet, un trou noir supermassif niché au cœur, très lumineux, d'une galaxie lenticulaire, subit ici un effet de lentille gravitationnelle par une galaxie elliptique *(au centre)* qui multiplie son image. Le quasar tournerait à une vitesse supérieure à la moitié de celle de la lumière, indiquant qu'il résulte de fusions plutôt que d'une simple accrétion de matière.



Merci Barnard

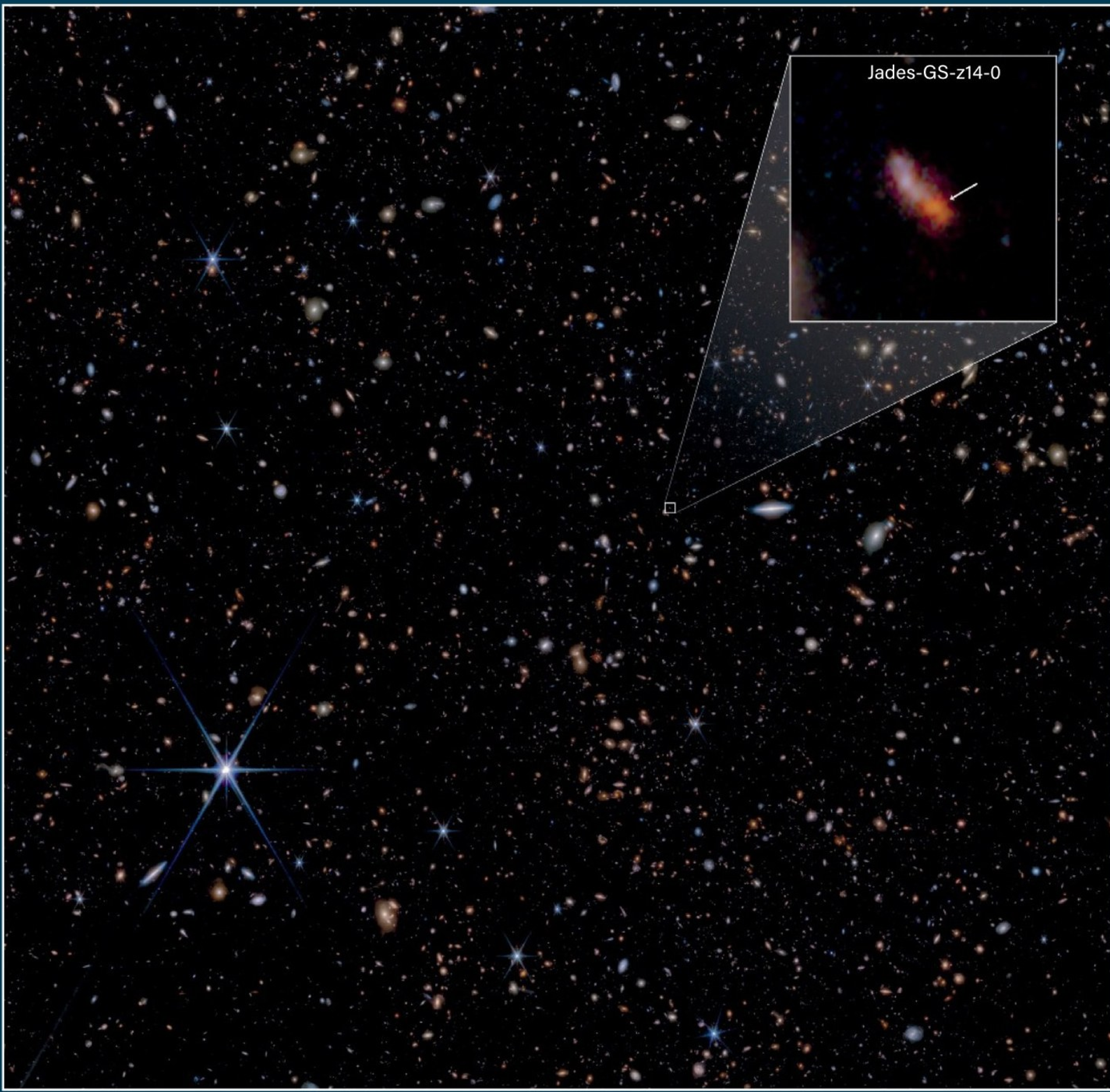
L'un des atouts majeurs du *JWST* est sa très haute résolution, qui offre à chacune de ses images un niveau de précision jamais atteint. La preuve avec ce cliché du sommet de la nébuleuse de la Tête de Cheval, situé à 1600 années-lumière, comparé aux photographies d'autres télescopes. La couleur rouge autour de ce nuage dense de gaz et de poussières, de son nom officiel Barnard 33, trahit l'ionisation de l'hydrogène situé derrière par l'étoile Sigma Orionis. C'est une porte d'entrée vers la compréhension des processus chimiques et physiques à l'œuvre dans la matière interstellaire.



Euclid *Hubble* *James-Webb*

La marche de l'empereur

Pour le deuxième anniversaire de sa mise en service, le *JWST* s'est offert… un pingouin et son œuf ! Il s'agit respectivement des galaxies NGC 2936 et NGC 2937, distantes l'une de l'autre de 100 000 années-lumière et formant ensemble le système Arp 142, situé à 326 millions d'années-lumière, dans la constellation Hydra. Elles ont commencé à interagir il y a entre 25 et 75 millions d'années et termineront leur danse dans plusieurs centaines de millions d'années.



La plus vieille galaxie

C'est entendu, plus un objet s'éloigne vite dans l'Univers en expansion, plus les longueurs d'onde de ses rayonnements émis sont décalées vers le rouge. C'est sur ce principe, l'effet Doppler, que le *JWST* a repéré la plus vieille galaxie jamais observée : JADES-GS-z14-0. Située à plus de 13,5 milliards d'années-lumière, elle date donc, seulement, de 290 millions d'années après le Big Bang (puisque l'Univers a environ 13,8 milliards d'années d'existence) ! Elle bat ainsi le précédent record de JADES-GS-z13-0, datant, elle, de 320 millions d'années après le Big Bang. Reste à comprendre comment de telles structures si lumineuses et massives ont pu se former si rapidement.

Surf in Universe

Le *JWST* a permis une classification des premières galaxies, celles observées comme s'étant formées entre 600 millions à 6 milliards d'années après le Big Bang. Parmi elles, de 50 à 80 % sont allongées et plates, et évoquent, selon les auteurs de l'étude, « des planches de surf ou des frites de piscine » *(cartouche en bas)*, alors que les sphériques, « en forme de ballon de volley » *(carré blanc du haut)*, sont plus rares. C'est une surprise, car ce n'est pas le cas des galaxies plus récentes (et donc plus proches). En remontant le temps, notre Voie lactée aurait été du type « planche de surf ».

Une tension à son comble

Cette galaxie, nommée NGC 5468, située à 130 millions d'années-lumière, abrite des céphéides, des étoiles dont la brillance varie selon une période que l'on peut relier à leur luminosité absolue : elles sont donc des astres parfaits pour étudier la vitesse d'expansion de l'Univers, que l'on mesure avec un paramètre, la « constante de Hubble », notée H_0. Cependant, selon la méthode employée, la valeur de H_0 diffère (on parle de « tension de Hubble »). Celle qu'on obtient grâce au *JWST* est conforme à celle qui résulte des observations du télescope spatial *Hubble*. Le souci est donc ailleurs, et la tension reste entière…

Dans notre univers, la surface d'un trou noir est une sphère. Au-delà de quatre dimensions, un nombre infini de configurations devient possible.

L'infinie diversité des trous noirs

Steve Nadis

Dans un univers à plus de quatre dimensions, les trous noirs ne sont pas nécessairement sphériques.

En bref

> Dans notre univers à quatre dimensions, Stephen Hawking a montré que la surface des trous noirs – leur horizon – est sphérique.

> Quand le nombre de dimensions augmente, les équations de la relativité générale d'Einstein montrent que les formes adoptées sont beaucoup plus variées.

> Les mathématiciens Marcus Khuri et Jordan Rainone ont prouvé qu'un nombre infini de formes de trous noirs est possible dans un nombre infini de dimensions.

Le cosmos semble avoir une préférence pour les objets ronds. Et de fait, les planètes et les étoiles sont sphériques parce que l'influence de la gravité se fait sentir de façon identique sur le gaz et les poussières dans n'importe quelle direction, vers le centre de la masse. De même, les trous noirs ont, selon la théorie, une forme sphérique dans l'Univers à trois dimensions d'espace et une de temps qui est le nôtre. Qu'en serait-il si l'Univers était doté de dimensions supérieures, comme cela est parfois postulé, des dimensions invisibles, mais dont les effets seraient néanmoins perceptibles ? D'autres formes de trous noirs seraient-elles alors possibles ?

Oui. Ces deux dernières décennies, des chercheurs ont trouvé des exceptions à la règle qui cantonne les trous noirs à une forme sphérique. Et plus récemment, des mathématiciens ont montré que les équations de la relativité générale d'Albert Einstein peuvent conduire à une grande variété de trous noirs exotiques. Plus exactement, un nombre infini de formes est possible dans les dimensions cinq et plus.

Ce nouveau travail est purement théorique et ne dit pas que de tels trous noirs existent bel et bien. Cependant, la détection d'un trou noir de forme étrange, par exemple dans un accélérateur de particules, « prouverait automatiquement que notre univers a plus de quatre dimensions », a déclaré le géomètre Marcus Khuri, coauteur de l'étude avec Jordan Rainone, tous deux à l'université de Stony Brook, à New York.

Comme beaucoup d'histoires de trous noirs, celle-ci commence avec Stephen Hawking, plus exactement quand en 1972 il démontre que la surface d'un trou noir – son horizon –, lui-même étant un objet tridimensionnel, doit être une sphère bidimensionnelle. L'extension du théorème de Hawking n'a guère été envisagée avant les années 1980 et 1990, lorsque les physiciens se sont enthousiasmés pour la théorie des cordes, qui suppose l'existence de 10 ou 11 dimensions. On a alors commencé à s'intéresser à ce que ces dimensions supplémentaires signifiaient pour la topologie des trous noirs.

UN TROU NOIR À TROU

Ces derniers font partie des prédictions les plus déroutantes des équations d'Einstein, en substance un système à 10 équations différentielles non linéaires incroyablement difficiles à résoudre. En général, elles ne le sont explicitement que dans des conditions simplifiées, très symétriques.

Ainsi, en 2002, les physiciens Roberto Emparan et Harvey Reall, aujourd'hui respectivement à l'université de Barcelone, en Espagne, et à l'université de Cambridge, en Grande-Bretagne, ont trouvé une solution aux équations d'Einstein en cinq dimensions (quatre d'espace plus une de temps) : il s'agit d'un « anneau noir », une surface tridimensionnelle ayant les contours généraux d'un tore.

Une telle surface est difficile à se représenter, alors imaginons plutôt un cercle, en chaque point duquel nous substituons une sphère bidimensionnelle. Le résultat est un objet tridimensionnel que l'on peut voir comme un beignet solide et grumeleux.

