

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

TOUT-EN-UN

MP-PSI-PT

Jean-Dominique Mosser

*Professeur agrégé en classes préparatoires
au lycée Kléber (Strasbourg)*

Jacques Tanoh

*Professeur agrégé en classes préparatoires
au lycée Kléber (Strasbourg)*

Pascal Leclercq

*Professeur agrégé en classes préparatoires
au lycée Kléber (Strasbourg)*

DUNOD

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



© Dunod, Paris, 2010
 ISBN 978-2-10-054636-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

1	Théorie des mécanismes	1
	1.1 Paramétrer un mécanisme	2
	1.2 Approche cinématique	9
	1.3 Approche dynamique	15
	1.4 Approche globale	21
	1.5 Faut-il l'isostatisme ?	26
	Exercices d'application	28
	Exercices d'approfondissement	31
	Solutions des exercices	33
2	Description des masses en mouvement	43
	2.1 Masse – Répartition de la masse	44
	2.2 Quantité de vitesse et quantité d'accélération	52
	2.3 Énergie cinétique	62
	Exercices d'application	68
	Exercices d'approfondissement	70
	Solutions des exercices	73
3	Dynamique des solides	83
	3.1 Principe fondamental de la dynamique	84
	3.2 Notion de puissance	90
	3.3 Théorèmes énergétiques	93
	3.4 Applications du PFD	99
	Exercices d'application	104
	Exercices d'approfondissement	107
	Solutions des exercices	112

4	Systèmes asservis – Stabilité des systèmes	121
	4.1 Systèmes commandés, asservis - Perturbations	122
	4.2 Stabilité des systèmes asservis	130
	4.3 Notion de pôles dominants	139
	Exercices d'application	142
	Exercices d'approfondissement	145
	Solutions des exercices	157
5	Performances – Évaluation et amélioration	169
	5.1 Performances des systèmes asservis	169
	5.2 Améliorer les performances en corrigeant la commande	182
	5.3 Correction proportionnelle	184
	5.4 Corrections à action intégrale	186
	5.5 Corrections à action dérivée	191
	5.6 Correction PID	193
	Exercices d'application	195
	Exercices d'approfondissement	199
	Solutions des exercices	203
6	Systèmes séquentiels – Représentations Grafcet multigraphes	213
	6.1 Évolution d'un Grafcet et actions	214
	6.2 Représentation Grafcet multigraphes	224
	6.3 Grafcet et description structurée	227
	Exercices d'application	238
	Exercices d'approfondissement	246
	Solutions des exercices	247

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en deuxième année de classe préparatoire aux grandes écoles et s'inscrit dans la continuité du volume de première année. Il présente l'ensemble des notions à maîtriser pour l'analyse, le contrôle et la commande des servomécanismes dans le cadre du programme officiel des trois filières PT, PSI et MP :

- le premier chapitre expose les bases pour aborder l'analyse de la structure des mécanismes ;
- les deux chapitres suivants définissent les outils pour la description des masses solides en mouvement et des énergies mises en jeu ;
- les quatrième et cinquième chapitres s'intéressent à la stabilité et aux performances des systèmes asservis ;
- le dernier chapitre apporte les compléments requis pour préciser la commande des systèmes séquentiels.

Dès que possible, le cours s'appuie sur les notions acquises en sciences physiques et en mathématiques. Il reste concis, avec des notations simples et transversales, construites de manière à transmettre les notions abordées. Les exercices sont expliqués et corrigés de façon détaillée, avec des compléments accessibles sur le site Internet <http://www.jdotec.fr>

Les systèmes présentés à cette occasion sont des ensembles dont une étude partielle a été menée lors des concours d'entrée aux écoles d'ingénieurs, X-Cachan, Centrale-Supelec, Mines-Ponts, CCP ou E3A par exemple.

La finalité de cet ouvrage est de donner outils et méthodes nécessaires à l'approche de réalisations industrielles modernes de plus en plus automatisées. Au-delà de cette finalité, l'objectif des auteurs est de soutenir l'étudiant dans la construction d'une attitude de recherche autonome, capacité qui offre ouverture d'esprit et enrichissement sur les plans professionnel, social et humain.

Les auteurs confient aux lecteurs la tâche de retourner remarques et suggestions en adressant un courrier électronique à l'adresse s3i@jdotec.net ou un courrier postal aux bons soins des éditions Dunod. Ils souhaitent à chacun de leurs lecteurs de parvenir au niveau d'expertise leur permettant de prendre une place active dans la gestion des projets industriels complexes.

Jean-Dominique Mosser



Remerciements

La rédaction de cet ouvrage a été l'occasion de nombreux échanges autour des sciences de l'ingénieur au sein de l'équipe pédagogique du lycée Kléber à Strasbourg. Les auteurs tiennent à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ces débats interdisciplinaires, et tout particulièrement leurs deux collègues, actif ou retraité :

- Robert Vinot, solidaire et attentif au quotidien ;
- Jean-François Bonnard, pour son soutien et ses encouragements.

Plan

1.1 Paramétrer un mécanisme	2
1.2 Approche cinématique	9
1.3 Approche dynamique	15
1.4 Approche globale	21
1.5 Faut-il l'isostatisme ?	26
Exercices d'application	28
Exercices d'approfondissement	31
Solutions des exercices	33

Introduction

Les mécanismes sont des dispositifs constitués de solides assemblés pour transformer des mouvements, et pour lesquels on peut mener deux approches complémentaires :

- une approche technologique, pour l'art du choix et de l'assemblage des composants ;
- une approche mécanique, pour les outils et les méthodes de calcul à appliquer sur les modèles associés.

La théorie des mécanismes est le domaine de la mécanique qui s'intéresse à l'architecture des mécanismes et relève clairement d'une approche mécanique. Elle s'appuie sur la théorie des graphes et sur les techniques de résolution des systèmes d'équations linéaires pour atteindre trois objectifs :

- aboutir à une mise en équation ;
- évaluer les possibilités de résolution ;
- automatiser la recherche de l'influence de chacun des paramètres.

Aujourd'hui, le génie logiciel accompagne le mécanicien et on met en conséquence l'accent plus sur la compréhension des phénomènes que sur les méthodes de calcul, et on sollicite un travail d'imagination de mouvements en parallèle aux activités menées.

Prérequis

- Notion de solide indéformable.
- Graphe de structure, graphe des liaisons.
- Chaînes ouvertes et chaînes fermées.
- Degré de liberté.
- Liaisons usuelles.
- Lois de composition des mouvements.
- Techniques de résolution des systèmes d'équations linéaires.

Objectifs

- Paramétrer un mécanisme.
- Dénombrer les inconnues et les équations disponibles.
- Différencier les structures isostatiques des structures hyperstatiques.

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides et a pour buts :

- l'analyse de la structure d'un mécanisme, afin d'émettre un avis sur la pertinence des solutions adoptées pour remplir la fonction mécanique souhaitée ;
- la détermination des différentes lois entrée-sortie ;
- l'analyse de la transmission d'énergie en vue du dimensionnement des organes mécaniques.



Qui dit transformation de mouvements dit chaînes fermées de solides !

1.1 Paramétrer un mécanisme

Pour pouvoir analyser la structure d'un mécanisme, il est nécessaire de comprendre la description géométrique qui en est donnée, la plupart du temps, sous forme de schémas plus ou moins détaillés.

Définition

On appelle « **paramétrer** » l'activité qui consiste à définir variables et invariants.

D'une manière générale, l'évaluation des variations s'apprécie au cours du temps et il n'est pas inutile de préciser la définition précédente :

- les **variables** sont des quantités qui peuvent varier au cours du temps ;
- les **invariants** sont des quantités qui restent constantes au cours du temps.

Paramétrer est une activité qui concerne tous les domaines scientifiques, et le résultat s'exprime sur un schéma. Dans le cas particulier des mécanismes, si le paramétrage est effectivement donné sur un schéma cinématique, la réflexion qui accompagne son élaboration se mène à partir du graphe des liaisons :

- les variables se dénombrent à partir de l'analyse des arcs, complétée dans le cas des actions mécaniques par l'inventaire du milieu environnant ;
- les invariants sont de nature géométrique, à savoir des longueurs ou des angles caractéristiques, mis en évidence à partir de l'analyse des sommets.

1.1.1 Poser les variables

Les variables cinématiques sont implicitement posées avec les modèles de comportement choisis, c'est à dire avec les liaisons proposées, et sont plus ou moins explicitées dans les torseurs cinématiques.

Cette proposition mérite d'être détaillée et illustrée.

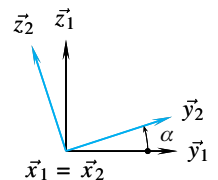
Quand elle correspond au taux de variation d'un paramètre géométrique, une variable cinématique est toujours interprétable.

Exemple

Une liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) posée entre deux solides 1 et 2 admet une possibilité de rotation que l'on peut caractériser par un angle posé entre deux bases vectorielles.

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

La variable cinématique α est sans ambiguïté la dérivée par rapport au temps de l'angle α , quantité observable et mesurable.



On rappelle qu'une possibilité de variation ne suppose pas de variations effectivement constatées.



Dans cet ouvrage, on rappelle qu'une liaison est un modèle de comportement cinématique, à ne pas confondre avec le réel.

Quand elle ne découle pas d'un paramètre géométrique, la variable est souvent impossible à interpréter.

Exemple

Une liaison sphérique de centre C posée entre deux solides 1 et 2 comporte trois degrés de liberté, que l'on ne détaille généralement pas en posant le vecteur rotation.

$$\mathcal{V}(2/1) = {}_C \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

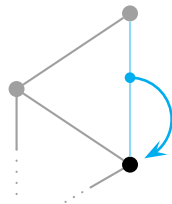
Il est toujours possible d'exprimer des coordonnées pour le vecteur rotation et de poser $\vec{\Omega}(2/1) = p_{21} \vec{x}_1 + q_{21} \vec{y}_1 + r_{21} \vec{z}_1$, mais les variables p_{21} , q_{21} et r_{21} ne sont pas les dérivées par rapport au temps d'angles posés respectivement autour de \vec{x}_1 , \vec{y}_1 ou \vec{z}_1 .

1.1.2 Rechercher les invariants

Les lois de comportement que l'on met en évidence lors d'une résolution ne sont pas universelles et ne peuvent être associées qu'aux mécanismes dont elles sont issues. Leur domaine de validité est exprimé par les caractéristiques géométriques propres à la structure étudiée. Celles-ci apparaissent sous deux formes :

- soit clairement sous forme d'invariants identifiés et nommés, à savoir des longueurs ou des angles chiffrés ;
- soit de manière plus cachée, lorsque les longueurs ou les angles concernés sont nuls, ce qui se traduit par des parallélismes ou des intersections par exemple.

La recherche des invariants géométriques est menée à partir du graphe des liaisons, en s'intéressant aux sommets et en faisant l'inventaire pour chaque solide des propriétés géométriques issues des arcs le joignant.



Quelles sont les caractéristiques géométriques induites par cette liaison ?

Les six liaisons les plus simples

Six liaisons usuelles permettent une appréhension aisée de ces propriétés géométriques. En effet, elles ne font intervenir sur chaque solide qu'un seul des éléments géométriques pris dans l'ensemble {point, droite, plan}. On résume ces caractéristiques dans un tableau.

		Solide 2		
		point	droite	plan
Solide 1	point	sphérique	sphère cylindre	sphère plan
	droite		pivot glissant	cylindre plan
	plan			appui plan

Ce tableau s'exploite en pointant à partir de la liaison la propriété à trouver sur chacun des solides.

Poser dans ce cas des coordonnées est une activité à ne mener que dans des cas très particuliers, et surtout pas de manière systématique !

Les invariants sont exprimés par la position relative des éléments géométriques sur un solide.

Exemple

À partir de la liaison cylindre-plan, on doit trouver une droite sur l'un des solides et un plan sur le second.



Les quatre autres liaisons usuelles

Les quatre autres liaisons usuelles méritent une attention particulière :

- la liaison pivot autorise une seule rotation. Sur chacun des deux solides concernés est définie une droite :
 - ces deux droites restent confondues au cours du temps ;
 - ces deux droites ne peuvent pas glisser l'une le long de l'autre.

On peut proposer comme caractéristique géométrique une demi-droite sur chacun des deux solides. Peu importe où est pris le point, mais une fois choisi, les deux demi-droites restent confondues au cours du temps.

- la liaison glissière autorise une seule translation rectiligne orientée par un vecteur. Seule la direction est caractéristique.
- la liaison hélicoïdale autorise une rotation et une translation rectiligne conjuguées par la présence d'une hélice. On se contente dans le cadre de cet ouvrage de relever l'axe de rotation commun et la valeur du pas.
- la liaison sphérique à doigt pointe sur un des solides vers un point sur une droite, et sur le second vers un point sur un plan.

Exemple d'utilisation

On considère un mécanisme de levage réalisé à l'aide d'un vérin. Il est schématisé sur la figure ci-dessous et composé de quatre ensembles :

- un châssis 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- une benne 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le châssis ;
- un vérin pour assurer la rotation de la benne par rapport au châssis :
 - le piston 3 est en liaison pivot d'axe (C, \vec{x}_1) avec le châssis ;
 - le corps de vérin 4 est en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{x}_2) avec la benne ;
 - on modélise le contact entre la tige et le corps de vérin par une liaison pivot glissant d'axe (BC) .

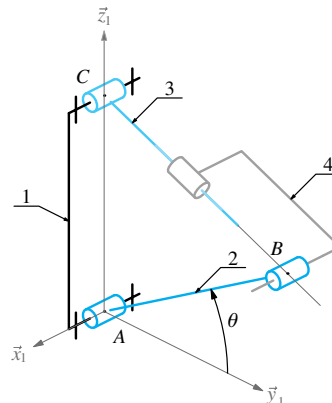


Figure 1.1 Schéma cinématique du mécanisme.



Une demi-droite correspond à un intervalle fermé d'un côté par un point P , infini de l'autre $[P, \infty[$

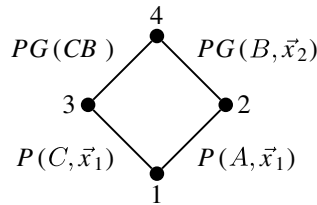


Le pas de l'hélice, souvent noté p , est un des invariants que l'on retrouve dans les calculs !



Un texte de présentation est rarement exhaustif. Un schéma cinématique est rarement complètement paramétré. L'un et l'autre sont élaborés de manière à ce que l'ensemble des informations soit accessible. En cas de doute, c'est l'absence d'information qui permet de choisir la proposition la plus simple.

On se propose d'analyser la structure décrite afin de comprendre les informations données, de faire apparaître les invariants, et enfin de compléter le paramétrage. Le graphe des liaisons comporte quatre sommets et quatre arcs

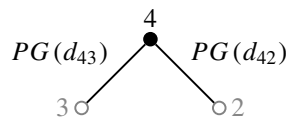


4	Corps de vérin
3	Piston
2	Benne
1	Châssis
P	Pivot d'axe (<i>Dte</i>)
PG	Pivot glissant d'axe (<i>Dte</i>)

Ce mécanisme admet six variables cinématiques, ce total étant la somme des degrés de liberté des différentes liaisons.

La recherche des invariants se mène à partir de chacun des sommets :

- on commence par le sommet attribué au corps de vérin 4, d'où partent deux arcs :

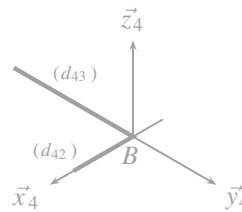


– la liaison pivot glissant vers 3 induit l'existence d'une droite d_{43} ;

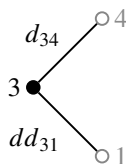
– la liaison pivot glissant vers 2 induit l'existence d'une autre droite d_{42} ;

On trouve donc sur le corps 4 deux droites d_{42} et d_{43} . L'absence d'informations complémentaires concernant ces deux droites invite à les considérer sécantes et perpendiculaires. On nomme B le point d'intersection et on associe à la pièce une base vectorielle dont les directions \vec{x}_4 et \vec{y}_4 orientent les axes de rotation.

Cette recherche est terminée, et on fait la synthèse de la géométrie du corps de vérin 4



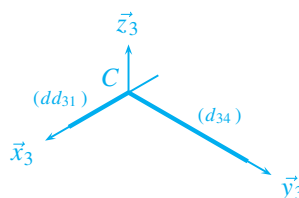
- on s'intéresse maintenant au sommet du piston 3, et aux deux arcs qui le joignent :



– la liaison pivot glissant vers 4 induit l'existence d'une droite d_{34} ;

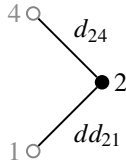
– la liaison pivot vers 1 induit l'existence d'une demi-droite dd_{31} ;

L'énoncé laisse envisager sur 3 ces deux droites sécantes et perpendiculaires. On nomme en conséquence C le point d'intersection, (C, \vec{x}_3) la demi-droite et (C, \vec{y}_3) la droite.



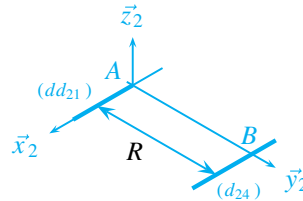
Le point d'intersection est matérialisé sur le schéma, et la perpendicularité est induite par les directions tracées.

- on poursuit par le sommet correspondant à la benne 2 :

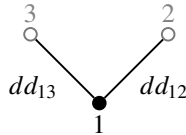


- la liaison pivot glissant vers 4 induit l'existence d'une droite d_{24} ;
- la liaison pivot vers 1 induit l'existence d'une demi-droite dd_{21} ;

Les deux droites trouvées sur la benne 2 sont parallèles : on les oriente avec le vecteur \vec{x}_2 et on pose $\overrightarrow{AB} = R\vec{y}_2$.

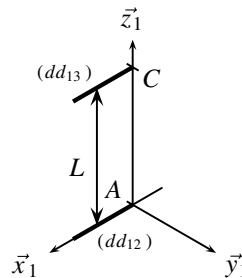


- on termine par le sommet du châssis 1 :



- la liaison pivot vers 3 induit l'existence d'une demi-droite dd_{13} ;
- la liaison pivot vers 2 induit l'existence d'une demi-droite dd_{12} ;

Les deux demi-droites trouvées sur le châssis 1 sont parallèles : on les oriente avec le vecteur \vec{x}_1 , et on pose $\overrightarrow{AC} = L\vec{z}_1$.



En conclusion, cette structure présente deux invariants explicites, la longueur L sur le châssis et la longueur R sur la benne. Toutes les autres propriétés sont implicites, sous forme de droites soit parallèles, soit sécantes et perpendiculaires.

1.1.3 Mobilité – Degré de liberté

On approfondit ici le lien qui existe entre les variables cinématiques et géométriques. Un degré de liberté a été défini dans l'ouvrage de première année comme une possibilité de mouvement entre deux solides, et il a été mis en évidence que dans l'espace géométrique de dimension 3, un solide évolue dans un espace à six degrés de liberté. Lorsqu'une variable cinématique est posée, c'est qu'il existe une grandeur géométrique qui peut varier au cours du temps :

- soit elle varie effectivement, et le taux de variation est donné par sa dérivée ;
- soit elle ne varie pas, parce que la variable cinématique correspondante est calculée nulle lors de la résolution.



Ce n'est pas parce qu'une variable est constante qu'elle ne peut pas varier !

On réalise ainsi qu'il est important de bien distinguer une possibilité de variation d'une variation effective, ce que permettent de faire les concepts mathématiques de différentielle et de dérivée.

Définition

On appelle **mobilité** la différentielle d'un paramètre de mise en position.

On ne cherche pas à évaluer la variation effective d'un paramètre, mais sa capacité à évoluer. Le terme de mobilité étant défini ainsi, on peut proposer une nouvelle définition pour la notion de degré de liberté.

Définition

On appelle **degré de liberté** une mobilité non nulle.

C'est ainsi que par rapport à un repère donné :

- un solide possède six mobilités ;
- un solide possède au plus six degrés de liberté.

1.1.4 Élaborer un schéma cinématique

On ne peut terminer cette section sans approfondir un petit peu la notion de schéma cinématique, afin de prendre en compte les nouveaux acquis.

Définition

Un **schéma cinématique** est une représentation graphique codifiée des possibilités de mouvements entre solides.

Un schéma cinématique est réalisé à partir de symboles, majoritairement normalisés, agencés en respectant les caractéristiques géométriques du mécanisme à modéliser.

Il est élaboré en trois étapes :

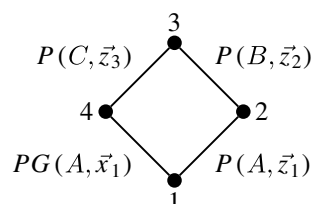
- tracé de l'épure géométrique ;
- mise en place des symboles ;
- habillage.

Épure géométrique

Cette première étape est celle qui demande le plus de réflexion. Elle s'appuie sur la recherche des invariants géométriques menée à partir du graphe des liaisons. Il s'agit tout d'abord d'inventorier les propriétés géométriques du mécanisme, ensuite de les retranscrire sur la projection souhaitée. Cette étape est illustrée à partir de l'exemple suivant :

Système bielle manivelle (1/3)

On souhaite tracer dans le plan (\vec{x}_1, \vec{y}_1) le schéma cinématique d'un système bielle-manivelle modélisé par le graphe des liaisons suivant :



4	Piston
3	Bielle
2	Manivelle
1	Bâti
P	Pivot d'axe (<i>Dte</i>)
PG	Pivot glissant d'axe (<i>Dte</i>)



Le mot **épure** admet deux sens, que l'on retrouve simultanément ici. D'une part, c'est une ébauche. D'autre part, c'est une projection d'un objet tridimensionnel sur un plan, avec les règles de tracé induites.

On précise de plus que :

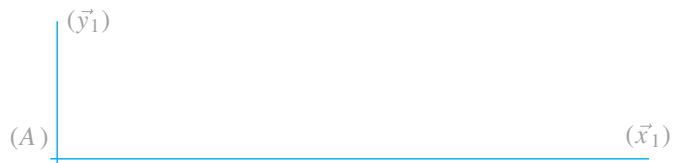
- les bases vectorielles attachées aux quatre solides 1, 2, 3 et 4 sont posées telles que $\vec{z}_4 = \vec{z}_3$, $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$ et $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$;
- le point C appartient à la droite (A, \vec{x}_1) ;
- la bielle est beaucoup plus *longue* que la manivelle.

L'analyse successive des quatre sommets conduit aux propositions suivantes :

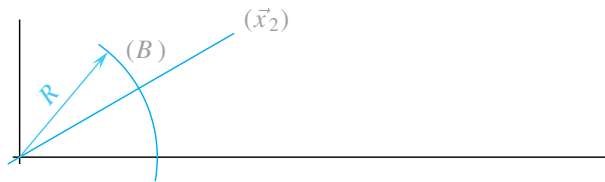
- le bâti 1 comporte au moins deux droites sécantes au point A et orthogonales ;
- la manivelle 2 comporte deux demi-droites parallèles et on pose $\vec{AB} = R\vec{x}_2$;
- la bielle 3 comporte demi-deux droites parallèles et on pose $\vec{BC} = L\vec{x}_3$;
- le piston 4 comporte au moins deux droites sécantes au point C et perpendiculaires.

L'épure géométrique se construit alors en trois étapes :

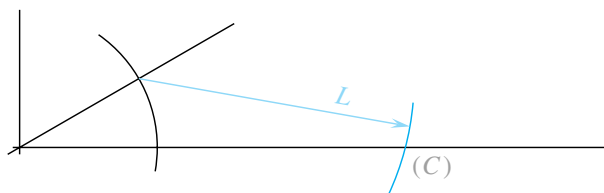
- 1) on commence par le tracé du repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ pour positionner les deux droites (A, \vec{x}_1) et (A, \vec{z}_1) caractéristiques du bâti



- 2) on trace avec un compas l'arc de cercle de rayon R caractéristique de la manivelle



- 3) on reporte enfin au compas la longueur L de la bielle à partir du point B , telle que $L \gg R$, et on trouve la position du point C par intersection de l'arc tracé avec la droite (A, \vec{x}_1)



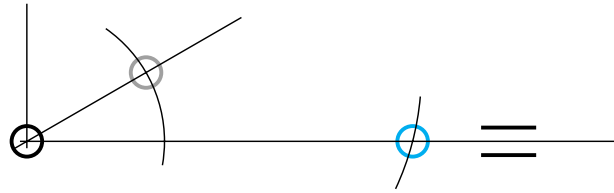
Mise en place des symboles

Les symboles se positionnent en commençant par les liaisons à contraintes géométriques les plus fortes, à savoir dans l'ordre :

- 1) les liaisons à centre, pour lesquelles le symbole est centré sur le point caractéristique ;
- 2) les liaisons à axe, pour lesquelles le symbole se positionne n'importe où le long de la droite caractéristique ;
- 3) les liaisons à direction, pour lesquelles le symbole se positionne n'importe où dans l'espace, avec comme seule contrainte de respecter l'orientation caractéristique.

Système bielle manivelle (2/3)

Les trois axes des liaisons pivot étant perpendiculaires à la feuille, il n'y a pas le choix pour tracer les cercles correspondants. Par contre, le symbole pour la liaison pivot glissant se positionne où l'on veut sur la droite (A, \vec{x}_1) .

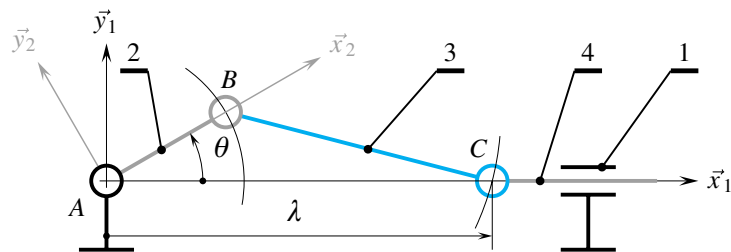


Habillage

L'habillage du schéma consiste :

- à relier les symboles entre eux ;
- à ajouter les numéros des solides et la nomenclature ;
- à matérialiser les repères attachés aux solides ;
- à poser les variables ou les invariants remarquables.

Système bielle manivelle (3/3)



Les symboles des liaisons sont bicolores, et les couleurs sont en relation avec celles des solides concernés !

1.2 Approche cinématique

Les lettres choisies font référence au nombre de pièces pour N_P et au nombre de liaisons pour N_L .

1.2.1

Nombre de cycles indépendants

La théorie des mécanismes s'appuie sur l'étude des chaînes fermées de solides. La première préoccupation est donc de les dénombrer. Soit μ ce nombre :

- le plus petit des graphes ne comporte qu'un seul sommet et il n'y a aucune chaîne fermée ;

$$\bullet$$

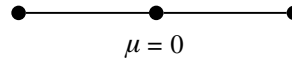
$$\mu = 0$$

- on ajoute un sommet et un arc pour obtenir la plus petite des chaînes ouvertes ;

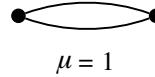
$$\bullet \text{---} \bullet$$

$$\mu = 0$$

- à partir de là, ajouter un sommet et un arc ne crée pas de chaîne fermée ;



- pour créer la plus petite des chaînes fermées à partir de la plus petite des chaînes ouvertes, il est nécessaire et suffisant d'ajouter un arc ;



C'est ainsi que l'on constate qu'ajouter un arc augmente le nombre de cycles d'une unité, alors qu'ajouter à la fois un arc et un sommet ne le change pas.

Définition

On appelle **nombre de cycles** le nombre de chaînes fermées indépendantes à parcourir pour décrire un graphe dans sa totalité.

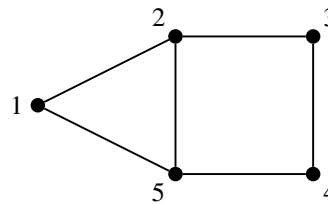
Le nombre de cycles se calcule par la formule

$$\mu = N_L - N_P + 1 \quad (1)$$

Pour la mémoriser, il suffit de se rappeler qu'il faut deux sommets et deux arcs pour la plus petite des boucles, d'où la nécessité du « +1 », et que le nombre de cycles augmente avec le nombre de liaisons, d'où les signes respectifs pour N_L et N_P .

Exemple

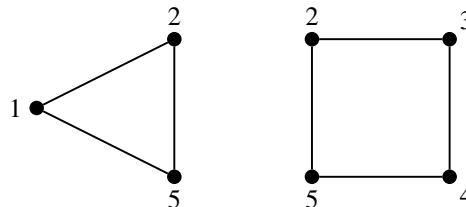
Soit un mécanisme dont le graphe de structure est donné ci-dessous



On dénombre $N_P = 5$ sommets et $N_L = 6$ arcs, ce qui donne deux cycles indépendants

$$\mu = N_L - N_P + 1 = 2$$

Ces deux chaînes fermées sont par exemple $1 - 2 - 5 - 1$ et $2 - 3 - 4 - 5 - 2$



La chaîne $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1$ est également une chaîne fermée, mais elle se déduit des deux précédentes.

1.2.2

Nombre d'équations

Une fois les chaînes fermées indépendantes dénombrées, il est possible d'évaluer le nombre d'équations scalaires disponibles pour la résolution du problème. Soit E_c ce nombre qui résulte de l'application de la loi de composition des mouvements sur chacune des chaînes indépendantes.

$$E_c = 6\mu$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, les deux équations torsorielles à considérer sont, par exemple :

- celle associée à la chaîne fermée 1 – 2 – 5 – 1 ;

$$\mathcal{V}(1/2) + \mathcal{V}(2/5) + \mathcal{V}(5/1) = \mathcal{O}$$

- celle associée à la chaîne fermée 2 – 3 – 4 – 5 – 2.

$$\mathcal{V}(2/3) + \mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(4/5) + \mathcal{V}(5/2) = \mathcal{O}$$

On obtient ainsi 12 équations scalaires. On constate par ailleurs que si l'on somme les deux équations précédentes, on obtient

$$\mathcal{V}(1/2) + \mathcal{V}(2/3) + \mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(4/5) + \mathcal{V}(5/1) = \mathcal{O}$$

Cette équation correspond bien au parcours de la troisième boucle 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 1.

1.2.3

Nombre d'inconnues

On note I_c le nombre d'inconnues cinématiques scalaires.

Ce nombre se détermine par simple somme des degrés de liberté de chacune des N_L liaisons.

Remarque

Le nombre d'inconnues cinématiques scalaires dépend de la nature des modèles adoptés pour les liaisons.

1.2.4

Indice de mobilité

Le problème du mécanicien est ainsi de traiter, voire de résoudre un système de E_c équations à I_c inconnues. Ce système est un système linéaire homogène que l'on écrit sous une forme matricielle

$$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} E_c \text{ lignes} \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] I_c = \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$



Il y a six équations scalaires par cycle !



Changer de liaisons modifie le décompte !



Le mot *indice* est à entendre comme l'entend un détective. C'est un nombre qui donne une indication, une tendance, et même quelques certitudes...



Lors de la résolution, on exprime toutes les inconnues gardées dans le membre de gauche en fonction des inconnues principales !

1.2.5

Définition

On appelle **indice de mobilité** l'entier relatif $I_c - E_c$, différence entre le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'équations cinématiques.

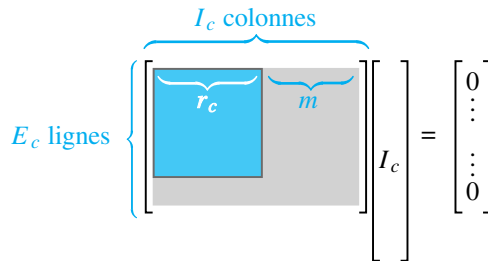
Si l'on suppose, comme le montre la figure ci-dessus, que $I_c > E_c$, on constate que l'indice de mobilité donne le nombre minimum d'inconnues qu'il faut basculer dans le second membre pour pouvoir résoudre :

- l'indice de mobilité se détermine sans écrire le système d'équations ;
- cet entier relatif est utile pour amorcer une réflexion globale.

Degré de mobilité

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté r_c . Dans le cas où $r_c = I_c$, la seule solution est la nullité de toutes les inconnues, donc de tous les paramètres cinématiques. Le mécanisme définit alors une structure rigide, aucun mouvement n'est possible.

Dans le cas contraire, on suppose connu le rang du système et les équations disposées ainsi



Définition

On appelle **degré de mobilité** d'un mécanisme le nombre de mouvements indépendants possibles. C'est un entier naturel noté m et calculé par

$$m = I_c - r_c$$

Le degré de mobilité est toujours positif ou nul. En effet, le rang d'un système de E_c équations à I_c inconnues est inférieur ou égal au plus petit de ces deux nombres, ce qui veut dire que le rang est toujours inférieur ou égal au nombre d'inconnues I_c .

$$r_c \leq \min(I_c, E_c) \leq I_c$$

Remarque

La recherche du rang du système d'équations est très instructive, car elle permet de différencier les inconnues qui peuvent devenir inconnues principales de celles qui ne le peuvent pas.

Le degré de mobilité m représente le nombre d'inconnues qu'il faut passer dans le second membre. Toutes les r_c autres inconnues du problème s'expriment ensuite en fonction de ces m inconnues principales.

C'est ainsi que l'on appelle **loi entrée-sortie** d'un mécanisme toute relation entre des inconnues cinématiques qui peut s'interpréter comme une inconnue exprimée en fonction d'une ou plusieurs inconnues principales. Un mécanisme admet au plus r_c lois entrée-sortie.



Le degré de mobilité est positif ou nul : $m \geq 0$!



Les inconnues principales ont un statut particulier pour le mécanicien : elles correspondent aux mouvements que l'on peut motoriser !

1.2.6

Degré de statisme

On constate qu'un certain nombre d'équations ne servent pas à la résolution.

On pose alors le nombre $h = E_c - r_c$ que l'on appelle degré de statisme du mécanisme :

- si ce nombre est nul, on parle d'une structure isostatique ;
- sinon, on parle d'une structure hyperstatique de degré h .

Le degré de statisme est défini lors de l'approche dynamique abordée à la section suivante, page 15. Néanmoins, on peut en donner une première interprétation cinématique : il quantifie le nombre de degrés de liberté manquants pour garantir un montage sans contrainte du mécanisme.

En conclusion des différentes définitions, on peut compléter la forme arrangée du système d'équations :

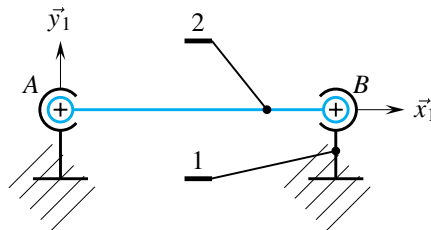
$$\begin{array}{c} E_c \text{ lignes} \end{array} \left[\begin{array}{c} \overbrace{\left[\begin{array}{cc} r_c & m \end{array} \right]}^{I_c \text{ colonnes}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_h \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.7

Exemple

Présentation

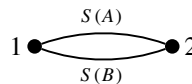
On considère l'axe intermédiaire repéré 2 d'un réducteur à engrenages. Il est guidé par rapport à un bâti noté 1 par deux roulements à billes à contact oblique. Les contacts sont modélisés par des liaisons sphérique de centres respectifs A et B .



On souhaite déterminer les degrés de mobilité et de statisme de cette structure.

Résolution

Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée de solides, et on adopte la notation $S(pt)$ pour la liaison sphérique de centre pt .



Cette structure admet un indice de mobilité nul

$$I_c - E_c = 0$$



En général, les équations qui ne servent à rien sont de la forme $0 = 0$.



L'interprétation cinématique du degré de statisme est développée sur l'exemple qui suit.

On pose les deux torseurs cinématiques pour caractériser les six inconnues cinématiques

$$\mathcal{V}(2a/1) =_A \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2a/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(2b/1) =_B \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2b/1) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

En vue d'écrire le système d'équations, on pose les composantes suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(2a/1) = p_a \vec{x}_1 + q_a \vec{y}_1 + r_a \vec{z}_1 \\ \vec{\Omega}(2b/1) = p_b \vec{x}_1 + q_b \vec{y}_1 + r_b \vec{z}_1 \\ \vec{AB} = L \vec{x}_1 \end{cases}$$

On écrit la composition des vecteurs vitesse au point B pour obtenir le système de six équations à six inconnues recherché

$$\begin{cases} p_a - p_b = 0 \\ q_a - q_b = 0 \\ r_a - r_b = 0 \\ 0 = 0 \\ r_a L = 0 \\ -q_a L = 0 \end{cases}$$

La résolution est immédiate et on en déduit les différents résultats sans avoir besoin de passer par l'écriture matricielle :

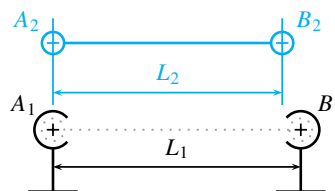
- le rang r_c est égal à 5 ;
- le degré de mobilité m est égal à 1, avec p_a ou p_b comme inconnue principale possible ;
- le degré de statisme h est égal à 1, avec une équation de la forme $0 = 0$ pour la composition des vitesses au point B scalaire \vec{x}_1 .

Interprétation

Sur les trois rotations possibles de chaque liaison sphérique, une seule le demeure au sein de la chaîne fermée.

Concernant l'hyperstatisme de degré 1, la recherche des invariants donne l'interprétation géométrique complémentaire de l'analyse cinématique :

- les points A et B sont définis sur chacun des deux solides, ce qui est caché lorsque l'on pose un peu rapidement $\vec{AB} = L \vec{x}_1$;
- la présence des deux points sur le bâti 1 conduit d'une part à poser $\vec{A_1 B_1} = L_1 \vec{x}_1$
- la présence des deux points sur l'arbre 2 conduit d'autre part à poser $\vec{A_2 B_2} = L_2 \vec{x}_2$
- les deux longueurs L_1 et L_2 sont souhaitées égales, mais proviennent de deux origines différentes et n'ont aucune chance d'être effectivement égales ;
- le fait de les imaginer différentes permet de comprendre le souci possible au montage, ce qu'illustre la figure ci-dessous sur laquelle la longueur L_1 est supérieure à la longueur L_2 . Si on suppose les points A_i superposés, alors on a un souci en translation suivant \vec{x}_1 pour superposer également les points B_i .



C'est uniquement parce que l'on souhaite écrire le système complet d'équations que l'on pose des composantes pour les vecteurs rotations : ce n'est surtout pas une habitude à prendre !



Écrire la composition des vitesses au point A donne un résultat semblable, qui entraîne bien évidemment les mêmes conclusions.

1.3 Approche dynamique



Cette approche reprend évidemment le plan de l'approche cinématique !



Les lettres choisies font référence au nombre de pièces pour N_P et au nombre de liaisons pour N_L .



En général, le bâti est considéré comme un repère galiléen satisfaisant et tous les mouvements à considérer pour cette étude exhaustive lui sont relatifs !



Le nombre d'inconnues comptées ne concerne que les liaisons, et celles-ci sont supposées sans jeu et sans frottement !



L'expression de la puissance sous forme de comoment est développée lors du cours de dynamique.



Les composantes dynamiques sont mises en évidence avec le principe fondamental de la dynamique.

Soit le graphe des liaisons connu pour un mécanisme donné, ou le graphe proposé pour un mécanisme à concevoir. On note :

- N_P le nombre de sommets du graphe ;
- N_L le nombre d'arcs du graphe.

1.3.1 Nombre d'équations

Une étude dynamique systématique est menée en étudiant le mouvement ou l'équilibre de chacune des pièces du mécanisme.

Le mouvement ou l'équilibre étant nécessairement relatif à une de ces pièces, prise comme référentiel, on dénombre alors $N_P - 1$ mouvements à considérer.

Soit E_s le nombre d'équations scalaires obtenus après une étude exhaustive.

$$E_s = 6(N_P - 1)$$

1.3.2 Nombre d'inconnues

Soit I_s le nombre d'inconnues scalaires d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites du problème.

On rappelle que la puissance dissipée par une liaison parfaite est nulle, ce qui se traduit par le comoment nul du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison et de son torseur cinématique.

$$\forall t, \quad \mathcal{V}(i/k) \otimes \mathcal{F}(k \rightarrow i) = 0$$

Une des conséquences élémentaires est que pour une liaison à k inconnues cinématiques, on a $6 - k$ inconnues d'actions mécaniques transmissibles par la liaison parfaite.

1.3.3 Indice de mobilité

On a donc à traiter un système de E_s équations à I_s inconnues de liaison. Ce système est un système linéaire avec second membre qui peut être présenté sous la forme matricielle suivante

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{I_s \text{ colonnes}} \\
 \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \end{array} \right] \\ \phantom{\left[\begin{array}{c} \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \end{array} \right]} \\ \phantom{\left[\begin{array}{c} \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \\ \phantom{\hspace{10em}} \end{array} \right]} \end{array} \right] \begin{array}{c} \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \\ \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \\ \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \end{array} = \begin{array}{c} \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \\ \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \\ \left[\phantom{\hspace{10em}} \right] \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{E_s \text{ lignes}} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{1em}}_{I_s} \qquad \qquad \qquad \text{Second} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{membre}
 \end{array}$$

Le second membre comprend :

- les composantes d'actions mécaniques extérieures autres que les composantes de liaison, telles que les composantes dues à la pesanteur, à un élément déformable, à un récepteur ou à un moteur ...
- les composantes dynamiques.

En reprenant la définition de l'indice de mobilité vue en cinématique et en tenant compte de la dualité entre cinématique et actions mécaniques qui s'exprime par l'égalité $I_C + I_S = 6N_L$, on obtient

$$\begin{aligned} I_C - E_C &= 6N_L - I_S - 6(N_L - N_P + 1) \\ &= 6(N_P - 1) - I_S \\ &= E_S - I_S \end{aligned}$$

L'indice de mobilité défini lors de l'approche cinématique se détermine également lors d'une approche dynamique par soustraction du nombre d'inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites au nombre d'équations disponibles.

$$I_C - E_C = E_S - I_S$$

1.3.4 Degré de statisme

La résolution du système d'équations précédent prend en compte son rang, noté r_s . Dans le cas $r_s = I_S$, la seule solution du système homogène associé est la nullité de toutes les inconnues, donc de toutes les composantes d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons. Cette constatation induit les deux définitions suivantes.

Définitions

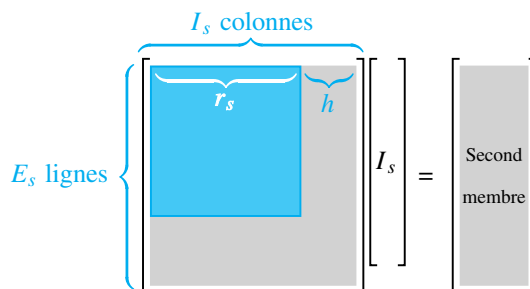
Un mécanisme est dit **isostatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, toutes les inconnues transmissibles par les liaisons supposées parfaites sont nulles.

Un mécanisme est dit **hyperstatique** si, en l'absence de sollicitations extérieures, il existe des inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites indéterminées.

Remarques

- Isostatique et hyperstatique sont des adjectifs, dont les substantifs correspondants sont respectivement *isostatisme* et *hyperstatisme*.
- Dans le cas de l'hyperstatisme, les inconnues indéterminées sont dans les faits le plus souvent non nulles.

On suppose les équations disposées ainsi



Définition

On appelle **degré de statisme** d'un mécanisme le nombre d'inconnues principales du système d'équations homogènes ne comportant que les inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites. C'est un entier naturel noté h et calculé par

$$h = I_S - r_s$$



Considérer le système homogène associé veut dire que l'on ne tient compte d'aucune sollicitation extérieure. Seules les composantes transmissibles par les liaisons sont envisagées !



Le degré de statisme se retrouve souvent sous l'appellation « degré d'hyperstatisme ». Cette expression est compréhensible et donc possible, mais elle est difficile à prononcer et abandonne le parallèle avec le degré de mobilité.

Le degré de statisme est toujours positif ou nul. En effet, le rang d'un système de E_s équations à I_s inconnues est inférieur ou égal au plus petit de ces deux nombres, ce qui veut dire que le rang est toujours inférieur ou égal au nombre d'inconnues I_s .

$$r_s \leq \min(I_s, E_s) \leq I_s$$

Un mécanisme isostatique admet un degré de statisme nul, et un mécanisme dont le degré de statisme est strictement positif est hyperstatique de degré ce nombre.

On ne peut terminer cette section sans attirer l'attention sur un point délicat à comprendre. Dans les faits, deux systèmes d'équations sont à envisager :

- le système étudié jusqu'ici, où il n'y a que les inconnues de liaison dans le membre de gauche. Ce système permet de calculer le degré de statisme de la structure étudiée ;
- le système d'équations général, pour lequel on ramène dans le membre de gauche toutes les inconnues d'actions mécaniques que l'on souhaite déterminer en plus des inconnues de liaison.

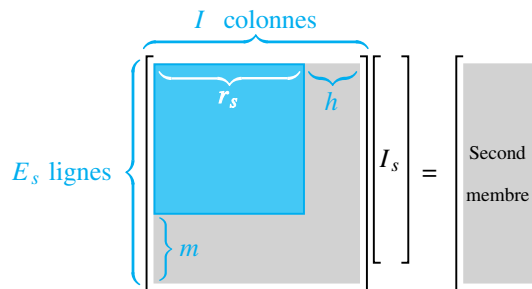
1.3.5 Degré de mobilité

Lors de l'approche dynamique, le degré de mobilité se trouve également sur le système d'équations. Il correspond au nombre d'équations superflues pour déterminer les composantes de liaison.

Remarque

Les équations ne servant pas à la résolution ne font pas intervenir de composantes d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons parfaites.

On trouve $m = E_s - r_s$ et l'ensemble des propositions peut être résumé sur la figure ci-dessous



De par la dualité entre les deux approches, on peut formuler la proposition : « Là où n'existe aucune composante de liaison apparaît une possibilité de mouvement. » Il reste à remarquer que ces équations inutiles pour la détermination des composantes de liaison ne sont pas de la forme $0 = 0$, car le second membre contient toutes les composantes d'actions mécaniques autres que celles de liaison.

1.3.6 Exemple

On reprend l'exemple développé lors de l'approche cinématique à la page 13.

Présentation

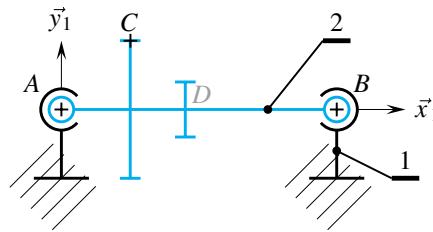
On considère l'axe intermédiaire repéré 2 d'un réducteur à engrenages :

- il est guidé par rapport à un bâti noté 1 par deux roulements à billes à contact oblique, dont les contacts sont modélisés par des liaisons de type sphérique, de centres respectifs A et B , paramétrés par $\overrightarrow{AB} = L\vec{x}_1$;

Les deux systèmes d'équations sont envisagés dans l'exemple de la section 1.3.6.

Le second membre a été détaillé à la section 1.3.3 page 15.

- il comporte un pignon qui engrène avec un arbre moteur m au point C , localisé par $\vec{AC} = c \vec{x}_1 + R \vec{y}_1$;
- il comporte également une roue dentée qui engrène avec un arbre récepteur r en un point D localisé par $\vec{AD} = d \vec{x}_1 - r \vec{z}_1$.

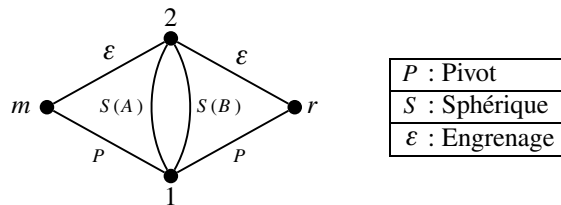


On néglige la masse et l'inertie de l'arbre 2 et le milieu environnant $\bar{2}$ retenu pour l'étude comporte alors :

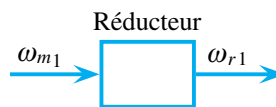
- le bâti 1 ;
- l'arbre moteur noté m ;
- l'arbre récepteur noté r ;

Compréhension du problème

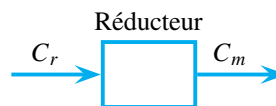
On trace le graphe des liaisons de l'ensemble du réducteur pour mettre en évidence la différence entre les inconnues de liaison à garder dans le membre de gauche et les inconnues à passer dans le second membre.



D'un point de vue cinématique, c'est le moteur qui impose le mouvement et serait à déterminer une loi entrée-sortie $\omega_{r1} = f(\omega_{m1})$, en appelant ω_{m1} et ω_{r1} les variables cinématiques associées aux deux liaisons pivot.

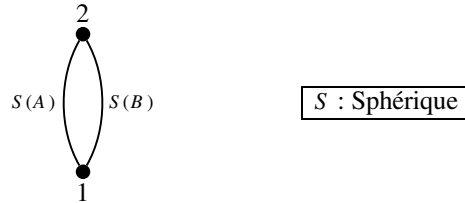


D'une point de vue dynamique, c'est le récepteur qui réclame de la puissance et serait à déterminer une loi entrée-sortie $C_m = f_1(C_r)$, en appelant C_r et C_m respectivement les couples récepteur et moteur.



Pour le mécanisme dans son ensemble, les actions mécaniques transmissibles dans les engrenages sont des actions de liaison.

Maintenant, l'objet de l'étude est ici la seule chaîne fermée 1 – 2 – 1, pour laquelle les actions mécaniques de liaison sont uniquement au niveau des liaisons de type sphérique.

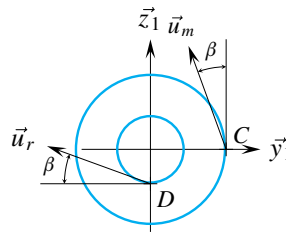


Approche dynamique

On écrit les torseurs associés aux deux liaisons et on modélise par des glisseurs les actions mécaniques transmissibles par les engrenages

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1a \rightarrow 2) &= \begin{Bmatrix} \vec{R}(1a \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A & \mathcal{F}(1b \rightarrow 2) &= \begin{Bmatrix} \vec{R}(1b \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \\ \mathcal{F}(m \rightarrow 2) &= \begin{Bmatrix} F_m \vec{u}_m \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C & \mathcal{F}(r \rightarrow 2) &= \begin{Bmatrix} F_r \vec{u}_r \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \end{aligned}$$

Les deux directions \vec{u}_m et \vec{u}_r sont dans le plan (\vec{y}_1, \vec{z}_1) et on les oriente sur la figure ci-dessous



En vue d'écrire le système d'équations, on pose les composantes des résultantes quelconques :

$$\begin{cases} \vec{R}(1a \rightarrow 2) = X_A \vec{x}_1 + Y_A \vec{y}_1 + Z_A \vec{z}_1 \\ \vec{R}(1b \rightarrow 2) = X_B \vec{x}_1 + Y_B \vec{y}_1 + Z_B \vec{z}_1 \end{cases}$$

Comme la masse et l'inertie de 2 sont négligées, on applique le théorème de l'équilibre à l'arbre 2 par rapport au repère 1 supposé galiléen et on écrit l'équation de moment par exemple au point A pour obtenir le système de six équations scalaires recherché. Tous les termes concernant les engrenages sont passés dans le second membre.

$$\begin{cases} X_A + X_B &= 0 \\ Y_A + Y_B &= F_m \sin \beta + F_r \cos \beta \\ Z_A + Z_B &= -F_m \cos \beta - F_r \sin \beta \\ 0 &= -R F_m \cos \beta + r F_r \cos \beta \\ -L Z_B &= c F_m \cos \beta + d F_r \sin \beta \\ +L Y_B &= c F_m \sin \beta + d F_r \cos \beta \end{cases}$$

La recherche des degrés de mobilité et de statisme se fait à partir du système homogène associé.



L'angle β est appelé angle de pression. Une de ses valeurs courantes est 20° .



C'est uniquement parce que l'on souhaite écrire le système complet d'équations que l'on pose ici des composantes pour les actions mécaniques. Ce n'est surtout pas une habitude à prendre sans nécessité !

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = 0 \\ Z_A + Z_B = 0 \\ 0 = 0 \\ -LZ_B = 0 \\ +LY_B = 0 \end{cases}$$

La résolution est immédiate et on en déduit les différents résultats sans avoir besoin de passer par l'écriture matricielle :

- en l'absence de sollicitation, les inconnues de liaison sont nulles, sauf les deux composantes X_A et X_B qui restent indéterminées ;
- le rang r_s est donc égal à 5 ;
- le degré de statisme h est égal à 1, avec X_A ou X_B comme inconnue principale possible ;
- le degré de mobilité m est égal à 1, avec une équation de la forme $0 = 0$ pour l'équation de moment au point A scalaire \vec{x}_1 .

On retrouve bien évidemment les résultats de l'approche cinématique, avec une contrainte de montage en translation suivant \vec{x}_1 et un mouvement possible en rotation autour de l'axe (A, \vec{x}_1) .

Résolution

Une fois la structure analysée, le mécanicien peut avoir deux centres d'intérêt :

- il souhaite déterminer la loi entrée-sortie, dans ce cas sous la forme $F_m = f_2(F_r)$;



- il souhaite connaître les valeurs des composantes d'actions mécaniques de liaison en fonction des sollicitations extérieures.

Il travaille alors avec un système d'équations où toutes les inconnues sont mises dans le membre de gauche.

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A + Y_B - F_m \sin \beta - F_r \cos \beta = 0 \\ Z_A + Z_B + F_m \cos \beta + F_r \sin \beta = 0 \\ RF_m \cos \beta - rF_r \cos \beta = 0 \\ -LZ_B - cF_m \cos \beta - dF_r \sin \beta = 0 \\ LY_B - cF_m \sin \beta - dF_r \cos \beta = 0 \end{cases}$$

C'est un système homogène de 6 équations à 8 inconnues, de rang égal à 6.

On peut donc exprimer six inconnues en fonction de deux inconnues principales. On peut montrer qu'il faut prendre X_A ou X_B pour la première et que le choix de F_r convient pour la seconde :

- la première équation conserve l'indétermination mise en évidence précédemment ;

$$X_A + X_B = 0$$

- les cinq dernières équations forment un système de cinq équations à six inconnues de rang égal à cinq, avec F_r comme inconnue principale possible ;



Le système est ici un système homogène. Ce n'est pas toujours le cas. On garde par exemple les composantes connues de pesanteur dans le membre de droite, quand elles sont retenues.



La valeur du rang est donnée sans calcul. Avis aux amateurs pour vérifier...



La loi entrée-sortie pouvait être déterminée directement. Elle est issue de l'équation scalaire qui évite les inconnues de liaison !

$$\begin{cases} Y_A + Y_B - F_m \sin \beta & = F_r \cos \beta \\ Z_A + Z_B + F_m \cos \beta & = -F_r \sin \beta \\ R F_m \cos \beta & = r F_r \cos \beta \\ -L Z_B - c F_m \cos \beta & = d F_r \sin \beta \\ L Y_B - c F_m \sin \beta & = d F_r \cos \beta \end{cases}$$

- parmi ces cinq équations, la troisième fournit la loi entrée-sortie.

1.4 Approche globale

Les deux sections précédentes ont permis de définir et de caractériser les degrés de mobilité et de statisme d'un mécanisme :

- lors d'une approche cinématique ;

$$\begin{cases} m & = I_c - r_c \\ h & = E_c - r_c \end{cases}$$

- lors d'une approche dynamique.

$$\begin{cases} h & = I_s - r_s \\ m & = E_s - r_s \end{cases}$$

Quelle que soit l'approche, on soustrait les deux équations membre à membre et on trouve

$$m - h = \underbrace{I_c - E_c}_{\text{Indice de mobilité}} = E_s - r_s$$

La différence entre les degrés de mobilité et de statisme est égal à l'indice de mobilité d'un mécanisme.

Définition

On appelle **approche globale** le raisonnement que l'on peut mener à partir de l'indice de mobilité.

L'indice de mobilité se calcule à partir des nombres d'inconnues et d'équations, et s'interprète avec les degrés de mobilité et de statisme. Le raisonnement à mener débute à l'aide de l'équation et des deux inégalités suivantes

$$\begin{cases} m - h = I_c - E_c \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Les deux situations les plus parlantes sont celles pour lesquelles l'indice de mobilité n'est pas nul :

- un indice de mobilité positif incite à imaginer des mouvements ;
- un indice de mobilité négatif incite à chercher des contraintes de montage ;
- un indice de mobilité nul ne donne aucune indication immédiate.

1.4.1

Synthèse des propositions

Les différentes propositions énoncées jusqu'ici dans ce chapitre sont disposées dans le tableau ci-après



Les auteurs privilégient en toute circonstance l'approche cinématique !



Ce tableau contient les expressions et les formules à connaître !

Nb. pièces	N_P	
Nb. liaisons	N_L	
Nb. cycles	$\mu = N_L - N_P + 1$	
Nb. mouvements		$N_P - 1$
Nb. équations scalaires	$E_c = 6\mu$	$E_s = 6(N_P - 1)$
Nb. inconnues scalaires	I_c	I_s
Rang	r_c	r_s
Indice de mobilité	$I_c - E_c$	$E_s - I_s$
Degré de mobilité	$m = I_c - r_c$	$m = E_s - r_s$
Degré de statisme	$h = E_c - r_c$	$h = I_s - r_s$
Approche globale	$m - h = I_c - E_c$	$m - h = E_s - I_s$
	Approche cinématique	Approche dynamique

1.4.2 Quelle approche privilégier ?

Toute étude commence par une approche globale. En effet, il est inutile de se lancer dans des calculs qui deviennent très rapidement complexes pour déboucher sur des conclusions triviales. Par ailleurs, il n'est pas inutile d'avoir une idée préliminaire de ce vers quoi on tend :

- pour une recherche des degrés de mobilité et de statisme, l'approche cinématique est à privilégier, et ce pour deux raisons :
 - les grandeurs manipulées sont observables et mesurables ;
 - le nombre d'équations à traiter est en général bien inférieur à celui obtenu par l'approche dynamique.
- pour une recherche de la loi entrée-sortie d'un point de vue dynamique, l'approche énergétique est à privilégier. Le théorème de l'énergie cinétique donne un résultat immédiat.
- l'approche dynamique enfin est à mener lorsque l'on cherche à dimensionner les composants d'un mécanisme. Il est alors seulement nécessaire de connaître les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

1.4.3 Les qualités d'une approche globale

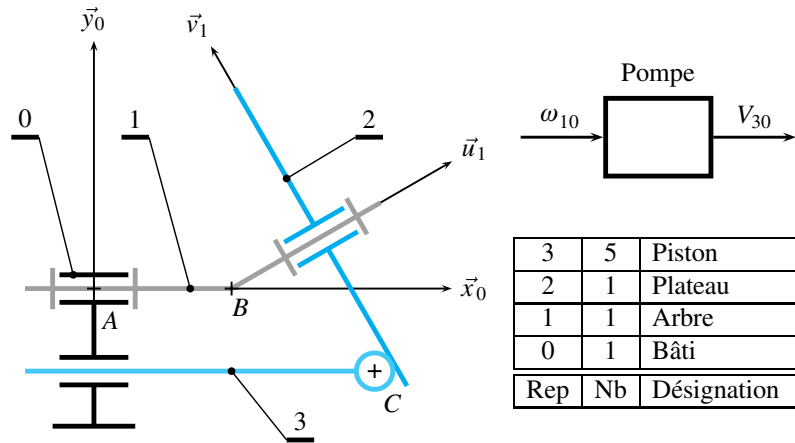
Une approche globale présente l'immense intérêt d'être rapide et sans calcul préliminaire, ce que l'on illustre immédiatement sur un exemple.

Exemple

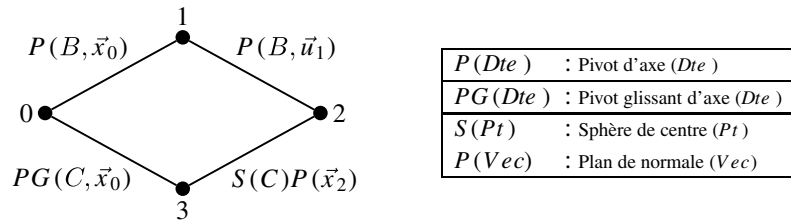
La structure que l'on se propose d'étudier est le modèle cinématique d'une pompe à pistons axiaux. Un moteur entraîne le rotation de l'arbre 1. Le débit est généré par la translation rectiligne alternative de cinq pistons 3 par rapport au bâti 0. Le schéma cinématique donné ne présente qu'un seul des cinq pistons régulièrement répartis autour de l'axe de rotation de l'arbre moteur 1.



L'approche énergétique est abordée dans le chapitre consacré à la dynamique.



La lecture et le décodage du schéma cinématique permettent l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



Ce graphe comporte une chaîne fermée de solides, ce qui permet de dénombrer les équations scalaires disponibles

$$E_c = 6$$

Le décompte du nombre d'inconnues donne

$$I_c = 9$$

On en déduit la valeur de l'indice de mobilité

$$I_c - E_c = 3$$

On interprète l'indice de mobilité à partir des degrés de mobilité et de statisme, à savoir $m - h = I_c - E_c$, et on en déduit

$$\begin{cases} m - h = 3 \\ m \geq 3 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Sans faire aucun calcul supplémentaire, on est sollicité pour imaginer au moins trois mouvements indépendants au sein de cette structure.



Même si on a du mal à imaginer les mouvements, on est sûr qu'ils sont possibles !

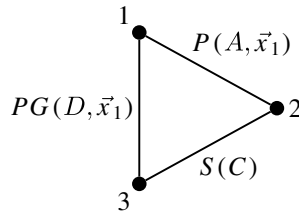
1.4.4 Les limites d'une approche globale



Sans écrire le système d'équations, seule la recherche des invariants permet de mettre en avant les différences. Mais dans ce cas, leur exploitation relève d'un travail d'imagination, ce qui ne donne pas de certitudes !

Il est acquis que toute analyse commence par une approche globale. Mais il ne faut pas oublier pour autant que cette dernière ne donne qu'un indice et que seul le système d'équations donne des certitudes.

On donne ci-dessous l'exemple de trois structures admettant exactement le même graphe des liaisons, et pour lesquelles les conclusions divergent.



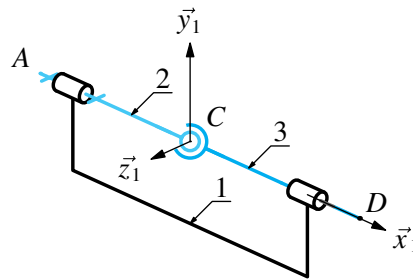
$P(Dte)$: Pivot d'axe (Dte)
$PG(Dte)$: Pivot glissant d'axe (Dte)
$S(Pt)$: Sphérique de centre (Pt)

On calcule un indice de mobilité nul, ce qui induit la proposition la moins significative :

$$\begin{cases} m - h = 0 \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Soit la structure est rigide et isostatique, soit elle admet m mouvements et est hyperstatique d'autant.

Première disposition



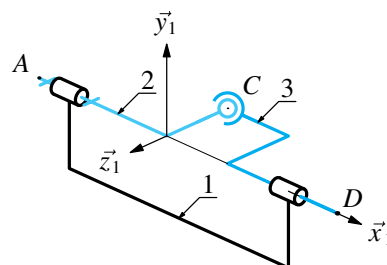
L'étude des sommets met en évidence les propriétés géométriques propres à chacun des solides :

- sur le bâti 1 sont définies deux droites confondues, à savoir (A_1, \vec{x}_1) et (D_1, \vec{x}_1) ;
- on trouve sur l'arbre 2 le point C_2 sur une demi-droite (A_2, \vec{x}_2) ;
- on trouve sur l'arbre 3 le point C_3 sur une droite (D_3, \vec{x}_3) .

On arrive à imaginer les deux rotations indépendantes des arbres d'entrée et de sortie par rapport au bâti. La structure semble alors hyperstatique de degré 2, ce que l'on interprète ainsi : On imagine la liaison sphérique *démontée*, et on utilise les degrés de liberté de la chaîne ouverte 2 – 1 – 3 pour chercher à confondre les points C_2 et C_3 :

- la translation de 3 par rapport à 1 suivant \vec{x}_1 est possible ;
- les deux contraintes sont en translation suivant \vec{y}_1 et \vec{z}_1 .

Deuxième disposition



La liaison sphérique autorise les trois rotations entre 2 et 3, il n'y a donc aucune contrainte d'orientation à rechercher.

Deux différences sont à observer par rapport à la disposition précédente :

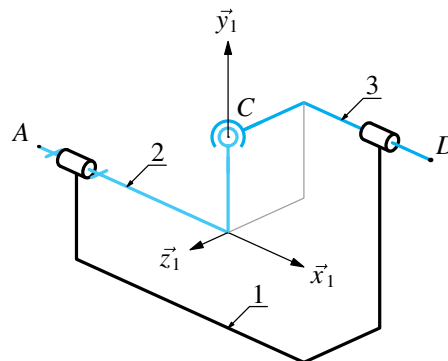
- le point C_2 n'est plus sur la demi-droite (A_2, \vec{x}_2) , il existe maintenant un premier invariant explicite, la distance R_2 du point à la droite ;
- le point C_3 n'est plus sur la droite (D_3, \vec{x}_3) , mais à une distance R_3 , deuxième invariant explicite mis en évidence.

Les deux droites du bâti étant confondues, il est nécessaire que les rayons R_2 et R_3 soient égaux pour assurer la coïncidence des points C_2 et C_3 . Pour imaginer cela, on considère à nouveau la chaîne ouverte 3 – 1 – 2 avec la liaison sphérique *démontée* :

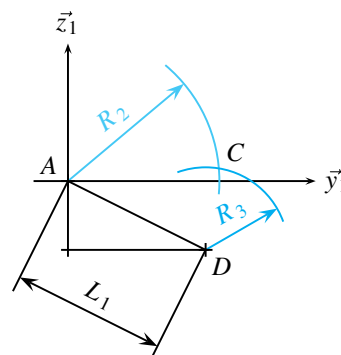
- la translation autorisée par la liaison pivot glissant permet d'amener le point C_3 dans un plan perpendiculaire aux axes de rotation contenant le point C_2 ;
- la rotation autorisée par la liaison pivot ou par la liaison pivot glissant permet d'amener les deux points sur un même rayon ;
- aucune possibilité de mouvement ne permet de rapprocher les deux points suivant le rayon où on les a placés.

Cette agencement n'autorise plus qu'un seul mouvement, la rotation de l'ensemble $\{2, 3\}$ par rapport au bâti, et est hyperstatique de degré 1.

Troisième disposition



Les deux droites du bâti ne sont dans ce cas plus confondues, mais parallèles et séparées d'une distance L_1 . On se place dans un plan parallèle à (\vec{y}_1, \vec{z}_1) pour constater qu'il n'y a plus aucune contrainte sur les longueurs. Dans ce cas, on peut montrer que la structure est effectivement isostatique et rigide.



Il n'est envisagé que des valeurs pour lesquelles l'intersection est possible
 $R_2 - R_3 < L_1 < R_2 + R_3$

1.5 Faut-il l'isostatisme ?



Pour montrer la plus grande rigidité d'une structure hyperstatique, il est nécessaire de mettre en œuvre des outils issus de la résistance des matériaux.

On termine ce chapitre en éveillant le lecteur aux qualités respectives de l'isostatisme et de l'hyperstatisme :

- pour une fonction mécanique souhaitée, une structure isostatique est plus économique qu'une structure hyperstatique ;
- une structure hyperstatique est plus rigide qu'une structure isostatique.

En effet, les contraintes géométriques mises en évidence dans le cas de l'hyperstatisme induisent soit une qualité de fabrication plus grande, soit la mise en place de réglages sur le mécanisme. On sait tout à fait réaliser et l'un, et l'autre, mais cela a un coût. En conclusion, on peut dire que l'hyperstatisme est un choix réfléchi qu'il est nécessaire de financer quand les critères de performances ne sont pas atteints avec une structure équivalente isostatique.

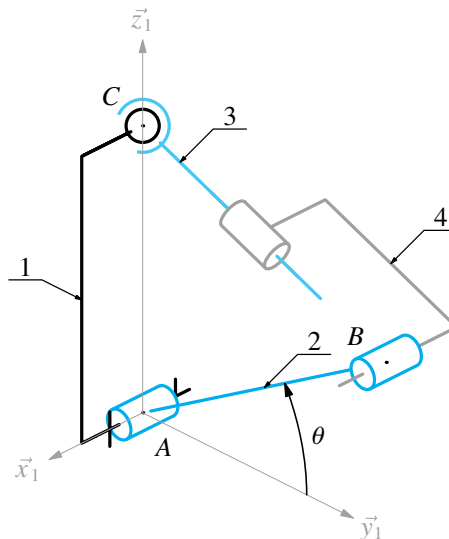
Chercher à rendre une structure isostatique est une activité qui sollicite l'imagination et que l'on illustre sur un exemple.

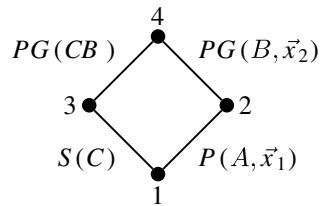
Exemple

On reprend le mécanisme de levage proposé à la page 4, lequel présente un indice de mobilité nul. On souhaite rendre sa structure isostatique, sachant que l'on ne peut pas toucher à toutes les liaisons :

- la liaison pivot entre la benne 2 et le châssis 1 doit rester *robuste* ;
- l'actionneur reste le vérin proposé.

Il est nécessaire d'ajouter des degrés de liberté au niveau des accroches du vérin. On propose ainsi une liaison sphérique entre la tige 3 et le châssis 1 à la place de la liaison pivot initiale.





P	Pivot d'axe (<i>Dte</i>)
PG	Pivot glissant d'axe (<i>Dte</i>)
S	Sphérique de centre (<i>Pt</i>)

On a ajouté deux degrés de liberté au sein de la structure, pour passer d'un indice de mobilité nul à un indice de mobilité égal à deux.

$$\begin{cases} m - h = 2 \\ m \geq 2 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Il y a au moins deux mouvements indépendants à imaginer ...

On peut poursuivre ce travail de réflexion en utilisant les degrés de liberté de la chaîne ouverte 1 – 2 – 4 – 3 pour essayer de confondre les points C_1 et C_3 . Cela semble possible et on peut supposer la structure isostatique.

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- sommets et arcs d'un graphe ;
- cycle ;
- paramétrer ;
- variables et invariants ;
- mobilité ;
- indice de mobilité ;
- degré de mobilité ;
- degré de statisme ;

- isotatisme et hyperstatisme ;
- approche globale.

Je connais :

- les liaisons usuelles sous leurs aspects géométrique, cinématique et dynamique ;
- la différence entre une approche cinématique et une approche dynamique ;
- la représentation matricielle d'un système d'équations.

Savoir-faire

Je sais :

- tracer un graphe de structure sans que les arcs ne se croisent ;
- dénombrer les cycles ;
- paramétrer un mécanisme ;
- déterminer l'indice de mobilité attaché à une structure ;
- proposer des minorants pour les degrés de mobilité et de statisme.

Exercices d'application

1.1 Un espace à six degrés de liberté

L'espace géométrique dans lequel évoluent les objets est de dimension 3. La position d'un point dans cet espace est ainsi caractérisée par trois coordonnées. Un solide est un ensemble infini de points et une question se pose :

« Combien faut-il de paramètres scalaires indépendants pour définir la position d'un solide dans l'espace ? »

Répondre à la question précédente par une approche géométrique, à partir de la définition d'un solide indéformable.

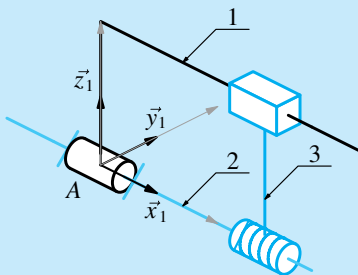
1.2 Forme des systèmes d'équations

On considère un mécanisme comportant une structure mobile et isostatique.

1. Donner la forme du système d'équations obtenu par une approche cinématique.
2. Recommencer pour une approche dynamique.

1.3 Système vis-écrou

On se propose d'analyser un système de transformation de mouvement utilisant l'association d'une vis et d'un écrou.



Ce mécanisme comporte trois solides :

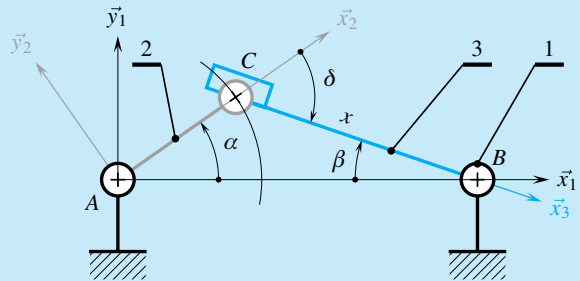
- un support 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un écrou 3, guidé en translation rectiligne par rapport au support par une glissière de direction \vec{x}_1 ;
- une vis 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le support et en liaison hélicoïdale de même axe avec l'écrou.

1. Paramétrer ce mécanisme.
2. Un moteur entraîne la vis par rapport au support et l'écrou est accroché à un récepteur. Déterminer la loi entrée-sortie.
3. On souhaite un déplacement suivant $+\vec{x}_1$ du récepteur lors de la rotation positive du moteur. Déterminer le sens à imposer à l'hélice de la liaison hélicoïdale.
4. Évaluer le degré de statisme de cette structure.

1.4 Un raccourci un peu trop rapide ?

En parcourant un livre de mécanique, un étudiant découvre un énoncé qui commence ainsi :

« Beaucoup de mécanismes s'appuient sur un triangle déformable. On se propose d'aborder cette structure à partir de l'exemple proposé ci-dessous.



Ce mécanisme est composé de trois solides :

- un bâti 1 auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On pose $\vec{AB} = b \vec{x}_1$;
- un bras moteur 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1 :
 - on lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et la rotation possible est paramétrée par l'angle α ;
 - on définit le point C par $\vec{AC} = c \vec{x}_2$.
- un bras récepteur 3, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec le bâti 1 :
 - on lui associe un repère $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_1$ et la rotation possible est paramétrée par l'angle β ;
 - il est aussi en liaison sphère cylindre de centre C et d'axe (B, \vec{x}_3) avec le bras 2, et on pose $\delta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ et $\vec{BC} = x \vec{x}_3$.

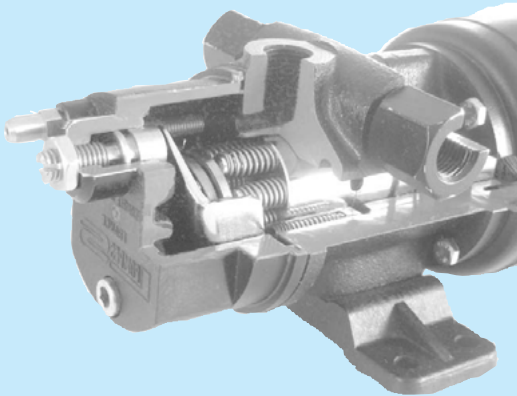
Le problème ainsi posé comporte quatre paramètres dépendant du temps : α, β, δ et x »

L'objectif de cet exercice est de comprendre cette dernière affirmation.

1. Réaliser le graphe de liaison du mécanisme et dénombrer les inconnues cinématiques. Ce dernier nombre est-il compatible avec la donnée de quatre paramètres géométriques dépendant du temps ?
2. Que représente le vecteur \vec{BC} ?
3. Définir les torseurs cinématiques associés aux liaisons.
4. Justifier l'angle δ posé sur le schéma cinématique entre les vecteurs \vec{x}_2 et \vec{x}_3 et conclure.

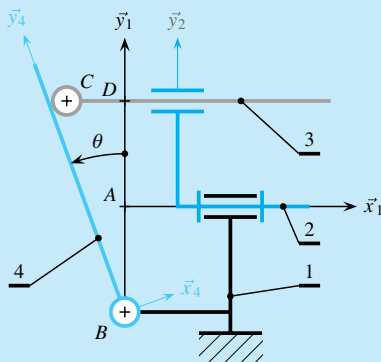
1.5 Pompe Rv2

On s'intéresse à la pompe Rv2, extraite du groupe hydraulique V2H40 développé par la société LECOMBLE ET SCHMITT. C'est une pompe volumétrique à cylindrée variable, construite autour d'un barillet tournant à six pistons axiaux.



Écorché de la pompe.

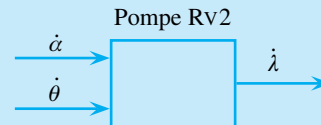
Ce mécanisme est modélisé par un ensemble de quatre solides lorsque l'on ne tient compte que d'un seul piston :



- le bâti 1, auquel est associé le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, sur lequel on définit un point B caractérisé par $\vec{AB} = -R\vec{y}_1$.
- le barillet 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti :
 - une base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est attachée à 2, telle que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
 - on définit sur ce barillet un point D , tel que $\vec{AD} = R\vec{y}_2$.
- un plateau 4, en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_1) avec le bâti ;
- un des pistons 3, en liaison pivot glissant d'axe (D, \vec{x}_3) avec le barillet 2 :
 - on pose un point C dont la position par rapport au barillet est exprimée par $\vec{DC} = \lambda\vec{x}_3$.
 - ce piston 3 est également lié au plateau 4 par une liaison sphère-plan de centre C et de normale \vec{x}_4 .

On s'intéresse au statisme de cette structure.

1. Calculer l'indice de mobilité de cette structure.
2. Formuler un avis sur son statisme.
3. Énoncer les caractéristiques géométriques propres à chacun des solides.
4. Déterminer la loi entrée-sortie de la pompe.



1.6 Pompe de préparation

On considère le schéma cinématique de la pompe de préparation d'un système de dialyse. La rotation de l'arbre moteur 2 est transformée en translation rectiligne alternative du piston 3 sans pièce intermédiaire.

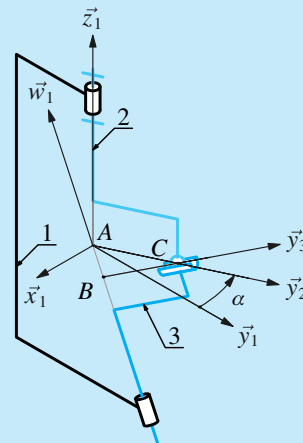


Schéma cinématique de la pompe de préparation

Photos et références complémentaires disponibles sur www.jdotec.net.

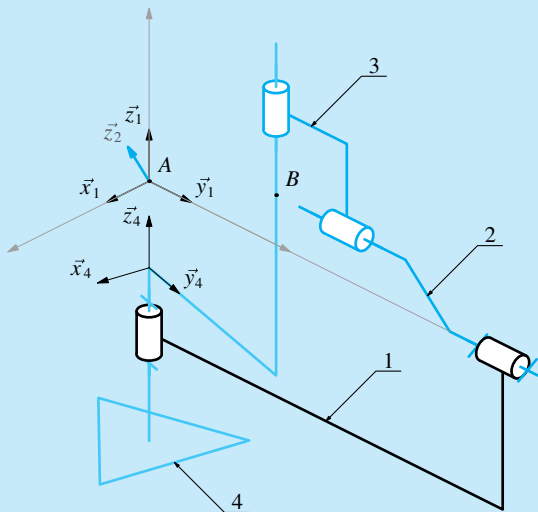
Ce mécanisme comporte trois ensembles solides :

- Le bâti 1, auquel est associé le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On définit dans le plan $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ la droite (A, \vec{w}_1) orientée par l'angle $\theta = (\vec{z}_1, \vec{w}_1)$.
- L'arbre moteur 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti. Une base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est attachée à 2 tel que $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Enfin, on définit sur cet arbre un point C , situé à la distance r de l'axe de rotation, dont le projeté orthogonal sur l'axe de rotation est noté K .
- Le piston 3, en liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{w}_1) avec le bâti 1. Ce piston 3 est également lié à l'arbre 2 par une liaison sphère-cylindre de centre C et d'axe sécant au point B et perpendiculaire avec l'axe de la liaison pivot glissant.

1. Calculer l'indice de mobilité de cette structure.
2. Formuler un avis sur son statisme.
3. Rechercher les invariants géométriques et énoncer les caractéristiques géométriques propres à chacun des solides.
4. Proposer l'épure d'un schéma cinématique dans le plan $(A, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans les deux cas suivants :
 - les points A et K sont confondus ;
 - les points A et K sont disjoints.

1.7 Ponceuse portable vibrante

On considère une ponceuse portable vibrante dont le fonctionnement est modélisé par le schéma cinématique ci-dessous. La rotation continue à 3000 tr/mn de l'arbre moteur 2 par rapport au bâti 1 est transformée en rotation alternative du patin 4 par rapport à 1.



Ce mécanisme est composé de quatre ensembles solides :

- le bâti 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- le patin 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_1)$ et on pose $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_4)$. Sur cet arbre est définie une droite (B, \vec{z}_4) parallèle à la droite (A, \vec{z}_1) et distante d'une valeur notée L ;
- l'arbre moteur 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bâti. On lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Sur cet arbre est définie une droite (B, \vec{y}_2) parallèle à la droite (A, \vec{y}_1) et excentrée d'une valeur notée e .

On constate la valeur de l'excentricité e petite devant la longueur du bras L :

$$e \ll L$$

- un piston 3, en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y}_1) avec l'arbre moteur et en liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{z}_1) avec le patin ;

1. Tracer le graphe des liaisons et déterminer l'indice de mobilité de la structure proposée.

2. Sachant que le modèle cinématique est proposé à partir d'un outillage électro-portatif qui fonctionne, que peut-on dire du degré de statisme du mécanisme ?

3. Suite à un inventaire des invariants géométriques, préciser sur quels solides sont définis les points A et B . En déduire deux manières de décrire le vecteur \vec{AB} .

4. Écrire les torseurs cinématiques associés aux différentes liaisons.

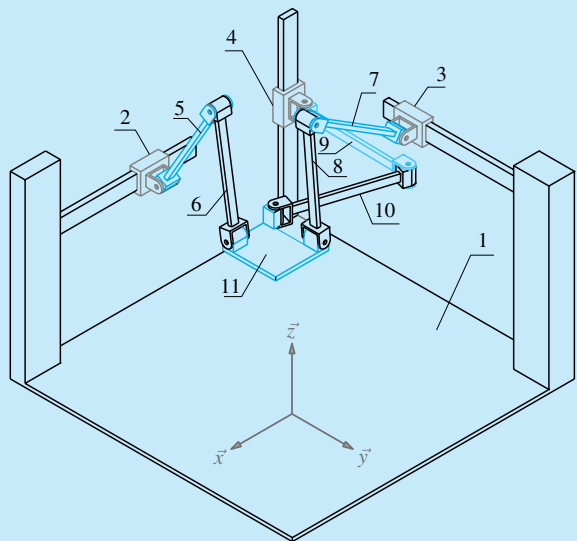
5. Calculer les degrés de mobilité et de statisme.

6. Déduire du travail précédent la loi entrée-sortie $f(\dot{\theta}, \theta, \dot{\alpha}, \alpha) = 0$.

1.8 Robot TRIPTERON

On considère le robot schématisé ci-dessous. Il présente une architecture originale pour gérer de manière indépendante les trois translations d'un poignet 11 par rapport au bâti 1.

« Les recherches théoriques permettent souvent de faire des découvertes fascinantes. C'est le cas pour le TRIPTERON, un mécanisme parallèle à translations à 3 DDL. Le prototype a d'abord vu le jour à travers les formules mathématiques et la théorie des visseurs. Robot unique et breveté, il permet de réaliser des déplacements linéaires dans toutes les directions. C'est en fait l'équivalent des robots cartésiens sériels. Mais, puisqu'il est parallèle, il possède de nombreux autres avantages, notamment le positionnement des actionneurs sur la base, qui allège la partie mobile et permet ainsi des mouvements rapides et une réduction du gauchissement. » (Extrait de <http://robot.gmc.ulaval.ca/fr/recherche/theme104.html> – Université Laval)



Ce robot comporte ainsi trois actionneurs linéaires attachés au bâti. On se propose d'imaginer quelques caractéristiques.

1. Tracer le graphe de structure de ce robot et associer à chaque arc une liaison, soit de type pivot, soit de type glissière.
2. Calculer l'indice de mobilité associé à la structure.

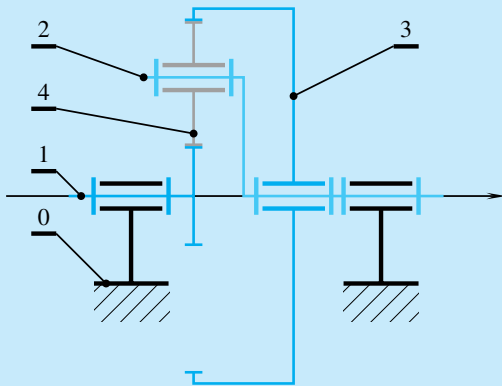
3. Imaginer le mouvement du poignet 11 par rapport au bâti, lorsque l'on pilote le seul actionneur 2.
4. Expliquer alors le rôle de chacun des actionneurs.
5. Émettre un avis sur le statisme de ce modèle.

Exercices d'approfondissement

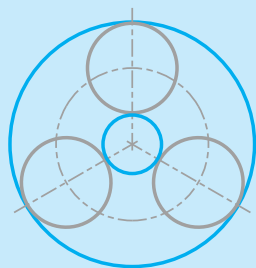
1.9 Train épicycloïdal

La figure ci-dessous propose le schéma cinématique d'un train épicycloïdal simple sous sa forme la plus générale. Ce mécanisme comprend :

- un bâti 0 ;
- un planétaire 1 ;
- un porte satellite 2 ;
- une couronne 3 ;
- un ou plusieurs satellites 4, répartis régulièrement sur le porte-satellite.



1. Déterminer le nombre de degrés de liberté nécessaires au niveau du contact entre les pignons pour avoir une structure isostatique dans le cas d'un train épicycloïdal comportant un seul satellite.
2. Généralement, un tel mécanisme comporte trois satellites montés en étoile sur le porte-satellites.



Montrer que la structure est alors hyperstatique.

1.10 Bielle-manivelle

Les mécanismes de transformation de mouvements basés sur une architecture bielle-manivelle sont très nombreux. La figure ci-dessous propose un schéma cinématique de son principe de fonctionnement, semblable à celui construit à la section 1.1.4

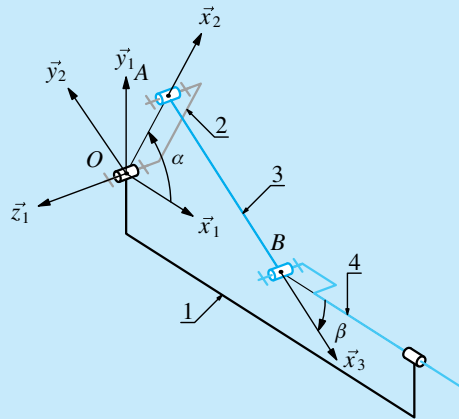


Schéma cinématique d'un système bielle-manivelle.

Ce mécanisme est composé de quatre ensembles :

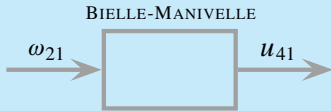
- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- une manivelle, repérée 2, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti :
 - un repère $(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lui est associé en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$;
 - on pose l'angle $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
 - on considère un point A caractérisé par $\vec{OA} = R\vec{x}_2$.
- un piston, repéré 4, en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x}_1) avec le bâti :
 - on exprime la position d'un point B par $\vec{OB} = \lambda\vec{x}_1$.
- une bielle repérée 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_2) avec la manivelle, et en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_3) avec le piston 4 :
 - on pose $\vec{AB} = L\vec{x}_3$ et on constate $L \gg R$.

L'objectif de cette étude est d'analyser la structure afin de la faire évoluer.

1. Calculer et interpréter l'indice de mobilité de ce mécanisme.

2. Proposer si nécessaire des modifications pour que l'ensemble soit isostatique.

Cette structure est fréquemment utilisée avec la rotation de 2 par rapport à 1 en mouvement d'entrée et la translation de 4 par rapport à 1 en mouvement de sortie.



C'est pourquoi on garde pour la suite les modèles de liaison correspondant à ces deux mouvements.

Parmi les propositions faites en réponse à la question précédente, on choisit celle pour laquelle on remplace la liaison pivot entre la bielle 2 et la manivelle 3 par une liaison sphérique de centre A.

3. Paramétrer le mécanisme avec cette nouvelle configuration.

4. Tracer le schéma cinématique correspondant dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

5. Calculer les degrés de mobilité et de statisme.

6. Conclure quant à la pertinence de cette proposition.

1.11 Pompe à excentrique

On s'intéresse à l'architecture d'une pompe volumétrique à excentrique schématisée ci-dessous. La rotation continue de l'arbre 2 est transformée en translation rectiligne alternative du piston 3, ces deux mouvements étant définis par rapport au bâti 1.

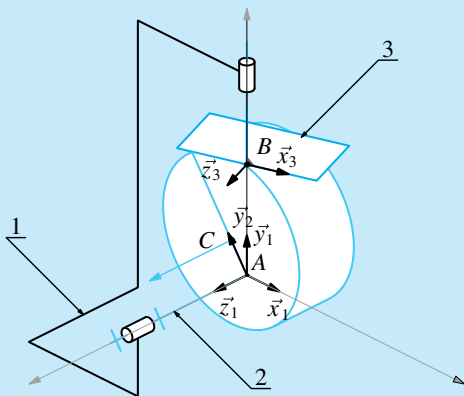


Schéma cinématique d'une pompe volumétrique à excentrique

Ce mécanisme comporte trois pièces :

- le bâti 1, auquel on attache un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- une came 2, cylindrique de révolution de rayon R , en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le bâti 1 :
 - on lui associe un repère $(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ en choisissant $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ et on définit l'angle $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
 - on pose un point C caractérisé par $\vec{AC} = e\vec{y}_2$ de telle sorte que la droite (C, \vec{z}_2) matérialise l'axe de révolution de cette came.
- un coulisseau 3, en liaison pivot glissant d'axe (A, \vec{y}_1) avec le bâti 1 :
 - on pose un point B caractérisé par $\vec{AB} = \lambda\vec{y}_1$;
 - on associe à ce coulisseau un repère $(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en choisissant $\vec{y}_3 = \vec{y}_1$ et on définit l'angle $\gamma = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$;
 - un plan de normale \vec{y}_3 est en contact à chaque instant avec la came 2.

1. Émettre un avis sur le statisme de cette structure.

2. Paramétrer ce mécanisme.

3. Calculer et interpréter les degrés de mobilité et de statisme.

On considère maintenant sur le piston 3 l'axe de la liaison pivot glissant non perpendiculaire au plan de la liaison cylindre-plan :

- on conserve le vecteur \vec{y}_3 orientant l'axe de la liaison pivot glissant ;
- on pose un vecteur \vec{v}_3 orientant la normale au plan, tel que $\vec{y}_3 \wedge \vec{v}_3 \neq \vec{0}$.

4. Modifier le paramétrage précédent en conséquence.

5. Calculer et interpréter les nouveaux degrés de mobilité et de statisme.

6. Proposer un schéma de cette configuration dans le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

Solutions des exercices

Exercices d'application

1.1

Soit un solide S , ensemble de points P_i deux à deux équidistants au cours du temps, et R un repère attaché à un autre solide.

- Pour définir la position d'un point P_1 dans R , il faut et il suffit de trois paramètres scalaires, appelés coordonnées du point P_1 dans R ;

$$P_1 \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ R | z_1 \end{array}$$

- Définir la position d'un deuxième point P_2 , différent de P_1 , ajoute trois paramètres scalaires, à savoir ses trois coordonnées.

$$P_1 \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ R | z_1 \end{array} \quad P_2 \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ R | z_2 \end{array}$$

Les deux points P_1 et P_2 restent équidistants au cours du temps, ce qui induit une relation scalaire de dépendance entre ces six paramètres.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_{12}^2$$

- Définir la position d'un troisième point P_3 ajoute ses trois coordonnées et on obtient au total neuf paramètres.

$$P_1 \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ R | z_1 \end{array} \quad P_2 \begin{array}{l} x_2 \\ y_2 \\ R | z_2 \end{array} \quad P_3 \begin{array}{l} x_3 \\ y_3 \\ R | z_3 \end{array}$$

Ajouter ce troisième point introduit deux nouvelles relations de dépendance lorsque ces trois points ne sont pas alignés

$$\begin{cases} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_{12}^2 \\ (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = d_{13}^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = d_{23}^2 \end{cases}$$

- Définir la position d'un quatrième point P_4 ajoute également ses trois coordonnées, ainsi que trois relations de dépendance, donc aucun paramètre supplémentaire.

En conclusion, la mise en position d'un solide S par rapport à un repère R nécessite la donnée de six paramètres scalaires indépendants.

On peut mener en complément l'approche cinématique correspondant au raisonnement géométrique mené :

- un solide libre de tout mouvement possède six degrés de liberté par rapport au repère de référence ;

- fixer la position d'un point en annule trois et il ne subsiste que les trois rotations autour de ce point ;
- fixer la position d'un deuxième point différent du premier annule deux rotations et il ne subsiste que la rotation du solide autour de la droite joignant ces deux points ;
- la dernière rotation est annulée en fixant la position d'un troisième point pris en dehors de la droite précédente.

À propos des relations de dépendance

On constate que considérer un cinquième point introduit trois nouveaux paramètres, ainsi que quatre relations de dépendance. Ce qui tend à montrer que les relations de dépendance ne sont plus indépendantes !

1.2

Un mécanisme mobile et isostatique admet un degré de mobilité m strictement positif et un degré de statisme h nul.

1. Lors de l'approche cinématique, on constate alors plus d'inconnues que d'équations, et le rang du système d'équations est égal au nombre d'équations.

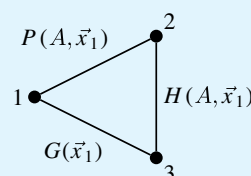
$$\left[\begin{array}{c} E_c \text{ lignes} \\ \left[\begin{array}{c} r_c \\ m \end{array} \right] \right] I_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Concernant l'approche dynamique, on constate plus d'équations que d'inconnues et le rang est égal au nombre d'inconnues.

$$\left[\begin{array}{c} E_s \text{ lignes} \\ \left[\begin{array}{c} r_s \\ m \end{array} \right] \right] I_s = \begin{bmatrix} \text{Second} \\ \text{membre} \end{bmatrix}$$

1.3

- Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides.



P	Pivot d'axe (Dte)
G	Glissière suivant (Vec)
H	Hélicoïdale d'axe (Dte)

On écrit les trois torseurs cinématiques pour poser les trois variables cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

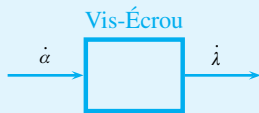
$$\mathcal{V}(2/3) = A \begin{Bmatrix} \omega_{23} \vec{x}_1 \\ u_{23} \vec{x}_1, \text{ avec } u_{23} = p \omega_{23} \end{Bmatrix}$$

L'analyse des sommets permet de faire ressortir les propriétés géométriques propres à cette structure :

- la vis 2 comporte deux droites confondues et une hélice de pas p ;
- sur le bâti 1 sont définies une droite et une direction *parallèles* ;
- l'écrou 3 comporte également une droite et une direction *parallèles*, ainsi qu'une hélice de pas p .

Le pas de l'hélice est la seule valeur non nulle caractéristique de la géométrie du mécanisme.

2. La loi entrée-sortie cherchée intéresse deux des trois inconnues cinématiques



La composition des mouvements sur la chaîne fermée donne quatre équations scalaires de la forme $0 = 0$ et deux équations non nulles :

- équation des résultantes scalaire \vec{x}_1 ;

$$\dot{\alpha} - \omega_{23} = 0$$

- équation des moments au point A scalaire \vec{x}_1 .

$$\dot{\lambda} + p \omega_{23} = 0$$

On élimine l'inconnue indésirable pour écrire finalement

$$\dot{\lambda} = -p \dot{\alpha}$$

3. On souhaite $\dot{\lambda} \geq 0$ pour $\dot{\alpha} \geq 0$, il est donc nécessaire d'utiliser une hélice à gauche pour la liaison hélicoïdale. On rappelle qu'une hélice à gauche admet un pas négatif $p < 0$.

4. Les calculs effectués à la question 2 permettent de répondre avec certitude :

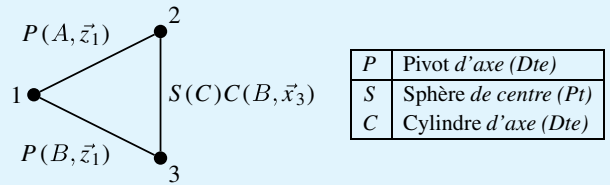
- on dispose de six équations pour trois inconnues, donc la structure admet un indice de mobilité $I_c - E_c = 3$;
- quatre équations sont de la forme $0 = 0$, donc le rang est inférieur ou égal à 2 et la structure admet au moins un degré de mobilité ;
- les deux équations écrites permettent d'affirmer que le rang vaut $r_c = 2$ et on peut donner les valeurs de degrés de mobilité et de statisme.

$$\begin{cases} m = 1 \\ h = 4 \end{cases}$$

En conclusion, la structure est hyperstatique de degré 4.

1.4

1. Le mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides



On compte six inconnues scalaires lors d'une approche cinématique. L'énoncé parle de quatre paramètres géométriques dépendant du temps. La seule interprétation possible est la présence non démontrée de deux inconnues cinématiques nulles.

On note au passage que la composition des mouvements sur la chaîne fermée de solides 1 – 2 – 3 – 1 donne six équations scalaires pour les six inconnues scalaires comptées. L'indice de mobilité de cette structure est nulle.

$$I_c - E_c = 0$$

S'il existe un ou plusieurs mouvements possibles, la structure est hyperstatique de degré au moins 1.

2. Une rapide recherche des invariants géométriques permet de répondre à la question :

- sur le bâti 1 sont définies au moins deux droites parallèles, distantes de la longueur b ;
- sur le bras moteur 2 sont définies une demi-droite et le point nommé C, distant du rayon c ;
- on trouve sur le bras récepteur 3 deux droites sécantes au point B et perpendiculaires.

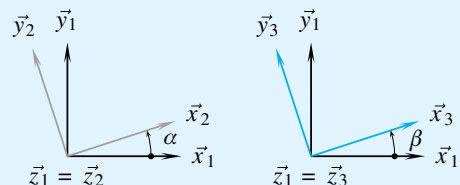
Le point C est immobile sur le bras moteur, le point B immobile sur le bras récepteur. On interprète ainsi le vecteur \vec{BC} comme un vecteur position du point C dans le mouvement 2/3.

3. On pose les trois torseurs cinématiques, en exploitant le vecteur position $\vec{BC} = x \vec{x}_3$ pour le mouvement 2/3.

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(2/3) = C \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/3) \\ \dot{x} \vec{x}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{BC} = x \vec{x}_3$$



4. On utilise deux des six équations de fermeture cinématique à disposition :

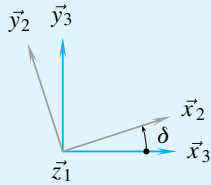
- équation de résultante scalaire \vec{x}_1 ;

$$\vec{\Omega}(2/3) \cdot \vec{x}_1 = 0$$

- équation de résultante scalaire \vec{y}_1 .

$$\vec{\Omega}(2/3) \cdot \vec{y}_1 = 0$$

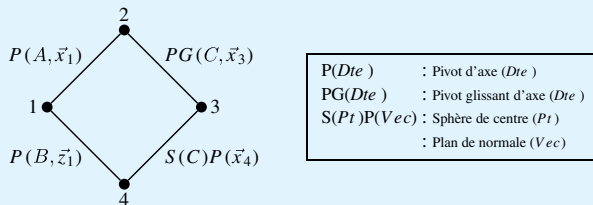
On en déduit que la seule composante non nulle du vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/3)$ est suivant le vecteur \vec{z}_1 et on pose alors $\vec{\Omega}(2/3) = \delta \vec{z}_1$



Le problème admettait à la première analyse six équations pour six inconnues, il reste après une résolution partielle quatre équations pour quatre inconnues cinématiques, donc quatre paramètres géométriques dépendants du temps.

1.5

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



Ce graphe comporte une chaîne fermée composée de 4 solides et de 4 liaisons pour un total de 9 degrés de liberté. Une approche cinématique globale met en évidence un indice de mobilité égal à 3.

$$Ic - Ec = 9 - 6 = 3$$

2. Comme l'indice de mobilité $Ic - Ec$ s'interprète comme la différence des degrés de mobilité et de statisme $m - h$, on peut proposer comme inégalité

$$\begin{cases} m - h = 3 \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - h = 3 \\ m \geq 3 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

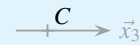
Ce mécanisme admet au moins trois mouvements indépendants, que l'on essaie d'imaginer :

- la rotation du seul piston 3, autour de l'axe (C, \vec{x}_3) , toutes les autres pièces étant immobiles par rapport au bâti ;
- la rotation du plateau 4 par rapport au bâti 1, entraînant la translation du piston 3 par rapport au barillet 2 alors que le barillet reste immobile par rapport au bâti ;
- la transformation du mouvement correspondant à la loi entrée-sortie, le plateau 4 restant immobile par rapport au bâti.

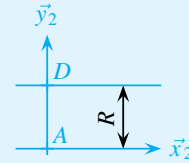
On n'imagine pas de contrainte lors de l'assemblage de cette chaîne fermée, notamment au niveau de la liaison sphère-plan. On peut parier en conséquence sur une structure isostatique.

3. L'analyse des sommets du graphe et les données de l'énoncé permettent de faire émerger les caractéristiques géométriques propres à chacun des solides :

- sur le piston 3 est défini un point sur une droite ;

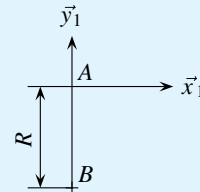


- sur le barillet 2 sont définies une demi-droite et une droite parallèles ;



le rayon $R = \|\vec{AD}\|$ est un invariant géométrique explicite sur le barillet 2.

- sur le bâti sont définies deux demi-droites perpendiculaires et distantes de R .



- sur le plateau sont définies une demi-droite et une direction perpendiculaires.

Il existe ainsi deux rayons R différents, l'un défini sur le bâti, l'autre sur le barillet.

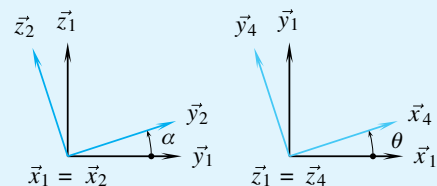
4. Pour déterminer la loi entrée-sortie demandée, on écrit les quatre torseurs pour poser les variables cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} A \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(4/1) = \begin{matrix} B \\ \vec{0} \end{matrix} \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(3/2) = \begin{matrix} C \\ \vec{\lambda} \vec{x}_3 \end{matrix} \begin{matrix} \omega_{32} \vec{x}_3 \\ \dot{\lambda} \vec{x}_3 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(3/4) = \begin{matrix} \vec{\Omega}(3/4) \\ \vec{V}(C, 3/4), \text{ avec } \vec{V}(C, 3/4) \cdot \vec{x}_4 = 0 \end{matrix}$$



Lors du fonctionnement, l'angle θ ne varie plus une fois réglé, la variable $\dot{\theta}$ est donc nulle à chaque instant. Il s'agit alors d'éviter six inconnues sur les huit qui restent, ce qui est obtenu en écrivant la composition des vecteurs vitesse au point C scalaire \vec{x}_4

$$(\dot{\alpha} \vec{x}_1 \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{x}_4 + \dot{\lambda} \vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 = 0$$

Au vu des propriétés géométriques énoncées :

- les vecteurs \vec{x}_3 et \vec{x}_1 sont à chaque instant égaux ;

$$\dot{\lambda} \vec{x}_3 \cdot \vec{x}_4 = \dot{\lambda} \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_4 = \dot{\lambda} \cos \theta$$

- le calcul du produit mixte se fait en posant

$$\vec{AC} = R\vec{y}_2 + \lambda\vec{x}_3.$$

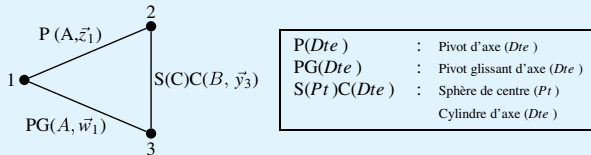
$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(\vec{x}_4, \vec{x}_1, R\vec{y}_2 + \lambda\vec{x}_3) &= \dot{\alpha}R(\vec{x}_4, \vec{x}_1, \vec{y}_2) \\ &= -\dot{\alpha}R \sin \theta \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_2 \\ &= -\dot{\alpha}R \sin \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

On trouve en définitive comme expression de la loi entrée-sortie

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha}R \tan \theta \sin \alpha$$

1.6

1. La lecture du schéma cinématique permet l'élaboration du graphe des liaisons correspondant



Ce graphe comporte une chaîne fermée de solides pour un total de sept degrés de liberté. Une approche globale cinématique permet de trouver alors un indice de mobilité égal à 1.

$$I_c - E_c = 7 - 6 = 1$$

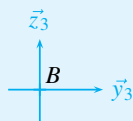
2. Comme l'indice de mobilité $I_c - E_c$ s'interprète comme la différence des degrés de mobilité et de statisme $m - h$, on peut proposer comme inégalité

$$\begin{cases} m - h = 1 \\ m \geq 0 \\ h \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - h = 1 \\ m \geq 1 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Cette structure admet au moins un degré de mobilité. De plus, en immobilisant l'arbre d'entrée par rapport au bâti, il est difficile d'imaginer un mouvement possible supplémentaire ailleurs. Il est ainsi raisonnable de parier sur une structure isostatique.

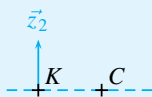
3. L'analyse des sommets du graphe et les données de l'énoncé permettent de faire émerger les caractéristiques géométriques propres à chacun des solides :

- sur le piston 3 sont définies deux droites posées sécantes et orthogonales ;



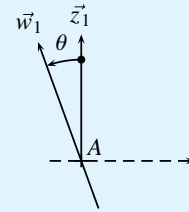
On appelle B le point d'intersection de ces deux droites.

- sur l'arbre moteur 2 sont définies une demi-droite et un point ;



On appelle K le projeté orthogonal du point C sur la droite à considérer, et le rayon $r = \|\vec{KC}\|$ est un invariant géométrique explicite sur l'arbre moteur 2.

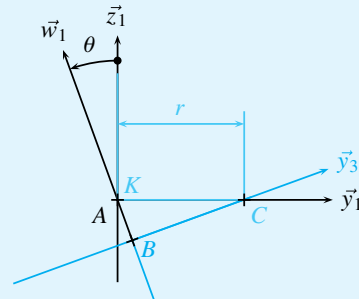
- sur le bâti sont définies une droite et une demi-droite sécantes.



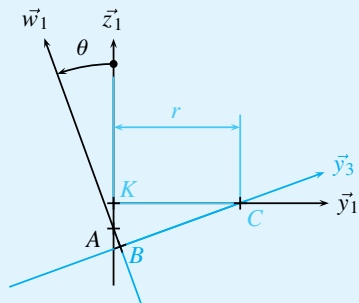
On appelle A le point d'intersection des deux droites, et l'angle θ est un invariant géométrique explicite sur le bâti 1.

4. On peut alors proposer les deux épures demandées :

- les deux points A et K sont confondus ;

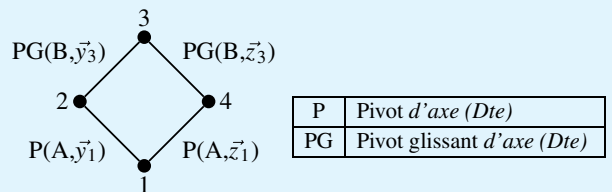


- les deux points A et K sont disjoints.



1.7

1. Le graphe des liaisons comporte un chaîne fermée avec 4 sommets et 4 arcs



On compte six inconnues scalaires cinématiques pour six équations scalaires, soit un indice de mobilité nul.

$$I_c - E_c = 0$$

2. Le mécanisme fonctionne, on peut donc supposer au moins un mouvement et on propose

$$\begin{cases} m \geq 1 \\ h \geq 1 \end{cases}$$

Cette structure est *a priori* hyperstatique de degré au moins un.

3. On s'intéresse aux sommets du graphe des liaisons pour expliciter les invariants géométriques :

- sur la bâti 1 sont définies deux demi-droites sécantes au point A et perpendiculaires. Le point A se trouve sur cet ensemble.
- le piston 3 comporte deux droites sécantes au point B et perpendiculaires. Le point B qui mérite attention est sur ce solide.
- l'arbre moteur 2 comporte une demi-droite et une droite parallèles, distantes de l'excentration e .
- le patin 4 comporte une demi-droite et une droite parallèles, distantes de la longueur L .

On déduit de cette analyse que le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur position du point B dans le mouvement 3/1 :

- on peut l'expliquer à partir de la chaîne ouverte 1 - 2 - 3 ;

$$\overrightarrow{AB} = e\vec{z}_2 + \lambda_{32}\vec{y}_3$$

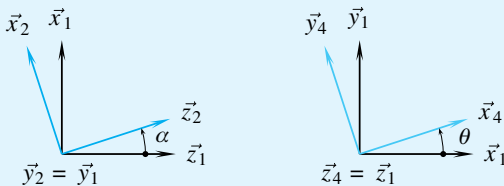
- on peut l'expliquer également à partir de la chaîne 1 - 4 - 3.

$$\overrightarrow{AB} = L\vec{y}_4 + \lambda_{34}\vec{z}_3$$

4. Pour écrire les torseurs cinématiques, on exploite les deux angles paramétrés et on complète en posant des inconnues cinématiques sans chercher à définir les paramètres géométriques correspondants. Néanmoins, on constate que les deux liaisons pivot glissant imposent l'une $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$, l'autre $\vec{z}_3 = \vec{z}_4$, et ce à chaque instant.

$$\mathcal{V}(2/1) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(4/1) = \underset{A}{\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$$

$$\mathcal{V}(3/2) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \omega_{32} \vec{y}_3 \\ v_{32} \vec{y}_3 \end{Bmatrix}} \quad \mathcal{V}(4/3) = \underset{B}{\begin{Bmatrix} \omega_{43} \vec{z}_3 \\ v_{43} \vec{z}_3 \end{Bmatrix}}$$



5. L'équation de fermeture cinématique s'écrit

$$\mathcal{V}(4/3) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) - \mathcal{V}(4/1) = \vec{0}$$

Pour calculer les degrés de mobilité et de statisme, il est nécessaire d'écrire les six équations scalaires. On choisit d'écrire l'équation de moment au point B et on obtient

$$\begin{cases} \omega_{43}\vec{z}_3 + \omega_{32}\vec{y}_3 + \dot{\alpha}\vec{y}_1 - \dot{\theta}\vec{z}_1 & = \vec{0} \\ v_{43}\vec{z}_3 + v_{32}\vec{y}_3 + \dot{\alpha}\vec{y}_1 \wedge \overrightarrow{AB} - \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{AB} & = \vec{0} \end{cases}$$

On reprend les deux descriptions possibles pour le vecteur \overrightarrow{AB} en tenant compte des égalités observées à chaque instant

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = L\vec{y}_4 + \lambda_{34}\vec{z}_1 \\ \overrightarrow{AB} = e\vec{z}_2 + \lambda_{32}\vec{y}_1 \end{cases}$$

On peut alors calculer les deux produits vectoriels en évitant les deux longueurs variables λ_{34} et λ_{32} :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}\vec{y}_1 \wedge \overrightarrow{AB} = \dot{\alpha}e\vec{x}_2 \\ -\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{AB} = \dot{\theta}L\vec{x}_4 \end{cases}$$

On obtient alors le système de six équations ci-dessous en exprimant tous les vecteurs dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\begin{cases} 0 & = 0 \\ \omega_{32} + \dot{\alpha} & = 0 \\ \omega_{43} - \dot{\theta} & = 0 \\ \dot{\alpha}e \cos \alpha + \dot{\theta}L \cos \theta & = 0 \\ v_{32} + \dot{\theta}L \sin \alpha & = 0 \\ v_{43} - \dot{\alpha}e \sin \alpha & = 0 \end{cases}$$

On peut augmenter la lisibilité de ces équations en adoptant une écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e \cos \alpha & L \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L \sin \theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \omega_{32} \\ v_{32} \\ \omega_{43} \\ v_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deux constatations s'imposent :

- la première ligne de la matrice ne comporte que des termes nuls, le rang de ce système d'équations est donc inférieur ou égal à cinq ;
- en enlevant la première ligne et la première colonne, le déterminant extrait n'est pas nul.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ L \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L \sin \theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm L \cos \theta$$

Si $\cos \theta \neq 0$, le rang r_c du système vaut cinq, il est possible de calculer les degrés de mobilité $m = I_c - r_c$ et de statisme $h = E_c - r_c$ de cette structure

$$\begin{cases} m = 1 \\ h = 1 \end{cases}$$

Il n'y a qu'un seul mouvement possible et la structure est hyperstatique d'ordre 1.

