

# PCSI

*Thierry Finot*  
*Sébastien Fayolle*  
*David Legrand*  
*Vincent Parmentier*  
*Nicolas Tancrez*

PRÉPAS SCIENCES

COLLECTION DIRIGÉE PAR **BERTRAND HAUCHECORNE**

# PHYSIQUE

5<sup>e</sup> édition

- Objectifs
- Cours résumé
- Méthodes
- Vrai/faux, erreurs classiques
- Exercices de base et d'approfondissement
- Résolutions de problèmes, activités numériques
- Sujets de concours (écrits, oraux)
- Corrigés détaillés et commentés

**NOUVEAUX  
PROGRAMMES** !



**PRÉPAS SCIENCES**

collection dirigée par Bertrand Hauchecorne

# Physique PCSI

5<sup>e</sup> édition

**NOUVEAUX  
PROGRAMMES**

ouvrage coordonné par

**Thierry FINOT**

*professeur à l'école SPEIT (Shanghai) et au lycée Lavoisier (Paris)*

**Sébastien FAYOLLE**

*professeur au lycée Gustave Eiffel (Bordeaux)*

**Vincent PARMENTIER**

*professeur au lycée Pothier (Orléans)*

**David LEGRAND**

*professeur au lycée Sainte Marie (Caen)*

**Nicolas TANCREZ**

*professeur au lycée Saint Louis (Paris)*

avec la contribution de

**Vincent FRATICELLI**

*professeur au lycée Pothier (Orléans)*

**Laura DAUDIER**

*professeure au lycée Hector Berlioz (Vincennes)*





# COLLECTION PRÉPAS SCIENCES

Retrouvez tous les titres de la collection et des extraits sur [www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)



*Un étudiant n'est pas un sac que l'on remplit mais une bougie que l'on enflamme.*

Vladimir ARNOLD, mathématicien russe.

ISBN 9782340-048577

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2021  
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

[www.editions-ellipses.fr](http://www.editions-ellipses.fr)

# Avant-propos

**Réussir en classes préparatoires** nécessite d'assimiler rapidement un grand nombre de connaissances, mais surtout de savoir les utiliser, à bon escient, et les rendre opérationnelles au moment opportun. Bien sûr, l'apprentissage du cours de votre professeur jour après jour est indispensable. Cependant, on constate que pour beaucoup, c'est loin d'être suffisant. Combien d'entre vous ont bien appris leur cours et pourtant se trouvent démunis lors d'un devoir, et plus grave, le jour du concours.

Cette collection a été conçue pour répondre à cette difficulté. Suivant scrupuleusement le programme, chaque ouvrage est scindé en chapitres, dont chacun correspond, en gros, à une semaine de cours. Leur structure est identique pour chaque niveau, en physique comme en chimie, mathématiques ou sciences industrielles.

**Le résumé de cours** est là pour vous remettre en mémoire tous les résultats à connaître. Sa relecture est indispensable avant un devoir, le passage d'une colle relative au thème traité et lors des révisions précédant les concours. Ils sont énoncés sans démonstration.

**La partie « méthodes »** vous initie aux techniques utiles pour résoudre les exercices classiques. Complément indispensable du cours, elle l'éclaire et l'illustre.

**La partie « vrai/faux »** permet de tester votre recul par rapport au programme et de vous révéler les mauvais réflexes à rectifier. Son corrigé est l'occasion de mettre en garde contre des **erreurs classiques**.

**Les exercices** sont incontournables pour assimiler le programme et pour répondre aux exigences du concours. Des **indications**, que les meilleurs pourront ignorer, permettront de répondre aux besoins de chacun, selon son niveau. Les **corrigés** sont rédigés avec soin et de manière exhaustive.

Ainsi l'ouvrage de physique comme ceux de chimie, de maths et de **SIU** vous accompagneront tout au long de l'année et vous guideront dans votre cheminement vers **la réussite aux concours**.

Bertrand Hauchecorne



# Sommaire

1.	Bases de l'optique géométrique.....	1
2.	Lentilles minces .....	33
3.	Lois de l'électrocinétique – Régime continu .....	73
4.	Circuit linéaire du premier ordre .....	105
5.	Oscillateur électrique en régime libre .....	139
6.	Régime sinusoïdal forcé .....	169
7.	Filtrage linéaire .....	203
8.	Amplificateur linéaire intégré .....	245
9.	Propagation d'un signal .....	275
10.	Cinématique du point.....	307
11.	Principes de la dynamique .....	337
12.	Énergie mécanique .....	383
13.	Mouvement dans un champ électrique ou magnétique .....	421
14.	Moment cinétique – Force centrale .....	451
15.	Mouvement d'un solide.....	493
16.	Description d'un système thermodynamique .....	523
17.	Premier principe de la thermodynamique.....	557
18.	Deuxième principe de la thermodynamique .....	583
19.	Machines thermiques .....	605
20.	Statique des fluides .....	631
21.	Champ magnétique .....	657
22.	Induction électromagnétique .....	689
23.	Introduction à la physique quantique .....	725
	Index .....	757



# Bases de l'optique géométrique

UN SCIENTIFIQUE



**Willebrord SNELL** (1580-1626) est un mathématicien et physicien hollandais. Enfant prodige, il acquiert bientôt une immense culture dans le domaine scientifique. Il rencontre les plus grands savants de son époque et se lance dans des recherches dans de nombreux domaines : astronomie, mesure de la Terre, approximation du nombre  $\pi$ . En optique, il s'intéresse aux miroirs concaves et convexes. Il énonce la loi de réfraction attribuée en France à DESCARTES.

## ■ Un peu d'histoire

Qui a découvert la loi de réfraction de la lumière ? En 984, le mathématicien arabe Ibn SAHL explique, schémas à l'appui, le lien entre l'angle d'incidence et celui de réfraction d'un rayon lumineux. Ses travaux restent totalement inconnus en Occident. Thomas HARRIOT découvre cette loi en 1602 mais il ne fait aucune publication. Elle est à nouveau énoncée en 1621 par le mathématicien hollandais Willebrord SNELL qui, lui non plus, n'en fait pas état publiquement. En 1637 René DESCARTES publie le *Discours de la méthode* dans lequel il énonce les principes de la rationalité scientifique. Il le fait suivre de trois appendices ; le premier est un manuel d'optique dans lequel il énonce la loi de réfraction, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs. Quelques années plus tard, Pierre DE FERMAT justifie cette loi par le principe du temps minimum de parcours.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions concernant la lumière, sa propagation et ses sources
- ▷ Le modèle de l'optique géométrique et ses limites
- ▷ Les lois de Snell–Descartes pour la réflexion et la réfraction
- ▷ Les définitions concernant les systèmes optiques et la formation d'images
- ▷ Les conditions de l'approximation de Gauss et ses conséquences
- ▷ Le principe de fonctionnement d'une fibre optique

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Relier la longueur d'onde dans le vide, celle dans un autre milieu et la couleur
- ▷ Utiliser les lois de Snell–Descartes pour déterminer des rayons réfléchis ou réfractés
- ▷ Étudier les cas de réfraction limite et réflexion totale
- ▷ Calculer des angles et des distances avec des formules géométriques
- ▷ Construire l'image d'un objet par un miroir plan et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- ▷ Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre optique

## ■ Propagation de la lumière

### □ Nature de la lumière

– Selon le **modèle ondulatoire** de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique, c'est-à-dire d'une propagation de variations périodiques des champs électrique et magnétique, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Une lumière **monochromatique** est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence  $f$ . La lumière visible correspond à l'intervalle  $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  environ. Les autres fréquences correspondent à d'autres types d'ondes électromagnétiques (voir chapitre 9).

– Un autre modèle, dit **corpusculaire**, décrit la lumière (et les autres ondes électromagnétiques) comme un flux de particules appelés **photons** (voir chapitre 23).

### □ Indice et longueur d'onde

– La **célérité** (vitesse de propagation) de la lumière dans le vide est  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

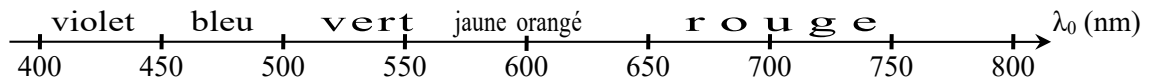
Sa célérité dans un milieu transparent quelconque est  $v = \frac{c}{n}$  où  $n$  est l'**indice de réfraction**

( $n \geq 1$ ), caractéristique du milieu et dépendant de la fréquence (donc de la longueur d'onde).

$n = 1,0003$  pour l'air (conditions usuelles),  $n = 1,33$  pour l'eau,  $n = 1,5$  à  $1,8$  pour les verres.

– Une lumière monochromatique a une fréquence  $f$  déterminée par l'émetteur, et une longueur d'onde  $\lambda$  telle que  $\lambda = \frac{v}{f}$ . La longueur d'onde dans le vide est  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ , donc  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ .

– Échelle des couleurs :



### □ Approximation de l'optique géométrique

L'optique géométrique modélise la lumière comme un ensemble de **rayons lumineux** : chaque rayon est une courbe décrite par la lumière pour aller d'un point à un autre. Les rayons lumineux sont *indépendants* les uns des autres ; ceci suppose qu'il n'y a pas d'interférences (toujours vrai en pratique). Dans un milieu transparent homogène et isotrope (seul cas envisagé ici), ils sont *rectilignes* ; ceci suppose qu'on évite la diffraction, tous les systèmes étant suffisamment larges.

## ■ Sources de lumière

### □ Types de sources

– Les **sources de lumière blanche** (lampes à incandescence, à LED blanche...) ont un spectre *continu* (constitué de toutes les fréquences dans l'intervalle du visible, et même au-delà).



- Les **lampes spectrales** (notamment à vapeur métallique : mercure, sodium...) ont un spectre caractéristique de l'élément chimique, qui peut être considéré comme *discret* (constitué seulement de quelques fréquences distinctes).
- Les **lasers** émettent une lumière qui peut être considérée comme monochromatique.

### □ Modèle de la source ponctuelle monochromatique

Une source de lumière est en général étendue (elle présente une certaine surface). Mais elle peut être *modélisée* comme un ensemble de **sources ponctuelles**.

De plus on se limitera, si nécessaire, à des sources ponctuelles monochromatiques.

## ■ Réflexion et réfraction

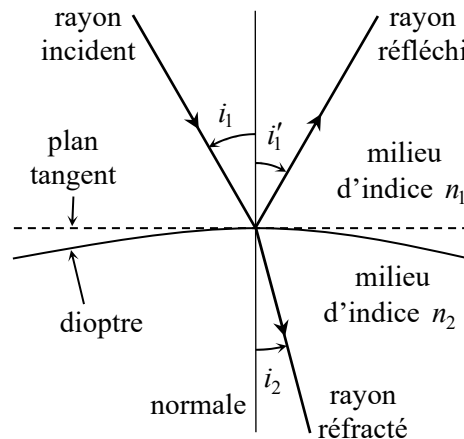
### □ Description

Lorsqu'un rayon lumineux, dit **incident**, arrive sur un **dioptre** (interface entre deux milieux d'indices différents), il donne naissance en général à un rayon **réfléchi** (dans le milieu initial) et à un rayon **transmis** ou **réfracté** (dans le second milieu).

À partir du point d'intersection entre le rayon incident et le dioptre, on définit la normale, droite orthogonale au dioptre. Cette normale et le rayon incident définissent le **plan d'incidence**.

### □ Lois de Snell-Descartes

1. Les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence.
2. L'angle  $i'_1$  de réflexion est :  $i'_1 = -i_1$  (ou bien  $i'_1 = i_1$  avec des angles non orientés).
3. L'angle  $i_2$  de réfraction est lié à l'angle  $i_1$  d'incidence par :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .



Les expressions avec des angles orientés montrent que le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont de l'autre côté de la normale, par rapport au rayon incident.

Ces lois ont pour conséquence la **loi de retour inverse de la lumière** : le trajet suivi par la lumière pour aller d'un point  $A$  à un point  $B$  est le même que celui suivi pour aller de  $B$  à  $A$ .

### Remarques

- Lorsque le rayon réfracté est présent, on néglige souvent le rayon réfléchi.
- Si la surface est un miroir, il n'y a pas de rayon réfracté.

### □ Réfraction limite et réflexion totale

- Si  $n_2 > n_1$ , il y a toujours un rayon réfracté (en plus du rayon réfléchi).
- Si  $n_2 < n_1$ , le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle  $i_1$  est inférieur à une valeur limite,

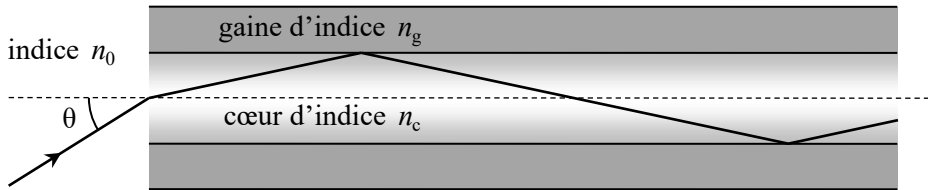
notée  $i_{\text{lim}}$  : celle-ci correspond au cas où  $i_2 = \frac{\pi}{2}$ , soit  $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .

Lorsque  $i_1 > i_{\text{lim}}$ , il n'y a pas de réfraction, il y a donc **réflexion totale**.

⇒ **Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite**

### □ Application : fibre optique

Une application du phénomène de réflexion totale est la **fibre optique à saut d'indice** : un fil cylindrique transparent constitué d'un cœur d'indice  $n_c$  entouré d'une gaine d'indice  $n_g < n_c$ .



- Tout rayon pénétrant dans la fibre avec un angle  $\theta < \theta_a$  sera guidé par réflexion interne : l'angle maximal  $\theta_a$  caractérise le **cône d'acceptance** de la fibre. Son **ouverture numérique** est  $o_n = n_0 \sin \theta_a$  où  $n_0$  est l'indice du milieu extérieur. Le calcul donne  $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ .
- Lors du guidage d'un faisceau lumineux dans une fibre optique de longueur donnée, tous les rayons n'ont pas la même durée de trajet : on appelle **dispersion intermodale** la différence de temps  $\Delta\tau$  entre les rayons les plus lents et les rayons les plus rapides. Pour une bonne transmission de l'information,  $\Delta\tau$  ne doit pas être trop élevée.

⇒ **Méthode 1.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique**

## ■ Formation d'images par un système optique

### □ Système optique

Un **système optique** est un ensemble de dioptries et/ou de miroirs, qui modifie la trajectoire des rayons lumineux. Son rôle est de donner une image d'un objet.

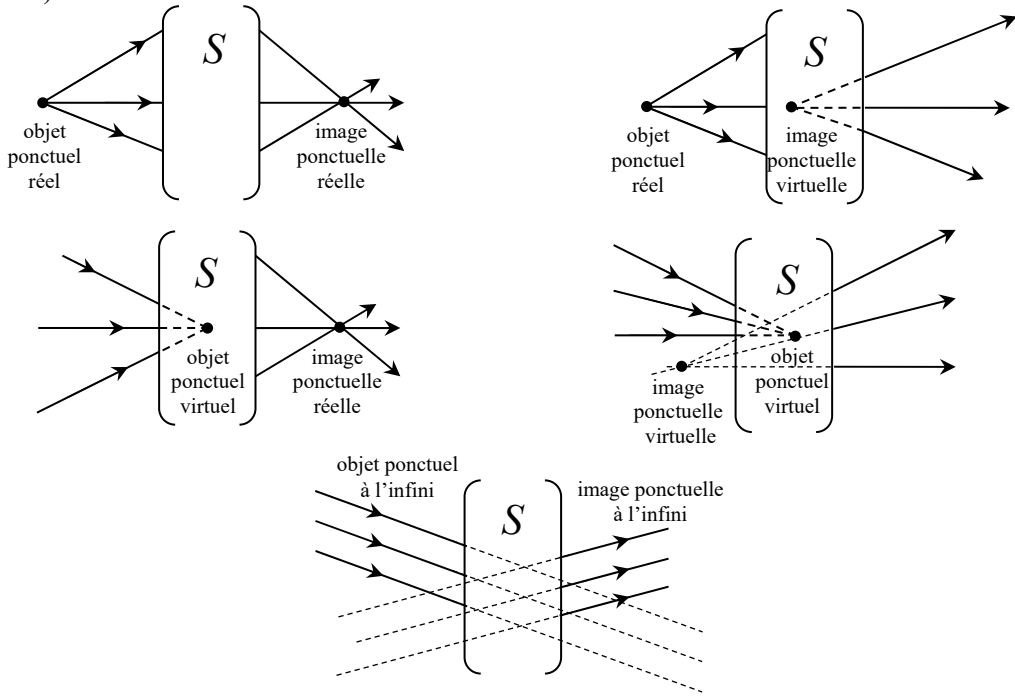
### □ Stigmatisme, objets et images

Une intersection d'un grand nombre de rayons incidents, ou de leurs prolongements, est appelée **point objet**. Il est **réel** si les rayons sont vraiment issus de ce point, et **virtuel** si seuls les prolongements des rayons convergent vers ce point. Des rayons incidents parallèles entre eux définissent un objet **à l'infini** (cas limite d'un objet réel ou virtuel).

Après la traversée d'un système optique, on peut envisager deux cas :

- soit les rayons émergents correspondant aux rayons issus de chaque point objet  $A$  convergent vers un point  $A'$  ou semblent provenir d'un point  $A'$ , on dit alors que le système est **stigmatique** et  $A'$  est appelé **point image** de  $A$  ;
- soit ces rayons émergent de façon désordonnée, et le système n'est pas stigmatique.

Pour un système stigmatique, l'image est **réelle** si les rayons convergent vraiment vers  $A'$ , et **virtuelle** s'ils semblent provenir de  $A'$  (leurs prolongements se coupant en  $A'$ ). Enfin l'image est **à l'infini** si les rayons émergents sont parallèles entre eux (cas limite d'une image réelle ou virtuelle).



Un objet réel se trouve donc du côté de la lumière incidente, avant la face d'entrée du système, contrairement à un objet virtuel.

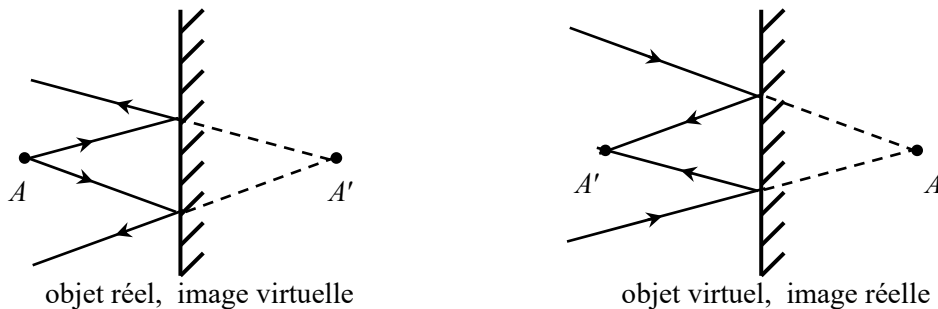
Une image réelle se trouve du côté de la lumière émergente, après la face de sortie du système, contrairement à une image virtuelle.

⇒ **Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles**

### □ Exemple du miroir plan

Le miroir plan est un exemple simple de système optique.

L'image d'un point objet  $A$  par un miroir plan est un point image  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport au miroir. Si  $A$  est réel,  $A'$  est virtuelle ; si  $A$  est virtuel,  $A'$  est réelle.



⇒ **Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan**

## □ Systèmes centrés

### Définition

Un système optique est **centré** s'il possède un axe de symétrie de révolution, appelé **axe optique**. Un rayon incident confondu avec cet axe ne sera donc pas dévié par le système. De plus, d'après la première loi de Snell–Descartes, un rayon incident contenu dans un plan méridien (contenant l'axe) sera ensuite réfracté et/ou réfléchi dans ce plan.

### Aplanétisme

Un système centré sera utilisable comme instrument s'il possède la propriété d'**aplanétisme** : l'image d'un objet plan orthogonal à l'axe optique est également plane et orthogonale à l'axe.

### Conditions de Gauss

Aucun système optique, excepté le miroir plan, n'est rigoureusement stigmatique ; cependant, les grains d'un détecteur (cellules de la rétine, d'une plaque numérique...) ne sont pas ponctuels mais ont eux-mêmes une certaine largeur, donc un stigmatisme approché est suffisant.

Pour les systèmes optiques centrés, on peut obtenir un stigmatisme approché en ne laissant pénétrer dans le système que les rayons **paraxiaux**, c'est-à-dire rencontrant le système près de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Ce sont les **conditions de Gauss**, qui se réalisent pratiquement à l'aide d'un diaphragme et en observant des objets petits et/ou éloignés.

### Foyers et plans focaux

Les systèmes optiques centrés, dans les conditions de Gauss, possèdent deux points particuliers :

- le **foyer principal objet**  $F$  dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe ;
- le **foyer principal image**  $F'$ , image d'un point objet situé sur l'axe et à l'infini.

Si ces deux points sont à l'infini, le système est dit **afocal** (c'est le cas du miroir plan).

Le plan passant par  $F$  (resp.  $F'$ ) et orthogonal à l'axe est le **plan focal objet** (resp. **image**).

- D'après la propriété d'aplanétisme, en dehors de  $F'$ , tout point du plan focal image, appelé **foyer image secondaire**, est l'image d'un point objet situé à l'infini mais hors de l'axe.
- De même, en dehors de  $F$ , tout point du plan focal objet, appelé **foyer objet secondaire**, a son image à l'infini mais hors de l'axe.

## ■ Comment utiliser les lois de Snell–Descartes ?

### □ Méthode 1.1. Déterminer un rayon réfracté et étudier la réfraction limite

- La loi de la réfraction donne  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ , d'où  $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right)$ .
- Le rayon réfracté n'existe que si on trouve  $\sin i_2 < 1$ , donc si  $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 < 1$  ou encore  $\sin i_1 < \frac{n_2}{n_1}$ . Cette condition est toujours vérifiée si  $n_2 > n_1$  ; mais si  $n_2 < n_1$  alors l'angle incident  $i_1$  ne doit pas dépasser la valeur limite  $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  pour que le rayon réfracté existe.

⇒ Exercices 1.4 à 1.6, 1.8 à 1.13, 1.15

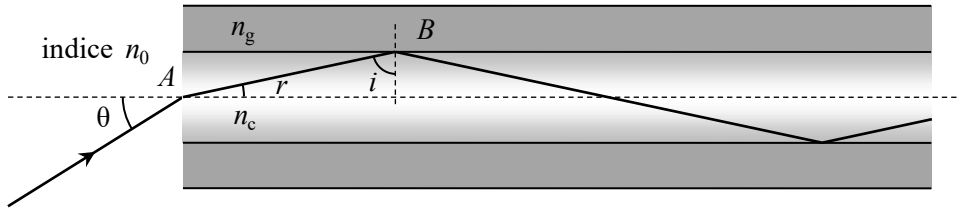
Exemple : un rayon lumineux passe de l'eau ( $n_1 = 1,3$ ) vers l'air ( $n_2 = 1,0$ ). Le rayon incident forme un angle  $i_1 = 30^\circ$  avec la normale au dioptre au point d'intersection avec le dioptre. Le rayon réfracté formera avec cette même normale un angle  $i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right) = 40,6^\circ$ .

L'angle limite vaut  $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 50,3^\circ$ . Les rayons ayant un angle incident supérieur à cette valeur ne donnent pas naissance à un rayon réfracté : dans ce cas, il y a seulement un rayon réfléchi et le dioptre se comporte comme un miroir.

### □ Méthode 1.2. Établir l'expression de l'ouverture numérique d'une fibre optique

- Après avoir défini les trois angles qui interviennent dans les calculs, on écrit la condition de réflexion totale sur le dioptre entre le cœur et la gaine, et la loi de la réfraction au point d'entrée dans la fibre (dioptre entre l'extérieur et le cœur).
- On relie géométriquement deux de ces angles, et la combinaison de toutes ces relations fait apparaître l'inégalité cherchée sur l'angle d'entrée.

⇒ Exercice 1.15



Au point  $B$ , comme  $n_c > n_g$ , il existe pour l'angle  $i$  d'incidence une valeur limite  $i_{\text{lim}}$  telle que  $\sin i_{\text{lim}} = \frac{n_g}{n_c}$ . La condition de réflexion totale s'écrit :  $\sin i > \frac{n_g}{n_c}$  (1).

Au point  $A$ , la loi de Snell–Descartes s'écrit :  $n_0 \sin \theta = n_c \sin r$  (2). Or  $r = \frac{\pi}{2} - i$  (angles complémentaires dans le triangle rectangle), donc  $\sin r = \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \cos i$ .

On doit donc déterminer, à partir de la relation (1), une inégalité pour  $\cos i$  : sachant que  $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$ , la relation (1) devient :  $\sqrt{1 - \cos^2 i} > \frac{n_g}{n_c}$  d'où  $\cos^2 i < 1 - \frac{n_g^2}{n_c^2} = \frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}$ .

Finalement : (2)  $\Leftrightarrow n_0 \sin \theta = n_c \cos i < n_c \sqrt{\frac{n_c^2 - n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = n_0 \sin \theta_a$ .

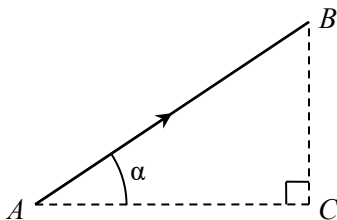
L'ouverture numérique est donc :  $o_n = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ .

## ■ Comment obtenir les relations géométriques cherchées ?

### □ Méthode 1.3. Calculer des distances à partir des angles

Les lois de Snell–Descartes ne donnent que des relations entre des angles. Pour déterminer des distances ou des mesures algébriques, on combine ces lois avec des relations de trigonométrie, notamment dans des triangles rectangles.

⇒ Exercices 1.11, 1.12, 1.13, 1.15

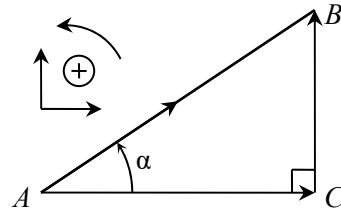


Dans ce triangle rectangle on peut écrire :

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}, \quad \sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \quad \tan \alpha = \frac{BC}{AC}.$$

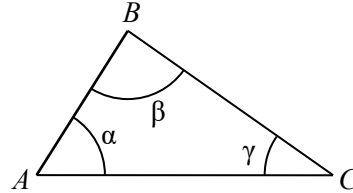
La formule de la tangente peut aussi s'écrire avec un angle orienté et des mesures algébriques :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}.$$



Enfin on peut écrire la formule des sinus pour un triangle quelconque :

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{CA}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \gamma}.$$

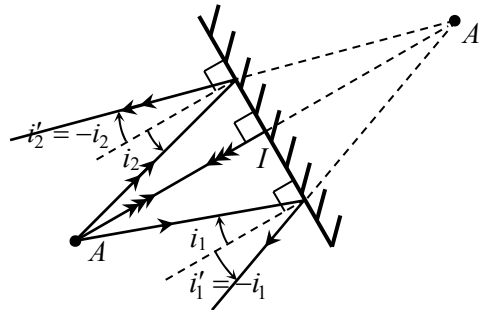


## ■ Comment déterminer l'image d'un objet ponctuel par un système optique ?

### □ Méthode 1.4. Déterminer l'image d'un objet par un miroir plan

Tracer au moins trois rayons incidents se coupant en un même point  $A$ , réel ou virtuel. Construire les rayons réfléchis selon les lois de Snell–Descartes. On constate que ces rayons, ou leurs prolongements, se coupent en un même point  $A'$ , qui est donc l'image de  $A$ . Et les différents triangles symétriques montrent que  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport au plan du miroir.

⇒ Exercice 1.14



Pour un point objet  $A$  réel (faisceau incident divergent), comme ci-dessus, l'image  $A'$  est l'intersection des *prolongements* des rayons réfléchis (faisceau réfléchi divergent également), donc  $A'$  est un point image *virtuel*. Effectivement, quand on se regarde dans une glace, notre image est virtuelle : si on mettait un écran là où semble se trouver notre image, c'est-à-dire derrière le mur où est fixé le miroir, on ne verrait rien sur l'écran !

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. La lumière se propage plus vite dans l'eau ( $n_{\text{eau}} = 1,3$ ) que dans l'air ( $n_{\text{air}} = 1,0$ ).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. L'indice d'un milieu homogène transparent et isotrope dépend de la fréquence de la lumière qui le traverse.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La lumière solaire peut être considérée comme monochromatique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La lumière d'un laser peut être considérée comme monochromatique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Lors du passage d'un milieu d'indice faible à un milieu d'indice plus élevé, le rayon se rapproche de la normale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. On peut observer un phénomène de réflexion totale lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu peu réfringent à un milieu plus réfringent.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Lors du phénomène de réflexion, la direction du rayon réfléchi dépend de la longueur d'onde de la lumière.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Lors du phénomène de réfraction, la direction du rayon réfracté dépend de la longueur d'onde de la lumière.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un système optique centré ne dévie pas les rayons incidents parallèles à son axe optique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le foyer principal image $F'$ d'un système optique centré est l'image par ce système du foyer principal objet $F$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Indice et longueur d'onde

### □ Exercice 1.1. Fréquence et longueur d'onde

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 0,40 et 0,80  $\mu\text{m}$ .

1. À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

2. Que deviennent ces longueurs d'onde :

a) dans l'eau, d'indice  $n = 1,3$  ?

b) dans un verre, d'indice  $n' = 1,5$  ?

Donnée :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### □ Exercice 1.2. Longueur d'onde et couleur

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence  $f = 4,73 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

On donne  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Pourquoi qualifie-t-on cette radiation de « quasi monochromatique » ?

2. Quelle est la longueur d'onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

3. On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d'indice 1,66.

Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?

Quelle est alors la longueur d'onde de la radiation du laser ? Quelle est sa couleur ?

### □ Exercice 1.3. Loi de Cauchy

La formule de Cauchy, donnant l'indice d'un verre pour une radiation monochromatique de

longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, est :  $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes.

1. Donner les dimensions de  $A$  et  $B$ , et leurs unités dans le Système international.

2. Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :

$n_r = 1,618$  pour une radiation rouge de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_{0,r} = 768 \text{ nm}$  ;

$n_v = 1,652$  pour une radiation violette de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_{0,v} = 434 \text{ nm}$ .

a) Calculer les valeurs de  $A$  et  $B$ .

b) En déduire la valeur de l'indice pour une radiation jaune telle que  $\lambda_{0,j} = 589 \text{ nm}$ .

## ■ Réflexion et réfraction

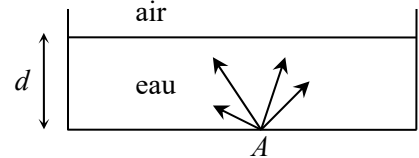
### □ Exercice 1.4. Réfraction et dispersion

Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence  $i = 40^\circ$  sur un dioptre air/verre plan. Si ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

Données : l'indice du verre est donné par la formule de Cauchy :  $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ , avec  $A = 1,504$  et  $B = 4,188 \cdot 10^{-15}$  unité SI ; l'indice de l'air est  $n_a = 1,000$ .

### □ Exercice 1.5. Condition d'émergence

1. Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice  $n_{\text{eau}} = 1,33$ ) à l'air (indice  $n_{\text{air}} = 1,00$ ) soit réfracté ?
2. On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur  $d = 2,50$  m. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.

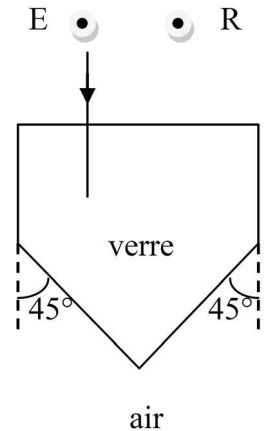


### □ Exercice 1.6. Capteur de niveau d'eau

On désire connaître le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-contre. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse.

L'indice du verre est  $n = 1,5$  ; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).
2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice  $n' = 1,33$ . Le récepteur (R) reçoit-il toujours de la lumière ?
3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaître le niveau de remplissage du château d'eau.



D'après G2E

### □ Exercice 1.7 Construction de Descartes\*

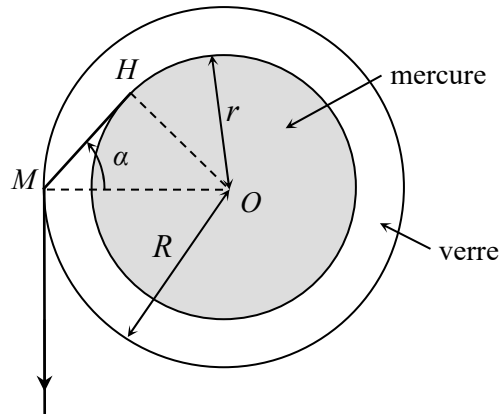
On considère un rayon lumineux passant d'un milieu d'indice  $n_1 = 1,5$  (verre) à un milieu d'indice  $n_2 = 1,0$  (air).

1. a) Faire un schéma du plan d'incidence, avec le milieu 1 en haut, et tracer le rayon incident. On note  $I$  le point d'intersection de ce rayon avec le dioptre.
  - b) Construire dans le milieu 2 deux demi-cercles de même centre  $I$ , l'un ( $C_1$ ) de rayon proportionnel à  $n_1$  et l'autre ( $C_2$ ) de rayon proportionnel à  $n_2$  (échelle au choix). Soit  $J$  le point d'intersection du prolongement du rayon incident avec  $C_1$  : à partir de  $J$ , on trace une droite  $\Delta$  parallèle à la normale. On note alors  $K$  le point d'intersection de  $\Delta$  avec  $C_2$  : la droite ( $IK$ ) obtenue donne la direction du rayon réfracté.
  - c) Construire le rayon réfracté selon cette méthode.
2. Démontrer, par des considérations géométriques, qu'on retrouve la loi de Snell–Descartes de la réfraction en utilisant cette construction.
  3. Montrer, à partir de cette construction, qu'il existe une valeur limite de  $i$  au-delà de laquelle il n'y a plus de rayon réfracté. Faire la construction de Descartes correspondante. Calculer cet angle et vérifier qu'on retrouve le résultat donné par les formules.

### □ Exercice 1.8. Thermomètre\*

On considère un thermomètre à colonne de mercure, dont l'enveloppe est un cylindre en verre de rayon extérieur  $R$  et de rayon intérieur  $r$ .

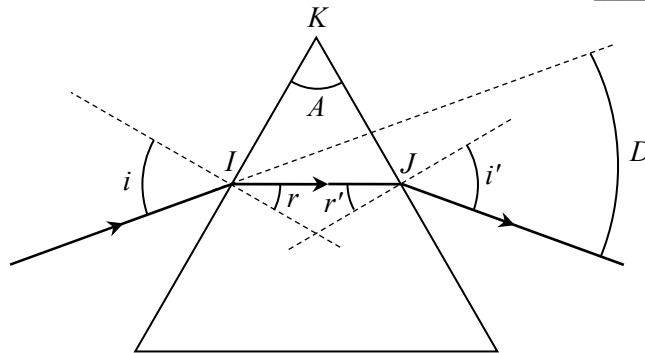
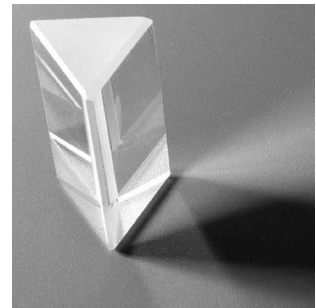
Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de  $\frac{r}{R}$ , un observateur voit le mercure comme s'il remplissait entièrement un cylindre de rayon  $R$ , c'est-à-dire que l'épaisseur du verre n'est plus visible. On pourra utiliser les points  $O$ ,  $M$ ,  $H$  et l'angle  $\alpha$ . L'indice du verre est  $n = 1,5$ .



### □ Exercice 1.9. Mesure de l'indice d'un prisme\*\*

On réalise la dispersion de la lumière au moyen d'un prisme en verre, d'angle  $A$  entre ses deux faces utiles, et d'indice de réfraction  $n$  pour une longueur d'onde donnée. Le milieu extérieur est l'air, d'indice pris égal à 1.

Soit un rayon parvenant au point  $I$  sur la face d'entrée avec un angle d'incidence  $i$  : il émerge par la face de sortie en un point  $J$  avec un angle  $i'$ . On note  $D$  l'angle mesurant la déviation entre le rayon incident et le rayon émergent.



1. Appliquer la loi de Snell–Descartes en  $I$  et  $J$ . Établir également les deux relations géométriques :  $A = r + r'$  et  $D = i + i' - A$ . (Ces quatre relations sont les *formules du prisme*.)
2. Montrer que l'existence du rayon émergent en  $J$  dépend d'une condition sur  $r'$ , puis en déduire une condition sur  $i$ .
3. Montrer que l'existence d'un rayon émergent impose aussi une condition sur  $A$ .
4. Pour un prisme en verre *flint* d'indice  $n = 1,74$ , vérifier que l'angle usuel  $A = 60^\circ$  convient. Déterminer alors numériquement l'encadrement de  $i$ .
5. On constate expérimentalement que, lorsqu'on fait varier  $i$  de  $0^\circ$  à  $90^\circ$  en tournant le prisme, la déviation  $D$  passe par un minimum unique  $D_m$ .
  - a) Justifier sans calcul que ce minimum correspond nécessairement à  $i = i'$ .
  - b) Exprimer alors  $D_m$  en fonction de  $i$  et  $A$ , puis en déduire l'indice  $n$  en fonction de  $D_m$  et  $A$ .

□ **Exercice 1.10. Arc-en-ciel\*\***

Lorsque le Soleil illumine un rideau de pluie, chaque goutte d'eau constitue une sphère réceptionnant un faisceau de rayons parallèles entre eux. On recherche les conditions pour que la lumière émergente, issue d'une goutte d'eau, se présente sous forme d'un faisceau de lumière parallèle (c'est à cette condition que l'intensité lumineuse sera maximale, donc observable pour l'œil). Pour cela on fait intervenir l'angle de déviation  $D$  de la lumière à travers la goutte d'eau, mesuré entre le rayon émergent et le rayon incident. Cet angle de déviation  $D$  est une fonction de l'angle d'incidence  $i$ . On admettra que la condition de parallélisme des rayons émergents se traduit mathématiquement par  $\frac{dD}{di} = 0$ .

**1.** Rappeler les lois de Snell–Descartes pour la réfraction d'un rayon lumineux passant de l'air (milieu d'indice unité) vers un milieu d'indice  $n$ . Exprimer la dérivée  $\frac{dr}{di}$  exclusivement en fonction de l'indice  $n$  et du sinus de l'angle d'incidence.

**2.** Une goutte d'eau quelconque, représentée par une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$ , est atteinte par la lumière solaire sous des incidences variables, comprises entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . Son indice, pour une radiation donnée, sera noté  $n$  tandis que celui de l'air sera pris égal à l'unité.

Répondre aux questions **a**, **b**, **c** ci-après pour chacun des trois cas suivants :

- lumière directement transmise (figure 1) ;
- lumière transmise après une réflexion partielle à l'intérieur de la goutte (figure 2) ;
- lumière transmise après deux réflexions à l'intérieur de la goutte (figure 3).

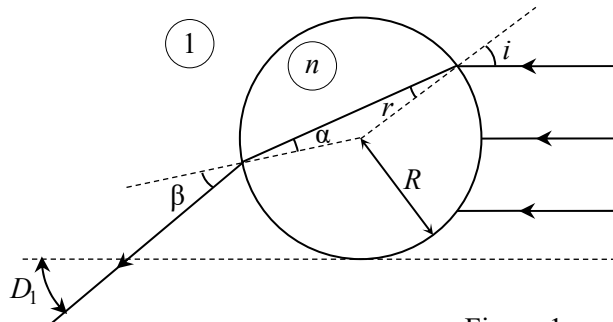


Figure 1

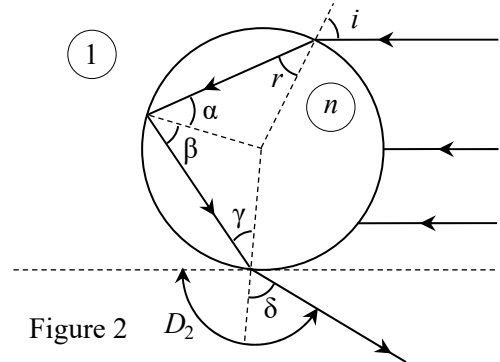


Figure 2

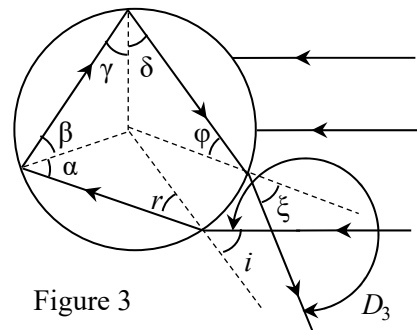


Figure 3

- a)** Exprimer en fonction de l'angle d'incidence  $i$  ou de l'angle de réfraction  $r$ , tous les angles marqués de lettres grecques.
- b)** En déduire l'angle de déviation  $D$  propre à chaque cas, en fonction de  $i$  et de  $r$ .
- c)** Rechercher ensuite, si elle existe, une condition d'émergence d'un faisceau parallèle, exprimée par une relation entre le sinus de l'angle d'incidence et l'indice  $n$  de l'eau.

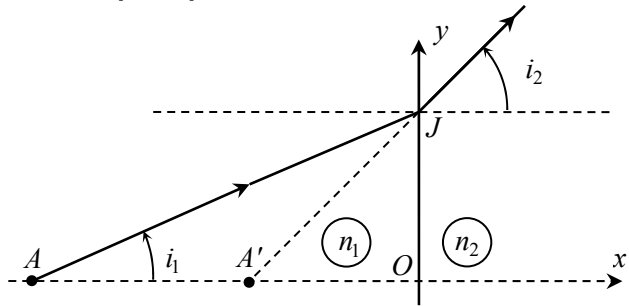
Madame Michu se trouve face à un rideau de pluie, et observe le ciel en tournant le dos au Soleil, qui est assez bas sur l'horizon.

3. Montrer qu'elle ne pourra observer la lumière transmise que si la goutte d'eau se trouve sur deux cônes d'axes confondus avec la direction solaire et de demi-angles au sommet  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . Exprimer ces deux angles en fonction de  $D_2$  et  $D_3$ .
4. Les angles  $\theta_2$  et  $\theta_3$  dépendant de l'indice  $n$  de l'eau, on observe une séparation des couleurs due au fait que cet indice varie en fonction de la longueur d'onde. Calculer ces angles pour le rouge (indice 1,3317) et le violet (indice 1,3448).
5. Dessiner les deux arcs-en-ciel qui apparaissent dans le champ de vision de Madame Michu, en notant la position respective des rouges et des violets sur chacun des deux.

## ■ Formation d'images par un système optique

### □ Exercice 1.11. Stigmatisme du dioptre plan\*

Un dioptre plan sépare un milieu d'indice  $n_1$  d'un milieu d'indice  $n_2$ . On considère un rayon issu d'un point  $A$ , situé dans le milieu d'indice  $n_1$ , et d'angle d'incidence orienté  $i_1$ . On note  $A'$  l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par  $A$ .

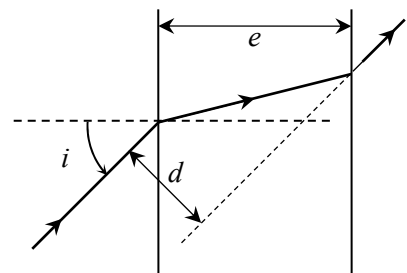


1. Exprimer  $\overline{OA'}$  en fonction de  $\overline{OA}$ ,  $\sin i_1$ ,  $n_1$  et  $n_2$ .
2. Le système est-il rigoureusement stigmatique ?
3. En utilisant une approximation, déterminer l'image du point objet  $A$ , puis d'un objet  $AB$  parallèle au dioptre.

### □ Exercice 1.12. lame à faces parallèles\*

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur  $e$ , d'indice  $n$ , plongée dans l'air d'indice 1. Un rayon incident arrive avec un angle d'incidence  $i$ .

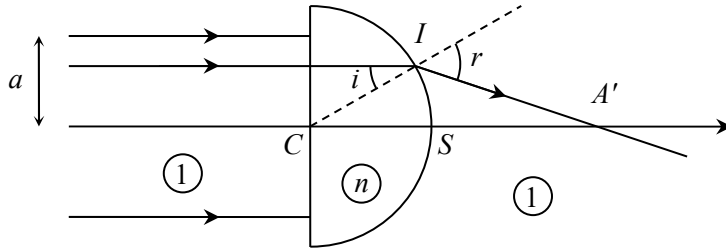
1. Déterminer l'écart  $d$  entre le rayon incident et le rayon émergent en fonction de  $n$  et  $\sin i$ .
2. Faire l'application numérique pour  $e = 4$  mm,  $n = 1,5$  et  $i = 50^\circ$ .
3. Cette lame est-elle stigmatique ? Quel est son effet sur la vision d'un objet ?



□ **Exercice 1.13. Lentille demi-boule\***

On considère une lentille en forme de demi-boule de rayon  $R$  et d'indice  $n$ , plongée dans l'air d'indice 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon  $a$ , arrive sous incidence normale sur la face plane de la lentille.

1. Un rayon donné de ce faisceau émerge en coupant l'axe optique en un point  $A'$ . Établir la relation donnant  $CA'$  en fonction de  $R = CS$  et des angles  $i$  et  $r$ .

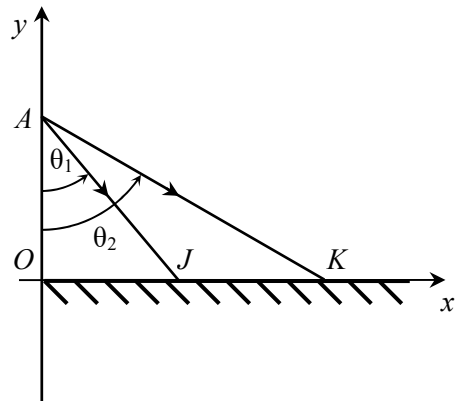


2. En déduire la limite  $CF'$  de  $CA'$  lorsqu'on se place dans l'approximation de Gauss (à définir). Quelle propriété de la lentille obtient-on ? Que représente le point  $F'$  ?
3. Quelle est la valeur limite  $a_0$  du rayon du faisceau incident si l'on veut que tous les rayons ressortent de la lentille ? Faire l'application numérique pour  $n = 1,5$  et  $R = 5,0$  cm.

□ **Exercice 1.14. Jeux avec un ou deux miroirs\*\***

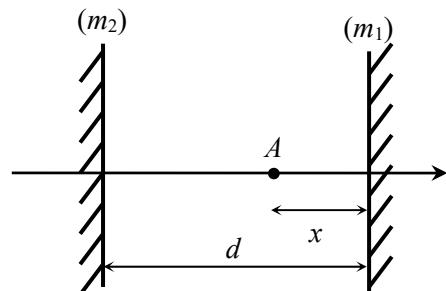
On considère un miroir plan contenu dans le plan  $xOz$  et un objet ponctuel  $A$  placé sur l'axe  $Oy$  ( $OA = a$ ). On cherche à déterminer l'image  $A'$  de  $A$  par le miroir.

1. Construire les rayons réfléchis correspondant aux rayons incidents  $AJ$  et  $AK$ .
2. Établir les équations des droites des rayons réfléchis en fonction des tangentes des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection  $C$  de ces deux droites.
4. Quelle est l'image de  $A$  par le miroir ? En déduire une propriété caractéristique du miroir plan.



On place maintenant deux miroirs plans identiques, parallèles et distants de  $d$ . Un objet ponctuel  $A$  est placé entre les deux miroirs à la distance  $x$  de  $(m_1)$ . On note  $A_1$  l'image de  $A$  par  $(m_1)$ , puis  $A_2$  l'image de  $A_1$  par  $(m_2)$ , etc.

5. Déterminer, en fonction de  $x$  et  $d$ , les mesures algébriques  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{AA_2}$ ,  $\overline{AA_3}$  et  $\overline{AA_4}$ .
6. En déduire  $\overline{AA_n}$ . Combien d'images peut-on observer ?

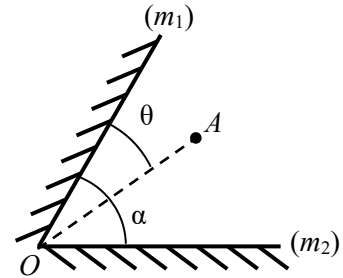


On place à présent les deux miroirs comme indiqué sur le schéma de telle façon qu'ils forment entre eux un angle  $\alpha = 60^\circ$ .

On place un objet ponctuel  $A$  entre eux. On note  $A_1$  l'image de  $A$  par  $(m_1)$ , puis  $A_2$  l'image de  $A_1$  par  $(m_2)$ , etc.

7. Construire les images  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et  $A_5$ .

8. Combien d'images peut-on observer ?



*D'après CCINP*

## ■ Fibre optique

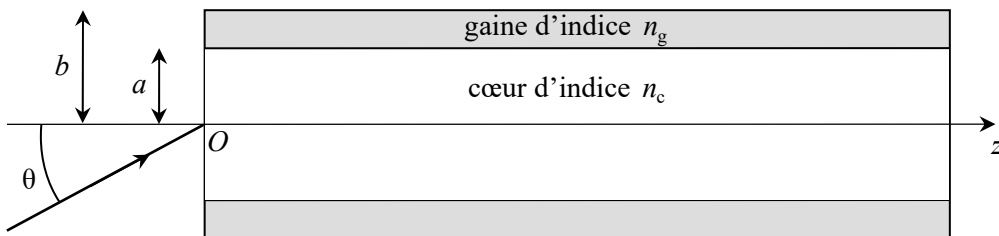
### □ Exercice 1.15. Caractéristiques d'une fibre optique

Les câbles à fibres optiques permettent la transmission à haut débit de tous types de signaux électromagnétiques, sur de longues distances avec très peu d'atténuation ; ceux-ci se propagent comme la lumière. Chaque câble comporte un grand nombre de fibres très fines.



Une fibre optique à saut d'indice est assimilée à un cylindre de révolution d'axe  $(Oz)$ , de longueur  $L$ , constitué d'un cœur en polyméthacrylate de méthyle, de rayon  $a$  (de l'ordre de 8 à  $50 \mu\text{m}$ ) et d'indice  $n_c = 1,49$ , entouré d'une couche cylindrique de polymère fluoré, la gaine, d'épaisseur  $b - a$  et d'indice  $n_g = 1,40$ . On supposera que le milieu extérieur a un indice de 1.

Un rayon pénètre dans la fibre en  $O$ , en faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $(Oz)$ .



1. Déterminer la valeur maximale admissible  $\theta_a$  de l'angle  $\theta$  pour que le rayon puisse être guidé dans la fibre, et calculer l'ouverture numérique  $o_n = n_0 \sin \theta_a$ .

2. On note  $\tau$  la durée du trajet d'un rayon lumineux dans la fibre. Déterminer l'intervalle de temps  $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$  entre les rayons les plus lents et les plus rapides en fonction de  $n_c$ ,  $n_g$ ,  $L$  et de la célérité  $c$  de la lumière dans le vide.

Calculer  $\Delta\tau$  pour  $L = 1,0$  km, sachant que  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>.

3. Lors d'une communication par cette fibre optique, on envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses avec une fréquence  $f$ . On souhaite récupérer ces impulsions distinctes en sortie ( $L = 1,0$  km). Montrer que la fréquence  $f$  doit être inférieure à une certaine valeur.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 1.3.* Tous les termes d'une somme ont la même dimension, qui est aussi celle de la somme elle-même.

*Exercices 1.9 et 1.10.* La somme des trois angles d'un triangle vaut  $\pi$ .

*Exercices 1.11 et 1.12.* Pour savoir si le système est rigoureusement stigmatique, il faut vérifier si tous les rayons issus d'un point  $A$  semblent venir d'un même point  $A'$  après avoir traversé le système. Penser à utiliser le rayon non dévié.

*Exercice 1.13.* Faire apparaître le projeté  $H$  de  $I$  sur l'axe, et calculer séparément  $CH$  (facile) et  $HA'$  (plus difficile) pour en déduire  $CA' = CH + HA'$ .

*Exercice 1.15.* Pour que le rayon demeure dans la fibre, il faut qu'il y ait toujours réflexion totale au niveau du dioptre entre le cœur et la gaine.



## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux

1. La vitesse de la lumière est  $v = \frac{c}{n}$  donc  $v_{\text{eau}} < v_{\text{air}}$ .

5. La lumière solaire peut être décomposée (à l'aide d'un prisme, par exemple) en une infinité de radiations de longueurs d'ondes différentes.

8. Une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour observer une réflexion totale est que l'indice du premier milieu soit supérieur à celui du deuxième.

9. Seul le rayon confondu avec l'axe optique n'est pas dévié ; les autres sont déviés vers le foyer image principal.

### □ Les erreurs classiques

- Faire attention à l'unité d'angle utilisée dans les calculs (degrés ou radians).
- Les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction sont mesurés à partir de la *normale* au dioptre, et non par rapport au dioptre lui-même.
- Bien vérifier l'homogénéité des formules ! Par exemple, une longueur ne peut être égale qu'à une autre longueur, mais en aucun cas à l'inverse d'une longueur, ou à un produit de deux longueurs...

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 1.1

1. On applique la relation  $f = \frac{c}{\lambda_0}$ , ce qui donne pour  $\lambda_0 = 0,40 \mu\text{m}$ ,  $f = 7,5 \times 10^{14} \text{ Hz}$  et pour  $\lambda_0 = 0,80 \mu\text{m}$ ,  $f = 3,8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .

2. La fréquence ne dépend pas du milieu, c'est une caractéristique intrinsèque d'une lumière donnée. Mais la longueur d'onde est modifiée lorsque la lumière change de milieu.

a)  $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ . Application numérique :  $0,31 \mu\text{m}$  et  $0,62 \mu\text{m}$ .

b)  $\lambda' = \frac{\lambda_0}{n'}$ . Application numérique :  $0,27 \mu\text{m}$  et  $0,54 \mu\text{m}$ .

## Exercice 1.2

1. Cette lumière n'est pas rigoureusement monochromatique (ce qui n'est qu'un cas idéal), mais elle en est « très proche », c'est-à-dire que l'intervalle de fréquences est extrêmement étroit autour de la valeur  $f$  donnée. Et en tous cas, la lumière laser possède une monochromaticité beaucoup plus grande que n'importe quel autre type de lumière.

2. On utilise la formule  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ . AN  $\lambda_0 = 0,63 \mu\text{m}$ . La couleur perçue par l'œil humain est rouge (car le rouge couvre l'intervalle approximatif de  $0,62$  à  $0,80 \mu\text{m}$  dans le vide).

3. La vitesse est  $v = \frac{c}{n}$ . AN  $v = 1,81 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La longueur d'onde devient  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_0}{n}$ .

AN  $\lambda_0 = 0,38 \mu\text{m}$ . En revanche, la couleur, qui dépend de la fréquence et qui est donc intrinsèque, reste rouge.

## Exercice 1.3

1.  $A$  est sans dimension, donc sans unité (comme  $n$ ) et  $B$  a la dimension d'une longueur au carré ; il s'exprime donc en mètres carrés ( $\text{m}^2$ ) dans le SI.

2. a) Il faut donc résoudre le système :  $n_r = A + \frac{B}{\lambda_{0r}^2}$  (1) et  $n_v = A + \frac{B}{\lambda_{0v}^2}$  (2).

On élimine  $A$  en effectuant la soustraction (2) - (1), ce qui permet d'obtenir  $B = \frac{n_v - n_r}{1/\lambda_{0v}^2 - 1/\lambda_{0r}^2}$ .

AN  $B = \frac{1,652 - 1,618}{(4,34 \times 10^{-7})^{-2} - (7,68 \times 10^{-7})^{-2}}$  soit  $B = 9,41 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ . On en déduit  $A = 1,602$ .

b)  $n_j = 1,602 + \frac{9,41 \times 10^{-15}}{(5,89 \times 10^{-7})^2}$  soit  $n_j = 1,629$ .

### Exercice 1.4

Le rayon lumineux réfracté dans le verre aura un angle de réfraction  $r$  tel que  $\sin i = n \sin r$ , soit  $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ . Or l'indice  $n$  dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière incidente. Pour la lumière blanche, les valeurs extrêmes sont  $\lambda_{0v} = 400$  nm (violet) et  $\lambda_{0r} = 800$  nm (rouge). On a donc pour les indices correspondants  $n_v = 1,530$  et  $n_r = 1,511$ .

Les angles de réfraction sont  $r_v = \arcsin\left(\frac{\sin 40^\circ}{1,530}\right) = 24,84^\circ$  et  $r_r = \arcsin\left(\frac{\sin 40^\circ}{1,511}\right) = 25,17^\circ$ , ce qui représente un écart angulaire  $\Delta r = r_r - r_v = 0,33^\circ = 20'$ .

⇒ Méthode 1.1

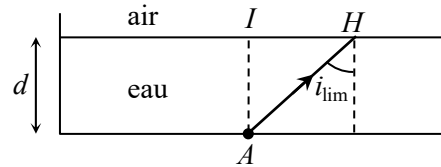
### Exercice 1.5

1. Il faut que l'angle  $i$  d'incidence du rayon soit inférieur à l'angle limite, soit  $i \leq i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{1,33}\right) = 48,8^\circ$ .

⇒ Méthode 1.1

2. Un rayon pourra traverser le dioptre eau-air si son angle d'incidence est inférieur à l'angle limite calculé précédemment.

La zone cherchée sera donc un disque de rayon  $IH = d \tan i_{\text{lim}} = 2,85$  m.



### Exercice 1.6

1. Sur les dioptres verre/air, l'angle de réflexion totale est  $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41^\circ 50'$ . Or l'angle d'incidence du faisceau laser est  $i = 45^\circ$ , donc  $i > i_{\text{lim}}$  : il y a réflexion totale sur la face oblique de gauche (avec un angle de réflexion de  $45^\circ$ ), puis à nouveau sur la face de droite (avec les mêmes angles), et le rayon revient finalement entièrement vers (R).

⇒ Méthode 1.1

2. La nouvelle valeur de l'angle de réflexion totale est  $i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = 62^\circ 30'$ . Maintenant  $i < i'_{\text{lim}}$  : il n'y a plus réflexion totale. Cependant il y a toujours une réflexion partielle en même temps que la réfraction, donc le récepteur reçoit encore un peu de lumière, mais avec une intensité beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

3. On peut suspendre ce dispositif au-dessus du réservoir et le faire descendre progressivement, tout en observant le signal capté par (R). L'intensité de ce signal reste sensiblement constante tant que le capteur est au-dessus de l'eau, puis diminue brusquement lorsqu'il s'immerge dans l'eau. Ainsi, en repérant la distance dont on a fait descendre le capteur (longueur de fil déroulé...), on peut connaître le niveau de l'eau.

## Exercice 1.7

1. a) b) c) Voir schéma.

2. En notant  $H$  le projeté orthogonal de  $J$  (ou  $K$ ) sur le dioptre, on peut écrire les relations trigonométriques :

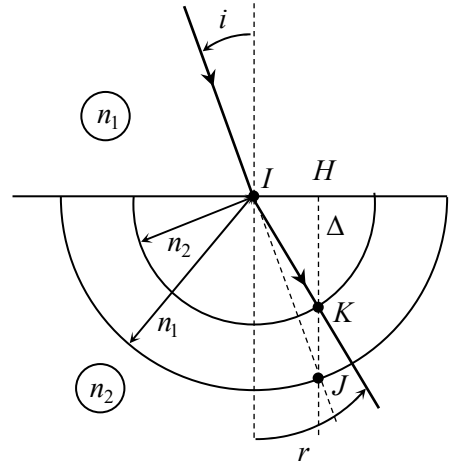
$$\sin i = \frac{HI}{IJ} = \frac{HI}{n_1} \quad \text{et} \quad \sin r = \frac{HI}{IK} = \frac{HI}{n_2}.$$

On en déduit donc que  $HI = n_1 \sin i = n_2 \sin r$ .

On retrouve bien la loi de la réfraction :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}.$$

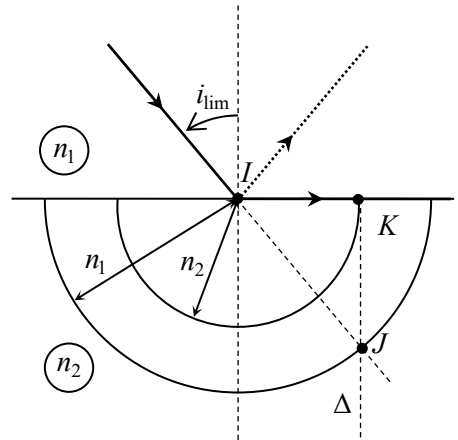
⇒ Méthode 1.3



3. L'angle limite d'incidence  $i_{\text{lim}}$  s'obtient pour  $i_2 = \frac{\pi}{2}$  (ou  $90^\circ$ ), on peut donc le déterminer graphiquement. Pour une valeur de  $i_1$  supérieure à  $i_{\text{lim}}$ , il n'y a plus de point K donc on ne peut plus construire de rayon réfracté.

Dans le cas où un rayon lumineux passe du verre ( $n_1 = 1,5$ ) à l'air ( $n_2 = 1$ ), l'angle limite vaut

$i_l = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$ . Pour  $i_1 > 41,8^\circ$  il y aura réflexion totale.



## Exercice 1.8

Pour qu'on obtienne l'effet indiqué, un rayon issu de  $H$  (sur le bord du mercure) doit émerger en

$M$  à la limite de la réflexion totale, ce qui revient à dire  $\sin \alpha \geq \sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{1}{n}$ .

Or  $\sin \alpha = \frac{r}{R}$  (dans le triangle rectangle  $OHM$ ), donc la condition s'écrit :  $\boxed{\frac{r}{R} \geq \frac{1}{n} = 0,67}$ .

⇒ Méthode 1.1

## Exercice 1.9

1. Lois de Snell-Descartes : en  $I$ ,  $\boxed{\sin i = n \sin r}$  (équation 1) ; en  $J$ ,  $\boxed{\sin i' = n \sin r'}$  (2).

– Par ailleurs, dans le triangle  $IJK$ , la somme des angles vaut  $\pi$  :  $A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

d'où  $\boxed{A = r + r'}$  (3).

– Pour la déviation  $D$ , il faut remarquer que le rayon incident est dévié deux fois dans le même sens (vers la droite sur notre schéma). En  $I$ , le rayon entre dans le prisme en tournant de  $i - r (> 0)$  ; puis en  $J$ , il tourne de  $i' - r' (> 0)$ . La déviation totale est donc  $D = i + i' - r - r'$ , et en utilisant la relation (3) on obtient  $D = i + i' - A$  (4).

**2.** La réfraction en  $I$  (de l'air au verre, d'indice plus grand) existe pour toute valeur de  $i$ . En revanche, en  $J$  (du verre à l'air) elle est conditionnée à la valeur de  $r'$  : il faut que

$r' < r'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$  pour que le rayon émerge en  $J$  et ne subisse pas de réflexion totale.

La relation (3)  $A = r + r'$  impose donc  $r > A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$  et la relation (1) donne alors :

$i > \arcsin\left[n \sin\left(A - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = i_{\text{min}}$ . L'angle d'incidence doit être assez grand.

⇒ Méthode 1.1

✎ Les fonctions sinus et arcsinus sont croissantes entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , donc une valeur minimale pour un angle correspond à une valeur minimale pour son sinus.

**3.** D'après (1),  $\sin r = \frac{\sin i}{n} < \frac{1}{n}$  donc  $r < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Si on considère la condition sur  $r'$  :  $r' < \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$  ainsi que la relation (3), on en déduit qu'il

est impératif d'avoir  $A < 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = A_{\text{max}}$  pour que la lumière puisse émerger du prisme.

Celui-ci doit donc être assez pointu.

**4.** Pour  $n = 1,74$ ,  $A_{\text{max}} = 70^\circ 10'$  donc la valeur  $A = 60^\circ$  convient.

La condition sur  $i$  est alors :  $47^\circ 9' < i < 90^\circ$ .

**5. a)** D'après la loi de retour inverse de la lumière, si on obtient une déviation minimale dans un sens pour un angle incident  $i$ , la déviation est aussi minimale dans l'autre sens, en inversant les rôles des rayons émergent et incident, donc pour un angle incident  $i'$ . Le minimum étant unique, on trouve nécessairement  $i' = i$ .

**b)** D'après les relations (1) et (2), si  $i' = i$ , alors  $r' = r$ . Les relations (4) et (3) donnent alors :

$$D_m = 2i - A \text{ d'où } i = \frac{A + D_m}{2} ; \text{ et } r = \frac{A}{2}. \text{ Or } n = \frac{\sin i}{\sin r}, \text{ soit } n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}.$$

### Exercice 1.10

**1.** Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence et  $\sin i = n \sin r$  (1).

Écrivons la différentielle de cette expression :  $\cos i \, di = n \cos r \, dr$ , soit  $\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r}$ .

En utilisant la relation (1) et la relation  $\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$ , on obtient :  $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$ .

## 2. Figure 1

a)  $\alpha = r$  et  $\beta = i$ .

b)  $D_1 = 2(i - r)$ .

c)  $dD_1 = 2di - 2dr$  et  $\frac{dD_1}{di} = 2\left(1 - \frac{dr}{di}\right)$ . La condition d'émergence d'un faisceau parallèle est

$\frac{dD_1}{di} = 0$ , soit  $\frac{dr}{di} = 1$ . Or, d'après le résultat de la question 1,  $\frac{dr}{di} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$ , ce qui impose que  $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$ , donc que  $n = 1$ . Cette solution triviale n'a pas d'intérêt (il faudrait que l'indice de l'eau soit le même que celui de l'air !). Il n'est donc pas possible d'observer le faisceau parallèle recherché dans ces conditions.

## Figure 2

a)  $\alpha = \beta = \gamma = r$  et  $\delta = i$ .

b)  $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r$ .

c)  $dD_2 = 2(di - dr) - 2dr = 2di - 4dr$ . La condition d'émergence du faisceau parallèle s'écrit

$\frac{dr}{di} = \frac{1}{2}$  et le résultat de la question 1 conduit à  $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$ , soit  $\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$ .

## Figure 3

a)  $\varphi = \delta = \gamma = \beta = \alpha = r$  et  $\xi = i$ .

b)  $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r)$ .

c)  $dD_3 = 2(di - dr) - 4dr = 2di - 6dr$  donc la condition recherchée s'écrit  $\frac{dr}{di} = \frac{1}{3}$ , ce qui

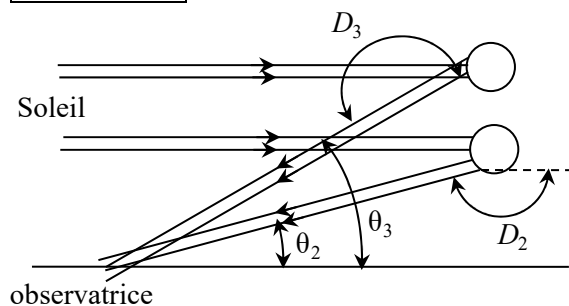
donne, en utilisant le résultat de la question 1 :  $\sin^2 i = \frac{9 - n^2}{8}$ .

3. Madame Michu ne verra la lumière émergente que si la condition d'émergence d'un faisceau parallèle est vérifiée, ce qui correspond au schéma ci-contre.

On constate les relations  $\theta_2 = \pi - D_2$  et  $\theta_3 = D_3 - \pi$ .

Les gouttes devront donc être sur un cône centré sur l'observatrice et d'axe parallèle aux rayons incidents.

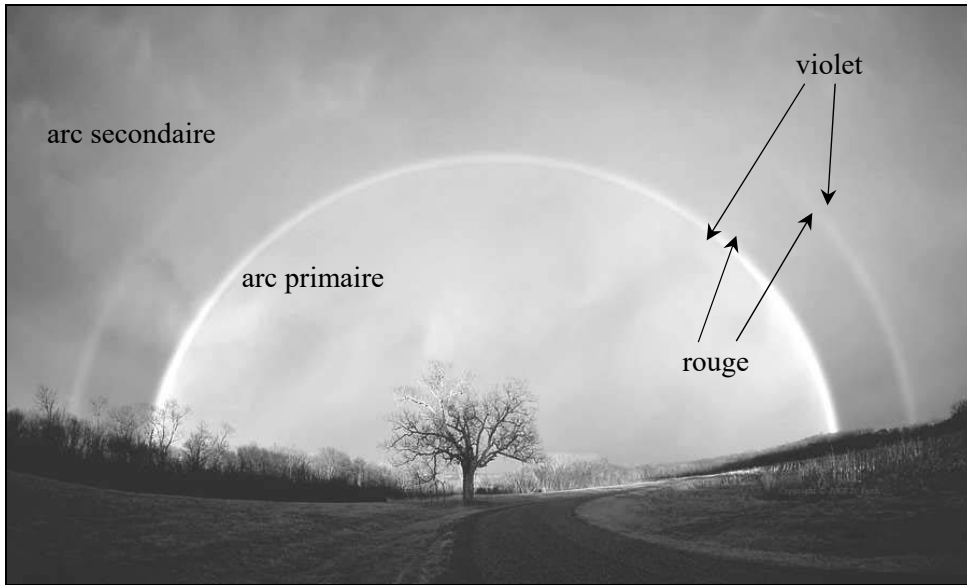
On observera deux arcs : l'un dû à la simple réflexion de la lumière dans une goutte (cas de la figure 2) et l'autre dû à la double réflexion (cas de la figure 3).



4. Pour la simple réflexion :  $\theta_2 = \pi - D_2$ , avec  $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r$ , et  $i = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$  ; quant à  $r$ , il se calcule par la relation  $r = \arcsin \left( \frac{\sin i}{n} \right)$ . Pour la double réflexion :  $\theta_3 = D_3 - \pi$ , avec  $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r)$ ,  $i = \arcsin \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}}$  et toujours  $r = \arcsin \left( \frac{\sin i}{n} \right)$ .

Angle (en degrés)	$i_2$	$r_2$	$D_2$	$\theta_2$	$i_3$	$r_3$	$D_3$	$\theta_3$
Violet ( $n = 1,3448$ )	58,75	39,48	139,58	<b>40,41</b>	71,50	44,85	233,87	<b>53,87</b>
Rouge ( $n = 1,3317$ )	59,51	40,33	137,71	<b>42,29</b>	71,92	45,56	230,48	<b>50,48</b>

5. On constate que l'arc secondaire (obtenu par double réflexion) est au-dessus de l'arc primaire (obtenu par simple réflexion) et que les couleurs des deux arcs sont inversées.



### Exercice 1.11

1.  $\tan i_1 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AO}}$ ,  $\tan i_2 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{A'O}}$  et la loi de la réfraction en  $J$  s'écrit  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

⇒ Méthode 1.3

●\* Ici on travaille avec des angles orientés, ce qui permet d'obtenir des mesures algébriques et pas seulement des distances. Mais il faut les orienter correctement !

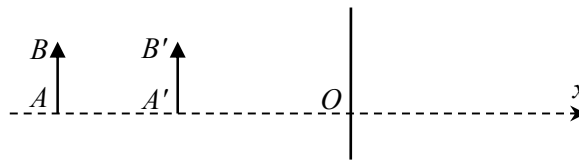
Ces trois relations entraînent que  $\overline{OA'} = \overline{OA} \frac{\tan i_1}{\tan i_2} = \overline{OA} \times \frac{\sin i_1}{\cos i_1} \times \frac{\cos i_2}{\sin i_2}$ .

Or  $\cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}$ ,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  et  $\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 i_1}$ , ce qui

permet, après simplification, d'obtenir 
$$\overline{OA'} = \overline{OA} \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{\sqrt{n_1^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$
.

**2.** La position de  $A'$  dépend de l'angle  $i_1$ , donc du rayon étudié. On ne peut donc pas dire que tous les rayons issus de  $A$  sembleront venir de  $A'$  après réflexion : le dioptre n'est pas un système rigoureusement stigmatique et  $A'$  n'est pas l'image de  $A$ .

**3.** Si  $i_1$  est faible, c'est-à-dire si on ne considère que les rayons faiblement inclinés par rapport à  $(Ox)$ , alors  $\sin i_1 \ll 1$  d'où  $\overline{OA'} \approx \frac{n_2}{n_1} \overline{OA}$ . Cette relation ne dépend plus de  $i_1$  donc  $A'$  est bien l'image de  $A$  dans ces conditions.



Cette relation étant valable pour tout point de l'objet  $AB$ , on en déduit que  $A'B'$ , image de  $AB$  par le dioptre, est également parallèle au dioptre et plus proche de ce dernier si  $n_2 < n_1$  (mais plus éloignée si  $n_2 > n_1$ ).

### Exercice 1.12

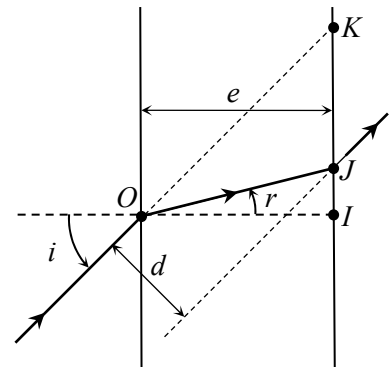
**1.** Un peu de trigonométrie permet de résoudre ce problème. Il est conseillé de faire un schéma très clair et de nommer les points remarquables :  $O, I, J$  et  $K$ .

$$d = JK \cos i = (IK - IJ) \cos i = e(\tan i - \tan r) \cos i$$

$$= e \left[ \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}} - \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} \right] \sqrt{1 - \sin^2 i}.$$

On utilise alors la loi de la réfraction :  $\sin i = n \sin r$  d'où

$$d = e \sin i \left[ 1 - \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right].$$



⇒ Méthode 1.3

**2.** AN  $d = 1,54 \text{ mm}$ .

**3.** Cherchons l'image donnée par la lame d'un point  $A$ . Pour cela, on construit le trajet de deux rayons issus de  $A$  (on choisit l'un des deux orthogonal à la lame par commodité).

Tout d'abord, il faut vérifier le stigmatisme de la lame, c'est-à-dire vérifier que la position de  $A'$  ne dépend pas de l'inclinaison des rayons issus de  $A$ .

Ce n'est pas vrai de façon exacte, car la formule précédente dépend de  $i$ .

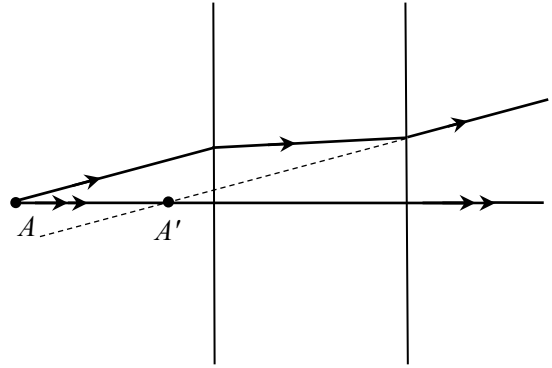


Mais pour  $i$  très faible :  $\sin i \approx i \ll 1$  donc  $d \approx ei \left[ 1 - \frac{1}{n} \right]$ . De plus  $\sin i = \frac{d}{AA'} \approx i$  donc

on trouve  $AA' \approx \frac{d}{i} \approx e \left[ 1 - \frac{1}{n} \right]$ , qui est

indépendant de  $i$  : la lame à face parallèle est stigmatique pour les angles faibles.