> La détection d'un trou noir de forme étrange prouverait que notre univers a plus de quatre dimensions

En principe, de tels trous noirs se formeraient s'ils tournaient à la bonne vitesse. « Trop rapides, ils se désagrègent, trop lents ils redeviennent une boule, explique Jordan Rainone. Roberto Emparan et Harvey Reall ont trouvé le juste milieu: leur anneau a une rotation adéquate pour rester un beignet. » Ce résultat a ravi le mathématicien: « Notre univers serait ennuyeux avec seulement des sphères! »

DÉCOUPER UNE BOULE

Le monde des trous noirs a commencé à se diversifier en 2006 quand Greg Galloway, de l'université de Miami, et Richard Schoen, de l'université Stanford, ont généralisé le théorème de Hawking pour décrire toutes les formes possibles des trous noirs dans des dimensions supérieures à quatre. Parmi les formes autorisées figurent donc la sphère et l'anneau, mais aussi une vaste classe d'objets appelés « espaces lenticulaires ».

Il s'agit d'un type particulier de construction qui joue depuis longtemps un rôle important en topologie. « Parmi toutes les formes possibles que l'Univers peut nous proposer en trois dimensions, explique Marcus Khuri, la plus simple est la sphère, puis viennent les espaces lenticulaires. » Il voit ceux-ci comme des « sphères pliées, d'une façon très compliquée ». Pour comprendre, commencez par un simple cercle que vous divisez en deux moitiés, l'une supérieure et l'autre inférieure. Déplacez ensuite chaque point de la moitié inférieure vers celui de la moitié supérieure qui lui est diamétralement opposé. Il ne reste alors plus que le demi-cercle supérieur et deux points antipodiques, un à chaque extrémité du demi-cercle. Ces points sont enfin accolés, créant ainsi un cercle dont la circonférence est égale à la moitié de celle du cercle d'origine.

En deux dimensions, avec une sphère, par exemple, les choses se corsent. À la fin de l'opération de connexion des points, il subsiste l'hémisphère supérieur, et il reste à relier les uns aux autres tous les points situés le long de l'équateur: en raison de tous les croisements nécessaires, la surface résultante est extrêmement déformée.

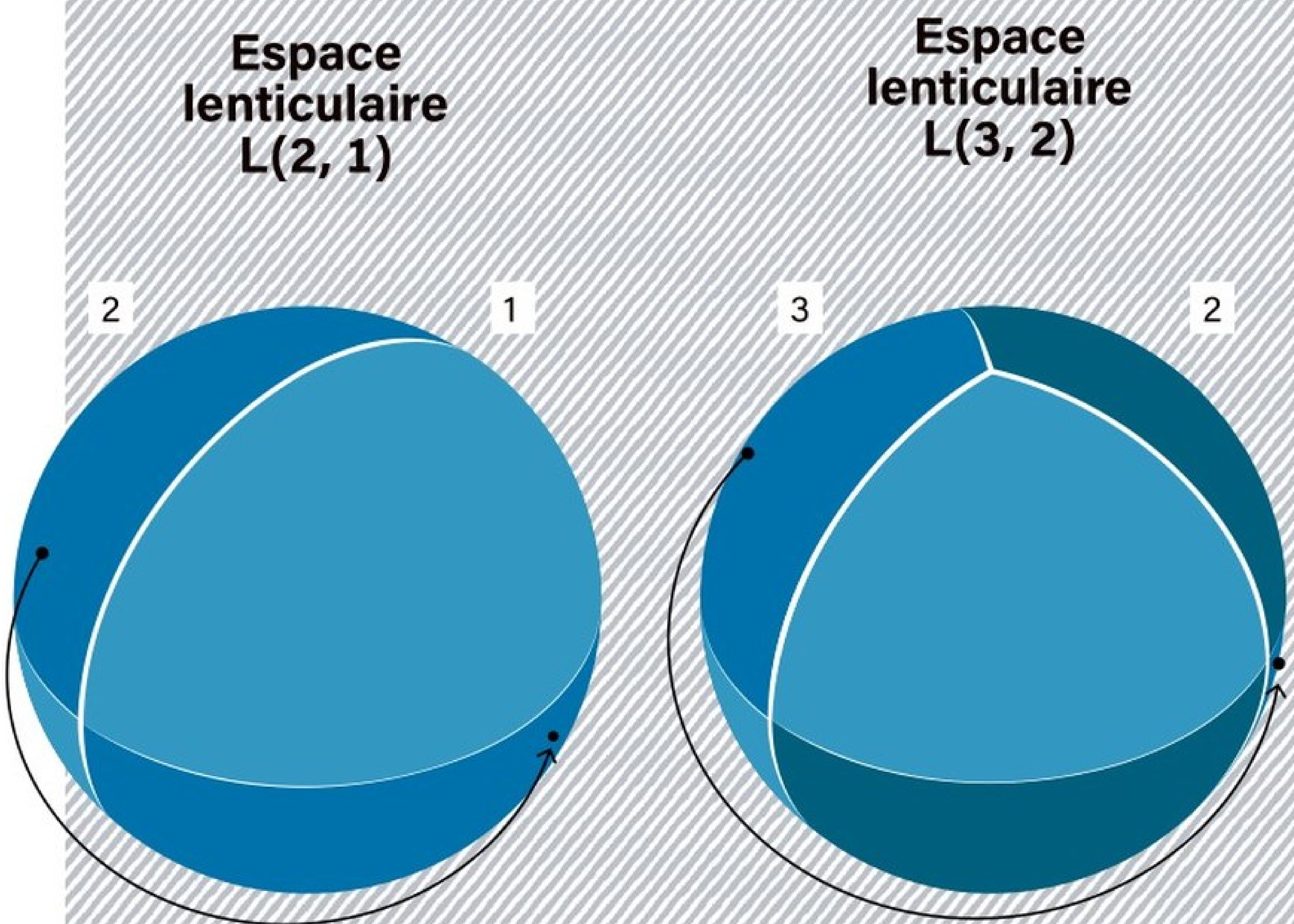
Lorsque les mathématiciens parlent d'espaces lenticulaires, ils font généralement référence à la variété tridimensionnelle. Commençons par le plus « facile », une boule parcourue de deux lignes longitudinales opposées joignant pôle Nord et pôle Sud, ce qui crée deux hémisphères. Nous pouvons ici identifier les points de l'un avec ceux, antipodiques, de l'autre.

Pourquoi se limiter à deux lignes et autant de secteurs? Les mathématiciens ont généralisé l'idée et notent un espace lenticulaire $L(p, q)$, où p indique le nombre de secteurs en lesquels le globe est divisé, et q la façon dont ces secteurs sont identifiés les uns aux autres. Notre exemple correspond ainsi à un espace lenticulaire $L(2, 1)$.

Si le globe est divisé en plus de deux secteurs, il y a plusieurs façons de les relier. Par exemple, dans un espace lenticulaire $L(4, 3)$, il y a quatre secteurs, et chaque secteur supérieur est associé à son homologue inférieur trois secteurs plus loin. « Ce [processus] est comme une torsion,

Recette de lentilles

Pour construire un espace lenticulaire, les mathématiciens partent d'une boule en trois dimensions, la découpent en régions puis connectent (ou « identifient ») ces dernières. Commencez par découper longitudinalement la boule en secteurs. Puis identifiez les points de la moitié supérieure de l'un des hémisphères à ceux de la moitié inférieure de l'autre.



dont l'ampleur est déterminée par q, de la partie supérieure pour trouver l'endroit correct de la partie inférieure à coller », explique Marcus Khuri. Et à mesure que le nombre de torsions augmente, les formes obtenues deviennent de plus en plus tarabiscotées.

Les gens me demandent parfois « comment visualiser ces objets », avoue Hari Kunduri, de l'université McMaster, au Canada. En fait, il ne le fait pas : « Nous traitons mathématiquement ces objets, de façon abstraite, sans recourir à des dessins. »

DU BEIGNET AUX LENTILLES

En 2014, Hari Kunduri et James Lucietti, de l'université d'Édimbourg, ont prouvé l'existence d'un trou noir de type $L(2, 1)$ en cinq dimensions. Leur solution, qu'ils appellent « lentille noire », présente quelques caractéristiques importantes. Elle décrit un espace-temps « asymptotiquement plat », ce qui signifie que la courbure de l'espace-temps, élevée à proximité d'un trou noir, s'approche de zéro à mesure que l'on s'en éloigne vers l'infini. Cette caractéristique permet de s'assurer que les résultats sont physiquement pertinents. « Il n'est pas si difficile de fabriquer une lentille noire, remarque Hari Kunduri. Ce qui l'est plus est de rendre l'espace-temps plat à l'infini. »

Tout comme l'anneau noir, la lentille noire doit également tourner pour ne pas s'effondrer sur elle-même. Mais Hari Kunduri et James Lucietti ont aussi adjoint au système un champ de « matière » (ici, un type de charge électrique) pour maintenir la cohésion de leur lentille.

En 2022, Marcus Khuri et Jordan Rainone ont généralisé le résultat de Kunduri-Lucietti aussi loin que possible. Ils ont d'abord prouvé l'existence en cinq dimensions de trous noirs avec une topologie lenticulaire $L(p, q)$, pour toute valeur de p et q supérieure ou égale à 1, tant que p est plus grand que q, et que p et q n'ont pas de facteurs premiers en commun.

UNE HYPOTHÈSE PAS DÉRAISONNABLE

Ils sont ensuite allés plus loin encore en découvrant qu'ils pouvaient produire un trou noir ayant la forme de n'importe quel espace lenticulaire, c'est-à-dire avec n'importe quelle valeur de p et q (en respectant les conditions précédentes), dans n'importe quelle dimension supérieure. En d'autres termes, il y a un nombre infini de formes de trous noirs possibles dans un nombre infini de dimensions. Un bémol toutefois, souligne Marcus Khuri: «Lorsqu'on passe à des dimensions supérieures à cinq, l'espace lenticulaire ne devient plus qu'un élément de la topologie globale du tout.» Et le trou noir est encore plus complexe que l'espace lenticulaire le contenant, celui-ci étant déjà un défi à toute tentative de représentation visuelle.

Il y a un nombre infini de formes de trous noirs possibles dans un nombre infini de dimensions

Les trous noirs de Khuri-Rainone peuvent tourner, mais cette fois, ils ne sont pas obligés de le faire. Les solutions des mathématiciens se rapportent également à un espace-temps asymptotiquement plat. Cependant, ils ont eu recours à un champ de matière quelque peu différent (composé de particules associées à des dimensions supérieures) pour préserver la forme de leurs trous noirs et éviter les défauts ou les irrégularités qui compromettraient leur résultat. Les lentilles noires qu'ils ont construites, comme l'anneau noir, possèdent deux symétries de rotation indépendantes (en cinq dimensions) pour faciliter la résolution des équations d'Einstein. «Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice, mais qui n'est pas déraisonnable, concède Jordan Rainone. Et de toute façon, sans elle, nous n'avions pas d'article.»

«C'est un travail vraiment intéressant et original, a commenté Hari Kunduri. Ils ont montré que toutes les possibilités présentées par Greg Galloway et Richard Schoen peuvent être explicitement obtenues», une fois que les symétries de rotation précédemment mentionnées sont prises en compte.