6. La loi entrée sortie est donnée sous forme différentielle par la quatrième équation

$$L\dot{\theta} \cos \theta = -e\dot{\alpha} \cos \alpha$$

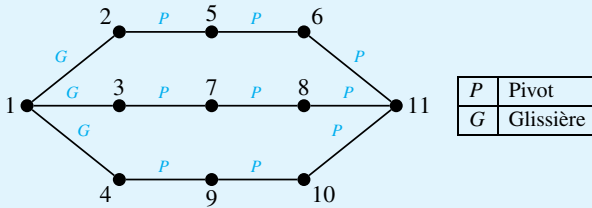
Cette forme est intégrable et on peut poser les conditions initiales nulles

$$\sin \theta = -\frac{e}{L} \sin \alpha$$

Étant donné que sur le mécanisme $e \ll L$, l'angle θ ne peut pas prendre la valeur $\pm \frac{\pi}{2}$ et l'hypothèse faite pour le calcul du rang est justifiée.

1.8

1. Ce mécanisme comporte onze pièces et douze liaisons.



2. On dénombre alors douze degrés de liberté et deux cycles indépendants, soit un indice de mobilité nul

$$I_c - E_c = 0$$

3. L'actionneur 2 se translate suivant \vec{x} par rapport au bâti :

- toutes les rotations de la chaîne ouverte 2 - 5 - 6 - 11 sont orientées suivant \vec{x} : la translation de 2 par rapport à 1 entraîne alors celle de 11 par rapport à 1 ;

- les rotations autorisées par les deux autres chaînes 3 - 7 - 8 - 11 et 4 - 9 - 10 - 11 sont compatibles avec le mouvement généré et empêchent de plus toute autre translation.

4. On réalise alors que les actionneurs pilotent directement et indépendamment les translations du poignet 11 par rapport au bâti 1.

	Tx	Ty	Tz
2	×		
3		×	
4			×

5. On imagine alors au moins ces trois mouvements indépendants pour le mécanisme et on propose

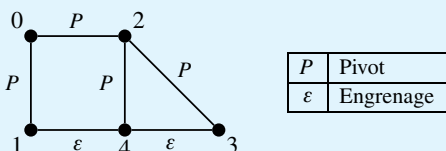
$$\begin{cases} m - h = 0 \\ m \geq 3 \\ h \geq 3 \end{cases}$$

Cette structure est probablement hyperstatique de degré 3.

Exercices d'approfondissement

1.9

1. On trace le graphe des liaisons pour un train à un seul satellite.



On procède à une approche cinématique pour énoncer les propositions suivantes :

- cette structure comporte deux chaînes fermées ;

$$\mu = N_L - N_P + 1 = 2$$

- on en déduit la disponibilité de douze équations ;

$$E_c = 6\mu = 12$$

- on pose $n_c(\varepsilon)$ le nombre d'inconnues cinématiques pour le contact au niveau des pignons et on obtient alors

$$I_c = 4 + 2n_c(\varepsilon)$$

- comme étudié au chapitre 4 de l'ouvrage de première année, un train épicycloïdal admet sous cette forme deux mouvements indépendants. On souhaite en conséquence un indice de mobilité de valeur 2 ;

$$I_c - E_c = m - h = 2$$

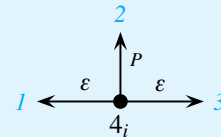
- on en déduit le nombre de degrés de liberté nécessaire au niveau du contact entre les dentures.

$$n_c(\varepsilon) = \frac{2 + 12 - 4}{2} = 5$$

En conclusion, il est nécessaire d'avoir un seul point de contact au niveau des engrenages pour espérer obtenir une structure isostatique.

2. On suppose un seul point de contact par engrenage, la présence de trois satellites et on reste sur une approche cinématique.

Ajouter un satellite augmente le nombre de sommets d'une unité et le nombre d'arcs de trois unités.



Ajouter un satellite augmente alors le nombre d'équations de douze unités et le nombre d'inconnues de onze unités.

Pour un mécanisme à trois satellites, on dénombre alors :

- pour les équations $E_c = 36$;

- pour les inconnues $I_c = 36$.

On en déduit un indice de mobilité nul.

$$I_c - E_c = 0$$

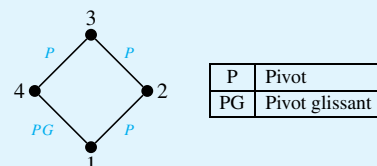
De par la symétrie du montage des satellites, il est difficile de concevoir une structure rigide, et la structure est hyperstatique, même avec l'hypothèse d'un seul point de contact par engrenage.

On peut supposer un degré de mobilité égal à 2 et en conséquence un degré de statisme de même valeur 2.

$$\begin{cases} m - h = 0 \\ m = 2 \\ h = 2 \end{cases}$$

1.10 Bielle-manivelle

1. Le graphe des liaisons comporte une chaîne fermée composée de 4 sommets et de 4 arcs



On compte 5 inconnues cinématiques et on dispose de 6 équations scalaires. L'indice de mobilité vaut -1

$$I_c - E_c = -1$$

Avant même tout calcul, on sait que la structure est hyperstatique de degré supérieur ou égal à 1

$$\begin{cases} m - h = -1 \\ m \geq 0 \\ h \geq 1 \end{cases}$$

De plus, comme on souhaite constater la présence du mouvement correspondant à la fonction mécanique souhaitée, on peut supposer la structure hyperstatique de degré supérieur ou égal à 2

$$\begin{cases} m - h = -1 \\ m \geq 1 \text{ (ce nombre est souhaité, pas calculé !)} \\ h \geq 2 \end{cases}$$

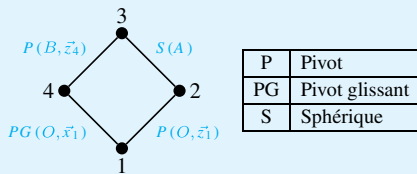
2. Il est nécessaire d'ajouter au sein de ce mécanisme au moins 2 degrés de liberté, de manière à obtenir un indice de mobilité d'au moins 1 :

- une translation suivant une des directions \vec{z}_i ;
- une rotation autour d'une des directions \vec{y}_i .

Il est à noter que les degrés de liberté à ajouter n'ont *a priori* rien de commun avec la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

3. On paramètre cette nouvelle structure.

Grphe des liaisons



Le mécanisme comporte dans cette configuration 7 variables cinématiques pour 6 équations, donc l'indice de mobilité atteint la valeur souhaitée 1

$$I_c - E_c = 1$$

Invariants géométriques

L'analyse des sommets successifs permet les différentes propositions :

- le bâti 1 comporte une demi-droite et une droite sécantes au point O , et perpendiculaires ;
- la manivelle 2 comporte un point A distant du rayon R d'une demi-droite ;

$$\vec{OA} = R\vec{x}_2$$

- la bielle comporte un point A distant de la longueur L d'une demi-droite ;

$$\vec{AB} = L\vec{x}_3$$

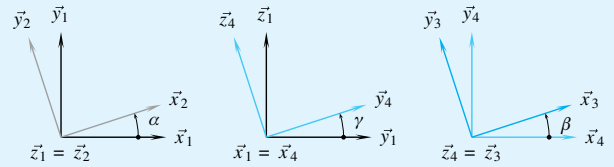
- le piston 4 comporte une demi-droite et une droite sécantes au point B , et perpendiculaires.

Variables cinématiques

On écrit les quatre torseurs cinématiques de manière à poser les sept inconnues scalaires, en s'appuyant sur les éléments géométriques déjà mis en place

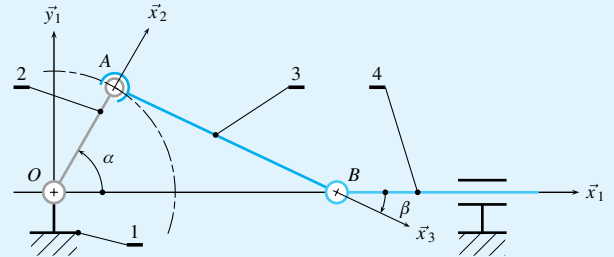
$$\mathcal{V}(2/1) = O \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) = A \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(3/2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(4/1) = O \begin{Bmatrix} \dot{\gamma}\vec{x}_1 \\ \dot{\lambda}\vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/4) = B \begin{Bmatrix} \dot{\beta}\vec{z}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



De plus, le paramètre géométrique associé à la variable cinématique $\dot{\lambda}$ est caractérisé par le vecteur $\vec{OB} = \lambda\vec{x}_1$.

4. Le schéma cinématique est tracé dans le plan demandé, sans oublier de commencer par reporter toutes les caractéristiques géométriques mises en évidence lors du paramétrage de la question précédente



5. On écrit l'équation de fermeture cinématique

$$-\mathcal{V}(3/4) + \mathcal{V}(3/2) + \mathcal{V}(2/1) - \mathcal{V}(4/1) = \mathcal{O}$$

On détaille cette équation à partir des éléments de réduction des torseurs :

- composition des vecteurs rotations ;

$$-\dot{\beta}\vec{z}_4 + \vec{\Omega}(3/2) + \dot{\alpha}\vec{z}_1 - \dot{\gamma}\vec{x}_1 = \vec{0}$$

- composition des vecteurs vitesse au point O .

$$\underbrace{-\dot{\beta}\vec{z}_4 \wedge \vec{BO}}_{(a)} + \underbrace{\vec{\Omega}(3/2) \wedge \vec{AO}}_{(b)} - \dot{\lambda}\vec{x}_1 = \vec{0}$$

On effectue les calculs nécessaires :

- concernant le terme (a), une simple substitution suffit pour aboutir ;

$$\dot{\beta}\vec{z}_4 \wedge \vec{OB} = \dot{\beta}\vec{z}_4 \wedge \lambda\vec{x}_1 = \dot{\beta}\lambda\vec{y}_4$$

- concernant le terme (b), on constate que le vecteur \vec{OA} est suivant \vec{x}_2 et on pose alors $\vec{\Omega}(3/2) = p_{32}\vec{x}_2 + q_{32}\vec{y}_2 + r_{32}\vec{z}_2$ pour effectuer le produit vectoriel

$$\vec{OA} \wedge \vec{\Omega}(3/2) = q_{32}R\vec{z}_2 - r_{32}R\vec{y}_2$$

On exprime ces équations vectorielles dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on adopte une écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \sin \alpha & -1 \\ 0 & \lambda \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & -R \cos \alpha & 0 \\ 0 & \lambda \sin \gamma & 0 & 0 & R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ p_{32} \\ q_{32} \\ r_{32} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Comme le mouvement moteur souhaité est la rotation de la manivelle 2 par rapport au bâti 1, on étudie le déterminant 6×6 en enlevant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \sin \alpha & -1 \\ \lambda \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & -R \cos \alpha & 0 \\ \lambda \sin \gamma & 0 & 0 & R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

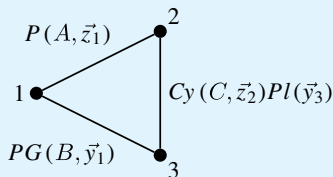
Le calcul fait apparaître le terme $\sin \alpha$ en facteur de la valeur du déterminant. Ce calcul est à poursuivre pour réaliser que le déterminant est non nul en général, sauf lorsque les points O , A et B sont alignés. On constate que dans cette position, les deux pièces 3 et 4 peuvent effectivement tourner librement autour de l'axe (O, \vec{x}_1) .

6. Cette étude permet de montrer qu'une même structure peut être isostatique ou hyperstatique suivant les positions relatives des différentes pièces.

Dans le cas présent, la solution proposée n'est pas satisfaisante, car la configuration dans laquelle les points O , A et B sont alignés ne peut être évitée.

1.11

1. On commence par tracer le graphe des liaisons



P	Pivot
PG	Pivot glissant
CyPl	Cylindre-Plan

Cette structure comporte une chaîne fermée de trois solides et on dénombre 7 degrés de liberté. On calcule un indice de mobilité $I_c - E_c = 1$ et on en déduit de suite

$$\begin{cases} m - h = 1 \\ m \geq 1 \\ h \geq 0 \end{cases}$$

Ce mécanisme admet au moins un mouvement.

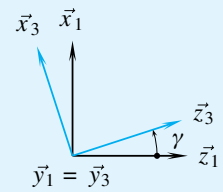
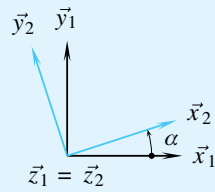
2. Paramétrer ce mécanisme consiste à caractériser variables et invariants.

Variables cinématiques et paramètres géométriques associés

On pose les trois torseurs pour identifier les sept variables cinématiques. Avec les données de l'énoncé, les liaisons pivot

et pivot glissant ne posent pas de problème

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = A \begin{Bmatrix} \dot{\gamma} \vec{y}_1 \\ \dot{\lambda} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}$$

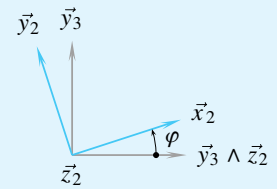
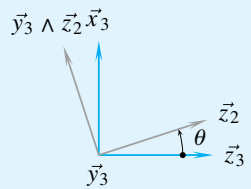


La liaison cylindre-plan mérite une plus grande attention. Elle autorise :

- deux rotations, la première autour de \vec{y}_3 , la seconde autour de \vec{z}_2 ;
- les deux translations dans le plan (\vec{z}_3, \vec{x}_3) .

On pose alors deux angles en s'inspirant des angles d'EULER, de manière à avoir les deux rotations qui se composent

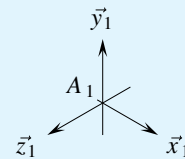
$$\mathcal{V}(2/3) = C \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{y}_3 + \dot{\phi} \vec{z}_2 \\ u_{23} \vec{x}_3 + w_{23} \vec{z}_3 \end{Bmatrix}$$



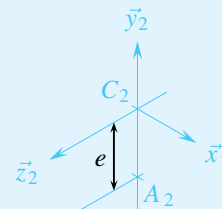
Les sept variables cinématiques sont alors $\dot{\gamma}, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\lambda}, u_{23}$ et w_{23} .

Invariants géométriques

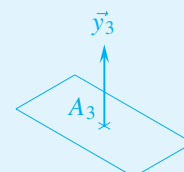
- On trouve sur 1 une droite et une demi-droite sécantes au point A et perpendiculaires ;



- on trouve sur l'excentrique une droite et une demi-droite parallèles distantes de e et on pose $\vec{AC} = e \vec{y}_2$;



- on trouve sur le piston 3 une droite perpendiculaire à un plan.



Cette recherche met en évidence que seule la valeur de l'excentricité e intervient dans la loi de transformation de mouvement.

3. On écrit l'équation de fermeture cinématique

$$\mathcal{V}(3/1) - \mathcal{V}(2/1) + \mathcal{V}(2/3) = \mathbf{0}$$

Cette équation se détaille à partir des éléments de réduction :

- composition des vecteurs rotation ;

$$\dot{\gamma} \vec{y}_1 - \dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{y}_3 + \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \vec{0}$$

- composition des vecteurs vitesse au point C .

$$\dot{\lambda} \vec{y}_1 + e \sin \alpha \dot{\gamma} \vec{z}_1 - e \dot{\alpha} \vec{x}_2 + u_{23} \vec{x}_3 + w_{23} \vec{z}_3 = \vec{0}$$

On exprime ces équations vectorielles dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on adopte une écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -e \sin \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ u_{23} \\ w_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deux constatations s'imposent :

- la première ligne de la matrice ne comporte que des termes nuls, le rang de ce système d'équations est donc inférieur ou égal à cinq ;
- en enlevant la première ligne et les deux premières colonnes, le déterminant extrait n'est pas nul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

Comme le rang du système d'équations précédent est égal à 5, on en déduit les valeurs des degrés de mobilité et de statisme

$$\begin{cases} m = 2 \\ h = 1 \end{cases}$$

Les deux inconnues principales qui ont permis le calcul du rang donnent les deux mouvements indépendants à imaginer :

- la rotation du piston autour de l'axe (B, \vec{y}_3) qui est libre ;
- la rotation de l'excentrique par rapport au bâti qui correspond à la fonction mécanique souhaitée.

La contrainte géométrique apparaît dans la chaîne fermée en rotation autour de \vec{x}_1 . Aucune liaison ne permet effectivement cette rotation.

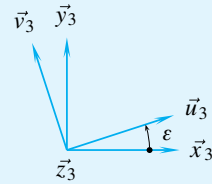
4. Le paramétrage initial ayant été mené sans simplification géométrique anticipée, les modifications ne concernent que le

coulisseau 3 pour les invariants et les liaisons issues de ce solide pour les variables :

- concernant le paramétrage géométrique, on pose

$$\vec{z}_3 = \frac{\vec{y}_3 \wedge \vec{v}_3}{\|\vec{y}_3 \wedge \vec{v}_3\|}$$

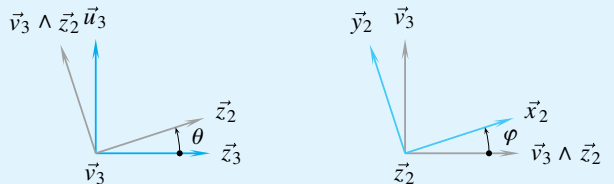
ce qui permet de caractériser l'angle ε entre les vecteurs \vec{y}_3 et \vec{v}_3



cet angle ε est pour ce modèle le deuxième invariant explicite concernant ce mécanisme, et il est défini sur le coulisseau 3 ;

- concernant la liaison pivot glissant, rien ne change ;
- concernant la liaison cylindre-plan, on reprend les mêmes caractéristiques en substituant \vec{u}_3 à \vec{x}_3 , \vec{v}_3 à \vec{y}_3 .

$$\mathcal{V}(2/3) = {}_C \begin{cases} \dot{\theta} \vec{v}_3 + \dot{\varphi} \vec{z}_2 \\ u_{23} \vec{u}_3 + w_{23} \vec{z}_3 \end{cases}$$



5. L'ajout de l'angle ε modifie les expressions issues de la fermeture cinématique :

- composition des vecteurs rotation ;

$$\dot{\gamma} \vec{y}_1 - \dot{\alpha} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{v}_3 + \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \vec{0}$$

- composition des vecteurs vitesse au point C .

$$\dot{\lambda} \vec{y}_1 + e \sin \alpha \dot{\gamma} \vec{z}_1 - e \dot{\alpha} \vec{x}_2 + u_{23} \vec{u}_3 + w_{23} \vec{z}_3 = \vec{0}$$

On adopte également l'écriture matricielle pour exprimer ces deux équations dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \varepsilon \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sin \varepsilon \sin \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma \cos \varepsilon & \sin \gamma \\ 0 & -e \sin \alpha & 0 & 0 & 1 & \sin \varepsilon & 0 \\ e \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma \cos \varepsilon & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \\ u_{23} \\ w_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il n'y a plus de ligne de zéros. On enlève la deuxième colonne pour évaluer le déterminant

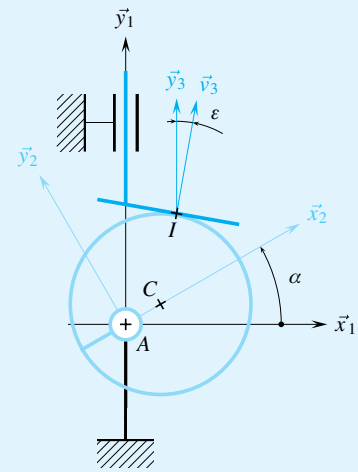
$$\begin{vmatrix} 0 & -\sin \varepsilon \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cos \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \varepsilon \sin \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \gamma \cos \varepsilon & \sin \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \varepsilon & 0 \\ \varepsilon \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma \cos \varepsilon & \cos \gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

Le rang de ce système est égal à 6. Cette structure est devenue isostatique.

$$\begin{cases} m = 1 \\ h = 0 \end{cases}$$

Cette constatation est spectaculaire, car elle permet de mettre en évidence que des invariants non chiffrés, tels des parallélismes ou des perpendicularités, ont des conséquences sur le statisme des mécanismes étudiés.

6. On aboutit au schéma cinématique de la configuration isostatique suivant



Le piston 3 ne peut plus tourner sur lui-même, autour de l'axe (A, \vec{y}_1) .

Plan

2.1	Masse – Répartition de la masse	44
2.2	Quantité de vitesse et quantité d'accélération	52
2.3	Énergie cinétique	62
	Exercices d'application	68
	Exercices d'approfondissement	70
	Solutions des exercices	73

Introduction

Ce chapitre est assez technique et n'est pas très enthousiasmant au premier abord. En effet, il s'agit de poser les outils nécessaires et utiles lors des calculs de dynamique, que ce soit pour le principe fondamental de la dynamique ou les théorèmes énergétiques.

Néanmoins, un petit tableau de synthèse permet d'éveiller la curiosité et de poser la problématique :

<i>domaine</i>	→	<i>grandeurs physiques</i>
géométrie	→	[longueur] et [angle]
cinématique	→	[longueur], [angle] et [temps]
dynamique	→	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

Après avoir acquis les bases de l'étude des mouvements de solides indéformables, il s'agit à partir de maintenant de prendre en compte la notion de masse, que l'on associe souvent à la notion d'inertie. On se propose au cours de ce chapitre :

- de partir des concepts élémentaires acquis pour le point ;
- de les étendre à un système matériel quelconque ;
- enfin d'appréhender les formes particulières que l'on obtient pour un solide indéformable en mouvement dans un espace à six degrés de liberté.

Prérequis

- Notion de système matériel.
- La cinématique du solide indéformable.
- La notion d'énergie.

Objectifs

- Comprendre l'influence de la répartition de la masse.
- Appréhender les notions de quantités de mouvement et d'accélération.
- Évaluer l'énergie cinétique d'un système matériel en mouvement.



On rappelle que dans cet ouvrage le terme « solide » est synonyme de « solide indéformable » !

Notation

Deux types d'expression apparaissent tout au long du chapitre :

- celles qui sont valables pour tous les systèmes matériels ;
- celles qui ne sont valables que pour le solide indéformable.

Pour bien les distinguer, les notations suivantes sont adoptées, et utilisées avec la plus grande rigueur :

- Σ est un système matériel quelconque ;
- S nomme un solide indéformable ;
- le point courant considéré est noté P ;
- un point quelconque, mais invariant une fois choisi, est noté Q ;
- l'espace géométrique est modélisé par un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3 et par l'espace vectoriel E associé.

2.1 Masse – Répartition de la masse

2.1.1

Notion de masse

En mécanique classique, on appelle **système matériel** un ensemble de particules ou de points caractérisé par une certaine quantité de matière. On constate expérimentalement que cette dernière se conserve au cours des transformations physiques ou chimiques.

Définition

On appelle **masse** d'un système matériel la grandeur scalaire positive représentative de sa quantité de matière.

À la notion de masse est associée une mesure complètement additive, ce qui entraîne les deux propriétés suivantes

► Propriété 1

La masse m totale d'un système matériel est la somme des masses élémentaires dm de chacun de ses points

$$m = \int_{\Sigma} dm$$

► Propriété 2

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes matériels quelconques mais disjoints, de masses respectives m_1 et m_2 . Le système $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, tel que $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, est de masse $m = m_1 + m_2$.

2.1.2

Système à masse conservative

On reprend la notion de masse qui se conserve au cours des transformations physiques pour mettre en place une relation qui va simplifier bien des calculs à venir.



En mécanique classique, ou newtonienne, la masse est une quantité considérée indépendante de l'énergie.

Définition

Un **système à masse conservative** est un système dont la masse ne varie pas au cours du temps.

Cette indépendance entre la masse et le temps est à exploiter d'autant plus que les calculs à mener s'appuient sur deux activités principales :

- on définit des quantités élémentaires dépendant du point P courant et du temps t , nommée simplement ici $f(P, t)dm$, que l'on somme par intégration sur tout le système matériel.
- on s'intéresse aux variations de ces quantités au cours du temps.

On démontre alors que pour un système à masse conservative, la dérivée par rapport au temps de la somme de ces quantités élémentaires est égale à la somme de la dérivée par rapport au temps de ces mêmes quantités, ce que l'on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Sigma} f(P, t) dm \right) = \int_{\Sigma} \left(\frac{d}{dt} f(P, t) \right) dm$$

2.1.3 Centre de masse

Soient un système matériel quelconque Σ , de masse m , et P un point courant de ce système, de masse dm .

Définition

Le **centre de masse** d'un système matériel quelconque Σ est le point noté G vérifiant la propriété

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GP} dm = 0$$

Le centre de masse d'un système matériel est également appelé **centre d'inertie**. Il vérifie de nombreuses propriétés que l'on se contente d'énoncer ici.

► **Propriété 1**

Le centre de masse d'un système matériel est unique.

► **Propriété 2**

Le centre de masse G d'un système matériel Σ de masse m se détermine à partir d'un point quelconque Q par la relation

$$\overrightarrow{QG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \overrightarrow{QP} dm$$

► **Propriété 3**

Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes matériels quelconques mais disjoints de masses et de centres de masse respectifs m_1 et m_2 , G_1 et G_2 .

Soit Q un point quelconque.

Le point G , centre de masse du système $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de masse $m = m_1 + m_2$, est le barycentre des points G_1 et G_2 affectés de leurs masses respectives m_1 et m_2 et il vérifie la relation

$$m \overrightarrow{QG} = m_1 \overrightarrow{QG_1} + m_2 \overrightarrow{QG_2}$$



$f(P, t)$ est une fonction quelconque, soit scalaire, soit vectorielle.



On peut échanger l'ordre de la dérivée et de l'intégrale !



Certaines de ces propriétés sont démontrées en exercice.



Le mouvement Σ/R est tout à fait envisageable, mais le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, \Sigma/R)$ N'EST PAS un champ de vecteurs équiprojectif!

► **Propriété 4**

Soit G le centre de masse d'un système Σ de masse m . Soit P un point courant de ce système, de masse dm , en mouvement par rapport à un repère R .

Les vecteurs vitesse et accélération du centre de masse G dans le mouvement Σ/R se déduisent des vecteurs vitesse et accélération des points P par les relations

$$\begin{cases} \vec{V}(G, \Sigma/R) = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm \\ \vec{A}(G, \Sigma/R) = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \vec{A}(P, \Sigma/R) dm \end{cases}$$

► **Propriété 5**

Soient un solide indéformable S et G son centre de masse.

Ce point G est un point du solide S .

► **Propriété 6**

On considère un solide S homogène sur lequel on trouve au choix :

- un plan Π de symétrie ;
- un axe Δ de symétrie ;
- un centre C de symétrie.

Le centre de masse G de ce solide est alors respectivement :

- sur le plan Π ;
- sur la droite Δ ;
- au point C .

2.1.4 Moment d'inertie

Les acquis de la mécanique du point

On considère un point P de masse notée m en mouvement par rapport à un repère R . L'énergie cinétique de ce point dans son mouvement relatif à R s'évalue comme la moitié du produit de sa masse avec le carré de sa vitesse relative V , ce qui s'écrit

$$E = \frac{1}{2} m V^2$$

Supposons ce point tournant autour d'un axe Δ fixe dans R . On peut écrire à chaque instant $V = R\omega$, R étant le rayon du cercle trajectoire, et l'expression de l'énergie cinétique devient

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

La quantité mR^2 est appelée moment d'inertie de la masse ponctuelle P par rapport à l'axe de rotation Δ .

Définition scalaire d'un moment d'inertie

On s'intéresse maintenant à un solide indéformable sur lequel on va sommer la quantité élémentaire mise en évidence :

- soit un solide S de masse m ;
- soient Δ un axe lié à ce solide S , Q un point quelconque de cet axe et $\vec{\delta}$ un vecteur unitaire orientant cet axe ;
- soit P un point courant de ce solide, de masse dm situé à la distance courante r de l'axe Δ .

On note le moment d'inertie I_Δ ou $I_{Q\delta}$, c'est-à-dire en ajoutant en indice la droite de référence.

Définition

On appelle **moment d'inertie** d'un solide par rapport à un axe la somme des masses élémentaires multipliées par le carré de la distance du point courant à cet axe.

Avec les notations posées précédemment, on obtient comme expression

$$I_{Q\delta} = \int_S r^2 dm$$

Cette définition appelle les commentaires suivants :

- un moment d'inertie caractérise la distribution de la masse d'un solide autour d'une droite ;
- le moment d'inertie $I_{Q\delta}$ caractérise la répartition de la masse du solide S par rapport à l'axe Δ ;
- un moment d'inertie est le produit d'une masse et d'une longueur au carré.

L'unité d'un moment d'inertie est le kilogramme mètre carré [$kg\ m^2$]

Changement d'axe de rotation

Il est possible de changer d'axe de rotation de référence pour le calcul d'un moment d'inertie. Cette opération est connue sous le nom de **théorème de HUYGENS**.

Théorème de Huygens

Soit un solide indéformable S de masse m et de centre de masse G .

Soit $\Delta = (Q, \vec{\delta})$ une droite de ce solide S et soit d la distance du point G à cet axe.

Le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe de rotation Δ est égal à la somme du moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe de rotation parallèle passant par le centre de masse G et du moment d'inertie du point G affecté de la masse totale m par rapport à Δ .

$$I_{Q\delta} = I_{G\delta} + md^2$$

Moments d'inertie de solides courants

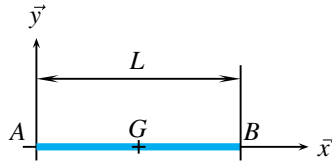
La définition scalaire d'un moment d'inertie est suffisante pour le calculer dans des cas simples.

Tous les solides considérés sont supposés être homogènes.

Un moment d'inertie n'a pas de sens en soi. Il est nécessaire de connaître l'axe de référence !



► Tige de longueur L et de masse m

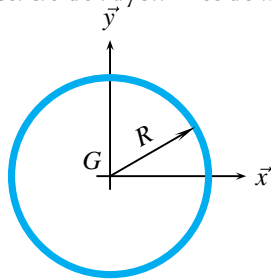


$$I_{Ax} = I_{Gx} = 0$$

$$I_{Ay} = I_{Az} = m \frac{L^2}{3}$$

$$I_{Gy} = I_{Gz} = m \frac{L^2}{12}$$

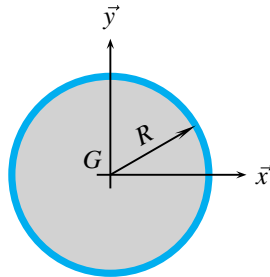
► Cercle de rayon R et de masse m



$$I_{Gx} = I_{Gy} = m \frac{R^2}{2}$$

$$I_{Gz} = mR^2$$

► Disque de rayon R et de masse m



$$I_{Gx} = I_{Gy} = m \frac{R^2}{4}$$

$$I_{Gz} = m \frac{R^2}{2}$$

Pour les sphères, on donne les deux résultats ci-dessous, mais le calcul n'est pas aisé à partir de la définition scalaire.

► Sphère creuse de rayon R et de masse m

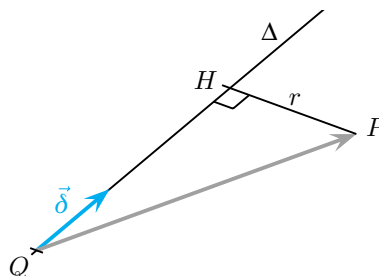
$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{3}mR^2$$

► Sphère pleine de rayon R et de masse m

$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{5}mR^2$$

Définition vectorielle d'un moment d'inertie

On reprend les données de la définition scalaire d'un moment d'inertie sur une figure, en ajoutant le point H , projeté orthogonal du point courant P sur la droite Δ



La manière de calculer la plus rapide est expliquée en exercice.

La définition scalaire du moment d'inertie permet d'écrire

$$I_{Q\delta} = \int_S HP^2 dm$$

Alors que la distance QH s'obtient à l'aide du produit scalaire $\vec{\delta} \cdot \vec{QP}$, la distance HP s'évalue à l'aide du produit vectoriel $\vec{\delta} \wedge \vec{QP}$

$$I_{Q\delta} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \vec{QP})^2 dm$$

L'utilisation des propriétés du produit mixte conduit à une autre écriture de cette intégrale

$$I_{Q\delta} = \vec{\delta} \cdot \int_S \vec{QP} \wedge (\vec{\delta} \wedge \vec{QP}) dm$$

Cette dernière équation laisse apparaître le produit scalaire du vecteur $\vec{\delta}$ avec un vecteur appelé « opérateur d'inertie au point Q du solide S appliqué au vecteur $\vec{\delta}$ »

$$I_{Q\delta} = \vec{\delta} \cdot \bar{I}(Q, S)(\vec{\delta})$$

Il reste à expliciter l'opérateur d'inertie, objet de la section suivante.

2.1.5 Opérateur d'inertie

L'opérateur d'inertie caractérise la répartition de la masse d'un solide indéformable autour d'un de ses points.

Expression et notation

Définition

Soit un solide indéformable S et un point quelconque Q de ce solide.

On appelle **opérateur d'inertie** au point Q du solide S l'application, notée $\bar{I}(Q, S)$, qui à tout vecteur \vec{u} associe le vecteur $\int_S \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) dm$.

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto \bar{I}(Q, S)(\vec{u}) = \int_S \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) dm \end{aligned}$$

La notation de cet opérateur semble surprenante, mais reste fidèle au modèle d'écriture d'une fonction

$$\begin{aligned} x &\longmapsto f(x) \\ \vec{u} &\longmapsto \underbrace{\bar{I}(Q, S)}_f \left(\underbrace{\vec{u}}_x \right) \end{aligned}$$

Matrice associée à l'opérateur d'inertie

Pour écrire la matrice associée à l'opérateur d'inertie, on met en œuvre :

- un solide S ;

- une base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attachée à ce solide ;
- un point Q quelconque mais fixe sur ce solide ;
- le point courant P de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

La matrice associée à l'opérateur $\overrightarrow{QP} \wedge$ est une matrice antisymétrique que l'on retrouve à partir de la technique de calcul du produit vectoriel

$$\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

La matrice associée à l'opérateur $\overrightarrow{QP} \wedge (\overrightarrow{QP} \wedge \dots)$ s'écrit alors, toujours dans la base vectorielle $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y^2 + z^2) & xy & xz \\ yx & -(z^2 + x^2) & yz \\ zx & zy & -(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

On en déduit donc la forme générale de la matrice de l'opérateur d'inertie

$$\overline{\overline{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int yx dm & \int (z^2 + x^2) dm & -\int yz dm \\ -\int zx dm & -\int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Notations usuelles et interprétation

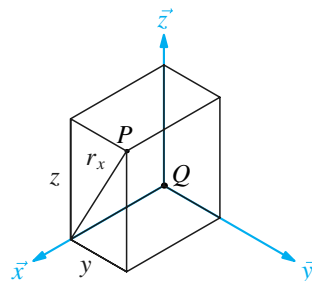
On trouve les composantes de la matrice associée à l'opérateur d'inertie usuellement proposées sous une des deux formes suivantes

$$\overline{\overline{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} I_{Qx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{Qy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{Qz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les termes de la diagonale I_{Qx} , I_{Qy} et I_{Qz} s'interprètent immédiatement comme des moments d'inertie, respectivement autour des axes (Q, \vec{x}) , (Q, \vec{y}) et (Q, \vec{z}) :

- que ce soit par l'approche scalaire ;

$$A = I_{Qx} = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S r_x^2 dm$$



- ou que ce soit par l'approche vectorielle.

$$I_{Qx} = \vec{x} \cdot \overline{\overline{I}}(Q, S) (\vec{x})$$

Les termes D , E et F sont appelés **produit d'inertie** et traduisent une asymétrie dans la répartition de la masse dans le repère $(Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Cette forme générale n'est pas à utiliser en l'état. Aboutir à cette expression permet de comprendre, mais il faut immédiatement passer aux notations usuelles pour poursuivre la réflexion et s'approprier des méthodes efficaces de calculs !

La somme $y^2 + z^2$ est bien le carré de la distance r_x du point P à l'axe de rotation (Q, \vec{x}) !



Cette interprétation est reprise et illustrée au chapitre suivant, à l'occasion de l'équilibrage d'un solide en rotation.

On suppose par exemple le produit d'inertie $\int xy dm$ non nul. Comme ce terme est indépendant de la coordonnée z , on se place dans le plan (Q, \vec{x}, \vec{y}) pour constater des quantités différentes de part et d'autres des axes (Q, \vec{x}) ou (Q, \vec{y}) . C'est pourquoi on lit souvent que le produit d'inertie I_{xy} caractérise la répartition de la masse de part et d'autre des plans (Q, \vec{z}, \vec{x}) et (Q, \vec{y}, \vec{z}) .

Axes principaux d'inertie

La matrice de l'opérateur d'inertie $\bar{I}(Q, S)$ est une matrice symétrique, donc diagonalisable. Il existe trois valeurs propres et trois vecteurs propres.

Les trois valeurs propres sont appelées **moments d'inertie principaux**, les droites issues du point de calcul Q et orientées par les directions propres sont appelées **axes principaux d'inertie**.

Il faut constater que pour un solide donné, il existe toujours une base vectorielle à associer à un quelconque de ses points dans laquelle la matrice est diagonale.

Changement de point

Supposons connu l'opérateur d'inertie $\bar{I}(Q, S)$ d'un solide S en un point quelconque Q .

$$\bar{I}(Q, S)(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QP}) dm$$

Soit $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GP}$, avec G le centre de masse du solide S . L'expression précédente se décompose en quatre termes

$$\begin{aligned} \bar{I}(Q, S)(\vec{u}) = & \underbrace{\int_S \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) dm}_{(a)} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) dm}_{(b)} \\ & + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG}) dm}_{(c)} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) dm}_{(d)} \end{aligned}$$

On s'intéresse à chacun des termes :

- le quatrième (d) correspond à l'opérateur d'inertie au point G

$$\bar{I}(G, S)(\vec{u}) = \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}) dm$$

- l'intégrale du premier terme (a) ne concerne plus que l'élément différentiel et peut donc être calculée. L'expression finale s'interprète comme l'opérateur d'inertie au point Q d'un solide composé du seul point G de masse m

$$\bar{I}(Q, G[m])(\vec{u}) = m \overrightarrow{QG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{QG})$$

- les deux termes (b) et (c) sont nuls, du fait d'avoir choisi le centre de masse G lors du changement de point

$$(b) \longrightarrow \overrightarrow{QG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \underbrace{\int_S \overrightarrow{GP} dm}_{\vec{0}} \right) = \vec{0}$$

Théorème

L'opérateur d'inertie d'un solide S calculé en un point quelconque Q est égal à la somme de l'opérateur d'inertie de ce solide calculé au centre de masse G et de l'opérateur d'inertie calculé au point Q du solide ponctuel G affecté de la masse totale du solide S .

$$\bar{I}(Q, S) = \bar{I}(G, S) + \bar{I}(Q, G[m])$$



Il est obligatoire de passer par le centre de masse G !

Solides de formes élémentaires

Lorsque l'on s'intéresse à des solides à formes particulières, la principale activité est d'évaluer la forme de la matrice de l'opérateur d'inertie, en fonction des caractéristiques de la répartition de la masse.

► Solide homogène avec un plan de symétrie

On considère un solide homogène S admettant le plan (Q, \vec{x}, \vec{y}) comme plan de symétrie.

Pour tout point courant P de coordonnées (x, y, z) , il existe sur le solide le point de coordonnées $(x, y, -z)$. On en déduit que les produits d'inertie $\int yz dm$ et $\int zx dm$ sont nuls. La matrice est en conséquence de la forme

$$\bar{\bar{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

► Solide homogène de révolution

On considère un solide homogène S admettant la droite (Q, \vec{z}) comme axe de révolution.

Tout plan contenant l'axe de révolution est un plan de symétrie pour le solide, en particulier les plans (Q, \vec{y}, \vec{z}) et (Q, \vec{z}, \vec{x}) . On en déduit :

- la matrice de l'opérateur $\bar{\bar{I}}(Q, S)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est diagonale ;
- tout vecteur orthogonal à \vec{z} est vecteur propre ;
- on a une valeur propre double ;
- les moments d'inertie I_{Q_x} et I_{Q_y} sont égaux.

La matrice d'inertie est ainsi de la forme

$$\bar{\bar{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



La forme particulière des matrices d'inertie n'est pas à apprendre. Elle est à retrouver au cas par cas !

2.2 Quantité de vitesse et quantité d'accélération

Les acquis de la mécanique du point

Une des grandeurs importantes de la mécanique, vue en physique, est la quantité de mouvement.

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse \vec{V} dans un repère R , cette grandeur est vectorielle et s'écrit usuellement

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

Quand ce point tourne autour d'un axe (Δ) défini par $(Q, \vec{\delta})$, cette quantité de vitesse est caractérisée par le moment cinétique $\vec{\sigma}_Q$, expression raccourcie de *moment de quantité de mouvement*

$$\vec{\sigma}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge m\vec{V}$$

De plus, la variation d'une quantité de mouvement au cours du temps est décrite par la dérivée de la quantité de mouvement, cette dernière étant pour un système à masse conservative une quantité d'accélération. Pour le point considéré précédemment, on a ainsi



La quantité de vitesse est appelée plus souvent quantité de mouvement.

$$\left[\frac{d\vec{P}}{dt} \right]_R = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_0 \vec{V} + m \left[\frac{d\vec{V}}{dt} \right]_R = m\vec{A}$$

À partir de là, il s'agit de sommer les quantités attribuées au point courant de masse dm sur l'ensemble du système considéré, en adoptant des notations claires, transversales afin d'éviter les confusions.

2.2.1 Torseur cinétique

Le mouvement Σ/R n'est pas un mouvement de solide indéformable !

On considère un système matériel Σ , de masse m et de centre de masse G , en mouvement par rapport à un repère R . On note ainsi le mouvement Σ/R .

Le point courant est noté P et on lui attribue la masse élémentaire dm .

Quantité de mouvement et moment cinétique

Définition

On appelle **quantité de mouvement** du système Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités de mouvement élémentaires

$$\vec{P}(\Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

En utilisant la propriété du centre de masse, le résultat de l'intégration est connue indépendamment de la composition du système matériel Σ et on obtient

$$\vec{P}(\Sigma/R) = m\vec{V}(G, \Sigma/R)$$

Définition

On appelle **moment cinétique** du système Σ dans son mouvement par rapport à R calculé en un point Q quelconque la somme des moments cinétiques élémentaires

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

Forme générale du torseur cinétique

Définition

On appelle **champ des vecteurs moment cinétique** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur moment cinétique calculé en ce point.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ Q &\longmapsto \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm \end{aligned}$$

Le champ des vecteurs moment cinétique est un champ de vecteurs équiprojectif, et on peut ainsi définir le torseur cinétique.

Définition

On appelle **torseur cinétique** le champ des vecteurs moment cinétique.

Notation

Pour un mouvement Σ/R , le torseur cinétique est noté simplement $\mathcal{C}(\Sigma/R)$.

Les éléments de réduction de ce torseur en un point Q sont alors

$$\mathcal{C}(\Sigma/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{P}(\Sigma/R) \\ \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \end{array} \right.$$

Le vecteur vitesse est celui du centre de masse G !

La lettre \mathcal{C} est choisie par référence au mot *cinétique*.



La résultante est définie à partir du vecteur vitesse du centre de masse uniquement !



Le point Q est alors choisi et bien identifié sur le solide S .



Cette expression est une des expressions importantes à retenir.



Choisir le centre d'inertie donne une expression simple !



Cette expression n'est pas la forme générale. Elle n'est valable que pour un point Q immobile dans le mouvement S/R .

avec respectivement :

- pour résultante, le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}(\Sigma/R) = m\vec{V}(G, \Sigma/R)$;
- pour moment au point Q , le vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R)$.

Application au solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable S , le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, S/R)$ est un champ de vecteurs équiprojectif. On utilise en conséquence dès la définition du moment cinétique la formule de changement de point, en introduisant le vecteur vitesse particulier $\vec{V}(Q, S/R)$. On obtient ainsi, après développement et arrangement :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(Q, S/R) &= \int_{\Sigma} \vec{QP} \wedge \vec{V}(P, S/R) dm \\ &= \int_{\Sigma} \vec{QP} \wedge (\vec{V}(Q, S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}) dm \\ &= \int_{\Sigma} \vec{QP} dm \wedge \vec{V}(Q, S/R) + \int_{\Sigma} \vec{QP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QP}) dm \end{aligned}$$

La première intégrale se calcule indépendamment du vecteur $\vec{V}(Q, S/R)$ et on reconstruit pour la seconde l'expression de l'opérateur d'inertie appliqué au vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$. Après l'échange des deux termes, on aboutit à la formule à retenir.

Théorème

Pour un solide indéformable S en mouvement dans un repère R , le moment cinétique calculé au point Q fait appel à l'opérateur d'inertie exprimé en ce même point Q et appliqué au vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$, ainsi qu'à un terme complémentaire. Il s'exprime par

$$\vec{\sigma}(Q, S/R) = \vec{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R)) + m \vec{QG} \wedge \vec{V}(Q, S/R)$$

Le terme complémentaire est une quantité qui peut être nulle, et il est indispensable de s'intéresser aux deux cas particuliers rapides à identifier, à savoir les cas de nullité des vecteurs \vec{QG} et $\vec{V}(Q, S/R)$.

► Premier cas particulier

Le point Q est choisi au centre de masse G . On a alors

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \vec{I}(G, S) (\vec{\Omega}(S/R))$$

► Second cas particulier

Le point Q est immobile dans le mouvement S/R . On a alors

$$\vec{\sigma}(Q, S/R) = \vec{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R))$$

2.2.2

Torseur dynamique

Le principe fondamental de la dynamique est construit à partir des variations de quantités de vitesse. C'est pourquoi l'on s'attache à exprimer les quantités d'accélération d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à R .

On considère toujours un système Σ , de masse m et de centre de masse G .

Quantité d'accélération et moment dynamique

Définition

On appelle **quantité d'accélération** du système Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des quantités d'accélération élémentaires $\vec{A}(P, \Sigma/R) dm$, et on utilise la propriété du centre de masse pour écrire directement

$$\int_{\Sigma} \vec{A}(P, \Sigma/R) dm = m\vec{A}(G, \Sigma/R)$$

Par construction semblable à ce qui a été posé pour les quantités de vitesse, on définit le vecteur *moment de quantité d'accélération* élémentaire au point Q par le produit vectoriel $\vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, \Sigma/R) dm$.

Définition

On appelle **moment dynamique** calculé en un point Q quelconque du système Σ dans son mouvement par rapport à R la somme des moments dynamiques élémentaires

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, \Sigma/R) dm$$

Forme générale du torseur dynamique

Définition

On appelle **champ des vecteurs moment dynamique** l'application qui à chaque point de l'espace associe le vecteur moment dynamique calculé en ce point

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ Q &\longmapsto \vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, \Sigma/R) dm \end{aligned}$$

Le champ des vecteurs moment dynamique est un champ de vecteurs équijectif, et on peut ainsi définir le torseur dynamique.

Définition

On appelle **torseur dynamique** le champ des vecteurs moment dynamique.

Notation

Pour un mouvement Σ/R , le torseur dynamique est noté simplement $\mathcal{D}(\Sigma/R)$.

Les éléments de réduction de ce torseur en un point Q sont ainsi

$$\mathcal{D}(\Sigma/R) = \begin{cases} m\vec{A}(G, \Sigma/R) \\ \vec{\delta}(Q, \Sigma/R) \end{cases}$$

avec respectivement :

- pour résultante, le vecteur quantité d'accélération $m\vec{A}(G, \Sigma/R)$;
- pour moment au point Q , le vecteur moment dynamique $\vec{\delta}(Q, \Sigma/R)$.

Du torseur cinétique au torseur dynamique

On s'intéresse de suite aux relations liant les éléments de réduction des torseurs cinétique et dynamique.



Cette expression correspond à la définition, mais celle à retenir pour les calculs à mener est mise en place par dérivation du moment cinétique à la page suivante.



La lettre \mathcal{D} est choisie par référence au mot *dynamique*.



La résultante est définie à partir du vecteur accélération du centre de masse G uniquement !

► **Résultante**

Le système Σ est un système à masse conservative : la résultante dynamique est ainsi la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique.

$$m\vec{A}(G, \Sigma/R) = \left[\frac{d}{dt} m\vec{V}(G, \Sigma/R) \right]_R$$

► **Moment en un point Q**

On dérive l'expression du moment cinétique par rapport au temps dans R

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \right]_R = \left[\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm \right]_R$$

Le système Σ est à masse conservative, donc la dérivée temporelle de l'intégrale sur le système est égale à l'intégrale de la dérivée temporelle

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \right]_R = \int_{\Sigma} \left[\frac{d}{dt} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) \right] dm$$

La formule de dérivation d'un produit permet de mettre en évidence les deux termes à évaluer :

- le calcul du premier terme nécessite l'introduction d'un point I immobile dans R pour exploiter la définition d'un vecteur vitesse

$$\left[\frac{d\vec{Q}\vec{P}}{dt} \right]_R = \left[\frac{dI\vec{P}}{dt} \right]_R - \left[\frac{dI\vec{Q}}{dt} \right]_R = \vec{V}(P, \Sigma/R) - \vec{V}(Q, ?/R)$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \left[\frac{d}{dt} \vec{Q}\vec{P} \right]_R \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm &= \int_{\Sigma} -\vec{V}(Q, ?/R) \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm \\ &= -\vec{V}(Q, ?/R) \wedge \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm \\ &= -\vec{V}(Q, ?/R) \wedge m\vec{V}(G, \Sigma/R) \end{aligned}$$

- le calcul du second terme est immédiat

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(P, \Sigma/R) \right]_R dm &= \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, \Sigma/R) dm \\ &= \vec{\delta}(Q, \Sigma/R) \end{aligned}$$

On regroupe les deux derniers résultats pour exprimer la relation définitive entre le moment cinétique et le moment dynamique.

Théorème

Pour un système matériel quelconque Σ en mouvement par rapport à un repère R , le moment dynamique calculé en un point Q est égal à la somme de la dérivée dans R du moment cinétique calculé au même point Q et d'un terme complémentaire.

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \right]_R + \vec{V}(Q, ?/R) \wedge m\vec{V}(G, \Sigma/R)$$

Le terme complémentaire est une quantité qui est nulle pour deux cas particuliers rapides à identifier.



Le point Q est *a priori* indépendant du mouvement Σ/R . La relation est correcte, mais les calculs sont impossibles à mener tant que le mouvement concernant le point Q n'est pas clairement identifié.



Cette expression est une des expressions importantes à retenir.



Choisir le centre d'inertie donne une expression simple !



Cette expression n'est pas la forme générale. Elle n'est valable que pour un point Q immobile dans le mouvement \mathcal{R}/R , notion par ailleurs délicate à cerner quand le système matériel est quelconque.

► Premier cas particulier

Le point Q est choisi au centre de masse G . On a alors

$$\vec{\delta}(G, \Sigma/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, \Sigma/R) \right]_R$$

► Second cas particulier

Le point Q est immobile dans le mouvement \mathcal{R}/R . On a alors

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \right]_R$$

L'usage de cette expression est déconseillé dans le cas général, mais à exploiter sans aucune hésitation dans le cas d'un solide indéformable, avec un point Q bien identifié sur le solide.

2.2.3 Mouvements élémentaires de solides indéformables

On termine cette section en s'intéressant aux expressions que l'on obtient dans le cas de mouvements élémentaires de solides indéformables, et on illustre les résultats à partir de l'exemple d'un élévateur présenté ci-dessous.

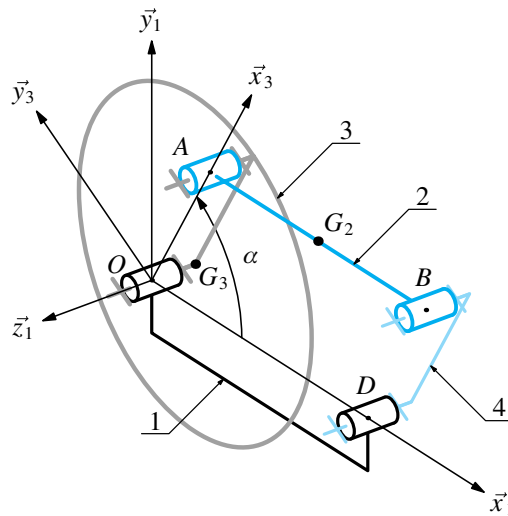


Figure 2.1 Élévateur utilisant un parallélogramme déformable.

Ce mécanisme comporte quatre solides dont on ne donne que les paramètres nécessaires aux calculs :

- un bâti 1 ;
- un disque moteur 3, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti, et on pose :
 - l'angle $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_3)$;
 - le taux de rotation $\omega = \dot{\alpha}$;
 - le rayon $\vec{OA} = R\vec{x}_3$.
- un plateau 2 ;
- une bielle 4.

Solide en translation

Soit un solide S de masse m , de centre de masse G , supposé en translation par rapport à un repère R .

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ est à chaque instant le vecteur nul. On en déduit que le moment cinétique du solide S dans son mouvement par rapport à R est nul au point G .

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \overline{\overline{I}}(G, S) (\vec{\Omega}(S/R)) = \vec{0}$$

Le torseur cinétique $\mathcal{C}(S/R)$ est alors un glisseur.

$$\mathcal{C}(S/R) = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} m\vec{V}(G, S/R) \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

Remarque

Comme pour tout glisseur, le moment cinétique n'est nul que pour les points de l'axe central !

Comme la résultante dynamique est la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique, on en déduit immédiatement l'expression du torseur dynamique $\mathcal{D}(S/R)$

$$\mathcal{D}(S/R) = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} m\vec{A}(G, S/R) \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

Exemple

Pour l'élévateur de la figure 2.1, le plateau 2 est en mouvement de translation circulaire par rapport au bâti 1. Le torseur cinématique $\mathcal{V}(2/1)$ est ainsi de la forme

$$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ R\omega\vec{y}_3 \end{array} \right.$$

Le vecteur accélération $\vec{A}(G_2, 2/1)$ se calcule par dérivation du vecteur $\vec{V}(G_2, 2/1)$ dans la base 1 et on obtient

$$\vec{A}(G_2, 2/1) = R\dot{\omega}\vec{y}_3 - R\omega^2\vec{x}_3$$

On en déduit les expressions des torseurs cinétique et dynamique

$$\mathcal{C}(2/1) = \underset{G_2}{\left\{ \begin{array}{l} mR\omega\vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{D}(2/1) = \underset{G_2}{\left\{ \begin{array}{l} m(R\dot{\omega}\vec{y}_3 - R\omega^2\vec{x}_3) \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

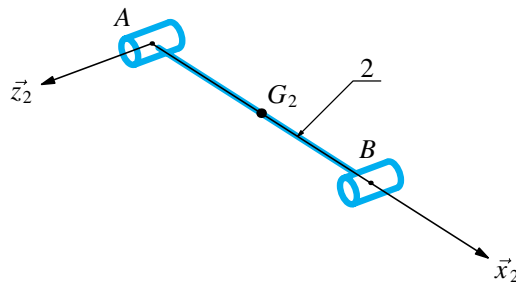


Figure 2.2 Le plateau 2 seul.

Solide de révolution équilibré en rotation autour d'un axe immobile dans R

Soit un solide S de révolution en rotation d'axe Δ par rapport à un repère R :

- le solide est supposée de masse m et de centre de masse G ;
- l'axe de rotation Δ est supposé confondu avec l'axe de révolution et immobile dans R . On pose alors $\Delta = (G, \vec{z})$;



Comme pour tout glisseur, le moment dynamique n'est nul que pour les points de l'axe central !



L'équilibrage d'un solide en rotation est étudié lors du chapitre sur la dynamique.

- la répartition de sa masse autour du point G est caractérisée par l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{I}}(G, S)$ et on donne les composantes de la matrice correspondante dans une base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ attachée au solide S

$$\overline{\overline{I}}(G, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le vecteur rotation n'a qu'une seule composante dans la base \mathcal{B} et on pose $\vec{\Omega}(S/R) = \omega\vec{z}$. On en déduit l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}(G, S/R)$

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \overline{\overline{I}}(G, S) (\vec{\Omega}(S/R)) = J\omega\vec{z}$$

Le point G est sur l'axe de rotation, le vecteur vitesse $\vec{V}(G, S/R)$ est nul et le torseur cinétique $\mathcal{C}(S/R)$ est un torseur couple

$$\mathcal{C}(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ J\omega\vec{z} \end{array} \right.$$

Le moment dynamique calculé au centre d'inertie est le vecteur dérivé dans R du moment cinétique

$$\vec{\delta}(G, S/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, S/R) \right]_R = J\dot{\omega}\vec{z}$$

Le vecteur accélération $\vec{A}(G, S/R)$ est nul et le torseur dynamique $\mathcal{D}(S/R)$ est un également un torseur couple

$$\mathcal{D}(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ J\dot{\omega}\vec{z} \end{array} \right.$$

Remarque

Les résultats de cette section méritent l'attention, mais il ne faut pas oublier l'ensemble des hypothèses faites pour parvenir à ces expressions simples.

Exemple

Pour l'élévateur de la figure 2.1, le disque 3 est un solide de révolution en mouvement de rotation d'axe (G_3, \vec{z}_1) par rapport au bâti 1. Le torseur cinématique $\mathcal{V}(3/1)$ est ainsi de la forme

$$\mathcal{V}(3/1) =_{G_3} \left\{ \begin{array}{l} \omega\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

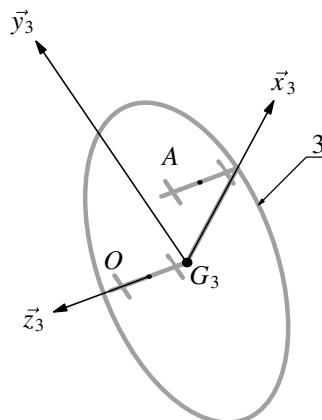


Figure 2.3 Le disque 3 seul.



On retrouve ici les résultats élémentaires appris en physique !

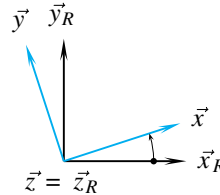
Ce disque est supposé équilibré en rotation et on nomme J_3 son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_3, \vec{z}_3) . Les expressions des torseurs cinétique et dynamique sont immédiates

$$\mathcal{C}(3/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ J_3 \omega \vec{z} \end{array} \right. \quad \mathcal{D}(3/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ J_3 \dot{\omega} \vec{z} \end{array} \right.$$

Solide quelconque en rotation autour d'un axe immobile dans R

Soit un solide S de révolution en rotation d'axe Δ par rapport à un repère R :

- on associe au repère R une base vectorielle $(\vec{x}_R, \vec{y}_R, \vec{z}_R)$ et au solide S une base $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;



- le solide est supposée de masse m et de centre de masse G ;
- on considère un point Q sur l'axe de rotation Δ et on pose $\Delta = (Q, \vec{z})$;
- la répartition de sa masse autour du point Q est caractérisée par la matrice de l'opérateur d'inertie $\bar{I}(Q, S)$ dont on donne les composantes dans la base \mathcal{B} .

$$\bar{I}(Q, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Le vecteur rotation a une seule composante dans la base \mathcal{B} et on pose $\vec{\Omega}(S/R) = \omega \vec{z}$. On en déduit l'expression du moment cinétique $\vec{\sigma}(G, S/R)$ dans la base tournante.

$$\vec{\sigma}(Q, S/R) = \bar{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R)) = \omega (C\vec{z} - D\vec{y} - E\vec{x})$$

Le point G n'est pas sur l'axe de rotation, le vecteur vitesse $\vec{V}(G, S/R)$ n'est pas nul et le torseur cinétique $\mathcal{C}(S/R)$ est de la forme

$$\mathcal{C}(S/R) = \left. \begin{array}{l} m\vec{V}(G, S/R) \\ \omega (C\vec{z} - D\vec{y} - E\vec{x}) \end{array} \right\}_Q$$

Le moment dynamique calculé au point Q immobile dans le mouvement S/R est le vecteur dérivé dans R du moment cinétique

$$\vec{\delta}(Q, S/R) = C\dot{\omega}\vec{z} - \dot{\omega}(D\vec{y} + E\vec{x}) + \omega^2(D\vec{x} - E\vec{y})$$

Remarque

La composante suivant \vec{z} du moment dynamique est la même que celle trouvée pour le solide de révolution équilibré en rotation. On a en effet $\vec{\delta}(Q, S/R) \cdot \vec{z} = C\dot{\omega}$. Mais l'expression générale est bien plus complexe.

Le vecteur accélération $\vec{A}(G, S/R)$ n'est pas nul et la forme du torseur dynamique $\mathcal{D}(S/R)$ n'a rien de particulier

$$\mathcal{D}(S/R) = \left. \begin{array}{l} m\vec{A}(G, S/R) \\ C\dot{\omega}\vec{z} - \dot{\omega}(D\vec{y} + E\vec{x}) + \omega^2(D\vec{x} - E\vec{y}) \end{array} \right\}_Q$$



Le point Q est bien identifié sur le solide S et immobile dans le mouvement S/R .



La matrice et le vecteur rotation doivent être exprimés dans une même base !



On constate que les expressions deviennent très rapidement complexes.

Exemple

Pour l'élévateur de la figure 2.4, le bras 4 est un solide quelconque en mouvement de rotation d'axe (D, \vec{z}_1) par rapport au bâti 1. Le torseur cinématique $\mathcal{V}(4/1)$ est ainsi de la forme

$$\mathcal{V}(4/1) =_D \begin{Bmatrix} \omega_{41} \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Comme le point D est immobile dans le mouvement 4/1, on pose J_4 le moment d'inertie du bras 4 par rapport à l'axe (D, \vec{z}_4) et on connaît la composante du moment dynamique en D suivant \vec{z}_1 .

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(D, 4/1) = \dot{\omega}_{41} \vec{z}_1$$

Par contre l'expression complète du torseur dynamique $\mathcal{D}(4/1)$ requiert bien d'autres informations.

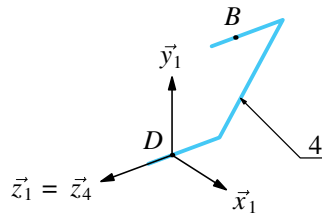


Figure 2.4 Le bras 4 seul.

2.2.4 Système de solides indéformables

On considère le système Σ , composé de n solides indéformables S_i , en mouvement par rapport à un repère R . On a les deux propriétés suivantes :

- le torseur cinétique $\mathcal{C}(\Sigma/R)$ est la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides dans leurs mouvements par rapport à R

$$\mathcal{C}(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}(i/R)$$

- le torseur dynamique $\mathcal{D}(\Sigma/R)$ est la somme des torseurs dynamiques de chacun des solides dans leurs mouvements par rapport à R

$$\mathcal{D}(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^n \mathcal{D}(i/R)$$

D'une manière générale, le calcul de la dérivée du moment cinétique $\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R)$ est délicat à mener. Il est plus que conseillé d'utiliser au plus tôt la somme des torseurs dynamiques pour continuer les calculs sur les solides indéformables successifs.

L'arbre de la figure 2.5 illustre les principales stratégies qui peuvent être ensuite suivies pour le calcul d'un moment dynamique :

- le point de départ est soit $\vec{I}(G, S)$, soit $\vec{I}(Q, S)$;
- le point d'arrivée est tout ou partie de $\vec{\delta}(G, S/R)$ ou de $\vec{\delta}(Q, S/R)$, le point Q étant immobile ou non dans le mouvement S/R ;
- l'utilisation de la formule de changement de point sur le champ des vecteurs moment cinétique ou moment dynamique permet d'éviter les termes complémentaires s'ils ont été oubliés.

Pour conclure cette section, on rappelle les possibilités offertes par la formule de dérivation d'un produit lorsque l'on ne cherche qu'une seule composante d'un moment dynamique par exemple.



Le solide S_i est noté simplement i .



Voilà le point de départ des calculs à privilégier dans le cas d'un système de plusieurs solides indéformables.



Il n'y a pas de stratégie unique et plusieurs chemins sont toujours possibles. Il est nécessaire de ne jamais se précipiter sur des calculs sans savoir avant même de commencer celui que l'on va suivre!



Il est nécessaire d'identifier le mouvement $?/R$ concernant le point Q pour continuer les calculs.



Le point Q doit être clairement défini sur S pour $\bar{I}(Q, S)$.

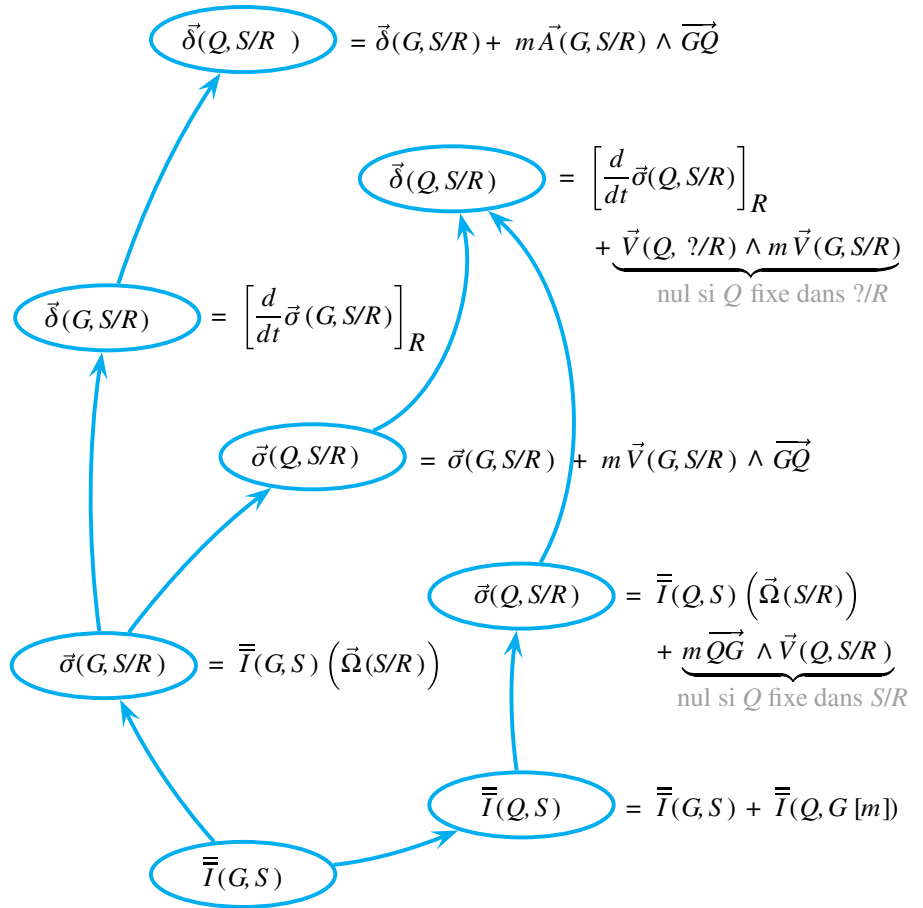


Figure 2.5 L'arbre de calcul d'un moment dynamique.

$$\vec{\delta}(G, S/R) \cdot \vec{u} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, S/R) \cdot \vec{u} \right]_R - \vec{\sigma}(G, S/R) \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R$$

Lorsque le vecteur \vec{u} est immobile dans la base associée à R , effectuer le produit scalaire avant de dériver raccourcit les calculs.

2.3 Énergie cinétique

Les acquis de la mécanique du point

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse \vec{V} dans un repère R , l'énergie cinétique est l'énergie accumulée lors du mouvement. Elle correspond au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos. Cette grandeur est scalaire et s'écrit usuellement

$$E = \frac{1}{2} m \vec{V}^2$$

La variation instantanée de l'énergie cinétique est exprimée par la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique. Le résultat est une grandeur scalaire appelée puissance et notée usuellement P .

La dérivée du vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude R et donne un vecteur accélération noté \vec{A} . Le principe fondamental de la dynamique pose l'équivalence entre la quantité d'accélération $m\vec{A}$ et la force \vec{F} , action mécanique attachée au point.

C'est ainsi que la puissance développée lors du déplacement de ce point est une grandeur scalaire correspondant au produit scalaire des vecteurs force et vitesse.

$$P = m \vec{A} \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Ces deux notions sont étendues à un système matériel quelconque par somme des quantités élémentaires sur tout le système considéré.

2.3.1 Énergie cinétique

Expression générale de l'énergie cinétique

On considère le mouvement d'un système matériel Σ par rapport à un repère R , mouvement caractérisé par le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, \Sigma/R)$.

Définition

On appelle **énergie cinétique** d'un système matériel Σ dans son mouvement par rapport à un repère R la quantité scalaire somme des énergies cinétiques de chacun de ses points.

$$E(\Sigma/R) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R)^2 dm$$

L'unité de l'énergie cinétique est le Joule.

Application au solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable S , le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, S/R)$ est un champ de vecteurs équiprojectif. On introduit en conséquence, dès la définition de l'énergie cinétique, la formule de changement de point afin de faire intervenir le vecteur vitesse particulier $\vec{V}(Q, S/R)$.

En développant le carré de la somme obtenue après substitution, on obtient

$$\begin{aligned} 2 E(S/R) &= \underbrace{\int_S \vec{V}(Q, S/R)^2 dm}_{(a)} \\ &+ \underbrace{\int_S \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{QP} \right)^2 dm}_{(b)} \\ &+ 2 \underbrace{\int_S \vec{V}(Q, S/R) \cdot \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{QP} \right) dm}_{(c)} \end{aligned}$$

La poursuite du calcul nécessite quelques manipulations :

- le terme (a) s'évalue indépendamment des formes du solide S et on obtient

$$(a) = m \vec{V}(Q, S/R)^2$$

- le terme (b) est à considérer comme l'intégrale d'un produit mixte et on transforme ce dernier de manière à reconnaître la définition de l'opérateur d'inertie

$$\begin{aligned} (b) &= \int_S \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{QP} \right) \cdot \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{QP} \right) dm \\ &= \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{QP} \right) \cdot \vec{\Omega}(S/R) dm \\ &= \vec{\Omega}(S/R) \cdot \overline{I}(Q, S) \left(\vec{\Omega}(S/R) \right) \end{aligned}$$

Le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, \Sigma/R)$ n'est pas un champ de vecteurs équiprojectif!

Le point Q choisi est bien identifié sur le solide S .

- le terme (c) se calcule immédiatement

$$(c) = \vec{V}(Q, S/R) \cdot (\vec{\Omega}(S/R) \wedge m \vec{QG})$$

On regroupe les trois résultats partiels pour écrire

$$\begin{aligned} 2 E(S/R) &= \underbrace{m \vec{V}(Q, S/R)^2}_{(a)} \\ &+ \underbrace{\vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R))}_{(b)} \\ &+ 2 \underbrace{\vec{V}(Q, S/R) \cdot (\vec{\Omega}(S/R) \wedge m \vec{QG})}_{(c)} \end{aligned}$$

Le terme (c) est compté deux fois. On en prend un, ainsi que le terme (a), pour factoriser le vecteur $m \vec{V}(Q, S/R)$. De même, on considère le second terme (c) sur lequel on applique les propriétés du produit mixte pour pouvoir l'écrire $\vec{\Omega}(S/R) \cdot (m \vec{QG} \wedge \vec{V}(Q, S/R))$. Ensuite, on factorise le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ à partir du résultat et du terme (b). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 2 E(S/R) &= m \vec{V}(Q, S/R) \cdot \underbrace{(\vec{V}(Q, S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{QG})}_{\vec{V}(G, S/R)} \\ &+ \vec{\Omega}(S/R) \cdot \underbrace{(\vec{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R)) + m \vec{QG} \wedge \vec{V}(Q, S/R))}_{\vec{\sigma}(Q, S/R)} \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'expression précédente le comoment des torseurs cinétique et cinématique caractérisant le mouvement S/R .

Théorème

L'énergie cinétique d'un solide S en mouvement dans un repère R est égal à la moitié du comoment des torseurs cinétique et cinématique.

$$E(S/R) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(S/R) \otimes \mathcal{V}(S/R)$$

2.3.2 Mouvements élémentaires de solides indéformables

On termine également cette section en s'intéressant aux expressions que l'on obtient dans le cas de mouvements élémentaires de solides indéformables.

Solide en translation

Soit un solide S de masse m , de centre de masse G , supposé en translation par rapport à un repère R . On reprend les résultats de la section 2.2.3 pour exprimer les torseurs cinématique et cinétique

$$\mathcal{V}(S/R) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(G, S/R) \end{Bmatrix} \quad \mathcal{C}(S/R) = \begin{Bmatrix} m \vec{V}(G, S/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

On en déduit l'expression de l'énergie cinétique

$$E(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G, S/R)$$

L'énergie cinétique d'un solide en translation est égale à la moitié du produit de sa masse et du carré de la vitesse de son centre d'inertie.

Solide en rotation autour d'un axe immobile dans R

Soit un solide S en rotation d'axe (Q, \vec{z}) par rapport à un repère R . De même que précédemment, on reprend les notations et les résultats de la section 2.2.3 pour exprimer les torseurs cinématique et cinétique

$$\mathcal{V}(S/R) = \underset{Q}{\left\{ \begin{array}{l} \omega \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right.} \quad \mathcal{C}(S/R) = \underset{Q}{\left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}(G, S/R) \\ \omega (C\vec{z} - D\vec{y} - E\vec{x}) \end{array} \right.}$$

On en déduit l'expression de l'énergie cinétique

$$E(S/R) = \frac{1}{2} C \omega^2$$

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe immobile dans un repère est égale à la moitié du produit de son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et du carré de la vitesse de rotation.

2.3.3 Système de solides indéformables

Lorsque le système matériel Σ est composé d'un ensemble de n solides indéformables S_i , l'énergie cinétique de l'ensemble du système est égal à la somme des énergies cinétiques de chacun des solides indéformables.

$$\begin{aligned} E(\Sigma/R) &= \sum_{i=1}^n E(S_i/R) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{C}(S_i/R) \otimes \mathcal{V}(S_i/R) \end{aligned}$$

2.3.4 Masse et moment d'inertie équivalents

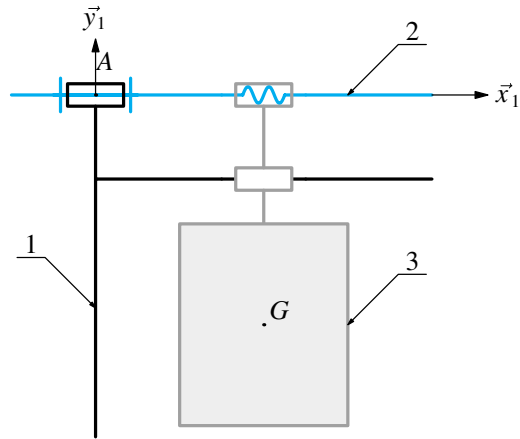
On s'intéresse à ces deux dernières notions à partir d'un exemple.

On considère une porte coulissante pilotée par un système à vis. Elle comprend pour la partie opérative essentiellement trois ensembles :

- un châssis 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- une vis 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le châssis, et dont la rotation est obtenue par un moteur électrique. Le moment d'inertie de l'ensemble rotor et vis par rapport à l'axe de rotation est noté J ;
- un vantail 3 de masse notée m , en liaison glissière de direction \vec{x}_1 avec le châssis, et dont la translation est obtenue par l'intermédiaire d'une liaison hélicoïdale d'axe (A, \vec{x}_1) et de pas p avec la vis.

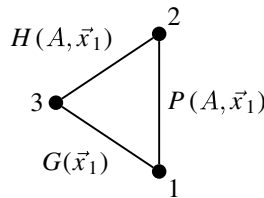
La formulation est simplifiée. Il ne faut pas oublier le repère de référence pour autant !

Il est nécessaire de commencer par décrire le système Σ . Il est impossible d'écrire un comoment sinon !



► Lecture et décodage

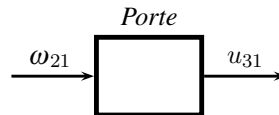
Ce mécanisme comporte une chaîne fermée de trois solides



P	Pivot
H	Hélicoïdale
G	Glissière

► Approche cinématique

On s'intéresse à la loi entrée-sortie liant la vitesse de rotation du moteur à la vitesse de translation de la porte.



Pour cela, on dispose d'un système de six équations à trois inconnues. On pose ces dernières en écrivant les trois torseurs cinématiques

$$\mathcal{V}(2/1) =_A \begin{Bmatrix} \omega \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u \vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/2) =_A \begin{Bmatrix} \omega_{32} \vec{x}_1 \\ p \omega_{32} \vec{x}_1 \end{Bmatrix}$$

La résolution est immédiate et on obtient

$$u = -p\omega$$

► Approche énergétique

On cherche à déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{2,3\}$ dans son mouvement par rapport au bâti 1 :

- on décrit le système matériel comme ensemble de deux solides

$$E(\Sigma/1) = E(3/1) + E(2/1)$$

- le mouvement 3/1 est un mouvement de translation. On peut alors écrire directement

$$E(3/1) = \frac{1}{2} m u^2$$



On utilise les expressions établies pages 64 et 65 pour les mouvements élémentaires !

- le mouvement 2/1 est un mouvement de rotation autour d'un axe immobile par rapport au bâti 1. On peut écrire directement

$$E(2/1) = \frac{1}{2} J \omega^2$$

On somme les deux quantités trouvées. Il reste à exploiter la relation cinématique liant V à ω et on a deux choix possibles :

- on met la vitesse u en facteur ;

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(m + \frac{J}{p^2} \right)}_{m_{eq}} u^2$$

- on met la vitesse de rotation ω en facteur.

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} \underbrace{(J + mp^2)}_{J_{eq}} \omega^2$$

Le terme m_{eq} est appelé **masse équivalente** ramenée à la porte.

Le terme J_{eq} est appelé **moment d'inertie équivalent** ramené à l'arbre moteur.

Pour tous les mécanismes comportant un degré de mobilité, il est usuel de simplifier ainsi les expressions en ramenant toutes les quantités d'inertie au niveau de l'actionneur, sous forme de moment d'inertie pour un moteur et sous forme de masse pour un vérin linéaire.

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- masse ;
- système à masse conservative ;
- centre de masse ;
- moment d'inertie ;
- opérateur d'inertie ;
- produit d'inertie ;
- quantité de mouvement, quantité d'accélération ;
- torseur cinétique, torseur dynamique ;
- énergie cinétique ;
- masse et moment d'inertie équivalents.

Je connais :

- les définitions et expressions valables pour un système matériel quelconque :
 - moment cinétique, torseur cinétique ;
 - moment dynamique, torseur dynamique ;
 - la relation entre les moments dynamiques et cinétiques ;
 - énergie cinétique.
- les expressions valables pour un seul solide indéformable :
 - moment cinétique ;
 - énergie cinétique.
- les expressions à trouver pour les mouvements élémentaires d'un solide indéformable :
 - mouvement de translation ;
 - mouvement de rotation autour d'un axe fixe.

Savoir-faire

Je sais

- calculer un moment d'inertie à partir de sa définition scalaire ;
- donner la forme de la matrice d'inertie pour les solides à formes particulières ;
- organiser les calculs pour un système de solides indéformables ;
- évaluer une masse équivalente, un moment d'inertie équivalent.

Exercices d'application

2.1 Propriétés du centre de masse

On se propose de démontrer certaines des propriétés concernant le centre de masse.

1. Montrer que le centre de masse d'un système matériel Σ de masse m non nulle est unique.
2. Montrer que le centre de masse G d'un système matériel Σ de masse m se détermine à partir d'un point quelconque Q par la relation

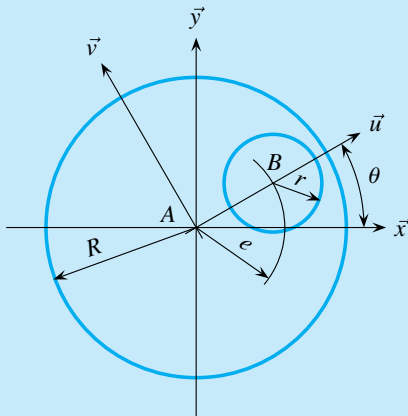
$$\vec{QG} = \frac{1}{m} \int_{\Sigma} \vec{QP} dm$$

3. Montrer que la quantité de mouvement $m\vec{V}(G, \Sigma/R)$ d'un système matériel Σ de masse m est la somme des quantités de mouvements élémentaires.
4. Montrer que le centre de masse d'un solide indéformable S est un point de ce solide.

2.2 Disque percé

On considère un solide homogène d'épaisseur négligeable, de masse surfacique ρ et de masse totale m . Il est schématisé sur la figure ci-dessous et comprend :

- un disque plein de centre A et de rayon R ;
- un disque creux de centre B et de rayon r , excentré par rapport au premier disque d'une distance e .



1. Déterminer la position du centre de masse G de ce solide.
2. On souhaite ramener le centre de masse de l'ensemble sur l'axe (A, \vec{z}) . Pour cela, on dispose de deux masses ponctuelles additionnelles P_1 et P_2 , de masses respectives m_1 et m_2 .

Déterminer les conditions à poser sur les coordonnées de ces deux points afin d'atteindre l'objectif proposé.

2.3 Théorème de HUYGENS

La formule de changement de point a été mise en place pour l'opérateur d'inertie lors du cours. On souhaite démontrer le théorème de HUYGENS à partir de son expression. Pour cela, on considère :

- un solide S de masse m , de centre de masse G ;
- un axe Δ du solide S , sur lequel on choisit un point quelconque Q et que l'on oriente par un vecteur $\vec{\delta}$;
- un repère $\mathcal{R}(Q, \vec{\delta}, \vec{v}, \vec{w})$ attaché au solide S , construit à partir du point Q et du vecteur $\vec{\delta}$;
- les coordonnées du centre de masse G dans ce repère \mathcal{R} .

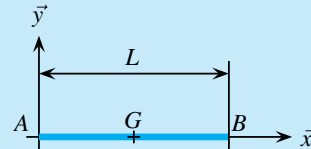
$$\vec{QG} = x_g \vec{\delta} + y_g \vec{v} + z_g \vec{w}$$

1. Exprimer la formule de changement de point pour l'opérateur d'inertie.
2. Proposer les formes des matrices pour les différents opérateurs.
3. Conclure.

2.4 Calcul de moments d'inertie courants

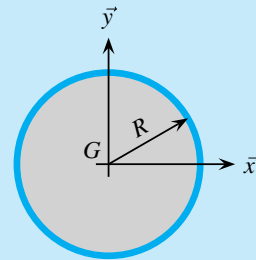
On se propose de s'intéresser à quelques expressions de moment d'inertie citées dans le cours.

1. À partir de leurs définitions scalaires, déterminer les expressions des moments d'inertie I_{Az} et I_{Gz} de la tige homogène de longueur L et de masse m schématisée ci-dessous



Valider les résultats à l'aide du théorème de HUYGENS.

2. Calculer directement le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution pour un disque homogène de rayon R et de masse m .



Trouver la relation entre I_{Gz} et I_{Gx} en s'intéressant à la forme de la matrice de l'opérateur d'inertie $\bar{I}(G, S)$.

3. Calculer la trace de la matrice associée à l'opérateur d'inertie $\bar{I}(G, S)$ d'une sphère homogène creuse de rayon R , de masse m et de centre de masse G .
En déduire la valeur des moments d'inertie I_{Gx} , I_{Gy} et I_{Gz} .
4. Reprendre rapidement le calcul précédent dans le cas d'une sphère pleine.

2.5 Matrices d'inertie pour des solides courants

On se propose de s'intéresser à un certain nombre de solides aux formes particulières, afin de réaliser que les

résultats connus pour une tige et un disque sont suffisants pour décrire de nombreuses situations.

Pour cet exercice, tous les solides sont supposés être homogènes, de masse m , et pour chacun des volumes décrits, il est demandé de :

- donner la forme de la matrice associée à l'opérateur d'inertie calculé en un point à préciser ;
- utiliser les résultats connus concernant les moments d'inertie pour une tige et un disque afin de proposer les valeurs caractéristiques.

Sont à considérer successivement :

1. une tige de longueur L ;
2. une plaque rectangulaire de longueurs $a \times b$;
3. un parallélépipède rectangle de longueurs $a \times b \times c$;
4. un disque de rayon R ;
5. un cylindre de révolution de rayon R et de longueur L .

2.6 Torseurs cinétique et dynamique

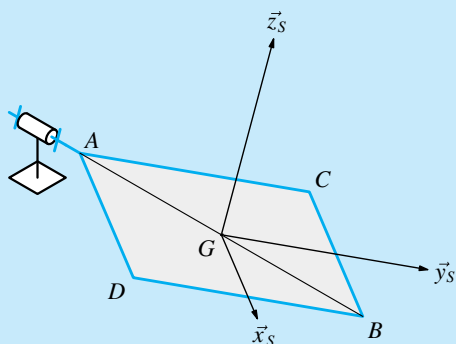
On considère un système matériel quelconque Σ en mouvement par rapport à un repère R .

1. Rappeler la définition du vecteur moment cinétique.
2. Montrer que le champ des vecteurs moment cinétique est un champ de vecteurs équiprojectif.
3. Dans le cas d'un solide indéformable, quels sont les deux moyens à privilégier pour calculer un moment cinétique ?
4. Quelles sont les différentes méthodes possibles pour calculer un moment dynamique ?

2.7 Rotation d'une trappe

On considère une trappe S de forme rectangulaire manœuvrée en rotation autour d'une de ses diagonales :

- la trappe est une plaque rectangulaire $ACBD$ homogène, de masse m et de centre de masse G :
 - on lui associe un repère $(G, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$;
 - on pose $\vec{AC} = 2c\vec{y}_S$ et $\vec{AD} = 2d\vec{x}_S$.
- la trappe est en liaison pivot d'axe (AB) avec un bâti noté R .



On souhaite en déterminer les quantités de mouvement et d'accélération.

1. Compléter le paramétrage du mécanisme.

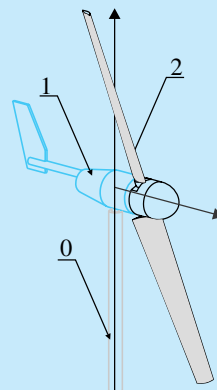
2. Déterminer au point G les éléments de réduction du torseur cinétique $\mathcal{C}(S/R)$.

3. Déterminer au point G l'expression du moment dynamique $\vec{\delta}(G, S/R)$.

4. En déduire l'expression du moment d'inertie de la plaque par rapport à une de ses diagonales.

2.8 Éolienne

On s'intéresse au cours de cet exercice à une éolienne bipale telle que représentée sur la figure ci-dessous



Ce mécanisme est composé de trois ensembles en mouvement relatif que l'on décrit à l'aide de quatre solides :

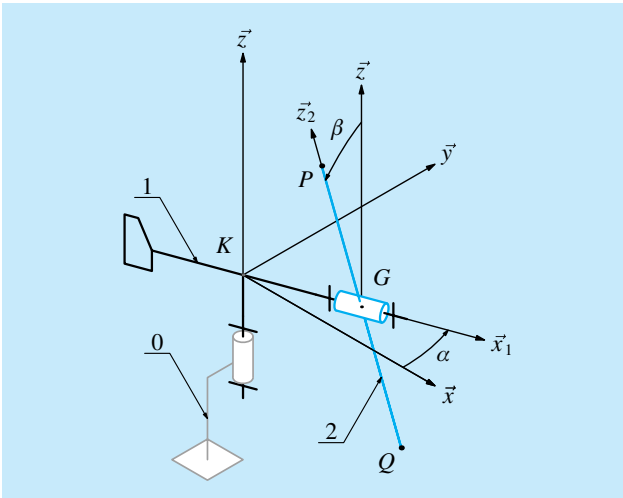
- un support 0, auquel on associe un repère $(K, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- une girouette 1, en liaison pivot d'axe (K, \vec{z}) avec le support 0 :
 - on lui associe un repère $(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ et on pose $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$;
 - on note J son moment d'inertie par rapport à l'axe (K, \vec{z}) .
- une hélice 2, en liaison pivot d'axe (K, \vec{x}_1) avec le support 0 :
 - on lui associe un repère $(K, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ choisi tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$;
 - on note M sa masse, G son centre d'inertie situé sur l'axe de rotation et on pose $\vec{KG} = a\vec{x}_1$;
 - on donne la matrice de l'opérateur d'inertie au point G ;

$$\vec{I}(G, 2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

- on pose $\vec{GP} = b\vec{z}_2$.
- on modélise enfin un déséquilibre possible de l'hélice en rotation par un balourd 3 assimilé à une masse ponctuelle m au point P .

Les paramétrages géométrique et cinématique sont repris sur la figure ci-après.

L'objectif de l'exercice est de mettre en place les expressions utiles à une étude dynamique ultérieure.

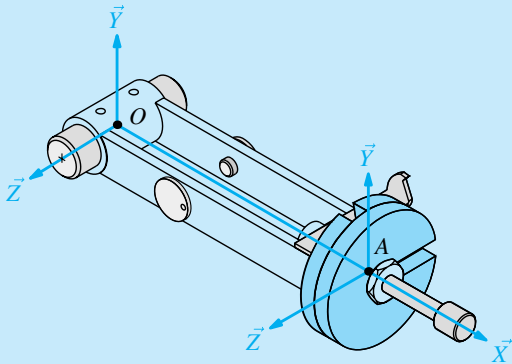


1. Déterminer la composante suivant \vec{z} du moment cinétique de la girouette 1 dans son mouvement par rapport au support 0, notée $\vec{z} \cdot \vec{\sigma}(K, 1/0)$.
2. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 2/0)$ calculé au point K de l'hélice 2 dans son mouvement par rapport à 0.
3. En déduire la composante suivant \vec{z} du moment dynamique $\vec{z} \cdot \vec{\delta}(K, 2/0)$.
4. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 3/0)$ calculé
5. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au support 0.

Exercices d'approfondissement

2.9 Bras du MAXPID

Lors de son fonctionnement, le bras du système MAXPID a un mouvement de rotation d'axe (O, \vec{z}) par rapport au bâti. Pour une étude dynamique, il est nécessaire de connaître la valeur de son moment d'inertie par rapport à cet axe.



Le « bras complet » étudié ici est un solide composé de plusieurs pièces réalisées dans des matériaux différents. Il comprend principalement :

- un axe de liaison avec le bâti en acier ;
- un bras en fonte d'aluminium ;
- deux masselottes en acier ;
- la vis et les deux écrous de fixation des masselottes.

matière	densité
acier	7.9
aluminium	2.7

Un logiciel de CAO fournit tous les renseignements nécessaires à partir de la maquette numérique associée :

- concernant la masse, le volume et la position du centre d'inertie de l'ensemble complet, l'origine étant prise au point O ;

masse [g]	2505.05
volume [mm ³]	418806.40
centre de masse [mm]	X = 156.52 Y = -0.43 Z = -0.80

- concernant la répartition de la masse autour du centre d'inertie dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec des quantités exprimées en $[g \text{ mm}^2]$.

Ixx = 2416027.24	Ixy = -49539.12	Ixz = -141278.96
Iyx = -49539.12	Iyy = 27617753.44	Iyz = -11332.75
Izx = -141278.96	Izy = -11332.75	Izz = 26979606.44

- concernant la répartition de la masse autour du point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec des quantités exprimées en $[g \text{ mm}^2]$.

Ixx = 2418098.16	Ixy = -218360.92	Ixz = -455041.25
Iyx = -218360.92	Iyy = 88919080.48	Iyz = -10468.65
Izx = -455041.25	Izy = -10468.65	Izz = 88279792.42

1. Interpréter les valeurs fournies par le logiciel.
2. Commenter la forme générale des matrices d'inertie.
3. Extraire de ces tableaux la valeur du moment d'inertie recherché.
4. Vérifier la cohérence des informations données concernant ce moment d'inertie.

Contribution des différentes pièces

On s'intéresse maintenant à la contribution au moment d'inertie étudié des différentes pièces composant le bras. Le logiciel de CAO permet d'obtenir les caractéristiques :

- de l'axe de liaison avec le bâti en acier ;

masse [g]	547.58
volume [mm ³]	69313.71
centre de masse [mm]	X = 0.00 Y = -0.20 Z = -0.00
moment d'inertie /Oz[g mm ²]	60618.87

- du bras en fonte d'aluminium seul ;

masse [g]	401.83
volume [mm ³]	148826.40
centre de masse [mm]	X = 102.18 Y = 0.08 Z = 0.00
moment d'inertie /Oz[g mm ²]	6515272.21

- des deux masses suspendues, percées et fendues ;

masse [g]	1288.86
volume [mm ³]	163146.93
centre de masse [mm]	X = 228.00 Y = -1.01 Z = -1.30
moment d'inertie /Oz[g mm ²]	67872372.15

- de la vis et des écrous de fixation des deux masses ;

masse [g]	134.93
volume [mm ³]	17079.79
centre de masse [mm]	X = 269.13 Y = 0.00 Z = 0.00
moment d'inertie /Oz[g mm ²]	9947754.12

- de l'ensemble des petites pièces non mentionnées, telles que le curseur et les éléments de fixation. On les regroupe sous l'appellation « quincaillerie » ;

masse [g]	128.85
volume [mm ³]	20439.58
centre de masse [mm]	X = 158.32 Y = 2.33 Z = -2.52
moment d'inertie /Oz[g mm ²]	3883775.07

5. Construire un tableau présentant les contributions des différentes pièces :

- à la masse totale ;
- au moment d'inertie étudié.

6. Commenter les valeurs trouvées.

Calcul du moment d'inertie des masselottes

On s'intéresse enfin au calcul du moment d'inertie des seules masselottes.

Pour un calcul à la main, on simplifie le travail en considérant les deux masselottes comme un seul cylindre de révolution, en oubliant les perçages centraux et les fentes de mise en place.

Les caractéristiques associées à ce cylindre de révolution sont alors :

- rayon $R = 49$ mm ;
- longueur $a = 24$ mm ;
- centre de masse placé à la distance $L = 228$ mm du point O ;
- masse volumique $\rho = 7.9 \cdot 10^3$ kg/m³

7. Calculer la valeur de la masse m_2 du volume simplifié et comparer cette valeur à celle de la masse donnée dans la documentation, notée m_1 .

8. L'axe de référence étant toujours la droite (O, \vec{z}) , on note :

- J_1 le moment d'inertie donné par l'énoncé ;
- J_2 le moment d'inertie du volume simplifié ;
- J_3 le moment d'inertie d'une masse ponctuelle avec la masse donnée ;
- J_4 le moment d'inertie d'une masse ponctuelle avec la masse calculée pour le volume simplifié.

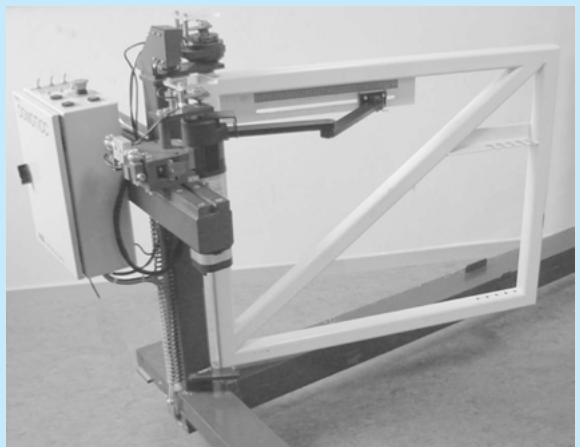
Chiffrer et comparer ces quatre valeurs.

9. Au vu de ces derniers résultats, proposer des simplifications à faire pour une évaluation rapide d'un moment d'inertie.

2.10 Lancer expérimental d'un vantail

On dispose dans un laboratoire d'un système « ouvrant-portal » à deux vantaux et on se propose de mettre en place un protocole expérimental original de détermination du moment d'inertie du premier vantail par rapport à son axe de rotation :

- le moteur d'entraînement est désaccouplé ;
- le vantail est lâché à une vitesse initiale non nulle ;
- les valeurs de la position angulaire et du couple résistant sont relevées ;
- on déduit des courbes obtenues la valeur du moment d'inertie recherchée.



On se propose dans un premier temps de proposer un encadrement rapide du moment d'inertie du vantail par rapport à son axe de rotation, noté I_{Oz} , à partir des données suivantes, mesurées sur le vantail étudié.

Grandeur	Nom	Unité	Valeur
Longueur	L	[m]	1
Hauteur	H	[cm]	80
Masse	M	[kg]	24

1. Justifier l'encadrement rapide proposé ci-dessous.

$$6 \text{ kg m}^2 < I_{Oz} < 24 \text{ kg m}^2$$

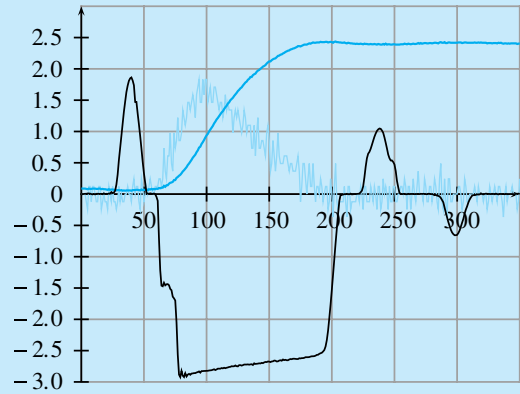
2. On suppose toute la masse uniformément répartie le long du vantail, du rayon nul au rayon maximal :

- quelle est la valeur J du moment d'inertie correspondant ?
- cette nouvelle valeur majore-t-elle ou minore-t-elle la valeur recherchée ?

On s'intéresse dans un second temps aux relevés expérimentaux tracés ci-dessous :

- la carte d'acquisition est configurée pour une acquisition à la fréquence de 200 hertz ;
- le vantail est mis en mouvement par une poussée manuelle puis lâché ;

- l'abscisse comporte les 350 points conservés ;
- les deux grandeurs acquises sont affichées en volt ;
 - le couple résistant est en noir ;
 - l'angle de rotation du vantail en bleu ;
- la vitesse de rotation du vantail, obtenue par dérivation numérique de la courbe bleue, est superposée en bleu clair avec un affichage $[\times 50]$ en ordonnée.



3. Interpréter les courbes fournies et identifier la ou les zones à exploiter.
4. Proposer un protocole d'exploitation de ces données.

Solutions des exercices

Exercices d'application

2.1

1. Pour montrer que le centre d'inertie d'un système matériel Σ est unique, on suppose qu'il en existe deux, notés respectivement G_1 et G_2 . Ils vérifient alors tous les deux la définition du centre de masse

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} \overrightarrow{G_1 P} dm = \vec{0} \\ \int_{\Sigma} \overrightarrow{G_2 P} dm = \vec{0} \end{cases}$$

On soustrait ces deux égalités membre à membre pour obtenir

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{G_1 G_2} dm = \vec{0}$$

Le vecteur $\overrightarrow{G_1 G_2}$, indépendant de la somme, peut alors être mis en facteur et on obtient

$$m \overrightarrow{G_1 G_2} = \vec{0}$$

Comme la masse m du système Σ est non nulle, les deux points G_1 et G_2 sont nécessairement confondus. Le centre de masse est unique.

2. On considère un système matériel Σ de masse m . Son centre de masse G est défini par

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{G P} dm = \vec{0}$$

On pose alors $\overrightarrow{G P} = \overrightarrow{Q P} - \overrightarrow{Q G}$, avec Q un point quelconque

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{Q G} dm = \int_{\Sigma} \overrightarrow{Q P} dm$$

Le vecteur $\overrightarrow{Q G}$ est indépendant de la somme et peut alors être mis en facteur. On obtient finalement la relation recherchée

$$m \overrightarrow{Q G} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{Q P} dm$$

3. On considère un système matériel Σ de masse m en mouvement par rapport à un repère R . Son centre de masse G est défini par

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{G P} dm = \vec{0}$$

On dérive cette expression par rapport au temps et on utilise la propriété de système à masse conservative

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \overrightarrow{G P} dm \right]_R = \int_{\Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{G P} \right]_R dm = \vec{0}$$

On pose alors $\overrightarrow{G P} = \overrightarrow{I P} - \overrightarrow{I G}$, avec I un point immobile dans R .

$$\int_{\Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{I G} \right]_R dm = \int_{\Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{I P} \right]_R dm$$

Les vecteurs $\overrightarrow{I G}$ et $\overrightarrow{I P}$ sont des vecteurs position respectivement des points G et P dans R . On utilise alors la définition d'un vecteur vitesse pour écrire

$$\underbrace{\int_{\Sigma} \vec{V}(G, \Sigma/R) dm}_{(a)} = \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

Dans le terme (a) , le vecteur $\vec{V}(G, \Sigma/R)$ est indépendant de l'intégrale et est mis en facteur. Cette intégrale peut alors être calculée

$$(a) = \vec{V}(G, \Sigma/R) \int_{\Sigma} dm = m \vec{V}(G, \Sigma/R)$$

On en déduit que la quantité de mouvement d'un système matériel est la somme des quantités de mouvements élémentaires.

$$m \vec{V}(G, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

4. Un solide indéformable S est un ensemble de points deux à deux équidistants au cours du temps. Il s'agit donc de montrer que le centre de masse G de S est immobile par rapport à S . On considère pour cela un point Q du solide S et on évalue la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{Q G}$ dans S en utilisant la définition du centre de masse

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{Q G} \right]_S = \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{Q P} dm \right]_S$$

Le système est un système à masse conservative. On peut ainsi d'une part sortir $\frac{1}{m}$ de la dérivée, d'autre part échanger la dérivée avec l'intégrale

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{Q G} \right]_S = \frac{1}{m} \int_S \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{Q P} \right]_S dm$$

Le vecteur $\overrightarrow{Q P}$ est un vecteur position du point P immobile sur le solide S . Sa dérivée par rapport au temps dans S est donc nulle et on obtient

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{Q G} \right]_S = \vec{0}$$

Le centre de masse G est immobile sur le solide S .

2.1

1. Il est utile de compléter les notations de l'énoncé :

- le disque plein est nommé D_A , de masse $m_A = \rho\pi R^2$ et de centre de masse A ;
- le disque creux est nommé D_B , de masse $m_B = \rho\pi r^2$ et de centre de masse B .

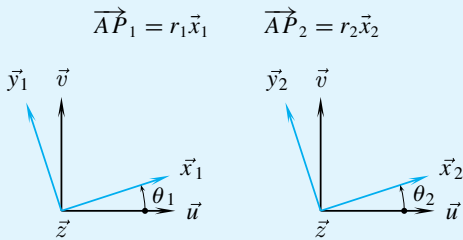
Le centre de masse G du solide S est alors le barycentre des centres de masse des disques D_A et D_B affectés respectivement des coefficients $+m_A$ et $-m_B$. Cela s'écrit, à partir d'un point quelconque Q

$$(m_A - m_B)\overrightarrow{QG} = m_A\overrightarrow{QA} - m_B\overrightarrow{QB}$$

On choisit A comme point de référence et on pose $\overrightarrow{AB} = e\vec{u}$ pour écrire en définitive

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{r^2}{R^2 - r^2}e\vec{u}$$

2. On caractérise la position des points P_1 et P_2 par leurs coordonnées cylindriques exprimées dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$



On souhaite le barycentre des points B, P_1 et P_2 affectés des coefficients respectifs $-m_B, m_1$ et m_2 au point A . Cela se traduit par

$$-m_B\overrightarrow{AB} + m_1\overrightarrow{AP}_1 + m_2\overrightarrow{AP}_2 = \vec{0}$$

On exprime cette équation vectorielle dans la base (\vec{u}, \vec{v}) pour obtenir un système de deux équations à six inconnues

$$\begin{cases} m_1r_1 \cos \theta_1 + m_2r_2 \cos \theta_2 = m_B e \\ m_1r_1 \sin \theta_1 + m_2r_2 \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations est à compléter par les inégalités traduisant la valeur maximale des rayons et les zones à éviter.

Une solution un peu particulière mérite attention. On choisit $m_1 = m_2 = m_0$ et $r_1 = r_2 = r_0$. On obtient alors le système de deux équations à quatre inconnues suivant

$$\begin{cases} \theta_1 = -\theta_2 \\ 2m_0r_0 \cos \theta_1 = m_B e \end{cases}$$

Les deux masses sont nécessairement symétriques par rapport à la droite (A, \vec{u}) , et il faut un apport de matière ($m_0 > 0$) pour un angle θ_1 compris entre 0 et 90° , ou percer des trous ($m_0 < 0$) pour θ_1 compris entre 90° et 180° .

2.3

1. Pour l'opérateur d'inertie au point Q d'un solide S , la formule de changement de point s'exprime par

$$\overline{\overline{I}}(Q, S) = \overline{\overline{I}}(G, S) + \overline{\overline{I}}(Q, G[m])$$

2. La formule précédente fait appel à trois opérateurs :

- l'opérateur d'inertie au point Q du solide S , dont la matrice associée est *a priori* quelconque ;

$$\overline{\overline{I}}(Q, S) = \begin{bmatrix} I_{Qx} & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{\delta}, \vec{v}, \vec{w})}$$

- l'opérateur d'inertie au point G du solide S , dont la matrice associée est *a priori* quelconque ;

$$\overline{\overline{I}}(G, S) = \begin{bmatrix} I_{Gx} & -F_g & -E_g \\ -F_g & B_g & -D_g \\ -E_g & -D_g & C_g \end{bmatrix}_{(\vec{\delta}, \vec{v}, \vec{w})}$$

- l'opérateur d'inertie au point Q du solide ponctuel G de masse m , dont les composantes de la matrice s'expriment à partir des coordonnées du point G .

$$\overline{\overline{I}}(Q, G[m]) = \begin{bmatrix} m(y_g^2 + z_g^2) & -mx_g y_g & -mx_g z_g \\ -my_g x_g & m(z_g^2 + x_g^2) & -my_g z_g \\ -mz_g x_g & -mz_g y_g & m(x_g^2 + y_g^2) \end{bmatrix}_{(\vec{\delta}, \vec{v}, \vec{w})}$$

3. Le théorème de HUYGENS se retrouve pour chacun des termes de la diagonale. On se contente de détailler la première composante de la matrice, en notant que la quantité $(y_g^2 + z_g^2)$ représente le carré de la distance du point G à l'axe $(Q, \vec{\delta})$.

$$I_{Qx} = I_{Gx} + m(y_g^2 + z_g^2)$$

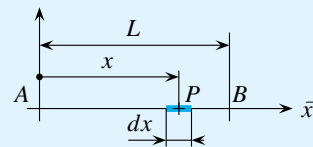
Le moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe de rotation $(Q, \vec{\delta})$ est égal à la somme du moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe $(G, \vec{\delta})$, axe de rotation parallèle passant par le centre de masse, et du moment d'inertie du point G affecté de la masse totale m par rapport à l'axe $(Q, \vec{\delta})$.

2.4

1. Soit une tige homogène de longueur L et de masse m . On calcule sa masse linéique ρ

$$\rho = \frac{m}{L}$$

On se place au point courant P de masse $dm = \rho dx$ situé à l'abscisse x



La définition scalaire du moment d'inertie et le calcul d'intégrales permettent d'écrire :

- par rapport à l'axe (A, \vec{z})

$$I_{Az} = \int_0^L x^2 \rho dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \rho \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}$$

• par rapport à l'axe (G, \vec{z})

$$I_{Gz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \rho \frac{2L^3}{8} = \frac{mL^2}{12}$$

Le théorème de HUYGENS permet de calculer I_{Az} à partir de I_{Gz}

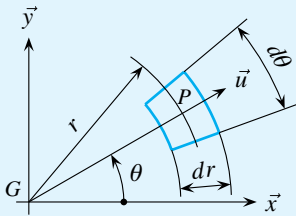
$$I_{Az} = I_{Gz} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

On retrouve bien évidemment le même résultats.

2. Soit un disque homogène de rayon R et de masse m . On calcule sa masse surfacique ρ

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2}$$

On se place au point courant P de coordonnées polaires r et θ , avec une masse élémentaire décrite par $dm = \rho dr r d\theta$



La définition scalaire du moment d'inertie permet d'écrire

$$I_{Gz} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^3 dr d\theta$$

Le calcul se mène sans difficulté

$$I_{Gz} = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

La détermination du moment d'inertie par rapport à un des diamètres se mène à partir de l'opérateur d'inertie. Le disque est un solide de révolution d'axe (G, \vec{z}) . Sa matrice d'inertie est donc de la forme

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le disque est d'épaisseur négligeable. Il existe alors une relation remarquable entre les deux valeurs propres A et C . En effet, on reprend les expressions générales des moments d'inertie pour écrire

$$I_{Gx} = \int (y^2 + z^2) dm \approx \int y^2 dm$$

$$I_{Gy} = \int (z^2 + x^2) dm \approx \int x^2 dm$$

$$I_{Gz} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm = I_{Gx} + I_{Gy}$$

On en déduit la relation $C = 2A$, donc la valeur du moment d'inertie du disque par rapport à un de ses diamètres

$$I_{Gx} = \frac{mR^2}{4}$$

3. Dans le cas d'une sphère homogène, pleine ou creuse, la matrice d'inertie calculée en son centre est sphérique

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

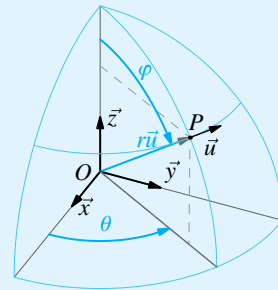
La trace de la matrice est donc, en posant r la distance du point courant P au centre de masse G

$$3A = 2 \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2 \int r^2 dm$$

Dans le cas d'une sphère creuse, tous les points sont au rayon R et on en déduit l'expression des moments d'inertie principaux

$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{3} mR^2$$

4. Dans le cas d'une sphère pleine, on reprend la méthode suivie à la question précédente et on utilise les coordonnées sphériques pour le calcul de l'intégrale.