On constate alors que l'image  $A'$  est plus proche de la lame que  $A$ . La lame donne donc l'impression de rapprocher les objets.

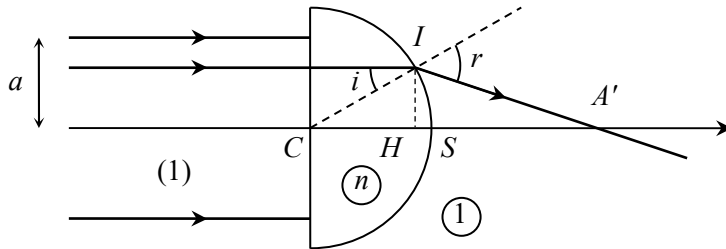


### Exercice 1.13

1. On définit le point  $I$ , intersection entre le rayon incident et le dioptre sphérique, et le point  $H$ , projeté orthogonal de  $I$  sur l'axe, ce qui définit deux triangles rectangles.

Le rayon n'étant pas dévié par la face plane de la lentille (car il arrive selon la normale), on peut se contenter de considérer la réfraction au niveau de la face sphérique :  $n \sin i = \sin r$ .

$$\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'} = \frac{HI}{\tan i} + \frac{HI}{\tan(r-i)} \text{ et } HI = R \sin i, \text{ donc } \boxed{\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(r-i)}}.$$



⇒ Méthode 1.3

2. L'approximation de Gauss consiste à se limiter à des rayons paraxiaux, ce qui permet d'écrire  $i \ll 1$ , d'où également  $r \ll 1$ . Alors  $\sin i \approx \tan i \approx i$ , donc la loi de Snell–Descartes

devient  $ni \approx r$  ; et  $\cos i \approx 1$  d'où  $\overline{CA'} \approx R + \frac{Ri}{r-i} \approx R + \frac{Ri}{ni-i}$  soit  $\boxed{\overline{CA'} \approx \frac{nR}{n-1} = \overline{CF'}}$ .

On a, dans ces conditions, une lentille stigmatique dont  $F'$  est le foyer principal image.

3. Pour qu'un rayon émergent existe, il faut que la loi de Snell–Descartes donne  $\sin r \leq 1$  donc

$$\sin i \leq \frac{1}{n}. \text{ Or } \sin i = \frac{a_0}{R}, \text{ la condition est donc } \boxed{a_0 \leq \frac{R}{n} = 3,3 \text{ cm}.}$$

### Exercice 1.14

1. Voir schéma.

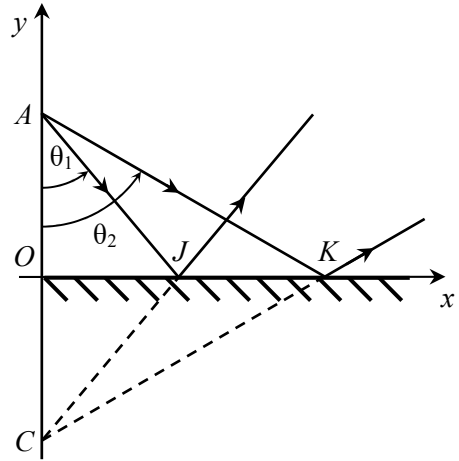
⇒ Méthode 1.4

2. Le rayon (1) a pour pente  $\frac{1}{\tan \theta_1}$ . L'équation

cherchée est donc de la forme  $y_1 = \frac{x}{\tan \theta_1} + k$ . On détermine la constante  $k$  en imposant que le point  $J$  appartienne à cette droite, soit  $0 = \frac{OJ}{\tan \theta_1} + k$  et donc

$k = -\frac{OJ}{\tan \theta_1} = -a$ . L'équation de la droite du rayon

réfléchi (1) est donc :  $y_1 = \frac{x}{\tan \theta_1} - a$ .



Pour le rayon (2), on utilise la même méthode en notant que sa pente est  $\frac{1}{\tan \theta_2}$  et en utilisant le

point  $K$  pour déterminer la constante. L'équation recherchée est alors  $y_2 = \frac{x}{\tan \theta_2} - a$ .

3. Pour déterminer le point d'intersection  $C$ , on cherche à résoudre l'équation  $y_1 = y_2$ .

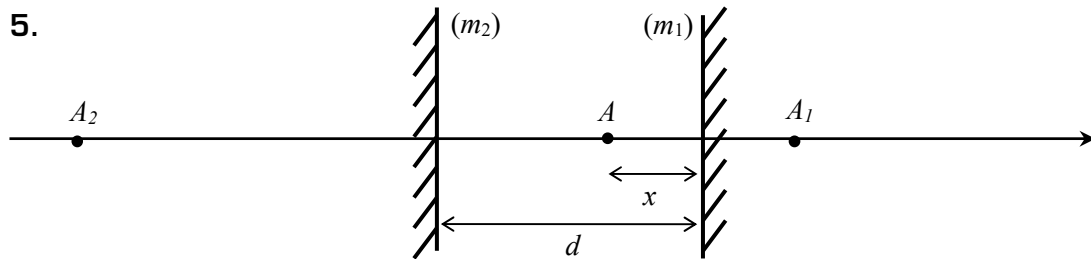
Donc  $\frac{x_C}{\tan \theta_1} - a = \frac{x_C}{\tan \theta_2} - a$  et, vu que  $\tan \theta_1 \neq \tan \theta_2$ , alors  $x_C = 0$  et  $y_C = -a$ .

4. Les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  étant quelconques, on peut en déduire que tous les rayons issus de  $A$  semblent venir de  $C$  après réflexion.  $C$  est donc l'image de  $A$  par le miroir.

Ce n'est pas une approximation mais un résultat exact : il y a stigmatisme rigoureux du miroir.

*Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique.*

5.



$$\overline{AA_1} = 2x ; \quad \overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = 2x - 2(d+x) = -2d ;$$

$$\overline{AA_3} = \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} = -2d + 2(2d+x) = 2d + 2x ;$$

$$\overline{AA_4} = \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} = 2d + 2x - 2(3d+x) = -4d .$$

6. En continuant la suite, et par extrapolation, on obtient :

– si  $n$  est pair,  $\overline{AA_n} = -nd$  ;

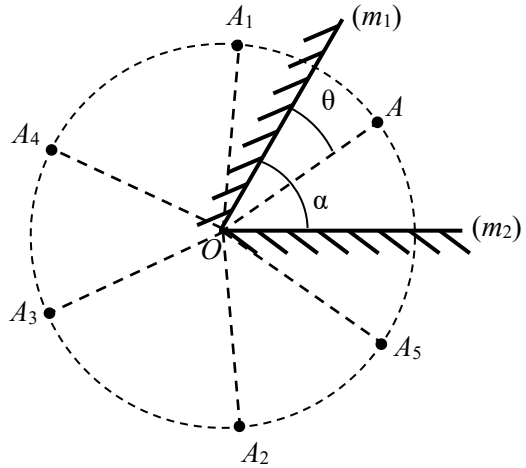
– si  $n$  est impair,  $\overline{AA_n} = (n-1)d + 2x$ .

On peut donc (en théorie) observer une infinité d'images.

7. Les images sont toutes situées sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ .

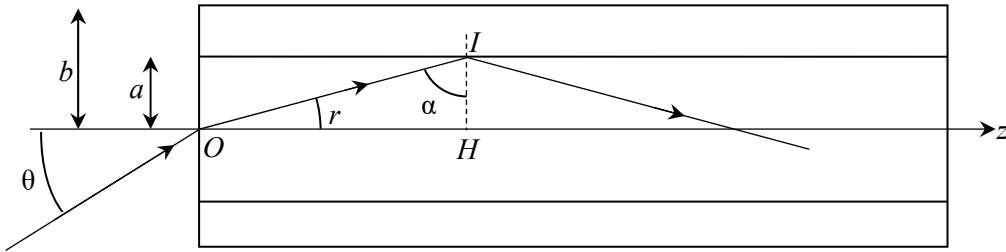
Voir schéma.

8. On constate que  $A_6$  est confondue avec  $A$ .  
On pourra donc observer six images distinctes.



### Exercice 1.15

1. Cette résolution nécessite de bien identifier ce qui se passe en chaque point utile. Pour que le rayon se propage dans le cœur de la fibre, il doit y avoir tout d'abord une réfraction en  $O$  (le rayon entrant dans le cœur) puis une réflexion totale en  $I$  et en tous les points analogues successifs : ainsi le rayon suivra une ligne brisée sans sortir du cœur.



Donc  $\sin \theta = n_c \sin r$  (1) et  $\alpha > \alpha_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)$  ou  $\sin \alpha > \frac{n_g}{n_c}$  (2). D'autre part, la somme des

angles dans le triangle  $OHI$  est égale à  $\pi$  :  $\alpha + r + \frac{\pi}{2} = \pi$  donc  $\alpha = \frac{\pi}{2} - r$  (3).

D'après (3),  $\sin \alpha = \cos r$  et (2) peut donc s'écrire  $\cos r > \frac{n_g}{n_c}$  ou  $1 - \sin^2 r > \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2$ .

On utilise alors (1) et on obtient  $1 - \frac{\sin^2 \theta}{n_c^2} > \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2$ , d'où  $\theta < \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) = \theta_a$ .

Si l'angle  $\theta$  vérifie cette condition, le rayon restera dans la fibre et sera guidé par elle.

On a donc trouvé  $\theta_n = \sin \theta_a = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ . AN  $\theta_n = 0,51$ .

⇒ Méthodes 1.1, 1.2

**2.** La durée de parcours d'une distance  $d$ , à la célérité  $v$ , est  $\tau = \frac{d}{v}$ . Or  $v = \frac{c}{n_c}$ , et pour le rayon dessiné,  $d = \frac{L}{\cos r}$ , donc  $\tau = \frac{L n_c}{c \cos r}$ .

⇒ Méthode 1.3

Le rayon le plus rapide est celui qui parcourt le trajet le plus court, ce qui correspond à  $\theta = 0$  donc  $r = 0$  et  $\cos r = 1$ . Par conséquent  $\tau_{\min} = \frac{L n_c}{c}$ .

Le rayon le plus lent correspond à  $\theta = \theta_a$  et à l'angle  $\alpha = \alpha_{\text{lim}}$  correspondant à la réflexion limite en  $I$ , sachant que  $\sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{n_g}{n_c} = \cos r_{\text{lim}}$ . Donc  $\tau_{\max} = \frac{L n_c^2}{c n_g}$ .

On en déduit : 
$$\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{L n_c (n_c - n_g)}{c n_g}.$$

AN pour une longueur de fibre  $L = 1,0 \text{ km}$  :  $\Delta\tau = 320 \text{ ns}$ .

**3.** Pour que les impulsions lumineuses puissent être bien séparées à la sortie de la fibre, il faut que la durée  $T$  entre deux impulsions soit supérieure à  $\Delta\tau$ , soit  $f < \frac{1}{\Delta\tau} = f_{\max}$ .

AN  $f_{\max} = 3,1 \text{ MHz}$ .



# Lentilles minces

UN SCIENTIFIQUE



Connu sous le nom d'ALHAZEN en Occident, le savant arabe Al-Hassan ibn **AL-HAITHAM** (965-1039) vivait au Caire. Il consacre ses recherches à l'optique et comprend que la lumière vient à l'œil et non l'inverse ; « sinon nous verrions la nuit » ajoute-t-il. Ceci lui permet de construire des miroirs sphériques et des lentilles grâce à des propriétés géométriques qu'il met en lumière. Il construit une chambre noire qui lui permet d'observer les éclipses.

## ■ Un peu d'histoire

Dans l'Antiquité, EUCLIDE, HÉRON et PTOLÉMÉE se sont intéressés à l'optique en introduisant la notion de rayon lumineux. Le dernier a étudié la réflexion et la réfraction. Le savant arabe Ibn SAHL expose dans son ouvrage *Sur les miroirs ardents et les lentilles* diverses propriétés des rayons lumineux. De nombreuses expériences astucieuses permettent à AL-HAITHAM d'établir une théorie sérieuse sur le sujet.

À la fin du XVI<sup>e</sup> siècle, apparaissent en Italie, ou peut-être aux Pays-Bas, les premières lentilles. Ceci permet à GALILÉE de découvrir en 1610 des satellites de Jupiter à l'aide de l'une des premières lunettes astronomiques. Christiaan HUYGENS, mais surtout Isaac NEWTON, apportent des éléments théoriques à la compréhension de la lumière. Grâce à des prismes et des lentilles, le savant anglais établit la composition de la lumière blanche et explique la présence d'arcs-en-ciel.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les propriétés des lentilles convergentes et divergentes
- ▷ Les définitions de la distance focale et de la vergence d'une lentille
- ▷ Les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- ▷ La distance minimale pour former l'image d'un objet réel sur un capteur
- ▷ Le modèle de l'œil et les ordres de grandeur de sa limite de résolution et de sa plage d'accommodation
- ▷ Le modèle de l'appareil photographique

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Construire des rayons lumineux traversant une lentille
- ▷ Faire la construction géométrique d'une image, et identifier sa nature réelle ou virtuelle
- ▷ Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement de Descartes et de Newton
- ▷ Modéliser un dispositif optique d'utilisation courante avec plusieurs lentilles
- ▷ Construire géométriquement la profondeur de champ pour un réglage donné de l'appareil photographique

# ■ ■ Résumé de cours

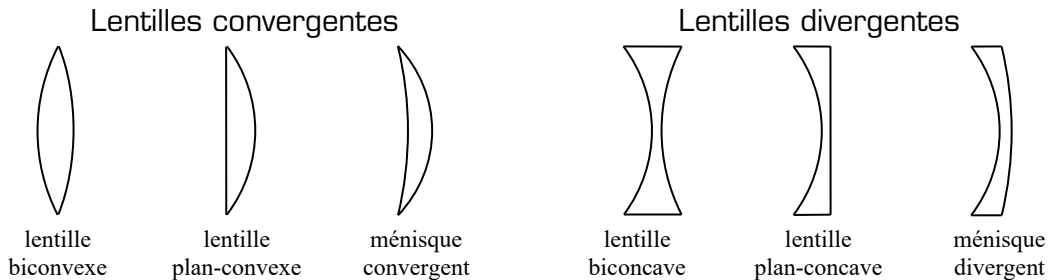
## ■ Propriétés d'une lentille

### □ Définition et classification

Une lentille est système optique centré constitué d'un milieu transparent homogène et isotrope, délimité par deux dioptries sphériques (ou un dioptre plan et un dioptre sphérique).

Les lentilles à bords minces sont **convergentes** ; celles à bords épais sont **divergentes**.

On se limitera aux lentilles minces (dont l'épaisseur est négligeable) utilisées dans les conditions de Gauss.



### □ Caractéristiques d'une lentille mince

Une lentille mince possède :

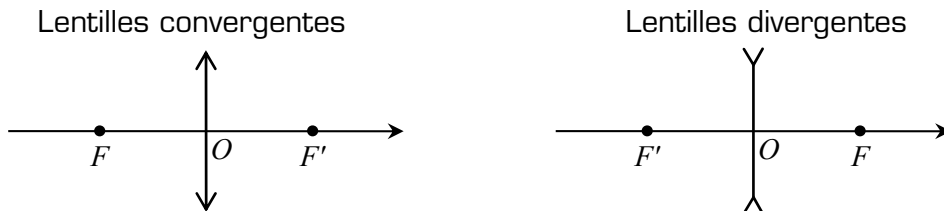
- un centre optique  $O$  et un axe optique passant par  $O$  ;
- un foyer objet  $F$  sur l'axe optique, et un foyer image  $F'$  symétrique de  $F$  par rapport à  $O$ .

On note  $f = \overline{OF}$  la **distance focale objet** et  $f' = \overline{OF'}$  la **distance focale image** (appelée aussi simplement focale).

La **vergence** d'une lentille est  $V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$  et s'exprime en  $\text{m}^{-1}$  ou dioptries ( $\delta$ ).

$V$  et  $f'$  sont positives pour une lentille convergente, négatives pour une lentille divergente.

### □ Schématisation



Par convention, la lumière se propage de la gauche vers la droite sur les schémas.

- ⇒ **Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier**
- ⇒ **Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque**



## ■ Image donnée par une lentille

### □ Construction graphique

On représente un objet par un segment  $AB$ , orthogonal à l'axe, avec  $A$  sur l'axe et  $B$  au-dessus. On peut déterminer graphiquement les positions des images  $B'$  puis  $A'$  en traçant au moins deux rayons issus de  $B$ . Inversement, on peut aussi déterminer l'objet  $AB$  à partir de l'image  $A'B'$ .

⇒ **Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet**

### □ Formules de conjugaison et de grandissement

L'image peut également être déterminée à partir de l'objet (ou inversement) par le calcul, à l'aide des formules de conjugaison (qui relient les positions de  $A$  et de  $A'$ ) et de grandissement (qui relient les tailles de  $AB$  et de  $A'B'$ ).

Formules de Descartes

$$\boxed{\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{\overline{OA'}}{OA}}.$$

Formules de Newton

$$\boxed{\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -\overline{OF'}^2 \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{\overline{FO}}{FA} = \frac{\overline{F'A'}}{F'O}}.$$

Le **grandissement (transversal)**  $\frac{\overline{A'B'}}{AB}$  est souvent noté  $\gamma$ .

⇒ **Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules**

### □ Formation d'une image sur un écran

Pour former une image réelle sur un écran, à partir d'un objet réel :

- seule une lentille convergente peut convenir ;
- la distance  $D$  entre l'objet et l'écran doit vérifier  $D \geq 4f'$ .

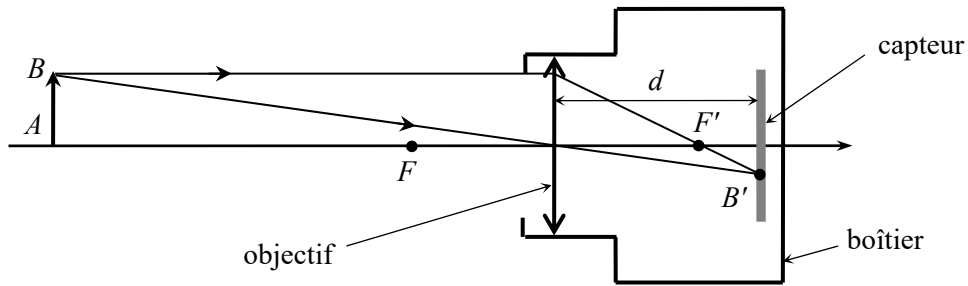
⇒ **Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection**

## ■ L'appareil photographique

### □ Principe

Un appareil photographique comporte principalement :

- un **objectif**, modélisé par une lentille mince convergente de focale  $f'$  ;
- un **capteur** situé derrière la lentille, à une distance  $d$  réglable (**mise au point**) entre  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$ , en fonction de la distance de l'objet à photographier ; la valeur  $d_{\min} = f'$  étant utilisée lorsque l'objet à photographier est à l'infini ;
- un **diaphragme** de diamètre réglable, qui permet de contrôler la quantité de lumière qui pénètre dans l'appareil.

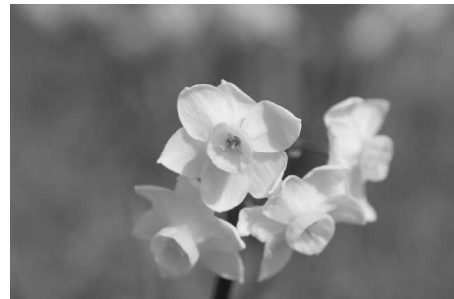


### □ Profondeur de champ

Aucune image n'est rigoureusement ponctuelle, mais l'image d'un point est acceptable si sa taille ne dépasse pas la taille d'un pixel du capteur. Si on effectue la mise au point sur un plan à une distance  $D$ , les plans situés plus loin ou plus près peuvent donner aussi des images nettes. La **profondeur de champ** est la distance entre le plan le plus proche et le plan le plus lointain donnant des images nettes. Elle augmente quand la distance de mise au point augmente, quand le diaphragme est moins ouvert, et quand la focale diminue.



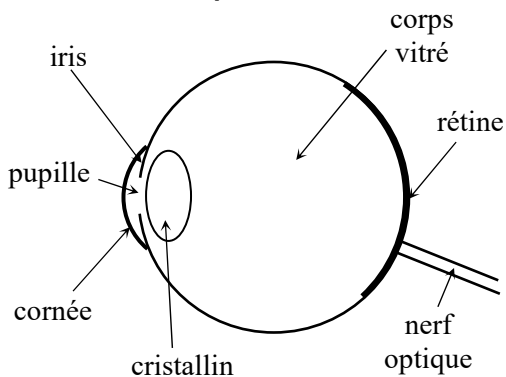
*Grande profondeur de champ*



*Faible profondeur de champ*

## ■ L'œil

### □ Description



L'œil humain, vu en coupe, a la structure ci-contre.

- L'iris (partie colorée), percé de la pupille de diamètre variable, permet de contrôler le flux lumineux pénétrant dans l'œil.
- Le cristallin constitue (avec la cornée) une lentille biconvexe dont la courbure peut être modifiée par un muscle, ce qui fait varier sa focale.
- Le corps vitré est une substance fluide transparente.
- La rétine est tapissée de cellules réceptrices : c'est là que se forme l'image (réelle). Ces cellules communiquent alors les informations au cerveau.

Deux points peuvent être vus distinctement si leur écart angulaire est supérieur à  $\alpha_{\min} = 3 \cdot 10^{-4}$  rad : leurs images se forment alors sur deux cellules distinctes de la rétine.

## ❑ Modélisation

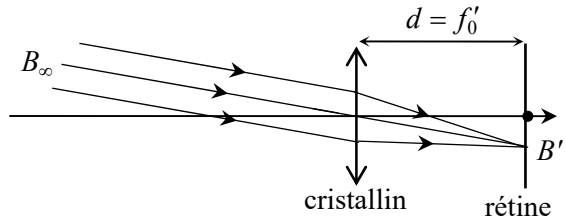
On peut modéliser l'œil par une lentille convergente (cristallin) de distance focale réglable, et un écran (rétine), situés à une distance fixe l'un de l'autre (profondeur de l'œil).

## ❑ Fonctionnement de l'œil emmétrope

### Œil au repos

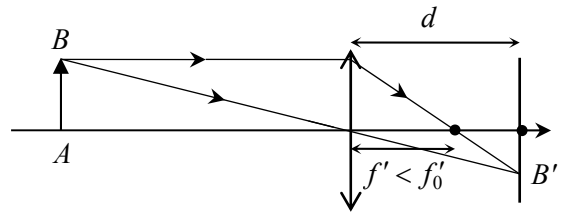
Un œil **emmétrope** (sans défaut) est réglé, au repos, pour voir des objets à l'infini. L'image se forme sur la rétine et la profondeur de l'œil est alors égale à la focale du cristallin.

Le point que voit un œil au repos est le plus éloigné de l'œil, appelé **punctum remotum** (PR) : il est à l'infini pour un œil emmétrope.



### Accommodation

La distance cristallin-rétine est fixe, donc pour voir un objet proche l'œil doit diminuer sa focale, en contractant le muscle associé au cristallin : ce processus est l'**accommodation**. Lorsque l'œil est en accommodation maximale, le point visible est le plus proche de l'œil, appelé **punctum proximum** (PP).



La distance entre un œil emmétrope et son PP est notée  $d_m$  et vaut conventionnellement 0,25 m. L'intervalle entre le PP et le PR est appelé **plage d'accommodation**.

## ■ Associations de lentilles

### ❑ Principe général

Si un système optique est constitué de deux lentilles successives, l'image donnée par la première devient un objet pour la deuxième, qui en donne à son tour une image. Ceci peut être schématisé de la manière suivante :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$$

Le grandissement global est alors  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{AB}$  soit  $\boxed{\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2}$ .

Ce fonctionnement se généralise à une association de trois lentilles ou plus.

### ❑ Théorème des vergences pour des lentilles accolées

Dans le cas où on associe deux lentilles de vergences  $V_1$  et  $V_2$  en les accolant, c'est-à-dire sans laisser d'espace entre elles, on obtient un système équivalent à une seule lentille de vergence  $V$  telle que  $\boxed{V = V_1 + V_2}$ .

⇒ **Méthode 4.6. Détermination de l'image donnée par une association**

## □ Constitution et réglage d'un instrument optique

Les instruments d'optique dans lesquels l'œil observe directement sont constitués :

- d'un **objectif** (du côté de l'objet), que l'on peut modéliser comme une lentille convergente de grande focale, et dont le rôle est de donner de l'objet une image intermédiaire agrandie ;
- d'un **oculaire** (du côté de l'œil), modélisé comme une lentille de courte focale, et qui permet de donner de l'image intermédiaire une image finale virtuelle et si possible à l'infini ;
- parfois d'un **réticule**, plaque transparente munie d'une croix ou de graduations, sur laquelle se forme l'image intermédiaire.

Pour régler l'oculaire, on cherche à voir le réticule net *sans accommoder*.

Pour régler l'objectif, on cherche à observer l'image *et* le réticule *nets simultanément*.

## □ Exemples d'instruments optiques

### Loupe

C'est une simple lentille convergente, pour laquelle on place l'objet entre son centre et son foyer objet. Un œil placé de l'autre côté observe donc une image virtuelle, droite et agrandie.

Si l'objet est placé sur le foyer objet de la loupe, l'image finale est à l'infini (cas idéal).

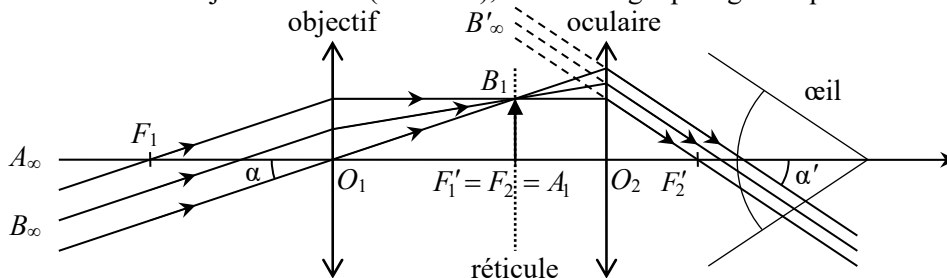
### Oculaire

C'est une loupe perfectionnée constituée d'un doublet de lentilles convergentes coaxiales et séparées par une distance  $d$ . L'ensemble se comporte comme une unique lentille convergente.

L'intérêt est d'obtenir une loupe plus puissante et une image de meilleure qualité.

### Lunette astronomique

Elle sert à observer des objets lointains (à l'infini), sous un angle plus grand qu'à l'œil nu.



L'objectif donne de l'objet  $AB$  une image intermédiaire  $A_1B_1$  (renversée), qui doit se former sur le réticule : celui-ci doit donc se trouver en  $F_1'$ .

L'oculaire donne ensuite de  $A_1B_1$  une image finale  $A'B'$ , qui doit être à l'infini : l'image intermédiaire est alors en  $F_2$ . Donc  $F_2$  coïncide avec  $F_1'$  et la lunette est **afocale**.

### Lunette terrestre (ou lunette de Galilée)

Le principe est le même mais l'oculaire est une lentille divergente. Cela permet d'obtenir une image finale droite, et aussi de diminuer l'encombrement.

### Viseur à frontale fixe

C'est une lunette réglée pour observer des objets à courte distance  $d$  (notamment des images virtuelles données par un autre instrument),  $d$  étant fixée par la distance objectif-réticule.

Sur un banc optique, viser un objet consiste à déplacer le viseur sur le banc jusqu'à observer une image nette sur le réticule. On peut alors en déduire la position de l'objet.

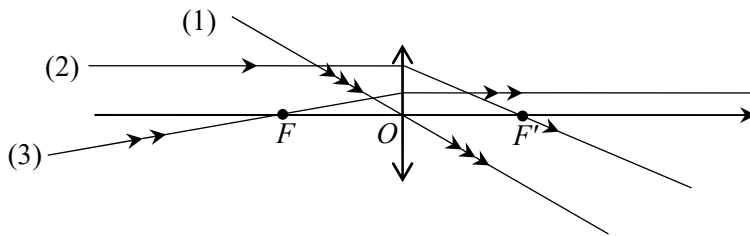
## ■ Comment construire graphiquement des rayons lumineux ?

### □ Méthode 2.1. Construction d'un rayon particulier

Il existe trois rayons particuliers : les règles suivantes permettent de construire immédiatement le rayon émergent à partir du rayon incident, ou l'inverse.

- 1) Un rayon incident passant par le centre optique  $O$  n'est pas dévié.
- 2) Si le rayon incident est parallèle à l'axe optique, le support du rayon émergent passe par le foyer image  $F'$ .
- 3) Si le support du rayon incident passe par le foyer objet  $F$ , le rayon émergent est parallèle à l'axe.

⇒ Exercices 2.1, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.11

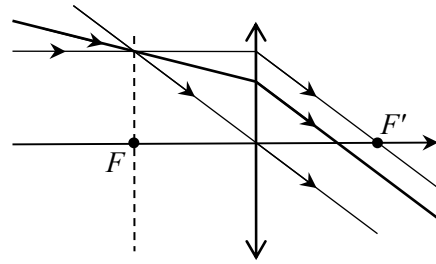
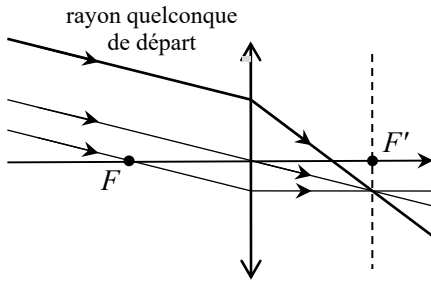


### □ Méthode 2.2. Construction d'un rayon quelconque

Dans le cas d'un rayon quelconque, on peut procéder de deux façons symétriques.

- On choisit l'un des rayons incidents particuliers, parallèle au rayon incident étudié (deux possibilités : celui passant par  $O$  ou celui passant par  $F$ ), et on trace son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche se coupent dans le plan focal image.
- On peut aussi choisir l'un des rayons incidents particuliers coupant le rayon incident étudié dans le plan focal objet (deux possibilités également : celui passant par  $O$  ou celui parallèle à l'axe), et tracer son rayon émergent. Alors ce rayon émergent et celui que l'on cherche sont parallèles entre eux.

⇒ Exercice 2.1, 2.8, 2.9, 2.18, 2.20



## ■ Comment déterminer l'image d'un objet par une lentille ?

### □ Méthode 2.3. Construction graphique d'une image ou d'un objet

L'objet  $AB$  est orthogonal à l'axe,  $A$  étant sur l'axe. On cherche l'image  $A'B'$ . Celle-ci est également orthogonale à l'axe (par aplanétisme de la lentille) et  $A'$  est sur l'axe (puisque celui-ci correspond à un rayon particulier).

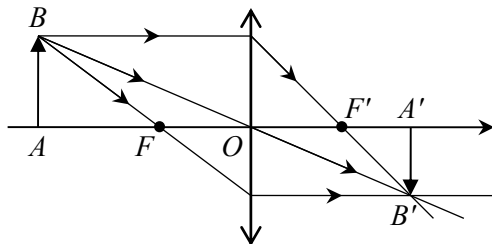
– On choisit au moins deux rayons incidents particuliers dont les supports passent par  $B$ , et on trace les rayons émergents correspondants.

– L'intersection des supports de ces rayons émergents donne  $B'$ .

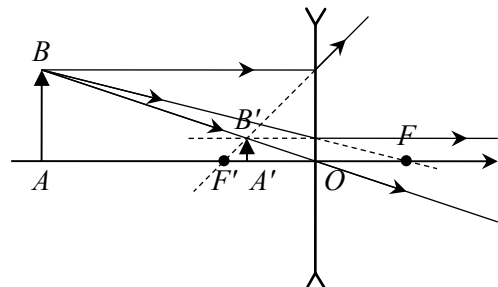
– On projette alors  $B'$  orthogonalement sur l'axe pour obtenir  $A'$ .

De façon inverse, on peut ainsi obtenir l'objet  $AB$  à partir de l'image  $A'B'$ .

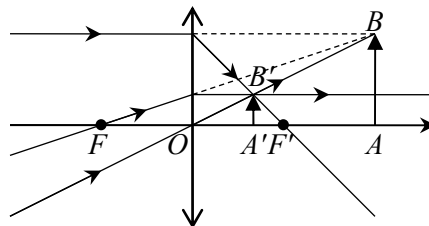
⇒ Exercices 2.2, 2.3, 2.8, 2.11, 2.13, 4.18, 2.20



Lentille convergente,  
objet réel (avant  $F$ ), image réelle



Lentille divergente,  
objet réel, image virtuelle



Lentille convergente,  
objet virtuel, image réelle

## □ Méthode 2.4. Détermination d'une image ou d'un objet avec les formules

On peut déterminer la position et la taille de l'image en utilisant les formules de Newton ou de Descartes :

- une formule de conjugaison donne la position de  $A'$  (sur l'axe) ;
- une formule de grandissement donne la taille de  $A'B'$  à partir de sa position.

Il faut cependant faire attention :

- à l'origine utilisée pour les positions (centre optique dans les formules de Descartes, foyers dans les formules de Newton) ;
- à bien utiliser des *mesures algébriques* et non des distances.

⇒ Exercices 2.3, 2.4, 2.6, 2.11, 2.14, 2.16, 2.18, 2.20

Exemple : quelle est l'image d'un objet  $AB$  haut de 2,0 cm, placé 80 cm avant une lentille mince convergente, de focale  $f' = 20$  cm ?

Les données sont, en mesures algébriques :  $\overline{OA} = -80$  cm (objet réel),  $\overline{OF'} = +20$  cm et  $\overline{AB} = +2,0$  cm (si toutes les longueurs sont en centimètres, il n'est pas nécessaire de les convertir en mètres).

Formule de Descartes :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$  d'où  $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OF'} = \frac{\overline{OA} + \overline{OF'}}{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}$  soit

$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$ . Application numérique :  $\overline{OA'} = +27$  cm (image réelle).

La formule de grandissement donne alors la taille de l'image :  $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}$ .

AN  $\overline{A'B'} = -0,67$  cm (image renversée et rétrécie).

## □ Méthode 2.5. Détermination de la distance minimale de projection

La distance  $D$  entre un objet réel et l'écran où on veut former son image étant fixée, utiliser l'un des formules de conjugaison pour déterminer l'endroit où il faut placer la lentille (convergente). Le calcul montre alors que la condition pour qu'il y ait des solutions est  $D \geq 4f'$ .

⇒ Exercice 2.6

$A$  et  $A'$  sont fixés, tels que  $\overline{AA'} = D$ , et on cherche où placer la lentille, donc le point  $O$  : on peut donc prendre comme inconnue  $x = \overline{OA}$ .

Formule de Descartes :  $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$  avec  $x' = \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = x + D$ , donc  $\frac{1}{x+D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$

d'où l'équation du second degré  $x^2 + Dx + Df' = 0$ . Discriminant :  $\Delta = D^2 - 4Df'$ .

Si  $\Delta > 0$ , soit  $D > 4f'$ , il y a deux solutions distinctes (soit deux positions possibles de la lentille) :  $x = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$ .

Le cas limite théorique  $\Delta = 0$ , soit  $D = 4f'$ , est celui où les deux positions sont confondues.

Si  $D < 4f'$ , il n'y a aucune solution : il est impossible de former une image réelle d'un objet réel si la distance objet - écran est trop petite (moins de 4 fois la focale).

## ■ Comment traiter l'association de deux lentilles ?

### □ Méthode 2.6. Détermination de l'image donnée par une association

Considérons l'association coaxiale de deux lentilles  $L_1 (O_1, f'_1)$  et  $L_2 (O_2, f'_2)$ .

– Si les lentilles sont séparées, la lentille  $L_1$  donne d'un objet  $AB$  une image intermédiaire  $A_1B_1$ , qui sert alors d'objet à la lentille  $L_2$  qui en donne une image

finale  $A'B'$ . Le grandissement global est alors  $\frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{A_1B_1} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{AB}$  soit  $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ .

Le choix d'utiliser les formules de Newton ou celles de Descartes se fera en fonction de la situation particulière et des notations de l'énoncé : si par exemple des positions sont définies par rapport aux foyers, ou encore si  $F'_1$  est confondu avec  $F_2$ , il faudra plutôt utiliser les formules de Newton.

– Si les lentilles sont accolées, alors  $O_1 \approx O_2$  et l'association est équivalente à une lentille *unique* de centre  $O = O_1 = O_2$  et de focale  $f'$  telle que  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ . Cela revient à dire que la lentille équivalente a une vergence  $V = V_1 + V_2$ .

⇒ Exercices 2.8, 2.9, 2.11, 2.16, 2.18, 2.20

– Considérons un système optique *afocal* constitué d'un objectif  $L_1$  convergent, de centre  $O_1$  et de focale  $f'_1 = 20$  cm, et d'un oculaire divergent  $L_2$  de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2$ , avec  $O_1O_2 = 15$  cm. On pointe un objet  $AB$  de 2 cm situé à 30 cm devant l'objectif. On cherche à calculer  $\overline{O_2A'}$  puis  $\overline{A'B'}$ , position et taille de son image finale.

Nommons les images successives :  $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$

On applique deux fois la formule de Newton :  $\overline{F_1A} \cdot \overline{F'_1A_1} = -f'^2_1$  et  $\overline{F_2A_1} \cdot \overline{F'_2A'} = -f'^2_2$ .

Le système étant afocal, l'image d'un point à l'infini sur l'axe par ce système est à l'infini sur l'axe. Or l'image d'un point à l'infini sur l'axe par  $L_1$  est  $F'_1$  et le point dont  $L_2$  donne une image à l'infini sur l'axe est  $F_2$ . Il en résulte que  $F'_1 = F_2$ .



On peut alors éliminer  $\overline{F_1A_1} = \overline{F_2A_1}$  entre ces deux formules, d'où  $\overline{F_2A'} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1A}$  et finalement

$$\boxed{\overline{O_2A'} = f_2' + \frac{f_2'^2}{f_1'^2} (f_1' + \overline{O_1A})}. \text{ AN } \boxed{\overline{O_2A'} = -5,6 \text{ cm}}.$$

Le fait que l'on demande de calculer  $\overline{O_2A'}$  pourrait inciter au départ à utiliser plutôt la formule de conjugaison de Descartes, mais le calcul littéral est alors très lourd. Le bon choix est celui de la formule de Newton : les calculs se simplifient immédiatement du fait que  $F_1' = F_2$ .

On utilise ensuite la formule de grandissement :  $\gamma_1 = \frac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O}}$  et  $\gamma_2 = \frac{\overline{F_2O}}{\overline{F_2A_1}}$  donc  $\gamma = \frac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{F_1'O}} \cdot \frac{\overline{F_2O}}{\overline{F_2A_1}}$

avec  $F_1' = F_2$ , soit  $\gamma = \frac{\overline{F_2O}}{\overline{F_1'O}} = -\frac{f_2'}{f_1'} = 0,25$  (qui se trouve être le même pour toute position de l'objet). On obtient donc  $\boxed{\overline{A'B'} = 0,5 \text{ cm}}$ .

– Supposons maintenant qu'on accole une lentille mince convergente de focale  $f_1' = 50 \text{ cm}$  (soit  $V_1 = +2,0 \delta$ ) et une lentille mince divergente de focale  $f_2' = -25 \text{ cm}$  (soit  $V_2 = -4,0 \delta$ ).

Gardons les mêmes notations :  $AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A'B'$

On applique deux fois la formule de Descartes :  $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{O_1F_1'} = V_1$  et  $\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = V_2$ .

Or  $O_1 \approx O_2$ , noté  $O$ , donc en additionnant membre à membre on obtient :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = V_1 + V_2$ .

Cette association est donc équivalente à une lentille unique de vergence  $V = V_1 + V_2 = -2,0 \delta$  donc de focale  $f' = -50 \text{ cm}$  : elle est divergente.

L'image qu'elle donne d'un objet peut alors être déterminée par une construction ou par le calcul en considérant cette lentille unique, avec les méthodes vues précédemment.

## ■ ■ Vrai/Faux

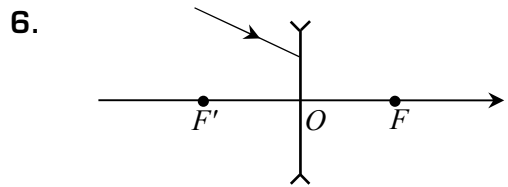
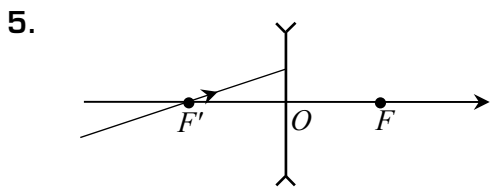
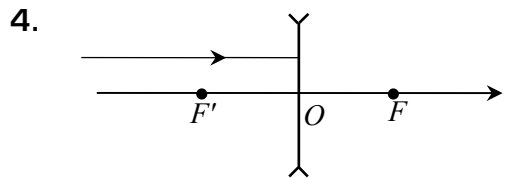
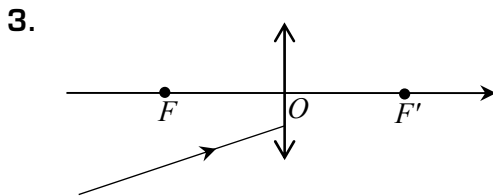
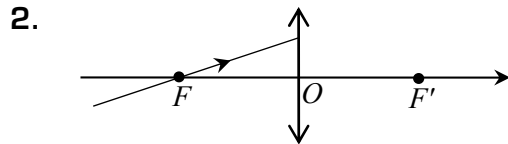
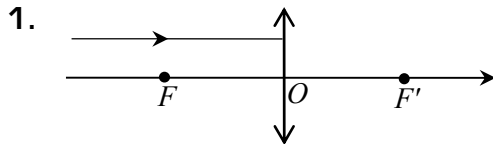
	Vrai	Faux
1. L'image du foyer principal objet d'une lentille mince est le foyer principal image.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le foyer principal image $F'$ d'une lentille divergente est situé avant la lentille.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Une lentille divergente a une vergence négative.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. L'image d'un objet réel par une lentille divergente est toujours virtuelle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Un grandissement négatif indique que l'image est plus petite que l'objet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Deux lentilles minces accolées, de focales $f'_1$ et $f'_2$ , sont équivalentes à une seule lentille mince de focale $f' = f'_1 + f'_2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le <i>punctum remotum</i> d'un œil emmétrope est situé à l'infini.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Une lunette astronomique afocale donne une image à l'infini d'un objet à l'infini.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un viseur à frontale fixe est équivalent à une lunette afocale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Pour utiliser une lunette astronomique, on place son œil du côté de l'objectif.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Constructions graphiques élémentaires

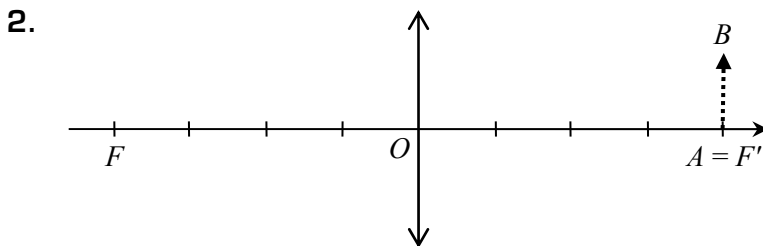
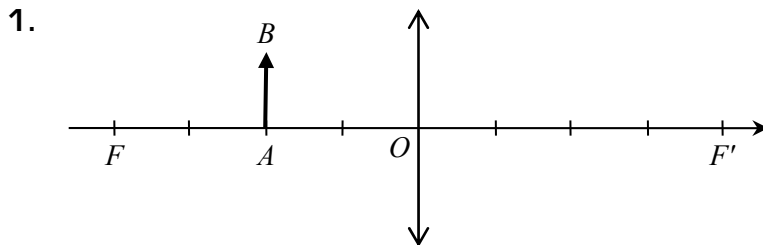
### □ Exercice 2.1. Tracés de rayons

Représenter les rayons émergents correspondants aux rayons incidents dans les six cas suivants.



### □ Exercice 2.2. Constructions d'images

Reproduire chacune des deux figures ci-dessous, et construire l'image de l'objet  $AB$ . Attention, dans les deux cas la lumière se propage *de gauche à droite*, selon la convention habituelle.



## ■ Détermination d'une image

### □ Exercice 2.3. Lentille convergente

1. Un objet  $AB$  de 0,5 cm est placé à 30 cm devant une lentille convergente de focale  $f' = 20$  cm, perpendiculairement à son axe. Déterminer la position, la taille et la nature de l'image en utilisant les formules de Descartes.
2. Retrouver les résultats précédents en utilisant les formules de Newton.
3. Retrouver ces résultats par une construction graphique.
4. Quelle image cette lentille donnerait-elle d'un objet virtuel de même taille placé 30 cm après son centre ? Vérifier graphiquement.

### □ Exercice 2.4. Lentille divergente\*

Étudier, à partir des formules de conjugaison et de grandissement de Descartes, les différents types d'images (réelle ou virtuelle, droite ou renversée, agrandie ou rétrécie) que peut donner une lentille divergente en fonction de la position de l'objet (envisager un objet réel ou virtuel).

## ■ Focométrie

Dans cette partie, on utilise un banc optique gradué sur lequel peuvent coulisser des supports, munis d'un repère permettant de déterminer leur position sur le banc. Ces supports peuvent recevoir les différents éléments utilisés en optique au laboratoire : lampe, objet, lentille, miroir, écran...



### □ Exercice 2.5. Vérification expérimentale des formules

On place un objet à la graduation « 0 » du banc (l'objet est constitué par une lettre imprimée sur un papier calque et éclairé par une lampe blanche). On place alors une lentille convergente sur un deuxième support et un écran sur un troisième. Les trois supports étant sur le banc (la lentille entre l'objet et l'écran), on déplace l'écran de façon à observer une image nette.

On note alors la graduation  $x_1$  de la lentille et celle  $x_2$  de l'écran et on reporte dans un tableau les différentes valeurs obtenues (en cm) :

$x_1$	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	15,0	20,0	25,0	30,0	40,0	50,0
$x_2$	79,2	51,1	41,0	37,3	33,0	32,1	33,2	36,9	41,1	50,3	59,8

1. On note  $A$  la position de l'objet,  $O$  celle de la lentille et  $A'$  celle de l'écran. Représenter graphiquement  $\frac{1}{OA'}$  en fonction de  $\frac{1}{OA}$  et vérifier la formule de conjugaison.
2. Déterminer la vergence de la lentille utilisée.

3. On peut associer un diaphragme à la lentille sur son support. Quel est son effet ? Est-ce judicieux pour ces mesures expérimentales ?

□ **Exercice 2.6. Méthode de Bessel\***

On place l'objet sur la graduation « 0 » et on fixe l'écran à une distance  $D = 60,0$  cm de lui. On déplace ensuite la lentille entre ces deux positions à la recherche d'une image nette sur l'écran.

1. Montrer qu'il existe deux positions de la lentille donnant une image nette, à condition que  $D$  soit supérieure à une certaine valeur (à préciser).
2. On note  $d$  la distance entre ces deux positions. Montrer qu'on peut exprimer la focale  $f'$  de la lentille en fonction de  $D$  et  $d$ .
3. On a mesuré  $d = 41,0$  cm. Calculer la focale de la lentille.

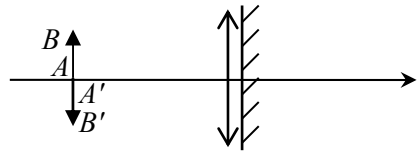
□ **Exercice 2.7. Méthode de Silbermann**

On place l'objet, la lentille et l'écran dans cet ordre sur le banc de façon à observer sur l'écran une image renversée et de même taille que l'objet. On note  $D$  la distance entre l'objet et l'écran.

1. Montrer qu'il existe alors une relation simple entre  $D$  et la focale  $f'$  de la lentille.
2. Vérifier qu'il s'agit d'un cas particulier de la situation de l'exercice précédent.

□ **Exercice 2.8. Méthode d'autocollimation\***

On place sur un même support une lentille mince convergente de focale  $f'$  et un miroir plan. On déplace alors l'ensemble de façon à former sur le support de l'objet une image renversée et de même taille que l'objet.



1. Montrer que, dans ce cas, la distance entre le système {lentille + miroir} et l'objet correspond à la focale de la lentille.
2. Justifier par une représentation graphique modélisant le trajet des rayons lumineux.

□ **Exercice 2.9. Mesure de la focale d'une lentille divergente\***

1. Pourquoi les méthodes de Bessel et de Silbermann (exercices 4.6 et 4.7) ne sont-elles pas utilisables pour des lentilles divergentes ?
2. Pour mesurer la focale d'une lentille divergente, on peut utiliser l'additivité des vergences pour des lentilles accolées. On place par exemple sur un même support une lentille convergente de focale  $f'_1 = 8,0$  cm et une lentille divergente de focale inconnue  $f'_2$ . L'association de ces deux lentilles donne d'un objet placé à 70 cm du support une image réelle située 25,5 cm après. Déterminer  $f'_2$ .
3. On peut aussi utiliser la méthode de Badal. Pour cela on utilise deux lentilles convergentes  $L_1(O_1, f'_1)$  et  $L_2(O_2, f'_2)$  séparées par une distance  $O_1O_2$  supérieure à  $f'_2$ . On place alors l'objet dans le plan focal objet de  $L_1$  de façon à obtenir une image réelle dans le plan focal image de  $L_2$ . On note la position de l'image. On place ensuite la lentille divergente de focale  $f'$  inconnue dans le plan focal objet de  $L_2$ . L'image définitive  $A'B'$  se forme alors au-delà de  $F'_2$  : on note  $\delta$  le déplacement de cette image provoqué par la lentille divergente. Exprimer  $f'$  en fonction de  $f'_2$  et  $\delta$ .

## ■ L'œil et la loupe

### □ Exercice 2.10. Pouvoir séparateur de l'œil

Le pouvoir séparateur d'un œil emmétrope est  $\alpha_{\min} = 3,0 \cdot 10^{-4}$  rad, c'est-à-dire que deux points peuvent être vus distinctement si leur écart angulaire est supérieur à cette valeur.

1. Jusqu'à quelle distance cet œil peut-il distinguer deux traits parallèles séparés de  $d = 2,0$  mm ?
2. Quelle doit être la taille d'une lettre d'un panneau autoroutier pour être lue à 250 m ? (Faire l'étude avec la lettre E.)
3. Si on assimile l'œil à une lentille convergente associée à un écran (rétine) placé à une distance fixe  $L = 20$  mm derrière, quelle est la taille moyenne d'un récepteur de la rétine ?

### □ Exercice 2.11. Loupe et oculaire\*

1. Toto utilise une lentille mince convergente de focale  $f' = 3,0$  cm comme loupe. Son œil, emmétrope (PP à la distance  $d_m = 25$  cm), est au foyer image de la lentille. Dans ces conditions, il observe un objet  $AB$  de hauteur 5,0 mm, placé au foyer objet.

Déterminer le *grossissement commercial* de cette loupe, défini comme le rapport entre l'angle  $\alpha'$  sous lequel on voit l'image à l'infini de l'objet à travers la loupe, et l'angle  $\alpha$  sous lequel on verrait ce même objet à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte  $d_m$ .

2. Un oculaire est constitué de deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  identiques à la lentille précédente, et séparées par une distance  $\overline{O_1O_2} = 2,0$  cm.

a) Déterminer les foyers principaux  $F$  et  $F'$  de ce système.

b) Toto observe l'objet précédent, placé à 0,75 cm devant  $O_1$ , son œil étant placé en  $F'$ . Déterminer le grossissement commercial de ce système.

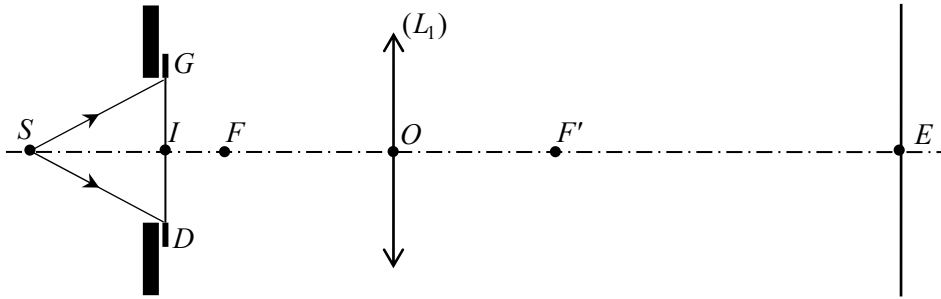
## ■ Projecteurs et appareils photographiques

### □ Exercice 2.12. Projection

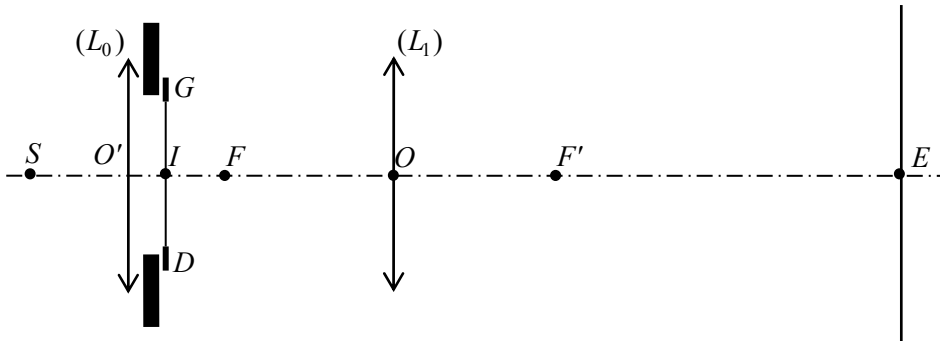
1. On veut projeter sur un mur l'image d'une diapositive de taille 24 mm  $\times$  36 mm à l'aide d'une lentille de focale  $f' = 8,0$  cm. Le mur étant à 5,0 m derrière la lentille, préciser la position de la diapositive et les dimensions de l'image nette obtenue sur le mur.
2. On souhaite à présent obtenir une image 40 fois plus grande que l'objet. Ce dernier restant fixe, indiquer dans quel sens et de quelle distance il faut déplacer la lentille et l'écran.

### □ Exercice 2.13. Conception d'un projecteur de diapositives\*\*

1. On cherche à concevoir un projecteur de diapositives (24 mm  $\times$  36 mm) permettant d'obtenir une image de 1,20 m de large sur un écran situé en  $E$  à  $L = 3,0$  m du centre optique de la lentille ( $L_1$ ) pour une diapositive horizontale. On note  $e = \overline{IF}$  et  $m = \overline{F'E}$ . On considère la source lumineuse  $S$  comme ponctuelle. La diapositive est centrée en  $I$  sur l'axe optique.



- Quel est le grandissement  $\gamma$  nécessaire ? Commenter le signe.
  - Déterminer graphiquement les images  $G'$  et  $D'$  des points  $G$  et  $D$  représentant respectivement les bords gauche et droit de la diapositive. Dans quel sens faut-il placer la diapositive ?
  - Déterminer les expressions de  $m$ ,  $e$  et  $f'$  en fonction du grandissement  $\gamma$  et de  $L$ . Faire l'application numérique pour le grandissement souhaité.
  - On souhaite pouvoir obtenir une image nette par déplacement de l'objectif pour des valeurs de  $L$  comprises entre 2,0 m et 5,0 m. Déterminer la course  $\overline{O_{\min}O_{\max}}$  de l'objectif pour satisfaire à cette condition.
- 2.** Pour réaliser un projecteur de meilleure qualité, on interpose une lentille  $(L_0)$  convergente de centre  $O'$  entre la source et la diapositive. On la place de sorte que le pinceau lumineux issu de  $S$  englobe toute la largeur de la diapositive et se focalise en  $O$ , centre optique de la lentille  $(L_1)$ .



- Tracer l'enveloppe « utile » du pinceau lumineux entre  $S$  et  $E$  (définie par les rayons limites) et déterminer graphiquement les foyers de  $(L_0)$ .
- La focale de  $(L_0)$  est  $f'_0 = 1,8$  cm et la distance  $SI$  est fixée à 5,0 cm. Déterminer la position  $O'_{\min}$  de  $(L_0)$  correspondant à la position  $O_{\min}$  de  $(L_1)$ .
- Déterminer la position  $O'_{\max}$  de  $(L_0)$  correspondant à la position  $O_{\max}$  de  $(L_1)$ . Commenter.
- Quel est l'intérêt du placement de  $(L_0)$  ?

*D'après CCINP*

### □ Exercice 2.14. Appareil photographique

Madame Michu utilise encore son vieil appareil photographique argentique, avec une pellicule de taille  $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ .

L'objectif de l'appareil est assimilable à une lentille convergente de focale  $f' = 5,0 \text{ cm}$ , et la pellicule est située derrière la lentille, à une distance  $d$ , réglable, de son centre  $O$ .  $d$  peut varier entre  $50 \text{ mm}$  et  $55 \text{ mm}$ .

1. Madame Michu veut photographier un arbre de  $10 \text{ m}$  de haut, situé à une distance de  $50 \text{ m}$ . Quelle sera la hauteur de l'image de l'arbre sur la pellicule ?
2. Jusqu'à quelle distance peut-elle s'approcher pour avoir toujours l'arbre en entier sur la pellicule ?
3. Montrer qu'il existe une distance minimale en deçà de laquelle il n'y aura pas d'image.

### □ Exercice 2.15. Mesure de la profondeur d'un pont\*

#### Résolution de problème

Voici la photographie d'un pont qui, comme l'indique le panneau, est interdit aux véhicules dont la hauteur excède  $4,3 \text{ m}$ . Cette image a été prise avec un appareil photo numérique équipé d'un capteur de 15 millions de pixels, et dont la taille est de  $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ . L'objectif de cet appareil photo a une focale de  $35 \text{ mm}$ .



À partir de cette photo, estimer la profondeur du pont.



### □ Exercice 2.16. Macrophotographie\*

Le petit Toto souhaite photographier son grillon Gaspard et obtenir des images de grande taille. Pour cela il doit s'approcher très près de l'insecte, mais le problème est alors d'obtenir une image nette. L'objectif de son appareil photographique est constitué d'une lentille convergente  $L_1$  de focale  $f'_1 = 75$  mm et de centre  $O_1$ . Le capteur numérique (équivalent de la pellicule dans les anciens appareils) est à une distance  $d$  de  $O_1$  derrière la lentille :  $d$  est une distance réglable entre  $f'_1$  et  $f'_1 + \tau$  (où  $\tau = 8,0$  mm est le tirage de l'objectif).

1. Le grillon est assimilé à un objet  $AB$  de taille 1,5 cm, et Toto approche son objectif jusqu'à 20 cm de l'animal. Peut-il le photographier en ayant une image nette sur le capteur ?

2. Toto fixe devant l'objectif une lentille additionnelle  $L_2$  (appelée *bonnette* en français, *close-up lens* en anglais), convergente, de centre  $O_2$ , de vergence  $V_2 = +4,0 \delta$  ; la distance  $D = O_2O_1$  est constante et égale à 2,0 cm.



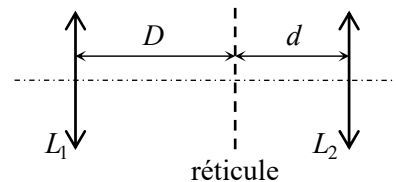
a) Le tirage étant inchangé, déterminer l'ensemble des points  $A$  de l'axe qui peuvent, après mise au point, être photographiés (c'est-à-dire donnant une image nette sur le capteur) ; on indiquera leurs positions par rapport à la bonnette (c'est-à-dire  $\overline{O_2A}$ ).

b) Toto photographie son grillon en s'approchant toujours à 20 cm (soit  $\overline{O_2A} = -20$  cm). La mise au point étant faite, calculer la taille de l'image  $A'B'$  sur le capteur.

## ■ Instruments d'observation

### □ Exercice 2.17. Viseur à frontale fixe\*

Un viseur à frontale fixe est constitué : d'un objectif, lentille mince  $L_1$  convergente de focale  $f'_1 = 7,0$  cm et de centre  $O_1$  ; d'un réticule distant de  $D = 14$  cm de l'objectif ; et d'un oculaire, lentille mince  $L_2$  convergente de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2 = 3,0$  cm, placé à la distance  $d$  du réticule.



1. Un œil « normal » voit sans accommodation à l'infini. En déduire la distance  $d$  pour que l'œil puisse voir le réticule sans accommoder.

2. On cherche à voir simultanément l'objet visé et le réticule.

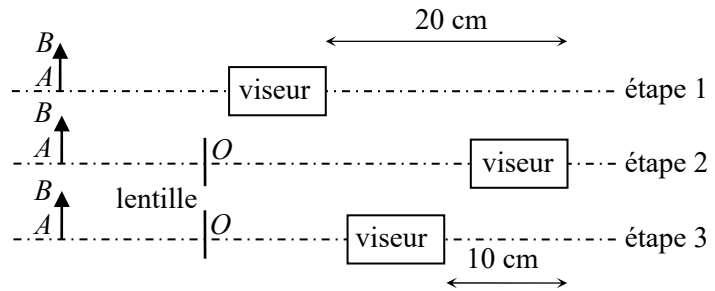
a) Où doit-on placer un objet pour pouvoir le voir à travers le viseur ? On demande l'expression littérale de  $\overline{O_1A}$  et l'application numérique.

b) Cette position dépend-elle de la nature de l'œil (« normal » ou myope) ?

c) Justifier le nom de « viseur à frontale fixe ».

3. Le viseur est utilisé pour mesurer la distance focale  $f'$  d'une lentille inconnue. Tout d'abord, on vise l'objet  $AB$  et on note la position du viseur (étape 1).

Ensuite, on place la lentille après l'objet et on vise son centre  $O$  à l'aide d'une marque faite sur le verre de la lentille (étape 2) ; pour cela, on doit reculer le viseur de  $x_1 = 20$  cm. Enfin, pour la visée de  $A'B'$  à travers la lentille, on doit avancer le viseur de  $x_2 = 10$  cm (étape 3).



- Préciser les valeurs de  $\overline{OA}$  et  $\overline{OA'}$ .
- En déduire la valeur de  $f'$ .

### □ Exercice 2.18. Lunette astronomique\* \*

On considère une lunette astronomique, comportant un objectif constitué d'une lentille mince convergente de centre  $O_1$  et de focale  $f'_1 = \overline{O_1F'_1} > 0$  et un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2 = \overline{O_2F'_2} > 0$ . Ces deux lentilles ont même axe.

1. On souhaite observer la planète Mars à travers la lunette, en formant un système afocal.

- Quelle est la conséquence sur la position des lentilles ?
- Faire un schéma en prenant  $f'_1 = 5f'_2$  et représenter l'image intermédiaire notée  $A'B'$ .

c) On veut photographier la planète. Où faut-il placer la pellicule ?

2. On note  $\alpha'$  le diamètre angulaire de la planète vue à travers la lunette (c'est-à-dire l'angle entre les rayons extrêmes de l'image) et  $\alpha$  le diamètre angulaire de la planète vue à l'œil nu.

- L'image finale est-elle droite ou renversée ?
  - Exprimer le grossissement de la lunette, rapport entre  $\alpha'$  et  $\alpha$ .
3. On veut augmenter le grossissement et redresser l'image. Pour cela, on intercale entre l'objectif et l'oculaire une lentille mince convergente  $L_3$  de centre  $O_3$  et de focale  $f'_3 = \overline{O_3F'_3} > 0$ , qu'on place de telle sorte que l'image finale à travers l'ensemble soit à l'infini.
- Quel couple de points doit conjuguer  $L_3$  pour qu'il en soit ainsi ?
  - Faire un schéma. On notera  $A'B'$  la première image intermédiaire et  $A''B''$  la deuxième.
  - On appelle  $\gamma_3$  le grandissement de la lentille  $L_3$ . Exprimer  $\overline{O_3F'_1}$  en fonction de  $\gamma_3$  et  $f'_3$ .
  - Déterminer le nouveau grossissement  $G'$  de l'ensemble en fonction de  $G$  et  $\gamma_3$ .

### □ Exercice 2.19. Lunette de Galilée\* \*

Une lunette de Galilée comprend un objectif, assimilable à une lentille mince  $L_1$  de centre  $O_1$  et de vergence  $V_1 = +5,0 \delta$ , et un oculaire, assimilable à une lentille mince  $L_2$  de centre  $O_2$  et de vergence  $V_2 = -20 \delta$ .

1. Déterminer la nature des deux lentilles et les valeurs de leurs distances focales images.

2. La lunette est du type « afocal ».

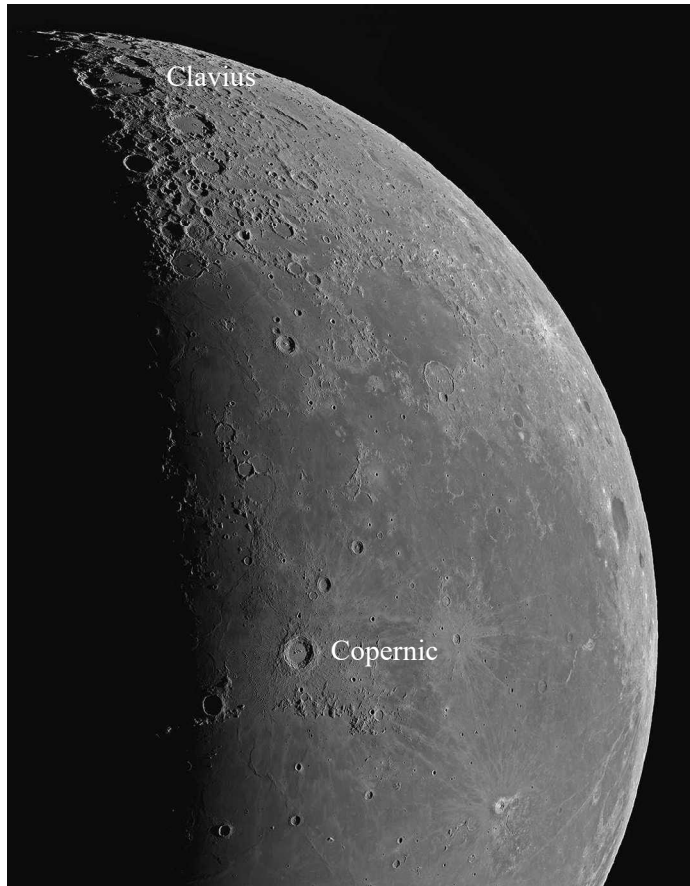
- Que signifie ce mot ? Quelle est alors nécessairement la distance  $d = \overline{O_1O_2}$  ?

- b) Faire un schéma de deux rayons issus d'un objet à l'infini, dans une direction faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique ; on notera  $\alpha'$  l'angle entre les rayons finaux et l'axe.
- c) Calculer le grossissement  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  en fonction des distances focales  $f_1'$  et  $f_2'$ .

3. Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (de diamètre 96 km) et Clavius (de diamètre 240 km).

- a) L'astronome voit-il ces cratères à l'œil nu ? à l'aide de la lunette ?

*Données numériques :* distance Terre-Lune  $d_{TL} = 3,8 \cdot 10^5$  km ;  
limite de résolution de l'œil  $\alpha_{\min} = 3 \cdot 10^{-4}$  rad.



- b) La planète Vénus occultera Jupiter le 22 novembre 2005. Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé) pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ?

*Données supplémentaires :* diamètre de Vénus  $D_V = 12150$  km ; distance Terre-Vénus dans cette configuration  $d_{TV} = 4,5 \cdot 10^7$  km ; diamètre de Jupiter  $D_J = 145800$  km ; distance Terre-Jupiter  $d_{TJ} = 6,3 \cdot 10^8$  km.

*D'après CCINP*

### □ Exercice 2.20. Microscope optique\* \*

Un microscope optique porte les indications suivantes :  $\times 40$  sur son objectif ;  $\times 10$  sur l'oculaire. La notice constructeur précise : intervalle optique  $\Delta = 16$  cm. *La signification de ces indications sera précisée dans la suite.* Le microscope sera modélisé par deux lentilles minces convergentes, l'objectif  $L_1$  (de diamètre  $d = 7,0$  mm) et l'oculaire  $L_2$ . Il est réglé pour donner une image à l'infini d'un objet réel  $AB$ , perpendiculaire à l'axe optique,  $A$  étant placé sur l'axe,

légèrement en avant du foyer objet de l'objectif. Cette image est observée par un œil emmétrope placé au voisinage du foyer image  $F'_2$  de l'oculaire. L'œil nu voit nettement des objets situés entre la distance  $\delta = 25$  cm et l'infini.

1. Faire un schéma du dispositif (sans respecter l'échelle), et tracer soigneusement la marche de deux rayons lumineux issus du point  $B$  de l'objet  $AB$ , l'un émis parallèlement à l'axe optique, l'autre passant par  $F_1$  (foyer objet de  $L_1$ , de centre optique  $O_1$ ).
2. L'indication sur l'oculaire ( $\times 10$ ) est le *grossissement commercial*, c'est-à-dire le rapport de l'angle sous lequel on voit l'image à l'infini d'un objet à travers l'oculaire *seul* et de l'angle sous lequel on voit ce même objet à l'œil nu lorsqu'il est à la distance minimale de vision distincte ; on note ce grossissement  $G_2 = 10$ . Déterminer la focale image  $f'_2$  de l'oculaire.
3. L'intervalle optique est la distance  $F_1F'_2$ . La valeur absolue du *grandissement* de l'objet  $AB$  par l'objectif est :  $|\gamma_1| = 40$  (c'est l'indication  $\times 40$ ). Calculer  $f'_1$ , distance focale image de la lentille équivalente à l'objectif. Calculer la distance  $O_1A$  permettant de positionner l'objet.
4. Calculer le grossissement commercial  $G$  du microscope.
5. On appelle cercle oculaire l'image de la monture de l'objectif à travers l'oculaire. Déterminer sa position par rapport à  $F'_2$  et son diamètre. Quel est l'intérêt de placer l'œil dans le plan du cercle oculaire ? Commenter la valeur trouvée pour son diamètre.

*D'après Centrale-Supélec*

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 4.4.* Pour déterminer si l'image est réelle ou virtuelle, chercher le signe de  $\overline{OA'}$  à partir de la formule de conjugaison. Pour l'objet virtuel, il faudra encore distinguer deux cas (position avant ou après  $F$ ).

*Exercice 4.5.* Attention à bien utiliser des mesures *algébriques*.

*Exercice 4.6.* Noter  $x$  la distance entre l'objet et la lentille et appliquer la formule de conjugaison en utilisant  $x$ .

*Exercice 4.10.* Faire un schéma pour chaque cas et appliquer une relation trigonométrique.

*Exercice 4.11.* Pour la question 2.a, repartir de la définition de chaque foyer pour un système optique centré quelconque.

*Exercice 4.12.* Question 2 : calculer séparément  $\overline{OA'}$  et  $\overline{OA}$  à partir des deux équations disponibles (formules de grandissement et de conjugaison), en faisant bien attention au signe du grandissement.

*Exercice 4.17.* Question 3 : la distance entre le viseur et l'objet visé est toujours la même (une fois le réglage effectué).

*Exercice 4.20.* À la question 5, partir de la définition du cercle oculaire pour lui appliquer les formules de conjugaison et de grandissement ; pour son utilité, réfléchir aux rayons qui le traversent.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	faux

1. L'image du foyer principal objet est un point à l'infini sur l'axe optique.

4. On peut le montrer avec la formule de conjugaison :  $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} + \frac{1}{OA}$ . Or  $\overline{OF'} < 0$  puisque la lentille est divergente, et  $\overline{OA} < 0$  car l'objet est réel, donc  $\overline{OA'} < 0$  et l'image est virtuelle.

5. Un grandissement négatif indique que l'image est *renversée* par rapport à l'objet.

6. Ce sont les *vergences* qui s'ajoutent.

9. Le viseur à frontale fixe est réglé pour observer des objets à *distance finie* (généralement quelques dizaines de centimètres) : il a donc un foyer objet, où on place l'objet à observer.

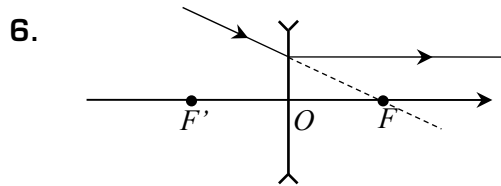
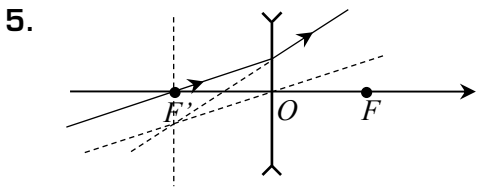
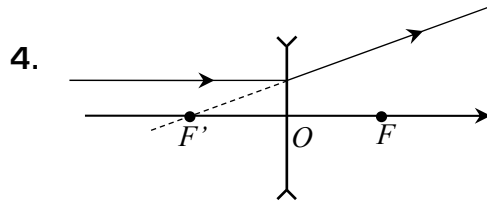
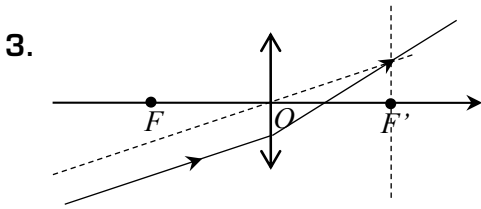
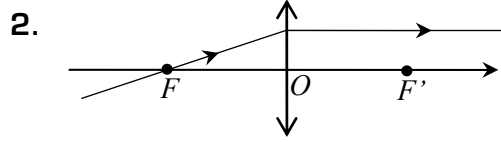
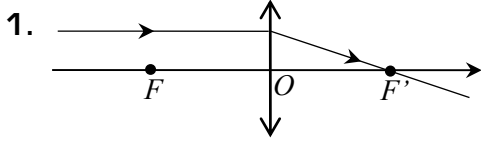
10. On regarde dans l'*oculaire*... comme son nom l'indique !

### □ Les erreurs classiques

- Il faut bien connaître les définitions pour éviter des confusions (par exemple, le foyer image  $F'$  d'une lentille n'est pas l'image de son foyer objet  $F$ ).
- Pour les constructions, commencer toujours par placer les points caractéristiques de chaque lentille, en veillant à ne pas confondre les lentilles convergentes et divergentes.
- Il faut toujours construire les rayons en respectant scrupuleusement les méthodes, sans chercher à se fier à une « intuition »...
- La difficulté la plus fréquente concerne l'objet virtuel (c'est-à-dire à droite de la lentille). Ne pas oublier qu'il est l'intersection de supports de rayons *incidents* : ces rayons se trouvent donc à *gauche* de la lentille, mais leurs supports (prolongements) se coupent à droite. Ne pas tracer des rayons allant dans l'autre sens !
- Pour les calculs, ne pas confondre distances et mesures algébriques, et bien faire attention à tous les signes.
- Dans les formules de Newton, le point image  $A'$  est repéré par rapport au foyer image  $F'$  : mesure algébrique  $\overline{F'A'}$  et non  $\overline{FA'}$ .