Le mathématicien de Miami a été particulièrement impressionné par leur dernière stratégie. Pour prouver l'existence d'une lentille noire à cinq dimensions, pour un p et un q donnés, ils ont d'abord inscrit le trou noir dans un espace-temps de dimension supérieure où son existence est plus facile à prouver, en partie parce qu'il y a plus d'espace pour se déplacer autour. Ensuite, ils ont contracté leur espace-temps en cinq dimensions tout en gardant intacte la topologie souhaitée.

«C'est une idée magnifique», a admis Greg Galloway. L'avantage de cette procédure, selon Hari Kunduri, «est qu'elle est très générale et qu'elle s'applique à toutes les possibilités à la fois».

LE LHC ET LES TROUS NOIRS

Pour ce qui est de l'avenir, Marcus Khuri a commencé à chercher à savoir si les solutions des trous noirs lenticulaires peuvent exister et rester stables dans le vide sans champ de matière pour les soutenir. Un article publié en 2021 par James Lucietti et Fred Tomlinson a certes conclu que ce n'était pas possible et qu'un champ de matière était nécessaire. Toutefois, leur argument n'était pas fondé sur une preuve mathématique, mais sur des données informatiques. La question reste donc ouverte.

En attendant, un mystère encore plus grand se dresse à l'horizon. «Vivons-nous vraiment dans un monde à plus de quatre dimensions?», s'interroge Marcus Khuri. Les physiciens ont prédit que de minuscules trous noirs pourraient un jour être produits par le Grand collisionneur de hadrons (le LHC) ou par un autre accélérateur de particules encore plus puissant. Si un tel trou noir artificiel était détecté pendant sa brève durée de vie – une fraction de seconde –, et qu'on lui découvrait une topologie non sphérique, cela prouverait que notre univers a plus de trois dimensions d'espace et une de temps.

Une telle trouvaille éclairerait une autre question, un peu plus théorique. La relativité générale est traditionnellement une théorie à quatre dimensions. En explorant les trous noirs à partir de la cinquième dimension, s'enthousiasme Marcus Khuri, «nous parions sur le fait que la relativité générale est valable dans les dimensions supérieures». Reste à repérer des trous noirs exotiques, c'est-à-dire non sphériques… sachant qu'il en existe une infinité!

— L'auteur —

> Steve Nadis,
ancien chercheur à l'Institut de technologie du Massachussetts, est journaliste scientifique indépendant, spécialisé en astronomie et installé à Cambridge, aux États-Unis.

Cet article est une traduction de «Mathematicians find an infinity of possible black hole shapes», paru sur le site Quantamagazine.org le 24 janvier 2023.

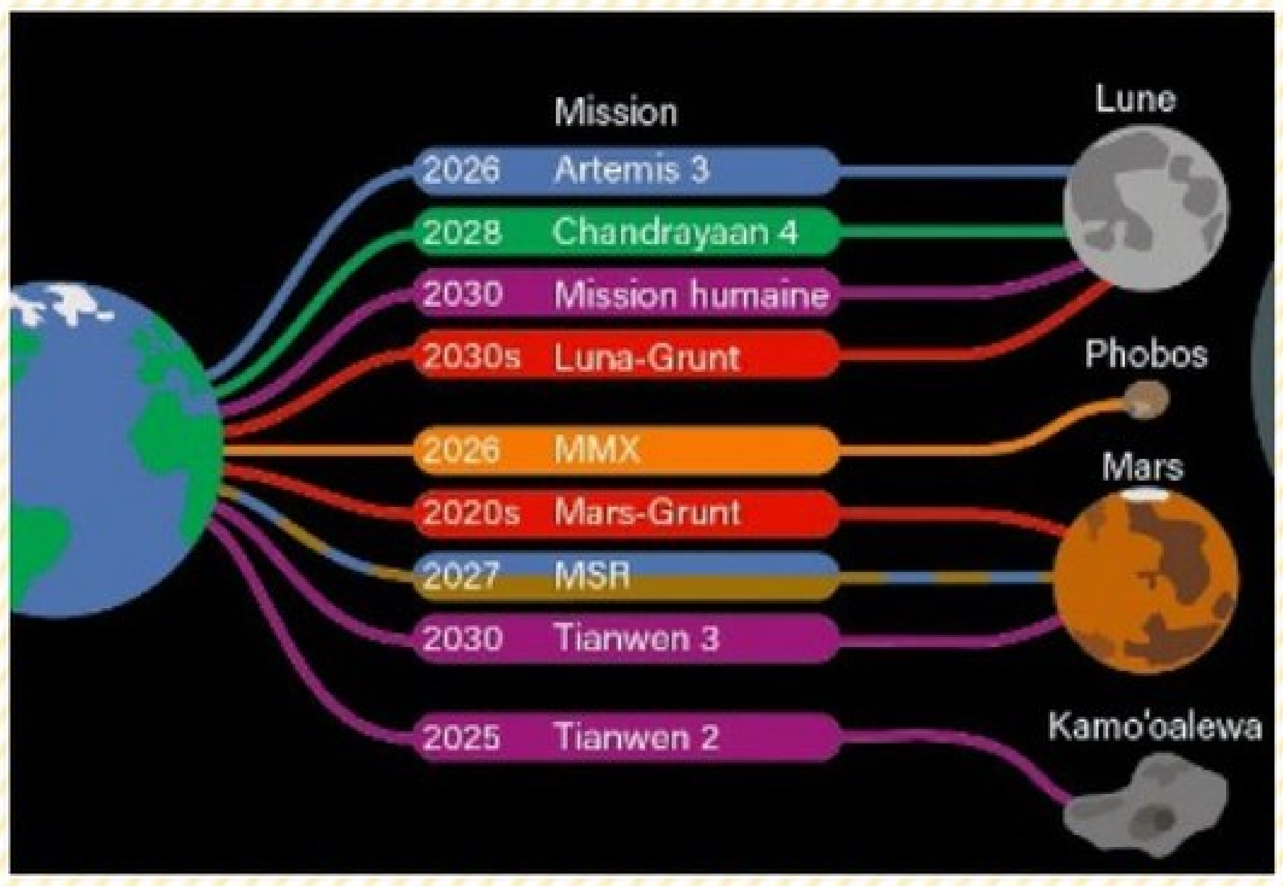
— À lire —

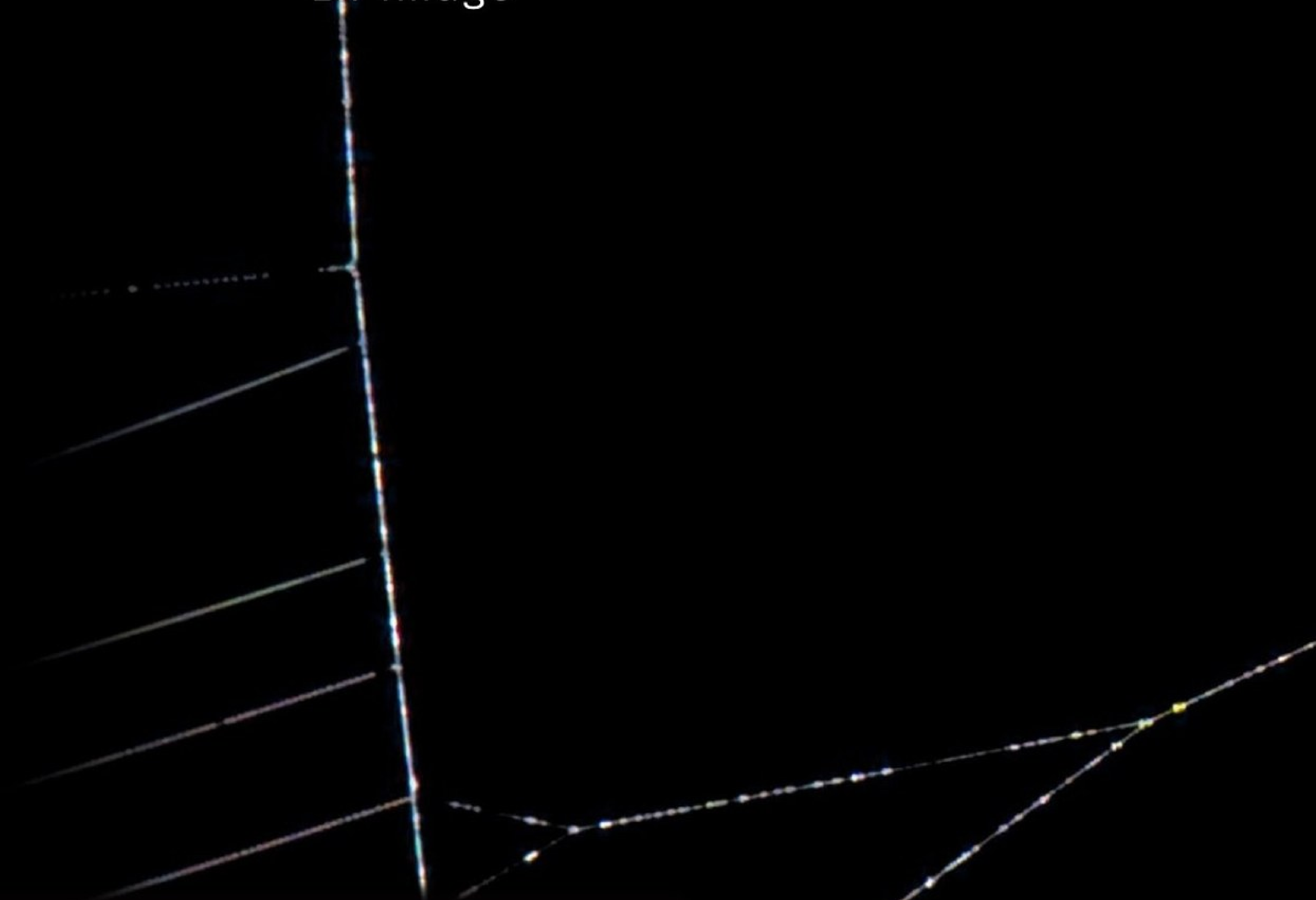
> M. Khuri et J. Rainone, Black Lenses in Kaluza-Klein Matter, *Phys. Rev. Lett.*, 2023.

> J. Lucietti et F. Tomlinson, On the nonexistence of a vacuum black lens, *J. High Energ. Phys.*, 2021.

> R. Emparan et H. Reall, A rotating black ring solution in five dimensions, *Phys. Rev. Lett.*, 2002.