Soit une sphère homogène pleine S de rayon R et de masse m . On calcule tout d'abord sa masse volumique :

• on part de l'expression du volume élémentaire dV ;

$$dV = dr r d\phi r \sin \phi d\theta$$

• on retrouve rapidement l'expression du volume V de la sphère ;

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$$

• on en déduit l'expression de la masse volumique ρ .

$$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

Pour déterminer la trace de la matrice, il faut maintenant calculer $\int r^2 dm$. On a donc

$$\int r^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{5} \rho \pi R^5$$

On en déduit la valeur de la trace de la matrice d'inertie que l'on exprime en fonction de la masse m

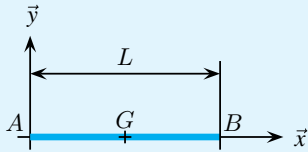
$$3A = 2 \frac{4}{5} \rho \pi R^5 = 2 \frac{3}{5} mR^2$$

En conclusion, l'expression des moments d'inertie principaux pour une sphère homogène pleine de rayon R et de masse m est

$$I_{Gx} = I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{2}{5} mR^2$$

2.5

1. Tige homogène



La tige est à considérer comme un solide de révolution d'axe (A, \vec{x}) . Les deux matrices à proposer sont immédiatement écrites :

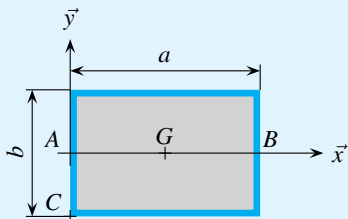
- matrice de l'opérateur d'inertie au centre de masse G ;

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- matrice de l'opérateur d'inertie à une de ses extrémités ;

$$\bar{I}(A, S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

2. Plaque rectangulaire



Pour tous les points de l'axe (A, \vec{x}) , la plaque présente trois plans de symétrie et les trois directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} sont en conséquence principales.

On commence par exemple par le moment d'inertie I_{Ay} :

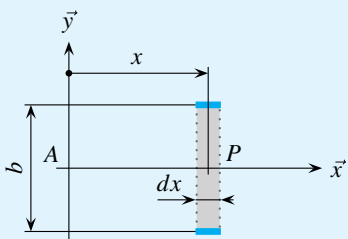
- on se place au point courant P de masse dm situé à l'abscisse x et à l'ordonnée y ;
- la distance de ce point courant P à l'axe (A, \vec{y}) ne fait intervenir que l'abscisse x ;

$$I_{Ay} = \int_0^a x^2 dm$$

- comme l'ordonnée du point courant n 'intervient pas pour la distance à prendre en compte, on pose alors la masse linéique ρ de la plaque suivant \vec{x} ;

$$\rho = \frac{m}{a}$$

- la masse élémentaire est prise égale à $dm = \rho dx$.



On réalise alors que le calcul est exactement le même que pour une tige de longueur a et de masse m et on en déduit les valeurs des moments d'inertie par rapport aux axes (A, \vec{x}) et (A, \vec{y}) :

- on intègre de 0 à a pour I_{Ay} ;

$$I_{Ay} = \frac{ma^2}{3}$$

- on intègre de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$ pour I_{Ax} ;

$$I_{Ax} = \frac{mb^2}{12}$$

Le calcul du troisième moment d'inertie est immédiat en retenant les différentes expressions

$$I_{Ax} = \int y^2 dm$$

$$I_{Ay} = \int x^2 dm$$

$$I_{Az} = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$

Comme les coordonnées x et y sont indépendantes l'une de l'autre, le moment d'inertie I_{Az} est la somme des deux autres. On en déduit l'expression de la matrice d'inertie au point A

$$\bar{I}(A, S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} + \frac{mb^2}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

La compréhension du raisonnement permet de proposer tout de suite la forme de la matrice de l'opérateur calculé au centre d'inertie G

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

On peut terminer en s'intéressant à la répartition de la masse autour du point C .

Une fois réalisé qu'il n'y a plus que le plan (C, \vec{x}, \vec{y}) comme plan de symétrie, on calcule le produit d'inertie non nul :

- on se place au point courant P de coordonnées x et y ;
- on pose la masse surfacique μ de la plaque ;

$$\mu = \frac{m}{ab}$$

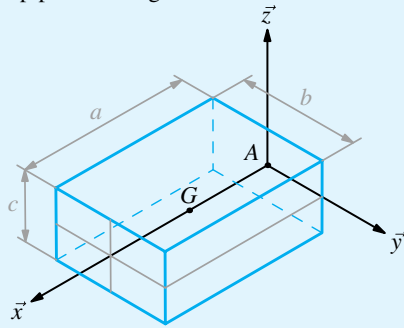
- l'élément de masse élémentaire est exprimé par $dm = \mu dx dy$;
- on calcule l'intégrale cherchée

$$I_{Cxy} = \mu \int_0^a x dx \int_0^b y dy = \frac{mab}{4}$$

On a donc comme résultat final

$$\bar{I}(C, S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & -\frac{mab}{4} & 0 \\ -\frac{mab}{4} & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

3. Parallélépipède rectangle



S'intéresser à un parallélépipède rectangle revient à généraliser le raisonnement mené sur la plaque rectangulaire :

- pour le calcul du moment d'inertie I_{Az} , par exemple :
 - la cote du point courant n'intervient pas ;
 - les variables x et y sont indépendantes ;
 - on intègre la quantité bcx^2dx de 0 à a ;
 - on intègre la quantité acy^2dy de $-\frac{b}{2}$ à $\frac{b}{2}$.

$$I_{Az} = \frac{ma^2}{3} + \frac{mb^2}{12}$$

- les expressions des deux autres moments d'inertie se retrouvent de la même manière.

On propose ainsi :

- pour la répartition de la masse autour du point A ;

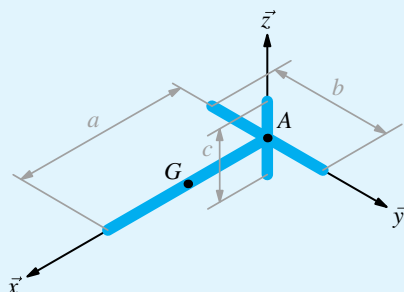
$$\bar{I}(A, S) = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{12} + \frac{mc^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mc^2}{12} + \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} + \frac{mb^2}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- pour la répartition de la masse autour du centre d'inertie G .

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(c^2+a^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

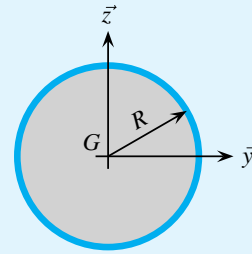
Pour la recherche des moments d'inertie principaux, le parallélépipède rectangle est à imaginer comme la réunion de trois tiges :

- la première issue du point A , de masse m et de longueur a suivant \vec{x} ;
- la deuxième de part et d'autre du point A , de masse m et de longueur b suivant \vec{y} ;
- la troisième de part et d'autre du point A , de masse m et de longueur c suivant \vec{z} .



Attention, cette assimilation n'est valable que pour la compréhension et la recherche de moments d'inertie !

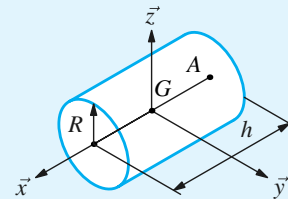
4. Disque



Le disque est un solide de révolution d'axe (G, \vec{x}) et les moments d'inertie principaux ont été calculés lors de l'exercice précédent. On peut donc immédiatement proposer la matrice de l'opérateur d'inertie au centre de masse G

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

5. Cylindre de révolution



Le cylindre de révolution ci-dessus présente le cumul des résultats mis en place pour une tige de longueur h suivant \vec{x} et pour un disque de rayon R dans un plan parallèle à (\vec{y}, \vec{z}) :

- concernant la répartition de la masse autour du centre d'inertie G ;

$$\bar{I}(G, S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

- concernant la répartition de la masse autour du point A .

$$\bar{I}(A, S) = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

2.6

1. Le vecteur moment cinétique se calcule en un point Q et est associé au mouvement Σ/R . Il est défini sous la forme d'une intégrale

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) = \int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

2. La démonstration s'appuie sur la définition précédente du moment cinétique, dans laquelle on introduit un nouveau point I en écrivant $\vec{Q}\vec{P} = \vec{Q}\vec{I} + \vec{I}\vec{P}$. On obtient deux termes

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) = \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{Q}\vec{I} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm}_{(a)} + \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{I}\vec{P} \wedge \vec{V}(P, \Sigma/R) dm}_{(b)}$$

Ces deux termes s'interprètent différemment :

- le second terme correspond à la définition du vecteur moment cinétique au point I ;

$$(b) = \vec{\sigma}(I, \Sigma/R)$$

- dans le premier terme, le vecteur $\vec{Q}\vec{I}$ est indépendant de l'intégrale et peut être mis en facteur

$$(a) = \vec{Q}\vec{I} \wedge \int_{\Sigma} \vec{V}(P, \Sigma/R) dm$$

On utilise alors la définition du centre d'inertie G du système Σ pour terminer ce calcul

$$(a) = \vec{Q}\vec{I} \wedge m\vec{V}(G, \Sigma/R)$$

On obtient en définitive

$$\vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) = \vec{\sigma}(I, \Sigma/R) + m\vec{V}(G, \Sigma/R) \wedge \vec{I}\vec{Q}$$

Tous les éléments du champ des vecteurs moment cinétique vérifient une relation de champ de moments de torseur avec le vecteur $m\vec{V}(G, \Sigma/R)$ indépendant de tout point comme résultante. Le champ des vecteurs moment cinétique est un champ de vecteurs équiprojectif.

3. Dans le cas d'un solide indéformable S en mouvement dans un repère R , deux modes de calcul sont à privilégier :

- à partir de l'opérateur d'inertie ;

$$\vec{\sigma}(Q, S/R) = \vec{I}(Q, S) (\vec{\Omega}(S/R))$$

- par changement de points sur le champ des vecteurs moment cinétique.

$$\forall \{P, Q\} \in S^2$$

$$\vec{\sigma}(P, S/R) = \vec{\sigma}(Q, S/R) + m\vec{V}(G, S/R) \wedge \vec{Q}\vec{P}$$

4. Les moyens usuels de calcul d'un moment dynamique sont au nombre de deux également :

- soit par changement de points sur le champ des vecteurs moment dynamique, et en général à partir du centre d'inertie G ;

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \vec{\delta}(G, \Sigma/R) + m\vec{A}(G, \Sigma/R) \wedge \vec{G}\vec{Q}$$

- soit à partir du moment cinétique, et il ne faut pas oublier le terme complémentaire.

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(Q, \Sigma/R) \right]_R + \vec{V}(Q, ?/R) \wedge m\vec{V}(G, \Sigma/R)$$

On garde néanmoins à l'esprit qu'il est conseillé de commencer par décrire le système Σ pour se placer au plus vite sur des solides indéformables.

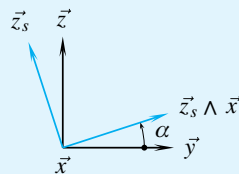
Si le système Σ est un ensemble de n solides S_i par exemple, on commence alors par détailler le vecteur moment dynamique

$$\vec{\delta}(Q, \Sigma/R) = \sum_{i=1}^n \vec{\delta}(Q, S_i/R)$$

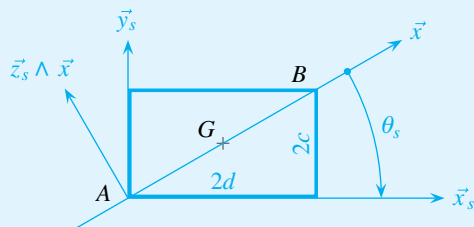
2.7

1. Ce mécanisme comporte une chaîne ouverte de deux solides :

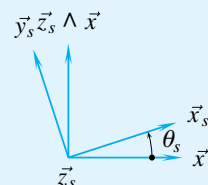
- le bâti R , auquel on attache un repère $(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$;
- la trappe S , en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}) avec le bâti. On pose $\alpha = (\vec{z}, \vec{z}_s)$



La répartition de la masse de la plaque est caractéristique dans le repère $(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$. On a ainsi deux repères attachés à la plaque à poser



On en déduit la deuxième figure de changement de base



La trappe admet trois plans de symétrie dans la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$, dans laquelle la matrice de l'opérateur d'inertie au point G est donc diagonale

$$\vec{I}(G, S) = \begin{bmatrix} I_{Gx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Gy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Gz} \end{bmatrix} (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$$

2. Le torseur cinématique associé au mouvement S/R s'écrit

$$\mathcal{V}(S/R) = G \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On en déduit que la quantité de mouvement de la trappe dans son mouvement par rapport à R est nulle.

$$m\vec{V}(G, S/R) = \vec{0}$$

Le moment cinétique au point G se déduit directement de l'opérateur d'inertie

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \vec{I}(G, S) (\vec{\Omega}(S/R))$$

Comme il est plus facile de changer la base d'expression d'un vecteur plutôt que celle d'une matrice, on écrit

$$\vec{x} = \cos \theta_s \vec{x}_s - \sin \theta_s \vec{y}_s$$

On en déduit une première expression pour le vecteur recherché

$$\vec{\sigma}(G, S/R) = \dot{\alpha} (I_{Gx} \cos \theta_s \vec{x}_s - I_{Gy} \sin \theta_s \vec{y}_s)$$

Les trois quantités qui interviennent peuvent être détaillées :

- l'angle θ_s dépend du rapport entre la longueur et la largeur de la plaque ;

$$\tan \theta_s = \frac{c}{d}$$

- les deux moments d'inertie sont des expressions usuelles.

$$I_{Gx} = \frac{2mc^2}{3} \quad I_{Gy} = \frac{2md^2}{3}$$

En définitive, on peut donner les éléments de réduction du torseur cinétique

$$C(S/R) = G \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \frac{2}{3} \dot{\alpha} m (c^2 \cos \theta_s \vec{x}_s - d^2 \sin \theta_s \vec{y}_s) \end{array} \right.$$

3. Au centre d'inertie G , les éléments de réduction du torseur dynamique sont les dérivées respectives des éléments de réduction du torseur cinétique par rapport au temps dans R . On peut alors évaluer en préliminaire

$$\left[\frac{d\vec{x}_s}{dt} \right]_R = \dot{\alpha} \vec{x} \wedge \vec{x}_s = \dot{\alpha} \sin \theta_s \vec{z}_s$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_s}{dt} \right]_R = \dot{\alpha} \vec{x} \wedge \vec{y}_s = \dot{\alpha} \cos \theta_s \vec{z}_s$$

On en déduit l'expression du moment dynamique au centre d'inertie G

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(G, S/R) &= \frac{2}{3} \ddot{\alpha} m (c^2 \cos \theta_s \vec{x}_s - d^2 \sin \theta_s \vec{y}_s) \\ &\quad + \frac{2}{3} \dot{\alpha}^2 m \cos \theta_s \sin \theta_s (c^2 - d^2) \vec{z}_s \end{aligned}$$

4. La trappe est un solide en rotation autour d'un axe (G, \vec{x}) immobile dans le repère d'étude. On sait alors que la composante suivant \vec{x} du moment dynamique est de la forme

$$\vec{x} \cdot \vec{\delta}(G, S/R) = J \ddot{\alpha}$$

Par identification avec la réponse de la question précédente, on en déduit l'expression du moment d'inertie de la plaque par rapport à un de ses diamètres

$$J = \vec{x} \cdot \frac{2}{3} m (c^2 \cos \theta_s \vec{x}_s - d^2 \sin \theta_s \vec{y}_s)$$

Ce qui donne, après l'évaluation des deux produits scalaires

$$J = \frac{2}{3} m (c^2 \cos^2 \theta_s + d^2 \sin^2 \theta_s)$$

2.8

1. Le point K est un point fixe dans le référentiel d'étude, on en déduit :

$$\vec{\sigma}(K, 1/0) = \vec{I}(K, 1) (\vec{\Omega}(1/0))$$

Le vecteur $\vec{\Omega}(1/0)$ s'exprime simplement dans la base 1 par $\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha} \vec{z}_1$ et on utilise la linéarité de l'opérateur d'inertie pour en déduire

$$\vec{z} \cdot \vec{\sigma}(K, 1/0) = \dot{\alpha} \vec{z} \cdot \underbrace{\vec{I}(K, 1)}_{I_{Kz}} (\vec{z}) = J \dot{\alpha}$$

Pour mémoire, on peut supposer le plan $(K, \vec{z}_1, \vec{x}_1)$ plan de symétrie pour la girouette 1, donc proposer l'opérateur d'inertie $\vec{I}(K, 1)$ sous la forme

$$\vec{I}(K, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & J \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

2. La répartition de la masse de l'hélice 2 est donnée autour du point G . On commence ainsi par appliquer la formule de changement de points sur le champ des vecteurs moment cinétique

$$\vec{\sigma}(K, 2/0) = \vec{\sigma}(G, 2/0) + M \vec{V}(G, 2/0) \wedge \vec{GK}$$

Deux termes sont à calculer :

- Par composition des vecteurs rotation, on a

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

Comme la matrice d'inertie donnée est exprimée dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, on exprime le vecteur \vec{z}_1 dans cette même base pour écrire

$$\vec{\Omega}(2/0) = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2$$

Au centre d'inertie, le moment cinétique est donné par l'opérateur d'inertie $\vec{I}(G, 2)$ appliqué au vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/0)$ et on obtient

$$\vec{\sigma}(G, 2/0) = A \dot{\beta} \vec{x}_1 + B \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2$$

- Le point G est sur l'axe de rotation de 2 par rapport à 1 : Le vecteur vitesse $\vec{V}(G, 2/0)$ se détermine donc par changement de point sur le mouvement 1/0 et son expression est $\vec{V}(G, 2/0) = \alpha \dot{\alpha} \vec{y}_1$. Le deuxième terme donne ainsi

$$M \vec{K} \vec{G} \wedge \vec{V}(G, 2/0) = M \alpha^2 \dot{\alpha} \vec{z}_1$$

La somme des deux termes trouvés permet de répondre à la question posée

$$\vec{\sigma}(K, 2/0) = \dot{\alpha} (B \sin \beta \vec{y}_2 + C \cos \beta \vec{z}_2 + M \alpha^2 \vec{z}_1) + \dot{\beta} A \vec{x}_1$$

3. Le point K est immobile dans le mouvement 2/0, donc le moment dynamique $\vec{\delta}(K, 2/0)$ est obtenu en dérivant le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 2/0)$ dans la base 0. Comme le vecteur \vec{z} est également fixe dans la base 0, le calcul demandé est immédiatement allégé en constatant que dans ce cas

$$\vec{z} \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(K, 2/0) \right]_0 = \frac{d}{dt} \vec{z} \cdot \vec{\sigma}(K, 2/0)$$

On obtient alors

$$\vec{z} \cdot \vec{\delta}(K, 2/0) = \dot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + M \alpha^2)$$

On dérive cette expression par rapport au temps

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \ddot{\delta}(K, 2/0) &= \ddot{\alpha} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + M \alpha^2) \\ &\quad + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} (B - C) \cos \beta \sin \beta \end{aligned}$$

4. Le balourd 3 est considéré comme une masse ponctuelle, il est donc intéressant de partir de la définition du moment cinétique pour poser

$$\vec{\sigma}(K, 3/0) = m \overline{K\vec{P}} \wedge \vec{V}(P, 3/0)$$

Le point P est immobile sur l'hélice 2, donc le calcul du vecteur vitesse $\vec{V}(P, 3/0)$ se fait à partir de la formule de changement de points sur le mouvement 2/0. On obtient par ce premier calcul

$$\begin{aligned} \vec{V}(P, 2/0) &= \vec{\Omega}(2/0) \wedge \overline{K\vec{P}} \\ &= (\dot{\alpha}\vec{z} + \dot{\beta}\vec{x}_1) \wedge (a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2) \quad (1) \\ &= \dot{\alpha}(a\vec{y}_1 + b \sin \beta \vec{x}_1) - \dot{\beta}b\vec{y}_2 \end{aligned}$$

Le vecteur $\overline{K\vec{P}}$ se décrit par $\overline{K\vec{P}} = a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2$ et on obtient ainsi

$$\vec{\sigma}(K, 3/0) = m \left((a^2\vec{z} - ab \cos \beta \vec{x}_1 + b^2 \sin \beta \vec{y}_2)\dot{\alpha} + (b^2\vec{x}_1 - ab\vec{z}_2)\dot{\beta} \right) \quad (2)$$

5. On écrit la définition de l'énergie cinétique pour le système matériel Σ , que l'on décompose en trois parties indéformables

$$E(\Sigma/0) = \int_{\Sigma} \vec{V}^2(P, \Sigma/0) dm = \sum_{i=1}^3 E(i/0)$$

On se retrouve ainsi avec trois termes à calculer :

- Le mouvement 1/0 est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans 0, l'expression est alors immédiate

$$E(1/0) = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$$

- Pour le mouvement complexe 2/0, il est nécessaire de revenir à l'expression de l'énergie cinétique pour un solide indéformable, à savoir

$$E(2/0) = \frac{1}{2} \mathcal{C}(2/0) \otimes \mathcal{V}(2/0)$$

Le vecteur vitesse $\vec{V}(K, 2/0)$ est nul, le vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/0)$ vaut $\dot{\beta}\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\vec{z}_1$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}(K, 2/0)$ ayant été calculé à la question 2, on obtient alors

$$E(2/0) = \frac{1}{2} (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} A \dot{\beta}^2$$

- Pour le dernier terme, deux possibilités équivalentes de calcul apparaissent :

– soit on part de la définition de l'énergie cinétique pour une masse ponctuelle, à savoir $E(3/0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(P, 3/0)$ et on utilise l'expression du vecteur vitesse détaillée à l'équation (1) ;

– soit on utilise à nouveau l'expression s'appuyant sur un moment et on utilise le moment cinétique détaillé à l'équation (2).

Tout calcul fait, on obtient

$$E(3/0) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 (B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta + Ma^2) + \frac{1}{2} A \dot{\beta}^2$$

La somme des trois résultats précédents donne l'expression recherchée

$$E(\Sigma/0) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (J + (M + m)a^2 + (B + mb^2) \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta) \dot{\alpha}^2 \\ &+ \frac{1}{2} (A + mb^2) \dot{\beta}^2 - mab \cos \beta \dot{\alpha} \dot{\beta} \end{aligned}$$

Exercices d'approfondissement

2.9

1. Le logiciel de CAO fournit des valeurs numériques « brutes ». Il est raisonnable de les lire en se limitant à 3 chiffres significatifs et de les convertir dans les unités du système international.

Concernant la répartition de la masse, les composantes des matrices d'inertie sont données dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On convertit les valeurs numériques en $[\text{kg m}^2]$ et on écrit les matrices associées aux répartitions de masse :

- d'une part autour du centre d'inertie G de l'ensemble du bras ;

$$\overline{\overline{I}}(G, S) = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.028 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.027 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- d'autre part autour du point O .

$$\overline{\overline{I}}(O, S) = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.089 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.088 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

2. Les matrices sont diagonales, et l'axe de rotation est un axe principal d'inertie.

3. Le moment d'inertie recherché est celui autour de l'axe (O, \vec{z}) , écrit sous la forme I_{zz} dans le deuxième tableau fourni

$$I_{Oz} = 8.8 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

4. Sont également fournis :

- la masse de l'ensemble $m = 2.51 \text{ kg}$;
- la distance du centre de masse G à l'axe (O, \vec{z}) , évaluée à $d = 0.156 \text{ m}$;
- le moment d'inertie par rapport à l'axe (G, \vec{z}) , évalué à $I_{Gz} = 0,027 \text{ kg m}^2$

On utilise le théorème de HUYGENS pour calculer

$$I_{Gz} + md^2 = 0.088 \text{ kg m}^2$$

Les données fournies par le logiciel forment un ensemble cohérent.

5. Utiliser un tableur pour regrouper les différentes valeurs et automatiser les calculs est efficace.

On propose une synthèse des différentes contributions à la masse totale M et au moment d'inertie I_{Oz} dans un tableau.

Composant	M	I_{Oz}
Axe bras	21.9 %	0.1 %
Bras seul	16.1 %	7.4 %
Masselottes	51.5 %	76.9 %
Vis	5.4 %	11.3 %
Quincaillerie	5.1 %	4.4 %
Total	100.0 %	100.0 %

6. Concernant les valeurs des moments d'inertie, la lecture du tableau précédent induit plusieurs remarques :

- comme l'on pouvait s'y attendre, les masselottes, alors même qu'elles ne représentent que la moitié de la masse, contribuent pour près de 80 % au moment d'inertie ;
- l'axe d'articulation du bras représente 20 % de la masse totale, mais n'intervient pas dans le moment d'inertie ;
- à l'opposée, la vis qui passe presque inaperçue en représente 10 % ;
- le bras occupe l'espace visuelle, mais son influence est inférieure à 10 %.

Cette recherche confirme que pour évaluer un moment d'inertie, il est nécessaire d'être d'autant plus attentif aux masses qu'elles sont éloignées de l'axe de rotation.

7. Le volume à considérer est un cylindre de révolution homogène de masse volumique ρ , de rayon R et de longueur a . On calcule sa masse :

$$m_2 = \rho \pi R^2 a \quad \text{A.N.} \quad m_2 = 1.45 \text{ kg}$$

La valeur relevée dans les tableaux fournies est de $m_1 = 1.29 \text{ kg}$. La masse calculée du volume simplifié est surévaluée de 12 %.

8. On commence par relever la valeur de référence.

$$J_1 = 0.068 \text{ kg m}^2$$

En reprenant les notations de la question précédente, le moment d'inertie $I_{G\delta}$ du volume simplifié par rapport à un de ses diamètres passant par le centre de masse s'exprime par

$$I_{G\delta} = \frac{m_2 R^2}{4} + \frac{m_2 a^2}{12}$$

Toutes les valeurs sont connues, on peut faire l'application numérique

$$I_{G\delta} = 0.0094 \text{ kg m}^2$$

Le théorème de HUYGENS permet de changer d'axe de rotation et de poser

$$J_2 = I_{G\delta} + mL^2$$

On calcule alors

$$J_2 = 0.076 \text{ kg m}^2$$

Le calcul a introduit la quantité $m_2 L^2$ notée par ailleurs J_4 dont la valeur est

$$J_4 = 0.075 \text{ kg m}^2$$

La dernière valeur s'évalue en reprenant la masse déclarée de $m_1 = 1.29 \text{ kg}$ pour calculer la quantité $m_1 L^2$

$$J_3 = 0.067 \text{ kg m}^2$$

On constate que l'influence de la forme du volume considéré est négligeable ici, $J_3 \approx J_1$ et $J_4 \approx J_2$, alors que l'écart de 12 % sur la masse se retrouve sur le moment d'inertie.

9. Les différents calculs menés permettent de constater que plus on s'éloigne de l'axe de rotation, moins les formes ont d'importance devant la seule valeur de la masse. Un bon ordre de grandeur pour un moment d'inertie est souvent obtenu en réduisant les formes d'un solide à des tiges, des disques ou des masses concentrées. Par contre, il faut rester attentif aux valeurs des masses et aux positions des centres d'inertie.

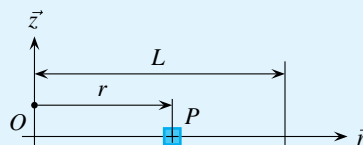
2.10

1. Un encadrement rapide se mène à partir de masses ponctuelles, avec deux propositions toujours vérifiées :

- la masse supposée concentrée au point le plus loin de l'axe de rotation fournit un majorant ;
- la masse supposée concentrée au centre d'inertie fournit un minorant.

Calcul du majorant et premier encadrement

On note P le point courant de masse dm , situé à une distance r de l'axe de rotation (O, \vec{z})



Le rayon r vérifie l'encadrement

$$0 \leq r^2 \leq L^2$$

On en déduit un premier encadrement toujours vérifié par un moment d'inertie

$$0 < \int_S r^2 dm < \int_S L^2 dm$$

L'application numérique donne, pour le vantail étudié

$$0 < I_{Oz} < 24 \text{ kg m}^2$$

Le minorant nul est trivial et le majorant correspond à la masse concentrée au point le plus éloigné de l'axe de rotation.

Calcul du minorant

On suppose la masse concentrée au centre d'inertie. Cette hypothèse rappelle le théorème de HUYGENS

$$I_{Oz} = I_{Gz} + md^2$$

Le terme complémentaire md^2 correspond bien à l'hypothèse faite, et comme I_{Gz} est strictement positif, on en déduit l'inégalité

$$I_{Oz} > md^2$$

Dans le cas étudié, le centre de masse est situé approximativement au centre du rectangle enveloppe, donc à une distance $\frac{L}{2}$ de l'axe de rotation

$$I_{Oz} > 6 \text{ kg m}^2$$

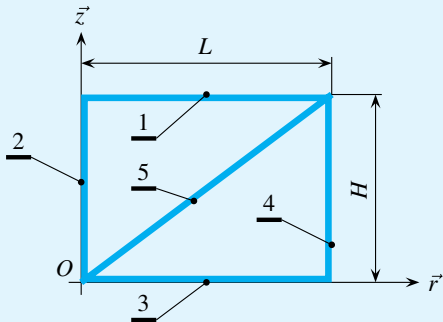
En définitive, on pose l'encadrement demandé

$$6 \text{ kg m}^2 < I_{Oz} < 24 \text{ kg m}^2$$

2. La masse supposée uniformément répartie le long du vantail permet de calculer le moment d'inertie correspondant

$$J = M \frac{L^2}{3} \quad \text{A.N. : } J = 8 \text{ kg m}^2$$

Interpréter cette valeur est un peu plus délicat, car cela dépend des formes du vantail. Au vu des images fournies, on choisit de le décrire comme l'association de cinq tiges homogènes que l'on numérote de 1 à 5



On note m_i la masse de chacune des tiges et l'on a de fait

$$M = \sum_{i=1}^5 m_i$$

La contribution de chacune des tiges au moment d'inertie J est proportionnelle à sa masse m_i et l'on a également

$$J = \sum_{i=1}^5 m_i \frac{L^2}{3}$$

On peut alors constater que :

- l'hypothèse de masse uniformément répartie de $r = 0$ à $r = L$ est une bonne approximation pour les tiges 1, 3 et 5 ;
- on compte $m_2 \frac{L^2}{3}$ pour la contribution au moment d'inertie J de la tige 2, alors que son moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{z}) est nul ;
- on compte $m_4 \frac{L^2}{3}$ pour la contribution au moment d'inertie J de la tige 4, alors que son moment d'inertie par rapport à l'axe (O, \vec{z}) vaut $m_4 L^2$;

Comme les masses m_2 et m_4 sont semblables, on en déduit que la valeur J minore la valeur de I_{Oz} d'une quantité approximative de $m_4 \frac{L^2}{3}$.

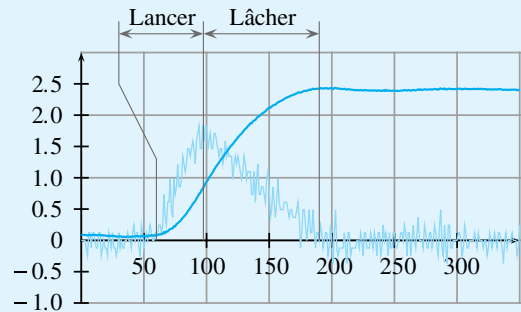
$$J < I_{Oz}$$

3. Premières constatations :

- les abscisses sont graduées en points ;
- les ordonnées en volt.

Les deux courbes en position et en vitesse permettent de différencier les deux phases de l'essai :

- la position angulaire évolue de la position initiale à la position finale avec un point d'inflexion à identifier ;
- la vitesse angulaire passe en fin de poussée par un maximum qui permet de différencier les deux phases.



4. Une fois la phase de lâcher identifiée, il faut successivement :

- extraire la liste des valeurs utiles du fichier des données enregistrées ;
- renommer les abscisses et les convertir en seconde, en exploitant la fréquence d'acquisition ;
- rechercher les constantes d'étalonnage des capteurs, pour convertir les ordonnées dans les unités SI ;
- proposer un modèle de représentation pour la loi d'évolution du couple résistant ;
- élaborer la loi du mouvement à partir du principe fondamental de la dynamique ;
- exploiter cette loi pour conclure.

Plan

3.1	Principe fondamental de la dynamique	84
3.2	Notion de puissance	90
3.3	Théorèmes énergétiques	93
3.4	Applications du PFD	99
	Exercices d'application	104
	Exercices d'approfondissement	107
	Solutions des exercices	112

Introduction

La dynamique est l'étude des mouvements. Aboutissement de la formation en mécanique des systèmes de solides, la dynamique des solides finalise outils et méthodes pour prédire ou expliquer les mouvements à partir de leurs causes.

Devenir performant en dynamique est difficile, car des calculs mal menés dans un espace à six degrés de liberté deviennent rapidement inextricables. C'est pourquoi ce chapitre propose les lois générales et les applique immédiatement à des cas simples. Il est indispensable de se concentrer sur les situations élémentaires pour comprendre, et être ainsi capable d'interpréter les futurs résultats issus de logiciels de calcul.

Prérequis

- Le chapitre précédent.
- Les actions mécaniques du point de vue local ou global.
- La relation fondamentale de la dynamique pour un point.
- La notion de puissance.

Objectifs

- Évaluer la puissance développée par un système d'actions mécaniques.
- Apprendre à utiliser un jeu de six équations scalaires pour six degrés de liberté.

Notation

Pour tout ce chapitre et comme pour le précédent, les notations suivantes sont adoptées :

- Rg représente un repère galiléen ;
- Σ est un système matériel quelconque ;
- S nomme un solide indéformable ;
- le point courant considéré est noté P ;
- un point quelconque, mais invariant une fois choisi, est noté Q ;
- l'espace géométrique est modélisé par un espace affine euclidien \mathcal{E} de dimension 3 et par l'espace vectoriel E associé.

3.1 Principe fondamental de la dynamique

3.1.1 Énoncé

Énoncé du PFD

Il existe au moins un référentiel galiléen R_g tel que pour tout ensemble matériel Σ et à chaque instant t , le torseur dynamique associé au mouvement de ce système par rapport à ce repère est égal au torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur Σ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit sous une des deux formes suivantes

$$\mathcal{D}(\Sigma/R_g) = \mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \quad (1)$$

ou bien

$$\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{D}(\Sigma/R_g) \quad (2)$$

Les deux formes sont proposées car il s'agit d'une équivalence et non d'une affectation. Les deux quantités sont évaluables séparément, puis comparables ensuite. On complète l'énoncé par les propositions et remarques suivantes :

Référentiel

Un référentiel en mécanique est composé d'un repère d'espace et d'une échelle de temps.

Chronologie

En mécanique dite classique, le temps est supposé être le même en tout lieu de l'espace. Cette proposition trouve ses limites en mécanique relativiste.

La mécanique newtonienne est une approximation du réel convenable lorsque les vitesses restent faibles par rapport à la vitesse de la lumière. Ce modèle est amplement suffisant pour l'étude des systèmes mécaniques.

Repère galiléen

Le principe fondamental de la dynamique pose l'existence d'un repère galiléen, dont on ne connaît que des approximations plus ou moins fines.

Ce sont respectivement les repères :

- héliocentrique, d'origine le centre du soleil et comportant trois directions d'étoiles ;
- géocentrique, d'origine le centre de la terre et comportant trois directions d'étoiles ;
- terrestre.

Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen est lui-même galiléen.

Équivalence quantité d'accélération – action mécanique

Le principe fondamental de la dynamique est une équivalence exprimée entre des quantités calculées, les quantités d'accélération, et des quantités posées, les actions mécaniques extérieures.

Ce principe donne six équations scalaires qui sont à mettre en relation avec les six degrés de liberté possibles dans l'espace géométrique de dimension 3.

PFD est l'acronyme de principe fondamental de la dynamique.

Un logiciel de calcul formel, tel MAPLE par exemple, distingue la proposition « $x + y = 2$ » de la proposition « $x := 2 - y$ »

On parle de mécanique newtonienne, ou classique, par opposition à la mécanique relativiste.

Conséquences

Les conséquences du principe fondamental de la dynamique sont nombreuses, et s'énoncent sous forme de théorèmes.

3.1.2 Théorème des actions réciproques

Soit Σ un système matériel décrit en deux parties Σ_1 et Σ_2 quelconques, mais disjointes.

Ces deux parties vérifient $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ et $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$.

On applique le principe fondamental de la dynamique respectivement aux systèmes Σ_1 , Σ_2 puis Σ .

$$\mathcal{D}(\Sigma_1/Rg) = \mathcal{F}(\overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1) \quad (3)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma_2/Rg) = \mathcal{F}(\overline{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2) \quad (4)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma/Rg) = \mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \quad (5)$$

On a les propriétés suivantes :

- le torseur dynamique $\mathcal{D}(\Sigma/Rg)$ est la somme des deux torseurs $\mathcal{D}(\Sigma_1/Rg)$ et $\mathcal{D}(\Sigma_2/Rg)$;
- le torseur des actions mécaniques extérieures $\mathcal{F}(\overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1)$ est la somme des deux torseurs $\mathcal{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1)$ et $\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1)$;
- les actions mécaniques extérieures $(\overline{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2)$ sont la somme des deux actions mécaniques $(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)$ et $(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2)$;
- le torseur des actions mécaniques extérieures $\mathcal{F}(\overline{\Sigma}_2 \rightarrow \Sigma_2)$ est la somme des deux torseurs $\mathcal{F}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2)$ et $\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2)$;
- le torseur des actions mécaniques extérieures $\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$ est la somme des deux torseurs $\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_1)$ et $\mathcal{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma_2)$;

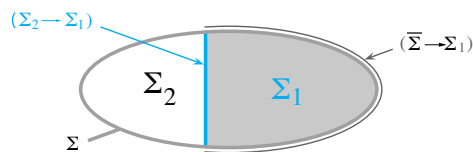


Figure 3.1 Description de $(\overline{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1)$.

C'est ainsi que la somme membre à membre des équations (3) + (4) - (5) permet de conclure et d'énoncer le théorème des actions réciproques.

Théorème

Soient deux systèmes matériels quelconques Σ_1 et Σ_2 disjointes. Le torseur des actions mécaniques exercées par Σ_1 sur Σ_2 est l'opposé du torseur des actions mécaniques exercées par Σ_2 sur Σ_1 .

$$\mathcal{F}(\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2) = -\mathcal{F}(\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1) \quad (6)$$

Les deux premiers théorèmes sont à retenir, les suivants sont à aborder avec précaution.

Les quantités d'accélération sont des quantités qui s'additionnent.

3.1.3

Théorème de l'équilibre

On considère un système matériel Σ dont on constate ou on souhaite l'équilibre par rapport à un référentiel galiléen Rg .

Théorème

S'il existe un référentiel galiléen Rg dans lequel on constate ou on souhaite l'équilibre d'un système matériel Σ , alors le torseur des actions mécaniques extérieures au système Σ est à chaque instant le torseur nul.

$$\forall t, \forall P \quad \vec{V}(P, \Sigma / Rg) = \vec{0} \implies \forall t, \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \mathcal{O} \quad (7)$$

Si le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, \Sigma / Rg)$ est uniforme et constant, alors le champ des vecteurs accélération $\vec{A}(P, \Sigma / Rg)$ est à chaque instant nul et la définition du torseur dynamique permet d'écrire immédiatement

$$\mathcal{D}(\Sigma / Rg) = \mathcal{O} \quad (8)$$

3.1.4

Théorème du moment cinétique

Ce théorème, très utilisé par les physiciens, est valable pour les points particuliers mis en évidence au chapitre précédent :

- au centre d'inertie G du système considéré ;

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, \Sigma / Rg) \right]_{Rg} = \vec{M}(G, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) \quad (9)$$

- en un point immobile O dans le mouvement S/Rg .

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O, S / Rg) \right]_{Rg} = \vec{M}(O, \bar{S} \rightarrow S) \quad (10)$$

3.1.5

Résultante et moment dynamique

Le principe fondamental de la dynamique s'exprime par l'équivalence de deux torseurs. Cette égalité se conçoit immédiatement comme :

- une équation torsorielle ;
- deux équations vectorielles ;
- six équations scalaires.

Il n'est donc pas utile d'invoquer un théorème de la résultante ou un théorème du moment dynamique pour ne citer qu'une seule des deux équations vectorielles posées. Une proposition possible issue de l'application du principe fondamental de la dynamique est, par exemple : « Pour éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot d'axe (A, \vec{u}) , on écrit l'équation de moment dynamique au point A scalaire $\vec{u} \dots$ ».

3.1.6

Mouvements élémentaires de solides indéformables

Mouvement de translation

Soit un solide S de masse m et de centre de masse G en mouvement de translation dans un repère galiléen Rg .



Ce théorème a été posé dans l'ouvrage de première année, et il est simplement rappelé ici.



Cette relation n'est pas vérifiée dans le cas général pour un point quelconque Q !



Le choix entre ces trois formes équivalentes se fait en fonction du problème à traiter.



Le cas du mouvement de translation est traité ici de manière générale, quelle que soit la nature de la translation.

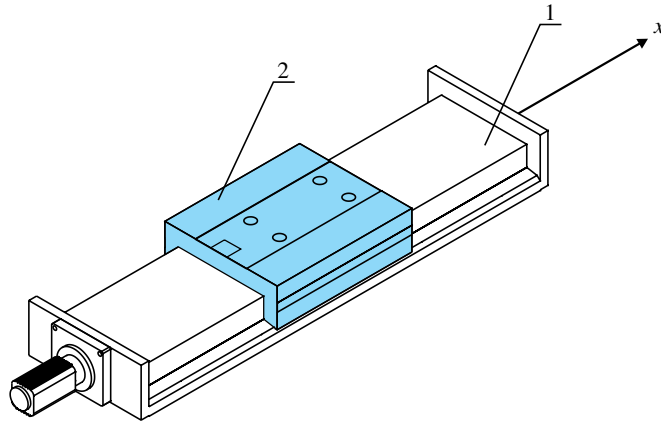


Figure 3.2 Exemple d'un solide 2 en translation rectiligne par rapport à un solide 1.

Le torseur cinématique correspondant au mouvement S/Rg est à chaque instant

$$\mathcal{V}(S/Rg) = \begin{cases} \vec{0} \\ v\vec{u} \end{cases} \quad (11)$$

► Calcul du torseur dynamique

- La résultante dynamique s'exprime à partir du vecteur accélération du centre d'inertie. Ce vecteur se calcule par dérivation vectorielle

$$\vec{A}(G, S/Rg) = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G, S/Rg) \right]_{Rg} \quad (12)$$

On rappelle à cette occasion qu'un mouvement de translation n'est pas forcément rectiligne, le vecteur accélération contient deux termes que l'on retrouverait ici sous la forme $\vec{A}(G, S/Rg) = v\vec{u} + v \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{Rg}$.

- On choisit le centre d'inertie G comme point de calcul pour le moment dynamique

$$\vec{\delta}(G, S/Rg) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(G, S/Rg) \right]_{Rg} = \left[\frac{d}{dt} \vec{I}(G, S) (\vec{\Omega}(S/Rg)) \right]_{Rg} = \vec{0} \quad (13)$$

On en déduit l'expression du torseur dynamique recherché

$$\mathcal{D}(S/Rg) = \underset{G}{\begin{cases} m\vec{A}(G, S/Rg) \\ \vec{0} \end{cases}} \quad (14)$$

► Inventaire des actions mécaniques extérieures

On pose le torseur des actions mécaniques extérieures, *a priori* quelconque ici

$$\mathcal{F}(\vec{S} \rightarrow S) = \begin{cases} \vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) \\ \vec{M}(G, \vec{S} \rightarrow S) \end{cases} \quad (15)$$

► Application du PFD

On choisit d'utiliser la forme vectorielle du PFD pour écrire finalement

$$\begin{cases} \vec{R}(\vec{S} \rightarrow S) & = & m\vec{A}(G, S/Rg) \\ \vec{M}(G, \vec{S} \rightarrow S) & = & \vec{0} \end{cases} \quad (16)$$



Pour un mouvement de translation, le torseur dynamique est un glisseur : le moment dynamique n'est nul qu'en tout point de l'axe central, dont fait partie le centre d'inertie G !



Le fait d'identifier un mouvement de translation ne diminue pas le nombre d'équations !

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

On traite ce cas à partir d'un exemple.

On s'intéresse au mécanisme de transformation de mouvement schématisé ci-dessous.

Il comprend :

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ supposé galiléen ;
- un arbre 2 moteur, en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_1) avec le bâti 1 ;
- un piston 3 récepteur, en liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}_1) avec le bâti 1 et en contact avec l'arbre 2 au niveau de son extrémité inférieure, de forme sphérique de rayon r .

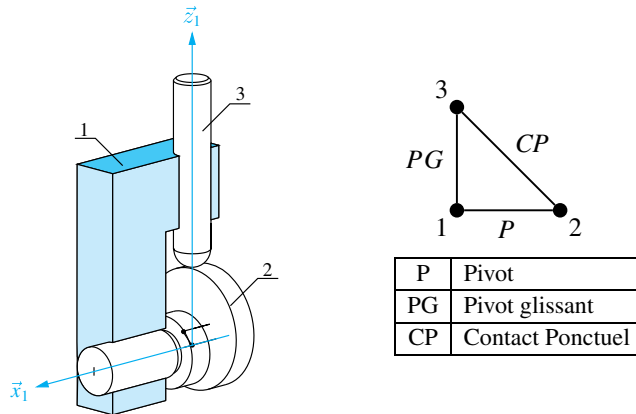


Figure 3.3 Schéma cinématique et graphe des liaisons.

► Approche globale

Une approche cinématique permet de dire :

- le graphe comporte une chaîne fermée de solides, on a alors $Ec = 6$ équations scalaires ;
- on compte $Ic = 8$ inconnues scalaires ;
- cette structure admet en conséquence un indice de mobilité de $Ic - Ec = 2$.

Il y a alors au moins deux mouvements indépendants à imaginer :

- la rotation du piston 3 autour de son axe de révolution est possible sans que 2 ne bouge par rapport au bâti ;
- les mouvements correspondant à la fonction cinématique recherchée.

► Mouvement de l'arbre 2 par rapport à 1

On se contente pour cet exemple de chercher à mettre en équation le mouvement de l'arbre 2 par rapport au bâti 1.

Inventaire des actions mécaniques

Le milieu environnant de l'arbre 2 est composé de :

- la pesanteur, dont on néglige l'influence devant les actions de contact ;
- le bâti 1, par l'intermédiaire de la liaison pivot ;
- le piston 3 ;
- le moteur qui l'entraîne en rotation.



Une étude démarre toujours par une approche globale

Stratégie de résolution

On recherche la relation entre le couple moteur et la charge issue du piston. Il est donc nécessaire d'éviter les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot. Pour cela, on écrit l'équation de moment dynamique au point O scalaire \vec{z}_1 .

Calcul du moment dynamique suivant \vec{z}_1

Le point O est fixe dans le mouvement 2/1, on a donc

$$\delta(O, 2/1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O, 2/1) \right]_1 \quad \text{avec} \quad \vec{\sigma}(O, 2/1) = \bar{\bar{I}}(O, 2) \left(\vec{\Omega}(2/1) \right)$$

Le vecteur \vec{z}_1 est immobile dans la base 1, le produit scalaire peut être effectué avant la dérivation

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(O, 2/1) \right]_1 \cdot \vec{z}_1 = \frac{d}{dt} \left(\vec{\sigma}(O, 2/1) \cdot \vec{z}_1 \right)$$

L'arbre 2 n'est pas un solide de révolution, on suppose la matrice de l'opérateur d'inertie quelconque et on pose

$$\bar{\bar{I}}(O, 2) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & J \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(2/1)$ s'exprime dans la base mobile par $\vec{\Omega}(2/1) = \omega \vec{z}_2$. On peut alors calculer la composante suivante \vec{z}_1 du moment cinétique au point O

$$\vec{\sigma}(O, 2/1) \cdot \vec{z}_1 = \left(\bar{\bar{I}}(O, 2) \left(\vec{\Omega}(2/1) \right) \right) \cdot \vec{z}_1 = J \omega$$

La dérivation par rapport au temps du résultat précédent permet d'écrire l'expression de la composante suivant \vec{z}_1 du moment dynamique au point O

$$\delta(O, 2/1) \cdot \vec{z}_1 = J \dot{\omega} \quad (17)$$

Expression des actions mécaniques

Seules deux actions mécaniques interviennent dans l'équation scalaire à écrire, et on pose les torseurs correspondants sans chercher ici à expliciter davantage l'action mécanique du piston que l'on pose quelconque

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_1 \end{cases} \quad \mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(3 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(0, 3 \rightarrow 2) \end{cases}$$

Application du PFD

Une fois les quantités d'accélération calculées et les actions mécaniques posées, on peut écrire l'équation de moment dynamique au point O scalaire \vec{z}_1 recherchée

$$J \dot{\omega} = C_m + \vec{M}(0, 3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 \quad (18)$$

► Bilan de l'étude

On peut constater à partir de cet exemple traité de manière très générale que dans le cas de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe dans un repère galiléen :

- seul intervient dans l'équation de mouvement le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation du solide concerné ;



Cette constatation évite dans ce cas bien des calculs inutiles !



L'analyse du contact entre le piston et l'arbre permet bien sûr de poser le glisseur d'action mécanique transmissible correspondant et d'achever le calcul si nécessaire !

- les cinq équations scalaires encore disponibles permettent de déterminer chacune une composante de l'action mécanique de la liaison pivot guidant le mouvement ;
- ces cinq équations font intervenir des quantités d'accélération qu'il est alors nécessaire de calculer.

3.2 Notion de puissance

Pour un point matériel de masse m se déplaçant à une vitesse \vec{V} dans un repère R , l'énergie cinétique est égale au travail nécessaire pour faire acquérir au point sa vitesse depuis le repos. Cette grandeur s'écrit :

$$E = \frac{1}{2}m\vec{V}^2$$

La variation instantanée de l'énergie cinétique est exprimée par sa dérivée par rapport au temps. Le résultat est une grandeur scalaire appelée puissance cinétique et notée usuellement P .

La dérivée du vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude R et donne un vecteur accélération noté \vec{A} . La relation fondamentale de la dynamique pose l'équivalence entre la quantité d'accélération $m\vec{A}$ et la force \vec{F} , action mécanique attachée au point. C'est ainsi que la puissance développée lors du déplacement de ce point est une grandeur algébrique correspondant au produit scalaire du vecteur force et du vecteur vitesse. Son unité est le Watt [W].

$$P = m \vec{A} \cdot \vec{V} = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Cette notion est étendue à un système matériel quelconque par somme des quantités élémentaires sur tout le système considéré.

3.2.1

Puissance d'une action mécanique

Expression générale

On considère le mouvement d'un système matériel quelconque Σ par rapport à un repère R , mouvement caractérisé par le champ des vecteurs vitesse $\vec{V}(P, \Sigma/R)$.

On pose en chaque point P une force issue d'un système extérieur au système Σ ou d'un phénomène, que l'on note alors $\vec{F}(\varphi \rightarrow P)$.

Le produit scalaire $\vec{F}(\varphi \rightarrow P) \cdot \vec{V}(P, \Sigma/R)$ caractérise alors la puissance de la force $\vec{F}(\varphi \rightarrow P)$ dans le mouvement Σ/R . On note cette puissance élémentaire $P_R(\varphi \rightarrow P)$.

Remarque

La première idée est de noter la puissance comme fonction de deux variables, $P(\varphi \rightarrow P, \Sigma/R)$. En effet, on parle de la puissance de l'action mécanique $\varphi \rightarrow P$ lors du mouvement Σ/R . Comme dans le cadre de cet ouvrage, le mouvement est clairement identifié et que l'on n'en change guère, on se contente de la notation $P_R(\varphi \rightarrow P)$ avec la seule action mécanique comme variable, la référence au mouvement passant en indice du nom adopté.

Définition

On appelle **puissance** de l'action mécanique ($\varphi \rightarrow \Sigma$) dans le mouvement Σ/R la quantité scalaire somme des puissances élémentaires développées au niveau de chacun des points du système considéré Σ .

$$P_R(\varphi \rightarrow \Sigma) = \sum_{P \in \Sigma} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \cdot \vec{V}(P, \Sigma/R) \quad (20)$$

Cette expression a été introduite au chapitre précédent.

Cette expression n'est valable que si la masse reste constante au cours du temps.

La force est le modèle d'action mécanique associé au point !

On constate dès à présent que la résultante de ces actions mécaniques élémentaires s'exprime simplement

$$\sum_{P \in \Sigma} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) = \vec{F}(\varphi \rightarrow \Sigma) \quad (19)$$



Un point Q quelconque, mais bien identifié dans le mouvement S/R

Application au solide indéformable

On reprend la définition générale à laquelle on ajoute la relation de changement de point, en choisissant un point quelconque Q

$$\sum_{P \in S} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \cdot \vec{V}(P, S/R) = \underbrace{\sum_{P \in S} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \cdot \vec{V}(Q, S/R)}_{(a)} + \underbrace{\sum_{P \in S} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \cdot (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{PQ})}_{(b)} \quad (21)$$

- On factorise le vecteur vitesse $\vec{V}(Q, S/R)$ dans le terme (a) pour obtenir

$$\begin{aligned} (a) &= \left(\sum_{P \in S} \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \right) \cdot \vec{V}(Q, S/R) \\ &= \vec{F}(\varphi \rightarrow S) \cdot \vec{V}(Q, S/R) \end{aligned} \quad (22)$$

- On utilise les propriétés du produit mixte pour mettre le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ en facteur dans le terme (b)

$$\begin{aligned} (b) &= \vec{\Omega}(S/R) \cdot \left(\sum_{P \in S} \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{F}(\varphi \rightarrow P) \right) \\ &= \vec{\Omega}(S/R) \cdot \left(\sum_{P \in S} \vec{M}(Q, \varphi \rightarrow P) \right) \\ &= \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{M}(Q, \varphi \rightarrow S) \end{aligned} \quad (23)$$

C'est ainsi que l'on obtient l'expression de la puissance d'une action mécanique ($\varphi \rightarrow S$) comme le comoment du torseur des actions mécaniques $\mathcal{F}(\varphi \rightarrow S)$ et du torseur cinématique associé au mouvement S/R .

Définition

On appelle **puissance** de l'action mécanique ($\varphi \rightarrow S$) dans le mouvement du solide S par rapport à R la quantité scalaire obtenue par comoment du torseur d'action mécanique et du torseur cinématique associés.

$$P_R(\varphi \rightarrow S) = \mathcal{F}(\varphi \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/R) \quad (24)$$

3.2.2 Puissance galiléenne d'une action mécanique

Lorsque le mouvement est relatif à un repère galiléen, on parle alors de la puissance galiléenne d'une action mécanique.

Définition

On appelle **puissance galiléenne** de l'action mécanique ($\varphi \rightarrow \Sigma$) la puissance de cette action mécanique dans le mouvement du système Σ dans un repère galiléen Rg .

Notation

L'écriture $P_{Rg}(\varphi \rightarrow \Sigma)$ est simplifiée avec profit en $Pg(\varphi \rightarrow \Sigma)$.

Dans le cas d'un solide indéformable S , l'équation 24 s'écrit alors

$$Pg(\varphi \rightarrow S) = \mathcal{F}(\varphi \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/Rg) \quad (25)$$

et se lit « puissance galiléenne de l'action mécanique ($\varphi \rightarrow S$) ».



L'expression sous forme de comoment est l'expression à retenir, mais elle n'est valable que pour un solide indéformable !

3.2.3

Puissance des interefforts

Soient deux solides indéformables 1 et 2 en mouvement relatif.

On reprend l'expression générale 24 dans le cas du solide indéformable 2 en mouvement par rapport au solide 1.

$$P_1(\varphi \rightarrow 2) = \mathcal{F}(\varphi \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) \quad (26)$$

On considère comme action mécanique particulière celle issue du solide 1, notée $(1 \rightarrow 2)$. L'expression de la puissance prend alors une forme particulière dans laquelle les solides peuvent échanger leurs rôles respectifs.

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) = \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1/2) \quad (27)$$

On parle alors de la puissance des interefforts entre les solides 1 et 2.

Définition

On appelle **puissance des interefforts** la puissance de l'action mécanique d'un solide i sur un autre solide k lors de leur mouvement relatif k/i .

Notation

Comme les solides peuvent échanger leurs rôles, on adopte pour la puissance des interefforts la notation $P(1 \leftrightarrow 2)$ qui exprime cette propriété.

$$\begin{aligned} P(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) \\ \text{au choix} \quad P(1 \leftrightarrow 2) &= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1/2) \end{aligned} \quad (28)$$

3.2.4

Puissance des efforts de liaison

On termine cette section sur la puissance en s'intéressant aux liaisons.

Conservation de l'énergie

Au sein d'un mécanisme, la puissance est transmise du moteur au récepteur en passant par les différentes liaisons.

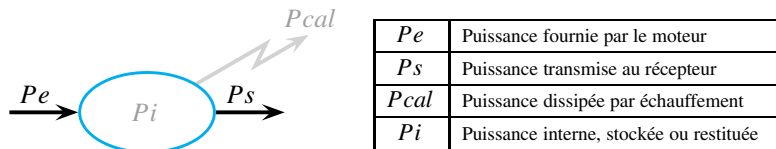


Figure 3.4 Bilan énergétique instantané.

Un rapide bilan énergétique permet de dire que l'énergie fournie par un élément moteur se répartit à chaque instant en :

- énergie transmise à un élément récepteur ;
- énergie dissipée par échauffement ;
- énergie stockée par un élément accumulateur sous forme d'énergie potentielle ou sous forme d'énergie cinétique.

Ce bilan se traduit par l'équation instantanée suivante :

$$P_e + P_s + P_{cal} + P_i = 0 \quad (29)$$

Il faut faire attention à l'action mécanique et au mouvement associé.

Un ressort est un exemple d'élément accumulateur d'énergie potentielle, une chambre avec un gaz compressible également... Un volant d'inertie est un élément accumulateur d'énergie cinétique...

Cette équation est détaillée sous une forme plus explicite à la section suivante, lors de l'énoncé des théorèmes énergétiques.

Avec les conventions de signe adoptées en thermodynamique, la puissance entrante P_e est comptée positive, les puissances sortantes P_s et P_{cal} sont comptées négatives et le signe de P_i est négatif en phase d'accumulation, positif en phase de restitution.

Remarque

La définition usuelle du **rendement** η d'un actionneur ou d'un transmetteur est directement issue de cette dernière équation, dans le cas où la puissance stockée P_i est nulle.

$$\eta = \left| \frac{P_s}{P_e} \right|$$

On peut alors respectivement évaluer la puissance transmise $|P_s| = \eta|P_e|$ et la puissance dissipée $|P_s| = (1 - \eta)|P_e|$ en régime permanent.

Liaison parfaite

En l'absence de frottement, la puissance dissipée par échauffement au niveau d'une liaison est nulle.

Définition

On qualifie une liaison de **liaison parfaite** lorsque cette liaison est associée à des contacts sans jeu et sans frottement.

Ces deux caractéristiques sont importantes :

- sans jeu, la description des mouvements possibles est réalisée sans ambiguïté à l'aide du torseur cinématique $\mathcal{V}(i/k)$, dont la forme est connue pour les liaisons usuelles ;
- sans frottement, la puissance dissipée par les actions mécaniques transmissibles par la liaison est alors nulle.

Cette puissance dissipée correspond à la puissance des interefforts dans la liaison étudiée et sa nullité s'exprime par

$$P(i \leftrightarrow k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}(k \rightarrow i) \otimes \mathcal{V}(i/k) = \mathcal{O} \quad (30)$$



On retrouve ainsi la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite, forme duale de celle du torseur cinématique caractérisant les mouvements possibles !

3.3 Théorèmes énergétiques

Pour toutes les fois où on s'intéresse au transfert de puissance au sein d'un mécanisme et où on peut négliger l'influence des frottements secs, l'approche énergétique est à privilégier. En effet, elle met en œuvre une seule équation scalaire intéressante à double titre :

- elle fait intervenir les grandeurs cinématiques et d'actions mécaniques qui décrivent le transfert de puissance ;
- elle évite les inconnues d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons.

Cette équation est écrite à partir du principe fondamental de la dynamique des solides.

3.3.1 Cas d'un seul solide

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère galiléen R_g .

Énoncé

Pour un solide indéformable unique S , la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

$$\frac{d}{dt} E(S/R_g) = P_g(\bar{S} \rightarrow S)$$



Cette équation est déduite du PFD, ce n'est donc pas une équation supplémentaire !

Cette dernière équation s'écrit, en détaillant la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures appliquées au solide S

$$\frac{d}{dt}E(S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/Rg) \quad (31)$$

Démonstration

Soit un solide indéformable S en mouvement dans un référentiel galiléen. Le principe fondamental de la dynamique permet de poser l'équivalence

$$\mathcal{D}(S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \quad (32)$$

On peut faire membre à membre le comoment de cette dernière équation avec le tenseur cinématique $\mathcal{V}(S/Rg)$. Le second terme est immédiatement $\mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/Rg)$ et il s'agit alors uniquement d'évaluer le terme $\mathcal{V}(S/Rg) \otimes \mathcal{D}(S/Rg)$. Pour cela, on pose les éléments de réduction de ces deux tenseurs au point quelconque Q , soit

$$\mathcal{V}(S/Rg) = \begin{cases} \bar{\Omega}(S/Rg) \\ \vec{V}(Q, S/Rg) \end{cases} \quad \mathcal{D}(S/Rg) = \begin{cases} \int_S \vec{A}(P, S/Rg) dm \\ \int_S \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, S/Rg) dm \end{cases} \quad (33)$$

- Le premier terme du comoment n'appelle pas de commentaire particulier et s'écrit tout de suite sous la forme d'un produit mixte

$$\bar{\Omega}(S/Rg) \cdot \int_S \vec{Q}\vec{P} \wedge \vec{A}(P, S/Rg) dm = \int_S \left(\bar{\Omega}(S/Rg), \vec{Q}\vec{P}, \vec{A}(P, S/Rg) \right) dm \quad (34)$$

- Le second terme du comoment se calcule en utilisant tout d'abord la formule de changement de point $\vec{V}(Q, S/Rg) = \vec{V}(P, S/Rg) + \bar{\Omega}(S/Rg) \wedge \vec{P}\vec{Q}$, puis les propriétés du produit mixte pour aboutir à

$$\vec{V}(Q, S/Rg) \cdot \int_S \vec{A}(P, S/Rg) dm = \int_S \vec{V}(P, S/Rg) \cdot \vec{A}(P, S/Rg) dm - \int_S \left(\bar{\Omega}(S/Rg), \vec{Q}\vec{P}, \vec{A}(P, S/Rg) \right) dm \quad (35)$$

La somme de ces deux dernières équations 34 et 35 permet de proposer

$$\mathcal{V}(S/Rg) \otimes \mathcal{D}(S/Rg) = \int_S \vec{V}(P, S/Rg) \cdot \vec{A}(P, S/Rg) dm \quad (36)$$

La définition d'un vecteur accélération permet de dire que

$$\vec{V}(P, S/Rg) \cdot \vec{A}(P, S/Rg) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P, S/Rg)^2 \right) \quad (37)$$

Le fait que le solide S soit un système à masse conservative et la définition de l'énergie cinétique pour un système matériel en mouvement permet de conclure

$$\int_S \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V}(P, S/Rg)^2 \right) dm = \frac{d}{dt} \left(\int_S \frac{1}{2} \vec{V}(P, S/Rg)^2 dm \right) = \frac{d}{dt} E(S/Rg) \quad (38)$$

On en déduit l'expression proposée du théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un solide indéformable

$$\frac{d}{dt} E(S/Rg) = \mathcal{F}(\bar{S} \rightarrow S) \otimes \mathcal{V}(S/Rg) \quad (39)$$



Savoir faire la démonstration n'est pas indispensable. Elle est donnée ici pour comprendre.



Le point Q est un point quelconque attaché au solide S .

3.3.2

Cas d'un ensemble de deux solides

Soit un système matériel Σ composé de deux solides indéformables S_1 et S_2 disjoints. Ces deux solides sont respectivement notés 1 et 2.

Ce système vérifie $\Sigma = 1 \cup 2$ avec $1 \cap 2 = \emptyset$.

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique aux solides indéformables 1 et 2, en décomposant les milieux environnants $\bar{1}$ et $\bar{2}$.

$$\frac{d}{dt}E(1/Rg) = Pg(\bar{1} \rightarrow 1) = Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 1) + Pg(2 \rightarrow 1) \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt}E(2/Rg) = Pg(\bar{2} \rightarrow 2) = Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 2) + Pg(1 \rightarrow 2) \quad (41)$$

La définition de l'énergie cinétique permet d'affirmer

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/Rg) = \frac{d}{dt}E(1/Rg) + \frac{d}{dt}E(2/Rg) \quad (42)$$

La somme des équations 40 et 41 donne ainsi

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/Rg) = \underbrace{Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 1) + Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow 2)}_{Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)} + Pg(2 \rightarrow 1) + Pg(1 \rightarrow 2) \quad (43)$$

La somme des deux premiers termes s'exprime par $Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$ et la somme des deux derniers termes mérite d'être explicitée

$$\begin{aligned} Pg(2 \rightarrow 1) + Pg(1 \rightarrow 2) &= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1/Rg) + \mathcal{F}(1 \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/Rg) \\ &= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \otimes (\mathcal{V}(1/Rg) - \mathcal{V}(2/Rg)) \\ &= \mathcal{F}(2 \rightarrow 1) \otimes \mathcal{V}(1/2) \\ &= P(1 \leftrightarrow 2) \end{aligned} \quad (44)$$

On obtient finalement

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/Rg) = Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) + P(1 \leftrightarrow 2) \quad (45)$$

Énoncé

Pour un système matériel Σ formé de deux solides indéformables 1 et 2, la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique galiléenne est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts entre 1 et 2.

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/Rg) = Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) + P(1 \leftrightarrow 2)$$

3.3.3

Généralisation à un ensemble de n solides indéformables

Le résultat précédent se généralise à un système Σ composé de n solides indéformables notés simplement i , avec i de 1 à n .

Énoncé

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un système matériel Σ formé de n solides indéformables est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à ce système et de la puissance des interefforts.



Alors que la démonstration précédente n'est pas indispensable, le calcul proposé ici mérite toute attention !

On trouve parfois l'écriture condensée de ce théorème sous la forme

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/Rg) = Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) + P(\Sigma \leftrightarrow \Sigma) \quad (46)$$

Le terme $P(\Sigma \leftrightarrow \Sigma)$ n'apporte pas grand chose, car le symbole $\Sigma \leftrightarrow \Sigma$ reste vague et les auteurs préfèrent la forme qui incite au dénombrement des termes, à savoir

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/Rg) = \sum_{i=1}^n Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{j>k} P(j \leftrightarrow k) \quad (47)$$

avec

$$\begin{cases} Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow i) &= \mathcal{F}(\bar{\Sigma} \rightarrow i) \otimes \mathcal{V}(i/Rg) \\ P(j \leftrightarrow k) &= \mathcal{F}(j \rightarrow k) \otimes \mathcal{V}(k/j) \end{cases} \quad (48)$$



Voilà ce qu'il faut retenir !

3.3.4 Mouvements élémentaires

Pour illustrer les théorèmes de l'énergie cinétique, on s'intéresse à un treuil de levage, schématisé ci-dessous.

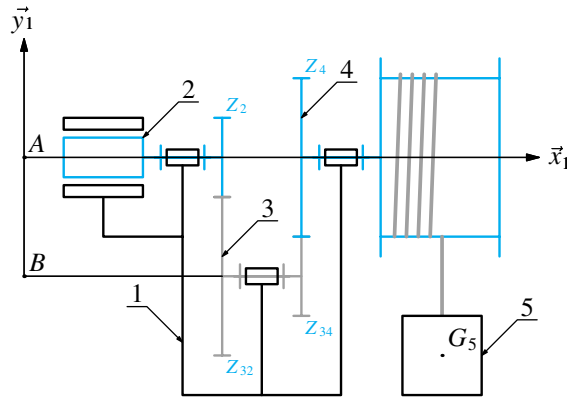


Figure 3.5 Schéma cinématique d'un treuil de levage.

Ce treuil comporte :

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ supposé galiléen. L'accélération de la pesanteur est dirigée suivant $-\vec{y}_1$.
- un arbre 2 portant un pignon de Z_2 dents, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti et entraîné en rotation par un moteur électrique. Cet arbre est de masse m_2 , de centre de masse G_2 supposé sur l'axe de rotation et on note J_2 son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_2, \vec{x}_1) .
- un arbre intermédiaire 3, en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_1) avec le bâti et entraîné en rotation par l'intermédiaire d'un pignon de Z_{32} dents en prise avec le pignon de l'arbre moteur. Il comporte un deuxième pignon de Z_{34} dents. Il est de masse m_3 , de centre de masse G_3 supposé sur l'axe de rotation et on note J_3 son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_3, \vec{x}_1) .
- un tambour 4 de rayon R_4 , en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti et entraîné en rotation par l'intermédiaire d'un pignon de Z_4 dents en prise avec le deuxième pignon de l'arbre intermédiaire. Il est de masse m_4 , de centre de masse G_4 supposé sur l'axe de rotation et on note J_4 son moment d'inertie par rapport à l'axe (G_4, \vec{x}_1) .
- un câble supposé inextensible et sans masse, enroulé sur le tambour 4.

À son extrémité est accrochée la charge 5 transportée, de masse m_5 et de centre d'inertie G_5 .

Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

Approche cinématique

Le graphe des liaisons comporte deux chaînes fermées indépendantes.

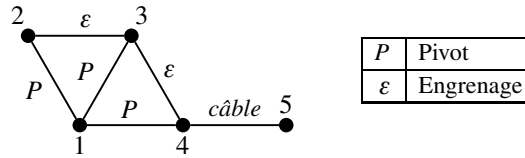


Figure 3.6 Graphe de structure du treuil de levage.

On reconnaît sur ce graphe deux fois la structure d'une transmission par engrenage et on constate que les trois axes de rotation sont immobiles dans le repère 1. On peut donc poser les formes des torseurs cinématiques pour les trois liaisons pivot et écrire de suite les rapports de transmission

$$\mathcal{V}(2/1) = A \begin{Bmatrix} \omega_{21} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(3/1) = B \begin{Bmatrix} \omega_{31} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{V}(4/1) = A \begin{Bmatrix} \omega_{41} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_{32}} \quad \frac{\omega_{41}}{\omega_{31}} = -\frac{Z_{34}}{Z_4}$$

La masse 5 comporte cinq degrés de liberté par rapport au tambour 4. On fait l'hypothèse d'un seul mouvement de translation suivant la direction de la pesanteur pour le mouvement 5/1. On pose alors la forme du torseur cinématique $\mathcal{V}(5/1)$

$$\mathcal{V}(5/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_{51} \vec{y}_1 \end{Bmatrix}$$

On suppose de plus que le câble s'enroule sans glisser sur le tambour et on peut alors calculer la loi liant ω_{41} et V_{51}

$$V_{51} = +R_4 \omega_{41}$$

Théorème de l'énergie cinétique

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ dans son mouvement par rapport au bâti 1 supposé galiléen

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = \sum_{i=2}^5 P g(\vec{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{j>k>1} P(j \leftrightarrow k)$$

Les termes de part et d'autre de l'égalité s'évaluent séparément :

- concernant l'énergie cinétique, le système Σ se scinde en quatre solides indéformables

$$E(\Sigma/1) = \sum_{i=2}^5 E(i/1) = \sum_{i=2}^5 \frac{1}{2} \mathcal{V}(i/1) \otimes \mathcal{C}(i/1)$$

L'évaluation des comoments est rapide, car on reconnaît les mouvements élémentaires de rotation autour d'axes fixes et de translation rectiligne. On écrit ainsi directement

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} (J_2 \omega_{21}^2 + J_3 \omega_{31}^2 + J_4 \omega_{41}^2 + m_5 V_{51}^2)$$

Voir l'ouvrage de première année pour le théorème utilisé.

L'approche cinématique préliminaire permet de mettre ω_{21} en facteur et de faire apparaître le moment d'inertie équivalent rapporté à l'arbre moteur

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} \underbrace{\left(J_2 + J_3 \left(\frac{Z_2}{Z_{32}} \right)^2 + J_4 \left(\frac{Z_2 Z_{34}}{Z_{32} Z_4} \right)^2 + m_5 R_4^2 \left(\frac{Z_2 Z_{34}}{Z_{32} Z_4} \right)^2 \right)}_{J_{eq}} \omega_{21}^2$$

On en déduit l'expression de la dérivée de l'énergie cinétique galiléenne

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = J_{eq} \omega_{21} \dot{\omega}_{21}$$

concernant les puissances des actions mécaniques, le travail le plus minutieux à faire concerne le dénombrement des termes :

- la puissance des interefforts comporte trois termes, issus des actions mécaniques transmissibles par les liaisons internes au système Σ ;

$$2 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 4 \text{ et } 4 \leftrightarrow 5.$$

- la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à Σ comporte huit termes.

- quatre concernent la pesanteur p ;

$$p \rightarrow 2, p \rightarrow 3, p \rightarrow 4 \text{ et } p \rightarrow 5$$

- trois termes concernent les liaisons pivot avec le bâti 1 ;

$$1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4$$

- le dernier s'intéresse au moteur m .

$$m \rightarrow 2$$

Comme les liaisons sont supposées parfaites, les six termes issus des liaisons sont nuls. Les centres de masse G_2 , G_3 et G_4 restent immobiles dans les mouvements de rotations respectifs 2/1, 3/1 et 4/1. Trois des quatre termes issus de la pesanteur sont ainsi également nuls.

Restent à calculer deux termes pour lesquels on pose les torseurs des actions mécaniques concernées

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_1 \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 5) =_{G_5} \begin{Bmatrix} -m_5 g \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Il vient alors :

- la puissance galiléenne de la pesanteur sur la charge ;

$$Pg(p \rightarrow 5) = \mathcal{F}(p \rightarrow 5) \otimes \mathcal{V}(5/1) = -m_5 g V_{51}$$

- la puissance galiléenne du stator sur le rotor du moteur.

$$Pg(m \rightarrow 2) = \mathcal{F}(m \rightarrow 2) \otimes \mathcal{V}(2/1) = C_m \omega_{21}$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne finalement, après avoir exprimé V_{51} en fonction de ω_{21} et simplifié par ω_{21}

$$J_{eq} \dot{\omega}_{21} = C_m - m_5 g R_5 \frac{Z_2 Z_{34}}{Z_{32} Z_4} \quad (49)$$

Interprétation du résultat

Une première lecture du résultat précédent consiste à s'intéresser au régime permanent, pour lequel $\dot{\omega}_{21} = 0$. Dans ce cas, on obtient le couple moteur C_m nécessaire au



Un exercice d'imagination permet de comprendre le signe positif pour ce couple.

maintien de la charge en équilibre dans le repère galiléen

$$C_m = m_5 g R_5 \frac{Z_2 Z_{34}}{Z_{32} Z_4}$$

L'équation 49 donne également l'expression du couple supplémentaire que le moteur doit fournir pour mettre en mouvement une charge donnée :

- pour une accélération souhaitée, on peut déterminer le couple que le moteur doit pouvoir fournir ;
- pour un moteur donné, on peut déterminer l'accélération maximale envisageable.

3.4 Applications du PFD

Les applications du principe fondamental de la dynamique sont nombreuses. On ne détaille ici que l'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe immobile dans un repère galiléen.

3.4.1 Les deux problématiques

En préliminaire, on précise ici les deux grandes familles de problèmes envisagés :

- soit le mouvement est imposé, et il s'agit de calculer les efforts extérieurs nécessaires ou les inconnues de liaison. C'est la démarche qui aboutit respectivement au choix d'un actionneur ou au dimensionnement des liaisons.
- soit les efforts extérieurs sont connus, et il s'agit de déterminer les lois du mouvement sous forme d'équations différentielles.

Lors d'un projet industriel, la frontière entre ces deux problématiques n'est évidemment plus aussi nette, car l'ingénieur élabore une stratégie en fonction des objectifs poursuivis et du cahier des charges imposé en combinant à loisir tout ou partie des différentes approches.

3.4.2 Équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe immobile dans un repère galiléen

Mise en évidence du phénomène

On considère un arbre composé de deux masses ponctuelles en rotation par rapport à un repère galiléen. Le dispositif est schématisé sur la figure ci-dessous et comporte deux solides :

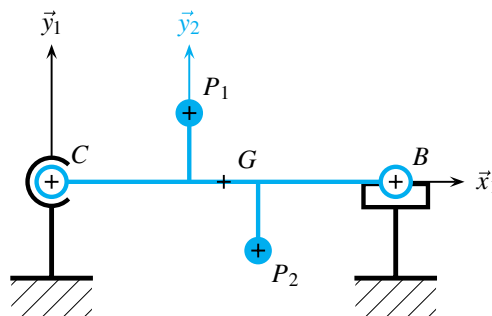


Figure 3.7 Un solide constitué de deux masses ponctuelles.



Que l'on sache ou non résoudre les équations différentielles relève ensuite des mathématiques !

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ que l'on suppose galiléen ;
- un arbre 2 composé de deux masses ponctuelles P_1 et P_2 semblables situées à égales distances de l'axe de rotation.

Cet arbre admet deux liaisons avec le bâti :

- une liaison sphérique de centre C d'une part ;
- une liaison sphère-cylindre de centre B et d'axe (C, \vec{x}_1) d'autre part.

On pose alors :

- $\vec{C}\vec{P}_1 = L_1\vec{x}_2 + R\vec{y}_2$;
- $\vec{C}\vec{P}_2 = L_2\vec{x}_2 - R\vec{y}_2$;
- $\vec{C}\vec{B} = L\vec{x}_2$.

On note de plus m la masse de chacun des points P_i .

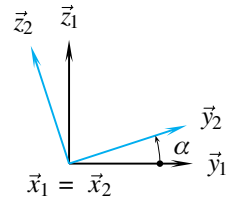
La matrice de l'opérateur d'inertie de l'arbre 2 est alors, exprimée dans la base mobile $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\bar{I}(C, 2) = \begin{bmatrix} 2mR^2 & -mR(L_1 - L_2) & 0 \\ -mR(L_1 - L_2) & m(L_1^2 + L_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(2R^2 + L_1^2 + L_2^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Approche cinématique

La liaison équivalente aux deux liaisons en parallèle entre 2 et 1 est une liaison pivot d'axe (CB) dont on exprime le torseur cinématique

$$\mathcal{V}(2/1) = \mathcal{C} \begin{cases} \dot{\alpha}\vec{x}_1 \\ 0 \end{cases}$$



Quantités d'accélération de 2/1

Le centre d'inertie G de l'arbre 2 est sur l'axe de rotation, donc la résultante dynamique est nulle.

Pour déterminer le moment dynamique, on effectue le calcul au point C , immobile dans le mouvement 2/1

$$\delta(C, 2/1) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(C, 2/1) \right]_1 \text{ avec } \vec{\sigma}(C, 2/1) = \bar{I}(C, 2) \left(\vec{\Omega}(2/1) \right)$$

Comme les deux vecteurs \vec{x}_1 et \vec{x}_2 sont égaux à chaque instant, on obtient pour le vecteur moment cinétique, en posant $A = 2mR^2$ et $F = mR(L_1 - L_2)$

$$\vec{\sigma}(C, 2/1) = A\dot{\alpha}\vec{x}_2 - F\dot{\alpha}\vec{y}_2$$

La dérivation de ce vecteur dans la base 1 donne l'expression du moment dynamique recherché

$$\delta(C, 2/1) = A\ddot{\alpha}\vec{x}_2 - F\ddot{\alpha}\vec{y}_2 - F\dot{\alpha}^2\vec{z}_2$$

Inventaire des actions mécaniques $\bar{2} \rightarrow 2$

Concernant les actions mécaniques, on pose pour les liaisons les différentes composantes inconnues dans la base 1 :



Dans le repère $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, les points P_1 et P_2 ont respectivement pour coordonnées $(L_1, R, 0)$ et $(L_2, -R, 0)$.

- pour la liaison sphérique

$$\mathcal{F}(1_C \rightarrow 2) = {}_C \begin{cases} X_C \vec{x}_1 + Y_C \vec{y}_1 + Z_C \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- pour la liaison sphère-cylindre

$$\mathcal{F}(1_B \rightarrow 2) = {}_B \begin{cases} Y_B \vec{y}_1 + Z_B \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

- un moteur entraîne l'arbre 2 en rotation

$$\mathcal{F}(m \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{0} \\ C_m \vec{x}_1 \end{cases}$$

- la pesanteur agit sur l'arbre 2

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = {}_G \begin{cases} -2mg \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

Application du PFD

L'application du principe fondamental de la dynamique à l'axe 2 dans son mouvement par rapport au bâti 1 se traduit par les six équations scalaires suivantes, une fois l'équation de moment écrite au point C

$$\begin{cases} X_C & = & 0 \\ Y_C + Y_B - 2mg & = & 0 \\ Z_C + Z_B & = & 0 \\ C_m & = & 2mR^2 \ddot{\alpha} \\ -LZ_B & = & mR(L_2 - L_1) (\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) \\ LY_B - mg(L_1 + L_2) & = & mR(L_2 - L_1) (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) \end{cases}$$

Interprétation du résultat

Les deux masses en vis-à-vis

On s'intéresse en première lecture du système d'équations précédent au cas où les deux longueurs L_1 et L_2 sont égales.

On constate que la matrice de l'opérateur d'inertie est alors symétrique et que les actions de liaison ne dépendent que du poids de l'arbre. Les seules composantes non nulles sont Y_B et Y_C :

$$Y_B = 2mg \frac{L_1 + L_2}{2L} \quad Y_C = 2mg \left(1 - \frac{L_1 + L_2}{2L} \right)$$

Les deux masses décalées, en régime permanent

On s'intéresse en deuxième lecture au cas où les deux longueurs L_1 et L_2 sont effectivement différentes.

Dans ces conditions s'ajoutent aux actions mécaniques de liaison précédentes une contribution dynamique due à un produit d'inertie non nul.

On peut comprendre alors que le produit d'inertie non nul exprime un *déséquilibre* dans la répartition de la masse, déséquilibre que l'on peut illustrer à l'aide des deux figures suivantes, tracées dans le plan mobile $(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2)$. On se limite au régime permanent, lorsque $\ddot{\alpha} = 0$.

- on considère tout d'abord les masses seules et on représente les forces centripètes que doit exercer l'arbre sur ces masses pour les faire tourner autour de l'axe



Ce sont les mêmes actions mécaniques que pour le problème de statique, quand l'arbre ne tourne pas !



On se place dans la base mobile 2, car pour une fréquence de rotation donnée, les quantités d'accélération calculées précédemment y sont constantes...

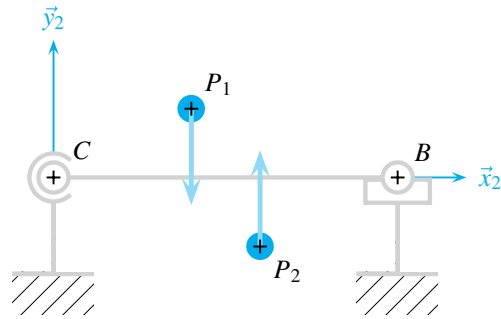


Figure 3.8 Les deux masses ponctuelles seules.

- on considère maintenant l'axe seul, et on remplace les masses par les forces réciproques qu'elles exercent sur l'arbre. Ces deux forces induisent sur l'arbre un couple compensé par les actions de liaison avec le bâti. De ce fait, les actions mécaniques de liaison ne sont plus indépendantes de la fréquence de rotation.

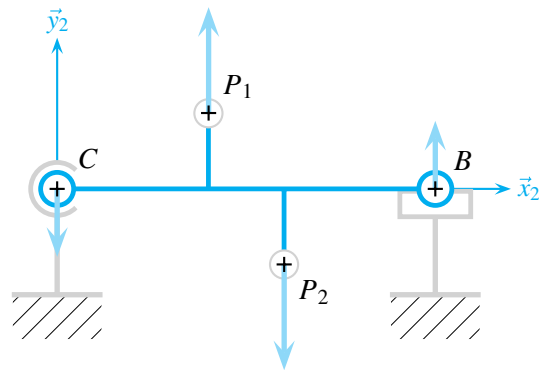


Figure 3.9 L'arbre sans les deux masses.

Principe de l'équilibrage

Définition

Un solide est dit **équilibré** lors de sa rotation autour d'un axe fixe si et seulement si :

- son centre de masse est sur l'axe de rotation ;
- l'axe de rotation est un axe principal d'inertie pour ce solide.

► Équilibrage statique et équilibrage dynamique

Ces deux termes apparaissent couramment dans la littérature :

- l'**équilibrage statique** correspond au centre de gravité sur l'axe de rotation ;
- l'**équilibrage dynamique** à la définition donnée ci-dessus.

La distinction ainsi faite ne présente d'intérêt que lorsque les quantités d'accéléérations sont faibles devant les actions mécaniques constatées. C'est en général le cas de mouvements lents, sans variation brutale... Si on souhaite que le solide en rotation soit en position d'équilibre stable dès que cesse l'action motrice, on peut se contenter de son équilibrage statique.

Il faut néanmoins toujours garder à l'esprit que parler d'« équilibrage d'un solide en rotation » implique *a priori* son équilibrage dynamique.

Si le centre de masse n'est pas sur l'axe de rotation, le solide ne peut être équilibré d'aucune manière !



Ces contraintes s'expriment facilement quand la base vectorielle utilisée contient le vecteur dirigeant l'axe de rotation !

► Conséquences de l'équilibrage dynamique

Les deux conditions d'équilibrage énoncées entraînent des contraintes pour deux des trois coordonnées du centre de masse du solide considéré, et pour deux des trois produits d'inertie de la matrice de l'opérateur d'inertie du solide calculé en un point de l'axe de rotation.

Exemple

On considère un solide S de centre de masse G , équilibré en rotation autour d'un axe (Δ) immobile dans un repère galiléen Rg .

Soient :

- $(Q, \vec{\delta})$ la droite (Δ) , avec Q un point du solide S ;
- $(Q, \vec{\delta}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère attaché au solide ;
- $\vec{QG} = x_G \vec{\delta} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$.
- $\bar{I}(Q, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{\delta}, \vec{y}, \vec{z})}$

On reprend la définition de l'équilibrage donnée :

- le centre de masse G est nécessairement sur l'axe de rotation (Δ) , mais il peut être n'importe où sur cette droite ;

$$\vec{QG} \wedge \vec{\delta} = \vec{0}$$

- il est également nécessaire que l'axe (Δ) soit axe principal d'inertie. Pour le solide S , les quatre équations à vérifier sont alors

$$\begin{cases} y_G = 0 \\ z_G = 0 \\ E = 0 \\ F = 0 \end{cases} \quad (50)$$

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- dynamique ;
- référentiel galiléen ;
- puissance d'une action mécanique ;
- puissance galiléenne, puissance des interefforts ;
- équilibrage.

Je connais :

- l'acronyme PFD ;

- l'énoncé du principe fondamental de la dynamique ;
- les théorèmes de l'énergie cinétique,
 - pour un solide indéformable ;
 - pour un ensemble de deux solides indéformables ;
 - pour un ensemble de n solides indéformables.
- la forme des résultats obtenus pour les mouvements élémentaires, à savoir :
 - translation d'un solide ;
 - rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

Savoir-faire

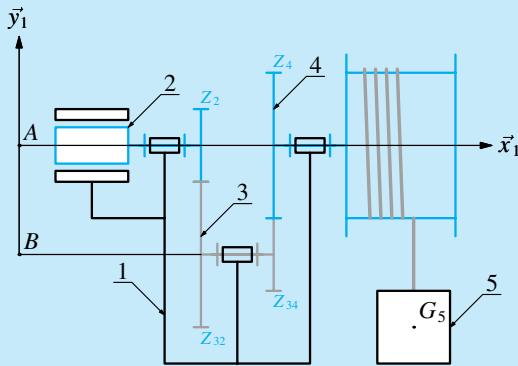
Je sais :

- organiser les calculs de dynamique pour un système de solides indéformables ;
- distinguer la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures de la puissance des interefforts ;
- énoncer les conditions d'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Exercices d'application

3.1 Motorisation d'un treuil

Le treuil équipant un portique industriel comprend la chaîne cinématique décrite sur la figure ci-dessous



Ce mécanisme comprend cinq ensembles :

- un bâti, auquel on attache un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- un arbre moteur 2, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti :
 - il est attaché au rotor du moteur électrique ;
 - il comporte un pignon de Z_2 dents.
- un arbre intermédiaire 3, en liaison pivot d'axe (B, \vec{x}_1) avec le bâti :
 - il comporte un premier pignon, noté 3_2 , de Z_{32} dents en prise avec le pignon 2 ;
 - il comporte un second pignon, noté 3_4 , de Z_{34} dents.
- un tambour 4, en liaison pivot d'axe (A, \vec{x}_1) avec le bâti :
 - il comporte un pignon de Z_4 dents en prise avec le pignon 3_4 ;
 - sur le tambour est enroulé un câble supposé inextensible et sans masse ;
 - le tambour est de rayon noté R .
- une charge soulevée 5 de masse M .

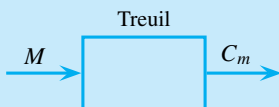
Hypothèses générales pour chacun des arbres 2, 3 et 4 :

- on suppose les liaisons sans frottement ;
- les centres de masse G_i sont sur les axes de rotation ;
- on note J_i leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Données complémentaires :

- on note g l'accélération de la pesanteur orientée suivant $-\vec{y}_1$;
- on note C_m le couple moteur exercé par le stator sur le rotor.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi entrée-sortie $C_m = f(M)$ en vue de dimensionner le moteur électrique.



1. Déterminer la relation entre v_{51} la vitesse de déplacement de la charge par rapport au bâti et ω_{21} la vitesse de rotation du moteur.

2. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ dans son mouvement par rapport au bâti.

3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au mouvement $\Sigma/1$ et en déduire la loi entrée-sortie recherchée.

4. Interpréter les différents termes trouvés.

On suppose maintenant un couple résistant au niveau de la liaison entre le tambour et le bâti. Il est dû à un phénomène de frottement visqueux caractérisé par un coefficient μ .

5. Modifier la loi entrée-sortie précédente en conséquence.

3.2 Portes coulissantes

On considère le système d'ouverture de portes schématisé ci-dessous. Pour la partie opérative, il comprend essentiellement :

- un bâti 1 assimilable à un référentiel galiléen ;
- deux vantaux 2 et 3 semblables, chacun de masse M ;
- un châssis solidaire du vantail 2 ;
- deux poulies 4 et 5, de même rayon R ;
- une courroie crantée comportant les brins rectilignes $6a$ et $6b$;
- un moteur dont le stator est lié au vantail 2 et le rotor à la poulie 4.

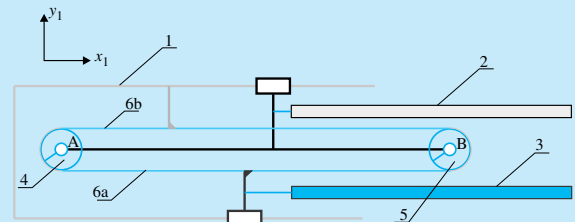
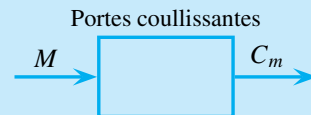


Figure 3.10 Schéma cinématique du système d'ouverture.

Données complémentaires :

- on note g l'accélération de la pesanteur orientée suivant $-\vec{z}_1$;
- on note C_m le couple moteur exercé par le stator sur le rotor.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi entrée-sortie $C_m = f(M)$ en vue d'adapter le moteur électrique aux performances souhaitées.



1. Expliquer le fonctionnement de ce système d'ouverture. Toutes les masses et inerties autres que celles des deux vantaux sont ramenées au rotor du moteur sous la forme d'un moment d'inertie équivalent noté J .

2. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ dans son mouvement par rapport au bâti.

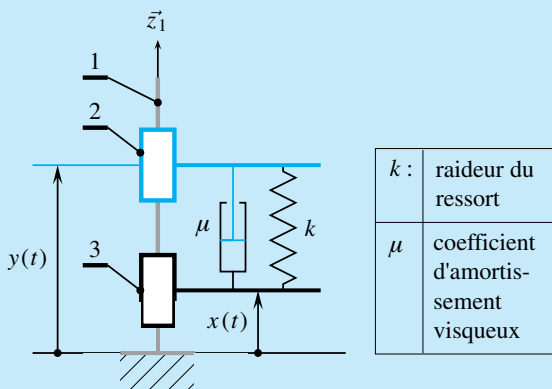
3. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au mouvement $\Sigma/1$ et en déduire la loi entrée-sortie recherchée.

4. Interpréter les différents termes trouvés.

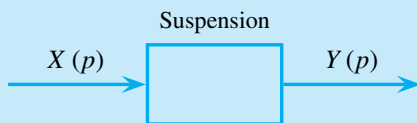
3.3 Principe d'une suspension

La figure ci-dessous propose un schéma de principe d'une suspension. Ce mécanisme comprend :

- un bâti repéré 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ supposé galiléen ;
- le châssis 2, de masse notée m , supposé en liaison glissante de direction \vec{z}_1 avec le bâti ;
- l'élément excitateur 3, que l'on pose en liaison glissière de direction \vec{z}_1 avec le bâti.



On se propose d'établir la fonction de transfert de la suspension



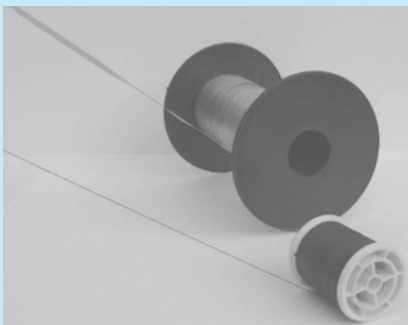
Pour cet objectif, on étudie le mouvement du châssis 2 par rapport à 1, que l'on suppose galiléen.

1. Définir les éléments du milieu environnant.
2. Proposer une stratégie de résolution et modéliser les actions mécaniques en conséquence.
3. Déterminer l'équation différentielle du mouvement.
4. En déduire la fonction de transfert recherchée. Interpréter les différents termes trouvés.

3.4 Bobine de fil

La figure ci-dessous est une photographie de deux bobines, dont on met le brin de fil déroulé sous tension. On observe :

- à l'arrière plan une bobine de ruban pour les emballages cadeaux ;
- à l'avant une bobine de fil pour une machine à coudre.



Expérience initiale

Les deux manipulations proposées peuvent être réalisées chez soi en posant sur une table une bobine semblable à une de celles proposées. Il peut être plus efficace d'utiliser un support recouvert d'une nappe tendue, c'est-à-dire sans pli :

- si le fil est mis en tension verticalement, la bobine se déroule ;
- si le fil est mis en tension horizontalement, la bobine s'enroule.

On se propose d'expliquer les résultats observés, en se limitant d'une part au mouvement plan constaté de la bobine par rapport au support, d'autre part à une mise sous tension sans excès, de manière à conserver le roulement sans glissement de la bobine sur le support.

Description

On modélise le dispositif en posant :

- un support repéré 1, auquel on associe un repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ supposé galiléen, avec le vecteur \vec{y}_1 vertical ascendant ;
- une bobine 2, que l'on assimile à un volume de révolution, posé sur le support, et dont on oriente l'axe de révolution noté (C, \vec{z}_2) suivant \vec{z}_1 :
 - sa masse est notée m ;
 - son centre d'inertie G est supposé sur l'axe de révolution et le moment d'inertie par rapport à ce dernier est noté J ;
 - le rayon extérieur est noté R ;
 - le coefficient de frottement au contact avec le support est noté f .
- un fil 3, que l'on considère tendu et sans masse pour cette étude, et dont le point d'enroulement au rayon r est noté E .

L'accélération de la pesanteur est notée g .

Tout paramètre supplémentaire utile au développement est à poser proprement.

Les questions

On étudie le mouvement de la bobine par rapport au sol supposé assimilable à un repère galiléen.

On s'intéresse dans un premier temps au fil tendu horizontalement.

1. Proposer un schéma du dispositif dans le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.
2. Paramétrer les mouvements observés.
3. Faire l'inventaire des éléments du milieu environnant et poser les actions mécaniques correspondantes.
4. Évaluer les expressions des composantes utiles du torseur dynamique $\mathcal{D}(2/1)$.
5. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer les équations différentielles des mouvements.
6. Déduire des équations trouvées l'expression de l'accélération angulaire de la bobine par rapport au support et commenter le résultat trouvé.
7. Quels seraient les mouvements observés en l'absence de frottement ?

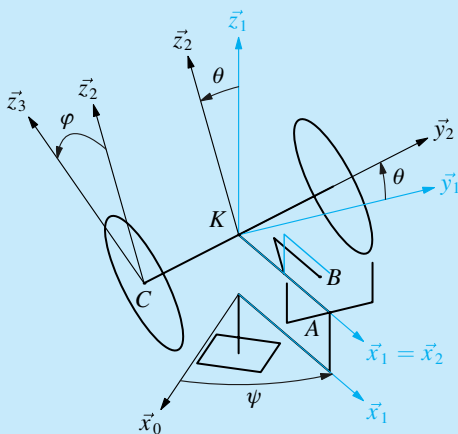
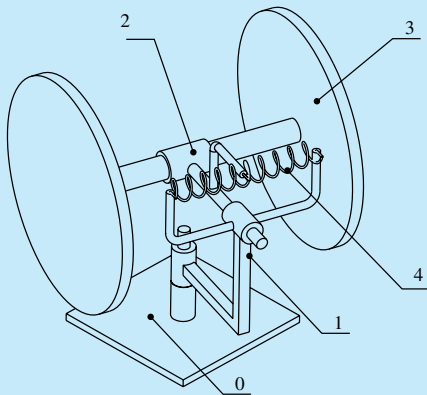
On s'intéresse maintenant au cas où le fil fait un angle α avec le plan horizontal.

8. Proposer un nouveau schéma du dispositif, toujours dans le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$.

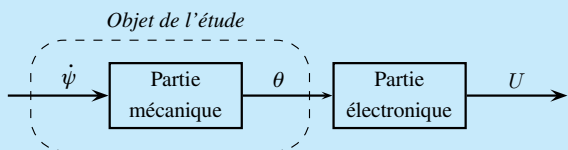
9. Montrer qu'il existe une valeur de l'angle α pour laquelle on peut faire glisser la bobine sur le support sans qu'elle ne tourne.

3.5 Gyromètre mécanique à toupie

Le système schématisé sur les deux figures ci-dessous est un gyromètre, également appelé capteur de vitesse angulaire. C'est un instrument capable de mesurer la vitesse angulaire autour d'un axe. Cet axe est matérialisé ici par une articulation artificiellement ajoutée entre le support 1 et le référentiel supposé galiléen 0.



Le schéma-bloc suivant distingue les parties mécanique et électronique du gyromètre et présente les grandeurs physiques d'entrée et de sortie :



Description de la partie mécanique

• Au support 1 du gyromètre est associé le repère $(K, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\vec{KA} = R\vec{x}_1$.

• La pièce intermédiaire 2 est en liaison pivot d'axe (K, \vec{x}_1) avec le support 1 du gyromètre par l'intermédiaire de roulements à billes. Elle est rappelée dans sa position d'équilibre par deux ressorts identiques 4 de raideur k . On lui associe un repère $(K, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tel que $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$ et on pose $\vec{AB} = h\vec{z}_2$.

L'angle d'inclinaison de la pièce 2 autour de l'axe (K, \vec{x}_1) est noté θ et constitue la grandeur de sortie de la partie mécanique du gyromètre. Il est limité par une butée mécanique à $\pm 9^\circ$.

• La toupie notée 3 est constituée d'un arbre de masse m , de longueur $2L$ et de dimensions transversales négligeables, aux extrémités duquel sont montés deux disques en laiton de masse M , de diamètre D et d'épaisseur négligeable. On lui associe le repère $(K, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et on pose $\vec{KC} = -L\vec{y}_3$. La toupie est entraînée en rotation autour de son axe de révolution (K, \vec{y}_3) par un moteur à courant continu, à une vitesse angulaire uniforme élevée :

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \text{constante}$$

Hypothèses

- Le référentiel 0 est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(K, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- On néglige masse et inertie de l'axe intermédiaire 2 devant ceux de la toupie 3.

Questions

1. Illustrer le paramétrage angulaire donné à l'aide de schémas plans.
2. Établir le graphe des liaisons et caractériser les torseurs cinématiques des mouvements possibles.
3. Caractériser les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites.
4. Pour trouver la loi entrée-sortie recherchée, justifier le choix de l'équation de moment dynamique en K scalaire \vec{x}_2 , issue du PFD appliqué au système $\Sigma = \{2,3\}$ dans son mouvement par rapport au référentiel supposé galiléen 0.
5. Justifier la forme proposée ci-dessous pour la matrice d'inertie de la toupie 3 calculée au point K :

$$\bar{\bar{I}}(K,3) = \begin{bmatrix} I_{Kx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ky} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Kx} \end{bmatrix} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

Déterminer les moments d'inertie I_{Kx} et I_{Ky} en fonction de m, M, D et L .

Applications numériques : $m = 1.5 \text{ g}$; $M = 21 \text{ g}$; $D = 50 \text{ mm}$; $L = 20 \text{ mm}$.

6. Exprimer dans la base 2 le moment dynamique $\delta(K, \Sigma/0)$ en fonction de I_{Kx}, I_{Ky} , des angles ψ, θ, φ et de leurs dérivées successives.

Pour toute la suite du problème, on considère les hypothèses supplémentaires suivantes :

- la vitesse de rotation $\dot{\psi}$ est toujours très petite devant $\dot{\varphi}$;
- l'angle θ reste petit au cours du temps.

7. À l'aide de ces hypothèses, simplifier les composantes dans la base 2 de $\vec{\delta}(K, \Sigma/0)$ et en déduire la valeur de $\vec{x}_2, \vec{\delta}(K, \Sigma/0)$.

8. Déterminer la composante suivant \vec{x}_2 du moment en K des actions mécaniques extérieures appliquées au système Σ , à savoir $\vec{x}_2, \vec{M}(K, \vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$.

9. En déduire la relation entrée-sortie du gyromètre en régime permanent.

10. Pour $\dot{\varphi} = 6200 \text{ tr/min}$, $k = 17 \text{ N/m}$ et $h = 12 \text{ mm}$, déterminer la vitesse maximale mesurable par ce gyromètre.

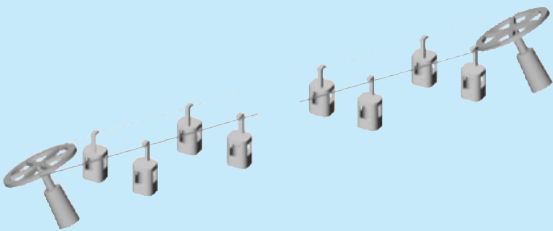
La valeur trouvée justifie-t-elle les hypothèses faites sur θ et $\dot{\psi}$?

Exercices d'approfondissement

3.6 Télécabine. (D'après Mines-Ponts MP-PSI 03)

Une télécabine est un système de transport de personnes permettant un changement d'altitude important dans une zone d'accès difficile, généralement en montagne.

Le système présenté ci-dessous reprend les caractéristiques d'un modèle alpin.

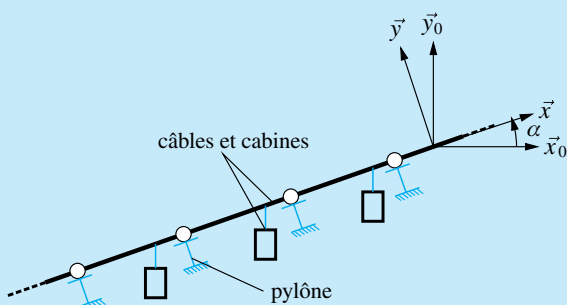


Le système matériel considéré comporte :

- un câble à la fois porteur et tracteur ;
- deux poulies, dont une est motorisée ;
- des cabines montantes, au nombre de $n_c = 10$, supposées remplies de passagers ;
- des cabines descendantes, supposées vides, au nombre de $n_c = 10$ également.

Description géométrique, cinématique et hypothèses simplificatrices

- Les deux brins de câble entre les deux poulies sont supposés rectilignes et de longueur $L = 1200 \text{ m}$;
- l'ensemble des cabines montantes et du brin de câble correspondant est assimilé à un solide en appuis ponctuels avec frottements sur $n_p = 12$ pylônes intermédiaires ;
- on fait la même hypothèse pour l'ensemble des cabines descendantes et du brin de câble correspondant ;



- la pente est caractérisée par un angle $\alpha = 30^\circ$;
- les poulies sont de rayon $R = 4 \text{ m}$;
- le contact des poulies avec le câble est sans raideur en flexion et sans glissement ;
- les contacts d'une poulie avec le sol sont modélisés par une liaison de type pivot sans frottement.

Inventaire des masses en mouvement

- La masse d'une cabine vide est notée $m_c = 1800 \text{ kg}$;
- la masse des passagers d'une cabine est notée $m_p = 2400 \text{ kg}$;
- la masse linéique du câble vaut $\mu = 20 \text{ kg m}^{-1}$;
- la masse des deux poulies est négligée.

Données complémentaires

- Au sol est associé un référentiel supposé galiléen ;
- la pesanteur est caractérisée par $\vec{g} = -g \vec{y}_0$ avec $g = 10 \text{ m s}^{-2}$;
- la poulie motrice est soumise par un motoréducteur à un couple noté C_m ;
- le coefficient de frottement au niveau du contact entre câble et pylône est noté $f = 0.025$.

On cherche à évaluer la puissance motrice maximale nécessaire lors d'un redémarrage en charge de cette installation. La cinématique souhaitée est caractérisée par une accélération constante permettant d'atteindre une vitesse $V_0 = 6 \text{ m s}^{-1}$ en 5 secondes.

1. Comparer la masse de câble enroulée sur une des poulies et la masse d'un des deux brins tendus entre les poulies.
2. Déterminer l'accélération moyenne des cabines lors d'un redémarrage.

On appelle Σ le système matériel constitué de l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au sol.

3. Exprimer l'énergie cinétique galiléenne du système ainsi défini.
4. Exprimer la puissance galiléenne des efforts de pesanteur sur le système Σ .
5. Exprimer la puissance galiléenne des efforts de contact entre pylônes et câbles sur le système Σ .
6. Exprimer la puissance développée par l'action motrice sur Σ .

7. Déterminer l'expression du couple moteur C_m à fournir par le motoréducteur.
8. Déterminer à quel moment du démarrage la puissance apportée par le motoréducteur est maximale.

3.7 Performance d'une moto DUCATI. (D'après X-Ens Cachan PSI 07)

Le support d'étude proposé est la moto DUCATI MONSTER 620 présentée succinctement sur la figure 3.11. Ce véhicule permet à son pilote de se déplacer, en transportant un passager et quelques bagages personnels. Ce moyen de transport est plus léger et plus maniable qu'une voiture et offre des sensations fortes de conduite. Cependant, son utilisation est plus technique et moins sécurisée que celle d'une voiture, et nécessite le passage d'un permis de conduire particulier.

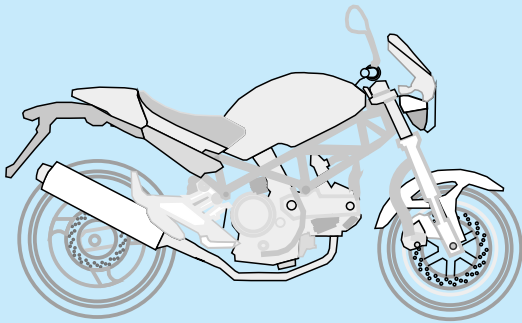


Figure 3.11 Schéma de la moto.

La moto est principalement constituée :

- d'un cadre, qui assure la liaison entre tous les autres composants ;
- d'un ensemble de direction, qui permet d'orienter la roue avant ;
- d'un système de suspension arrière ;
- de deux roues ;
- d'un ensemble motorisé (moteur + boîte de vitesse + transmission), qui entraîne la roue arrière.

Le diagramme partiel des interacteurs de la DUCATI MONSTER 620, représenté sur la figure 3.12, donne une modélisation des interactions de la moto avec quelques éléments du milieu extérieur, pendant une phase de roulage.

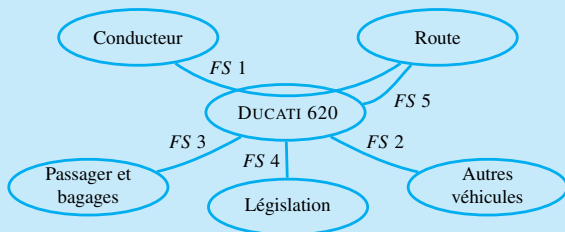


Figure 3.12 Diagramme des interacteurs de la DUCATI MONSTER 620.

L'objectif de cette étude est la validation de la capacité de la DUCATI MONSTER 620 à satisfaire quelques critères de la fonction $FS1$ du cahier des charges de la phase de roulage.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : permettre au conducteur de se déplacer sur la route.	Stabilité	Autonome pour $V > 40$ km/h
	Vitesse	0 – 130 km/h
	Accélération	De 0 à 100 km/h en 5 s
	Distance de freinage	70 m à 100 km/h
	Autonomie avec un plein d'essence, sur autoroute.	200 km
	Dérapiage	Aucun
	Oscillation perçue	Fréquence $f < 5$ Hz à haute vitesse
Temps d'oscillation $t < 3$ s à basse vitesse		
FS2 : s'adapter aux autres véhicules	Collision	Aucune
FS3 : transporter un passager et des bagages	Poids total	100 kg
FS4 : respecter la législation	Norme de pollution	Oui
	Norme de bruit	Oui
FS5 : être en liaison avec la route	Contact permanent des deux roues	Oui

Validation des critères de vitesse, d'accélération et d'autonomie de la fonction FS1

La moto est supposée se déplacer en ligne droite, et l'étude menée est plane. Le modèle d'étude retenu pour cette partie est paramétré ci-dessous et illustré sur les figures 3.13 et 3.14.

$R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0; b_0)$ est un repère, supposé galiléen, lié à la route, tel que \vec{x}_0 soit dirigé suivant la vitesse d'avance de la moto, et \vec{y}_0 soit dirigé suivant la verticale ascendante.

$R_1 = (G; b_0)$ est un repère lié à l'ensemble { cadre de la moto + pilote + ensemble de direction }, de centre de gravité G , de masse $m_1 = 280$ kg.

$R_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) = (O_3; b_3)$ est un repère lié à la roue arrière, de centre O_3 , de masse négligée, tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_0$.

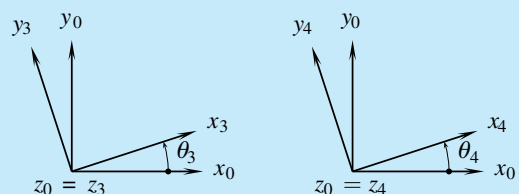


Figure 3.13 Position relative des différentes bases.

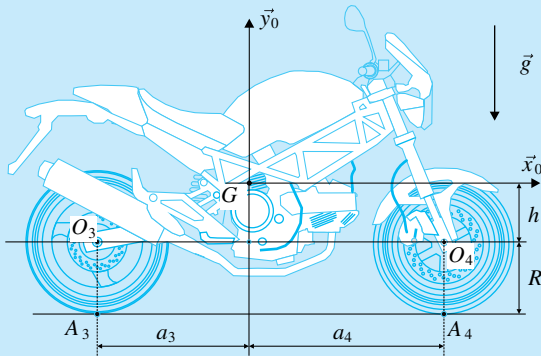


Figure 3.14 Paramétrage retenu pour la DUCATI MONSTER 620.

On pose $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ l'angle de rotation de la roue arrière par rapport à la moto.