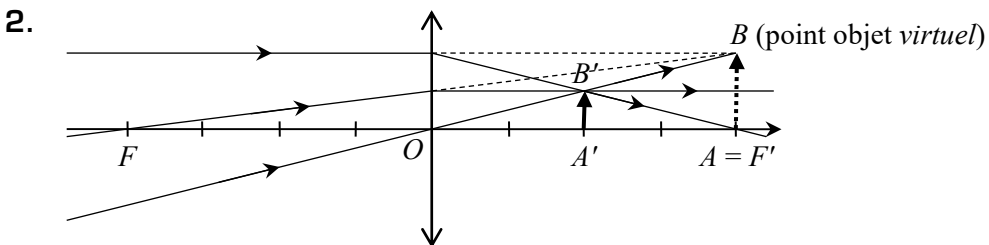
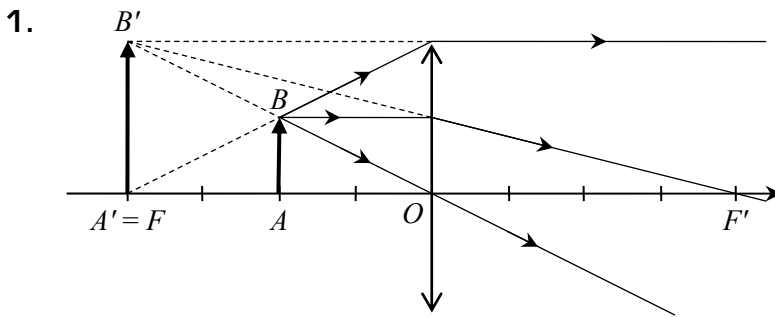
# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 2.1



⇒ Méthodes 2.1 et 2.2

## Exercice 2.2



⇒ Méthodes 2.1 et 2.3

### Exercice 2.3

1. Les données sont :  $\overline{AB} = +0,5 \text{ cm}$ ,  $\overline{OF'} = +20 \text{ cm}$  et  $\overline{OA} = -30 \text{ cm}$ . Formule de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}}$$

AN  $\boxed{\overline{OA'} = +60 \text{ cm}}$  : l'image est donc réelle.

La formule de grandissement donne  $\boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}}$ . AN  $\boxed{\overline{A'B'} = -1,0 \text{ cm}}$ .

⇒ Méthode 2.4

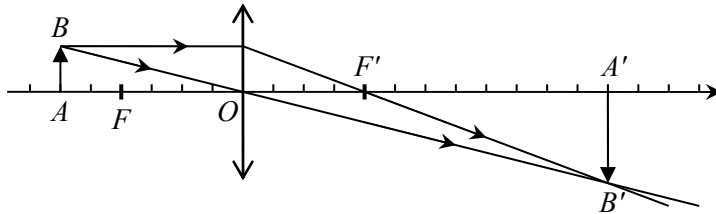
2. On utilise  $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = -10 \text{ cm}$ , et la formule de conjugaison conduit à  $\boxed{\overline{F'A'} = -\frac{\overline{OF'}^2}{\overline{FA}}}$ .

AN  $\boxed{\overline{F'A'} = +40 \text{ cm}}$ , ce qui est cohérent avec le résultat précédent, puisque  $\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = +60 \text{ cm}$ . Ensuite on applique la formule de grandissement :

$$\boxed{\overline{A'B'} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \cdot \overline{AB}}$$

AN  $\boxed{\overline{A'B'} = -1,0 \text{ cm}}$ .

3.

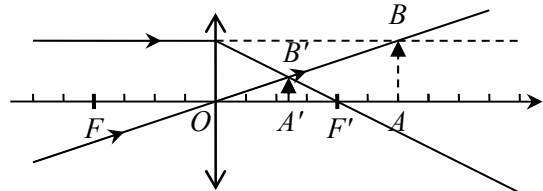


⇒ Méthode 2.3

4.  $\overline{OA} = +30 \text{ cm}$  donc, avec les formules littérales précédentes, on trouve cette fois

$$\boxed{\overline{OA'} = +12 \text{ cm}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{A'B'} = +0,2 \text{ cm}}$$

L'image est donc réelle, droite et plus petite que l'objet.



### Exercice 2.4

Pour une lentille divergente,  $\overline{OF'} < 0$ .

– Si l'objet est réel,  $\overline{OA} < 0$  et d'après la formule de Descartes,  $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}}$  donc  $\overline{OA'} < 0$  également : l'image est donc virtuelle.

De plus, la formule de grandissement  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}}$  montre que celui-ci est positif et inférieur à 1. L'image sera donc virtuelle, droite et plus petite que l'objet.

●\* Ne pas oublier que pour une lentille divergente,  $F'$  est avant la lentille et  $F$  après.

– Si l'objet est virtuel ( $\overline{OA} > 0$ ), il faut distinguer deux cas.

Si  $A$  est entre  $O$  et  $F$ , alors  $0 < \overline{OA} < \overline{OF}$  donc d'après la formule de conjugaison,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OF}} > 0 \text{ d'où } \overline{OA'} > 0 : \text{l'image est réelle. D'autre part, la formule de}$$

$$\text{grandissement } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OF} - \overline{OA}} \text{ montre qu'il est positif et supérieur à 1.}$$

L'image est donc réelle, droite et plus grande que l'objet.

Si  $A$  est après  $F$ , alors  $0 < \overline{OF} < \overline{OA}$  donc d'après la formule de conjugaison,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OF}} < 0 \text{ d'où } \overline{OA'} < 0 : \text{l'image est virtuelle. D'autre part, la formule}$$

$$\text{de grandissement } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF'}}{\overline{OF'} + \overline{OA}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OF} - \overline{OA}} \text{ montre qu'il est maintenant négatif (image}$$

renversée). On peut alors envisager deux cas : si  $\overline{OF} < \overline{OA} < 2\overline{OF}$  l'image est plus grande que l'objet, et si  $\overline{OA} > 2\overline{OF}$  l'image est plus petite.

On peut rassembler ces résultats dans un tableau :

Position de l'objet $AB$	Caractéristiques de l'image $A'B'$
$\overline{OA} < 0$	virtuelle, droite et plus petite
$0 < \overline{OA} < \overline{OF}$	réelle, droite et plus grande
$\overline{OF} < \overline{OA} < 2\overline{OF}$	virtuelle, renversée et plus grande
$\overline{OA} > 2\overline{OF}$	virtuelle, renversée et plus petite

Il reste bien sûr le cas particulier (théorique)  $\overline{OA} = \overline{OF}$ , c'est-à-dire l'objet au foyer principal objet, qui donne une image à l'infini (donc de taille infinie).

### Exercice 2.5

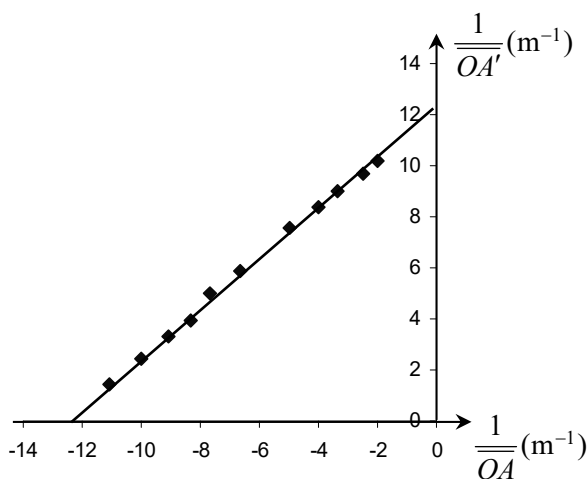
$$1. \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{1}{x_1} \text{ et } \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

On trace le graphe demandé et en utilisant les fonctions du grapheur, on obtient une équation :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = 0,97 \cdot \frac{1}{\overline{OA}} + 12,26.$$

Si on admet que  $0,97 \approx 1$ , on retrouve la formule de conjugaison :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \text{constante}}$$



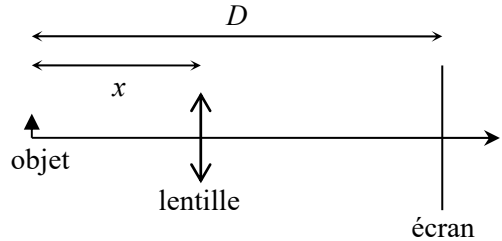


2. La constante correspond à la vergence de la lentille exprimée en dioptries :  $V = +12,26 \delta$ , soit une focale  $f' = +8,1 \text{ cm}$ .

3. Le diaphragme permet de se placer dans les conditions de Gauss et donc d'améliorer la netteté de l'image, mais dans ce cas précis, cela risque d'étendre la zone des positions de l'écran donnant une image à peu près nette. Ce n'est donc pas conseillé si on veut déterminer précisément la position de l'écran.

### Exercice 2.6

1. Si on note  $x$  la distance entre l'objet et la lentille pour laquelle on a une image nette sur l'écran, la formule de conjugaison s'écrit  $\frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'}$  d'où  $x^2 - Dx + Df' = 0$ . Le discriminant  $\Delta = D^2 - 4Df'$  est positif si  $D > 4f'$ .



Cette condition étant remplie, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$$

2.  $d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$  et on en tire  $f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$ .

3. AN  $f' = 8,0 \text{ cm}$ .

⚠\* Ne pas oublier de mettre le chiffre 0 après la virgule. Si vous écriviez 8 cm, cela voudrait dire que la focale n'est calculée qu'avec un seul chiffre significatif, donc sans les millimètres, ce qui serait d'une précision très médiocre.

### Exercice 2.7

1. L'objet et l'image ayant la même taille,  $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = -1$  et donc  $\overline{OA'} = -\overline{OA}$ . Objet et image sont donc symétriques par rapport à la lentille. Alors la formule de conjugaison entraîne que  $\frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ , soit  $\overline{OA'} = -\overline{OA} = 2\overline{OF'}$ . On en déduit donc  $D = \overline{AA'} = 4f'$ .

2. On reconnaît un cas particulier des calculs précédents, pour lequel  $d = 0$  (c'est-à-dire que l'équation du second degré  $x^2 - Dx + Df' = 0$  a une racine double).

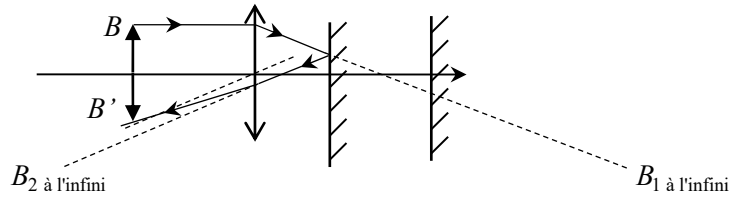
### Exercice 2.8

1. On peut résumer le problème de la façon suivante :  $AB \xrightarrow{L} A_1B_1 \xrightarrow{M} A_2B_2 \xrightarrow{L} A'B'$ .

La lentille donne de  $AB$  une image  $A_1B_1$ , servant d'objet pour le miroir qui en donne une image  $A_2B_2$ ; enfin, la lentille donne de  $A_2B_2$  l'image finale  $A'B'$ .

Si la distance entre l'objet et le système est égale à  $f'$ , alors  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  sont à l'infini et symétriques par rapport au plan du miroir, et  $A'B'$  est alors dans le plan focal de la lentille.

2. On construit le trajet de deux rayons issus de B :



⇒ Méthodes 2.2 et 2.3

✍ La position du miroir n'a pas d'influence sur le résultat.

### Exercice 2.9

1. Les méthodes précédentes utilisent toutes un objet virtuel et son image réelle sur un écran. Or une lentille divergente donne d'un objet réel une image virtuelle non observable sur un écran.

2. On applique la formule de conjugaison au système des deux lentilles, pour trouver sa focale :

$\frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA}$ , d'où  $f' = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$ . AN  $f' = 40,1$  cm. Ensuite, on utilise l'additivité des

vergences :  $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$  d'où  $f_2 = -\frac{f_1 f'}{f_1 - f'}$ . AN  $f_2 = -10,0$  cm.

⇒ Méthode 2.5

3. Avant de placer la lentille divergente, on a la situation suivante :

$$A = F_1 \xrightarrow{L_1} \text{image intermédiaire à l'infini} \xrightarrow{L_2} A' = F_2'$$

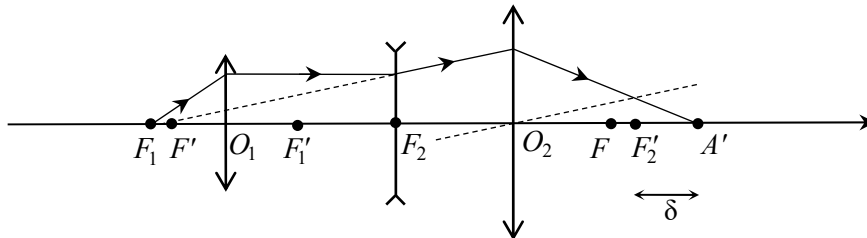
Avec la lentille divergente, la situation devient :

$$A = F_1 \xrightarrow{L_1} \text{image intermédiaire à l'infini} \xrightarrow{L} F' \xrightarrow{L_2} A'$$

$A'$  est donc l'image du foyer image  $F'$  de la lentille divergente par  $L_2$ .

On peut donc appliquer la formule de Newton à ce couple de points :  $\overline{F_2'A'} \cdot \overline{F_2F'} = -f_2'^2$ , soit

$\delta \cdot f' = -f_2'^2$ . On en déduit donc facilement  $f' = -\frac{f_2'^2}{\delta}$ .

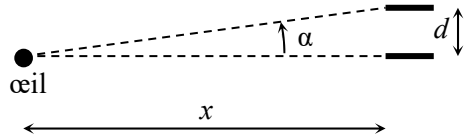


⇒ Méthodes 2.1, 2.2

## Exercice 2.10

1. L'œil pourra distinguer ces lignes s'il les voit sous un angle  $\alpha$  supérieur à  $\alpha_{\min}$ . L'œil doit donc être placé à une distance  $x$  telle que :

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{d}{x} \geq \alpha_{\min}, \text{ soit } \boxed{x \leq \frac{d}{\alpha_{\min}}}. \text{ AN } \boxed{x \leq 6,7 \text{ m}}.$$



2. On retrouve le même problème que pour la question précédente. Soit  $D$  la distance entre l'œil et le panneau, et  $5d$  la hauteur d'une lettre. Celle-ci sera distinguée s'il n'y a pas confusion entre les images des « branches » du E. Il faut donc que  $\frac{d}{D} \geq \alpha_{\min}$ , soit  $d \geq D \cdot \alpha_{\min}$ . La taille

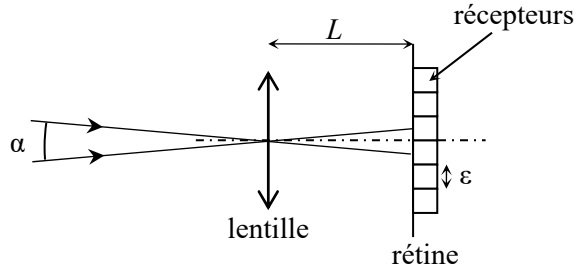


d'une lettre devra donc être de  $\boxed{5d \geq 5D \cdot \alpha_{\min}}. \text{ AN } \boxed{5d \geq 45 \text{ cm}}.$

3. Deux points seront vus distinctement si leurs images se forment sur deux récepteurs différents. L'angle  $\alpha_{\min}$  est donc déterminé par la profondeur  $L$  de l'œil et la taille  $\varepsilon$  d'un récepteur :

$$\alpha_{\min} \approx \tan \alpha_{\min} = \frac{\varepsilon}{L}, \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\varepsilon = L \cdot \alpha_{\min}}. \text{ AN } \boxed{\varepsilon = 6 \mu\text{m}}.$$



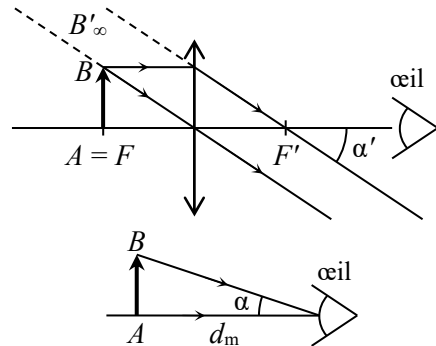
## Exercice 2.11

1. L'objet étant placé au foyer objet de la lentille, l'image finale est à l'infini : elle est alors vue sous un

$$\text{angle } \alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{AB}{f'}.$$

L'objet serait vu à l'œil nu, au PP, sous l'angle

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{AB}{d_m}. \text{ Donc } \boxed{G = \frac{d_m}{f'}}. \text{ AN } \boxed{G = 8,3}.$$



*✎ La donnée de la taille de l'objet n'est pas nécessaire pour déterminer le grossissement, qui est le même pour tout objet assez petit.*

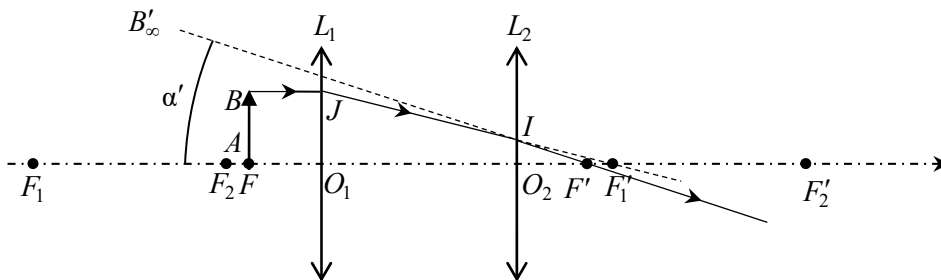
2. a) Le foyer image du système est l'image par le système d'un objet à l'infini et sur l'axe :

$$A_{\infty} \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} F' \text{ donc } A_1 = F'_1 \text{ et } F' \text{ est l'image de } F'_1 \text{ par } L_2.$$

$$\text{Alors } \frac{1}{O_2F'} - \frac{1}{O_2F'_1} = \frac{1}{f'_2} \text{ d'où } \overline{O_2F'} = \frac{\overline{O_2F'_1} \times f'_2}{\overline{O_2F'_1} + f'_2}. \text{ AN } \boxed{\overline{O_2F'} = 0,75 \text{ cm}}.$$

Le foyer image du système est donc situé 0,75 cm derrière  $O_2$  et pour des raisons de symétrie, le foyer objet est situé 0,75 cm devant  $O_1$ .

**b)** Schéma de fonctionnement (proportions non respectées) :



$\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{O_2 I}{O_2 F'_1}$ . Or les triangles  $IO_2 F'_1$  et  $JO_1 F'_1$  sont semblables donc  $\frac{O_2 I}{O_2 F'_1} = \frac{O_1 J}{O_1 F'_1} = \frac{AB}{O_1 F'_1}$   
d'où  $\alpha' \approx \frac{AB \cdot O_2 F'_1}{O_2 F' \cdot O_1 F'_1}$ . Pour un œil emmétrope,  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{AB}{d_m}$  avec  $d_m = 25$  cm donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d_m \cdot O_2 F'_1}{O_2 F' \cdot O_1 F'_1}. \text{ AN } \boxed{G=11}. \text{ L'oculaire a donc un meilleur grossissement que la loupe.}$$

### Exercice 2.12

**1.** La formule de conjugaison de Descartes fournit la position de l'objet :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$

d'où  $\overline{OA} = \frac{\overline{OA'} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OF'} - \overline{OA'}}$ . AN  $\overline{OA} = -8,1$  cm : la diapositive doit être positionnée 8,1 cm avant la lentille, c'est-à-dire juste avant le foyer objet (l'image étant pratiquement à l'infini).

Le grandissement est alors  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 1 - \frac{\overline{OA'}}{\overline{OF'}}$ . AN  $\gamma = -61$ . Les dimensions de l'image seront donc celles de la diapositive multipliées par 61 :  $\boxed{1,5 \text{ m} \times 2,2 \text{ m}}$ .

⇒ Méthode 2.4

**2.** La condition est  $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -40$  (forcément négatif).

Cela donne d'une part  $\overline{F'A'} = -\gamma f'$  d'où  $\overline{OA'} = (1 - \gamma)f'$ . AN  $\overline{OA'} = 3,28$  m : il faut rapprocher l'écran de la lentille de 1,72 m.

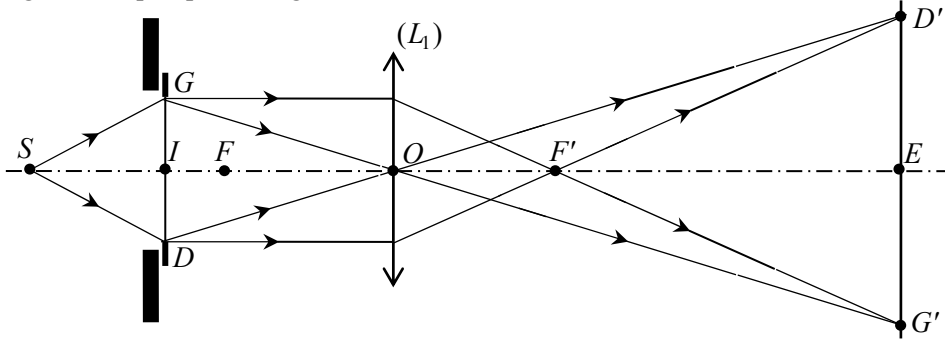
D'autre part,  $\overline{FA} = \frac{f'}{\gamma}$  d'où  $\overline{OA} = f' \left( \frac{1}{\gamma} - 1 \right)$ . AN  $\overline{OA} = -8,2$  cm : la position de la lentille reste pratiquement la même par rapport à l'objet (le calcul donne un éloignement de moins de 1 mm, qu'on obtient en pratique en recherchant la netteté de l'image sur l'écran déjà positionné).

### Exercice 2.13

1. a) En valeur absolue,  $|\gamma| = \frac{1,20}{24 \cdot 10^{-3}} = 50$  si on interprète la « largeur » comme étant la plus petite dimension (24 mm sur la diapositive) ; si on l'interprète plutôt comme la dimension horizontale (36 mm) on obtient  $|\gamma| = 33$ . De plus  $\gamma = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI}} < 0$  donc  $\boxed{\gamma = -50}$  (ou  $\gamma = -33$ ).

Le signe négatif indique que l'image est renversée.

b)



La construction confirme la question précédente : la diapositive doit être montée à l'envers pour obtenir une image à l'endroit.

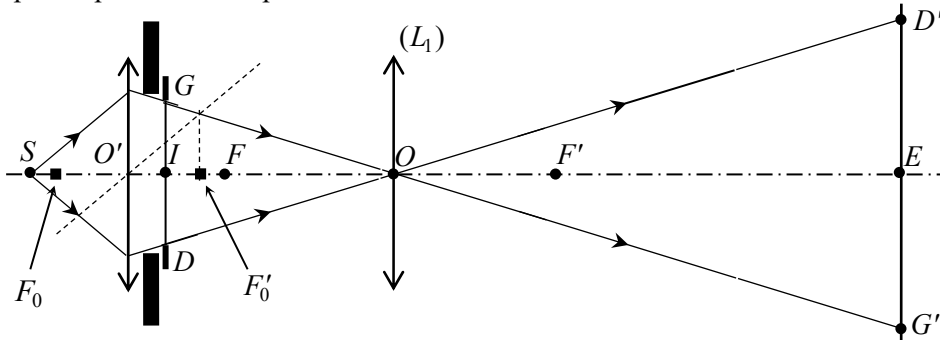
c)  $\gamma = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI}} = \frac{L}{\overline{OI}}$  et  $\frac{1}{\overline{OE}} - \frac{1}{\overline{OI}} = \frac{1}{f'}$  d'où  $\boxed{f' = \frac{L}{1-\gamma}}$ .  $m = L - f'$  soit  $\boxed{m = \frac{\gamma L}{\gamma - 1}}$ . Enfin

$\overline{OI} = -f' - e = \frac{L}{\gamma}$  d'où  $\boxed{e = \frac{L}{\gamma(\gamma - 1)}}$ . AN  $f' = 5,9$  cm ;  $m = 2,9$  ;  $e = 1,2$  mm pour  $\gamma = -50$ .

d)  $f' = \frac{L}{1-\gamma}$  donc  $\gamma = 1 - \frac{L}{f'}$ . Alors  $\overline{OI} = \frac{L}{\gamma} = \frac{L}{1 - L/f'} = \frac{1}{1/L - 1/f'}$  soit  $\overline{OI} = \frac{f' L}{f' - L}$ .

Finalement,  $\boxed{\overline{O_{\min} O_{\max}} = \frac{f' L_{\max}}{f' - L_{\max}} - \frac{f' L_{\min}}{f' - L_{\min}}}$ . AN  $\boxed{\overline{O_{\min} O_{\max}} = 1,1$  mm.

2. a) La taille de l'objet étant inchangée ainsi que les positions de l'écran et de l'objet par rapport à la lentille,  $G'$  et  $D'$  n'ont pas changé de position. D'autre part, les rayons issus de  $(L_0)$  doivent passer par  $G$  et  $O$  d'après les indications données.



Pour déterminer la position des foyers de  $(L_0)$ , on trace une droite parallèle au rayon incident et passant par  $O'$ ; l'intersection de cette droite avec la droite  $(GO)$  est un foyer secondaire image de  $(L_0)$ : sa projection sur l'axe donne donc le foyer principale image  $F'_0$ . Enfin le foyer objet est symétrique par rapport à  $O'$ .

b)  $O'_{\min}$  est l'image de  $S$  par  $(L_0)$  donc  $\frac{1}{O'_{\min} O_{\min}} - \frac{1}{O'_{\min} S} = \frac{1}{f'_0}$ .

D'autre part,  $\overline{SO'_{\min}} + \overline{O'_{\min} O_{\min}} = \overline{SO_{\min}} = SI + \frac{f' L_{\min}}{L_{\min} - f'}$ , que nous noterons  $k = 11,06$  cm.

La formule de conjugaison s'écrit donc  $\frac{k}{(k - \overline{SO'_{\min}}) \cdot \overline{SO'_{\min}}} = \frac{1}{f'_0}$ , soit, en posant  $x = \overline{SO'_{\min}}$ ,

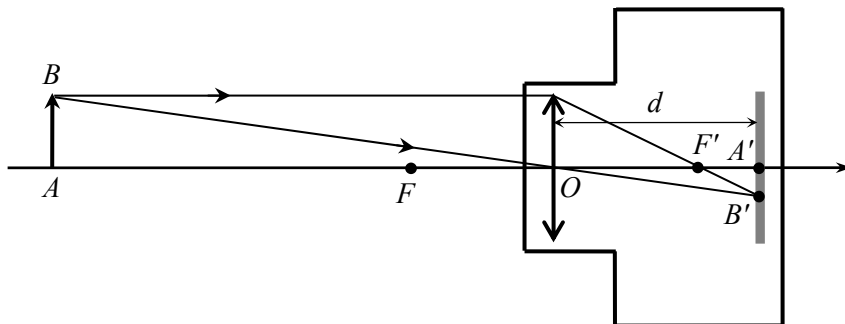
$x^2 - kx + kf'_0 = 0$ . La seule solution acceptable est  $x = \overline{SO'_{\min}} = 2,26$  cm.

c) L'équation est la même; seule la valeur de  $k$  change:  $k = 10,95$  cm. On obtient donc de la même façon la solution  $x = \overline{SO'_{\max}} = 2,27$  cm.

Ces deux valeurs sont pratiquement identiques: la lentille  $(L_0)$  peut être placée à 2,3 cm de  $S$ .

d) La lentille  $(L_0)$  concentre les rayons provenant de la source au voisinage du centre optique de la lentille  $(L_1)$ : les conditions de Gauss sont alors mieux respectées, ce qui permet d'avoir des images plus nettes sur l'écran (meilleur stigmatisme).

### Exercice 2.14



1.  $\overline{OA} = -50$  m,  $\overline{OF'} = +0,050$  m et  $\overline{AB} = +10$  m. Déterminons d'abord la position de l'image. La formule de Descartes donne  $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}} \approx \overline{OF'} = 5,0$  cm car  $|\overline{OA}| \gg |\overline{OF'}|$ .

*L'objet est assez éloigné pour pouvoir être considéré à l'infini, d'où le fait que son image soit au foyer image.*

*Un calcul « exact » semble donner  $\overline{OA'} = +5,005$  cm, mais il serait absurde d'écrire ce résultat car la précision des données n'est que de deux chiffres significatifs.*

Alors d'après la formule de grandissement:  $\overline{A'B'} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \overline{AB}$ . AN  $\overline{A'B'} = -1,0$  cm: l'image de l'arbre sur la pellicule est renversée et mesure 10 mm (elle tient donc sur la pellicule).

2. Il faut que la taille de l'image de l'arbre sur la pellicule soit inférieure à  $L = 36$  mm.

Cela se traduit par  $\overline{A'B'} > -L$  ou encore  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} > -\frac{L}{\overline{AB}}$ , soit  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} < -\frac{\overline{AB}}{L}$ .

Or, d'après la formule de conjugaison,  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF'}}$ .

La condition devient donc  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OF'}} < -\frac{\overline{AB}}{L} - 1$  soit  $\overline{OA} < -\overline{OF'} \left( \frac{\overline{AB}}{L} + 1 \right)$ . AN  $\overline{OA} < -14$  m.

Il faut donc que l'arbre soit au moins à 14 m de l'appareil pour être entièrement sur la photo.

☞ Attention aux signes des mesures algébriques dans la résolution des inégalités !

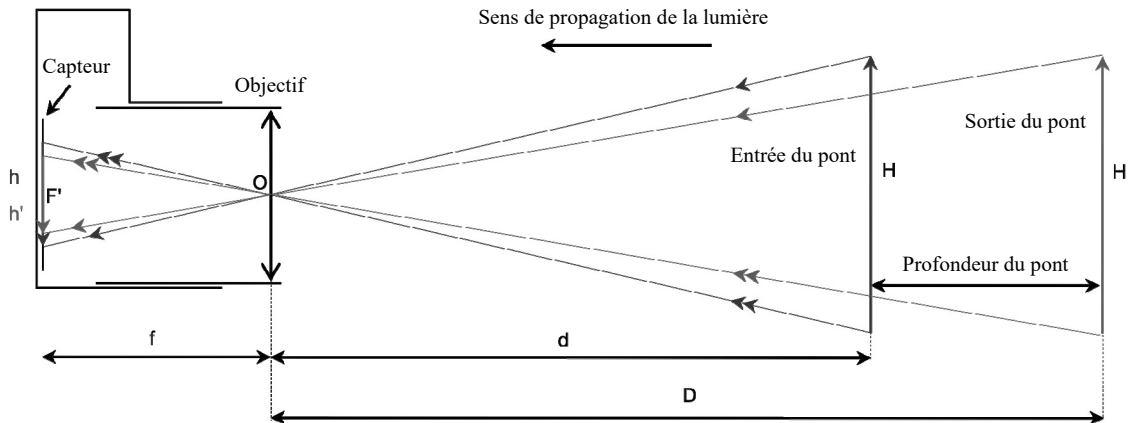
3. L'image ne peut pas, d'après les caractéristiques de l'appareil, se situer à plus de 55 mm de la lentille, ce qui se traduit par  $\overline{OA'} < d_{\max} = 55$  mm. On en tire  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}} > \frac{1}{d_{\max}} - \frac{1}{\overline{OF'}}$ . Or

$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA}}$ , la condition devient donc  $\overline{OA} < \frac{f' \cdot d_{\max}}{f' - d_{\max}}$ . AN  $\overline{OA} < -0,55$  m. Il ne sera donc pas possible de photographier un objet situé à moins de 55 cm de l'appareil.

⇒ Méthode 2.4

### Exercice 2.15

- On note :
- $H$  la hauteur du pont (entrée et sortie ont la même hauteur) ;
  - $d$  la distance qui sépare l'entrée du pont de l'objectif ;
  - $D$  la distance qui sépare la sortie du pont de l'objectif (la profondeur du pont est donc  $D - d$ ) ;
  - $h$  la hauteur de l'image de l'entrée du pont sur le capteur ;
  - $h'$  la hauteur de l'image de la sortie du pont sur le capteur.



Le grandissement est donné par la relation :  $|\gamma| = \frac{\text{hauteur de l'image}}{\text{hauteur de l'objet}} = \frac{\text{distance lentille-image}}{\text{distance lentille-objet}}$ .

La hauteur de l'objet (pont) est connue ( $H = 4,3$  m). La distance lentille-image est connue :

c'est la distance focale  $f$  de la lentille pour un objet à grande distance. Il faut donc déterminer les hauteurs  $h$  et  $h'$  à partir du document.

Pour calculer ces deux hauteurs sur le capteur, il faut multiplier les hauteurs vues sur la photo par le rapport entre la taille du capteur et celle de la photo : on trouve  $h = 6,0$  mm et  $h' = 3,3$  mm.

L'application de la formule du grandissement donne :  $d = \frac{f \times H}{h} = 25$  m et  $D = \frac{f \times H}{h'} = 46$  m.

On en déduit finalement la profondeur du pont :  $D - d = 21$  m.

### Exercice 2.16

1. On détermine la position de l'image :  $\overline{F_1'A'} = -\frac{f_1'^2}{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{f_1' + O_1A}$ . AN  $\overline{F_1'A'} = +45$  mm.

Or, pour être sur la pellicule, l'image doit être telle que  $0 \leq \overline{F_1'A'} \leq \tau = 8,0$  mm, ce qui n'est pas le cas ici. On ne peut donc pas photographier le grillon à cette distance (il est trop proche).

2. a) La lentille  $L_2$  donne de  $AB$  une image intermédiaire  $A_1B_1$  dont la lentille  $L_1$  donne une image finale  $A'B'$  :  $AB \xrightarrow{L_2} A_1B_1 \xrightarrow{L_1} A'B'$ . Pour qu'un point  $A$  puisse être photographié, il faut que son image  $A'$  par le système vérifie  $0 \leq \overline{F_1'A'} \leq \tau$ .

Les formules de conjugaison donnent :  $\overline{F_2'A_1} \cdot \overline{F_2A} = -f_2'^2$  et  $\overline{F_1'A'} \cdot \overline{F_1A_1} = -f_1'^2$ .

– Soit  $A_0$  le point dont l'image finale  $A'_0$  est en  $F_1'$  (soit  $\overline{F_1'A'_0} = 0$ ). L'image intermédiaire est donc à l'infini et  $A_0$  coïncide alors avec  $F_2$ , soit  $\overline{O_2A_0} = -f_2' = -\frac{1}{V_2} = -25,0$  cm.

– Soit  $A_1$  le point dont l'image finale  $A'_1$  est telle que  $\overline{F_1'A'_1} = \tau$ . Alors  $\overline{F_1A_1} = -\frac{f_1'^2}{\tau}$  et  $\overline{F_2'A_1} = \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A_1} = -f_2' + D - f_1' - \frac{f_1'^2}{\tau}$ , d'où  $\overline{F_2A_1} = -\frac{f_2'^2}{D - f_1' - f_2' - \frac{f_1'^2}{\tau}}$  et

finalement  $\overline{O_2A_1} = -f_2' - \frac{f_2'^2}{D - f_1' - f_2' - \frac{f_1'^2}{\tau}}$ . AN  $\overline{O_2A_1} = -18,8$  cm.

Les points photographiables sont donc situés entre 18,8 cm et 25,0 cm devant la bonnette (donc entre 20,8 cm et 27,0 cm devant l'objectif initial).

⇒ Méthode 2.6

⚠ Attention à ne pas confondre les origines dans les formules, puis prendre bien garde aux signes et aux unités dans les applications numériques. L'utilisation d'un brouillon et une double vérification des calculs sont recommandées.

b) Le grillon est donc bien photographiable à la distance de 20 cm devant la bonnette. Les formules précédentes donnent maintenant pour l'image intermédiaire :



$$\overline{F_2'A_1} = \frac{-f_2'^2}{F_2'A} = \frac{-f_2'^2}{f_2' + O_2A}. \text{ AN } \overline{F_2'A_1} = -125 \text{ cm}. \text{ Ensuite pour l'image finale :}$$

$$\overline{F_1'A'} = -\frac{f_1'^2}{F_1A_1} = -\frac{f_1'^2}{f_1' - D + f_2' + F_2'A_1}. \text{ AN } \overline{F_1'A'} = 6,0 \text{ mm (qui est bien compris entre 0 et } \tau).$$

On utilise alors les formules de grandissement :  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{A_1B_1} \cdot \frac{\overline{A_1B_1}}{AB} = \frac{\overline{F_1'A'}}{F_1'O_1} \cdot \frac{\overline{F_2'A_1}}{F_2'O_2}$  donc

$$\overline{A'B'} = AB \frac{\overline{F_1'A'} \cdot \overline{F_2'A_1}}{f_1' \cdot f_2'}. \text{ AN } \boxed{\overline{A'B'} = -6,0 \text{ mm}}, \text{ ce qui est assez important.}$$

En effet la taille d'une pellicule argentique était de 24 mm × 36 mm, mais celle d'un capteur numérique est de l'ordre de 6 mm × 8 mm : le grillon occupe donc une grande partie de l'image sur une photographie numérique.

### Exercice 2.17

**1.** L'œil observe l'image du réticule à l'infini à travers l'oculaire, donc le réticule est dans le plan focal objet de l'oculaire :  $\boxed{d = f_2' = 3,0 \text{ cm}}$ .

**2. a)** L'objet doit être dans le plan conjugué du réticule par rapport à  $L_1$  :

$$\frac{1}{D} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f_1'} \text{ d'où } \boxed{\overline{O_1A} = \frac{f_1' \times D}{f_1' - D}}. \text{ AN } \boxed{\overline{O_1A} = -14 \text{ cm}}.$$

**b)** Cette position est indépendante de l'œil qui observe, dont les propriétés ne sont pas intervenues dans le calcul précédent. En revanche, la modification de la position de l'*oculaire* par rapport au réticule permettrait de s'adapter à un œil myope.

**c)** L'expression « viseur à frontale fixe » signifie que cette lunette vise des objets situés à une distance fixe (14 cm) devant l'objectif.

**3. a)**  $A$  est à une distance  $x_1$  devant la lentille, soit  $\boxed{\overline{OA} = -x_1 = -20 \text{ cm}}$ .  $A'$  est à une distance  $x_2$  et également devant la lentille, soit  $\boxed{\overline{OA'} = -x_2 = -10 \text{ cm}}$ .

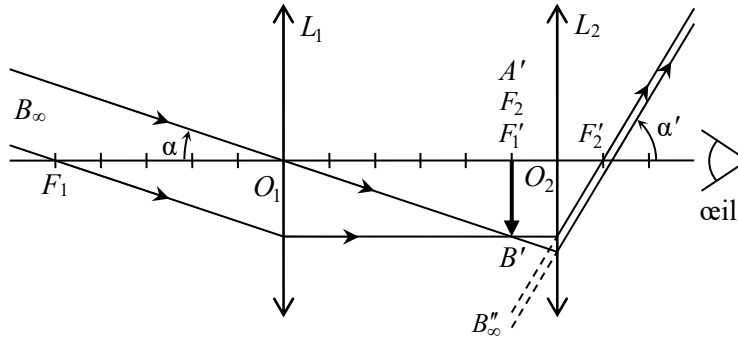
**b)** Formule de Descartes :  $\frac{1}{-x_2} - \frac{1}{-x_1} = \frac{1}{f'}$  d'où  $\boxed{f' = \frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1}}$ . AN  $\boxed{f' = -20 \text{ cm}}$ . La lentille est donc divergente.

### Exercice 2.18

**1. a)** Un système afocal n'a pas de foyer : il donne d'un objet à l'infini une image à l'infini. Pour cela, le foyer image  $F_1'$  de l'objectif doit être confondu avec le foyer objet  $F_2$  de l'oculaire, selon le schéma :

$A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A''_\infty$ . La distance entre les lentilles est donc  $\boxed{\overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'}$ .

b)



⇒ Méthode 2.3

✎ Les angles ont été orientés, car on parle du signe du grossissement par la suite.

c) L'image réelle de l'objet (à l'infini) doit se former sur la pellicule, donc on doit placer celle-ci dans le plan focal image d'une lentille convergente : soit l'objectif, soit une autre lentille placée après l'oculaire (si on veut une image agrandie).

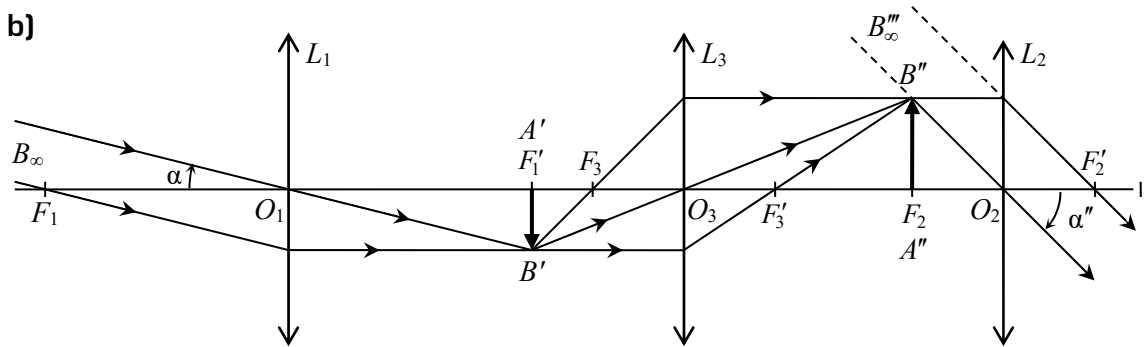
2. a) L'image est renversée, car un rayon venant initialement du haut (depuis  $B_\infty$ ) vient ensuite du bas lorsqu'il arrive à l'œil (et les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont de signes contraires).

b)  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'}$  et  $\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F_2'O_2}} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'}$  donc  $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'}$ .

⇒ Méthode 2.6

3. a) On doit avoir cette fois :  $A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' \xrightarrow{L_3} A'' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'''$ . Le foyer objet  $F_2$  de l'oculaire doit être le conjugué du foyer image  $F_1'$  de l'objectif par la lentille intermédiaire  $L_3$ .

b)



⇒ Méthode 2.3

c)  $\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$  d'où  $\overline{O_3F_2} = \frac{\overline{O_3F_1'} \cdot f_3'}{\overline{O_3F_1'} + f_3'}$ .

De plus  $\gamma_3 = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{f_3'}{\overline{O_3F_1'} + f_3'}$  donc  $\overline{O_3F_1'} = f_3' \left( \frac{1}{\gamma_3} - 1 \right)$ .

d)  $\alpha'' \approx \tan \alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{\overline{A''B''}}{f_2'}$  et toujours  $\alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{f_1'}$ , donc  $\frac{\alpha''}{\alpha} = -\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \frac{f_1'}{f_2'}$  soit  $G' = \gamma_3 G$ .

$\gamma_3 < 0$  (objet réel et image réelle) donc cette fois  $G' > 0$  : l'image finale est droite. De plus, si  $L_3$  est bien placée (assez près de  $A'B'$ ) on obtient  $|\gamma_3| > 1$  (image intermédiaire agrandie) donc  $|G'| > |G|$  : on a donc bien aussi augmenté le grossissement.

### Exercice 2.19

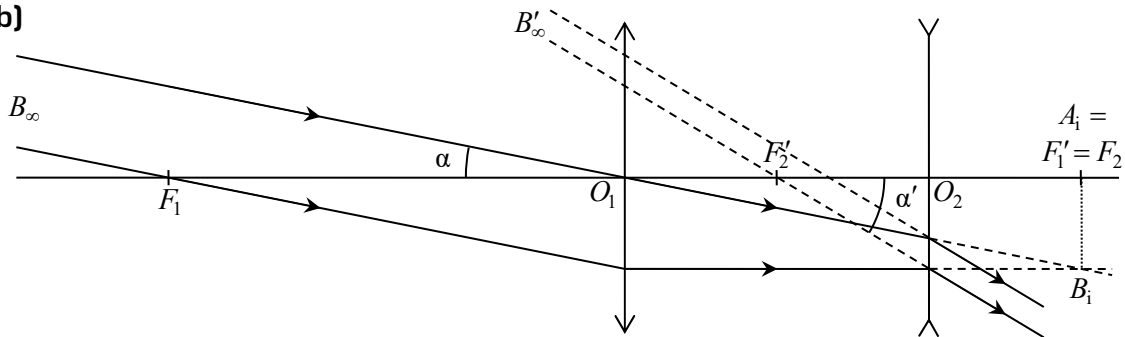
1.  $f'_1 = \frac{1}{V_1} = +20 \text{ cm}$  : lentille convergente ;  $f'_2 = \frac{1}{V_2} = -5,0 \text{ cm}$  : lentille divergente.

2. a) Une lunette afocale donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

On note donc :  $A_\infty \xrightarrow{L_1} A_i = F'_1 = F_2 \xrightarrow{L_2} A''_\infty$ .

Alors  $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F_2O_2}$  soit  $d = f'_1 + f'_2$ . AN  $d = 15 \text{ cm}$ .

b)



c)  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  avec  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{A_i B_i}{f'_1}$  et  $\alpha' \approx \tan \alpha' = \frac{A_i B_i}{-f'_2}$  donc  $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$ . AN  $G = 4$ .

3. a) Le diamètre apparent de Copernic à l'œil nu est de  $\frac{96}{3,8 \cdot 10^5} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ , ce qui est inférieur à  $3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  : Copernic n'est donc pas discernable à l'œil nu. En revanche, vu à travers la lunette, son diamètre apparent est 4 fois plus grand, soit  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  : il est donc visible à la lunette.

Pour Clavius, son diamètre apparent à l'œil nu est de  $\frac{240}{3,8 \cdot 10^5} = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$  et il est donc discernable à l'œil nu. C'est, bien entendu, également le cas à travers la lunette.

b) Diamètres apparents des deux planètes vues de la Terre :

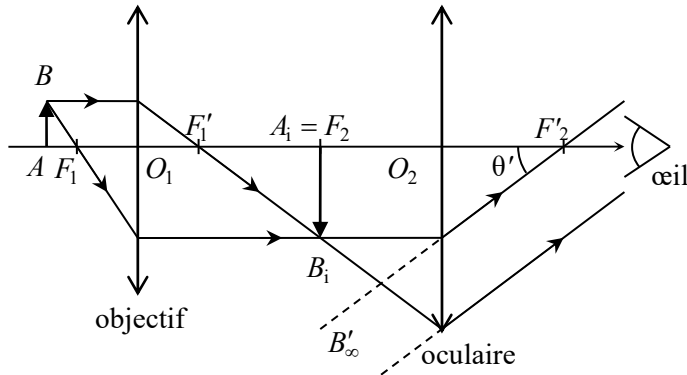
	à l'œil nu	à travers la lunette
Vénus	$\frac{12150}{4,5 \cdot 10^7} = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$4 \times 2,7 \cdot 10^{-4} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
Jupiter	$\frac{145800}{6,3 \cdot 10^8} = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$4 \times 2,3 \cdot 10^{-4} = 9,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

À l'œil nu, Vénus et Jupiter sont vues comme des points et l'occultation ne sera pas discernable.

À travers la lunette, elles sont vues comme des disques, mais celui de Vénus apparaît plus grand que celui de Jupiter : au moment de la conjonction, l'astronome verra, à travers la lunette, un disque passant devant un autre disque plus petit.

### Exercice 2.20

1.



2. L'objet pour l'oculaire est  $A_1B_1$ . Le grossissement commercial  $G_2$  est le rapport entre l'angle  $\theta'$  indiqué sur la figure ci-dessus, et l'angle  $\theta_i$  sous lequel serait vu  $A_1B_1$  à l'œil nu à la distance  $\delta$ .

$$\theta' \approx \tan \theta' = \frac{A_1B_1}{f_2'} \quad \text{et} \quad \theta_i \approx \tan \theta_i = \frac{A_1B_1}{\delta} \quad \text{donc} \quad G_2 = \frac{\delta}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_2' = \frac{\delta}{G_2}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{f_2' = 2,5 \text{ cm}}.$$

3. Formule de grandissement de Newton :  $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_1'F_2}}{\overline{F_1'O_1}} = \frac{\Delta}{-f_1'}$ .

$$\text{Donc} \quad |\gamma_1| = \frac{\Delta}{f_1'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{f_1' = \frac{\Delta}{|\gamma_1|}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{f_1' = 0,40 \text{ cm}}.$$

⚠\* Attention à bien lire l'énoncé :  $|\gamma_1|$  n'est pas un grossissement, donc le calcul n'est pas le même qu'à la question précédente !

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1' + \Delta}{\overline{O_1A}} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_1A} = \frac{f_1' + \Delta}{\gamma_1} (< 0) \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{O_1A} = \frac{f_1' + \Delta}{G_1} = \frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{\overline{O_1A} = 0,41 \text{ cm}}.$$

4. Grossissement global :  $G = \frac{\theta'}{\theta}$  avec  $\theta \approx \tan \theta = \frac{AB}{\delta}$  (objet AB vu à l'œil nu au PP), donc

$$G = \frac{A_1B_1}{f_2'} \frac{\delta}{AB} \quad \text{soit} \quad \boxed{G = |\gamma_1| G_2}. \quad \text{AN} \quad \boxed{G = 400}.$$

Le grossissement d'un microscope est le produit du *grossissement* de l'oculaire par le *grandissement* (en valeur absolue) de l'objectif.

5. Notons  $O_1 \xrightarrow{L_2} C$ . Formule de Newton :  $\overline{F_2'O_1} \cdot \overline{F_2'C} = -f_2'^2$  avec  $\overline{F_2'O_1} = -\Delta - f_1'$  donc

$$\overline{F_2'C} = \frac{f_2'^2}{\Delta + f_1'}. \quad \text{AN} \quad \boxed{\overline{F_2'C} = 3,8 \text{ mm}}. \quad \text{Le rapport des diamètres est la valeur absolue du}$$

$$\text{grandissement : } \frac{d_{\text{co}}}{d} = \frac{F_2'C}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad \boxed{d_{\text{co}} = d \frac{f_2'}{\Delta + f_1'}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{d_{\text{co}} = 1,1 \text{ mm}}.$$

Tous les rayons ayant traversé l'objectif passent ensuite à l'intérieur du cercle oculaire (son image) : pour voir une image bien lumineuse et complète (pas de perte des bords) on a donc intérêt à placer l'œil à cet endroit. Le diamètre du cercle oculaire est inférieur à celui de la pupille de l'œil, ce qui permet bien de capter toute la lumière issue du microscope.

# Lois de l'électrocinétique

## Régime continu

UN SCIENTIFIQUE



Fils d'un serrurier, **Georg OHM** est repéré par son professeur de mathématiques qui décèle chez lui des aptitudes exceptionnelles. Il tarde à obtenir un poste de recherche à son niveau. La loi qui porte son nom se trouve dans son ouvrage *Le Circuit galvanique* mais on lui doit aussi des résultats sur la polarisation de la lumière, l'acoustique et les piles électriques. Fort justement, son nom a été choisi pour désigner l'unité de résistance dans le Système international.

### ■ Un peu d'histoire

L'observation des phénomènes orageux et des décharges électriques qui s'y produisent passionne Benjamin FRANKLIN (1706-1790). Ceci l'amène à concevoir des expériences pour comprendre les propriétés de l'électricité. Luigi GALVANI s'aperçoit que les muscles d'une grenouille réagissent à une décharge électrique. Après lui, Henry CAVENDISH (1731-1810) et Charles COULOMB établissent les premières lois de l'électrostatique. Le premier définit la notion de potentiel et le second met en évidence l'interaction des corps chargés électriquement en fonction de leurs charges électriques et de la distance qui les sépare. VOLTA étudie ces phénomènes et conçoit vers 1800 les premières piles. En 1827, Georg OHM établit que l'intensité d'un courant électrique qui traverse un conducteur est proportionnelle à la tension à ses bornes et introduit la notion de résistance.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions relatives aux circuits et aux grandeurs électriques
- ▷ Les lois de Kirchhoff (loi des nœuds, loi des mailles)
- ▷ La puissance et sa signification en fonction de la convention utilisée
- ▷ La loi d'Ohm et les lois d'associations des résistances
- ▷ Le modèle de Thévenin pour un générateur
- ▷ Quelques ordres de grandeur d'intensités et de tensions

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer une intensité ou une tension par application des lois de Kirchhoff et des relations entre intensité et tension
- ▷ Déterminer une résistance équivalente
- ▷ Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant
- ▷ Déterminer un schéma de circuit équivalent plus simple, par associations de résistances et de générateurs
- ▷ Expliquer les branchements des appareils de mesure, et les réaliser en TP

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Définitions relatives aux circuits

Le **courant électrique** est un déplacement ordonné de porteurs de charges électriques dans un conducteur. Le sens conventionnel du courant est celui du déplacement des charges positives (s'il y en a), les charges négatives (électrons notamment) allant en sens contraire.

Un **circuit électrique** est un ensemble de conducteurs reliés entre eux, dans lequel peuvent circuler des courants.

Un **dipôle** est un élément relié par deux bornes au reste du circuit.

On appelle **nœud** le point commun d'au moins trois dipôles.

Une **branche** est une portion de circuit qui relie deux nœuds consécutifs.

Une **maille** est un parcours fermé, constitué de branches successives.

Des dipôles sont **en série** lorsqu'ils appartiennent à une même branche.

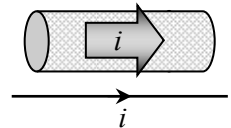
Des dipôles sont **en parallèle** (ou **en dérivation**) s'ils sont reliés aux deux mêmes nœuds.

Le circuit est en **régime continu** si les grandeurs électriques ne varient pas au cours du temps.

## ■ Intensité du courant électrique

### □ Définition et représentation

L'**intensité** du courant est le débit de charges à travers une section du conducteur. Pour la définir de façon algébrique (ce qui donne l'information sur le sens du courant), on dessine une flèche sur le conducteur (fil), dans un sens choisi *arbitrairement*.



L'intensité du courant électrique est alors par définition :  $i = \frac{\delta q}{dt}$  où  $\delta q$  est la quantité

de charge traversant la section du conducteur, dans le sens de la flèche, pendant la durée  $dt$ . Ainsi, si le courant circule effectivement dans le sens de la flèche, alors l'intensité  $i$  est positive ; elle est négative dans l'autre cas.

Dans les unités SI,  $i$  s'exprime en ampères (A),  $\delta q$  en coulombs (C) et  $dt$  en secondes (s).

Même si les charges sont discrètes au niveau microscopique, le courant *apparaît comme une fonction continue* à notre échelle, car on considère un très grand nombre de porteurs de charge.

L'intensité reste la même le long d'une branche, donc à travers des dipôles en série.

### □ Ordres de grandeur

Courant dans un canal synaptique	Valeurs usuelles au laboratoire	Valeurs en électrotechnique	Foudre
1 pA	1 mA à 1 A	10 à 1000 A	1 à 100 kA

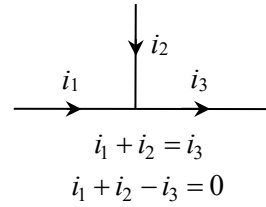


### Loi des nœuds (première loi de Kirchhoff)

En régime continu, la conservation de la charge implique que la somme des intensités arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités qui en partent :

$$\sum_j i_{j,\text{entrante}} = \sum_k i_{k,\text{sortante}} \quad \text{ou bien} \quad \sum_k \varepsilon_k i_k = 0$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si l'intensité  $i_k$  est orientée vers le nœud, et  $-1$  sinon.

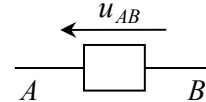


## Tension électrique ou différence de potentiel

### Définition et représentation

On montre en électromagnétisme que l'on peut associer à chaque point d'un circuit une grandeur appelée **potentiel électrique**  $V$ , qui permet de calculer les échanges d'énergie. L'origine des potentiels est un point du circuit appelé **masse**, qu'on peut choisir arbitrairement.

La **tension**  $u_{AB}$ , représentée par une flèche allant de  $B$  vers  $A$ , est la différence de potentiel entre les points  $A$  et  $B$  :  $u_{AB} = V_A - V_B$ .



La tension est donc la même aux bornes de deux ou plusieurs dipôles en parallèle. Elle est souvent notée simplement  $u$ , la flèche indiquant les deux points concernés. L'unité SI de la tension et du potentiel est le volt (V).

### Ordres de grandeur

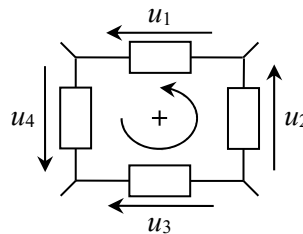
Potentiel d'action dans un neurone	Valeurs usuelles au laboratoire	Ligne à haute tension	Nuages d'orage
0,1 V	0,1 V à 100 V	1 à 100 kV	jusqu'à 100 MV

### Loi des mailles (seconde loi de Kirchhoff)

Dans une maille orientée, la somme algébrique des tensions est nulle :

$$\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$$

avec  $\varepsilon_k = +1$  si la tension  $u_k$  est orientée dans le sens de parcours de la maille, et  $-1$  sinon.



$$u_1 + u_4 - u_3 + u_2 = 0$$

⇒ Méthode 3.1. Application directe des lois de Kirchhoff

## Puissance et travail électriques

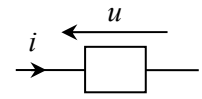
La **puissance électrique** échangée par un dipôle avec le reste du circuit est :  $\mathcal{P} = u i$ .

L'énergie échangée par le dipôle sous forme de **travail électrique**, pendant une durée  $\Delta t$ , est en régime continu (stationnaire) :  $W = \mathcal{P} \cdot \Delta t = u \cdot i \cdot \Delta t$ .

L'unité SI de la puissance est le watt (W), celle de l'énergie est le joule (J).

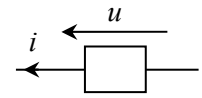
### Convention récepteur

Quand les flèches de courant et de tension sont de sens opposés,  $\mathcal{P} = ui$  est la *puissance reçue* par le dipôle. Si elle est positive, il fonctionne en récepteur (il reçoit effectivement de l'énergie), sinon il se comporte en générateur.



### Convention générateur

Quand les flèches de courant et de tension sont de même sens,  $\mathcal{P} = ui$  est la *puissance fournie* par le dipôle. Si elle est positive, le dipôle fonctionne en générateur (il fournit effectivement de l'énergie), sinon en récepteur.

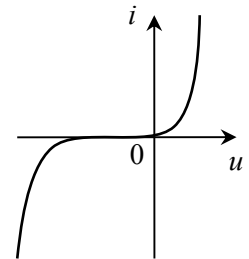


## ■ Caractérisation d'un dipôle

Un type de dipôle donné est caractérisé par la relation entre la tension à ses bornes et l'intensité qui le traverse (en convention générateur ou récepteur). Celle-ci est obtenue expérimentalement sous forme de **caractéristiques** : courbes représentant les points de fonctionnement du dipôle, c'est-à-dire les couples  $(u, i)$  possibles.

La **caractéristique statique** décrit le régime continu, une **caractéristique dynamique** décrit un régime sinusoïdal de fréquence donnée.

Deux dipôles sont **équivalents** si leurs caractéristiques sont identiques.



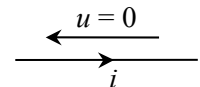
Certains dipôles peuvent être *modélisés* par une relation mathématique simple.

⇒ **Méthode 3.3. Détermination d'un dipôle équivalent**

## ■ Dipôles élémentaires

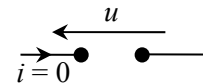
### □ Fil (idéal)

Un fil peut être considéré comme un dipôle, pour lequel :  $u = 0, \forall i$ .



### □ Coupe-circuit (idéal)

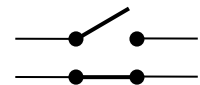
Un objet isolant peut être considéré comme un dipôle, pour lequel :  $i = 0, \forall u$ .



### □ Interrupteur (idéal)

Un interrupteur, lorsqu'il est *ouvert*, est équivalent à un coupe-circuit.

Un interrupteur, lorsqu'il est *fermé*, est équivalent à un fil.



### □ Ampèremètre

Un ampèremètre indique la valeur de l'intensité  $i$  du courant qui le traverse.

En pratique, il s'agit d'un multimètre numérique pour lequel on utilise la borne mA (ou bien A) et une borne notée COM.

Pour mesurer l'intensité du courant traversant un dipôle, il faut placer l'ampèremètre dans la même branche, donc *en série* avec lui.

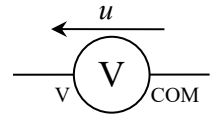
Un ampèremètre idéal est équivalent à un fil, donc son ajout ne perturbe pas le circuit.



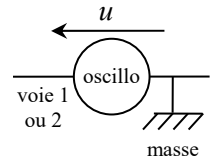
## □ Voltmètre et oscilloscope

Un voltmètre indique la valeur de la tension  $u$  entre ses bornes.

En pratique, il s'agira d'un multimètre numérique pour lequel on utilise la borne V et la borne COM.



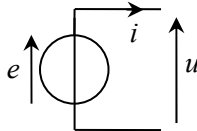
Un oscilloscope visualise l'évolution au cours du temps de la tension à ses bornes. Les deux voies de l'oscilloscope ont une borne commune, reliée à la terre (pour des raisons de sécurité). Les autres appareils branchés sur le secteur (générateur...) étant aussi reliés à la terre, tous ces appareils ont une borne commune, que l'on choisit comme *masse* du circuit.



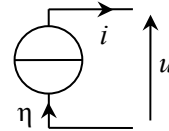
Pour mesurer la tension aux bornes d'un dipôle, il faut placer le voltmètre ou l'oscilloscope entre les deux mêmes points, donc *en parallèle* avec lui.

Un voltmètre idéal est équivalent à un coupe-circuit, donc son ajout ne perturbe pas le circuit.

## □ Source idéale de tension ou de courant



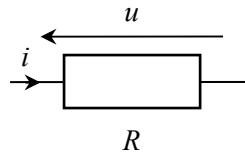
Source de tension idéale :  $u = e, \forall i$ .  
 $e$  est la **force électromotrice** (FÉM).



Source de courant idéale :  $i = \eta, \forall u$ .  
 $\eta$  est le **courant électromoteur** (CÉM).

## ■ Dipôle ohmique et associations

### □ Loi d'Ohm, résistance et conductance



Un dipôle ohmique est un dipôle vérifiant la **loi d'Ohm** :

$$\boxed{u = Ri} \quad \text{ou} \quad \boxed{i = Gu} \quad \text{en convention récepteur ;}$$

$$u = -Ri \quad \text{ou} \quad i = -Gu \quad \text{en convention générateur.}$$

La puissance reçue par une résistance est donc :  $\mathcal{P} = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$ . Elle est *dissipée* par effet Joule.

L'unité SI de la **résistance**  $R$  est l'ohm ( $\Omega$ ), celle de la **conductance**  $G = 1/R$  est le siemens (S).  
Valeurs usuelles de résistances utilisées au laboratoire : 100  $\Omega$  à 100 k $\Omega$ .

Valeurs limites : un fil idéal correspond à la limite  $R \rightarrow 0$  (soit  $G \rightarrow \infty$ ) ;

un coupe-circuit idéal correspond à la limite  $R \rightarrow \infty$  (soit  $G \rightarrow 0$ ).

### □ Nature des dipôles ohmiques

Une portion quelconque de conducteur se comporte généralement comme un dipôle ohmique.

Les bornes d'entrée de certains appareils (voltmètre, ampèremètre, circuit intégré...) se

comportent aussi, du point de vue du reste du circuit, comme des dipôles ohmiques : la résistance correspondante est appelée **résistance d'entrée**.

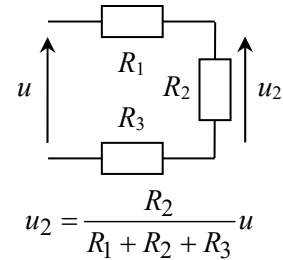
### □ Association en série

Une association en série de dipôles ohmiques est équivalente à un

unique dipôle ohmique de résistance  $R_{\text{éq}} = \sum_k R_k$ .

La tension aux bornes de l'un d'entre eux s'obtient par la formule

du **(pont) diviseur de tension** :

$$u_j = \frac{R_j}{\sum_k R_k} u_{\text{ensemble}}$$


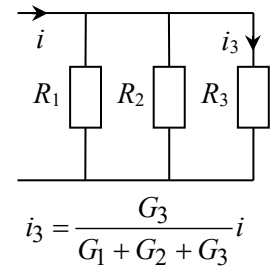
### □ Association en parallèle

Une association en parallèle de dipôles ohmiques est équivalente à un

seul dipôle ohmique de conductance  $G_{\text{éq}} = \sum_k G_k$  soit  $\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$ .

Le courant traversant l'un d'entre eux s'obtient avec la formule du

**(pont) diviseur de courant** :

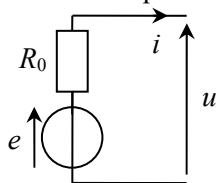
$$i_j = \frac{G_j}{\sum_k G_k} i_{\text{ensemble}}$$


Pour deux résistances :  $R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ . Pour  $n$  résistances identiques :  $R_{\text{éq}} = \frac{R}{n}$ .

## ■ Modélisation d'un générateur réel

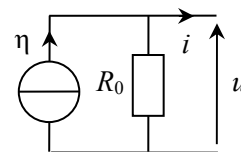


Il existe deux modèles équivalents pour décrire un générateur usuel.



**Modèle de Thévenin**

$$u = e - R_0 i \quad (\text{convention générateur}).$$



**Modèle de Norton**

$$i = \eta - \frac{u}{R_0} \quad (\text{convention générateur}).$$

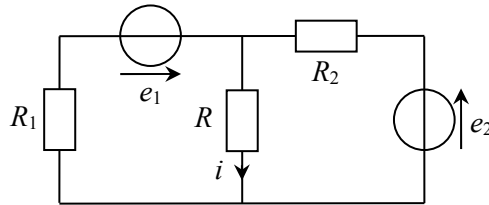
Ces formules sont équivalentes, avec  $e = R_0 \eta$ .

$R_0$  est la **résistance interne** ou **résistance de sortie** du générateur.

⇒ **Méthode 3.2. Transformation de schémas**

## ■ Comment calculer le courant traversant un dipôle ou la tension à ses bornes ?

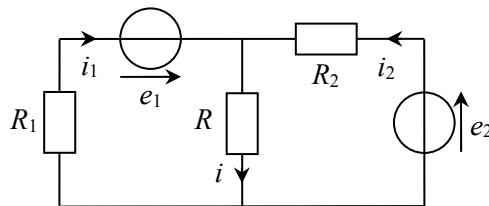
On se propose par exemple de déterminer l'intensité  $i$  du courant dans la résistance  $R$  du circuit ci-dessous.



### □ Méthode 3.1. Application directe des lois de Kirchhoff

Si le circuit n'est pas trop complexe, on introduit les inconnues supplémentaires nécessaires (intensités dans toutes les branches *ou bien* tensions entre tous les couples de points du circuit). On écrit alors les lois des nœuds et des mailles, ainsi que les relations entre tension et intensité (loi d'Ohm pour un dipôle ohmique), pour les éliminer une à une et obtenir finalement la grandeur demandée.

⇒ Exercices 3.2, 3.3, 3.5, 3.13, 3.14



On introduit deux intensités supplémentaires (dans un sens *arbitraire*), que l'on peut relier à  $i$  avec la loi des nœuds :  $i_1 + i_2 - i = 0$  d'où  $i_1 = i - i_2$  (ce qui permet d'éliminer  $i_1$  dans la suite).

Loi des mailles dans la maille de gauche (dans le sens trigonométrique) :  $Ri + R_1(i - i_2) - e_1 = 0$

d'où  $i_2 = \frac{(R + R_1)i - e_1}{R_1}$  (cela permet maintenant d'éliminer  $i_2$ ).

Finalement la loi des mailles dans celle de droite (dans le sens trigonométrique) donne :

$e_2 - R_2 \left( \frac{(R + R_1)i - e_1}{R_1} \right) - Ri = 0$  d'où  $e_2 + \frac{R_2}{R_1} e_1 = Ri + R_2 \frac{(R + R_1)}{R_1} i$  et finalement

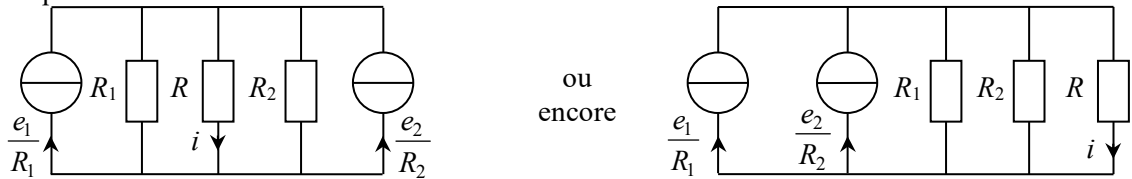
$$i = \frac{R_1 e_2 + R_2 e_1}{R_1 R + R_2 R + R_2 R_1}$$

### ❑ Méthode 3.2. Transformation de schémas

Transformer tous les générateurs du circuit qui sont en série en modèle de Thévenin, et tous ceux qui sont en parallèle en modèle de Norton, *sans modifier la branche dans laquelle se trouve l'intensité ou la tension cherchée*. Puis faire les associations de sources et de résistances, et simplifier le schéma jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule source. On peut alors conclure avec une seule formule (loi des mailles, diviseur de tension ou de courant...).

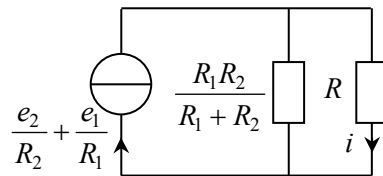
⇒ Exercices 3.7, 3.13

Dans l'exemple étudié, on a trois branches en parallèle, on va donc refaire le schéma uniquement avec des sources de courant :



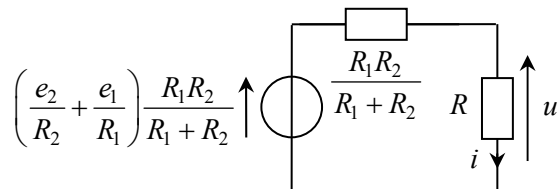
(l'ordre dans lequel on place les branches en parallèle n'ayant pas d'importance).

On associe ensuite les sources de courant en parallèle (dans le même sens), et les résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle (mais on laisse la résistance  $R$ , qui est celle qui nous intéresse).



On reconnaît un diviseur de courant :  $i = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \left( \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_1}{R_1} \right)$ , soit  $i = \frac{R_1 e_2 + R_2 e_1}{R_1 R + R_2 R + R_2 R_1}$ .

– On peut aussi transformer une dernière fois le circuit, en revenant à un modèle de Thévenin.



On obtient alors la tension  $u$  avec la formule du diviseur de tension :

$u = \frac{R}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \left( \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_1}{R_1} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R R_1 e_2 + R R_2 e_1}{R_1 R + R_2 R + R_2 R_1}$ . Puis on utilise la loi d'Ohm aux bornes

de la résistance  $R$  :  $i = \frac{u}{R}$ , ce qui donne  $i = \frac{R_1 e_2 + R_2 e_1}{R_1 R + R_2 R + R_2 R_1}$ .

– Enfin on peut aussi utiliser la loi des mailles sur le dernier schéma :

$\left( \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_1}{R_1} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \left( \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R \right) i = 0$  qui donne le même résultat.

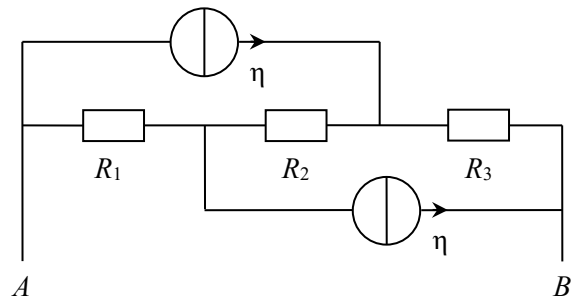
## ■ Comment déterminer le dipôle équivalent à une association de dipôles ?

### □ Méthode 3.3. Détermination d'un dipôle équivalent

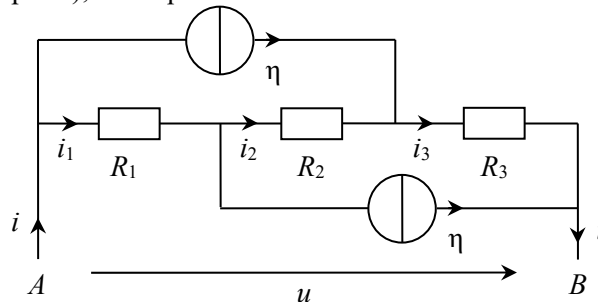
On commence par introduire la tension  $u$  aux bornes de l'association et l'intensité  $i$  du courant qui la traverse. En appliquant les lois de Kirchhoff ou en transformant le circuit à l'aide d'associations connues (résistances, sources), on établit alors la relation liant  $u$ ,  $i$  et les données du problème. On identifie enfin cette relation à une caractéristique connue pour donner la nature du dipôle équivalent et la ou les grandeurs le caractérisant.

⇒ Exercices 3.5, 3.7

Quel est par exemple le dipôle équivalent à l'association  $AB$  ci-contre ?



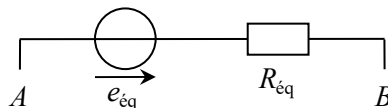
Commençons par introduire la tension  $u$  aux bornes de  $AB$ , l'intensité  $i$  du courant le traversant (ici en convention récepteur), ainsi que des intensités dans les différentes branches du dipôle :



Le dipôle  $AB$  ne présente aucune association série ou parallèle de résistances ou de sources. On utilise donc les lois de Kirchhoff. En appliquant plusieurs fois la loi des nœuds, on détermine les intensités des courants traversant respectivement  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  :  $i_1 = i - \eta$ ,  $i_2 = i_1 - \eta = i - 2\eta$  et  $i_3 = i - \eta$ . Par additivité des tensions, en prenant les résistances en convention générateur, on a donc :  $u = -(R_1 i_1 + R_2 i_2 + R_3 i_3)$  soit  $u = (R_1 + 2R_2 + R_3)\eta - (R_1 + R_2 + R_3)i$ .