RENDEZ-VOUS


Mission
Lune
2026 Artemis 3
2028 Chandrayaan 4
2030 Mission humaine
2030s Luna-Grunt
Phobos
2026 MMX
Mars
2020s Mars-Grunt
2027 MSR
2030 Tianwen 3
2025 Tianwen 2
Kamo'oalewa



L'araignée et la luciole transgenre

Tapie dans la végétation de l'Extrême-Orient asiatique, une araignée *Araneus ventricosus* (jusqu'à 3 centimètres de longueur, elle est nommée en Japonais «araignée ogre» ou «araignée diable») attend impassiblement. Elle sent soudainement sa toile vibrer : une proie ! Coup de chance, il s'agit d'une luciole mâle *Abscondita terminalis*. Mais plutôt que de se repaître immédiatement de l'infortuné coléoptère, elle va l'utiliser pour… enchaîner les repas. Comment ? L'insecte bioluminescent présente un dimorphisme lumineux, c'est-à-dire que les signaux émis diffèrent selon le sexe, notamment car les mâles sont dotés de deux «lanternes» abdominales, contre une seule pour les femelles. Une fois prise dans les rets, la proie est emmaillotée de toile, et va devenir, aux dépens de ses congénères, un «lamparo» pour l'arachnide, comme l'ont découvert Daiqin Li, de l'université Hubei, à Wuhan, en Chine, et ses collègues. Plus précisément, même immobilisée, la luciole continue d'émettre des flashs lumineux, mais de type femelle cette fois, pour attirer des mâles qui serviront de dîner. Les mécanismes de la métamorphose transgenre restent à élucider, mais les auteurs de l'étude proposent quelques hypothèses : elle résulterait de morsures ciblées dans l'abdomen, ou bien d'un effet particulier du venin sur les neurotransmetteurs de l'insecte.

Loïc Mangin

X. Fu *et al.*, Spiders manipulate and exploit bioluminescent signals of fireflies, *Current Biology*, 2024.

HORS-SÉRIE N° 123 : DANS L'INTIMITÉ DES GÉANTS

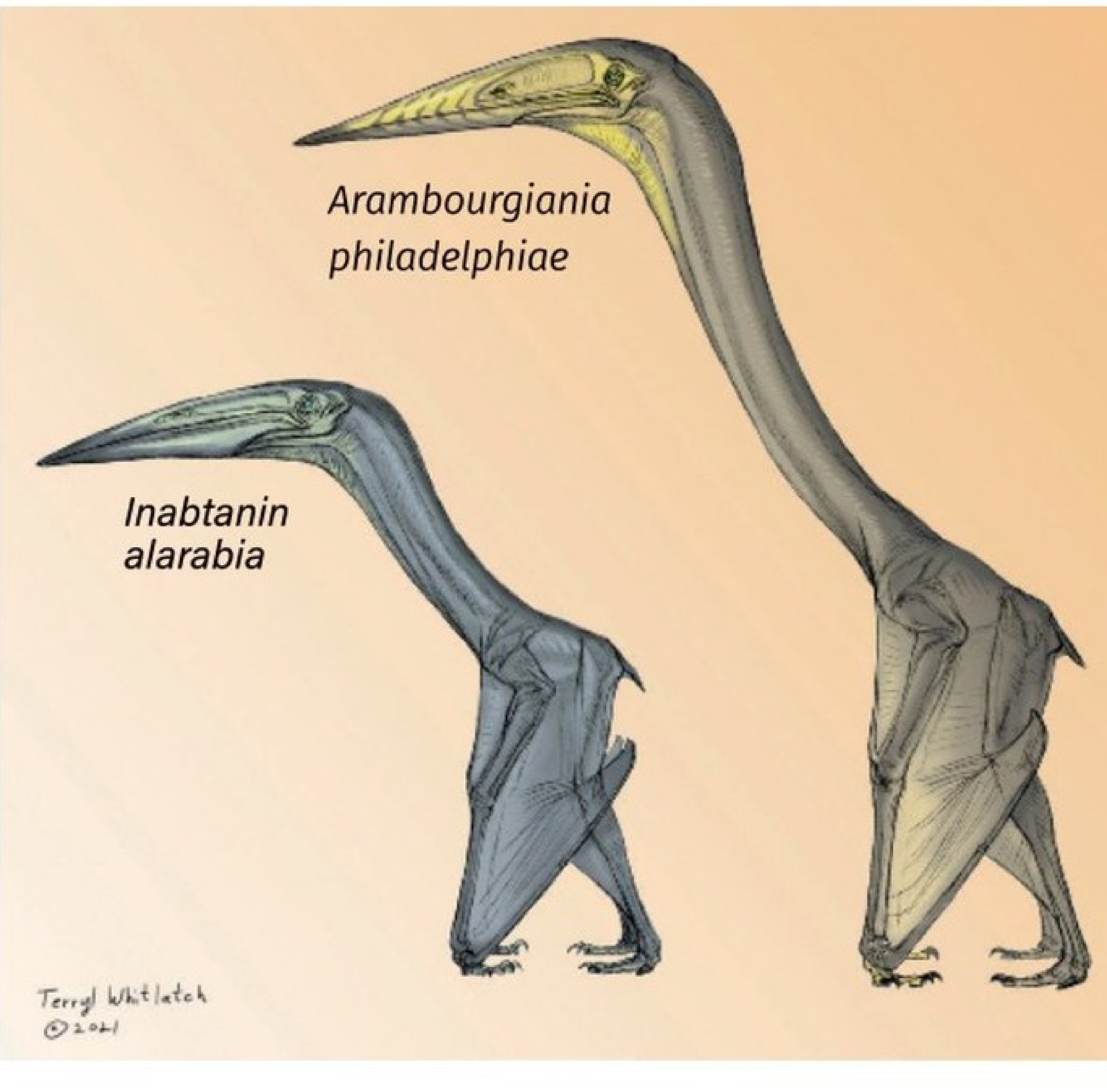
Ça plane pour eux

L'analyse d'os de ptérosaures a révélé que certains de ces reptiles pratiquaient un vol battu, tandis que d'autres, comme les vautours, planaient.

Le Mésozoïque (entre 230 et 66 millions d'années) fut l'ère des dinosaures, mais ces animaux ne régnaient que sur la terre ferme. Les cieux quant à eux étaient dominés par d'autres reptiles, les ptérosaures, que le *Hors-Série* n° 123 : « Dans l'intimité des géants » décrivait en détail.
La question du vol de ces créatures géantes à tête démesurée s'est longtemps posée, avant d'être résolue par la découverte de fossiles et des modélisations.
Oui, en levant les yeux, un tyrannosaure aurait pu voir un lointain cousin du groupe des archosaures évoluer entre les nuages. Mais de quelle façon ?
L'équipe de Jeffrey Wilson Mantilla, de l'université du Michigan, à Ann Arbor, aux États-Unis, a répondu, notamment à la faveur de la mise au jour récente de deux nouveaux spécimens du Crétacé supérieur (il y a 72 à 66 millions d'années), dont un d'une espèce nouvelle. Les éléments alaires de ces animaux volants étaient particulièrement bien conservés et toujours en trois dimensions plutôt que d'avoir été aplatis avec le temps. Une chance !
Le premier (sous la forme d'un humérus) a été dégagé des mines de phosphate de Russeifa, près d'Amman, la capitale de la Jordanie. Il appartient à l'espèce *Arambourgiania philadelphiae*, déjà connue par d'autres fossiles trouvés au même endroit. L'animal avait une envergure d'environ 10 mètres, ce qui en fait l'un des plus grands ptérosaures jamais répertoriés. Le second – un squelette partiel –, exhumé de la formation Muwaqqar, près de Tal Inab, au sud-est du pays, a été baptisé *Inabtanin alarabia* et ne faisait « que » 5 mètres d'envergure.
Le groupe s'est attaché à analyser la structure ostéologique des humérus des deux reptiles volants disparus par tomographie à haute résolution. L'os d'*Arambourgiania philadelphiae* est doté le long de la paroi intérieure de la diaphyse (la partie fine d'un os long, par opposition aux épiphyses des extrémités) d'une série d'arêtes dessinant des spirales d'un bout à l'autre de la cavité. Celui d'*Inabtanin alarabia* est radicalement différent en ce que la cavité est traversée d'étais, fonctionnant comme des poutres de renforcement.
Forts de ces résultats, les paléontologues les ont comparés à l'anatomie d'oiseaux actuels pour en déduire des informations sur le vol des ptérosaures. Conclusion ? *Arambourgiania philadelphiae* aurait été un adepte du vol plané, à la façon des oiseaux marins et vautours actuels : les arêtes en spirale augmenteraient la résistance de l'os à la torsion. De son côté, *Inabtanin alarabia* aurait surtout pratiqué le vol battu : les étais renforcent l'os soumis aux flexions.
Est-ce que le type de vol privilégié (l'un n'exclut pas l'autre chez la même espèce) est corrélé à la taille de l'animal ? D'autres études seront nécessaires pour répondre.

Loïc Mangin

K. Rosenbach *et al.*, New pterosaur remains from the Late Cretaceous of Afro-Arabia provide insight into flight capacity of large pterosaurs, *Journal of Vertebrate Paleontology*, 2024.



HORS-SÉRIE N° 124 : SCIENCE ET SPORT

Manger plus pour se dépenser plus

La mise au point d'un modèle animal pour étudier un syndrome lié à l'activité physique intense aidera à mieux le prendre en charge.

Les Jeux olympiques et paralympiques de Paris 2024 ont laissé de belles images dans la tête des spectateurs et des athlètes. Si la science a pu aider ces derniers à gagner, comme l'expliquait le *Hors-Série* n° 124 : « Science et sport », elle peut aussi leur éviter les inconvénients associés à une pratique sportive intense. De fait, depuis 2014, le Comité international olympique met en garde contre le « déficit énergétique relatif dans le sport » (noté RED-S, pour l'anglais *relative energy deficiency in sport*), qui toucherait plus de 40 % des athlètes. Il s'agit de troubles apparaissant quand la dépense énergétique, liée à l'effort intense et souvent répété, n'est pas couverte par l'alimentation : perturbations hormonales, insomnies, fatigue, ostéoporose, anxiété…

Afin de comprendre les ressorts moléculaires et cellulaires de ce syndrome, Satchidananda Panda, de l'Institut Salk pour les études biologiques, à La Jolla, aux États-Unis, et ses collègues sont parvenus à créer un modèle de souris pour mieux reproduire les effets d'une pratique sportive à haut niveau. Pour ce faire, ils ont progressivement modifié le ratio exercice/apports nutritionnels des rongeurs, plutôt jeunes.

L'étape suivante a consisté à analyser les effets de ce régime sur dix-neuf organes. Plusieurs d'entre eux rétrécissent, comme les reins et ceux de la reproduction. Par ailleurs, divers changements moléculaires et dans l'expression des gènes ont été observés, ce qui constitue des pistes pour l'identification de biomarqueurs du RED-S, plus spécifiques pour poser un diagnostic que des questionnaires. Ainsi, les recommandations pour une bonne santé ne devraient plus être « mangez moins et faites de l'exercice », mais « mangez en adéquation avec votre activité physique ».

L. M.

L. van Rosmalen *et al.*, Multi-organ transcriptome atlas of a mouse model of relative energy deficiency in sport, *Cell Metabolism*, 2024.

HORS-SÉRIE N° 122 : PHYSIQUE QUANTIQUE

Le chat d'Arrhenius

Souvenez-vous, au collège, vous avez entendu parler de la loi d'Arrhenius selon laquelle la vitesse d'une réaction chimique croît avec la température. Reformulée, on peut dire que cette vitesse dépend de la barrière énergétique entre les états initial et final de la réaction : plus elle est haute, plus il faut apporter d'énergie, par exemple de chaleur, pour la franchir. L'équipe de Michel Devoret, de l'université Yale, aux États-Unis, a conçu un système quantique qui obéit à une version quantique de la loi d'Arrhenius : un bit quantique (qubit) particulièrement robuste aux perturbations extérieures, un élément important pour les technologies de communication quantique qui étaient au cœur du *Hors-Série* n° 122 : « Physique quantique et réalité ».