$R_4 = (O_4; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4) = (O_4; b_4)$ est un repère lié à la roue avant, de centre O_4 , de masse négligée, tel que $\vec{z}_4 = \vec{z}_0$. On pose $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ l'angle de rotation de la roue avant par rapport à l'ensemble de direction.

On pose

$$\vec{O}_3\vec{G} = a_3\vec{x}_0 + h\vec{y}_0$$

$$\vec{O}_4\vec{G} = a_4\vec{x}_0 + h\vec{y}_0$$

avec $a_3 = 60$ cm, $a_4 = 84$ cm et $h = 20$ cm

La pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

Le contact des roues avec le sol est modélisé par des liaisons ponctuelles avec frottement :

- au point A_3 et de normale \vec{y}_0 pour la roue arrière ;
- au point A_4 et de normale \vec{y}_0 pour la roue avant.

Chaque roue roule sans glisser sur la route au niveau de son point de contact. L'action mécanique exercée par le sol sur les roues est modélisée par

$$\mathcal{F}(sol \rightarrow 3) =_{A_3} \begin{cases} X_3\vec{x}_0 + Y_3\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(sol \rightarrow 4) =_{A_4} \begin{cases} X_4\vec{x}_0 + Y_4\vec{y}_0 \\ 0 \end{cases}$$

On pose $\vec{A}_3\vec{O}_3 = \vec{A}_4\vec{O}_4 = R\vec{y}_0$. Le rayon R vaut $R = 29$ cm pour les pneus de la DUCATI MONSTER 620.

La moto se déplace en translation à la vitesse $\vec{V}(G, 1/0) = V(t)\vec{x}_0$.

1. Déterminer l'accélération constante γ de la moto qui lui permet d'atteindre le critère d'accélération de la fonction $FS1$.
2. En appliquant le théorème du moment dynamique au point O_4 à 4, en projection sur \vec{z}_0 , déterminer X_4 .
3. En appliquant le PFD à $\{1 + 3 + 4\}$, exprimer X_3 , Y_3 et Y_4 en fonction de γ et des données.
4. Montrer que la roue avant ne décolle pas du sol lors de l'accélération.

5. Le coefficient de frottement entre le pneu arrière et la route est $f = 0,8$. Montrer que le pneu arrière ne patine pas lors de l'accélération. Conclure quant à la capacité de la DUCATI MONSTER 620 à satisfaire le critère d'accélération de la fonction $FS1$.

Les caractéristiques du moteur de la DUCATI MONSTER 620 sont les suivantes :

Régime (tr mn ⁻¹)	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
Puissance plein gaz(W)	18,3	23,6	28,9	34,2	39,5	44,8	45,3

Le rapport primaire en entrée de boîte de vitesse diminue la vitesse angulaire du moteur d'un facteur $\frac{33}{61}$. Pour la 6^e vitesse, la plus haute sur cette moto, la boîte de vitesse augmente la vitesse angulaire d'un facteur $\frac{26}{24}$. Enfin, la chaîne de transmission entre la boîte de vitesse et la roue arrière diminue la vitesse angulaire d'un facteur $\frac{15}{48}$. On néglige les pertes de puissance entre le moteur et la roue arrière.

La puissance absorbée par la traînée et la résistance au roulement des pneumatiques de la DUCATI MONSTER 620 est égale à $K_r V(t)^3$, avec $K_r = 0,38 \text{ W s}^3 \text{ m}^{-3}$.

6. En supposant que la puissance plein gaz fournie par le moteur est quasiment constante pour un régime supérieur à 8000 tr min⁻¹, déterminer la vitesse maximale de la DUCATI MONSTER 620. Conclure quant à sa capacité à satisfaire le critère de vitesse de la fonction $FS1$.

7. On suppose que la moto se déplace en 6^e sur une autoroute, à 130 km h⁻¹. Déterminer le régime et la puissance délivrée par le moteur. Sachant qu'à ce régime, le moteur a besoin de 360 g kW⁻¹ h⁻¹ d'essence, ($\rho_{essence} = 760 \text{ kg m}^{-3}$), déterminer la consommation de la moto en litres pour 100 km effectués.

8. Le réservoir a une capacité de 14 litres. Déterminer la distance que peut parcourir la DUCATI MONSTER 620 avec un plein, et conclure quant à sa capacité à satisfaire le critère d'autonomie de la fonction $FS1$.

Validation du critère de stabilité de la fonction $FS1$

À basse vitesse, la stabilité de la moto est assurée par le pilote, qui ajuste constamment l'orientation de son guidon. Par contre, à plus de 40 km h⁻¹, la moto doit être stable, c'est-à-dire qu'elle doit naturellement revenir en position verticale dès qu'elle s'en écarte.

Seule l'inclinaison gauche/droite de la moto est considérée. Le balancement avant/arrière dû aux amortisseurs et à un grand angle de rotation de la roue avant est négligé, car on se place proche de la position d'équilibre.

Le modèle d'étude retenu pour cette partie est paramétré ci-dessous et illustré sur les figures 3.15 et 3.16 :

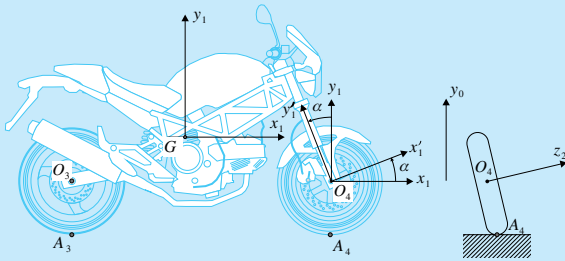


Figure 3.15 Paramétrage retenu pour la Ducati Monster 620.

$R_0 = (O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) = (O_0; b_0)$ est un repère, supposé galiléen, lié à la route, avec \vec{x}_0 dirigé suivant la vitesse d'avance principale de la moto, et \vec{y}_0 suivant la verticale ascendante.

$R_1 = (G; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = (G; b_1)$ est un repère lié à l'ensemble {cadre de la moto + pilote}, de centre de gravité G , tel que $\vec{x}_1 = \vec{x}_0$. On pose $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle d'inclinaison gauche/droite de la moto.

$b'_1 = (\vec{x}'_1, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$ est une base telle que $\vec{z}'_1 = \vec{z}_1$. On pose $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}'_1) = (\vec{y}_1, \vec{y}'_1)$ l'angle de chasse de la moto. α est un angle constant positif de valeur 24° sur la DUCATI MONSTER 620.

$b_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est une base liée à l'ensemble de direction, telle que $\vec{y}_2 = \vec{y}'_1$. On pose $\varphi = (\vec{x}'_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}'_1 = \vec{z}_2)$ l'angle de rotation du guidon de la moto.

$R_3 = (O_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) = (O_3; b_3)$ est un repère lié à la roue arrière, de centre de gravité O_3 , tel que $\vec{z}_3 = \vec{z}_1$. On pose $\theta_3 = (\vec{x}_1, \vec{x}_3) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$ l'angle de rotation de la roue arrière par rapport à la moto.

$R_4 = (O_4; \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4) = (O_4; b_4)$ est un repère lié à la roue avant, de centre de gravité O_4 , tel que $\vec{z}_4 = \vec{z}_2$. On pose $\theta_4 = (\vec{x}_2, \vec{x}_4) = (\vec{y}_2, \vec{y}_4)$ l'angle de rotation de la roue avant par rapport à l'ensemble de direction.

Les données mécaniques de chaque composant de la moto sont les suivantes :

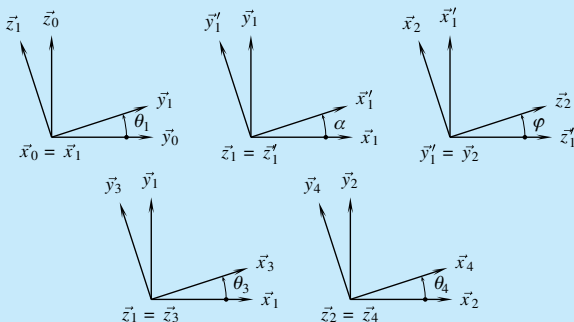


Figure 3.16 Position relative des différentes bases.

Cadre de la moto + pilote	
Centre de gravité G Masse m_1 $m_1 = 280 \text{ kg}$	$\bar{I}(G, 1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & 0 \\ -F_1 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{b_1}$
Ensemble de direction	
Masse et inertie négligées devant celles du cadre	
Roue arrière	
Centre de gravité O_3 avec $\vec{O}_3\vec{G} = a_3\vec{x}_1 + h\vec{y}_1$ Masse m_3 $a_3 = 60 \text{ cm}, h = 20 \text{ cm}$ $m_3 = 7.5 \text{ kg}$	$\bar{I}(O_3, 3) = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{b_3}$
Roue avant	
Centre de gravité O_4 avec $\vec{O}_4\vec{G} = -a_4\vec{x}_1 + h\vec{y}_1$ Masse m_4 $a_3 = 84 \text{ cm}, h = 20 \text{ cm}$ $m_3 = 7.5 \text{ kg}$	$\bar{I}(O_4, 4) = \begin{pmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \end{pmatrix}_{b_4}$

La pesanteur est notée $\vec{g} = -g\vec{y}_0$.

Le contact des roues avec le sol est modélisé par des liaisons ponctuelles avec frottement :

- au point A_3 et de normale \vec{y}_0 pour la roue arrière ;
- au point A_4 et de normale \vec{y}_0 pour la roue avant.

Les actions mécaniques exercées par le sol sur les roues sont modélisées par

$$\mathcal{F}(sol \rightarrow 3) = A_3 \begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(sol \rightarrow 4) = A_4 \begin{Bmatrix} \vec{R}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Tous les calculs sont à mener proches de l'équilibre de la moto : les angles θ_1 et φ , ainsi que leurs dérivées, sont supposés petits.

On conserve $\vec{A}_3\vec{O}_3 = \vec{A}_4\vec{O}_4 = R\vec{y}_0$, avec $R = 29 \text{ cm}$ pour les pneus de la DUCATI MONSTER 620.

La moto est animée d'une part d'un mouvement de translation uniforme de direction \vec{x}_0 par rapport à R_0 , et d'autre part d'un mouvement de rotation d'angle θ_1 autour de (A_3, \vec{x}_0) . La vitesse de G , proche de l'équilibre, est donc $\vec{V}(G, 1/0) = V\vec{x}_0 + (R + h)\dot{\theta}_1\vec{z}_0$.

9. Justifier la forme des trois matrices d'inerties. Déterminer A_4 et C_4 si on suppose que la roue avant est un cercle de rayon R et de masse m_4 . Effectuer les applications numériques.

10. Exprimer, à l'ordre 0 au voisinage de l'équilibre, $\vec{V}(A_3, 3/0)$ et $\vec{V}(A_4, 4/0)$ dans la base b_0 . Montrer que l'expression du roulement sans glissement des roues sur la route aux points A_3 et A_4 conduit à $\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_4 = \text{constante}$. Préciser la valeur de cette constante.

11. Déterminer, au voisinage de l'équilibre, la projection sur \vec{x}_0 des moments dynamiques $\vec{\delta}(A_3, 1/0)$, $\vec{\delta}(A_3, 2/0)$,

$\vec{\delta}(A_3,3/0)$ et $\vec{\delta}(A_3,4/0)$. Montrer que l'équation du moment dynamique au point A_3 , appliqué à $\{1+2+3+4\}$, en projection sur \vec{x}_0 s'écrit :

$$J_{\theta_1}\ddot{\theta}_1 - J_{\varphi}\ddot{\varphi} - C_4\frac{V}{R}\dot{\varphi}\cos\alpha = m_{eq}(R+h)g\theta_1$$

où les constantes J_{θ_1} , J_{φ} et m_{eq} sont à exprimer.

12. À partir de l'équation précédente, justifier qualitativement l'existence de l'effet gyroscopique sur une moto : à haute vitesse, pour incliner la moto à droite, il faut donner une impulsion au guidon en rotation à gauche.

L'équation du moment dynamique au point O_4 , appliquée à l'ensemble $\{2+4\}$, en projection sur \vec{y}_2 , permet de démontrer l'équation suivante :

$$-A_4\sin\alpha\ddot{\theta}_1 + C_4\frac{V}{R}\cos\alpha\dot{\theta}_1 + A_4\ddot{\varphi} = 0$$

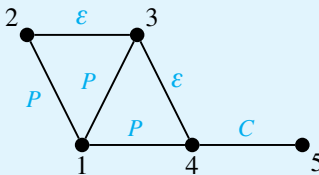
13. À partir des équations précédentes, déterminer l'expression analytique de la vitesse au delà de laquelle la moto est stable. Effectuer l'application numérique et conclure quant à la capacité de la DUCATI MONSTER 620 à satisfaire le critère de stabilité de la fonction $FS1$.

Solutions des exercices

Exercices d'application

3.1

1. Ce mécanisme comporte 5 solides et 6 liaisons et on trace le graphe des liaisons.



P	Pivot
ε	Engrenage
C	Câble

On reconnaît dans ce graphe deux chaînes fermées de type « pivot – pivot – engrenage », pour lesquelles on sait trouver une relation entre les vitesses de rotation au niveau des liaisons de type pivot.

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{31}} = -\frac{Z_{34}}{Z_4} \quad \frac{\omega_{31}}{\omega_{21}} = -\frac{Z_2}{Z_{32}}$$

On en déduit l'expression du rapport de transmission

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4}$$

Pour la chaîne ouverte 4 – 5, on fait l'hypothèse que le mouvement de la charge suspendue par rapport au bâti est une translation suivant \vec{y}_1 . On admet alors la relation élémentaire

$$v_{51} = +R\omega_{41}$$

On obtient en définitive comme loi entrée-sortie

$$v_{51} = +R \frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \omega_{21}$$

2. On décrit le système Σ comme un ensemble de solides indéformables et l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques évaluées pour chacun des solides

$$E(\Sigma/1) = \sum_{i=2}^5 E(i/1)$$

Il y a quatre termes à calculer, pour lesquels on exploite les relations cinématiques précédentes :

• l'arbre moteur 2 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(2/1) = \frac{1}{2} J_2 \omega_{21}^2$$

• l'arbre intermédiaire 3 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(3/1) = \frac{1}{2} J_3 \omega_{31}^2 = \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{Z_2}{Z_{32}} \right)^2 \omega_{21}^2$$

• le tambour 4 est en rotation autour d'un axe immobile dans le repère 1 ;

$$E(4/1) = \frac{1}{2} J_4 \omega_{41}^2 = \frac{1}{2} J_4 \left(\frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \right)^2 \omega_{21}^2$$

• la charge 5 est en mouvement de translation par rapport au bâti 1.

$$E(5/1) = \frac{1}{2} M v_{51}^2 = \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \right)^2 \omega_{21}^2$$

On en déduit l'expression générale de l'énergie cinétique

$$E(\Sigma/1) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(J_2 + J_3 \left(\frac{Z_2}{Z_{32}} \right)^2 + J_4 \left(\frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \right)^2 + M R^2 \left(\frac{Z_{34}Z_2}{Z_{32}Z_4} \right)^2 \right)}_{J_{eq}} \omega_{21}^2$$

Cette expression montre l'intérêt de poser immédiatement J_{eq} le moment d'inertie équivalent à l'ensemble des pièces mobiles, ramené à l'arbre moteur. Ce moment ne dépend que de paramètres d'inertie et géométriques. L'énergie cinétique s'exprime alors simplement

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_{21}^2$$

3. Le bâti 1 est assimilé à un repère galiléen et on exprime le théorème de l'énergie cinétique appliqué au mouvement $\Sigma/1$

$$\frac{d}{dt} E(\Sigma/1) = \sum_i P g(\vec{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{k>i} P(k \leftrightarrow i)$$

On dénombre tout d'abord les termes concernant la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à Σ :

• les trois liaisons de type pivot avec le bâti, supposées sans frottement ;

$$P g(1 \rightarrow 2) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 3) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 4) = 0$$

• la pesanteur sur chacun des quatre solides :

– les centres de masse G_2 , G_3 et G_4 sont respectivement sur les axes de rotation des mouvements 2/1, 3/1 et 4/1 ;

$$P g(p \rightarrow 2) = 0$$

$$P g(p \rightarrow 3) = 0$$

$$P g(p \rightarrow 4) = 0$$

– la charge 5 est en mouvement de translation rectiligne suivant \vec{y}_1 .

$$P g(p \rightarrow 5) = -M g v_{51}$$

• le couple moteur exercé par le stator sur le rotor.

$$P g(m \rightarrow 2) = C_m \omega_{21}$$

On dénombre ensuite les termes concernant la puissance des interefforts :

- les transmissions par engrenage sont supposées sans frottement ;

$$P(2 \leftrightarrow 3) = 0$$

$$P(3 \leftrightarrow 4) = 0$$

- la transmission par câble est supposée ne pas dissiper d'énergie.

$$P(4 \leftrightarrow 5) = 0$$

On somme tous ces termes en mettant ω_{21} en facteur et on dérive l'énergie cinétique pour arriver à l'expression

$$J_{eq} \dot{\omega}_{21} \omega_{21} = \left(C_m - MgR \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} \right) \omega_{21}$$

La simplification du terme ω_{21} est possible et l'expression finale du couple moteur est :

$$C_m = \underbrace{MgR \frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4}}_{(a)} + \underbrace{J_{eq} \dot{\omega}_{21}}_{(b)}$$

4. Le couple moteur est la somme de deux composantes :

- le terme (a) représente le couple moteur nécessaire pour le maintien de l'équilibre ;
- le terme (b) représente le couple supplémentaire à fournir pour accélérer le mouvement.

5. Le phénomène de frottement est pris en compte au niveau de la liaison entre le tambour 4 et le bâti 1 :

- le calcul de l'énergie cinétique n'est pas modifié ;
- pour le calcul de la puissance, seul le terme $Pg(1 \rightarrow 4)$ est à reprendre.

Comme on n'est plus dans un cas élémentaire, il est utile de détailler le calcul à faire à partir de l'expression générale de la puissance galiléenne de l'action mécanique $1 \rightarrow 4$

$$Pg(1 \rightarrow 4) = \mathcal{F}(1 \rightarrow 4) \otimes \mathcal{V}(4/1)$$

On s'intéresse aux torseurs :

- le torseur cinématique est inchangé ;

$$\mathcal{V}(4/1) =_{G_4} \left\{ \begin{array}{l} \omega_{41} \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

- le torseur des actions mécaniques transmissibles par la liaison évolue. Il comporte maintenant six composantes non nulles et on caractérise celle qui est due au frottement

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 4) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 4) \\ \vec{M}(G_4, 1 \rightarrow 4) \end{array} \right., \text{ avec } \vec{M}(G_4, 1 \rightarrow 4) \cdot \vec{x}_1 = -\mu \omega_{41}$$

L'expression à prendre en compte pour la puissance est alors

$$Pg(1 \rightarrow 4) = -\mu \omega_{41}^2$$

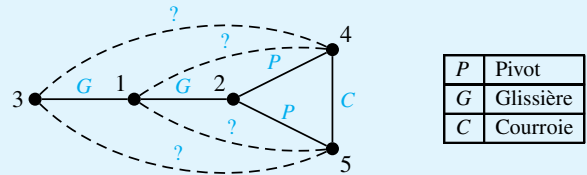
On en déduit la nouvelle expression issue de l'application du théorème de l'énergie cinétique

$$C_m = \underbrace{\frac{Z_{34} Z_2}{Z_{32} Z_4} (MgR + \mu \omega_{21})}_{(a)} + \underbrace{J_{eq} \dot{\omega}_{21}}_{(b)}$$

L'interprétation des deux termes reste inchangée.

3.2

1. Ce mécanisme comporte 5 solides et le graphe des liaisons est inhabituel.



En effet, le vantail 3 est accroché au brin de la courroie 6a, et le bâti 1 au brin 6b. Si on suppose les deux brins tendus et inextensibles, ils se comportent vis à vis des vantaux comme des câbles. On adopte en conséquence ce modèle.

On paramètre les mouvements des deux portes 2 et 3 par rapport au bâti 1

$$\mathcal{V}(2/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ u_{21} \vec{x}_1 \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(3/1) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ u_{31} \vec{x}_1 \end{array} \right.$$

On paramètre les mouvements des deux poulies 4 et 5 par rapport au châssis 2

$$\mathcal{V}(4/2) =_A \left\{ \begin{array}{l} \omega_{42} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right. \quad \mathcal{V}(5/2) =_B \left\{ \begin{array}{l} \omega_{52} \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right.$$

Sur la chaîne fermée 2-4-5-2, les axes de rotation des poulies sont immobiles par rapport au châssis 2 et on a alors la loi élémentaire

$$\frac{\omega_{52}}{\omega_{42}} = 1$$

Pour la suite de l'exercice, on pose $\omega_{42} = \omega$.

On regarde maintenant ce qu'il se passe au niveau des points d'enroulement, sur la poulie 4 par exemple, et on raisonne sur le mouvement 4/1, issu de la composition de 4/2 et 2/1.

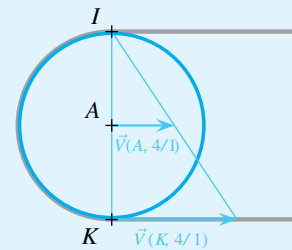


Figure 3.17 Les vecteurs vitesse aux points d'enroulement I et K.

Le vecteur vitesse $\vec{V}(I, 4/1)$ est orienté par le vecteur \vec{x}_1

$$\begin{aligned} \vec{V}(I, 4/1) &= \vec{V}(I, 4/2) + \vec{V}(I, 2/1) \\ &= (-R\omega + u_{21}) \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Le brin 6b de la courroie est accroché au bâti et tendu suivant \vec{x}_1 , on en déduit que le point d'enroulement I est immobile dans le mouvement 4/1

$$\vec{V}(I, 4/1) = \vec{0}$$

Le vecteur vitesse du point A est connu

$$\vec{V}(A, 4/1) = u_{21} \vec{x}_1 = R\omega \vec{x}_1$$

On en déduit par changement de point sur le mouvement 4/1 le vecteur vitesse au point K

$$\vec{V}(K,4/1) = 2u_{21}\vec{x}_1 = 2R\omega\vec{x}_1$$

Le brin $6a$ de la courroie est accroché au vantail 3 et tendu suivant \vec{x}_1 , on en déduit

$$\vec{V}(K,3/1) = \vec{V}(K,4/1)$$

Par substitution, on trouve l'expression de la vitesse de déplacement u_{31}

$$u_{31}\vec{x}_1 = 2u_{21}\vec{x}_1 = 2R\omega\vec{x}_1$$

En position ouverte, les deux vantaux se trouvent superposés du même côté du seuil. Lors de la fermeture, la porte 3 avance par rapport au bâti 1 deux fois plus que la porte 2.

2. L'énergie cinétique du système Σ dans son mouvement par rapport au bâti 1 s'exprime comme la somme des énergies cinétiques de chacun de ses composants

$$E(\Sigma/1) = \sum_i E(i/1)$$

Avec les données de l'énoncé, il y a trois termes à évaluer :

- le vantail 2 est en mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti ;

$$E(2/1) = \frac{1}{2}Mu_{21}^2 = \frac{1}{2}M(R\omega)^2$$

- le vantail 3 est en mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti ;

$$E(3/1) = \frac{1}{2}Mu_{31}^2 = \frac{1}{2}M(2R\omega)^2$$

- la seule variable cinématique du problème est ω que l'on met en facteur de tous les termes supplémentaires

$$E(\{4,5\}/1) = \frac{1}{2}J\omega^2$$

On en déduit l'expression de l'énergie cinétique totale

$$E(\Sigma/1) = \frac{1}{2} \underbrace{(J + 5MR^2)}_{J_{eq}} \omega^2$$

On note J_{eq} le moment d'inertie total $J + 5MR^2$ ramené à l'arbre moteur, en remarquant que la porte 3 a une influence quatre fois plus importante que la porte 2.

3. Le bâti 1 est assimilé à un repère galiléen et on exprime le théorème de l'énergie cinétique appliqué au mouvement $\Sigma/1$

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/1) = \sum_i P g(\vec{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{k>i} P(k \leftrightarrow i)$$

On dénombre tout d'abord les termes concernant la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à Σ :

- la pesanteur, qui n'intervient pas dans ce problème ;
- les deux liaisons de type glissière avec le bâti, supposées sans frottement ;

$$P g(1 \rightarrow 2) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 3) = 0$$

- l'action du brin $6b$ sur les poulies.

$$P g(1 \rightarrow 4) = 0$$

$$P g(1 \rightarrow 5) = 0$$

On dénombre ensuite les termes concernant la puissance des interefforts :

- le couple moteur, exercé par le stator $2s$ sur le rotor $4m$;

$$P g(2s \leftrightarrow 4r) = C_m \omega$$

- la transmission par câble, supposée ne pas dissiper d'énergie.

$$P(4 \leftrightarrow 5) = 0$$

On somme tous ces termes en mettant ω en facteur et on dérive l'énergie cinétique pour arriver à l'expression

$$J_{eq} \dot{\omega} = C_m \omega$$

La simplification du terme ω est possible et l'expression finale du couple moteur est :

$$C_m = (J + 5MR^2) \dot{\omega}$$

- 4. Le couple moteur n'est utile que pour la mise en mouvement des portes.

3.3

1. Pour l'étude du mouvement 2/1, le milieu environnant comprend quatre éléments :

- le bâti 1, par l'intermédiaire de la liaison glissière ;
- la pesanteur p ;
- le ressort r ;
- l'amortisseur a .

Le PFD fournit un système de 6 équations scalaires et on compte 5 inconnues de liaison.

2. La loi du mouvement est obtenue en évitant les cinq inconnues scalaires de la liaison glissière. On s'intéresse donc à l'équation de résultante obtenue par l'application du PFD à 2/1, scalaire \vec{z}_1

$$m\vec{A}(G,2/1) \cdot \vec{z}_1 = \vec{R}(\vec{2} \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_1 \quad (1)$$

On s'intéresse pour commencer aux quantités d'accélération et on exprime la résultante dynamique

$$m\vec{A}(G,2/1) = m\ddot{y}\vec{z}_1$$

On s'intéresse ensuite aux actions mécaniques, pour lesquelles il suffit de modéliser les résultantes des torseurs correspondants, et on reprend l'inventaire précédent pour cela :

- la pesanteur ;

$$\vec{R}(p \rightarrow 2) = -mg\vec{z}_1$$

- le ressort, dont la force de rappel s'exprime en fonction de la longueur courante $l = y - x$ et la longueur à vide a ;

$$\vec{R}(r \rightarrow 2) = -k(y - x - a)\vec{z}_1$$

- l'amortisseur, pour lequel intervient la vitesse relative de la tige par rapport au corps.

$$\vec{R}(a \rightarrow 2) = -\mu\vec{V}(P,2/3)$$

Une composition des vitesses permet de détailler $\vec{V}(P,2/3)$

$$\vec{V}(P,2/3) = \vec{V}(P,3/1) - \vec{V}(P,2/1) = (\dot{y} - \dot{x})\vec{z}_1$$

3. Après substitution des différentes termes dans l'équation (1), on obtient la première forme de ce que l'on cherche

$$m\ddot{y} = -mg - k(y - x - a) - \mu(\dot{y} - \dot{x})$$

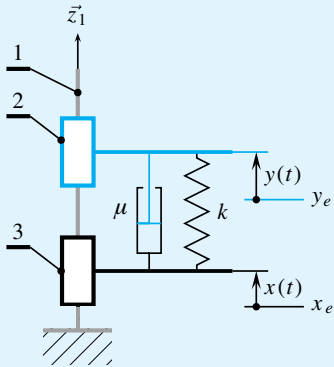
À l'équilibre, on a en particulier

$$0 = -mg - k(y_e - x_e - a)$$

La soustraction membre à membre de ces deux dernières équations permet d'écrire

$$m\ddot{y} = -k((y - y_e) - (x - x_e)) - \mu(\dot{y} - \dot{x})$$

On prend comme origines x_e et y_e respectivement pour x et y , interprétation du changement de variables à effectuer



On obtient ainsi la forme finale de l'équation différentielle du mouvement

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + ky = \mu\dot{x} + kx \quad (2)$$

4. On suppose les conditions initiales nulles et on applique la transformée de LAPLACE à l'équation (2) pour obtenir

$$mp^2Y(p) + \mu pY(p) + kY(p) = \mu pX(p) + kX(p)$$

Le comportement de cette suspension est décrit par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\mu p + k}{mp^2 + \mu p + k}$$

On constate que cette dernière est de la forme

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

3.4

Cet exercice est facile lorsque l'on met en œuvre méthode et rigueur. Chaque concept nécessaire est abordé de manière élémentaire. Il s'agit de faire la synthèse des différentes compétences du mécanicien.

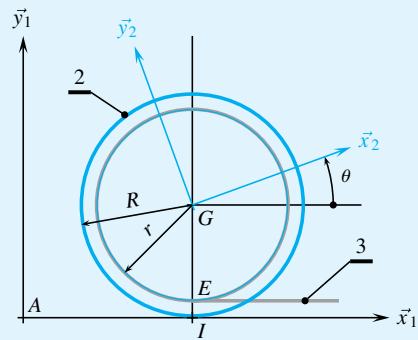
1. Le schéma est demandé dans le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$. On choisit d'orienter le brin tendu du fil suivant $+\vec{x}_1$ (voir figure ci-contre).

2. On s'intéresse au seul mouvement plan constaté et on pose

$$\mathcal{V}(2/1) = G \begin{cases} \dot{\theta} \vec{z}_1 \\ \dot{x} \vec{x}_1 \end{cases}$$

Si le mouvement observé est du roulement sans glissement au point I , alors on a de plus

$$\vec{V}(I, 2/1) = \vec{0}$$



Dans ce dernier cas, la formule de changement de point sur le mouvement 2/1 permet de trouver

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}$$

3. L'inventaire du milieu environnant $\bar{2}$ conduit à retenir :

- le sol 1 ;
- la pesanteur p ;
- le fil 3.

On pose alors les torseurs d'actions mécaniques transmissibles correspondants :

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = I \begin{Bmatrix} N\vec{y}_1 + T\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \text{ avec } \left| \frac{T}{N} \right| \leq f$$

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G \begin{Bmatrix} -mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(3 \rightarrow 2) = E \begin{Bmatrix} F\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}, \text{ avec } F \geq 0$$

4. On évalue les éléments de réduction du torseur dynamique $\mathcal{D}(2/1)$ au centre d'inertie G de la bobine.

• pour la résultante dynamique :

$$m\vec{A}(G, 2/1) = m \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G, 2/1) \right]_0 = m\ddot{x}\vec{x}_1$$

• pour la composante suivante \vec{z}_1 du moment dynamique au centre d'inertie :

$$\vec{z}_1 \cdot \vec{\delta}(G, 2/1) = \vec{z}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt} \vec{I}(G, 2) (\vec{\Omega}(2/1)) \right]_0 = J\ddot{\theta}$$

5. On étudie le mouvement de la bobine par rapport au support supposé assimilable à un repère galiléen. Le principe fondamental de la dynamique s'exprime alors par

$$\mathcal{F}(\bar{2} \rightarrow 2) = \mathcal{D}(2/1)$$

On obtient alors un système de trois équations à cinq inconnues

$$\begin{cases} F + T & = m\ddot{x} \\ N - mg & = 0 \\ RT + rF & = J\ddot{\theta} \end{cases}$$

Ce système d'équations est à compléter avec la relation cinématique calculée tant que l'on a roulement sans glissement

$$\dot{x} = -R\dot{\theta}$$

6. On trouve en conséquence comme expression pour l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{-F(R - r)}{J + mR^2}$$

Sachant qu'à l'instant initial la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est nulle, ce résultat entraîne plusieurs commentaires :

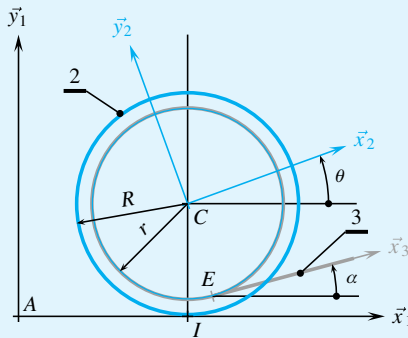
- la mise en rotation n'a lieu que si le rayon d'enroulement r est plus petit que le rayon extérieur R ;
- comme $r < R$ et $F \geq 0$, l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est négative. On en déduit que la bobine enroule le fil que l'on tend ;
- le terme $J + mR^2$ correspond au moment d'inertie de la bobine par rapport à l'axe (I, \vec{z}_1) ;
- il est possible de calculer l'accélération maximale possible pour qu'il n'y ait pas de glissement.

7. Si on suppose le contact sans frottement, la composante tangentielle T est nulle et le système d'équations issu du PFD devient

$$\begin{cases} F & = & m\ddot{x} \\ N - mg & = & 0 \\ rF & = & J\ddot{\theta} \end{cases}$$

Les deux accélérations \ddot{x} et $\ddot{\theta}$ sont de même signe, la bobine se met à glisser et le fil se déroule.

8. On pose pour la suite un angle α entre l'horizontale et la direction du fil.



9. L'expérience effectuée permet d'affirmer que la valeur recherchée pour l'angle α existe. En effet, la bobine enroule le fil pour $\alpha = 0$ et le déroule pour $\alpha = 90^\circ$. Lorsque l'on passe continuellement de la première valeur à la seconde, on va observer une position pour laquelle la bobine ne tourne plus. La solution se détermine à partir du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} F \cos \alpha + T & = & m\ddot{x} \\ F \sin \alpha + N - mg & = & 0 \\ RT + rF & = & J\ddot{\theta} \end{cases}$$

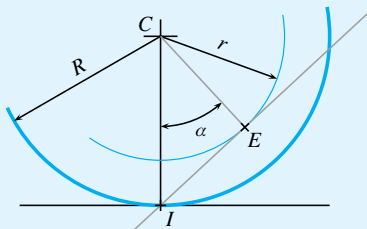
On en déduit

$$\ddot{\theta} = \frac{-F(R \cos \alpha - r)}{J + mR^2}$$

La valeur recherchée pour l'angle α est telle que

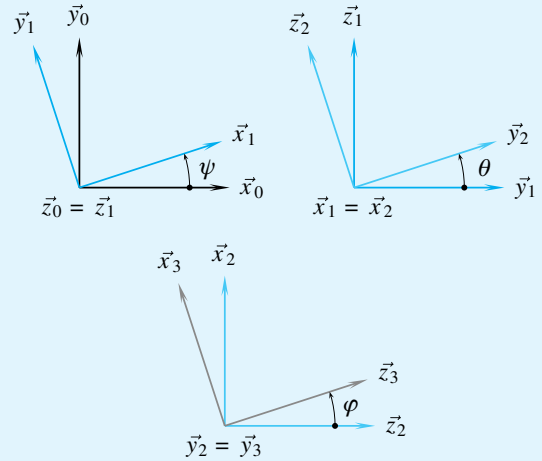
$$\cos \alpha = \frac{r}{R}$$

Cette valeur correspond au prolongement du fil passant par le point I

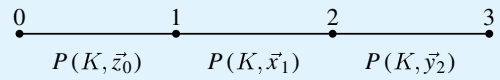


3.5

1. On trace les figures de définition des angles



2. Graphe des liaisons



$$\mathcal{V}(1/0) = \begin{matrix} \dot{\psi} \vec{z}_0 \\ \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ \dot{\theta} \vec{x}_1 \\ 0 \end{matrix} \quad \mathcal{V}(2/1) = \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{x}_1 \\ \dot{\theta} \vec{y}_1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\mathcal{V}(3/2) = \begin{matrix} \dot{\phi} \vec{y}_2 \\ \dot{\phi} \vec{x}_3 \\ 0 \end{matrix}$$

3. Torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons supposées parfaites.

$$\mathcal{F}(0 \rightarrow 1) = \begin{cases} \vec{R}(0 \rightarrow 1) \\ \vec{M}(K, 0 \rightarrow 1), \text{ avec } \vec{M}(K, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(1 \rightarrow 2) = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(K, 1 \rightarrow 2), \text{ avec } \vec{M}(K, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \begin{cases} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(K, 2 \rightarrow 3), \text{ avec } \vec{M}(K, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0 \end{cases}$$

4. Les différents mouvements possibles à étudier peuvent être détaillés dans un tableau. Les actions de la pesanteur et de l'air sont négligées dans cette étude.

Mvts	Milieu environnant	Inconnues de liaison	Inconnues autres	Commentaire
2/0	- Support 1 - Toupie 3 - Moteur - Ressorts	10	2	Pas d'équation scalaire évitant les dix inconnues de liaison
3/0	- Axe 2 - Moteur	5	1	Utile pour déterminer le couple moteur avec l'équation de moment en K scalaire \vec{y}_2 ou \vec{y}_3
{2,3}/0	- Support 1 - Ressorts	5	1	Équation de moment en K scalaire \vec{x}_1 ou \vec{x}_2

Ajouter le support 1 à ce tableau ne présente aucun intérêt, car le transfert d'énergie provoquant son mouvement dans le référentiel galiléen est d'origine inconnue.

5. Matrice d'inertie de la toupie 3 calculée au point K

$$\bar{I}(K,3) = \begin{bmatrix} I_{Kx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ky} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Kx} \end{bmatrix} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

Moments d'inertie I_{Kx} et I_{Ky} en fonction de m , M , D et L .

La toupie 3 est une pièce de révolution d'axe (K, \vec{y}_3) , donc la forme proposée convient dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, de même que dans toute base construite à partir du vecteur \vec{y}_3 . La liaison pivot entre 2 et 3 impose l'égalité des vecteurs \vec{y}_2 et \vec{y}_3 à chaque instant, donc la forme proposée convient dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

Concernant le calcul des moments d'inertie principaux :

- l'axe est une tige de masse m et de longueur $2L$ orientée par \vec{y}_2 . On en déduit les deux valeurs

$$A_{Ky} = 0 \quad A_{Kx} = m \frac{L^2}{3}$$

- en ne considérant qu'un seul des deux disques, de centre C , de diamètre D et de masse M , on a comme résultat élémentaire

$$B_{Cy} = \frac{1}{2} M \frac{D^2}{4} \quad B_{Cx} = \frac{1}{4} M \frac{D^2}{4}$$

À l'aide du théorème de HUYGENS, on en déduit

$$B_{Ky} = B_{Cy} = \frac{1}{8} M D^2$$

$$B_{Kx} = B_{Cx} + M L^2 = M \left(L^2 + \frac{D^2}{16} \right)$$

Comme la toupie est composée d'un axe et de deux disques, on en déduit les deux valeurs recherchées

$$I_{Ky} = M \frac{D^2}{4} \quad I_{Kx} = m \frac{L^2}{3} + M \left(2L^2 + \frac{D^2}{8} \right)$$

Applications numériques :

$$I_{Ky} = 1,31 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \quad I_{Kx} = 2,36 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

6. La masse et l'inertie de la pièce intermédiaire 2 étant négligeables devant celles de la toupie 3, on en déduit l'égalité des deux moments dynamiques

$$\bar{\delta}(K, \Sigma/0) = \bar{\delta}(K, 3/0)$$

Le point K étant fixe dans le référentiel galiléen, on a

$$\bar{\delta}(K, 3/0) = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}(K, 3/0) \right]_0$$

La toupie 3 est un solide indéformable et le point K est toujours immobile dans le référentiel galiléen, on a donc

$$\vec{\sigma}(K, 3/0) = \bar{I}(K, 3) \left(\vec{\Omega}(3/0) \right)$$

Il suffit donc de déterminer la valeur du vecteur rotation $\vec{\Omega}(3/0)$ dans la base 2 pour lancer les calculs

$$\vec{\Omega}(3/0) = \dot{\varphi} \vec{y}_2 + \dot{\theta} \vec{x}_1 + \dot{\psi} \vec{z}_0$$

$$= \dot{\theta} \vec{x}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) \vec{y}_2 + \dot{\psi} \cos \theta \vec{z}_2$$

On obtient ainsi, tout calcul fait :

$$\bar{\delta}(K, \Sigma/0) =$$

$$\begin{aligned} & \left[-I_{Ky} \dot{\psi} \cos \theta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) + I_{Kx} (\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta) \right] \vec{x}_2 \\ & + I_{Ky} (\ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{y}_2 \\ & + \left[I_{Kx} \dot{\theta} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta) + I_{Kx} (\ddot{\psi} \cos \theta - 2\dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta) \right] \vec{z}_2 \end{aligned}$$

7. Pour un angle θ petit devant 1, les approximations usuelles sont $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$. De plus, pour un taux de rotation $\dot{\psi}$ petit devant $\dot{\varphi}$, le terme $\dot{\psi} \sin \theta$ est négligeable devant $\dot{\varphi}$.

$$\bar{\delta}(K, \Sigma/0) \approx \left[-I_{Ky} \dot{\psi} \dot{\varphi} + I_{Kx} (\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \theta) \right] \vec{x}_2$$

$$+ I_{Ky} (\ddot{\psi} \theta + \dot{\psi} \dot{\theta}) \vec{y}_2$$

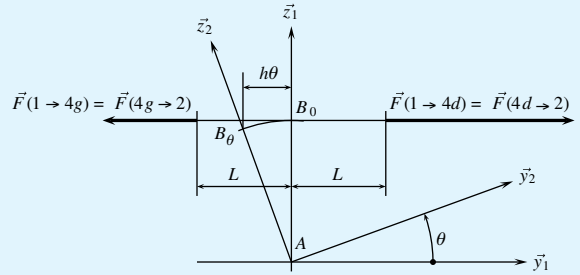
$$+ \left[I_{Kx} \dot{\theta} \dot{\varphi} + I_{Kx} (\ddot{\psi} - 2\dot{\psi} \dot{\theta}) \right] \vec{z}_2$$

On en déduit la composante du moment dynamique recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \bar{\delta}(K, \Sigma/0) = -I_{Ky} \dot{\psi} \dot{\varphi} + I_{Kx} (\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \theta) \quad (3)$$

8. Le seul moment suivant \vec{x}_2 appliqué au système est issu de l'action mécanique du ressort 4 sur l'axe 2.

Au point B sont accrochés deux ressorts, de longueur à vide L_0 , de longueur au repos L . Le point B se déplace d'une longueur $h\theta$, approximation de $h \tan \theta$.



Pour un ressort, la force de rappel est proportionnelle à la différence entre la longueur courante et la longueur à vide.

$$\vec{F}(4g \rightarrow 2) = -k ((L - h\theta) - L_0) \vec{y}_1$$

$$\vec{F}(4d \rightarrow 2) = -k ((L + h\theta) - L_0) (-\vec{y}_1)$$

On en déduit l'expression de la force de rappel due aux deux ressorts

$$\vec{F}(4 \rightarrow 2) = \vec{F}(4g \rightarrow 2) + \vec{F}(4d \rightarrow 2) = 2kh\theta \vec{y}_1$$

Le torseur des actions mécaniques $\mathcal{F}(4 \rightarrow 2)$ est alors un glisseur d'expression

$$\mathcal{F}(4 \rightarrow 2) = \begin{Bmatrix} 2kh\theta \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On en déduit la valeur de la composante recherchée

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{M}(K, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = -2kh^2 \theta \quad (4)$$

9. Les équations 3 et 4 permettent d'écrire la loi du mouvement.

$$-I_{Ky} \dot{\psi} \dot{\varphi} + I_{Kx} (\ddot{\theta} + \dot{\psi}^2 \theta) = -2kh^2 \theta$$

En régime permanent, l'angle θ se stabilise à une valeur qui dépend des fréquences de rotation $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$, constantes

$$\theta = \frac{I_{Ky} \dot{\psi} \dot{\varphi}}{2kh^2 + I_{Kx} \dot{\psi}^2}$$

En supposant de plus le terme $I_{Kx}\dot{\psi}^2$ négligeable devant $2kh^2$, la loi entrée-sortie recherchée prend une forme linéaire

$$\theta = \frac{I_{Ky}\dot{\varphi}}{2kh^2} \dot{\psi} \quad (5)$$

10. Avec les valeurs numériques données, le terme $I_{Kx}\dot{\psi}^2$ reste inférieur à 1 % du terme $2kh^2$ jusqu'à une valeur pour le taux de rotation $\dot{\psi}$ de 1,4 rd/s. [13,3 tr/mn]

La relation 5 donne

$$\dot{\psi}_{MAX} = \frac{2kh^2}{I_{Ky}\dot{\varphi}} \theta_{MAX}$$

On effectue l'application numérique

$$\dot{\psi}_{MAX} = 0,09 \text{ rd/s } [0,86 \text{ tr/mn}]$$

Ce dernier résultat justifie les hypothèses posées.

Exercices d'approfondissement

3.6

Pour expliciter les calculs, on note :

- le sol 1, supposé galiléen ;
- tout ce qui monte 2, de masse totale m_2 ;
- tout ce qui descend 3, de masse m_3 ;
- la poulie et le brin de câble enroulé aval 4 ;
- la poulie et le brin de câble enroulé amont 5.

1. La masse de câble enroulé m_e est évaluée à partir du demi-périmètre d'une des poulies

$$m_e = \mu\pi R \quad \text{A.N. } m_e \approx 250 \text{ kg}$$

La masse d'un des deux brins tendus m_b s'évalue à partir de la longueur de la ligne

$$m_b = \mu L \quad \text{A.N. } m_b = 24\,000 \text{ kg}$$

La masse de câble enroulé représente environ un pour cent de la masse totale et peut être négligée.

2. L'accélération moyenne a des cabines lors d'un redémarrage s'exprime en fonction de la variation de vitesse demandée

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \text{A.N. } a = 1,2 \text{ ms}^{-2}$$

3. L'énergie cinétique galiléenne du système matériel $\Sigma = \{2,3,4,5\}$ est la somme des énergies cinétiques galiléennes de chacun des éléments

$$E(\Sigma/R_g) = \sum_{i=2}^5 E(i/R_g)$$

En tenant compte de l'évaluation des masses faite précédemment, on retient uniquement

- ce qui monte, en translation rectiligne et de masse m_2 ;

$$m_2 = n_c(m_c + m_p) + \mu L$$

- ce qui descend, en translation rectiligne et de masse m_3 .

$$m_3 = n_c m_c + \mu L$$

On en déduit, en notant v la vitesse de translation courante

$$E(\Sigma/R_g) = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) v^2$$

4. La puissance galiléenne des efforts de pesanteur sur le système Σ comprend deux termes que l'on détaille :

- l'ensemble 2 considéré *solide* des masses qui montent ;

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v\vec{x} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 2) = G_2 \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- l'ensemble 3 considéré *solide* des masses qui descendent.

$$\mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -v\vec{x} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(p \rightarrow 3) = G_3 \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On en déduit l'expression de la puissance galiléenne des efforts de pesanteur sur le système Σ

$$Pg(p \rightarrow \Sigma) = (-m_2 + m_3)g \sin \alpha v$$

Après substitution, on obtient

$$Pg(p \rightarrow \Sigma) = -n_c m_p g \sin \alpha v$$

5. Soient M_k et D_k respectivement les points de contact entre le pylône P_k et les câbles 2 et 3. Il y a glissement à chaque point de contact et on constate

- pour les masses montantes :

$$\mathcal{V}(2/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v\vec{x} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(P_k \rightarrow 2) = M_k \begin{Bmatrix} N_{mk}\vec{y} - f N_{mk}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- pour les masses descendantes :

$$\mathcal{V}(3/1) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -v\vec{x} \end{Bmatrix} \quad \mathcal{F}(P_k \rightarrow 3) = D_k \begin{Bmatrix} N_{dk}\vec{y} + f N_{dk}\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

La puissance galiléenne développée par les actions mécaniques de l'ensemble des pylônes P sur le brin de câble montant est alors

$$Pg(P \rightarrow 2) = \sum_{k=1}^{12} -vf N_{mk} = -vf \sum_{k=1}^{12} N_{mk}$$

La puissance galiléenne développée par les actions mécaniques de l'ensemble des pylônes P sur le brin de câble descendant est alors

$$Pg(P \rightarrow 3) = \sum_{k=1}^{12} -vf N_{dk} = -vf \sum_{k=1}^{12} N_{dk}$$

Les résultantes des actions mécaniques normales s'évaluent à partir des équations de résultante dynamique obtenues respectivement lors de l'étude des mouvements 2/1 et 3/1 :

- concernant le mouvement 2/1 ;

$$\sum_{k=1}^{12} N_{mk} - m_2 g \vec{y}_0 \cdot \vec{y} = 0$$

- concernant le mouvement 3/1 ;

$$\sum_{k=1}^{12} N_{dk} - m_3 g \vec{y}_0 \cdot \vec{y} = 0$$

On en déduit l'expression de la puissance galiléenne développée par l'action mécanique de l'ensemble des pylônes P sur les câbles 2 et 3

$$Pg(P \rightarrow \{2,3\}) = -f(m_2 + m_3)g \cos \alpha v$$

6. L'action motrice est au niveau de la poulie sur laquelle est installé le motoréducteur. Comme cette poulie est en liaison pivot avec le sol, l'axe de rotation est immobile dans le repère galiléen. On en déduit l'expression élémentaire de la puissance galiléenne de l'action du motoréducteur sur la poulie concernée

$$Pg(m \rightarrow \Sigma) = C_m \frac{v}{R}$$

7. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système Σ dans son mouvement par rapport au sol s'exprime par

$$\frac{d}{dt}E(\Sigma/1) = \sum_i Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow i) + \sum_{k>i} P(i \leftrightarrow k)$$

Concernant la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures $Pg(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma)$, on rappelle les trois termes déjà estimés et on évalue le quatrième en reprenant les éléments du milieu environnant :

- la pesanteur ;

$$Pg(p \rightarrow \Sigma) = -n_c m_p g \sin \alpha v$$

- le moteur ;

$$Pg(m \rightarrow \Sigma) = C_m \frac{v}{R}$$

- les pylônes ;

$$Pg(P \rightarrow \Sigma) = -f(m_2 + m_3)g \cos \alpha v$$

- le sol par l'intermédiaire des deux liaisons de type pivot avec les poulies.

$$Pg(1 \rightarrow \Sigma) = 0$$

Concernant la puissance des interefforts, le câble est supposé ne pas dissiper d'énergie et les termes à considérer sont alors nuls

$$P(4 \leftrightarrow 2) = 0$$

$$P(5 \leftrightarrow 2) = 0$$

$$P(4 \leftrightarrow 3) = 0$$

$$P(5 \leftrightarrow 3) = 0$$

L'expression du théorème de l'énergie cinétique est alors

$$(m_2 + m_3)v\dot{v} = -n_c m_p g \sin \alpha v - f(m_2 + m_3)g \cos \alpha v + C_m \frac{v}{R}$$

On en déduit l'expression du couple moteur C_m

$$C_m = R \left((m_2 + m_3)\dot{v} + n_c m_p g \sin \alpha + f(m_2 + m_3)g \cos \alpha \right)$$

8. L'accélération est supposée constante en phase de démarrage, ce qui implique un couple moteur également constant. La puissance développée par le motoréducteur est alors maximale juste au moment où la vitesse atteint la valeur V_0 . On en déduit le résultat cherché

$$P_{Max} = C_m \frac{V_0}{R}$$

Applications numériques :

$$C_m = 1.1 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

$$P_{Max} = 1.6 \text{ MW}$$

3.7

Les éléments de correction de cet exercice sont disponibles sur <http://www.jdotec.fr>

Plan

4.1	Systemes commandes, asservis – Perturbations	122
4.2	Stabilité des systemes asservis	130
4.3	Notion de pôles dominants	139
	Exercices d'application	142
	Exercices d'approfondissement	145
	Solutions des exercices	157

Introduction

Un des souhaits de l'ingénieur est de mettre au point et de proposer des systemes cumulant toutes les qualités possibles, qu'ils soient notamment :

- rapides et précis ;
- fiables et insensibles à l'environnement.

C'est pourquoi le passage d'un système commandé à un système asservi est attractif : il permet effectivement d'en modifier et d'en améliorer les performances globales. Seul souci notable, c'est qu'un des effets de la course à la performance est la tendance à rendre le système concerné instable. La compréhension de cet enchaînement mérite la plus grande attention, car une des conséquences remarquables des techniques mises en œuvre est la capacité nouvelle à concevoir des systèmes qui, instables en tant que systèmes commandés, profitent d'une commande capable de réagir à l'environnement pour se comporter en systèmes stables une fois asservis.

C'est pour pouvoir découvrir au chapitre suivant l'art du contrôle des systèmes que ce chapitre pose des éléments de référence afin de comprendre :

- la structure et la finalité d'un système asservi ;
- la problématique de la stabilité d'un système.

Dans le cadre de cet ouvrage, on se limite à l'étude des systèmes continus, linéaires et invariants.

Prérequis

- Les chapitres 9 et 10 de l'ouvrage de première année.
- Un minimum de bon sens.
- Les théorèmes énergétiques étudiés au chapitre 3 pour quelques exercices.

Objectifs

- Décrire la structure d'un système asservi.
- Différencier les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée.
- Émettre un avis sur la stabilité d'un système, asservi ou non.
- Appréhender la notion de mode dominant.

4.1 Systèmes commandés, asservis – Perturbations

4.1.1 Notion de système commandé

Les systèmes abordés dans cet ouvrage sont principalement des servomécanismes, donc des systèmes générant une grandeur mécanique.

Il est commode de nommer **système commandé** tout système auquel un utilisateur délivre une grandeur d'entrée en vue de générer une grandeur de sortie. Les systèmes utilisés en tant que systèmes commandés sont généralement stables.

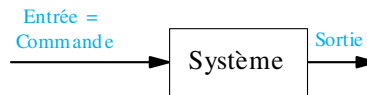


Figure 4.1 De la commande à la grandeur générée.

La plupart du temps, les systèmes physiques ne sont pas des systèmes monovariables et des entrées différentes de la commande viennent perturber leur fonctionnement. En conséquence, la sortie est modifiée et ne correspond plus à la grandeur attendue pour une entrée donnée. On appelle alors perturbation toute entrée non fournie par l'utilisateur.

Définition

On appelle **perturbation** toute cause susceptible de modifier la sortie indépendamment de la commande.

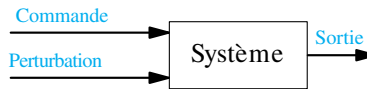


Figure 4.2 Le système commandé comme système multi-variables.

4.1.2 Modélisation des perturbations

Pour prendre en compte une perturbation, on cherche à décrire un système sous la forme d'un schéma-bloc de la forme qui suit, $F_1(p)$ et $F_2(p)$ étant des fonctions de transfert caractérisant le système :

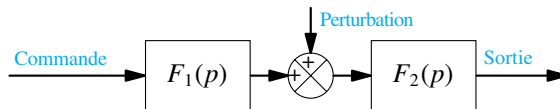


Figure 4.3 Principe de modélisation d'une perturbation.

Exemple

On considère comme système un moteur à courant continu. Un tel moteur constitue un système commandé intrinsèquement stable. Il transforme une tension $U(p)$ en une vitesse de rotation $\Omega(p)$.



La notion de stabilité est définie à la section 4.2.

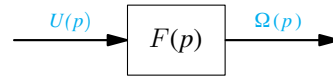


Figure 4.4 Un moteur électrique à courant continu.

L'analyse des lois physiques décrivant les phénomènes rencontrés et la mise en place des équations différentielles caractérisant le fonctionnement du moteur permettent, en négligeant les perturbations et les frottements, d'arriver au schéma-bloc de la figure 4.5. Les différentes grandeurs variables sont exprimées ici dans le domaine symbolique :

- $I(p)$ est l'intensité traversant le moteur ;
- $C_m(p)$ le couple moteur, exercé par le stator sur le rotor ;
- $E(p)$ la force contre-électromotrice induite.

Par ailleurs, les caractéristiques intrinsèques au moteur sont :

- R et L respectivement la résistance et l'inductance de la bobine ;
- K_t la constante de couple, issue du coefficient de couplage électromagnétique ;
- J le moment d'inertie équivalent rapporté à l'arbre moteur ;
- K_e la constante de force électromotrice.

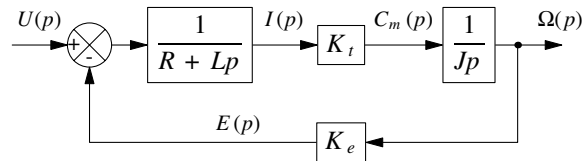


Figure 4.5 Description par schéma-bloc des équations différentielles régissant le fonctionnement.

La fonction de transfert de ce moteur est alors

$$F(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K_t}{(R + Lp)Jp + K_t K_e}$$

On souhaite maintenant modéliser un couple résistant $C_r(p)$ exercé sur l'arbre moteur. Il dépend de la charge et reste indépendant de la tension d'alimentation. À ce titre, il peut être considéré comme une perturbation. En complétant les équations précédentes, on arrive alors à la proposition de schéma-bloc suivante

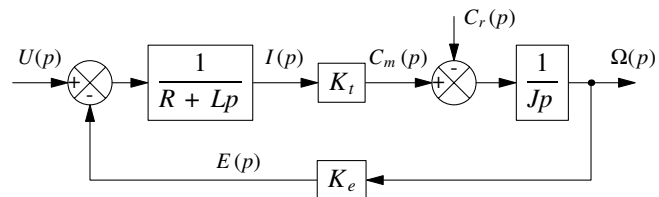


Figure 4.6 Prise en compte du couple résistant sur l'arbre moteur.

La résolution de la boucle est effectuée en appliquant le principe de superposition et on obtient

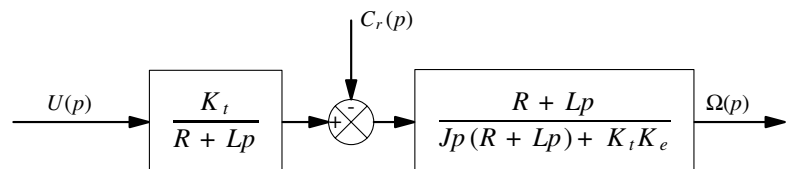


Figure 4.7 Résolution de la boucle.



Un couple résistant compté positif freine l'arbre moteur. Cette influence se retrouve sur le signe des soustracteurs des figures 4.6 et 4.7, ainsi que sur les courbes réponses de la figure 4.8.



Sans perturbation, il est *a priori* inutile d'asservir un système !



Homogène à la grandeur surveillée, une consigne est fonctionnelle !

Le système peut être considéré comme un système à deux entrées pour une sortie, et la sortie dépend de chacune des deux entrées ce que montre la réponse temporelle d'un tel système sur la figure 4.8 :

- un échelon de tension d'alimentation $u(t)$ est appliqué au moteur à l'instant $t = 0$;
- une fois le régime permanent atteint, un échelon de couple résistant $C_r(t)$ est appliqué, ce qui provoque une variation de la fréquence de rotation $\omega(t)$.

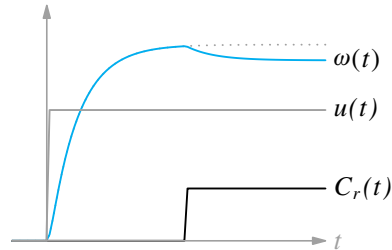


Figure 4.8 Influence d'un couple résistant sur la fréquence de rotation.

4.1.3

Du système commandé au système asservi

On souhaite rendre un système insensible aux perturbations. Pour cela, l'idée directrice est de rendre la commande du système indépendante de l'utilisateur, qu'elle puisse s'adapter aux variations de sortie dues aux perturbations. On arrive ainsi à la notion de système asservi.

Définition

On appelle **système asservi** un système dont la commande est générée de manière autonome, indépendamment de l'utilisateur, à partir d'une référence et d'images de la sortie effective ou de grandeurs internes.

Il est nécessaire de commencer par exprimer ce que l'on souhaite en sortie, sous la forme d'une grandeur de préférence homogène à la grandeur de sortie. Cette grandeur prend dans ce cas le nom particulier de consigne.

Définition

On appelle **consigne** le signal envoyé au système asservi. Elle est homogène à la grandeur de sortie et définit la sortie souhaitée.

On ajoute ensuite un capteur de manière à obtenir une information sur l'état de la sortie. Cette information, image de la sortie, est alors comparée à une image de la consigne pour fournir une grandeur appelée **écart**. C'est à partir de cet écart qu'est élaborée la commande du système, par un bloc particulier nommé le plus souvent correcteur, parfois régulateur.

Définition

On appelle **correcteur** le bloc qui génère la commande du système à la place de l'utilisateur.

Une modification du correcteur se traduit par une modification des performances globales du système asservi, sans avoir à modifier le système commandé. Cet aspect est détaillé au chapitre suivant.

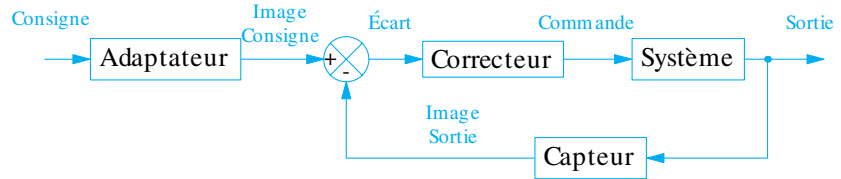


Figure 4.9 Schéma de principe d'un système asservi, sans perturbation.

Les principaux éléments que l'on trouve dans un système asservi sont représentés sur la figure 4.9 :

- le système commandé, qui transforme la commande en grandeur de sortie ;
- un bloc correcteur, qui élabore la commande à partir du signal appelé écart ;
- un comparateur, qui détermine l'écart entre les images de la consigne et de la sortie ;
- un capteur, qui fournit une image de la sortie ;
- un adaptateur, qui fournit une image de la consigne.

La prise en compte d'une perturbation conduit le plus souvent à un schéma-bloc de la forme suivante :

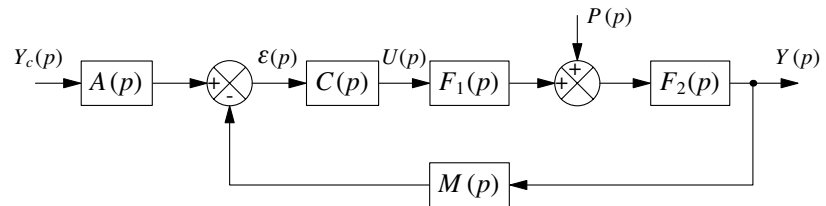


Figure 4.10 Schéma type d'un système asservi, avec une perturbation.

Sur un tel schéma-bloc, on retrouve les éléments définis jusqu'ici :

- la grandeur de sortie $Y(p)$, et la consigne $Y_c(p)$ correspondante ;
- la commande $U(p)$, générée à partir de l'écart $\varepsilon(p)$ entre les images de la consigne et de la grandeur de sortie effective ;
- les deux blocs du système commandé, de fonctions de transfert $F_1(p)$ et $F_2(p)$;
- le correcteur, de fonction de transfert $C(p)$;
- le capteur et l'adaptateur, de fonctions de transfert respectives $M(p)$ et $A(p)$.

Règle d'usage

D'une manière générale, lorsque l'on souhaite la consigne homogène à la sortie d'un asservissement, on ajoute un bloc adaptateur ayant comme valeur de gain celle du gain statique de la fonction de transfert de la chaîne de retour.

Exemple

On reprend l'exemple du moteur électrique de la section précédente, tel qu'il est présenté figure 4.7 page 123. On pose $F_1(p) = \frac{K_t}{R+Lp}$ et $F_2(p) = \frac{R+Lp}{Jp(R+Lp)+K_t K_e}$.

Pour une raison non précisée ici, on souhaite asservir ce moteur électrique afin d'obtenir une vitesse de rotation en sortie $\omega(t)$ égale à une vitesse de rotation de consigne $\omega_c(t)$.

On installe à cet effet une génératrice tachymétrique de gain K pour obtenir une tension $u_R(t)$ image de la sortie $\omega(t)$. Cette tension ne peut pas être comparée directement à la consigne $\omega_c(t)$. Il est donc nécessaire d'ajouter un adaptateur pour générer une tension $u_c(t)$ comparable à $u_R(t)$. La tension de commande $u(t)$ du

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais la réciproque n'est pas vraie. Un système bouclé n'est pas nécessairement un système asservi, comme l'illustre la figure 4.6 page 123.

Pour pouvoir être comparées, deux grandeurs doivent être homogènes !

moteur est élaborée à partir de l'écart $\varepsilon(t)$ par un bloc correcteur. Un tel système est caractérisé par deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que

$$\Omega(p) = H_1(p) \Omega_c(p) + H_2(p) C_r(p)$$

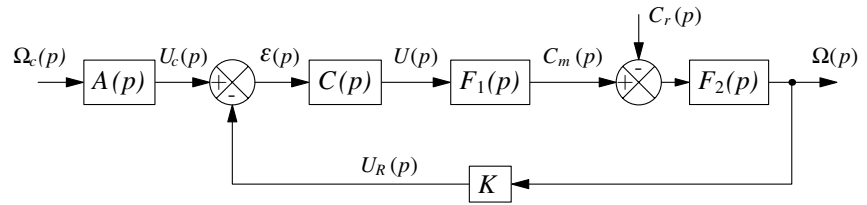


Figure 4.11 Schéma du moteur asservi en rotation avec un couple résistant comme perturbation.

La figure 4.12 montre un exemple de correction permettant d'annuler l'effet de la perturbation en régime permanent.

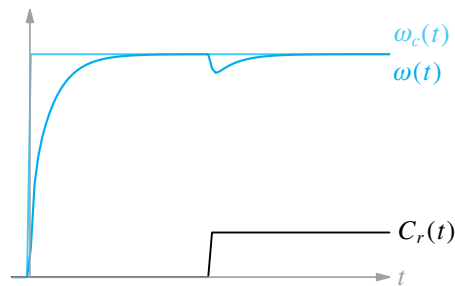


Figure 4.12 Influence d'un couple résistant sur la fréquence de rotation.

4.1.4 Boucle ouverte – boucle fermée

On considère un système monovariante asservi que l'on pose sous la forme caractéristique de la figure 4.13. Il comporte :

- un système commandé de fonction de transfert $F_S(p)$, générant la grandeur de sortie $Y(p)$ à partir de la commande $U(p)$;
- un correcteur de fonction de transfert $C(p)$, générant la commande $U(p)$ à partir de l'écart $\varepsilon(p)$;
- un soustracteur générant l'écart $\varepsilon(p)$ à partir de l'image $R_c(p)$ de la consigne et de l'image $R(p)$ de la sortie ;
- un capteur de fonction de transfert $M(p)$, générant l'image $R(p)$ à partir de la sortie $Y(p)$;
- un adaptateur de fonction de transfert $A(p)$, générant l'image $R_c(p)$ à partir de la consigne $Y_c(p)$.

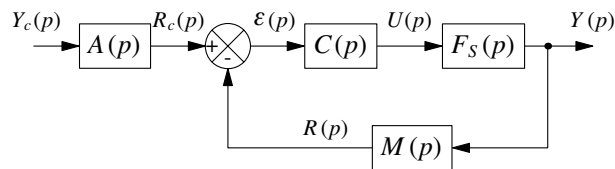


Figure 4.13 Structure de base d'un système asservi.

On transforme le schéma-bloc précédent en déplaçant le bloc adaptateur à l'intérieur de la boucle, sans se préoccuper de l'éventuel changement de signification physique des deux grandeurs $\varepsilon(p)$ et $R(p)$. On obtient la forme proposée par la figure 4.14.

La correction des systèmes est détaillée au chapitre suivant.

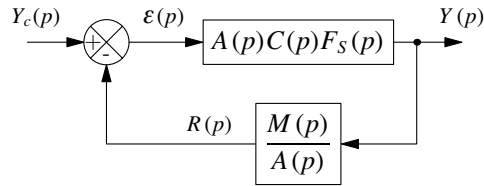


Figure 4.14 Déplacement du bloc adaptateur.

On arrive ainsi à une structure à deux boîtes, la première correspondant à la chaîne d'action, de fonction de transfert $F_1(p)$, la seconde à la chaîne de retour, de fonction de transfert $F_2(p)$.

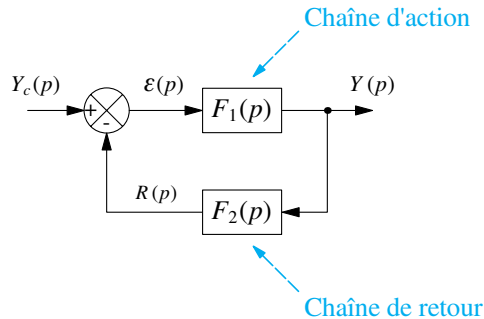


Figure 4.15 Chaîne d'action et chaîne de retour.

Le comportement d'un tel système est lié à l'existence de la boucle de rétroaction. L'étude systématique des systèmes asservis conduit à définir pour chacun d'eux deux fonctions de transfert : la fonction de transfert en boucle fermée et la fonction de transfert en boucle ouverte.

Fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée

Définitions

La fonction de transfert en boucle fermée d'un système asservi, notée **FTBF**, est la fonction de transfert liant la sortie à l'entrée du système.

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi, notée **FTBO**, est la fonction de transfert liant l'image de la sortie de la boucle de rétroaction à l'écart.

$$F(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)}$$

Sous la forme transformée de la figure 4.15, ouvrir la boucle revient à supprimer le soustracteur, comme le montre la figure 4.16.

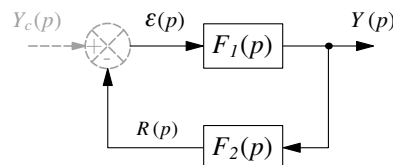


Figure 4.16 Ouverture de la boucle.



Dans les faits, c'est la FTBO qui conditionne le fonctionnement d'un système asservi. De plus, la connaissance de la seule FTBO du système permet de prévoir en grande partie son comportement lorsqu'il fonctionne en boucle fermée.



Parler de FT d'un système asservi sans préciser s'il de la FTBO ou de la FTBF est dangereux et risque d'entraîner des confusions.



Dans cet ouvrage et dans la mesure du possible, la lettre H est réservée à la fonction de transfert en boucle fermée tandis que la lettre F est attribuée aux fonctions de transfert composant la boucle ouverte.

Les expressions des deux fonctions de transfert sont alors

- pour la FTBO

$$F(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = F_1(p)F_2(p)$$

- pour la FTBF

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{F_1(p)}{1 + F(p)}$$

Remarque

Les fonctions de transfert en boucle ouverte et en boucle fermée se déterminent directement, sans avoir besoin de transformer le schéma-bloc de départ. Il suffit, comme pour la figure 4.16, de supprimer le comparateur, ainsi que le bloc d’adaptation qui précède

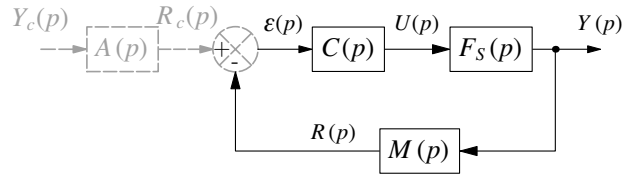


Figure 4.17 Ouverture de la boucle.

Les expressions des deux fonctions de transfert sont alors :

- pour la FTBO

$$F(p) = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = C(p)F_S(p)M(p) = F_1(p)F_2(p)$$

- pour la FTBF

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{C(p)F_S(p)}{1 + C(p)F_S(p)M(p)} = \frac{F_1(p)}{1 + F(p)}$$

Les expressions sont les mêmes, malgré le changement de signification physique de l’écart.

Présence de perturbations

Un système asservi modélisé avec plusieurs entrées, à savoir une consigne et une perturbation par exemple, a autant de fonctions de transfert en boucle fermée que d’entrées, mais il n’a qu’une seule fonction de transfert en boucle ouverte.

Exemple

On reprend le moteur électrique à courant continu présenté figure 4.11 à la page 126.

L’expression de la FTBO $F(p)$ est

$$F(p) = K C(p)F_1(p)F_2(p)$$

L’expression générale de la fréquence de rotation est

$$\Omega(p) = H_1(p) \Omega_c(p) + H_2(p) C_r(p)$$

avec comme expressions pour les deux FTBF $H_1(p)$ et $H_2(p)$

$$H_1(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

$$H_2(p) = \frac{K F_2(p)}{1 + F(p)}$$



Les deux fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$, mises sous la forme de fractions rationnelles, ont nécessairement le même dénominateur !

Cas d'un système à retour unitaire

Un système asservi à retour unitaire est un système asservi dont le schéma-bloc peut se mettre sous la forme

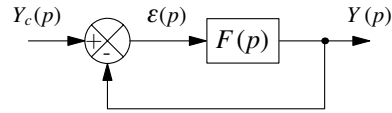


Figure 4.18 Système asservi à retour unitaire.

Les expressions des deux fonctions de transfert sont alors dans ce cas immédiate :

- pour la FTBO

$$F(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)}$$

- pour la FTBF

$$H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

C'est un cas particulier important auquel on essaie de se ramener systématiquement, car dans ce cas :

- l'écart est homogène à la grandeur générée et à la consigne et permet des interprétations fonctionnelles des valeurs numériques ;
- au chapitre suivant, sont préétablis nombre de résultats qui permettent d'émettre un avis sur le fonctionnement normal du système asservi, donc en boucle fermée, à la seule vue de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Fonction de transfert réduite d'un système asservi

Quand un système d'entrée $X(p)$ et de sortie $Y(p)$ ne peut pas être mis sous la forme d'un système à retour unitaire tel que celui de la figure 4.18, on le décompose en deux systèmes :

- on ramène la chaîne de retour dans la chaîne directe de manière à ce que le premier système, d'entrée $X(p)$ et de sortie $X_R(p)$, soit à retour unitaire ;
- on ajoute ensuite un second système d'entrée $X_R(p)$ et de sortie $Y(p)$, qui se comporte comme un système commandé.

On arrive ainsi à la structure suivante

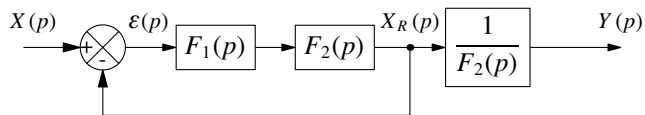


Figure 4.19 Fonction de transfert réduite.

Le système d'entrée $X(p)$ et de sortie $X_R(p)$ constitue bien un système asservi à retour unitaire de FTBO $F(p) = F_1(p)F_2(p)$. On peut ainsi lui appliquer les résultats spécifiques aux systèmes à retour unitaire.

Le passage de $X_R(p)$ à $Y(p)$ se fait par l'étude du système de fonction de transfert $\frac{1}{F_2(p)}$.

Dans cette situation, la FTBF $H_R(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$ du système réduit est appelée fonction de transfert réduite du système d'entrée $X(p)$ et de sortie $Y(p)$.

Décrire un système par un schéma bloc à retour unitaire est une des premières compétences à acquérir.

4.1.5

Ordre et classe d'un système asservi



Les systèmes continus linéaires et invariants sont régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Soit un système asservi à retour unitaire dont on écrit la fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ sous la forme particulière suivante.

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{K(1 + b_1p + \dots + b_m p^m)}{p^\alpha(1 + a_1p + \dots + a_k p^k)}$$

Remarque

Les servomécanismes sont tels que $\alpha + k \geq m$, avec $\alpha \geq 0$.

Au numérateur et au dénominateur, les polynômes commencent alors par « 1 + ... » et trois caractéristiques du système asservi sont immédiates :

- le réel K est appelé gain statique de la FTBO ;
- l'entier α est appelé la classe du système, avec $\alpha \geq 0$;
- l'entier $n = \alpha + k$ est l'ordre du système.

Définitions

On appelle **ordre** d'un système le degré du dénominateur de sa fonction de transfert.

On appelle **classe** d'un système la puissance du terme en p mis en facteur au dénominateur de sa fonction de transfert.

Dans le cas d'un système asservi à retour unitaire, la fonction de transfert en boucle fermée se calcule par

$$H(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)} = \frac{N(p)}{D(p) + N(p)}$$

On en déduit immédiatement que la FTBF est de même ordre que la FTBO, et toujours de classe nulle.

Compte tenu de ce résultat, on en conclut ce qu'il importe d'identifier :

- d'une part l'ordre du système, qu'il soit asservi ou non ;
- d'autre part la classe de la FTBO dans le cas d'un système asservi.



La puissance du terme en p mis en facteur au dénominateur d'une FTBO correspond au nombre d'intégrations effectuées en boucle ouverte.

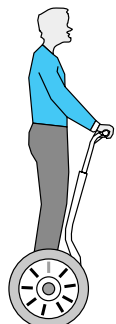
4.2 Stabilité des systèmes asservis

La stabilité est une performance à satisfaire en priorité pour un système, car un système instable est inutilisable.

- Pour les systèmes commandés intrinsèquement stables, les transformer en systèmes asservis permet d'améliorer leurs performances en terme de précision et de rapidité, mais peut conduire à les rendre instables.
- Pour un système *a priori* instable, donc non utilisé en tant que système commandé, le transformer en système asservi permet d'obtenir un système stable.

Exemple

Comment rester en équilibre ou se déplacer sur deux roues sans effort et sans craindre la chute ? Il suffit de prendre un SEGWAY. C'est au départ un système instable : une plateforme, deux roues et deux moteurs. L'utilisation d'un système asservi judicieusement conçu a permis de passer d'une utopie à un moyen de transport bien réel.



4.2.1 Stabilité et systèmes

La notion de stabilité est relativement intuitive, souvent associée à la notion d'équilibre, et se prête à différentes interprétations.

On considère par exemple le pendule de la figure 4.20, d'entrée $x(t)$, de sortie $\theta(t)$. Il comporte une tige 3 articulée sur un chariot 2, ce dernier étant mobile en translation par rapport à un bâti 1. On s'intéresse aux positions d'équilibre de la tige 3 par rapport au bâti 1.

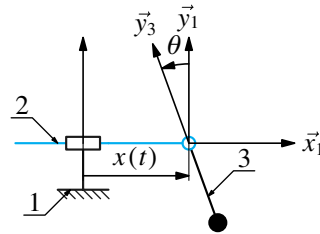


Figure 4.20 Un pendule à deux degrés de liberté.

- Il existe une position (a) d'équilibre stable pour l'angle $\theta = 0$, pour laquelle une impulsion d'entrée $x(t) = \delta(t)$ est suivie d'un retour à la même position d'équilibre. Une linéarisation du système autour de cette position conduit à l'étude d'un système linéaire stable.
- Il existe une position (b) d'équilibre instable pour l'angle $\theta = \pi$, pour laquelle une impulsion d'entrée $x(t) = \delta(t)$ écarte la tige 3 de sa position d'équilibre pour ne plus y revenir. Une linéarisation du système autour de cette position conduit à l'étude d'un système linéaire instable.
- D'autres positions (c) peuvent sembler stables, mais elles ne correspondent pas à des positions d'équilibre car elles exigent une entrée $x(t)$ particulière.

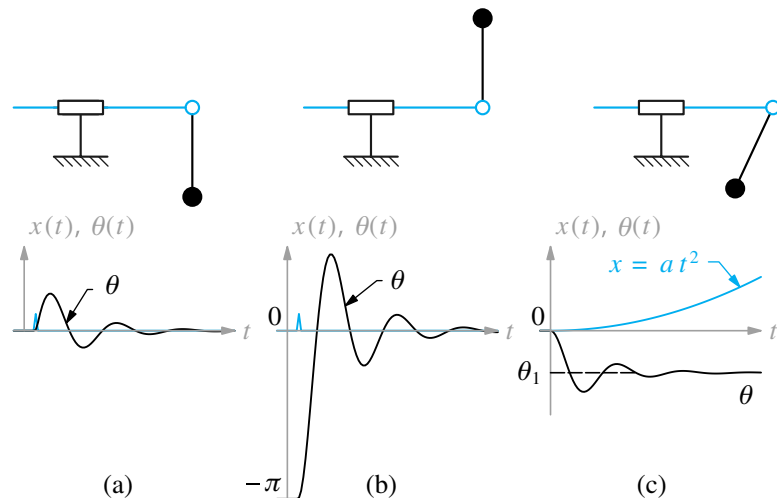


Figure 4.21 Différentes positions d'équilibre.

Pour l'étude des servomécanismes, on adopte une définition de la stabilité indépendante de la notion d'équilibre. On s'intéresse aux amplitudes de variation des grandeurs entrée et de sortie et on se limite à des quantités bornées.

Définition

Un système est **stable** si, et seulement si, à n'importe quelle entrée évoluant dans un intervalle borné correspond une sortie évoluant dans un intervalle borné.



Lorsqu'on s'intéresse à un système réel, non linéaire, que l'on fait fonctionner autour d'un point d'équilibre particulier, il est possible de linéariser les équations régissant son comportement au voisinage de ce point et de se ramener à un modèle linéaire, dont le domaine de validité est certes limité, mais qui peut être étudié avec les outils des systèmes linéaires continus invariants.

On pose l'acronyme **EBSB** pour « entrée bornée, sortie bornée »

Cette définition a une conséquence immédiate pour un système défini par une fonction de transfert, que l'on énonce sous forme de théorème.

Théorème

Un système est stable au sens EBSB si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont tous à partie réelle strictement négative.

On reprend un système asservi décrit par une chaîne d'action et une chaîne de retour

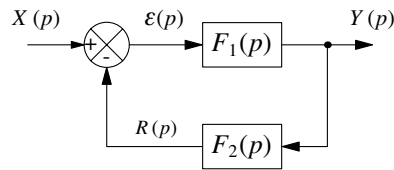


Figure 4.22 Système asservi avec chaîne d'action et chaîne de retour.

Les fonctions de transfert $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sont des fractions rationnelles qui peuvent se mettre sous la forme de rapports de polynômes, notés respectivement $N_i(p)$ pour le numérateur et $D_i(p)$ pour le dénominateur.

$$F_1(p) = \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \quad F_2(p) = \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

Ce système admet comme fonction de transfert en boucle ouverte la fonction $F(p) = F_1(p)F_2(p)$ et on calcule la fonction de transfert en boucle fermée que l'on écrit sous deux formes différentes.

$$H(p) = \frac{F_1(p)}{1 + F(p)} = \frac{N_1(p)D_2(p)}{D_1(p)D_2(p) + N_1(p)N_2(p)}$$

Les pôles de la FTBF sont donc les zéros de la fonction $1 + F(p)$ ou les zéros du polynôme $D_1(p)D_2(p) + N_1(p)N_2(p)$.

Le système asservi est donc stable si tous les zéros du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative. La recherche de ces conditions est mise en œuvre à l'aide de deux techniques différentes, ayant chacune ses qualités et ses limites :

- montrer que les zéros de la fraction rationnelle $1 + F(p)$ sont à partie réelle négative fait appel à des critères graphiques, en s'appuyant sur l'équivalence entre les équations $1 + F(p) = 0$ et $F(p) = -1$;
- montrer que les zéros du polynôme développé $D_1(p)D_2(p) + N_1(p)N_2(p)$ sont à partie réelle négative fait appel à des critères algébriques.

4.2.2 Critères graphiques

L'intérêt des critères graphiques est d'obtenir des informations sur la stabilité du système asservi fonctionnant en **boucle fermée** à partir de l'examen de sa fonction de transfert en **boucle ouverte**.

On utilise principalement le critère du revers, qui permet de résoudre la plupart des problèmes. Il découle du critère de NYQUIST dont la maîtrise n'est pas demandée.

Point critique

On a vu à la section précédente que la recherche des zéros du dénominateur de la FTBF revient à résoudre l'équation $F(p) = -1$.



Pour les curieux, la présentation du théorème de Cauchy et du critère de Nyquist est consultable sur <http://www.jdotec.net/s3i>.

Définition

On appelle **point critique** le nombre -1 dans l'espace des complexes :

- dans le plan de NYQUIST, il s'agit du point d'affixe -1 ;
- dans le plan de BLACK, il s'agit du point de coordonnées $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$.

Le point critique n'est pas défini sur les plans de Bode. Il y induit néanmoins pour les raisonnements à venir deux droites parallèles à l'axe des pulsations.

En effet, on rappelle ici le lien entre les diagrammes de Bode et le diagramme de Black à partir de la représentation tridimensionnelle du lieu de transfert. Un point A du lieu de transfert correspond à un triplet $(\omega, \text{Arg}(F(j\omega)), 20\text{Log}|F(j\omega)|)$ placé dans un système d'axes (*pulsation, phase, gain*).

- la projection du point A en B , dans le plan (ω, GdB) donne un point du diagramme de Bode en gain ;
- la projection du point A en C , dans le plan (ω, φ) donne un point du diagramme de Bode en phase ;
- la projection du point A en D , dans le plan (φ, GdB) donne un point du diagramme de Black.

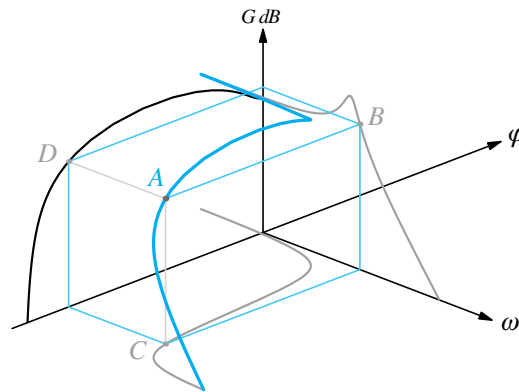


Figure 4.23 Le lieu de transfert dans l'espace (ω, φ, GdB) .

Le point critique est défini indépendamment de la pulsation. C'est ainsi que l'on retrouve dans l'espace une droite, et donc sur les plans de Bode deux droites, correspondant aux points de coordonnées $(\omega, -180^\circ, 0 \text{ dB})$. Cette droite est bien parallèle à l'axe des pulsations.

Critère du revers dans le plan complexe**Énoncé du critère**

Un système asservi, dont la FTBO n'a pas de pôle à partie réelle strictement positive, est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Nyquist de sa FTBO parcouru dans le sens des pulsations croissantes laisse le point critique sur sa gauche.

Remarque

Il convient de se rappeler qu'un système stable en boucle ouverte admet une fonction de transfert en boucle ouverte sans pôle à partie réelle strictement positive.

Ce critère s'applique tout à fait aux systèmes instables en boucle ouverte lorsque l'instabilité du fonctionnement en boucle ouverte est liée à l'augmentation de la classe de la FTBO. En effet, si un zéro est pôle de la FTBO, alors le système est instable sans pour autant avoir de racine à partie réelle strictement positive.



Ce résultat vient du théorème de stabilité au sens EBSB énoncé page précédente.

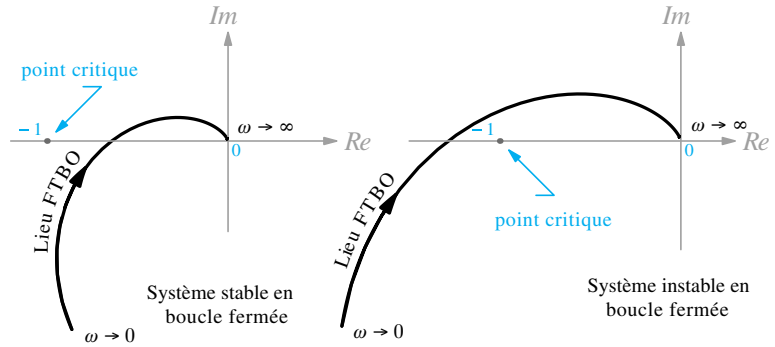


Figure 4.24 Critère du revers dans le plan complexe.

Critère du revers dans le plan de Black

Énoncé du critère

Un système asservi, dont la FTBO n’a pas de pôle à partie réelle strictement positive, est stable en boucle fermée si et seulement si le lieu de Black de sa FTBO parcouru dans le sens des pulsations croissantes laisse le point critique sur sa droite.

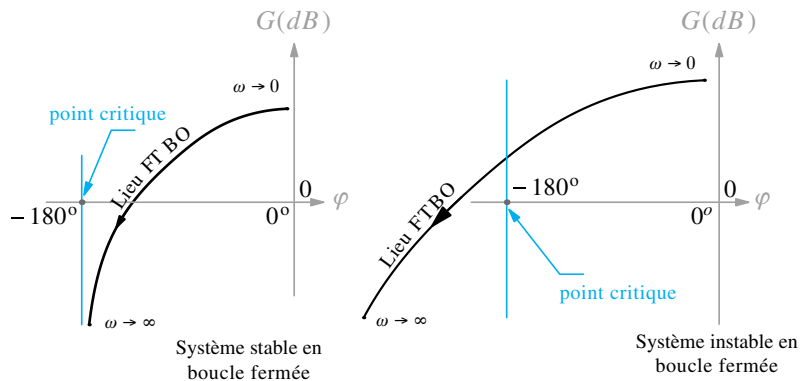


Figure 4.25 Application du critère du revers dans le plan de Black.

4.2.3 Critères algébriques

Alors que les critères graphiques de stabilité s’appuient sur la fonction de transfert en boucle ouverte, les critères algébriques de stabilité s’appliquent à tout système, asservi ou non, que l’on considère alors sous la forme la plus simple, comme ci-dessous :

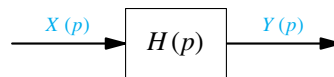


Figure 4.26 Une fonction de transfert quelconque.

Bien qu’il existe plusieurs critères algébriques permettant de conclure quant à la stabilité d’un système, seul le critère de Routh est abordé dans cette section.

La fonction de transfert de ce système $H(p)$ est considérée sous la forme d’une fraction rationnelle pour laquelle on choisit le coefficient a_n positif

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$



Dans le cas d’un système asservi, cette fonction de transfert est la FTBF !

Condition nécessaire de stabilité

En appliquant le théorème de stabilité au sens EBSB, le système est stable si tous les zéros de l'équation caractéristique sont à partie réelle strictement négative. Des considérations sur les polynômes permettent d'affirmer que, si l'un des coefficients a_0 à a_n du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert $H(p)$ n'est pas strictement positif, alors l'équation caractéristique admet au moins une racine à partie réelle positive ou nulle. Cette proposition permet d'énoncer une condition algébrique de stabilité nécessaire.

Énoncé de la condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens EBSB, il est nécessaire que les coefficients a_0 à a_n du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert soient tous strictement positifs.

En corollaire, cela signifie que la présence d'un coefficient négatif ou nul au dénominateur suffit pour affirmer l'instabilité du système.

Exemple

On considère trois systèmes asservis ayant pour FTBF respectives les fonctions

$$H_1(p) = \frac{1}{2 + 5p + 3p^2 + p^4} \quad H_2(p) = \frac{1 + 3p}{4 + 3p - 3p^2 + 6p^3 + 8p^4}$$

$$H_3(p) = \frac{1 + 2p^2}{8 + 10p + 4p^2 + 2p^3}$$

Peut-on conclure quant à la stabilité de ces trois systèmes ?

- Le système de fonction de transfert $H_1(p)$ ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car il n'y a pas de terme en p^3 au dénominateur de sa fonction de transfert. Ce système est donc instable.
- Le système de fonction de transfert $H_2(p)$ ne satisfait pas à la condition nécessaire de stabilité car le coefficient du terme en p^2 est négatif. Ce système est donc instable.
- Le système de fonction de transfert $H_3(p)$ satisfait bien à la condition nécessaire de stabilité car les quatre coefficients du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert sont tous strictement positifs. On ne peut donc pas conclure, car on ne sait pas encore si ce système est stable ou instable.

Critère de Routh

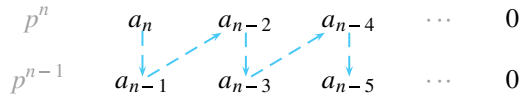
Ce critère complète le précédent car il énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme ait toutes ses racines à partie réelle strictement négative. Il requiert en préliminaire la construction d'une table à partir du polynôme caractéristique de la fonction de transfert.

► Construction du tableau de Routh en deux étapes

- (1) On écrit tout d'abord les deux premières lignes du tableau en plaçant alternativement sur chaque ligne les coefficients du polynôme caractéristique dans l'ordre des puissances décroissantes de p , en complétant avec des zéros jusqu'à en avoir deux l'un au-dessus de l'autre.

Si l'on met la fonction de transfert sous la forme $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, l'équation caractéristique est l'équation $D(p) = 0$.

Nécessaire ne veut pas dire suffisant !



(2) On construit ensuite ligne par ligne le reste du tableau qui comporte en tout $n + 1$ lignes, numérotées de p^n à p^0 . Le terme courant A_{ij} , situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j , se calcule à partir des quatre termes situés sur les deux lignes supérieures $(i + 1)$ et $(i + 2)$, dans les colonnes (1) et $(j + 1)$ par la formule suivante

$$A_{ij} = \frac{-1}{A_{(i+1)1}} \begin{vmatrix} A_{(i+2)1} & A_{(i+2)(j+1)} \\ A_{(i+1)1} & A_{(i+1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

Pour les calculs successifs, un terme manquant est systématiquement remplacé par le nombre zéro. Finalement, on obtient un tableau de forme triangulaire, avec le seul terme A_{01} en dernière ligne.



La première colonne de ce tableau, encadrée en traits pointillés, est appelée colonne des « pivots ».

	1	2	3	4	...	
p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	...	0
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	...	0
p^{n-2}	$A_{(n-2)1}$	$A_{(n-2)2}$	$A_{(n-2)3}$...		
p^{n-3}	$A_{(n-3)1}$	$A_{(n-3)2}$...			
\vdots	\vdots	\vdots				
p^0	A_{01}					

À titre d'exemple, le terme $A_{(n-2)3}$ est calculé par

$$A_{(n-2)3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = -\frac{a_n a_{n-7} - a_{n-1} a_{n-6}}{a_{n-1}}$$

Énoncé du critère de Routh

Un système est stable si et seulement si les termes de la première colonne du tableau de Routh construit à partir du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert sont tous strictement positifs.

Remarque

Au vu de ce critère, la construction du tableau de Routh peut être interrompue avant la fin, dès l'apparition d'un terme négatif ou nul.

Exemple

On reprend le seul des trois systèmes de l'exemple précédent ayant satisfait à la condition nécessaire de stabilité, à savoir le système asservi de FTBF

$$H(p) = \frac{1 + 2p^2}{8 + 10p + 4p^2 + 2p^3}$$



Le coefficient a_n du terme de degré le plus élevé est toujours posé positif !

On construit le tableau de Routh et on obtient

p^3	2	10	0
p^2	4	8	0
p^1	A_{11}	A_{12}	
p^0	A_{01}		

Avec

$$A_{11} = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{12} = 0 \quad A_{01} = \frac{-1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Tous les termes de la première colonne du tableau de Routh sont strictement positifs, ce système est stable en boucle fermée.

4.2.4 Instabilité

Un système stable en boucle ouverte peut devenir instable une fois asservi, dès que le lieu de la FTBO du système asservi ne satisfait plus au critère du revers.

Exemple

On considère un système asservi à retour unitaire de FTBO

$$F(p) = \frac{K}{1 + p + p^2 + 0,3 p^3}$$

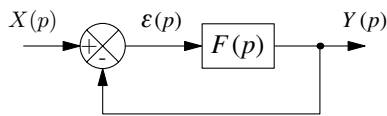


Figure 4.27 Système asservi à retour unitaire.

La figure 4.28 montre le lieu de NYQUIST pour deux valeurs différentes du gain K .

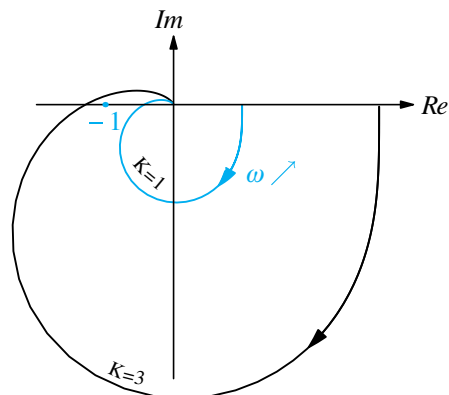


Figure 4.28 Tracé des deux FTBO dans le plan complexe.

On constate par lecture directe sur cette figure que les deux courbes passent de part et d'autre du point critique et on peut affirmer immédiatement :

- le critère du revers est satisfait pour la courbe bleue, de gain $K = 1$;
- il ne l'est pas pour la courbe noire, de gain $K = 3$.

Le système est donc stable en boucle fermée pour un gain de 1, le système est instable en boucle fermée pour un gain de 3, ce qu'illustrent les courbes temporelles de la figure 4.29 :

- pour la valeur du gain $K = 1$, les réponses indicielles en boucle ouverte et en boucle fermée convergent vers les valeurs des gains respectifs, c'est-à-dire vers 1 pour la FTBO et vers 0,5 pour la FTBF ;
- pour la valeur du gain $K = 3$, la réponse indicielle converge en boucle ouverte vers la valeur du gain de la FTBO et diverge en boucle fermée.

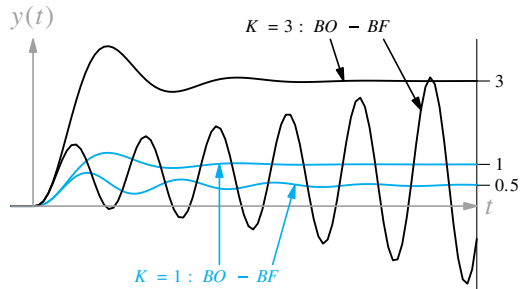


Figure 4.29 Réponses indicielles en BO et en BF.

On constate ainsi que toute modification tendant à rapprocher le lieu de la FTBO du point critique, telle une augmentation du gain de la FTBO, peut rendre le système instable. C'est à surveiller lorsqu'on asservit un système, car on a toute liberté dans la conception du correcteur.

Par ailleurs, un servomécanisme en fonctionnement est le siège de phénomènes par essence non linéaires, comme par exemple :

- la présence de frottement sec ;
- la saturation de composants ;
- la déformation de pièces se traduisant par un retard dans la chaîne de transmission de puissance ;
- etc.

Tous ces phénomènes ont des influences sur le comportement du système qu'il est difficile de modéliser, avec comme conséquence une amélioration ou une dégradation de la stabilité, voire l'apparition de comportements singuliers et non envisagés dans cet ouvrage tel le pompage par exemple.

On termine cette section en illustrant sur le diagramme de Nyquist présenté figure 4.30 l'influence d'un retard ajouté dans la boucle ouverte d'un système du premier ordre.

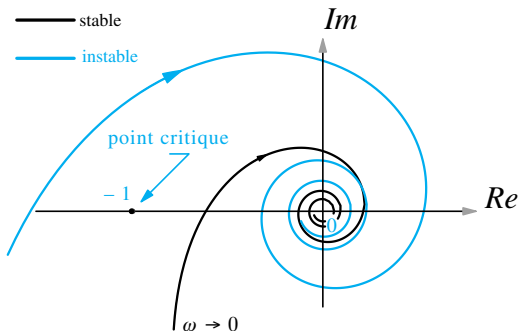


Figure 4.30 Un premier ordre avec un retard dans la boucle de retour.



Le pompage est un phénomène oscillatoire, d'amplitude et de fréquence fixe, indépendant des entrées. Ce phénomène est sans relation avec les oscillations pures d'un système arrivant en limite de stabilité.

4.3 Notion de pôles dominants



Cette présentation est faite en faisant abstraction des méthodes et détails de calculs, pour parvenir rapidement à la notion de pôles dominants.



Bon nombre de systèmes réels ont dynamiquement un comportement proche d'un système d'ordre 2!



Les z_j sont les zéros de $F(p)$ et les p_i sont les pôles de $F(p)$.

Plus on modélise finement un système réel, plus sa fonction de transfert est d'un ordre élevé. En parallèle, on constate que son comportement dynamique reste très voisin de systèmes de fonction de transfert d'ordre inférieur. Si les différences comportementales sont faibles, il peut être intéressant de substituer au modèle complexe un modèle simplifié, dont l'étude est plus économique.

4.3.1 Mode d'un système

Une fonction de transfert $F(p)$ quelconque peut être mise sous la forme de produits et rapports de monômes.

$$F(p) = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

Sous cette forme, la fonction de transfert peut être décomposée en éléments simples.

Pour simplifier l'étude, on n'envisage que le cas où $m < n$, pour lequel la décomposition met $F(p)$ sous la forme d'une somme d'éléments de deux types :

- soit $\frac{A_i}{p - p_i}$ (ou $\sum_{j=1}^k \frac{A_{ij}}{(p - p_i)^j}$) pour un pôle réel simple (ou multiple d'ordre k) p_i ;
- soit $\frac{A_i p + B_i}{(p - a_i)^2 + b_i^2}$ (ou $\sum_{j=1}^k \frac{A_{ij} p + B_{ij}}{((p - a_i)^2 + b_i^2)^j}$) pour une paire de pôles complexes conjugués (ou des paires multiples d'ordre k) $p_{i1} = a_i + j b_i$ et $p_{i2} = a_i - j b_i$.

Chaque pôle ou paire de pôles, simple ou multiple, est à prendre isolément et conduit alors à une réponse impulsionnelle particulière appelée mode du système.

Définition

On appelle **mode d'un système** la réponse impulsionnelle associée à un de ses pôles réels, ou à une de ses paires de pôles complexes conjugués.

Soit un pôle ou une paire de pôles de la fonction de transfert du système. Le mode du système associé au(x) pôle(s) correspondant(s) est la réponse impulsionnelle $Y(p)$ précisé ci-après :

- dans le cas d'un pôle réel p_i

$$Y_i(p) = \frac{1}{p - p_i}$$

- dans le cas d'une paire de pôles conjugués p_j et $\overline{p_j}$

$$Y_j(p) = \frac{1}{(p - p_j)(p - \overline{p_j})}$$

La figure 4.31 détaille un exemple de positionnement de pôles dans le plan complexe et fournit les réponses impulsionnelles associées. Ces dernières amènent de façon qualitative à différents constats.



Pour une paire de pôles complexes conjugués $(p_k, \overline{p_k})$, seul le point B_k , ou C_k , correspondant à p_k a été matérialisé!

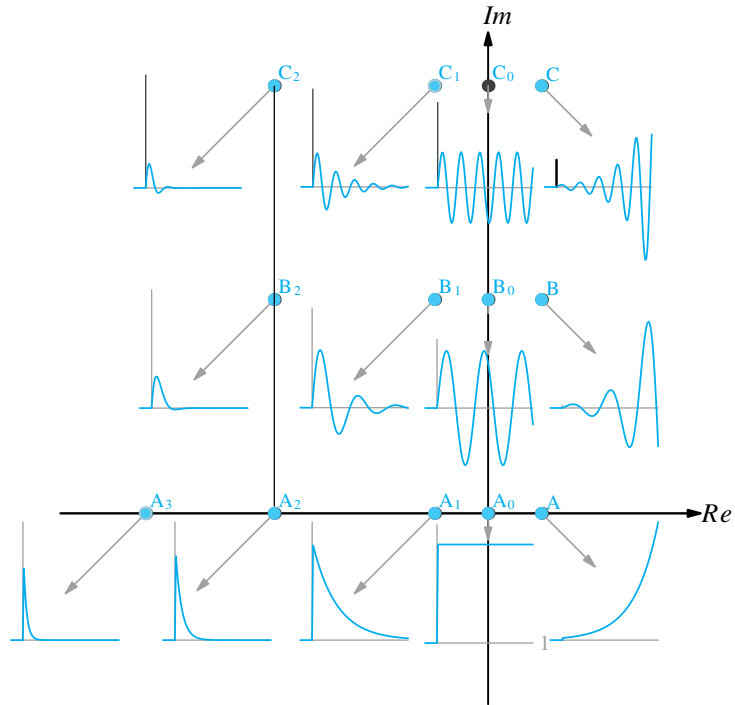


Figure 4.31 Influence de la position des pôles dans le plan complexe.

Les réponses correspondent aux positions relatives des pôles sans distorsion des deux axes, réel et imaginaire, avec la même échelle pour les ordonnées et la même échelle de temps, sauf pour les trois réponses instables *A*, *B* et *C* pour lesquelles l'échelle de temps est dix fois plus grande.

D'une part :

- pour un pôle réel, la réponse varie exponentiellement, et le mode associé est dit exponentiel ;
- pour une paire de pôles complexes conjugués, la réponse varie avec des oscillations dans une enveloppe en exponentielle, et le mode associé est dit oscillant. Leur fréquence d'oscillation augmente avec leur partie imaginaire.

D'autre part :

- pour les pôles à partie réelle positive, la réponse est divergente ;
- pour les pôles à partie réelle négative, la réponse converge vers zéro et plus le pôle est éloigné de l'axe imaginaire, plus la décroissance est rapide.

Si on cherche la réponse impulsionnelle du système de fonction de transfert $F(p)$, il suffit d'ajouter les différents modes de $F(p)$ car, compte tenu de la décomposition en éléments simples, $F(p)$ est équivalente à l'ensemble des éléments simples déterminés mis en parallèle, ce que montre la figure 4.32.

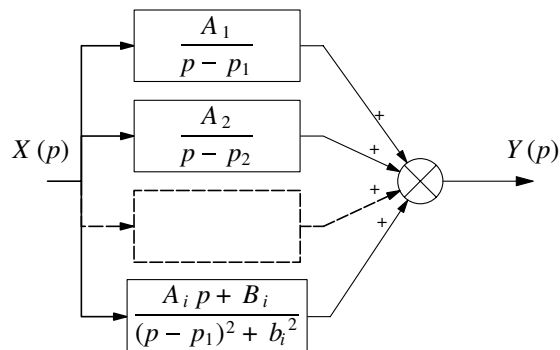


Figure 4.32 Décomposition d'une fonction de transfert en éléments simples.



On ne détaille pas ici le cas des racines à partie réelle nulle. Elles entraînent des réponses avec intégration, oscillations ou divergence suivant qu'il s'agit de pôles simples, multiples, à partie imaginaire nulle ou non nulle.

4.3.2

Réduction de l'ordre d'un système

Dès lors, on comprend que pour une entrée impulsionnelle $x(t) = \delta(t)$, il suffit qu'il y ait un seul pôle à partie réelle positive ou nulle pour que la sortie $y(t)$ ne revienne pas à zéro, diverge et que le système soit qualifié d'instable. Cela confirme le théorème utilisé au début du paragraphe 4.2 pour les conditions de stabilité au sens EBSB. Pour un système stable, on peut remarquer que l'effet des pôles très éloignés de l'axe imaginaire disparaît bien avant celui des pôles qui en sont plus proches, compte tenu des décroissances exponentielles très différentes. Aussi, les pôles du système les plus proches de l'axe imaginaire sont qualifiés de pôles dominants.

Définition

On appelle **pôle dominant** d'un système un pôle ayant une contribution significative dans son comportement dynamique.

Une entrée particulière peut rendre l'influence d'un pôle non dominant ponctuellement prépondérante. Ce phénomène possible empêche l'établissement de règles générales faciles à suivre !

Les critères de choix pour réduire l'ordre d'un système sont propres aux différents domaines d'application et ne sont pas au programme. Lors d'applications, les règles à suivre sont nécessairement données par l'énoncé.

S'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert $F(p)$ modélisant le système. On peut ainsi conduire les choix de correcteurs, évaluer les performances attendues d'un système en limitant la complexité des calculs.

Dans la pratique, le choix est simple si les pôles sont suffisamment écartés les uns des autres, beaucoup plus délicat dans le cas contraire. Dans un cas favorable, on procède comme suit :

- on garde le pôle réel le plus proche de l'axe imaginaire et la paire de pôles complexes conjugués la plus proche de l'axe imaginaire ;
- on garde dans tous les cas les intégrateurs, donc le terme en p^α .

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- système commandé, système asservi ;
- perturbation ;
- consigne, écart, commande ;
- correcteur, adaptateur ;
- fonction de transfert en boucle ouverte, en boucle fermée ;
- ordre et classe d'un système ;
- point critique ;

- stabilité d'un système ;
- mode d'un système ;
- pôle dominant.

Je connais :

- le critère du revers dans les plans de NYQUIST et de BLACK ;
- la condition nécessaire de stabilité ;
- le critère algébrique de ROUTH.

Savoir-faire

Je sais

- différencier un système asservi d'un système commandé ;
- différencier une commande d'une perturbation ;
- déterminer les pôles d'une fonction de transfert ;
- calculer les fonctions de transfert en boucle ouverte et fermée ;
- évaluer la stabilité d'un système ;
- proposer un ou plusieurs modes dominants pour un système.

Exercices d'application

4.1 Pilote automatique d'un avion

On s'intéresse dans cet exercice à la description d'un système asservi sous forme de schéma-bloc.

L'altitude d'un avion est obtenue par le gouvernail de profondeur, situé sur la figure 4.33. En première approche, on considère la chaîne fonctionnelle destinée au maintien automatique de l'altitude constituée comme suit :

- la partie commande reçoit un signal électrique proportionnel à l'altitude h de l'avion, fourni par un altimètre ;
- le signal précédent est comparé à un signal de consigne proportionnel à l'altitude h_c choisie par le pilote pour donner un signal d'écart ε ;
- un régulateur électrique traite cet écart et délivre un signal de commande u à un actionneur électrique chargé de mouvoir les gouvernes de profondeur.

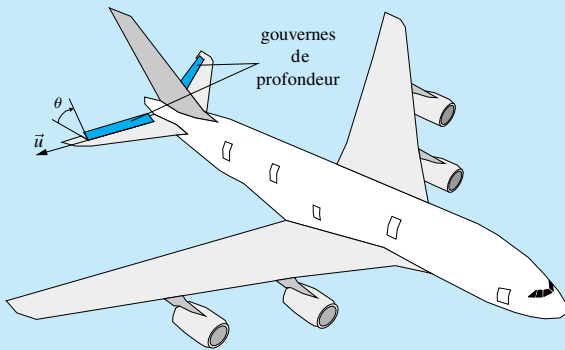


Figure 4.33 Les gouvernes de profondeur d'un AIRBUS A380.

1. À partir du texte de présentation, identifier les différents éléments de la chaîne d'action et de la chaîne d'acquisition, en précisant les grandeurs physiques de chacune des entrées-sorties.
2. Quel élément est soumis à d'éventuelles perturbations ? Donner un exemple de leurs natures.
3. Tracer le schéma-bloc décrivant la structure de l'asservissement.

4.2 Régulation de niveau

On s'intéresse dans cet exercice à une cuve d'eau dont on souhaite garder le niveau de remplissage constant, alors que le débit de sortie q_s est aléatoire.

Le dispositif étudié comprend :

- une cuve, de section S constante ;
- une électrovanne, notée EV , assurant un débit-volume q_e proportionnel à une tension de commande u ;
- un régulateur, dont le rôle est d'élaborer la tension de commande de l'électrovanne u à partir du niveau de consigne et du niveau constaté ;
- un capteur de pression, fournissant une tension e proportionnelle au niveau d'eau h ;
- un pupitre, qui permet de donner la consigne de niveau sous la forme d'une tension e_c proportionnelle à la hauteur souhaitée h_c .

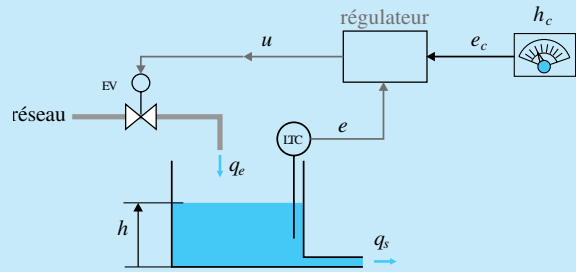


Figure 4.34 Schéma de l'installation.

1. Quelle est la grandeur physique que l'on souhaite contrôler ?

Identifier le processus physique en cause et écrire les équations correspondantes.

2. Tracer le schéma-bloc de ce processus physique et détailler les différentes fonctions de transfert.

3. Le modèle précédent est-il applicable à une cuve sphérique ?

4. Identifier les différents éléments de la chaîne d'action et de la chaîne d'acquisition et tracer le schéma-bloc décrivant la structure de l'asservissement.