On reconnaît la relation caractéristique d'un générateur en représentation de Thévenin :

$$u = e_{\text{éq}} - R_{\text{éq}}i \quad \text{avec} \quad e_{\text{éq}} = (R_1 + 2R_2 + R_3)\eta \quad \text{et} \quad R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + R_3.$$



## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. En convention récepteur, les flèches de courant et de tension sont dans le même sens.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. La loi d'Ohm s'écrit $u = -Ri$ en convention générateur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Idéalement la résistance interne d'un ampèremètre tend vers zéro.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Idéalement la résistance interne d'un voltmètre tend vers zéro.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La résistance équivalente d'une association série est la somme des résistances.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. La conductance équivalente d'une association parallèle de résistances est la somme des conductances.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Si la puissance d'un dipôle mesurée en convention récepteur est négative, alors celui-ci est en fonctionnement récepteur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Lorsque l'on applique la loi des mailles, le sens de parcours choisi modifie le résultat final.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un dipôle de résistance $R = 10 \Omega$ et un autre de conductance $G = 100 \text{ mS}$ sont équivalents.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. L'intensité du courant dans une source idéale de tension dépend de la nature du circuit auquel elle est connectée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



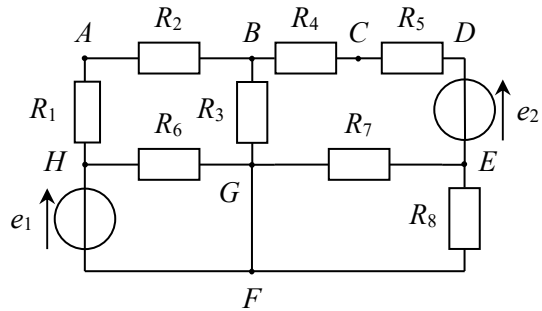
# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Bases et lois de Kirchhoff

### □ Exercice 3.1. Nœuds, branches, mailles et associations

On considère le circuit ci-contre.

1. Quels sont les nœuds de ce schéma ?
2. Nommer toutes les branches de ce circuit.
3. Nommer toutes les mailles passant par le point  $A$ .
4. Quelles sont les résistances en série ?  
Quelles sont les résistances en parallèle ?

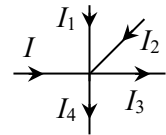


### □ Exercice 3.2. Loi des nœuds

1. Déterminer l'expression de l'intensité du courant  $I$  en fonction des autres intensités, puis donner sa valeur numérique.

On donne  $I_1 = I_4 = 1 \text{ A}$  ;  $I_2 = 4 \text{ A}$  ;  $I_3 = 2 \text{ A}$ .

2. Que signifie le signe négatif de l'intensité  $I$  ?



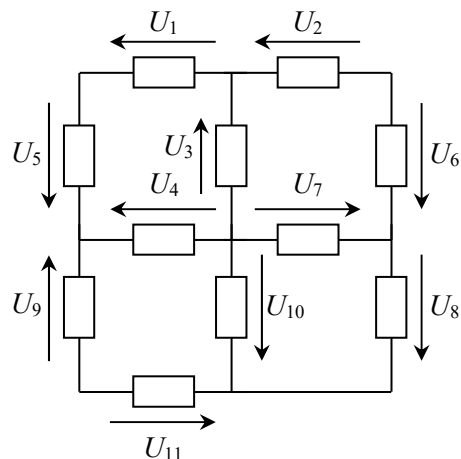
### □ Exercice 3.3. Loi des mailles

Les rectangles représentés sur le schéma sont des dipôles quelconques dont nous ne précisons pas la nature.

On donne les tensions suivantes :

$U_1 = 1 \text{ V}$ ,  $U_2 = 2 \text{ V}$ ,  $U_3 = 3 \text{ V}$ ,  $U_5 = 5 \text{ V}$ ,  $U_6 = 6 \text{ V}$ ,  
 $U_8 = 8 \text{ V}$ ,  $U_9 = 20 \text{ V}$ .

Déterminer les tensions  $U_4$ ,  $U_7$ ,  $U_{10}$  et  $U_{11}$  en utilisant la loi des mailles.

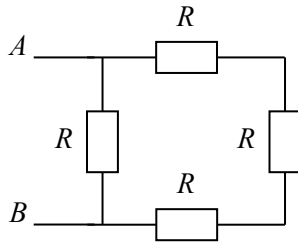


## ■ Associations de résistances et de générateurs

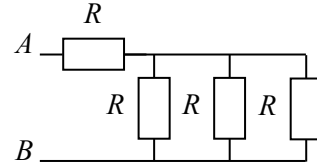
### □ Exercice 3.4. Résistance équivalente

Toutes les résistances sont identiques de valeur  $R$ . Déterminer la résistance équivalente vue entre les bornes  $A$  et  $B$  pour les schémas ci-dessous.

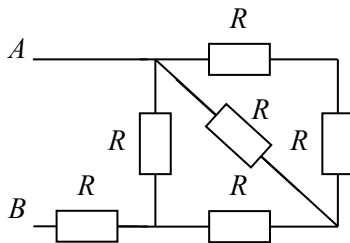
1.



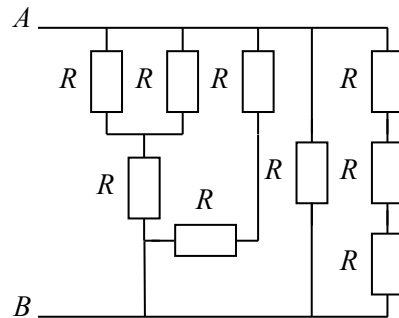
2.



3.



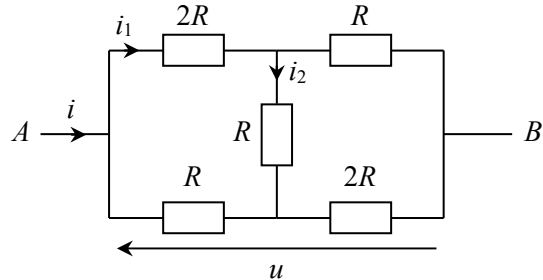
4.



### □ Exercice 3.5. Résistance équivalente, méthode indirecte\*

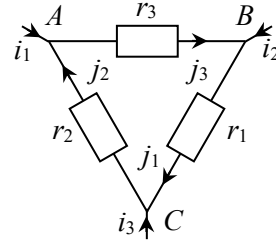
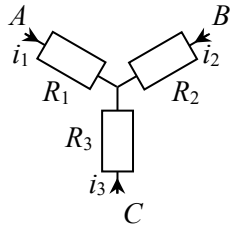
On considère le dipôle  $AB$  ci-contre.

1. Pourquoi n'est-il pas possible de simplifier ce dipôle en utilisant les lois d'associations de résistances ?
2. En utilisant les lois de Kirchhoff, déterminer deux relations indépendantes entre les grandeurs  $R$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i$ .
3. En déduire que le dipôle  $AB$  est équivalent à un unique dipôle ohmique, et exprimer sa résistance  $R_{\text{eq}}$  en fonction de  $R$ .



### □ Exercice 3.6. Équivalence étoile/triangle\*\*

On considère une portion de circuit constituée par trois résistances  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  montées en « triangle » et qui comporte trois pôles  $A$ ,  $B$  et  $C$ . On veut déterminer les expressions de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (en fonction de  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ) qu'il faut placer en « étoile » pour que les deux circuits soient équivalents d'un point de vue électrique.

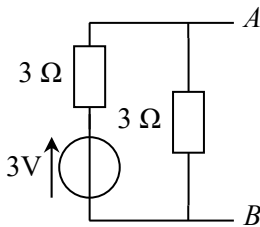


1. Exprimer la différence de potentiel  $V_A - V_B$  pour les deux montages, en fonction des courants  $i_1$  et  $i_2$  pour l'un et de  $j_3$  pour l'autre.
2. Exprimer  $j_3$  en fonction des courants  $i_1$  et  $i_2$ . Remplacer dans l'expression de la question 1 et en déduire les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$ . Donner aussi  $R_3$  de façon analogue.

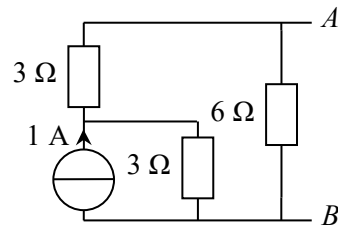
□ **Exercice 3.7. Modèles de Thévenin et de Norton\***

Pour chaque dipôle  $AB$ , déterminer les générateurs équivalents de Thévenin et de Norton.

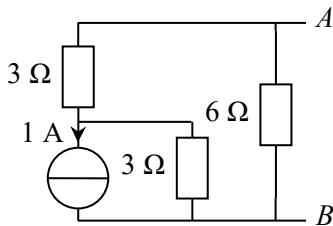
1.



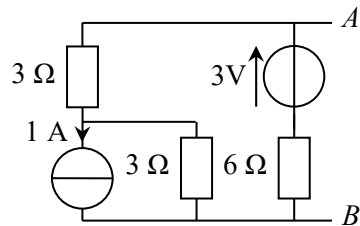
2.



3.



4.

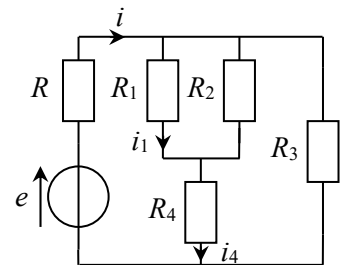


■ **Calculs de tensions et d'intensités**

□ **Exercice 3.8. Calcul de courant dans une branche\***

On a pour le circuit représenté  $E = 10 \text{ V}$ ,  $R = 5 \Omega$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 15 \Omega$ ,  $R_4 = 9 \Omega$ .

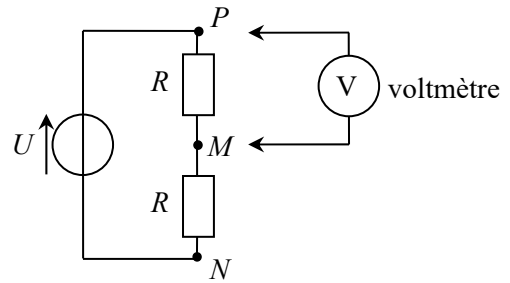
1. Calculer la résistance  $R_{\text{eq}}$  qui est équivalente à l'association de  $R_1$  à  $R_4$  et est alimentée par la source de Thévenin ( $e$ ,  $R$ ). En déduire la valeur numérique de l'intensité  $i$  débitée par la source de tension.
2. Calculer l'intensité  $i_1$  traversant le conducteur ohmique de résistance  $R_1$ .



❑ **Exercice 3.9. Mesure faussée par un voltmètre !**

Une source de tension continue  $U = 24 \text{ V}$  est branchée aux bornes de deux résistances en série, toutes deux égales à  $R = 10 \text{ M}\Omega$ .

1. Calculer la valeur des tensions  $V_{MN}$  et  $V_{PM}$  entre les points nommés, en l'absence de voltmètre.
2. Pour effectuer la mesure de ces tensions, on utilise un voltmètre de résistance interne égale à  $r = 10 \text{ M}\Omega$ . Indiquer la tension lue sur le voltmètre lorsqu'on le branche successivement entre  $P$  et  $M$ , entre  $M$  et  $N$ , puis entre  $P$  et  $N$ .

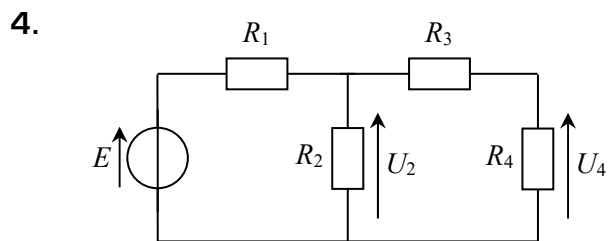
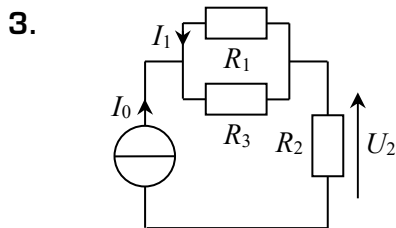
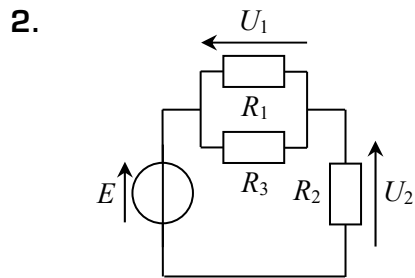
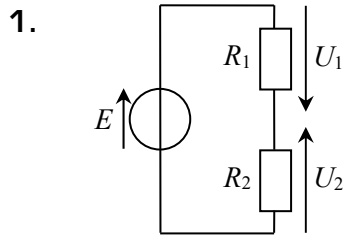


*D'après CCINP*

❑ **Exercice 3.10. Ponts diviseurs**

Pour les trois circuits suivants, on donne  $E = 10 \text{ V}$ ,  $I_0 = 10 \text{ mA}$ ,  $R_1 = R_2 = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 3,0 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 4,0 \text{ k}\Omega$ .

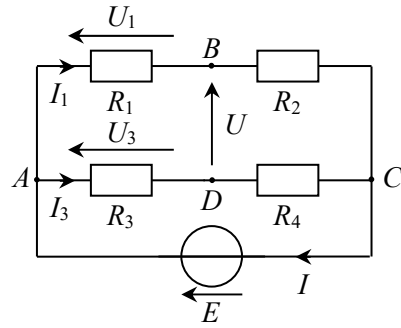
Déterminer les expressions littérales puis les valeurs numériques des grandeurs représentées, en utilisant des ponts diviseurs de tension ou de courant.



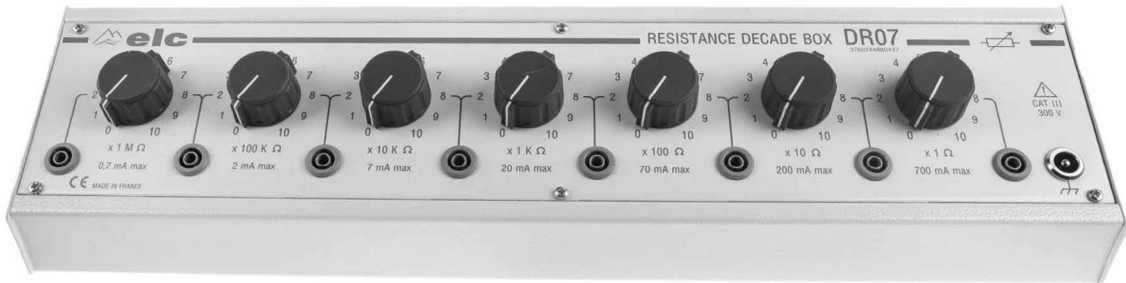
□ **Exercice 3.11. Pont de Wheatstone\***

Un pont de Wheatstone est constitué de quatre résistances selon le montage ci-contre.

1. Déterminer la valeur des courants  $I_1$ ,  $I_3$  et  $I$  en fonction de  $E$  et des résistances du circuit. En déduire les tensions  $U_1$  et  $U_3$ .
2. Retrouver la valeur des tensions  $U_1$  et  $U_3$  en utilisant la formule du diviseur de tension. En déduire la valeur de la tension  $U$ . Quelle doit être la relation entre les résistances pour que  $U$  soit nulle ? (On dit alors que « le pont est équilibré ».)



3. On branche maintenant entre les bornes  $B$  et  $D$  un ampèremètre de précision, que l'on modélise par un conducteur de résistance  $r$ . Justifier le fait que, quand l'ampèremètre indique zéro, les quatre résistances vérifient la relation trouvée à la question 2.
4. Les valeurs des résistances  $R_2$ ,  $R_4$  peuvent être choisies parmi les valeurs suivantes, connues avec une précision de 1 % : 100  $\Omega$  ; 1,00 k $\Omega$  ; 10,0 k $\Omega$  ; 100 k $\Omega$  ; 1,00 M $\Omega$ . La résistance  $R_1$  est une boîte à décades (image ci-dessous), de valeur réglable de 1  $\Omega$  à 11 M $\Omega$ . Expliquer comment on peut utiliser ce montage pour mesurer, le plus précisément possible, une résistance de l'ordre de 0,1  $\Omega$  (donc trop petite pour un ohmmètre).



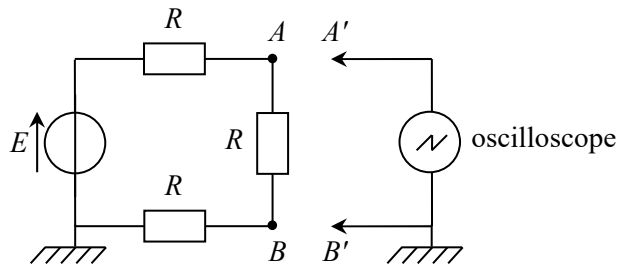
Boîte à décades de résistances usuelle au laboratoire

□ **Exercice 3.12. Un problème de masse...**

Une source de tension  $E = 12$  V alimente trois résistances égales  $R$  disposées en série.

1. Calculer la tension entre les bornes  $A$  et  $B$  dessinées sur le schéma.

2. Pour mesurer cette tension on utilise l'oscilloscope dessiné sur la même figure, borne  $A'$  reliée à la borne  $A$  et borne  $B'$  reliée à la borne  $B$ . Cet oscilloscope a une résistance interne très supérieure à la résistance  $R$  et pourtant la tension qu'il mesure n'est pas celle qui a été calculée. Expliquer pourquoi et donner la valeur de la tension mesurée.



D'après CCINP

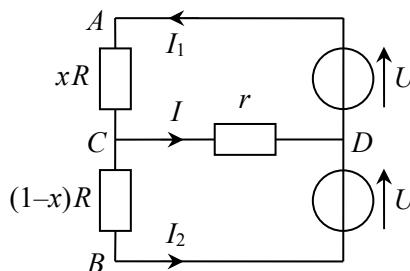
## ■ Puissance

### □ Exercice 3.13. Intensités et puissances \*

On considère le circuit ci-contre, où un curseur mobile permet de fractionner la résistance  $R$  ( $0 < x < 1$ ).

1. Déterminer les intensités  $I$ ,  $I_1$  et  $I_2$ .

2. Calculer littéralement le rapport  $\eta = \frac{\mathcal{P}_{AC}}{\mathcal{P}_{CB}}$  des puissances dissipées dans  $AC$  et  $CB$ .

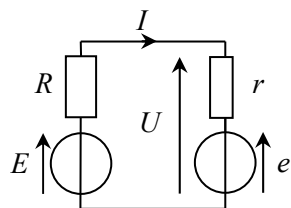


*D'après oral Agro-Véto*

### □ Exercice 3.14. Charge d'une batterie d'accumulateurs \*

La batterie de voiture de Madame Michu est déchargée. Pour recharger cette batterie, modélisée par une FÉM  $e = 12 \text{ V}$  en série avec une résistance  $r = 0,20 \Omega$ , elle la branche sur un chargeur de FÉM  $E = 13 \text{ V}$  et de résistance interne  $R = 0,30 \Omega$ .

On lit sur la batterie qu'elle a une « capacité » de  $50 \text{ A} \cdot \text{h}$  (ampères-heures).



1. Déterminer le courant  $I$  circulant dans la batterie et la tension  $U$  à ses bornes lors de la charge. Quelle est la convention utilisée ?

2. Calculer la puissance délivrée par la source  $E$ , la puissance dissipée par effet Joule et la puissance reçue par la batterie (stockée sous forme chimique). Déterminer le rendement.

3. On suppose qu'au cours de la charge, la tension de la FÉM  $e = 12 \text{ V}$  reste constante.

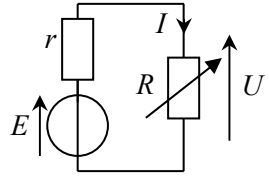
a) À quelle grandeur physique la capacité de  $50 \text{ A} \cdot \text{h}$  est-elle homogène ?

b) Initialement la batterie est déchargée, avec seulement 10 % de sa capacité. Déterminer le temps de charge pour la recharger complètement.

c) Que vaut l'énergie dissipée par effet Joule pendant la charge ?

❑ **Exercice 3.15. Adaptation de puissance\***

On considère une résistance variable  $R$  alimentée par un générateur de tension, caractérisé par sa représentation de Thévenin de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $r$ . On cherche à rendre maximale la puissance dissipée par effet Joule dans ce conducteur (il s'agit par exemple d'un radiateur électrique).



1. Déterminer l'expression de la puissance  $P$  reçue par le conducteur ohmique en fonction de  $E$ ,  $R$  et  $r$ .
2. Montrer que  $P$  (fonction dépendant de la variable  $R$ ) est maximale pour une valeur particulière de  $R$ . On dit que le montage est alors adapté.
3. On définit le rendement du transfert par  $\eta = \frac{P}{P_{\text{gén}}}$  où  $P_{\text{gén}}$  représente la puissance fournie par la force électromotrice  $E$  du dipôle. Représenter graphiquement  $\eta(R)$ . Que vaut le rendement quand le montage est adapté ?

■ **Dipôle de caractéristique quelconque**

❑ **Exercice 3.16. Utilisation d'une lampe\***

Résolution de problème

On a relevé quelques valeurs de tension et d'intensité pour une lampe, en convention récepteur :

$U$ (V)	0	1,0	2,3	4,0	6,0	6,25	9,0
$I$ (A)	0	0,20	0,30	0,40	0,49	0,50	0,60

On dispose d'une source parfaite de tension  $E = 6,0$  V. Pour fonctionner de façon optimale, la lampe doit recevoir une puissance de 1,6 W.

Quelle valeur de résistance doit-on mettre en série avec la lampe pour que cette condition soit réalisée ?

❑ **Exercice 3.17. Point de fonctionnement d'une diode Zener\*\***

Pour tracer la caractéristique statique d'un dipôle appelé diode Zener, en convention récepteur, on a relevé quelques couples de valeurs de tension et d'intensité.



$U$ (V)	0	2,0	4,0	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2
$I$ (mA)	0	0	0	0	50	100	150	200	250	300

1. Tracer la caractéristique  $I = f(U)$ . Échelles : 1 V/cm ; 50 mA/cm.

2. Comment se comporte ce dipôle pour  $U$  entre 0 et 6,0 V ? Pour  $U$  entre 6,0 V et 7,2 V, déterminer l'équation de la courbe  $I = f(U)$  du dipôle, puis en déduire  $U = f(I)$ . En déduire le modèle de Thévenin de ce dipôle.
3. On associe à cette diode une pile de FÉM  $E = 12$  V et de résistance interne  $r = 40 \Omega$ . Déterminer le point de fonctionnement (valeur du courant  $I$  et de la tension  $U$  pour la diode lorsqu'elle est connectée à la pile), graphiquement et analytiquement.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 3.5.* Commencer par représenter et nommer les courants dans toutes les branches.

*Exercice 3.6.* Question 2 : dans le montage triangle, appliquer deux fois la loi des nœuds et une fois la loi des mailles (combinée avec la loi d'Ohm) : on peut ainsi éliminer  $j_1$  et  $j_2$  et obtenir  $j_3$  en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$  et des résistances.

*Exercice 3.10.* Attention,  $R_1$  et  $R_2$  ne sont pas en série dans les schémas 2, 3 et 4.

*Exercice 3.11.* À la question 4, la résistance inconnue serait bien sûr  $R_3$ . Exprimer d'abord cette résistance en fonction des trois autres lorsque le pont est équilibré, puis déterminer comment choisir celles-ci de façon à équilibrer le pont et à avoir l'incertitude la plus faible possible sur  $R_3$ .

*Exercice 3.12.* Que signifie le symbole « masse » sur l'une des bornes de chaque appareil ?

*Exercice 3.16.* Faire d'abord un schéma avec les trois éléments.

*Exercice 3.17.* Question 3 : pour la méthode graphique, il faut superposer la caractéristique de la pile (en convention générateur) et celle de la diode (en convention récepteur).



## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai

1. En convention récepteur, les flèches de courant et de tension sont de sens opposés.
3. L'ampèremètre idéal se comporte, vis-à-vis du circuit, comme un simple fil.
4. Le voltmètre se branche en dérivation, et pour ne pas modifier le fonctionnement du circuit, il ne doit pas prélever de courant : sa résistance interne doit donc idéalement tendre vers l'infini.
7. En convention récepteur, la puissance  $\mathcal{P} = ui$  est la puissance *reçue* par un dipôle ; s'il reçoit une puissance négative, c'est qu'en fait il fournit de l'énergie au reste du circuit et fonctionne donc en générateur.

### □ Les erreurs classiques

- Dans toutes les relations, il faut toujours faire très attention aux *signes* ! Par exemple, lorsqu'une résistance est représentée en convention générateur, il faut mettre un signe moins dans la loi d'Ohm.
- Faire attention comme toujours à l'*homogénéité* des formules. En particulier, une résistance ne peut jamais être égale à l'inverse d'une résistance, donc attention avec les associations en parallèle !
- Lorsqu'on transforme un schéma de circuit, certains points et certaines branches disparaissent, donc les tensions et intensités correspondantes disparaissent aussi : l'erreur fréquente consiste à les « conserver » en les remplaçant au mauvais endroit.
- Quelle que soit la convention, la formule de la puissance  $\mathcal{P} = ui$  reste la même, mais sa signification qualitative change (puissance *reçue* en convention récepteur, ou *fournie* en convention générateur).
- Attention à l'identification des résistances en série ou en parallèle, en particulier pour utiliser la relation du diviseur de tension ou de courant ! Pour que deux dipôles soient en série, il ne suffit pas qu'ils soient placés « l'un après l'autre » : *il ne doit pas y avoir de nœud* entre eux. De même, pour que deux dipôles soient en parallèle, il ne suffit pas qu'ils soient dans deux branches dessinées parallèlement : ils doivent avoir leurs *deux* bornes communes.

## ■ ■ Corrigé des exercices

### Exercice 3.1

1. Les points correspondant à des nœuds sont :  $B, E, F = G$  (identiques car reliés par un fil),  $H$ .

*✎ Les points  $A, C$  et  $D$  ne sont pas des nœuds, car seuls deux fils y concourent.*

2. Le circuit comporte sept branches :  $BCDE, BAH, GE, GFE, GH, GFH, GB$ .

*✎ Le segment  $GF$  semble être une branche mais n'en est pas vraiment une, puisque  $G$  et  $F$  représentent le même nœud.*

3. Les mailles passant par le point  $A$  sont :  $ABGHA, ABGFHA, ABGEFHA, ABCDEGHA, ABCDEFHA, ABCDEFGHA, ABCDEGFHA$ .

4. Les résistances en série sont :  $R_1$  avec  $R_2$  d'une part ; et  $R_4$  avec  $R_5$  d'autre part. Les résistances  $R_7$  et  $R_8$  sont en parallèle.

*⚡ Dans le cas général, deux résistances quelconques d'un circuit ne sont ni en série, ni en parallèle. C'est le cas de toutes les paires de résistances qui ne sont pas citées ci-dessus.*

### Exercice 3.2

1. On applique la loi des nœuds qui donne  $I + I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$ , d'où l'on tire

$$I = I_3 + I_4 - I_1 - I_2. \text{ Application numérique : } I = -2 \text{ A}.$$

2. Le signe négatif du courant  $I$  indique que, physiquement, un courant de 2 A circule dans le sens contraire à celui de la flèche.

### Exercice 3.3

On choisit arbitrairement pour chaque maille un sens de parcours horaire. La loi des mailles appliquée à la maille en haut à gauche du circuit donne  $-U_1 - U_3 + U_4 - U_5 = 0$ , d'où l'on tire

$$U_4 = U_1 + U_3 + U_5. \text{ AN } U_4 = 9 \text{ V}.$$

La maille en haut à droite donne  $-U_2 + U_6 - U_7 + U_3 = 0$ , d'où l'on tire  $U_7 = 7 \text{ V}$ .

En procédant de même avec d'autres mailles (il y a plusieurs possibilités), on obtient

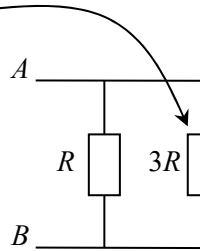
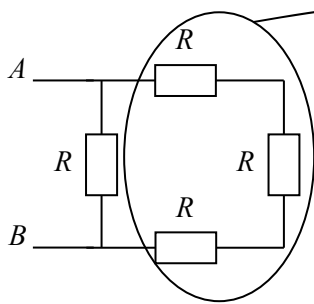
$$U_{10} = 15 \text{ V} \text{ et } U_{11} = 26 \text{ V}.$$

*✎ Le sens de parcours choisi n'a aucune influence sur le résultat.*

### Exercice 3.4

Il faut refaire des schémas pour éviter de se tromper, et commencer par les associations évidentes.

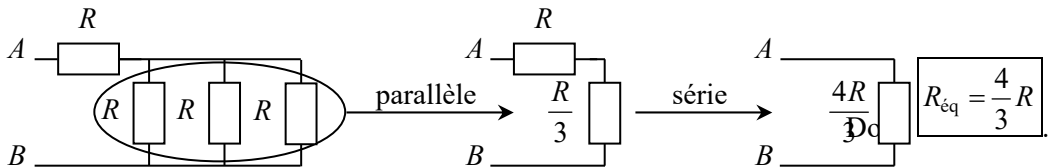
1. On commence par l'association évidente des trois résistances en série.



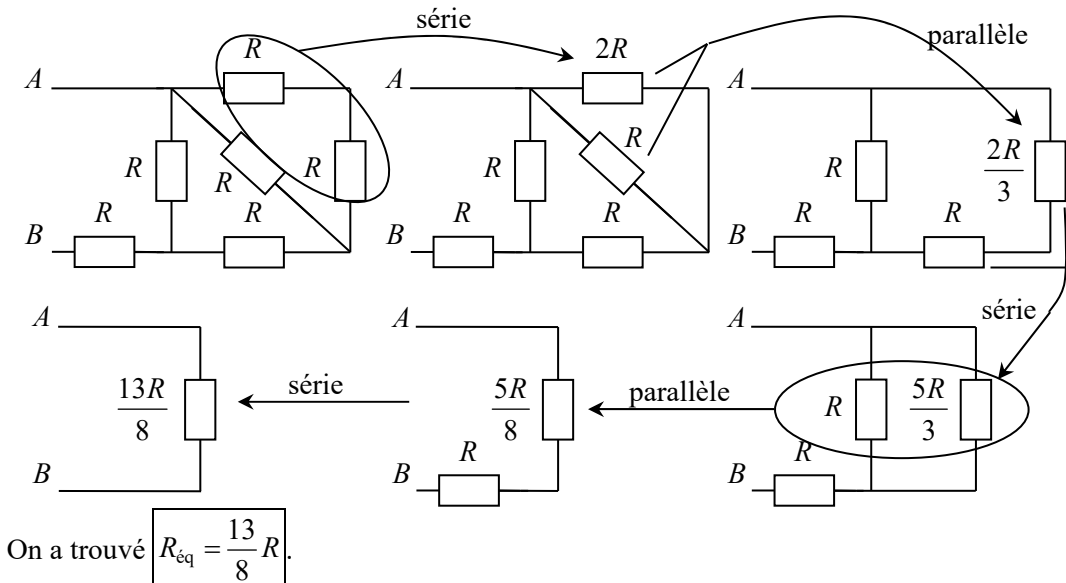
La résistance équivalente globale est constituée par deux résistances en parallèle, soit  $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R}$  dont on déduit  $R_{\text{eq}} = \frac{3}{4}R$ .

✎ Quand des résistances sont associées en série, la résistance équivalente est toujours plus grande que la plus grande des résistances initiales : ici  $3R > R$ . Quand des résistances sont associées en parallèle, la résistance équivalente est toujours plus petite que la plus petite des résistances initiales : ici  $\frac{3}{4}R < R$ .

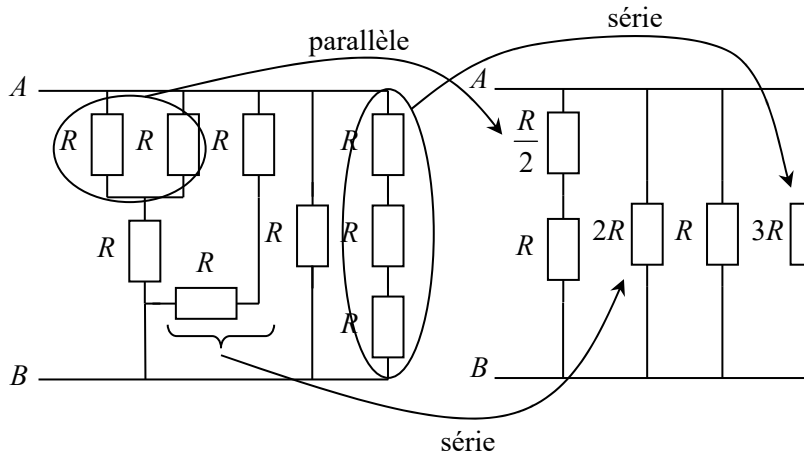
2.



3.



4.



On note que la branche de gauche (association série) peut être remplacée par une résistance  $\frac{3R}{2}$ .

Donc la résistance équivalente à cette association parallèle de quatre résistances est  $R_{\text{éq}} = \frac{2R}{5}$ .

### Exercice 3.5

1. Il n'est pas possible de déterminer la résistance équivalente de ce dipôle par des associations séries ou parallèles, car aucune des cinq résistances n'est en série ou en parallèle avec l'une des autres.

2. On redessine le schéma en fléchant tous les courants.

On applique la loi des nœuds en A :  $i_4 = i - i_1$  ;

en C :  $i_3 = i_1 - i_2$  ; en D :  $i_5 = i - i_1 + i_2$ .

Puis on applique la loi des mailles dans :

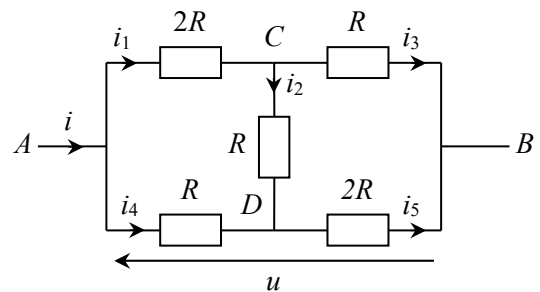
$$ACBA : u = 2Ri_1 + Ri_3 = 3Ri_1 - Ri_2 \quad (1)$$

$$ADBA : u = Ri_4 + 2Ri_5 = 3Ri - 3Ri_1 + 2Ri_2 \quad (2)$$

$$ACDBA : u = 2Ri_1 + Ri_2 + 2Ri_5 = 2Ri + 3Ri_2 \quad (3).$$

On en déduit  $(1) - (2) : 6Ri_1 - 3Ri_2 = 3Ri \quad (4)$  et  $(1) - (3) : 2Ri = 3Ri_1 - 4Ri_2 \quad (5)$ .

⇒ Méthode 3.1



3. On cherche une relation ne faisant intervenir que les variables  $u$  et  $i$ , donc il faut éliminer les autres intensités. Le plus simple est de faire  $(4) - 2 \times (5) \Leftrightarrow i_2 = -\frac{i}{5}$ . En utilisant (3), on obtient

alors  $u = \frac{7}{5}Ri$ . On reconnaît la relation caractéristique  $u = R_{\text{éq}}i$  d'un conducteur ohmique en

convention récepteur avec  $R_{\text{éq}} = \frac{7}{5}R$ .

⇒ Méthode 3.3

### Exercice 3.6

1. La différence de potentiel entre deux points doit être identique dans les deux montages pour que les circuits soient équivalents.

Pour le montage « étoile », entre les points  $A$  et  $B$  :  $V_A - V_B = R_1 i_1 - R_2 i_2$  (1).

Pour le montage « triangle » :  $V_A - V_B = r_3 j_3$  (2).

2. Il faut maintenant trouver une relation sur les courants pour lier le courant  $j_3$  au courant  $i_1$  et  $i_2$ . On cherche à ne conserver que ces trois inconnues. La loi des nœuds permet d'écrire  $j_1 = i_2 + j_3$  et  $j_2 = j_3 - i_1$ .

On écrit la loi des mailles  $r_3 j_3 + r_2 j_2 + r_1 j_1 = 0$ , soit  $r_3 j_3 + r_2 (j_3 - i_1) + r_1 (i_2 + j_3) = 0$ . On en

déduit  $j_3 = \frac{r_2 i_1 - r_1 i_2}{r_1 + r_2 + r_3}$  que l'on remplace dans l'équation (2), qui doit être équivalente à (1), soit

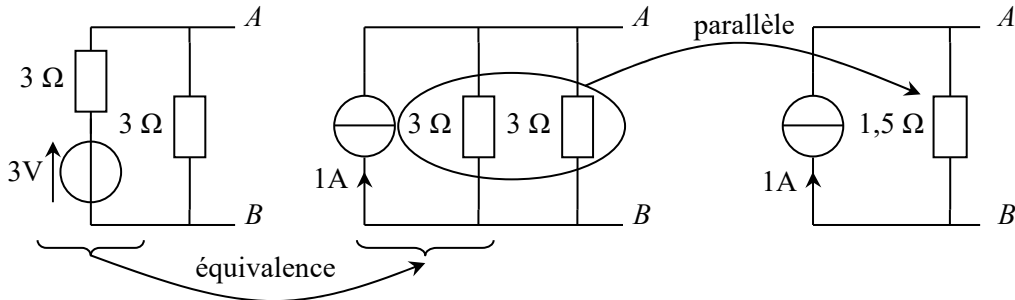
$\frac{r_2 r_3 i_1 - r_1 r_3 i_2}{r_1 + r_2 + r_3} = R_1 i_1 - R_2 i_2$ . On identifie les facteurs se trouvant devant chaque intensité, et l'on

obtient  $R_1 = \frac{r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$  et  $R_2 = \frac{r_1 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$ . On obtiendrait de même  $R_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 + r_3}$ .

### Exercice 3.7

On rappelle que les deux sources sont liées par la relation  $e = R \eta$ .

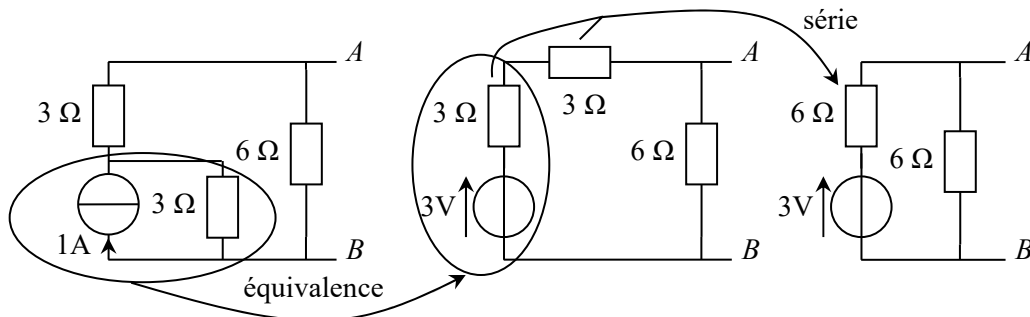
1.



Par équivalence entre les deux modèles, le modèle de Thévenin du dipôle est une résistance de  $1,5 \Omega$  en série avec une source de tension (vers le haut) de FÉM  $e = 1,5 \times 1 = 1,5 \text{ V}$ .

⇒ Méthode 3.2

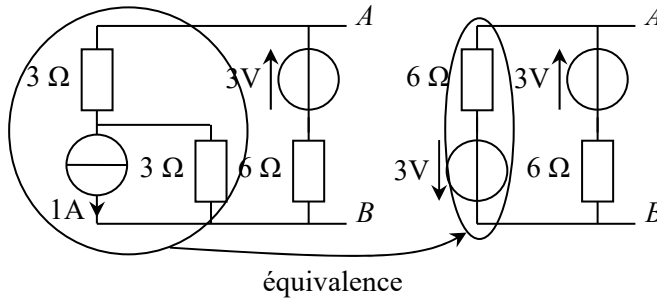
2.



La fin de la résolution est maintenant similaire au cas de la question 1, mais avec des résistances de  $6 \Omega$ . La résistance des modèles de Norton et Thévenin vaut  $3 \Omega$ , la source de courant délivre un courant de  $0,5 \text{ A}$  (vers le haut) et la source de tension délivre  $1,5 \text{ V}$  (vers le haut).

3. Les résultats sont identiques au paragraphe précédent, sauf que toutes les flèches des sources sont dirigées vers le bas.

4.



Le passage au modèle de Norton donne deux sources de courant en parallèle, mais l'une vers le haut et l'autre vers le bas. Par conséquent les sources s'annulent et il ne reste plus que deux résistances de  $6 \Omega$  en parallèle. Donc le dipôle est équivalent à une résistance de  $3 \Omega$ .

### Exercice 3.8

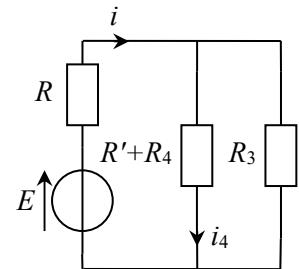
1. On note  $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 6 \Omega$  la résistance équivalente à l'association parallèle de  $R_1$  et  $R_2$ .

La transformation du schéma permet d'obtenir directement la résistance équivalente à l'association parallèle, soit

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R' + R_4} + \frac{1}{R_3}, \text{ d'où } R_{\text{éq}} = \frac{(R' + R_4)R_3}{R' + R_4 + R_3}. \text{ AN } R_{\text{éq}} = 7,5 \Omega.$$

On en déduit, en utilisant la loi des mailles, le courant dans les résistances en série  $R$  et  $R_{\text{éq}}$ , soit

$$i = \frac{E}{R + R_{\text{éq}}}. \text{ AN } i = 0,8 \text{ A}.$$



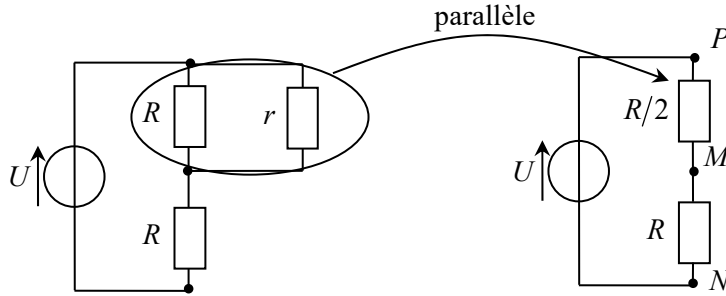
2. D'après le schéma précédent, on utilise la formule du pont diviseur de courant pour trouver d'abord  $i_4 = \frac{R_3}{R' + R_4 + R_3} i$ . Or ce courant est celui qui traverse un autre diviseur de courant,

formé par  $R_1$  et  $R_2$ . On a donc  $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_4$  soit  $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times \frac{R_3}{R' + R_4 + R_3} i$ . AN  $i_1 = 0,16 \text{ A}$ .

### Exercice 3.9

1. Les deux résistances sont en série, on utilise donc la formule du diviseur de tension, ce qui donne  $V_{MN} = V_{PM} = \frac{R}{R + R} U$  soit  $V_{MN} = V_{PM} = \frac{U}{2} = 12 \text{ V}$ .

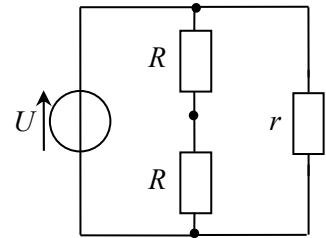
2. Le schéma avec le voltmètre branché entre  $P$  et  $M$  devient :



La résistance équivalente vaut  $R/2$  car  $r = R$ . On en déduit avec la formule du diviseur de tension, la valeur lue :  $V_{\text{luc}} = V_{PM} = \frac{R/2}{R + R/2} U$  soit  $V_{\text{luc}} = V_{PM} = \frac{U}{3} = 8 \text{ V}$ . Si le voltmètre est

entre  $M$  et  $N$ , on obtient de même :  $V_{\text{luc}} = V_{MN} = \frac{R/2}{R + R/2} U$  soit  $V_{\text{luc}} = V_{MN} = \frac{U}{3} = 8 \text{ V}$ .

Si le voltmètre est entre  $P$  et  $N$ , d'après le schéma, la tension aux bornes du voltmètre vaut  $V_{\text{luc}} = U = 24 \text{ V}$ .



### Exercice 3.10

1. On applique directement la formule du pont diviseur de tension pour des résistances en série et l'on obtient :  $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$  et  $U_1 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} E$ . AN  $U_2 = 5,0 \text{ V}$  et  $U_1 = -5,0 \text{ V}$ .

●\* La tension aux bornes de  $R_1$  et celle aux bornes de l'ensemble sont de sens opposés, il faut donc un signe négatif dans la seconde formule. Par ailleurs, les données ayant deux chiffres significatifs, on donne deux chiffres aussi dans les résultats, donc ne pas oublier le 0 après la virgule : il donne une information !

2. Les résistances  $R_1$  et  $R_3$ , qui sont en parallèle, peuvent être remplacées par une résistance équivalente  $R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 750 \Omega$ . On peut ainsi utiliser la formule du diviseur de tension et

l'on obtient  $U_1 = \frac{R_{\text{éq}}}{R_{\text{éq}} + R_2} E$  et  $U_2 = \frac{R_2}{R_{\text{éq}} + R_2} E$ . AN  $U_1 = 4,3 \text{ V}$  et  $U_2 = 5,7 \text{ V}$ .

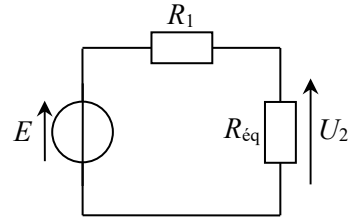
3. Avec la formule du diviseur de courant :  $I_1 = -\frac{G_1}{G_1 + G_3} I_0 = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} I_0$ . AN  $I_1 = -7,5 \text{ mA}$ .

La résistance  $R_2$  est traversée par  $I_0$  (en convention récepteur), donc  $U_2 = R_2 I_0 = 10 \text{ V}$ .

4. On simplifie le schéma en remplaçant  $R_2$  en parallèle

avec l'association  $R_3 + R_4$  par  $R_{\text{éq}} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 875 \Omega$ .

Le pont diviseur de tension donne alors :  $U_2 = \frac{R_{\text{éq}}}{R_{\text{éq}} + R_1} E$ .



AN  $U_2 = 4,7 \text{ V}$ . On retrouve la tension  $U_2$  comme tension totale aux bornes du diviseur de

tension formé par  $R_3$  et  $R_4$ , donc  $U_4 = \frac{R_4}{R_4 + R_3} U_2$ . AN  $U_4 = 2,7 \text{ V}$ .

☛ Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  ne sont pas en série, car il y a un nœud entre les deux : elles ne constituent donc pas un diviseur de tension.

### Exercice 3.11

1. On remarque que  $U_{AC} = E = (R_1 + R_2)I_1$ , donc  $I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$ , de même  $I_3 = \frac{E}{R_3 + R_4}$ . La loi

des nœuds en A donne  $I = I_1 + I_3 = E \left( \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} \right)$ .

Alors  $U_1 = R_1 I_1$  (convention récepteur) soit  $U_1 = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$  et de même  $U_3 = R_3 I_3 = \frac{R_3 E}{R_3 + R_4}$ .

2. Les expressions de  $U_1$  et  $U_3$  sont immédiates avec le pont diviseur de tension. Alors d'après

l'additivité des tensions :  $U = U_3 - U_1 = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}$ .  $U$  est nulle lorsque  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .

3. Quand l'ampèremètre indique zéro, c'est qu'il n'est traversé par aucun courant : les intensités restent donc les mêmes que dans le circuit précédent, donc les expressions des tensions aussi. De plus, l'ampèremètre étant équivalent à une résistance, la tension  $U$  à ses bornes est nulle également : c'est la situation étudiée à la question 2, qui donne  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ .

4. On règle la valeur de la résistance variable  $R_1$  de manière à obtenir  $U = 0$  (contrôlé à l'aide d'un voltmètre ou d'un ampèremètre). On en déduit la valeur de la résistance inconnue  $R_3$  :

$R_3 = \frac{R_1 R_4}{R_2}$ . Les valeurs de  $R_2$  et  $R_4$  étant connues à 1% près, et  $R_1$  pouvant être connue

beaucoup plus précisément (si on utilise au moins quatre curseurs), on peut au mieux avoir une précision de l'ordre de 2% pour  $R_3$ . En effet, l'incertitude relative sur  $R_3$  s'écrit :

$$\frac{\Delta R_3}{R_3} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4}\right)^2}. \text{ Or } \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_4}{R_4} = 0,01 \text{ et on peut avoir } \frac{\Delta R_1}{R_1} \ll 0,01,$$

donc on obtient  $\frac{\Delta R_3}{R_3} = 0,02$  en arrondissant à un seul chiffre significatif par excès.



Pour pouvoir utiliser quatre curseurs, et avoir ainsi une précision sur  $R_1$  inférieure à 0,1 %, on doit s'arranger pour que  $R_1$  soit de l'ordre du kilohm. Or la résistance à mesurer  $R_3$  est de l'ordre du dixième d'ohm, on a donc un rapport  $R_1/R_3$  de l'ordre de  $10^4$ . Il faut alors choisir  $R_4/R_2$  de l'ordre de  $10^{-4}$  : on prend  $R_4 = 100 \Omega$  et  $R_2 = 1,00 \text{ M}\Omega$ .

### Exercice 3.12

1. En utilisant la formule du diviseur de tension on obtient immédiatement :

$$U_{AB} = \frac{R}{3R} E \text{ soit } U_{AB} = \frac{E}{3} = 4 \text{ V}.$$

2. Les bornes de masse de l'oscilloscope et du générateur sont connectées par l'intermédiaire de la prise de terre. Par conséquent, la résistance se trouvant entre ces deux bornes est court-circuitée : on peut considérer qu'elle est en parallèle avec un fil (la connexion via la prise de terre, de résistance négligeable) ; le courant qui traverse cette résistance est donc nul (diviseur de courant), et la tension à ses bornes est alors nulle aussi d'après la loi d'Ohm. Lorsque l'oscilloscope est branché, il n'y a donc que deux résistances  $R$  en série, et la formule du pont

diviseur donne alors  $U_{AB} = \frac{R}{2R} E$  soit  $U_{AB} = \frac{E}{2} = 6 \text{ V}$ .

### Exercice 3.13

1. Par application directe des lois de Kirchhoff, on obtient :  $I - I_1 + I_2 = 0$  (nœud  $C$  ou  $D$ ) ;

$$U - xRI_1 - rI = 0 \text{ (maille du haut)} ; \quad U + rI - (1-x)RI_2 = 0 \text{ (maille du bas)}.$$

Pour résoudre ce système de trois équations à trois inconnues, on peut d'abord exprimer l'inconnue  $I_1$  avec la deuxième équation :  $I_1 = \frac{U - rI}{xR}$ . On exprime de même l'inconnue  $I_2$

avec la troisième :  $I_2 = \frac{U + rI}{(1-x)R}$ . Puis on reporte le tout dans la première équation, où reste

$$\text{alors seulement l'inconnue } I : I - \frac{U - rI}{xR} + \frac{U + rI}{(1-x)R} = 0 \Leftrightarrow I + \frac{rI}{xR} + \frac{rI}{(1-x)R} = \frac{U}{xR} - \frac{U}{(1-x)R}$$

$$\Leftrightarrow Ix(1-x)R + (1-x)rI + xrI = U(1-x) - Ux \text{ d'où finalement } I = \frac{(1-2x)U}{r + x(1-x)R}.$$

$$\text{On trouve alors les deux autres intensités : } I_1 = \frac{U}{R} \times \frac{(1-x)R + 2r}{r + x(1-x)R} ; \quad I_2 = \frac{U}{R} \times \frac{xR + 2r}{r + x(1-x)R}.$$

$\Rightarrow$  Méthode 3.1

$$2. \mathcal{P}_{AC} = xRI_1^2 \text{ et } \mathcal{P}_{CB} = (1-x)RI_2^2 \text{ donc } \eta = \frac{\mathcal{P}_{AC}}{\mathcal{P}_{CB}} = \frac{x}{1-x} \left( \frac{I_1}{I_2} \right)^2 \text{ soit } \eta = \frac{x}{1-x} \left( \frac{(1-x)R + 2r}{xR + 2r} \right)^2.$$

### Exercice 3.14

1. On applique la loi des mailles  $E - RI - rI - e = 0$ , ce qui donne  $I = \frac{E - e}{R + r} = 2 \text{ A}$ .

On en déduit donc la tension  $U = e + rI = 12,4 \text{ V}$ . L'intensité et la tension sont définies en convention récepteur.

2. La puissance délivrée par la source vaut  $P_{\text{gén}} = EI = 26 \text{ W}$ , la puissance dissipée par effet Joule  $P_{\text{Joule}} = (r + R)I^2 = 2 \text{ W}$  et la puissance « stockée » dans la FÉM de la batterie

$P_{\text{stock}} = eI = 24 \text{ W}$ . Le rendement est alors :  $\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fournie}}} = \frac{P_{\text{stock}}}{P_{\text{gén}}}$  soit  $\eta = \frac{e}{E} = 92 \%$ .

3. a) La capacité en ampères-heures est homogène à une charge électrique  $Q$  car le courant (en ampères) est une charge divisée un temps  $\left(i = \frac{\delta q}{dt}\right)$ .

b) Au départ la batterie n'est qu'à 10 % de sa capacité, sa charge est donc  $Q_0 = 5 \text{ A} \cdot \text{h}$ . Il faut donc lui apporter une charge  $Q = 45 \text{ A} \cdot \text{h} = I \cdot t$  avec  $t$  exprimé en heures, soit  $t = \frac{Q}{i} = 22,5 \text{ h}$ .

c) Énergie dissipée par effet Joule :  $W_{\text{Joule}} = P_{\text{Joule}} \times t = 2 \times 22,5 \times 3600$  soit  $W_{\text{Joule}} = 160 \text{ kJ}$ .

### Exercice 3.15

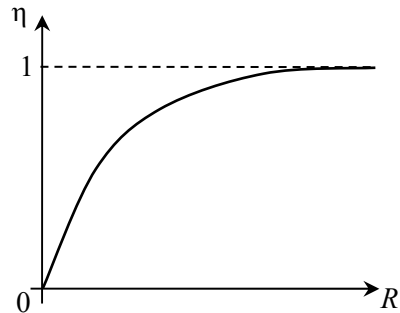
1. La résistance  $R$  reçoit la puissance  $P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$ . Or d'après la formule du diviseur de tension :  $U = \frac{R}{R+r}E$ . On en déduit  $P = \frac{R}{(R+r)^2}E^2$ .

2. On calcule la dérivée de  $P$  en fonction de  $R$ , soit  $\frac{dP}{dR} = \frac{-E^2(R-r)}{(R+r)^3}$ .  $P$  est extrémale lorsque sa dérivée s'annule, donc pour  $R = r$ . On a alors  $P = \frac{E^2}{2R}$  qui correspond bien à un maximum car pour  $R = 0$ ,  $P = 0$ .

3.  $P_{\text{gén}} = EI$ , et d'après la loi des mailles  $E = (r + R)I$ , d'où l'on tire  $I = \frac{E}{R+r}$  et finalement  $P_{\text{gén}} = \frac{E^2}{R+r}$ .

Le rendement est donc :  $\eta = \frac{R}{R+r}$ .

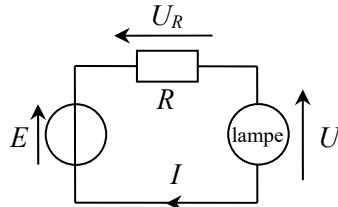
Lorsque le montage est adapté, on obtient  $\eta = 0,5$  : la moitié de la puissance fournie par la FÉM est reçue par la résistance  $R$  (l'autre moitié étant « perdue » dans la résistance interne  $r$  du générateur).



*Plus la résistance est grande et plus le rendement de transfert est important, mais si on prend le cas limite  $R \rightarrow \infty$ , le rendement est de 1 mais le courant est nul donc  $P_{\text{gén}} = EI = 0$ , le générateur ne fournit plus de puissance.*

### Exercice 3.16

– Le schéma du circuit est le suivant :

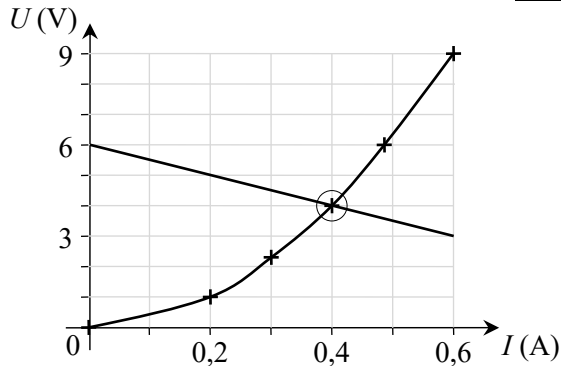


– Commençons par déterminer les grandeurs électriques souhaitées pour la lampe. La puissance qu'elle reçoit est donnée par le produit du courant par la tension en convention récepteur, soit  $\mathcal{P} = UI = 1,6 \text{ W}$  : d'après les valeurs du tableau, cela s'obtient pour les valeurs  $I = 0,40 \text{ A}$  et  $U = 4,0 \text{ V}$ .

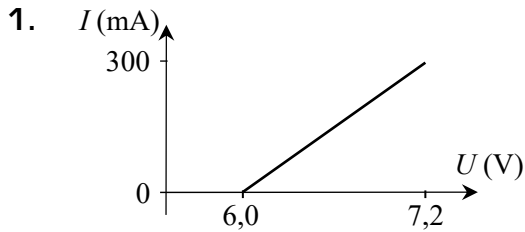
*Il n'y a pas d'autre couple possible, puisque  $I$  est une fonction croissante de  $U$  : pour  $U$  plus grande,  $I$  est plus grande donc  $\mathcal{P}$  aussi ; de même pour  $U$  plus petite,  $I$  est plus petite donc  $\mathcal{P}$  aussi.*

– D'après la loi des mailles :  $E - U_R - U = 0$  donc la tension aux bornes de la résistance doit être  $U_R = 2,0 \text{ V}$ . La loi d'Ohm pour la résistance donne alors  $R = \frac{U_R}{I}$  soit  $R = 5,0 \Omega$ .

– On peut aussi répondre à la question en traçant sur un même graphe la caractéristique de la lampe (en convention récepteur) et celle du générateur de Thévenin (source en série avec la résistance, en convention générateur) : celle-ci est une droite d'équation  $U = E - RI$ , son ordonnée à l'origine est  $E = 6,0 \text{ V}$  et seule sa pente  $-R$  a une valeur inconnue. En ajustant la droite pour qu'elle passe par le point de fonctionnement  $(0,40 \text{ A} ; 4,0 \text{ V})$ , on trouve une décroissance de  $2,0 \text{ V}$  pour  $0,40 \text{ A}$ , soit une pente de  $-5,0 \Omega$ , donc  $R = 5,0 \Omega$ .



### Exercice 3.17



2. On note sur la caractéristique précédente que le dipôle se comporte comme un interrupteur ouvert entre 0 et 6,0 V, et possède un modèle linéaire entre 6,0 V et 7,2 V : la courbe est alors une droite d'équation  $I = 0,25U - 1,5$  (en A), soit aussi  $U = 4,0I + 6,0$  (en V).

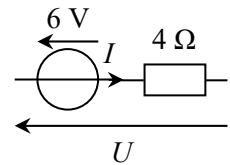
On peut représenter le modèle de Thévenin équivalent en convention récepteur (voir ci-dessous) : FÉM  $E_Z = 6,0$  V et résistance interne  $r_Z = 4,0 \Omega$ .

3. Le point de fonctionnement correspond aux valeurs de  $U$  et  $I$  lorsque le dipôle est alimenté par un générateur. L'association de la diode avec le générateur de Thévenin (correspondant à la pile) permet d'écrire une loi

des mailles :  $E - rI = r_Z I + E_Z$  d'où  $I = \frac{E - E_Z}{r + r_Z}$ . AN  $I = 140$  mA.

Alors  $U = E - rI = r_Z I + E_Z$  soit  $U = 6,5$  V (avec deux chiffres significatifs).

– On trouve le même résultat graphiquement en traçant la caractéristique de la pile  $E - rI$  (en convention générateur) sur le même graphique que la diode (une courbe similaire à la question 1 mais dont l'axe des abscisses varie de 0 à 12 V) et en considérant le point d'intersection de la courbe de la pile et de la diode. La courbe de la pile relie les points  $\left(0, \frac{E}{r} = 300 \text{ mA}\right)$  et  $(E, 0)$ .



⚠ Attention, sur le graphique de la question 1 du corrigé, l'axe des ordonnées n'est pas placé à la position 0 volt. Vous ne pouvez donc pas répondre pour la méthode graphique en traçant la caractéristique de la pile sur cette représentation (du livre). Il faut un graphique dans lequel la tension varie de 0 à 12 volts.



# Circuit linéaire du premier ordre



**Joseph HENRY** (1797-1878) voit le jour dans une famille modeste de la région de New York. Il débute comme apprenti horloger. Poursuivant parallèlement ses études, il obtient un poste d'enseignant en chimie. Il conçoit en 1829 un moteur électrique et trois ans plus tard un électroaimant de grande puissance. Il découvre en 1832, en même temps que Michael FARADAY, le phénomène de l'induction et introduit en 1840 la notion d'auto-induction. Son nom est désormais attaché à l'unité d'inductance électrique.

## ■ Un peu d'histoire

L'ancêtre du condensateur est la bouteille de LEYDE ; cet objet a été conçu indépendamment dans cette ville universitaire par Ewald VON KLEIST et par Pieter VAN MUSSCHENBROEK en 1745. Il consistait en une bouteille en verre contenant de l'eau et recouverte d'une feuille de métal, le tout relié par une chaîne à une sphère métallique. Daniel GRALATH a eu l'idée d'en mettre plusieurs en parallèle pour former la première batterie ; le terme est de Benjamin FRANKLIN qui, par ailleurs, donne une explication du phénomène.

Les bobines ont joué un rôle très important pour mettre en évidence les liens entre électricité et magnétisme. AMPÈRE conçoit un solénoïde, bobine de forme hélicoïdale, et l'appelle ainsi dans un exposé de 1820, en utilisant le mot grec *sôlên* désignant un tuyau et le suffixe *-oïde* signifiant *en forme de*. Son idée est d'avoir une bobine de forme similaire à celle d'un barreau aimanté, pour montrer leur analogie de comportement.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les relations entre intensité et tension pour une bobine et pour un condensateur
- ▷ L'énergie stockée dans une bobine ou un condensateur
- ▷ Les propriétés de continuité de l'intensité pour une bobine, de la tension et de la charge pour un condensateur
- ▷ Les notions de régimes transitoire et permanent et l'ARQS
- ▷ L'équation différentielle canonique du premier ordre
- ▷ Des exemples de circuits du premier ordre

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Établir une équation différentielle pour un circuit du premier ordre et la mettre sous forme canonique
- ▷ Déterminer les conditions initiales dans un circuit
- ▷ Résoudre une équation différentielle linéaire en utilisant les conditions initiales
- ▷ Exploiter un relevé expérimental pour un système du premier ordre
- ▷ Réaliser un bilan énergétique

# ■ ■ Résumé de cours

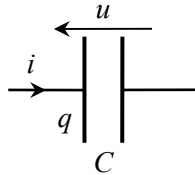
## ■ Cadre de l'ARQS

Dans l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (ARQS), les effets liés à la propagation des signaux sont négligés. Alors l'intensité est la même en tout point d'une même branche, et les lois vues en régime continu (lois de Kirchhoff, loi d'Ohm) restent valables.

Pour un circuit de taille  $d$ , dont le régime de fonctionnement a un temps caractéristique  $\tau$ , la condition d'application de l'ARQS est :  $d \ll c\tau$  avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

## ■ Condensateur (idéal)

### □ Définition et propriétés



Un condensateur est constitué de deux armatures conductrices, séparées par un isolant.

En convention récepteur :  $i = C \frac{du}{dt}$ . En convention générateur :  $i = -C \frac{du}{dt}$ .

$C$  est la **capacité** du condensateur. Unité SI : le farad (F).

Valeurs usuelles au laboratoire : 1 nF à 1  $\mu$ F.

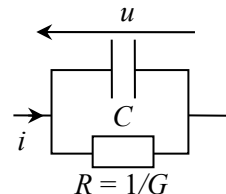
La charge portée par l'une des armatures (celle vers laquelle pointe la flèche de tension  $u$ ), est liée à cette tension par la relation :  $q = Cu$ . L'autre armature porte la charge  $-q$ .

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

L'énergie stockée dans un condensateur vaut :  $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} Cu^2$ .

### □ Modélisation d'un condensateur réel

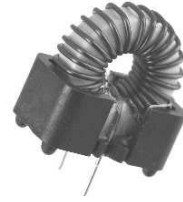
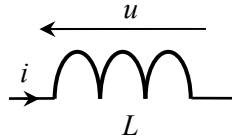
Pour décrire un condensateur réel, il est parfois nécessaire de prendre en compte la *conductance de fuite* (l'isolant n'étant pas parfait). Le condensateur réel est alors modélisé par un condensateur idéal en parallèle avec un dipôle ohmique, d'où la relation :  $i = C \frac{du}{dt} + Gu$ .





## ■ Bobine (idéale)

### □ Définition et propriétés



C'est un enroulement de fil où se produit le phénomène d'auto-induction (voir chapitre 22).

En convention récepteur :  $u = L \frac{di}{dt}$ . En convention générateur :  $u = -L \frac{di}{dt}$ .

$L$  est l'**inductance** de la bobine. Unité SI : le henry (H).

Valeurs usuelles au laboratoire : 1 mH à 1 H.

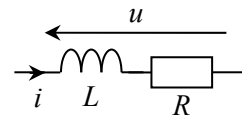
*L'intensité du courant traversant une bobine ne peut pas subir de discontinuité.*

L'énergie stockée dans une bobine vaut :  $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} Li^2$ .

### □ Modélisation d'une bobine réelle

Il est souvent nécessaire de prendre en compte la résistance des fils qui constituent une bobine. La bobine réelle est alors modélisée par

une bobine idéale en série avec un dipôle ohmique :  $u = L \frac{di}{dt} + Ri$ .



## ■ Régime libre et échelon de tension

- Un circuit en **régime libre** ne comporte aucun générateur. Mais ses grandeurs électriques peuvent évoluer au cours du temps s'il comporte un condensateur initialement chargé (ou plus rarement, une bobine initialement parcourue par un courant).
- Un circuit est soumis à un **échelon de tension** s'il comporte une source dont la FÉM est nulle jusqu'à l'instant initial choisi, puis constante à partir de cet instant. Cela correspond en pratique à l'allumage d'un générateur de tension constante, ou à la fermeture d'un interrupteur.
- Dans ce chapitre, on étudie l'évolution temporelle des grandeurs électriques d'un circuit linéaire, en régime libre ou en réponse à un échelon de tension : c'est un **régime transitoire** (de durée limitée), aboutissant finalement à un nouveau **régime permanent** (continu).

## ■ Régime transitoire d'un circuit du premier ordre

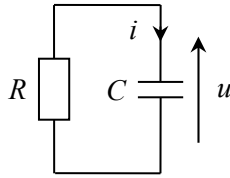
### □ Équation différentielle

Un système est dit du premier ordre lorsqu'il est régi par une équation différentielle qui lie une de ses variables avec sa dérivée première. Cette équation peut alors se mettre sous la forme

canonique :  $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x = G$  où  $\tau$  est appelé **constante de temps** ou **temps de relaxation**.

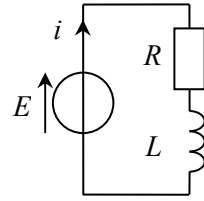
## □ Exemples fondamentaux : circuits *RC* et *RL*

Circuit *RC*  
en régime libre



$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0 \text{ avec } \tau = RC$$

Circuit *RL*  
soumis à un échelon



$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

⇒ Méthode 4.1. Établissement de l'équation différentielle

⇒ Méthode 4.2. Identification des termes de l'équation canonique

### □ Solution

– Si l'équation différentielle est **sans second membre** (c'est-à-dire avec 0 au second membre), la solution est de la forme :  $x(t) = Ae^{-t/\tau}$ .

– Si l'équation comporte un second membre constant non nul, la solution générale de l'équation est la somme de la *solution générale de l'équation sans second membre* et d'une *solution particulière* constante, soit :  $x(t) = x_{\text{sgs}}(t) + x_{\text{sp}} = Ae^{-t/\tau} + x_{\text{sp}}$ .

– Dans les deux cas, la constante inconnue *A* (**constante d'intégration**) se détermine en utilisant la valeur de *x* à  $t = 0^+$  (**condition initiale**).

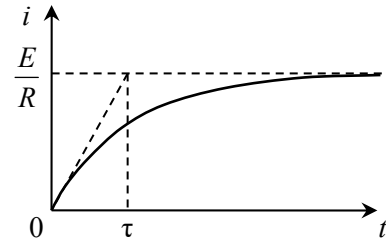
⇒ Méthode 4.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit

⇒ Méthode 4.4. Résolution de l'équation différentielle

### □ Représentation graphique

$x(t)$  tend vers une valeur asymptotique (0 ou  $x_{\text{sp}}$ ) avec une durée de l'ordre de quelques  $\tau$ . On a représenté ici la solution de l'équation  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{L}$  avec  $i(0^+) = 0$ .

L'intersection entre la tangente à l'origine et l'asymptote finale donne la valeur de la constante de temps  $\tau$ .



⇒ Méthode 4.5. Principe de la méthode d'Euler

⇒ Méthode 4.6. Implémentation de la méthode d'Euler en Python

⇒ Méthode 4.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec la bibliothèque Scipy

### □ Bilan énergétique

– Lors de la *décharge* d'un condensateur dans un circuit *RC*, l'énergie  $\mathcal{E}_{C,0} = \frac{1}{2}Cu_0^2$  stockée initialement dans le condensateur est transférée au dipôle ohmique et dissipée par effet Joule.

– Lors de la *charge* d'un condensateur, sous une tension *E*, à travers une résistance, l'énergie transférée par la source au dipôle ohmique (et dissipée par effet Joule) est égale à l'énergie  $\mathcal{E}_{C,\infty} = \frac{1}{2}CE^2$  transférée par la source au condensateur : le rendement est donc de 50 %.

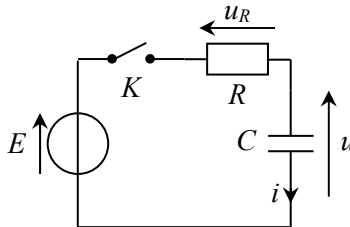
## ■ Comment déterminer l'équation différentielle d'un circuit sous forme canonique ?

### □ Méthode 4.1. Établissement de l'équation différentielle

Écrire les relations entre intensité et tension relatives à chaque dipôle, puis utiliser la loi des nœuds et/ou la loi des mailles pour éliminer les variables non souhaitées, de manière à ne garder qu'une seule grandeur inconnue (fonction du temps). Dans le cas où on ne peut pas éliminer une variable car seules les informations sur sa dérivée sont disponibles, il faut dériver toute l'équation.

⇒ Exercices 4.3 à 4.9

À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et on cherche à déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  du courant traversant le circuit ci-dessous, le condensateur étant initialement déchargé.



Les équations relatives aux différents dipôles du schéma sont :  $i = C \frac{du}{dt}$  pour le condensateur ;

$u_R = Ri$  pour la résistance.

Pour  $t > 0$ , la loi des mailles donne  $E = u_R + u$ . On utilise les formules de chaque dipôle de manière à éliminer les variables que l'on ne souhaite pas garder, ce qui permet d'obtenir :

$$E = Ri + u.$$

Or l'équation du condensateur contient la dérivée de  $u$ , nous dérivons donc l'équation qui devient  $\frac{dE}{dt} = 0 = R \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt}$  (car  $E$  est constant). On remplace le terme  $\frac{du}{dt}$  que l'on ne souhaite pas garder et l'on obtient l'équation différentielle sur  $i$  :

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

## □ Méthode 4.2. Identification des termes de l'équation canonique

Écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé (ordre 1 dans ce chapitre). Il suffit ensuite d'égaliser le ou les autres coefficients avec celui ou ceux de l'équation canonique : pour une équation du premier ordre, le second coefficient est noté  $1/\tau$ .

⇒ Exercices 4.3, 4.4, 4.9

Dans l'exemple précédent de circuit du premier ordre, il faut écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre 1, soit  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$ . On identifie avec l'équation d'un

système du premier ordre  $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x = 0$  : le second coefficient est  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$  d'où  $\tau = RC$ .

## ■ Comment résoudre l'équation différentielle d'un circuit ?

### □ Méthode 4.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit

Il faut déterminer la valeur de la grandeur étudiée à  $t = 0^+$ , c'est-à-dire juste après le déclenchement du régime transitoire (fermeture ou ouverture d'un interrupteur...). On utilise pour cela la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou celle de l'intensité du courant traversant une bobine entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ , puis éventuellement la loi des mailles ou la loi des nœuds.

⇒ Exercices 4.1 à 4.9

Dans l'exemple du premier ordre, nous allons déterminer la valeur initiale du courant, puisque l'équation différentielle porte sur  $i$ .

Le condensateur est initialement déchargé, donc  $u(0^-) = 0$ , et d'après la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on en déduit que  $u(0^+) = 0$ .

La loi des mailles permet d'obtenir à  $t = 0^+$  :  $E = Ri(0^+) + u(0^+)$  d'où l'on tire  $i(0^+) = \frac{E}{R}$ .

Attention,  $i(0^+) \neq i(0^-)$  puisque  $i(0^-) = 0$  (pas de courant quand l'interrupteur était ouvert) : le courant est discontinu, ce qui est fréquent dans un condensateur ou une résistance.

## □ Méthode 4.4. Résolution de l'équation différentielle

La résolution se fait en deux ou trois étapes.

- La première étape consiste à déterminer la forme de la *solution générale de l'équation sans second membre* (toujours la même pour un système du premier ordre), qui comporte une constante multiplicative à déterminer.
- Si l'équation à résoudre comporte un second membre (terme non nul), la seconde étape est la détermination de la *solution particulière* qui a la même forme que le second membre (donc constante dans ce chapitre). La solution générale de l'équation étudiée est alors la somme des deux résultats précédents.
- On détermine finalement la constante inconnue avec une condition initiale.

⇒ Exercices 4.3 à 4.9

- L'équation trouvée précédemment  $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$  était sans second membre, donc on obtient directement  $i(t) = Ae^{-t/\tau}$ . La condition initiale sur le courant permet de déterminer la valeur de  $A$ . En effet  $i(0^+) = A$  selon la solution que l'on vient de déterminer, et  $i(0^+) = \frac{E}{R}$  d'après les conditions initiales.

On en déduit donc  $A = \frac{E}{R}$ , soit finalement  $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ .

- Pour une équation différentielle avec second membre, par exemple  $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC}u = \frac{E}{RC}$ , on obtiendrait de même  $u_{\text{sgs}}(t) = Ae^{-t/\tau}$  en posant  $\tau = RC$ . La solution particulière *constante* est donnée par  $\frac{du_{\text{sp}}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{\text{sp}} = \frac{E}{RC}$ , soit  $u_{\text{sp}} = E$  (puisque  $\frac{du_{\text{sp}}}{dt} = 0$  pour une constante).

La solution complète est donc  $u(t) = u_{\text{sgs}}(t) + u_{\text{sp}} = Ae^{-t/\tau} + E$ . Si la condition initiale est par exemple  $u(0^+) = 0$ , on trouve  $A = -E$  d'où finalement  $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ .

## ■ Comment résoudre une équation différentielle d'ordre 1 par une méthode numérique ?

### □ Méthode 4.5. Principe de la méthode d'Euler

L'équation différentielle d'ordre 1 à résoudre est du type  $\dot{y}(t) + a y(t) = b$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes,  $y(t)$  une fonction du temps et  $\dot{y}(t)$  sa dérivée temporelle. On suppose que la valeur initiale  $y(0) = y_0$  est connue.