Le dispositif est un circuit supraconducteur, manipulé par des microondes, et doté de deux puits de potentiel dans chacun desquels des courants électriques peuvent être « coincés ». Les physiciens sont parvenus à créer un état de superposition, comme le fameux chat de Schrödinger, où les oscillations électriques sont dans les deux puits à la fois. Cependant la durée de vie d'un tel état est soumise à l'effet tunnel : une oscillation passe spontanément d'un puits à l'autre, ruinant l'état quantique du système et donc son intérêt. En augmentant l'amplitude de l'une des entrées microondes, le groupe a réussi à accroître la barrière énergétique entre les deux puits, rendant plus difficile le passage de l'un à l'autre. L'effet tunnel n'est donc pas une fatalité.

L. M .

N. Frattini *et al.*, Observation of pairwise level degeneracies and the quantum regime of the Arrhenius law in a double-well parametric oscillator, *Phys. Rev. X*, 2024..

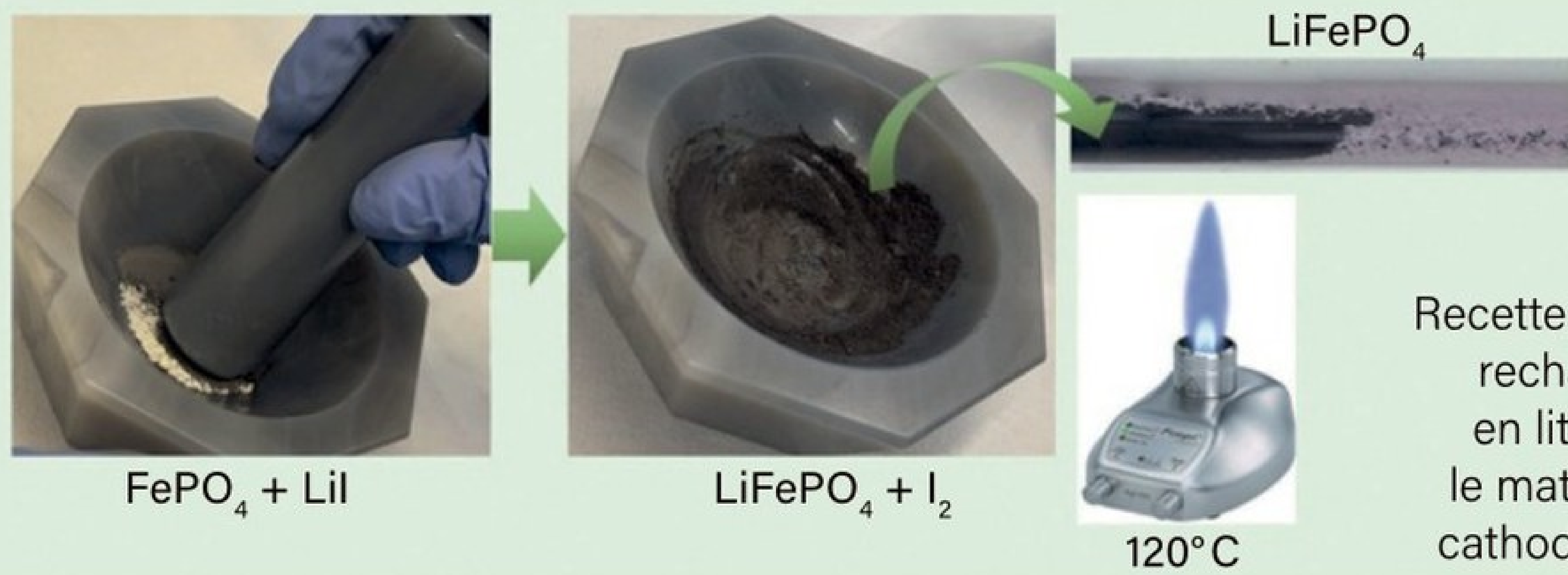
HORS-SÉRIE N° 121 : ÉNERGIES

Recycling des batteries en vue

Simple et facile à mettre en œuvre, une nouvelle technique de rechargement des cathodes en lithium pourrait favoriser l'essor du recyclage des batteries.

Le lithium est l'or du XXIe siècle, tant il est au cœur de la transition énergétique que détaillait le *Hors-Série* n° 121 : « Quelles énergies pour demain ? ». De fait, il est le composé essentiel des batteries au lithium-ion qui équipent la majorité des appareils électriques, du smartphone jusqu'au plus gros véhicule électrique. Cependant, outre que ces dispositifs basés sur cet élément chimique semblent se rapprocher de leurs limites théoriques en matière de densité d'énergie, le lithium pose des problèmes lors de son extraction. Par ailleurs, la question de la fin de vie et du recyclage des batteries se fait toujours plus prégnante. Or ce domaine n'en est qu'à ses balbutiements. La découverte de Nadir Recham, du LRCS, à l'université de Picardie Jules-Verne, à Amiens, de Moulay Tahar Sougrati, de l'ICGM, à l'université de Montpellier, et de leurs collègues est en mesure d'accélérer le mouvement. La solution tient en un mot, la lithiation, c'est-à-dire l'insertion d'ions lithium dans la structure d'un matériau.

Lorsque la batterie décharge, les atomes de lithium de l'anode se dissocient en ions Li^+ et en électrons. Ces derniers circulent dans l'appareil ainsi alimenté en électricité tandis que les premiers traversent l'électrolyte, rejoignent la cathode et se recombinent avec des électrons. Lors de la recharge, c'est le phénomène inverse qui se produit. Tout irait pour le mieux si des réactions parasites ne détournaient pas le lithium du droit chemin, le rendant inopérant, et condamnant la batterie. C'est là que la lithiation entre en scène, avec l'idée de régénérer la cathode en la « rechargeant » en lithium. Des procédés de ce type existent, mais ils ont l'inconvénient d'être gourmands en solvants et en énergie, ce qui a freiné leur généralisation, voire les fait un peu sombrer dans l'oubli depuis les années 1970.



Recette pour recharger en lithium le matériau cathodique.

La technique inédite mise au point par les chimistes évite ces écueils, car elle ne requiert aucun produit chimique autre que les réactifs et se déroule à température ambiante ! De surcroît, elle est facile à mettre en œuvre et plutôt rapide. Ils ont montré qu'il suffit de réduire en poudre du phosphate de fer $FePO_4$ (un matériau cathodique en passe de devenir dominant pour les véhicules électriques) et de le mélanger avec de l'iodure de lithium LiI pour obtenir du phosphate de fer lithié $LiFePO_4$: la réaction se fait par simple contact. Après élimination par chauffage de l'iode I_2, on obtient alors ce qu'il faut pour fabriquer une cathode rechargée qui dispose des mêmes capacités qu'une autre nouvellement construite.

Selon les chercheurs, cette méthode serait tout aussi utilisable avec d'autres matériaux cathodiques. Ces résultats offrent un nouvel espoir vers le recyclage à grande échelle des batteries, un mouvement activement encouragé par l'Union européenne.

L. M.

T. Ouaneche *et al.*, The art of lithiation revisited : Solvent-free room temperature reaction, *Energy Storage Materials*, 2024.

HORS-SÉRIE N° 124 : SCIENCE ET SPORT

Des chaussures qui courent vite

Les enfants demandent souvent des « chaussures qui courent vite ». Vœu difficile à exaucer, car les capacités physiques restent essentielles, mais la science peut néanmoins aider à améliorer les performances des sportifs, comme le dévoilaient les divers articles du *Hors-Série* n° 124 : « Science et sport ». Et c'est bien le cas des chaussures haute performance, les « super spikes » en anglais, comme l'ont montré Wouter Hoogkamer, de l'université du Massachusetts, à Amherst, aux États-Unis, et ses collègues.
Ces modèles, dotés de crampons pour mieux adhérer à la piste, se caractérisent par une semelle intermédiaire (la partie au-dessus de la zone en contact avec le sol) plus épaisse que sur une paire classique, mais plus légère et plus souple, et souvent associée à une plaque rigide en fibre de carbone, l'ensemble fournissant l'amorti à chaque foulée. Ce type d'équipement est lié depuis quelques années à nombre de records, mais comment départager son rôle de celui, par exemple, de l'entraînement ? Pour répondre, les chercheurs ont comparé les performances d'athlètes volontaires équipés de différents types de chaussures, toutes commercialisées. Résultat ? Le gain serait d'environ 2 % pour des courses de demi-fond, comme le 800 et le 1500 mètres, ce qui est considérable et peut faire la différence dans une compétition internationale. Les coureurs des prochains Jeux olympiques, à Los Angeles, savent ce qui leur reste à faire.

L. M.

M. Bertschy *et al.*, Self-perceived middle-distance race pace is faster in advanced footwear technology spikes, *Journal of Sport and Health Science*, 2024.

HORS-SÉRIE N° 123 : DANS L'INTIMITÉ DES GÉANTS

Le pont du Gondwana

Un corridor entre l'Afrique et l'Amérique a subsisté 20 millions d'années après la scission du Gondwana.

L'espèce *Homo sapiens* n'est apparue qu'il y a 300 000 ans et a connu d'importants bouleversements environnementaux, alors imaginez ce qu'il a pu en être des dinosaures, héros du Hors-Série n° 123 : « Dans l'intimité des géants », qui vécurent pendant plus de 160 millions d'années. Et, de fait, la planète a profondément changé de visage, ne serait-ce qu'à cause de la dérive des continents.
Petit rappel des faits. Pendant le Trias (250 à 200 millions d'années), un seul supercontinent, la Pangée, était émergé. Puis au Jurassique (200 à 140 millions d'années), la Laurasie se sépare du Gondwana, ce dernier se scindant au Crétacé (140 à 66 millions d'années) en Amérique du Sud et Afrique.
Ismar De Souza Carvalho, de l'Institut de géosciences, à Rio de Janeiro, au Brésil, vient préciser ce scénario, en montrant qu'un pont aurait subsisté pendant 20 millions d'années entre les deux nouveaux continents. Avec ses collègues, le paléontologue s'est penché sur des séries de 260 empreintes de dinosaures trouvées à la fois sur le « planalto da Borborema », dans le Nordeste brésilien, et dans le bassin de Koum, au nord du Cameroun. L'analyse montre que leurs formes et le contexte géologique de leur formation (elles ont été laissées dans des sédiments fluvio-lacustres) sont quasi identiques. Aussi appartiendraient-elles à des spécimens de même type (surtout des théropodes, et quelques sauropodes) et de même âge. Cependant, elles datent toutes d'il y a quelque 120 millions d'années, soit bien après le début de la formation de l'océan Atlantique. Les chercheurs en déduisent qu'un fin corridor a continué de relier l'Amérique du Sud et l'Afrique après que le Gondwana s'est désagrégé. Et que l'environnement de part et d'autre était encore suffisamment similaire pour que les reptiles puissent y vivre indifféremment.