4.3 Système de correction d'axe de phares

On s'intéresse à un système, embarqué sur un véhicule, qui corrige automatiquement la direction de l'axe de ses phares. On s'intéresse lors d'une première approche aux positions relatives de trois droites particulières :

- l'axe des roues, parallèle à la route pour des roues de même diamètre ;
- l'axe du châssis, faisant un angle β par rapport à l'axe des roues ;
- l'axe des phares, dont on peut régler l'angle d'inclinaison α par rapport à l'axe du châssis.

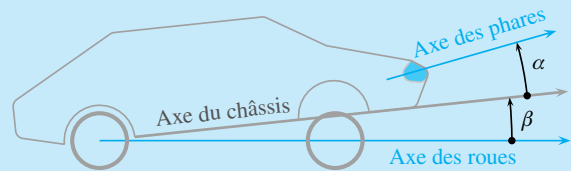


Figure 4.35 Positions relatives des axes.

Le système de correction doit permettre de maintenir le mieux possible l'angle optimal noté φ^* entre l'axe des phares et l'axe des roues. Il comprend :

- un capteur pour mesurer l'angle α , de gain K_α . Il délivre une tension e_α .
- un capteur pour mesurer l'angle β , de gain K_β . Il délivre une tension e_β .
- un mécanisme pour orienter l'axe des phares par rapport à l'axe du châssis, alimenté par une tension de commande u et de fonction de transfert $F(p)$.
- un système correcteur pour élaborer la tension de commande précédente, de fonction de transfert $C(p)$.

1. Dans quelles circonstances ce système de correction est-il sollicité ?
2. Quelle relation lie les angles α et β ?
3. Proposer un schéma-bloc décrivant le système asservi permettant de maintenir l'orientation de l'axe des phares par rapport à l'axe des roues.
4. En supposant les gains des capteurs identiques, transformer le schéma-bloc pour le rendre à retour unitaire, puis déterminer sa fonction de transfert en boucle fermée.

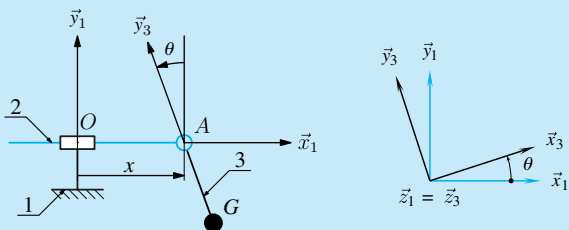
4.4 Stabilité d'un pendule

L'objectif de cet exercice est d'évaluer la stabilité d'un système après la linéarisation d'une loi entrée-sortie au voisinage d'un point de fonctionnement.

On considère pour cela un pendule constitué de trois solides :

- un bâti 1, auquel on associe un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- un coulisseau 2, en liaison glissière suivant \vec{x}_1 avec le bâti 1. On lui associe le repère $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, avec la position du point A repérée par le vecteur $\vec{OA} = x(t) \vec{x}_1$.
- un pendule 3, en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_1) avec le coulisseau 2. On lui associe le repère $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ en choisissant \vec{z}_3 confondu à chaque instant avec \vec{z}_1 et on pose l'angle $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$.

Ce pendule est de masse notée m , supposée concentrée en son centre de masse G dont la position est caractérisée par $\vec{AG} = -R\vec{y}_3$.

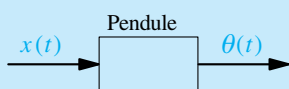


Concernant les actions mécaniques :

- le champ de pesanteur est caractérisé par le vecteur $\vec{g} = -g\vec{y}_1$;
- on prend en compte les frottements visqueux au niveau de la liaison pivot entre 2 et 3. Leur influence est modélisée par un couple caractérisé par

$$\vec{M}(A, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = -\mu \dot{\Omega}(3/2) \cdot \vec{z}_1.$$

On considère le système d'entrée $x(t)$ et de sortie $\theta(t)$.



1. Déterminer l'équation différentielle liant les deux paramètres cinématiques.
2. Vérifier que les positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ correspondent à des positions d'équilibre du pendule par rapport au coulisseau.

3. Pour chacune de ces deux positions d'équilibre :

- linéariser l'équation différentielle du mouvement au voisinage de la position d'équilibre ;
- transposer l'équation linéarisée dans le domaine symbolique en utilisant la transformée de LAPLACE ;
- écrire la fonction de transfert liant $\Theta(p)$ à $X(p)$;
- conclure quant à la stabilité du système d'entrée $x(t)$ et de sortie $\theta(t)$.

4.5 Stabilité des systèmes élémentaires

Énoncer les conditions nécessaires et suffisantes de stabilité pour les systèmes suivants :

1. Système du premier ordre défini par la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2. Système du second ordre défini par la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

4.6 Stabilité des systèmes asservis

Soit un système asservi décrit par un schéma bloc à retour unitaire

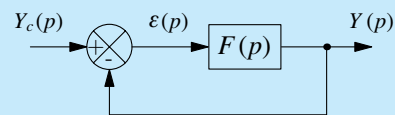


Figure 4.36 Système asservi à retour unitaire.

On s'intéresse dans cet exercice aux conditions de stabilité des systèmes génériques.

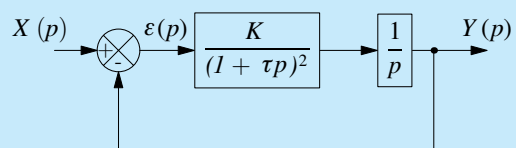
Définir la forme canonique de la fonction de transfert $F(p)$ et énoncer les conditions de stabilité en utilisant le critère de Routh pour chacun des trois systèmes suivants :

1. système d'ordre 1 et de classe 0 ;
2. système d'ordre 2 et de classe 0 ;
3. système d'ordre 3 et de classe 1.

Illustrer les trois résultats sur le plan de Black.

4.7 Application du critère de Routh

On considère le système asservi décrit par le schéma-bloc suivant.



Par application du critère de Routh, déterminer une condition sur la constante K qui permette d'avoir un système stable en boucle fermée.

4.8 Comparaison « boucle ouverte – boucle fermée »

On s'intéresse dans cet exercice à la génération de la commande en boucle fermée. Pour cela, on considère un « système commandé » de fonction de transfert

$$F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

- Déterminer puis tracer la réponse indicielle de ce système, en utilisant des graduations en τ pour le temps, de 0 à 4τ . Il est demandé de prévoir au moins 3 unités disponibles en ordonnée.

Ce système est maintenant asservi, et le schéma bloc correspondant est tracé ci-dessous. Le correcteur choisi est un amplificateur de gain K .

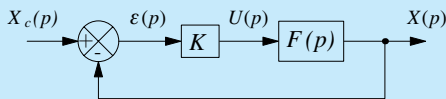


Figure 4.37 Schéma bloc du système asservi.

- Que représentent les rapports $X(p)/\varepsilon(p)$ et $X(p)/X_C(p)$?

Les calculer.

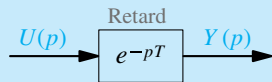
Pour la suite du problème, K est pris égal à 3.

- Tracer sur le graphe précédent la réponse indicielle de ce système asservi.
- Toujours concernant la réponse indicielle de ce système asservi, déterminer puis superposer aux courbes précédentes la loi de commande $u(t)$.
- Déterminer puis superposer aux courbes précédentes la réponse du système commandé à un échelon d'amplitude K .
- Comparer les pentes à l'origine des deux dernières courbes tracées et expliquer pourquoi le système asservi atteint plus rapidement le régime permanent de la réponse.

4.9 Approche graphique de la stabilité

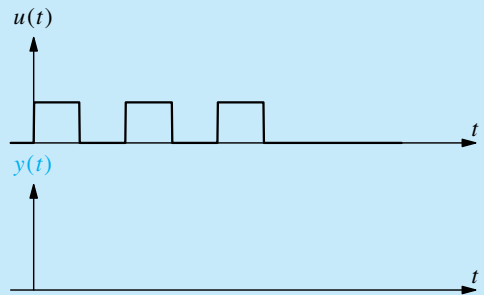
On se propose dans cet exercice d'illustrer la proposition « asservir peut rendre instable ».

On considère pour cela le système à retard pur décrit par le schéma-bloc suivant



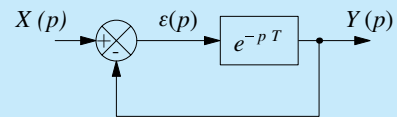
On le sollicite par une entrée $u(t)$ constituée d'une succession de créneaux d'amplitude unitaire, de durée T et espacés de la même durée T .

- Tracer la courbe temporelle de la réponse $y(t)$ pour un signal de commande à trois créneaux.

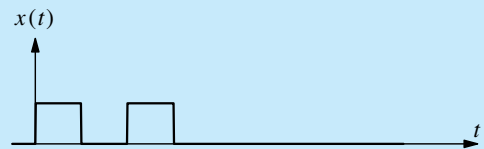


- Ce système est-il stable au sens « entrée bornée, sortie bornée » ?

On boucle ce système sur lui-même, sans aucune correction. La commande du système précédent est maintenant directement l'écart entre la consigne $X(p)$ et la sortie $Y(p)$.

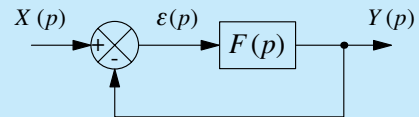


- Construire les courbes temporelles représentant l'écart $\varepsilon(t)$ et la sortie $y(t)$ pour une consigne à deux créneaux.



- Ce système est-il stable au sens EBSB ?

On généralise le raisonnement à un système asservi décrit par un schéma-bloc à retour unitaire et de fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$



- À quelle condition sur la FTBO $F(p)$ un tel système peut-il admettre une sortie $y(t)$ non nulle pour une entrée $x(t)$ nulle ?
- Le système à retard pur étudié et la sollicitation choisie satisfont-ils à cette condition ?

Exercices d'approfondissement

4.10 Asservissement de position avec un moteur linéaire

Un robot de découpe au laser est représenté sur la figure ci-dessous. Le déplacement du porte-outil par rapport au bâti résulte de la composition de deux translations selon X et selon Y . Les actionneurs utilisés sont deux moteurs linéaires. Ces derniers présentent la particularité d'un entraînement direct sans réducteur, pignon-crémaillère, ou autre transmetteur permettant d'obtenir un mouvement de translation à partir d'un mouvement de rotation.

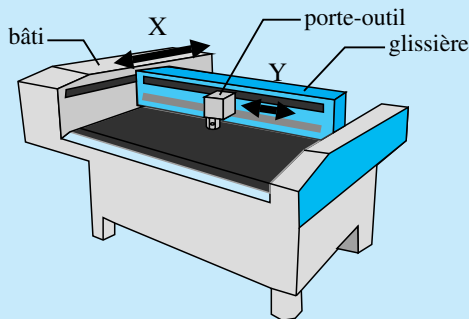


Figure 4.38 Principe de la table à mouvements croisés.

L'étude suivante se limite à un seul axe, celui correspondant à la translation de l'ensemble « glissière » par rapport au bâti suivant X .

On décrit dans ce cas le mécanisme à l'aide de deux ensembles :

- le bâti, sur lequel est fixé un aimant ;
- l'équipage mobile, de masse M , en liaison glissière de direction \vec{x} avec le bâti et équipé d'un circuit électrique en enroulement.

a) Modélisation du moteur

La tension $u(t)$ appliquée aux bornes du moteur provoque la vitesse $v(t)$ de l'équipage mobile par rapport au bâti. Les deux équations différentielles qui régissent le fonctionnement sont

- une équation électrique ;

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

avec

- $i(t)$ le courant traversant le circuit ;
- R et L respectivement la résistance et l'inductance du circuit ;
- $e(t)$ la force électromotrice due au mouvement du moteur et caractérisée par $e(t) = K_v v(t)$, où K_v est la constante de vitesse du moteur.

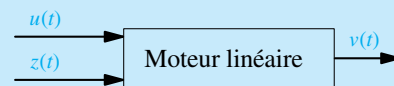
- une équation mécanique, issue de l'équation de la résultante dynamique appliquée à l'équipage mobile en projection sur \vec{x} .

$$M \frac{dv(t)}{dt} = f_m(t) - \mu v(t) + z(t)$$

avec

- $f_m(t)$ la force motrice générée par le passage du courant dans le circuit et caractérisée par $f_m(t) = K_f i(t)$, où K_f est la constante de force ;
- μ le coefficient de frottement visqueux au niveau de la liaison glissière ;
- $z(t)$ la composante suivant \vec{x} d'une force perturbatrice appliquée à l'équipage mobile.

La vitesse du moteur dépend ainsi de $u(t)$ et de $z(t)$:



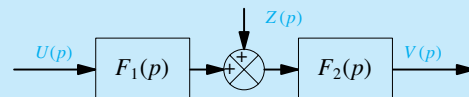
► Hypothèses simplificatrices

Pour tout ce problème, on néglige l'inductance L du moteur dans l'équation électrique, le coefficient de frottement visqueux μ dans l'équation mécanique et on utilise la seule constante K pour remplacer les deux constantes K_v et K_f qui ont la même valeur numérique dans le système d'unités SI.

► Données numériques

$$M = 200 \text{ g} \quad R = 3 \Omega \quad K = 4 \text{ SI} \\ A = 2 \text{ V/m} \quad C = 40$$

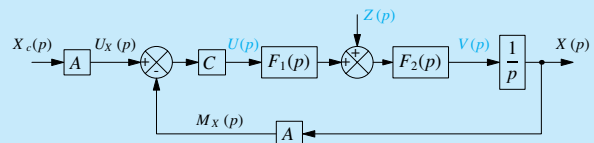
1. À partir des équations décrivant le fonctionnement du système, construire un schéma-bloc en adoptant comme structure



Détailler les deux fonctions de transfert $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sous leurs formes canoniques.

b) Asservissement en position

On propose un asservissement en position selon le schéma-bloc ci-dessous



L'adaptateur de consigne et le capteur de position sont de même gain pur A , le correcteur est de type proportionnel caractérisé par une constante C .

► Performances attendues

Pour un bon fonctionnement de cet axe, on souhaite :

- un système stable en boucle fermée ;
- la sortie égale à la consigne en réponse à un échelon de position, ceci en l'absence de force perturbatrice sur l'équipage mobile ;

- un écart sur la sortie inférieur à 0,5 mm lors d'un effort perturbateur de 0,1 N.
- 2. Détailler les grandeurs physiques ajoutées.
- 3. Transformer ce schéma-bloc pour obtenir un retour unitaire.
- 4. Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ et tracer les lieux de BODE asymptotiques.
Peut-on conclure quant à la stabilité ?
- 5. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $H_X(p)$ permettant d'étudier le suivi de consigne.
Quel est l'écart en régime permanent entre la sortie et la consigne ?
- 6. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $H_Z(p)$ permettant d'étudier l'influence d'une perturbation.
7. Quelle est l'influence d'un échelon de force perturbatrice d'amplitude Z_0 sur la position de l'équipage ?
Conclure quant à la performance souhaitée.

4.11 Système de distribution à calage variable pour moteur 4 temps (d'après Banque PT SIA 2008)

Les véhicules automobiles utilisent généralement l'énergie fournie par un moteur à explosion. Ces moteurs fonctionnent majoritairement suivant un cycle à quatre temps. Ces quatre temps correspondent à deux aller-retour d'un piston dans un cylindre et un cycle complet se décompose comme suit :

- la phase d'admission, pendant laquelle le volume de la chambre croît, laissant pénétrer le combustible et l'air ;
- la phase de compression ;
- la phase d'explosion, 2^e aller du piston, seule phase motrice d'un tel cycle ;
- la phase d'échappement, 2^e retour du piston, pendant laquelle les gaz brûlés sont poussés vers l'échappement.

Pendant ces différentes phases, les orifices qui communiquent avec l'extérieur de la chambre sont ouverts ou obturés à l'aide de soupapes, dont le mouvement est engendré par la rotation d'un arbre à cames, lui-même entraîné par l'arbre moteur par un jeu de poulies et de courroies. L'arbre moteur est également appelé vilebrequin. Dans les moteurs modernes, on coordonne les mouvements de l'arbre à cames et du vilebrequin de façon à optimiser la consommation de carburant.

Pour le moteur objet de cette étude, un système de déphasage permet à cet effet de décaler l'arbre à cames d'un angle $\Delta\theta$ par rapport à une position de référence.

► Objectifs de l'étude

On souhaite définir l'architecture du système de commande et déterminer les valeurs numériques de certaines caractéristiques afin d'obtenir un asservissement en poursuite du déphasage :

- l'actionneur utilisé pour réaliser le déphasage $\Delta\theta$ de l'arbre à cames est un vérin hydraulique double-effet piloté par un servo-distributeur ;

- la consigne de déphasage $\Delta\theta_c$ est calculée à partir de diverses informations provenant de capteurs de position angulaire implantés sur le vilebrequin et sur l'arbre à cames, de capteurs thermiques implantés à différents endroits dans le moteur et du capteur d'enfoncement de la pédale d'accélération.
La gestion des informations citées ici n'est pas abordée dans cette étude.

► Notations

On note, lorsque cela est possible, une fonction dans le domaine temporel par une lettre minuscule et sa transformée de Laplace par une lettre majuscule.

Le schéma général de l'asservissement du processus physique et des différents bouclages réalisés est donné sur la figure 4.39.

On précise dans le tableau suivant les différentes grandeurs

$\Delta\theta_c(t)$	consigne de déphasage
$\Delta\theta(t)$	déphasage de l'arbre à cames
$m_d(t)$	mesure du déphasage
$\theta_1(t)$	position angulaire de la poulie
$\theta_2(t)$	position angulaire de l'arbre à cames
$m_{\theta_2}(t)$	mesure de la position angulaire de l'arbre à cames
$\theta_v(t)$	position angulaire du vilebrequin
$m_{\theta_v}(t)$	mesure de la position angulaire du vilebrequin
$im_{\theta_v}(t)$	image de la mesure de la position angulaire du vilebrequin
$u_c(t)$	tension de commande
$\varepsilon(t)$	écart de tension
$i(t)$	courant de commande du servo-distributeur
$q(t)$	débit à l'entrée du vérin
$x(t)$	déplacement axial du piston du vérin

► Hypothèses

Afin de simplifier la suite de l'étude, on suppose la position angulaire du vilebrequin $\theta_v(t)$ nulle, ce qui revient à étudier directement le déphasage de l'arbre à cames par rapport à une position de référence.

Dans le cadre d'une étude autour d'un point de fonctionnement, on considère toutes les conditions initiales nulles.

a) Problématique

1. Montrer que le schéma-bloc de la figure 4.39 se simplifie comme la figure 4.40.

On considère que les capteurs de mesure des positions angulaires $\theta_v(t)$ du vilebrequin et $\theta_2(t)$ de l'arbre à cames sont assimilables à des gains purs de même valeur C . Le gain de commande est identique au gain du capteur mesurant la position angulaire de l'arbre à cames. Le gain de l'amplificateur est supposé unitaire. Le gain associé au coulisseau à cannelures hélicoïdales est noté K_c . Le servo-distributeur est modélisé par un gain pur noté K_e . On adopte comme valeurs numériques

$$C = 10 \text{ V rad}^{-1} \quad K_c = 18 \text{ rad m}^{-1}$$

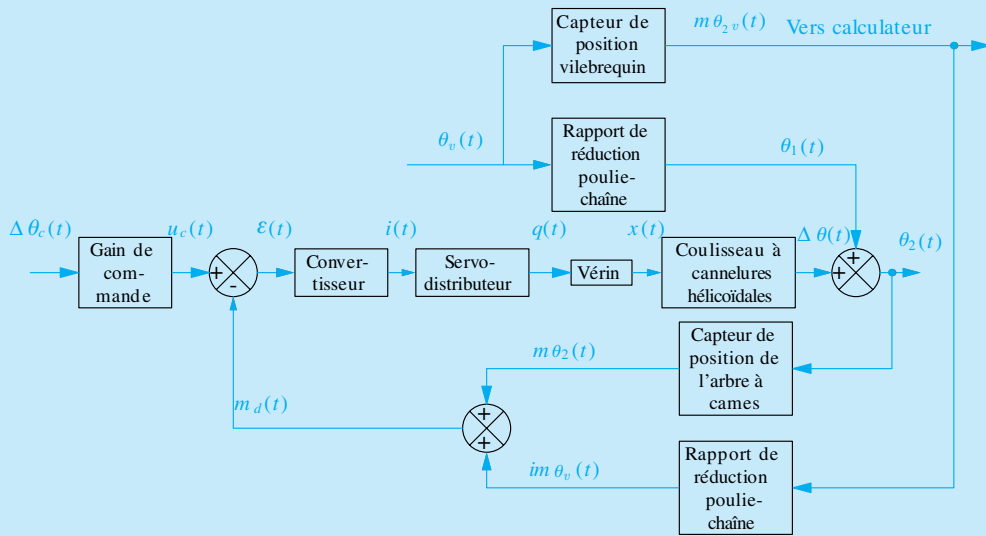


Figure 4.39 Schéma-bloc général de l'architecture du système.

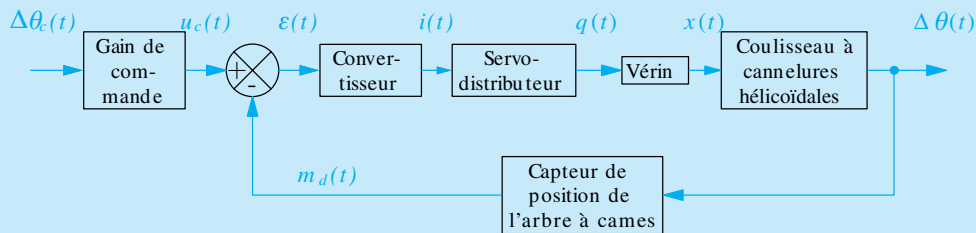


Figure 4.40 Schéma simplifié de l'architecture du système.

b) Analyse du comportement dynamique avec une modélisation de fluide incompressible

Le fluide est modélisé par un comportement incompressible. On néglige les fuites possibles dans le circuit hydraulique. L'équation caractérisant le comportement du vérin hydraulique est alors la suivante

$$q(t) = S\dot{x}(t)$$

On appelle S l'aire de la surface utile du piston du vérin, et on donne $S = 9,6 \text{ cm}^2$.

2. Après avoir appliqué la transformée de Laplace aux différentes équations, compléter le schéma-bloc de la figure 4.41.

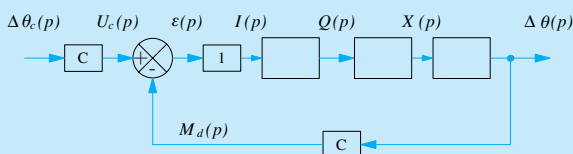


Figure 4.41 Schéma bloc avec fluide incompressible.

3. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$ associée à ce schéma. Déterminer la valeur du gain K_e du servo-distributeur qui entraîne un temps de réponse à 5 % de 250 ms.

c) Analyse du comportement dynamique en prenant en compte la compressibilité du fluide

Le modèle précédent est trop simpliste car il ne prend pas en compte des caractéristiques physiques importantes vis-à-vis du comportement réel du système. Il est nécessaire de considérer :

- la compressibilité du fluide ;
- les fuites dans la partie hydraulique.

Pour analyser l'influence de ces deux phénomènes sur le comportement dynamique global du système, il est nécessaire de prendre en compte l'effort résistant exercé par le coulisseau à cannelures hélicoïdales sur le piston du vérin, grandeur physique correspondant à une perturbation. On admet que les équations simplifiées traduisant le comportement du vérin en prenant en compte la compressibilité du fluide sont :

pour l'aspect hydraulique : $q(t) = S\dot{x}(t) + \frac{V}{B} \dot{p}(t)$

V : volume moyen de la chambre du vérin (48 cm^3)

B : coefficient de compressibilité de l'huile ($1500 \cdot 10^6 \text{ Pa}$)

pour l'aspect dynamique : $M\ddot{x}(t) = Sp(t) - F(t)$

$p(t)$: pression utile dans le vérin

$F(t)$: force exercée par la poulie sur le coulisseau

M : masse des parties mobiles en translation (500 g)

Les fuites ne sont pas introduites dans cette modélisation, leur influence sur le comportement ne sera abordée que dans la partie suivante.

4. Après avoir appliqué la transformée de Laplace aux différentes équations, compléter le schéma-bloc de la figure 4.42.

5. Déterminer les fonctions de transfert $H_Q(p)$ et $H_F(p)$ qui relient $Q(p)$ et $F(p)$ à $X(p)$ sur la figure 4.43 de la façon suivante

$$X(p) = H_Q(p)Q(p) + H_F(p)F(p)$$

Modifier leurs expressions afin d'obtenir comme formes canoniques

$$H_Q(p) = \frac{1}{a_1 p} \frac{1}{1 + a_2 p^2} \quad \text{et} \quad H_F(p) = \frac{a_3}{1 + a_2 p^2}$$

Préciser les expressions littérales et calculer les valeurs numériques des coefficients a_1 , a_2 et a_3 en donnant 4 chiffres significatifs.

Le schéma de la figure 4.42 peut donc être transformé sous la forme de la figure 4.43.

6. Appliquer le critère de Routh à la modélisation actuelle. Conclure.

d) Étude de l'influence des fuites hydrauliques

Il existe plusieurs façons de rendre le système stable. Il est possible en particulier d'introduire artificiellement un débit de fuite au niveau du vérin. On constate en effet que le débit dû aux fuites internes est insuffisant pour stabiliser le comportement dynamique du système. L'introduction de ce débit de fuite dans les équations traduisant le comportement du vérin conduit à la présence d'un coefficient d'amortissement ξ_Q dans la fonction de transfert $H_Q(p)$. On pose alors

$$H_Q(p) = \frac{1}{a_1 p} \frac{1}{1 + \frac{2\xi_Q}{\omega_Q} p + \frac{p^2}{\omega_Q^2}} \quad \text{avec} \quad a_2 = \frac{1}{\omega_Q^2}$$

En prenant $\xi_Q = 0.0001$, on obtient le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO1}(p)$ présenté sur la figure 4.44.

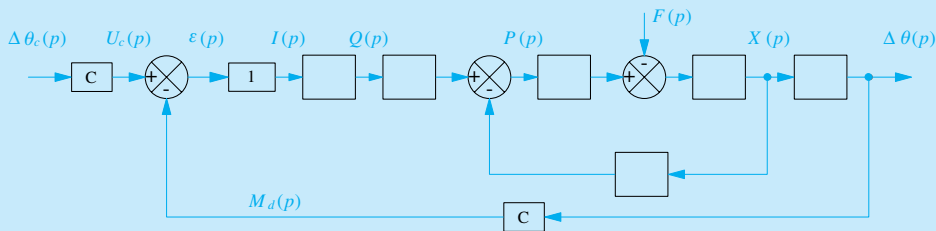


Figure 4.42 Schéma-bloc avec fluide compressible.

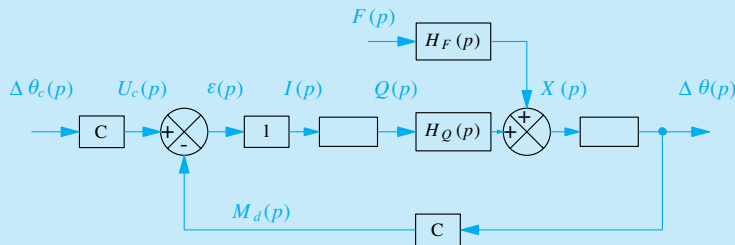


Figure 4.43 Schéma-bloc avec fluide compressible transformé.

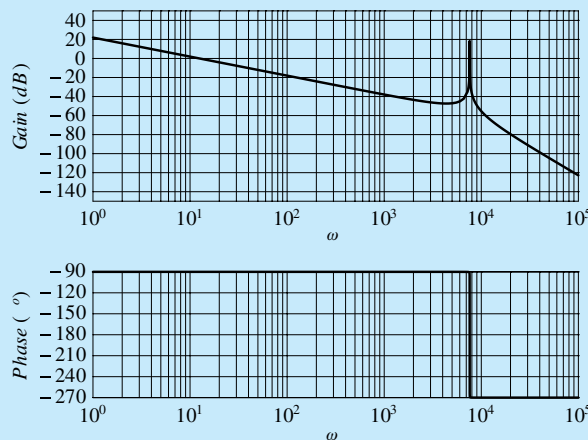


Figure 4.44 Diagrammes de Bode de la fonction H_{BO1} .

7. En prenant trois ou quatre valeurs sur l'agrandissement de ce diagramme autour du pic de résonance représenté sur la figure 4.45, compléter le diagramme de Black correspondant de la figure 4.46.

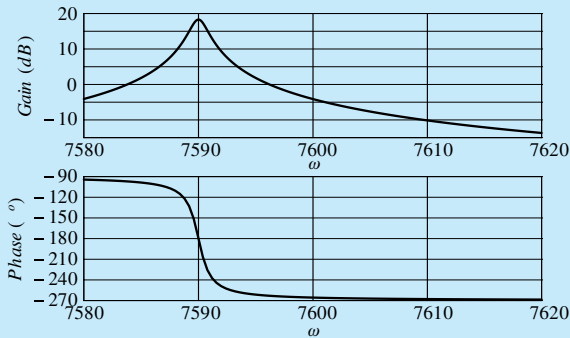


Figure 4.45 Diagrammes de Bode de la fonction H_{B01} (zoom).

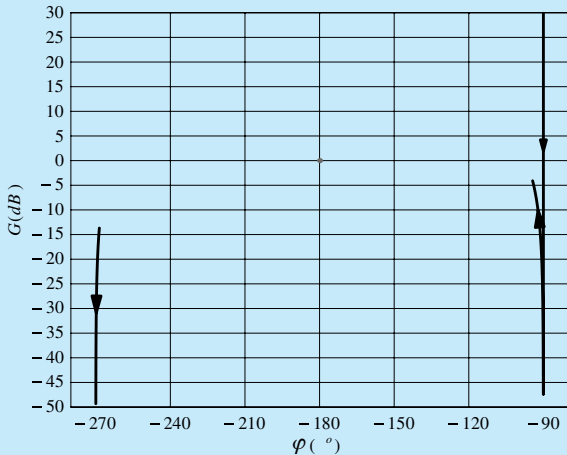


Figure 4.46 Diagramme de Black de la fonction H_{B01} .

8. Discuter de la stabilité du système en énonçant précisément le théorème utilisé. Déterminer la valeur limite du coefficient d'amortissement ξ_Q qui stabilise le comportement du système.

e) Optimisation du comportement du système

Pour toutes les phases d'accélération et de décélération du véhicule, le régime moteur n'est pas constant. Le système

doit donc en permanence ajuster la valeur du déphasage. L'étude de ce type de comportement nécessite l'étude de la réponse en poursuite du système asservi, c'est-à-dire la réponse temporelle à une rampe unitaire.

9. À partir du modèle précédent, en conservant $\xi_Q = 0,0001$, préciser le mode dominant de la fonction de transfert en boucle ouverte et proposer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{B02}(p)$ correspondante. En ne considérant que ce mode dominant, déterminer l'écart et le retard de la réponse en poursuite du système. Déterminer la bande passante à 0 dB de ce modèle.

► Premier modèle de correcteur

Pour annuler l'écart en poursuite, on introduit un intégrateur après le comparateur, comme le montre la figure 4.47

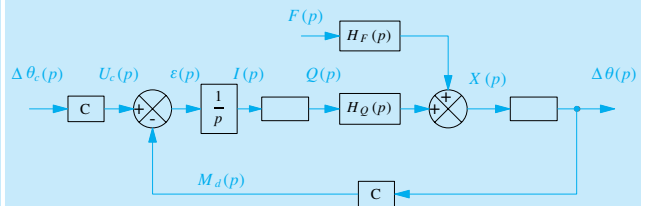


Figure 4.47 Système corrigé par un intégrateur.

10. Tracer le diagramme asymptotique de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{B02}(p)$ telle que $M_d(p) = H_{B02}(p)U_c(p)$ du système corrigé par un intégrateur. Discuter la stabilité du système obtenu. En particulier, précisez la valeur de la marge de phase, c'est-à-dire la valeur de $M_\varphi = Arg(H_{B02}(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$, ω_{0dB} étant la pulsation pour laquelle le gain de la FTBO $H_{B02}(p)$ est 0 db.

► Second modèle de correcteur

On souhaite obtenir une marge de phase de 50°. Pour cela, on introduit un correcteur à avance de phase, de fonction de transfert $H_{AV}(p)$. Il est positionné sur la figure 4.48.

$$H_{AV}(p) = K_{AV} \frac{1 + \tau_{AV} p}{1 + a \tau_{AV} p} \quad \text{avec} \quad 0 < a < 1$$

11. On considère que deux systèmes ont une dynamique équivalente s'ils ont la même bande passante à 0 dB. En faisant référence aux diagrammes de Bode de la figure 4.44, déterminer graphiquement la valeur du gain du correcteur K_{AV} qui permet de récupérer la dynamique qu'avait le système avant l'insertion de l'intégrateur.

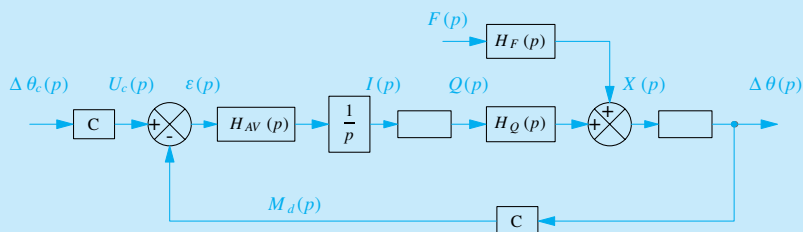


Figure 4.48 Système corrigé par un intégrateur et un correcteur à avance de phase.

12. Déterminer les valeurs numériques de a puis de τ_{AV} qui permettent d'obtenir une marge de phase de 50° tout en conservant au mieux la dynamique du système. On indique que l'apport maximum de phase φ_{max} d'un tel correcteur est donné par la relation :

$$\sin \varphi_{max} = \frac{1 - a}{1 + a}$$

Pour information, la figure 4.49 représente la réponse du modèle final à un signal de consigne linéaire par morceaux.

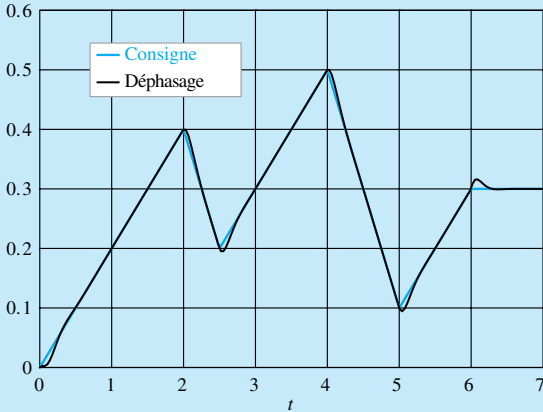


Figure 4.49 Réponse du système corrigé.

4.12 Bras maître à retour d'effort de système de réalité virtuelle

(d'après Mines-Ponts PSI 2007)

Un système à retour d'effort est un périphérique informatique particulier, utilisé par des entreprises souhaitant effectuer en phase de conception des manipulations sans faire appel à des prototypes physiques. Il permet à son utilisateur d'interagir avec un environnement virtuel par l'intermédiaire du sens du toucher. Il se compose d'une structure mécanique articulée, le **bras maître**, équipée de moteurs et de capteurs, reliés à une électronique embarquée.

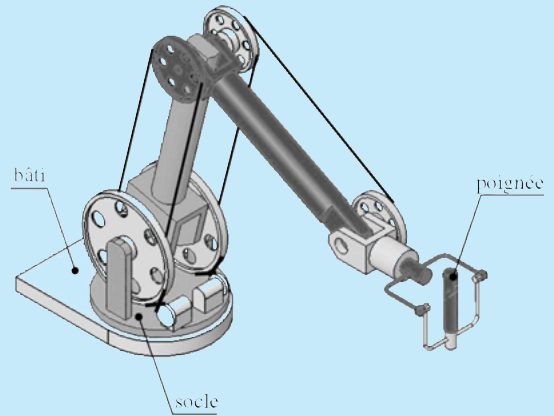


Figure 4.50 Schéma d'un bras maître à retour d'effort de la société Haption.

L'utilisateur prend en main la poignée située à l'extrémité de la structure et peut la déplacer librement, provoquant ainsi le déplacement de l'image dans la scène virtuelle tridimensionnelle qu'il visualise à l'aide d'un masque. Le bras à retour d'effort lui restitue les actions mécaniques qu'il ressentirait lors de la manipulation réelle.

Toutes les notations utilisées dans ce texte sont regroupées et explicitées dans un tableau à la page 153.

Fonction « Asservir les actions mécaniques générées sur le bras maître à celles rencontrées par le système virtuel »

L'étude se limite à l'axe numérique associé à la rotation du socle par rapport au bâti autour de l'axe vertical. Le socle supporte l'ensemble du bras.

► Étude de la boucle de courant

La consigne de couple $C_c(p)$ est élaborée par l'interface de couplage. La description des chaînes d'énergie et d'information (figure 4.51), ainsi que le modèle continu de l'axe (figure 4.53) font apparaître un asservissement de courant, appelé « boucle de courant », ayant comme entrée la consigne de courant $I_c(p)$ et comme sortie le courant absorbé par le moteur $I(p)$.

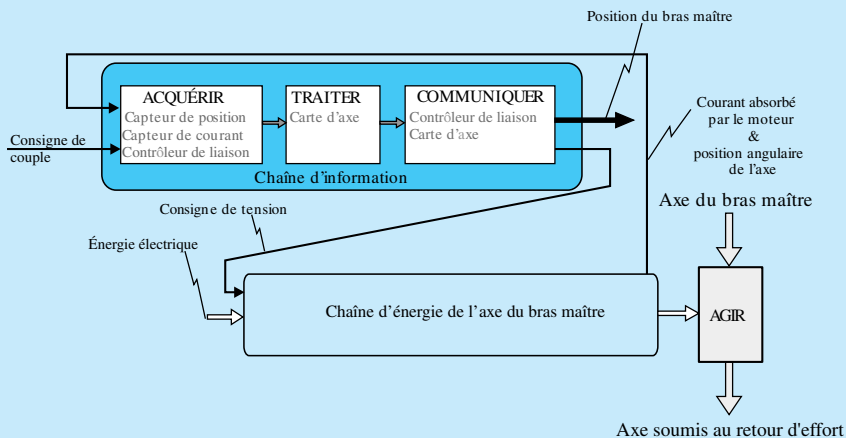


Figure 4.51 Chaîne d'information de l'axe du bras maître.

$v_s(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$	$e(t) = K\omega_m(t)$
$c_{m1}(t) + c_{op}(t) - f\omega_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt}$	$c_{m1}(t) = Ki(t)$

Figure 4.52 Équations du moteur à courant continu.

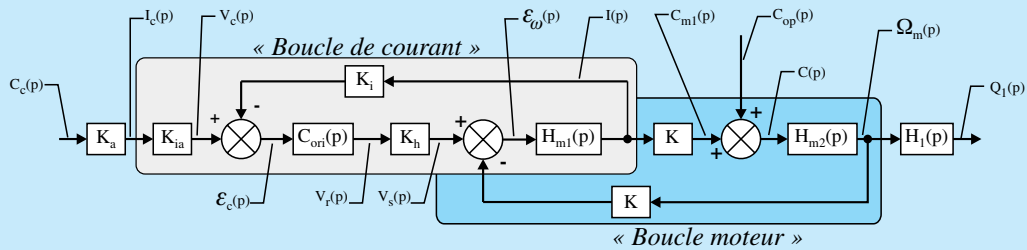


Figure 4.53 Modèle continu n°1 - « Axe du bras maître ».

- Expliquer en quoi cet asservissement de courant est équivalent à un asservissement de couple.
 - Donner la valeur de réglage du gain d'adaptation K_a .

Cette boucle de courant relève du cahier des charges suivant :

 - pour la fidélité de la restitution des sensations à l'opérateur, le système doit être précis et rapide ;
 - pour le confort de l'opérateur, la réponse indicielle ne doit pas présenter de dépassement de la valeur finale ;
 - le courant absorbé par le moteur doit rester dans tous les cas inférieur au courant maximal admissible $i_{max} = 23 A$;
 - la tension de sortie v_s de l'amplificateur de puissance est limitée à 30 V.

Une simulation a permis de tracer les courbes représentant les évolutions temporelles suivantes :

- celle du courant $i(t)$ absorbé par le moteur lorsque le courant de consigne $i_c(t)$ est un échelon d'amplitude 14,3 A. Cette valeur correspond à une consigne de couple de 1 Nm.
- celle de la tension $v_s(t)$ pour la même consigne.

Ces courbes sont données en fin de sujet sur la figure 4.56 pour les valeurs suivantes de réglage d'un correcteur proportionnel et intégral :

- gain du correcteur $K_c = \{1; 1, 4; 2\}$;
- constante de temps d'intégration, en s, $T_i = \{0,001; 0,003; 0,005\}$.

2. Indiquer, en le justifiant, le choix du couple de valeurs (K_c, T_i) à retenir pour satisfaire le cahier des charges précédemment énoncé. La synthèse des arguments pourra prendre la forme d'un tableau comparatif.

Fonction « Coupler le bras maître et le système virtuel »

Le modèle continu n°2 de la figure 4.54 est le modèle d'étude obtenu à partir du modèle précédent en substituant globalement les transmittances $G_1(p)$ et $G_2(p)$ à la « boucle de courant » et à la « boucle moteur ».

L'interface de couplage permet au système virtuel de reproduire les mouvements du bras maître et de lui trans-

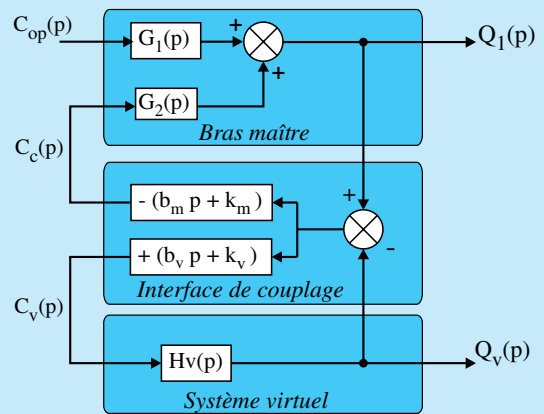


Figure 4.33 Modèle continu n°2 - « Bras maître, Interface de couplage et Système virtuel ».

mettre en retour une image des résistances mécaniques virtuelles rencontrées. Cette interface est caractérisée à ce niveau de description par les deux fonctions de transfert de couplage

$$\frac{C_c(p)}{\Delta Q(p)} \quad \text{et} \quad \frac{C_v(p)}{\Delta Q(p)}$$

$$\text{avec} \quad \frac{C_c(p)}{\Delta Q(p)} = -(b_m p + k_m)$$

$$\text{et} \quad \frac{C_v(p)}{\Delta Q(p)} = +(b_v p + k_v)$$

Les paramètres b_m, b_v, k_m, k_v constituent les **paramètres de réglage** de l'interface.

On admet pour cette étude que le comportement de l'axe du système virtuel est modélisé par la fonction de transfert $H_v(p)$.

Les expressions des fonctions de transfert $G_1(p), G_2(p)$ et $H_v(p)$ retenues sont

$$G_1(p) = \frac{18}{p(1 + 1,8 \cdot 10^{-3} p + 1,2 \cdot 10^{-6} p^2)}$$

$$G_2(p) = \frac{18}{p(1 + 4 \cdot 10^{-4} p)}$$

$$H_v(p) = \frac{4}{1 + 3 \cdot 10^{-3} p + 2 \cdot 10^{-6} p^2}$$

Réglage de l'interface de couplage

Réglage l'interface consiste à déterminer les valeurs de b_v , b_m , k_v , k_m satisfaisant conjointement à trois critères : **raideur**, **stabilité** et **bande passante**. Les niveaux requis sont présentés dans le tableau de la figure 4.55. L'étude proposée vise à établir à partir de ces critères des relations de contrainte sur certains de ces paramètres. Ces relations seront exploitées lors de la procédure de mise au point ultérieure de l'interface qui nécessite l'assistance de moyens informatiques et une validation *in situ*.

Critères	Niveaux	Flexibilité
Stabilité	absolue	néant
Raideur : L'opérateur doit ressentir les arrêts de fin de course générés par le logiciel (« butées logicielles ») comme des butées mécaniques réelles (équivalentes à un contact réel entre solides)	Raideur R : $R > 20 \text{ Nm/rad}$	néant
Bande passante motrice Les vibrations parasites sur le bras maître doivent être filtrées. Le système doit être rapide.	Fréquence de coupure à 3 dB $f_{3dB} \geq 20 \text{ Hz}$	néant

Figure 4.55 Caractérisation de la fonction technique « Coupler bras maître et système virtuel ».

Étude liminaire

$H_m(p)$ définit la fonction de transfert motrice avec :

$$H_m(p) = \frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)}$$

3. Donner l'expression de la fonction de transfert $H_m(p)$ en fonction de G_1 , G_2 , H_v , b_v , b_m , k_v , k_m et de la variable p .

Critère de raideur

La raideur d'un système mécanique caractérise l'ampleur de ses déformations sous l'effet des efforts qui lui sont appliqués. Par extension, on définit la raideur de l'axe étudié sur le bras maître par $c_{op}(t) = R q_v(t)$, avec R en Nm/rad, $c_{op}(t)$ en Nm et $q_v(t)$ en rad.

On considère que :

- la structure mécanique du bras maître est infiniment rigide ;
- la stabilité de $H_m(p)$ est acquise ;
- l'opérateur délivre un échelon unitaire de couple $C_{op}(p)$;
- b_v , b_m , k_v , k_m sont des constantes non nuls.

4.

• Calculer en régime permanent la raideur R de la chaîne présentant $C_{op}(p)$ en entrée et $Q_v(p)$ en sortie.

- En déduire la relation existant entre k_v et k_m permettant de satisfaire au critère de raideur (figure 4.55).

Critère de stabilité absolue

On considère maintenant que la fonction de transfert $H_m(p)$ se met sous la forme du schéma bloc de la figure 4.56. Sont fournis sur les figures 4.58 à 4.62 les diagrammes de Bode de $H_m(j\omega)$, sa réponse indicielle et le diagramme de Black de $H_0(j\omega)$ obtenus pour un réglage non précisé des paramètres b_v , b_m , k_v et k_m .

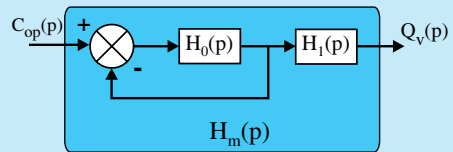


Figure 4.56 Schéma Bloc à retour unitaire.

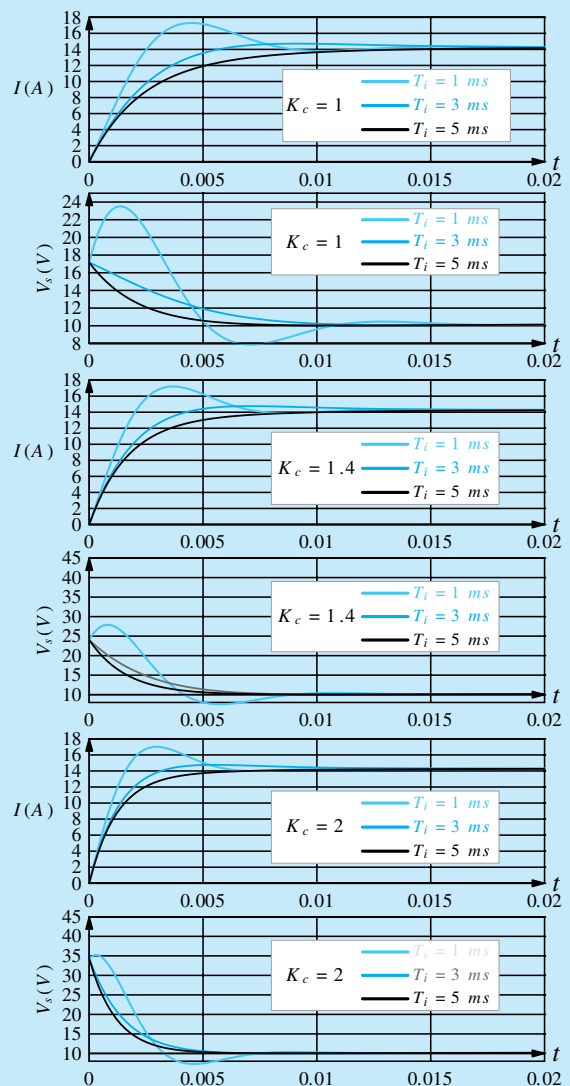


Figure 4.57 Réponses temporelles.

Les questions qui suivent sont à traiter en fonction de ces données graphiques, c'est-à-dire indépendamment des fonctions de transfert précédemment calculées. On suppose de plus la fonction $H_1(p) = K_1$, avec K_1 en N^{-1} .

5.

- Donner l'ordre de la fonction de transfert $H_m(p)$ et indiquer si elle présente un risque potentiel d'instabilité.
- Si tel devait être son comportement, comment celui-ci se manifesterait-il lors d'une manipulation du bras maître par l'opérateur ?
- En exploitant les informations disponibles, énoncer deux arguments différents qui permettent d'affirmer que le réglage proposé assure la stabilité de $H_m(p)$.

Critère de bande passante motrice

La bande passante motrice est définie comme la bande de fréquence correspondant à l'intervalle $]0, f_{3\text{dB}}]$ où $f_{3\text{dB}}$ désigne la fréquence pour laquelle l'amplitude du signal de sortie de $H_m(j\omega)$ est atténuée de 3 dB par rapport à l'amplitude statique.

6. Le critère de bande passante (cf. figure 4.55) est-il satisfait ? Justifier la réponse.

L'expérience montre qu'un opérateur très entraîné peut générer des signaux jusqu'à une fréquence de 5 Hz.

7.

- Le temps de calcul des tâches virtuelles, celui de transfert des informations et celui d'affichage des images étant négligés, évaluer le retard temporel de la « sortie visuelle » affichée à l'écran sur l'action de l'opérateur lorsque celui-ci génère un signal sinusoïdal de fréquence 5 Hz.
- Évaluer le rapport entre l'amplitude du signal visuel généré sur écran $q_v(t)$ et celle du mouvement généré par l'opérateur $q_1(t)$ à cette fréquence à l'aide des diagrammes de Bode de la fonction de transfert $H_{bras}(p)$ fournis sur la figure 4.63

$$H_{bras}(p) = \frac{Q_1(p)}{C_{op}(p)}$$

- Commenter ces résultats et élargir la réflexion aux signaux de fréquences différentes de 5 Hz.

Tableau des variables utilisées

R	Résistance totale d'induit [Ω]	
L	Inductance totale d'induit [H]	
$e(t)$	Force contre-électromotrice [V]	
K	Coefficient de f.c.e.m [V/(rad/s)] ou de couple du moteur [Nm/A]	$K = 7 \cdot 10^{-2}$ SI
K_i	Gain du capteur de courant	$K_i = 0,2$ V/A
K_{ia}	Gain d'adaptation réglé égal à K_i	$K_{ia} = 0,2$ V/A
$C_{ori}(p)$	FT du correcteur de courant	$C_{ori}(p) = K_c \left(\frac{1 + T_i p}{T_i p} \right)$
K_h	Gain de l'amplificateur de puissance	$K_h = 6$
$H_{m1}(p)$	FT n° 1 du moteur	$H_{m1}(p) = \frac{I(p)}{\varepsilon_{\Omega}(p)}$
$H_{m2}(p)$	FT n° 2 du moteur	$H_{m2}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C(p)}$
$H_1(p)$	FT du réducteur à cabestan de rapport de réduction r_{01}	$H_1(p) = \frac{r_{01}}{p}$
K_a	Gain d'adaptation couple-courant	
b_m	Coefficient de frottement visqueux de la liaison système virtuel/maître [Nm/(rad/s)]	
k_m	Coefficient de raideur de la liaison système virtuel/maître [Nm rad ⁻¹]	
b_v	Coefficient de frottement visqueux de la liaison maître/système virtuel [Nm/(rad/s)]	
k_v	Coefficient de raideur de la liaison maître/système virtuel [Nm/rad]	
$H_v(p)$	FT de l'esclave virtuel	
$I(p)$	Courant absorbé par le moteur [A]	
$V_s(p)$	Tension de sortie de l'amplificateur de puissance [V]	

Tableau des variables utilisées

$C_{m1}(p)$	Couple délivré par le moteur sur l'arbre d'entrée du réducteur à cabestan [Nm]	
$C_{op}(p)$	Couple résultant de l'action de l'opérateur ramené sur l'arbre moteur [Nm]	
J	Moment d'inertie équivalent ramené sur l'arbre moteur [kg m ²]	
f	Coefficient de frottement visqueux produisant un couple résistant proportionnel à la vitesse [Nm/(rad/s)]	
$\Omega_m(p)$	Vitesse angulaire de rotation du moteur [rad s ⁻¹]	
$I_c(p)$	Consigne de courant [A]	
$V_c(p)$	Tension, image de $I_c(p)$ [V]	
$\varepsilon_i(p)$	Écart de « courant » [V]	
$V_r(p)$	Tension de référence de l'amplificateur de puissance [V]	
$\varepsilon_\Omega(p)$	Écart de « vitesse » [V]	
$C(p)$	Couple sur l'arbre moteur [Nm]	
$C_c(p)$	Consigne de couple articulaire [Nm]	
$Q_1(p)$	Position angulaire du socle par rapport au bâti [rad]	
$C_v(p)$	Couple articulaire virtuel [Nm]	
$Q_v(p)$	Position articulaire virtuelle [rad]	

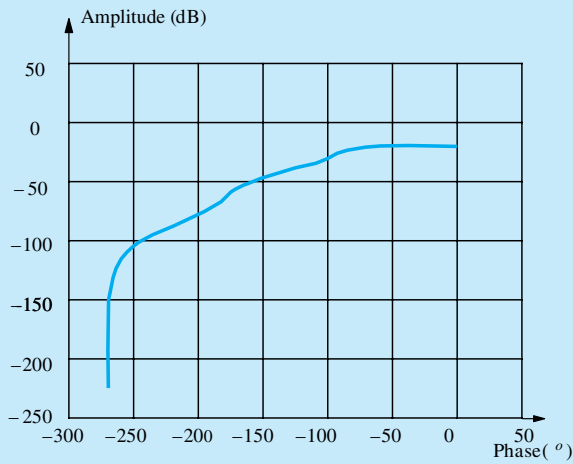


Figure 4.58 Diagramme de Black de $H_0(j\omega)$.

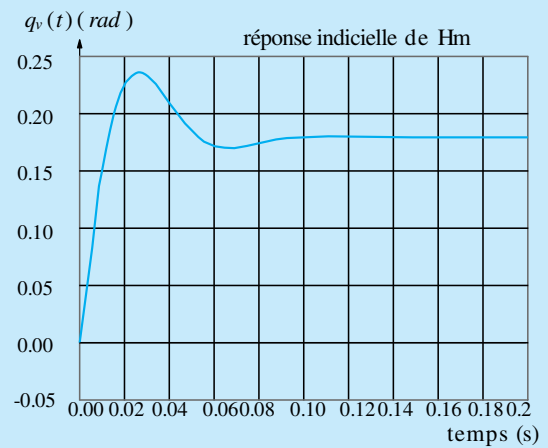


Figure 4.59 Réponse indicielle de H_m .

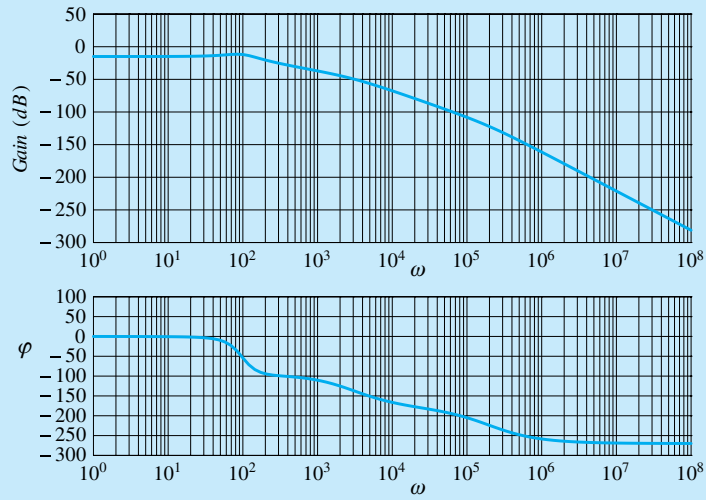


Figure 4.60 Réponse harmonique de $H_m(j\omega)$.

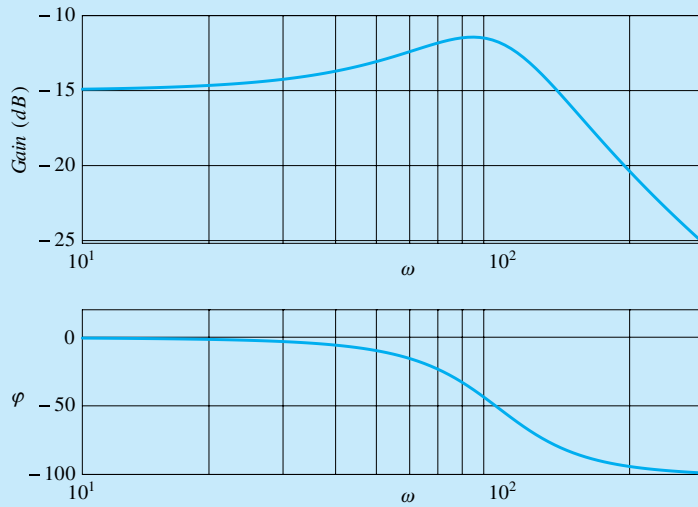


Figure 4.61 Réponse harmonique de $H_m(j\omega)$ – Zoom 1/2.

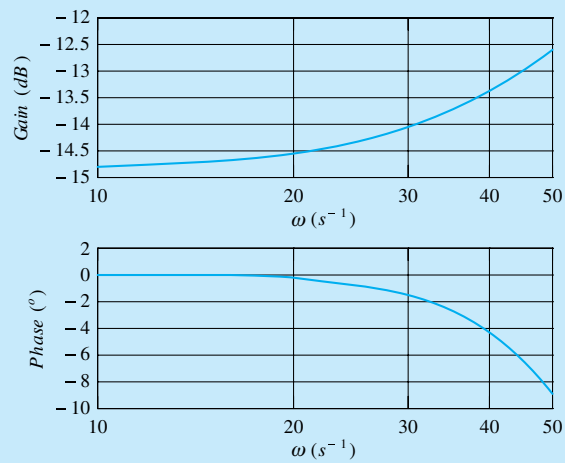


Figure 4.62 Réponse harmonique de $H_m(j\omega)$ – Zoom 2/2.

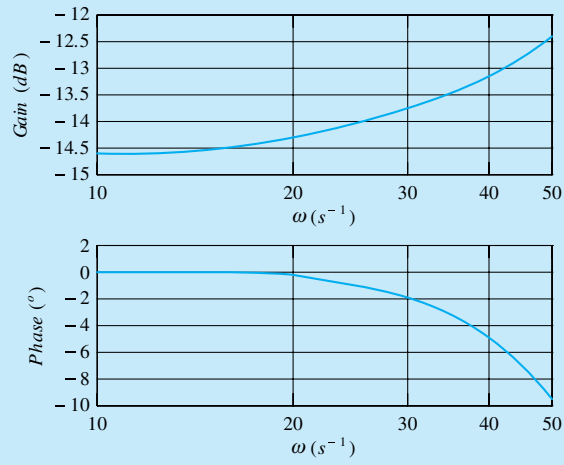


Figure 4.63 Réponse harmonique de $H_{bras}(j\omega)$.

Solutions des exercices

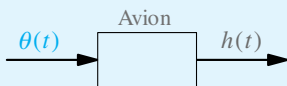
Exercices d'application

4.1

Cet exercice illustre la difficulté de prendre du recul. En effet, il est probable que les ébauches de schéma-bloc font toutes intervenir les *bonnes boîtes*, sauf celle du *système commandé* !

La première question à se poser est ainsi : « Quel est le système qu'un utilisateur peut piloter pour obtenir la grandeur physique souhaitée ? » Une réflexion suite à cette question conduit aux trois propositions suivantes :

- la grandeur physique que l'on souhaite contrôler est l'altitude de l'avion ;
- le système commandé est l'avion ;
- la commande peut être prise où l'on veut sur la chaîne d'action, à savoir l'angle du gouvernail de profondeur par rapport à l'avion ou le signal de commande du préactionneur correspondant. On choisit ici de prendre l'angle du gouvernail de profondeur par rapport à l'avion comme signal de commande.



1. Une fois l'avion identifié comme système commandé, la description proposée conduit au dessin de quatre boîtes supplémentaires :

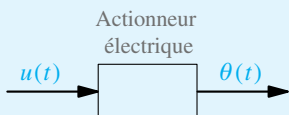
- l'altimètre ;



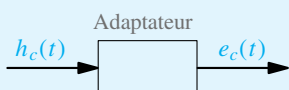
- le régulateur ;



- l'actionneur électrique ;



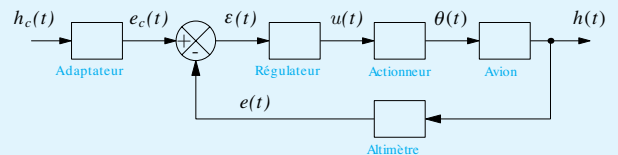
- un adaptateur.



2. L'altitude de l'avion est définie par rapport au sol, et l'avion évolue par rapport à l'air. On comprend ainsi que le mouve-

ment de l'air par rapport au sol, par nature aléatoire, est source de perturbations.

3. On arrive alors à la proposition de schéma-bloc suivante



4.2

1. La grandeur physique que l'on souhaite contrôler est le niveau d'eau h dans la cuve.

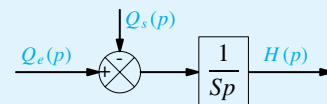
Pour une cuve à section constante d'aire S , cette hauteur $h(t)$ est proportionnelle au volume total d'eau $V(t)$ dans la cuve

$$h(t) = \frac{V(t)}{S}$$

La variation instantanée de volume est caractérisée par le débit-volume instantané, différence entre le débit entrant et le débit sortant

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{S} (q_e(t) - q_s(t))$$

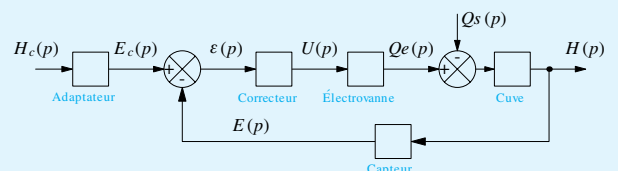
2. On suppose les conditions initiales nulles en prenant comme origine pour le niveau la hauteur souhaitée. Le schéma-bloc correspondant à l'équation précédente est alors



Le débit-volume sortant $q_s(t)$, par nature aléatoire, est à considérer comme une perturbation.

3. Dans le cas d'une cuve sphérique, l'aire de la section S de la cuve dépend de la hauteur h . Il est possible de conserver le modèle posé à la condition de garder le même point de fonctionnement.

4. Définir la structure de l'asservissement ne présente plus aucune difficulté...



4.3

1. Ce système de correction va être sollicité en cas d'accélération et de freinage, tout en tenant compte du chargement du véhicule.

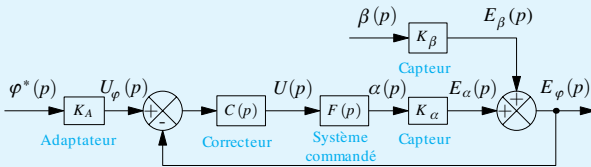
2. Une simple composition des mouvements permet d'écrire, suite à la lecture de l'énoncé

$$\alpha + \beta = \varphi$$

Cet angle φ correspond à l'angle orientant l'axe des phares par rapport à l'axe des roues.

3. L'angle φ^* est dans les faits la consigne pour le système qui modifie l'angle α en fonction des variations aléatoires de l'angle β . Ce dernier angle est à considérer comme une perturbation.

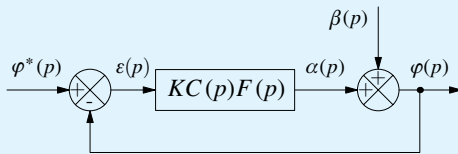
On ajoute un bloc adaptateur pour proposer comme schéma-bloc



La tension E_φ est la somme des tensions E_α et E_β , que l'on compare à la tension U_φ , image de la consigne φ^* , pour élaborer la tension de commande U de l'actionneur.

4. On suppose les gains statiques K_α , K_β et K_A identiques, simplement notés K .

On aboutit alors au schéma-bloc à retour unitaire suivant



On a affaire à un système à deux entrées pour une sortie, on applique en conséquence le principe de superposition pour écrire

$$\varphi(p) = \frac{KC(p)F(p)}{1 + KC(p)F(p)} \varphi^*(p) + \frac{1}{1 + KC(p)F(p)} \beta(p)$$

4.4

1. Pour établir l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule, on considère le système constitué du pendule 3 seul.

Les actions mécaniques extérieures au pendule se résument à :

- l'action de la pesanteur sur le pendule ;
- l'action du coulisseau 2 → 3 relative à la liaison pivot ;
- l'action du coulisseau 2 → 3 engendrée par les frottements vis-à-vis.

Les six équations scalaires résultant de l'application du PFD au pendule permettent :

- de déterminer les cinq inconnues scalaires de la liaison pivot ;
- d'obtenir une équation de mouvement.

Comme on recherche seulement l'équation de mouvement, on choisit d'écrire l'équation du moment dynamique au point A en projection sur \vec{z}_1 .

$$\vec{\delta}(A,3/1) \cdot \vec{z}_1 = \vec{M}(A,\vec{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 \quad (1)$$

Actions mécaniques

On pose les deux torseurs d'action mécanique concernés

$$\mathcal{F}(p \rightarrow 3) = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{l} -mg\vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right.}$$

$$\mathcal{F}(2 \rightarrow 3) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(A,2 \rightarrow 3), \text{ avec } \vec{M}(A,2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = -\mu\dot{\theta} \end{array} \right.$$

On calcule en préliminaire la composante du moment du poids au point A suivant \vec{z}_1

$$\begin{aligned} \vec{M}(A,p \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 &= (-mg\vec{y}_1 \wedge R\vec{y}_3) \cdot \vec{z}_1 \\ &= +mgR \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_3 \\ &= -mgR \sin \theta \end{aligned}$$

Le deuxième terme est déjà connu et on obtient en conséquence

$$\vec{M}(A,\vec{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_1 = -mgR \sin \theta - \mu\dot{\theta} \quad (2)$$

Quantités d'accélération

La masse du pendule 3 est supposée concentrée en G, le vecteur moment dynamique est dans ce cas nul au centre de masse.

$$\vec{\delta}(G,3/1) = \vec{0}$$

La relation de changement de point sur le champ des vecteurs moment dynamique permet alors d'écrire

$$\vec{\delta}(A,3/1) = m\vec{A}(G,3/1) \wedge \vec{GA}$$

Il est nécessaire de calculer le vecteur accélération $\vec{A}(G,3/1)$. On écrit dans ce but le torseur cinématique pour le mouvement 3/1. Il se détermine par composition des mouvements sur la chaîne ouverte 1 – 2 – 3

$$\mathcal{V}(3/1) = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{array} \right.}$$

On calcule ensuite successivement :

- le vecteur vitesse $\vec{V}(G,3/1)$;

$$\begin{aligned} \vec{V}(G,3/1) &= \dot{x}\vec{x}_1 + \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge (-R\vec{y}_3) \\ &= \dot{x}\vec{x}_1 + R\dot{\theta}\vec{x}_3 \end{aligned}$$

- le vecteur accélération $\vec{A}(G,3/1)$;

$$\begin{aligned} \vec{A}(G,3/1) &= \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(G,3/1) \right]_1 \\ &= \ddot{x}\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{x}_3 + R\dot{\theta}^2\vec{y}_3 \end{aligned}$$

- la composante du moment dynamique $\vec{\delta}(A,3/1)$ suivant \vec{z}_1

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(A,3/1) \cdot \vec{z}_1 &= (m(\ddot{x}\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{x}_3 + R\dot{\theta}^2\vec{y}_3) \wedge R\vec{y}_3) \cdot \vec{z}_1 \\ &= mR(\ddot{x} \cos \theta + R\ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (3)$$

Équation du mouvement

On regroupe les deux résultats (2) et (3) pour détailler l'équation initiale (1)

$$mR(\ddot{x} \cos \theta + R\ddot{\theta}) = -mgR \sin \theta - \mu\dot{\theta}$$

L'équation différentielle du mouvement du pendule peut être finalement mise sous la forme

$$mR\ddot{x}(t) = -mR^2 \frac{\ddot{\theta}(t)}{\cos \theta(t)} - \mu \frac{\dot{\theta}(t)}{\cos \theta(t)} - mgR \tan \theta(t) \quad (4)$$

2. L'équilibre du pendule par rapport au coulisseau se traduit par un angle θ constant au cours du temps, et les solutions sont alors données par l'équation

$$\ddot{x}(t) = -g \tan(\theta(t))$$

Cette équation admet comme solutions :

- un angle θ non nul pour un mouvement uniformément accéléré du coulisseau par rapport au bâti ;
- les angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ pour le coulisseau immobile par rapport au bâti.

3. L'équation du mouvement (4) n'est pas une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Il est nécessaire d'étudier chaque cas séparément.

► Linéarisation de la loi entrée-sortie autour de la position $\theta = 0$

Au voisinage de la position $\theta = 0$, on pose les approximations au premier ordre habituelles

$$\cos \theta \approx 1 \quad \sin \theta \approx \theta$$

L'équation différentielle du mouvement est donc approchée par

$$mR\ddot{x}(t) = -mR^2\ddot{\theta}(t) - \mu\dot{\theta}(t) - mgR\theta(t)$$

On passe dans le domaine symbolique en considérant les conditions initiales nulles, et on obtient

$$mRp^2X(p) = -mR^2p^2\Theta(p) - \mu p\Theta(p) - mgR\Theta(p)$$

La fonction de transfert du système autour de la position $\theta = 0$ est donc

$$F_0(p) = \frac{\Theta(p)}{X(p)} = \frac{-mRp^2}{mgR + \mu p + mR^2p^2}$$

Les coefficients du polynôme du dénominateur sont tous strictement positifs. Le dénominateur étant de degré 2, on peut affirmer sans plus de calcul que cette fonction de transfert correspond à un système stable.

► Linéarisation de la loi entrée-sortie autour de la position $\theta = \pi$

Au voisinage de la position $\theta = \pi$, on linéarise l'équation (4) en approximant les fonctions cos et sin par les fonctions linéaires tangentes

$$\cos \theta \approx -1 \quad \sin \theta \approx -(\theta - \pi)$$

L'équation différentielle du mouvement est donc approchée par

$$mR\ddot{x}(t) = mR^2\ddot{\theta}_1(t) + \mu\dot{\theta}_1(t) - mgR(\theta_1(t) - \pi)$$

Pour pouvoir appliquer la transformation de Laplace, il est nécessaire de faire un changement de variable et de poser $\theta_1(t) = \theta(t) - \pi$. Ainsi, si l'on cherche l'évolution du système à partir de la position $\theta(t) = \pi$, la variable $\theta_1(t)$ est telle que pour $t < 0$, $\theta_1(t) = 0$. On obtient alors

$$mR\ddot{x}(t) = mR^2\ddot{\theta}_1(t) + \mu\dot{\theta}_1(t) - mgR\theta_1(t)$$

On passe dans le domaine symbolique en considérant les conditions initiales nulles, et on obtient

$$mRp^2X(p) = mR^2p^2\Theta_1(p) + \mu p\Theta_1(p) - mgR\Theta_1(p)$$

La fonction de transfert du système autour de la position $\theta = \pi$ est donc

$$F_\pi(p) = \frac{\Theta_1(p)}{X(p)} = \frac{-mRp^2}{mgR - \mu p - mR^2p^2}$$

Les coefficients du polynôme du dénominateur ne sont pas tous positifs, la condition nécessaire de stabilité n'est en conséquence pas vérifiée. Cette fonction de transfert correspond à un système instable, ce qui est expérimentalement constaté.

4.5

1. Pour le système du premier ordre, le tableau de Routh s'écrit immédiatement

$$\begin{array}{l|ll} p^1 & \tau & 0 \\ p^0 & 1 & 0 \end{array}$$

Par application du critère de Routh on peut énoncer le théorème suivant :

« Un système du premier ordre est stable si et seulement si sa constante de temps τ est strictement positive ».

2. Pour le système du second ordre, les deux premières lignes du tableau de Routh s'écrivent :

$$\begin{array}{l|ll} p^2 & 1 & \omega_n^2 \\ p^1 & 2\xi\omega_n & 0 \\ p^0 & \dots & \end{array}$$

On trouve immédiatement que le troisième terme de la colonne des pivots vaut ω_n^2

$$\frac{-1}{2\xi\omega_n} \begin{vmatrix} 1 & \omega_n^2 \\ 2\xi\omega_n & 0 \end{vmatrix} = \omega_n^2$$

L'application du critère de Routh permet d'énoncer le théorème suivant :

« Pour qu'un système du second ordre soit stable, il est nécessaire et suffisant que sa pulsation propre ω_n et son coefficient d'amortissement ξ soient strictement positifs ».

4.6

L'ordre et la classe d'un système asservi se déterminent à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$

1. La forme canonique de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système d'ordre 1 et de classe 0 est

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Une des expressions de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système est alors

$$H(p) = \frac{K}{1 + K + \tau p}$$

Le tableau de Routh ne comporte que deux lignes

$$\begin{array}{l|l} p^1 & \tau \\ p^0 & 1 + K \end{array}$$

Le gain statique K et la constante de temps τ sont deux paramètres strictement positifs. On en déduit qu'un système asservi d'ordre 1 et de classe 0 est intrinsèquement stable.

2. La forme canonique de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système d'ordre 2 et de classe 0 est

$$F(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Une des expressions de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système est alors

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{(1+K)\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2}$$

Le tableau de Routh comporte trois lignes

p^2	1	$(1+K)\omega_0^2$
p^1	$2\xi\omega_0$	0
p^0	A_{01}	

On calcule la valeur du coefficient A_{01}

$$A_{01} = \frac{-1}{2\xi\omega_0} \begin{vmatrix} 1 & (1+K)\omega_0^2 \\ 2\xi\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = (1+K)\omega_0^2$$

Le gain statique K , le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre du système non amorti ω_0 sont trois paramètres strictement positifs. Les trois termes de la première colonne du tableau de Routh restent donc toujours strictement positifs. On en déduit qu'un système asservi d'ordre 2 et de classe 0 est intrinsèquement stable.

3. La forme canonique de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système d'ordre 3 et de classe 1 est

$$F(p) = \frac{K}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Une des expressions de la fonction de transfert en boucle fermée de ce système est alors

$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{K\omega_0^2 + \omega_0^2 p + 2\xi\omega_0 p^2 + p^3}$$

Le tableau de Routh comporte pour ce système quatre lignes

p^3	1	ω_0^2	0
p^2	$2\xi\omega_0$	$K\omega_0^2$	0
p^1	A_{11}	A_{12}	
p^0	A_{01}		

Il reste à déterminer les expressions des trois coefficients A_{ij}

$$A_{11} = \frac{-1}{2\xi\omega_0} \begin{vmatrix} 1 & \omega_0^2 \\ 2\xi\omega_0 & K\omega_0^2 \end{vmatrix} = (2\xi\omega_0 - K) \frac{\omega_0}{2\xi}$$

$$A_{12} = 0$$

$$A_{01} = \frac{-1}{A_{11}} \begin{vmatrix} 2\xi\omega_0 & K\omega_0^2 \\ A_{11} & 0 \end{vmatrix} = K\omega_0^2$$

Un changement de signe est possible pour le coefficient A_{11} . Il est nécessaire que le terme $(2\xi\omega_0 - K)$ reste strictement positif pour la stabilité du système en boucle fermée.

Pour que le système asservi d'ordre 3 et de classe 1 soit stable en boucle fermée, le gain K de la FTBO doit rester inférieur à la valeur $2\xi\omega_0$

$$K < 2\xi\omega_0$$

On illustre les trois cas étudiés en traçant les lieux de transfert dans le plan de Black

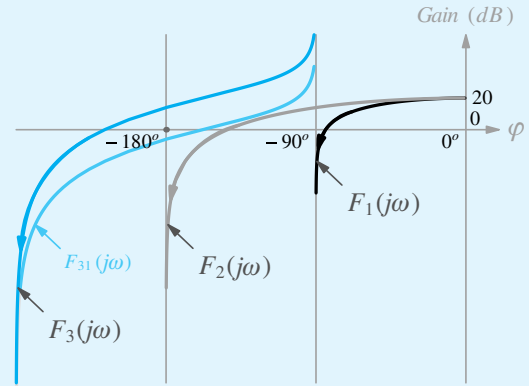


Figure 4.64 Lieux de transfert dans le plan de Black.

Ces courbes ont été tracées en prenant comme paramètres

– pour le système d'ordre 1 et de classe 0 : $K = 10$ et $\tau = 1$

$$F_1(p) = \frac{10}{1+p}$$

– pour le système d'ordre 2 et de classe 0 : $K = 10$, $\omega_0 = 1$ et $\xi = 1$

$$F_2(p) = \frac{10}{1+2p+p^2}$$

– pour le système d'ordre 3 et de classe 1 : $K = 10$, $\omega_0 = 1$ et $\xi = 1$

$$F_3(p) = \frac{10}{p(1+2p+p^2)}$$

Pour ce dernier cas, la condition de stabilité énoncée précédemment n'est effectivement pas vérifiée, car $K > 2\xi\omega_0$! Il est nécessaire de diminuer le gain. À titre d'exemple, la FTBO $F_{31}(j\omega)$ est tracée avec un gain $K = 1$, ce qui revient à décaler le lieu de $F_3(j\omega)$ de -20 dB vers le bas. Le critère du revers permet alors de conclure.

4.7

La fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$ du système est :

$$F(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)^2}$$

La réduction de la boucle permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée $H(p)$

$$H(p) = \frac{K}{p + 2\tau p^2 + \tau^2 p^3 + K}$$

Le dénominateur de la FTBF est $\tau^2 p^3 + 2\tau p^2 + p + K$. Tous les coefficients de ce polynôme sont strictement positifs, la condition nécessaire de stabilité est satisfaite. On construit alors le tableau de Routh :

p^3	τ^2	1	0
p^2	2τ	K	0
p^1	$1 - \frac{\tau K}{2}$	0	
p^0	K		

Le système est donc stable en boucle fermée si et seulement si :

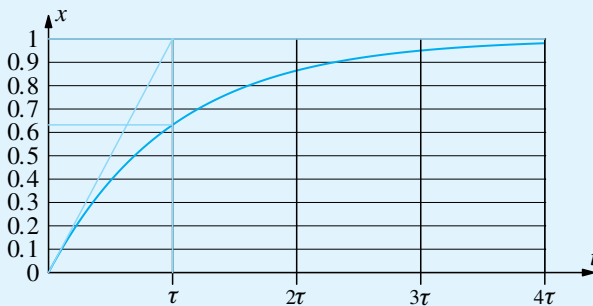
$$K < \frac{2}{\tau}$$

4.8

1. En s'inspirant du schéma bloc de la figure 4.37, on considère le système d'entrée $U(p)$ et de sortie $X(p)$. Dans le domaine symbolique, la réponse du système est donnée par $X(p) = F(p)U(p)$, avec $U(p) = 1/p$. On décompose cette réponse en éléments simples pour obtenir :

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

On obtient alors dans le domaine temporel : $x(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$



2. Les rapports proposés correspondent respectivement aux fonctions de transfert en boucle ouverte et fermée.

• expression de la FTBO :

$$\frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

• expression de la FTBF, que l'on donne ici sous la forme la plus simple et sous la forme canonique :

$$\frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{K}{K + 1 + \tau p} = \frac{\frac{K}{K+1}}{1 + \frac{\tau}{K+1} p}$$

3. Dans le domaine symbolique $X(p) = \frac{K}{p(K + 1 + \tau p)}$.

On obtient alors :

$$x(t) = \frac{K}{K+1} \left(1 - e^{-\frac{t(K+1)}{\tau}} \right)$$

Le tracé de $x(t)$ admet à l'infini comme asymptote la droite horizontale d'ordonnée $\frac{K}{K+1}$ et un temps de réponse à cinq pour cent $t_{5\%} \approx \frac{3\tau}{K+1}$.

$$\text{cent } t_{5\%} \approx \frac{3\tau}{K+1}$$

4. La loi de commande est $u(t) = K(1 - x(t))$ d'où :

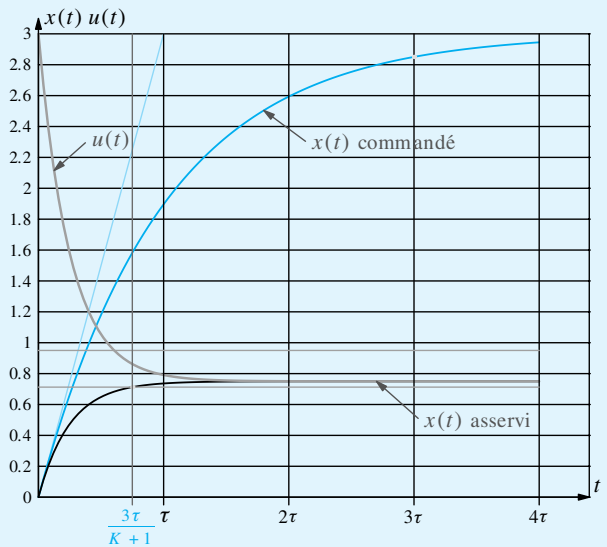
$$u(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 + K e^{-\frac{(1+K)t}{\tau}} \right)$$

5. On utilise les résultats de la première question pour écrire immédiatement

$$x(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

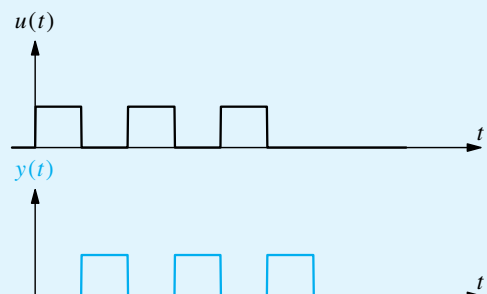
6. Les deux dernière courbes tracées ont la même pente à l'origine, ce qui s'explique par le fait que les deux signaux de commande ont la même valeur à l'instant $t = 0^+$:

- pour le système commandé, cette commande reste constante au cours du temps et le système en boucle ouverte a un temps de réponse $t_{5\%} = 3\tau$;
- pour le système asservi, c'est la consigne qui est constante. La commande est quant à elle élaborée à partir de l'écart et est amplifiée aux instants initiaux. C'est pourquoi le temps de réponse $t_{5\%} = \frac{3\tau}{K+1}$ est raccourci. Il est à noter qu'en contrepartie, la sortie n'atteint pas la valeur de la consigne.



4.9

1. Pour le système commandé, la sortie $y(t)$ est exactement la commande $u(t)$ décalée du retard T .

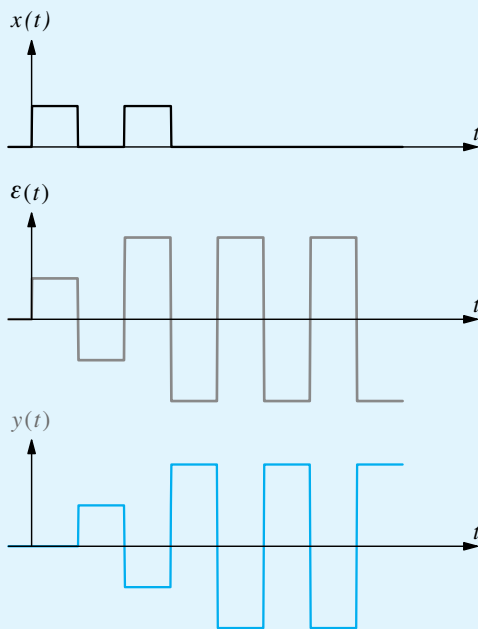


2. On en déduit que si l'entrée reste bornée, la sortie reste également bornée. Ce système commandé est stable au sens EBSB.

3. Le tracé des courbes requiert pour le système bouclé une grande attention :

- avant l'instant initial, toutes les grandeurs ont des valeurs nulles ;
- à l'instant $t = 0$, la consigne passe à 1 ;
- sur l'intervalle $[0, T]$, la sortie étant de valeur nulle, l'écart passe également à 1 ;
- à l'instant $t = T$, la consigne revient à 0 et la sortie passe à 1 ;
- sur l'intervalle $[T, 2T]$, la sortie étant passée à 1, l'écart vaut -1 ;
- à l'instant $t = 2T$, la consigne passe à 1 et la sortie passe à -1 ;
- sur l'intervalle $[2T, 3T]$, la sortie étant passée à -1 , l'écart vaut alors $+2$;
- à l'instant $t = 3T$, la consigne revient à 0 et la sortie passe à $+2$;
- etc.

La poursuite du raisonnement permet de montrer que la sortie est oscillante, alors même que l'entrée reste nulle.



4. Ce système n'est pas stable au sens EBSB. En effet, il suffit de continuer la consigne en créneaux pour que la sortie $y(t)$ diverge.

5. L'expression générale de la sortie $Y(p)$ est

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)} X(p)$$

Une condition nécessaire pour obtenir une sortie différente de zéro pour une entrée nulle est la nullité du dénominateur, soit $F(p) = -1$.

6. En sollicitation harmonique, le système étudié présente les deux propriétés suivantes :

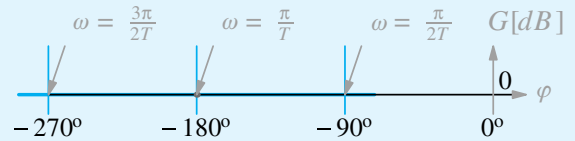
- il est de module égal à un, quelle que soit la pulsation du signal d'entrée ;

$$|e^{-j\omega T}| = 1$$

- sa phase est proportionnelle à la pulsation.

$$\arg(e^{-j\omega T}) = -\omega T$$

On peut ainsi tracer le lieu de transfert dans le plan de Black de la fonction de transfert en boucle ouverte $F(j\omega) = e^{-j\omega T}$



Le système à retard pur étudié est sollicité par une série de créneaux qui correspond à un signal périodique de période $2T$, donc de pulsation π/T :

- le lieu de la FTBO passe pour cette pulsation sur le point critique ;
- la FTBO satisfait à la condition $F(j\omega) = -1$ pour cette pulsation.

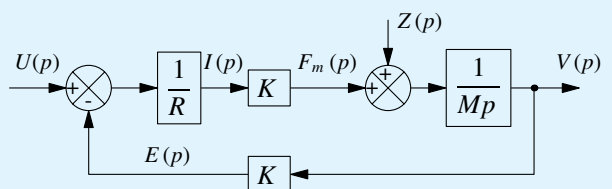
Exercices d'approfondissement

4.10

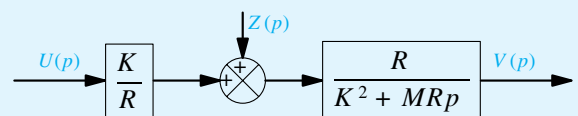
1. On suppose l'ensemble des conditions initiales nulles. Les transformées de Laplace des quatre équations donnent alors, en adoptant les notations usuelles :

$$\begin{cases} U(p) &= R I(p) + E(p) \\ E(p) &= K V(p) \\ Mp V(p) &= F_m(p) + Z(p) \\ F_m(p) &= K I(p) \end{cases}$$

Ces quatre équations s'écrivent en conséquence sous forme de schéma-bloc comme suit



Ce qui donne, après réduction



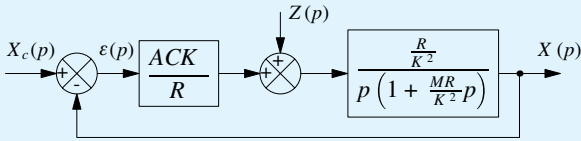
On obtient en définitive pour les fonctions de transfert F_1 et F_2

$$F_1(p) = \frac{K}{R} \quad F_2(p) = \frac{R}{K^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{MR}{K^2} p} \right)$$

2. Les grandeurs ajoutées se nomment immédiatement :

- position pour $X(p)$, obtenue par intégration de la vitesse $V(p)$, et image de cette position pour $M_X(p)$;
- consigne pour $X_c(p)$, et image de la consigne pour $U_X(p)$.

3. Le correcteur absorbe le gain du capteur et on obtient comme schéma-bloc



4. Fonction de transfert en boucle ouverte $F(p)$

$$F(p) = \frac{\frac{ACK}{K}}{p \left(1 + \frac{MR}{K^2} p\right)} \quad AN: F(p) = \frac{20}{p \left(1 + \frac{p}{26.7}\right)}$$

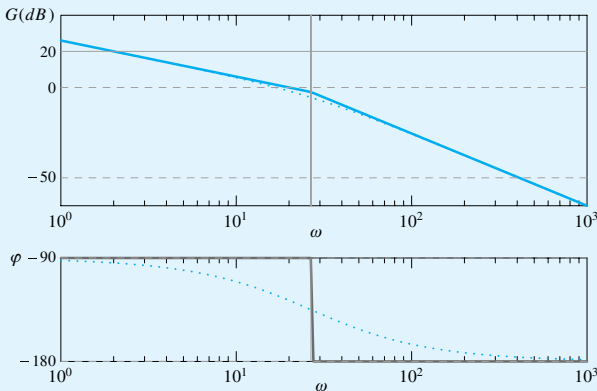
Les lieux de Bode présentent les particularités suivantes :

- concernant le diagramme du gain
 - une cassure avec passage d'une pente de -20 dB/décade à -40 dB/décade pour la pulsation $\omega_0 = 26,7$ rd/s ;
 - un gain pour cette pulsation de $-5,5$ dB.

$$|F(j\omega_0)| = 0,53$$

- concernant le diagramme de phase

- la phase est comprise entre -90° et -180° avec le saut de -90° pour ω_0 .



La phase est supérieure à -180° pour le point de gain en décibel nul et ne franchit pas le seuil critique de -180° lors des pulsations croissantes. Le critère du revers permet d'affirmer la stabilité du système en boucle fermée.

5. Pour déterminer la fonction de transfert en boucle fermée recherchée, on se place dans le cas où $Z(p) = 0$

$$H_X(p) = \frac{ACK}{ACK + K^2 p + MRp^2}$$

soit sous forme canonique

$$H_X(p) = \frac{1}{1 + \frac{K^2}{ACK} p + \frac{MR}{ACK} p^2}$$

Cette fonction de transfert est de gain statique égal à l'unité, ce qui entraîne que la sortie rejoint l'entrée pour une entrée en échelon.

6. Pour déterminer cette fonction de transfert, on se place dans le cas où $X_c(p) = 0$

$$H_Z(p) = \frac{R}{ACK + K^2 p + MRp^2}$$

soit sous forme canonique

$$H_Z(p) = \frac{\frac{R}{ACK}}{1 + \frac{K^2}{ACK} p + \frac{MR}{ACK} p^2}$$

7. Étant donné que le gain statique de $H_Z(p)$ est $\frac{R}{ACK}$, la sortie tend vers $\frac{R}{ACK} Z_0$ suite à un échelon de perturbation d'amplitude Z_0 . Avec les valeurs numériques données, on obtient :

$$\frac{R}{ACK} Z_0 = 9,4 \text{ mm}$$

La performance souhaitée n'est pas atteinte, le système reste trop sensible aux perturbations.

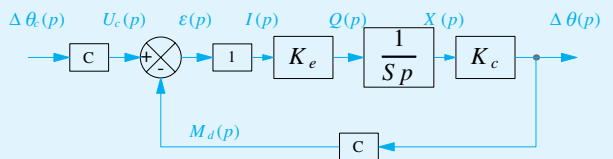
4.11

1. On se place au niveau d'un point de fonctionnement, ce qui revient à poser $\theta_v(t) = 0$. La lecture du schéma-bloc initial conduit à affirmer que dans ce cas :

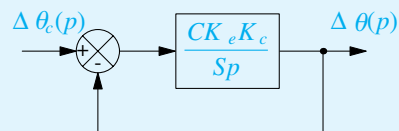
- l'angle $\theta_1(t)$ est posé nul également ;
- les mesures m_{θ_v} , et $im_{\theta_v}(t) = 0$ sont nulles en conséquence.

Finalement, $\theta_2(t) = \Delta\theta(t)$ et $m_d(t) = m_{\theta_2}(t)$: le schéma bloc de la figure 4.39 se transforme bien en celui de la figure 4.40.

2. Le schéma bloc comporte un comparateur et six boîtes, ce qui induit sept équations à considérer. Parmi elles, l'équation du vérin devient $Q(p) = SpX(p)$ et on obtient comme schéma-bloc



3. On transforme le schéma-bloc pour le rendre à retour unitaire



La fonction de transfert en boucle fermée s'exprime sous forme canonique par

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{S}{CK_e K_c} p}$$

Cette fonction de transfert correspond à un système du 1^{er} ordre de constante de temps

$$\tau = \frac{S}{CK_e K_c}$$

Le temps de réponse à 5% d'un système du 1^{er} ordre est $T_5\% \approx 3\tau$. On en déduit la valeur du gain cherchée

$$K_e = \frac{3S}{T_5\% CK_c} \quad AN : K_e = 6,4 \cdot 10^{-5} m^3 s^{-1} A^{-1}$$

4. Par la transformée de Laplace, on obtient pour les deux équations

$$Q(p) = SpX(p) + \frac{V}{B}pP(p)$$

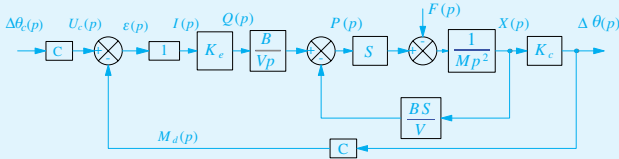
$$\text{et } Mp^2X(p) = SP(p) - F(p)$$

On arrange ces équations pour écrire

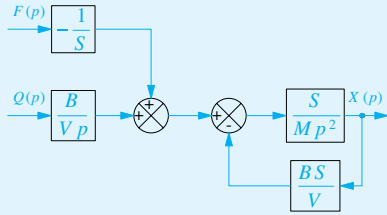
$$P(p) = \frac{B}{pV}Q(p) - \frac{BS}{V}X(p)$$

$$\text{et } X(p) = \frac{1}{Mp^2}(SP(p) - F(p))$$

On peut alors compléter le schéma-bloc proposé



5. On transforme localement le schéma-bloc précédent pour sortir l'arrivée de la perturbation de la boucle intérieure



On en déduit

$$X(p) = \frac{S}{Mp^2} \frac{B}{BS^2} \left(\frac{B}{Vp}Q(p) - \frac{1}{S}F(p) \right)$$

soit encore, après calcul

$$X(p) = \left(\frac{1}{Sp} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{VM}{BS^2}p^2} \right) Q(p) + \left(\frac{-\frac{V}{BS^2}}{1 + \frac{VM}{BS^2}p^2} \right) F(p)$$

Apparaissent sous cette forme les fonctions de transfert $H_Q(p)$ et $H_F(p)$

$$H_Q(p) = \frac{1}{Sp} \frac{1}{1 + \frac{VM}{BS^2}p^2}$$

$$\text{et } H_F(p) = \frac{-\frac{V}{BS^2}}{1 + \frac{VM}{BS^2}p^2}$$

Les résultats sont de la forme attendue avec comme coefficients

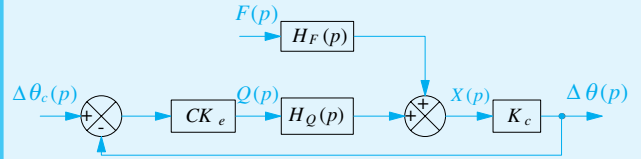
$$a_1 = S \quad a_2 = \frac{VM}{BS^2} \quad a_3 = -\frac{V}{BS^2}$$

Les applications numériques conduisent finalement à

$$a_1 = 9,600 \cdot 10^{-4} m^2 \quad a_2 = 1,736 \cdot 10^{-8} s^2$$

$$a_3 = -3,472 \cdot 10^{-8} s^2 kg^{-1}$$

6. On souhaite appliquer le critère de Routh à la modélisation actuelle transformant la consigne $\Delta\theta_c(p)$ en $\Delta\theta(p)$



La fonction de transfert en boucle fermée est

$$H_{BF}(p) = \frac{CK_eK_cH_Q(p)}{1 + CK_eK_cH_Q(p)}$$

avec $H_Q(p) = \frac{1}{a_1p(1 + a_2p^2)}$. On en déduit

$$H_{BF}(p) = \frac{CK_eK_c}{a_1p(1 + a_2p^2) + CK_eK_c}$$

Le polynôme caractéristique $D(p)$ de la fonction de transfert est alors

$$D(p) = CK_eK_c + a_1p + a_1a_2p^3$$

Le coefficient en p^2 est nul, donc la condition nécessaire de stabilité n'est pas satisfaite. Le système est instable en boucle fermée.

La construction du tableau de Routh n'est donc pas nécessaire. Néanmoins, si on amorce sa construction il vient :

$$\begin{array}{c|ccc} p^3 & a_1a_2 & a_1 & 0 \\ p^2 & 0 & CK_eK_c & 0 \\ p^1 & - & - & \\ p^0 & - & & \end{array}$$

Le zéro présent dans la première colonne permet de conclure à l'instabilité du système sans plus de calcul.

7. Sur le diagramme de la figure 4.45, on relève pour différentes pulsations les coordonnées (φ, G_{dB}) des points à tracer

phase [°]	-113	-135	-180	-225	-248
gain[dB]	9	14	18	14	9

On complète ensuite le diagramme de Black de la figure 4.65

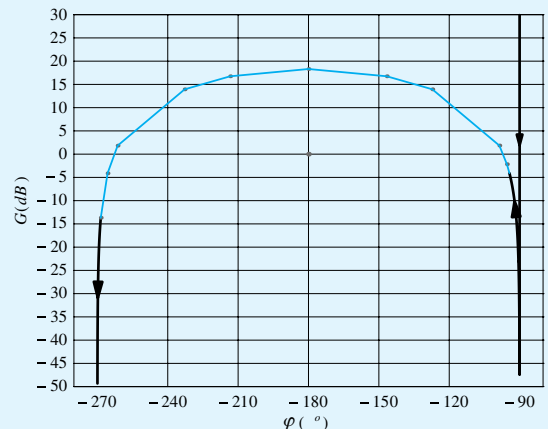


Figure 4.65 Diagramme de Black de la question 7.

8. On utilise le théorème du revers : « Un système est stable en boucle fermée si, sur un diagramme de BLACK, on laisse le point critique sur la droite lorsque l'on parcourt le lieu de sa FTBO dans le sens des pulsations croissantes. »

Pour cette FTBO, on laisse le point critique ($-180^\circ, 0$ dB) sur la gauche. Le système en boucle fermée est donc instable.

On a ici $H_{BO}(p) = CK_e K_c H_Q(p)$ soit

$$H_{BO}(p) = \frac{CK_e K_c}{a_1 p \left(1 + \frac{2\xi_Q}{\omega_Q} p + \frac{1}{\omega_Q^2} p^2 \right)}$$

On constate qu'il y a résonance compte tenu de la présence de pôles complexes conjugués avec $\xi_Q < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour un second ordre, le coefficient de surtension est

$$Q_{dB} = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi_Q \sqrt{1 - \xi_Q^2}} \right)$$

Pour la valeur $\xi_Q = 0,0001$, on obtient un coefficient de surtension $Q_{dB} = 74$ dB. Pour revenir à la limite de la stabilité, il faut que le lieu de la FTBO passe sous le point critique. Il faut donc que le pic de la FTBO baisse au moins de 18 dB ce qui conduit à un coefficient de surtension maximal de 56 dB. On calcule alors comme condition sur le coefficient d'amortissement

$$\xi_Q > 0,0008$$

9. On considère la FTBO $H_{BO1}(p)$

$$H_{BO1}(p) = \frac{CK_e K_c}{a_1 p \left(1 + \frac{2\xi_Q}{\omega_Q} p + \frac{1}{\omega_Q^2} p^2 \right)}$$

Cette fonction a un pôle nul et deux pôles complexes conjugués. Le pôle dominant est le pôle le plus proche de l'axe imaginaire, c'est-à-dire le pôle nul. Pour la suite, il convient de prendre

$$H_{BO2}(p) = \frac{CK_e K_c}{a_1 p}$$

L'écart à la sortie du comparateur est caractérisé par

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO2}(p)} \Delta\theta_c(p)$$

On utilise le théorème de la valeur initiale et de la valeur finale, avec $\Delta\theta_c(p) = \frac{1}{p^2}$ pour une entrée en rampe de pente unitaire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{p^2 (1 + H_{BO2}(p))}$$

L'écart en poursuite vaut donc

$$\varepsilon_P = \frac{a_1}{CK_e K_c} \quad \text{AN : } \varepsilon_P = 0,0833$$

La rampe est de pente unitaire, donc le retard de la réponse en poursuite est de $\Delta t = 0,0833$ s.

La bande passante à 0 dB de la FTBO est obtenue par la relation

$$|H_{BO2}(j\omega_{0dB})| = \frac{CK_e K_c}{a_1 \omega_{0dB}} = 1$$

On en déduit

$$\omega_{0dB} = \frac{CK_e K_c}{a_1} \quad \text{AN : } \omega_{0dB} = 12 \text{ rad s}^{-1}$$

10. On choisit de tracer sur la figure 4.66 les diagrammes de Bode asymptotiques de la fonction de transfert

$$H_{BO2}(p) = \frac{CK_e K_c}{a_1 p^2 \left(1 + \frac{2\xi_Q}{\omega_Q} p + \frac{1}{\omega_Q^2} p^2 \right)}$$

- pour ω tendant vers 0, la phase tend vers -180° et le gain présente une pente de -40 dB/décade ;
- pour $\omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, l'asymptote du diagramme du gain passe par le point de gain $20 \log \left(\frac{CK_e K_c}{a_1} \right) = 21,6$ dB ;
- les diagrammes présentent une cassure pour ω_Q : la phase diminue de 180° tandis que l'asymptote du gain passe à une pente de -80 dB/décade.

Le diagramme réel de phase venant approcher l'asymptote à -180° par le dessous, le système est instable en boucle fermée. Sur le diagramme de Black de cette fonction, le critère du revers n'est pas respecté. Le calcul de la marge de phase conduit à une valeur proche de zéro mais par valeur négative.

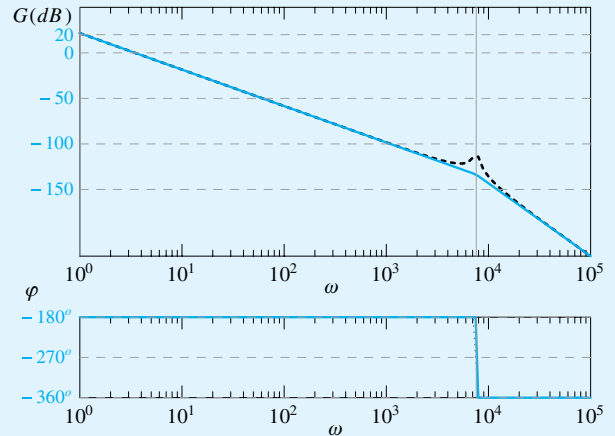


Figure 4.66 Diagrammes asymptotiques de la FTBO avec un intégrateur.

11. Pour la pulsation $\omega = 12 \text{ rad.s}^{-1}$, le gain de la FTBO est égal à -21 dB. Pour que cette pulsation soit la limite de la bande passante à 0 dB, il faut utiliser un gain de $(K_{AV})_{dB} = 21$ dB soit

$$K_{AV} = 11,2$$

12. Comme pour $\omega_{0dB} = 12 \text{ rad.s}^{-1}$ la phase de la FTBO a comme valeur -180° , le correcteur doit augmenter la phase de la FTBO de 50° pour cette pulsation.

Le correcteur doit donc être tel que $\sin(50^\circ) = \frac{1-a}{1+a}$, ce qui conduit à

$$a = \frac{1 - \sin(50^\circ)}{1 + \sin(50^\circ)} = 0,1325$$

Cet apport de phase doit se faire pour la pulsation $\omega_{0dB} = 12 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour un tel correcteur, l'apport maximal de phase correspond

à la pulsation $\frac{1}{\tau_{AV}\sqrt{a}}$ soit

$$\tau_{AV} = \frac{1}{\omega_{0dB}\sqrt{a}} \quad \text{AN : } \tau_{AV} = 0,229 \text{ s}$$

Remarque : Pour être sûr que la pulsation de coupure à 0 dB soit $\omega_{0dB} = 12 \text{ rad.s}^{-1}$, il faut corriger le gain K_{AV} . En effet, le gain de la FTBO est légèrement modifié par le correcteur. Il est augmenté de $10 \log(\frac{1}{a})$ au voisinage de la pulsation de coupure choisie.

4.12

1.

• L'asservissement de courant est équivalent à un asservissement de couple car, compte tenu des équations fournies figure 4.52, le couple moteur $c_m(t)$ est directement proportionnel au courant $i(t)$. En conséquence, contrôler le courant alimentant le moteur revient à contrôler le couple qu'il fournit.

• Le gain d'adaptation K_a doit être tel que les rapports $\frac{c_c(t)}{i_c(t)}$ et

$\frac{c_m(t)}{i(t)}$ soient égaux. Ainsi, les grandeurs comparées sont telles

que l'écart est nul lorsque le couple de sortie $c_m(t)$ est égal au couple de consigne $c_c(t)$. On en déduit $K_a = K$.

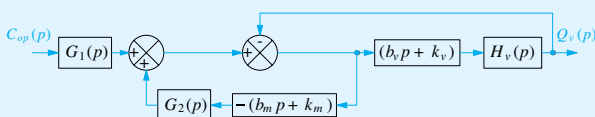
2. Il convient de vérifier si le cahier des charges est validé pour chacune des combinaisons possible. Dès qu'une combinaison ne satisfait pas à une des exigences, elle peut être éliminée. Les résultats sont synthétisés dans le tableau ci-dessous. Lorsque l'écart statique est nul, que la réponse est sans dépassement, que le courant absorbé par le moteur reste inférieur à 23 A, que la tension de sortie v_s reste au dessous de 30 V, c'est le temps de réponse à 5 % qui est indiqué. Ce temps de réponse T_r est l'instant où le courant atteint 95 % de la valeur de consigne 14,3, soit 13,6 A.

$K_c \setminus T_i$	0,001 s	0,003 s	0,005 s
1	Dépassement donc ne convient pas	Dépassement donc ne convient pas	$T_r \approx 0,009 \text{ S}$
1,4	$v_s(0,002) > 30 \text{ V}$ donc ne convient pas	Dépassement donc ne convient pas	$T_r \approx 0,006 \text{ S}$
2	$v_s(0) > 30 \text{ V}$ donc ne convient pas	$v_s(0) > 30 \text{ V}$ donc ne convient pas	$v_s(0) > 30 \text{ V}$ donc ne convient pas

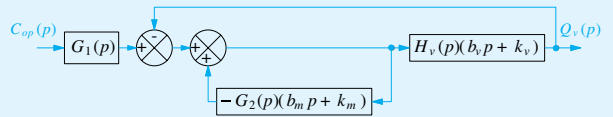
La solution présentant le meilleur temps de réponse tout en respectant les autres critères est $K_c = 1,4$ et $T_i = 0,005 \text{ s}$.

3. L'expression de la fonction de transfert $H_m(p)$ peut être obtenue par transformations successives du schéma-bloc initial de la figure 4.54.

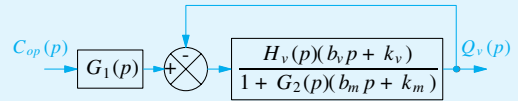
Tout d'abord, on prend $C_{op}(p)$ comme entrée et $Q_v(p)$ comme sortie



Échange des sommateurs pour résoudre les deux boucles imbriquées



Réduction de la boucle interne



Réduction de la deuxième boucle

$$\frac{Q_v(p)}{C_{op}(p)} = G_1(p) \frac{H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + \frac{G_2(p)(b_m p + k_m)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m)}}$$

On en déduit finalement

$$H_m(p) = \frac{G_1(p)H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m) + H_v(p)(b_v p + k_v)}$$

4.

• Pour être en régime permanent et déterminer une relation entre le couple opérateur et la position articulaire virtuelle, il suffit de déterminer la limite Q_v de $q_v(t)$ quand le temps t tend vers l'infini pour l'entrée en échelon unitaire $c_{op}(t)$.

Le théorème de la valeur initiale et de la valeur finale conduit à :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q_v(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot Q_v(p)$$

Sachant que $Q_v(p) = H_m(p)C_{op}(p)$ et $C_{op}(p) = \frac{1}{p}$, on en déduit l'expression

$$Q_v = \lim_{p \rightarrow 0} H_m(p)$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, il vient

$$Q_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{G_1(p)H_v(p)(b_v p + k_v)}{1 + G_2(p)(b_m p + k_m) + H_v(p)(b_v p + k_v)}$$

Compte tenu des éléments fournis, on obtient finalement

$$Q_v = \frac{4k_v}{k_m}$$

Comme le couple appliqué est unitaire, on a $1 = R Q_v$ d'où

$$R = \frac{k_m}{4k_v}$$

• Le critère de raideur demandé (figure 4.55) impose $R > 2 \text{ Nm/rad}$. En conséquence, k_v et k_m doivent satisfaire la relation :

$$k_m > 80k_v$$

5.

• En observant les diagrammes de Bode de $H_m(p)$, on constate que la première asymptote du diagramme de gain est horizontale et que le déphasage est nul. La fonction $H_m(p)$ est donc de classe zéro. Pour les grandes pulsations, le déphasage tend vers -270° , la pente du diagramme de gain est de -60 dB/décade . Le degré du dénominateur est donc égal au degré

du numérateur augmenté de trois unités. On peut donc conclure en affirmant que l'ordre de $H_m(p)$ est au moins 3. Si pour les systèmes d'ordre 1 et 2 la stabilité est acquise, un système d'ordre 3 présente un risque potentiel d'instabilité.

- L'instabilité du système se traduirait par un comportement tel que le manipulateur ne contrôlerait plus la position de l'objet manipulé. L'opérateur devenant immobile, l'objet continuerait à évoluer. Il y aurait une divergence de la sortie pour une entrée restant dans un interval fermé borné.
- Certaines des informations fournies permettent d'affirmer que le réglage proposé assure la stabilité de $H_m(p)$:
 - la réponse indicielle du système en boucle fermée de fonction de transfert $H_m(p)$ converge ;
 - le diagramme de Black de la FTBO du système $H_0(j\omega)$ vérifie le critère du revers. Le parcours du lieu de BLACK dans le sens des pulsations croissantes laisse le point critique ($-180^\circ, 0$ dB) sur la droite.