La méthode d'Euler consiste à déterminer les valeurs  $y(t_i)$  de la fonction pour des dates  $t_i$  successives en utilisant l'approximation  $\dot{y}(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ .

À partir de la valeur  $y(t_i)$  de la fonction à une date  $t_i$  :

- on calcule  $\dot{y}(t_i)$  avec l'équation différentielle  $\dot{y}(t_i) = b - a y(t_i)$  ;
- on calcule  $y(t_{i+1})$  avec l'approximation  $y(t_{i+1}) = y(t_i) + p \dot{y}(t_i)$ , où  $p = t_{i+1} - t_i$  est le pas de la méthode.

⇒ Exercices 4.11, 4.12

On considère l'équation différentielle :  $\dot{y}(t) + 2y(t) = 5$  avec la condition initiale  $y(0) = 0$ . En utilisant la méthode d'Euler avec un pas  $p = 0,1$  s, les premières valeurs sont :

date $t_i$ (s)	$y(t_i)$	$\dot{y}(t_i)$
$t_0 = 0$	0	$5 - 2 \times 0 = 5$
$t_1 = p = 0,1$	$0 + 0,1 \times 5 = 0,5$	$5 - 2 \times 0,5 = 4$
$t_2 = 2p = 0,2$	$0,5 + 0,1 \times 4 = 0,9$	$5 - 2 \times 0,9 = 3,2$
$t_3 = 3p = 0,3$	$0,9 + 0,1 \times 3,2 = 1,22$	$5 - 2 \times 1,22 = 2,56$

*✍ Plus le pas est faible, plus la méthode d'Euler donne un résultat proche de la solution exacte.*

### □ Méthode 4.6. Implémentation de la méthode d'Euler en Python

L'équation différentielle d'ordre 1 à résoudre est du type  $\dot{y}(t) + ay(t) = b$ , comme pour la méthode précédente, avec pour valeur initiale  $y(0) = y_0$ .

Il faut définir :

- la durée  $t_{\max}$  sur laquelle on veut tracer la solution ;
- le nombre de points  $N$  (nombre de dates  $t_i$ ) ;
- le pas  $p$  de la méthode tel que  $t_{\max} = (N - 1)p$ .

Ensuite, on crée une fonction qui renvoie la liste de dates grâce à la bibliothèque numpy :

```
import numpy as np
def liste_dates(t_max,N) :
    return np.linspace(0, t_max, N)
```

Il ne reste plus qu'à créer une fonction qui renvoie la liste des valeurs de la fonction  $y(t_i)$  pour les dates  $t_i$  choisies :

```
def euler_ordre1(T,y0,a,b) :
    N = len(T)
    t_max = T[N-1]
    p = t_max/(N-1)
    Y = np.zeros(N) #un tableau ne contenant que la valeur 0
    Y[0]=y0
    for i in range(1,N):
        Y[i] = p*b+Y[i-1]*(1-a*p)
```

On peut alors tracer la solution en utilisant la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.

⇒ Exercice 4.12

Soit à résoudre l'équation différentielle que vérifie la tension  $u(t)$  d'un condensateur de capacité  $C$  lors de sa décharge à travers une résistance  $R$  :  $RC\dot{u}(t) + u(t) = 0$ .

On donne  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$  et  $u(0) = 2,0 \text{ V}$ .

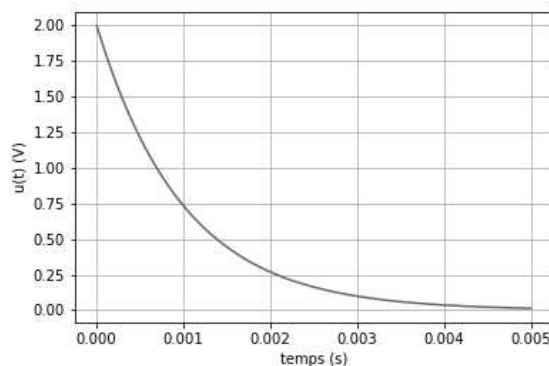
L'équation peut s'écrire  $\dot{u}(t) + \frac{1}{RC}u(t) = 0$ , soit  $a = \frac{1}{RC} = 1000 \text{ s}^{-1}$  et  $b = 0$ .

Le programme suivant permet de tracer la solution pour une durée  $t_{\text{max}} = 5,0 \text{ ms}$  avec  $N = 500$ .

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

T = liste_dates(0.005,500)
Y = euler_ordre1(T,2,1000,0)

plt.plot(T,Y)
plt.xlabel('temps (s)')
plt.ylabel('u(t) (V)')
plt.grid()
plt.show()
```



#### □ Méthode 4.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec la bibliothèque Scipy

Il faut mettre l'équation différentielle sous la forme  $\dot{y}(t) = f(y(t), t)$ .

On utilise alors la méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque Scipy qui prend en paramètres :

- la fonction  $f$ ;
- la condition initiale  $y(0)$  ;
- la liste  $T$  des dates pour lesquelles on calcule la fonction  $y(t)$ .

La méthode renvoie alors la liste  $Y$  (voir la méthode précédente).

Pour résoudre une équation différentielle du type  $\dot{y}(t) + a y(t) = b$ , on écrira le code suivant.

```
def f(y,t): # on définit la fonction f
    return b - a*y
y0 = 2     # Valeur initiale de la fonction y(t), soit 2 par
exemple
T = np.linspace(0,t_max,N) # liste des dates

Y=sp.odeint(f,y0,T) # application de la méthode odeint qui
fournit la liste Y
```

⇒ Exercice 4.12

On cherche à résoudre l'équation différentielle de la méthode précédente :

$$\dot{u}(t) + \frac{1}{RC}u(t) = 0, \text{ soit } f(u(t), t) = -au(t) \text{ avec } a = \frac{1}{RC} = 1000 \text{ s}^{-1}.$$

Le code, en utilisant la méthode `odeint`, est le suivant :

```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np

def f(y,t):
    return -1000*y

y0 = 5     # Valeur initiale de la fonction y(t)
T = np.linspace(0,0.005,500)

X=sp.odeint(f,y0,T)
```



## ■ ■ Vrai/Faux

- |                                                                                                                            | Vrai                     | Faux                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. La solution de l'équation sans second membre d'un système du premier ordre a toujours la même forme.                    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. La solution particulière d'un système du premier ordre est de la même forme que le second membre.                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. La solution particulière d'un système du premier ordre est aussi la solution du régime permanent.                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. L'intensité du courant traversant une inductance ne peut pas subir de discontinuité.                                    | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité.                                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. La charge d'un condensateur peut subir une discontinuité.                                                               | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. La tension aux bornes d'une bobine peut subir une discontinuité.                                                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. L'équation différentielle linéaire<br>$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = 0$ admet pour solution $u(t) = Ae^{+t/\tau}$ . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. La durée de la phase transitoire est de l'ordre de $3\tau$ .                                                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10. Il est possible de charger un condensateur avec une source de tension sans dissipation d'énergie.                      | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

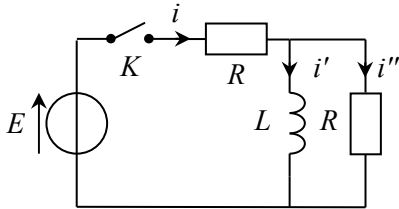
# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Conditions initiales et régime permanent

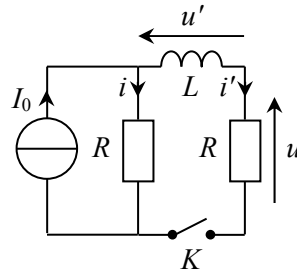
### □ Exercice 4.1. Détermination de conditions initiales

Dans les circuits suivants, avant la fermeture des interrupteurs, tous les courants traversant les bobines sont nuls et tous les condensateurs sont déchargés. À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . Déterminer la valeur de chaque intensité et de chaque tension représentée, juste après la fermeture de  $K$ .

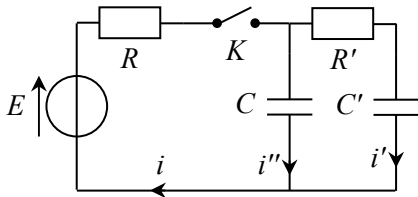
1.



2.



3.



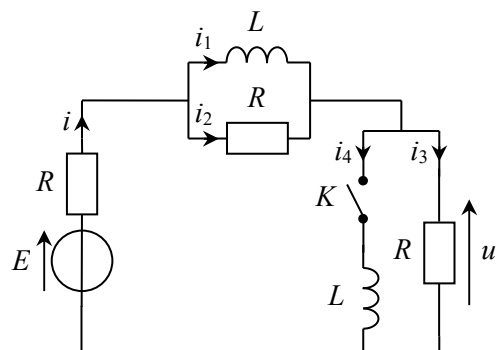
### □ Exercice 4.2. Conditions initiales et finales après un régime établi\*

Dans le montage de la figure ci-contre, le générateur de tension continue a une force électromotrice  $E$ . L'interrupteur  $K$  est ouvert depuis très longtemps. On ferme l'interrupteur à l'instant  $t = 0$ .

1. Déterminer  $u$  et les courants  $i_1, i_2, i_3, i_4$  et  $i$  à  $t = 0^+$  (juste après la fermeture de  $K$ ).

2. Déterminer  $u$  et les courants  $i_1, i_2, i_3, i_4$  et  $i$  quand  $t$  tend vers l'infini.

*D'après Agro-Véto*



## ■ Étude de régime transitoire

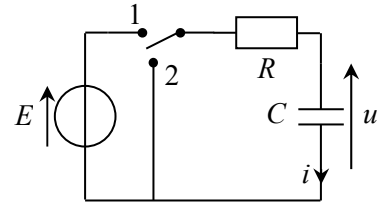
### □ Exercice 4.3. Charge et décharge d'un condensateur \*

On considère le circuit  $RC$  série représenté sur le schéma.

1. L'évolution de la position de l'interrupteur  $K$  est :

pour  $t < 0$  en position 2 ; pour  $t > 0$  en position 1.

On suppose le condensateur initialement déchargé.



a) Déterminer l'équation différentielle (sous forme canonique) vérifiée par la tension  $u$  aux bornes du condensateur. Que vaut la constante de temps ?

b) Déterminer l'expression de  $u(t)$  pour  $t > 0$  et représenter son allure.

c) En déduire l'expression du courant  $i(t)$  qui parcourt le circuit et tracer son allure.

d) Faire un bilan de puissance pour identifier ce que devient la puissance fournie par le générateur.

2. On suppose que le circuit est en régime établi. On considère alors une nouvelle évolution de

la position de l'interrupteur  $K$  :  $\begin{cases} t < 0 & \text{en position 1 ;} \\ t > 0 & \text{en position 2.} \end{cases}$

a) En se servant du résultat précédent, donner l'équation différentielle sous forme canonique vérifiée par la tension  $u$  aux bornes du condensateur.

b) Déterminer l'expression de  $u(t)$  et représenter son allure.

c) En déduire l'expression du courant  $i(t)$  qui parcourt le circuit.

d) Faire un bilan d'énergie et déterminer la valeur de l'énergie dissipée par effet Joule.

### □ Exercice 4.4. Charge d'un condensateur \*

À  $t = 0$ , on met le circuit sous tension par l'intermédiaire du générateur antérieurement éteint.

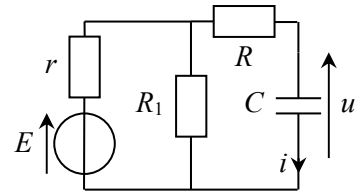
1. Déterminer  $i(0^+)$  et  $i(\infty)$  par des considérations simples.

2. Déterminer  $i(t)$ .

3. Calculer la constante de temps  $\tau$  pour  $C = 10 \mu\text{F}$ ,

$R_1 = 6 \text{ k}\Omega$ ,  $r = 100 \Omega$  et  $R = 4 \text{ k}\Omega$ .

La comparer à la valeur qu'elle aurait si  $R_1$  était infinie et  $r$  nulle.



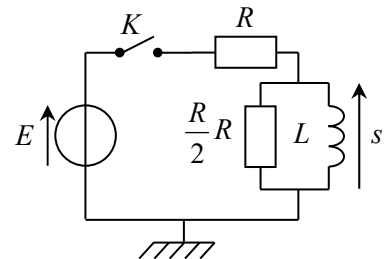
### □ Exercice 4.5. Charge d'un circuit $RL$ \*

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur idéal de tension continue, de force électromotrice  $E$ .

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ .

1. Y a-t-il continuité de la tension  $s(t)$  en  $t = 0$  ?

Y a-t-il continuité du courant dans la résistance  $R$  en  $t = 0$  ? Commenter physiquement les réponses. En déduire le comportement de  $s(t)$  au voisinage de  $t = 0^+$ .



2. Déterminer également le comportement asymptotique de  $s(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

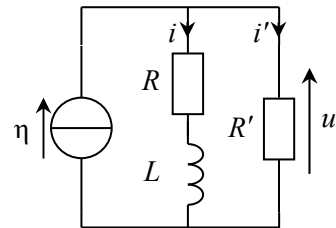
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $s(t)$ .
4. En déduire  $s(t)$ .
5. Tracer l'allure de  $s(t)$ .
6. Exprimer en fonction de  $L$  et  $R$  le temps  $t_0$  au bout duquel  $s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10}$ .
7. En déduire une méthode expérimentale pour déterminer  $t_0$  à l'oscilloscope. On précisera le montage électrique à réaliser et la mesure à effectuer concrètement.
8. On mesure expérimentalement  $t_0 = 3,0 \mu\text{s}$ . On donne  $R = 1000 \Omega$ , en déduire  $L$ .
9. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse effectivement mesurer  $t_0$  à l'oscilloscope, en utilisant la méthode indiquée à la question 7 ?

*D'après Agro-Véto*

#### □ Exercice 4.6. Branches en parallèle \*

Le circuit que l'on considère est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur idéal de courant, tel que :  $\eta = 0$  pour  $t < 0$  ;  $\eta = I_0$  pour  $t > 0$ .

1. Déterminer  $i(0^+)$  et  $i'(0^+)$ .
2. Déterminer l'intensité instantanée  $i(t)$  du courant qui traverse la bobine pour  $t > 0$ .
3. En déduire les expressions de l'intensité  $i'(t)$  dans la résistance  $R'$  et de la tension  $u(t)$ .
4. Tracer les courbes de réponses  $i(t)$  et  $u(t)$ .

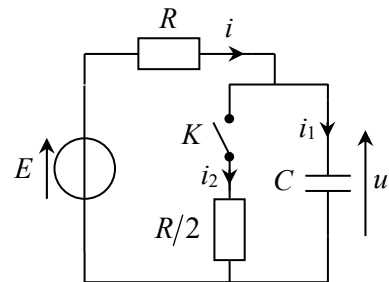


#### □ Exercice 4.7. Fermeture d'interrupteur \*

Nous considérons le circuit ci-contre. Nous noterons  $i$  l'intensité dans le résistor de résistance  $R$ ,  $i_1$  l'intensité dans le condensateur de capacité  $C$ ,  $i_2$  l'intensité dans le résistor de résistance  $R/2$  et  $u(t)$  la tension aux bornes du condensateur. L'interrupteur est ouvert depuis très longtemps.

À l'instant  $t = 0$ , pris pour origine des temps, nous fermons l'interrupteur  $K$ .

1. Préciser  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  et  $u$  à l'instant  $t = 0^-$ , juste avant la fermeture de l'interrupteur.
2. En déduire  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  et  $u$  à l'instant  $t = 0^+$ .
3. Même question quand  $t$  tend vers l'infini.
4. Montrer, en transformant le circuit, qu'il est équivalent à un simple circuit  $RC$  en charge, dont on précisera les caractéristiques.
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ , ainsi que la solution.
6. Tracer l'allure de  $u(t)$ .



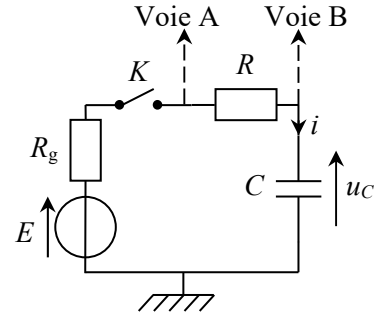
### □ Exercice 4.8. Détermination graphique \* \*

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance  $R$  et un condensateur de capacité  $C$  placés en série. On le relie aux bornes d'un générateur de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $R_g$  en série avec un interrupteur  $K$ .

Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit  $u_C$  la tension aux bornes du condensateur.

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ .

1. Déterminer  $u_C(0^+)$  et  $i(0^+)$  en les justifiant.
2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit  $u_C(t)$ .
3. Déterminer la constante de temps  $\tau$  du circuit, et donner son interprétation physique.
4. Établir l'expression de  $u_C(t)$ .
5. Déterminer l'expression de  $t_1$  pour que  $u_C(t_1) = 0,9E$ .



Dans l'étude expérimentale du circuit  $RC$ , on observe l'oscillogramme ci-dessous, en utilisant un générateur délivrant des signaux en créneaux.

Les sensibilités sont :

- 1 V/carreau vertical ;
- 0,1 ms/carreau horizontal.

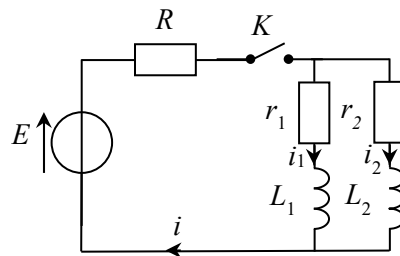
On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.

6. Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.
7. Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC ?
8. Préciser l'expression de la tension au point  $P$ . Sachant que  $R = 100 \Omega$ , déterminer  $R_g$ .
9. En déduire les valeurs de  $C$  et  $E$ .
10. Estimer une majoration de la fréquence du signal carré utilisé.
11. Comment pourrait-on observer l'intensité ?

### □ Exercice 4.9. Bobines en parallèle \* \*

Nous considérons le circuit ci-contre.

À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . On suppose que les deux bobines sont identiques et peuvent être modélisées par une inductance  $L$  en série avec une résistance  $r$ . Pour se repérer dans l'écriture des équations, on note résistance et inductance avec un indice comme sur le schéma, mais  $r_1 = r_2 = r$  et  $L_1 = L_2 = L$ .

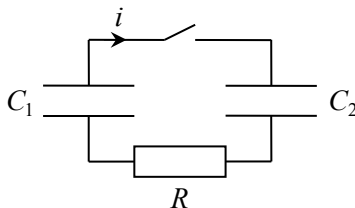


1. Déterminer  $i_1(0^+)$ ,  $i_2(0^+)$  et  $i(0^+)$  en les justifiant.
2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit  $i_1(t) - i_2(t)$ .
3. Démontrer que  $i_1(t) = i_2(t)$ .
4. Établir l'expression de l'équation différentielle à laquelle obéit  $i(t)$ .
5. Établir l'expression de  $i(t)$ .

6. Donner l'expression de l'énergie  $W_1$  stockée dans la bobine  $L_1$ , puis l'énergie  $W$  stockée dans les deux bobines au bout d'un temps infini (très grand devant la constante de temps).

□ **Exercice 4.10. Décharge d'un condensateur dans un autre\*\***

On considère le circuit suivant :



Le condensateur de capacité  $C_1$  porte la charge  $q_0$  sur l'armature du haut, et celui de capacité  $C_2$  est déchargé. À l'instant  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i(t)$  dans le circuit pour  $t > 0$ .
2. Déterminer la solution de cette équation différentielle.
3. Quelles sont les charges des deux condensateurs au bout d'un temps très long ( $t$  tendant vers l'infini) ? Commenter.
4. Que vaut l'énergie du système  $E_0$  avant la fermeture de l'interrupteur ? Quelle est sa valeur  $E_\infty$  après fermeture, au bout d'un temps très long ? Commenter le signe de  $E_\infty - E_0$ .
5. Sous quelle forme l'énergie s'est-elle dissipée ? Faire le calcul direct de cette dissipation et retrouver la variation d'énergie  $E_\infty - E_0$ .
6. L'expression de la variation d'énergie ne dépend pas de  $R$  : elle est donc inchangée même si  $R$  est nulle. Mais dans ce cas, où est passée l'énergie perdue ?

■ **Résolution numérique : méthode d'Euler**

□ **Exercice 4.11. Principe de la méthode d'Euler**

Lors de la charge d'un condensateur de capacité  $C = 200 \mu\text{F}$  à travers une résistance  $R = 100 \text{ k}\Omega$  par un générateur délivrant une tension constante  $E = 30 \text{ V}$ , la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} = E .$$

On se propose de résoudre numériquement cette équation en utilisant la méthode d'Euler.

1. Établir numériquement la relation entre  $\frac{du_C(t)}{dt}$  et  $u_C(t)$ .
2. La méthode d'Euler permet de calculer successivement les valeurs de  $u_C(t)$  et  $\frac{du_C(t)}{dt}$  à un intervalle de temps  $\Delta t$  régulier appelé le pas. On utilise alors l'approximation :  $u_C(t + \Delta t) = u_C(t) + \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_t \Delta t$ . On prend un pas  $\Delta t = 2 \text{ s}$ .

Compléter, dans le tableau suivant, construit avec cette méthode, les colonnes correspondant aux dates  $t = 2$  s et  $t = 4$  s .

$t$ (s)	0	2	4	6	8	10
$u_C(t)$ (V)	0			8,14	10,03	12,3
$\frac{du_C(t)}{dt}$ (V·s <sup>-1</sup> )	1,50			1,09	0,99	0,89

**3.** La solution exacte de cette équation différentielle est  $u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC})$ . Comparer la valeur donnée par la méthode d'Euler à la valeur exacte pour la date  $t = 10$  s. Conclure.

**4.** Pour améliorer la précision de la solution donnée par la méthode d'Euler, dans quel sens faut-il modifier  $\Delta t$  ?

#### □ Exercice 4.12. Résolution d'une équation différentielle avec Python

On cherche à résoudre l'équation différentielle de l'exercice précédent :  $u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} = E$  avec les mêmes valeurs :  $C = 200 \mu\text{F}$ ,  $R = 100 \text{k}\Omega$  et  $E = 30 \text{V}$ . Le but est de tracer la courbe  $u_C(t)$  pour des abscisses entre  $t = 0$  s et  $t = 120$  s. On notera T la liste des dates et U la liste des valeurs de  $u_C(t)$  correspondantes. On importe la bibliothèque Numpy avec le surnom np.

**1.** Dans un premier temps on cherche à implanter directement la méthode d'Euler. On utilise l'équation différentielle pour calculer la fonction dérivée à chaque date :

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC}(E - u_C(t)) = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(t))$$

et l'approximation suivante pour calculer les valeurs de la fonction :

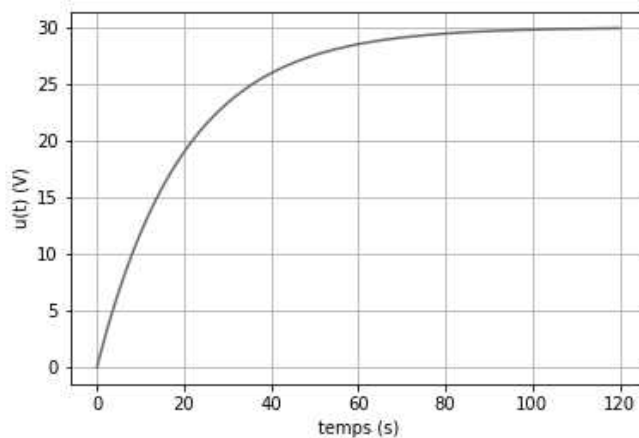
$$u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t_i}$$

**a)** Écrire la ligne de code permettant de créer une liste de dates comprises entre  $t = 0$  s et  $t = 120$  s avec un pas  $p = 0,1$  s.

**b)** On crée la liste U qui contient la valeur initiale de la fonction, soit  $u_C(0)$ , avec l'instruction :  
U = [0]

En utilisant une boucle for, construire la liste U en ajoutant à chaque boucle une nouvelle valeur de  $u_C(t)$ .

**c)** Écrire le code permettant d'obtenir la figure suivante, en utilisant les listes T et U.



2. On peut également utiliser la méthode `odeint`. On écrit donc le code suivant pour générer la liste `U` à partir de la liste `T` avec la méthode `odeint` (les bibliothèques sont supposées importées).

```
y0 = 0
def f(y, t):
    return ???????
U=sp.odeint(f, ??? , T)
```

Compléter les parties de code manquantes (là où il y a des points d'interrogation).

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 4.1.* Il faut commencer par écrire les grandeurs que l'on connaît en  $t = 0^+$  par continuité (pour chaque condensateur et chaque inductance).

*Exercice 4.3.* Question 1.d : multiplier l'équation de la loi des mailles (qui comporte toutes les tensions) par l'intensité pour faire apparaître des puissances.

*Exercice 4.4.* La question 2 est brève, mais il s'agit comme toujours d'établir l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ , puis de la résoudre.

*Exercice 4.7.* Question 3 : pour  $t \rightarrow +\infty$ , le circuit est en régime établi, on peut alors le redessiner en remplaçant le condensateur par son équivalent.

*Exercice 4.10.* Pour commencer il faut définir toutes les notations que l'on va utiliser (tensions et charges), et faire ensuite très attention aux conventions choisies pour écrire les différentes relations sans erreur de signe. Pour la question 3, chercher à établir deux équations pour ces deux inconnues, à partir des équations trouvées aux questions 1 et 2.

*Exercice 4.12.* Calculer le nombre de points nécessaires pour créer la liste `T`, puis utiliser la méthode `append` pour ajouter chaque valeur à la liste `U`.



## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux

**6.** La tension ne peut pas subir de discontinuité aux bornes d'un condensateur, et comme elle est liée à la charge du condensateur par la relation de proportionnalité  $q = Cu$ , la charge ne peut pas non plus subir de discontinuité.

**7.** La continuité imposée par la physique concerne l'intensité traversant une bobine, mais pas sa dérivée : il n'y a pas de règle sur la tension aux bornes de l'inductance, qui peut être discontinue.

**8.** Attention, il y a un signe  $-$  dans la solution :  $u(t) = Ae^{-t/\tau}$ , sinon elle serait divergente (tendrait vers l'infini), ce qui n'est pas possible avec les circuits linéaires étudiés dans ce chapitre.

**9.** Au bout de  $3\tau$ , le système est arrivé à sa valeur finale à 5 % près.

**10.** Quelle que soit la valeur de la résistance (qui est toujours non nulle), elle dissipe exactement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension.

### □ Les erreurs classiques

- Lorsqu'un dipôle est représenté en convention générateur sur un schéma, il ne faut pas oublier d'adapter la formule à cette convention (avec un signe  $-$ ). Si on a trouvé deux coefficients de signes contraires dans l'équation différentielle, il y a forcément une erreur !
- Un condensateur n'est pas forcément déchargé avant que le régime transitoire ne commence : cela sera soit indiqué explicitement dans l'énoncé, soit à déterminer soi-même d'après la description du circuit avant l'instant  $t = 0$ .
- Dans le cas d'une équation différentielle avec second membre, pour trouver la constante d'intégration, ne jamais appliquer la condition initiale à la solution de l'équation *sans* second membre. Il faut l'appliquer à la solution *complète*, comportant la solution particulière constante.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 4.1

1. On part de la continuité du courant dans la bobine :  $i'(0^+) = i'(0^-) = 0$  d'après l'énoncé.

Par conséquent, en appliquant la loi des nœuds, on obtient  $i(0^+) = i''(0^+)$ . On applique la loi des

mailles à la maille extérieure du circuit :  $E = Ri(0^+) + Ri''(0^+)$ , soit  $i(0^+) = \frac{E}{2R} = i''(0^+)$ .

⇒ Méthode 4.3

2. On part de la continuité du courant dans la bobine  $i'(0^+) = i'(0^-) = 0$ , d'où on en déduit

$u(0^+) = Ri'(0^+) = 0$ . On applique la loi des nœuds :  $I_0 = i(0^+) + i'(0^+)$  soit  $i(0^+) = I_0$ .

On applique finalement la loi des mailles à la maille de droite du circuit :

$Ri(0^+) = u'(0^+) + u(0^+)$ , soit d'après ce qui précède  $u'(0^+) = RI_0$ .

3. On part de la continuité de la tension aux bornes des condensateurs :  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$  et

$u_{C'}(0^+) = u_{C'}(0^-) = 0$  (tension en convention récepteur par rapport à la flèche de courant). Dans

la maille de droite, on a  $u_C(0^+) = R'i'(0^+) + u_{C'}(0^+) = 0$ , soit  $i'(0^+) = 0$ . La maille de gauche

donne  $E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$ , soit  $i(0^+) = \frac{E}{R}$ .

En utilisant la loi des nœuds, on trouve enfin :  $i''(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$ .

## Exercice 4.2

1. Par continuité du courant dans une bobine :  $i_4(0^+) = i_4(0^-) = 0$  (car l'interrupteur était initialement ouvert).

De plus, pour  $t < 0$ , l'interrupteur étant ouvert depuis longtemps, le circuit est en régime permanent (continu) et la bobine horizontale est équivalente à un fil et court-circuite la résistance  $R$ . Par conséquent la loi des mailles permet d'obtenir  $i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{E}{2R}$  ; par

continuité du courant dans une bobine, on en déduit  $i_1(0^+) = i_1(0^-) = \frac{E}{2R}$ .

Avec des lois des nœuds, on a  $i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4$  (1), soit  $i(0^+) = i_3(0^+)$  (2). La loi des mailles

donne  $E = Ri + Ri_2 + Ri_3$  donc en  $t = 0^+$ , en utilisant (2) et en remplaçant  $i$ ,

$E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + R(i_1 + i_2) = 2Ri_1(0^+) + 3Ri_2(0^+)$ , d'où on déduit  $i_2(0^+) = 0$ .

La loi des nœuds donne  $i(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{2R} = i_3(0^+)$ . La tension vaut  $u(0^+) = Ri_3(0^+) = \frac{E}{2}$ .

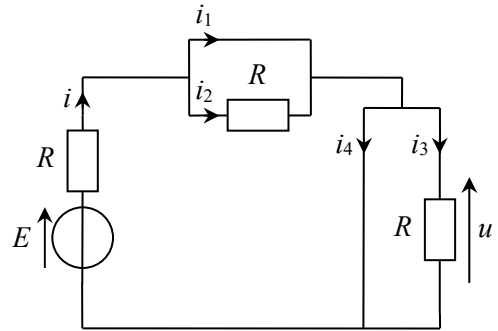
⇒ Méthode 4.3

**2.** Quand  $t$  tend vers l'infini, le régime établi est atteint et les bobines sont équivalentes à des fils. Alors deux des résistances sont court-circuitées :

$$i_2(\infty) = i_3(\infty) = 0 \text{ et } u(\infty) = Ri_3(\infty) = 0.$$

La loi des mailles permet d'obtenir  $i(\infty) = \frac{E}{R}$ , et la loi des nœuds permet de conclure par

$$i_1(\infty) = i_4(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R}.$$



### Exercice 4.3

**1. a)** Pour  $t > 0$ , l'interrupteur est en position 1 et les relations élémentaires sur les dipôles sont, en convention récepteur,  $u_R = Ri$  et  $i = C \frac{du}{dt}$ .

Loi des mailles :  $E = u_R + u = Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u$ . Cela donne sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}. \text{ On identifie alors la constante de temps : } \tau = RC.$$

⇒ Méthodes 4.1, 4.2

**b)** La solution générale de l'équation sans second membre  $\frac{du_{\text{sgs}}}{dt} + \frac{u_{\text{sgs}}}{\tau} = 0$  est de la forme

$$u_{\text{sgs}} = K e^{-t/\tau}.$$

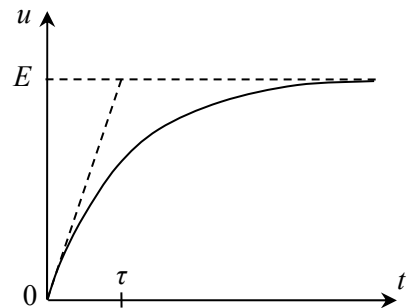
La solution particulière est de la même forme que le second membre, donc constante :

$$\frac{du_{\text{sp}}}{dt} + \frac{u_{\text{sp}}}{\tau} = \frac{E}{\tau}, \text{ d'où } u_{\text{sp}} = E, \text{ qui correspond au}$$

régime établi. Donc  $u(t) = K e^{-t/\tau} + E$ .

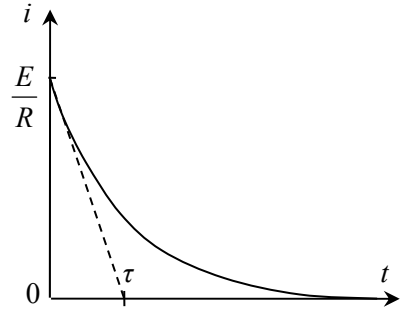
La condition initiale s'obtient par continuité de la tension aux bornes du condensateur initialement déchargé :  $u(0^-) = u(0^+) = 0$ , soit  $Ke^0 + E = 0$  d'où

$$K = -E. \text{ La solution est donc : } u(t) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$



⇒ Méthodes 4.3, 4.4

c) Le courant se déduit de l'équation aux bornes du condensateur :  $i(t) = C \frac{du}{dt}$  soit  $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$ .



d) Le bilan de puissance s'obtient en multipliant la loi des mailles par le courant  $i = C \frac{du}{dt}$ .

On obtient :  $Ei = Ri^2 + Cu \frac{du}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right)$  soit  $\mathcal{P}_{\text{généré}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{dE_{\text{stockée}}}{dt}$ .

Une partie de la puissance fournie par le générateur sert à faire varier l'énergie stockée dans le condensateur, l'autre partie est dissipée par effet Joule.

2. a) Pour  $t > 0$ , l'interrupteur est en position 2. La mise en équation est identique au cas précédent, sauf que la tension qui valait  $E$  vaut maintenant 0, soit  $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0$ .

b) Cette équation est sans second membre donc  $u(t) = K e^{-t/\tau}$ .

Avant la décharge, le circuit était en régime établi donc  $u(0^-) = E$  (le condensateur est un interrupteur ouvert). On en déduit par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur  $u(0^-) = u(0^+) = E$ , ce qui donne  $u(0) = E = K e^0 + 0$ , d'où  $u(t) = E e^{-t/\tau}$ .

L'allure de la courbe est identique à celle du cas précédent, la décroissance se faisant de  $E$  à 0.

c) On en déduit le courant  $i(t) = C \frac{du}{dt} = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$ . L'allure de la courbe est une croissance exponentielle de  $-\frac{E}{R}$  à 0.

d) On reprend le bilan de puissance précédent mais en annulant le terme en  $E$ , donc  $0 = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu^2 \right)$  soit  $\mathcal{P}_{\text{Joule}} + \frac{dE_{\text{stockée}}}{dt} = 0$ . En intégrant entre 0 et  $\infty$  on obtient

$$W_{\text{Joule}} + \Delta E_{\text{stockée}} = 0. \text{ Or } \Delta E_{\text{stockée}} = E_{\text{stockée}}(\infty) - E_{\text{stockée}}(0) = \frac{1}{2} Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2} Cu(0)^2 = 0 - \frac{1}{2} CE^2$$

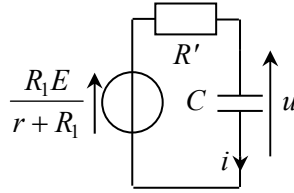
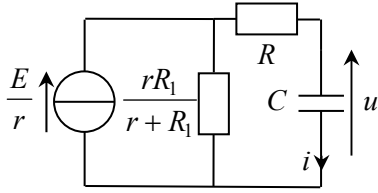
d'où  $W_{\text{Joule}} = -\Delta E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2} CE^2$ . On peut le retrouver en intégrant directement :

$$W_{\text{Joule}} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt = \int_0^{\infty} Ri(t)^2 dt = \int_0^{\infty} \frac{E^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{E^2}{R} \left[ -\frac{RC}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} CE^2.$$

### Exercice 4.4

1. Le cas le plus simple est celui du régime établi, dans ces conditions le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc  $i(\infty) = 0$ .

Pour déterminer le courant à l'instant  $t = 0^+$ , nous allons redessiner le circuit en utilisant les équivalences.



Le schéma équivalent est représenté ci-contre avec  $R' = \frac{rR_1}{r+R_1} + R$ .

Or initialement le condensateur est déchargé car le circuit, en régime permanent avant l'instant initial, ne comportait pas de générateur. Donc  $u(0^-) = 0$  et par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,  $u(0^+) = u(0^-) = 0$ . La loi des mailles appliquée au circuit équivalent

à l'instant  $t = 0^+$  permet d'obtenir  $\frac{R_1 E}{r + R_1} = R' i(0^+) + u(0^+)$ , soit  $i(0^+) = \frac{ER_1}{r(R + R_1) + RR_1}$ .

⇒ Méthode 4.3

2. On commence par écrire les relations élémentaires pour les dipôles :  $i = C \frac{du}{dt}$  et  $u_R = R' i$ .

La loi des mailles donne  $\frac{R_1 E}{r + R_1} = R' i + u$ . Or nous voulons conserver une équation sur le courant, et on ne connaît rien sur  $u$  mais seulement une relation pour sa dérivée. On dérive donc l'équation précédente et l'on obtient  $0 = R' \frac{di}{dt} + \frac{du}{dt}$ . On utilise  $\frac{du}{dt} = \frac{i}{C}$  et l'on obtient

$R' C \frac{di}{dt} + i = 0$ . On pose  $\tau = R' C$ , la constante de temps du circuit.

⇒ Méthodes 4.1, 4.2

Cette équation est sans second membre, donc sa solution est de la forme  $i(t) = K e^{-t/\tau}$ .

Condition initiale :  $i(0^+) = \frac{ER_1}{r(R + R_1) + RR_1} = K e^0 = K$  d'où  $i(t) = \frac{ER_1}{r(R + R_1) + RR_1} e^{-t/\tau}$ .

⇒ Méthode 4.4

3. Avec les valeurs de l'énoncé, on trouve  $\tau = 41 \text{ ms}$ . Pour  $R_1$  est infinie et  $r$  nulle, alors  $R' = R$  et l'on a  $\tau' = RC = 40 \text{ ms}$ , valeur très proche de la précédente.

### Exercice 4.5

1. Il n'y a pas continuité du courant dans la résistance  $R$  car il n'y a pas d'inductance en série avec cette résistance. Il y a pour les mêmes raisons discontinuité du courant qui passe dans  $R/2$ , ce qui implique que la tension  $s(t)$  est discontinue.

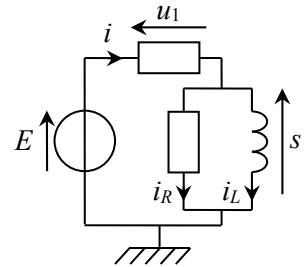
Avant la fermeture de l'interrupteur  $K$ , aucun courant ne circule dans la bobine car le régime permanent est atteint. À  $t = 0^+$ , on en déduit par continuité du courant dans l'inductance que le courant dans cette dernière est nul : elle se comporte donc en  $t = 0^+$  comme un interrupteur ouvert (avec une tension non nulle à ses bornes). En redessinant le circuit, on reconnaît un diviseur de tension qui permet d'écrire  $s(0^+) = \frac{E}{3}$ .

⇒ Méthode 4.3

2. Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le circuit est en régime permanent (la phase transitoire est terminée). Alors la bobine se comporte comme un fil, on a donc la tension aux bornes d'un fil :  $s(\infty) = 0$ .

3. Les relations élémentaires sur les dipôles en convention récepteur sont :  $s = \frac{R}{2}i_R = L \frac{di_L}{dt}$  et  $u_1 = Ri$ .

Loi des mailles :  $E = u_1 + s = Ri + s$ . On ne veut pas conserver  $i$ , on se sert alors de la loi des nœuds :  $i = i_R + i_L$ . On obtient alors  $E = Ri_R + Ri_L + s = Ri_L + 3s$ , d'après la première relation élémentaire.



Or on ne connaît rien sur le courant dans la bobine mais nous avons une équation sur sa dérivée.

On dérive donc l'équation et on remplace :  $0 = R \frac{di_L}{dt} + 3 \frac{ds}{dt} = 3 \frac{ds}{dt} + \frac{R}{L} s$ . Cela donne sous

forme canonique  $\frac{ds}{dt} + \frac{R}{3L} s = 0$ . On pose donc  $\tau = \frac{3L}{R}$ , le temps de relaxation du circuit.

⇒ Méthodes 4.1, 4.2

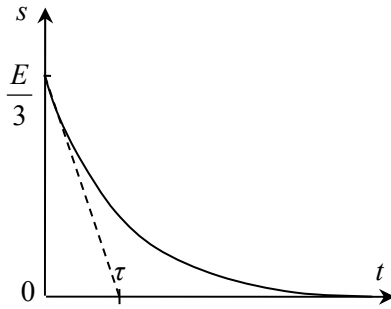
4. L'équation est sans second membre donc la solution est de la forme  $s(t) = K e^{-t/\tau}$ .

⚠ Attention, il n'est pas judicieux de poser  $\tau' = \frac{L}{R}$ , car la solution s'écrirait alors  $s(t) = K e^{-t/3\tau'}$ , ce qui n'est pas une forme canonique (donc  $\tau'$  n'aurait pas la signification habituelle de la constante de temps).

Condition initiale :  $s(0) = \frac{E}{3} = K e^0 + 0$ . La solution est donc finalement :  $s(t) = \frac{E}{3} e^{-t/\tau}$ .

⇒ Méthode 4.4

5.



6. On cherche le temps  $t_0$  qui vérifie

$$s(t_0) = \frac{s(0^+)}{10} = \frac{E}{30} = \frac{E}{3} e^{-t_0/\tau}, \text{ d'où l'on tire après}$$

$$\text{calculs } t_0 = \tau \ln(10) = \frac{3L}{R} \ln(10).$$

7. On déclenche le début de courbe de l'oscilloscope sur un front montant de la tension  $s$ . On mesure avec les curseurs le temps au bout duquel la tension vaut 10 % de sa valeur finale.

La voie 1 de l'oscilloscope est donc branchée entre la masse et le point commun aux deux résistances.

8. En utilisant le résultat de la question 6, on a  $L = \frac{R t_0}{3 \ln(10)} = 430 \mu\text{H}$ .

*Les données de l'énoncé ont deux chiffres significatifs, le résultat ne contient par conséquent que deux chiffres significatifs.*

9. Il faut pouvoir observer une partie du régime transitoire plus longue que  $t_0$ , qui vaut environ  $2,3 \tau$  : on peut prendre par exemple  $3\tau$  comme valeur minimale. Par conséquent, la durée de la demi-période (temps passé avec une tension  $E$ ) aux bornes du circuit doit au moins être de

$$3\tau = 3 \times 1,3 \mu\text{s} : \frac{T}{2} > 3\tau, \text{ ce qui implique } f < \frac{1}{6\tau} = 130 \text{ kHz}.$$

### Exercice 4.6

1. Pour  $t < 0$ , le circuit est en régime permanent sans générateur, on a donc  $i(0^-) = 0$ . Par continuité du courant dans une inductance, on en déduit  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ .

On utilise ensuite la loi des nœuds en  $t = 0^+$ , ce qui donne  $I_0 = i(0^+) + i'(0^+) = i'(0^+)$ .

⇒ Méthode 4.3

2. Par transformation de schéma, sans modifier la branche contenant l'inductance  $L$  et la résistance  $R$ , pour ne pas perdre le courant  $i$  circulant dans cette branche, on obtient le schéma ci-contre.

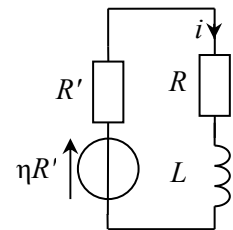
On obtient immédiatement l'équation différentielle pour  $t > 0$  en utilisant la loi des mailles et les relations élémentaires sur les dipôles :

$$R'I_0 = (R' + R)i + L \frac{di}{dt}, \text{ soit sous forme canonique } \frac{di}{dt} + \frac{R' + R}{L} i = \frac{R'I_0}{L}.$$

Le temps de relaxation du circuit est donc  $\tau = \frac{L}{R + R'}$ .

La solution de l'équation sans second membre est de la forme  $i_{\text{sgs}} = K e^{-t/\tau}$ .

La solution particulière est constante et vérifie l'équation  $\frac{R'I_0}{L} = \frac{di_{\text{sp}}}{dt} + \frac{i_{\text{sp}}}{\tau}$ , soit  $i_{\text{sp}} = \frac{R'I_0}{R' + R}$ .



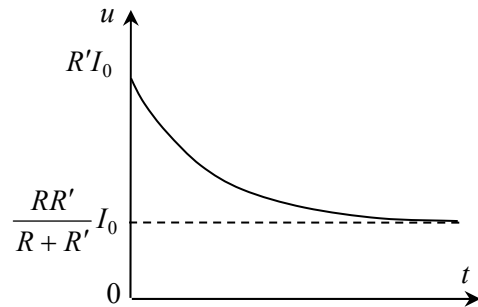
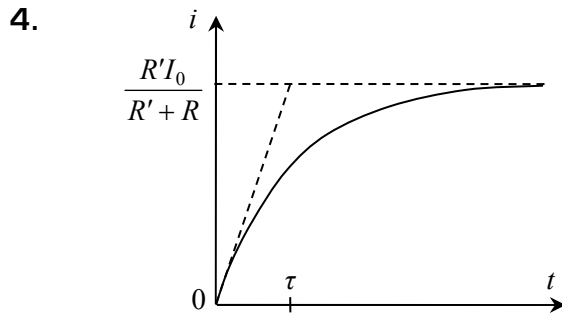
Donc  $i(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{R'I_0}{R'+R}$ . Condition initiale :  $i(0^+) = 0 = K e^0 + \frac{R'I_0}{R'+R}$  d'où  $K = -\frac{R'I_0}{R'+R}$ .

La solution est donc finalement :  $i(t) = \frac{R'I_0}{R'+R}(1 - e^{-t/\tau})$ .

⇒ Méthodes 4.1, 4.2, 4.4

3. L'expression du courant  $i'$  se déduit de la loi des nœuds :  $i'(t) = I_0 - i(t) = I_0 \frac{R + R'e^{-t/\tau}}{R' + R}$ .

L'expression de la tension est alors :  $u(t) = R'i' = R'I_0 \frac{R + R'e^{-t/\tau}}{R' + R}$ .



### Exercice 4.7

1. Le condensateur est chargé,  $u(0^-) = E$ . En continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, donc  $i_1(0^-) = 0$ . On a aussi  $i_2(0^-) = 0$  (interrupteur ouvert). Et d'après la loi des nœuds, on obtient  $i(0^-) = 0$ .

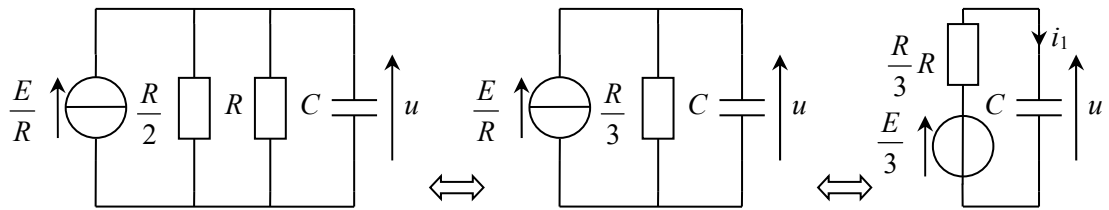
2. Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur donc  $u(0^+) = u(0^-) = E$ . Alors en appliquant la loi des mailles sur la maille extérieure  $E = Ri(0^+) + u(0^+)$ , dont on déduit  $i(0^+) = 0$ . Et d'après la loi des nœuds :  $i_2(0^+) = -i_1(0^+) = \frac{2u(0^+)}{R} = \frac{2E}{R}$ .

3. Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le circuit atteint un régime permanent (les grandeurs sont constantes), le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert :  $i_1(\infty) = 0$ . Par conséquent nous reconnaissons un diviseur de tension :  $u(\infty) = \frac{R/2}{R + R/2} E = \frac{E}{3}$ . Cela permet

alors de calculer  $i_2(\infty) = \frac{2u(\infty)}{R} = i(\infty) = \frac{2E}{3R}$ .

4. On utilise les équivalences Thévenin/Norton :





Nous obtenons un simple circuit  $R'C'$ , avec  $C' = C$  et  $R' = \frac{R}{3}$ , soumis à  $\frac{E}{3}$ .

5. On utilise les relations élémentaires des deux dipôles :  $u_R = \frac{R}{3} i_1$  et  $i_1 = C \frac{du}{dt}$ .

La loi des mailles donne  $\frac{E}{3} = u_R + u$ , d'où en utilisant les relations précédentes :

$$\frac{E}{3} = \frac{RC}{3} \frac{du}{dt} + u \text{ soit } \boxed{\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau} u = \frac{E}{RC}} \text{ en posant } \boxed{\tau = \frac{RC}{3}}.$$

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme  $u_{\text{sgs}} = K e^{-t/\tau}$ .

La solution particulière est constante et vérifie l'équation  $\frac{E}{3} = \frac{RC}{3} \frac{du_{\text{sp}}}{dt} + u_{\text{sp}}$ , d'où  $u_{\text{sp}} = \frac{E}{3}$ .

Donc la solution s'écrit  $u(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{E}{3}$ .

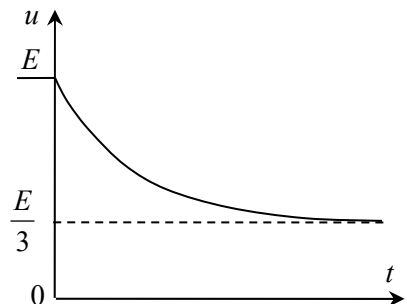
On utilise la condition initiale pour déterminer  $K$  :

$$u(0) = K e^0 + \frac{E}{3} = E, \text{ donc } K = \frac{2E}{3}.$$

La solution est donc  $\boxed{u(t) = \frac{E}{3} (1 + 2e^{-t/\tau})}$ .

⇒ Méthodes 4.1, 4.2, 4.4

6.



### Exercice 4.8

1. Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, qui est ici initialement déchargé,  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ . Alors en appliquant la loi des mailles immédiatement après la fermeture

de  $K$ , on obtient  $\boxed{i(0^+) = \frac{E}{R + R_g}}$ .

2. Les relations élémentaires sur les dipôles du schéma donnent  $i = C \frac{du_C}{dt}$  et deux lois d'Ohm.

La loi des mailles permet alors d'écrire :  $\boxed{u_C + (R + R_g) C \frac{du_C}{dt} = E}$ .

⇒ Méthode 4.1

3. La constante de temps est  $\tau = (R + R_g)C$  ; c'est l'ordre de grandeur du temps d'évolution du circuit (au bout de quelques  $\tau$ , le régime transitoire est terminé).

⇒ Méthode 4.2

4. La solution de l'équation différentielle sans second membre est  $u_{Csg} = Ae^{-t/\tau}$ . La solution particulière, qui est continue comme le second membre, est  $u_{Csp} = E$ . Donc  $u_C = Ae^{-t/\tau} + E$ .

Condition initiale :  $u_C(0^+) = 0$ , d'où  $A + E = 0$ . Par conséquent :  $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ .

⇒ Méthode 4.4

5. On cherche  $u_C(t_1) = 0,9E = E(1 - e^{-t_1/\tau})$ , d'où l'on tire  $t_1 = -\tau \ln 0,1 = \tau \ln 10$ .

6. La tension  $u_C$  (voie B) doit avoir une courbe sans discontinuité, on en déduit donc que (1) représente la voie B qui est continue (au sens mathématique).

7. En couplage AC, le signal affiché n'est pas exactement le signal réel : sa valeur moyenne est ramenée à zéro, ce qui n'a aucun intérêt ici. Il vaut donc mieux mettre les entrées en couplage continu DC, et régler le zéro sur la ligne du bas marquée 0 %.

*✍ Sur un oscilloscope on utilise toujours le couplage DC, sauf si on a une raison précise d'utiliser AC (supprimer une composante continue trop grande, pour pouvoir étudier la composante alternative beaucoup plus faible).*

8. Le point  $P$  de l'oscillogramme correspond au début du régime transitoire, soit  $t = 0^+$ , la loi des mailles donne

$u(P) = Ri(0^+) = \frac{RE}{R + R_g} = \frac{2}{3}E$  (pont diviseur car on a  $u_C(0^+) = 0$ ). On en déduit  $R = 2R_g$ , soit  $R_g = 50 \Omega$ .

9.  $E = 6 \text{ carreaux} \times 1 \text{ V/carreau}$  soit  $E = 6 \text{ V}$ . On mesure le temps de montée (jusqu'à 90 %) :

$t_1 = 4,5 \times 0,1 = 0,45 \text{ ms}$ . Alors  $\tau = \frac{t_1}{\ln 10}$ , d'où  $C = \frac{t_1}{(R + R_g) \ln 10} = 1,3 \mu\text{F}$ .

10. On voit que la demi-période est plus grande que 0,8 ms (8 carreaux), donc la fréquence est

inférieure à  $\frac{1}{1,6 \cdot 10^{-3}}$ , soit  $f < 600 \text{ Hz}$ .

11. Il faut pouvoir observer la tension aux bornes d'une résistance. On peut effectivement observer celle aux bornes de  $R$ , en utilisant les touches – CH1 et ADD de l'oscilloscope, ce qui donne  $u_A - u_B = Ri$ . (Si on veut obtenir directement, sur l'une des voies, la tension aux bornes de  $R$ , il faut d'abord permuter  $R$  et  $C$  pour que  $R$  ait une borne reliée à la masse.)

⇒ Méthode 4.4

### Exercice 4.9

1. Par continuité du courant traversant les bobines, comme avant la fermeture de l'interrupteur aucun courant ne circule, on en déduit que  $i_1(0^+) = 0$  et  $i_2(0^+) = 0$ . Par application de la loi de nœuds, on obtient  $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = 0$ .

⇒ Méthode 4.3

2. Les relations élémentaires sur les dipôles du schéma sont  $u_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$ ,  $u_{L_2} = L_2 \frac{di_2}{dt}$  et trois lois d'Ohm. La loi des mailles sur la maille de droite donne  $r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}$ .

On passe tous les membres du même côté, en posant  $r_1 = r_2 = r$  et  $L_1 = L_2 = L$ , soit

$$r(i_1 - i_2) + L \frac{d(i_1 - i_2)}{dt} = 0.$$

⇒ Méthode 4.1

3. L'écriture sous forme canonique donne  $\frac{d(i_1 - i_2)}{dt} + \frac{r}{L}(i_1 - i_2) = 0$ . On identifie la constante de temps  $\tau = \frac{L}{r}$ .

L'équation est sans second membre, la solution est donc de la forme  $(i_1 - i_2)(t) = K e^{-t/\tau} + 0$ , où zéro est la valeur de la solution particulière.

Condition initiale  $(i_1 - i_2)(0) = 0 - 0 = K$ .

On en déduit donc que  $(i_1 - i_2)(t) = 0$ , soit  $i_1(t) = i_2(t)$ .

⇒ Méthode 4.2, 4.4

4. La loi des nœuds donne  $i = i_1 + i_2 = 2i_1 = 2i_2$  (d'après le résultat précédent).

La loi des mailles sur la maille de gauche donne  $u_{L_1} = L_1 \frac{di_1}{dt}$  et deux lois d'Ohm

$$E = Ri + r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = Ri + r_1 \frac{i}{2} + L_1 \frac{d(i/2)}{dt}.$$

Soit sous forme canonique  $\frac{2E}{L} = \frac{(2R+r)}{L} i + L \frac{di}{dt}$ .

⇒ Méthode 4.1

5. On identifie la constante de temps  $\tau' = \frac{L}{2R+r}$ .

La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme  $i_{sg} = K e^{-t/\tau'}$ .

On cherche une solution particulière constante, qui vérifie l'équation

$$\frac{2E}{L} = \frac{(2R+r)}{L} i_{sp} + L \frac{di_{sp}}{dt} = \frac{(2R+r)}{L} i_{sp} + 0 \text{ d'où } i_{sp} = \frac{2E}{2R+r}.$$

Donc la solution s'écrit  $i(t) = K e^{-t/\tau'} + \frac{2E}{2R+r}$ .

On détermine  $K$  avec la condition initiale :  $i(0^+) = 0 = K + \frac{2E}{2R+r}$ , soit  $K = -\frac{2E}{2R+r}$ .

On obtient finalement :  $i(t) = \frac{2E}{2R+r}(1 - e^{-t/\tau})$ .

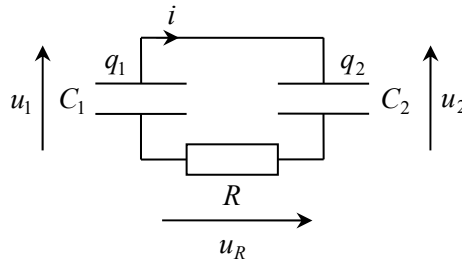
⇒ Méthodes 4.2, 4.4

6. L'énergie stockée dans la bobine  $L_1$  s'écrit  $W_1 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2(\infty) = \frac{1}{2}L_1 \left(\frac{2E}{2R+r}\right)^2$ .

L'énergie totale s'écrit  $W = W_1 + W_2 = 2W_1 = L_1 \left(\frac{2E}{2R+r}\right)^2$  car  $i_1 = i_2$  et  $L_1 = L_2$ .

### Exercice 4.10

1. Il faut absolument commencer par *définir des notations supplémentaires* sur le circuit, pour les tensions et les charges des deux condensateurs (lorsque  $t > 0$ , interrupteur fermé) :



*Si vous aviez défini les tensions en sens inverse, cela ne change rien aux résultats qui suivent. Si vous aviez placé la charge de l'un des condensateurs sur l'armature d'en face, cela ne change que le signe de cette charge à la question 3, mais tous les autres résultats sont inchangés.*

Avec ces notations, on peut écrire les relations suivantes pour les condensateurs :

$q_1 = C_1 u_1$  ;  $q_2 = C_2 u_2$  (dans les deux cas, la flèche de tension pointe vers l'armature portant la charge nommée) ;  $i = -C_1 \frac{du_1}{dt}$  (convention générateur) ;  $i = +C_2 \frac{du_2}{dt}$  (convention récepteur) ;

$i = -\frac{dq_1}{dt}$  (l'intensité  $i$  s'éloigne de l'armature portant  $q_1$ ) ;  $i = +\frac{dq_2}{dt}$  (l'intensité  $i$  arrive sur l'armature portant  $q_2$ ). Pour la résistance, en convention récepteur :  $u_R = +Ri$ .

Par ailleurs, la loi des mailles s'écrit, après fermeture de l'interrupteur :  $u_1 - u_2 - u_R = 0$  soit  $u_1 - u_2 - Ri = 0$ . Pour pouvoir faire apparaître l'intensité dans les deux premiers termes, on doit

dériver l'équation :  $\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} - R \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow -\frac{i}{C_1} - \frac{i}{C_2} - R \frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$  avec

$$\tau = \frac{RC_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

☛\* Une erreur de signe dans les calculs précédents vous a peut-être donné  $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 - C_2}$ , ou l'opposé. Dans ce cas vous devez voir tout de suite que ce résultat est faux, car il conduirait à un temps de relaxation négatif pour certaines valeurs des capacités, ce qui est impossible.

**2.** Il s'agit d'une équation différentielle sans second membre : sa solution générale est de la forme  $i(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ . Pour trouver la constante d'intégration  $A$ , déterminons la condition

initiale  $i(0^+)$ , puisque  $i(0^+) = A$ . Pour cela on écrit l'équation de la loi des mailles, à  $t = 0^+$  :  $u_1(0^+) - u_2(0^+) - Ri(0^+) = 0$ . Or les tensions aux bornes des condensateurs sont continues en 0 :

$$u_1(0^+) = u_1(0^-) = \frac{q_1(0^-)}{C_1} = \frac{q_0}{C_1} \text{ et } u_2(0^+) = u_2(0^-) = \frac{q_2(0^-)}{C_2} = 0 \text{ (condensateur déchargé).}$$

On en déduit  $i(0^+) = \frac{q_0}{RC_1} = A$  et finalement : 
$$i(t) = \frac{q_0}{RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

**3.** Il nous faut deux équations pour trouver ces deux inconnues.

Pour  $t \rightarrow \infty$ , la limite de la solution ci-dessus est  $i(\infty) = 0$ . La loi des mailles devient alors :

$$u_1(\infty) - u_2(\infty) - 0 = 0 \text{ d'où } \frac{q_1(\infty)}{C_1} = \frac{q_2(\infty)}{C_2} \text{ (première équation).}$$

Par ailleurs, à tout instant :  $i(t) = -\frac{dq_1}{dt} = +\frac{dq_2}{dt}$ , ce qui donne en intégrant par rapport au temps :  $-q_1(t) = q_2(t) + B$  soit  $q_1(t) + q_2(t) = -B$ . La constante  $B$  s'obtient avec les conditions initiales :  $q_1(0^+) + q_2(0^+) = q_0 + 0 = -B$ , donc  $q_1(t) + q_2(t) = q_0$ . Cela est vrai en particulier pour  $t \rightarrow \infty$  :  $q_1(\infty) + q_2(\infty) = q_0$  (deuxième équation).

Avec ces deux équations on trouve 
$$q_1(\infty) = q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \text{ et } q_2(\infty) = q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

La charge totale initiale  $q_0$  s'est répartie entre les deux condensateurs, proportionnellement à leurs capacités.

**4.** Énergie initiale :  $E_0 = \frac{1}{2} \frac{q_1(0)^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2(0)^2}{C_2}$  soit 
$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1}.$$

Énergie finale :  $E_\infty = \frac{1}{2} \frac{q_1(\infty)^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2(\infty)^2}{C_2}$  soit 
$$E_\infty = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_1 + C_2}.$$

On voit facilement que  $E_\infty - E_0 < 0$  : le circuit a perdu une partie de son énergie stockée.

**5.** L'énergie a été dissipée par effet Joule dans la résistance : celle-ci a transformé le travail électrique  $W$  reçu en chaleur. On vérifie :

$$W = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty \frac{q_0^2}{RC_1^2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = -\frac{\tau}{2} \frac{q_0^2}{RC_1^2} \left[ \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} \frac{q_0^2}{C_1 + C_2}.$$

Ainsi on trouve bien pour le bilan énergétique du circuit :  $E_\infty - E_0 = -W$ .

6. Si  $R$  tend vers 0, le temps de relaxation tend vers 0 donc on sort de l'ARQS : les phénomènes de propagation d'ondes électromagnétiques ne sont plus négligeables. L'énergie perdue a donc été émise par le circuit vers l'extérieur sous forme d'onde.

### Exercice 4.11

$$1. \frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{RC}(E - u_C(t)) = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(t)).$$

$$2. \text{ On utilise l'approximation pour calculer } u_C(2) : u_C(2) = u_C(0) + 2 \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_0 = 3,00 \text{ V}$$

puis on calcule  $\left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_2$  avec l'équation différentielle :

$$\left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_2 = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(2)) = 1,35 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{On utilise les mêmes méthodes pour la date } t = 4 \text{ s} : u_C(4) = u_C(2) + 2 \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_2 = 5,70 \text{ V}$$

$$\left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_4 = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(4)) = 1,22 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$t$ (s)	0	2	4	6	8	10
$u_C(t)$ (V)	0	<b>3,00</b>	<b>5,70</b>	8,14	10,03	12,3
$\frac{du_C(t)}{dt}$ (V · s <sup>-1</sup> )	1,50	<b>1,35</b>	<b>1,22</b>	1,09	0,99	0,89

$$3. u_C(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = 30 \left( 1 - e^{-\frac{10}{20,0}} \right) = 11,80 \text{ V}. \text{ La valeur donnée par la méthode d'Euler}$$

est légèrement supérieure : la méthode d'Euler ne donne qu'une solution approchée.

4. On améliore la méthode d'Euler en diminuant le pas, ce qui a pour conséquence d'augmenter le nombre de points.

### Exercice 4.12

$$1. \text{ a) Le nombre de dates nécessaires (en plus de la date initiale) est } N = \frac{t_{\max}}{p} = \frac{120}{0,1} = 1200$$

soit 1201 dates en tout. L'instruction sera donc : `T = np.linspace(0, 120, 1201)`

b) À chaque boucle il faut calculer le terme suivant de la liste et l'ajouter.

$$\text{On utilise les données : } u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t_i}$$

$$\text{et } \left( \frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t_i} = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(t_i)), \text{ soit } u_C(t_{i+1}) = u_C(t_i) \left( 1 - \frac{p}{20,0} \right) + p \frac{30}{20,0}.$$

On crée donc la liste Y avec l'instruction :

```
for i in range(1,1201):  
    Y.append(Y[i-1]*(1-p/20)+1.5*p)
```

ligne de code permettant de créer une liste de dates comprises entre  $t=0$  s et  $t=120$  s avec un pas  $p=0,1$  s.

**c)** On utilise la bibliothèque `matplotlib.pyplot` :

```
import matplotlib.pyplot as plt  
plt.plot(T,Y)  
plt.xlabel('temps (s)')  
plt.ylabel('u(t) (V)')  
plt.grid()  
plt.show()
```

**2.** Il faut mettre l'équation différentielle sous la forme  $\frac{du_C(t)}{dt} = f(u_C(t),t)$ .

Sachant que  $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(t))$ , on a donc  $f(u_C(t),t) = \frac{1}{20,0}(30 - u_C(t))$ .

La fonction `f` se définit alors avec les instructions :

```
def f(y, t):  
    return 1.5 - y/20
```

La méthode `odeint` nécessite trois paramètres :