L. M.

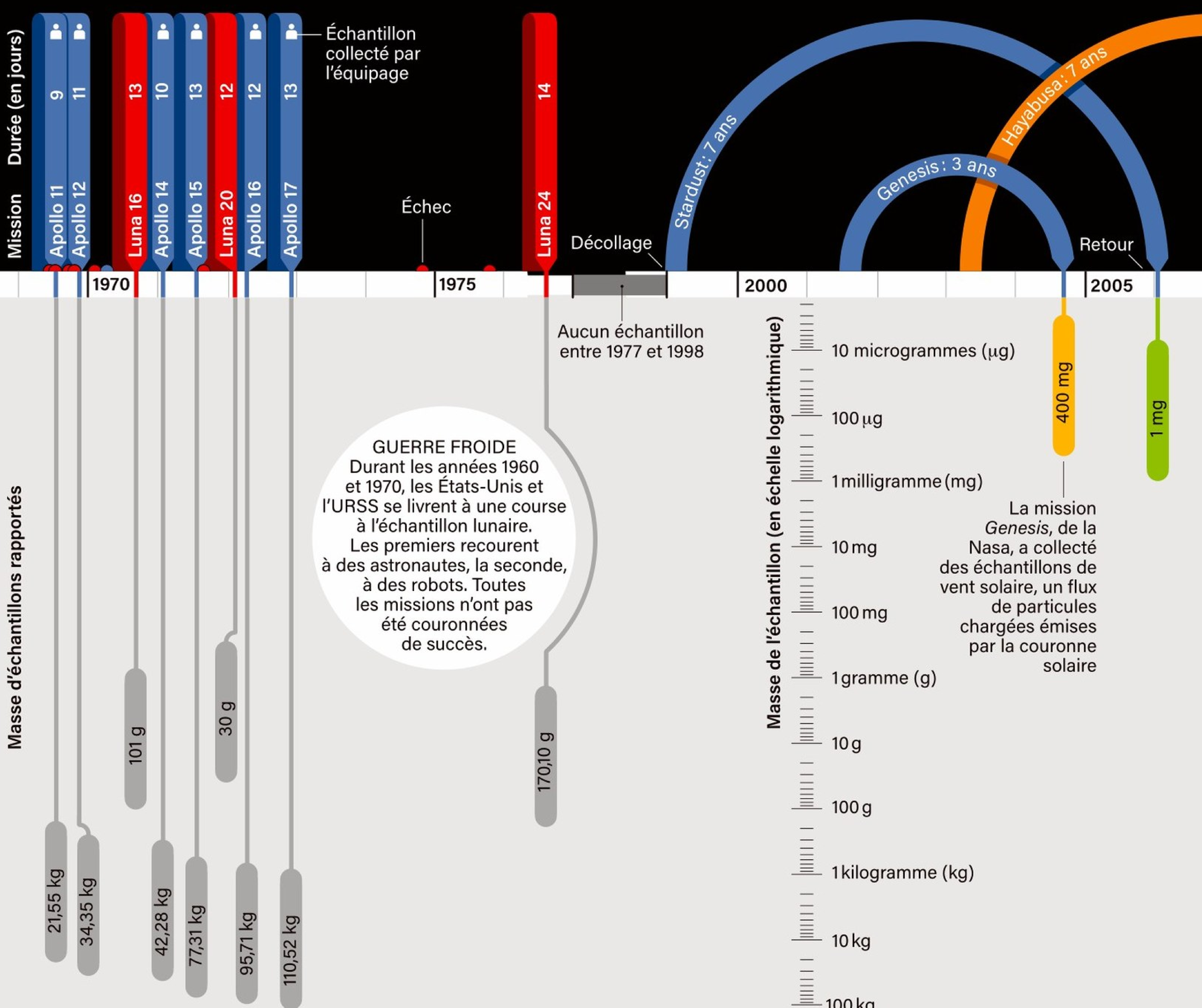
L. Jacobs *et al.*, The early cretaceous borborema-cameroon dinosaur dispersal corridor, *Vertebrate Paleoichnology*, 2024.

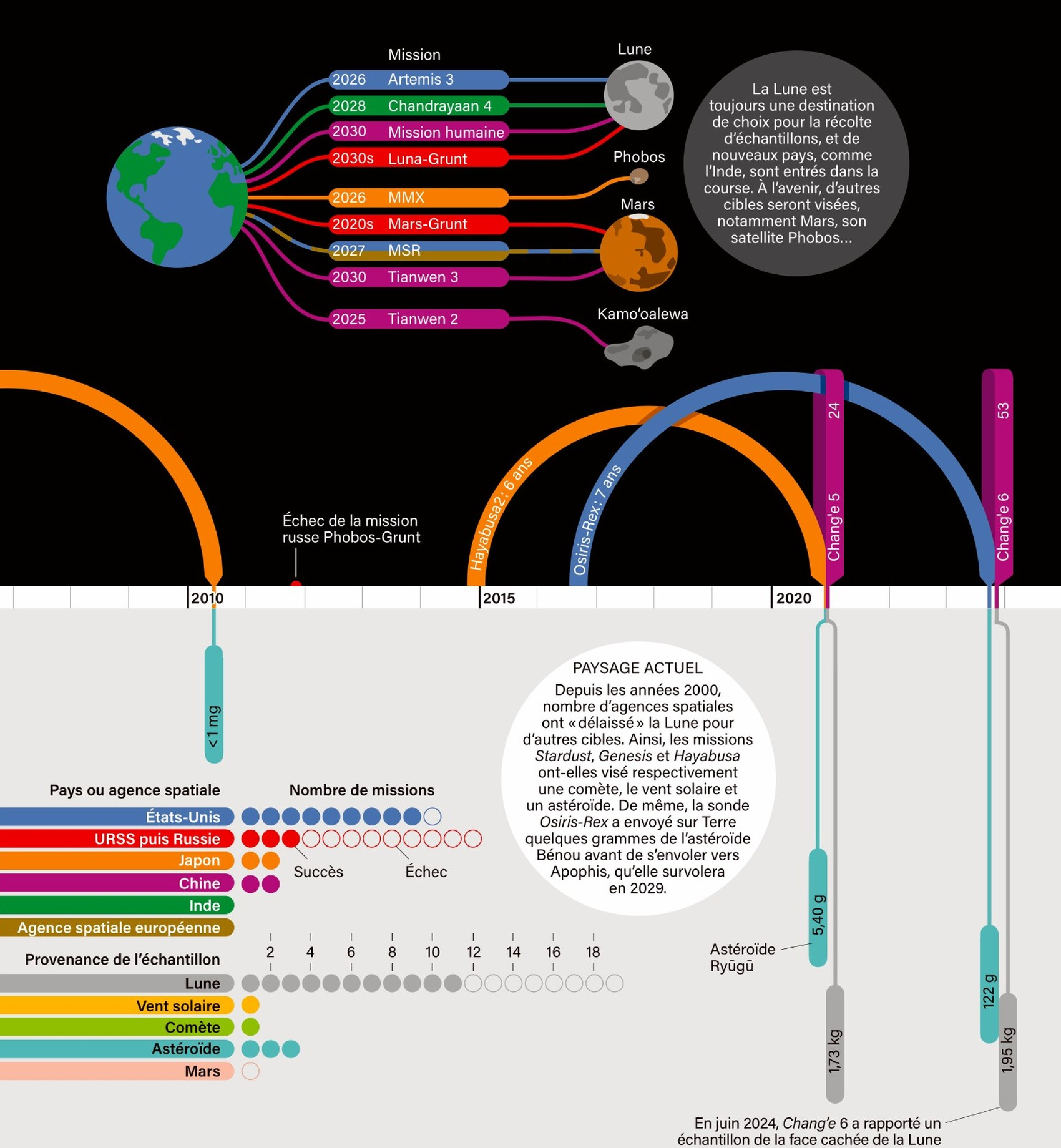
Des traces d'ornithopodes laissées dans ce qui est aujourd'hui le Brésil, il y a 120 millions d'années.

Le supermarché de l'espace

Nombre de missions ont rapporté sur Terre des échantillons de la Lune, d'astéroïdes, de comètes et même du Soleil. Prochain objectif: Mars

Texte: Clara Moskowitz – Illustrations: John Knight




Mission
Lune
2026 Artemis 3
2028 Chandrayaan 4
2030 Mission humaine
2030s Luna-Grunt
Phobos
2026 MMX
Mars
2020s Mars-Grunt
2027 MSR
2030 Tianwen 3
Kamo'oalewa
2025 Tianwen 2
La Lune est toujours une destination de choix pour la récolte d'échantillons, et de nouveaux pays, comme l'Inde, sont entrés dans la course. À l'avenir, d'autres cibles seront visées, notamment Mars, son satellite Phobos…
Échec de la mission russe Phobos-Grunt
Hayabusa2: 6 ans
Osiris-Rex: 7 ans
24
Chang'e 5
53
Chang'e 6
2010
2015
2020
<1 mg
PAYSAGE ACTUEL
Depuis les années 2000, nombre d'agences spatiales ont « délaissé » la Lune pour d'autres cibles. Ainsi, les missions *Stardust*, *Genesis* et *Hayabusa* ont-elles visé respectivement une comète, le vent solaire et un astéroïde. De même, la sonde *Osiris-Rex* a envoyé sur Terre quelques grammes de l'astéroïde Bénou avant de s'envoler vers Apophis, qu'elle survolera en 2029.
Pays ou agence spatiale
Nombre de missions
États-Unis
URSS puis Russie
Japon
Chine
Inde
Agence spatiale européenne
Succès
Échec
Provenance de l'échantillon
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Lune
Vent solaire
Comète
Astéroïde
Mars
5,40 g
Astéroïde Ryūgū
1,73 kg
122 g
1,95 kg
En juin 2024, *Chang'e* 6 a rapporté un échantillon de la face cachée de la Lune

À VISITER

Embarquement immédiat à Narbonne

Une exposition invite à explorer l'un des ports antiques les plus importants et influents de la Méditerranée occidentale, celui de la puissante capitale de la province romaine de Narbonnaise.

Vous reprendrez bien un peu de vacances ? Retrouver le charme des promenades le long des ports, l'effervescence des navires venant d'accoster... Rien de plus simple, prenez la direction de Narbonne pour parcourir non pas son port actuel, mais ses ports antiques à l'occasion d'une exposition qui leur est consacrée au musée Narbo Via. De fait, la cité de l'Aude, la Narbo Martius des Romains, fut longtemps un pivot des échanges commerciaux entre l'Italie, l'Espagne, le nord de la Gaule et les îles Britanniques : y transitaient des vins, des minerais de la Montagne noire, des céramiques... Et c'est cet héritage maritime, révélé par plus de quinze ans de recherches menées conjointement par le laboratoire Archéologie des sociétés méditerranéennes du CNRS et le Département des recherches archéologiques subaquatiques et sous-marines (Drassm – ministère de la Culture), qui est donné à voir.

« Ports » au pluriel, car il serait plus juste de parler de complexe portuaire tant les installations étaient nombreuses, réparties entre le front de mer et la ville elle-même, en plusieurs sites aux fonctions complémentaires, dont certains font encore l'objet de fouilles : l'île Saint-Martin, à Gruissan, et son phare qui guidait l'entrée dans les étangs ; Castélou-Mandirac, pour le déchargement des marchandises à l'embouchure du fleuve sur un complexe de jetées construites grâce à un système de caissons en bois remplis de matériaux divers ; Port-la-Nautique et ses très grands entrepôts, son bassin portuaire et sa villa ; enfin, le port urbain, découvert en 1991.