6. Un examen du diagramme de Bode du gain de $H_m(j\omega)$ permet de conclure que le gain statique de cette fonction de transfert est d'environ $-14,8$ dB. La pulsation $\omega_{3\text{dB}}$ est donc la pulsation telle que

$$20 \log (|H_m(j\omega_{3\text{dB}})|) = -17,8.$$

Une lecture sur la figure 4.61 conduit à une pulsation $\omega_{3\text{dB}} = 17$ rad/s environ ($\log(\omega_{3\text{dB}}) = 2,23$). La fréquence de coupure à -3 dB est donc

$$f_{3\text{dB}} = \frac{\omega_{3\text{dB}}}{2\pi}$$

Après calcul, on trouve $f_{3\text{dB}} = 27$ Hz. Cette fréquence est supérieure à la limite minimale imposée de 20 Hz. Le critère de bande passante motrice est satisfait.

7.

- L'entrée du système est de la forme $c_{op}(t) = A_1 \sin(\omega t)$. Pour cette entrée, la sortie du système est de la forme $q_v(t) = B_1 \sin(\omega t + \varphi)$ ou encore $q_v(t) = B_1 \sin(\omega(t - T))$ si le retard de la sortie par rapport à l'entrée est noté T .

Le retard est alors donné par la relation $T = \frac{-\varphi}{\omega}$.

Pour $f = 5$ Hz, c'est-à-dire pour $\omega = 2\pi f = 31,4$ rad/s, le diagramme de Bode en phase de $H_m(j\omega)$ donne $\varphi = -2^\circ$. Le retard est donc

$$T = 2 \frac{\pi}{180} \frac{1}{2\pi f} \quad \text{AN : } T \approx 10^{-3} \text{ s}$$

- Une fréquence de $f = 5$ Hz correspond à une pulsation de $\omega_5 = 31,4$ rad/s. Les diagrammes de Bode fournis permettent de relever pour cette pulsation

$$\begin{aligned} 20 \log (|H_m(j\omega_5)|) &= -14 \text{ dB} \\ 20 \log (|H_{bras}(j\omega_5)|) &= -13,7 \text{ dB} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 20 \log \left(\frac{Q_v}{Q_1} \right) &= 20 \log \left(\frac{Q_v}{C_{op}} \right) - 20 \log \left(\frac{Q_1}{C_{op}} \right) \\ &= -14 \text{ dB} + 13,7 \text{ dB} \\ &= -0,3 \text{ dB} \end{aligned}$$

Finalement, le rapport de l'amplitude du signal visuel sur l'amplitude du mouvement de l'opérateur est

$$\frac{Q - v}{Q_1} = 0,97$$

- Compte tenu de ces résultats, les mouvements de l'opérateur sont répercutés sur le système virtuel en vraie grandeur (à 3 % près) et quasiment en temps réel (seulement 1 millième de seconde de retard).

Si la fréquence des signaux augmente, le retard augmente. Par contre, comme le montrent les résultats du tableau suivant, le rapport de l'amplitude du signal visuel sur l'amplitude du mouvement de l'opérateur est quasiment constant pour des pulsations allant de 10 rad/s à 50 rad/s, compte tenu de l'imprécision de lecture sur les diagrammes.

ω (rad/s)	$20 \log (H_m)$	$20 \log (H_{bras})$	$20 \log \left(\frac{Q_v}{Q_1} \right)$	$\frac{Q_v}{Q_1}$
10	-14,9	-14,6	-0,3	0,97
20	-14,6	-14,3	-0,3	0,97
30	-14,0	-13,7	-0,3	0,97
40	-13,4	-13,1	-0,3	0,97
50	-12,7	-12,4	-0,3	0,97

Plan

5.1 Performances des systèmes asservis	169
5.2 Améliorer les performances en corrigeant la commande	182
5.3 Correction proportionnelle	184
5.4 Corrections à action intégrale	186
5.5 Corrections à action dérivée	191
5.6 Correction PID	193
Exercices d'application	195
Exercices d'approfondissement	199
Solutions des exercices	203

Introduction

Un système est asservi pour que son fonctionnement soit conforme à des attentes définies dans un cahier des charges. Ce cahier des charges se décline en termes de performances auxquelles le système doit satisfaire. Si les performances attendues ne sont pas atteintes, il convient de modifier la commande du système pour faire évoluer ces performances dans le sens souhaité. C'est l'objet de la partie correction qui suit la définition des principaux critères de performances habituellement utilisés.

Prérequis

- Le chapitre précédent.

Objectifs

- Évaluer les performances d'un système asservi.
- Proposer les solutions pour améliorer les performances d'un système asservi.
- Déterminer les paramètres de correcteurs pour obtenir un comportement d'un système asservi conforme à un cahier des charges.

5.1 Performances des systèmes asservis

Les performances sont des caractéristiques propres à un système ou liées à son comportement lorsqu'il est sollicité de façon particulière :

- elles permettent de comparer différents systèmes, ou différentes variantes d'un même système ;
- elles sont utilisées pour définir un cahier des charges susceptible d'être échangé entre sociétés ou services d'une société.

Leur compréhension doit être la plus universelle possible et leur définition est généralement établie de façon conventionnelle.

5.1.1

Marges de stabilité des systèmes asservis

Les systèmes réels ne sont généralement pas des systèmes continus linéaires invariants. Ils présentent des problèmes d'usure mécanique, de vieillissement de composants... Il serait insensé de les classer en deux catégories : les systèmes stables d'une part, les systèmes instables de l'autre. Un système stable à une date donnée peut avoir un comportement qui s'altère au fil du temps au point de devenir instable. Un système stable mais très oscillant a un comportement que l'on essaie souvent d'éviter.

La stabilité intrinsèque d'un système n'est pas suffisante. L'usage est donc de prévoir une marge de sécurité par rapport à l'état limite de transition « stable-instable ».

Pour un système défini par sa fonction de transfert, son instabilité est liée à l'existence de pôles à partie réelle positive, son trop faible amortissement est lié à des racines complexes conjuguées trop éloignées de l'axe des réels. Garder une marge de stabilité revient à faire en sorte que ses pôles soient dans une zone limitée du plan complexe, comme le montre la figure 5.1.

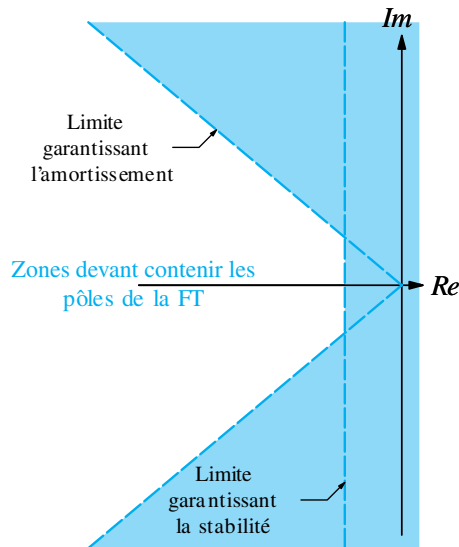


Figure 5.1 Emplacement des pôles d'une FTBF stable amortie.

Pour un système asservi, une autre approche est privilégiée. Pour qu'un système asservi soit stable, sa FTBO doit satisfaire le critère du revers. La marge par rapport à la limite de stabilité peut donc être évaluée en examinant la position relative de la FTBO par rapport au point critique. L'éloignement de la FTBO du point critique est quantifié à l'aide de nombreux critères. Ne sont définis ci-après que trois d'entre eux : la marge de gain, la marge de phase et la marge de module.

Marge de gain, marge de phase

En définissant ces deux marges, on essaie de caractériser l'éloignement du lieu de la FTBO par rapport au point critique en examinant la position de deux points particuliers de la FTBO. À condition d'être « du bon côté » du point critique, plus cet éloignement est important, plus la « marge » par rapport à la limite d'instabilité est grande.

Les marges de gain et de phase se définissent par des distances facilement représentables sur le diagramme de BLACK d'une FTBO qui satisfait au critère du revers. La figure 5.2 illustre la mise en place de ces marges. On peut ensuite transposer ces résultats aux diagrammes de BODE et de NYQUIST.

La stabilité a été définie et caractérisée au chapitre précédent.



Cet éloignement permet aussi de limiter le facteur de résonance.



Une transposition de la détermination des marges de gain et de phase sur le diagramme de NYQUIST est proposée à la figure 5.5.



Définitions

- On appelle **marge de gain** d'un système asservi la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut -180° et le point critique.
- On appelle **marge de phase** d'un système asservi la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB .

Notations :

- La marge de gain est notée M_G . Elle s'exprime en dB .
- La marge de phase est notée M_φ . Elle s'exprime en $^\circ$.

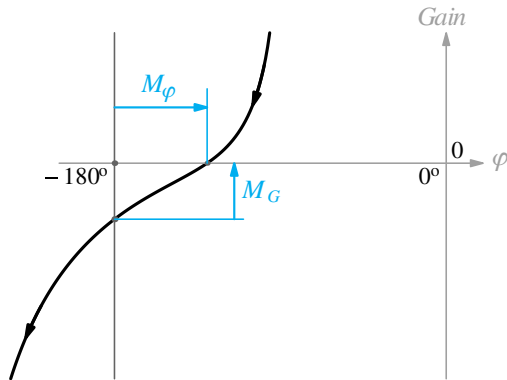


Figure 5.2 Marges de gain et de phase sur le lieu de BLACK d'une FTBO.

► Cas particulier

Si la FTBO ne coupe pas la droite $\varphi = -180^\circ$, comme le montre la figure 5.3, la marge de gain est dite infinie :

$$M_G = +\infty$$

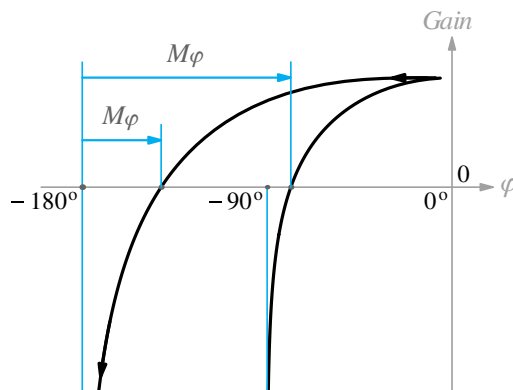


Figure 5.3 Cas particulier d'une marge de gain infinie sur le lieu de BLACK d'une FTBO.

On retrouve cette particularité pour la plupart des systèmes des premier et second ordres, comme ceux représentés sur la figure 5.3. Elle permet d'énoncer les deux résultats suivants :

- Pour un **système à FTBO du second ordre**, la marge de gain est infinie ;

$$M_G = +\infty$$



Pour un premier ordre simple, le déphasage tend vers -90° lorsque la pulsation tend vers l'infini, donc sa FTBO est au moins éloignée de 90° par rapport au point critique !

- Pour un **système à FTBO du premier ordre**, la marge de gain est infinie et la marge de phase est supérieure à 90° .

$$M_G = +\infty \quad \text{et} \quad M_\varphi \geq 90^\circ$$

► **Détermination des marges de gain et phase par calcul**

Pour une FTBO $F(p)$, on note :

- ω_{-180° la pulsation telle que

$$\text{Arg}(F(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ$$

- $\omega_{0\text{dB}}$ la pulsation de coupure à 0 dB , c'est-à-dire la pulsation telle que le gain vérifie :

$$|F(j\omega_{0\text{dB}})| = 1 \quad \text{ou bien} \quad 20 \text{ Log}|F(j\omega_{0\text{dB}})| = 0\text{ dB}$$

Les marges de gain et de phase sont calculables par :

$$M_G = -20 \text{ Log}|F(j\omega_{-180^\circ})|$$

$$M_\varphi = \text{Arg}(F(j\omega_{0\text{dB}})) + 180^\circ$$

► **Marges de gain et de phase sur un diagramme de BODE**

Le point critique n'est défini que dans les plans de NYQUIST et de BLACK. Sur des diagrammes de BODE, il est donc nécessaire de procéder en deux temps (voir figure 5.4). Pour déterminer la marge de gain, il faut :

- rechercher graphiquement la pulsation ω_{-180° ;
- pour la pulsation ω_{-180° déterminer M_G .

Pour déterminer la marge de phase, il faut :

- rechercher graphiquement la pulsation $\omega_{0\text{dB}}$;
- pour la pulsation $\omega_{0\text{dB}}$ déterminer M_φ .

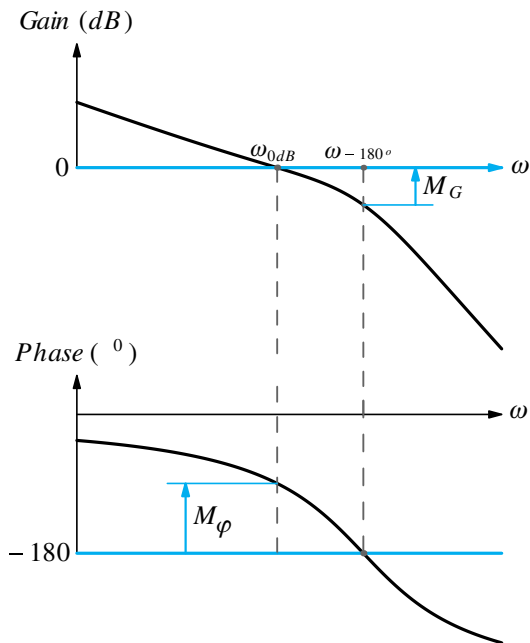


Figure 5.4 Marges de gain et de phase sur le lieu de BODE d'une FTBO.

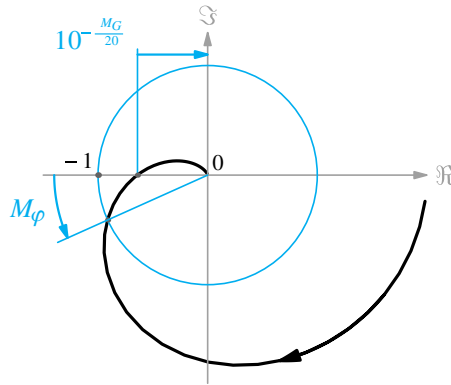


Figure 5.5 Marges de gain et de phase sur le lieu de NYQUIST d'une FTBO.

Règles d'usage

- On dit qu'un système a des marges de gain et de phase satisfaisantes si elles sont supérieures aux valeurs minimales imposées dans son cahier des charges.
- Généralement, la marge de gain minimale exigée M_G est de l'ordre de 8 dB à 12 dB, la marge de phase minimale exigée M_φ est de l'ordre de 45° à 60°.

Marge de module

Cette marge traduit, de façon plus globale que les marges de gain et de phase, la distance de la FTBO par rapport au point critique. Pour la présenter, il est nécessaire de définir l'abaque de NICHOLS qui accompagne généralement un diagramme de BLACK.

► Abaque de BLACK-NICHOLS

La FTBF d'un système à retour unitaire de FTBO $F(p)$ est

$$H(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)}$$

Passer du lieu de transfert de la FTBO à celui de la FTBF consiste à utiliser la transformation conforme qui associe au complexe z le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{1 + z}$$

Cette opération est possible sans calcul en utilisant l'abaque de NICHOLS (voir figure 5.6).

L'abaque de NICHOLS est tracé dans le plan de BLACK où le complexe z est représenté par le point de coordonnées $(\text{Arg}(z), 20 \text{Log}|z|)$ ou encore $(\varphi(z), G_{dB}(z))$. Il correspond à la superposition de deux réseaux de courbes :

- des courbes d'isogain en décibel (tracées en noir) où chaque courbe correspond à un ensemble de complexes z tels que

$$20 \text{Log} \left| \frac{z}{1 + z} \right| = cte$$

- des courbes d'isophase (tracées en bleu) où chaque courbe correspond à un ensemble de complexes z tels que

$$\text{Arg} \left(\frac{z}{1 + z} \right) = cte$$

Les valeurs minimales exigées sont généralement précisées dans les exercices.

Parler de marges négatives n'a pas de sens : si le calcul d'une marge conduit à un résultat négatif, c'est que la marge est franchie. Dès lors le système est instable.

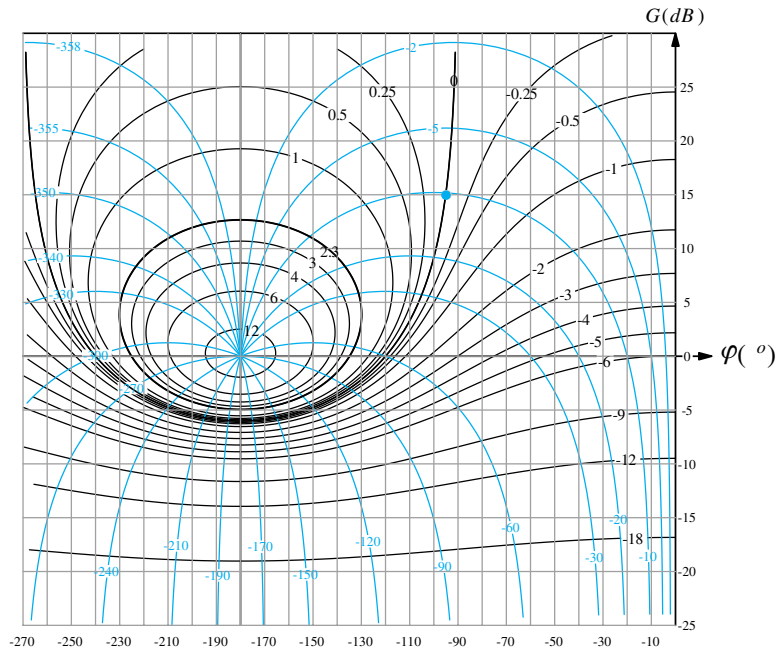


Figure 5.6 Abaque de BLACK-NICHOLS.

Utilisation de l'abaque

- Pour un point :
 - On considère le complexe z associé au point $(-95^\circ, 15 \text{ dB})$.
 - On peut lire directement sur le diagramme figure 5.6 que son image $z' = \frac{z}{1+z}$ sera associée au point $(-10^\circ, 0 \text{ dB})$.
- Pour les points d'une FTBO :

À partir du tracé d'une FTBO, on peut trouver point par point les éléments permettant de tracer la FTBF. Dans la pratique, cette construction est rarement effectuée. L'abaque est utilisé pour obtenir des informations sur le fonctionnement du système en boucle fermée, comme expliqué dans le paragraphe qui suit, en s'intéressant à quelques points particuliers des FTBF.

► Détermination d'une résonance en boucle fermée

Le principe de cette détermination est présenté à l'aide de l'exemple suivant.

On considère la FTBO tracée en bleu sur la figure 5.7 et on suit cette FTBO dans le sens des pulsations croissantes.

Pour un point de la FTBO, on peut lire, sur le réseau de courbes tracées en noir, le module de son transformé par la fonction $z' = \frac{z}{1+z}$. Ce module correspond au gain de la FTBF.

On constate que :

- le gain en boucle fermée part de $-1,7 \text{ dB}$ (entre -2 dB et -1 dB) ;
- le gain en boucle fermée augmente ensuite légèrement pour passer par un maximum pour la pulsation ω_r au point de tangence avec l'isogain $+1 \text{ dB}$;
- lorsque la pulsation augmente à partir de cette valeur, le gain en boucle fermée décroît pour tendre, *a priori*, vers $-\infty$.

Conclusion : le gain en boucle fermée passe par un maximum pour la pulsation ω_r . On en déduit que le fonctionnement en boucle fermée présente une résonance pour cette pulsation.



Ce résultat n'est valable que pour les systèmes à retour unitaire. Si le système n'est pas à retour unitaire, ce résultat reste vrai pour le système réduit que l'on peut lui associer.

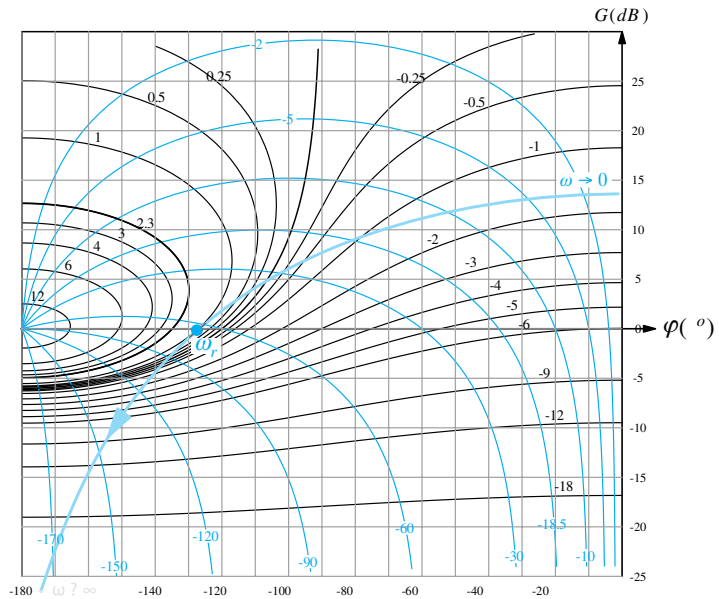


Figure 5.7 Résonance d'un système en boucle fermée.

► Marge de module – Contour de HALL

Compte tenu de ce qui précède, on peut trouver à l'aide de l'abaque de NICHOLS le gain maximum en boucle fermée. On remarque aussi que plus on se rapproche du point critique, plus ce gain maximum est grand. Maintenir le lieu de la FTBO écarté du point critique peut donc être aussi interprété comme une limitation de ce gain maximum. C'est ce qui est utilisé pour définir la marge de module.

Définition

On appelle **marge de module** dans le plan de BLACK la valeur minimale prise par le module de la FTBF.

Notation

La marge de module est notée M_M .

Pour l'exemple de la figure 5.7, le système a une marge de module $M_M = 1 \text{ dB}$.

Règles d'usage

- Un système a une marge de module satisfaisante si cette marge est inférieure à la marge de module maximale exigée.
- Dans un cahier des charges, la marge de module maximale est souvent $M_M \leq 2,3 \text{ dB}$.

La marge de module est exactement $2,3 \text{ dB}$ si le lieu de la FTBO tangente le contour de HALL, contour souvent mis en évidence sur les abaques de NICHOLS.

Définition

On appelle **contour de HALL** la courbe d'isogain $2,3 \text{ dB}$ d'un diagramme de BLACK-NICHOLS.

La marge de module évolue en sens contraire des marges de gain et phase. Quand on se rapproche du point critique, les marges de gain et phase diminuent mais la marge de module augmente.

Facteur de résonance (ou coefficient de surtension)

Définition

Pour une fonction de transfert $H(p)$ de classe zéro, de gain statique K , présentant une résonance pour la pulsation ω_r , on appelle **facteur de résonance** le coefficient Q défini par le rapport

$$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{K} \quad \text{ou encore} \quad Q_{dB} = 20 \text{ Log} \left(\frac{|H(j\omega_r)|}{K} \right)$$

Pour un système du second ordre, les coefficients d'amortissement $\xi = 0,45$ et $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\xi \approx 0,7$) induisent un facteur de résonance de $2,3 \text{ dB}$ et 0 dB .

Par référence à ces systèmes présentant un bon compromis temps de réponse-amortissement, on utilise la règle qui suit.

Règle d'usage

Pour un système de comportement temporel proche d'un système du second ordre, on estime que le réglage est correctement réalisé si le facteur de résonance en boucle fermée est compris entre 0 dB et $2,3 \text{ dB}$.

Pour l'exemple de la figure 5.7, la détermination du facteur de résonance peut être faite de la façon suivante :

- le gain statique de la FTBF est tel que

$$20 \text{ Log} K = -1,7 \text{ dB}$$

- à la résonance, le gain de la FTBF est

$$20 \text{ Log} |H(j\omega_r)| = 1 \text{ dB}$$

- on obtient

$$Q_{dB} = 20 \text{ Log} Q = 20 \text{ Log} |H(j\omega_r)| - 20 \text{ Log} K$$

soit finalement

$$Q_{dB} = 2,7 \text{ dB} \quad \text{et} \quad Q = 1,36$$

5.1.2 Précision des systèmes asservis

Généralement, on qualifie un système de précis si sa sortie correspond à la sortie attendue pour une entrée donnée. Cette comparaison prend tout son sens pour un système asservi dans la mesure où, lorsque mis sous la forme d'un système à retour unitaire, l'écart calculé au niveau du comparateur correspond à la différence entre la valeur attendue et la mesure de la valeur obtenue :

- plus l'écart au niveau du comparateur est petit, plus le système est précis.

Pour évaluer la précision d'un système asservi, on choisit de déterminer l'écart au niveau du comparateur.

Considérons le système asservi à retour unitaire, avec perturbation, défini sur la figure 5.8.

L'écart à un instant t est

$$\varepsilon(t) = y(t) - y_c(t)$$

Cet écart est fonction du temps.

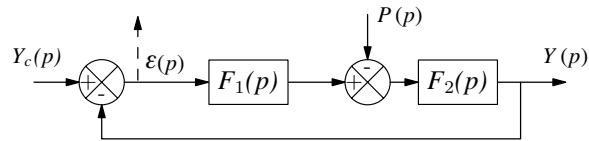


Figure 5.8 Système asservi perturbé à retour unitaire.

Pour la suite de ce cours, on s'intéresse en particulier aux situations où un régime permanent s'établit entre l'entrée et la sortie du système.

Dans ce cas, on peut définir un écart en régime permanent par différence des fonctions d'entrée et de sortie en régime permanent établi.

Cette fonction temporelle écart en régime permanent peut être constante. Dans ce cas l'écart en régime permanent peut être qualifié d'écart statique, bien que les entrées et sorties soient des grandeurs variant temporellement. En effet, on peut avoir

$$y(t) - y_c(t) = cte \quad \text{avec} \quad y(t) \neq cte \quad \text{et} \quad y_c(t) \neq cte$$

S'il existe, l'écart statique correspond à la limite de l'écart pour un temps infini.

Définition

On appelle **écart statique** la limite de l'écart pour un temps infini, lorsqu'elle existe :

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

En utilisant la transformée de Laplace et en superposant les résultats pour les systèmes d'entrée $Y_c(p)$ et de sortie $\varepsilon(p)$, d'entrée $P(p)$ et de sortie $\varepsilon(p)$, il vient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F_1(p)F_2(p)} Y_c(p) + \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)} P(p)$$

En utilisant la FTBO $F(p) = F_1(p)F_2(p)$ du système, on obtient :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F(p)} Y_c(p) + \frac{F_2(p)}{1 + F(p)} P(p)$$

Pour déterminer l'influence des différents paramètres, on calcule l'écart statique

- d'une part pour différentes entrées $y_c(t)$ en absence de perturbation,
- d'autre part pour différentes perturbations $p(t)$ en présence d'une entrée constante.

► Écart statique en absence de perturbation

L'écart statique est $\varepsilon = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t)$ pour une entrée $y_c(t)$ donnée.

En utilisant le théorème de la valeur initiale et de la valeur finale, on obtient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

avec

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + F(p)} Y_c(p)$$



À propos de la précision des systèmes asservis, deux termes sont utilisés : écart et erreur. Les auteurs prennent le parti d'utiliser le terme écart. Le fait qu'une sortie soit différente d'une consigne n'est pas lié à une erreur, une faute. On constate simplement l'existence d'un écart entre ce que l'on souhaite et ce que l'on obtient. Cet écart est une grandeur fonctionnelle. Il diffère d'une erreur, faite par exemple sur la mesure d'une grandeur. La consigne demandée en entrée n'est pas la mesure de la grandeur obtenue en sortie, mais seulement la valeur qu'on espère obtenir en sortie.



Certains utilisent le terme « écart statique » uniquement lorsque l'entrée est un échelon. Dans le sens où les auteurs l'entendent, il est indispensable de préciser quelle est l'entrée associée à l'écart statique.

ce qui conduit à :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot Y_c(p)}{1 + F(p)}$$

En mettant la FTBO sous la forme

$$F(p) = \frac{K(1 + b_1 p + \dots + b_m p^m)}{p^\alpha(1 + a_1 p + \dots + a_k p^k)}$$

il vient :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot Y_c(p)}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$$

L'écart peut être déterminé pour des entrées types. En particulier, on peut considérer :

- une entrée indicielle $y_c(t) = a \cdot u(t)$ (avec $u(t)$ échelon unité), c'est-à-dire une entrée qui change de valeur ;
- pour une entrée en rampe $y_c(t) = a \cdot t \cdot u(t)$, c'est-à-dire une entrée dont la valeur s'accroît à vitesse constante ;
- pour une entrée parabolique $y_c(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t)$, c'est-à-dire une entrée dont la valeur a une vitesse d'accroissement constante.

Dans ces trois cas, la transformée de Laplace de $y_c(t)$ peut se mettre sous la forme

$$Y_c(p) = \frac{a}{p^\beta}$$

avec

- $\beta = 1$ pour l'entrée en échelon ;
- $\beta = 2$ pour l'entrée en rampe ;
- $\beta = 3$ pour l'entrée parabolique.

L'écart statique est donc

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot p^{1+\alpha-\beta}}{p^\alpha + K}$$

Les résultats obtenus pour des entrées unitaires sont résumés dans le tableau suivant.

Écart statique en BF	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
pour une entrée en échelon $u(t)$	$\frac{1}{1 + K}$	0	0
pour une entrée en rampe $t \cdot u(t)$	∞	$\frac{1}{K}$	0
pour une entrée en parabole $\frac{t^2}{2} \cdot u(t)$	∞	∞	$\frac{1}{K}$
Pour un système de FTBO de classe α et de gain K			

Figure 5.9 Écart statique en BF pour différentes entrées.

On remarque en particulier que :

- l'écart statique pour une entrée en échelon est nul lorsque la FTBO est de classe supérieure ou égale à 1 (voir figure 5.10) ;
- que l'écart statique pour une entrée en rampe est nul lorsque la FTBO est de classe supérieure ou égale à 2 (voir figure 5.11).

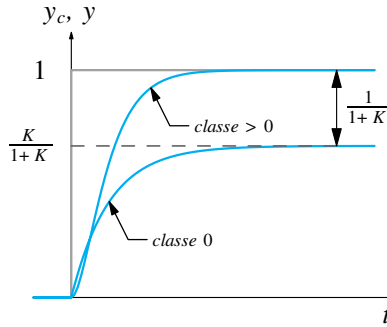


Figure 5.10 Réponse à une entrée en échelon en fonction de la classe de la FTBO.

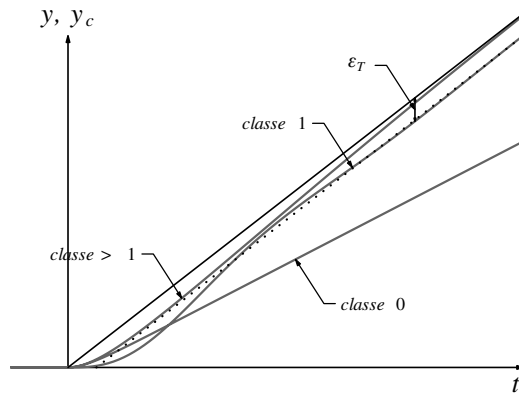


Figure 5.11 Réponse à une entrée en rampe en fonction de la classe de la FTBO.

Influence d'une perturbation sur l'écart statique

En supposant le système à l'état d'équilibre, on le soumet à une perturbation :

- indicielle de la forme $p(t) = a.u(t)$;
- en rampe de la forme $p(t) = a.t.u(t)$;
- en accélération de la forme $p(t) = a.\frac{t^2}{2}.u(t)$.

L'écart statique qui en résulte est, de la même façon que précédemment

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} p.\varepsilon(p)$$

En posant $P(p) = \frac{a}{p^\beta}$ avec $\beta = 1, 2$ ou 3 selon le cas,

$$\varepsilon(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p)F_2(p)} \frac{a}{p^\beta}$$

Cela conduit à :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a.F_2(p).p^{(1-\beta)}}{1 + F_1(p)F_2(p)}$$

En mettant les fonctions $F_1(p)$ et $F_2(p)$ sous les formes

$$F_1(p) = \frac{K_1(1 + \dots)}{p^{\alpha_1}(1 + \dots)} \quad \text{et} \quad F_2(p) = \frac{K_2(1 + \dots)}{p^{\alpha_2}(1 + \dots)}$$



L'écart peut prendre, suivant les utilisateurs, différents noms cités ici à titre d'information :

- pour une entrée indicielle, il peut être appelé écart statique, écart indiciel ou encore écart de position ;
- pour une entrée en rampe, il peut être appelé écart de traînage, écart de poursuite ou écart en vitesse.

il vient :

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot K_2 \cdot p^{(\alpha_1+1-\beta)}}{p^{(\alpha_1+\alpha_2)} + K_1 K_2}$$

Le tableau qui suit regroupe les résultats obtenus.

écart statique en BF	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 2$	$\alpha_1 \geq 3$
Perturbation indicielle $u(t)$	$\frac{1}{K_1} \left(\frac{K_2}{1 + K_1 \cdot K_2} \text{ si } \alpha_2 = 0 \right)$	0	0	0
Perturbation en rampe $t \cdot u(t)$	∞	$\frac{1}{K_1}$	0	0
Perturbation en accélération $\frac{t^2}{2} \cdot u(t)$	∞	∞	$\frac{1}{K_1}$	0
avec $\alpha_1 + \alpha_2$ classe de la FTBO et α_1 classe de la fonction de transfert allant de l'entrée du système à la perturbation				

On constate que l'écart statique engendré par une perturbation dépend principalement de la nature de la perturbation et de la classe de la fonction de transfert $F_1(p)$ située, sur le schéma bloc du système, en amont de la perturbation.

On remarque en particulier :

- qu'un intégrateur présent en amont de la perturbation élimine l'influence d'une perturbation en échelon ;
- que deux intégrateurs en amont de la perturbation éliminent l'influence d'une perturbation en rampe.

► Écart et dépassement de la valeur finale

En plus des exigences de précision en régime permanent, on ajoute parfois des contraintes sur le régime transitoire.

Ces contraintes sur le régime transitoire consistent le plus souvent, pour une entrée en échelon, à interdire le dépassement de la valeur finale. Respecter ces contraintes revient à interdire toutes les réponses indicielles oscillantes.

Compte tenu des résultats connus sur les systèmes des premier et second ordres, il est possible d'énoncer la règle qui suit.

Règle

Si, pour une entrée en échelon, les dépassements transitoires sont interdits, alors la FTBO du système ne doit pas comporter de paire de pôles associés à un coefficient d'amortissement inférieur à 1.

5.1.3

Rapidité des systèmes asservis

Intuitivement, la rapidité d'un système est associée au temps nécessaire pour passer d'un état stable à un autre.

La réponse indicielle du système permet d'analyser cette caractéristique. On utilise plusieurs critères définis à partir de cette réponse : temps de montée, temps de réponse à 5 %... On se limite à la définition du temps de réponse à 5 %.



La classe de la fonction $F_2(p)$ n'intervient que lorsque $\beta = 1$ et $\alpha_1 = 0$.



Le système étant stable, une perturbation impulsionnelle n'aura pas d'influence sur l'écart statique.

Définition

On appelle **temps de réponse à 5 %** d'un système la durée prise par la réponse indiciale du système pour rentrer, sans plus en ressortir, dans la bande à + ou - 5 % de sa valeur finale.

Notation :

Le temps de réponse à 5 % est noté $t_{5\%}$.

On peut remarquer qu'un cahier des charges peut ajouter, comme déjà évoqué précédemment, une exigence de non dépassement de la valeur finale. Cette exigence se traduit par une interdiction des oscillations de la sortie du système pour une entrée indiciale.

Pour déterminer le temps de réponse à 5 % (voir figure 5.12), il est nécessaire de calculer la réponse indiciale du système en boucle fermée. Il est donc indispensable de connaître la FTBF du système.

Pour des FTBF qui correspondent à des systèmes du premier ou second ordre, on rappelle les résultats qui suivent.

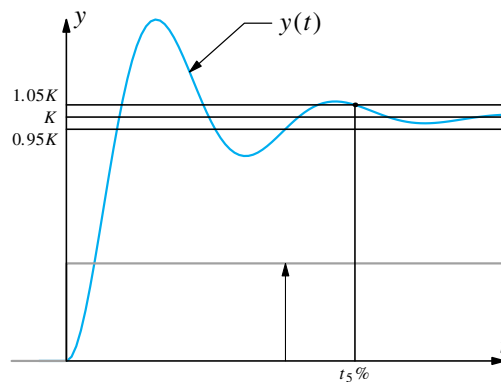


Figure 5.12 Temps de réponse à 5 %.

Temps de réponse d'un système du premier ordre

Pour un système du 1^{er} ordre de fonction de transfert $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$:

- le temps de réponse à 5 % est $t_{5\%} = \ln(20)\tau$, soit $t_{5\%} \approx 3\tau$;
- la valeur finale est atteinte sans dépassement.

Temps de réponse d'un système du second ordre

On considère un système du 2nd ordre de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

Son temps de réponse à 5 % $t_{5\%}$ peut être déterminé par calcul ou à l'aide de l'abaque du temps de réponse réduit de la figure 5.13.

Cet abaque représente la relation liant $t_{5\%}\omega_n$, appelé temps de réponse réduit, au coefficient d'amortissement ξ .

La réponse indiciale d'un système du 2nd ordre est :

- sans dépassement de la valeur finale si $\xi \geq 1$;
- avec dépassement de la valeur finale si $\xi < 1$.

Dans ce cas, l'abaque du premier dépassement transitoire de la figure 5.14 permet de déterminer le premier des dépassements de la réponse indiciale du système.



Le temps de réponse réduit $t_{5\%}\omega_n$ est parfois noté t_{rr} .



Le système du 2nd ordre le plus rapide correspond à $t_5 \% \omega_n \simeq 3$ pour $\xi \simeq 0,7$.



Compte tenu des paliers présents sur le diagramme des temps de réponse réduits, il est préférable de prendre pour ξ un majorant de la valeur théorique ($\xi = 0,6901067\dots$).

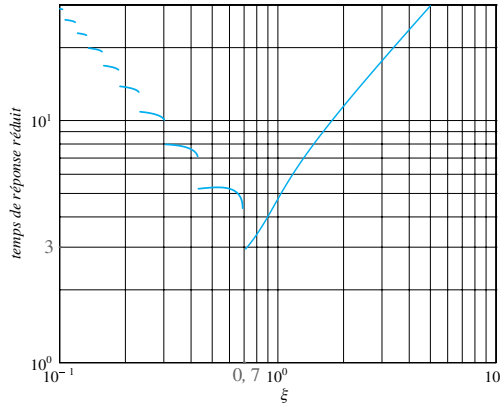


Figure 5.13 Abaque du temps de réponse réduit d'un système du 2nd ordre.

Le temps de réponse optimal d'un système du second ordre est obtenu pour :

- $\xi = 1$ si les dépassements sont interdits ;
- $\xi = \sqrt{\frac{(\ln 20)^2}{(\ln 20)^2 + \pi^2}}$ soit $\xi \approx 0,7$ si les dépassements sont autorisés.

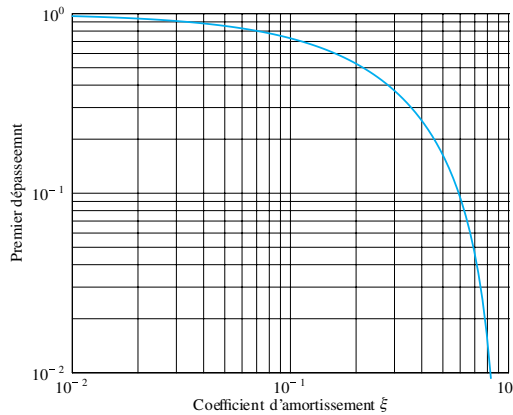


Figure 5.14 Abaque du premier dépassement transitoire d'un système du 2nd ordre.

5.2 Améliorer les performances en corrigeant la commande

On considère, à titre d'exemple, le système constitué d'un véhicule automobile et de son conducteur. Dans une première analyse, on constate que :

- le conducteur conduit le véhicule en imposant une position du volant, un rapport de vitesses, une position des pédales d'accélérateur et de freins ;
- le conducteur doit obéir à des consignes. Il doit se déplacer d'un point à un autre en minimisant le temps de parcours tout en restant sur la route et tout en respectant les limites de vitesse ;
- le conducteur acquiert visuellement et tactilement des informations sur la vitesse, la trajectoire du véhicule, la position du volant, etc ;
- le conducteur évalue ces différents paramètres pour élaborer, modifier la conduite du véhicule.

L'ensemble correspond à un système asservi où le conducteur, tel un capteur, complète la boucle de retour, joue le rôle de comparateur et celui du bloc élaborant la commande du système.

Si le temps de parcours est jugé trop long, on peut changer le véhicule pour un autre, plus puissant, permettant des accélérations plus franches. Mais il est évident qu'en gardant le même véhicule et en changeant uniquement le conducteur, c'est-à-dire ici en changeant simplement la façon d'élaborer la commande, les résultats obtenus peuvent être complètement différents.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'imaginer le même parcours en mettant alternativement au volant un conducteur en conduite accompagnée, un jeune conducteur, un conducteur confirmé voire un pilote de rallye.

De la même façon, si un système asservi ne satisfait pas à un cahier des charges, deux solutions peuvent être envisagées :

- on peut choisir de modifier le système en profondeur en améliorant le système commandé ;
- on peut aussi modifier la façon de générer la commande du système.

C'est cette deuxième option qui est développée dans la suite de ce chapitre.

Pour un système asservi, la commande du système est élaborée de façon autonome à partir de l'écart entre une consigne donnée et la grandeur obtenue en sortie. Pour améliorer ses performances, il est envisagé de modifier sa FTBO de façon à optimiser la commande en ajoutant un élément, le correcteur, dont on choisit la fonction de transfert.

Le correcteur peut être placé de plusieurs façons :

- dans la chaîne directe ;
- dans la chaîne de retour ;
- dans une boucle ajoutée ;
- etc.

Les développements qui suivent se limitent à l'étude de différents correcteurs placés entre le comparateur et le système commandé. On dit dans ce cas qu'il s'agit d'un correcteur « série ».

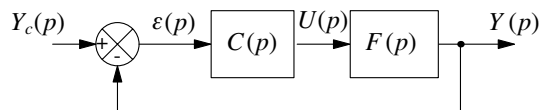


Figure 5.15 Système à retour unitaire avec correcteur « série ».

Les correcteurs couramment rencontrés utilisent trois types d'action :

- une action proportionnelle ;
- une action intégrale ;
- une action dérivée.

Un correcteur mettant en oeuvre simultanément ces trois actions est appelé correcteur PID.

Ces différentes actions de correction sont telles que :

- l'action proportionnelle est directement proportionnelle à l'écart $\varepsilon(t)$;
- l'action intégrale prend en compte le cumul des écarts.

Elle est fonction de $\int_0^t \varepsilon(u) du$;

- l'action dérivée, elle, prend en compte les variations de l'écart.

Elle est fonction de $\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$.



PID est l'acronyme de Proportionnel Intégral Dérivé.

Ces trois actions correspondent aux trois modifications réalisables sur une fonction de transfert :

- modifier son gain ;
- lui ajouter un pôle ;
- lui ajouter un zéro.

Dans la suite de ce cours, on envisage différentes combinaisons de ces actions pour analyser les influences qu'elles peuvent avoir sur le comportement et les performances du système.

Cependant, il faut garder à l'esprit que modifier la commande ne peut résoudre tous les problèmes et que parfois des modifications du système commandé sont indispensables.

Pour reprendre l'exemple précédent, même un pilote comme Sébastien Loeb ne pourrait rendre acceptables les performances réalisées avec un véhicule particulièrement poussif.



Sébastien Loeb : pilote alsacien, champion du monde des rallyes en 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009 ...

5.3 Correction proportionnelle

La correction proportionnelle consiste à modifier le gain global de la FTBO en ajoutant un gain K .

Définition

On appelle **correcteur proportionnel** un correcteur de fonction de transfert $C(p) = K$.

L'incidence d'un correcteur proportionnel sur les diagrammes de BODE d'une FTBO se traduit par :

- aucun changement sur le diagramme de phase ;
- une translation de la courbe de gain, qui entraîne une modification de la pulsation de coupure à 0 dB.

Influence sur la stabilité

La modification du gain de la FTBO engendrée par le correcteur proportionnel se traduit, sur un diagramme de BLACK, par la translation du lieu de transfert suivant l'axe du gain.

La translation se fait dans un sens ou dans l'autre suivant la valeur de K :

- si K est supérieur à 1, la translation se fait vers le haut ;
- si K est inférieur à 1, la translation se fait vers le bas.

Conséquences :

- Un gain K supérieur à 1 engendre généralement une diminution des marges de phase et de gain.
- Un gain K trop important conduit souvent à un système oscillant.
- Si la phase d'un système tend vers une valeur inférieure à -180° pour les pulsations infinies, un gain K trop important conduit à un système instable.

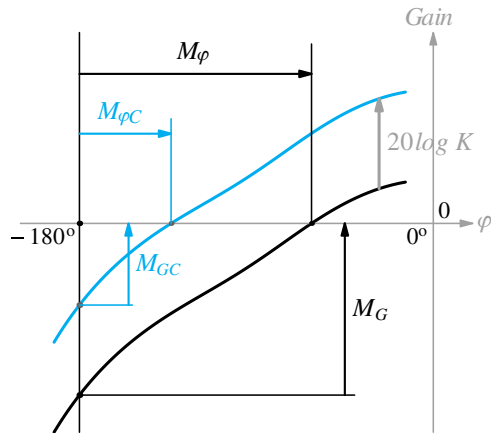


Figure 5.16 Influence d'un correcteur proportionnel sur la stabilité.

Influence sur la précision

- Si la FTBO est de classe 0, une augmentation de son gain améliore la précision du système car l'écart statique pour une entrée indicielle vaut $\varepsilon = \frac{1}{1 + K_{BO}}$.
- Si la FTBO est de classe 1, l'écart statique pour une entrée indicielle est nul. La correction proportionnelle n'apporte donc d'amélioration que sur l'écart statique pour une entrée en rampe.
- Si la FTBO est de classe supérieure à 1, les écarts statiques pour des entrées indicielles ou en rampe sont nuls. L'amélioration en terme de précision apportée par la correction proportionnelle est minime.

Influence sur la rapidité

Pour appréhender simplement la rapidité du système, il est possible de faire un parallèle avec les résultats obtenus pour les systèmes du second ordre.

- Pour un système du second ordre, la rapidité est très étroitement liée au coefficient d'amortissement.
- En s'appuyant sur un diagramme de BLACK, on constate qu'une augmentation du gain, qui rapproche la FTBO du point critique, peut engendrer l'apparition d'une pulsation de résonance du système bouclé.
- L'apparition d'une résonance se traduit par des oscillations de la réponse indicielle du système.
- Plus le gain est élevé, plus le coefficient de surtension est grand, plus les oscillations sont prononcées.

D'une façon générale, le correcteur proportionnel tend à augmenter la rapidité mais peut provoquer des dépassements importants.

Lien entre réponse fréquentielle de la FTBO et rapidité d'un système en BF

- À la lecture d'un diagramme de BODE en gain, une augmentation du gain d'une FTBO se traduit généralement par une augmentation de sa bande passante à 0 dB.
- D'une façon générale, on constate que plus un système laisse passer les hautes fréquences, plus il est rapide.
- La correction proportionnelle tend donc à augmenter la rapidité d'un système.

Les conclusions de cette approche fréquentielle corroborent celles faites précédemment.

Bilan de la correction proportionnelle

Correcteur proportionnel	Stabilité	Précision	Rapidité
$C(p) = K$	↘ si $K > 1$	↗ si $K > 1$	↗ si $K > 1$ (apparition possible de dépassements)

La correction proportionnelle fait évoluer les performances dans différentes directions : rapidité et précision augmentent au détriment de la stabilité du système. La correction proportionnelle seule ne permet pas obligatoirement de satisfaire toutes les contraintes d'un cahier des charges. Il est souvent nécessaire de trouver un compromis entre les différentes performances.

5.4 Corrections à action intégrale

5.4.1

Correcteur intégral

Un correcteur intégral « pur » ne comporte qu'une action intégrale. Il augmente la classe de la FTBO.

Définition

On appelle **correcteur intégral** un correcteur de fonction de transfert $C(p) = \frac{1}{\tau_i p}$.

Particularités des diagrammes de BODE d'un correcteur intégral :

- Le diagramme en phase est la droite $\varphi = -90^\circ$.
- Le diagramme en gain est une droite de pente -20 dB/décade ayant $\omega_{0 \text{ dB}} = \frac{1}{\tau_i}$ pour pulsation de coupure à 0 dB .

► Influence sur la précision

Le principal intérêt de ce correcteur réside dans l'amélioration de la précision du système et dans l'atténuation des effets d'éventuelles perturbations. Comme vu précédemment :

- une intégration dans la FTBO annule l'écart statique pour une entrée en échelon ;
- placée avant une perturbation, une intégration permet d'annuler l'effet d'une perturbation indicielle.

Lien entre réponse fréquentielle et précision d'un système

Un gain élevé de la FTBO aux basses fréquences augmente la précision d'un système asservi.

► Influence sur la stabilité

- Ce correcteur est rarement utilisable car il diminue de 90° la phase de la FTBO. Les marges de gain et de phase du système corrigé s'en trouvent sérieusement diminuées.
- Son utilisation peut souvent engendrer une instabilité du système.

Le gain est théoriquement infini pour des pulsations très basses ! Dans l'absolu, un correcteur de gain infini n'est pas réalisable.

► Influence sur la rapidité

- Généralement, la pulsation de coupure à 0 dB diminue lorsqu'on utilise ce type de correcteur.
- Le gain à haute fréquence est fortement diminué, la bande passante de la FTBO diminue.

Ces éléments se traduisent par une augmentation du temps de réponse à 5 %. Un correcteur intégral ralentit le système.

► Bilan de la correction intégrale

Correcteur intégral	Stabilité	Précision	Rapidité
$C(p) = \frac{1}{\tau_i p}$	↘ ↘	↗ ↗	↘

5.4.2 Correcteur proportionnel intégral (PI théorique)

La correction proportionnelle intégrale consiste à associer actions proportionnelle et intégrale (figure 5.17). La grandeur de commande $U(p)$ est la somme :

- d'une action intégrale $U_i(p)$;
- d'une action proportionnelle $U_p(p)$.

On limite ainsi l'atténuation du gain à haute fréquence.

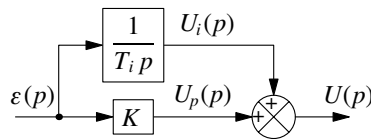


Figure 5.17 Correcteur PI

Ce correcteur a pour fonction de transfert $C(p) = K + \frac{1}{T_i p}$.

En posant $\tau_i = K T_i$, on peut la mettre sous la forme

$$C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{\tau_i p}$$

Définition

On appelle **correcteur proportionnel intégral**, ou correcteur PI, un correcteur ayant une fonction de transfert pouvant se mettre sous la forme

$$C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{\tau_i p}$$

Ce correcteur se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les hautes fréquences.

Particularités des diagrammes de BODE d'un correcteur PI théorique (voir figure 5.18) :

- Ils présentent une pulsation de cassure pour $\omega = \frac{1}{\tau_i}$.
- Pour les basses fréquences, on retrouve :
 - une asymptote à -20 dB/décade pour le gain ;
 - une asymptote à -90° pour la phase.

- Pour les hautes fréquences, on retrouve :
 - une asymptote à $20 \text{ Log} K$ pour le gain ;
 - une asymptote à 0° pour la phase.

Avec une telle combinaison, on essaie de cumuler les avantages des différentes corrections élémentaires, en essayant de gommer leurs points faibles.

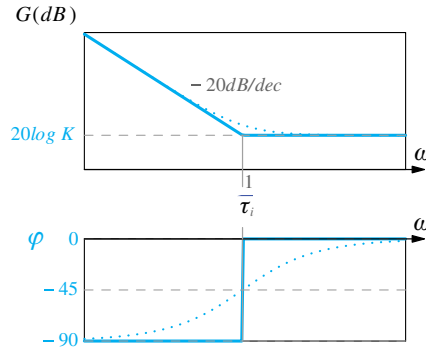


Figure 5.18 Diagrammes de Bode d'un correcteur PI.

► **Influence sur la précision**

Comme pour la correction intégrale, la classe de la FTBO est augmentée :

- la précision est améliorée ;
- l'écart statique pour une entrée en échelon est nulle.

Ce type de correcteur est indispensable pour annuler l'écart statique ou éliminer l'effet d'une perturbation située en aval du correcteur.

► **Influence sur la stabilité**

En terme de stabilité, le résultat obtenu est meilleur qu'avec le correcteur intégral. Il faut veiller à choisir τ_i de telle sorte que la phase de la FTBO ne soit pas diminuée au voisinage du point critique.

► **Influence sur la rapidité**

- Pour $K = 1$, le correcteur PI tend à diminuer la rapidité du système.
- Une augmentation de K fait croître la rapidité du système mais diminue également les marges de stabilité.

► **Bilan de la correction proportionnelle intégrale**

Correcteur PI	Stabilité	Précision	Rapidité
$C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{\tau_i p}$	↘	↗ ↗	↘ (si $K = 1$)

Par rapport au correcteur intégral pur, la limitation par le correcteur PI de l'action intégrale aux basses fréquences permet de limiter le ralentissement du système.

5.4.3 Correcteur PI réel

Le correcteur PI défini précédemment est censé avoir un gain infini pour les basses fréquences, d'où le qualificatif de correcteur PI théorique. Plus les puissances mises en jeu sont importantes, plus les correcteurs réels ont du mal à approcher ce résultat. Le correcteur PI réel, aussi appelé correcteur à retard de phase, est une version transformée du correcteur PI, plus facilement réalisable. Il exerce une action intégrale limitée à une plage de fréquence.

Définition

On appelle **correcteur PI réel** un correcteur ayant une fonction de transfert pouvant se mettre sous la forme $C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{1 + a\tau_i p}$ avec $a > 1$.

Souvent appelé correcteur à retard de phase pour la forme de son diagramme de BODE en phase, le correcteur PI réel est mis en oeuvre pour augmenter le gain de la FTBO du système aux basses fréquences et influencer sur la précision du système.

Particularités des diagrammes de BODE d'un correcteur PI réel (voir figure 5.19) :

- Les diagrammes présentent des cassures pour les pulsations $\frac{1}{a\tau_i}$ et $\frac{1}{\tau_i}$.
- Le diagramme asymptotique en gain comporte :

- une horizontale à $20 \text{ Log } K$ jusqu'à la pulsation $\frac{1}{a\tau_i}$;
- un segment à -20 dB/décade entre les pulsations $\frac{1}{a\tau_i}$ et $\frac{1}{\tau_i}$;
- une horizontale à $20 \text{ Log } \frac{K}{a}$ à partir de la pulsation $\frac{1}{\tau_i}$.

Il y a donc une chute du gain de $20 \text{ Log } a$ entre les basses et hautes fréquences.

- Le diagramme asymptotique en phase comporte :

- une horizontale à 0° jusqu'à la pulsation $\frac{1}{a\tau_i}$;
- un segment horizontal à -90° entre les pulsations $\frac{1}{a\tau_i}$ et $\frac{1}{\tau_i}$;
- une horizontale à 0° à partir de la pulsation $\frac{1}{\tau_i}$.

La phase passe par un minimum φ_m tel que $\sin(\varphi_m) = \frac{1-a}{1+a}$ pour la pulsation

$$\omega_m = \frac{1}{\tau_i \sqrt{a}}.$$

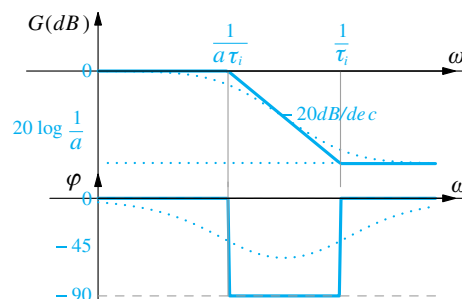


Figure 5.19 Diagrammes de BODE d'un correcteur PI réel (avec $K = 1$)

Régler ce correcteur, c'est choisir trois paramètres : K , a et τ_i .

Pour analyser l'influence de ces paramètres, on fait le choix de dissocier leurs variations en commençant par le cas particulier $K = a$.

1^{ère} étape du réglage d'un correcteur PI réel

Le choix de $K = a$ permet d'avoir un gain nul pour les hautes fréquences, donc de ne pas modifier la FTBO pour les hautes fréquences.

On règle ce correcteur pour augmenter le gain aux basses fréquences sans diminuer la phase au voisinage du point critique :

- le choix de a conditionne alors le gain aux basses fréquences ;
- le choix de τ_i conditionne les pulsations pour lesquelles la phase est diminuée.

Il faut choisir τ_i de telle sorte que la pulsation $\frac{1}{\tau_i}$ soit inférieure à la pulsation de coupure à 0 dB du système non corrigé (écart d'une décade au minimum). Ainsi

- la stabilité du système n'est pas affectée ;
- on peut obtenir une augmentation des marges de stabilité.

2^{nde} étape du réglage d'un correcteur PI réel

Le choix d'un gain $K > a$ a pour effet d'affecter toute la FBTO. Par rapport au cas $K = a$, la courbe de gain est translatée de $20 \text{ Log} \left(\frac{K}{a} \right)$ comme pour une correction proportionnelle.

Par rapport aux performances obtenues avec la valeur $K = a$, il y aura augmentation de la rapidité, de la précision mais diminution des marges de stabilité.

Les méthodes de réglage de ce type de correcteur peuvent varier en fonction du cahier des charges et ne sont pas abordées dans ce cours mais dans les exercices.

► Influence sur la précision

Compte tenu de l'augmentation du gain en boucle ouverte pour les basses fréquences, la précision du système est améliorée, sans pour autant rendre des écarts statiques nuls. En effet, avec le correcteur PI réel, la classe de la FTBO reste inchangée.

► Influences sur la stabilité et la rapidité

En prenant $K = a$, le gain du correcteur pour les hautes fréquences est de 0 dB. Ceci permet de préserver la stabilité du système et même d'augmenter les marges de stabilité en diminuant la pulsation de coupure à 0 dB.

À l'inverse, la rapidité du système diminue.

► Bilan de la correction PI réelle

Correcteur PI réel	stabilité	précision	rapidité
$C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{1 + a\tau_i p}$ avec $a > 1$	\nearrow (si $K = a$)	\nearrow	\searrow (si $K = a$)

5.5 Corrections à action dérivée

5.5.1 Correcteurs dérivé et proportionnel dérivé (PD théorique)

Une action dérivée est associée d'un point de vue théorique à la fonction de transfert

$$C(p) = T_d p.$$

Un correcteur PD théorique résulte de l'association d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur dérivé. Il a donc une fonction de transfert du type

$$C(p) = K + T_d p.$$

Les fonctions de transfert associées à ces correcteurs ont la particularité d'avoir un numérateur de degré supérieur au degré du dénominateur.

Pour réaliser ces correcteurs, il faut avoir une amplification très importante pour les très hautes fréquences, ce qu'aucun système physique ne permet. Les réalisations essayant d'approcher ces modèles théoriques amplifient tous les bruits et leurs grandeurs de sortie sont inexploitable.

Le paragraphe suivant développe la seule utilisation pratique de l'action dérivée à l'aide d'un correcteur proportionnel dérivé réel.

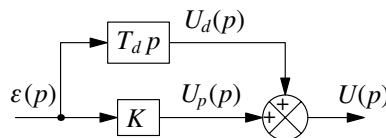


Figure 5.20 Correcteur PD théorique.

5.5.2 Correcteur PD réel

Le correcteur PD réel a la particularité d'avoir une action dérivée sur une certaine bande de fréquences.

Le fait d'agir sur une bande de fréquences donnée est une caractéristique qu'il partage avec le correcteur PI réel. La similitude ne s'arrête pas là. On peut aussi associer au correcteur PD réel une fonction de transfert très ressemblante au correcteur PI réel.

Définition

On appelle **correcteur PD réel** un correcteur ayant une fonction de transfert pouvant

se mettre sous la forme $C(p) = \frac{K(1 + \tau_d p)}{1 + a\tau_d p}$ avec $a < 1$.

Particularités des diagrammes de BODE d'un correcteur PD réel (voir figure 5.21) :

- Les diagrammes présentent des cassures pour les pulsations $\frac{1}{\tau_d}$ et $\frac{1}{a\tau_d}$.
- Le diagramme asymptotique en gain comporte :
 - une horizontale à $20 \text{ Log } K$ jusqu'à la pulsation $\frac{1}{\tau_d}$;
 - un segment à $+20 \text{ dB/décade}$ entre les pulsations $\frac{1}{\tau_d}$ et $\frac{1}{a\tau_d}$;
 - une horizontale à $20 \text{ Log } \frac{K}{a}$ à partir de la pulsation $\frac{1}{a\tau_d}$.

Il y a donc une augmentation du gain de $20 \text{ Log} \left(\frac{1}{a} \right)$ entre les basses et hautes fréquences.

- Le diagramme asymptotique en phase comporte :
 - une horizontale à 0° jusqu'à la pulsation $\frac{1}{\tau_d}$;
 - un segment à $+90^\circ$ entre les pulsations $\frac{1}{\tau_d}$ et $\frac{1}{a\tau_d}$;
 - une horizontale à 0° à partir de la pulsation $\frac{1}{a\tau_d}$.

La phase passe par un maximum φ_M tel que $\sin(\varphi_M) = \frac{1-a}{1+a}$ pour la pulsation

$$\omega_M = \frac{1}{\tau_d \sqrt{a}}$$

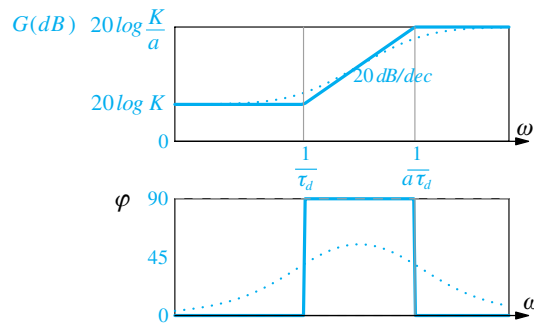


Figure 5.21 Diagrammes de BODE d'un correcteur PD réel.

Le correcteur PD réel est souvent appelé correcteur à avance de phase pour la forme de son diagramme de BODE en phase.

- Compte tenu du déphasage positif que l'on a entre les deux pulsations de cassure, ce correcteur, une fois réglé, permet d'augmenter la marge de phase et a une action stabilisatrice permettant d'améliorer le comportement d'un système instable ou mal stabilisé.
- Il permet aussi d'augmenter le gain à haute fréquence et donc a pour effet d'améliorer la rapidité du système.

Compte tenu de ces particularités, le correcteur PD réel est souvent utilisé lorsqu'un système présente une marge de phase insuffisante pour la pulsation de coupure $\omega_{0 \text{ dB}}$ du système non corrigé.

Son réglage peut être réalisé de la façon suivante :

- Si on souhaite un accroissement de la marge de phase M_φ d'une quantité $\Delta\varphi$. On détermine la valeur de a permettant d'obtenir la marge de phase demandée en utilisant la relation

$$a = \frac{1 - \sin \Delta\varphi}{1 + \sin \Delta\varphi}$$

- On détermine τ_d pour faire coïncider la pulsation de phase maximale ω_M avec la pulsation de coupure $\omega_{0 \text{ dB}}$ du système non corrigé. On calcule donc

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_{0 \text{ dB}} \sqrt{a}}$$

- On ajuste la valeur du gain K pour que le gain du système corrigé soit bien 0 dB pour la pulsation $\omega_M = \frac{1}{\tau_d \sqrt{a}}$.

► **Bilan de la correction PD réelle (avance de phase)**

Correcteur PD réel	Stabilité	Précision	Rapidité
$C(p) = \frac{K(1 + \tau_i p)}{1 + a \tau_i p}$ avec $a < 1$	↗	↘	↗

5.6 Correction PID

Pour parfaire la correction d'un système, on peut envisager d'utiliser une combinaison des corrections proportionnelle, dérivée et intégrale.

Ainsi il est possible de dissocier l'influence du correcteur sur les entrées de basses fréquences, de fréquences intermédiaires ou de hautes fréquences.

Définition

On appelle **correcteur PID** un correcteur associant les trois formes de correction, proportionnelle, intégrale et dérivée.

La figure 5.22 propose une mise en parallèle des trois actions. Cette association conduit à une fonction de transfert

$$C(p) = \frac{K_i + K \cdot p + K_d \cdot p^2}{p}$$

Cette fonction ne correspond à aucun système physique réel car le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur.

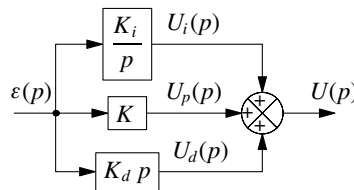


Figure 5.22 Correcteur PID parallèle théorique.

Les correcteurs PID que l'on utilise ont le plus souvent des fonctions de transfert de la forme

$$C(p) = K \left(\frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \right) \left(\frac{1 + \tau_d p}{1 + b \tau_d p} \right)$$

ou

$$C(p) = K \left(\frac{1 + \tau_i p}{1 + a \tau_i p} \right) \left(\frac{1 + \tau_d p}{1 + b \tau_d p} \right)$$

avec $a > 1$ et $b < 1$.



Les coefficients de ce correcteur PID doivent vérifier $\tau_d < \tau_i$.

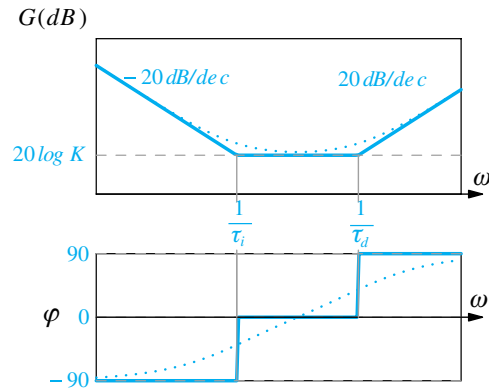


Figure 5.23 Diagramme de Bode d'un correcteur PID théorique.

Pour répondre à un cahier des charges complexe :

- on commence par satisfaire les contraintes de rapidité et de précision en adaptant les corrections proportionnelles et intégrales ;
- si besoin, on choisit une correction intégrale augmentant la classe de la FTBO pour satisfaire aux contraintes de précision avant de satisfaire aux contraintes de rapidité ;
- on termine par les contraintes de stabilité en ajoutant si besoin un correcteur à avance de phase (correcteur PD réel).

On trouve également des produits industriels se présentant sous forme de boîtiers que l'on adapte et que l'on paramètre pour des applications variées.

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- marge de gain ;
- marge de phase ;
- marge de module ;
- contour de HALL ;
- facteur de résonance (ou coefficient de sursension) ;
- écart statique ;
- temps de réponse à 5 % ;
- correcteur proportionnel ;
- correcteur intégral ;
- correcteur proportionnel intégral (PI) ;
- correcteur PI réel ;
- correcteur PD théorique ;
- correcteur PD réel ;
- correcteur PID.

Je connais :

- l'ordre de grandeur usuel des marges gain et de phase ;
- l'ordre de grandeur usuel d'une marge de module ;

- l'influence de la classe d'une FTBO sur l'écart statique pour les entrées usuelles ;
- l'influence de la forme d'une FTBO sur l'écart statique pour des perturbations usuelles ;
- les valeurs de l'écart statique pour les entrées usuelles ;
- les valeurs de l'écart statique pour les perturbations usuelles ;
- la condition de non dépassement pour une entrée indicielle ;
- le temps de réponse à 5 % d'un système du premier ordre ;
- l'influence d'une correction proportionnelle sur les performances d'un système ;
- l'influence d'une correction intégrale sur les performances d'un système ;
- l'influence d'un correcteur PI sur les performances d'un système ;
- l'influence d'un correcteur PI réel sur les performances d'un système ;
- l'influence d'un correcteur PD réel sur les performances d'un système.

Savoir-faire

Je sais :

- déterminer graphiquement une marge gain ou de phase sur un diagramme de BLACK ;
- déterminer graphiquement une marge gain ou de phase sur un diagramme de BODE ;
- calculer une marge gain ou de phase ;
- utiliser l'abaque de BLACK-NICHOLS ;
- déterminer une marge de module ;
- déterminer un écart statique pour des entrées ou perturbations en échelon, rampe ou parabole ;
- calculer le temps de réponse à 5 % d'un système ;
- déterminer le premier dépassement d'un système du second ordre ;
- proposer un correcteur en fonction de performances attendues.
- régler un correcteur proportionnel en fonction d'un cahier des charges ;
- régler un correcteur intégral en fonction d'un cahier des charges ;
- régler un correcteur PI en fonction d'un cahier des charges.

Exercices d'application

5.1 Détermination de marges de stabilité sur un diagramme de BODE

Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$. Les diagrammes de BODE de $F(p)$ sont représentés sur la figure 5.24.

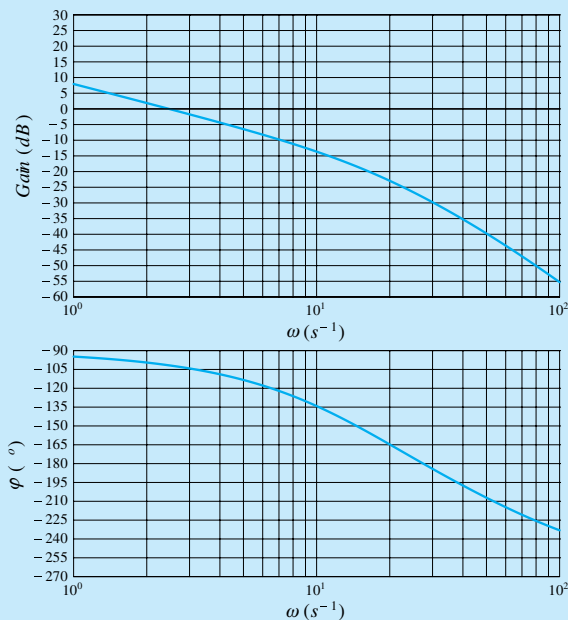


Figure 5.24 Diagrammes de BODE de la FTBO.

1. Tracer le schéma-bloc du système
2. Déterminer les marges de phase et de gain du système puis conclure quant à sa stabilité.

3. On décide d'ajouter au système un correcteur série de type proportionnel. On note K_p le gain de ce correcteur.

- Déterminer la valeur de K_p permettant d'obtenir une marge de gain $M_G = 12$ dB.
 - Déterminer la nouvelle marge de phase du système.
 - Conclure quant à la stabilité du système.
4. En précisant la méthode permettant de le calculer, déterminer l'écart statique ε_s du système corrigé pour une entrée indicielle.

5.2 Asservissement à correction proportionnelle

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure 5.25

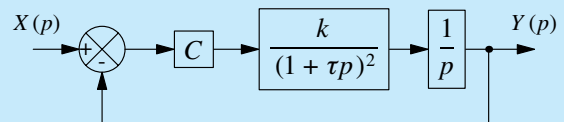


Figure 5.25 Asservissement à correction proportionnelle.

Pour les applications numériques on prendra : $C = 1$, $k = 0,5$ et $\tau = 2$ s.

1. Calculer la valeur de la pulsation qui donne une phase de -180° .
2. En déduire la valeur C_1 du gain C correspondant à la limite de la stabilité. La comparer avec la valeur proposée initialement.
3. Déterminer la valeur de C_2 du gain C qui donne une marge de gain de 12 dB.

5.3 Correction proportionnelle – Utilisation d'un diagramme de NYQUIST

On considère le même asservissement à correction proportionnelle que dans l'exercice précédent. Il est représenté figure 5.25.

Pour les applications numériques on prend également $C = 1, k = 0,5$ et $\tau = 2$ s.

On donne figure 5.26 le diagramme de NYQUIST de la FTBO pour l'intervalle de pulsations allant de 0,02 rad/s à 1 rad/s.

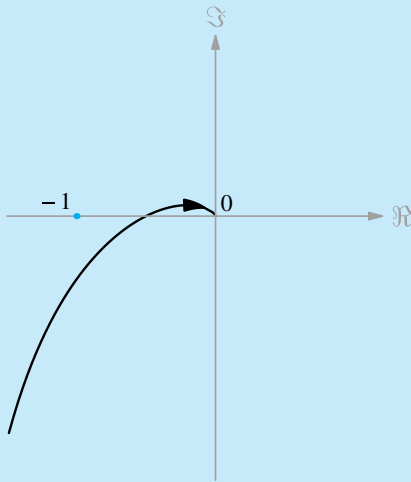


Figure 5.26 Diagramme de NYQUIST de la FTBO pour $C = 1, k = 0,5$ et $\tau = 2$ s.

1. Tracer l'allure du diagramme de NYQUIST pour les pulsations variant de 0 à $+\infty$.
2. En utilisant le diagramme de NYQUIST de la figure 5.26, déterminer les marges de gain et de phase pour $C = 1$.
3. Déterminer la valeur de C qui donne une marge de gain de 12 dB. En déduire la marge de phase correspondante.

5.4 Marge de module

On considère un système bouclé à retour unitaire qui présente une résonance en boucle fermée. Le diagramme de BLACK de sa FTBO est donné figure 5.27.

1. Déterminer la pulsation de résonance et le coefficient de surs tension du système fonctionnant en boucle fermée.
2. Déterminer la marge de module de cette fonction de transfert. Discuter sa valeur, évaluer les marges de gain, de phase et conclure.
4. On souhaite obtenir une marge de module de 2,3 dB en plaçant un correcteur proportionnel de gain K_p en série. Déterminer la valeur de K_p ainsi que la nouvelle pulsation de résonance.

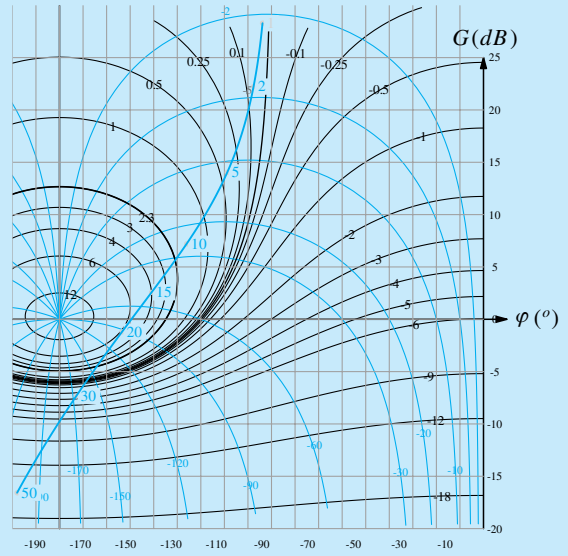


Figure 5.27 Diagramme de BLACK de la FTBO.

5.5 Lecture de marges et correction proportionnelle

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure 5.28.

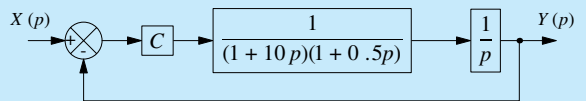


Figure 5.28 Asservissement à correction proportionnelle.

1. Indiquer, en justifiant la réponse, à quelle fonction de transfert correspondent les diagrammes de BODE de la figure 5.29.

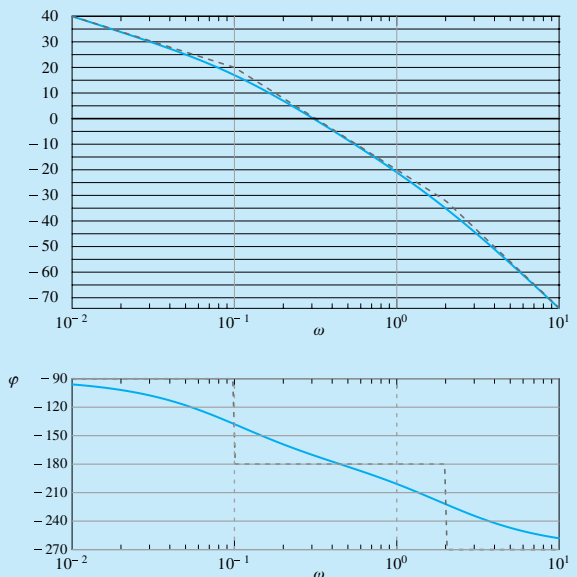


Figure 5.29 Diagrammes de BODE.

2. Déterminer graphiquement les marges de gain et de phase du système décrit précédemment dans le cas où $C = 1$.

3. Le cahier des charges impose des marges de gain et de phase minimales de 12 dB et 40° . Déterminer la plus grande valeur de C permettant de vérifier ce cahier des charges.

5.6 TGV pendulaire (d'après Centrale-Supélec MP 2000)

Le système de pendulation du TGV pendulaire utilise un asservissement de position. Celui-ci comprend un ensemble servovalve et vérin, l'ensemble étant associé à une correction.

L'architecture de ce système est représentée sur la figure 5.30.

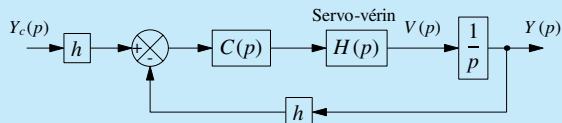


Figure 5.30 Architecture du système de pendulation.

Le système présente les particularités suivantes :

- la position y de la tige du vérin est mesurée par un capteur de gain $h = 50 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$;
- la boucle de position est corrigée par un correcteur proportionnel $C(p)$ de gain a ;
- la fonction de transfert de l'ensemble vérin servovalve $H(p)$ est représentée par les diagrammes de BODE de la figure 5.31.

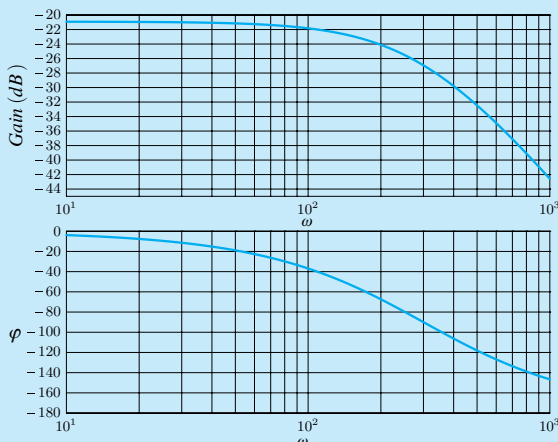


Figure 5.31 Diagrammes de BODE de $H(p)$.

1. Déterminer la valeur du gain a du correcteur $C(p)$ permettant d'assurer une marge de phase 60° de l'asservissement en position. Justifier les réponses en indiquant sur les diagrammes de BODE les valeurs utilisées et en précisant l'utilisation faite de ces valeurs.

2. Déterminer l'écart statique du système pour une consigne en échelon de 0,1 m.

5.7 Asservissement

à correction proportionnelle intégrale

On considère un asservissement à correction proportionnelle décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure 5.32.

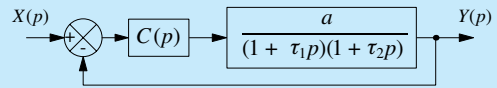


Figure 5.32 Asservissement à correction proportionnelle intégrale.

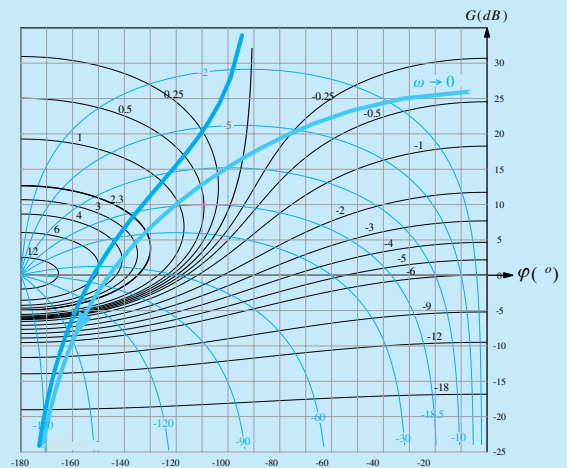


Figure 5.33 Lieux de BLACK des FTBO avec corrections P et PI pour $K = 1$.

Pour les applications numériques, on prend $a = 20$, $\tau_1 = 0,1 \text{ s}$, $\tau_2 = 0,02 \text{ s}$.

Les éléments du cahier des charges à considérer sont :

- un écart statique pour une entrée indicielle inférieur à 2 % ;
- une marge de phase minimale de 40° ;
- une marge de gain minimale de 12 dB.

► Correction proportionnelle

Le correcteur a la forme $C(p) = K$.

1. Le diagramme de BLACK de la FTBO est donné pour $K = 1$.

- Déterminer les marges de gain et de phase.
 - En déduire la valeur maximale de K permettant de vérifier le critère de stabilité.
2. Montrer qu'une correction proportionnelle $C(p) = K$ ne convient pas.

► Correction proportionnelle intégrale

Le correcteur a la forme $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ avec

$T_i = 0,1 \text{ s}$.

3. Quel est le principal intérêt de ce correcteur ?

4. Le diagramme de BLACK de la FTBO est donné pour $K = 1$.

Déterminer les marges de gain et de phase.

5. Déterminer la plus grande valeur de K permettant de satisfaire au cahier des charges.

5.8 Choix d'une correction

On considère un asservissement décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure 5.34.

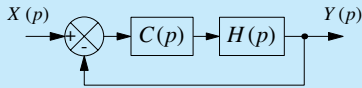


Figure 5.34 Schéma-bloc de l'asservissement.

La fonction de transfert $H(p)$ est de la forme :

$$H(p) = \frac{a}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

1. Déterminer la fonction de transfert du correcteur qui permet d'obtenir une fonction de transfert en boucle fermée de la forme suivante :

$$FTBF = \frac{1}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On exprimera $C(p)$ en fonction de la FTBO non corrigée $H(p)$ et des constantes ω_0 et m de la FTBF souhaitée.

2. Choisir $C(p)$ tel que le correcteur ait une forme simple et que le zéro associé à la constante de temps T_1 , considérée comme gênante, disparaisse.

3. Déterminer complètement le correcteur si le coefficient d'amortissement recherché pour la FTBF est $m = 1$

4. On considère la fonction de transfert $H(p)$ telle que $a = 5$, $T_1 = 20$ s et $T_2 = 2$ s. Les courbes de réponses indicielles sont représentées figure 5.35 pour les 3 cas suivants :

- sans correction ;
- avec une correction proportionnelle telle que l'erreur statique de position soit limitée à 5 % ;
- avec la correction PI choisie.

Mettre en évidence l'intérêt de la correction PI dans ce cas.

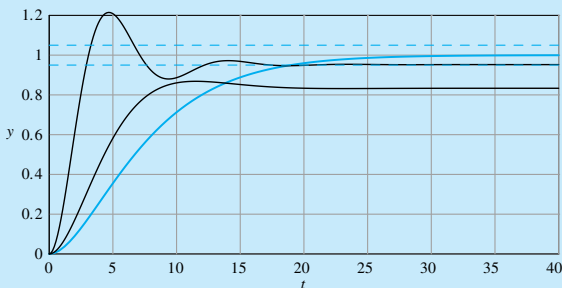


Figure 5.35 Réponses indicielles du système.

5.9 Premier ordre à zéro

On considère un système bouclé ayant pour chaîne d'action la fonction de transfert $F_1(p) = K_1$ et pour chaîne de retour la fonction $F_2(p) = \frac{K_2}{1 + \tau_2 p}$.

1. Pour ce système :

- Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée

$$C(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \text{ du système.}$$

- Exprimer la condition de stabilité du système.

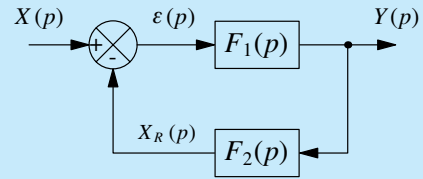


Figure 5.36 Schéma-bloc du système « Premier ordre à zéro ».

2. On choisit de prendre les valeurs

$$K_1 = 8, \quad K_2 = \frac{7}{8} \quad \text{et} \quad \tau_2 = 0,1.$$

- Vérifier que la condition de stabilité est satisfaite.
- Tracer les diagrammes de BODE asymptotiques et réels de la fonction $C(p)$.
- Peut-on associer cette fonction de transfert à un correcteur particulier ?

Dans l'affirmative, préciser la nature du correcteur et déterminer ses paramètres caractéristiques.

3. On remarque que prendre un coefficient K_2 négatif revient à remplacer le soustracteur par un sommateur.

- Effectuer la même analyse qu'à la question précédente pour les paramètres

$$K_1 = 1, \quad K_2 = -\frac{11}{12} \quad \text{et} \quad \tau_2 = 0,1.$$

5.10 Asservissement de position avec correction tachymétrique

On considère un asservissement de position décrit par le schéma-bloc à retour unitaire de la figure 5.37.

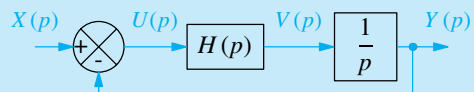


Figure 5.37 Schéma-bloc de l'asservissement de position.

► Étude du système sans correction

On donne la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Pour les applications numériques on donne $K = 200$ et $\tau = 0,025$ s.

Ces valeurs numériques sont associées :

- à la réponse indicielle de la figure 5.38 ;

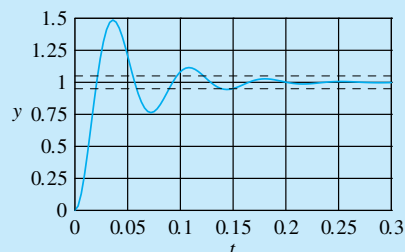


Figure 4.33 Réponse indicielle du système non corrigé.

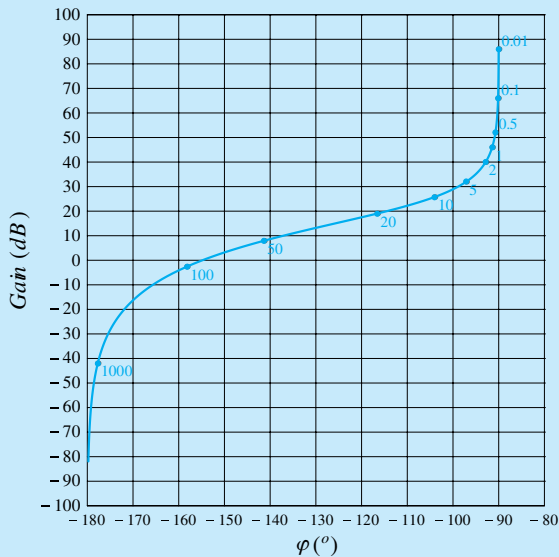


Figure 5.39 Diagramme de BLACK de la FTBO du système non corrigé.

- au diagramme de BLACK de la fonction de transfert en boucle ouverte du système représenté figure 5.39.

1. D'un point de vue stabilité du système :

- commenter la courbe de réponse indicielle ;
- commenter le diagramme de BLACK ;
- préciser ce qu'on peut attendre d'une correction.

➤ *Étude du système avec correction tachymétrique*

La correction tachymétrique consiste à mettre en place une génératrice tachymétrique pour prélever une information relative à la vitesse. La tension ainsi générée est soustraite à la consigne.

On peut considérer que la commande est générée à partir de la vitesse et de l'écart.

Pour les applications numériques on prend $GT = 0,011$.

2. Pour le schéma-bloc du système corrigé représenté figure 5.40 :

- montrer que le schéma-bloc peut se mettre sous la forme d'un asservissement avec correction série, comme représenté figure 5.41 ;
- déterminer la fonction de transfert du correcteur $C(p)$.

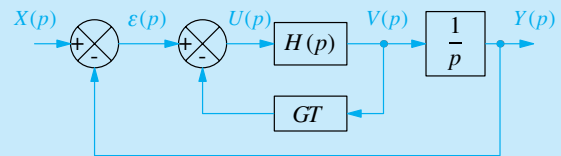


Figure 5.40 Schéma-bloc du système avec retour tachymétrique.

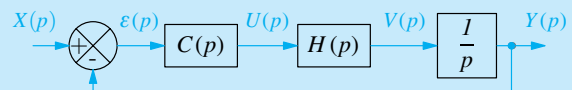


Figure 5.41 Schéma-bloc du système avec correcteur.

3. Caractériser le correcteur et tracer ses diagrammes de BODE, en gain et en phase, dans l'intervalle de pulsation $[0,1 \dots 1000]$ (rad/s).

4. Utiliser les diagrammes précédents pour tracer le diagramme de BLACK de la FTBO du système corrigé et déterminer les nouvelles marges de stabilité.

Exercices d'approfondissement

5.11 Station spatiale d'observation par interférométrie (d'après X-ENS PSI 2009)

Un nouveau type de station spatiale d'observation est basé sur l'interférométrie. Il possède 6 télescopes qui captent les ondes lumineuses venues de l'espace et les font interférer afin d'en exploiter les informations. L'interférométrie permet d'éliminer les signaux parasites et donc d'obtenir des informations de plus grandes précisions. L'utilisation combinée de plusieurs petits télescopes est équivalente à un télescope beaucoup plus grand qui serait irréalisable.

Pour sélectionner les signaux lumineux, et faire en sorte que leur interférométrie puisse se réaliser correctement, il est indispensable que les 6 télescopes puissent être orientés et ne bougent pas les uns par rapport aux autres. Une des solutions retenues par l'Agence Spatiale Européenne (ESA) est de les relier par un assemblage de poutres et de les positionner sur des plate-formes 6 axes de type Stewart (voir figure 5.42).

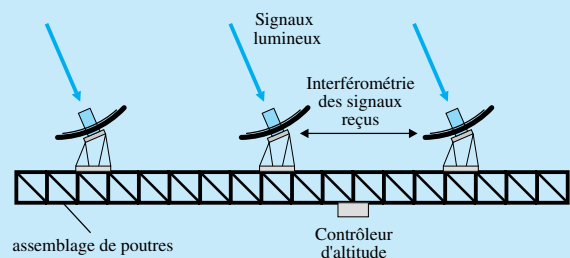


Figure 5.42 Structure d'une station d'observation par interférométrie.

La structure de la plate-forme 6 axes est illustrée sur la figure 5.43. Elle est constituée d'une embase supérieure supportant le télescope, d'une embase inférieure encastrée sur l'assemblage de poutres et de 6 bras. Le contact de chaque bras avec l'embase supérieure et l'embase inférieure est modélisé par une liaison rotule. Les longueurs

des 6 bras sont variables, réglées chacune par un actionneur linéaire de type électro-aimant, indépendamment les unes des autres. Ces réglages permettent de positionner l'embase supérieure par rapport à l'embase inférieure, donc le télescope par rapport à l'assemblage de poutres, selon les 6 degrés de liberté de l'espace.

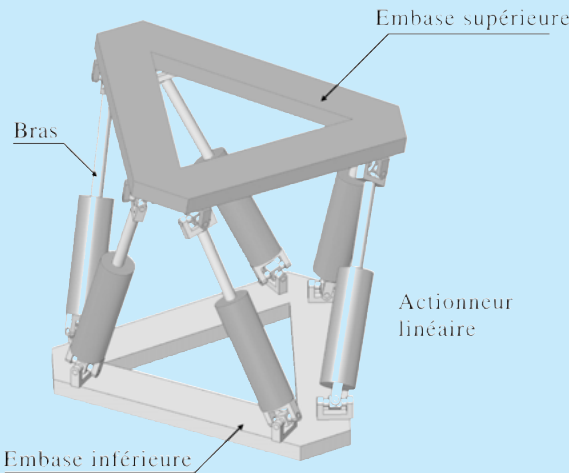


Figure 5.43 Plate-forme 6 axes de type Stewart.

► Validation du critère de résonance de la fonction de service FS1

L'objectif de cette partie est la validation du critère de résonance de la fonction FS1, énoncée dans le tableau suivant :

Fonction	Critère	Niveaux
FS1 : permettre à l'assemblage de poutres de positionner le télescope	Résonance	Pas de résonance Pulsation de cassure $\omega_c = 2\pi \cdot 5 \text{ Hz}$

Le niveau « pas de résonance » est indispensable car toute amplification démesurée des amplitudes liée à une résonance risquerait d'endommager gravement les systèmes embarqués.

Une étude mécanique préalable a permis de mettre en équation le mouvement de l'embaise supérieure de la plate-forme avec amortissement actif, basé sur une rétroaction en force (figure 5.44).

Pour simplifier, seuls les mouvements de translation selon $\vec{z}_7 = \vec{z}_8$ et les mouvements de rotation selon $\vec{y}_7 = \vec{y}_8$ entre les embaises supérieure et inférieure seront considérés (les vecteurs \vec{z}_7 et \vec{z}_8 sont définis sur la figure 5.44, les vecteurs \vec{y}_7 et \vec{y}_8 sont normaux à la figure 5.44). Sous cette hypothèse, en négligeant en première approche le couplage rotation/translation, les équations de mouvement transposées dans le domaine symbolique s'écrivent :

$$\left(Mp^2 + \frac{p}{p+g} 2k \right) Z_8 = \frac{p}{p+g} 2k Z_7$$

$$\left((B_8 + Mh^2) p^2 + \frac{p}{p+g} \frac{2}{3} kL^2 \right) \theta_8 = \frac{p}{p+g} \frac{2}{3} kL^2 \theta_7$$

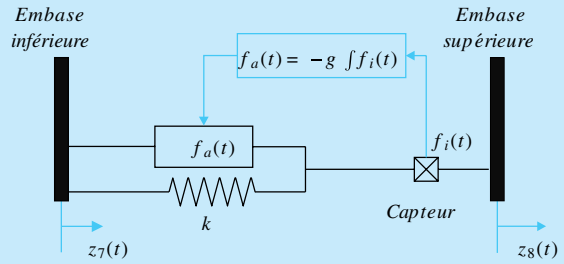


Figure 5.44 Principe retenu pour l'amortissement actif : rétroaction en force.

Dans ces équations :

- $M = 1000 \text{ kg}$ est la masse de l'embaise supérieure, surmontée du télescope ;
- $g = 50 \text{ s}^{-1}$ est la constante de proportionnalité dans la rétroaction en force de l'amortissement actif ;
- $k = 500\,000 \text{ N.m}^{-1}$ est la raideur d'élasticité des bras de la plate-forme ;
- $B_8 = 83 \text{ kg.m}^2$ est l'inertie de l'embaise supérieure surmontée du télescope selon l'axe de direction \vec{y}_8 passant par son centre de gravité G_8 ;
- h est la distance entre O_8 et G_8 ($\overrightarrow{O_8 G_8} = h \vec{z}_8$) et $L = 30 \text{ cm}$ la longueur au repos de chaque bras.

Les mouvements peuvent donc être modélisés par des fonctions de transfert du type :

$$\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)} = \frac{\mu_1}{p^2 + gp + \mu_1} \quad \text{et} \quad \frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)} = \frac{\mu_2}{p^2 + gp + \mu_2}$$

1. Déterminer l'expression de μ_1 et μ_2 puis calculer numériquement les fonctions de transfert $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$ en

laissant h comme inconnue.

L'étude de la plate-forme revient donc à étudier la fonction de transfert générique de la forme

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu}{p^2 + gp + \mu}$$

où $S(p)$ représente la sortie $Z_8(p)$ ou $\theta_8(p)$ et $E(p)$ l'entrée $Z_7(p)$ ou $\theta_7(p)$.

2. Exprimer, en fonction de μ , la condition que g doit vérifier pour qu'il n'y ait pas de résonance.

La figure 5.45 montre l'évolution de μ_1 et μ_2 en fonction de h .

3. Déterminer la valeur de h qui permettrait, au mieux, de satisfaire la valeur de ω_c pour chaque mouvement.

Pour des problèmes d'encombrement, le centre de gravité G_8 est situé à une altitude $h = 20 \text{ cm}$.

4. Conclure quant à la capacité de la plate-forme à satisfaire ou non le niveau « pas de résonance » de la fonction FS1.

La figure 5.46 représente les diagrammes de BODE de $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$, en gain.

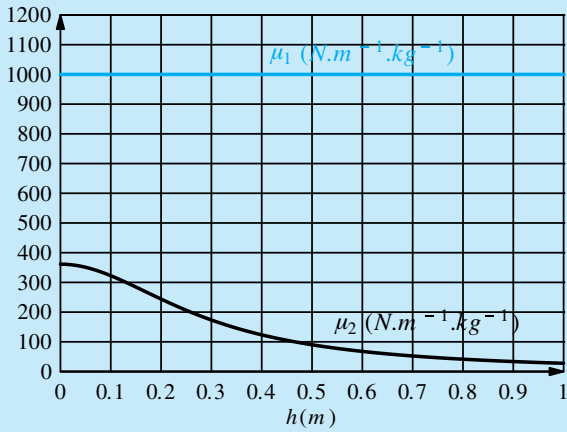


Figure 5.45 Évolution de μ_1 et μ_2 en fonction de h .

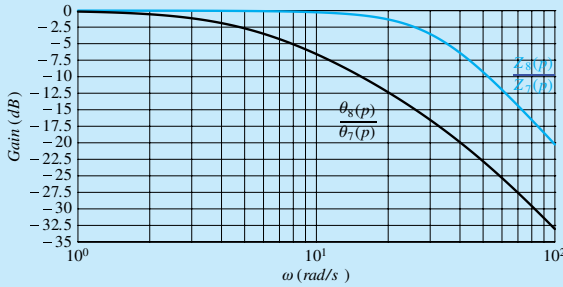


Figure 5.46 Diagrammes de BODE en gain de $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$

5. Lors d'un mouvement à 1,5 Hz, déterminer la diminution d'amplitude entre $\theta_8(t)$ et $\theta_7(t)$ due au non respect du niveau lié à la pulsation de cassure de la fonction FS1. Cette diminution d'amplitude nécessite de modifier la boucle de rétroaction en force pour en améliorer les performances.

➤ Amélioration des performances

Afin d'améliorer encore plus les performances de la station spatiale d'observation, les ingénieurs de l'ESA ont décidé d'ajouter un correcteur dans la chaîne de pilotage des vérins des plate-formes. L'objectif de cette partie est la justification et le dimensionnement d'un correcteur approprié.

Les performances attendues sont les suivantes :

Critères	Niveaux
Précision	Écart nul pour une consigne échelon
Rapidité	Pulsation de coupure à 0 dB de la FTBO : $\omega_{0dB} = 2\pi \cdot 5 \text{ Hz}$
Stabilité	Marge de phase $M_\varphi = 45^\circ$ Marge de gain $M_G > 20 \text{ dB}$

On limite l'étude au mouvement de translation selon \vec{z}_7 entre les embases supérieure et inférieure de la plate-forme (voir figure 5.44 pour la définition du vecteur \vec{z}_7 et pour l'amortissement actif retenu sur chaque vérin).

Le schéma bloc de l'asservissement de la plate-forme entière est représenté sur la figure 5.47 où k , M et g sont des constantes.

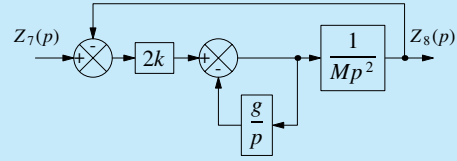


Figure 5.47 Schéma bloc de l'asservissement.

Le schéma bloc à retour unitaire équivalent (avec la fonction de transfert en boucle ouverte $H_0(p)$) est représenté sur la figure 5.48.

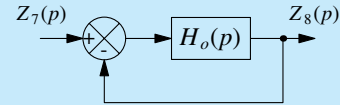


Figure 5.48 Schéma bloc à retour unitaire.

6. Déterminer l'expression de $H_0(p)$ pour que les schémas blocs des figures 5.47 et 5.48 soient équivalents.

Les diagrammes de BODE de la fonction $H_0(p)$ sont fournis sur la figure 5.49.

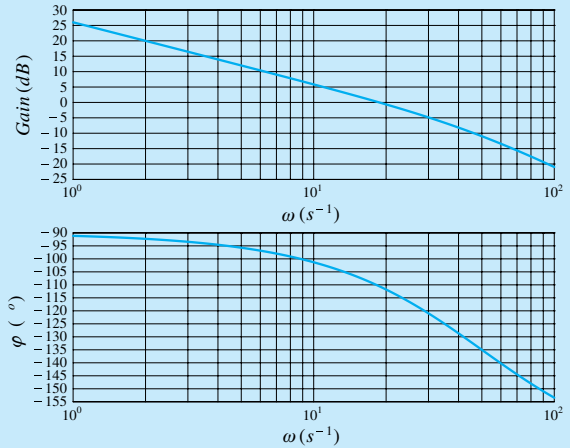


Figure 5.49 Diagrammes de BODE de la fonction $H_0(p)$.

7. Expliquer en quoi, actuellement, l'asservissement ne satisfait pas les niveaux des critères du cahier des charges. On choisit d'utiliser un correcteur $C(p)$ pour atteindre le niveau des critères du cahier des charges.

Correcteur proportionnel

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 5.48, un correcteur proportionnel $C(p) = C_0$.

8. Déterminer la valeur de C_0 pour que le niveau du critère de marge de phase soit satisfait.

9. Déterminer la pulsation de coupure à 0 dB, ω_{0dB} (la pulsation qui annule le gain) de la FTBO corrigée et conclure sur la capacité du correcteur proportionnel à satisfaire le cahier des charges.

Correcteur intégral

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 5.48, un correcteur intégral $C(p) = \frac{1}{T_i p}$.

10. Discuter de la capacité de ce type de correcteur à satisfaire le critère de marge de phase, et conclure sur la capacité du correcteur intégral à satisfaire le cahier des charges.

Correcteur intégral et à avance de phase

On choisit d'insérer, dans la chaîne directe du schéma bloc de la figure 5.48, un correcteur à correction intégrale, associé à un correcteur à avance de phase

$$C(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{1 + Tp}{1 + aTp} = \frac{K}{p} \cdot C_{ap}(p) \quad (a < 1)$$

11. Expliquer en quoi ce choix de correcteur permet de satisfaire les critères de précision et de stabilité du cahier des charges.

12. Tracer l'allure des diagrammes de BODE de $C_{ap}(p)$, en précisant, notamment, la valeur de la pulsation ω_m en laquelle la phase est maximale. Déterminer $\sin(\arg(C_{ap}(j\omega_m)))$.

13. Déterminer les valeurs de a et de T pour que la marge de phase corresponde à celle indiquée dans le cahier des charges.

14. Déterminer la valeur de K pour satisfaire le critère rapidité.

Le diagramme de BLACK-NICHOLS de la FTBO corrigée est fourni sur la figure 5.50.

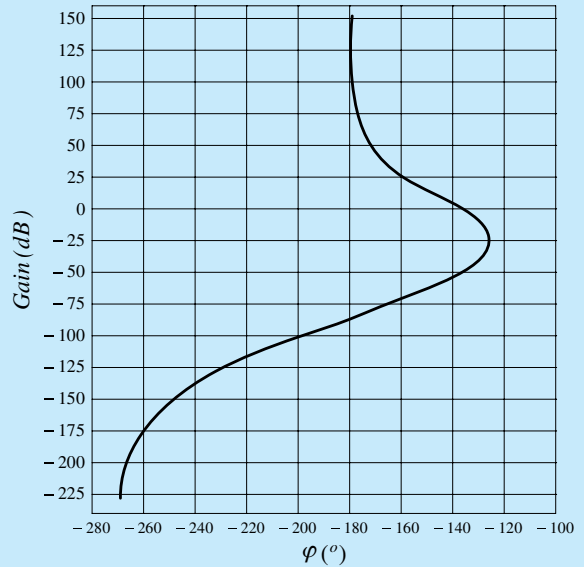


Figure 5.50 Diagramme de BLACK-NICHOLS de la fonction de transfert en boucle ouverte, corrigée.

15. Déterminer la marge de gain.

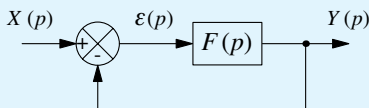
16. Conclure sur la capacité du correcteur à satisfaire l'ensemble des critères du cahier des charges.

Solutions des exercices

Exercices d'application

5.1

1. Le système peut être représenté par le schéma-bloc suivant :



2. Les constructions graphiques relatives à la détermination des marges de stabilité sont représentées sur la figure 5.51.

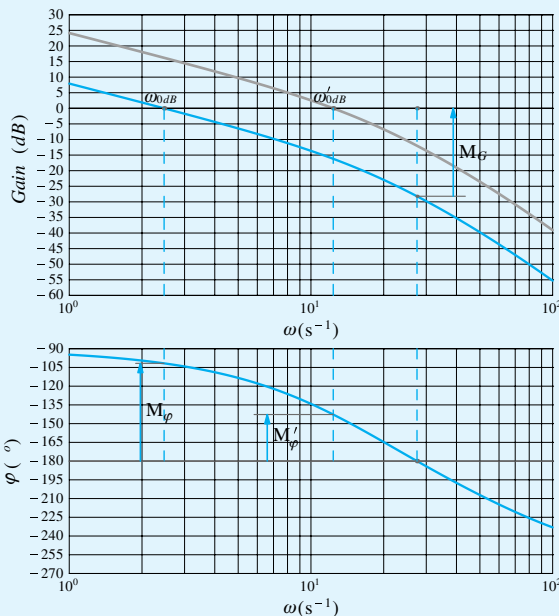


Figure 5.51 Diagrammes de BODE de la FTBO – solution.

• Détermination de la marge de phase :

- On recherche sur le diagramme de gain la pulsation de coupure à 0 dB notée ω_{0dB} .
- Pour la pulsation ω_{0dB} , on recherche la phase de la FTBO. On évalue $\varphi(\omega_{0dB}) = -102^\circ$.
- La marge de phase est $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ$ d'où

$$M_\varphi = +78^\circ$$

• Détermination de la marge de gain :

- Sur le diagramme de phase, on recherche la pulsation pour laquelle la phase vaut -180° .
- Pour cette pulsation ω_{-180} , on relève le gain de la FTBO soit

$$20 \text{ Log } |F(j\omega_{-180})| = -28 \text{ dB}$$

– La marge de gain est $M_G = 0 - 20 \text{ Log } |F(j\omega_{-180})|$ soit

$$M_G = 28 \text{ dB}$$

• Conclusion : le système, qui présente une marge de phase $M_\varphi = +78^\circ$ et une marge de gain $M_G = 28 \text{ dB}$, est stable.

3. Une correction proportionnelle de gain K_p entraîne une seule modification des diagrammes de BODE : la courbe de gain est translatée de $20 \text{ Log}(K_p)$.

• Détermination de K_p assurant une marge de gain de $M_G = 12 \text{ dB}$.

– Le diagramme de phase n'étant pas modifié par l'ajout du correcteur proportionnel, la pulsation ω_{-180} est inchangée.

– Pour cette pulsation, le gain de la FTBO corrigée doit être -12 dB , de sorte que la marge de gain du système corrigé soit $M_G = 12 \text{ dB}$.

– Par suite, il faut translater la courbe de gain de 16 dB vers le haut.

– Le gain K_p doit alors vérifier $20 \text{ Log}(K_p) = 16 \text{ dB}$ et

$$K_p = 6,3$$

• Détermination de la nouvelle marge de phase :

On recherche la nouvelle pulsation de coupure à 0 dB notée ω'_{0dB} . En procédant comme à la question précédente, on trouve la nouvelle marge de phase :

$$M_\varphi = +37^\circ$$

• Conclusions :

– Le système, qui présente une marge de phase $M_\varphi = +37^\circ$ et une marge de gain $M_G = 12 \text{ dB}$, est stable.

– La nouvelle marge de phase est faible : le système corrigé est plus rapide mais plus oscillant.

– Si on se limite à une correction proportionnelle, il est souhaitable, pour optimiser le fonctionnement, de déterminer K_p pour obtenir une marge de phase de l'ordre de 45° . Ainsi, la marge de gain du système corrigé est supérieure à la valeur minimale de 12 dB .

4. Pour le système corrigé, l'écart $\varepsilon(p)$ est lié à $X(p)$ par la relation

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + K_p \cdot F(p)} X(p)$$

On considère une entrée indicielle $x(t) = u(t)$ qui a pour transformée de LAPLACE

$$X(p) = \frac{1}{p}$$

L'écart statique pour une entrée indicielle est

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + K_p \cdot F(p)} \cdot \frac{1}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_p \cdot F(p)} \end{aligned}$$

Les diagrammes de BODE de $K_p F(p)$, compte tenu des premières asymptotes indiquent que cette fonction de transfert est de classe 1. Par suite, l'écart statique pour une entrée indicielle est

$$\varepsilon_s = 0$$

5.2

1. La FTBO du système est

$$FTBO(j\omega) = \frac{C k}{j\omega(1 + j\omega\tau)^2}$$

Par suite :

- cette FTBO est d'ordre 3 et de classe 1 ;
- la phase est : $\varphi(\omega) = -90^\circ - 2 \arctg(\omega\tau)$;
- la phase prend la valeur -180° lorsque $\omega\tau = 1$.

Par suite la pulsation demandée est $\omega_{-180^\circ} = 1/\tau$.

2. Pour le calcul de C_1 , on établit que :

- pour $\omega_{-180^\circ} = 1/\tau$, le module de la FTBO est

$$|FTBO(j/\tau)| = \frac{C k \tau}{2} ;$$

- le système est à la limite de la stabilité si son lieu de BLACK passe par le point critique, c'est-à-dire si le module de la FTBO vaut 1 et la phase vaut -180° pour une même pulsation.

Par suite la valeur C_1 demandée est solution de l'équation $\frac{C_1 k \tau}{2} = 1$.

On en déduit que :

$$C_1 = \frac{2}{k \tau} \quad \text{puis} \quad C_1 = 2$$

après application numérique.

3. Une marge de gain de 12 dB correspond à un module de $FTBO(j\omega_{-180^\circ})$ tel que

$$20 \text{ Log} (|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|) = -12$$

soit

$$|FTBO(j\omega_{-180^\circ})| = 10^{(-12/20)} \simeq 1/4$$

Pour assurer la marge de gain de 12 dB il faut diviser C_1 par 4. On obtient finalement :

$$C_2 = 0,5$$

5.3

1. La FTBO du système est :

$$FTBO(p) = \frac{C k}{p(1 + \tau p)^2}$$

En prenant $p = j\omega$, la fonction de transfert se met sous la forme :

$$FTBO(j\omega) = \frac{-2kC\tau}{(1 + \tau^2\omega^2)^2} - j \frac{kC(1 - \tau^2\omega^2)}{\omega(1 + \tau^2\omega^2)^2}$$

Au voisinage de 0, la partie imaginaire tend vers moins l'infini tandis que la partie réelle tend vers $-2.C.k.\tau = -2$. La droite parallèle à l'axe des imaginaires passant par le point -2 est une asymptote du diagramme de NYQUIST de la FTBO.

Le diagramme part donc de $-\infty$ sur cette asymptote pour contourner l'origine par la gauche puis tendre vers zéro tan-

gentiellement à l'axe des imaginaires positifs. Cette tangente verticale n'est visible qu'avec un fort grossissement au voisinage de l'origine.

On arrive finalement au tracé de la figure 5.52.

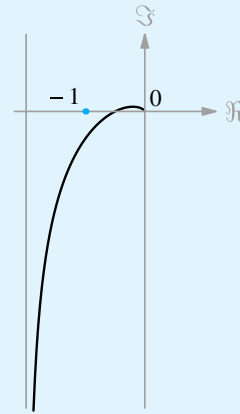


Figure 5.52 Diagramme de NYQUIST complet.

2. Le diagramme de NYQUIST de la FTBO fourni est complété par des traits de construction sur la figure 5.52.

- Détermination de la marge de phase :

- On trace le cercle de centre O et de rayon 1. Ce cercle correspond aux complexes de module 0 dB.
- L'intersection de la courbe représentative de la FTBO et du cercle donne le point de la FTBO de gain 0 dB.
- La position de ce point par rapport au point critique permet de déterminer la marge de phase comme représenté figure 5.53.