```
U=sp.odeint(f, y0, T)
```

# Chapitre **5**

## Oscillateur électrique en régime libre

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien allemand **Heinrich HERTZ** (1857-1894) réussit à détecter des ondes électromagnétiques en 1886 en utilisant des circuits ouverts excités par des bobines d'induction. Il montre que leurs propriétés de réflexion, d'interférences et de polarisation sont identiques à celles de la lumière et confirme les hypothèses émises par James MAXWELL sur leur nature. On le considère comme le précurseur de la télégraphie sans fil que sa mort précoce ne lui permettra pas de connaître.

### ■ Un peu d'histoire

Au 11<sup>e</sup> siècle avant notre ère, HIPPARQUE a posé les bases de la trigonométrie. L'astronomie était la motivation de sa démarche. À la Renaissance, REGIOMONTANUS en a présenté une théorie détaillée. À la fin du XVII<sup>e</sup> siècle, Isaac NEWTON et Gottfried LEIBNIZ, en introduisant le calcul intégral, ouvraient le champ immense de l'étude des équations différentielles. Les découvertes de l'électricité puis des ondes électromagnétiques ont montré que les fonctions trigonométriques régissaient nombre de ces phénomènes, en tant que solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, Jules JOUBERT a donné une théorie générale des courants alternatifs dans un mémoire *Études sur les machines magnéto-électriques* paru en 1884 et a élaboré le premier oscilloscope. De son côté, Heinrich HERTZ a réussi à produire et détecter des ondes électromagnétiques.



## ■ ■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'équation différentielle canonique de l'oscillateur harmonique
- ▷ L'équation différentielle canonique d'un système quelconque du deuxième ordre
- ▷ Les deux régimes de fonctionnement selon la valeur du facteur de qualité
- ▷ Des exemples de circuits du deuxième ordre

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Établir une équation différentielle pour un circuit du deuxième ordre et la mettre sous forme canonique
- ▷ Déterminer les conditions initiales dans un circuit
- ▷ Résoudre une équation différentielle linéaire du deuxième ordre
- ▷ Exploiter un relevé expérimental pour un système du deuxième ordre
- ▷ Réaliser un bilan énergétique

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Oscillateur harmonique électrique

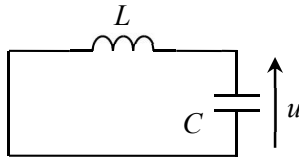
### □ Définition de l'oscillateur harmonique

On appelle **oscillateur harmonique** tout système dont l'évolution au cours du temps est décrite par une grandeur  $x(t)$  solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

avec  $\omega_0$  une constante positive appelée **pulsation propre** de l'oscillateur.

### □ Exemple fondamental en électricité : circuit LC



On établit l'équation différentielle :  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{u}{LC} = 0$  pour laquelle on identifie  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

⇒ **Méthode 5.1. Établissement de l'équation différentielle**

⇒ **Méthode 5.2. Identification des termes de l'équation canonique**

### □ Solution de l'équation différentielle

La solution d'une telle équation différentielle peut être mise sous deux formes équivalentes :

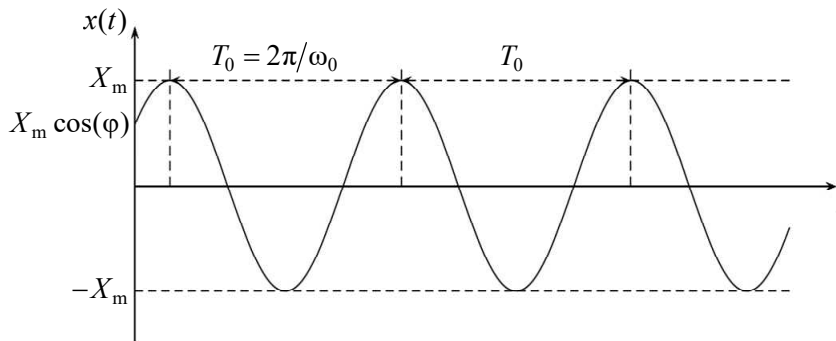
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad \text{ou bien} \quad x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{avec } X_m > 0).$$

Cette solution comporte toujours deux constantes d'intégration ( $A$  et  $B$  ou bien  $X_m$  et  $\varphi$ ), que l'on détermine en utilisant deux conditions initiales.

⇒ **Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales**

⇒ **Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle**

⇒ **Méthode 5.5. Passage d'une expression des solutions à l'autre**



### □ Grandeurs caractéristiques des oscillations

$X_m$  est l'**amplitude** des oscillations ; elle correspond à la valeur maximale de  $x(t)$ .

$(\omega_0 t + \varphi)$  est la **phase** à un instant  $t$ , et  $\varphi$  est la **phase à l'origine**, qui n'a pas d'interprétation physique autre que d'imposer la valeur de  $x(t)$  à l'instant initial :  $x(0) = X_m \cos(\varphi)$ .

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  est la **période propre** des oscillations ; elle correspond à la plus petite durée au bout de laquelle la fonction  $x(t)$  se répète identiquement à elle-même. Comme la pulsation propre  $\omega_0$  et

la **fréquence propre**  $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , la période propre  $T_0$  est indépendante des conditions

initiales : on parle d'**isochronisme** des oscillations.

$\omega_0$  et  $f_0$  ont la dimension de l'inverse d'un temps ;  $\omega_0$  s'exprime en rad/s,  $f_0$  en hertz (Hz).

### □ Bilan énergétique

L'énergie stockée dans le condensateur  $\varepsilon_C = \frac{1}{2} C u^2$  et celle stockée dans la bobine  $\varepsilon_L = \frac{1}{2} L i^2$

oscillent entre 0 et leur valeur maximale  $\varepsilon_{\max} = \frac{1}{2} C U_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2$ , l'énergie totale  $\varepsilon = \varepsilon_C + \varepsilon_L$

restant constante à la valeur  $\varepsilon_{\max}$  : dans ce modèle, il n'y a pas de dissipation d'énergie.

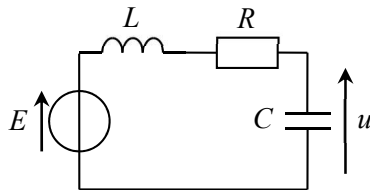
## ■ Régime transitoire d'un circuit du deuxième ordre

### □ Équation différentielle

L'oscillateur harmonique est un modèle idéal. Pour un système réel du deuxième ordre, l'équation différentielle qui régit une grandeur  $x(t)$  comporte également, en général, un terme de dérivée première. Cette équation peut alors se mettre sous la forme canonique d'un **oscillateur amorti** :

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = G} \quad \text{avec } Q \text{ le facteur de qualité (sans dimension).}$$

### □ Exemple fondamental : circuit *RLC* série



Circuit *RLC* série  
soumis à un échelon

On a l'équation  $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$  pour laquelle on identifie  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

⇒ **Méthode 5.1.** Établissement de l'équation différentielle

⇒ **Méthode 5.2.** Identification des termes de l'équation canonique

## □ Solution de l'équation différentielle

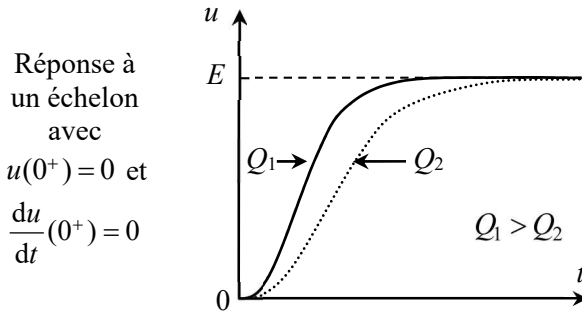
Comme pour un circuit du premier ordre, si le second membre est une constante, la solution générale de cette équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière constante :  $x(t) = x_{\text{sgs}} + x_{\text{sp}}$ .

Cette solution comporte toujours deux constantes d'intégration, que l'on détermine en utilisant deux conditions initiales.

⇒ Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales

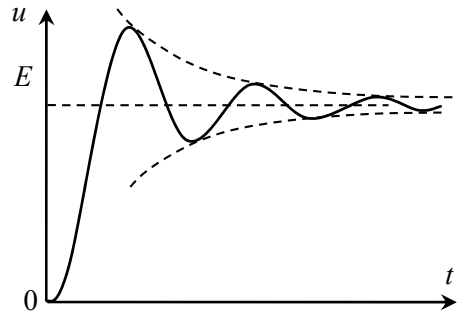
⇒ Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle

## □ Différents régimes



Régime **apériodique**  $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$

$$u(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + E$$



Régime **pseudo-périodique**  $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$

$$u(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) + E$$

Le cas limite théorique  $\left(Q = \frac{1}{2}, u(t) = [At + B]e^{-\omega_0 t} + E\right)$  est le régime **critique**. Il correspond

à l'établissement le plus rapide du régime permanent, car le temps de relaxation  $\tau_{\text{critique}} = \frac{1}{\omega_0}$  est le plus court. L'allure de la courbe est alors analogue à celle du cas apériodique.

⇒ Méthode 5.6. Utilisation de la méthode d'Euler

⇒ Méthode 5.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec la bibliothèque Scipy

## □ Bilan énergétique

– À la fin d'un régime libre, toutes les tensions et intensités sont nulles, donc il n'y a plus d'énergie stockée dans une bobine ou dans un condensateur. L'énergie stockée initialement dans l'un de ces dipôles a été entièrement transférée au dipôle ohmique et dissipée par effet Joule.

– Dans le cas d'un échelon de tension  $E$  pour un circuit  $RLC$  série, le condensateur initialement déchargé acquiert une énergie finale  $\mathcal{E}_{C,\infty} = \frac{1}{2}CE^2$  ; le dipôle ohmique reçoit la même quantité d'énergie et la dissipe ; la bobine stocke temporairement de l'énergie pendant le régime transitoire, mais la restitue ensuite ; l'énergie totale fournie par la source est donc  $2\mathcal{E}_{C,\infty} = CE^2$ .

## Remarque

On rencontre des oscillations analogues (harmoniques ou amorties) dans d'autres domaines de la physique, notamment en mécanique (voir chapitres 11, 12, 14, 15).

## ■ Comment déterminer l'équation différentielle sous forme canonique ?

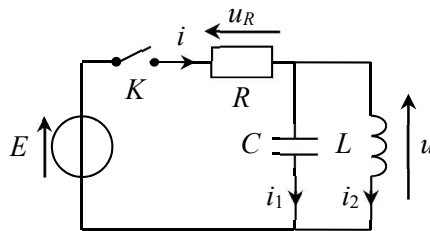
### □ Méthode 5.1. Établissement de l'équation différentielle

Comme pour un circuit d'ordre 1, écrire les relations entre intensité et tension relatives à chaque dipôle, puis utiliser la loi des nœuds et/ou la loi des mailles pour éliminer les variables non souhaitées, de manière à ne garder qu'une seule grandeur inconnue (fonction du temps).

Dans le cas où on ne peut pas éliminer une variable car seules les informations sur sa dérivée sont disponibles, il faut dériver toute l'équation.

⇒ Exercices 5.1, 5.3 à 5.6

À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur. Cherchons l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$ .



Les équations relatives aux différents dipôles du schéma sont :  $i_1 = C \frac{du}{dt}$  pour le condensateur ;

$u = L \frac{di_2}{dt}$  pour la bobine;  $u_R = Ri$  pour la résistance.

*✎ La tension  $u$  est la même aux bornes de  $L$  et de  $C$ , qui sont en parallèle. Il est donc inutile d'employer deux notations différentes du genre  $u_L$  et  $u_C$ .*

Pour  $t > 0$ , la loi des mailles donne  $E = u_R + u$ . On utilise les formules de chaque dipôle de manière à éliminer les variables que l'on ne souhaite pas garder. Tout d'abord on peut écrire :  $E = Ri + u$ . Comme nous n'avons pas d'autres données sur le courant  $i$ , on utilise la loi des nœuds  $i = i_1 + i_2$  et on remplace l'expression de  $i_1$  en utilisant la relation du condensateur, soit

$E = RC \frac{du}{dt} + Ri_2 + u$ . Enfin la seule donnée sur le courant  $i_2$  porte sur sa dérivée, on dérive donc

toute l'équation et on remplace par la relation de la bobine. On obtient :

$$\frac{dE}{dt} = 0 = RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}u + \frac{du}{dt}.$$

### □ Méthode 5.2. Identification des termes de l'équation canonique

Écrire l'équation différentielle sans coefficient devant la dérivée d'ordre le plus élevé (ordre 2 dans ce chapitre). Il suffit ensuite d'égaliser les autres coefficients avec ceux de l'équation canonique : pour une équation du deuxième ordre, on introduit d'abord  $\omega_0$  pour faire apparaître le coefficient  $\omega_0^2$  devant le terme d'ordre 0, puis on note  $\frac{\omega_0}{Q}$  le coefficient du terme d'ordre 1, d'où on déduit l'expression de  $Q$ .

⇒ Exercices 5.1, 5.3, 5.4, 5.6

Dans l'exemple du circuit précédent du second ordre, on écrit :  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$ .

Par identification avec  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  on trouve  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ .

## ■ Comment résoudre une équation différentielle ?

### □ Méthode 5.3. Détermination des conditions initiales d'un circuit

Dans le cas d'un système du deuxième ordre, il faut déterminer non seulement la valeur de la grandeur étudiée, mais aussi celle de sa dérivée première, à  $t = 0^+$ . On utilise pour cela la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et/ou celle de l'intensité du courant traversant une bobine entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ , puis au moins une fois la loi des mailles ou la loi des nœuds.

Attention, la connaissance de la valeur de  $x(0^+)$  ne donne aucune information sur celle de la dérivée  $\frac{dx}{dt}(0^+)$  ! En particulier, il est fréquent que l'une d'elles soit nulle et l'autre non nulle.

⇒ Exercices 5.1, 5.3, 5.5, 5.6

Dans l'exemple du circuit précédent du second ordre, nous allons déterminer la valeur initiale de la tension et de sa dérivée, puisque l'équation différentielle porte sur  $u$ .

Le condensateur est initialement déchargé, donc  $u(0^-) = 0$ , et d'après la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, on en déduit que  $u(0^+) = 0$ .

Il n'y a initialement aucun courant qui traverse la bobine car l'interrupteur est ouvert depuis longtemps, donc  $i_2(0^-) = 0$ , d'après la continuité du courant dans une bobine, on en déduit  $i_2(0^+) = 0$ .

La loi des mailles permet d'obtenir à  $t = 0^+$  :  $E = Ri(0^+) + u(0^+)$  d'où l'on tire  $i(0^+) = \frac{E}{R}$ .

Attention,  $i(0^+) \neq i(0^-)$  puisque  $i(0^-) = 0$  (pas de courant quand l'interrupteur était ouvert) : le courant est discontinu, ce qui est fréquent dans un condensateur ou une résistance.

Enfin la loi des nœuds donne  $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = i_1(0^+) = \frac{E}{R}$ . La relation élémentaire sur le

condensateur permet d'écrire  $i_1(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+)$ , soit  $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$ .

#### □ Méthode 5.4. Résolution de l'équation différentielle

La résolution se fait en deux ou trois étapes.

– La première étape consiste à déterminer la forme de la *solution générale de l'équation sans second membre*. Dans le cas idéal de l'oscillateur harmonique, elle est sinusoïdale. Dans le cas général d'un système du deuxième ordre, elle dépend de la valeur du facteur de qualité  $Q$ .

– Si l'équation à résoudre comporte un second membre (terme non nul), la seconde étape est la détermination de la *solution particulière* qui a la même forme que le second membre (donc constante dans ce chapitre).

– La solution cherchée est la somme des deux résultats précédents, et on détermine les constantes inconnues avec les conditions initiales sur la fonction et sur sa dérivée première, en écrivant leurs expressions à l'instant initial.

⇒ Exercices 5.1, 5.3 à 5.6

Oscillateur harmonique

Dans le cas du circuit  $LC$ , dont toute grandeur  $x(t)$  obéit à l'équation  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$  (oscillateur harmonique), la solution peut s'écrire sous deux formes équivalentes :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (\text{avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes d'intégration})$$

$$\text{ou } x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{où on peut toujours choisir } X_m > 0).$$

Système quelconque du deuxième ordre

Considérons maintenant le cas général d'un système du deuxième ordre, dont la grandeur  $x(t)$

obéit à l'équation générique :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = G$ .

– Solution générale de l'équation sans second membre

Aussi appelée solution du régime libre, c'est la solution de l'équation :

$$\frac{d^2x_{\text{sgs}}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_{\text{sgs}}}{dt} + \omega_0^2 x_{\text{sgs}} = 0.$$

L'idée générale est de chercher des solutions sous la forme  $Ae^{rt}$ , avec  $r$  un paramètre à déterminer.

En injectant cette forme de solution dans l'équation différentielle, on fait apparaître l'équation caractéristique qui lui est associée :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ .

On cherche les racines, réelles ou complexes, de cette équation du second degré, et on en déduit la forme générale de la solution de l'équation sans second membre, qui dépend donc du discriminant  $\Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ .

Il y a deux cas à étudier,  $\Delta > 0$  et  $\Delta < 0$ , le cas  $\Delta = 0$  étant un cas théorique constituant une limite entre les deux autres.

Régime <b>apériodique</b>	Régime <b>critique</b>	Régime <b>pseudo-périodique</b>
$\Delta > 0$ ou $Q < \frac{1}{2}$	$\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$	$\Delta < 0$ ou $Q > \frac{1}{2}$
$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{1}{\tau_{1,2}}$	$r_{1,2} = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$	$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$
$x_{\text{sgs}}(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}$	$x_{\text{sgs}}(t) = [At + B]e^{-\omega_0 t}$	$x_{\text{sgs}}(t) = e^{-t/\tau} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$ qui peut aussi se mettre sous la forme $x_{\text{sgs}}(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$ , avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ ( <b>pseudo-pulsation</b> )

Il s'agit toujours d'une fonction tendant vers zéro avec un certain temps caractéristique  $\tau$ .

– Solution particulière

Elle a la même forme que le second membre : dans ce chapitre, c'est toujours une constante. On

peut donc écrire :  $\frac{d^2 x_{\text{sp}}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_{\text{sp}}}{dt} + \omega_0^2 x_{\text{sp}} = G$ , ce qui donne immédiatement  $x_{\text{sp}} = \frac{G}{\omega_0^2}$ .

On l'appelle aussi solution du régime permanent ou établi, car  $x(t) \rightarrow x_{\text{sp}}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

(Si le second membre est nul, ce terme est nul.)

– Solution (complète) de l'équation

La solution de l'équation s'écrit comme la somme de ces deux termes, soit  $x(t) = x_{\text{sgs}}(t) + x_{\text{sp}}$ .

Enfin on trouve les deux constantes ( $A_1$  et  $A_2$ ,  $A$  et  $B$ , ou  $X_m$  et  $\varphi$ ) avec les conditions initiales.



### □ Méthode 5.5. Passage d'une expression des solutions à l'autre

– Pour passer de l'expression  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  des solutions de l'oscillateur harmonique à l'expression  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ , et réciproquement, on

utilise : 
$$\begin{cases} A = X_m \cos \varphi \\ B = -X_m \sin \varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X_m = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan \varphi = -\frac{B}{A} \end{cases}$$
 avec  $\cos \varphi$  de même signe que  $A$ .

– Cette méthode s'applique aussi à un régime pseudo-périodique, pour passer de  $x(t) = X_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$  à  $x(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$  et réciproquement.

– En utilisant la relation trigonométrique  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ , on peut développer  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  en  $x(t) = X_m \cos \varphi \cos(\omega_0 t) - X_m \sin \varphi \sin(\omega_0 t)$ . Par identification, on aboutit à  $A = X_m \cos \varphi$  et  $B = -X_m \sin \varphi$ .

– Inversement, si on élève ces deux formules au carré et qu'on additionne, sachant que  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , on trouve  $X_m^2 = A^2 + B^2$ , donc  $X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$  puisqu'on peut toujours choisir  $X_m$  positive.

Et le rapport des deux formules précédentes donne  $\tan \varphi = -\frac{B}{A}$ . Dans un intervalle de largeur  $2\pi$ , il y a deux angles ayant cette même tangente. On doit prendre celui tel que  $\cos \varphi$  ait le même signe que  $A$ , puisque  $A = X_m \cos \varphi$  avec  $X_m > 0$ .

## ■ Comment résoudre une équation différentielle d'ordre 2 par une méthode numérique ?

### □ Méthode 5.6. Utilisation de la méthode d'Euler

L'équation différentielle d'ordre 2 à résoudre est du type  $\ddot{y}(t) = a \dot{y}(t) + b y(t) + c(t)$  où  $a$  et  $b$  sont des constantes,  $y(t)$  la fonction à déterminer,  $\dot{y}(t)$  sa dérivée première,  $\ddot{y}(t)$  sa dérivée seconde et  $c(t)$  une fonction du temps connue. On suppose que les valeurs initiales  $y(0) = y_0$  et  $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$  sont connues.

On dispose d'une liste de dates  $t_i$  successives, séparées par un pas  $p = t_{i+1} - t_i$ , pour lesquelles on souhaite connaître les valeurs de  $y(t_i)$  et  $\dot{y}(t_i)$ .

La méthode d'Euler consiste à déterminer les valeurs du couple  $[y(t_{i+1}), \dot{y}(t_{i+1})]$  à partir des valeurs du couple  $[y(t_i), \dot{y}(t_i)]$  en utilisant les approximations :

$$\dot{y}(t_i) = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad \text{et} \quad \ddot{y}(t_i) = \frac{\dot{y}(t_{i+1}) - \dot{y}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\text{soit } y(t_{i+1}) = y(t_i) + p\dot{y}(t_i)$$

$$\text{et } \dot{y}(t_{i+1}) = \dot{y}(t_i) + p\ddot{y}(t_i) = \dot{y}(t_i) + p(a\dot{y}(t_i) + by(t_i) + c(t_i)).$$

L'implémentation en Python se fait donc en respectant les étapes suivantes.

- Création d'une liste de dates allant de  $t_0$  à  $t_n$  par pas de  $p$  (donc  $n + 1$  dates)

```
import numpy as np
```

```
T = np.linspace(0, t_n, n+1)
```

- Création d'une liste de couples  $[y(t_i), \dot{y}(t_i)]$

```
Y = np.zeros((n+1, 2)) #tableau contenant n+1 couples [0,0]
```

```
p = t_n/n+1 # le pas de la méthode
```

```
Y[0][0] = y0 # valeur de y(0)
```

```
Y[0][1] = y0 # valeur de y'(0)
```

```
for i in range(1, n+1) : # calcul des valeurs de y(ti) et y'(ti)
```

```
    Y[i][0] = Y[i-1][0]+p*Y[i-1][1]
```

```
    Y[i][1] = Y[i-1][1]-p*(a* Y[i-1][1] + b*Y[i-1][0] + c*(i-1))
```

L'instruction `plt.plot(T,Y)` permet de tracer les deux courbes  $y(t)$  et  $\dot{y}(t)$ .

⇒ Exercices 5.7, 5.8

On considère l'équation différentielle :  $\ddot{y}(t) + 2y(t) = 0$  avec les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $\dot{y}(0) = 0$ . On souhaite obtenir une solution approchée sur l'intervalle de temps  $[0, 10]$  en utilisant la méthode d'Euler avec un pas  $p = 0,1$  s.

Le code suivant permet d'obtenir les deux courbes.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
T = np.linspace(0, 10, 1001)
```

```
Y = np.zeros((1001,2))
```

```
p = 0.01
```

```
Y[0][0]=1
```

```
Y[0][1]=0
```

```
for i in range(1,1000):
```

```
    Y[i][0]=Y[i-1][0]+p*Y[i-1][1]
```

```
    Y[i][1]=Y[i-1][1]-p*2*Y[i-1][0]
```

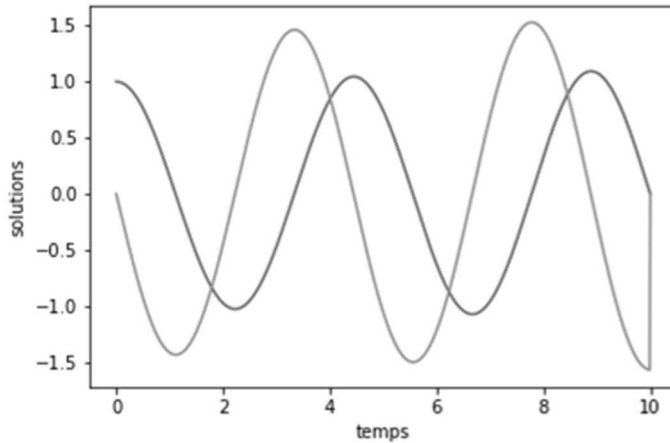
```
plt.plot(T,Y)
```

```
plt.xlabel('temps')
```

```
plt.ylabel('solutions')
```

```
plt.grid()
```

```
plt.show()
```



✍ On peut constater que la solution « diverge », ce qui est dû à un pas trop élevé mais également à une faiblesse de la méthode d'Euler. Pour obtenir des résultats plus performants, il faut utiliser des méthodes numériques plus complexes (hors programme) comme celle utilisée dans la méthode `odeint` qui suit.

### □ Méthode 5.7. Résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 avec la bibliothèque Scipy

Si on définit le vecteur  $Y = [y(t), \dot{y}(t)]$  alors on peut mettre l'équation différentielle  $\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c(t)$  sous la forme  $\dot{Y} = f(Y, t)$ ,  $f$  étant la fonction qui à tout vecteur  $[y_1(t), y_2(t)]$  associe le vecteur  $[y_2(t), ay_2(t) + by_1(t) + c(t)]$

On utilise alors la méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque Scipy qui prend en paramètres : la fonction  $f$ ; la condition initiale  $Y(0)$  ; la liste  $T$  des dates pour lesquelles on calcule la fonction  $y(t)$ .

La méthode renvoie alors la liste  $Y$  (voir la méthode précédente).

L'implémentation en Python se fait donc de la façon suivante.

– Création d'une liste de dates allant de  $t_0$  à  $t_n$  par pas de  $p$  (donc  $n+1$  dates)

```
import numpy as np
T = np.linspace(0, t_n, n+1)
```

– Création d'une liste de couples  $[y(t_i), \dot{y}(t_i)]$

```
import scipy.integrate as sp
def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], a*X[0]+b*X[1]+c(t)]
```

```
Y0 = ??? # Conditions initiales
```

```
Y = sp.odeint(F, Y0, T) # application de la méthode odeint
```

La résolution de l'équation différentielle de la méthode précédente ( $\ddot{y}(t) + 2y(t) = 0$  avec les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $\dot{y}(0) = 0$ ) se fait avec le code suivant (le code correspondant à l'affichage des solutions est le même que celui de la méthode précédente).

```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], -omega_0**2*X[0]]

omega_0 = 2
Y0 = [1,0] # Conditions initiales
T = np.linspace(0,10,1001) #Nombre de points temporels

Y = sp.odeint(F,Y0,T) # application de la méthode odeint
```

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Un circuit comportant une bobine et un condensateur est toujours un circuit du deuxième ordre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. On recherche les solutions de l'équation sans second membre sous la forme $Ae^{rt}$ , où $r$ est une racine de l'équation caractéristique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La solution de l'équation sans second membre d'un système du second ordre a toujours la même forme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La solution particulière d'un système du second ordre est aussi la solution du régime permanent.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Lors d'un régime pseudo-périodique, la pulsation des oscillations est la pulsation propre $\omega_0$ de l'équation canonique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. L'oscillateur harmonique est le cas limite où le facteur de qualité tend vers zéro.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Pour avoir le plus grand facteur de qualité possible, la résistance électrique doit tendre vers zéro.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Dans un système du deuxième ordre, le régime critique est celui qui permet l'établissement le plus rapide du régime permanent.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Si le discriminant de l'équation caractéristique d'un système du second ordre est négatif, alors le régime est apériodique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Plus le facteur de qualité est grand et plus la décroissance de l'amplitude des oscillations est rapide.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

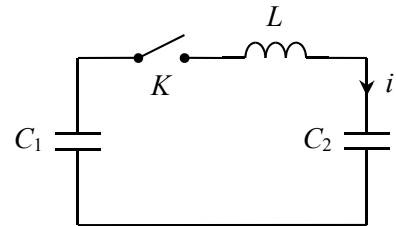
# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Oscillateur harmonique

### □ Exercice 5.1. Circuit oscillant LC

Dans le circuit ci-contre, le condensateur de capacité  $C_1$  porte sur son armature supérieure une charge  $q_0$ , le condensateur de capacité  $C_2$  étant déchargé.

À l'instant  $t=0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . On cherche alors à déterminer l'évolution temporelle de l'intensité  $i$  du courant parcourant le circuit.

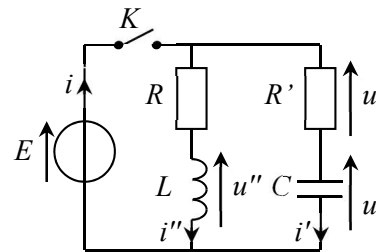


1. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  pour  $t > 0$ .
2. Déterminer, en les justifiant, les conditions initiales  $i(0^+)$  et  $\frac{di}{dt}(0^+)$ .
3. Résoudre complètement l'équation différentielle.
4. Tracer la courbe donnant  $i$  en fonction de  $t$ , en faisant bien apparaître sur le graphe les points particuliers et les valeurs particulières de  $i$  et de  $t$ .

## ■ Circuit du deuxième ordre amorti

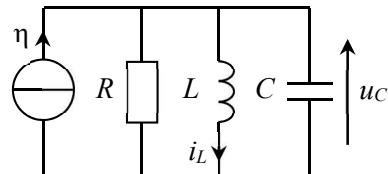
### □ Exercice 5.2. Détermination de conditions initiales

Dans le circuit ci-contre, avant la fermeture de l'interrupteur, le courant traversant la bobine est nul et le condensateur est déchargé. À  $t=0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . Déterminer la valeur de chaque intensité et de chaque tension représentée, juste après la fermeture de  $K$ , et donner également  $\frac{du}{dt}(0^+)$  et  $\frac{di''}{dt}(0^+)$ .



### □ Exercice 5.3. Circuit RLC parallèle

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $u_C(t)$  dans ce circuit (avec  $\eta = \text{cte}$ ), et mettre cette équation sous forme canonique.
2. En déduire l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R, L, C$ .
3. À  $t=0$ , le générateur de courant passe de 0 (valeur ayant duré longtemps) à  $\eta = 0,01 \text{ A}$ .

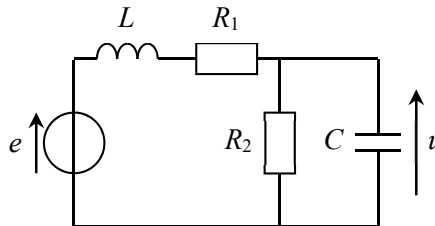


On a  $R = 50 \Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  et  $L = 100 \text{ mH}$ . Quel est le régime d'évolution de  $u_C(t)$  ?

4. À  $t = 0$ ,  $i_L = 0$  et  $u_C = 0$ . Donner l'expression numérique de  $u_C(t)$  pour  $t > 0$ . Représenter l'allure de  $u_C(t)$ .

□ **Exercice 5.4. Décroissement logarithmique\***

On étudie la réponse  $u(t)$  à un échelon de tension  $e(t)$  dans le circuit ci-contre.



1. Déterminer la valeur  $u(\infty)$  vers laquelle tend  $u(t)$  lorsque la valeur de  $e(t)$  est  $E$ , en dessinant un schéma en régime permanent.

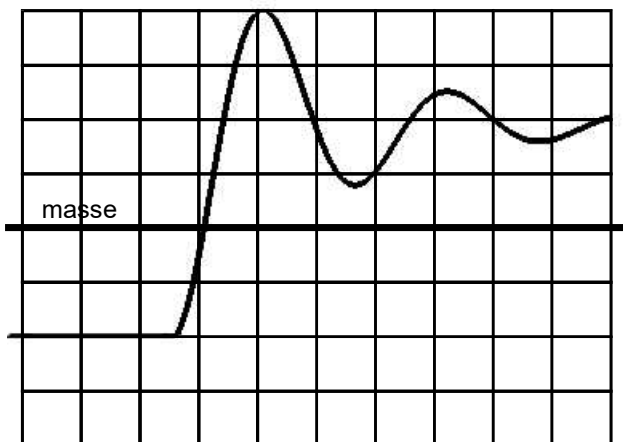
2. Établir l'équation différentielle  $\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u(\infty)$  et exprimer  $\lambda$  et  $\omega_0$  en fonction de  $L$ ,  $C$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

3. Définir et tracer un échelon de tension. Expliquer comment on le réalise expérimentalement.  
4. On observe sur un oscilloscope la courbe  $u(t)$  qui suit.

- a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période  $T$ .  
b) Déterminer la valeur numérique du décroissement logarithmique, défini par :

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{u(t) - u(\infty)}{u(t + nT) - u(\infty)} \right).$$

5. Exprimer la forme mathématique de  $u(t)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\omega_0$ ,  $u(\infty)$  et  $t$ .  
On ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration.  
6. Déterminer la relation entre  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $T$ .  
En déduire la valeur numérique de  $\lambda$ .



1 div = 200  $\mu\text{s}$

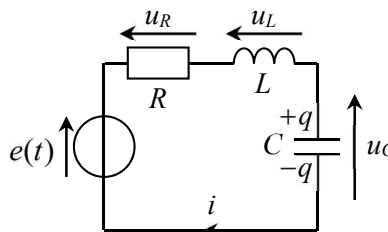
7. Sachant que  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 100 \text{ mH}$ , déterminer la valeur numérique de  $C$ .

□ **Exercice 5.5. Régime pseudo-périodique\***

Un circuit électrique est composé d'une résistance  $R$ , d'une bobine d'inductance pure  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0, \text{ on a } e(t) = 0 ; \\ \text{pour } t > 0, \text{ on a } e(t) = E. \end{cases}$$

On pose  $\gamma = \frac{R}{2L}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .



1. Expliquer simplement pourquoi à  $t = 0^-$  la charge  $q$  et le courant  $i$  sont nuls.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la charge  $q(t)$  du condensateur pour  $t > 0$ .

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge  $q(0^+)$  et de sa dérivée  $\frac{dq}{dt}(0^+)$ .

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . On suppose dans la suite la condition  $\omega_0 > \gamma$  réalisée.

3. Montrer que l'expression de la charge pour  $t > 0$  peut se mettre sous la forme

$$q(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\gamma t} + D$$

où on déterminera  $\omega$ ,  $A$ ,  $B$  et  $D$  en fonction de  $C$ ,  $E$ ,  $\omega_0$  et  $\gamma$ .

4. Exprimer le courant  $i(t)$  dans le circuit pour  $t > 0$  en fonction de  $C$ ,  $E$ ,  $\omega_0$  et  $\gamma$ .

5. Donner l'allure des courbes  $q(t)$  et  $i(t)$ .

Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

6. Déterminer l'énergie totale  $E_G$  fournie par le générateur ainsi que l'énergie  $E_{LC}$  emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de  $C$  et  $E$ . En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite  $R \rightarrow 0$ .

#### □ Exercice 5.6. Oscillateur de grand facteur de qualité \*\*

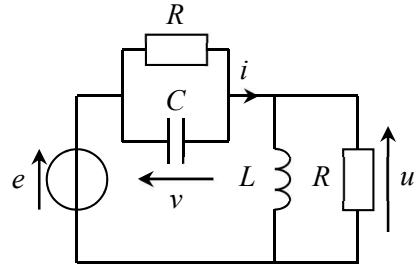
Pour  $t < 0$ ,  $e = 0$ ,  $v = 0$ ,  $u = 0$ . Pour  $t > 0$ ,  $e = E$ .

1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $u(t)$  et  $v(t)$  et donner les expressions des grandeurs  $\omega_0$  et  $Q$  associées au système.

2. Préciser les conditions initiales pour  $u(t)$ ,  $v(t)$  et leurs dérivées.

On se place dans le cas où  $Q \gg 1$ .

3. Déterminer l'expression de la tension  $v(t)$  en fonction de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $E$ . En déduire une valeur approchée de la tension maximale atteinte par  $v(t)$ .



## ■ Méthode numérique de résolution d'une équation différentielle

### □ Exercice 5.7. Programmation de fonctions

Si on définit le vecteur  $Y = [y(t), \dot{y}(t)]$ , alors toute équation différentielle du type

$\ddot{y}(t) = a\dot{y}(t) + by(t) + c(t)$  peut se mettre sous la forme  $\dot{Y} = f(Y, t)$ .

Programmer la fonction  $f$  en Python pour les équations différentielles suivantes.

1.  $\ddot{y}(t) + 5y(t) = 0$ .
2.  $\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + 4u(t) = 0$ .
3.  $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 5x(t) = 2 \sin(6t)$ .



### □ Exercice 5.8. Résolution d'une équation différentielle avec Python

On cherche à déterminer une solution approchée de la fonction temporelle  $r(t)$  qui à l'équation différentielle :  $\ddot{r} + 2\lambda\dot{r} + \omega_0^2 r = 0$ ,  $\lambda$  et  $\omega_0$  étant des constantes positives non nulles.

On écrit donc le code suivant :

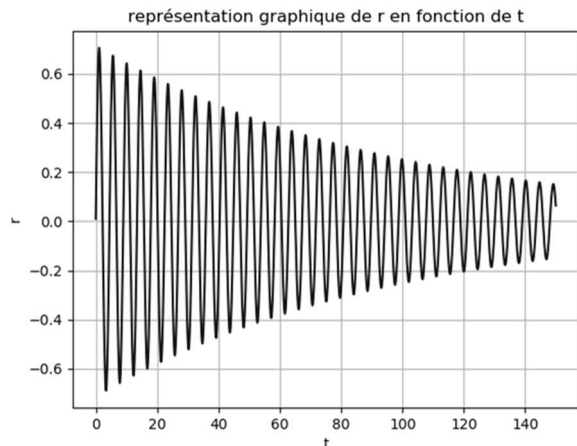
```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
T=150
omega = 1.4
lambda = 0.03

def euler(N,x0,v0):
    x = x0
    v = v0
    h = T/N
    a = -2*lambda*v-omega*omega*x
    tab_1 = np.zeros(N)
    tab_2 = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        (x,v,a)=(x+v*h,v+a*h,-2*lambda*v-omega*omega*x)
        tab_1[i] = x
        tab_2[i] = v
    return tab_1

def temps(N):
    h=T/N
    t = np.arange(N)*h
    return t

plt.figure ('graphique')
plt.plot(temps(15000),euler(15000,0,1),'b')
plt.title("représentation graphique de r en fonction de t")
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("r")
plt.grid()
plt.show()
```

dont l'exécution permet d'obtenir la courbe suivante :



1. Décrire, en détaillant les étapes, comment l'algorithme utilisé permet, connaissant les valeurs  $r(t_n)$  et  $\dot{r}(t_n)$  de la fonction  $r(t)$  et de sa dérivée première à une date  $t_n$ , de calculer ces mêmes valeurs à une date  $t_{n+1}$ . Quelle approximation est faite ?
2. Que renvoie `euler(3,0,1)` ?
3. La fonction `euler` contient une boucle itérative dans laquelle la commande `for` est utilisée. Modifier ces lignes de façon à utiliser la commande `while` en créant une boucle conditionnelle.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 5.1.* Introduire des tensions aux bornes de chaque appareil puis appliquer la loi des mailles. Relier l'intensité  $i$  à chacune de ces tensions, en faisant attention aux conventions choisies. Finalement, il faut dériver toute l'équation issue de la loi des mailles, pour pouvoir éliminer les tensions et garder seulement  $i$  et ses dérivées.

*Exercice 5.2.* Pour  $\frac{du}{dt}(0^+)$ , déterminer l'intensité  $i'(0^+)$  dans le condensateur en utilisant les différentes lois de continuité.

*Exercice 5.4.* Question 1 : remplacer la bobine et le condensateur par leurs équivalents respectifs en régime continu ; le circuit est alors très simple.

*Exercice 5.6.* À la question 1, exprimer toutes les relations caractéristiques des dipôles (entre intensité et tension) sans introduire de tension supplémentaire : par exemple la tension  $v$  est la même aux bornes de  $C$  et de  $R$  à gauche, donc il est inutile de lui donner deux noms différents. En revanche on peut nommer les intensités traversant chaque dipôle, puis les relier avec la loi des nœuds. La loi des mailles permet finalement de relier  $u$  et  $v$ .

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	faux

2. Si on remplace  $Ae^{rt}$  dans l'équation sans second membre puis que l'on simplifie, on obtient l'équation caractéristique.

3. Elle dépend de la valeur du discriminant de l'équation caractéristique, donc du facteur de qualité  $Q$ .

5. Non, il s'agit de la pseudo-pulsation  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

6. On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique si le facteur de qualité tend vers *l'infini*.

7. Cela dépend de la position des dipôles dans le circuit : selon les cas, la résistance  $R$  peut apparaître au dénominateur de  $Q$  (c'est le cas du circuit  $RLC$  série) ou au numérateur.

9. Dans le cas d'un discriminant négatif, les racines sont complexes et le régime est alors pseudo-périodique.

10. Plus le facteur de qualité est grand et plus on tend vers un « bon oscillateur » : la décroissance de l'amplitude des oscillations est alors plus lente.

### □ Les erreurs classiques

– Lorsqu'un dipôle est représenté en convention générateur sur un schéma, il ne faut pas oublier d'adapter la formule à cette convention (avec un signe  $-$ ). Si on a trouvé des coefficients de signes contraires dans l'équation différentielle, il y a forcément une erreur !

– La continuité d'une fonction n'implique pas la continuité de sa dérivée ! Donc si  $u(0^+) = u(0^-)$  on ne peut pas en déduire  $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{du}{dt}(0^-)$ . La valeur de  $\frac{du}{dt}(0^+)$  devra être déduite des valeurs d'autres grandeurs du circuit.

– Dans le cas d'une équation différentielle avec second membre, pour trouver les deux constantes d'intégration, ne jamais appliquer les conditions initiales à la solution de l'équation *sans* second membre. Il faut les appliquer à la solution *complète*, comportant la solution particulière constante.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 5.1

1. On complète les notations du circuit, pour  $t > 0$ , sur le schéma ci-contre.

Loi des mailles :  $u_2 + u_L - u_1 = 0$ .

De plus tous les dipôles sont parcourus par le même courant  $i$ , d'où les relations :

$$i = C_2 \frac{du_2}{dt} \quad (\text{convention récepteur}); \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

(idem) ;

$i = -C_1 \frac{du_1}{dt}$  (convention générateur). On souhaite éliminer toutes les variables sauf  $i$  : on peut

déjà remplacer  $u_L$  par  $L \frac{di}{dt}$  dans l'équation issue de la loi des mailles. Pour éliminer  $u_1$  et  $u_2$  dans cette équation, on commence par la dériver, puis on utilise les relations des condensateurs :

$$\frac{du_2}{dt} + \frac{du_L}{dt} - \frac{du_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{i}{C_2} + L \frac{d^2i}{dt^2} - \left(-\frac{i}{C_1}\right) = 0 \text{ d'où finalement } \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) i = 0}.$$

⇒ Méthode 5.1

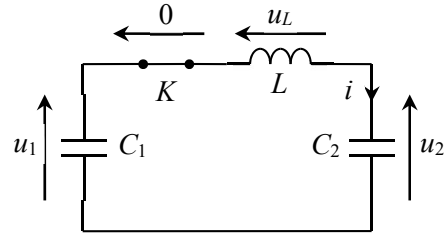
2. Continuité du courant dans la bobine :  $i(0^+) = i(0^-)$  soit  $\boxed{i(0^+) = 0}$ . Continuité des tensions des condensateurs :  $u_1(0^+) = u_1(0^-) = \frac{q_0}{C_1}$  et  $u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0$  (initialement déchargé).

☛ Si on choisit au départ d'orienter la tension  $u_1$  dans l'autre sens, le condensateur de gauche serait alors lui aussi en convention récepteur  $\left(i = C_1 \frac{du_1}{dt}\right)$  mais en revanche on devrait écrire  $u_1(0^-) = -\frac{q_0}{C_1}$  car  $q_0$  est portée par l'armature supérieure. On retrouve alors les mêmes résultats.

La loi des mailles à  $t = 0^+$  donne alors :  $\frac{q_0}{C_1} + L \frac{di}{dt}(0^+) + 0 = 0$  d'où  $\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{q_0}{LC_1}}$ .

⇒ Méthode 5.3

3. Solution :  $i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  en posant  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}}$ .



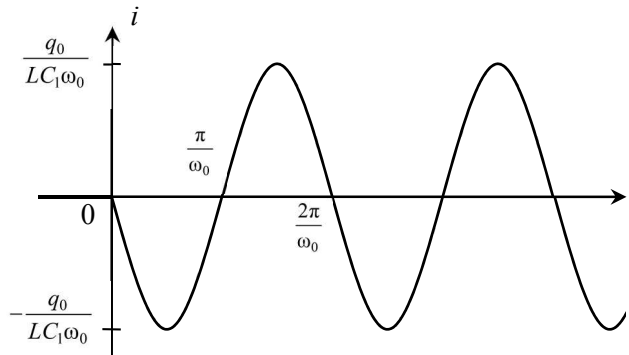
À  $t = 0^+$  :  $i(0^+) = A = 0$  et  $\frac{di}{dt}(0^+) = B\omega_0 = -\frac{q_0}{LC_1}$ . Donc  $i(t) = -\frac{q_0}{LC_1\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ .

⇒ Méthode 5.4

**4.** On doit bien faire apparaître les deux conditions initiales sur la courbe : elle part donc de l'origine, et la pente initiale est négative.

Ensuite l'intensité s'annule à chaque demi-période, et l'amplitude des oscillations est  $\frac{q_0}{LC_1\omega_0}$ .

oscillations est  $\frac{q_0}{LC_1\omega_0}$ .



### Exercice 5.2

On part de la continuité du courant dans la bobine  $i''(0^+) = i''(0^-) = 0$  et de celle de la tension aux bornes du condensateur  $u(0^+) = u(0^-) = 0$ .

La loi des nœuds  $i = i' + i''$  permet d'affirmer  $i'(0^+) = i(0^+)$ . La maille extérieure du circuit donne

$E = u'(0^+) + u(0^+) = u'(0^+)$ , donc d'après la loi d'Ohm  $i'(0^+) = \frac{u'(0^+)}{R'} = \frac{E}{R'} = i(0^+)$ .

La maille de droite du circuit donne  $u''(0^+) + Ri''(0^+) = u'(0^+) + u(0^+)$ , soit  $u''(0^+) = E$ .

Enfin  $i'(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+)$  donc  $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{R'C}$ ; et  $u''(0^+) = L \frac{di''}{dt}(0^+)$  donc  $\frac{di''}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$ .

☛ On a trouvé  $u(0^+) = 0$  mais  $\frac{du}{dt}(0^+) \neq 0$ , et de même pour  $i''$ . Cette situation, ou

l'inverse  $\left( u(0^+) \neq 0 \text{ et } \frac{du}{dt}(0^+) = 0 \right)$ , est très fréquente.

### Exercice 5.3

**1.** La tension est la même aux bornes de tous les dipôles, il est donc inutile d'introduire d'autres notations de tension (du genre  $u_R$  ou  $u_L$ ). En revanche on ajoute les courants manquants en convention récepteur, et l'on écrit alors les relations élémentaires pour les trois dipôles :

$$u_C = Ri_R, u_C = L \frac{di_L}{dt} \text{ et } i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

On écrit la loi des nœuds  $\eta = i_R + i_L + i_C$  et l'on remplace avec les relations élémentaires précédentes, soit  $\eta = \frac{u_C}{R} + i_L + C \frac{du_C}{dt}$ . Pour remplacer le courant dans l'inductance, nous devons

dérivée cette équation, ce qui donne  $0 = \frac{1}{R} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{L} + C \frac{d^2 u_C}{dt^2}$ . On met finalement l'équation sous forme canonique :  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = 0$ .

⇒ Méthode 5.1

2. On identifie chaque terme avec l'équation générale de la forme  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$ , en commençant par celui qui a le moins d'inconnues :  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  d'où  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ; puis

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \text{ d'où } Q = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

✍ Il est généralement préférable de ne remplacer  $\omega_0$  par sa valeur qu'à la fin du calcul.

⇒ Méthode 5.2

3. Le type de régime dépend de la valeur du facteur de qualité, qui vaut ici  $Q = 0,016 < \frac{1}{2}$  : on en déduit donc que le régime est apériodique.

4. On résout l'équation caractéristique  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$  avec  $Q = 0,016$  et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}. \text{ On obtient deux racines réelles : } r_1 = -500 \text{ s}^{-1} \text{ et } r_2 = -2,0 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}.$$

L'équation est *sans second membre* donc sa solution s'écrit  $u_C = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ .

Initialement le condensateur est déchargé, car il était court-circuité par la bobine (équivalente à un fil en régime permanent). On en déduit donc, par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur,  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ , soit  $u_C(0^+) = 0 = Ae^0 + Be^0$ , d'où  $A = -B$ .

La seconde condition initiale est déterminée à partir de la continuité du courant dans la bobine :

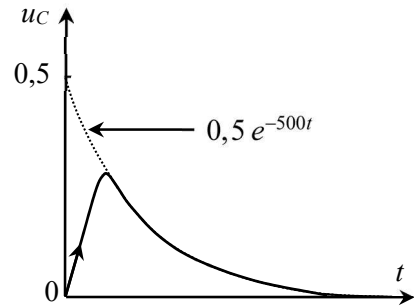
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0. \text{ Loi des nœuds : } I_0 = \frac{u_C(0^+)}{R} + i_L(0^+) + C \frac{du_C}{dt}(0^+) = C \frac{du_C}{dt}(0^+) \text{ d'où}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0^+) = \frac{I_0}{C}. \text{ Donc } \frac{I_0}{C} = Ar_1 e^0 + Br_2 e^0, \text{ d'où } A = -B = \frac{I_0}{C(r_1 - r_2)} = 0,5 \text{ V}. \text{ Finalement la}$$

solution numérique est :  $u_C(t) = 0,5(e^{-500t} - e^{-2 \cdot 10^6 t})$  avec  $t$  en s et  $u_C$  en V.

On constate que l'une des exponentielles tend beaucoup plus rapidement vers 0, ce qui permet de dire que rapidement l'équation de la tension devient  $u_C(t) \approx 0,5 e^{-500t}$ . On connaît aussi la valeur  $u_C(0) = 0$ , ainsi que sa pente à l'origine très grande  $\frac{du_C}{dt}(0) = 10^6 \text{ V/s}$ , ce qui permet d'en déduire l'allure de la courbe.

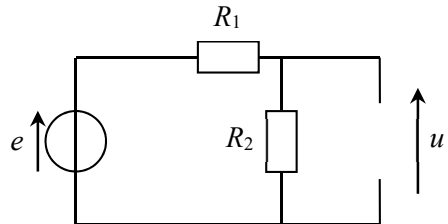
⇒ Méthodes 5.3, 5.4



### Exercice 5.4

1. Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , le circuit est en régime établi continu, et l'on peut remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert et la bobine par un fil. On reconnaît un pont diviseur de tension :

$$u(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E.$$



2. Les formules élémentaires des dipôles sont :

$i_C = C \frac{du}{dt}$ ,  $u = R_2 i_2$  (avec  $i_2$  le courant dans  $R_2$  et vers le bas). Si on nomme  $i$  le courant sortant

du générateur, alors en convention récepteur, on a  $u_L = L \frac{di}{dt}$  et  $u_{R_1} = R_1 i$ .

La loi des mailles donne  $e = L \frac{di}{dt} + R_1 i + u$  et la loi des nœuds  $i = i_2 + i_C = \frac{u}{R_2} + C \frac{du}{dt}$ .

On remplace  $i$  par son expression dans la loi des mailles et l'on obtient

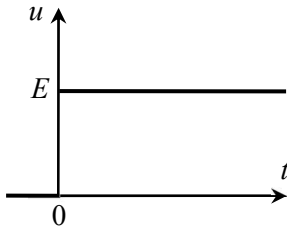
$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u = e$ . On la met finalement sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} u = \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} e \right).$$

On identifie alors les termes  $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_2 LC}}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right)$  et  $u(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e$ .

⇒ Méthodes 5.1, 5.2

3.



Un échelon de tension est une tension  $e(t)$  passant, de façon discontinue (à  $t = 0$ ), d'une certaine valeur constante (ici 0) à une autre valeur constante (ici  $E$ ).

On peut le réaliser avec une source de tension continue en série avec un interrupteur.

On peut aussi réaliser une succession périodique d'échelons avec un signal en créneaux de basse fréquence.

4. a) On mesure sur la courbe la pseudo-période :  $T = 3,1 \times 200 \mu\text{s}$  soit  $T = 620 \mu\text{s}$ .

b) En mesurant l'écart à la valeur finale pour deux maxima successifs, on obtient le décrement logarithmique  $\delta = \frac{1}{1} \ln\left(\frac{4-2}{2,5-2}\right)$  soit  $\delta = 1,4$ .

5. Déterminons la forme de la solution générale de l'équation sans second membre

$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 = 0$ . Son équation caractéristique est  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ , de discriminant

$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) < 0$  car régime pseudo-périodique (d'après l'oscillogramme). Les racines sont

donc  $r_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ . On en déduit l'allure de la solution de l'équation sans second

membre :  $u_{\text{sg}} = Ke^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi)$ .

La solution particulière constante (comme le générateur) est solution de l'équation :

$\frac{d^2u_{\text{sp}}}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_{\text{sp}}}{dt} + \omega_0^2 u_{\text{sp}} = \omega_0^2 u(\infty)$ , d'où  $u_{\text{sp}} = u(\infty)$ . On obtient donc finalement la solution

générale complète :  $u(t) = Ke^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi) + u(\infty)$ .

⇒ Méthode 5.4

6. On a  $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t+nT) - u(\infty)}\right) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{Ke^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi)}{Ke^{-\lambda(t+nT)} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} (t+nT) + \varphi)}\right)$ .

Or  $Ke^{-\lambda(t+nT)} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} (t+nT) + \varphi) = e^{-\lambda nT} Ke^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi)$

donc  $\delta = \frac{1}{n} \ln(e^{\lambda nT})$  soit  $\delta = \lambda T$ . On en tire  $\lambda = \frac{\delta}{T}$ . AN  $\lambda = 2,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

✍ La précision des mesures à l'oscilloscope ne permet pas d'envisager de donner plus de deux chiffres significatifs.

7. D'après la formule de la question 2 :  $C = \frac{1}{R_2 \left(2\lambda - \frac{R_1}{L}\right)} = 100 \text{ nF}$ .



## Exercice 5.5

1. À  $t = 0^-$ , le circuit est depuis longtemps sous la tension  $e = 0$  ; il a donc atteint son régime permanent. Le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert,  $i(0^-) = 0$ , et la bobine comme un interrupteur fermé. Le courant étant nul dans la résistance, la tension aux bornes du condensateur est donc nulle et  $q(0^-) = Cu(0^-) = 0$ .

2. Les relations élémentaires sur les dipôles sont  $u_R = Ri$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  et pour le condensateur  $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $q = Cu$ . Pour  $t > 0$ , la loi des mailles donne  $E = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$  en

remplaçant le courant, on en déduit l'équation différentielle  $\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$ .

La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc sa charge aussi :  $q(0^+) = q(0^-) = 0$ .

D'après la continuité du courant dans une inductance :  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ . Cette intensité est la même que pour le condensateur :  $i = \frac{dq}{dt}$  donc  $\frac{dq}{dt}(0^+) = 0$ .

⇒ Méthodes 5.1, 5.3

3. L'équation caractéristique de l'équation sans second membre est  $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$  et admet un discriminant  $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$ . D'après la condition de l'énoncé  $\omega_0 > \gamma$ , le discriminant est négatif, le régime correspondant est le régime pseudo-périodique. Les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique sont alors  $r_{1,2} = -\gamma \pm j\omega$  où  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ .

Il en découle une solution de l'équation sans second membre du type

$$q_{sg}(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\gamma t} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ deux constantes d'intégration.}$$

La solution particulière a même forme que le second membre, elle est donc constante : on trouve

$$q_{sp} = \frac{E}{L\omega_0^2} \text{ soit } q_{sp} = CE. \text{ La solution de l'équation est donc}$$

$$q(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) e^{-\gamma t} + CE.$$

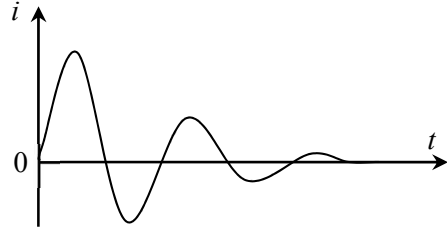
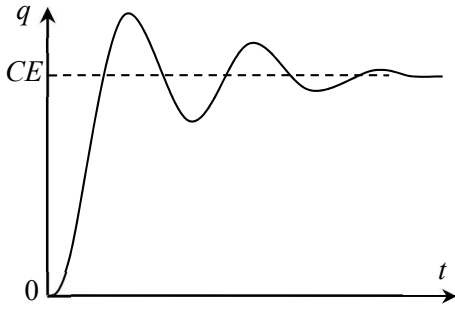
Il ne reste qu'à déterminer  $A$  et  $B$  à partir des conditions initiales  $q(0^+) = 0 = A \cos(0)e^0 + CE$ ,

$$\text{soit } A = -CE \text{ et } \frac{dq}{dt}(0^+) = -\gamma A + B\omega = 0, \text{ d'où } B = -CE \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

⇒ Méthode 5.4

4. Le courant s'obtient en dérivant la charge  $q(t)$  :  $i(t) = CE \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$ .

5. La charge finale atteinte est  $CE$  et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Le courant est alors nul ainsi que les tensions aux bornes de  $L$  et  $R$ . La tension du condensateur devient  $E$  et sa charge  $CE$ .



6. L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie  $Ei$  par le générateur entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ . En se rappelant que  $i = \frac{dq}{dt}$ , cette intégrale se ramène à une

simple intégration sur  $q$  :  $E_G = \int_0^\infty Ei dt = \int_0^{CE} E dq$  d'où  $E_G = CE^2$ .

Pour l'énergie emmagasinée par l'inductance et la capacité, il suffit de faire les différences des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or initialement aucune énergie n'est stockée, et à la fin rien n'est stocké dans l'inductance, donc

$E_{LC} = \Delta \left( \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right) = \frac{1}{2} CE^2$ . L'énergie dissipée par effet Joule est la différence

$$W_{\text{Joule}} = E_G - E_{LC} = \frac{1}{2} CE^2.$$

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, indépendamment de la valeur de la résistance du circuit.

Extrapolé à  $R \rightarrow 0$ , ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet Joule. En fait, pour  $R \rightarrow 0$ , le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.

### Exercice 5.6

1. Les équations élémentaires des dipôles pour lesquels on représente le courant en convention

récepteur sont  $\begin{cases} v = Ri_R \\ i_C = C \frac{dv}{dt} \end{cases}$  pour la partie  $RC$  parallèle et  $\begin{cases} u = Ri'_R \\ u = L \frac{di_L}{dt} \end{cases}$  pour la partie  $RL$  parallèle.

La loi des nœuds permet d'obtenir  $i = i_C + i_R = i_L + i'_R$  et la loi des mailles  $e = v + u$ .

Utilisons la loi des nœuds et remplaçons avec les expressions des dipôles élémentaires

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i_L + \frac{u}{R}.$$

Or nous n'avons de relation que sur la dérivée de  $i_L$ , par conséquent, nous dérivons l'équation et

on remplace  $C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$ .

Pour avoir une relation que sur  $u$  par exemple, on utilise la relation provenant de la loi des mailles

pour  $t > 0$   $v = E - u$  et l'on obtient  $-C \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt}$ , soit  $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} = 0}$ .

En remplaçant  $u = E - v$ , on obtient  $\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{E}{LC}}$ .

On identifie avec les coefficients de la forme canonique d'un système du second ordre en commençant par le terme qui contient le moins d'inconnues :

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  d'où  $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ , puis  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{RC}$  d'où  $\boxed{Q = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}}$ .

⇒ Méthodes 5.1, 5.2

**2.** La condition de continuité de la tension aux bornes d'un condensateur donne

$\boxed{v(0^+) = v(0^-) = 0}$ .

De plus d'après la loi des nœuds (la tension  $v$  étant nulle donc constante pour  $t < 0$ ) :

$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{v(0^-)}{R} + C \frac{dv}{dt}(0^-) = 0$ , d'où on peut déduire par une autre loi des nœuds

$i_L(0^-) = i(0^-) - \frac{u(0^-)}{R} = 0$ . Par continuité du courant traversant une inductance, on en déduit

$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$ .

La loi des mailles en  $t = 0^+$  donne  $\boxed{E = v(0^+) + u(0^+) = u(0^+)}$ , d'où on peut aussi tirer

$i(0^+) = \frac{u(0^+)}{R} = \frac{E}{R}$ . Enfin d'après la loi des nœuds en  $t = 0^+$  :  $i(0^+) = C \frac{dv}{dt}(0^+) + \frac{v(0^+)}{R}$ , d'où

$\boxed{\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}}$  et comme  $v + u = E = \text{cte}$ ,  $\frac{dv}{dt}(0^+) = -\frac{du}{dt}(0^+)$  donc  $\boxed{\frac{du}{dt}(0^+) = -\frac{E}{RC}}$ .

⇒ Méthode 5.3

**3.** On résout l'équation caractéristique  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$  de l'équation sans second membre.

Le discriminant de cette équation est  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) < 0$ , les racines sont donc

$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$  avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

La solution de l'équation sans second membre est donc de la forme

$v_{\text{sg}}(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$ . Solution particulière constante :  $v_{\text{sp}} = E$ .

La solution s'écrit donc  $v(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A \cos \omega t + B \sin \omega t] + E$ .

Première condition initiale :  $v(0^+) = 0 = e^0[A \cos 0 + B \sin 0] + E$ , d'où  $A = -E$ . Pour la seconde condition initiale, on commence par calculer l'expression de la dérivée de la tension  $v$  :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A \cos \omega t + B \sin \omega t] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t].$$

Alors  $\frac{dv}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} = -A \frac{\omega_0}{2Q} + B\omega$ , avec  $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{2Q}$ , d'où  $B = 0$ .

On peut donc écrire  $v(t) = E \left( 1 - \cos(\omega t) \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \right)$  avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

Or on se place dans le cas  $Q \gg 1$ , ce qui implique  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_0$  (par conséquent la pseudo-période des oscillations vaut environ  $T_0$ ), et la constante de temps contenue dans l'exponentielle  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2Q}{2\pi f_0} = \frac{Q}{\pi} T_0 \gg T_0$  : la constante de temps de décroissance exponentielle est

beaucoup plus longue que la pseudo-période d'oscillation. On en déduit que les premières périodes ne sont pratiquement pas amorties, d'où  $v(t) \approx E(1 - \cos \omega_0 t)$  pour les premières oscillations. Alors  $v_{\max} \approx 2E$  (obtenu lorsque le cosinus vaut  $-1$ ).

⇒ Méthode 5.4

### Exercice 5.7

1.

```
def F(Y, t):
    return [Y[1], -5*Y[1]]
```

2.

```
def F(Y, t): #
    return [Y[1], -2*Y[0] - 4*Y[1]]
```

3.

```
import numpy as np
def F(Y, t):
    return [Y[1], -3*Y[0] - 5*Y[1] + 2*np.sin(6*t)]
```

⇒ Méthode 5.6

### Exercice 5.8

1. On connaît  $r(t_n)$  et  $\dot{r}(t_n)$ . On calcule donc  $\ddot{r}(t_n)$  en utilisant l'équation différentielle :

$$\ddot{r}(t_n) = -2\lambda \dot{r}(t_n) + \omega_0^2 r(t_n).$$

Ensuite on calcule  $\dot{r}(t_{n+1}) = \dot{r}(t_n) + \ddot{r}(t_n) \times (t_{n+1} - t_n)$  et  $r(t_{n+1}) = r(t_n) + \dot{r}(t_n) \times (t_{n+1} - t_n)$  en faisant l'approximation :  $\dot{r}(t_n) \approx \frac{r(t_{n+1}) - r(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$  et  $\ddot{r}(t_n) \approx \frac{\dot{r}(t_{n+1}) - \dot{r}(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$ .

Cette approximation est d'autant plus efficace que  $t_n$  et  $t_{n+1}$  sont plus proches.

**2.** (50, -50, -300)

**3.** La boucle peut s'écrire :

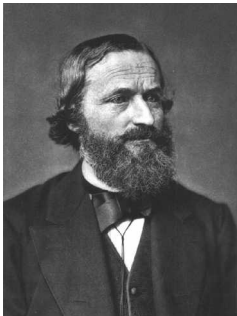
```
while i <= N-1:  
    (x, v, a) = (x+v*h, v+a*h, -2*lambda*v-omega*omega*x)  
    tab_1[i] = x  
    tab_2[i] = v  
    i = i+1
```

Attention à bien initialiser  $i$ , et à ne pas oublier de l'incrémenter dans boucle !

⇒ *Méthode 5.6*

# Régime sinusoïdal forcé

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien allemand **Gustav Kirchhoff** (1824-1887) est encore étudiant lorsqu'il énonce les deux lois sur les courants électriques dans les circuits qui portent désormais son nom. Il enseigne successivement à Breslau, Heidelberg et Berlin. Ses travaux sur les raies spectrales avec Robert **Bunsen** lui permettent de découvrir en 1860 le césium et le rubidium. Pour énoncer une loi universelle sur le rayonnement, il introduit en 1862 le concept de corps noir.

## ■ Un peu d'histoire

Peu avant 1800, une controverse est apparue entre Luigi **Galvani** et Alessandro **Volta** sur l'électricité animale. Ceci a conduit le second à élaborer la première pile. En 1831, Michael **Faraday** découvre le phénomène d'induction grâce à deux expériences successives, l'une à l'aide de bobines connectées à une pile et l'autre avec un solénoïde. L'année suivante Joseph **Henry** redécouvre la même propriété.

On connaissait déjà le courant électrostatique. **Faraday** étudie les effets de ces différents types de courant sur un galvanomètre et sur les décompositions chimiques que cela engendre et montre qu'il s'agit d'un même phénomène. C'est ainsi que le physicien anglais découvre les lois de l'électrolyse. Il introduit les mots électrode, cathode et anode. Le suffixe *ode* vient du grec *odos* qui désigne la route : ainsi, la cathode est « la route vers le bas » et l'anode celle « vers le haut ».

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition de l'amplitude complexe d'une grandeur sinusoïdale
- ▷ La définition de la valeur efficace, et son expression pour une grandeur sinusoïdale
- ▷ Les notions d'impédance et d'admittance
- ▷ Les impédances et admittances des dipôles linéaires simples

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Passer d'une équation différentielle linéaire à une équation complexe, et inversement
- ▷ Utiliser toutes les lois des circuits en notation complexe
- ▷ Calculer une impédance ou une admittance équivalente à une association
- ▷ Déterminer l'amplitude et la phase d'une grandeur réelle à partir de son amplitude complexe
- ▷ Étudier la réponse fréquentielle d'un circuit en intensité ou en tension

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Réponse d'un circuit à une excitation périodique

Si on relie, à un certain instant, un circuit linéaire à un générateur fournissant un signal périodique, chaque grandeur obéit alors à une équation différentielle avec second membre périodique. La solution est alors, comme précédemment, la somme de deux termes :

- la solution de l'équation sans second membre, tendant toujours vers zéro avec un temps caractéristique  $\tau$  ;
- une solution particulière, de même période que le second membre, et indépendante des conditions initiales.

Au bout de quelques  $\tau$ , il ne reste que le terme périodique. Dans le cas d'un générateur de signal sinusoïdal, toutes les grandeurs du circuit sont alors sinusoïdales de même période : c'est le régime sinusoïdal forcé.

## ■ Grandeurs en régime sinusoïdal forcé

### □ Forme générale

En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont de la forme :  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ .  
 $\omega$  est la pulsation imposée par le générateur, liée à sa fréquence  $f$  par la relation  $\omega = 2\pi f$ .

La période  $T$  des signaux est  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Le déphasage d'une grandeur  $x_1(t)$  par rapport à  $x_2(t)$  est  $\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$ .

### □ Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un signal périodique par  $X_{\text{eff}} = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$ .

Elle correspond (dans le cas d'une tension ou d'un courant) à la valeur continue qui produirait le même effet Joule que la grandeur variable, dans une résistance, pendant le même temps.

Dans le cas d'un signal sinusoïdal on trouve  $X_{\text{eff}} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$ .

Les intensités et tensions efficaces se mesurent avec un multimètre en mode AC.

### □ Expression complexe

On associe au signal réel un signal complexe :

$$\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ tel que } x(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)].$$



Le signal complexe peut se décomposer en un facteur variable et une **amplitude complexe**  $\underline{X}$  :

$$\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} = X_m e^{j\varphi}.$$

On identifie alors les éléments nécessaires à la détermination complète de la grandeur  $x$  :

$$X_m = |\underline{X}| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{X}).$$

Opérations sur les complexes

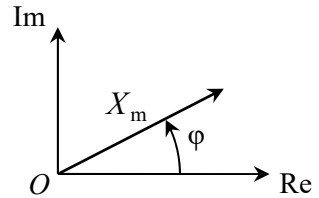
Pour les grandeurs complexes :  $\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t)$  et  $\int \underline{x}(t) dt = \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$ .

Ainsi une équation différentielle pour des grandeurs sinusoïdales peut être transformée en équation algébrique pour les grandeurs complexes correspondantes, puis pour les amplitudes complexes (après simplification par  $e^{j\omega t}$  dans tous les termes).

- ⇒ **Méthode 6.1. Passage d'une équation différentielle à une équation complexe**
- ⇒ **Méthode 6.2. Passage d'une équation complexe à une équation différentielle**

### □ Représentation dans le plan complexe (vecteur de Fresnel)

Chaque grandeur complexe  $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$  peut être représentée, dans le plan complexe, par un vecteur de norme  $X_m$ , faisant un angle  $\omega t + \varphi$  avec l'axe  $(Ox)$  : c'est donc un vecteur tournant avec la vitesse angulaire  $\omega$ . Généralement, on fait un schéma à l'instant  $t = 0$  : le vecteur représente alors l'amplitude complexe  $\underline{X} = X_m e^{j\varphi}$ , ce qui fait apparaître l'angle  $\varphi$ .



⇒ **Méthode 6.4. Utilisation des vecteurs de Fresnel**

## ■ Loi d'Ohm et impédance complexe

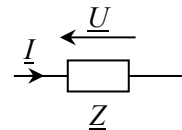
### □ Loi d'Ohm complexe

Pour tout dipôle passif linéaire, en convention récepteur :

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

où  $\underline{Z}$  est l'**impédance** complexe du dipôle.

En convention générateur, l'expression devient  $\underline{U} = -\underline{Z} \underline{I}$ .



L'impédance complexe peut se mettre sous la forme  $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ .

$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$  donc  $Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$  et  $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \varphi_u - \varphi_i$  (déphasage de la tension par rapport au courant).

On définit aussi l'**admittance** complexe :  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ .

Unités SI

Le module de l'impédance s'exprime en ohms ( $\Omega$ ), et celui de l'admittance en siemens (S).

## □ Impédances des dipôles simples

	$R$	$L$	$C$
Relation temporelle	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
Relation complexe	$\underline{U} = \underline{R} \underline{I}$	$\underline{U} = jL\omega \underline{I}$	$\underline{I} = jC\omega \underline{U}$
Impédance et admittance	$\underline{Z}_R = R, \underline{Y}_R = \frac{1}{R}$	$\underline{Z}_L = jL\omega, \underline{Y}_L = \frac{1}{jL\omega}$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}, \underline{Y}_C = jC\omega$

Comportement asymptotique

	$L$	$C$
$\omega \rightarrow 0$	$ \underline{Z}_L  \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{fil}$	$ \underline{Z}_C  \rightarrow \infty \Leftrightarrow \text{coupe-circuit}$
$\omega \rightarrow \infty$	$ \underline{Z}_L  \rightarrow \infty \Leftrightarrow \text{coupe-circuit}$	$ \underline{Z}_C  \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{fil}$

## ■ Lois des circuits

### □ Lois de Kirchhoff

Les lois des nœuds et des mailles s'écrivent de la même façon qu'en régime continu, avec les grandeurs complexes ou avec les amplitudes complexes :  $\sum \varepsilon_k \underline{I}_k = 0$  et  $\sum \varepsilon_k \underline{U}_k = 0$ .

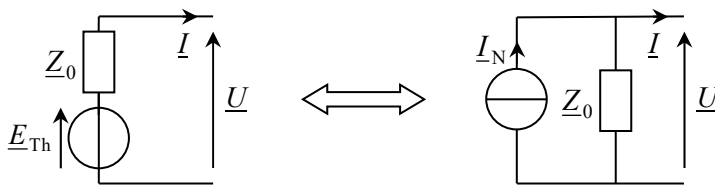
### □ Associations

Les lois d'associations des dipôles ohmiques sont valables en remplaçant  $R$  par  $\underline{Z}$  et  $G$  par  $\underline{Y}$ .

- En série :  $\underline{Z}_{\text{éq}} = \sum \underline{Z}_k$ . Pont diviseur de tension :  $\underline{U}_j = \frac{\underline{Z}_j}{\sum \underline{Z}_k} \underline{U}_{\text{ensemble}}$ .
- En parallèle :  $\underline{Y}_{\text{éq}} = \sum \underline{Y}_k$ . Pont diviseur de courant :  $\underline{I}_j = \frac{\underline{Y}_j}{\sum \underline{Y}_k} \underline{I}_{\text{ensemble}}$ .

### □ Modèles de Thévenin et de Norton

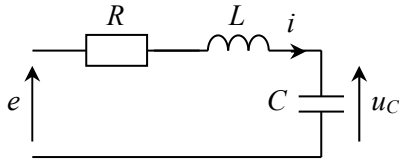
Un dipôle actif peut être modélisé de deux manières équivalentes, avec  $\underline{E}_{\text{Th}} = \underline{Z}_0 \underline{I}_N$  :



Ces modèles correspondent aux relations :  $\underline{U} = \underline{E}_{\text{Th}} - \underline{Z}_0 \underline{I}$  et  $\underline{I} = \underline{I}_N - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_0}$ .

⇒ **Méthode 6.3. Utilisation des lois en complexes puis retour aux réels**

## ■ Étude du circuit *RLC* série



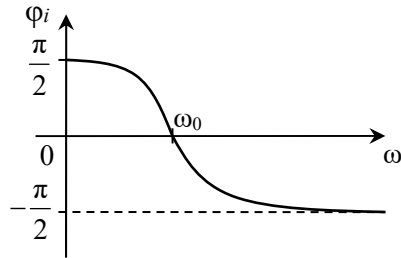
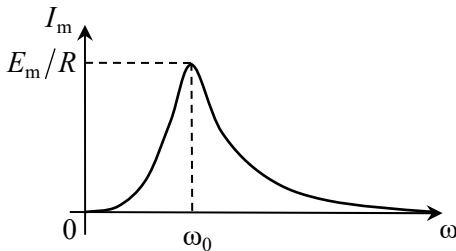
On suppose  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  et on se place en régime sinusoïdal forcé.

### □ Réponse en intensité

$$\underline{I} = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E_m}{R} \times \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{en posant } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$\text{Amplitude : } I_m = \frac{E_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\text{Déphasage : } \varphi_i = -\arctan \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$



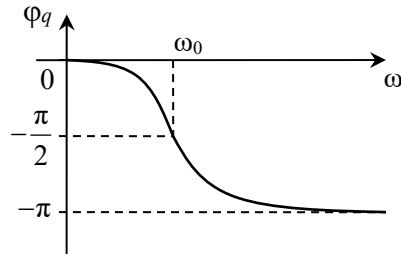
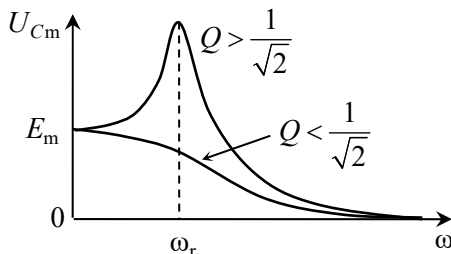
Quel que soit le facteur de qualité, il y a toujours **résonance en intensité**, à la pulsation  $\omega_0$ .

### □ Réponse en charge (ou en tension) du condensateur

$$\underline{U}_C = \frac{E_m}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{E_m}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{et } \underline{Q} = CU_C.$$

$$\text{Amplitude : } U_{Cm} = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\text{Déphasage : } \varphi_q = -\arctan \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] - \frac{\pi}{2}$$



Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  il y a un phénomène de **résonance en charge**, à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

⇒ Méthode 6.5. Étude de la réponse fréquentielle et résonance

## ■ Comment passer d'une équation différentielle à une équation complexe et inversement ?

### □ Méthode 6.1. Passage d'une équation différentielle à une équation complexe

On remplace les grandeurs temporelles par les grandeurs complexes associées. Dans ces conditions, dériver revient à multiplier par  $j\omega$  (et intégrer à diviser par  $j\omega$ ) : on obtient alors une simple équation algébrique avec les grandeurs complexes, puis uniquement avec les amplitudes complexes après simplification par  $e^{j\omega t}$  dans tous les termes.

⇒ Exercice 6.11, 11.15

Soit l'équation  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = E_m \cos(\omega t)$ . On passe en écriture complexe, soit :

$$-\omega^2 \underline{u}(t) + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{u}(t) + \omega_0^2 \underline{u}(t) = E_m e^{j\omega t}.$$

On décompose  $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ , d'où  $-\omega^2 \underline{U} e^{j\omega t} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{U} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{U} e^{j\omega t} = E_m e^{j\omega t}$  et on simplifie

tous les termes par  $e^{j\omega t}$  :  $-\omega^2 \underline{U} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{U} + \omega_0^2 \underline{U} = E_m$ .

On en tire immédiatement  $\underline{U}$ , d'où la fonction  $u(t)$  qui est la solution particulière sinusoïdale de l'équation différentielle. Rappelons que cette solution particulière correspond au régime sinusoïdal forcé, obtenu après la fin du régime transitoire initial (celui-ci étant toujours extrêmement court, on ne le considère pratiquement jamais).

### □ Méthode 6.2. Passage d'une équation complexe à une équation différentielle

Lorsque l'on dispose d'une équation complexe liant deux grandeurs, si cette dernière comporte une fraction, il faut effectuer le produit en croix. Ensuite on remplace toute grandeur complexe multipliée par  $j\omega$  par sa dérivée, et toute grandeur divisée par  $j\omega$  par son intégrale temporelle.

⇒ Exercice 8.4

Supposons par exemple qu'on ait trouvé  $\underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{E}$ .

On effectue le produit en croix pour supprimer les fractions :  $(R + jL\omega)\underline{U} = jL\omega \underline{E}$ .

On repasse alors en écriture temporelle :  $Ru + L \frac{du}{dt} = L \frac{de}{dt}$ , soit  $\frac{du}{dt} + \frac{R}{L}u = \frac{de}{dt}$ .

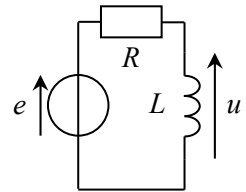
## ■ Comment déterminer l'expression d'un courant ou d'une tension en régime sinusoïdal ?

### □ Méthode 6.3. Utilisation des lois en complexes puis retour aux réels

On applique les mêmes lois et méthodes qu'en régime continu, mais en écrivant toutes les équations avec les impédances complexes et les amplitudes complexes. Une fois que la grandeur complexe  $\underline{X}$  est déterminée, on peut revenir à son expression temporelle  $x(t)$  en identifiant son module  $X_m$  et son argument  $\varphi$ .

⇒ Exercices 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.14

On cherche à déterminer l'expression de la tension  $u(t)$  aux bornes de l'inductance en régime sinusoïdal forcé, en supposant  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On cherche donc la tension sous la forme  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  avec un cosinus comme pour l'expression de  $e(t)$ .



On reconnaît un pont diviseur de tension formé par les deux dipôles (impédances  $R$  et  $jL\omega$ ),

ainsi la tension complexe s'écrit :  $\underline{u}(t) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{e}(t) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E_0 e^{j\omega t}$ .

Pour bien comprendre, passons tous les complexes en notation exponentielle :

$$\underline{u} = \frac{L\omega e^{j\pi/2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} e^{j \arctan(L\omega/R)}} E_0 e^{j\omega t} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E_0 e^{j(\omega t + \pi/2 - \arctan(L\omega/R))} = U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On déduit la grandeur temporelle (réelle) :

$$u(t) = \text{Re}(\underline{u}(t)) = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right).$$

Avec l'habitude, on pourra travailler directement avec les amplitudes complexes, soit

$$\underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E_0 \quad \text{puis} \quad \text{déduire} \quad U_m = |\underline{U}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E_0 \quad \text{et} \quad \text{la} \quad \text{phase}$$

$\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg(\text{numérateur}) - \arg(\text{dénominateur}) = \arg(jL\omega E_0) - \arg(R + jL\omega)$  soit

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ . On a ainsi complètement déterminé  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

On rappelle que pour un nombre complexe  $\underline{X} = a + jb$ , son module est  $|\underline{X}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  et son

$$\text{argument} \begin{cases} \arg(\underline{X}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0 ; \\ \arg(\underline{X}) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi \text{ si } a < 0. \end{cases}$$

On a donc intérêt à avoir un seul terme, de préférence positif, dans la partie réelle.

#### □ Méthode 6.4. Utilisation des vecteurs de Fresnel

C'est une manière de visualiser les amplitudes et les phases des différentes grandeurs, en représentant les amplitudes complexes dans le plan complexe.

– On écrit, soit une loi des mailles, soit une loi des nœuds, sous forme complexe. On représente les vecteurs associés aux nombres complexes : ces vecteurs de Fresnel s'additionnent comme les grandeurs qu'ils représentent. Dans une loi des mailles, l'intensité sert de référence, elle est donc placée sur l'axe ( $Ox$ ) ; dans une loi des nœuds, c'est plutôt la tension qui sert de référence.

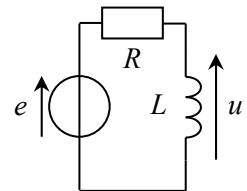
– Avec les relations dans un triangle rectangle, on obtient l'amplitude et la phase de la grandeur. Si le triangle entre les grandeurs n'est pas rectangle, il faut utiliser les normes des vecteurs (en fait leurs carrés qui correspondent au théorème d'Al-Kashi).

⇒ Exercices 6.8, 6.9, 6.12, 6.13

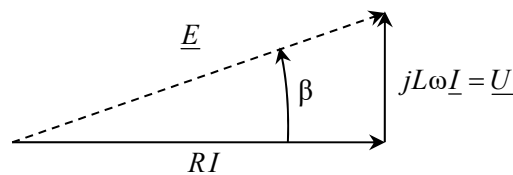
– Cas d'un triangle rectangle

On cherche à déterminer l'expression de la tension  $u(t)$  aux bornes de l'inductance, en régime sinusoïdal forcé, en supposant  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

On cherche donc la tension sous la forme  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  avec un cosinus comme pour l'expression de  $e(t)$ .



La loi des mailles donne  $\underline{E} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$ , avec  $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$ . Le courant sert de référence (axe des abscisses) pour le diagramme de Fresnel : son argument est pris égale à 0. L'argument de  $j$  étant  $\frac{\pi}{2}$ , celui de  $\underline{U} = jL\omega\underline{I}$  est  $\frac{\pi}{2}$  également, donc ce vecteur est dessiné orthogonalement à l'axe des abscisses.

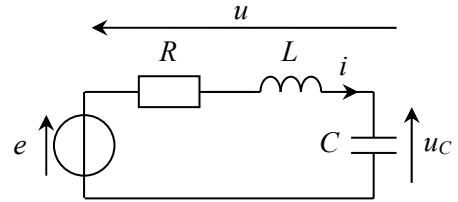


Dans ce triangle rectangle :  $\sin \beta = \frac{U_m}{E_0} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$  soit  $U_m = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} E_0$ .