L'ensemble a été en activité depuis la fondation de la première colonie romaine en 118 avant notre ère jusqu'au VIe siècle. Cinq étapes marquent le parcours muséographique. D'abord, on découvre l'environnement particulièrement complexe et mouvant de l'implantation, entre fleuve, étangs, mer et marécages, qu'il a fallu apprivoiser. Puis vient le moment de replacer Narbo Martius dans le monde, au cœur d'un riche réseau de routes commerciales. Qui dit navigation intense dit naufrage, et, de fait, sept épaves emblématiques sont présentées. La troisième partie est consacrée au fonctionnement des ports et à tous les métiers qu'on pouvait y croiser. Vient ensuite le tour des techniques de navigation et la vie à bord des navires et enfin l'évolution du port jusqu'à son déclin.

En sortant, le visiteur a envie de s'embarquer. Mais avant de larguer les amarres, qu'il prenne le temps d'arpenter les riches collections permanentes du musée, inauguré en 2020, et d'explorer le « mur lapidaire » : sur une idée de l'architecte Norman Foster, 760 blocs funéraires sont présentés sur un double rack métallique (de 10 mètres de hauteur et 76 de longueur) où ils se déplacent grâce à un engin de levage automatisé. Saisissant !

Loïc Mangin

« Escale en Méditerranée romaine – Les ports antiques de Narbonne », au musée Narbo Via, à Narbonne, jusqu'au 5 janvier 2025. narbovia.fr

À ÉCOUTER

Loué soit le bug

Ou comment un dysfonctionnement impromptu d'une machine nous conduit à nous interroger sur notre asservissement aux technologies.

Lorsque votre ordinateur a récemment planté, vous l'avez voué aux gémonies et l'avez menacé de le balancer par la fenêtre. Plutôt que de céder à cet accès d'animisme enragé, vous auriez pu profiter du bug pour vous interroger sur votre rapport à la technologie, son fonctionnement et sur la vision du monde dans laquelle les Gafam nous enferment, à coups de discours se voulant rassurants et nous enjoignant, pour notre bien, à ne pas se préoccuper du « dedans ». C'est la proposition de Marcello Vitali-Rosati, invité de Xavier de la Porte dans son podcast « Le code a changé » pour son livre *Éloge du bug*, en référence à un autre appel à mettre les mains dans le cambouis, l'*Éloge du carburateur*, de Matthew Crawford, pour se reconnecter à la matérialité des objets qui nous entourent. Ainsi, selon le philosophe italien, professeur à Montréal, qui en appelle souvent à Socrate, un « bug nous oblige à nous rendre compte que le fonctionnement d'une machine quelconque est le fruit d'une série de choix qui sont orientés par des valeurs, des visions du monde, des volontés, des désirs… » En se disant que « peut-être, on aurait pu vouloir que cela marche autrement, c'est toute une multiplicité qui s'ouvre devant nous », et non plus la ligne droite de l'inéluctable. C'est un message similaire à celui de l'anthropologue Philippe Descola sur le rapport des êtres humains au reste du vivant, ou bien celui de l'archéologue David Wengrow et du sociologue David Graeber sur le sens de l'histoire de l'humanité. Rien n'est gravé dans le marbre, et il est possible de faire des choix différents, encore maintenant. C'est rassérénant de se voir ainsi convié à augmenter notre compréhension et notre maîtrise, à reprendre en mains notre monde ! Alors, au prochain raté de votre ordinateur, ne râlez pas, prenez le temps de réfléchir, l'un n'empêchant pas l'autre !

L. M.

www.radiofrance.fr/franceinter/podcasts/le-code-a-change
M. Vitali-Rosati, *Éloge du bug. Être libre à l'époque du numérique*, La Découverte, 2024.

À REGARDER

Mascarades

L'ancien monde n'est pas mort, et des traditions païennes subsistent en bien des endroits à travers l'Europe. Celles qui mettent en scène des créatures surnaturelles que des individus incarnent avec force masques et travestissements particulièrement élaborés sont l'objet du projet photographique de l'Américaine Ashley Suszczynski, plusieurs fois récompensée pour ce travail. À la façon d'un anthropologue, elle parcourt le continent pour immortaliser festivals et fêtes rituelles qui les mettent en scène. Les thèmes sont souvent communs (le cycle des saisons, la vie et la mort…), mais ils s'expriment par des coutumes vestimentaires propres, ancrées dans leurs territoires, au point d'être parfois différentes d'un village à l'autre. Elle a ainsi assisté à la Vijanera, une fête qui se déroule chaque premier dimanche de l'année à Molledo, en Cantabrie, et suivi des kukeri, des hommes costumés qui chassent les mauvais esprits dans des villages en Bulgarie *(voir la photographie ci-dessus)*.

L. M.

www.reallygoodpictures.com

À VISITER

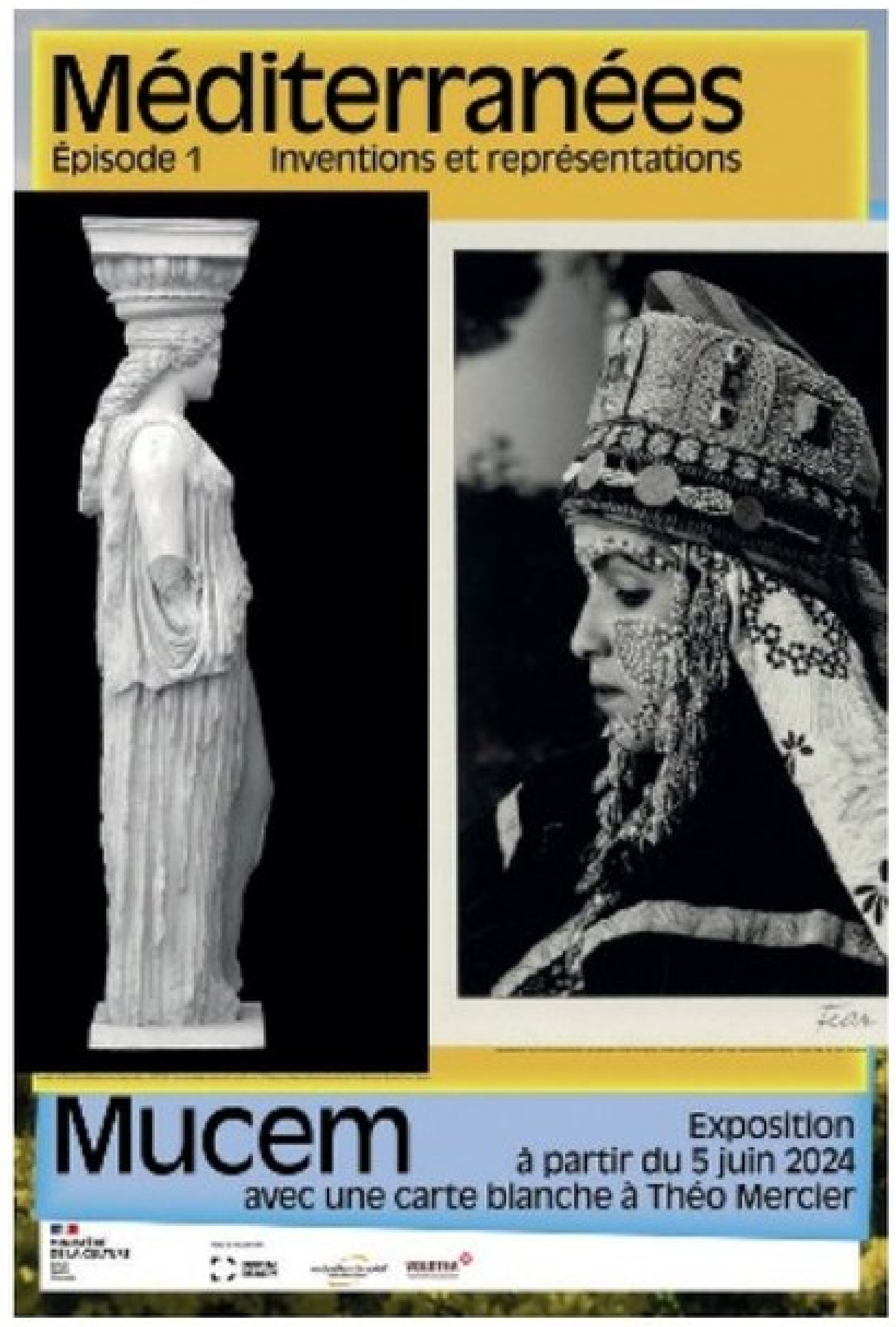
L'invention des Méditerranées

Le Mucem, à Marseille, renouvelle la présentation de ses collections permanentes pour mieux bousculer notre imaginaire sur les mondes méditerranéens.

Avec le palais du Pharo et le fort Saint-Jean, le musée des Civilisations de l'Europe et de la Méditerranée (Mucem) est, depuis son inauguration en 2013, une nouvelle sentinelle de l'entrée du vieux port, à Marseille. Consacré aux cultures de la Méditerranée, l'établissement s'est donné pour ambition de retracer, d'analyser et d'éclairer les antiques fondations de ce bassin de civilisation (22 pays pour 42 000 kilomètres de littoral), et les tensions qui le traversent jusqu'à l'époque contemporaine. Et pour remplir au mieux cette mission, il propose depuis juin 2024 un nouvel accrochage pour son parcours permanent désormais intitulé « Épisode 1 – Inventions et représentations », en refusant de choisir entre beaux-arts et ethnographie, c'est-à-dire en mêlant objets artistiques et objets populaires. L'objectif ? Grâce à plus de 300 objets et documents, dont la moitié est issue des collections du Mucem, immerger le visiteur dans une histoire de plusieurs millénaires.