On trouve finalement

$$M_\varphi = 21^\circ$$

- Détermination de la marge de gain :

- L'intersection du lieu de la FTBO avec l'axe des réels permet d'obtenir le module de la FTBO quand l'argument est -180° .
- On trouve un module $|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|$ égal à 0,5.
- La marge de gain est $-20 \text{ Log} (|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|)$.

La marge de gain est donc finalement

$$M_G = 6 \text{ dB}$$

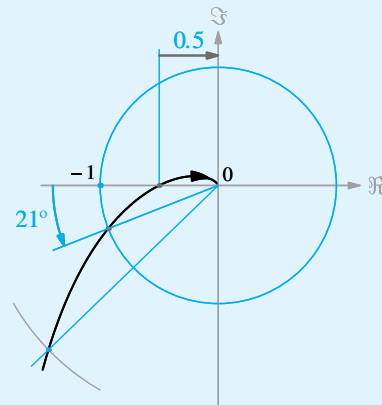


Figure 5.53 Détermination des marges de phase et de gain.

3. On souhaite un système ayant une marge de gain de 12 dB.

• Détermination de C :

Une marge de gain de 12 dB correspond à un module de la FTBO qui vérifie

$$-20 \text{ Log} (|FTBO(j\omega_{-180^\circ})|) = 12$$

Par suite, quand la phase est -180° , le module de la FTBO est

$$|FTBO(j\omega_{-180^\circ})| = 10^{-12/20} = 0,25$$

Il convient de diviser le module obtenu pour le système non corrigé par 2.

Le gain du correcteur permettant d'obtenir la marge de gain demandée est

$$C = 0,5$$

• Détermination de la marge de phase :

Le diagramme de NYQUIST de la FTBO du système corrigé est obtenu par homothétie de centre O de rapport 1/2.

Il faut appliquer la même méthode qu'à la question précédente.

Pour éviter la construction d'une nouvelle courbe, il suffit de changer les échelles sur les différents axes. Ainsi le nouveau cercle de rayon unité est partiellement tracé sur la figure 5.53.

La marge de phase du système corrigé est

$$M_\varphi = 44^\circ$$

5.4

Les éléments graphiques permettant de répondre aux questions qui suivent sont représentés figure 5.54.

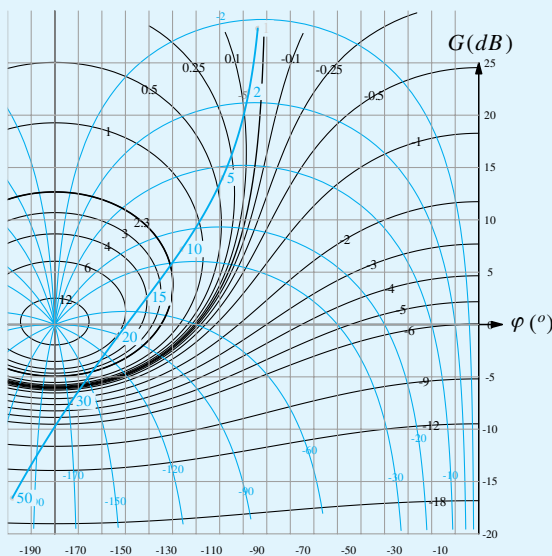


Figure 4.54 Diagramme de BLACK de la FTBO – solution.

1. En parcourant le lieu de BLACK de la FTBO :

- On constate qu'il y a résonance en boucle fermée pour $\omega_r = 20 \text{ rad/s}$.
- Le gain de la FTBF à la résonance est $G_{dB} = 6 \text{ dB}$.
- Le gain de la FTBF tend vers 1 dB quand la pulsation tend vers zéro. Le gain statique de la FTBF est donc $K = 1$.

Par suite :

- le coefficient de surtension est $Q_{dB} = 6 \text{ dB}$, soit $Q = 2$;
- la pulsation de résonance en boucle fermée est $\omega_r = 20 \text{ rad/s}$.

2. Compte tenu des résultats précédents, la marge de module est

$$M_M = G_{dB} = 6 \text{ dB}$$

Cette marge est supérieure à la valeur usuelle de 2,3 dB. Le système n'est donc pas suffisamment stable.

La marge de gain est $M_G = 9,5 \text{ dB}$. La marge de phase est $M_\varphi = 30^\circ$. Ces marges sont légèrement supérieures aux valeurs limites usuelles et confirment l'insuffisance de stabilité.

3. Une correction proportionnelle translate le diagramme de BLACK de la FTBO suivant l'axe du gain. Pour que le lieu de la FTBO tangente le contour de HALL et pour obtenir une marge de module $M_M = G_{dB} = 2,3 \text{ dB}$, il faut le translater de $-4,4 \text{ dB}$. Par suite le gain du correcteur est :

$$K_p = 10^{\frac{-4,4}{20}} = 0,6$$

La nouvelle pulsation de résonance en boucle fermée est $\omega_r = 14 \text{ rad/s}$.

5.5

1. Les tracés asymptotiques des diagrammes de la figure 5.29 permettent de déterminer :

- deux pulsations de cassure pour $\omega_1 = 0,1 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 2 \text{ rad/s}$, qui correspondent aux deux constantes de temps $\tau_1 = 10 \text{ s}$ et $\tau_2 = 0,5 \text{ s}$;
- que la fonction est de classe 1 car les premières asymptotes correspondent à une pente de -20 dB/décade et à -90° ;
- que la fonction a un dénominateur de degré égal au degré du numérateur plus 3 car les dernières asymptotes correspondent à une pente de -60 dB/décade et à -270° .
- que la première asymptote du diagramme de gain passe par le point $(0,1 ; 20 \text{ dB})$.

Compte tenu de tous ces éléments, les diagrammes de la figure 5.29 correspondent à la fonction de transfert

$$F(p) = \frac{1}{p(1+10p)(1+0,5p)}$$

Cette fonction est la FTBO du système représenté figure 5.28 pour $C = 1$.

2. Marges de phase et de gain avant réglage du correcteur.

• Détermination de la marge de phase :

- sur le diagramme de gain, on recherche la pulsation qui correspond à un gain nul. On trouve $\omega_{0dB} = 0,3 \text{ rad/s}$;
- pour la pulsation ω_{0dB} , la phase est $\varphi(\omega_{0dB}) = -171^\circ$;
- on calcule la marge de phase par $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ$ soit $M_\varphi = 9^\circ$

• Détermination de la marge de gain :

- sur le diagramme de phase, on recherche la pulsation qui correspond à une phase de -180° . On trouve $\omega_{-180^\circ} = 0,45 \text{ rad/s}$;
- pour la pulsation ω_{-180° , le gain est $G_{dB}(\omega_{-180^\circ}) = -7 \text{ dB}$;
- la marge de gain est donc

$$M_G = 7 \text{ dB}$$

3. Réglage du correcteur

• Critère « marge de phase de 40° » :

- on veut $M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180^\circ = 40^\circ$. La pulsation de coupure à 0 dB doit donc être telle que $\varphi(\omega_{0dB}) = -140^\circ$;
- pour la phase de -140° , on trouve $\omega_{0dB} = 0,11 \text{ rad/s}$;
- pour cette pulsation, le gain avant correction vaut 16 dB ;
- pour que cette pulsation devienne la pulsation de coupure à 0 dB, le gain du correcteur doit donc être égal à -16 dB pour obtenir une translation de la courbe de gain de 16 dB vers le bas ;
- le gain du correcteur permettant de satisfaire le critère de marge de phase est donc

$$C = 10^{-\frac{16}{20}} = 0,16$$

• Critère « marge de gain de 12 dB » :

- quel que soit le gain C du correcteur, la pulsation qui correspond à une phase de -180° est $\omega_{-180^\circ} = 0,45 \text{ rad/s}$;
- avant correction, le gain pour cette pulsation est -7 dB . Pour obtenir une marge de gain $M_G = 12 \text{ dB}$, il faut diminuer le gain de la FTBO de 5 dB ;
- le gain du correcteur permettant de satisfaire le critère de marge de gain est donc

$$C = 10^{-\frac{5}{20}} = 0,56$$

La valeur maximum de C permettant de satisfaire simultanément les deux critères est la plus petite des deux, soit :

$$C_{\max} = 0,16$$

Remarque : Les réponses indicielles pour les deux corrections $C = 1$ et $C = 0,16$ sont présentées figure 5.55. On remarque que le réglage $C = 1$ est moins stable que le réglage $C = 0,16$. En effet, dans le premier cas, la réponse indicielle comporte des oscillations de plus grandes amplitude et fréquence.

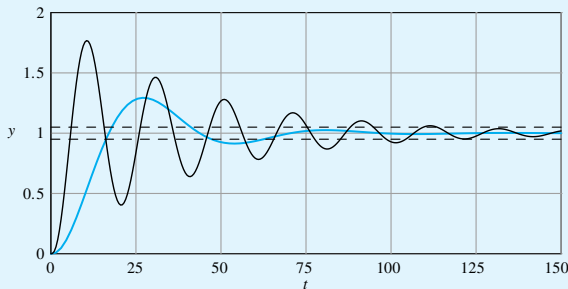


Figure 5.55 Réponses indicielles pour $C = 1$ (en noir) et $C = 0,16$ (en bleu).

5.6

1. Compte tenu de la valeur de $C(p)$, la fonction de transfert en boucle ouverte du système est

$$FTBO(p) = h.a.H(p) \cdot \frac{1}{p}$$

- Soit ω_{0dB} la pulsation pour laquelle le gain de la FTBO est nul.
 - On a $M_\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(FTBO(j\omega_{0dB}))$ et la marge de phase souhaitée est $M_\varphi = 60^\circ$.
 - Pour obtenir cette marge, il faut que $\text{Arg}(FTBO(j\omega_{0dB}))$ soit égal à -120° .

– Pour le système étudié, on a :

$$\text{Arg}(FTBO(j\omega_{0dB})) =$$

$$\text{Arg}(ha) + \text{Arg}(H(j\omega_{0dB})) + \text{Arg}\left(\frac{1}{j\omega_{0dB}}\right)$$

soit

$$\text{Arg}(FTBO(j\omega_{0dB})) = 0^\circ + \text{Arg}(H(j\omega_{0dB})) - 90^\circ$$

– On en déduit que la pulsation ω_{0dB} doit être telle que $\text{Arg}(H(j\omega_{0dB})) = -30^\circ$.

– Par lecture sur le diagramme de BODE de $H(p)$, cette phase de -30° est obtenue pour la pulsation $\omega_{0dB} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$ (voir construction sur figure 5.56).

- Pour la pulsation ω_{0dB} , le gain de $H(p)$ est de $-21,5 \text{ dB}$. La valeur de a qui convient est donc telle que $20 \text{ Log}(50.a) - 21,5 - 20 \text{ log}(80) = 0$.

Le calcul conduit à :

$$a = 19$$

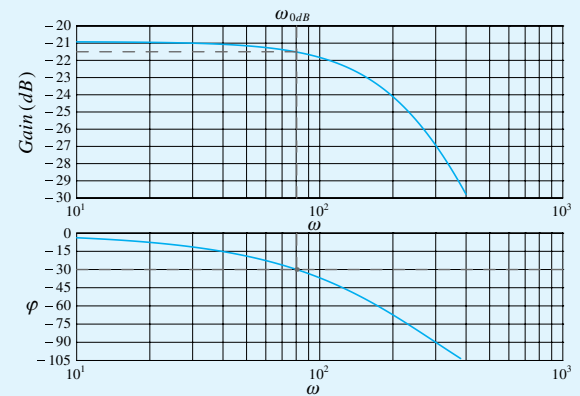


Figure 5.56 Détermination de ω_{0dB} .

2. La FTBO étant de classe 1, l'écart statique pour une entrée indicielle est nul.

Complément : Pour ce choix de a , la réponse à un échelon de position de 0,1 m est représentée figure 5.57.

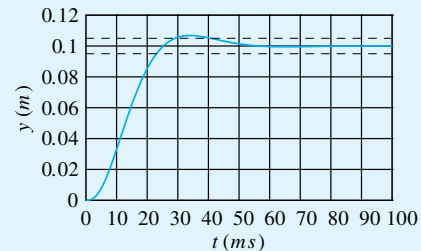


Figure 5.57 Réponse du système à un échelon de position de 0,1 m.

5.7

► Correction proportionnelle

1. Le diagramme à considérer est celui d'une FTBO de classe 0. C'est donc la courbe représentée en bleu ciel qu'il faut prendre en compte.

- On lit directement sur le diagramme que :

- la marge de gain vaut $M_G = +\infty$;
- la marge de phase vaut $M_\varphi = 34^\circ$.

• Compte tenu du lieu de la FTBO, la marge de gain est forcément conforme au cahier des charges. Par contre, on peut déterminer graphiquement la valeur maximale de K permettant de vérifier la marge de phase.

Pour satisfaire le critère « marge de phase », il faut au minimum translater la FTBO de $-2,5$ dB, ce qui conduit à

$$K \leq 10^{\frac{-2,5}{20}} \quad \text{soit} \quad K \leq 0,75$$

2. Avec cette correction proportionnelle, la FTBO est d'ordre 2 et de classe 0. Son gain statique est Ka .

Compte tenu des résultats sur les systèmes à FTBO de classe 0, l'écart statique pour une entrée indicielle est :

$$\varepsilon_s = \frac{1}{1+aK}$$

Pour satisfaire le cahier des charges, il faut vérifier :

$$\frac{1}{1+aK} \leq 0,02$$

Soit finalement

$$K \geq 2,45$$

Cette seconde condition est incompatible avec la condition de stabilité.

Par suite, une correction proportionnelle ne permet pas de satisfaire le cahier des charges.

► Correction proportionnelle intégrale

3. La principale particularité de ce correcteur est d'augmenter la classe de la FTBO. Ainsi la FTBO du système corrigé est de classe 1.

Compte tenu des résultats sur les systèmes à FTBO de classe 1, l'écart statique pour une entrée indicielle est nul. Ce correcteur permet donc de vérifier le critère de précision indépendamment de la valeur de K .

4. La FTBO étant de classe 1, il faut cette fois considérer la courbe représentée en bleu foncé. On lit directement sur le diagramme que :

- la marge de gain vaut $M_G = +\infty$;
- la marge de phase vaut $M_\varphi = 28^\circ$.

5. Avec la correction PI, les critères de précision et de marge de gain sont satisfaits quelle que soit la valeur de K . La seule contrainte est donc liée au respect du critère de marge de phase.

Pour avoir une marge de phase supérieure ou égale à 40° , il faut au minimum translater la FTBO de -7 dB, ce qui conduit à

$$K \leq 10^{\frac{-7}{20}} \quad \text{soit} \quad K \leq 0,45$$

5.8

1. Déterminer la forme du correcteur, c'est résoudre l'équation :

$$\frac{C(p)H(p)}{1+C(p)H(p)} = \frac{1}{1+2m\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cette résolution conduit à :

$$C(p) = \frac{\omega_0^2}{pH(p)(2m\omega_0 + p)}$$

2. Pour la fonction $H(p)$ donnée $C(p)$ devient :

$$C(p) = \frac{\omega_0^2(1+T_1p)(1+T_2p)}{2am\omega_0p\left(1+\frac{1}{2m\omega_0}p\right)}$$

Pour obtenir une fonction $C(p)$ simple faisant disparaître la constante T_1 , il faut prendre des constantes vérifiant :

$$2m\omega_0 = \frac{1}{T_1}$$

Dans ces conditions, $C(p)$ peut se mettre sous la forme :

$$C(p) = \frac{1+T_2p}{4m^2aT_1p} = \frac{T_2}{4m^2aT_1} \left(1 + \frac{1}{T_2p}\right)$$

Il s'agit d'un correcteur PI.

3. Pour $m = 1$, le correcteur est entièrement déterminé en fonction de a , T_1 et T_2 :

$$C(p) = \frac{T_2}{4aT_1} \left(1 + \frac{1}{T_2p}\right)$$

4. À l'examen des réponses indicielles données, on constate que :

- sans correction, l'écart statique est important ;
- avec correction proportionnelle, l'écart statique diminue et se rapproche de la valeur 1 (son asymptote est voisine de 0,95). On remarque également des oscillations et un dépassement important. La stabilité du système diminue ;
- la courbe de réponse obtenue avec la correction PI est la plus intéressante parce qu'elle a pour asymptote 1. L'écart statique pour une entrée indicielle est bien nul. Le système semble cependant légèrement moins rapide que les deux autres.

Cette comparaison met en évidence le principal intérêt du correcteur PI : l'annulation de l'écart statique pour une entrée indicielle.

5.9

1. La FTBF s'écrit

$$C(p) = \frac{F_1(p)}{1+F_1(p)F_2(p)}$$

d'où

$$C(p) = \frac{K_1}{1+\frac{K_1K_2}{1+\tau_2p}} \quad \text{puis} \quad C(p) = \frac{K_1(1+\tau_2p)}{1+K_1K_2+\tau_2p}$$

Par suite

$$C(p) = \left(\frac{K_1}{1+K_1K_2}\right) \left(\frac{1+\tau_2p}{1+\left(\frac{1}{1+K_1K_2}\right)\tau_2p}\right)$$

On constate que le système est du 1^{er} ordre.

La condition de stabilité est donc :

$$\left(\frac{1}{1+K_1K_2}\right)\tau_2 > 0$$

2. En prenant $K_1 = 8$, $K_2 = \frac{7}{8}$ et $\tau_2 = 0,1$, la condition de stabilité est vérifiée.

La FTBF devient :

$$C(p) = \frac{1 + 0,1.p}{1 + \left(\frac{1}{8}\right).0,1.p} = \frac{1 + 0,1.p}{1 + 0,0125.p}$$

Compte tenu de la forme de cette fonction de transfert, ses diagrammes de BODE présentent les particularités suivantes :

- Les diagrammes asymptotiques présentent des cassures pour les pulsations $\omega_1 = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{0,0125} = 80 \text{ rad.s}^{-1}$.
- Pour les pulsations inférieures à ω_1 les diagrammes de gain et de phase présentent des asymptotes à 0 dB et 0°.
- Pour les pulsations comprises entre ω_1 et ω_2 , le diagramme de gain présente une asymptote de pente +20 dB/décade tandis que le diagramme de phase a une asymptote à +90°.
- Pour les pulsations supérieures à ω_2 , on trouve des asymptotes à 18 dB et 0°.
- Compte tenu des symétries des tracés asymptotiques, la phase passera par un maximum pour la pulsation $\omega_3 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, soit $\omega_3 = 28,3 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour le tracé des diagrammes réels, on calcule des valeurs pour quelques pulsations particulières.

On obtient :

$$C_{dB}(\omega) = 20 \text{ Log } \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} - 20 \text{ Log } \sqrt{1 + (0,0125\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg}(0,1\omega) - \text{Arctg}(0,0125\omega)$$

Il est alors possible d'établir le tableau suivant :

$\omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	0,01	1,8	7,1	14,2	28,3	57
$C_{dB} \text{ (dB)}$	0	0,1	1,7	4,6	9	13,4
$\varphi \text{ (}^\circ\text{)}$	0,1	9	30	45	51	45

$\omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	226	906	10000
$C_{dB} \text{ (dB)}$	17,6	18	18,1
$\varphi \text{ (}^\circ\text{)}$	30	9	0,4

Par suite, on obtient les diagrammes de la figure 5.58.

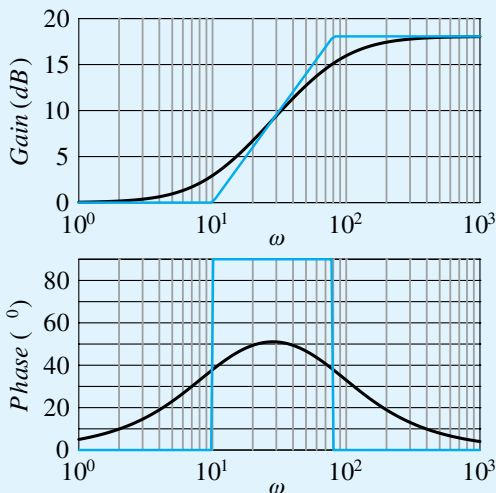


Figure 5.58 Diagramme de BODE pour $K_1 = 8, K_2 = \frac{7}{8}$ et $\tau_2 = 0,1$.

Conclusion : Les courbes obtenues correspondent à un correcteur à avance de phase (PD réel).

La FTBF peut être mise sous la forme

$$C(p) = K \left(\frac{1 + \tau_2 p}{1 + a \tau_2 p} \right)$$

avec $K = 1, a = 0,125$ et $\tau_2 = 0,1$

Les coefficients correspondent bien à un correcteur à avance de phase :

- le coefficient a est bien tel que $a < 1$.

On vérifie aussi que $\varphi_M = \arcsin\left(\frac{1-a}{1+a}\right)$.

3. En prenant $K_1 = 1, K_2 = -\frac{11}{12}$ et $\tau_2 = 0,1$, la condition de stabilité est vérifiée.

La FTBF devient :

$$C(p) = 12 \left(\frac{1 + 0,1.p}{1 + 12.0,1.p} \right) = 12 \left(\frac{1 + 0,1.p}{1 + 1,2.p} \right)$$

Les diagrammes de BODE de cette fonction de transfert présentent les particularités suivantes :

- Les diagrammes asymptotiques comportent des cassures pour les pulsations $\omega_1 = \frac{1}{1,2} = 0,83 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.
- Pour les pulsations inférieures à ω_1 les diagrammes de gain et de phase présentent des asymptotes à 21,6 dB et 0°.
- Pour les pulsations comprises entre ω_1 et ω_2 , le diagramme de gain présente une asymptote de pente -20 dB/décade tandis que le diagramme de phase a une asymptote à -90°.
- Pour les pulsations supérieures à ω_2 , on trouve des asymptotes à 0 dB et 0°.
- Compte tenu des symétries des tracés asymptotiques, la phase passe par un minimum pour la pulsation $\omega_3 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, soit $\omega_3 = 2,88 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour le tracé des diagrammes réels, on calcule des valeurs pour quelques pulsations particulières.

Il vient :

$$C_{dB}(\omega) = 20 \text{ Log } 12 + 20 \text{ Log } \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} - 20 \text{ Log } \sqrt{1 + (1,2\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg}(0,1\omega) - \text{Arctg}(1,2\omega)$$

D'où le tableau de valeurs suivant :

$\omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	0,09	0,18	0,36	0,72	1,44	2,88
$C_{dB} \text{ (dB)}$	21,5	21,4	20,8	19,2	15,7	10,8
$\varphi \text{ (}^\circ\text{)}$	-6	-11	-21	-37	-52	-58

$\omega \text{ (rad.s}^{-1}\text{)}$	5,76	11,52	23	46	92
$C_{dB} \text{ (dB)}$	5,9	2,4	0,7	0,2	0,1
$\varphi \text{ (}^\circ\text{)}$	-52	-37	-21	-11	-6

Les diagrammes obtenus sont représentés figure 5.59.

Conclusion : Les diagrammes obtenus correspondent à un correcteur PI réel.

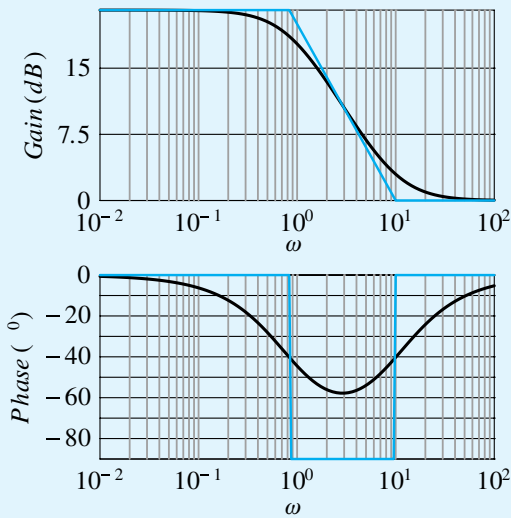


Figure 5.59 Diagramme de BODE pour $K_1 = 1, K_2 = -\frac{11}{12}$ et $\tau_2 = 0,1$.

La FTBF peut être mise sous la forme

$$C(p) = K \left(\frac{1 + \tau_2 p}{1 + a \tau_2 p} \right)$$

avec $K = 12, a = 12$ et $\tau_2 = 0,1$

Le coefficient a du dénominateur est plus grand que 1, ce qui correspond bien au cas d'un correcteur PI réel.

5.10

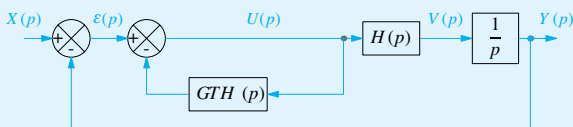
1. D'un point de vue stabilité :

- On constate que la réponse indicielle tend vers la valeur 1 et qu'elle est caractérisée par un fort dépassement pour un temps de réponse à $t_{5\%}$ de 0,15 s.
- Le diagramme de BLACK permet de déterminer les marges de stabilité ainsi que la pulsation de coupure à 0 dB. On trouve :
 - une marge de gain infinie ;
 - une marge de phase $M_\varphi = 25^\circ$;
 - une pulsation de coupure à 0 dB qui vaut $\omega_{odB} = 85$ rad/s.

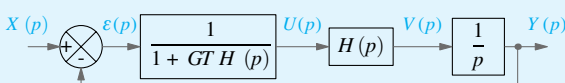
En conclusion, le système est stable mais les oscillations sont trop importantes.

On peut attendre d'une correction qu'elle améliore la stabilité en augmentant la marge de phase. Il faut cependant veiller à limiter la baisse de la pulsation de coupure à 0 dB pour ne pas trop diminuer la rapidité du système.

2. Par deux manipulations, le schéma-bloc de la figure 5.40 devient d'abord



Puis ensuite



Dans ces conditions la fonction de transfert du correcteur est donc :

$$C(p) = \frac{1}{1 + GTH(p)}$$

Pour la fonction de transfert $H(p)$ donnée on obtient alors :

$$C(p) = \frac{1}{1 + GTK} \left(\frac{1 + \tau p}{1 + \frac{\tau}{1 + GTK} p} \right)$$

Le correcteur est un correcteur à avance de phase.

3. Après avoir calculé module et argument de $C(j\omega)$, les diagrammes de BODE du correcteur peuvent se construire à partir du tableau suivant :

ω (rad/s)	0.1	0.5	2	5	10	20
φ (°)	-90,1	-91	-93	-97	-104	-117
G (dB)	66	52	40	32	26	19

ω (rad/s)	50	100	500	1000
φ (°)	-141	-158	-175	-178
G (dB)	8	-3	-30	-42

On arrive aux diagrammes de BODE représentés figure 5.60

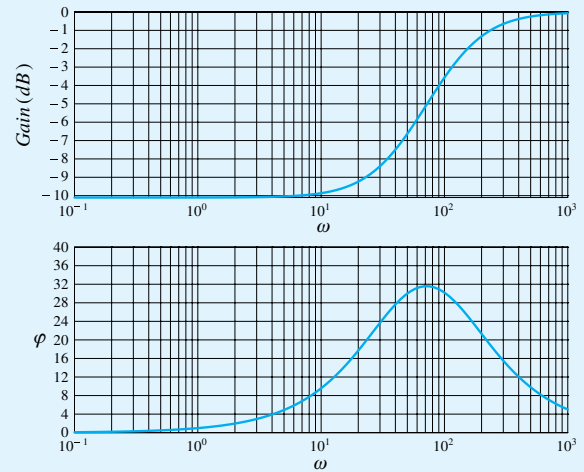


Figure 5.60 Diagramme de BODE du correcteur.

4. Sur le diagramme de BLACK de la figure 5.39, on voit l'influence de la correction sur le lieu de la FTBO.

Son tracé est obtenu point par point en utilisant les données établies pour le correcteur. Les décalages correspondent aux variations de module et d'argument induites par l'ajout du correcteur.

Sur le diagramme corrigé, on peut déterminer :

- la marge de gain qui est infinie ;
- la marge de phase qui vaut $M_\varphi = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$;
- la pulsation de coupure à 0 dB qui est $\omega_{0dB} = 57$ rad/s (légèrement supérieure à 50 rad/s).

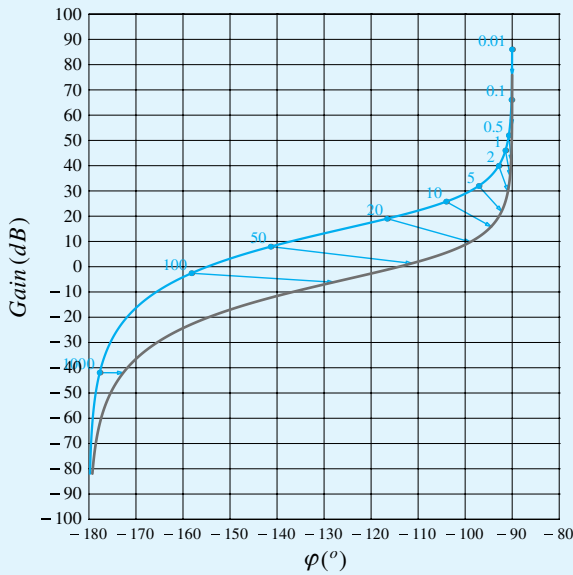


Figure 5.61 Diagrammes de BLACK non corrigé et corrigé.

Exercices d'approfondissement

5.11

1. La relation liant $Z_8(p)$ à $Z_7(p)$ peut s'écrire

$$(Mp(p+g) + 2k)Z_8 = 2kZ_7$$

doù
$$\frac{Z_8}{Z_7} = \frac{2k}{Mp^2 + Mpg + 2k}$$

puis finalement

$$\mu_1 = \frac{2k}{M}$$

De la même façon, on obtient

$$\left((B_8 + Mh^2)p(p+g) + \frac{2}{3}kL^2 \right) \theta_8 = \frac{2}{3}kL^2 \theta_7$$

puis

$$\frac{\theta_8}{\theta_7} = \frac{\frac{2}{3}kL^2}{(B_8 + Mh^2)p^2 + (B_8 + Mh^2)pg + \frac{2}{3}kL^2}$$

On trouve pour terminer

$$\mu_2 = \frac{2kL^2}{3(B_8 + Mh^2)}$$

Les applications numériques demandées conduisent à

$$\mu_1 = 10^3 \text{ s}^{-2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{30}{0,083 + h^2}$$

(avec μ_2 en s^{-2} pour h exprimé en m).

2. On souhaite que le système, qui est du second ordre, ne présente pas de résonance. Ce résultat est obtenu si son coefficient d'amortissement ξ est supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En écrivant la FTBO sous forme canonique, on établit que :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)p + \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)p^2}$$

et

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{g}{\mu}\right)p + \left(\frac{1}{\mu}\right)p^2}$$

En identifiant les deux formes, on trouve immédiatement :

- la pulsation propre du système $\omega_n = \sqrt{\mu}$;
- le coefficient d'amortissement $\xi = \frac{g}{2\sqrt{\mu}}$.

La condition $\xi \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ conduit à

$$g \geq \sqrt{2\mu}$$

Une application numérique faite pour $\mu = \mu_1$, qui est supérieur à μ_2 d'après la figure 5.45, permet de calculer la valeur minimale de g soit :

$$g \geq \sqrt{2\mu_1} = 44,7 \text{ s}^{-1}$$

Le choix de $g = 50 \text{ s}^{-1}$ est donc satisfaisant pour ce critère de performance.

3. Il faut considérer chaque mouvement séparément.

- Pour le mouvement de translation, la pulsation de cassure est la pulsation propre du système $\omega_n = \sqrt{\mu_1}$, soit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

- Sa valeur est indépendante de h et vaut $\omega_n = 31,6 \text{ rad.s}^{-1}$.
- Elle très proche de la valeur demandée $\omega_c = 2\pi \cdot 5 = 31,42 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Pour le mouvement de rotation, la valeur optimale de h correspond à la racine de l'équation

$$\omega_c = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{2kL^2}{3(B_8 + Mh^2)}}$$

d'où

$$3\omega_c^2(B_8 + Mh^2) = 2kL^2 \quad \text{puis} \quad h = \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{2kL^2}{3\omega_c^2} - B_8 \right)}$$

L'application numérique ne conduit à aucune solution car $\frac{2kL^2}{3\omega_c^2} - B_8 < 0$.

Ce résultat concorde avec le graphe de la figure 5.45 car la valeur de μ_1 convient et il n'y a pas d'intersection entre les courbes $\mu_1(h)$ et $\mu_2(h)$.

En conclusion, le critère pulsation de cassure est respecté pour la translation, mais pas pour la rotation. Cependant, pour se rap-

procher de la valeur ω_c attendue, on doit choisir une valeur de h conduisant à la plus grande valeur possible de μ_2 .

4. Le choix $h = 20$ cm étant fait, on obtient $\mu_1 = 10^3 \text{ s}^{-2}$ et $\mu_2 = 244 \text{ s}^{-2}$.

Les coefficients d'amortissement pour les deux mouvements sont

$$\xi_1 = \frac{g}{2\sqrt{\mu_1}} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \frac{g}{2\sqrt{\mu_2}}$$

soit

$$\xi_1 = 0,79 \quad \text{et} \quad \xi_2 = 1,6$$

Ces deux valeurs étant supérieures à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, le critère pas de résonance de la fonction de service FS1 est satisfait.

5. Un mouvement d'oscillation à 1,5 Hz correspond à une pulsation $\omega = 9,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour cette pulsation, le gain de la fonction de transfert liant θ_8 à θ_7 est environ $-6,2 \text{ dB}$, ce qui conduit à un rapport d'amplitudes

$$\frac{\theta_8}{\theta_7} = 0,49$$

6. La chaîne de retour unitaire étant déjà en place sur le schéma bloc de la figure 5.47, on trouve directement

$$H_0(p) = 2k \left(\frac{1}{1 + \frac{g}{p}} \right) \frac{1}{Mp^2}$$

soit après transformation

$$H_0(p) = \frac{\frac{2k}{Mg}}{p \left(1 + \frac{1}{g}p \right)}$$

7. L'analyse de la fonction de transfert conduit aux résultats qui suivent.

- Comme la FTBO $H_0(p)$ du système est de classe 1, le critère de précision est satisfait.
- Le critère de marge de gain est satisfait car la phase tend vers -180° sans jamais atteindre cette valeur. La marge de gain est infinie.
- Par contre le système est plus lent que voulu dans la mesure où la pulsation de coupure à 0 dB est inférieure à la valeur souhaitée :

on trouve $\omega_{0 \text{ dB}} \approx 19 \text{ rad.s}^{-1}$ pour une valeur attendue de $31,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Pour la pulsation $\omega_{0 \text{ dB}}$, la phase vaut -110° . La marge de phase est donc $M_\varphi = -110 + 180 = 70^\circ$. Cette valeur est nettement supérieure à la valeur souhaitée.

En conclusion, le système est stable, précis, mais trop lent.

8. On souhaite une marge de phase de $M_\varphi = 45^\circ$.

Pour satisfaire cette condition, la pulsation de coupure à 0 dB doit être telle que :

$$45^\circ = \varphi(\omega_{0 \text{ dB}}) + 180^\circ$$

d'où

$$\varphi(\omega_{0 \text{ dB}}) = -135^\circ$$

Par lecture sur le diagramme de BODE en phase, on trouve une pulsation $\omega_{0 \text{ dB}} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$.

Pour cette pulsation, on trouve un gain du système non corrigé de -11 dB .

Le gain C_0 du correcteur doit translater la courbe de gain de $+11 \text{ dB}$, ce qui conduit à

$$C_0 = 20 \text{ Log}(11) = 3,55$$

9. La pulsation de coupure à 0 dB est :

- $\omega_{0 \text{ dB}} = 50 \text{ rad.s}^{-1}$;
- donc supérieure à la valeur souhaitée de $31,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

En conclusion, le système devrait être rapide, mais il n'est pas conforme au cahier des charges de la fonction FS1.

10. Avec le correcteur intégral proposé, la FTBO devient

$$H_0(p) = \frac{2k}{T_i Mg} \cdot \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{1}{g}p \right)}$$

- Son diagramme de BODE en phase est déduit du diagramme de la figure 5.60 par une translation de -90° .
- La phase du système corrigé varie donc de -180° à -270° .
- Le système devient instable car on ne peut avoir de marge de phase positive.

Le système ne satisfait pas au cahier des charges.

11. Avec le choix d'un correcteur intégral et à avance de phase :

- En terme de précision :
 - la classe de la FTBO est 2 ;
 - l'écart statique d'un tel système est nul aussi bien pour une entrée en échelon que pour une entrée en rampe.

Ce système est plus précis que les précédents, à condition d'être stable.

• En terme de stabilité :

- le correcteur à avance de phase permet d'augmenter localement la phase ;
- bien positionné le correcteur à avance de phase permet de passer au dessus de -180° et d'obtenir une marge de phase suffisante.

Il permet donc de faire en sorte que le système soit stable.

12. Les diagrammes de BODE de

$$C_{ap}(p) = \frac{1 + Tp}{1 + aTp}$$

avec $a < 1$ présentent deux pulsations de cassure :

$$\frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \frac{1}{aT}$$

Leurs diagrammes asymptotiques et réels sont représentés figure 5.62.

- Le gain en dB varie de 0 à $20 \text{ Log} \left(\frac{1}{a} \right)$.

- La phase passe par un maximum pour $\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$.

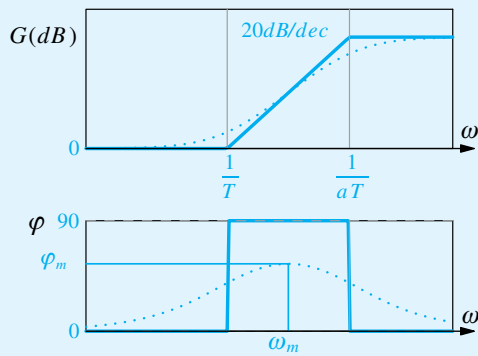


Figure 5.62 Diagramme de BODE de $C_{ap}(p)$.

- Pour la pulsation ω_m , le gain en dB est égal à $10 \text{ Log} \left(\frac{1}{a} \right)$.

Par suite

$$C_{ap}(j\omega) = \frac{1 + jT\omega}{1 + jaT\omega} = \frac{1 + aT^2\omega^2 + jT\omega(1-a)}{\sqrt{1 + a^2T^2\omega^2}}$$

d'où

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg} \left(\frac{T\omega(1-a)}{1 + aT^2\omega^2} \right)$$

La phase maximale est

$$\varphi_m = \arg(C_{ap}(j\omega_m)) = \text{Arctg} \left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}} \right)$$

On obtient aussi

$$\sin \varphi_m = \frac{\text{tg} \varphi_m}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_m}} = \frac{1-a}{\sqrt{4a + (1-a)^2}}$$

et finalement

$$\sin \varphi_m = \frac{1-a}{1+a}$$

13. On souhaite obtenir une marge de phase de 45° pour une pulsation de coupure $\omega_{0 \text{ dB}} = 31,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Le terme K du correcteur n'a pas d'influence sur la phase de la FTBO.

- Le terme $\frac{1}{p}$ diminue uniformément la phase de 90° .

- On choisit de placer la pulsation ω_m du correcteur à avance de phase pour apporter le maximum de phase pour la pulsation $\omega_0 = 2\pi \cdot 5 \text{ Hz} = 31,4 \text{ rad.s}^{-1}$.

On veut donc satisfaire l'équation

$$M_\varphi = \text{Arg}(H_0(j\omega_0)) + 0^\circ - 90^\circ + \varphi_m + 180^\circ$$

Sur la figure 5.49, on lit

$$\text{Arg}(H_0(j\omega_0)) = -122^\circ$$

Par suite

$$45^\circ = -122^\circ + 0^\circ - 90^\circ + \varphi_m + 180^\circ$$

puis

$$\varphi_m = 77^\circ$$

À partir de la relation mise en place à la question précédente, on obtient :

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m}$$

L'application numérique conduit à :

$$a = \frac{1 - \sin 77^\circ}{1 + \sin 77^\circ} = 0,013$$

Faire coïncider les pulsations ω_m et ω_0 , c'est écrire que

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_0$$

Par suite

$$T = \frac{1}{\omega_0\sqrt{a}}$$

L'application numérique donne $T = 0,28$.

14. Pour satisfaire le critère de rapidité, il faut que le gain de la FTBO soit nul pour la pulsation ω_0 qui est choisie égale à ω_m .

Cette condition se traduit par :

$$20 \text{ Log} |H_0(j\omega_0)| + 20 \text{ Log} K - 20 \text{ Log} (\omega_0) + 10 \text{ Log} \left(\frac{1}{a} \right) = 0$$

Par suite, on trouve

$$20 \text{ Log} K = 20 \text{ Log} (\omega_0) - 20 \text{ Log} |H_0(j\omega_0)| + 10 \text{ Log} (a)$$

avec

$$20 \text{ Log} |H_0(j\omega_0)| = -5,4 \text{ dB}$$

soit

$$20 \text{ Log} K = 16,5 \text{ dB} \quad \text{et} \quad K = 6,7$$

En prenant $a = 0,013$, $T = 0,28$ et $K = 6,7$, il faut remarquer que :

- les performances attendues sont respectées à l'exception de la marge de phase ;
- la phase atteint la valeur de -180° pour $\omega = 112 \text{ rad.s}^{-1}$, ce qui conduit à une marge de gain $M_G = 18 \text{ dB}$.

15. Le système corrigé selon la figure 5.50 vérifie :

$$20 \text{ Log} |FTBO_{cor}(j\omega_{-180^\circ})| = -88 \text{ dB}$$

La marge de gain est donc $M_G = 88 \text{ dB}$.

16. Pour le système corrigé selon la figure 5.50 :

- le critère de précision est satisfait puisque le gain tend vers l'infini lorsque la pulsation tend vers zéro ;
- le critère de stabilité est satisfait puisque les marges de gain et de phase sont respectées ;
- l'examen de la courbe fournie ne permet pas de conclure en ce qui concerne le critère de rapidité. En effet, la valeur de la pulsation de coupure à zéro dB n'est pas indiquée. Si la valeur de cette pulsation est $2\pi \cdot 5 \text{ Hz}$, alors le critère de rapidité est satisfait.

En conclusion, si la valeur de la pulsation de coupure à zéro dB est $2\pi \cdot 5 \text{ Hz}$, alors le correcteur a la capacité à satisfaire l'ensemble du cahier des charges.

Plan

6.1	Évolution d'un GRAFCET et actions	214
6.2	Représentation GRAFCET multigraphes	224
6.3	GRAFCET et description structurée	227
	Exercices d'application	238
	Exercices d'approfondissement	246
	Solutions des exercices	247

Introduction

Ce chapitre est consacré au GRAFCET, langage graphique permettant d'appréhender les systèmes séquentiels. Il complète les notions présentées dans l'ouvrage de première année.

Le langage GRAFCET est utilisé pour spécifier le comportement d'un système et sert de moyen de communication entre concepteurs et utilisateurs. Il permet de décrire le comportement logique du système indépendamment de la technologie utilisée pour le mettre en oeuvre. Ce langage est détaillé dans la norme NF EN 60848.

Les systèmes séquentiels sont souvent gérés par des automates programmables industriels (API). Il convient alors de traduire la description utilisant le GRAFCET en l'un des langages utilisable pour programmer l'API.

Prérequis

- Algèbre de Boole.
- Éléments de base du langage GRAFCET : étape, transition, réceptivité, action.
- Les cinq règles d'évolution du langage GRAFCET.

Objectifs

- Interpréter un Grafcet comportant macro-étapes, grafkets partiels synchronisés, forçage ou encapsulation pour traduire le comportement d'un système sous forme de chronogrammes, de tableaux d'évolution.
- Imaginer ou modifier un grafcet afin qu'un système ait un comportement conforme à un cahier des charges en utilisant macro-étapes, grafkets partiels synchronisés ou forçage.

6.1 Évolution d'un GRAFCET et actions

Le terme GRAFCET est l'acronyme de GRAPhe Fonctionnel de Commande par Etapes et Transitions.

Définition

On appelle **GRAFCET** le langage défini dans la norme NF EN 60848 et destiné à la description fonctionnelle du comportement de la partie séquentielle des systèmes de commande.

6.1.1 Principaux éléments du langage GRAFCET

Les principaux éléments du langage GRAFCET sont rappelés sur la figure 6.1 et les règles de base énoncées dans le tableau figure 6.2.

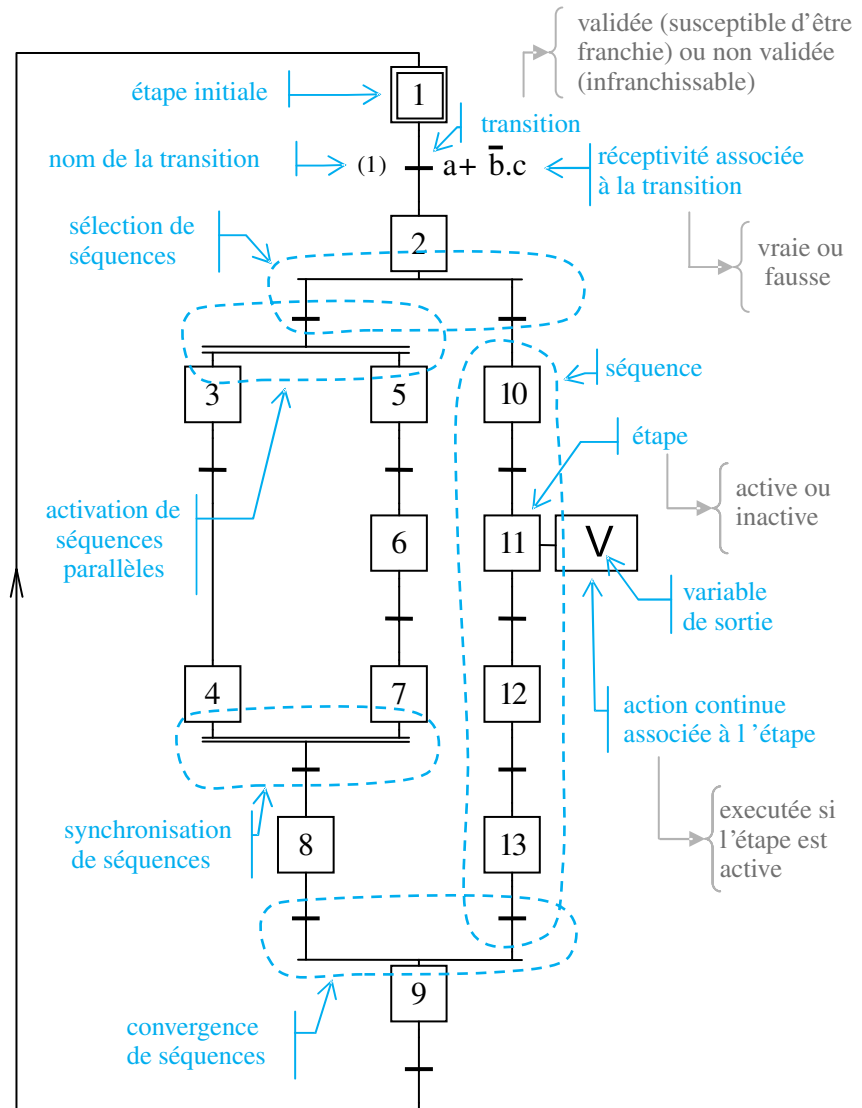


Figure 6.1 Principaux éléments du langage GRAFCET

règle n°1	La situation initiale est l'ensemble des étapes actives à l'instant initial, c'est-à-dire l'ensemble des étapes initiales.
règle n°2	Une transition est validée si et seulement si toutes les étapes qui la précèdent directement sont actives. Une transition est franchissable si et seulement si elle est validée et sa réceptivité associée a la valeur VRAI.
règle n°3	Une transition franchissable est immédiatement franchie. Son franchissement entraîne simultanément la désactivation de toutes les étapes qui la précèdent directement et l'activation de toutes les étapes qui la suivent directement.
règle n°4	Plusieurs transitions simultanément franchissables sont simultanément franchies.
règle n°5	Si une étape doit être simultanément désactivée et activée, alors elle reste active.

Figure 6.2 Les cinq règles du GRAFCET

Définition

On appelle **diagramme grafcet** ou **grafcet** tout diagramme fonctionnel utilisant le langage GRAFCET.

L'examen de la structure d'un grafcet conduit aux remarques suivantes :

- les liaisons du langage GRAFCET sont orientées ;
- par convention, l'entrée d'une étape est toujours en haut, sa sortie est toujours en bas ;
- pour une écriture univoque des diagrammes, les transitions sont placées de préférence sur des liaisons verticales. Dans ce cas, elles sont toujours franchies de haut en bas ;
- si de façon exceptionnelle une transition est placée sur une liaison horizontale, il convient d'indiquer le sens de parcours de la liaison en ajoutant une flèche sur le lien pour éviter toute erreur d'interprétation.

Si elles sont précisées, les informations associées aux étapes et transitions doivent être indiquées conformément aux prescriptions du GRAFCET :

- les actions associées à une étape sont juxtaposées ou empilées, mais toujours placées à sa droite ;
- la réceptivité associée à une transition est toujours placée à sa droite ;
- le repère identifiant une transition est placé entre parenthèses à sa gauche.

Lors de la représentation de grafkets complexes, le respect d'une dernière consigne permet d'éviter des erreurs d'interprétation : il faut veiller à ce que des liens qui sont connectés entre eux ne soient pas confondus avec des liens qui se croisent sans qu'une connexion existe.

L'exemple des figures 6.3 et 6.4, où l'étape 1 est reliée à la transition (1) et où l'étape 3 est reliée aux transitions (2), (3) et (4), en est l'illustration. Le tracé de la figure 6.4 présente une ambiguïté. Par contre, le tracé de la figure 6.3, tel que la règle « deux liens qui se croisent ne communiquent pas entre eux » s'applique, ne présente aucun risque de confusion.

Les risques de non respect de ces consignes sont importants lors de modifications apportées à un grafcet existant. C'est dans cette situation qu'il faut être particulièrement vigilant.

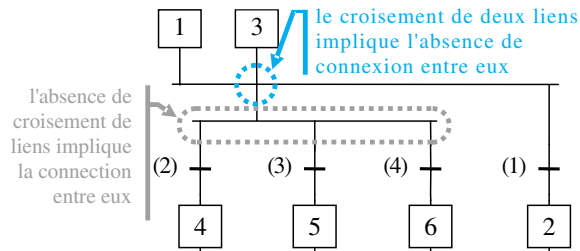


Figure 6.3 Tracé recommandé.

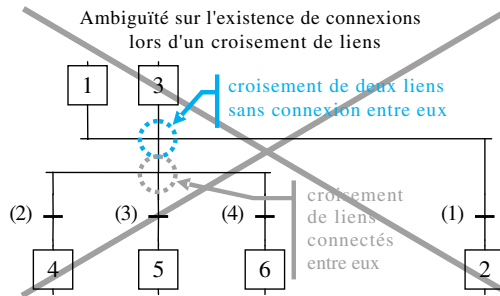


Figure 6.4 Tracé à éviter car ambigu.

6.1.2 Algorithme d'évolution d'un grafcet

Définition

On appelle **situation** d'un grafcet à une date t l'ensemble des étapes du grafcet actives à cet instant.

L'interprétation d'un grafcet n'est possible que si l'on applique de façon répétée un algorithme correspondant à un cycle élémentaire d'analyse d'évolution du grafcet. À un instant t , la situation d'un grafcet est déterminée par l'ensemble des étapes actives à cet instant. L'algorithme consiste alors à :

- faire l'inventaire des transitions validées (règle n°2) ;
- scruter l'état des variables d'entrée ;
- évaluer la valeur des réceptivités associées aux transitions validées et faire l'inventaire des transitions franchissables (règle n°2) ;
- faire évoluer la situation du grafcet en respectant les règles n°3, 4 et 5 ;
- affecter les nouvelles valeurs aux variables de sortie.

Ce cycle d'analyse d'évolution se concrétise par une évolution élémentaire du grafcet. Un cycle d'analyse d'évolution se fait théoriquement de façon instantanée, comme si l'écoulement du temps était stoppé d'un coup de baguette magique, puis libéré une fois le cycle d'analyse d'évolution terminé.

Remarques

- Il faut être conscient des différences qui existent entre le modèle GRAFCET et la réalité technologique. Un API réalise le cycle d'analyse d'évolution précédemment décrit en une durée non nulle. Il s'ensuit que le temps n'est pas évalué de façon continue par l'API et que des événements survenant entre les instants de deux scrutations consécutives des variables d'entrée sont considérés par l'API comme des événements simultanés.



API est l'acronyme d'Automate Programmable Industriel.

- La mise en œuvre d'un système réel est susceptible d'engendrer des différences entre son comportement réel et le comportement attendu et décrit à l'aide du langage GRAFCET. La traduction comportementale d'un grafcet à l'aide d'une technologie donnée demande une bonne connaissance à la fois du GRAFCET et de la technologie à mettre en œuvre.

Définition

On appelle **situation stable** d'un grafcet une situation qui reste inchangée durant plusieurs cycles d'analyse d'évolution du grafcet consécutifs.

Lorsqu'on conduit l'analyse décrite précédemment, on passe le plus souvent d'une situation stable d'un grafcet à une autre situation stable. Mais parfois, il est nécessaire d'analyser l'évolution du grafcet sur plusieurs cycles qui s'enchaînent avant d'arriver à une nouvelle situation stable. Dans ce cas, une ou plusieurs étapes sont actives pendant la durée d'un seul cycle d'analyse d'évolution. Ces situations correspondent à des situations instables du grafcet. L'évolution du grafcet est alors qualifiée d'évolution fugace.

Définition

On appelle **évolution fugace** d'un grafcet une évolution de sa situation caractérisée par le franchissement de plusieurs transitions successives dans plusieurs cycles d'analyse d'évolution consécutifs, survenue immédiatement après l'apparition d'un seul événement d'entrée.



Deux transitions successives sont deux transitions séparées par une étape.

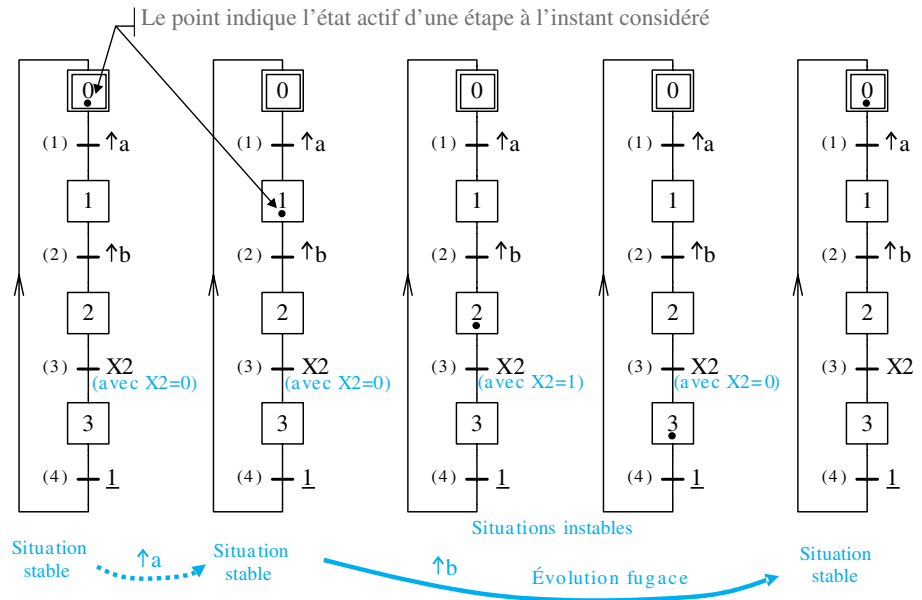


Figure 6.5 Évolution fugace.

Exemple

Le grafcet de figure 6.5 est susceptible d'évoluer de façon fugace. En partant de la situation initiale, on peut faire l'analyse qui suit.

- À l'instant où se produit un front montant de a , la transition (1) est franchie. L'étape 0 est désactivée tandis que l'étape 1 est activée. Dans le cycle d'analyse d'évolution suivant, la transition (2) est validée mais sa réceptivité a la valeur

FAUX. Le grafcet ne peut plus évoluer. Le grafcet est donc passé d'une situation stable à une autre situation stable. Les cycles d'analyse d'évolution se poursuivent sans changement de la situation du grafcet jusqu'à ce que se produise un nouvel événement.

- À l'instant où se produit un front montant de b , il y a franchissement de la transition (2), désactivation de l'étape 1 et activation de l'étape 2. Dans le cycle d'analyse d'évolution suivant, la transition (3) est validée et sa réceptivité a la valeur VRAI car l'étape 2 est active. La situation du grafcet évolue donc et l'étape 3 devient active. Cette évolution est fugace car l'étape 2 n'est restée active que pendant un cycle d'analyse d'évolution du grafcet.
- L'étape 3 étant active, la transition (4) est maintenant validée. Sa réceptivité ayant toujours la valeur VRAI, elle est franchissable et est immédiatement franchie. L'étape 3 est désactivée tandis que l'étape 0 est activée. L'étape 3 ne reste donc active que pendant un cycle d'analyse d'évolution. Il s'agit encore d'une évolution fugace. Le grafcet se retrouve alors dans la situation stable initiale.

6.1.3

Entrées et sorties d'un système séquentiel

Un système séquentiel, qui peut être la totalité ou simplement un fragment de la partie séquentielle d'un système complexe, met en relation des entrées et des sorties comme il apparaît sur la figure 6.7. Le GRAFCET permet de décrire ces relations.

S'agissant d'un système séquentiel, les entrées et sorties ne peuvent être quelconques :

- Les **entrées** d'un système séquentiel sont des variables booléennes. Elles apparaissent dans les réceptivités associées aux transitions, dans les conditions d'affectation ou les assignations sur événement.

$\uparrow a$	Front montant de a : variable booléenne de valeur VRAI à l'instant où la variable a passe de la valeur FAUX à la valeur VRAI. Nota : L'« instant » correspond en réalité à la totalité du cycle d'analyse d'évolution du grafcet où la scrutation de la variable a conduit à la détection de son passage de la valeur FAUX à la valeur VRAI.
$\downarrow a$	Front descendant de a : variable booléenne de valeur VRAI à l'instant où la variable a passe de la valeur VRAI à la valeur FAUX.
$t_1/a/t_2$	Variable booléenne qui prend la valeur VRAI après un temps t_1 compté à partir du front montant de a , qui reprend la valeur FAUX après un temps t_2 compté à partir du front descendant de a , le tout à condition que le front descendant de a ne se produise pas avant le temps t_1 . Les durées t_1 et t_2 sont des valeurs réelles exprimées dans une unité de temps à préciser. On peut indiquer par exemple $2s/a/7s$.
t_1/a	Cas particulier du précédant où $t_2 = 0$.
[prédicat]	Variable booléenne du prédicat, le prédicat étant une expression logique pouvant être vraie ou fausse. Si on considère par exemple un compteur C , $[C = 4]$ est la variable booléenne de valeur VRAI si le compteur C est égal à 4, FAUX si le compteur C est différent de 4. En considérant une variable de sortie A , $[A = 1]$ permet d'évaluer la valeur de cette variable. Le prédicat prend la valeur VRAI si l'action A est exécutée.

Figure 6.6 Variables booléennes particulières.



La valeur d'un compteur, qui correspond à une variable codée en binaire, utilisée en sortie d'une partie séquentielle d'un système est une exception ne correspondant pas à une variable booléenne. Par contre, l'action d'incrémenter un compteur est à associer à une variable booléenne.



Les variations faisant référence au temps sont souvent associées aux termes de temporisation ou de variable temporisée.



Les conditions d'affectation ou les assignations sur événement sont des éléments décrits plus loin dans ce chapitre.

- Les **sorties** d'un système séquentiel sont des variables booléennes. Elles apparaissent dans les actions associées aux étapes.

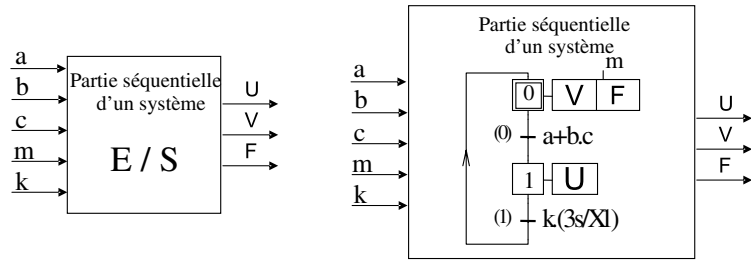


Figure 6.7 Variables d'entrée et de sortie d'un système séquentiel.

Le terme action d'un point de vue langage GRAFCET est à différencier du terme action perçu d'un point de vue extérieur à la partie séquentielle.

Une variable de sortie peut, par exemple, être associée à la rotation d'un moteur.

- Du point de vue extérieur à la partie séquentielle, il y a action si « le moteur tourne », il n'y a pas d'action si « le moteur ne tourne pas ». Compte tenu du caractère booléen de la sortie du système séquentiel, on peut énoncer que :
 - si la sortie a la valeur VRAI, l'action est exécutée et le moteur tourne ;
 - si la sortie a la valeur FAUX, l'action n'est pas exécutée et le moteur ne tourne pas.
- D'un point de vue GRAFCET, une action consiste à modifier la valeur d'une sortie. Elle peut être exprimée de différentes façons : « faire tourner le moteur », « mettre en marche le moteur », « arrêter le moteur ».

Il faut remarquer que ces différentes expressions présentent des différences importantes. L'action « faire tourner le moteur » et son action contraire « ne pas faire tourner le moteur » affectent toutes les deux la sortie. Par contre, l'action « mettre en marche le moteur » n'affecte la sortie que si le moteur n'est pas déjà en train de tourner. Son contraire, « ne pas mettre en marche le moteur », n'affecte jamais le moteur, qu'il tourne ou qu'il ne tourne pas.

Compte tenu de ce qui précède, modifier la valeur d'une sortie peut être fait de deux façons. Ces deux façons correspondent au **mode continu** et au **mode mémorisé** qui sont développés dans la suite de ce chapitre.

Règle d'association d'une sortie à un mode

Dans un grafcet, une sortie ne doit être associée qu'à un seul mode, soit le **mode continu**, soit le **mode mémorisé**.

6.1.4

Mode continu – Assignation sur état

Définitions

- On appelle **action continue** une action qui assigne la valeur VRAI à sa sortie dès que son étape associée est active pendant plusieurs cycles d'analyse d'évolution consécutifs et tant que cette étape reste active. Si de plus cette action est associée à une condition d'assignation, l'assignation n'est faite que lorsque la condition a la valeur VRAI.
- On appelle **mode continu** le mode d'exécution relatif aux actions continues.
- On dit qu'une sortie est en **mode continu** si elle est associée à des actions continues.

Les actions continues se représentent comme indiqué sur la figure 6.8. S'il existe une condition d'assignation, l'action continue est qualifiée de conditionnelle, retardée ou limitée dans le temps en fonction de la nature de la condition.

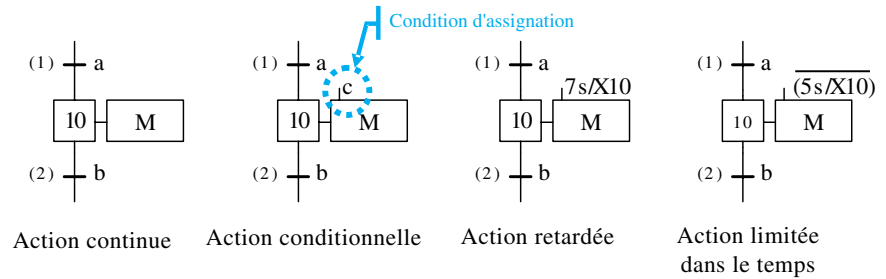


Figure 6.8 Actions continues.

► Propriétés des sorties en mode continu et des actions continues

- une sortie en mode continu a la valeur FAUX par défaut ;
- une sortie en mode continu a la valeur VRAI si et seulement si au moins une action continue lui faisant référence est exécutée ;
- la valeur d'une sortie en mode continu ne dépend que de l'état des étapes et des valeurs des variables d'un grafcet ;
- lors d'une évolution fugace, les actions continues associées à des étapes instables ne sont pas exécutées.

► Règles de mise en oeuvre propres aux sorties en mode continu et aux actions continues

- la condition d'assignation d'une action continue ne doit jamais comporter de front de variable ;
- une sortie en mode continu ne peut être associée qu'à des actions continues.

Exemple

Un exemple d'utilisation d'action continue est donné figure 6.9.

- En supposant que toutes les situations de ce grafcet correspondent à des situations stables, la sortie A est assignée à la valeur VRAI si l'étape 2 est active ou si l'étape 4 est active et que la variable p a la valeur VRAI. Dans le cas contraire, la sortie A a la valeur FAUX. C'est l'état actif ou inactif des étapes 2 et 4 et la valeur VRAI ou FAUX de la variable p qui conditionnent la valeur de la sortie A.
- De la même façon, la sortie B a la valeur VRAI si l'une des étapes 3 ou 4 est active. Si les étapes 3 et 4 sont inactives, alors la sortie B a la valeur FAUX. Compte tenu des règles d'évolution du GRAFCET, la sortie B reste VRAI sans interruption lors du franchissement de la transition (2).
- En cas d'évolution fugace, les actions engendrées par l'évolution du grafcet peuvent être modifiées. Si, par exemple, la réceptivité de la transition (5) est toujours VRAI, l'étape 2 n'est active que pour un cycle d'analyse d'évolution du grafcet. La situation comportant l'étape 2 active est fugace. Dans ce cas, la sortie A garde la valeur FAUX et l'action n'est pas exécutée à l'activation de l'étape 2.

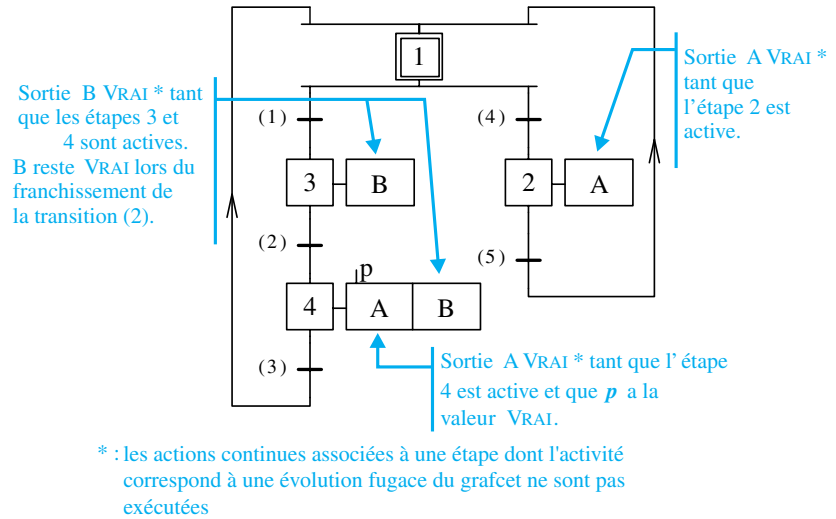


Figure 6.9 Exemple d'utilisation du mode continu.

Remarque relative à la condition d'assignation :

Pour le grafcet de la figure 6.9, la condition $\uparrow p$ en lieu et place de p est interdite. La présence d'un front engendre un comportement assimilable à celui qui est relatif à une évolution fugace.

6.1.5 Mode mémorisé – Affectation sur événement

Définitions

- On appelle **action mémorisée** une action qui affecte à sa sortie la valeur VRAI ou FAUX à l'instant où se produit un événement particulier, cette valeur étant conservée jusqu'à une nouvelle affectation.
- On appelle **mode mémorisé** le mode d'exécution relatif aux actions mémorisées.
- On dit qu'une sortie est en **mode mémorisé** si elle est associée à des actions mémorisées.

Les actions mémorisées se représentent comme sur la figure 6.10.

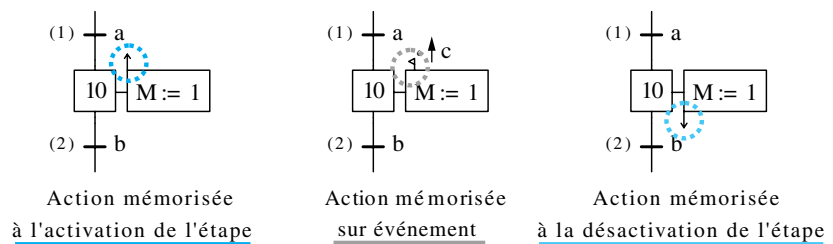


Figure 6.10 Actions mémorisées.

► Propriétés des sorties en mode mémorisé et des actions mémorisées

- les sorties associées au mode mémorisé prennent par défaut la valeur FAUX à l'initialisation d'un grafcet. Par la suite, elles n'évoluent qu'en fonction des actions mémorisées rencontrées ;



Ne pas confondre action conditionnelle et action sur événement. Ces deux actions diffèrent par leurs graphismes, par la présence ou l'absence de fronts de variables dans leurs expressions booléennes associées, par leurs modes continus ou mémorisés.



Un *aléa* est un événement imprévisible.

- une action mémorisée est exécutée instantanément, dans un seul cycle d'analyse d'évolution d'un grafcet.

► **Règles de mise en oeuvre des sorties en mode mémorisé et des actions mémorisées**

- l'affectation de la valeur VRAI à une sortie M est notée $M:=1$, l'affectation de la valeur FAUX à une sortie M est notée $M:=0$;
- les valeurs VRAI et FAUX ne doivent pas être affectées simultanément à la même sortie ;
- une action mémorisée doit **impérativement** être associée à un événement qui peut être :
 - un événement interne comme l'activation ou la désactivation de l'étape associée à l'action mémorisée ;
 - un événement externe. Il est alors associé à une expression booléenne. L'expression doit faire référence à au moins un front montant ou descendant d'une combinaison des entrées ou des variables internes :
 - * des réceptivités du type $\uparrow a + \uparrow b$ ou $\uparrow (a.b)$ peuvent convenir ;
 - * une réceptivité du type $(\uparrow a. \uparrow b)$ ne convient pas car les deux fronts montants ne peuvent se produire simultanément ;
 - * une réceptivité du type $(a + b)$ ne convient pas car elle n'est pas relative à un événement mais à un état des variables a et b ;
- une sortie en mode mémorisé ne peut être associée qu'à des actions mémorisées.

Remarques

- Pour toute sortie en mode mémorisé, il faut veiller à ce que deux affectations contradictoires ne se produisent pas simultanément. Le non respect de cette règle génère un conflit d'affectation. Un tel cas sur un système réel entraîne des aléas de fonctionnement ou des erreurs d'exécution ;
- Pour les sorties en mode mémorisé, il n'y pas de lien entre la situation d'un grafcet et la valeur des différentes sorties. Lors du retour d'un grafcet à une situation, les valeurs des sorties en mode mémorisé peuvent différer des valeurs précédemment évaluées pour la même situation.

► **Cas particulier : action mémorisée sur franchissement de transition**

Un dernier cas très particulier, cité pour information, consiste à utiliser pour événement le franchissement d'une transition, comme représenté figure 6.11. C'est la seule exception où une action n'est pas associée à une étape. Les auteurs invitent à proscrire cette exception en lui substituant la structure présentée figure 6.12.

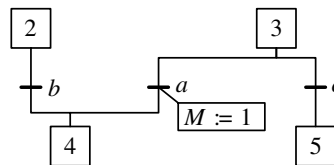


Figure 6.11 Action mémorisée sur franchissement de transition.

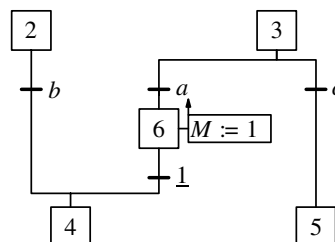


Figure 6.12 Solution de substitution.

Exemple

Le grafcet de la figure 6.13 illustre l'utilisation du mode mémorisé. À l'initialisation, la sortie B a la valeur FAUX.

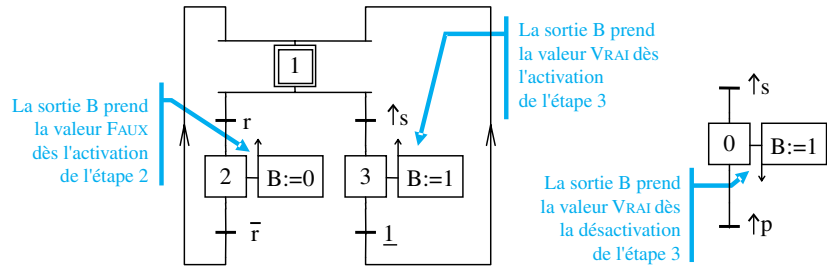


Figure 6.13 Exemple d'utilisation du mode mémorisé.

- En supposant que l'entrée r a la valeur FAUX, un front montant de s provoque le passage de la situation $\{1\}$ aux situations $\{3,0\}$ puis $\{1,0\}$. L'évolution du grafcet obtenue est fugace. Cependant, la sortie B prend la valeur VRAI dès l'activation de 3 et reste VRAI jusqu'à la situation $\{1,0\}$.
- Un nouveau front montant de s entraîne un enchaînement de situations identiques, la sortie B gardant la valeur VRAI.
- Un front montant de r conduit à la situation $\{2,0\}$. La variable B prend la valeur FAUX dès l'activation de l'étape 2. L'action associée à l'étape 0 n'est pas exécutée car l'événement désactivation de 0 ne s'est pas encore produit.
- Un front descendant de r suivi d'un front montant de r provoque un passage aux situations $\{1,0\}$ puis $\{2,0\}$ sans modification de la sortie B.
- Un front montant de p conduit à la situation $\{2\}$. La désactivation de l'étape 0 fait prendre à la sortie B la valeur VRAI bien que l'étape 2 soit restée active.

Conclusions :

- Pour la même situation $\{1,0\}$, la sortie B peut être VRAI ou FAUX. En mode mémorisé, la situation du grafcet et l'état des variables d'entrée ne permettent pas de conclure quant à l'état des variables de sortie.
- Constaté que l'étape 2 est active ne permet pas d'affirmer que la variable B a la valeur FAUX.

Remarque relative aux conflits d'affectation :

Mettre la même réceptivité pour les transitions qui précèdent les étapes 2 et 3 conduit à provoquer un conflit d'affectation. La variable B ne peut prendre en même temps les valeurs VRAI et FAUX. Pour éviter tout problème, il faut faire en sorte que les deux réceptivités ne puissent pas prendre la valeur VRAI en même temps.

6.2 Représentation GRAFCET multigraphes

6.2.1

Vocabulaire associé à la forme des grafquets

Définitions

- On appelle **grafquet global** d'un système le grafquet décrivant complètement le fonctionnement du système.
- On appelle **grafquet connexe** un grafquet tel qu'il existe toujours une suite de liens, un chemin, entre deux éléments quelconques de ce grafquet, étapes ou transitions.
- On appelle **grafquet partiel** d'un grafquet global un ensemble d'un ou plusieurs grafquets connexes résultant d'une partition d'un grafquet global.

► Représentation d'un grafquet partiel

- Un grafquet partiel est désigné le plus souvent par G_i où i est un nombre.
- Un grafquet partiel est représenté par un cadre entourant les éléments qui le composent. Son nom est mentionné en bas à gauche du cadre.

Propriétés

- On dit qu'un grafquet partiel G_i est **actif** si l'une au moins de ses étapes est active.
- On dit que la **variable de grafquet partiel** X_{G_i} a la valeur VRAI si et seulement si le grafquet partiel G_i est actif.



Un grafquet global est toujours un ensemble d'un ou plusieurs grafquets connexes.

Exemple

La figure 6.14 est un exemple de partition d'un grafquet global. On constate sur cet exemple que :

- le grafquet global est partitionné en deux grafquets G_1 et G_2 ;
- le grafquet G_2 est lui-même partitionné en deux grafquets G_3 et G_4 ;
- les trois grafquets G_1 , G_3 et G_4 sont des grafquets connexes. Pour chacun de ces grafquets, il existe toujours un chemin joignant n'importe quelle étape ou transition à n'importe quelle autre étape ou transition du même grafquet ;
- le grafquet G_2 n'est pas un grafquet connexe car il n'existe aucun chemin permettant de relier l'étape 7 à l'étape 12.

À remarquer quelques particularités de ce grafquet global :

- La transition (5) est une **transition source**. Par convention, une transition source est toujours validée. Pour limiter le nombre d'activations consécutives de l'étape aval, une transition source est toujours associée à une réceptivité du type front descendant ou montant, de telle sorte que la réceptivité n'ait pas la valeur VRAI pendant plusieurs cycles d'analyse d'évolution du grafquet consécutifs.
- La transition (9) est une **transition puits**. Son franchissement n'entraîne l'activation d'aucune étape.
- L'étape 8 est simultanément étape initiale et **étape source**. En tant que étape initiale, elle est active à partir de l'instant initial. Elle devient inactive à l'instant où la transition (10) est franchie. Dans le cas particulier de ce grafquet, l'étape 8, une fois désactivée, n'est plus réactivée.

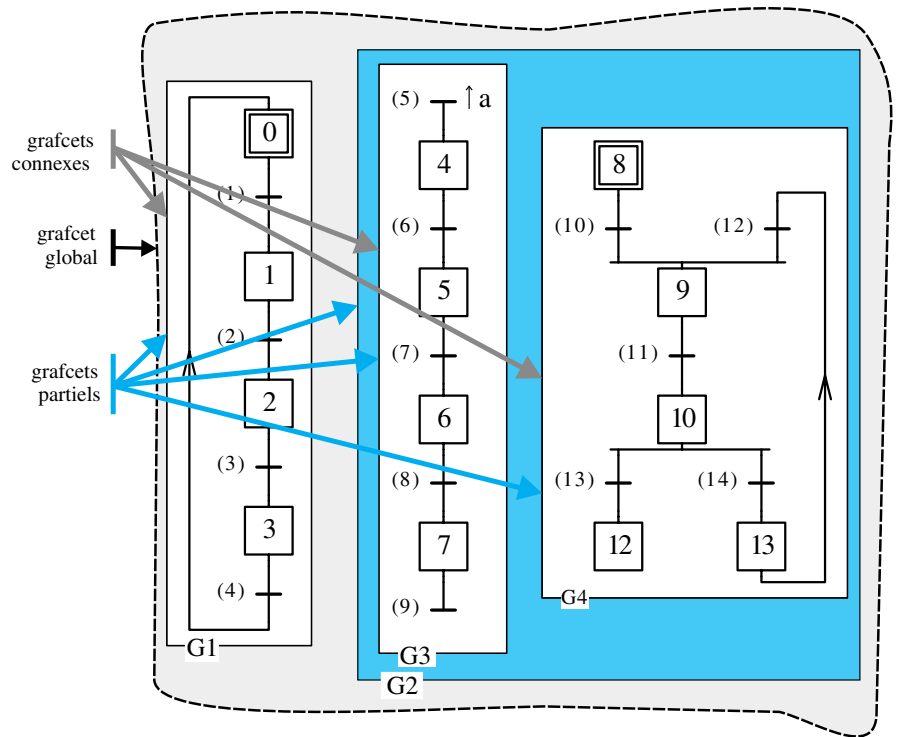


Figure 6.14 Exemple de partition d'un grafcet global

- L'étape 12 est une *étape puits*. Dans le cas particulier de ce grafcet, une fois active, elle reste active indéfiniment.

6.2.2 Grafcet connexe à écriture déportée : Macro-étape

Un grand grafcet, écrit sur plusieurs pages avec des renvois de liens, devient vite indéchiffrable. Une écriture plus contractée du même grafcet permet d'en améliorer la lisibilité, les parties contractées étant développées par ailleurs.

L'utilisation de **macro-étapes** permet de réaliser cette contraction d'écriture d'un grafcet. Chaque macro-étape est détaillée de façon déportée dans une représentation appelée **expansion de la macro-étape**. L'expansion d'une macro-étape peut éventuellement être développée postérieurement à la mise en place de la macro-étape. Ceci permet d'écrire dans un premier temps un grafcet global comportant plusieurs macro-étapes qui correspondent à des tâches complexes sans rentrer dans le détail de ces tâches. Dans un deuxième temps, développer les macro-étapes permet d'aller du général au particulier.

Définitions

- On appelle **macro-étape** l'élément du GRAFCET qui dans un graphe remplace une partie de grafcet.
- On appelle **expansion d'une macro-étape** la partie de grafcet remplacée dans un graphe par une macro-étape.

Propriétés

- Une macro-étape est précédée et suivie de transitions.
- L'expansion d'une macro-étape est une partie de grafcet connexe.
- L'expansion d'une macro-étape commence par une étape unique et se termine par une étape unique.

Notations et représentations

- Une macro-étape est repérée de façon unique par la lettre M suivi d'un nombre.
- Une macro-étape est symbolisée par \boxed{Mi} où Mi est son repère.
- L'expansion d'une macro-étape Mi commence par une étape unique repérée Ei et se termine par une étape unique repérée Si.
- On note XMi la *variable de macro-étape* de la macro-étape Mi.

Règles

- On dit qu'une macro-étape Mi est active si l'une au moins des étapes de son expansion est active.
- On dit que la variable de macro-étape XMi a la valeur VRAI si et seulement si la macro-étape Mi est active.

L'exemple de la figure 6.15 présente un morceau de grafcet contenant une macro-étape et l'expansion de cette macro-étape. Sur cette figure, on remarque :

- la **macro-étape** repérée M5 ;
- l'expansion de la macro-étape qui commence par l'étape d'entrée repérée E5, et qui se termine par l'étape de sortie S5.



La macro-étape est bien précédée et suivie de transitions.

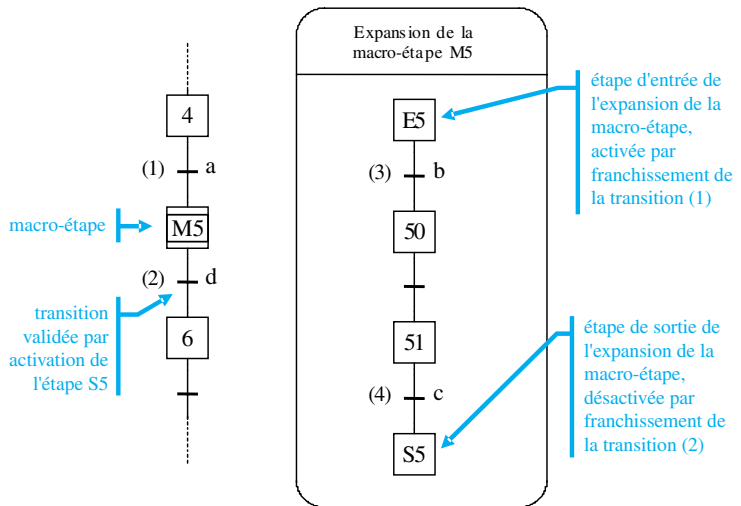


Figure 6.15 Conventions d'écriture d'une Macro-étape.

L'analyse de l'évolution d'un grafcet comportant une macro-étape doit être conduite de la façon suivante :

- en supposant l'étape 4 active, le franchissement de la transition (1) provoque simultanément la désactivation de l'étape 4 et l'activation de l'étape E5 ;

- l'étape E5 étant active, évolution de la partie de grafcet décrite dans l'expansion de la macro-étape M5 se poursuit normalement jusqu'à activation de l'étape S5 ;
- à l'instant où l'étape S5 devient active, la transition (2) est validée. Dès que la réceptivité d a la valeur VRAI, la transition (2) est franchie. L'étape S5 est désactivée et l'étape 6 est activée.

Une macro-étape représente une partie unique d'un grafcet. Un grafcet ne peut comporter plusieurs fois la même macro-étape Mi. Si une séquence particulière d'étapes et de transitions doit être répétée plusieurs fois, l'utilisation d'une macro-étape est inappropriée. Il convient alors d'utiliser un sous-programme.

Lors de l'analyse des évolutions possibles d'un grafcet, il faut tenir compte des éléments énoncés ci-après.

- Une macro-étape n'est pas une étape et n'en a pas toutes les propriétés. L'état « actif » d'une macro-étape n'entraîne pas la validation de la transition qui la suit.
- L'expansion d'une macro-étape est à considérer comme une partie connexe au grafcet comportant la macro-étape. Si la macro-étape est dans un grafcet encapsulé ou forcé, l'évolution de l'expansion de la macro-étape est soumise aux mêmes règles d'évolution que le grafcet comportant la macro-étape.

En conclusion, une expansion de macro-étape n'est qu'une écriture déportée d'un morceau du grafcet comportant sa macro-étape.



Sous-programmes, forçage et encapsulation sont des structures particulières présentées dans la suite de ce chapitre.

6.3 GRAFCET et description structurée

Un système complexe peut éventuellement être composé de plusieurs sous-systèmes ayant des fonctionnements complètement dissociés les uns des autres. Dans ce cas, le fonctionnement global peut être décrit à l'aide de plusieurs grafcets connexes n'ayant aucun lien entre eux. Cependant, une représentation multigraphes correspond souvent à une réalité bien différente. Le GRAFCET possède plusieurs outils permettant de structurer la commande d'un système, chacun d'eux conduisant aussi à une représentation multigraphes, graphes dont les évolutions sont liées.

Décomposer le fonctionnement d'un système complexe en plusieurs tâches élémentaires présente de nombreux avantages. Dans une première approche, on se contente souvent de décrire ces tâches, d'énoncer les conditions de passage des unes aux autres sans pour autant rentrer dans le détail de chacune d'elles.

Les éléments du langage GRAFCET présentés dans la suite de ce chapitre favorisent cette approche et autorisent plusieurs niveaux de représentation. Ces niveaux permettent de passer progressivement du général au particulier. Structurer le grafcet décrivant un système complexe permet d'en faciliter le développement, la lisibilité, mais également d'en améliorer la facilité de maintenance lors de modifications ultérieures.

6.3.1 Structuration par sous-programmes

Dans le développement d'une application, il arrive souvent qu'une même tâche soit à répéter plusieurs fois parmi d'autres tâches. Plutôt que de réécrire plusieurs fois la même séquence de grafcet, il est souvent pratique de mettre la tâche à répéter sous la forme d'un sous-programme. Cela simplifie l'écriture du grafcet : la séquence à exécuter plusieurs fois n'est écrite qu'une fois. En cas de modification, il suffit alors de réécrire le seul sous-programme, au lieu d'avoir à modifier chaque apparition de la séquence de grafcet répétée.

Définition

On appelle **sous-programme** un grafcet partiel dont l'évolution est provoquée par l'activation d'une étape d'appel, cette étape restant active jusqu'au retour du sous programme à sa situation initiale.

Un sous-programme vérifie les propriétés suivantes :

- il comporte une étape d'attente d'où partent et reviennent des séquences de grafcet constituant son corps ;
- son exécution n'est possible que s'il n'est pas déjà en cours d'exécution ;
- plusieurs étapes d'appel, appartenant à un ou plusieurs grafcets partiels appelants, peuvent utiliser le même sous-programme ;

Dans une structure avec sous-programmes, il y a donc des grafcets partiels « appelants » qui déclenchent l'évolution de grafcets partiels « sous-programmes » en attendant que ces grafcets « sous-programmes » soient revenus à une situation initiale avant de reprendre leur propre évolution. Dans cet ouvrage, la présentation de cette structure se limite à l'examen d'un exemple à un seul niveau de sous-programme, mais rien n'empêche de développer ce type de structure sur plusieurs niveaux, un grafcet sous-programme devenant le grafcet appelant de grafcets sous-programmes d'ordre inférieur.

Bien que plusieurs niveaux de sous-programmes puissent être envisagés, l'utilisation de sous-programmes n'induit pas de hiérarchie entre les grafcets de façon formelle.

Exemple

Une structure avec sous-programme est présentée en exemple figure 6.16.

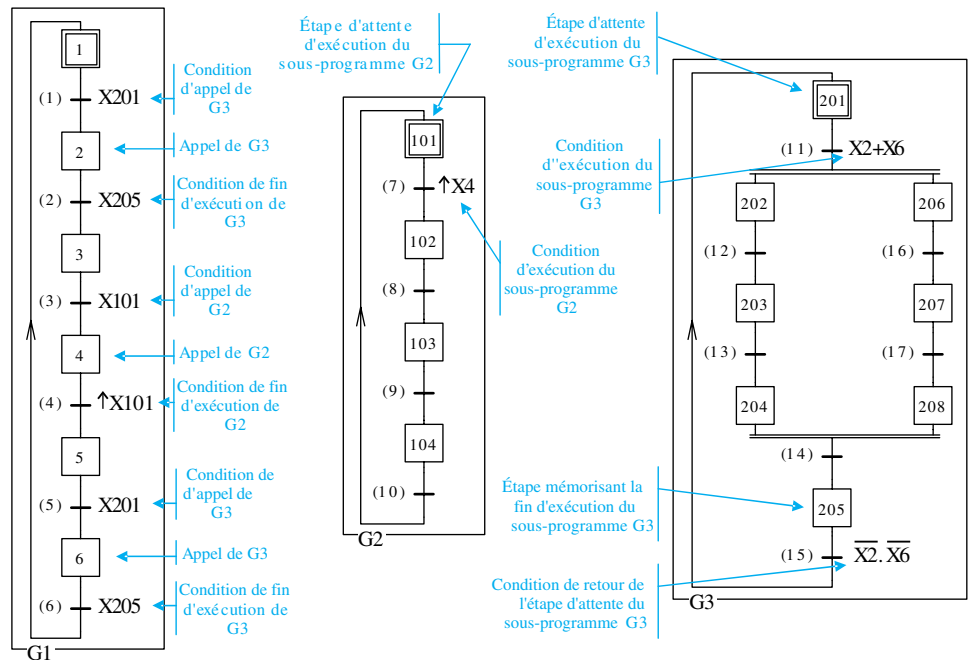


Figure 6.16 Grafcet global avec sous-programmes.

Le grafcet global comprend trois grafcets partiels :

- un grafcet appelant G1 ;
- un grafcet sous-programme G2 ;
- un grafcet sous-programme G3.

Le grafcet partiel G1 appelle de façon cyclique le sous-programme G3, puis le sous-programme G2 avant de terminer par un second appel du sous-programme G3.

Parmi les nombreuses solutions permettant de satisfaire aux conditions imposées, deux façons de gérer les appels des sous-programmes sont proposées.

► Détails de mise en œuvre du sous-programme G2

L'examen du grafcet sous-programme G2 permet d'établir que :

- son étape d'attente d'exécution est l'étape 101 ;
- son exécution commence, c'est-à-dire que son grafcet peut évoluer, quand la réceptivité de la transition (7) prend la valeur VRAI. Cette réceptivité, $\uparrow X4$, indique que l'étape d'appel est l'étape 4 du grafcet G1.

L'examen du grafcet G1 permet d'établir que :

- l'appel de G2 n'est possible que si l'étape 101, son étape d'attente d'exécution, est active. Cette information est obtenue en observant la réceptivité de la transition (3) qui précède l'étape 4.
- si l'étape 3 est active et que G2 est en attente d'exécution alors la transition 3 est franchie. L'étape 4 est activée, permettant le franchissement de la transition (7) et l'exécution de G2.
- l'étape 4 ne peut être désactivée que si G2 revient à sa position d'attente. Lorsque l'étape 101 est à nouveau activée, la transition (4) devient franchissable. Il y a désactivation de l'étape 4, activation de l'étape 5. L'évolution du grafcet appelant reprend.

Compte tenu de cette analyse le grafcet G2 peut effectivement être qualifié de sous-programme car il en présente la structure et en vérifie les propriétés.

Cette approche présentée, utilisant des fronts montants, ne permet pas d'appeler simultanément plusieurs sous-programmes à partir d'une seule étape appelante.

► Détails de mise en œuvre du sous-programme G3

L'examen du grafcet sous-programme G3 permet d'établir que :

- son étape d'attente d'exécution est l'étape 201 ;
- son exécution commence, c'est-à-dire que son grafcet peut évoluer, quand la réceptivité de la transition (11) prend la valeur VRAI. Cette réceptivité, $(X2 + X6)$, indique que les étapes d'appel sont les étapes 2 et 6 du grafcet G1 ;
- la réceptivité de la transition (15), qui précède l'étape d'attente 201, est le complémentaire de $(X2 + X6)$. Ainsi le retour à l'étape d'attente n'est possible que si le grafcet appelant a repris son évolution.

L'examen du grafcet G1 permet d'établir que :

- l'appel de G3 n'est possible que si l'étape d'attente d'exécution repérée 201 est active. Cette information est obtenue en observant la réceptivité des transitions (1) et (5) qui précèdent les deux étapes d'appel 2 et 6.
- si le sous-programme G3 est en attente d'exécution, les étapes 2 ou 6 peuvent être activées, permettant le franchissement de la transition (11) et l'exécution de G3.
- les réceptivités des transitions (2) et (6) indiquent que l'activation de l'étape 205 marque la fin d'exécution de G3 avant retour à sa position d'attente et permettent au grafcet appelant G1 de reprendre son évolution.

Comme précédemment, le grafcet G3 peut être qualifié de sous-programme.



Le choix pour réceptivité de la transition (15) de la valeur 1 plutôt que /X2./X6 simplifie l'écriture de la réceptivité mais ne permet pas l'appel simultané de plusieurs sous-programmes à partir d'une seule étape appelante.

Cette façon de procéder, plus contraignante que la précédente, autorise l'appel simultané de plusieurs sous-programmes de durées différentes et fonctionnant en parallèle. Un appel simultané de sous-programmes par une seule étape appelante est possible si la fin d'exécution de chaque sous-programme est mémorisée par l'activation d'une étape de fin d'exécution, précédant le retour à l'étape d'attente d'exécution.

Les solutions proposées pour G2 et G3 sont d'une certaine façon très différentes l'une de l'autre. Pour G2, les différents déclenchements se produisent sur des fronts de variables. Ils sont donc provoqués par des événements. Pour G3, les différents déclenchements se produisent sur état. Bien que la solution proposée pour G2 soit plus concise, la solution proposée pour G3 est la solution la plus utilisée.

Grafjets à évolutions synchronisées

Des structures, où différents grafjets ont des évolutions coordonnées, peuvent ressembler à celles des sous-programmes, mais sans en vérifier les propriétés. Elles ne peuvent être qualifiées de sous-programmes. La coordination de leurs évolutions demande alors une analyse spécifique à chaque cas. On parle alors de **grafjets synchronisés** car interagissant les uns avec les autres.

L'utilisation de grafjets synchronisés n'induit aucune hiérarchie entre les différents grafjets. Elle permet cependant de scinder une tâche complexe en plusieurs tâches élémentaires qu'il s'agit alors de coordonner en utilisant le même type de réceptivités que celles utilisées pour les sous-programmes.

Définition

On appelle **grafjets synchronisés** des grafjets partiels dont les évolutions sont coordonnées par l'évaluation de réceptivités liées aux situations des grafjets.

Ces structures ne sont pas plus développées dans ce chapitre dans la mesure où tous les grafjets sous-programmes et grafjets appelants sont des grafjets synchronisés qui ont une particularité supplémentaire, celle de bloquer l'évolution de l'un des grafjets pendant l'exécution de l'autre.

6.3.2 Structuration par forçage

Définitions

- On appelle **forçage** l'action particulière qui interrompt l'évolution d'un grafjet partiel en lui imposant éventuellement une situation donnée.
- On appelle **grafjet forcé** un grafjet partiel faisant l'objet d'une action de forçage.

Propriétés et règles d'évolution

Le forçage est régi par les règles suivantes :

- Le **forçage** est un ordre interne, dont l'**exécution est prioritaire**. Les règles d'évolution numéro 3, 4 et 5 ne s'appliquent plus au grafjet forcé tant que l'action de forçage est exécutée. Pendant toute cette durée d'exécution, le grafjet forcé reste figé dans la situation que lui impose l'action de forçage.
- Un grafjet forcé ne peut faire l'objet de plusieurs actions de forçage simultanées. Cette situation ne doit jamais se présenter.
- Lorsqu'une action de forçage cesse, le grafjet objet du forçage évolue à nouveau en partant de la situation qui était imposée par le forçage et en respectant les règles d'évolution numéro 3, 4 et 5.



Une action de forçage ne peut pas s'appliquer au grafjet partiel dont elle fait partie !



Une action de forçage est toujours exécutée, même dans le cas d'une évolution fugace.

Une action de forçage est représentée par le symbole $G_i\{\#\}$ où « G_i » désigne le grafctet forcé et où « $\#$ » doit être remplacé par :

- soit une liste d'étapes de G_i si l'action de forçage doit imposer cette situation à G_i ;
- soit le symbole * si l'action de forçage doit figer G_i dans la situation où il se trouve à l'instant où elle débute. Dans ce cas l'action est qualifiée de figeage ;
- soit le terme INIT si l'action de forçage doit figer G_i dans la situation où seules ses étapes initiales sont actives ;
- soit un blanc (liste vide) si l'action de forçage doit désactiver G_i .

Hierarchie et forçage

Le forçage induit automatiquement une hiérarchie entre les grafctets partiels : le grafctet comportant l'action de forçage est d'ordre hiérarchique supérieur au grafctet forcé. Dans un projet complexe, toutes les actions de forçage doivent respecter cette hiérarchie comme le montre la figure 6.17.

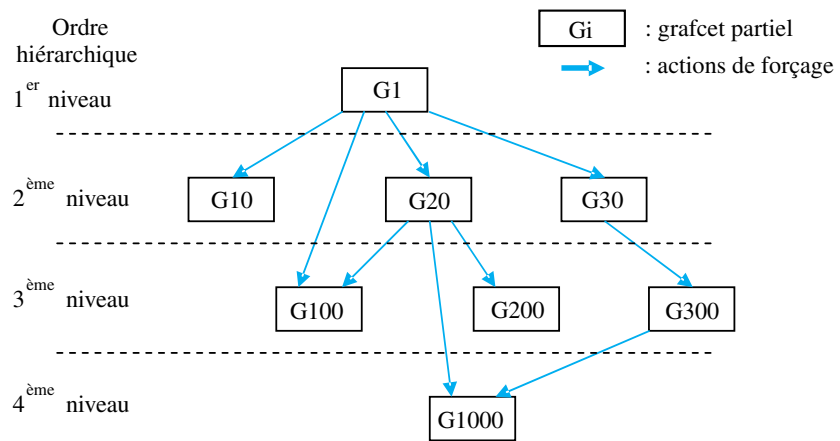
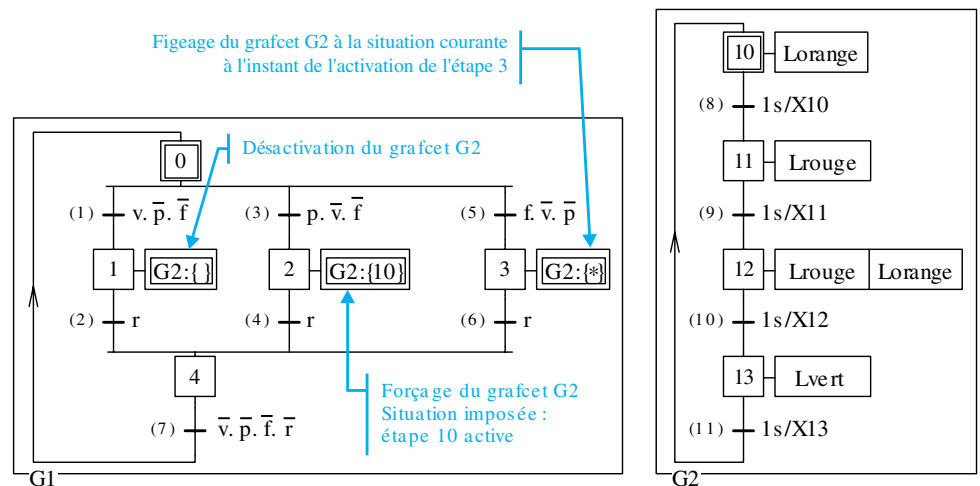


Figure 6.17 Structure hiérarchique par forçage.

Exemple

Le grafctet global de la figure 6.18 illustre la notion de forçage.



Ce grafctet se compose du grafctet partiel G1 comprenant des actions de forçage et du grafctet forcé G2.



grafctet désactivé = grafctet avec aucune étape active



Deux grafctets partiels ne doivent pas se forcer mutuellement compte tenu de la hiérarchie induite par le forçage.



Les réceptivités des transitions (1),(3) et (5) interdisent deux actions de forçage simultanées sur le grafcet G2.

On suppose qu'à l'instant initial les entrées v, p, f et r ont toutes la valeur FAUX. Dès l'initialisation, le grafcet G2 évolue et les étapes 10, 11, 12 et 13 sont actives à tour de rôle. Les lampes verte, orange, rouge s'allument et s'éteignent. Les différentes possibilités d'évolution du grafcet G1 et leur impact sur l'évolution du grafcet G2 sont examinés.

• Cas d'un $\uparrow v$ suivi d'un $\uparrow r$:

- À l'instant du $\uparrow v$, G1 passe de la situation {0} à la situation {1}. L'action de forçage associée à l'étape 1 est exécutée. Elle est telle que toutes les étapes de G2 sont désactivées.
- À l'instant du $\uparrow r$, G1 passe à la situation {4}.

Cet enchaînement d'événements provoque l'extinction des lampes.

• Cas d'un $\uparrow r$ suivi d'un $\uparrow v$:

- Le $\uparrow r$ laisse G1 dans la situation {0}. G2 continue à évoluer normalement.
- À l'instant du $\uparrow v$, G1 passe de la situation {0} à la situation fugace {1}, puis à la situation {4}. L'action de forçage associée à l'étape 1 est quand même exécutée à l'instant de l'activation de l'étape 1 : G2 est désactivé.

Cet enchaînement d'événements provoque aussi l'extinction des lampes.

• Cas d'un $\uparrow p$ suivi d'un $\uparrow r$:

- À l'instant du $\uparrow p$, G1 passe à la situation {2}. L'action de forçage associée à l'étape 2 est exécutée. La situation {10} est imposée au grafcet G2 : quelle que soit sa situation antérieure, toutes ses étapes sont désactivées à l'exception de l'étape 10 qui est activée et maintenue active tant que l'étape 2 reste active. Au bout d'une seconde, la réceptivité de la transition (8) prend la valeur VRAI mais la transition (8), compte tenu du forçage, ne peut être franchie.
- À l'instant du $\uparrow r$, G1 passe à la situation {4} : G2 peut évoluer librement à partir de la situation {10}.

Pour cet enchaînement d'événements, le $\uparrow p$ provoque l'allumage de la lampe orange. L'allumage séquentiel des lampes à partir de l'orange reprend au $\uparrow r$.

• Cas d'un $\uparrow r$ suivi d'un $\uparrow p$:

- Le $\uparrow r$ laisse G1 dans la situation {0} et G2 continue à évoluer normalement.
- À l'instant du $\uparrow p$, G1 passe de la situation {0} à la situation fugace {2}. Quelle que soit la situation antérieure de G2, l'action de forçage est exécutée et sa nouvelle situation devient instantanément {10}. Ces évolutions se produisent dans le même cycle d'analyse d'évolution. Dans le cycle d'analyse d'évolution suivant G1 passe à la situation {4} et G2 peut de nouveau évoluer librement à partir de la situation {10}.

Pour cet enchaînement d'événements, l'ordre d'allumage des lampes saute à la couleur orange à l'instant du $\uparrow p$.

• Cas d'un $\uparrow f$ suivi d'un $\uparrow r$:

- À l'instant du $\uparrow f$, G1 passe à la situation {3}. L'action de forçage est exécutée et G2 se retrouve figé sur sa situation antérieure à cet instant. Au bout d'une seconde la réceptivité de la transition située en aval de l'étape active de G2 prend la valeur VRAI mais la transition n'est pas franchie.
- À l'instant du $\uparrow r$, G1 passe à la situation {4} et G2 peut reprendre son évolution.

Pour cet enchaînement d'événements, le $\uparrow f$ provoque le maintien de la lampe allumée. L'allumage séquentiel des lampes reprend au $\uparrow r$.

- Cas d'un $\uparrow r$ suivi d'un $\uparrow f$:

- Le $\uparrow r$ laisse G1 dans la situation {0} et G2 continue à évoluer normalement.
- À l'instant du $\uparrow f$, G1 passe à la situation fugace {2}. L'action de forçage est exécutée mais dès le cycle d'analyse d'évolution suivant, la situation de G1 devient {4} et G2 peut reprendre son évolution.

Pour cet enchaînement d'événements, le $\uparrow f$ n'a pas d'effet apparent sur l'allumage séquentiel des lampes.

6.3.3 Structuration par encapsulation

L'encapsulation est un outil destiné à structurer et hiérarchiser un grafcet global. La structure est obtenue en regroupant des étapes dans des ensembles, dits encapsulations, une encapsulation pouvant en inclure d'autres.

Ces ensembles d'étapes pris deux à deux sont soit disjoints, soit inclus l'un dans l'autre. Un exemple de regroupements est proposé figure 6.19, les étapes y étant représentées par des cercles.

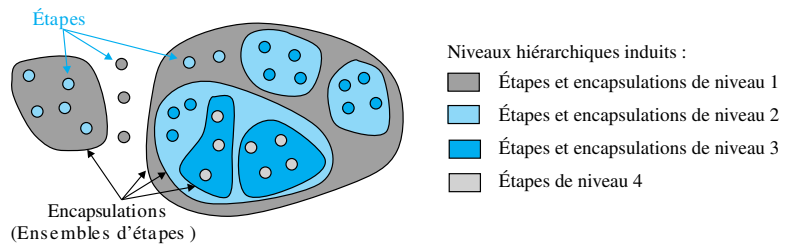


Figure 6.19 Structure hiérarchisée par encapsulations.

Les différents niveaux d'inclusion de ces étapes et ensembles d'étapes, représentés à l'aide de couleurs sur la figure 6.19, induisent une structure hiérarchisée allant du niveau le plus haut, le niveau 1, au niveau le plus bas, ici le niveau 4.

Les étapes sont bien sûr reliées par des transitions et font partie de grafquets partiels, mais ces liens ne sont pas représentés sur cette figure, d'une part par souci de clarté, d'autre part parce que tout le contenu d'un ensemble, à un niveau donné, est remplacé par une seule étape. Le contenu de cette étape est développé dans un niveau inférieur. L'encapsulation consiste donc à considérer des étapes contenant des grafquets, comme le suggère la figure 6.20.

Concernant cette structure, on peut remarquer que :

- au niveau 1, deux étapes encapsulantes incluent les deux ensembles d'étapes et sous-ensembles d'étapes d'ordres inférieurs. Les étapes et étapes encapsulantes de niveau 1, reliées entre elles, constituent le grafcet partiel d'ordre hiérarchique le plus élevé.
- de la même façon, au niveau 2, trois étapes encapsulantes incluent les trois ensembles d'étapes et sous-ensembles d'étapes d'ordre inférieur. Les étapes et étapes encapsulantes de niveau 2, reliées entre elles, constituent des grafquets partiels d'ordre 2. Ces grafquets sont en quelque sorte à l'intérieur des étapes encapsulantes de niveau 1 et leur évolution est liée à l'état actif ou inactif de leur étape encapsulante.
- cette succession d'encapsulations se poursuit jusqu'à atteindre le niveau hiérarchique le plus bas.

La mise en œuvre de l'encapsulation nécessite d'enrichir le GRAFCET d'un certain nombre d'éléments et de règles d'évolution et de mise en forme structurelle. Ce cha-

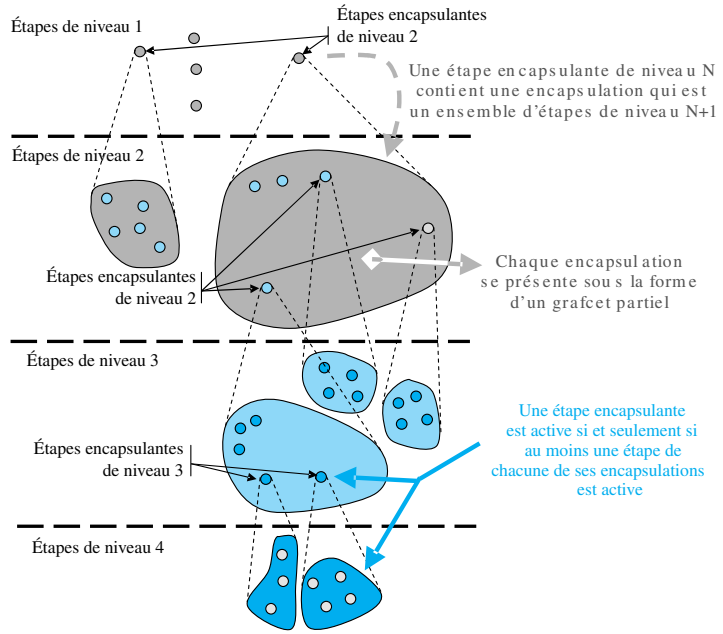


Figure 6.20 Encapsulations et étapes encapsulantes

pitre se poursuit par leur présentation et par l’analyse détaillée des évolutions d’un grafcet structuré par encapsulation.

Définitions

- On appelle **étape encapsulante** une étape qui contient des grafjets partiels.
- On appelle **étape encapsulante initiale** une étape encapsulante faisant partie de la situation initiale d’un grafcet.
- On appelle **encapsulation** tout grafjet partiel contenu dans une étape encapsulante. Le cadre d’une encapsulation précise son nom, en bas à gauche, et le repère de son étape encapsulante, en haut à gauche.
- On appelle **étape encapsulée** toute étape faisant partie d’une encapsulation.
- On appelle **lien d’activation** la marque « * » associée à des étapes encapsulées.

► **Représentations liées à l’encapsulation**

Les éléments propres à l’encapsulation se représentent de façon spécifique :

- Représentation d’une étape encapsulante :
- Représentation d’une étape encapsulante initiale :
- Représentation d’une étape encapsulée marquée du lien d’activation : *

► **Propriétés des étapes encapsulantes et des encapsulations**

- Une étape encapsulante a toutes les propriétés d’une étape.
- L’activation d’une étape encapsulante entraîne l’activation de toutes ses étapes encapsulées marquées d’un lien d’activation.



Les liens d'activation sont sans effet à l'instant initial. Il faut considérer qu'à l'instant initial, une étape encapsulante initiale ne devient pas active mais elle est active, sans avoir jamais été à l'état inactif.



Les étapes encapsulées initiales ne sont pas nécessairement marquées d'un lien d'activation.

- La désactivation d'une étape encapsulante entraîne la désactivation de toutes les étapes de toutes ses encapsulations.
- À l'instant initial, seules toutes les étapes faisant partie de la situation initiale d'un grafcet global sont actives. La situation initiale inclut toutes les étapes initiales et toutes les étapes encapsulantes initiales.
- Dès leur activation, les encapsulations respectent les règles d'évolution du GRAFCET.
- L'encapsulation peut être combinée au forçage.

► Règles relatives à l'encapsulation

- Toute encapsulation doit contenir au moins un lien d'activation.
- Toute encapsulation d'une étape encapsulante initiale doit contenir au moins une étape initiale.
- Si une encapsulation contient au moins une étape initiale, alors son étape encapsulante doit être une étape encapsulante initiale.

La connaissance de toutes ces propriétés et de toutes ces règles permet d'aborder et de comprendre l'évolution de grafcet mettant en oeuvre l'encapsulation.

Contrairement au forçage, qui impose une situation par assignation, l'encapsulation agit sur événement, en affectant des états aux étapes marquées de liens d'activation.

Exemple

Le grafcet de la figure 6.21 présente une structuration par encapsulation.