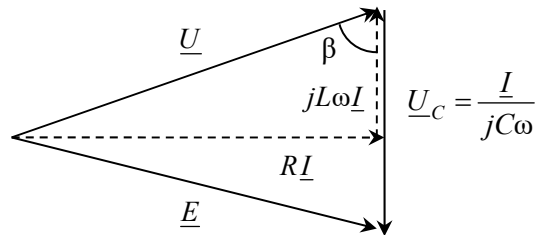
La tension  $e(t)$  est en avance de  $\beta = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$  sur le courant. On constate aussi que la tension  $u(t)$  est en avance de  $\frac{\pi}{2} - \beta$  sur la tension  $e(t)$ , soit  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ . On a ainsi complètement déterminé  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

– Cas d'un triangle non rectangle

On a relevé les valeurs efficaces des tensions  $U = 12 \text{ V}$ ,  $U_C = 5 \text{ V}$  et un déphasage entre  $u_C(t)$  et  $u(t)$  de  $\beta = 110^\circ$ . En s'aidant de la représentation de Fresnel, retrouver la valeur efficace de la tension  $e(t)$ .



La loi des mailles (association série) donne  $\underline{E} = \underline{U} + \underline{U}_C$ , avec pour chaque tension  $\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}$  et  $\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$ . Le courant sert de référence pour le diagramme de Fresnel.



On calcule  $E^2 = \vec{E}^2 = (\vec{U} + \vec{U}_C)^2 = U^2 + U_C^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{U}_C = U^2 + U_C^2 + 2UU_C \cos\beta$  (même si la représentation est faite avec les amplitudes, le résultat demeure identique en valeur efficace, il suffit de diviser toute l'équation par 2).

On en déduit  $E = \sqrt{U^2 + U_C^2 + 2UU_C \cos\beta} = 11,3 \text{ V}$ .

### □ Méthode 6.5. Étude de la réponse fréquentielle et résonance

Pour une grandeur donnée  $x(t)$  du circuit, la réponse fréquentielle consiste à étudier les variations de son amplitude  $X_m$  (et éventuellement de sa phase  $\varphi$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$ . Pour cela on calcule le module de l'amplitude complexe  $\underline{X}$ , puis on cherche ses limites pour  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$  et enfin un éventuel maximum (résonance).

⇒ Exercice 6.8, 11.15

– Amplitude de l'intensité du circuit  $RLC$  série :  $I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ .

Pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $I_m \rightarrow 0$ .

La seule partie variable est la parenthèse au carré au dénominateur. Ce terme est nul, donc minimal, pour  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$  :  $I_m$  est alors maximale (résonance en intensité).

– Amplitude de la tension aux bornes du condensateur dans le circuit  $RLC$  série :

$$U_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}.$$

Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $U_m \rightarrow E_m$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $U_m \rightarrow 0$ .

Pour trouver les variations, on doit dériver  $U_m$  par rapport à  $\omega$  :

$$\frac{dU_m}{d\omega} = -\frac{1}{2} E_m \frac{2(1-LC\omega^2)(-2LC\omega) + 2(RC\omega)(RC)}{[(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2]^{3/2}} = E_m \frac{\omega(2LC - 2L^2C^2\omega^2 - R^2C^2)}{[(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2]^{3/2}}.$$

Cette dérivée s'annule pour  $\omega = 0$  et pour  $2LC - 2L^2C^2\omega_r^2 - R^2C^2 = 0$  soit

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \text{ Cette seconde valeur n'existe que si}$$

$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  : elle correspond alors à un maximum (résonance en tension) et  $\omega = 0$  correspond à un minimum local.

Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le seul extremum est  $\omega = 0$  et c'est un maximum : ensuite la dérivée est toujours négative donc  $U_m$  décroît jusqu'à la valeur limite 0.



## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Dans un circuit ne comportant que des composants linéaires et une source sinusoïdale, toutes les grandeurs mesurables sont sinusoïdales.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Pour effectuer des calculs dans le cas d'un régime sinusoïdal, il faut passer en écriture complexe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Les lois du continu (lois des nœuds et des mailles, équivalence de Thévenin-Norton...) ne sont plus valables en régime sinusoïdal.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Lorsque la pulsation tend vers zéro (ce qui correspond au régime continu), un condensateur se comporte comme un fil.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Lorsque la pulsation tend vers zéro (ce qui correspond au régime continu), une inductance se comporte comme un fil.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Lorsque la pulsation tend vers l'infini, un condensateur se comporte comme un fil.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Lorsque la pulsation tend vers l'infini, une inductance se comporte comme un fil.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Le courant traversant une inductance est en retard sur la tension à ses bornes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. L'amplitude et la phase d'un régime sinusoïdal forcé dépendent des conditions initiales.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le facteur de qualité $Q$ permet de distinguer différents cas pour un oscillateur forcé (régime permanent).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Équivalence entre notation complexe et notation réelle

### □ Exercice 6.1. Notation complexe et notation temporelle

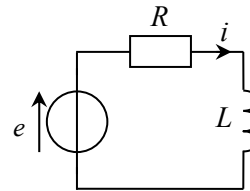
Déterminer les amplitudes complexes associées aux grandeurs suivantes (sans dimension), puis préciser leurs modules et arguments.

1.  $u(t) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ .      2.  $s(t) = -2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$ .      3.  $i(t) = 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$ .

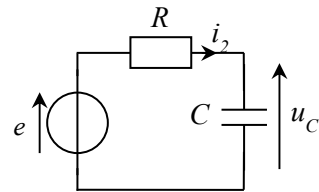
### □ Exercice 6.2. Circuits d'ordre 1 en régime sinusoïdal forcé

On considère un générateur de tension  $e(t) = E \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ .

1. Ce générateur alimente un dipôle  $RL$  série. Donner l'expression du courant complexe  $\underline{i}(t)$  qui traverse le dipôle, puis en déduire  $i(t)$ .



2. Maintenant le générateur alimente un dipôle  $RC$  série. Donner l'expression du courant complexe  $\underline{i}_2(t)$  qui traverse le dipôle, puis en déduire  $i_2(t)$  réel. Déterminer aussi l'expression de la tension  $u_C(t)$  aux bornes de  $C$ .

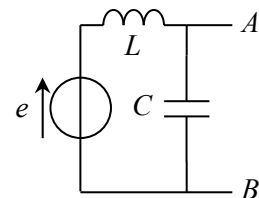


3. Reprendre la question 2 si la FÉM du générateur vaut  $e(t) = E \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$ .

## ■ Dipôles en régime sinusoïdal

### □ Exercice 6.3. Détermination des modèles de Thévenin et de Norton

Déterminer le modèle de Thévenin et le modèle de Norton du dipôle représenté entre  $A$  et  $B$ , la tension  $e(t)$  étant sinusoïdale.

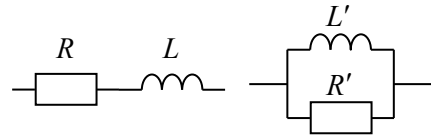


### □ Exercice 6.4. Équivalence entre deux dipôles

On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$  et on considère les deux dipôles ci-contre.

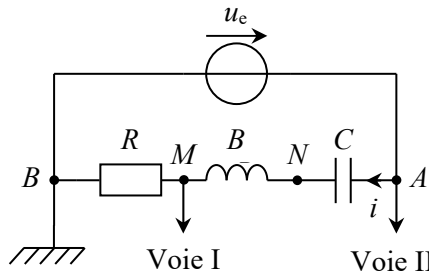
1. Quelles doivent être les expressions de  $L'$  et  $R'$  (en fonction de  $L$ ,  $R$  et  $\omega$ ) pour que les deux dipôles soient équivalents ?

2. Pour quelle pulsation a-t-on  $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$  ?



### □ Exercice 6.5. Détermination des caractéristiques d'une bobine\*

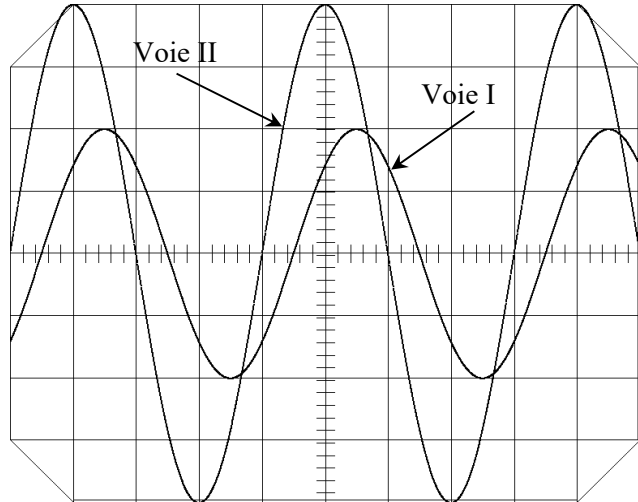
Pour étudier une bobine réelle  $B$ , on effectue le montage indiqué sur le schéma. C'est ainsi que l'on obtient l'oscillogramme (ou copie d'écran de l'oscilloscope) reproduit ci-dessous.



Le générateur délivre une tension  $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$ .

Données :  $R = 20 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Les calibres sont identiques pour les deux voies :  $2 \text{ V/div}$  et  $1 \text{ ms/div}$ .



1. L'oscillogramme permet de calculer les valeurs de la période  $T$ , de la pulsation  $\omega$ , des amplitudes  $U_m$  et  $I_m$ , et de l'impédance réelle  $Z_{AB}$ . Déterminer ces valeurs numériques et recopier, en le complétant, le tableau qui suit.

Grandeur	$T$ (s)	$\omega$ (rad/s)	$I_m$ (A)	$U_m$ (V)	$Z_{AB}$ ( $\Omega$ )
Valeur numérique					

2. Des deux tensions  $u_I$  et  $u_{II}$ , laquelle est en avance de phase sur l'autre ?

3. Calculer le déphasage  $\varphi$  entre la tension  $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$  et l'intensité du courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

4. Montrer que, dans l'hypothèse d'une bobine idéale  $B$  de résistance  $r$  nulle, les valeurs numériques de  $Z_{AB}$ ,  $\varphi$  et  $R$  (donnée de l'énoncé) sont incohérentes.

5. Il est donc nécessaire de prendre en compte la résistance  $r$  de la bobine. Calculer  $r$ .

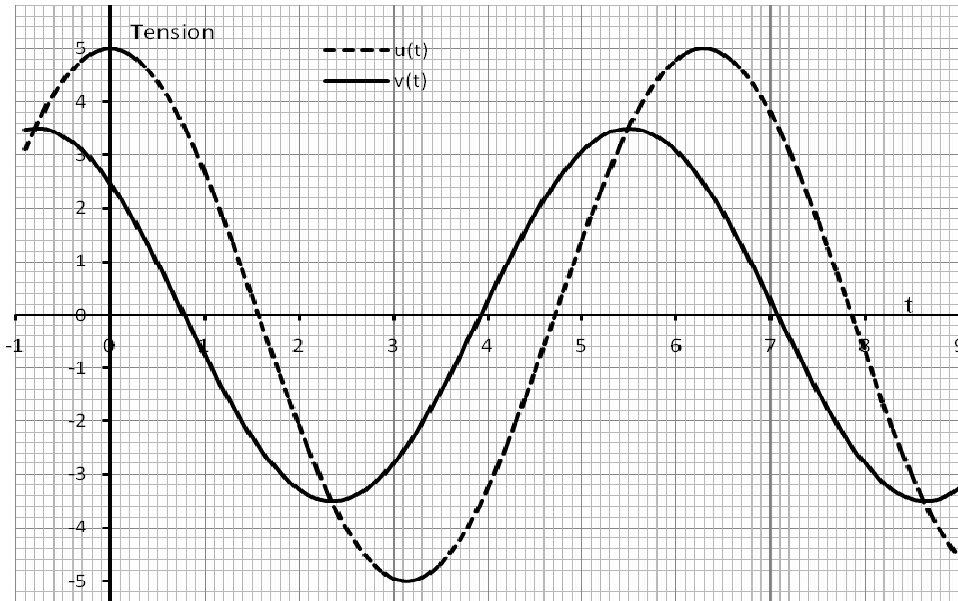
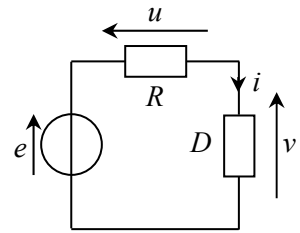
6. En déduire la valeur numérique de l'inductance  $L$ .

*D'après CCINP*

### □ Exercice 6.6. Dipôle inconnu \*

Dans le montage suivant, le GBF délivre une tension  $e(t)$  sinusoïdale de pulsation  $\omega$ ,  $R$  est une résistance et  $D$  un dipôle inconnu. On note  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et  $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$  les tensions aux bornes respectivement de  $R$  et  $D$ .

On visualise à l'oscilloscope  $v(t)$ ,  $u(t)$  et on obtient le graphe suivant.



L'unité de l'axe des temps est  $10^{-2}$  s et celle de l'axe des tensions est 1 V. On utilise ces résultats graphiques pour déterminer les caractéristiques de  $D$ , sachant que  $R = 100 \Omega$ .

1. Déterminer  $V_m$ ,  $U_m$  ainsi que la pulsation  $\omega$  des signaux utilisés.
2. La tension  $v$  est-elle en avance ou en retard sur la tension  $u$  ? En déduire le signe de  $\varphi$ . Déterminer la valeur de  $\varphi$  à partir du graphe.
3. On note  $\underline{Z} = X + jY$  l'impédance du dipôle  $D$ .
  - a) Déterminer à partir des résultats précédents les valeurs de  $X$  et  $Y$ .
  - b) Par quel dipôle (condensateur, bobine...) peut-on modéliser  $D$  ? Donner ses caractéristiques.

### □ Exercice 6.7. Quartz piézoélectrique \*\*

Un quartz piézoélectrique, destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge, est modélisé par un dipôle  $AB$  composé de deux branches en parallèle : dans l'une se trouve une bobine d'inductance  $L$ , en série avec un condensateur de capacité  $C$  ; dans l'autre, un condensateur de capacité  $C_0$ . On posera

$$\frac{C}{C_0} = a, \text{ et on gardera les variables } L, C_0, \omega \text{ et } a.$$



1. Le dipôle  $AB$  étant alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , calculer son impédance complexe  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}$ .
2. Calculer son module  $|\underline{Z}| = Z$ .
3. Déterminer son argument  $\varphi$  (sans chercher à déterminer son signe).
4. On étudie maintenant en fonction de la pulsation l'impédance  $Z$ ; pour cela, on appellera  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , les valeurs finies non nulles de la pulsation pour lesquelles  $Z$  est respectivement nulle et infinie. Donner  $Z = f(C_0, \omega, \omega_1, \omega_2)$ .
5. Donner l'allure du graphe  $Z(\omega)$ . On précisera tout particulièrement les limites de  $Z$  quand  $\omega$  tend vers zéro ou l'infini.
6. Quel est le comportement électrique simple de  $AB$  pour  $\omega = \omega_1$  et  $\omega = \omega_2$  ?

D'après CCINP

### □ Exercice 6.8. Antirésonance en tension d'un $RLC$ série \*

On considère un dipôle  $RLC$  série, dont l'impédance est notée  $\underline{Z}$ , parcouru par le courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et on appelle  $u(t)$  la tension aux bornes de l'ensemble en régime sinusoïdal.

1. a) Déterminer l'expression de  $u(t)$ .  
b) Représenter les variations de son amplitude par rapport à celle du courant ( $U_m/I_m$ ) et de son déphasage par rapport à  $i(t)$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .
2. Déterminer la pulsation  $\omega_0$  pour laquelle  $|\underline{Z}|$  est minimum. Déterminer les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  telles que  $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = \sqrt{2} |\underline{Z}(\omega_0)|$ . En déduire  $Q = \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|}$ .

## ■ Utilisation des lois des circuits

### □ Exercice 6.9. Branches en parallèle \* \*

Un générateur de tension idéal de FÉM sinusoïdale

$$e(t) = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

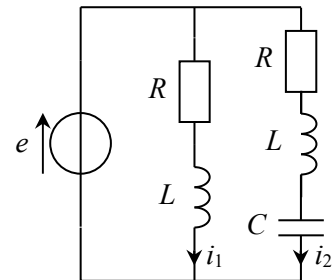
en parallèle.

1. Déterminer les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  sous la forme

$$i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1), \quad i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

2. Quelles conditions doivent satisfaire  $L$ ,  $C$  et  $\omega$  pour que les déphasages respectifs  $\psi$  et  $\psi'$  des courants  $i_1$  et  $i_2$  avec la tension  $e$  soient opposés ?
3. Quelles conditions doivent satisfaire  $L, C$  et  $\omega$  pour que le déphasage entre  $i_1$  et  $i_2$  soit égal à  $\frac{\pi}{2}$  ? On donne :  $\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}$ .

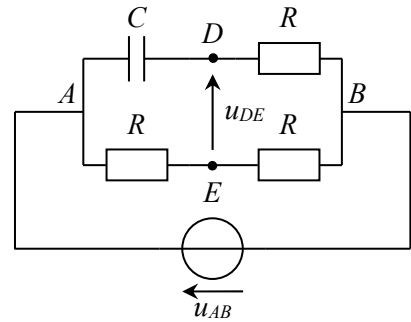
4. Les deux dernières conditions étant respectées, donner l'expression simplifiée des intensités  $i_1$  et  $i_2$  en fonction de  $R$ .



□ **Exercice 6.10. Tensions en quadrature**

On impose aux bornes du dipôle  $AB$  la tension  $u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega t)$ . En régime permanent, la tension  $u_{DE}$  est alors de la forme  $u_{DE}(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

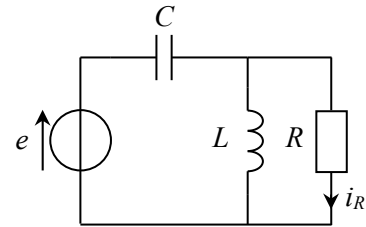
1. Déterminer l'expression de  $V_m$  et de  $\varphi$  en fonction de  $R$ ,  $C$ ,  $\omega$  et  $U_m$ .
2. Pour quelle valeur de  $\omega$  les tensions  $u_{AB}$  et  $u_{DE}$  sont-elles en quadrature de phase ?



□ **Exercice 6.11. Équation différentielle et régime sinusoïdal forcé\***

On considère le circuit ci-contre dans lequel le générateur impose la tension  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

1. Déterminer directement l'équation différentielle vérifiée par  $i_R$  en utilisant loi des mailles et loi des nœuds.
2. Déterminer la solution de cette équation en régime permanent, en utilisant la méthode complexe. Préciser les expressions de l'amplitude  $I_{Rm}$  et de la phase  $\varphi$  de  $i_R$ .  
Pour quelle valeur de la pulsation  $\omega$  est-elle indépendante de  $R$  ? Que valent alors  $I_{Rm}$  et  $\varphi$  ?
3. Retrouver ce même résultat en utilisant les équivalences Thévenin-Norton en complexes.



□ **Exercice 6.12. Une étourderie de Toto\***  
Résolution de problème

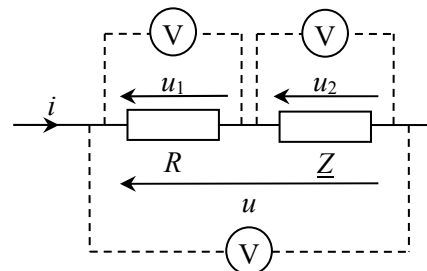
Une source de tension sinusoïdale  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  alimente trois dipôles  $R$ ,  $L$  et  $C$  montés en parallèle. Toto a relevé pendant le TP les valeurs efficaces  $I_R = 25$  mA dans la résistance,  $I_C = 33$  mA dans le condensateur, et pour le générateur  $I = 64$  mA, mais il a oublié de relever la valeur efficace du courant qui traverse la bobine. Le soir en rédigeant son compte-rendu, il s'aperçoit de sa boulette et téléphone à son ami Lulu. Peut-il l'aider ?

□ **Exercice 6.13. Méthode des trois voltmètres\*\***

On cherche à déterminer les caractéristiques d'un dipôle inconnu, d'impédance notée  $\underline{Z} = A + jB = Z e^{j\varphi}$ .

Pour cela, on place une résistance  $R$  (de valeur connue) en série avec lui et on dispose trois voltmètres de la façon ci-contre.

1. Les voltmètres sont supposés idéaux : que peut-on en déduire ? Quelle est exactement la grandeur mesurée par un voltmètre en mode AC (qui peut être noté aussi  $\sim$ ) ?



2. Écrire trois relations concernant les grandeurs  $\underline{U}$ ,  $\underline{U}_1$ ,  $\underline{U}_2$ ,  $\underline{I}$  (amplitudes complexes),  $R$  et  $\underline{Z}$ .  
En déduire  $U_m^2$  en fonction de  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$  (amplitudes réelles) et  $\cos \varphi$  ; écrire la relation analogue avec les grandeurs  $U$ ,  $U_1$  et  $U_2$  indiquées par les voltmètres.
3. Retrouver la formule précédente à l'aide de la représentation de Fresnel.
4. Déterminer alors, en fonction de  $R$  et des indications  $U$ ,  $U_1$  et  $U_2$  des trois voltmètres, le module  $Z$  puis les parties réelle  $A$  et imaginaire  $B$  de l'impédance du dipôle. Quelle indétermination subsiste, et comment la lever ?

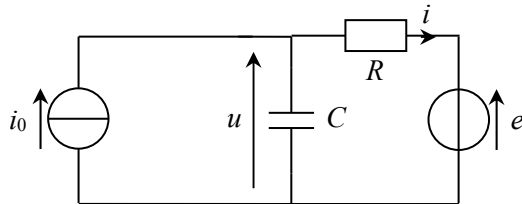
□ **Exercice 6.14. Circuit à deux générateurs\*\***

Toto n'écoute pas les consignes lors d'un TP et réalise le montage suivant avec deux générateurs ! Pour lui apprendre à être plus attentif et lui montrer qu'il s'agit d'un montage plus complexe, l'enseignant lui demande de calculer le courant  $i(t)$  qui circule dans la résistance. Bien entendu, le pauvre Toto ne s'en sort pas et travaille toujours dessus... Pouvez-vous lui venir en aide ?

Les données relevées par Toto sont :

$$e(t) = E \cos(\omega t) ;$$

$$i_0(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi), \text{ avec } \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right].$$



1. Établir l'expression complexe pour la source de courant sachant que l'on associe au générateur de tension la fonction complexe  $\underline{e}(t) = E e^{j\omega t}$ .
2. Exprimer l'intensité complexe  $\underline{i}$  en fonction de  $\underline{i}_0$ ,  $\underline{e}$ ,  $R$ ,  $C$  et  $\omega$ .
3. En déduire l'intensité réelle  $i(t)$ .

□ **Pour vous aider à démarrer**

*Exercice 6.4.* Pour que deux dipôles soient équivalents, il faut que leurs impédances (ou leurs admittances) soient identiques.

*Exercice 6.6.* À la question 3, il faut se servir du module et de l'argument de  $\underline{Z}$ .

*Exercice 6.9.* Écrire d'abord les déphasages définis dans l'énoncé, puis les relier pour résoudre les questions.

*Exercice 6.10.* Il faut décomposer la tension  $\underline{U}_{DE}$ .

*Exercice 6.12.* Il faut appliquer la loi des nœuds, puis on peut utiliser un diagramme de Fresnel en prenant la tension comme référence des phases.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai

1. Attention, ceci n'est vrai qu'en régime permanent, c'est-à-dire après la fin du régime transitoire (mais celui-ci, très bref, n'est jamais observé en pratique).

3. Les lois de Kirchhoff sont inchangées ; celles concernant les dipôles linéaires sont valables mais uniquement avec les grandeurs complexes, et non avec les grandeurs réelles.

4. L'impédance du condensateur s'écrit  $1/jC\omega$ , donc lorsque la pulsation tend vers zéro, son module tend vers l'infini : le condensateur se comporte alors comme un interrupteur ouvert.

7. L'impédance d'une bobine s'écrit  $jL\omega$ , donc lorsque la pulsation tend vers l'infini, son module tend aussi vers l'infini : la bobine se comporte alors comme un interrupteur ouvert.

9. Ces deux grandeurs ne dépendent que des paramètres du système et de l'excitation.

### □ Les erreurs classiques

- Lorsque le nombre complexe  $j$  passe du numérateur au dénominateur et inversement, il ne faut pas oublier de changer le signe :  $j = \frac{1}{-j}$  ou  $\frac{1}{j} = -j$ .
- Lors de l'écriture de l'argument d'un nombre complexe avec la fonction arctangente, il ne faut pas oublier que si la partie réelle du nombre complexe est négative, il est nécessaire d'ajouter (ou d'enlever)  $\pi$ .
- Ne pas mélanger les réels et les complexes ! Dans une équation complexe, il ne doit plus y avoir de cosinus, il est transformé en exponentielle complexe.
- Avant tout calcul, il faut regarder s'il est plus simple de travailler avec les impédances  $\underline{Z}$  ou avec les admittances  $\underline{Y}$ . Sinon les équations peuvent devenir énormes...
- Dans les calculs, ne pas garder des fractions à étages multiples, mais éliminer les fractions le plus tôt possible, notamment en faisant des produits en croix.
- Ne pas multiplier un dénominateur par la quantité complexe conjuguée si on cherche ensuite le module et l'argument de la fraction. On ne le fera que si on doit séparer les parties réelle et imaginaire de la fraction (ce qui est assez rare).



# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 6.1

1.  $u(t) = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  est la partie réelle de  $\underline{u}(t) = 3e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\omega t}$  donc  $\underline{U} = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$ . Son

module est  $\underline{U}_m = 3$ , son argument  $\varphi_u = \frac{\pi}{3}$ .

2.  $s(t) = -2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$  est la partie réelle de  $\underline{s}(t) = -2e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)} = -2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega t}$  donc

$\underline{S} = -2e^{-j\frac{\pi}{4}}$ . Pour faire apparaître uniquement le module, on doit avoir un facteur positif et non négatif devant l'exponentielle. On utilise le fait que  $e^{j\pi} = -1$  : ainsi  $-e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\pi} \times e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{3\pi}{4}}$ ,

donc on peut encore écrire  $\underline{S} = 2e^{j\frac{3\pi}{4}}$ , d'où  $\underline{S}_m = 2$  et  $\varphi_s = \frac{3\pi}{4}$ .

3. Pour pouvoir considérer  $i(t) = 4 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$  comme partie réelle d'une fonction de la forme  $\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$ , on commence par le mettre sous la forme d'un cosinus. Sachant que

$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ , on peut écrire  $i(t) = 4 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}\right) = 4 \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{8}\right)$ .

Alors  $\underline{I} = 4e^{-j\frac{3\pi}{8}}$ , d'où  $\underline{I}_m = 4$  et  $\varphi_i = -\frac{3\pi}{8}$ .

## Exercice 6.2

1. On utilise la loi des mailles et la loi d'Ohm complexes :  $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_L = (R + jL\omega)\underline{i}$ .

On en déduit  $\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R + jL\omega}$  soit  $\underline{i}(t) = \frac{E e^{j(\omega t - \pi/3)}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} e^{j \arctan(L\omega/R)}}$  en séparant modules et

arguments, et finalement  $\underline{i}(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} e^{j(\omega t - \pi/3 - \arctan(L\omega/R))}$ .

On obtient en prenant la partie réelle :  $i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3} - \arctan\left[\frac{L\omega}{R}\right]\right)$ .

⇒ Méthode 6.3

2. On utilise encore la loi des mailles et la loi d'Ohm complexes :  $\underline{e} = \underline{u}_R + \underline{u}_C = \left( R + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}_2$ .

$$\text{On en déduit } \underline{i}_2(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R - j \frac{1}{C\omega}} = \frac{E e^{j(\omega t - \pi/3)}}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2} e^{-j \arctan(1/RC\omega)}}$$

$$\text{soit } \underline{i}_2(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} e^{j(\omega t - \pi/3 + \arctan(1/RC\omega))}.$$

$$\text{On obtient finalement : } \boxed{\underline{i}_2(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} + \arctan \left[ \frac{1}{RC\omega} \right] \right)}.$$

La formule du diviseur de tension donne :

$$\underline{u}_C(t) = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e}(t) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j \arctan(RC\omega)} E e^{j(\omega t - \pi/3)}$$

$$\text{soit } \underline{u}_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\omega t - \pi/3 - \arctan(RC\omega))}.$$

$$\text{Partie réelle : } \boxed{u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} - \arctan(RC\omega) \right)}.$$

⇒ Méthode 6.3

3. Le passage d'un cosinus à un sinus correspond à un simple déphasage de  $\frac{\pi}{2}$ , puisque

$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$ . Si  $e(t)$  est déphasée de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la question précédente, il en sera

de même pour toutes les tensions. Ainsi dans les résultats précédents, il suffit de remplacer les

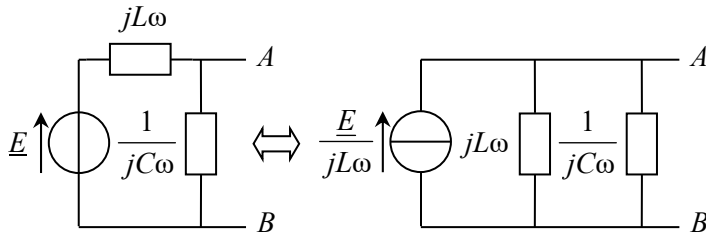
cosinus par des sinus :  $\boxed{\underline{i}_2(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} + \arctan \left[ \frac{1}{RC\omega} \right] \right)}$  et

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{3} - \arctan(RC\omega) \right)}.$$

*✍ On peut considérer que ces fonctions réelles sont ici les parties imaginaires des fonctions complexes associées, mais il est inhabituel de procéder de cette manière en physique.*

### Exercice 6.3

Il suffit de passer toutes les grandeurs en écriture complexe (FÉM et impédances) et d'utiliser des équivalences entre Thévenin et Norton.



On calcule l'admittance équivalente aux deux dipôles en parallèle,  $\underline{Y}_{\text{éq}} = j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$ .

Donc  $\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{jL\omega}{1-LC\omega^2}$ .

Le modèle de Thévenin comporte alors une source de tension  $\frac{E}{1-LC\omega^2}$  en série avec  $\underline{Z}_{\text{éq}}$ .

### Exercice 6.4

1. Pour que deux dipôles soient équivalents, il faut que leurs impédances soient identiques (donc leurs admittances aussi). Pour le dipôle série, on a  $\underline{Z} = R + jL\omega$  et pour le dipôle avec les éléments en parallèle  $\underline{Y}' = \frac{1}{R'} + \frac{1}{jL'\omega} = \frac{1}{R'} - j\frac{1}{L'\omega}$ .

*Comme nous voulons exprimer  $R'$  en fonction d'autres données, il apparaît qu'il sera plus rapide de travailler avec les admittances où  $R'$  se trouve déjà isolé alors que si on travaille avec les impédances,  $R'$  se trouvera « mélangé » avec  $L'$  lors de la mise au même dénominateur.*

On écrit  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{R - jL\omega}{R^2 + (L\omega)^2}$ . La condition  $\underline{Y}' = \underline{Y}$  permet de déterminer, en

identifiant les parties réelles et imaginaires,  $R' = \frac{R^2 + (L\omega)^2}{R}$  et  $L' = \frac{R^2 + (L\omega)^2}{L\omega^2}$ .

2. D'après le résultat précédent, on peut écrire  $\frac{L'\omega}{R'} = \frac{R}{L\omega}$  quelle que soit  $\omega$ , soit encore

$\frac{L'\omega^2}{R'} = \frac{R}{L}$ . On veut  $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$  que l'on remplace dans le résultat précédent :  $\frac{L\omega^2}{R} = \frac{R}{L}$ , ce qui

permet d'obtenir  $\omega^2 = \left(\frac{R}{L}\right)^2$  soit  $\omega = \frac{R}{L}$ .

*La pulsation est toujours positive.*

### Exercice 6.5

1. On complète le tableau à l'aide des grandeurs mesurées sur les courbes.

Grandeur	$T$ (s)	$\omega$ (rad/s)	$I_m$ (A)	$U_m$ (V)	$Z_{AB}$ ( $\Omega$ )
Valeur numérique	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$\frac{2\pi}{T} = 1,6 \cdot 10^3$	$\frac{u_{I\max}}{R} = 0,20$	$u_{II\max} = 8,0$	$\frac{U_m}{I_m} = 40$

2. La tension II est en avance sur la tension I car elle passe en premier par son maximum.

3. Le déphasage entre la tension et le courant est  $\varphi_u - \varphi_i = 0 - (-\varphi) = \varphi$ . D'après les données

des courbes, on peut en déduire le module du déphasage entre les deux : 
$$\begin{cases} 4 \text{ ms} \leftrightarrow 2\pi \\ \frac{1}{2} \text{ ms} \leftrightarrow |\varphi| = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Or d'après la question 2, on sait que la tension est en avance sur le courant, donc on peut

préciser le signe :  $\varphi_u - \varphi_i = \varphi > 0$ . Le déphasage vaut donc  $\boxed{\varphi = +\frac{\pi}{4}}$ .

*✎ La tension aux bornes d'une résistance est une image du courant. La voie I est en fait le courant à un facteur R près.*

4. Nous allons déterminer une valeur de R avec nos mesures et voir si elle est compatible avec les données de l'énoncé.

On sait que  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ , soit  $\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \varphi_u - \varphi_i = \varphi$  et  $|\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = Z_{AB} = Z$ . On peut

toujours écrire  $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ . On sait aussi que la résistance du dipôle AB est  $R' = \text{Re}(\underline{Z}) = Z \cos \varphi$ , donc avec nos mesures on trouve  $R' = 28,3 \Omega$ .

Avec les données de l'énoncé, si on considère la bobine comme idéale,  $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ .

La résistance du dipôle AB devrait être de 20 Ω si la bobine était parfaite. Cette valeur ne correspond pas avec la mesure donc on en déduit que la bobine n'est pas idéale.

5. Si on tient compte de la résistance de la bobine, on a  $\underline{Z} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ , on en déduit que la résistance du dipôle AB vaut  $R' = \text{Re}(\underline{Z}) = R + r$ , d'où on tire  $\boxed{r = 8,3 \Omega}$ .

6.  $\underline{Z} = R + r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = Ze^{j\varphi}$  donc  $\text{Im}(\underline{Z}) = L\omega - \frac{1}{C\omega} = Z \sin \varphi$ .

On en déduit  $\boxed{L = \frac{Z \sin \varphi}{\omega} + \frac{1}{C\omega^2} = 59 \text{ mH}}$ .

### Exercice 6.6

1. On lit graphiquement  $\boxed{V_m = 3,5 \text{ V}}$ ,  $\boxed{U_m = 5 \text{ V}}$ .

La période des signaux vaut  $T = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ , d'où la pulsation  $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$ .

2. La tension  $v$  est en avance sur la tension  $u$ . En effet, à  $t = 0$ , la tension  $u$  est à son maximum, alors que la tension  $v$  est déjà passée par son maximum et redescend. Le déphasage de  $v$  par rapport à  $u$  est donc positif  $\varphi_{v/u} > 0$ . Or  $\varphi_{v/u} = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{U}) = \varphi - 0$ , on en déduit que  $\boxed{\varphi = \arg(\underline{V}) > 0}$ . On mesure un écart  $\Delta t = 0,75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$  pour le passage par zéro des deux courbes. On en déduit le déphasage par un produit en croix (une période en temps correspond à un angle de  $2\pi$ ) :

$\boxed{\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = 0,75 \text{ rad} \approx \frac{\pi}{4}}$ .

**3. a)** On se concentre sur l'équation élémentaire pour le dipôle  $D$  :  $\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$ . Pour déterminer l'impédance, il faut trouver son module et son argument.

– Le module est  $Z = \left| \frac{\underline{V}}{\underline{I}} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Or  $\underline{I} = \frac{U}{R}$ , d'où  $Z = \left| \frac{\underline{V}}{\underline{U}/R} \right| = R \left| \frac{\underline{V}}{\underline{U}} \right| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

Ceci donne la première équation  $R^2 \frac{V_m^2}{U_m^2} = X^2 + Y^2 = 4900 \Omega^2$ .

– L'argument  $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{V}) - \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{V}) - \arg\left(\frac{U}{R}\right) = \varphi - 0 = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$ .

La résolution de ce système permet d'obtenir  $X = 51 \Omega$  et  $Y = 48 \Omega$ .

**b)** Comme la partie imaginaire de l'impédance est positive  $Y > 0$ , on a affaire à un dipôle inductif constitué d'une résistance  $r = 51 \Omega$ , en série avec une inductance telle que  $L\omega = 48 \Omega$ , soit  $L = 0,48 \text{ H}$ .

*✍ Il est impossible de donner plus de deux chiffres significatifs sur cet exercice car les données de départ sont lues sur un graphe.*

### Exercice 6.7

**1.** L'impédance de la branche  $LC$  série est  $j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ . Pour l'ensemble, on calcule

$$\text{l'admittance } \underline{Y} = jC_0\omega + \frac{1}{j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = j\left(C_0\omega - \frac{1}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}\right) = j\left(\frac{C_0\omega(LC_0\omega^2 - 1) - C\omega}{LC_0\omega^2 - 1}\right).$$

On obtient pour l'impédance, en remplaçant  $C = aC_0$  :  $\underline{Z} = j\frac{1 - aLC_0\omega^2}{aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1+a)}$ .

**2.** C'est un imaginaire pur, de module  $Z = |\underline{Z}| = \frac{|1 - aLC_0\omega^2|}{|aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1+a)|}$ .

**3.** L'argument de cet imaginaire pur est  $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \pm \frac{\pi}{2}$ , suivant la valeur de la pulsation  $\omega$ .

**4.** D'après les définitions de l'énoncé :  $1 - aLC_0\omega_1^2 = 0$  soit  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{aLC_0}}$  (1), et

$$aLC_0^2\omega_2^3 - C_0\omega_2(1+a) = 0, \text{ soit } \omega_2 = \sqrt{\frac{1+a}{aLC_0}} \text{ (2).}$$

*✍ On note que  $\omega_1 < \omega_2$ , car les dénominateurs sont identiques et le numérateur de  $\omega_2$  est plus grand que l'unité car  $a$  est nécessairement positif.*

On peut réécrire avec ces notations le numérateur  $1 - aLC_0\omega^2 = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$ . Pour le dénominateur

on utilise  $aLC_0 = \frac{1}{\omega_1^2}$  (1) et  $1 + a = aLC_0\omega_2^2$  (2) soit aussi  $1 + a = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$  (2). Ce qui donne

$$aLC_0^2\omega^3 - C_0\omega(1 + a) = C_0\frac{\omega^3}{\omega_1^2} - C_0\omega\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = C_0\omega\left(\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2}\right).$$

On obtient donc :

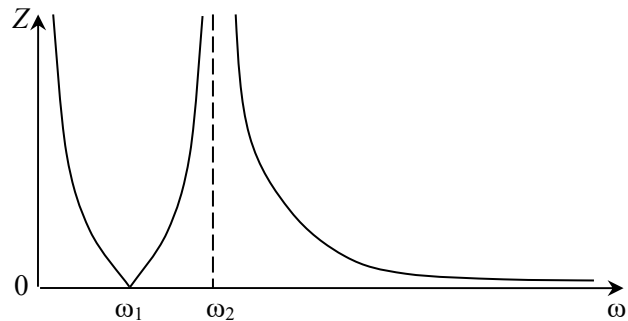
$$Z = \frac{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right|}{\left|C_0\omega\left(\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2}\right)\right|} = \frac{|\omega_1^2 - \omega^2|}{C_0\omega|\omega^2 - \omega_2^2|}.$$

5. On précise les limites demandées dans l'énoncé  $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z = +\infty$  et

$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z = 0$ . On peut aussi définir

$Z(\omega_1) = 0$  et  $\lim_{\omega \rightarrow \omega_2} Z = +\infty$ . On en

déduit la représentation ci-contre.



6. Lorsque  $\omega = \omega_1$ , le dipôle  $AB$  a une impédance nulle, il se comporte comme un fil, et lorsque  $\omega = \omega_2$ , son impédance est infinie, il se comporte comme un interrupteur ouvert.

### Exercice 6.8

1. a) – Résolution à l'aide de la méthode complexe

L'impédance du dipôle  $RLC$  série est donnée par la somme des impédances, soit

$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ . La loi d'Ohm complexe permet d'obtenir  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$  avec  $\underline{I} = I_m$ , soit

$$\underline{U} = \left[ R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \right] I_m.$$

On en déduit l'amplitude  $U_m = |\underline{U}| = I_m \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  et l'argument

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) + 0 \text{ soit } \varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right).$$

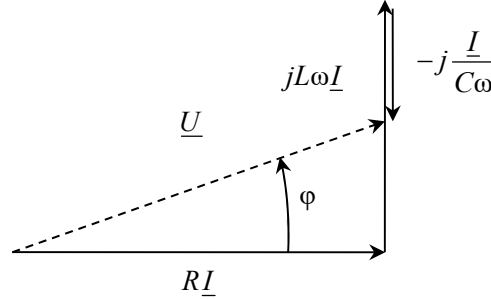
Finalement :  $u(t) = \text{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

⇒ Méthode 6.3

– Résolution avec la représentation de Fresnel

Comme dans la méthode précédente, on obtient  $\underline{U} = \left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] \underline{I}$ , soit

$\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I}$ . La représentation de Fresnel donne en prenant le courant  $\underline{I}$  comme référence de représentation :



$\underline{U}$  étant l'hypoténuse du triangle rectangle, on en déduit graphiquement

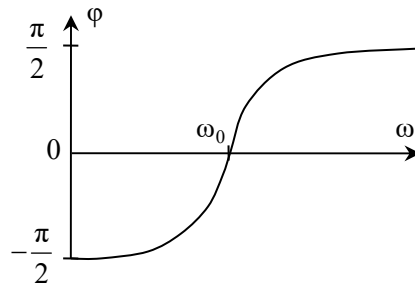
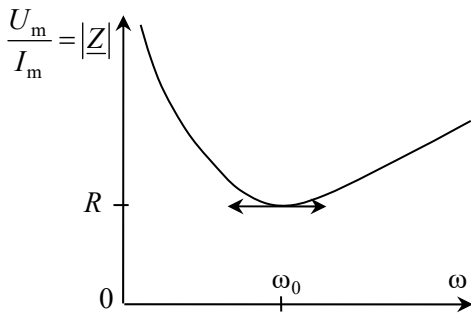
$$U_m = |\underline{U}| = I_m \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \quad \text{et l'avance de phase de la tension } \varphi = \arctan \left( \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right).$$

Finalement :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ . Comme le courant qui sert de référence est un cosinus, la tension s'exprime alors elle aussi avec un cosinus.

⇒ Méthode 6.4

b)  $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$ . Pour  $\omega = \omega_0$ ,  $|\underline{Z}| = R$ . Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| \approx \frac{1}{C\omega}$ . Et

pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{U_m}{I_m} = |\underline{Z}| \approx L\omega$ .



Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} \approx -j\frac{1}{C\omega}I_m$ , d'où  $\varphi = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I}) = \arg(\underline{U}) \approx -\frac{\pi}{2}$ . Pour  $\omega = \omega_0$ ,

$\varphi = \arg(RI_m) = 0$ . Et pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\underline{U} \approx jL\omega I_m$ , d'où  $\varphi = \arg(\underline{U}) \approx \frac{\pi}{2}$ .

⇒ Méthode 6.5

2. Il est évident que  $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  (qui est composé sous la racine carrée de deux termes positifs) est minimum si le terme variable  $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$  s'annule. Ceci se produit pour une pulsation  $\omega_0$  telle que  $L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0$ , soit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Dans ces conditions, le module de l'impédance est minimum et l'on a  $|\underline{Z}| = R$ . L'amplitude de la tension est alors aussi minimum et vaut  $U_m = RI_m$  : on peut alors parler d'antirésonance.

*On parle de résonance pour une valeur maximale de grandeur. En fait, c'est généralement la tension imposée au circuit qui a une amplitude fixe. Dans ces conditions, si le module de l'impédance est minimum, alors le courant est maximum et l'on parle de résonance en courant.*

On cherche  $|\underline{Z}(\omega_1)| = |\underline{Z}(\omega_2)| = \sqrt{2}|\underline{Z}(\omega_0)|$ , soit  $\sqrt{R^2 + \left(L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i}\right)^2} = \sqrt{2}R = \sqrt{2R^2}$ . On élève l'expression au carré, ce qui permet d'écrire  $R^2 = \left(L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i}\right)^2$  soit  $L\omega_i - \frac{1}{C\omega_i} = \pm R$ .

*La résistance est bien sûr positive, mais l'autre membre peut être positif ou négatif. Il est plus pratique de mettre le signe moins devant la résistance.*

On peut réécrire cette double équation sous la forme  $LC\omega_i^2 \pm RC\omega_i^2 - 1 = 0$ , soit  $\omega_i^2 \pm \frac{R}{L}\omega_i^2 - \frac{1}{LC} = 0$ . Le discriminant est  $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}$ , ce qui donne au total quatre solutions possibles :  $\omega_i = \pm \frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ . Or une pulsation est toujours une grandeur positive, on

en déduit comme  $\sqrt{\Delta} > \frac{R}{2L}$ , les deux valeurs physiquement possibles  $\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$  et  $\omega_2 = +\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ .  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} > 0$ , d'où on déduit  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

**Exercice 6.9**

1. L'écriture de la loi des mailles en écriture complexe avec les équations élémentaires des dipôles donne  $\underline{e} = (R + jL\omega)\underline{i}_1$ , soit avec les amplitudes complexes  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R + jL\omega}$ , avec

$\underline{E} = E_m e^{j\pi/4}$ . On en déduit  $i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$  avec  $I_{1m} = |\underline{I}_1| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$  et



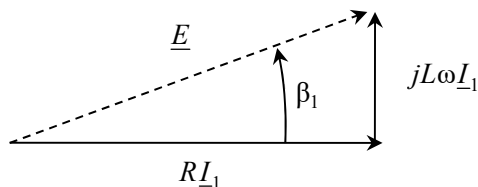
$$\varphi_1 = \arg(I_1) = \arg(\underline{E}) - \arg(R + jL\omega) = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right). \quad \text{De la même manière :}$$

$$I_2 = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}, \text{ d'où } I_{2m} = |I_2| = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \text{ et } \varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$$

qui s'insèrent dans l'expression  $i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ .

⇒ Méthode 6.3

En utilisant la représentation de Fresnel, on a d'après la loi des mailles  $\underline{E} = RI_1 + jL\omega I_1$ . On choisit le courant comme référence.



Dans le triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse donne  $E_m = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} I_{1m}$ , soit

$$I_{1m} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}, \text{ la tension est en avance de } \beta_1 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) > 0 \text{ sur le courant. Comme}$$

$$e(t) = E_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right), \text{ on en déduit } i_1(t) = I_{1m} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta_1\right).$$

⇒ Méthode 6.4

**2.** L'énoncé définit deux angles :  $\psi = \arg(I_1) - \arg(\underline{E}) = \varphi_1 - \frac{\pi}{4} = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$  et

$\psi' = \arg(I_2) - \arg(\underline{E}) = \varphi_2 - \frac{\pi}{4} = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$ . On veut  $\psi = -\psi'$ , ce qui se traduit par

$$\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}\right). \text{ Les angles appartenant tous deux à}$$

l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  (parties réelles positives des nombres complexes), on en déduit qu'ils sont

$$\text{égaux, soit } \frac{L\omega}{R} = \frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R}, \text{ donc } 2L\omega = \frac{1}{C\omega} \text{ que l'on peut écrire } \boxed{2LC\omega^2 = 1}.$$

**3.** On veut  $\arg(I_1) - \arg(I_2) = \pm \frac{\pi}{2}$ , soit  $\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)\right) = \pm \frac{\pi}{2}$ .

On en déduit  $-\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) + \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \alpha_2 - \alpha_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ , avec  $\alpha_1 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$  et

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right).$$

D'après la formule de l'énoncé,  $\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \tan\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \infty$ .

On en déduit donc  $1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = 0$ , soit  $\tan \alpha_1 = \frac{-1}{\tan \alpha_2}$ , ce qui s'écrit en remplaçant par les

valeurs des composants  $\frac{L\omega}{R} = -\frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$ , donc  $\boxed{R^2 + (L\omega)^2 - \frac{L}{C} = 0}$ .

4. On a établi  $\begin{cases} R^2 + (L\omega)^2 - \frac{L}{C} = 0 & (1) \\ 2LC\omega^2 = 1 & (2) \end{cases}$  L'équation (2) s'écrit aussi  $(L\omega)^2 = \frac{L}{2C}$  que l'on

remplace dans l'équation (1) qui devient  $R^2 + (L\omega)^2 - 2(L\omega)^2 = 0$ , soit  $R = L\omega$ .

D'après ce qui a déjà été écrit pour la question 1,  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{R + jL\omega} = \frac{\underline{E}}{R(1 + j)}$ , soit

$\boxed{I_{1m} = |\underline{I}_1| = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}}$  et  $\boxed{\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arctan(1) = 0}$ , éléments de la fonction  $i_1(t) = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ .

On écrit aussi  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$  avec l'équation (2) qui peut aussi se formuler  $2L\omega = \frac{1}{C\omega}$ .

Ceci donne  $\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R - jL\omega} = \frac{\underline{E}}{R(1 - j)}$ , soit  $\boxed{I_{2m} = |\underline{I}_2| = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}}$  et  $\boxed{\varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{2}}$ , éléments de la fonction  $i_2(t) = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ .

### Exercice 6.10

1. On décompose la tension  $\underline{U}_{DE} = \underline{U}_{DB} + \underline{U}_{BE}$ . On exprime ensuite chaque tension en remarquant que chaque branche constitue un diviseur de tension pour la tension  $\underline{U}_{AB}$  :

$\underline{U}_{DB} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{U}_{AB} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1} \underline{U}_{AB}$  et  $\underline{U}_{EB} = \frac{R}{R + R} \underline{U}_{AB} = \frac{1}{2} \underline{U}_{AB}$ . On calcule ensuite

$\underline{U}_{DE} = \underline{U}_{DB} - \underline{U}_{EB}$ , qui donne  $\underline{U}_{DE} = \frac{jRC\omega - 1}{2(jRC\omega + 1)} \underline{U}_{AB} = -\frac{1 - jRC\omega}{2(1 + jRC\omega)} \underline{U}_{AB}$ . On peut alors

calculer  $\boxed{V_m = |\underline{U}_{DE}| = \frac{1}{2} |\underline{U}_{AB}| = \frac{1}{2} U_m}$  et  $\varphi = \arg(\underline{U}_{DE}) = \pi + \arctan(-RC\omega) - \arctan(RC\omega)$  soit  $\boxed{\varphi = \pi - 2 \arctan(RC\omega)}$ .

⇒ Méthode 6.3

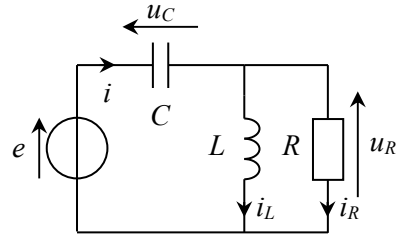
●\* Pour évaluer l'argument avec la fonction arctangente, les complexes doivent être écrits avec des parties réelles positives, soit  $\underline{U}_{DE} = -\frac{1 - jRC\omega}{2(1 + jRC\omega)} \underline{U}_{AB}$ . Le signe - devant la fraction entraîne l'ajout de  $\pi$  dans l'argument.

2. Pour que les tensions soient en quadrature, comme  $\arg(\underline{U}_{AB})=0$ , il suffit que  $\varphi = \pi - 2 \arctan(RC\omega) = \frac{\pi}{2}$ , ce qui correspond à  $\arctan(RC\omega) = \frac{\pi}{4}$ , donc  $RC\omega = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ . La

condition cherchée est donc :  $\omega = \frac{1}{RC}$ .

### Exercice 6.11

1. Pour déterminer l'équation différentielle, on commence par écrire les équations élémentaires sur les dipôles :  $u_R = Ri_R = L \frac{di_L}{dt}$  et  $i = C \frac{du_C}{dt}$ . Ensuite on écrit la loi des nœuds  $i = i_R + i_L$  et la loi des mailles  $e = u_C + u_R = u_C + Ri_R$ . Pour éliminer  $u_C$  on dérive l'équation :



$\frac{de}{dt} = \frac{du_C}{dt} + R \frac{di_R}{dt}$  puis on remplace  $i = C \frac{du_C}{dt}$  et on utilise la loi des nœuds, ce qui donne

$\frac{de}{dt} = \frac{i_R + i_L}{C} + R \frac{di_R}{dt}$ . On dérive une nouvelle fois pour pouvoir remplacer  $i_L$  et l'on obtient

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{di_R}{dt} + \frac{Ri_R}{LC} + R \frac{d^2i_R}{dt^2}, \text{ soit sous forme canonique } \frac{d^2i_R}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_R}{dt} + \frac{i_R}{LC} = \frac{1}{R} \frac{d^2e}{dt^2}.$$

2. La solution particulière de l'équation, donnant le régime permanent, a la même forme que le générateur et est donc sinusoïdale :  $i_R(t) = I_{Rm} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[\underline{I}_R e^{j\omega t}]$ . De même  $e(t) = \text{Re}[e(t)]$  avec  $e(t) = E_m e^{j\omega t}$ , d'amplitude complexe  $\underline{E} = E_m$ . On transforme l'équation différentielle en équation algébrique complexe :  $-\omega^2 \underline{I}_R + \frac{j\omega}{RC} \underline{I}_R + \frac{\underline{I}_R}{LC} = \frac{-\omega^2}{R} E_m$ , d'où on tire

immédiatement 
$$\underline{I}_R = \frac{\frac{-\omega^2}{R} E_m}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + \frac{j\omega}{RC}} = \frac{\frac{j\omega}{R} E_m}{j\left(-\frac{1}{\omega LC} + \omega\right) + \frac{1}{RC}}.$$

⇒ Méthode 6.1

L'amplitude réelle du courant  $i_R$  est le module : 
$$I_{Rm} = \frac{\frac{\omega^2}{R} E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}.$$

Pour la phase, on peut écrire  $\varphi = \arg(\underline{I}_R) = \pi - \arg\left(\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j \frac{\omega}{RC}\right).$

*La valeur de l'argument d'un nombre réel négatif est  $\pi$  ou  $-\pi$ , on peut choisir l'une des deux valeurs, cependant pour le reste des calculs il est alors impératif de donner la même valeur choisie précédemment pour tout nombre réel négatif.*

Mais l'expression du second terme, avec une arctangente, dépend du signe de la partie réelle et il faut alors distinguer deux cas. Il est beaucoup plus simple d'utiliser la seconde forme de  $\underline{I}_R$  (où on a divisé tous les termes par  $j\omega$ ), qui donne immédiatement :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right).$$

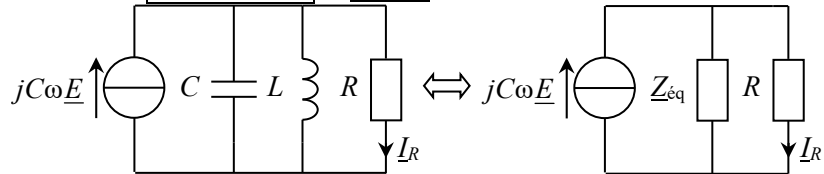
⇒ Méthode 6.3

Pour que le courant soit indépendant de  $R$ ,  $I_{Rm}$  et  $\varphi$  ne doivent plus dépendre de  $R$ . Pour cela, simplifions l'équation de l'amplitude complexe, on obtient  $\underline{I}_R = \frac{-\omega^2 E_m}{R\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + \frac{j\omega}{C}}$ . Il est

évident que si le terme réel du dénominateur est nul, alors le courant ne dépend plus de la résistance. Ceci se produit pour  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , soit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , ce qui donne

$$\underline{I}_R = jC\omega_0 E_m = j\sqrt{\frac{C}{L}} E_m. \text{ On a alors } I_{Rm} = \sqrt{\frac{C}{L}} E_m \text{ et } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

**3.** Les équivalences donnent le schéma ci-contre.



D'après le schéma précédent, on reconnaît un pont diviseur de courant  $\underline{I}_R = \frac{1/R}{\underline{Y}_{\text{eq}} + 1/R} jC\omega \underline{E}$ .

Pour que le courant traversant  $R$  soit indépendant de la valeur de  $R$ , il faut que  $\underline{Y}_{\text{eq}} = 0 = jC\omega_0 + \frac{1}{jL\omega_0}$ , ce qui revient à une source de courant parfaite alimentant la résistance

$$R. \text{ On en déduit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \underline{I}_R = jC\omega_0 E_m = j\sqrt{\frac{C}{L}} E_m.$$

### Exercice 6.12

La loi des nœuds donne (association parallèle)  $\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C + \underline{I}_L$ . Pour les différents dipôles, la

loi d'Ohm complexe s'écrit :  $\underline{I}_R = \frac{\underline{E}}{R}$ ,  $\underline{I}_C = jC\omega \underline{E}$  et  $\underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{jL\omega}$ . Donc

$\underline{I} = \underline{E} \left( \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right)$ . Le module au carré, divisé par 2, donne

$$I^2 = E^2 \left( \frac{1}{R^2} + \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2 \right), \text{ soit } I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2.$$

On en déduit  $(I_C - I_L)^2 = I^2 - I_R^2$ , d'où  $I_C - I_L = \pm \sqrt{I^2 - I_R^2}$ , soit  $I_L = I_C \pm \sqrt{I^2 - I_R^2}$ . On ne conserve que la valeur positive car une valeur efficace est forcément positive, soit  $I_L = I_C + \sqrt{I^2 - I_R^2}$ . AN  $I_L = 92 \text{ mA}$ .

*✎ La formule  $I^2 = I_R^2 + (I_C - I_L)^2$  peut être obtenue également en représentation de Fresnel (tracé des trois vecteurs puis théorème de Pythagore).*

### Exercice 6.13

1. Un voltmètre idéal a une résistance infinie : aucun courant ne le traverse. En mode AC, il donne la valeur efficace de la tension.

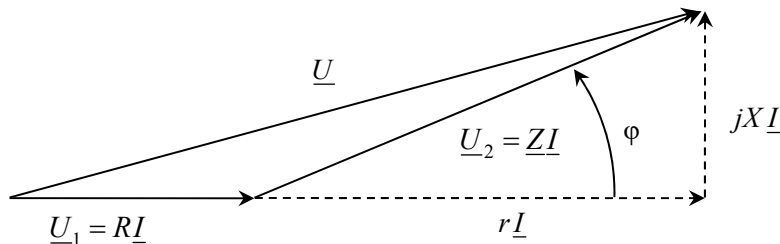
2.  $\underline{U}_1 = R\underline{I}$ ;  $\underline{U}_2 = Z\underline{I}$ ;  $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ . On calcule le carré du module :  $U_m^2 = \underline{U}\underline{U}^* = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)^* = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + \underline{U}_2\underline{U}_1^* + \underline{U}_1\underline{U}_2^* = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + \underline{Z}R\underline{I}_m^2 + R\underline{Z}^*\underline{I}_m^2$ .

On utilise  $\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2\text{Re}(\underline{Z}) = 2Z \cos \varphi$  :  $U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2RZ \cos \varphi I_m^2$

soit  $U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2} \cos \varphi$ . (Il s'agit en fait du théorème d'Al-Kashi dans le plan complexe.)

Les voltmètres indiquent des valeurs efficaces. On divise tout par 2 pour avoir des valeurs efficaces car  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ , soit  $U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi$ .

3. Comme il s'agit d'une association série, on écrit la loi des mailles  $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ , avec pour chaque dipôle  $\underline{U}_1 = R\underline{I}$  et  $\underline{U}_2 = Z\underline{I} = (r + jX)\underline{I}$ . On trace le diagramme de Fresnel en prenant le courant comme référence.



Avec la notation vectorielle, on a  $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ . La norme du  $U$  au carré s'écrit  $U^2 = \underline{U}\underline{U}^* = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)(\underline{U}_1 + \underline{U}_2)^* = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2\underline{U}_1 \cdot \underline{U}_2$  soit  $U_m^2 = U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2} \cos \varphi$ .

Les voltmètres indiquent des valeurs efficaces. On divise tout par 2 pour avoir des valeurs efficaces car  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ , soit  $U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi$ .

⇒ Méthode 6.4

4.  $\underline{U}_1 = R\underline{I}$  et  $\underline{U}_2 = Z\underline{I}$  donc avec les valeurs efficaces et le module  $Z$ :  $U_1 = RI$  et  $U_2 = ZI$ .

On en déduit  $Z = R \frac{U_2}{U_1}$ . De plus  $\underline{Z} = A + jB = Ze^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$  donc  $A = Z\cos\varphi$  et

$$B = Z\sin\varphi. \text{ D'après les calculs précédents : } \cos\varphi = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1U_2} \text{ d'où } A = R \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2}.$$

$$\text{Enfin } A^2 + B^2 = Z^2 \text{ donc } B = \pm\sqrt{Z^2 - A^2} \text{ soit } B = \pm R \sqrt{\frac{U_2^2}{U_1^2} - \left(\frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2}\right)^2}.$$

Il reste une incertitude sur le signe de  $B$ , donc sur la nature inductive (si  $B > 0$ ) ou capacitive (si  $B < 0$ ) du dipôle.

Pour la lever, il faut observer les signaux  $u_1$  et  $u_2$  à l'oscilloscope, et voir simplement celui qui est en avance par rapport à l'autre : si  $u_2$  est en avance,  $\varphi > 0$  donc  $\sin\varphi > 0$  et  $B > 0$ .

### Exercice 6.14

1. La difficulté pour l'intensité est qu'elle est exprimée avec un sinus, alors que la partie réelle des grandeurs complexes utilise un cosinus. On doit donc convertir le sinus en cosinus, ce qui correspond à un déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  :  $i_0(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) = I_0 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Alors  $i_0(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ . Or  $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$  donc l'expression peut se simplifier en  $i_0(t) = -j I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

2. La loi des nœuds donne :  $i_0 = i_c + i$ .

La loi des mailles  $\underline{u} = \underline{u}_R + \underline{e}$ .

Relations élémentaires sur les dipôles  $\underline{u}_R = R\underline{i}$  et

$$\underline{i}_c = jC\omega\underline{u}.$$

En combinant les quatre expressions, on obtient

$$\underline{i}_0 = jC\omega\underline{u} + \underline{i} = jC\omega(R\underline{i} + \underline{e}) + \underline{i}.$$

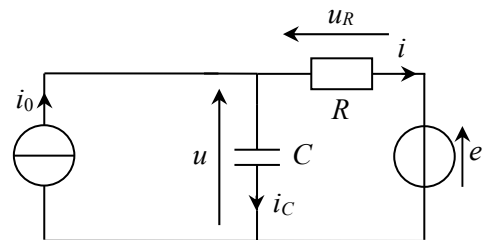
$$\text{Soit } \underline{i} = \frac{\underline{i}_0 - jC\omega\underline{e}}{1 + jRC\omega}.$$

*Il est possible d'obtenir le résultat par d'autres méthodes comme la transformation de schéma par exemple.*

3. On remplace les expressions des générateurs, soit :

$$\underline{i}(t) = \frac{-jI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} - jC\omega E e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega} = \frac{-jI_0 e^{j\varphi} - jC\omega E}{1 + jRC\omega} e^{j\omega t} = \frac{I_0 \sin\varphi - j(I_0 \cos\varphi + C\omega E)}{1 + jRC\omega} e^{j\omega t}.$$

Il y a un petit problème, car la partie réelle  $I_0 \sin\varphi$  peut changer de signe alors que la partie imaginaire a toujours le même signe : c'est l'inverse qui nous arrangerait pour déterminer



l'argument avec une arctangente. Nous allons donc permuter les deux et pour cela, nous multiplions par  $j$  en haut et en bas :  $\underline{i}(t) = \frac{j}{j} \underline{i}(t) = \frac{jI_0 \sin \varphi + (I_0 \cos \varphi + C\omega E)}{j(1 + jRC\omega)} e^{j\omega t}$ .

On en déduit alors :  $i(t) = \sqrt{\frac{(I_0 \sin \varphi)^2 + (I_0 \cos \varphi + C\omega E)^2}{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t + \psi)$  avec

$$\psi = \arctan\left(\frac{I_0 \sin \varphi}{I_0 \cos \varphi + C\omega E}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega).$$

⇒ Méthode 6.3

*✎ La fonction  $i(t)$  s'exprime avec un cosinus car on travaille, de façon habituelle, avec la partie réelle des équations complexes.*

# Filtrage linéaire

UN SCIENTIFIQUE



Tout au long de sa vie, l'ingénieur américain **Hendrik Wade Bode** (1905-1982) a su concevoir des théories en lien étroit avec les besoins de son pays. Durant la Seconde Guerre mondiale, il a mis au point des systèmes de contrôles antiaériens automatiques qui ont facilité l'avancée des armées alliées en Europe. Par la suite, il a fait partie du comité chargé de coordonner les différents organismes américains compétents pour permettre la conquête spatiale.

## ■ Un peu d'histoire

Au début du XIX<sup>e</sup> siècle, le mathématicien et physicien Joseph FOURIER étudie la diffusion de la chaleur dans un milieu continu. Il développe alors une théorie mathématique pour résoudre l'équation différentielle qu'il rencontre. Il affirme que les fonctions périodiques se décomposent comme la somme infinie de fonctions trigonométriques ; cette théorie mathématique sera affinée tout au long de ce siècle. Le caractère périodique de nombreux phénomènes physiques, comme les ondes électromagnétiques, mis en lumière dans les années qui suivent, trouvent ainsi un outil mathématique adéquat pour les étudier.

Franz BREISIG, un ingénieur allemand, conçoit les premiers quadripôles dans les années 1920 pour améliorer les communications téléphoniques. Pour représenter graphiquement la fonction de transfert, Hendrik BODE imagine en 1938 les diagrammes qui portent son nom.



## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition d'une fonction de transfert
- ▷ Le principe de l'analyse de Fourier
- ▷ La notion de filtrage et les différents types de filtres
- ▷ La définition du gain en décibels
- ▷ Les notions de pulsation de coupure et de bande passante
- ▷ Les courbes constituant un diagramme de Bode

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Déterminer sans calcul le comportement asymptotique d'un quadripôle
- ▷ Calculer la fonction de transfert d'un quadripôle et la mettre sous une forme canonique donnée
- ▷ Déterminer la pulsation de coupure et la bande passante d'un filtre à partir du diagramme de Bode
- ▷ Justifier les asymptotes d'un diagramme de Bode
- ▷ Tracer le diagramme de Bode associé à une fonction de transfert d'ordre 1
- ▷ Utiliser un diagramme de Bode pour déterminer un signal de sortie
- ▷ Indiquer les conditions d'utilisation d'un filtre comme moyennneur, intégrateur ou dérivateur
- ▷ Simuler numériquement la sortie d'un filtre

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Décomposition d'un signal

– Selon le principe de l'analyse de Fourier, un signal périodique quelconque  $e(t)$ , de fréquence  $f$  et de période  $T$ , peut se décomposer en une somme d'un terme constant et de termes sinusoïdaux de fréquences multiples de  $f$ :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Le terme constant  $E_0$  est la **valeur moyenne** du signal.

Le terme sinusoïdal de pulsation  $n\omega$  est l'**harmonique** de rang  $n$ ; l'harmonique de rang 1, donc de même fréquence que le signal, est le **fondamental**.

La valeur efficace  $E_{\text{eff}}$  du signal est donnée par : 
$$E_{\text{eff}} = \sqrt{E_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2} = \sqrt{E_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2_{\text{eff}}}.$$

– Certains signaux non périodiques peuvent se mettre sous forme d'une somme, limitée, de termes sinusoïdaux : c'est le cas d'un produit de deux signaux sinusoïdaux indépendants.

## ■ Fonction de transfert

### □ Définition

– Pour un système physique linéaire fournissant un signal de sortie (ou réponse)  $s(t)$  en fonction d'un signal d'entrée (ou excitation)  $e(t)$ , ces deux fonctions sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants. En régime sinusoïdal forcé,  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) = \text{Re}[\underline{E} e^{j\omega t}]$  et  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s) = \text{Re}[\underline{S} e^{j\omega t}]$  : la fonction de

transfert  $\underline{H}$  est alors définie comme le rapport des amplitudes complexes : 
$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \left( = \frac{s(t)}{e(t)} \right).$$

$\underline{H}$  est un rapport de deux polynômes en  $j\omega$ . L'ordre de cette fonction de transfert (qui est aussi celui de l'équation différentielle) est donné par le polynôme de plus haut degré.

– En électrocinétique, on étudie des **quadripôles**, ayant deux bornes d'entrée et deux de sortie.

La plupart du temps, on s'intéresse à la fonction de transfert en tension : 
$$\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_c} \left( = \frac{u_s(t)}{u_c(t)} \right).$$

Pour cela on doit préciser ce qui est branché (**impédance de charge**) entre les deux bornes de sortie : si rien n'est branché, on dit qu'on est en **sortie ouverte**, ce qui est équivalent à une impédance de charge *infinie*.

⇒ **Méthode 7.2. Calcul d'une fonction de transfert avec un ou deux ponts diviseurs de tension**

⇒ **Méthode 7.3. Identification de la fonction de transfert avec une forme canonique**

## □ Gain et phase

La fonction de transfert peut être écrite sous la forme  $\underline{H} = Ge^{j\varphi}$ .

$G = \frac{|U_s|}{|U_e|} = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$  (gain linéaire du filtre) caractérise l'amplification ou l'atténuation du signal.

$\varphi = \arg(\underline{U}_s) - \arg(\underline{U}_e) = \varphi_s - \varphi_e$  est le déphasage entre  $u_s$  et  $u_e$ .

Le **gain en décibels** est défini par :  $G_{dB} = 20 \log G = 20 \log |H|$ .

## □ Effets d'un quadripôle

Filtre

En général, le gain d'un quadripôle dépend de la fréquence : dans un signal comportant plusieurs termes sinusoidaux, certains termes sont donc sélectionnés (conservés ou amplifiés), et d'autres sont éliminés (fortement atténués), selon leur fréquence. Ce comportement est appelé **filtrage**.

⇒ **Méthode 7.1. Comportement asymptotique d'un quadripôle**

Dérivateur et intégrateur

Si on peut écrire  $\underline{H} \approx k j\omega$  dans un certain domaine de fréquence, alors le quadripôle réalise une dérivation du signal d'entrée (à un facteur  $k$  près).

Si on peut écrire  $\underline{H} \approx \frac{k}{j\omega}$  dans un certain domaine de fréquence, alors le quadripôle réalise une

intégration du signal d'entrée (à un facteur  $k$  près).

Moyenneur

Un filtre passe-bas de fréquence de coupure très basse, par rapport à la fréquence du signal d'entrée, ne laisse passer que le terme de fréquence nulle, c'est-à-dire la valeur moyenne.

## ■ Diagramme de Bode

### □ Définition

C'est une représentation graphique de la fonction de transfert. Il se compose de deux courbes :

- la **courbe de gain** représente  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(\omega/\omega_0)$  (ou parfois de  $\log \omega$ )
- la **courbe de phase** représente  $\varphi$  en fonction de  $\log(\omega/\omega_0)$  (ou parfois de  $\log \omega$ )

$\omega_0$  étant une pulsation de référence à déterminer pour chaque quadripôle.

### □ Diagramme de Bode asymptotique

Pour les pulsations  $\omega$  très éloignées de la pulsation  $\omega_0$ , on obtient des équations affines (asymptotes) en conservant le terme prépondérant pour chaque polynôme en  $j\omega$ . La courbe est alors complétée dans la zone proche de  $\omega_0$  par détermination de la valeur correspondant à  $\omega_0$ .

⇒ **Méthode 7.4. Tracé d'un diagramme de Bode d'ordre 1**

⇒ **Méthode 7.5. Interprétation d'un diagramme de Bode**

## ■ Filtrés du premier ordre

### □ Les deux filtres principaux du premier ordre

En posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  (pulsation réduite), on obtient les formes canoniques suivantes.

– Filtre **passé-bas** :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jx}$ .

– Filtre **passé-haut** :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$ .

### □ Pulsation de coupure (à -3 dB)

C'est la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle :  $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Avec la pulsation réduite  $x_c = \frac{\omega_c}{\omega_0}$  :  $G(x_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$  ce qui équivaut à  $G_{\text{dB}}(x_c) = G_{\text{dB max}} - 3 \text{ dB}$ .

Dans le cas d'un filtre du premier ordre, on a toujours  $x_c = 1$  soit  $\omega_c = \omega_0$  : la pulsation de coupure correspond à l'intersection des deux asymptotes.

### □ Bande passante (à -3 dB)

C'est la gamme de fréquences (ou de pulsations) pour laquelle  $G(x) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Pour un filtre passé-bas, la bande passante est  $[0, \omega_0]$  (il laisse passer les basses fréquences).

Pour un filtre passé-haut, la bande passante est  $[\omega_0, \infty]$  (il laisse passer les hautes fréquences).

## ■ Filtrés du second ordre

### □ Les trois filtres principaux du second ordre

– Filtre **passé-bas** :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$  ou  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{-jQ}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ .

– Filtre **passé-haut** :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$  ou  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ .

– Filtre **passé-bande** :  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{j\frac{x}{Q}}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$  ou  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ .

Dans tous les cas, le dénominateur peut être mis sous l'une des deux formes canoniques (et on passe de l'une à l'autre en multipliant ou divisant tout par  $jx/Q$ ).  $Q$  est le **facteur de qualité**.

### □ Pulsation(s) de coupure et bande passante

- La définition de la (ou des) pulsation(s) de coupure à  $-3$  dB reste la même, mais il faut faire le calcul pour chaque filtre.
- La bande passante peut également être définie et calculée comme pour le premier ordre.

Pour le passe-bande, on trouve un intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  autour de  $\omega_0$  (avec  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  donc  $\omega_0$

est au milieu de la bande passante en échelle logarithmique), de largeur  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  soit  $\Delta x = \frac{1}{Q}$ .

## ■ Mise en cascade de quadripôles

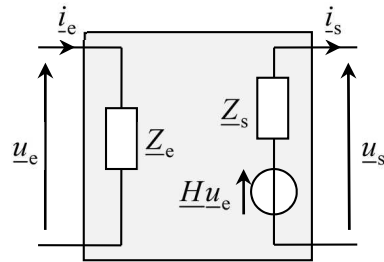
### □ Impédances d'entrée et de sortie

Pour caractériser le comportement d'un quadripôle vis-à-vis du reste du circuit (indépendamment de sa structure réelle, qui peut être inconnue), on peut *modéliser* :

- ses deux bornes d'entrée comme un dipôle passif d'impédance  $\underline{Z}_e$ , appelée **impédance d'entrée** ;
- ses deux bornes de sortie comme un dipôle de Thévenin de FÉM  $\underline{H} \times \underline{u}_e(t)$  ( $\underline{H}$  déterminée en sortie ouverte) et d'impédance interne  $\underline{Z}_s$ , appelée **impédance de sortie**.

En entrée (convention récepteur) :  $\underline{u}_e = \underline{Z}_e \underline{i}_e$ .

En sortie (convention générateur) :  $\underline{u}_s = \underline{H} \underline{u}_e - \underline{Z}_s \underline{i}_s$ .