Il s'agit d'interroger les imaginaires. De fait, explique Raphaël Bories, l'un des commissaires de l'exposition : « Nos collections donnent une image non seulement très partielle de la Méditerranée, mais aussi très marquée par les fantasmes et l'imaginaire. Ces représentations parfois stéréotypées dont nous montrons la construction depuis le XVII^{e} siècle n'ont pas disparu et influencent encore aujourd'hui notre regard. En donnant à voir ces imaginaires, nous essayons de les comprendre, mais surtout d'expliquer qu'il s'agit d'inventions, pas de réalités figées. »

Ainsi, la première partie du parcours montre comment le modèle antique s'est répandu dès lors qu'il a été idéalisé dès la Renaissance, à travers des ouvrages, des récits de voyages, des œuvres d'art jusqu'à irriguer les discours politiques. De fait, les nations européennes se sont très tôt réclamées des valeurs dites « classiques », pensées comme universelles, et dont la Méditerranée serait le berceau. Après tout, la Grèce puis Rome n'avaient-ils pas dominé ces régions ? Aussi, et c'est le thème de la deuxième partie, le patrimoine antique a-t-il été utilisé pour justifier la colonisation des territoires situés à l'est et au sud de la Méditerranée par ceux qui, au nord, s'érigeaient en héritiers de l'Antiquité gréco-romaine. En prendre conscience, c'est un premier pas pour bousculer les idées reçues…

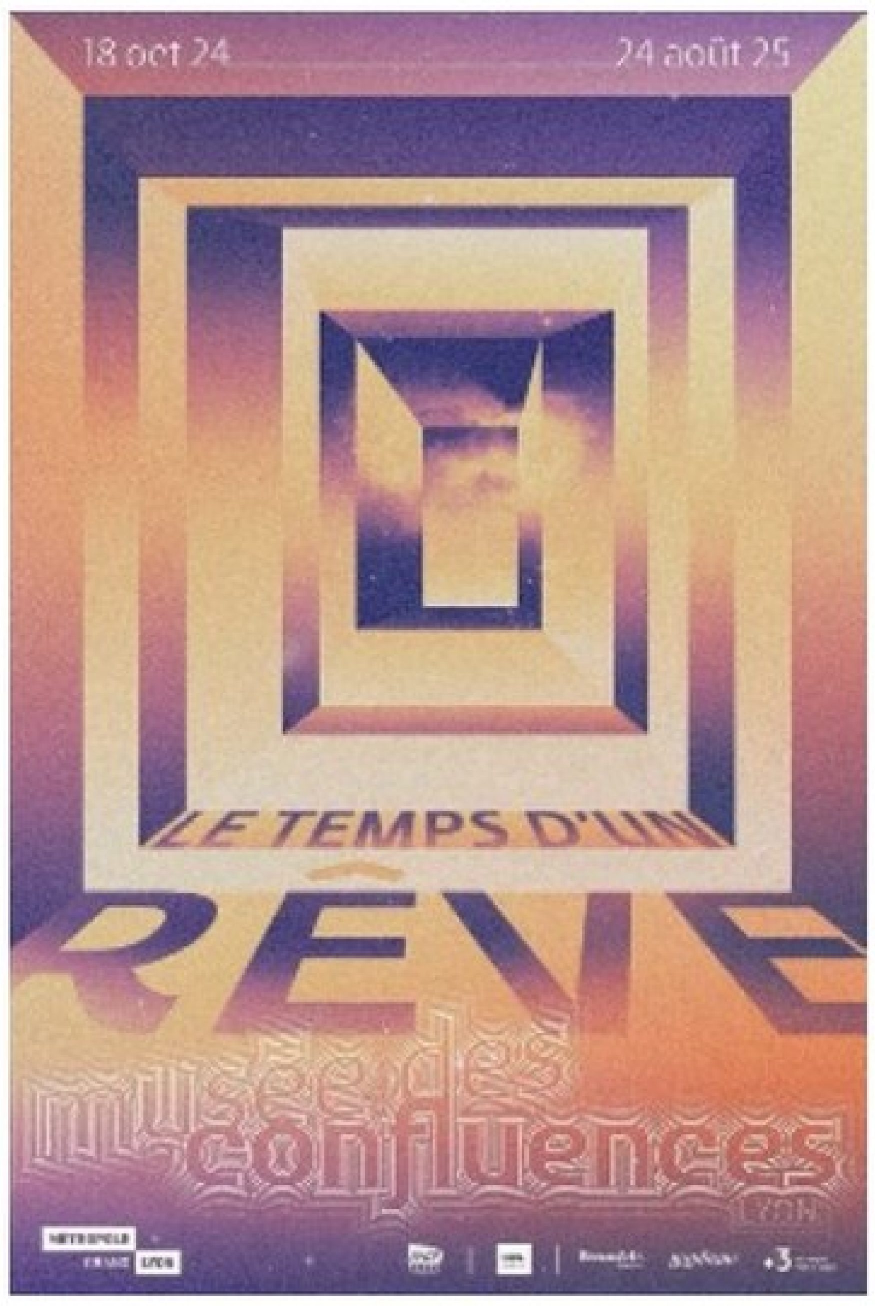


Tout au long des espaces, pour proposer une idée actuelle de la Méditerranée, le musée a offert une carte blanche à l'artiste Théo Mercier, qui a créé plusieurs œuvres autour des thématiques de la fabrique du regard et du patrimoine.

Au fait, pourquoi « Épisode 1 » ? Parce que cette exposition permanente verra sa présentation se renouveler jusqu'à l'horizon 2030 et sera régulièrement enrichie de nouveaux chefs-d'œuvre de l'histoire de l'art, de nouveaux trésors des collections et de nouvelles pièces rares. Autant d'occasions d'aller à Marseille !

L. M.

www.mucem.org



À VISITER

Bonne nuit

« J'ai fait un drôle de rêve », entend-on souvent. Faites-en un tout éveillé en visitant la nouvelle exposition du musée des Confluences, qui traite cet étrange phénomène. Toujours mal compris, il fascine depuis l'Antiquité et occupe aujourd'hui nombre de neurobiologistes qui s'attachent à en comprendre les ressorts. Dans un parcours qui multiplie les regards (historique, ethnologique, psychologique, artistique, scientifique…), le visiteur se laisse transporter dans ce que qualifiait Charles Baudelaire de « voyage aventureux de tous les soirs ». Aventureux, car synonyme parfois de cauchemars, mais l'on apprend, grâce à des travaux récents, que ce rêve qui tourne mal n'est en fait qu'un moyen de se préparer à affronter des épreuves. Rassuré ? Vous pouvez vous rendormir…

L. M.

« Le Temps d'un rêve », au musée des Confluences, à Lyon, jusqu'au 24 août 2025.
museedesconfluences.fr

À VISIONNER

Enquêtes artistiques

Une série de webdocumentaires s'attache à identifier des personnages représentés sur des œuvres d'art à l'aide d'archives en open source.

Qui est ce garçon à la peau noire que l'on aperçoit sur le portrait de la comtesse du Barry, favorite du roi Louis XV, peint par Jean Baptiste André Gautier-Dagoty ?
Qui est cette naine au premier plan des *Ménines*, aux côtés de la famille royale espagnole sur le chef-d'œuvre de Diego Velázquez ?
Quelle est l'histoire de cette femme qui apparaît au milieu d'hommes célèbres (Molière, Corneille, Racine, Jean de La Fontaine, Boileau…) sur une toile de Nicolas André Monsiau ?
Ce sont trois des six questions, pour autant de webdocumentaires en format court, auxquelles répondent Élisa Hélain, Clara Losi et Noémie Mayaudon, les réalisatrices de la série « Quelle histoire ! Enquête sur la toile », visible sur le site d'Arte.

Particularité des enquêtes menées dans chaque épisode, elles sont fondées sur l'Osint (pour *open source intelligence*, soit « renseignement basé sur des sources ouvertes »). Il s'agit de traquer sur internet tous les documents en libre accès aidant à résoudre l'énigme : en partant de la notice du tableau, sur le site du musée où il est conservé, on rebondit d'actes de naissance en certificats de propriétés, d'archives numérisées sur Gallica à d'autres à la bibliothèque du Congrès, à Washington, pour avoir le fin mot de l'histoire et plus généralement un portrait… davantage de l'époque que du seul personnage représenté. Comme en témoignent les reportages du magazine « Sources », également sur Arte.tv, l'Osint, qui nourrit de plus en plus d'investigations sur des théâtres de guerre, en cas de cyberattaques, pour lutter contre le terrorisme ou pour des enquêtes journalistiques plus « classiques », fait la preuve qu'il est aussi un outil efficace pour les historiens de l'art. C'est captivant !

L. M.

https://bit.ly/ARTE-QHESLT

HORS-SÉRIE POUR LA SCIENCE
Rédacteur en chef adjoint: Loïc Mangin

MENSUEL POUR LA SCIENCE
Rédacteur en chef: François Lassagne
Rédactrice en chef adjointe: Marie-Neige Cordonnier
Rédacteurs: François Savatier et Sean Bailly

Développement numérique: Philippe Ribeau-Gésippe
Conception graphique: Céline Lapert et Ingrid Leroy
Direction artistique: Céline Lapert
Maquette: Pauline Bilbault, Raphaël Queruel, Ingrid Leroy et Ingrid Lhande
Réviseuses: Anne-Rozenn Jouble, Isabelle Bouchery, Maud Bruguière
A contribué à ce numéro: Jean-Pierre Bourguignon

Directeur marketing et développement: Frédéric-Alexandre Talec
Chef de produit marketing et partenariats: Ferdinand Moncaut
ferdinand.moncaut@pourlascience.fr
Assistante administrative: Finoana Andriamialisoa
Direction des ressources humaines: Olivia Le Prévost
Fabrication: Marianne Sigogne et Stéphanie Ho
Directeur de la publication et gérant: Nicolas Bréon

WWW.POURLASCIENCE.FR
170 bis bd du Montparnasse
75014 Paris
Tél.: 01 55 42 84 00

PUBLICITÉ FRANCE
stephanie.jullien@pourlascience.fr

ABONNEMENTS
Abonnement en ligne:
https://www.pourlascience.fr/abonnements/
Courriel: serviceclients@groupepourlascience.fr
Tél.: 01 86 70 01 76
Du lundi au vendredi de 9 h à 13 h
Adresse postale:
Service Abonnement – Groupe Pour la Science
20, rue Rouget-de-Lisle
92130 Issy-les-Moulineaux

Tarif d'abonnement Formule Intégrale 1 an (12 numéros du magazine + 4 numéros Hors-Série + accès au site) : 99 euros
Europe / Reste du monde : consulter
https://www.pourlascience.fr/abonnements/

DIFFUSION
Contact réservé aux dépositaires et diffuseurs de presse – TBS SERVICES
Tél : 01 40 94 22 23

SCIENTIFIC AMERICAN
Editor in chief: Laura Helmuth
President: Kimberly Lau

IMPRIM'VERT®

Certifié PEFC
Ce produit est issu de forêts gérées durablement et de sources contrôlées
PEFC 10-31-1282
www.pefc-france.org

Origine du papier: Finlande · Taux de fibres recyclées: 0 % · «Eutrophisation» ou «Impact sur l'eau»: P_{tot} 0,003 kg/t

Imprimé en France – Maury imprimeur S.A. Malesherbes – N° d'imprimeur: 280 279 – N° d'édition: M0770725-01 – Dépôt légal: novembre 2024.
Commission paritaire n° 0927K82079 – Distribution: MLP – ISSN 1 246-7685 – Directeur de la publication et gérant: Nicolas Bréon.

Cet encart d'information est mis à disposition gratuitement au titre de l'article L. 541-10-18 du code de l'environnement. Cet encart est élaboré par CITEO.

TRIONS SYSTÉMATIQUEMENT

TOUS LES EMBALLAGES ET PAPIERS SE TRIENT


LE MUSÉUM NATIONAL D'HISTOIRE NATURELLE
ET L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE PARIS
ACCUEILLENT
20e FESTIVAL INTERNATIONAL
PARISCIENCE
LE FESTIVAL QUI RAMÈNE SA SCIENCE
ENTRÉE GRATUITE
LES MEILLEURS FILMS
POUR DÉCRYPTER
LA BEAUTÉ ET
LES DÉFIS DU MONDE
Scolaire / Du 8 au 18 octobre 2024
Grand Public / Du 24 au 28 octobre 2024
Muséum national d'Histoire naturelle,
Jardin des Plantes, Paris 5e
Institut de physique du globe de Paris,
1 rue Jussieu, Paris 5e
Suivez le festival en ligne / www.pariscience.fr