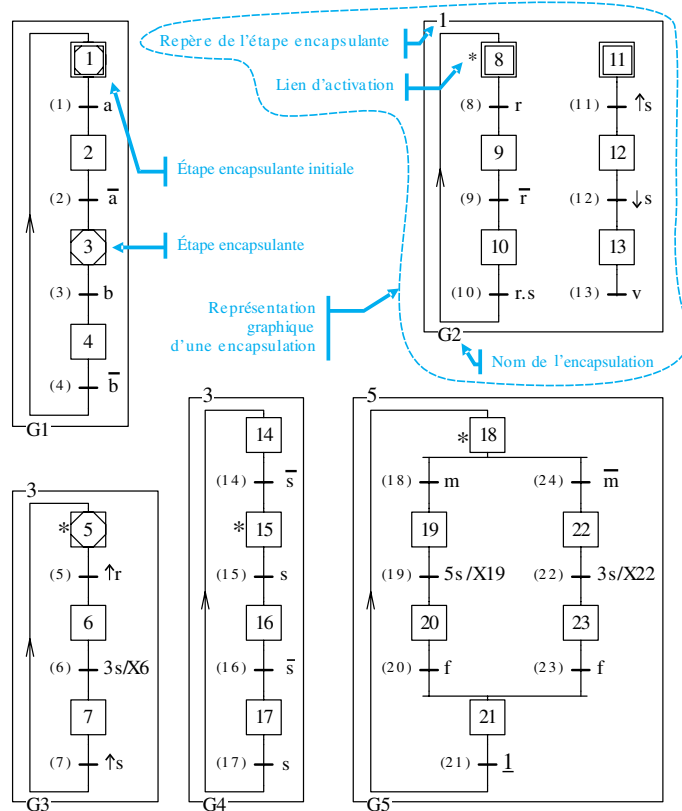


Figure 6.21 Structuration par encapsulation.

Son examen permet d'illustrer les règles d'évolution induites par l'encapsulation. Son évolution est détaillée pour une suite d'événements extérieurs choisis. Les variables a, b, f, m, r, s et v ont toutes la valeur FAUX à l'instant de l'initialisation.

- À l'instant initial, la situation du grafcet global est $\{1,8,11\}$.
- Cette situation est établie en prenant en considération toutes les étapes initiales mais en ne tenant compte d'aucun lien d'activation.
- La réceptivité de la transition (1) a la valeur FAUX. L'étape encapsulante initiale 1 reste active.

L'étape encapsulante initiale 1 restant active, l'encapsulation G2 peut évoluer en respectant les règles d'évolution du GRAFCET.

- L'événement suivant est un $\uparrow s$. La transition (11) est franchie. La situation du grafcet évolue en $\{1,8,12\}$.
- Les événements suivants sont un $\uparrow r$, un $\downarrow r$ puis un $\downarrow s$. Les situations atteintes successivement sont $\{1,9,12\}$, $\{1,10,12\}$ puis $\{1,10,13\}$.
- L'événement suivant est un $\uparrow a$.
- La transition (1) est franchie.
- L'étape 1, mais aussi toutes les étapes de son encapsulation, c'est-à-dire les étapes 10 et 13, sont désactivées.
- L'étape 2 est activée.

La situation du grafcet global devient $\{2\}$.

- La variable a prend la valeur FAUX.
- L'étape 2 est désactivée tandis que l'étape encapsulante 3 est activée.
- L'étape 3 a deux encapsulations, G3 et G4, dont les étapes 5 et 15 sont marquées d'un lien d'activation. Simultanément à l'activation de l'étape 3, les étapes 5 et 15 sont activées.
- L'étape 5 est aussi une étape encapsulante. L'étape 18, étape de son encapsulation G5 marquée d'un lien d'activation, est également activée.

Ainsi, le grafcet global passe instantanément de la situation $\{2\}$ à la situation $\{3,5,15,18\}$.

- La situation $\{3,5,15,18\}$ n'est jamais stable car les réceptivités des transitions (18) et (24) sont complémentaires. L'évolution du grafcet est donc fugace. Comme m a la valeur FAUX, la situation devient $\{3,5,15,22\}$.
- Trois secondes après l'activation de l'étape 22, la situation du grafcet global devient $\{3,5,15,23\}$.
- L'événement suivant est un $\uparrow r$.
- L'étape encapsulante 5 est désactivée, entraînant la désactivation de son encapsulation G5.

Le grafcet global passe instantanément de la situation $\{3,5,15,23\}$ à la situation $\{3,6,15\}$.

- Une seconde après le $\uparrow r$ se produit un $\uparrow b$. Le grafcet global passe instantanément à la situation $\{4\}$ car l'étape encapsulante 3 est désactivée.
- Au $\downarrow b$ qui suit, la situation du grafcet global devient $\{1,8\}$ car lors d'une activation de l'étape encapsulante initiale, seuls sont pris en compte les liens d'activation.

Remarques relatives à la désignation des encapsulations et étapes encapsulées :

- X3/G3 est la désignation globale de l'encapsulation G3 de la figure 6.21. Cette désignation précise le repère de l'étape encapsulante et la désignation de l'encapsulation. De la même façon, X3/X5/G5 est la désignation globale de l'encapsulation G5.
- X3/X5/X20 est la désignation de l'étape encapsulée 20 de la figure 6.21. Cette désignation permet d'identifier rapidement le niveau d'encapsulation d'une étape car on y exprime la suite hiérarchique des étapes encapsulées les unes dans les autres.

Synthèse

Savoirs

Je sais définir les mots ou expressions :

- GRAFCET ;
- grafcet ;
- situation d'un grafcet ;
- situation stable ;
- évolution fugace ;
- mode continu, action continue ;
- mode mémorisé, action mémorisée ;
- grafcet global ;
- grafcet connexe ;
- grafcet partiel ;
- macro-étape ;
- expansion de macro-étape ;
- grafcets synchronisés ;
- forçage ;
- grafcet forcé ;
- étape encapsulante ;
- étape encapsulante initiale ;

- encapsulation ;
- étape encapsulée ;
- lien d'activation.

Je connais :

- les cinq règles d'évolution du GRAFCET ;
- les propriétés et les règles applicables aux sorties en mode continu ;
- les propriétés et les règles applicables aux sorties en mode mémorisé ;
- la représentation d'une macro-étape et de son expansion ;
- la forme et la syntaxe des actions de forçage ;
- les règles applicables au forçage ;
- les propriétés et la représentation d'une étape encapsulante, d'une étape encapsulante initiale, d'une encapsulation, d'une étape encapsulée marquée d'un lien d'activation ;
- les règles applicables à l'encapsulation.

Savoir-faire

Je sais :

- reconnaître le mode associé à une sortie ;
- évaluer la valeur d'une sortie en mode continu ;
- évaluer la valeur d'une sortie en mode mémorisé ;
- créer et associer une action continue, conditionnelle ou temporisée à une étape ;
- créer et associer une action mémorisée à un événement ;
- interpréter une macro-étape et son expansion ;
- créer ou modifier une macro-étape et son expansion ;
- synchroniser l'évolution de grafcets partiels ;
- interpréter l'évolution d'un grafcet comportant des actions de forçage ;
- créer ou modifier un grafcet comportant des actions de forçage ;
- interpréter l'évolution d'un grafcet structuré par encapsulation.

Exercices d'application

6.1 Modes de sortie

La commande d'un système est définie par le grafcet de la figure 6.22.

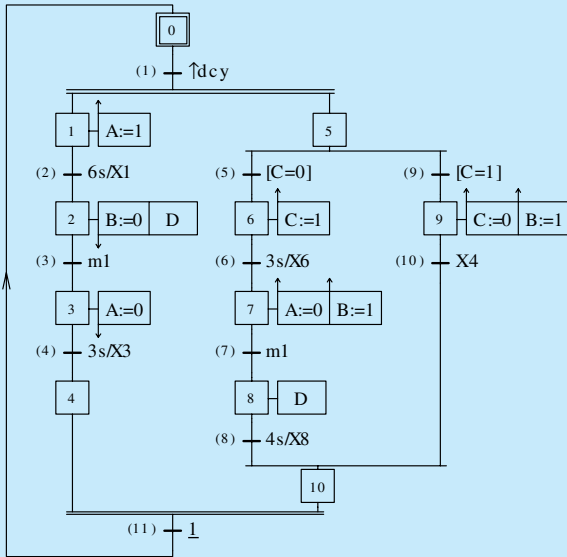


Figure 6.22 Modes de sortie – Grafcet.

- Inventorier les variables d'entrée et de sortie du grafcet. Préciser le mode des variables de sortie.
- Pour l'évolution des variables définie sur le chronogramme de la figure 6.23, compléter le tableau d'analyse d'évolution qui suit en précisant si les situations atteintes sont stables.

Situation actuelle	Transitions validées	Événement	Transitions franchissables	Nouvelle situation	Évolution fugace
{0}	(1)	$\uparrow dcy$	(1)	{1,5}	...

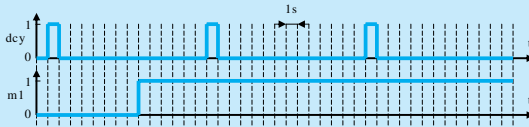


Figure 6.23 Modes de sortie – Chronogramme.

- Compléter le chronogramme de la figure 6.23 en précisant l'évolution des variables de sortie.

6.2 Tourniquet de parc d'attractions

L'entrée d'une attraction est limitée à 8 personnes par séquence. Un tourniquet en limite l'accès.

- Le tourniquet est par défaut verrouillé. Pour le déverrouiller, il faut activer la sortie DV.
- Un capteur p génère une impulsion à chaque passage dans le tourniquet.
- À chaque nouvelle séquence :
 - un surveillant appuie sur un bouton « nouveau comptage ». Ce bouton poussoir est noté nc ;

- le portillon est bloqué dès que 8 personnes sont passées ;
- le portillon est bloqué lorsque le surveillant appuie sur un bouton « terminé ». Ce bouton poussoir est noté t .

- Écrire un grafcet permettant de gérer le tourniquet sans prise en compte du bouton « terminé ».
- Même question que la précédente avec prise en compte du bouton « terminé ».

6.3 Registre à empilement

Le grafcet de la figure 6.24 permet de réaliser le comptage de fronts montants de a .

Le comptage débute lorsque c prend la valeur VRAI. On rappelle que la transition (0) est une transition source. Elle est toujours validée.

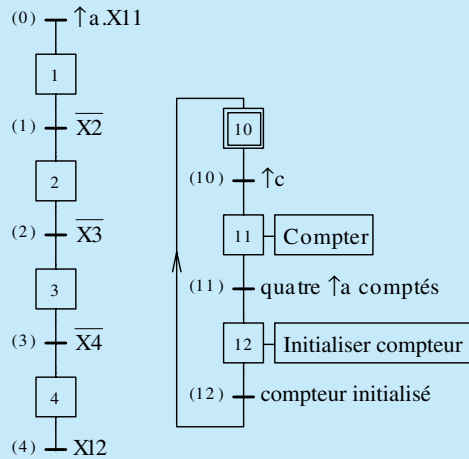


Figure 6.24 Registre à empilement.

On considère la suite d'événements définie sur le chronogramme de la figure 6.25.

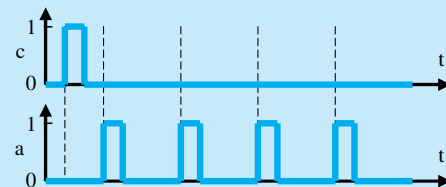


Figure 6.25 Chronogramme.

- Compléter le tableau d'analyse d'évolution suivant en se limitant aux événements qui se produisent jusqu'au quatrième front montant de a .

Situation actuelle	Transitions validées	Événement	Transitions franchissables	Nouvelle situation	Évolution fugace
{10}	0,10	$\uparrow c$	10	{11}	
{11}	0,11	$\uparrow a$	0	{1,11}	oui

- Compléter le chronogramme de la figure 6.25 en précisant l'évolution des variables $X1$, $X2$, $X3$, $X4$, $X11$ et $X12$. Préciser les réceptivités à associer aux transitions (11) et (12) pour obtenir le fonctionnement souhaité.

6.4 Chaîne d'assemblage et macro-étapes

On souhaite établir le grafct de la partie commande d'une chaîne d'assemblage qui réalise l'assemblage final de disjoncteurs. Des demi-boîtiers partiellement pré-assemblés et disposés sur un convoyeur progressent pas à pas d'un poste d'assemblage à un autre (voir figure 6.26).

- Lorsqu'un boîtier est présent au premier poste d'assemblage, une pince dépose un premier élément.
- Après un déplacement du convoyeur d'un pas, un second élément est retourné de 180° et mis en place par la rotation d'un bras autour d'un axe horizontal.
- Après un second déplacement du convoyeur, un couvercle, maintenu par une ventouse, est emboîté par un vérin fixé à l'extrémité d'un bras pivotant.

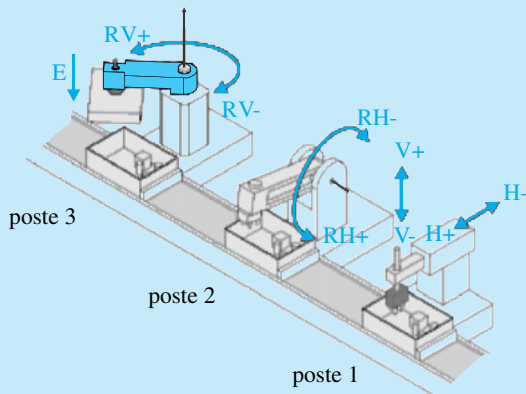


Figure 6.26 Chaîne d'assemblage.

L'observation de chaque poste en fonctionnement continu permet de recenser les opérations élémentaires qui se détaillent comme suit :

- Opérations effectuées au poste 1 :
 - la pince ouverte recule pour être au droit d'une goulotte d'alimentation en éléments 1 (action H-);
 - la pince descend (action V-) puis se ferme (arrêt de l'action P) pour saisir l'élément 1;
 - la pince remonte (action V+) puis avance au dessus du convoyeur, à la verticale de la position d'assemblage de l'élément 1 (action H+);
 - à l'instant où se présente un demi-boîtier, la pince descend (action V-), mettant en place l'élément 1;
 - la pince s'ouvre (action P) puis remonte (action V+).

Les vérins provoquant les mouvements horizontaux et verticaux sont bistables. Des contacts fin de course $h0$, $h1$ ($h1$ VRAI en position AVANCÉ), $v0$ et $v1$ ($v1$ VRAI en position HAUT) informent de leur position.

Le vérin permettant d'ouvrir la pince est monostable. Des contacts fin de course $p1$ et $p0$ informent de la position ouverte et fermée de la pince ($p0$ VRAI en position FERMÉ).

- Opérations effectuées au poste 2 :
 - à l'instant où se présente un demi-boîtier, le bras 2 pivote de 180° autour d'un axe horizontal, un élément 2 étant coincé en son extrémité (action RH+). L'élément 2 se fixe automatiquement sur le demi-boîtier sans nécessiter d'action particulière;

- le bras 2 pivote de -180° (action RH-). Un nouvel élément 2 se coince automatiquement à l'extrémité du bras 2.

La commande de la rotation est bistable. Des contacts fin de course $rh0$, $rh1$ informent de la position du bras ($rh1$ VRAI en position ASSEMBLAGE).

- Opérations effectuées au poste 3 :
 - la ventouse saisit un couvercle (action A);
 - le bras 3 pivote de 90° autour d'un axe vertical (action RV+);
 - à l'instant où se présente un demi-boîtier, la ventouse descend en emboîtant le couvercle (action E), le relâche (arrêt de l'action A) puis remonte (arrêt de l'action E);
 - le bras 3 pivote de -90° (action RV-).

La commande de la rotation est bistable. Des contacts fin de course $rv0$, $rv1$ informent de la position du bras ($rv1$ VRAI en position PRÊT À ASSEMBLER).

Le vérin vertical est monostable. Des contacts fin de course $e0$, $e1$ informent de sa position ($e1$ VRAI en position HAUT).

La commande de la ventouse est monostable. La dépression est obtenue par effet venturi. Un capteur a a la valeur VRAI quand une dépression suffisante est obtenue.

- Avancement d'un pas du convoyeur :
 - le convoyeur est désindexé (action I);
 - le convoyeur est mis en mouvement puis arrêté, un capteur de position t générant un créneau à chaque avancement d'un pas;
 - le convoyeur est indexé (arrêt de l'action I).

L'actionneur I est un vérin monostable. Les positions indexé et désindexé actionnent des contacts fin de course $i1$ et $i0$ ($i1$ est VRAI pour la position DÉINDEXÉ).

1. On définit les macro-étapes suivantes :

- M1 – ajouter l'élément 1;
- M2 – ajouter l'élément 2;
- M3 – ajouter le couvercle;
- M4 – avancer le convoyeur d'un pas.

Écrire les expansions des macro-étapes M1, M2, M3 et M4, en choisissant comme première action de chaque expansion celle qui correspond au début de l'assemblage.

2. On souhaite que la production :

- démarre lorsqu'on relâche le bouton de départ cycle dcy ;
- s'arrête avant de commencer un nouveau cycle lorsqu'on appuie sur le bouton arrêt ar .

En supposant que :

- la partie opérative est en position initiale à l'initialisation du grafct;
- les boîtiers se succèdent sans discontinuité;
- des demi-boîtiers en cours d'assemblage sont présents à chaque poste d'assemblage dès la mise en marche du système;

Écrire le grafct global incluant les macro-étapes M1, M2, M3 et M4 qui permet de gérer l'assemblage final des boîtiers.

3. Les durées des différentes opérations élémentaires se détaillent comme suit :

Action	Durée (s)
avancement d'un pas (M)	1,2
indexage ou désindexage (I)	0,1
déplacement horizontal (H+ ou H-)	0,4
déplacement vertical (V+ ou V-)	0,2
ouverture ou fermeture de la pince (P)	0,15
rotation de 180° (RH+ ou RH-)	0,4
déplacement vertical (E)	0,2
rotation de 90° (RV+ ou RV-)	0,6
saisie du couvercle (A)	0,2
libération du couvercle (arrêt de A)	0,1

Déterminer la durée d'un cycle d'assemblage.

6.5 Optimisation du temps de cycle d'une chaîne d'assemblage

On considère la chaîne d'assemblage définie dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes ». Le fonctionnement du système est décrit par les grafquets représentés figure 6.27, les macro-étapes étant développées figure 6.38.

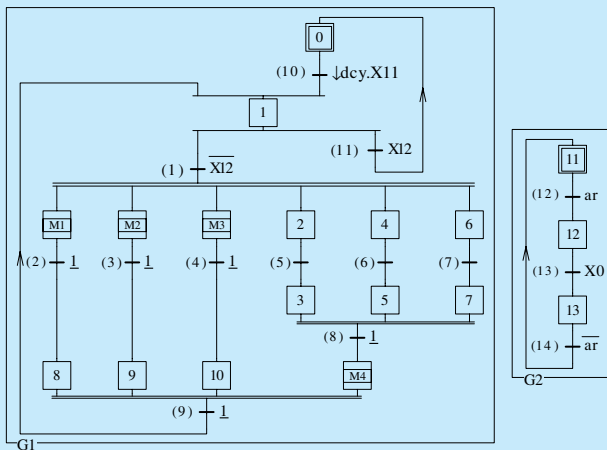


Figure 6.27 Grafcet – temps de cycle optimisé.

On souhaite optimiser le temps d'un cycle en avançant le convoyeur d'un pas dès qu'aucun obstacle n'est susceptible d'entraver son déplacement.

Ce déplacement est possible dès que :

- la pince du poste 1 se retrouve en position haute après avoir libéré l'élément 1 ;
- le bras du poste 2 termine sa rotation de -180° après avoir fixé l'élément 2 ;
- la ventouse du poste 3 se retrouve en position haute après avoir déposé le couvercle.

On espère ainsi que l'approvisionnement en éléments 1, 2 et couvercle soit fait en temps masqué pendant le déplacement du convoyeur.

1. À quelle(s) condition(s) la macro-étape M4 peut elle devenir active ?

Déterminer les réceptivités à associer aux transitions (5), (6) et (7) permettant d'obtenir le fonctionnement attendu.

2. Établir le chronogramme des sorties V-, V+, P, H-, H+, RH-, RH+, E, A, RV-, RV+, I et M pour un cycle du grafcet à partir de l'événement $\downarrow dcy$.

3. Déterminer la durée d'un cycle de production du système d'assemblage final.

Déterminer le temps nécessaire à l'assemblage final d'un disjoncteur.

6.6 Chaîne d'assemblage à approvisionnement discontinu

On considère la chaîne d'assemblage définie dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes » dont le fonctionnement est régi par les grafquets des figures 6.27 et 6.38.

Les réceptivités associées aux transitions (5), (6) et (7) sont respectivement X54, X9 et X74.

Compte tenu de tests effectués avant l'assemblage final, de l'élimination des demi-boîtiers défectueux, certains emplacements du convoyeur sont vides. Un capteur de proximité p placé devant le premier poste d'assemblage signale la présence d'un demi-boîtier afin que les opérations finales ne soient effectuées qu'en présence de demi-boîtier.

Modifier le grafcet proposé pour tenir compte de l'absence ou de la présence de demi-boîtiers en face des postes d'assemblage.

6.7 Chaîne d'assemblage et sous-programmes

On souhaite établir le grafcet de la partie commande d'une chaîne d'assemblage qui réalise l'assemblage final de disjoncteurs comme décrit dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes » (voir figure 6.26 page 239).

Les sous-programmes correspondant aux principales tâches sont définis figure 6.28 (p. 242).

On souhaite que la production :

- démarre lorsqu'on relâche le bouton de départ cycle dcy ;
- s'arrête avant de commencer un nouveau cycle lorsqu'on appuie sur le bouton arrêt ar .

Compte tenu de tests effectués avant l'assemblage final, de l'élimination des demi-boîtiers défectueux, certains emplacements du convoyeur sont vides. Un capteur de proximité p placé devant le premier poste d'assemblage signale la présence d'un demi-boîtier afin que les opérations finales ne soient effectuées qu'en présence de demi-boîtier.

En modifiant les réceptivités des sous-programmes définis figure 6.28, écrire un grafcet permettant de commander la chaîne d'assemblage en minimisant la durée d'un cycle d'assemblage.

6.8 Chaîne d'assemblage – implantation d'un arrêt d'urgence

On considère la chaîne d'assemblage définie dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes » et représentée sur la figure 6.26. Le système est légèrement modifié : des capteurs $b1$, $b2$ et $b3$ permettent de déterminer la présen-

ce de demi-boîtiers aux postes 1, 2 et 3. Sa commande est régie par les grafquets des figures 6.29 (voir page 243) et 6.30 (voir page 244).

Pour des raisons de sécurité, on souhaite implanter un arrêt d'urgence. On ajoute au système un bouton d'arrêt d'urgence *au*.

Cahier des charges :

- Un appui sur l'arrêt d'urgence provoque l'arrêt immédiat de toutes les actions.
- Après un arrêt d'urgence, la production ne peut reprendre que si la partie opérative est en position de référence, c'est-à-dire :
 - pince fermée en position haute au dessus du convoyeur au poste 1 ;
 - bras 2 basculé vers la zone d'approvisionnement, à l'arrière du convoyeur au poste 2 ;
 - ventouse avec pièce en position haute au dessus du convoyeur au poste 3.

En créant un grafquet d'ordre supérieur mettant en oeuvre des actions de forçage, modifier le grafquet global pour prendre en compte ce nouveau cahier des charges.

6.9 Trieur à deux magasins

La figure 6.31 (voir page 245) définit les grafquets de la partie commande d'une machine de tri.

La machine prend des paquets stockés dans deux magasins et les trie en trois catégories.

- La machine est mise en marche ou arrêtée en basculant un interrupteur *m*. Un tapis roulant est alors mis en marche (action MC)
- Un appui sur l'arrêt d'urgence *au* arrête la machine.
- Les paquets sont prélevés dans un magasin et poussés sur le tapis roulant par les aller-retour d'un vérin jusqu'à ce

que le magasin soit vide (actions $P1+$ et $P1-$ pour le magasin 1, $P2+$ et $P2-$ pour le magasin 2). Pendant ce temps, l'autre magasin peut être rempli.

- Lorsqu'un paquet sort d'un magasin, il est détecté par un capteur *r* qui prend la valeur VRAI pendant une à deux secondes. Il passe ensuite devant un système qui l'identifie et lui associe un code *L*. En fonction du code, le paquet est orienté et pris en charge de trois façons différentes. Les macro-étapes M1, M2 et M3 ne sont pas davantage développées dans cet exercice.
- Des capteurs fin de course *p* et *q* prennent la valeur VRAI quand les vérins $P1$ et $P2$ sont en position rentré.

1. Les hypothèses suivantes sont faites :

- on suppose que l'étape 3 reste active et que le trieur est mis en marche ;
- un déstockage du magasin 1, noté D1, correspond à une succession des actions $P1+$ $P1-$;
- un déstockage du magasin 2, noté D2, correspond à une succession des actions $P2+$ $P2-$.

En analysant les grafquets de la figure 6.31, déterminer la suite des déstockages effectués dans les différents cas suivants :

- (1) il y a 3 paquets dans le magasin 1.
- (2) il y a 2 paquets dans le magasin 2.
- (3) il y a 2 paquets dans le magasin 1 et 3 paquets dans le magasin 2.
- (4) il y a 1 paquet dans le magasin 1, 3 paquets dans le magasin 2 et 2 paquets sont ajoutés au magasin 1 pendant le déstockage du magasin 2.

Indiquer le rôle des variables *D* et *E*.

2. On souhaite utiliser la structuration par forçage en lieu et place de la structuration par encapsulation.

Établir de nouveaux grafquets pour la partie commande en s'interdisant l'utilisation des encapsulations.

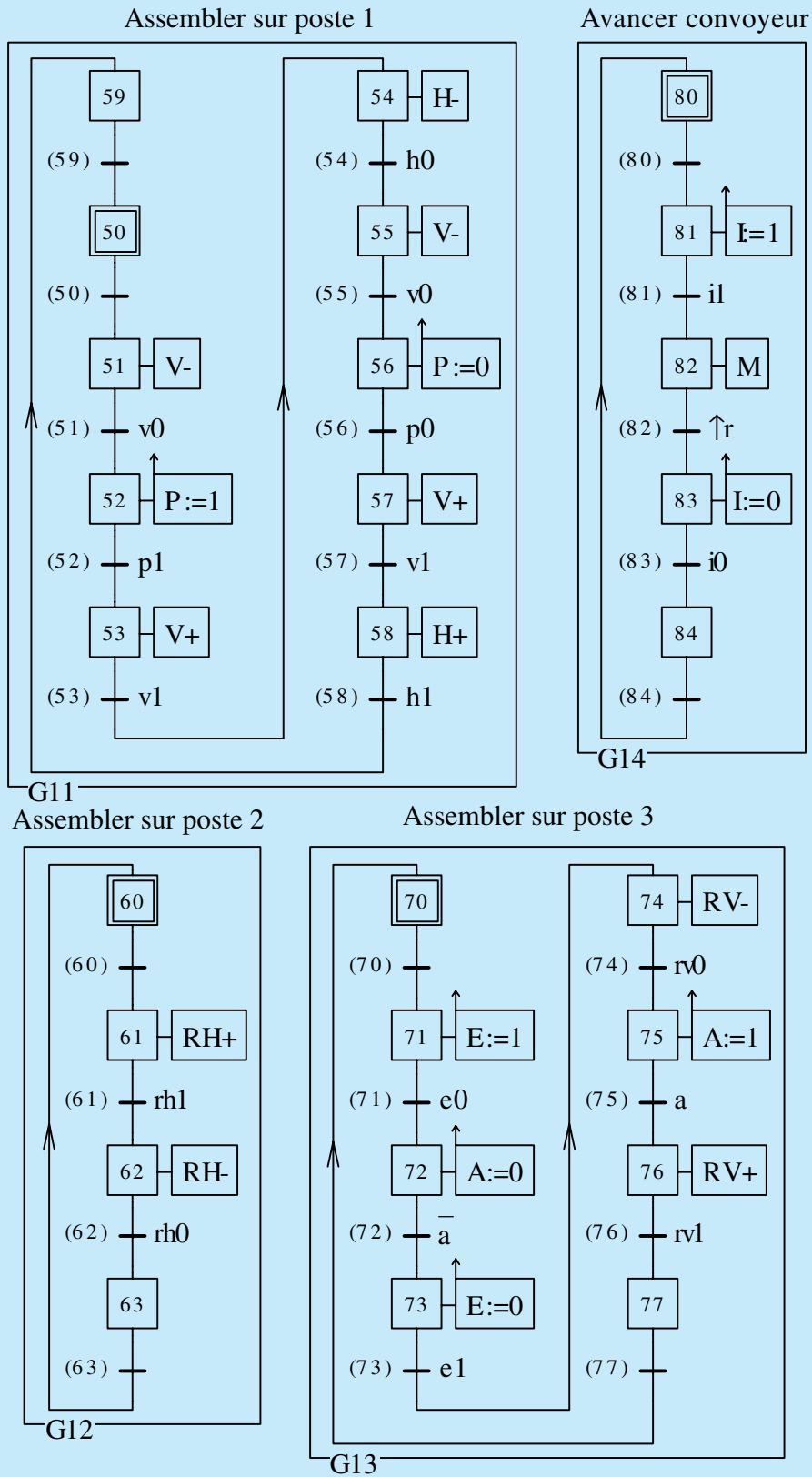


Figure 6.28 Sous-programmes d'assemblage.

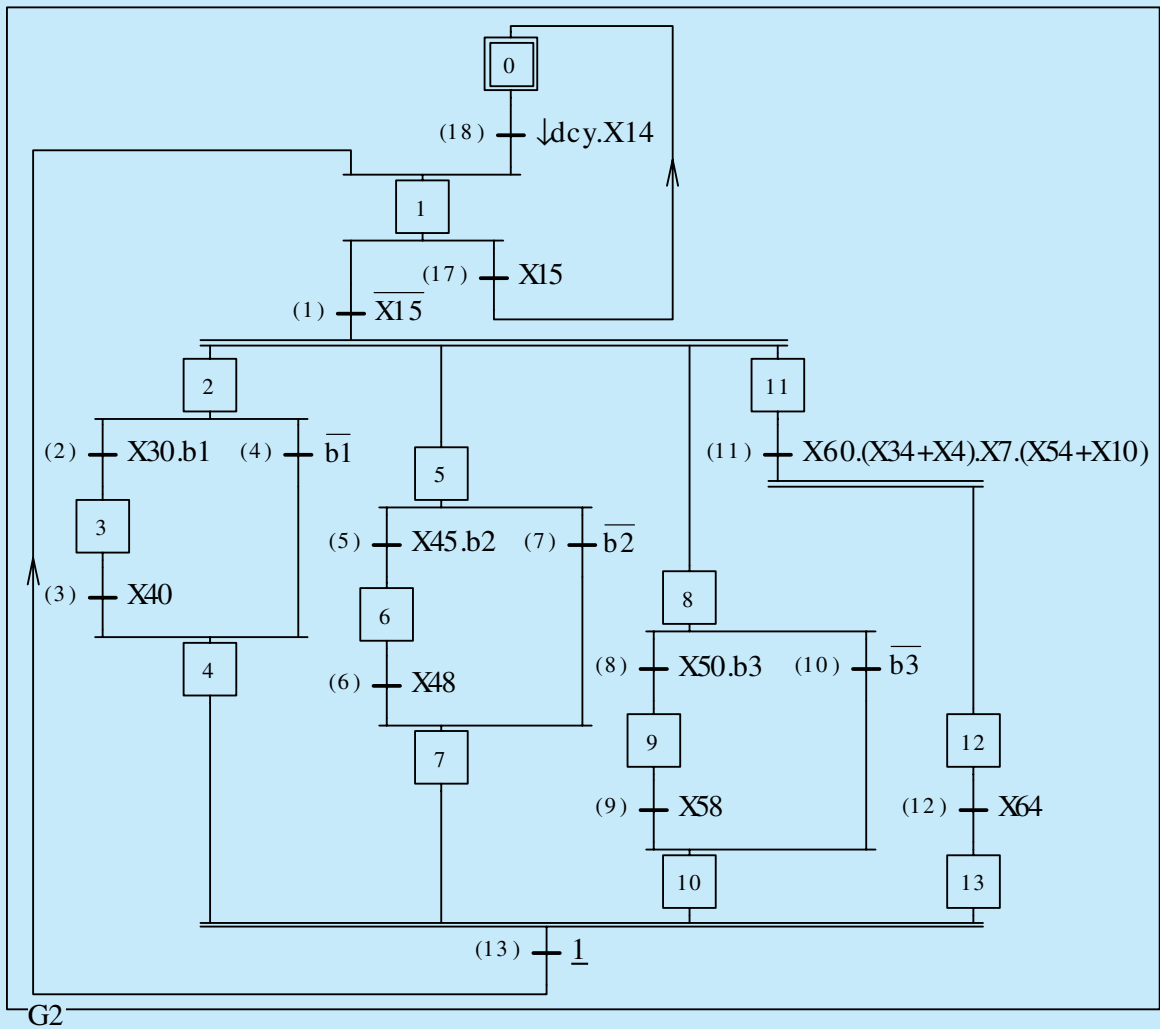


Figure 6.29 Chaîne d'assemblage et arrêt d'urgence – Grafsets (1/2).

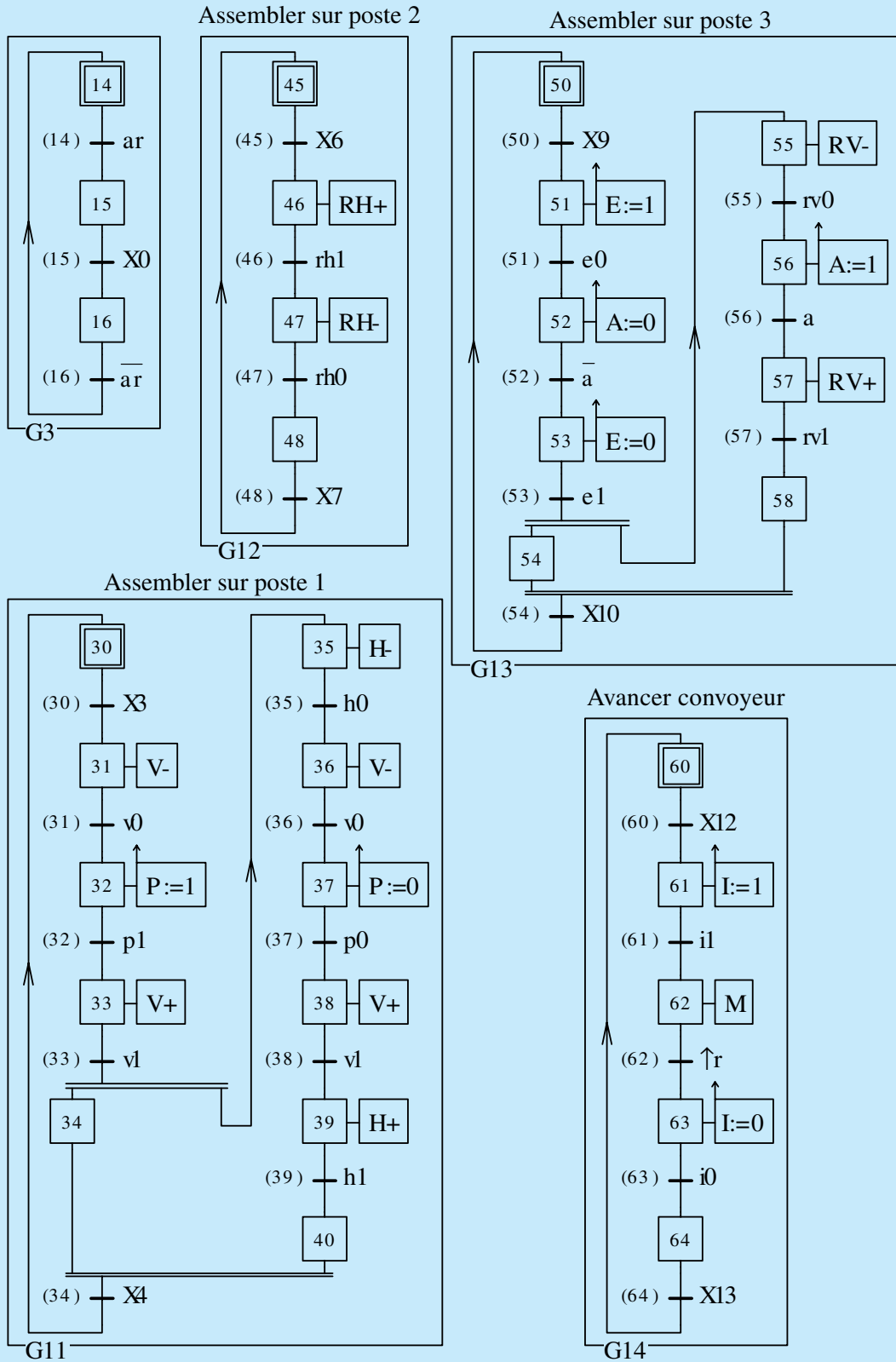


Figure 6.30 Chaîne d'assemblage et arrêt d'urgence – Grafcets (2/2).

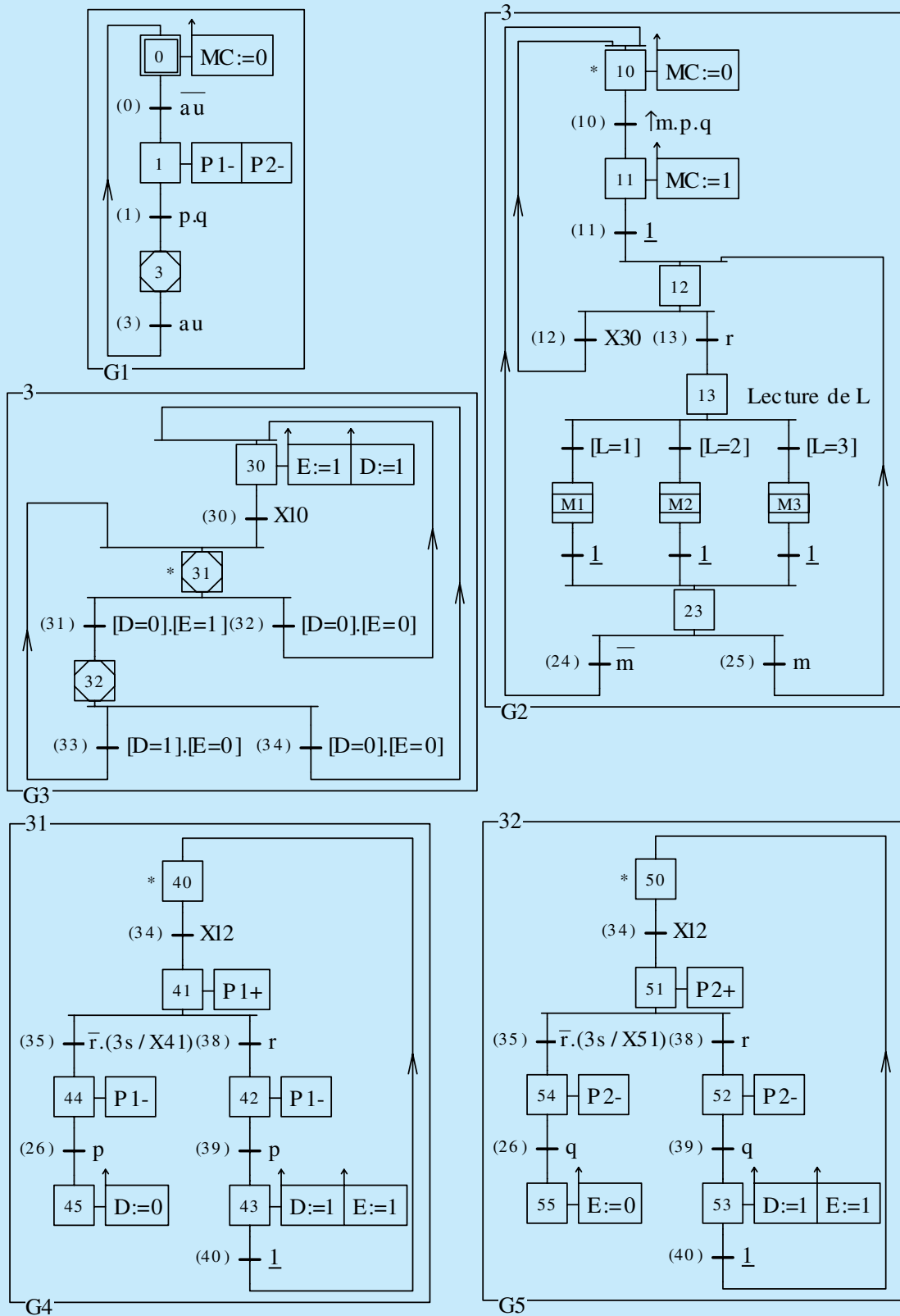


Figure 6.31 Grafcet du trieur.

Exercices d'approfondissement

6.10 Capteur de position angulaire (d'après X-ENS PSI 2008)

Un capteur de position angulaire, représenté partiellement figure 6.32, est constitué de trois capteurs inductifs placés sur un support fixe et d'une bague dentée solidaire d'une pièce mobile en rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) .

- Le passage des dents devant les trois capteurs C_1 , C_2 et C_3 délivre des informations en tout ou rien.
- Un capteur délivre l'information VRAI ($c_i = 1$) s'il détecte la présence de la roue ou l'information FAUX ($c_i = 0$) dans le cas contraire.
- La roue crantée définit 18 secteurs angulaires de 20° .

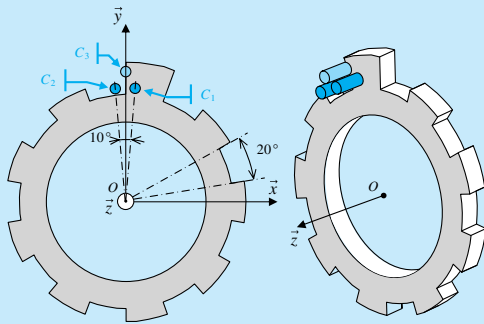


Figure 6.32 Capteur de position angulaire.

1. Évaluer la précision de l'information délivrée par ce capteur de position angulaire.
2. Exprimer la fonction technique réalisée par le capteur C_3 .
3. Les capteurs C_1 et C_2 permettent de déterminer le sens de rotation de la bague.

Exprimer les deux équations logiques des variables S_p et S_n permettant de déterminer le sens positif ou négatif de rotation de la bague en fonction des variables binaires associées aux deux capteurs C_1 et C_2 .

4. On note S_i , i variant de 0 à n , les différents secteurs angulaires correspondants aux positions identifiables de la bague. Expliciter le fonctionnement du capteur angulaire en définissant un grafcet permettant de déterminer le numéro de secteur angulaire N_s en fonction des variables c_1 , c_2 et c_3 .

6.11 Chaîne d'assemblage – Arrêt d'urgence et position de référence

On considère la chaîne d'assemblage définie dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes » et représentée sur la figure 6.26. Le système est légèrement modifié : des capteurs $b1$, $b2$ et $b3$ permettent de déterminer la présence de demi-boîtiers aux postes 1, 2 et 3. Sa commande est régie par les grafquets des figures 6.29 et 6.30.

Pour des raisons de sécurité, on souhaite ajouter des fonctionnalités supplémentaires : prise en compte d'un arrêt d'urgence, possibilité de mettre le système dans une position de référence après un arrêt d'urgence.

On décide d'ajouter trois boutons au système :

- un bouton d'arrêt d'urgence au ;

- un bouton raz permettant, poste par poste, de mettre la partie opérative en position avant un nouveau départ cycle dcy ;
- un sélecteur à trois positions associé aux variables $pos1$ et $pos3$:
 - la position 1 correspond à $pos1$ VRAI ;
 - la position 3 correspond à $pos3$ VRAI ;
 - la position 2 correspond à $pos1$ FAUX et $pos3$ FAUX ;

Cahier des charges :

- Un appui sur l'arrêt d'urgence provoque l'arrêt immédiat de tous les cycles automatiques, les actionneurs pince et ventouse conservent leur état, le convoyeur est immédiatement stoppé.
- Après un arrêt d'urgence, la production ne peut reprendre que si la partie opérative est en position de référence, c'est-à-dire :
 - pince fermée en position haute au dessus du convoyeur au poste 1 ;
 - bras 2 basculé vers la zone d'approvisionnement, à l'arrière du convoyeur au poste 2 ;
 - ventouse avec pièce en position haute au dessus du convoyeur au poste 3.
- Avec le sélecteur en position 1, pour l'initialisation du poste 1 avant la mise en production :
 - une impulsion de moins de 1 s sur le bouton raz provoque une mise en place de la pince en position haute au dessus du convoyeur ;
 - un appui sur le bouton raz d'une durée supérieure à 1 s provoque l'ouverture de la pince, un retour en position haute puis un recul de la pince, la descente de la pince et la saisie d'une pièce, un retour en position haute et une avancée de la pince au dessus du convoyeur.
- Avec le sélecteur en position 2, pour l'initialisation du poste 2 et du convoyeur avant la mise en production :
 - une impulsion de moins de 1 s sur le bouton raz provoque un retour en position arrière du bras 2 ;
 - un appui sur le bouton raz d'une durée supérieure à 1 s provoque le déplacement d'un pas du convoyeur.
- Avec le sélecteur en position 3, pour l'initialisation du poste 3 avant la mise en production :
 - une impulsion de moins de 1 s sur le bouton raz provoque un retour de la ventouse en position haute au dessus du convoyeur ;
 - un appui sur le bouton raz d'une durée supérieure à 1 s provoque l'arrêt de l'aspiration, un retour en position haute puis un recul de la ventouse, la saisie d'un couvercle et une avancée de la ventouse au dessus du convoyeur.

Modifier le grafcet global pour prendre en compte ce nouveau cahier des charges.

En particulier il est possible de :

- créer un grafcet d'ordre supérieur mettant en oeuvre des actions de forçage ;
- modifier le grafcet G2 ;
- modifier les réceptivités des grafquets G11, G12, G13 et G14.

Solutions des exercices

Exercices d'application

6.1

1. Les variables d'entrée et de sortie du grafcet sont répertoriées sur le diagramme 6.33.

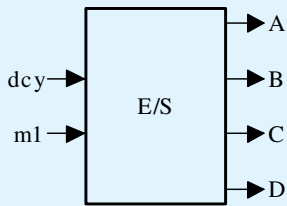


Figure 6.33 Modes de sortie - Diagramme des entrées/sorties.

Les variables A, B et C sont affectées sur événements. Elles sont donc utilisées en mode mémorisé.

La variable D est assignée sur état. Elle est utilisée en mode continu.

2. Une analyse des évolutions du grafcet conduit au tableau ci-dessous.

3. Le chronogramme que l'on obtient est représenté figure 6.34 (voir page 253).

6.2

1. Il s'agit d'un problème de comptage. Une solution consiste à utiliser un compteur.

L'utilisation d'un compteur nécessite :

- une boucle comportant l'incrémement du compteur en plus de la séquence d'actions à répéter ;
- un test de sortie de boucle évaluant la valeur du compteur ;
- une initialisation du compteur avant l'entrée dans la boucle.

La valeur du compteur à évaluer au niveau du test peut être différente suivant que l'incrémement est faite avant ou après l'événement à compter, avant ou après la séquence d'actions à effectuer.

Situation actuelle	Transitions validées	Événement ou condition	Transitions franchissables	Nouvelle situation	Évolution fugace
{0}	(1)	↑ dcy	(1)	{1,5}	oui
{1,5}	(2)(5)(9)	[C=0]	(5)	{1,6}	
{1,6}	(2)(6)	↑(3s/X6)	(6)	{1,7}	
{1,7}	(2)(7)	↑(6s/X1)	(2)	{2,7}	
{2,7}	(3)(7)	↑ m1	(3)(7)	{3,8}	
{3,8}	(4)(8)	↑(3s/X3)	(4)	{4,8}	
{4,8}	(8)	↑(4s/X8)	(8)	{4,10}	oui
{4,10}	(11)	1	(11)	{0}	
{0}	(1)	↑ dcy	(1)	{1,5}	oui
{1,5}	(2)(5)(9)	[c=1]	(9)	{1,9}	
{1,9}	(2)(10)	↑(6s/X1)	(2)	{2,9}	oui
{2,9}	(3)(10)	m1	(3)	{3,9}	
{3,9}	(4)(10)	↑(3s/X3)	(4)	{4,9}	oui
{4,9}	(10)	X4	(10)	{4,10}	oui
{4,10}	(11)	1	(11)	{0}	
{0}	(1)	↑ dcy	(1)	{1,5}	oui
{1,5}	(2)(5)(9)	[C=0]	(5)	{1,6}	
{1,6}	(2)(6)	↑(3s/X6)	(6)	{1,7}	oui
{1,7}	(2)(7)	m1	(7)	{1,8}	
{1,8}	(2)(8)	↑(6s/X1)	(2)	{2,8}	oui
{2,8}	(3)(8)	m1	(3)	{3,8}	
{3,8}	(4)(8)	↑(4s/X8)	(8)	{3,10}	
{3,10}	(4)	↑(3s/X3)	(4)	{4,10}	oui
{4,10}	(11)	1	(11)	{0}	

Ici la seule action consiste à déverrouiller le tourniquet et il faut compter les événements « front montant de p ».

Une solution est proposée figure 6.35.

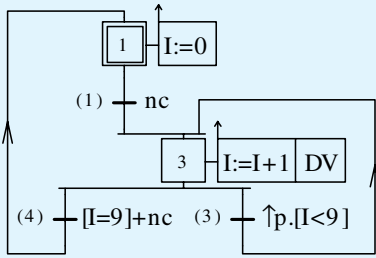


Figure 6.35 Tourniquet de parc d'attractions – Solution 1.

2. En partant du grafcet précédent, la prise en compte du bouton t se limite à la modification de la réceptivité de la transition (4) qui devient $[I = 9] + nc + t$.

Si l'incréméntation du compteur est placée après la détection du front montant de p , il convient d'ajouter une sélection de séquences comme présenté sur la solution de la figure 6.36.

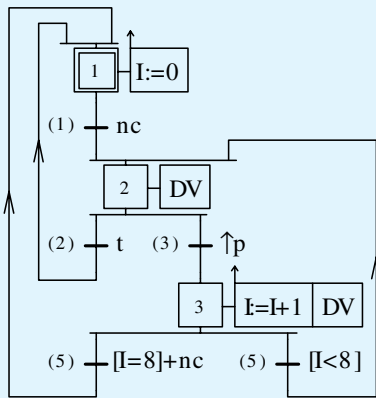


Figure 6.36 Tourniquet de parc d'attractions – Solution 2.

6.3

1. Une analyse des évolutions du grafcet conduit au tableau ci-dessous.

Situation actuelle	Transitions validées	Événement ou condition	Transitions franchissables	Nouvelle situation	Évolution fugace
{10}	0,10	$\uparrow c$	10	{11}	
{11}	0,11	$\uparrow a$	0	{1,11}	oui
{1,11}	0,1,11		1	{2,11}	oui
{2,11}	0,2,11		2	{3,11}	oui
{3,11}	0,3,11		3	{4,11}	
{4,11}	0,4,11	$\uparrow a$	0	{1,4,11}	oui
{1,4,11}	0,1,4,11		1	{2,4,11}	oui
{2,4,11}	0,2,4,11		2	{3,4,11}	
{3,4,11}	0,3,4,11	$\uparrow a$	0	{1,3,4,11}	oui
{1,3,4,11}	0,1,3,4,11		1	{2,3,4,11}	
{2,3,4,11}	0,2,3,4,11	$\uparrow a$	0	{1,2,3,4,11}	

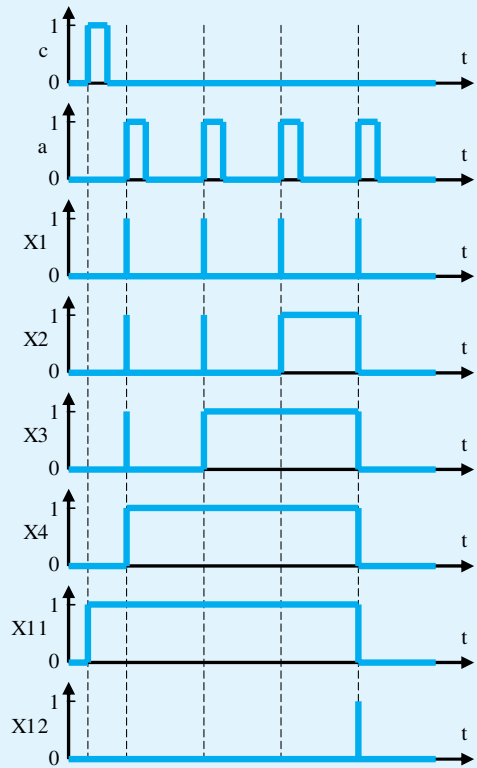


Figure 6.37 Registre à empilement.

2. Le chronogramme correspondant aux évolutions précisées à la question précédente est représenté figure 6.37. Il faut remarquer que les différentes situations correspondant à des évolutions fugaces paraissent comme simultanées mais ne le sont pas.

Les réceptivités demandées peuvent s'écrire :

- $X1.X2$ pour la transition (11). Le comptage est terminé quand les étapes 1, 2, 3 et 4 sont actives. Cette situation ne se produit que si les étapes 1 et 2 sont simultanément actives ;
- $\overline{X3}.\overline{X4}$ pour la transition (12). Une analyse des évolutions lorsque l'étape 12 reste active montre que la situation où les étapes 3 et 4 sont simultanément inactives ne se produit que lorsque les étapes 1 et 2 sont aussi inactives.

6.4

1. Les actionneurs sont de deux types : monostables ou bistables. Un actionneur bistable mémorise en quelque sorte son dernier état, ce qui n'est pas le cas d'un actionneur monostable.

Pour les sorties, il est intéressant de choisir :

- le mode continu pour tous les actionneurs bistables ;
- le mode mémorisé pour les actionneurs monostables.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de répéter une action si la sortie associée doit être maintenue pendant l'activité de plusieurs étapes.

L'instant du début d'assemblage est :

- au poste 1, l'instant où la pince descend pour mettre en place l'élément 1 ;
- au poste 2, l'instant où débute la rotation RH+ ;
- au poste 3, l'instant où la ventouse descend pour emboîter le couvercle.

Compte tenu de ces remarques l'écriture des expansions des macro-étapes conduit aux représentations de la figure 6.38 (voir page 254)

2. Le fonctionnement du système étant cyclique, une démarche rationnelle consiste à :

- mettre en place la boucle de fonctionnement ;
- insérer dans la boucle, à l'endroit le plus adapté, un test permettant d'évaluer la condition de sortie de la boucle. Insérer un test consiste à mettre en place une sélection de séquences, les réceptivités des deux transitions étant complémentaires l'une de l'autre ;
- ajouter une entrée dans la boucle en tenant compte des conditions initiales à satisfaire avant d'effectuer cette entrée. Ajouter l'entrée consiste à mettre en place une convergence de séquences permettant d'entrer dans la boucle.

Les deux derniers points de cette démarche peuvent être permutés.

Pour minimiser le temps d'assemblage, il est nécessaire d'activer 3 séquences parallèles pour les opérations réalisées aux postes d'assemblage 1, 2 et 3. Après synchronisation des séquences parallèles, le déplacement du convoyeur peut être réalisé sans risque d'interaction avec les opérations d'assemblage. Cette solution est proposée figure 6.39.

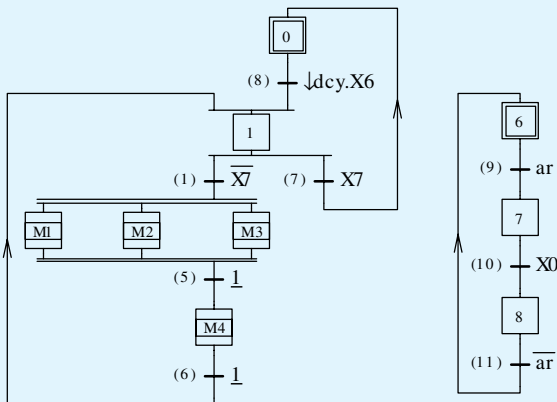


Figure 6.39 Grafcet « Chaîne d'assemblage ».

Une fois la boucle principale mise en place, il convient d'ajouter un test permettant d'interrompre son déroulement. C'est le rôle des transitions (1) et (7).

Compte tenu du cahier des charges qui n'impose rien de particulier, ce test peut être placé avant la macro étape M4.

Si l'on maintient le bouton *ar* appuyé jusqu'à l'arrêt du système, les réceptivités *ar* et \overline{ar} peuvent convenir. La solution proposée, utilisant le grafcet constitué des étapes 6, 7 et 8, permet de mémoriser un appui sur le bouton d'arrêt et d'arrêter le système à la fin d'un cycle d'assemblage même si le bouton est relâché.

Les deux grafquets présentés ont des évolutions liées : ils sont synchronisés.

On termine en mettant en place l'étape 0 et la condition de démarrage d'un cycle.

3. Pour le grafcet défini figure 6.39 et les macro-étapes définies figure 6.38, on peut établir que les durées d'exécution des macro-étapes sont :

- pour M1, $t_1 = (4.0,2 + 2.0,15 + 2.0,4)$ soit $t_1 = 1,9$ s ;
- pour M2, $t_2 = (2.0,4)$ soit $t_2 = 0,8$ s ;
- pour M3, $t_3 = (2.0,2 + 0,2 + 0,1 + 2.0,6)$ soit $t_3 = 1,9$ s ;
- pour M4, $t_4 = (2.0,1 + 1,2)$ soit $t_4 = 1,4$ s.

Par suite, le temps complet d'un cycle est $t = \text{MAX}(t_1, t_2, t_3) + t_4$ soit $t = 3,3$ s.

On peut remarquer que ce temps peut être diminué dans la mesure où le déplacement du convoyeur peut commencer plus tôt. En effet, il peut commencer dès l'instant où plus aucun obstacle ne se trouve dans la trajectoire des différents demi-boîtiers.

6.5

1. Comme la réceptivité associée à la transition (8) a toujours la valeur VRAI, la macro-étape M4 devient active dès que les étapes 3, 5 et 7 du grafcet G1 sont actives et que la transition (8) est franchie.

Détermination des réceptivités :

- Quand la pince du poste 1 se retrouve en position haute, l'étape 54 devient active.
- Quand le bras du poste 2 termine sa rotation de -180° , l'étape 9 devient active.
- Quand la ventouse du poste 3 se retrouve en position haute, l'étape 74 devient active.

Les réceptivités à associer aux transitions (5), (6) et (7) sont donc X54, X9 et X74. Ainsi, dès qu'une des conditions nécessaires à la mise en route du convoyeur est satisfaite, une des étapes 3, 5 ou 7 devient active. Quand les trois conditions sont satisfaites, le convoyeur avance d'un pas.

Remarque : Supprimer les transitions (5), (6), (7), les étapes 3, 5, 7 et associer la réceptivité X54, X9, X74 à la transition (8) ne convient pas. Les étapes 54, 9 et 74 ne sont pas nécessairement actives simultanément. Par contre, il est nécessaire de mémoriser l'état d'avancement de chaque macro-étape en activant au fur et à mesure les étapes 3, 5 et 7.

2. Le chronogramme obtenu est représenté figure 6.40 (voir page 255).

3. Le temps de cycle est $t_{cycle} = 2,2$ s.

Cette valeur est à comparer à la valeur précédente qui était $t = 3,3$ s. Le gain de temps est sensible.

Le temps nécessaire pour terminer la fabrication d'un disjoncteur correspond à la durée de 3 cycles, soit $t_{\text{disjoncteur}} = 6,6$ s.

6.6

1. La solution à développer doit permettre :

- de ne pas activer la macro-étape M1 s'il n'y a pas de pièce présente au poste d'assemblage 1 ;
- de ne pas activer la macro-étape M2 s'il n'y a pas de pièce présente au poste d'assemblage 2 ;
- de ne pas activer la macro-étape M3 s'il n'y a pas de pièce présente au poste d'assemblage 3 ;
- de faire avancer le convoyeur à la fin de chaque déroulement de la boucle, que les opérations d'assemblage aient ou n'aient pas eu lieu.

Pour chaque poste d'assemblage, il suffit de mettre en place une sélection de séquences comme proposé sur le grafcet de la figure 6.41 (voir page 256). Les réceptivités des différentes branches doivent être telles que :

- si un demi-boîtier est présent, il faut exécuter la macro étape ;
- s'il n'y a pas de demi-boîtier, il faut franchir la transition permettant d'activer l'étape qui suit la macro-étape. Dans ce cas, la trajectoire du convoyeur n'est pas entravée au niveau du poste considéré et aucune étape de la macro-étape n'est activée. Il faut modifier les réceptivités des transitions (5), (6) et (7) en conséquence. Les étapes 3, 5 ou 7, en fonction de la macro-étape considérée, peuvent être immédiatement activées.

Par suite :

- la réceptivité de la transition (5) est transformée en $X54 + X8$;
- la réceptivité de la transition (6) reste $X9$;
- la réceptivité de la transition (7) est transformée en $X74 + X10$.

Le dernier problème à résoudre consiste à déterminer la présence ou l'absence de demi-boîtier au niveau d'un poste.

On constate :

- qu'il n'y a qu'un seul capteur de présence p au poste 1 ;
- que si un demi-boîtier est présent au poste 1 pour un cycle d'assemblage, il est présent au poste 2 au cycle suivant, puis au poste 3 dans un troisième cycle.

Il faut donc mémoriser l'absence ou la présence d'un demi-boîtier pendant 3 cycles consécutifs.

Une façon simple de répondre à ce problème consiste à utiliser « des registres à décalage » comme présenté sur le grafcet G3.

- Au début d'un cycle, c'est-à-dire au $\uparrow X1$, l'étape 41 est activée si un demi-boîtier est présent au poste 1.
- Au cycle suivant, c'est-à-dire au $\uparrow X1$ suivant, l'étape 42 est à son tour activée, traduisant le passage du demi-boîtier du poste 1 au poste 2.
- Il en est de même pour l'étape 43 qui devient active quand le demi-boîtier arrive au poste 3.

On en déduit que :

- $X41$ a la valeur VRAI s'il faut exécuter la macro-étape M1 ;
- $X42$ a la valeur VRAI s'il faut exécuter la macro-étape M2 ;
- $X43$ a la valeur VRAI s'il faut exécuter la macro-étape M3.

Les réceptivités des différentes sélections de séquences, à condition que l'arrêt de production ne soit pas demandé, peuvent donc être complétées.

6.7

1. Dans un premier temps, il faut construire la boucle. On peut envisager plusieurs options :

- « gérer l'assemblage au poste 1 » PUIS « gérer l'assemblage au poste 2 » PUIS « gérer l'assemblage au poste 3 » PUIS « gérer le déplacement du convoyeur » ;
- (« gérer l'assemblage au poste 1 » ET « gérer l'assemblage au poste 2 » ET « gérer l'assemblage au poste 3 ») PUIS « gérer le déplacement du convoyeur » ;
- « gérer l'assemblage au poste 1 » ET « gérer l'assemblage au poste 2 » ET « gérer l'assemblage au poste 3 » ET « gérer le déplacement du convoyeur ».

Le choix de l'option 1 conduit à une structure linéaire, simple à mettre en place, mais de durée de cycle trop importante. Le choix de l'option 2 est meilleur, mais le temps de cycle n'est pas minimisé. Le choix de la troisième option est le plus judicieux.

Développement de la troisième option (voir figure 6.42 page 257).

- Activation de séquences parallèles.
 - Pour cette option il faut activer 4 séquences parallèles pour les 4 tâches à réaliser. Cette démarche conduit à la structure des étapes 1 à 5.
 - Pour chaque séquence d'assemblage, il faut envisager deux options : présence ou absence de pièce.
 - On met donc en place la structure des étapes 6 à 11 où les étapes 6, 8 et 10 appellent respectivement les sous-programmes G11, G12 et G13.
 - La quatrième séquence, gérer le déplacement du convoyeur, ne peut commencer que lorsque des conditions de démarrage sont réunies :
 - * assemblage des éléments terminé ;
 - * espace de déplacement dégagé.
 - Ces conditions étant vérifiées, l'étape 12, qui appelle le sous-programme G14, est activée. L'étape 13 devient active après exécution du sous-programme.

Il est possible, dès ce stade de l'étude, de définir la plupart des réceptivités des appels de sous-programmes :

- Pour l'appel de G11 : ($X50$.présence pièce poste 1), $X59$, $X6$ et $X7$ pour les transitions (2), (3), (50) et (59) ;
- Pour l'appel de G12 : ($X60$.présence pièce poste 2), $X63$, $X8$ et $X9$ pour les transitions (5), (6), (60) et (63) ;
- Pour l'appel de G13 : ($X70$.présence pièce poste 3), $X77$, $X10$ et $X11$ pour les transitions (8), (9), (70) et (77) ;
- Pour l'appel de G14 : ($X80$.condition de déplacement), $X84$, $X6$ et $X7$ pour les transitions (11), (12), (50) et (59).

- Synchronisation des séquences parallèles et bouclage du cycle.
 - Les différentes tâches étant exécutées, il faut mettre en place une synchronisation des séquences parallèles puis une fermeture de la boucle.
 - Pour arrêter la production, il est nécessaire de prévoir un test permettant de sortir de la boucle. Ce test correspond à

la sélection de séquences réalisée par les transitions (17) et (23).

– Pour commencer la production, il faut ajouter une entrée dans la boucle. L'entrée correspond à la convergence de séquences réalisée par les transitions (13) et (24).

• Test d'arrêt.

Pour le test d'arrêt, il faut mémoriser le front montant de *ar* jusqu'à l'arrêt de la chaîne. Cette mémorisation est faite grâce au grafcet G3, de la même façon que dans l'exercice « Chaîne d'assemblage et macro-étapes ».

• Préparation des tests présence pièce (étapes 18 à 21).

Pour le poste 1, la valeur de *p* indique la présence ou l'absence de pièce. Cette information doit être mémorisée pour les cycles suivants car il n'y a pas de capteur aux postes 2 et 3.

La solution proposée ici consiste à utiliser 3 variables : une pour chaque poste. Après chaque avancée du convoyeur, il suffit :

- de décaler le contenu de la mémoire poste 2 à la mémoire poste 3, de la même façon que la pièce passe du poste 2 au poste 3 ;
- de décaler ensuite celui de la mémoire poste 1 à la mémoire poste 2 ;
- de terminer par l'affectation en fonction de *p* d'une valeur à la mémoire poste 1.

• Condition de déplacement du convoyeur.

Il faut exprimer la condition de déplacement du convoyeur *cond_dep* pour compléter la réceptivité de la transition (11).

Le déplacement du convoyeur est possible si :

- une des étapes 54, 55, 56, 57, 58, 59 ou 7 est active pour le poste 1, soit si $cond1 = X54 + X55 + X56 + X57 + X58 + X59 + X7$ est VRAI ;
- l'étape 9 est active pour le poste 2, soit si *X9* est VRAI ;
- une des étapes 74, 75, 76, 77 ou 11 est active pour le poste 3, soit si $cond3 = X74 + X75 + X76 + X77 + X11$ est VRAI.

La condition de déplacement est donc $cond_dep = cond1.X9.cond3$.

Par suite, la réceptivité de la transition (11) est $X80.cond_dep$.

6.8

En supposant qu'à l'initialisation du grafcet, la partie opérative est en position initiale, il est possible de conserver toutes les étapes initiales des différents grafquets.

Une solution simple pour stopper toutes les actions continues et interrompre l'exécution des différents sous-programmes consiste à désactiver les grafquets G2, G3, G11, G12, G13 et G14 quand *au* devient VRAI. Cette solution est présentée figure 6.43, où les actions de forçage associées à l'étape 101 permettent d'obtenir ce résultat.

Cependant, les actions mémorisées ne sont pas interrompues. Compte tenu du cahier des charges, il faut prévoir un arrêt de toutes les actions mémorisées, ce qui est réalisé à l'aide des actions associées à l'étape 102.

Pour reprendre la production, en supposant que le système est replacé en position initiale, il suffit de forcer l'ensemble des grafquets G2 à G14 à leur situation initiale.

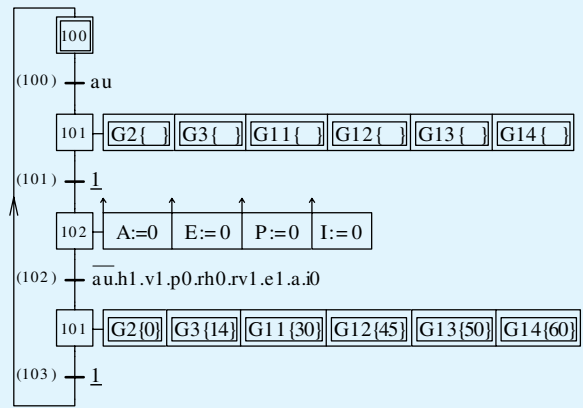


Figure 6.43 Chaîne d'assemblage et arrêt d'urgence – Solution.

Le système est en position initiale si la variable *h1.v1.p0.rh0.rv1.e1.a.i0* a la valeur VRAI. La réceptivité de la transition (24) peut également être transformée en $\downarrow dcy.X14.h1.v1.p0.rh0.rv1.e1.a.i0$ pour interdire le démarrage de la production si la partie opérative n'est pas en position de référence.

6.9

1. Suite des déstockages.

(1) Pour 3 paquets en Magasin1 :

- Les étapes 3, 31, 40 et 10 sont actives.
- Après mise en marche, la boucle des étapes 12, 13, (M1, M2 ou M3) et 23 est parcourue.
- À chaque activation de l'étape 12, tant qu'il y a des paquets, la boucle des étapes 40, 41, 42 et 43 est parcourue et un paquet est déstocké du magasin 1. Les variables *D* et *E* prennent la valeur VRAI.
- Quand le magasin 1 est vide, la variable *D* prend la valeur FAUX. L'étape 32 est activée.
- Les étapes 50, 51, 54 et 55 sont parcourues. La variable *E* prend la valeur FAUX.
- L'étape 32 est désactivée, l'étape 30 activée. Le trieur s'arrête.

Les déstockages sont (D1,D1,D1,D1,D2).

(2) Pour 2 paquets en Magasin2 : Par un raisonnement analogue, on montre que les déstockages sont (D1,D2,D2,D2,D1).

(3) Pour 2 paquets en Magasin1 et 3 paquets en Magasin2 : Les déstockages sont (D1,D1,D1,D2,D2,D2,D2,D1).

(4) Pour 1 paquet en Magasin1, 3 paquets en Magasin2 et ajout de 2 paquets en Magasin1 : Les déstockages sont (D1,D1,D2,D2,D2,D2,D1,D1,D1,D2).

Les variables *D* et *E* sont associées à chacun des deux magasins.

- *D* prend la valeur FAUX si le magasin 1 est vide.
- *D* prend la valeur VRAI si le magasin 1 est susceptible d'être non vide.

Ces deux variables permettent de gérer le changement de magasin et l'arrêt du trieur quand les magasins sont tous les deux vides.

2. Une étape encapsulante peut être remplacée par trois étapes :

- une étape avec actions de forçage qui imposent à ses anciennes encapsulations la situation où sont actives toutes les étapes anciennement marquées d'un lien d'activation ;
- une étape sans forçage, qui libère et laisse évoluer les grafjets forcés ;
- une étape avec actions de forçage qui désactivent les grafjets correspondant à ses anciennes encapsulations.

Les grafjets partiels de la figure 6.44 (voir page 258) mettent cette méthode en application. Ils conduisent à un fonctionnement identique aux grafjets de la figure 6.31.

Les encapsulations G2, G3 et G4 ne sont pas réécrites. Elles doivent être transformées en grafjets partiels, en supprimant les liens d'activation et les références aux étapes encapsulantes.

Exercices d'approfondissement

6.10

1.

- Le capteur C_1 donne une information binaire qui change de valeur tout les 20° .
- Le capteur C_2 donne également une information binaire qui change de valeur tout les 20° , mais ce changement de valeur est décalé de 10° par rapport au changement de valeur de C_1 .

Par suite, la combinaison (C_1, C_2) change de valeur tout les 10° .

La position de la bague peut donc être déterminée à 10 degrés près, à condition de comptabiliser le nombre de changements d'état de la variable (c_1, c_2) . En effet, la combinaison (c_1, c_2) ne peut prendre que quatre valeurs.

Ce capteur se comporte comme un codeur incrémental.

2. Le capteur C_3 délivre une information qui ne change de valeur qu'une fois par tour. Il indique une position de référence, permettant de mettre le paramètre de position à la valeur zéro.

La fonction technique du capteur C_3 est de permettre l'initialisation du capteur de position.

3. Une analyse des informations délivrées par les capteurs inductifs C_1 et C_2 conduit aux diagrammes de la figure 6.45.

En introduisant deux variables S_p et S_n traduisant les rotations dans les sens positif et négatif, on obtient :

$$S_p = c_1 \cdot \uparrow c_2 + \downarrow c_1 \cdot c_2 + \overline{c_1} \cdot \downarrow c_2 + \uparrow c_1 \cdot \overline{c_2}$$

$$S_n = \downarrow c_1 \cdot \overline{c_2} + \overline{c_1} \cdot \uparrow c_2 + \uparrow c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot \downarrow c_2$$

4. Compte tenu de la question 1, il y a 36 positions angulaires identifiables. Par suite N_s varie de 0 à 35. Il faut également choisir la position de référence, qui peut par exemple être définie par $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 1$.

Une proposition de réponse est présentée figure 6.46 (voir page 258). Le grafjet comporte ensuite deux parties : une partie initialisation du compteur N_s où le capteur n'est pas opérationnel, puis une partie incrémentation, décrémentation du compteur lorsque le capteur est opérationnel.

Remarques :

- La réceptivité de la transition (5) peut être remplacée par $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$. De même, la réceptivité de la transition (7) peut être

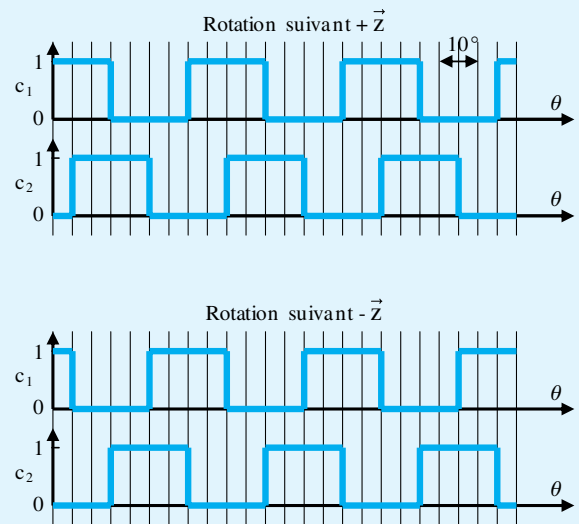


Figure 6.45 c_1 et c_2 en fonction de θ .

remplacée par $c_1 \cdot \overline{c_2} \cdot c_3$. Ainsi l'information position initiale du capteur est rachaichie à chaque tour.

- L'utilisation du mode mémorisé permet de mettre facilement en œuvre un compteur et d'en déduire la position de la bague crantée. Pour indiquer la position angulaire du capteur en utilisant le mode continu, il est possible de concevoir un grafjet comportant 36 étapes, chacune d'elle caractérisant une position de la bague crantée. Cette deuxième façon de procéder est plus fastidieuse à mettre en œuvre. D'autre part l'information obtenue, position associée à l'activité d'une étape, n'est pas facilement exploitable.

6.11

1.

- Gestion de l'arrêt d'urgence.

Dans la solution proposée, il n'y a qu'une seule étape initiale : l'étape 100.

- Si *au* a la valeur VRAI, aucune autre étape n'est activée et aucune action n'est exécutée.
- Si *au* a la valeur FAUX, les anciennes étapes initiales des grafjets donnés sont activées. L'étape d'attente 102 laisse les différents grafjets évoluer.

En cours de fonctionnement, un appui sur le bouton d'arrêt d'urgence a bien les effets attendus :

- Quand *au* prend la valeur VRAI :
 - * toutes les étapes des grafjets G2 à G14 sont désactivées ;
 - * toutes les sorties associées à des actions continues sont arrêtées ;
 - * les sorties en mode mémorisé E, A et P associées aux ventouse et pince conservent leur état ;
 - * la sortie I, indexage du convoyeur, n'est pas affectée par l'arrêt d'urgence mais le convoyeur est stoppé car l'action M est interrompue.
- Quand *au* prend la valeur FAUX :
 - * les étapes 0 de G2, 14 de G3, 30 de G11, 45 de G12, 50 de G13 et 60 de G14 sont activées ;
 - * la réceptivité associée à la transition 18 interdit la reprise de la production tant que la partie opérative n'est pas en position de référence.

- En attente de production, la séquence des étapes 70, 71 et 79 permet de détecter l'appui long ou court sur la touche *raz*.
- Les séquences d'initialisation par appui court ou long sur *raz* correspondent pour la plupart à des exécutions partielles des

différents sous programmes utilisés pendant un cycle de production. L'utilisation du forçage et l'adaptation des réceptivités des transitions (48), (64), (34) et (54) évite la réécriture de ces séquences d'opérations.

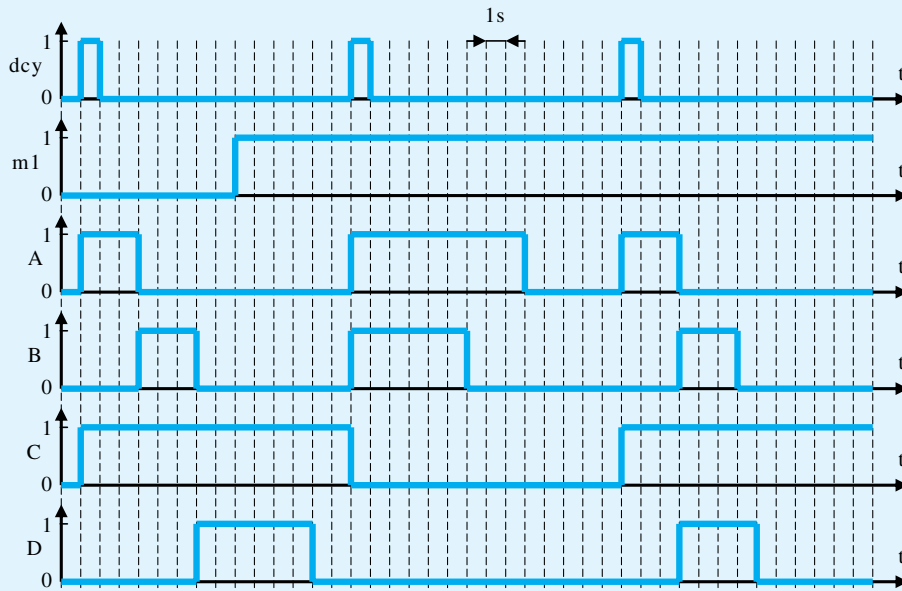


Figure 6.34 Modes de sortie – Chronogramme réponse.

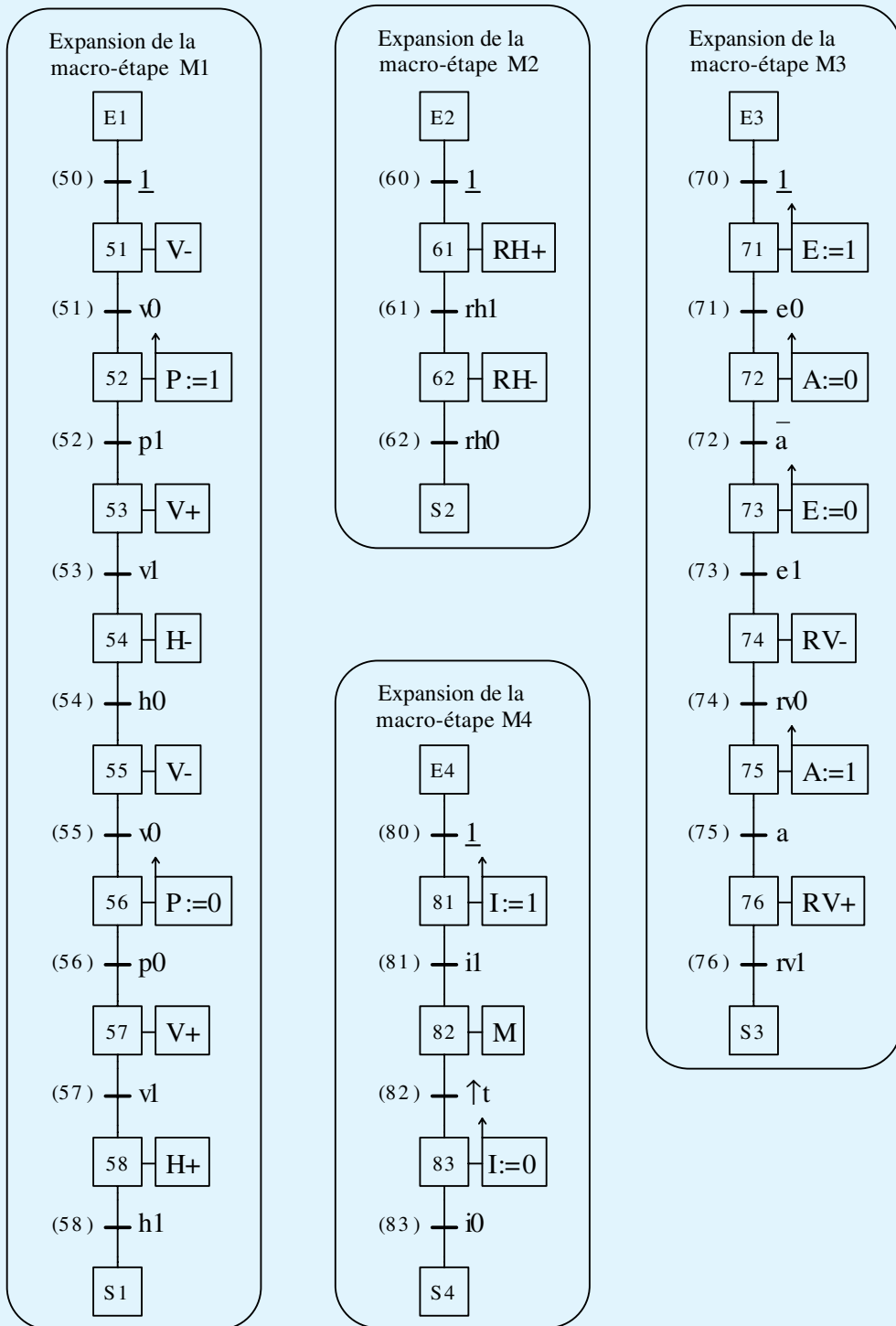


Figure 6.38 Macro-étapes M1, M2, M3 et M4.

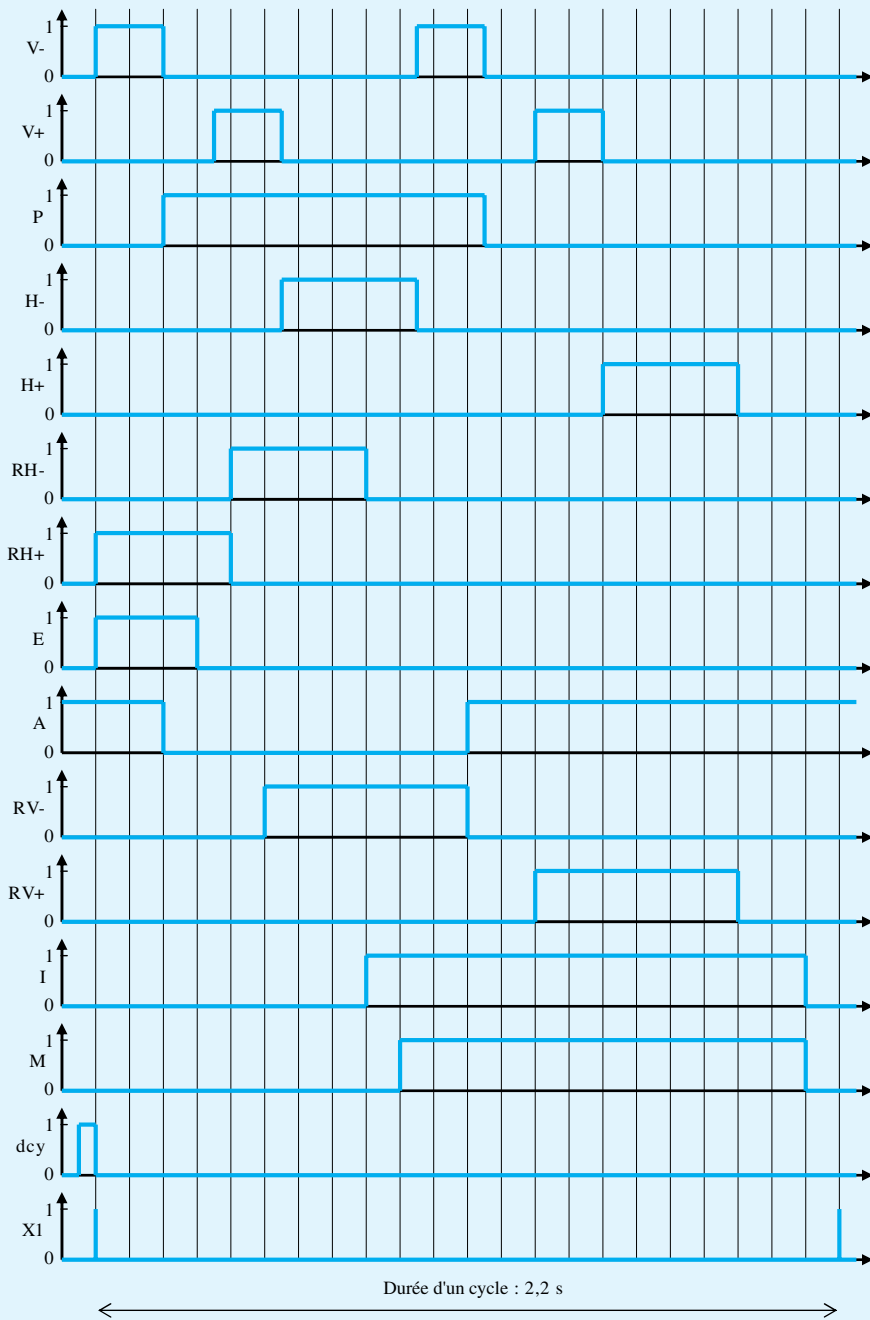


Figure 6.40 Chronogramme.

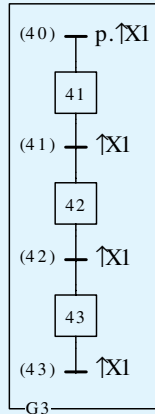
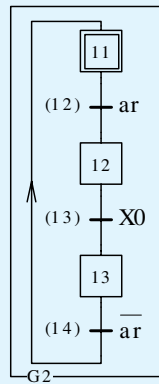
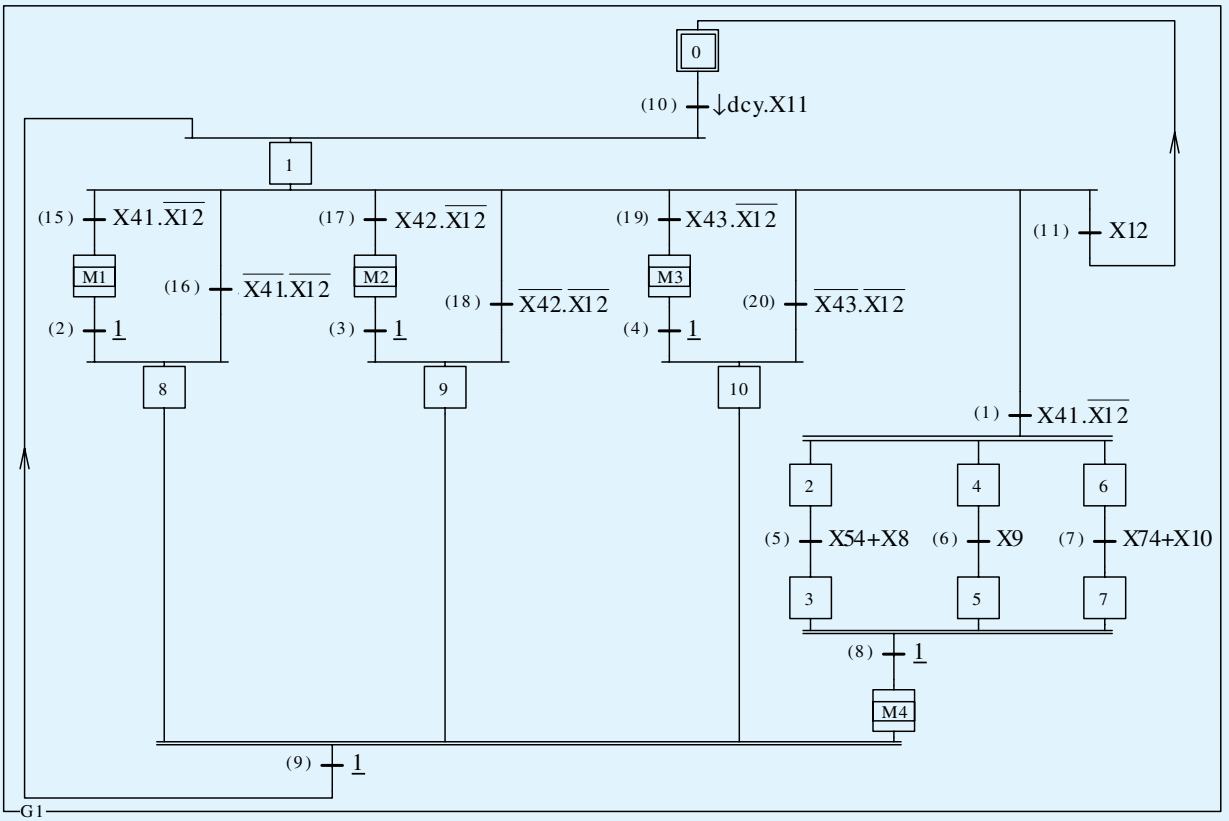


Figure 6.41 Grafset avec gestion de l'approvisionnement discontinu.

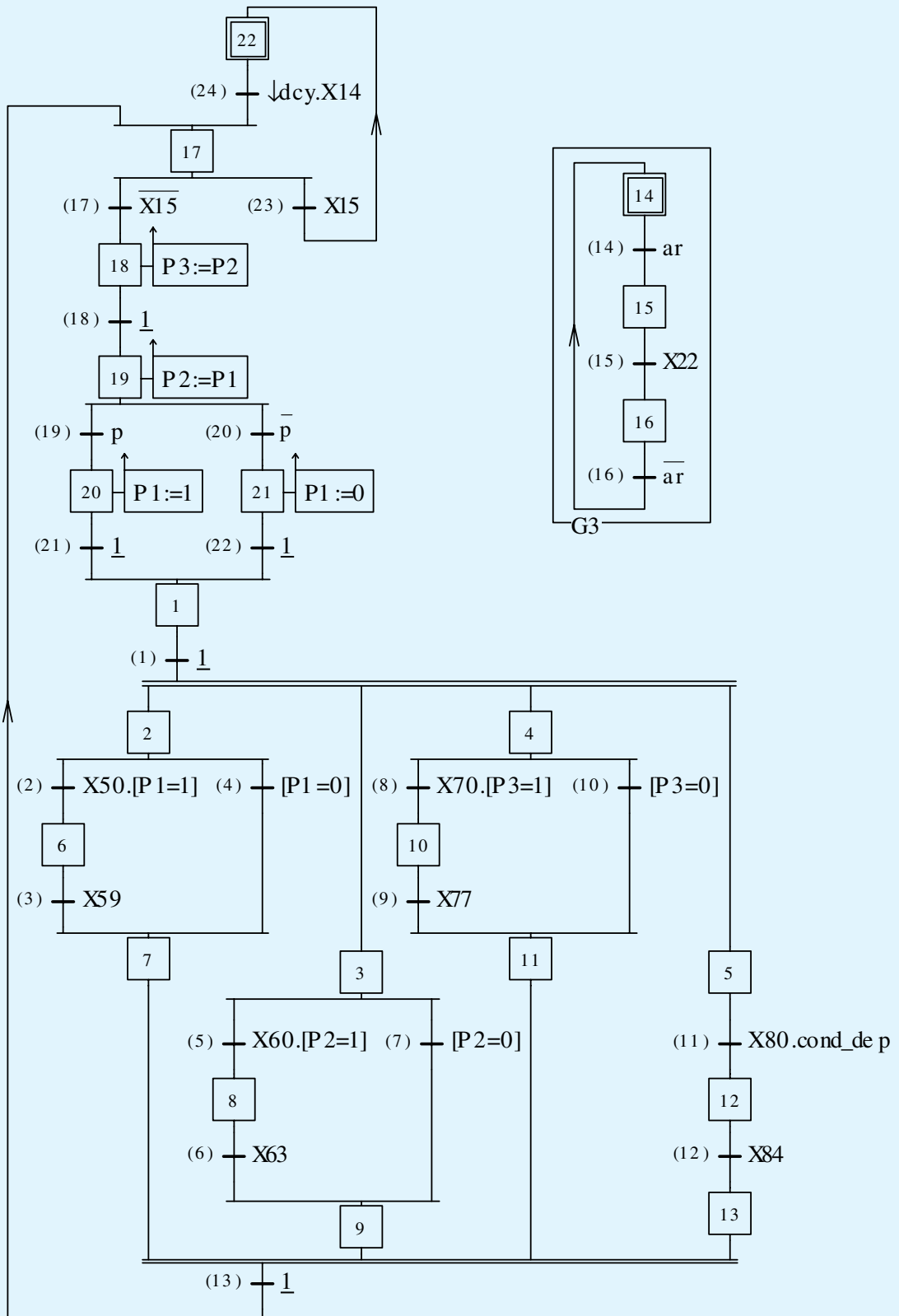


Figure 6.42 Chaîne d'assemblage et sous-programmes – solution.

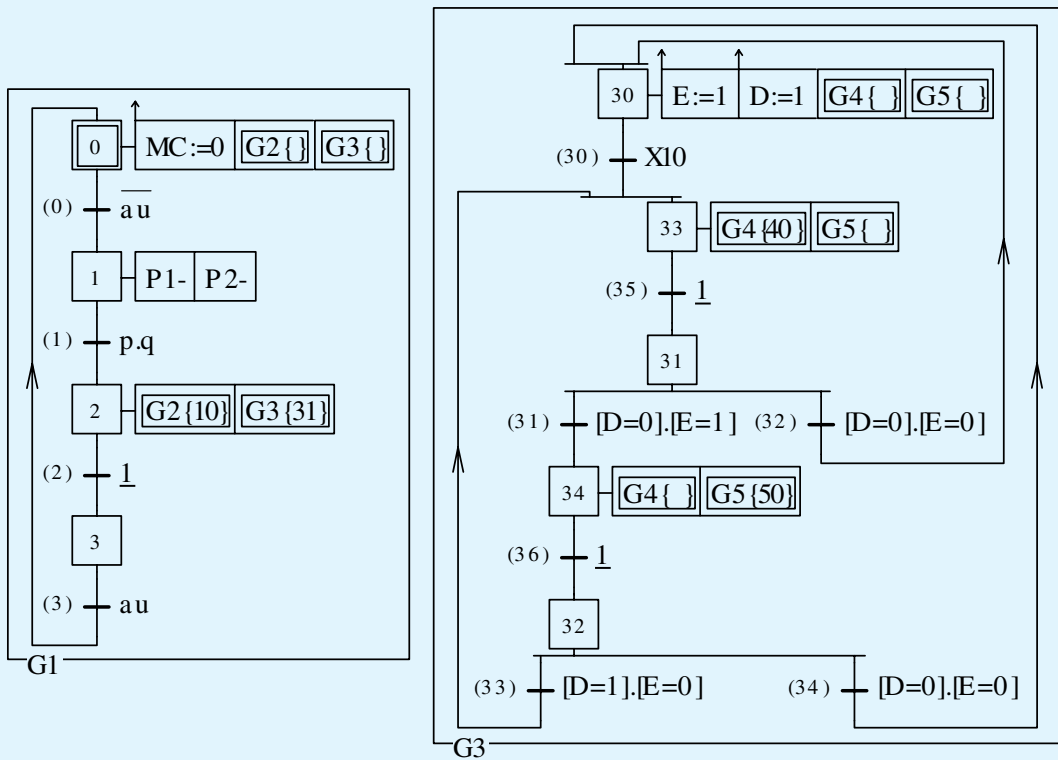


Figure 6.44 Trieur – Grafjets partiels G1 et G3.

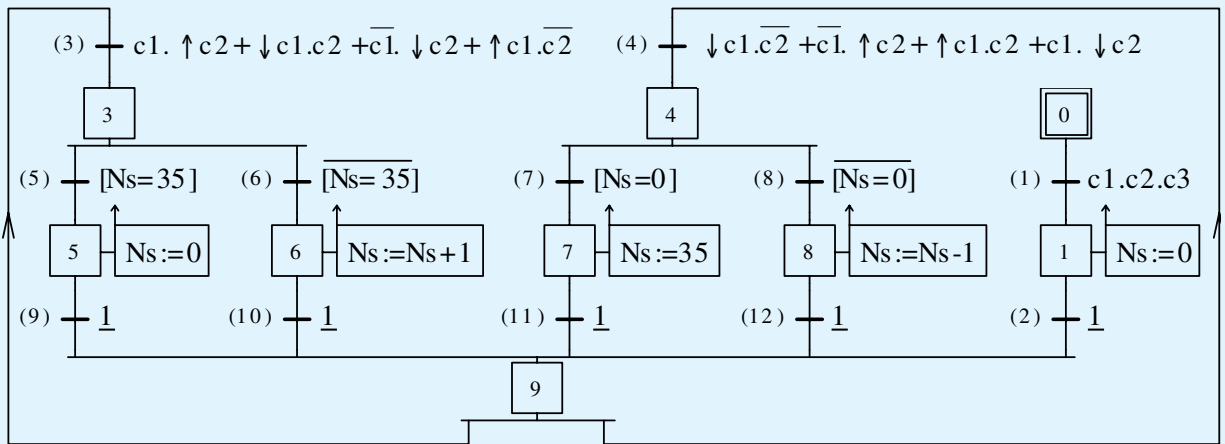


Figure 6.46 Grafjet.

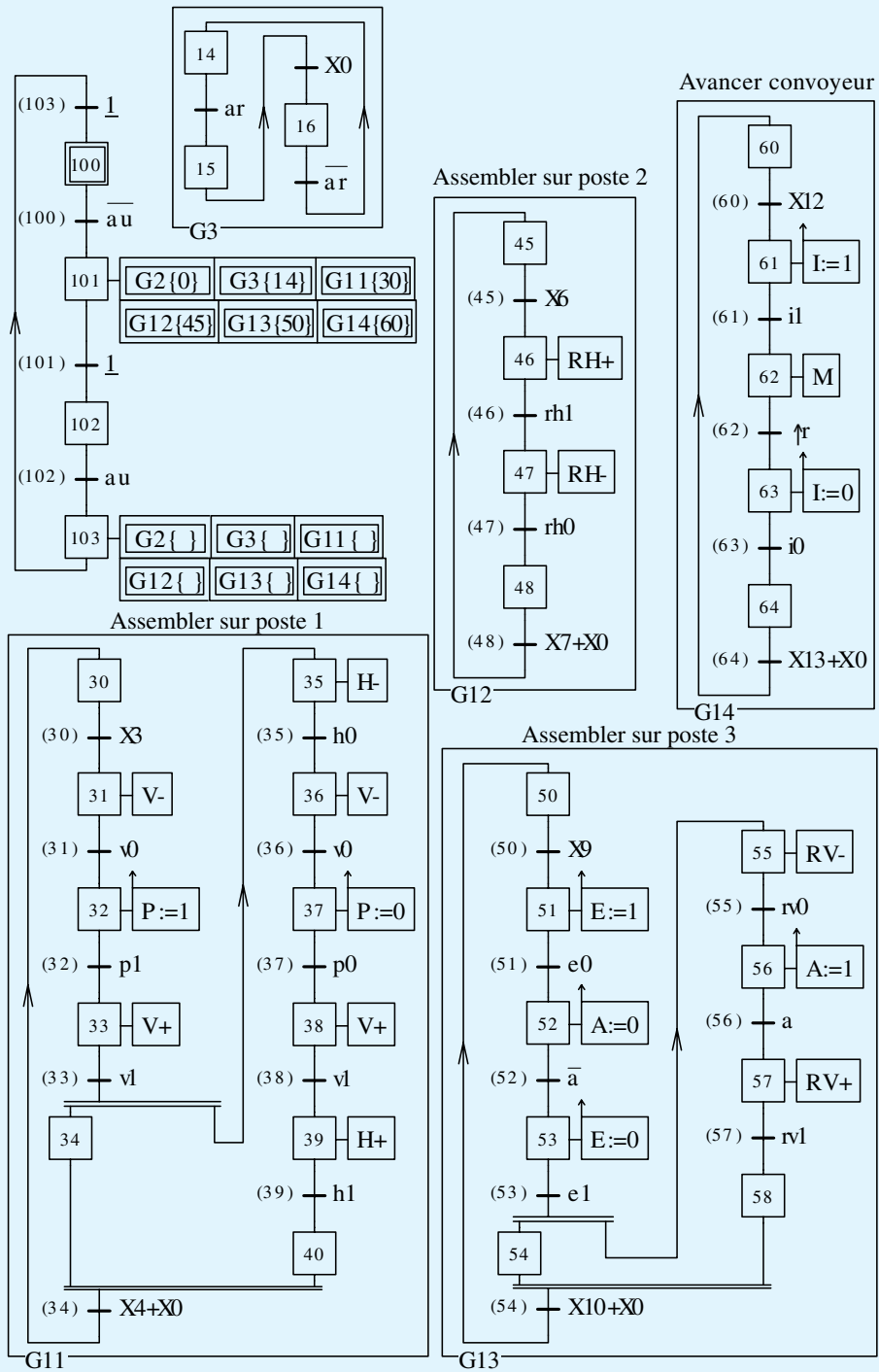


Figure 6.47 Arrêt d'urgence et position de référence – Solution 1/2.

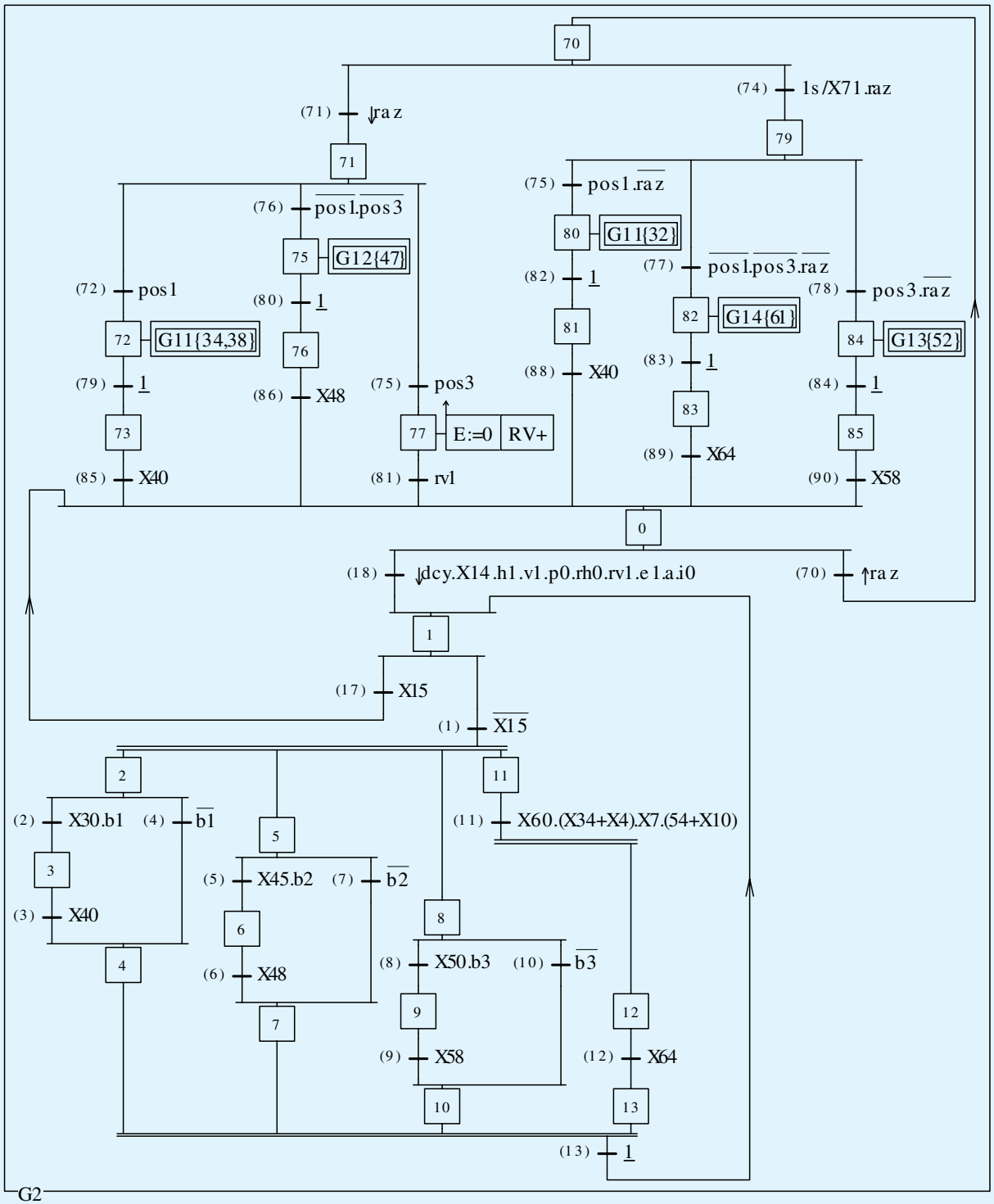


Figure 6.48 Arrêt d'urgence et position de référence – Solution 2/2.

Index

A

abaque de Black-Nichols, 173
actif, 224
action
 conditionnelle, 220
 continue, 219, 220
 dérivée, 183
 intégrale, 183, 186
 limitée dans le temps, 220
 proportionnelle, 183
 retardée, 220
action mémorisée
 à l'activation de l'étape, 221
 à la désactivation de l'étape, 221
 sur évènement, 221
 sur franchissement de transition, 222
activation de séquences parallèles, 214
adaptateur, 125
affectation sur évènement, 221
algorithme d'évolution d'un grafcet, 216
approche globale, 21
assignation sur état, 219
axes principaux d'inertie, 51

B

boucle
 fermée, 126, 127
 ouverte, 126, 127

C

centre d'inertie, 45
chronologie, 84
classe, 130
coefficient de surtension, 176
conflit d'affectation, 222
consigne, 124
contour de Hall, 175
convergence de séquences, 214
correcteur, 124, 125, 183
 dérivé, 191
 intégral, 186
 PD réel, 191
 PI réel, 189
 PID, 193
 proportionnel, 184
 proportionnel dérivé, 191
 proportionnel intégral, 187
correction
 à action dérivée, 191
 PID, 193
 proportionnelle, 184

critère

algébrique, 134
de Routh, 135, 136
du revers, 133, 134
graphique, 132
cycles, 9

D

degré
 de liberté, 7
 de mobilité, 12, 17
 de statisme, 13, 16
demi-droite, 4
dépassement de la valeur finale, 180
diagramme grafcet, 215

E

EBSB, 132
écart, 124
 statique, 177, 178, 179, 180
 statique en absence de perturbation, 177
élaborer un schéma cinématique, 7
élément du langage Grafcet, 214
encapsulation, 234
énergie
 cinétique, 63
 cinétique galiléenne, 93, 95
entrée, 218
épure géométrique, 7
équilibrage, 99
étape, 228, 234
 encapsulante, 234
 encapsulante initiale, 234
 encapsulée, 234
 initiale, 214
 puits, 225
 source, 224
évolution fugace, 217

F

facteur de résonance, 176
fonction de transfert réduite, 129
forçage, 230
front
 descendant, 218
 montant, 218
FTBF, 127
FTBO, 127
fugace, 217

- G**
- galiléen, 84
 - Grafcet, 214, 215
 - connexe, 224
 - forcé, 230
 - global, 224
 - multigraphe, 224
 - partiel, 224
 - synchronisé, 230
- H**
- habillage d'un schéma, 9
 - Huygens, 47
 - hyperstatique, 16
 - hyperstatisme, 16
- I**
- indice de mobilité, 12, 15
 - inertie, 46
 - instabilité, 137
 - invariant, 2
 - isostatique, 16
 - isostatisme, 16
- L**
- liaison
 - à axe, 8
 - à centre, 8
 - à direction, 8
 - parfaite, 93
 - lien d'activation, 234
- M**
- macro-étape
 - d'attente, 228
 - expansion d'une, 225
 - variable de, 226
 - marge
 - de gain, 170, 171, 172
 - de module, 173, 175
 - de phase, 170, 171, 172
 - de stabilité, 170
 - masse
 - conservative, 44
 - équivalente, 67
 - matrice d'inertie, 50
 - mobilité, 7
 - mode
 - continu, 219
 - d'un système, 139
 - exponentiel, 140
 - mémorisé, 221
 - oscillant, 140
 - moment(s)
 - cinétique, 53
 - d'inertie, 47
 - d'inertie équivalent, 67
 - dynamique, 55
 - d'inertie principaux, 51
- N**
- nombre
 - d'équations, 15
 - d'inconnues, 11, 15
 - de cycles, 10
- O**
- opérateur d'inertie, 49
 - ordre, 130
- P**
- paramétrer, 2
 - un mécanisme, 2
 - PD théorique, 191
 - performance, 169
 - perturbation, 122, 179
 - PI, 187
 - réel, 189
 - théorique, 187
 - PID, 183
 - point critique, 133, 134
 - pôle dominant, 139, 141
 - possibilité de mouvement, 6
 - précision, 176, 185, 186, 188, 190
 - principe fondamental de la dynamique, 84
 - puissance, 91
 - d'une action mécanique, 90
 - des interefforts, 92
 - galiléenne, 91
- Q**
- quantité d'accélération, 55
- R**
- rapidité, 180, 185, 187, 188, 190
 - réceptivité, 214
 - réduction de l'ordre d'un système, 141
 - référentiel, 84
 - règles du Grafcet, 215
 - repère galiléen, 84
 - résonance, 174
 - Routh, 136
 - tableau de, 135
- S**
- schéma cinématique, 7
 - sélection de séquences, 214
 - séquence, 214
 - situation, 216
 - initiale, 215
 - stable, 217
 - sortie, 218, 219, 221
 - en mode continu, 219
 - en mode mémorisé, 221

sous-programme, 227, 228
stabilité, 130, 131, 184, 186, 188, 190
 condition nécessaire de, 135
stable, 131, 132
structuration par encapsulation, 233
synchronisation de séquences, 214
système, 122, 124, 125
 asservi, 124
 commandé, 122, 125
système à masse conservative, 45

T

temporisation, 218
temps de réponse
 à 5%, 181
 réduit, 182

torseur
 cinétique, 53
 dynamique, 55
transition
 puits, 224
 source, 224

V

variable, 2
 de grafcet partiel, 224
 temporisée, 218