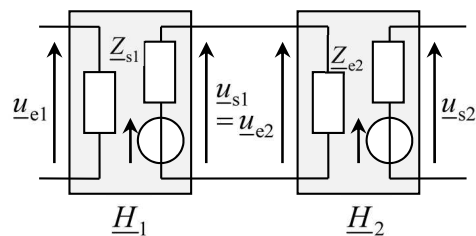


### □ Fonction de transfert de quadripôles en cascade

Deux quadripôles sont **en cascade** si les bornes de sortie de l'un sont reliées à l'entrée de l'autre.

Les fonctions de transfert  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  ayant été établies *en sortie ouverte*, pour que la fonction de transfert de l'ensemble soit  $\underline{H} = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ , il faut que  $\underline{Z}_{s1} \ll \underline{Z}_{e2}$ .

Le cas idéal est donc celui où  $\underline{Z}_{s1} = 0$  (quadripôle 1 **idéal en sortie**) ou bien  $\underline{Z}_{e2} = \infty$  (quadripôle 2 **idéal en entrée**).



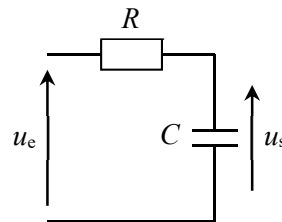
## ■ Comment déterminer rapidement la nature d'un filtre ?

### □ Méthode 7.1. Comportement asymptotique d'un quadripôle

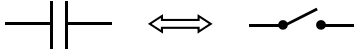
Refaire le schéma pour  $\omega \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  en remplaçant les bobines et les condensateurs par leur équivalents suivant les conditions. Évaluer la valeur de la sortie, ce qui permet de savoir dans quel domaine le filtre laisse passer le signal.

⇒ Exercices 7.1 à 7.3, 7.5 à 7.10, 8.1

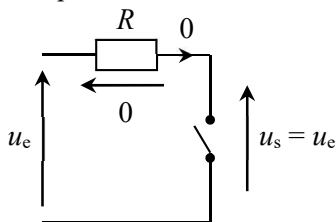
Nous allons déterminer la nature de ce filtre à partir de son comportement asymptotique.



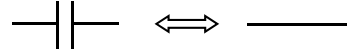
En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert (ou coupe-circuit).



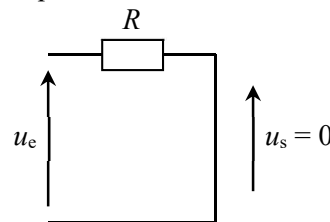
Le schéma équivalent est alors :



En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), le condensateur se comporte comme un fil (ou interrupteur fermé ou court-circuit).



Le schéma équivalent est alors :



Le signal de sortie est négligeable en haute fréquence, mais environ égal au signal d'entrée pour les basses fréquences : il s'agit donc d'un filtre passe-bas.

### Remarque

On ne trouve pas toujours  $u_s = u_e$  dans la bande passante, mais en tout cas  $u_s$  du même ordre de grandeur que  $u_e$ , ou même d'amplitude plus grande que  $u_e$  si le filtre comporte un dispositif d'amplification (ce que ne peut pas se produire avec un filtre constitué uniquement de dipôles  $R$ ,  $C$  et  $L$ ).

## ■ Comment déterminer la fonction de transfert d'un quadripôle ?

### □ Méthode 7.2. Calcul d'une fonction de transfert avec un ou deux ponts diviseurs de tension

On réalise les associations nécessaires pour obtenir un pont diviseur de tension, ou éventuellement deux successifs.

Si on doit calculer l'admittance équivalente d'une association parallèle, il est conseillé de la laisser sous cette forme aussi longtemps que possible.

⇒ Exercices 7.1 à 7.3, 7.5 à 7.9

– Exemple d'ordre 1

Nous allons identifier l'association  $R'C$  parallèle comme un seul dipôle d'admittance équivalente  $\underline{Y}_{\text{éq}}$ , ayant la tension  $u_s$  à ses bornes.

La formule du pont diviseur donne alors :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}} \underline{U}_e, \text{ d'où l'on déduit } \underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}.$$

Nous ne chercherons pas à calculer  $\underline{Z}_{\text{éq}}$  (car nous avons affaire à une association parallèle), mais

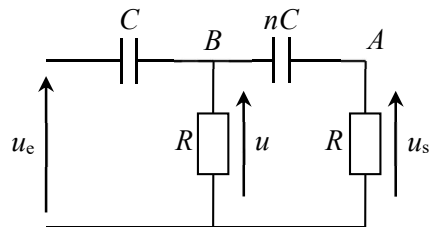
au contraire à faire apparaître l'admittance équivalente, ce qui donne :  $\underline{H} = \frac{1}{R\underline{Y}_{\text{éq}} + 1}$ .

C'est seulement maintenant que nous allons remplacer l'admittance par son expression :

$$\underline{H} = \frac{1}{R\left(\frac{1}{R'} + jC\omega\right) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R'} + jRC\omega}.$$

– Exemple d'ordre 2

Dans cette structure classique à quatre dipôles, on ne peut pas considérer qu'il y a un seul diviseur de tension reliant  $u_e$  et  $u_s$  : on doit alors introduire une tension intermédiaire  $u$ , et écrire successivement deux diviseurs.



Il est souvent pratique d'utiliser la formule du diviseur de tension avec des admittances plutôt

qu'avec des impédances :  $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{\text{tot}}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_2 + \underline{Y}_1}$  (facile à démontrer...).

Premier diviseur de tension (capacité  $nC$  en série avec la seconde résistance  $R$ ) :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}} = \frac{jnC\omega}{jnC\omega + \frac{1}{R}} = \frac{jnRC\omega}{jnRC\omega + 1}.$$

Second diviseur de tension (capacité  $C$  en série avec tout le

reste) :  $\frac{U}{U_e} = \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{R+1/jnC\omega}} = \frac{jRC\omega}{jRC\omega + 1 + \frac{jnRC\omega}{1+jnRC\omega}}$ . On multiplie les deux :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{U_s}{U} \frac{U}{U_e} = \frac{n(jRC\omega)^2}{(jRC\omega + 1)(jnRC\omega + 1) + jnRC\omega} \text{ soit } \boxed{\frac{H}{\frac{U_s}{U_e}} = \frac{-n(RC\omega)^2}{1 + (2+n)jRC\omega - n(RC\omega)^2}}$$

⚠\* Attention,  $C$  et  $R$  à gauche ne sont pas en série (puisque'il y a un nœud entre elles), et ne constituent donc pas à elles seules un diviseur de tension ! Par ailleurs, la tension aux bornes du dipôle équivalent à  $R$ ,  $nC$  et  $R$ , donc entre le point  $B$  et le point du bas, est bien  $u$  et non la tension de sortie  $u_s$ .

### □ Méthode 7.3. Identification de la fonction de transfert avec une forme canonique

Il faut se laisser guider par le *dénominateur* de la fonction de transfert.

- Pour un filtre d'ordre 1, on cherche à avoir un 1 pour la partie réelle du dénominateur (indépendante de  $\omega$ ).
- Pour un filtre d'ordre 2, il y a deux formes possibles pour le dénominateur mais il comporte toujours trois termes, dont un constant (indépendant de  $\omega$ ) : dans les deux cas, on fait en sorte que ce terme soit égal à 1.
- On identifie alors chaque terme avec l'élément de la forme canonique du filtre associé : on obtient ainsi l'expression de  $\omega_0$ , et aussi de  $Q$  pour un filtre d'ordre 2.

⇒ Exercices 7.1, 7.2, 7.6 à 7.10

– Reprenons l'exemple 1 précédent.

La partie réelle du dénominateur vaut  $\frac{R' + R}{R'}$ , que nous mettons en facteur pour faire apparaître

une partie réelle égale à 1. La fonction de transfert s'écrit alors :  $\underline{H} = \frac{R'}{R + R'} \frac{1}{1 + j \frac{RR'}{R + R'} C\omega}$ .

On reconnaît la forme d'un filtre passe-bas du premier ordre de la forme  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jx}$ .

On identifie donc :  $\boxed{H_0 = \frac{R'}{R + R'}}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{RR'}{R + R'} C\omega$  d'où l'on tire  $\boxed{\omega_0 = \frac{R + R'}{RR'C}}$ .

– Reprenons maintenant l'exemple 2 précédent.

Le terme constant du dénominateur vaut déjà 1 : on peut donc dès maintenant identifier cette fonction de transfert avec  $\underline{H}(x) = H_0 \frac{-x^2}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$ . On obtient  $-x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = -n(RC\omega)^2$  d'où

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{n}}}; \quad j \frac{x}{Q} = (2+n)jRC\omega \text{ d'où } \boxed{Q = \frac{\sqrt{n}}{2+n}}; \text{ enfin } \boxed{H_0 = 1}.$$



## ■ Comment manipuler les diagrammes de Bode ?

### □ Méthode 7.4. Tracé d'un diagramme de Bode d'ordre 1

- On se place sur les deux domaines  $x \ll 1$  et  $x \gg 1$  et on étudie la fonction de transfert simplifiée, qui ne conserve que le terme prépondérant de la partie réelle *ou* imaginaire (au dénominateur). Cela permet d'obtenir les asymptotes en basse fréquence et en haute fréquence, pour la courbe de gain et pour celle de phase.
- On trace ensuite les deux courbes après avoir précisé leur comportement dans la zone autour de  $x=1$ . Dans le cas d'un filtre d'ordre 1, on sait que pour  $x=1$ ,  $G_{dB} = G_{dB\max} - 3\text{ dB}$  et  $\varphi = \pm \pi/4$ .

⇒ Exercices 7.1, 7.5, 7.6, 7.7

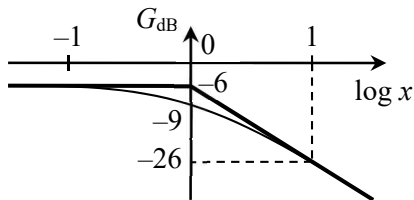
Traçons le diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre 1 déterminé précédemment.

Pour  $x \ll 1$ , la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) \approx H_0$ , soit  $G_{dB} = 20 \log|\underline{H}| = 20 \log|H_0|$ , et  $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) = 0$ , car ici  $H_0$  est réel et positif.

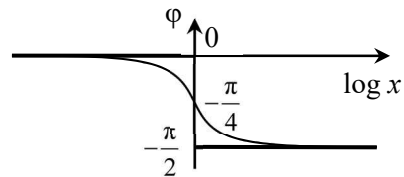
Pour  $x \gg 1$ ,  $\underline{H}(x) \approx H_0 \frac{1}{jx}$ , soit  $G_{dB} = 20 \log|\underline{H}| = 20 \log|H_0| - 20 \log x$  (le facteur  $-20$  devant  $\log x$  indique une pente de  $-20\text{ dB/décade}$ ) et  $\varphi = \arg(H_0) - \arg(jx) = 0 - \frac{\pi}{2}$ .

Les asymptotes du diagramme de gain se coupent pour  $20 \log|H_0| = 20 \log|H_0| - 20 \log x$ , donc pour  $\log x = 0$  soit  $x = 1$ . De plus pour  $x = 1$ ,  $\underline{H}(1) = H_0 \frac{1}{1+j}$  donc

$G_{dB} = 20 \log(H_0) - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log(H_0) - 3\text{ dB}$  et  $\varphi = \arg(H_0) - \arg(1+j) = -\frac{\pi}{4}$ .



Courbe de gain  
pour  $H_0 = 1/2$  soit  $20 \log|H_0| = -6$



Courbe de phase

– Autre rédaction possible

Pour  $x$  quelconque :  $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg(1+jx) = 0 - \arctan(x)$

et  $G_{dB} = 20 \log|\underline{H}| = 20 \log \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}} = 20 \log(H_0) - 10 \log(1+x^2)$ .

Alors pour  $x \ll 1$  :  $\varphi = -\arctan(0) = 0$  et  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) - 10 \log(1) = 20 \log(H_0)$ .

Pour  $x \gg 1$  :  $\varphi = -\arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$  et  $G_{dB} \approx 20 \log(H_0) - 10 \log(x^2) = 20 \log(H_0) - 20 \log x$ .

On peut aussi rencontrer, dans d'autres cas,  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ .

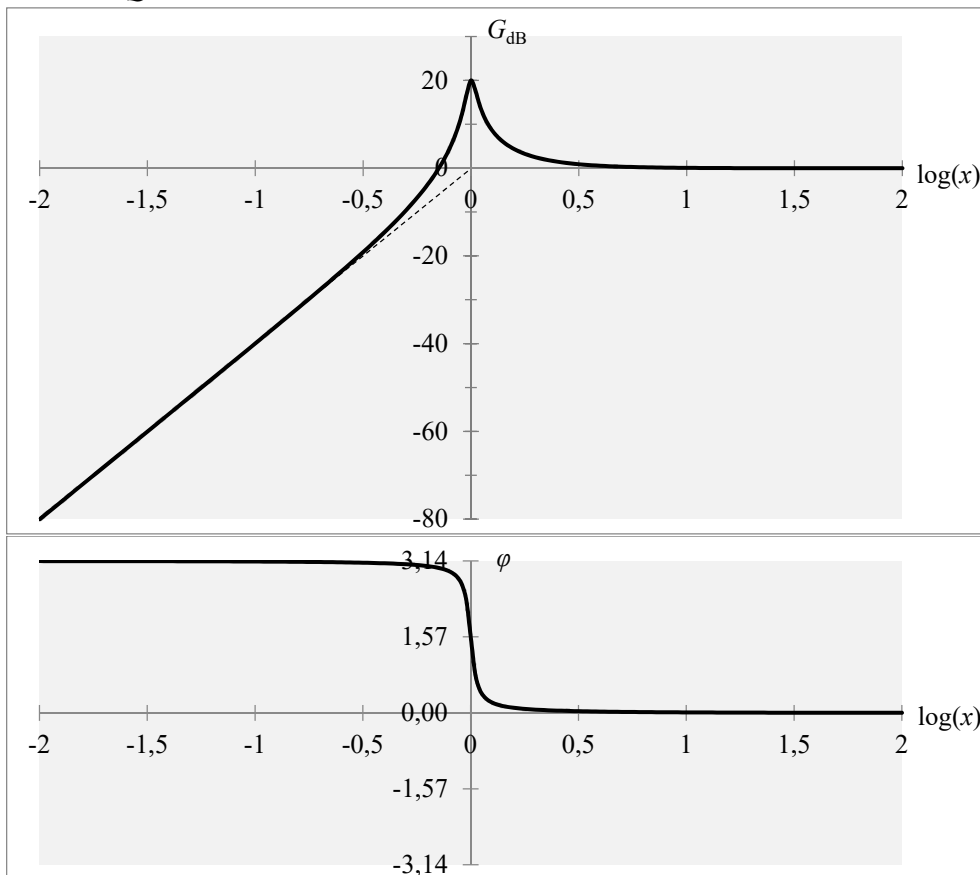
### □ Méthode 7.5. Interprétation d'un diagramme de Bode

- On détermine les équations des asymptotes à gauche et à droite : celles-ci doivent correspondre à la fonction de transfert simplifiée sur les deux domaines  $x \ll 1$  et  $x \gg 1$ . Les asymptotes du gain se coupent toujours en  $x = 1$ , c'est-à-dire en  $\omega = \omega_0$  ou encore  $f = f_0 = \omega_0/2\pi$ .
- Pour un filtre du second ordre, la valeur du gain en  $x = 1$  donne aussi la valeur du facteur de qualité.

⇒ Exercices 7.3, 7.8, 7.9, 7.10

On cherche à vérifier que le diagramme de Bode ci-dessous correspond à la fonction de transfert

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{-x^2}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}, \text{ et à déterminer la valeur de } Q.$$



– D’après l’allure de la courbe de gain, on reconnaît immédiatement un passe-haut, ce qui correspond effectivement à la fonction de transfert donnée.

– À gauche, c’est-à-dire pour  $x \ll 1$ , on observe sur la courbe de gain une asymptote (ajoutée en pointillé) de pente  $+40$  dB/décade (elle monte de  $80$  dB sur  $2$  décades) et d’ordonnée à l’origine  $0$ . Cela correspond à l’équation  $G_{dB} \approx +40 \log x$ , soit  $20 \log(|H|) \approx 40 \log x = 20 \log(x^2)$ , donc dans ce domaine  $|H| \approx x^2$  (la fonction  $\log$  étant bijective). Dans le même domaine, on observe sur la courbe de phase une asymptote horizontale :  $\varphi = +\pi$ , ce qui correspond à  $H$  réelle négative. On trouve donc  $H \approx -x^2$  pour  $x \ll 1$ .

Ceci correspond bien à l’équivalent de la fonction de transfert donnée, pour  $x$  tendant vers  $0$  (on ne garde que le terme  $1$  au dénominateur).

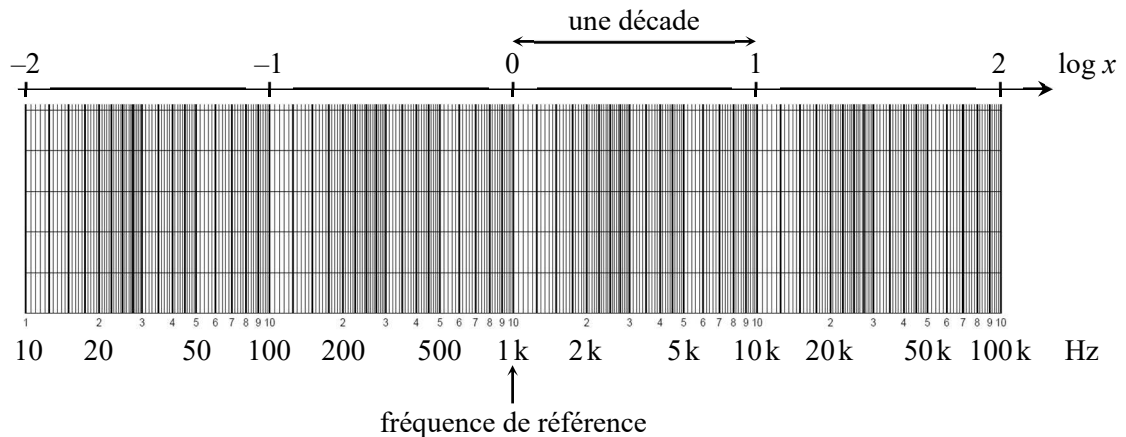
– À droite, donc pour  $x \gg 1$ ,  $G_{dB}$  tend vers  $0 = 20 \log 1$ , donc  $|H| \approx 1$ . Et  $\varphi$  tend vers  $0$ , ce qui correspond à un réel positif. Donc  $|H| \approx 1$ , qui est bien la limite de la fonction donnée pour  $x$  tendant vers l’infini.

– Finalement, en  $x = 1$ , soit  $\log x = 0$ , on lit sur le graphe  $G_{dB} = 20$  dB.

Or la fonction transfert vaut  $H = jQ$  en  $1$ , soit une phase  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , que l’on observe bien sur la courbe de phase, et  $G_{dB} = 20 \log Q$ . On en déduit  $\log Q = 1$ , soit  $Q = 10$ .

– En revanche, ce diagramme de Bode ayant été donné directement avec la pulsation réduite, on ne peut pas connaître la valeur de sa fréquence de coupure.

– Si on trace une courbe expérimentale, au lieu de calculer soi-même les logarithmes des fréquences, on peut reporter directement les valeurs des fréquences sur un graphe semi-logarithmique, dans lequel les graduations de l’axe des abscisses ont été déjà placées proportionnellement à leur logarithme. Cela revient donc à avoir  $\log x$  en abscisse, si on prend comme fréquence de référence l’une quelconque des fréquences de l’axe.



## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. La fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle du système, valable aussi pour le régime transitoire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. L'ordre du filtre est aussi l'ordre du système en régime transitoire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Un filtre passe-bande laisse passer les hautes fréquences.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La pulsation de coupure à $-3$ dB est la pulsation pour laquelle la valeur du gain est $\sqrt{2}$ fois plus petite que sa valeur maximale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La courbe de gain d'un filtre du premier ordre peut avoir une pente de 40 décibels par décade.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Le filtre passe-haut $\underline{H}(x) = H_0 \frac{jx}{1+jx}$ , se comporte comme un circuit dérivateur en basse fréquence.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. La pulsation de coupure réduite d'un filtre du premier ordre est $x_c = 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. La pulsation de coupure réduite d'un filtre du second ordre est $x_c = 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. La phase d'un filtre du premier ordre peut varier de $\frac{\pi}{2}$ au maximum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. La phase d'un filtre du second ordre peut varier de $\frac{\pi}{2}$ au maximum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

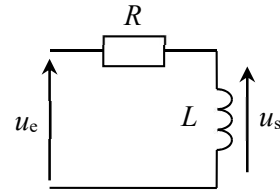
# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Filtres du premier ordre

### □ Exercice 7.1. Filtre $RL$

On considère le filtre ci-contre, en sortie ouverte.

1. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique.
2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e}$  de ce filtre.

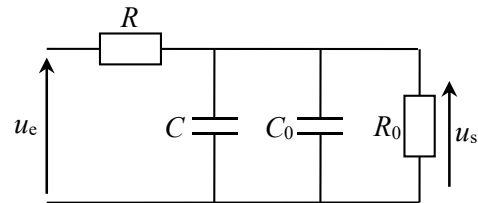


Identifier sa pulsation caractéristique  $\omega_0$ .

3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique, avec  $\log x = \log(\omega/\omega_0)$  en abscisse.
4. Définir sa pulsation de coupure à  $-3$  dB et tracer l'allure du diagramme de Bode réel.
5. À partir de la fonction de transfert, écrire l'équation différentielle liant  $u_e(t)$  et  $u_s(t)$ .
6. Retrouver l'équation différentielle précédente avec une autre méthode.

### □ Exercice 7.2. Filtre observé à l'oscilloscope

Pour l'étude fréquentielle d'un filtre  $RC$  série, on visualise la tension aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope, dont l'entrée peut être assimilée à une association en parallèle d'une capacité  $C_0$  et d'une résistance  $R_0$ . On obtient donc le schéma ci-contre.



1. Déterminer la nature du filtre constitué par ces quatre dipôles, d'après son comportement asymptotique.

2. Montrer que sa fonction de transfert s'écrit  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R_0}{R + R_0} \frac{1}{j \frac{RR_0}{R + R_0} (C + C_0)\omega + 1}$ .

3. Calculer la pulsation de coupure  $\omega_c$  de ce circuit, et la comparer avec la pulsation de coupure  $\omega'_c$  du circuit  $RC$  seul. À quelles conditions l'étage d'entrée de l'oscilloscope ne perturbe-t-il pas l'étude du filtre ?

4. On prend  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 6,8 \text{ nF}$ , et on lit les valeurs de  $R_0$  et  $C_0$  directement sur l'oscilloscope, au-dessus de ses bornes d'entrée (image ci-contre). Comparer  $\omega_c$  et  $\omega'_c$  et conclure.



### □ Exercice 7.3. Filtre RC\*

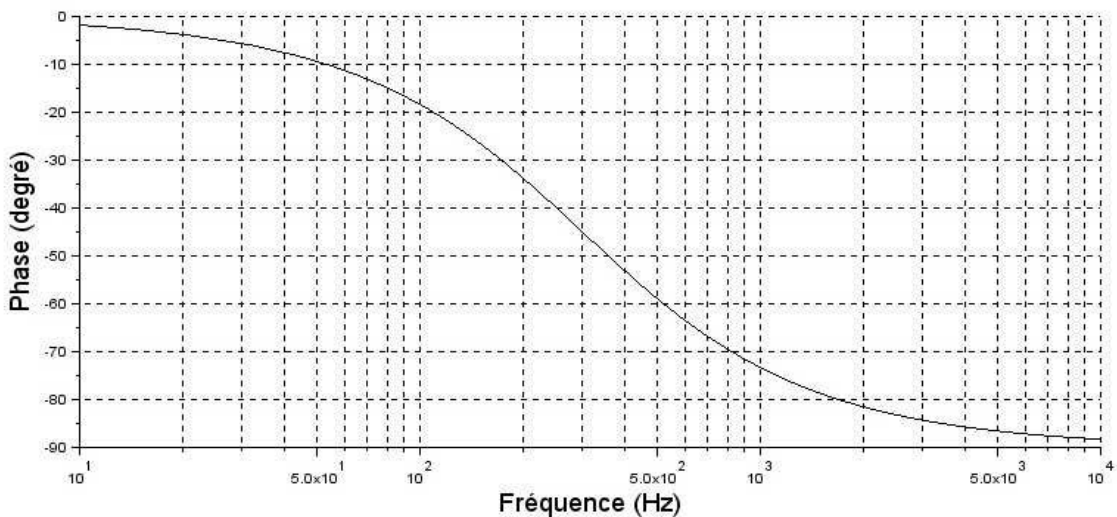
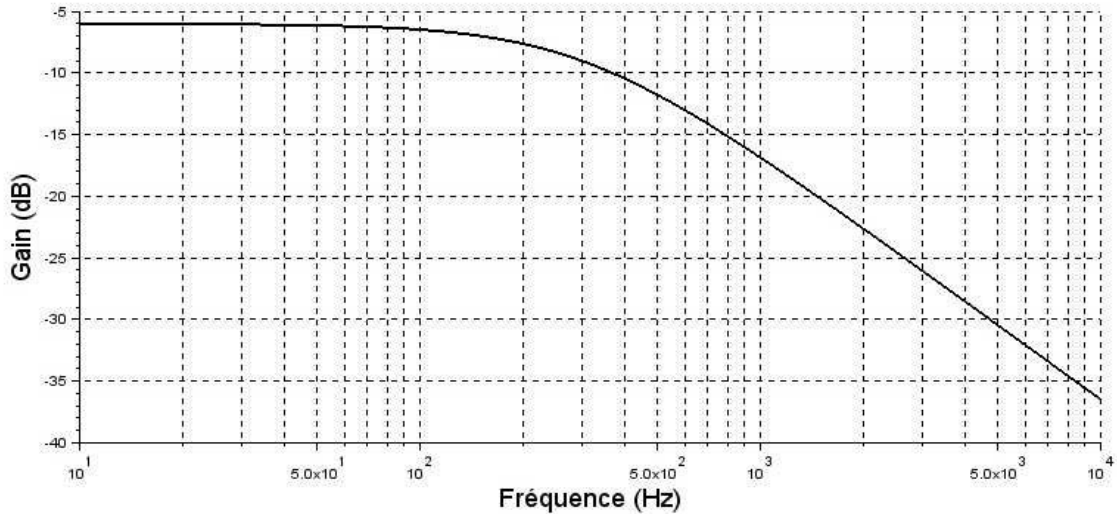
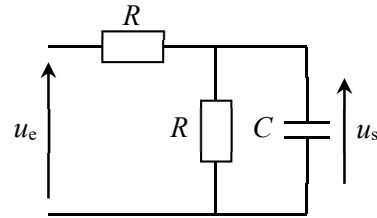
On étudie le filtre ci-contre.

1. En effectuant un schéma équivalent en BF (basse fréquence), puis un autre en HF (haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.

2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(x)$  de ce filtre en fonction de  $x = RC\omega$ .

3. Déterminer sa pulsation de coupure  $\omega_c$  en fonction de  $R$  et  $C$ .

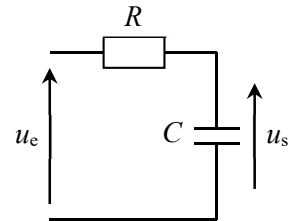
4. On a tracé ci-dessous le diagramme de Bode de ce filtre. Justifier les parties rectilignes du diagramme de Bode en gain. Déterminer un ordre de grandeur du produit  $RC$ .



5. En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ? Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ? Vers quelle valeur tend alors le déphasage de  $u_s(t)$  par rapport à  $u_e(t)$  ?
6. Déterminer l'amplitude du signal de sortie si l'entrée vaut  $10 \cos\left(2\pi \cdot 900t + \frac{\pi}{3}\right)$  en volts, avec  $t$  en secondes.

#### □ Exercice 7.4 Réalisation d'un filtre moyeneur\*\*

On désire réaliser filtre moyeneur avec un circuit  $RC$ , de fonction de transfert  $H = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ . Pour cela, la composante continue du signal qui correspond à la valeur moyenne doit être transmise et les composantes alternatives « éliminées ».



1. Quelle est la nature de ce filtre ?
2. On considère que la condition d'élimination est réalisée si la composante alternative est atténuée de 40 dB en sortie du filtre. Sachant qu'en pratique, les signaux à traiter ont des fréquences supérieures à 1 kHz, déterminer la valeur de la fréquence de coupure. En déduire la valeur de  $R$ , sachant que l'on a déjà un condensateur  $C = 1 \mu\text{F}$ .
3. Le filtre précédent est maintenant réalisé, et fonctionne parfaitement. Pour le tester, on l'alimente avec le signal  $u_e(t) = 2 + 1 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 1000t + \frac{\pi}{3}\right) + 5 \cos(2\pi \cdot 2000t)$  avec  $t$  en secondes et  $u_e$  en volts. Qu'observe-t-on en sortie (on ne demande pas un calcul complet, mais une approximation rapide) ? Conclure sur la fonction attendue de ce filtre.
4. À quelle condition ce filtre se comporte-t-il comme un intégrateur ?
5. Toujours dans l'optique de vérifier le bon fonctionnement du filtre, on l'alimente avec un signal crête-à-crête évoluant entre 0 et 4 V à la fréquence 1 kHz. Qu'observe-t-on à la sortie ?
6. Toto, qui n'a pas écouté les consignes, fait l'observation du signal de sortie avec un oscilloscope en couplage AC (parfois noté CA sur les menus en français). Il n'observe rien : expliquez. Il modifie alors le calibre de l'oscilloscope et observe un signal triangulaire de fréquence 1 kHz : expliquez sans faire de calcul.



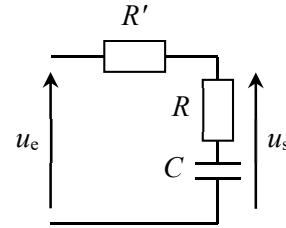
Bouton de sélection du couplage AC sur un oscilloscope analogique



Menu de sélection du couplage AC sur un oscilloscope numérique

□ **Exercice 7.5. Filtre à retard de phase\*\***

On considère le filtre ci-contre, en sortie ouverte. La tension d'entrée est sinusoïdale. On posera  $\alpha = \frac{R'}{R}$  et  $x = RC\omega$ .



1. Faire une analyse qualitative de ce filtre pour les hautes et basses fréquences.
2. Déterminer sa fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ .
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.
4. Montrer que  $\varphi < 0$  quel que soit  $x$ , et justifier la dénomination « filtre à retard de phase » donnée à ce montage.
5. Calculer en fonction de  $\alpha$ , le déphasage minimal ainsi que le gain  $G_0$  correspondant.

Donnée :  $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

■ **Filtres du deuxième ordre**

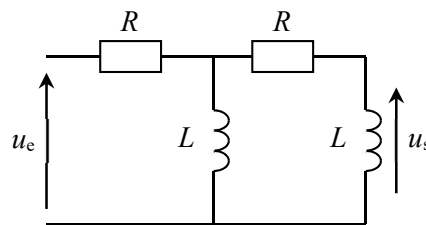
□ **Exercice 7.6. Filtre ADSL\***

Le chien de Madame Michu a mangé son filtre ADSL ! Qu'à cela ne tienne, elle va en fabriquer un elle-même...

Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties : les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ; les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Madame Michu réalise le filtre ci-contre.



2. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.
3. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

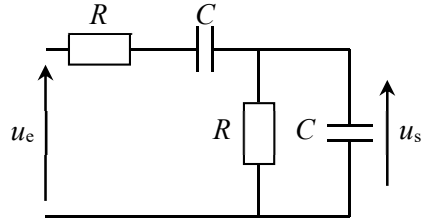
$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_0 \text{ à déterminer en fonction de } R \text{ et } L.$$

4. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.
5. Madame Michu possède des résistances de 100 Ω. Quelle valeur d'inductance doit-elle choisir pour réaliser le filtre souhaité ?



### □ Exercice 7.7. Utilisation d'un filtre de Wien \*

On étudie le circuit ci-contre en régime sinusoïdal permanent, alimenté par une tension d'entrée  $u_e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .



1. Déterminer qualitativement le comportement de ce filtre à haute et basse fréquence.

2. On pose  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Exprimer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{U_s}{U_e}$  sous la forme :

$$\underline{H}(x) = H_0 \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}. \text{ Préciser le facteur de qualité } Q \text{ du filtre et la valeur de } H_0.$$

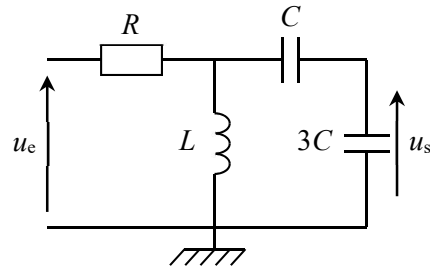
3. Calculer le gain maximum de ce filtre, ainsi que le déphasage correspondant et le gain en décibels. Calculer les pulsations de coupures  $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$  en fonction de  $Q$  et  $\omega_0$ , et en déduire la largeur de la bande passante.

4. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre, en précisant les asymptotes.

5. Calculer  $\omega_0$  pour  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 0,50 \mu\text{F}$ . Quel signal obtient-on en sortie si le signal d'entrée est  $u_e(t) = E_m \cos(\omega t) + E_m \cos(10\omega t) + E_m \cos(100\omega t)$  avec  $\omega = 2,0 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ?

### □ Exercice 7.8. Filtre de Colpitts

On considère le quadripôle suivant, où  $C$  est une capacité,  $R$  une résistance et  $L$  une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé, en sortie ouverte (rien n'est branché entre les bornes de sortie).



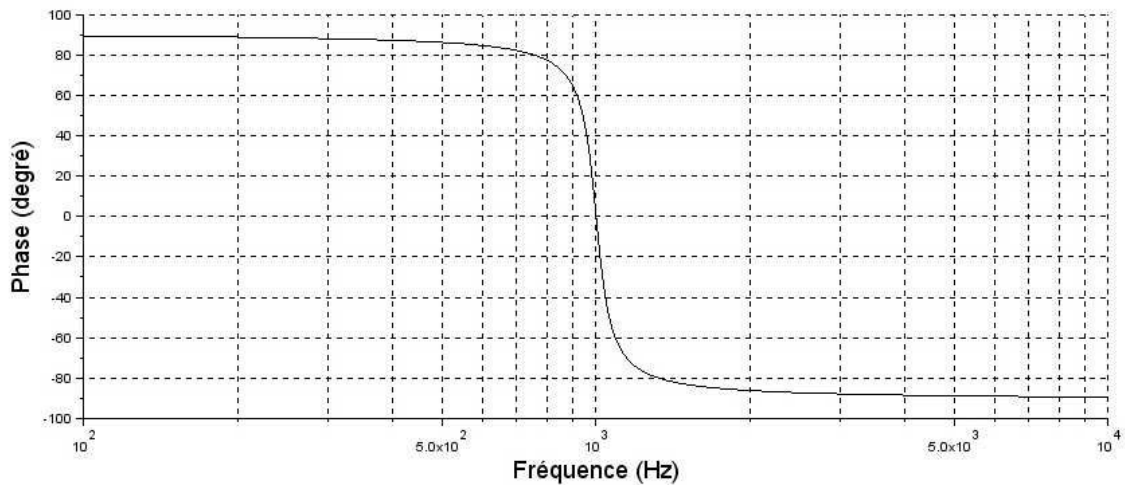
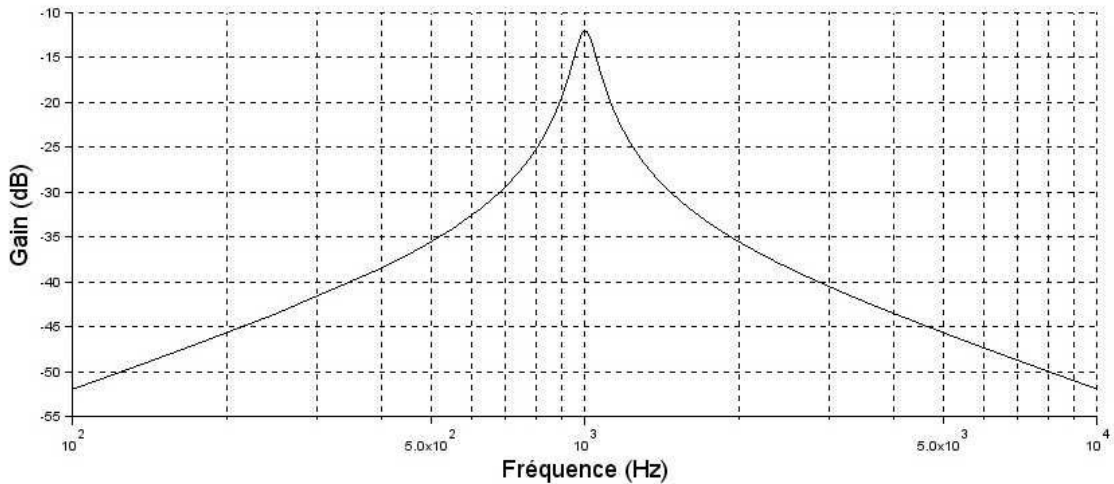
1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?

2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$  et la mettre sous l'une des deux formes

$$\text{équivalentes : } \underline{H} = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}} \text{ en introduisant des constantes } A,$$

$\omega_0$  et  $Q$  dont on précisera les expressions en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $L$ .

3. Le diagramme de Bode de ce quadripôle a été relevé, et on sait que  $Q = 10$  (voir page suivante). Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme de Bode. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord  $f_0$ , ainsi que des fréquences de coupure.



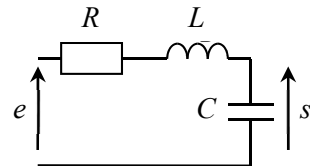
4. Un circuit multiplieur fournit le signal d'entrée  $u_e(t) = 2B \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$  avec  $\omega_1 = 100 \omega_0$  et  $\omega_2 = 101 \omega_0$ . Écrire  $u_e(t)$  sous forme d'une somme de cosinus. En déduire le signal obtenu à la sortie de ce filtre.

□ **Exercice 7.9. Filtre RLC série \* \***

On étudie le circuit linéaire ci-contre.

Il est composé de trois dipôles en série : une résistance  $R$ , une inductance parfaite de coefficient d'induction  $L$ , et d'un condensateur de capacité  $C$ .

Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$ . On note  $s(t)$  la tension de sortie.



- À l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.
- a) Établir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \text{ en précisant } \omega_0 \text{ et } Q. \text{ Donner l'ordre de ce filtre.}$$

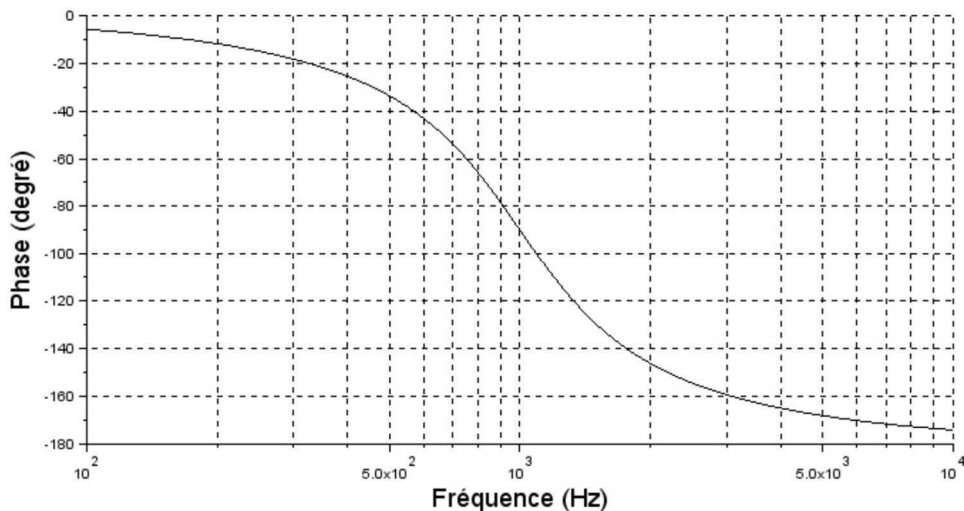
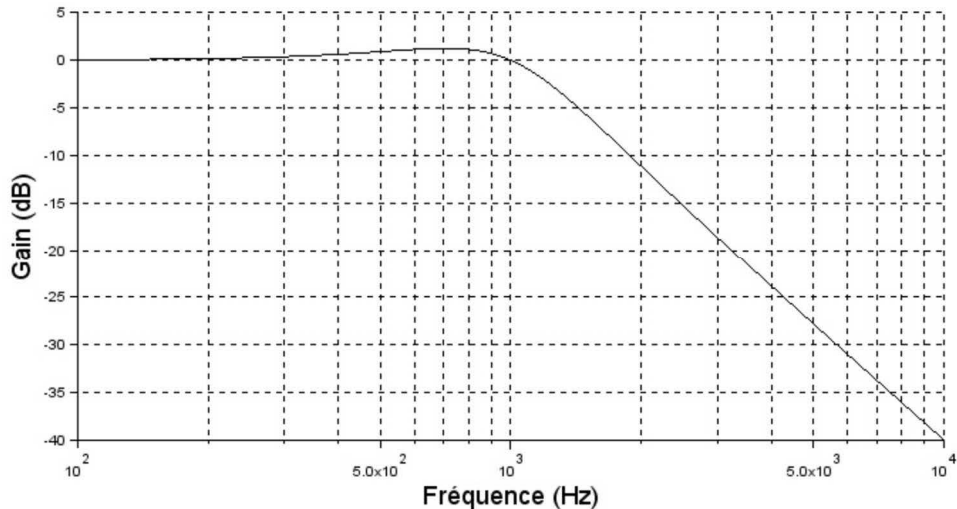
b) Si  $e(t)$  est une fonction quelconque du temps (non nécessairement sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions  $s(t)$  et  $e(t)$  ?

Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert  $|\underline{H}(\omega)|$ , en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

4. Montrer que  $|\underline{H}(\omega)|$  passe par un maximum pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer  $\omega_r$ , la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

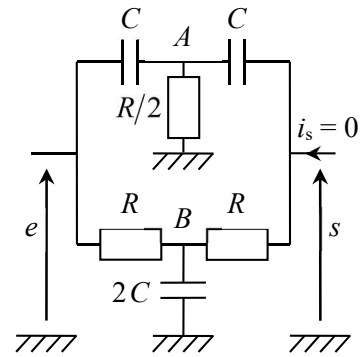
5. On appelle gain la fonction  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$ . Le tracé du diagramme de Bode est réalisé avec  $Q = 1$ . Déduire du diagramme la valeur de  $\omega_0$ . Justifiez l'allure des asymptotes de  $G_{dB}$  aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Exprimer  $G_{dB}(\omega_0)$ .



□ **Exercice 7.10. Toto et son coupe-bande\*\***

Toto réalise un enregistrement numérique de son groupe de rock, dans des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Mais il est gêné par un signal parasite à 50 Hz provenant de la tension du secteur : il cherche donc à éliminer ce signal au moyen d'un filtre réjecteur ou coupe-bande.

Il réalise pour cela le quadripôle ci-contre, qui est utilisé en sortie ouverte : l'impédance en sortie peut être considérée comme infinie, donc le courant de sortie est nul.



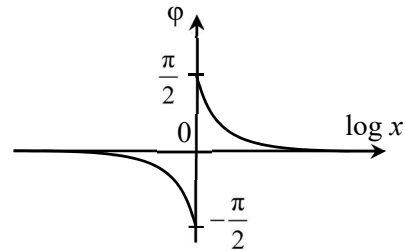
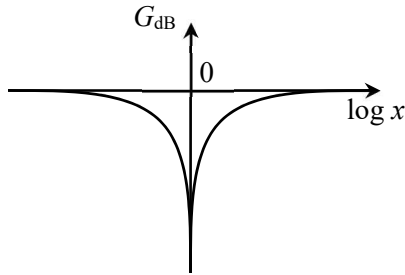
1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence, et en déduire qu'il s'agit bien d'un coupe-bande.

2. Déterminer sa fonction de transfert en posant  $x = RC\omega$ , et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = H_0 \frac{1 - x^2}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$$

avec des constantes  $H_0$  et  $Q$  dont on donnera les valeurs.

3. Le diagramme de Bode de ce quadripôle est représenté ci-dessous.



Interpréter ce diagramme de Bode, et proposer deux valeurs pour  $R$  et  $C$  permettant de couper le signal à 50 Hz.

■ **Simulation numérique**

□ **Exercice 7.11. Effet d'un filtre sur un signal carré**

Toto n'est jamais sûr de lui lorsqu'il fait un exercice, c'est pourquoi il a choisi d'utiliser Python pour vérifier ses résultats... Mais comme il n'est pas non plus très fort en programmation, il compte sur vous !

Un signal carré d'amplitude  $E$ , présent à l'entrée d'un filtre, présente un développement en série de Fourier de la forme :  $e(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{4E}{\pi} \frac{1}{2n+1} \sin(2\pi f_e (2n+1)t)$ , où  $f_e$  représente la fréquence du signal carré.

Toto a déterminé la fonction de transfert du filtre  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$ , avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$  la pulsation réduite.

1. Définir une fonction Python nommée `generation_coefficient` qui permet de générer les coefficients du développement en série de Fourier du carré, en fonction du nombre de termes désirés appelé `nombre_termes`.
  2. Générer une liste temps noté `t` qui comporte 2000 valeurs réparties sur 3 périodes du carré de fréquence  $f_e$  ainsi qu'une fonction que l'on nomme `entree` qui génère le signal carré sous forme de liste.
  3. Définir la fonction `filtre_passe_bas` qui génère la sortie  $s(t)$  du filtre sous forme de liste, puis compléter le programme pour tracer l'entrée et la sortie du filtre.
  4. Le signal carré d'entrée a une amplitude  $E = 2\text{ V}$  et sa fréquence est de  $1\text{ kHz}$ . Le filtre présente les caractéristiques  $H_0 = 3$  et  $f_0 = 10\text{ Hz}$ .
- a) À l'aide des fonctions que vous avez précédemment définies, terminer le programme pour observer l'entrée et la sortie du filtre pour 100 termes du développement en série de Fourier du signal  $e(t)$ . D'après l'observation, que pouvez-vous en conclure sur l'opération effectuée sur le carré ?
  - b) À l'aide de la forme asymptotique du diagramme de Bode, déterminer l'amplitude du signal de sortie, valeur que l'on pourra vérifier sur la simulation.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 7.3.* Question 4 : il faut déterminer graphiquement la fréquence de coupure et en déduire la pulsation de coupure.

*Exercice 7.5.* À la question 3, il faut aussi étudier le domaine  $\frac{1}{1+\alpha} \ll x \ll 1$ , en supposant qu'il existe. À la question 5, étudier la dérivée de la fonction argument pour avoir son extremum.

*Exercice 7.9.* À la question 4, calculer la dérivée du terme contenu dans la racine du dénominateur du gain, et chercher la condition d'existence d'un extremum.

*Exercice 7.10.* Ici la structure du montage est trop complexe pour que la méthode du pont diviseur de tension soit utilisable : on revient aux lois de base des circuits. On peut par exemple appliquer la loi des nœuds en  $A$ , en  $B$  et au point de sortie, et remplacer toutes les intensités par des rapports entre tension et impédance.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux

**3.** Il coupe les basses et les hautes fréquences, et laisse passer une bande de fréquences intermédiaires.

**5.** Il existe trois valeurs de pente pour un filtre du premier ordre : 0, + 20 dB/déc et -20dB/déc. Une pente de  $\pm 40$ dB/déc correspond à un terme en  $\omega^2$  donc à un filtre du second ordre.

**6.** En basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à  $\underline{H}(x) = H_0 jx = \frac{H_0}{\omega_0} j\omega$ . Or une multiplication par  $j\omega$  en complexes correspond à une dérivation temporelle.

**8.** Il faut toujours calculer la ou les pulsation(s) de coupure d'un filtre du second ordre, en fonction de sa nature ; pour un passe-bande par exemple,  $x = 1$  est sa pulsation centrale (ou pulsation de résonance), et ses deux pulsations de coupure sont de part et d'autre de cette valeur.

**10.** La phase d'un filtre du second ordre peut varier au maximum de  $\pi$ , car le terme prépondérant du dénominateur varie de 1 (argument 0) en BF à  $-\omega^2$  (argument  $\pi$ ) en HF.

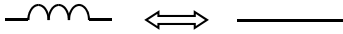
### □ Les erreurs classiques

- Dans l'étude (sans calcul) du comportement asymptotique, la tension aux bornes d'un interrupteur *ouvert* est souvent non nulle, en tout cas inconnue a priori.
- Attention à bien appliquer la formule du diviseur de tension uniquement à des dipôles (ou associations) *en série*, c'est-à-dire *sans nœud entre eux* (le nœud en sortie n'en est pas vraiment un si la sortie est ouverte).
- Ne pas poser systématiquement  $x = RC\omega$  pour un filtre comportant des résistances  $R$  et des capacités  $C$  : la pulsation caractéristique peut être  $\omega_0 = \frac{\alpha}{RC}$  avec  $\alpha$  différent de 1 (voir les exemples des méthodes).
- Ne pas oublier les barres de module dans l'expression du gain :  $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$  et  $G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$ .
- Contrairement aux formules de chimie (pH, etc.), il n'y a pas de signe - devant le logarithme définissant le gain en décibels.

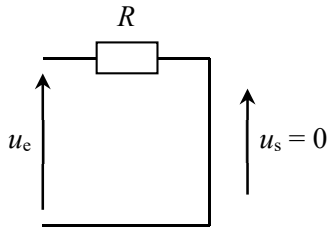
# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 7.1

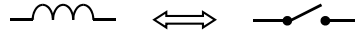
1. En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), la bobine se comporte comme un fil.



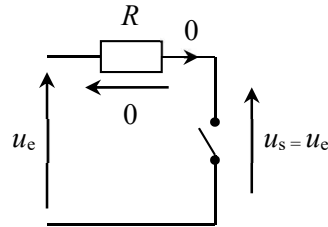
Le schéma équivalent est alors :



En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.



Le schéma équivalent est alors :



Le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, négligeable aux basses fréquences : c'est un filtre passe-haut.

⇒ Méthode 7.1

2. En utilisant la formule du pont diviseur de tension, on obtient  $\frac{U_s}{U_e} = \underline{H} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$ .

On la met sous forme canonique en divisant par  $R$  en haut et en bas, soit  $\underline{H} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$ , qui est

de la forme  $\underline{H} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}$  avec par identification  $H_0 = 1$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{R}\omega$  soit  $\omega_0 = \frac{R}{L}$ .

⇒ Méthode 7.2, 7.3

3. Pour  $x \ll 1$  la fonction de transfert devient  $\underline{H} \approx jx$ , soit  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log(x)$

(asymptote de pente de +20 dB/décade) et  $\varphi = \arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2}$ .

Pour  $x \gg 1$  la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) \approx \frac{jx}{jx} = 1$ , soit  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 0$  et  $\varphi = 0$ .

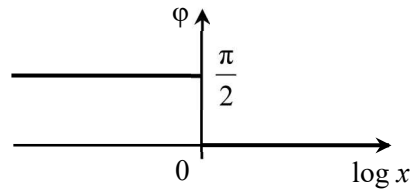
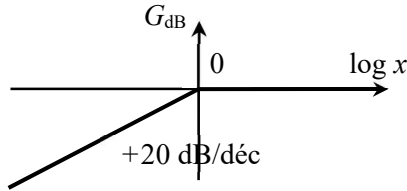
Les asymptotes se coupent pour  $20 \log(x) = 0$ .

– Autre rédaction possible

Pour tout  $x$ ,  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log H_0 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  et  $\varphi = \arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ .

On en déduit les quatre limites précédentes  $\left( \text{sachant que } \arctan(0) = 0 \text{ et } \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2} \right)$ .

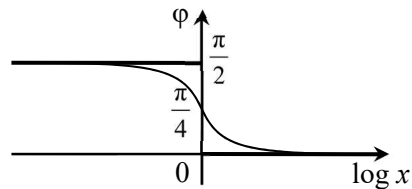
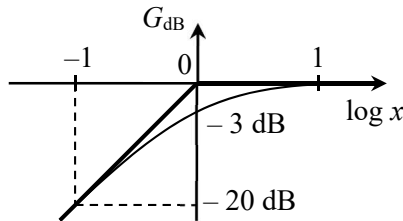
Le diagramme de Bode asymptotique du filtre a donc l'allure suivante.



*✎ Cette fois le zéro est valable pour l'axe des ordonnées et aussi pour l'axe des abscisses, où  $\log x = 0$  correspond à la valeur  $x = 1$ , soit  $\omega = \omega_0$ .*

4. La pulsation de coupure à  $-3$  dB correspond à la valeur  $G_{dB} = -20 \log \sqrt{2} = -3$  dB soit  $G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}}$  : on en déduit immédiatement  $x_c^2 = 1$ , soit  $x_c = 1$  et  $\boxed{\omega_c = \omega_0}$ .

D'autre part,  $\varphi(1) = \arg(j) - \arg(1+j) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ .



5. À partir de  $\underline{H} = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 + j \frac{L}{R} \omega} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{u}_s(t)}{\underline{u}_e(t)}$  on effectue le produit en croix :

$j \frac{L}{R} \omega \underline{u}_e(t) = \underline{u}_s(t) + j \frac{L}{R} \omega \underline{u}_s(t)$ . On repasse ensuite au domaine temporel, sachant que chaque

facteur  $j\omega$  correspond à une dérivation par rapport au temps :  $\frac{L}{R} \frac{du_e}{dt} = u_s + \frac{L}{R} \frac{du_s}{dt}$  soit sous

forme canonique  $\boxed{\frac{du_e}{dt} = \frac{R}{L} u_s + \frac{du_s}{dt}}$ .

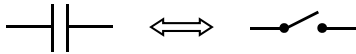
6. Les relations élémentaires sont, en convention récepteur :  $u_R = Ri$  et  $u_s = L \frac{di}{dt}$ . La loi des mailles donne  $u_e = Ri + u_s$ . Pour obtenir une relation liant les tensions d'entrée et de sortie, il faut

alors dériver l'équation, ce qui donne  $\boxed{\frac{du_e}{dt} = \frac{R}{L} u_s + \frac{du_s}{dt}}$ .

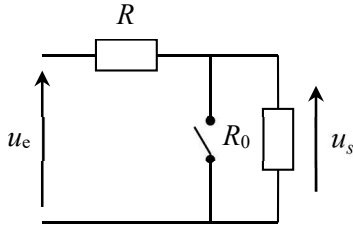


## Exercice 7.2

1. En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.



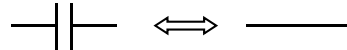
Le schéma équivalent est alors :



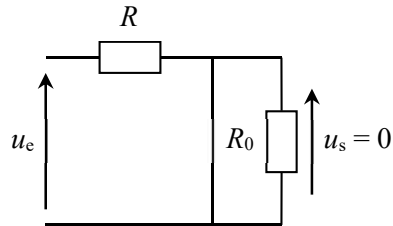
Pont diviseur de tension :  $u_s = \frac{R_0}{R + R_0} u_e$ .

Le signal de sortie est important pour les basses fréquences, négligeable pour les hautes fréquences : il s'agit d'un filtre passe-bas.

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), un condensateur se comporte comme un fil.



Le schéma équivalent est alors :



La tension  $u_s$  est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

$\Rightarrow$  Méthode 7.1

2. On considère l'association parallèle  $C, C_0$  et  $R_0$  que l'on considère comme un dipôle d'impédance  $\underline{Z}_{\text{éq}}$  (dont l'admittance est obtenue immédiatement). D'après le formule du diviseur

de tension, on peut écrire  $\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R + \underline{Z}_{\text{éq}}}$ , soit en divisant par  $\underline{Z}_{\text{éq}}$ ,  $\underline{H} = \frac{1}{R \underline{Y}_{\text{éq}} + 1}$ , avec

$\underline{Y}_{\text{éq}} = j(C + C_0)\omega + \frac{1}{R_0}$ . On obtient alors  $\underline{H} = \frac{1}{jR(C + C_0)\omega + \frac{R + R_0}{R_0}}$ . On cherche à obtenir une

partie réelle unitaire pour le dénominateur soit  $\underline{H} = \frac{R_0}{R + R_0} \frac{1}{j \frac{RR_0}{R + R_0} (C + C_0)\omega + 1}$ . On a une

forme  $\underline{H} = H_0 \frac{1}{1 + jx}$  en identifiant  $H_0 = \frac{R_0}{R + R_0}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{RR_0}{R + R_0} (C + C_0)\omega$ , soit

$$\omega_0 = \frac{R + R_0}{RR_0(C + C_0)}$$

$\Rightarrow$  Méthodes 7.2, 7.3

3. Par définition :  $G(x_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + x_c^2}}$ , d'où  $x_c = 1$  soit  $\omega_c = \omega_0 = \frac{R + R_0}{RR_0(C + C_0)}$ .

*✍ Pour un filtre passe-bas du premier ordre, le gain maximum est obtenu lorsque  $x$  tend vers zéro.*

Dans le cas d'un simple circuit  $RC$ , la fonction de transfert est  $\frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ . On aurait

par identification avec la forme canonique  $H'_0 \frac{1}{1 + jx'}$ ,  $H'_0 = 1$  et  $x' = RC\omega$ . La pulsation réduite de coupure vaut  $x'_c = 1 = RC\omega'_c$  donc  $\omega'_c = \frac{1}{RC}$ . On constate que le fait de brancher le filtre  $RC$  sur un autre circuit modifie sa pulsation de coupure.

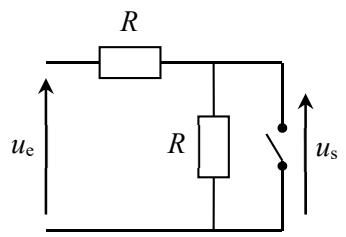
Pour que le filtre ne soit pas perturbé par l'oscilloscope, il faut  $\omega'_c \approx \omega_c$ , il faut donc un rapport des deux pulsations unitaire :  $\frac{\omega_c}{\omega'_c} = \frac{R + R_0}{R_0} \cdot \frac{C}{C + C_0} \approx 1$  soit  $R_0 \gg R$  et  $C_0 \ll C$ .

4. D'après les données de l'énoncé, on trouve  $\omega'_c = 31,3 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_c = 31,4 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On constate que ces deux pulsations sont très proches (il faut aller au troisième chiffre significatif pour les distinguer) : l'oscilloscope ne perturbe pas le fonctionnement du filtre.

*Heureusement que l'oscilloscope ne perturbe généralement pas le fonctionnement des filtres, car en TP on l'utilise toujours pour les étudier !*

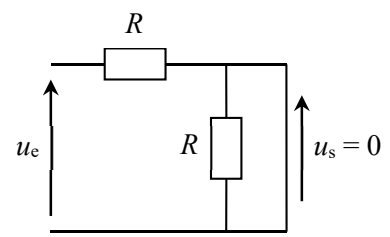
**Exercice 7.3**

1. En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



Pont diviseur de tension :  $u_s = \frac{R_0}{R + R_0} u_e$ .

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



La tension  $u_s$  est la tension aux bornes d'un fil, elle est donc nulle.

Le signal de sortie est négligeable pour les hautes fréquences, important pour les basses fréquences : il s'agit d'un filtre passe-bas.

⇒ Méthode 7.1

2. On considère l'association parallèle  $RC$  comme un dipôle d'impédance  $Z_{\text{éq}}$  (dont l'admittance  $Y_{\text{éq}}$  est obtenue immédiatement). Diviseur de tension :  $\underline{H} = \frac{Z_{\text{éq}}}{R + Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{R Y_{\text{éq}} + 1}$ ,

avec  $Y_{\text{éq}} = jC\omega + \frac{1}{R}$ , soit  $\underline{H} = \frac{1}{jRC\omega + 2}$ . En posant  $x = RC\omega$  on obtient  $\underline{H} = \frac{1}{2 + jx}$ .

✍ On peut mettre la fonction de transfert sous forme canonique avec une partie réelle unitaire pour le dénominateur soit  $\underline{H} = \frac{1/2}{1 + jx/2}$ .

⇒ Méthodes 7.2, 7.3

**3.** Le gain de la fonction de transfert s'écrit  $G = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$ , il est alors évident que  $G_{\max} = \frac{1}{2}$ , qui correspond à la valeur  $|H_0|$  si on avait fait une identification avec la forme canonique.

Par définition,  $G(x_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2/4}}$ , donc  $4+x_c^2=8$  soit  $x_c=2$ . On obtient la

pulsation de coupure  $\omega_c = \frac{2}{RC}$ .

✪\* De façon inhabituelle, cet énoncé définit une pulsation réduite  $x$  qui n'est pas égale à  $\omega/\omega_c$ , on trouve donc une valeur de  $x_c$  différente de 1.

**4.** – Pour  $x \ll 1$ , la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{2}$ .

Alors  $G_{dB} = 20 \log(1/2) = -6 \text{ dB}$ , d'où une asymptote horizontale à -6 dB en basse fréquence sur la courbe de gain. Et  $\varphi = \arg(1/2) = 0$ , d'où l'asymptote pour la phase en BF.

– Pour  $x \gg 1$ ,  $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{jx} = -\frac{j}{x}$ .

Alors  $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = -20 \log x$  : le facteur -20 devant  $\log x$  indique une pente de l'asymptote de -20 dB/décade. Et  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  qui représente l'asymptote de la phase en HF.

On détermine la fréquence de coupure par intersection des asymptotes : on lit  $f_c = 300 \text{ Hz}$ . Or

$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{2}{RC}$  donc  $RC = \frac{1}{\pi f_c}$ . AN  $\boxed{RC = 1 \text{ ms}}$ .

✍ On peut aussi déterminer la fréquence de coupure en cherchant la fréquence pour laquelle le gain est inférieur de 3 décibels à sa valeur maximale (abscisse -9 environ), ou encore celle où la phase vaut  $-45^\circ$ .

⇒ Méthode 7.5

**5.** À haute fréquence,  $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{jx}$ . On reconnaît l'opérateur intégration, caractérisé sur un diagramme de Bode par une pente de -20 dB/décade (division par  $\omega$ ) et un déphasage qui tend vers  $-90^\circ$  (division par  $j$ ).

**6.** Pour 900 Hz, on lit  $G_{dB} = -16 \text{ dB} = 20 \log G$ . On en déduit  $G = 10^{-16/20} = 0,16 = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$ . Donc

$U_{sm} = G \cdot U_{em} = 0,16 \cdot 10$  soit  $\boxed{U_{sm} = 1,6 \text{ V}}$ .

### Exercice 7.4

1. D'après la fonction de transfert, on reconnaît un filtre passé-bas du premier ordre. En effet, si  $\omega \rightarrow 0$ , alors  $H \approx 1$ , le signal est transmis. Si  $\omega \rightarrow \infty$ , alors  $H \approx 0$ , le signal est coupé.

2. En haute fréquence,  $H \approx \frac{1}{x} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f_0}{f}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ , ce qui correspond à une pente de  $-20$  dB/décade dans la courbe de gain. En basse fréquence,  $H \approx 1$ . L'atténuation de 40 dB (au moins) équivaut à une division de l'amplitude par 100 (au moins) pour une fréquence  $f = 1$  kHz, soit  $f_0 = \frac{f}{100} = 10$  Hz.

On en déduit  $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{RC}$ , d'où  $R = \frac{1}{2\pi f_0 C} = 16$  k $\Omega$ . Il s'agit de la valeur la plus faible que

l'on peut prendre pour  $R$ . Si sa valeur est plus élevée, la pulsation de coupure sera plus basse et les composantes à partir de 1 kHz encore plus atténuées.

3. D'après l'énoncé, on considère que les composantes du signal au-delà de 1 kHz sont supprimées. Donc seule la composante continue du signal engendre une sortie non nulle : on obtient en sortie  $u_s(t) = 2$  V. Le filtre renvoie donc bien la valeur moyenne du signal.

4. Le filtre se comporte comme un intégrateur si sa fonction de transfert peut s'écrire sous la forme  $H \approx \frac{1}{jRC\omega}$ . Pour cela, il faut que on puisse négliger la partie réelle du dénominateur devant la partie imaginaire, soit  $RC\omega \gg 1$ , donc le filtre se comporte comme un intégrateur si le signal d'entrée a une pulsation  $\omega \gg \frac{1}{RC}$ , c'est-à-dire une fréquence grande devant 10 Hz.

5. D'après la décomposition en séries de Fourier, le signal créneau peut se décomposer en une composante continue de valeur 2 V et une somme de sinusoïdes de fréquence 1 kHz et ses multiples. Comme le filtre élimine toutes les composantes à partir de 1 kHz, on observe uniquement la réponse au signal continu de 2 V qui donne, avec un gain de 1,  $u_s(t) = 2$  V.

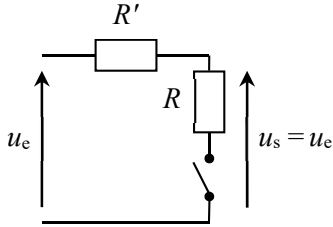
6. L'entrée AC de l'oscilloscope ne laisse passer que la composante alternative du signal, donc comme d'après ce qui précède, il ne devrait y avoir en sortie du filtre que du continu, Toto voit 0 V continu sur l'oscilloscope.

En faisant une modification du calibre, il peut donc observer le traitement par le filtre de la composante alternative. D'après le diagramme de Bode, toutes les composantes sinusoïdales du développement en séries de Fourier correspondent au carré centré. Elles sont à des fréquences de 1 kHz, 2 kHz, 3 kHz, 4 kHz... donc toutes ces fréquences sont dans la partie intégrateur du filtre. Or l'intégrale d'un carré est un triangle. On observe donc un triangle centré en sortie.

*✍ En mode DC, le signal triangulaire est aussi présent, mais son amplitude est très faible devant la valeur moyenne, c'est pour cela que l'on ne l'observe pas. Il est négligeable en comparaison de l'autre.*

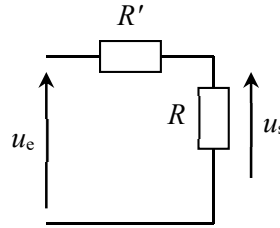
## Exercice 7.5

1. En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ) le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où :



En effet  $u_e - R'i - u_s = 0$  avec  $i = 0$  (interrupteur ouvert) donc  $u_s = u_e$ .

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ) le condensateur se comporte comme un fil, d'où :



D'après la formule du pont diviseur on obtient

$$u_s = \frac{R}{R + R'} u_e.$$

Ce filtre laisse passer les hautes et basses fréquences, mais avec des coefficients différents : on ne peut pas vraiment conclure à partir de cette étude préliminaire.

⇒ Méthode 7.1

2. On utilise la formule du diviseur de tension, soit  $\underline{H} = \frac{R + \frac{1}{jC\omega}}{R' + R + \frac{1}{jC\omega}}$ . On multiplie alors

numérateur et dénominateur par  $jC\omega$  pour avoir des parties réelles unitaires et des puissances croissantes de  $\omega$  :

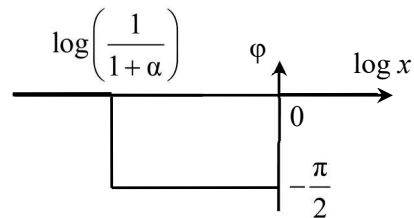
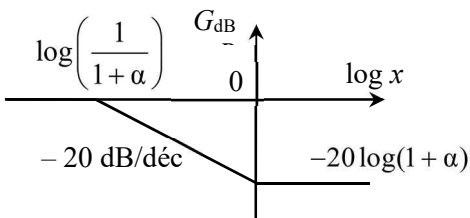
$$\underline{H} = \frac{1 + jRC\omega}{1 + j(R + R')C\omega} = \frac{1 + jx}{1 + j(1 + \alpha)x}$$

⇒ Méthode 7.2

3. Pour  $x \ll \frac{1}{1 + \alpha}$  :  $\underline{H}(x) \approx 1$  soit  $G_{dB} = 0$ ,  $\varphi = 0$ . Pour  $\frac{1}{1 + \alpha} \ll x \ll 1$  (si ce domaine existe) :

$$\underline{H}(x) \approx \frac{1}{j(1 + \alpha)x} \text{ soit } G_{dB} = -20 \log(1 + \alpha) - 20 \log x, \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour  $x \gg 1$  :  $\underline{H}(x) \approx \frac{1}{1 + \alpha}$  soit  $G_{dB} = -20 \log(1 + \alpha)$ ,  $\varphi = 0$ .



4. D'après le diagramme asymptotique de la phase, on voit immédiatement que l'argument de la fonction de transfert est toujours négatif, soit  $\varphi = \arg(u_s) - \arg(u_e) < 0$  : la sortie est en retard sur l'entrée, d'où le nom filtre à retard de phase.

5. On cherche le déphasage minimal, donc le minimum de la fonction  $\arg(H)$  qui doit correspondre à son seul extremum d'après le diagramme asymptotique de la phase.

$$\varphi = \arctan x - \arctan((1 + \alpha)x) \text{ donc l'extremum correspond à } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} = 0,$$

$$\text{soit } \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+\alpha}{1+((1+\alpha)x)^2} \Leftrightarrow 1 - (1+\alpha) = (1 - (1+\alpha))(1+\alpha)x^2 \Leftrightarrow \alpha = \alpha(1+\alpha)x^2.$$

Les solutions sont  $x = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$  pour  $\alpha \neq 0$  ou toutes les valeurs de  $x$  si  $\alpha = 0$ , mais dans ces conditions, la fonction de transfert est toujours unitaire, et le filtre ne sert absolument à rien !

– Pour  $x = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}$  avec  $\alpha \neq 0$ , la phase minimale vaut  $\varphi = \arctan \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} - \arctan \sqrt{1+\alpha}$  soit

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{1+\alpha} \text{ et le gain vaut alors } G_0 = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{1+\alpha}}}{\sqrt{1+\left((1+\alpha)\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\right)^2}} \text{ soit } G_0 = \sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

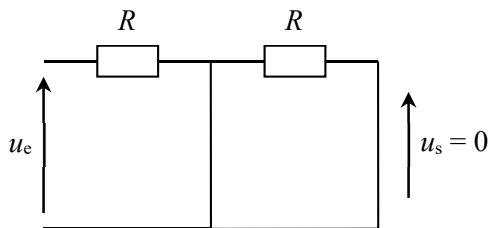
– Si  $\alpha = 0$ , le gain vaut  $G_0 = 1$ , quel que soit  $x$  car il n'y a plus de résistance  $R'$ .

### Exercice 7.6

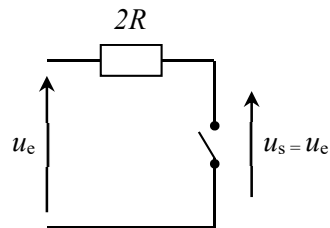
1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut.

La fréquence de coupure doit être nettement plus grande que les fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : le meilleur choix est  $f_0 = 10 \text{ kHz}$ .

2. En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), les bobines se comportent comme des fils, d'où :



En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les bobines se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Le signal de sortie est de l'ordre de grandeur du signal d'entrée pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

⇒ Méthode 7.1

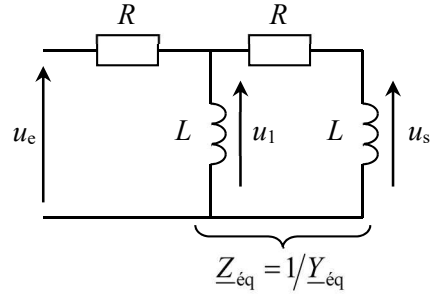
3. On considère deux ponts diviseurs successifs.

Soit  $\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$  l'admittance de l'ensemble

$L$  en parallèle avec  $RL$  (ayant la tension  $u_1$  à ses bornes).

Un premier pont diviseur donne :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}} \underline{U}_e.$$



⚡\* La résistance et l'inductance de gauche ne sont pas en série, et ne constituent pas à elles seules un diviseur de tension. En revanche la résistance et l'inductance de droite, elles, sont bien en série.

Un second diviseur de tension donne :  $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{U}_1$ , soit  $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{éq}}} \underline{U}_e$ .

On obtient en développant :  $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R\left(\frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1\right)} \underline{U}_e = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + j3RL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e$ .

On divise par  $R^2$  pour avoir une partie réelle unitaire et des puissances croissantes de  $\omega$  au

dénominateur :  $\underline{H} = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + j3\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}$ . En posant  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  :  $\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$ .

⇒ Méthodes 7.2, 7.3

4. Pour  $x \gg 1$ , la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) \approx 1$  donc  $G_{\text{dB}} = 0$  et  $\varphi = 0$  (réel positif).

Pour  $x = 1$ ,  $\underline{H}(1) = \frac{-1}{1 + 3j - 1} = \frac{j}{3}$ , donc  $G_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (imaginaire pur positif).

Pour  $x \ll 1$ ,  $\underline{H} \approx -x^2$ , donc  $G_{\text{dB}} = 40 \log x$  (pente de +40 dB/décade) et  $\varphi = \arg(-x^2) = \pi$  : on choisit  $\pi$  car le saut de phase ne peut être que de  $\frac{\pi}{2}$  avec la valeur pour  $x = 1$ .

⚡\* Pour un nombre réel négatif comme  $-x^2$ , on pourrait choisir aussi un argument de  $-\pi$  au lieu de  $+\pi$ , les deux sont équivalents. Mais ici ce sont les autres valeurs qui nous imposent ce choix.

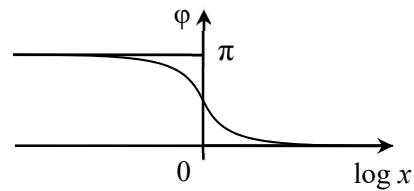
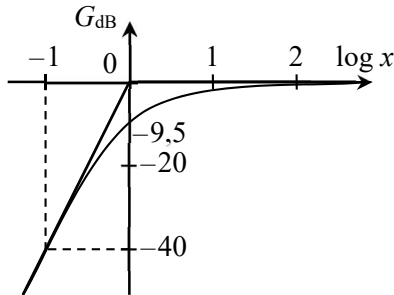
Autre rédaction : pour tout  $x$ ,  $G_{dB} = 20 \log \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} = 40 \log x - 10 \log [(1-x^2)^2 + 9x^2]$  et

$$\varphi = \arg \frac{-x^2}{1+3jx-x^2} = \arg \frac{jx}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x-\frac{1}{x}\right), \text{ d'où on peut déduire les limites et}$$

valeurs précédentes (avec  $\arctan(0) = 0$ ,  $\arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$  et  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ ).

On note que les asymptotes de gain se coupent pour  $\log x = 0$ .

On complète le diagramme avec les valeurs calculées précédemment en  $x = 1$ .



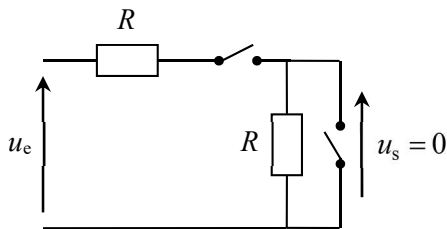
Le diagramme de Bode réel n'a pas de pic de résonance car le facteur de qualité du filtre vaut

$Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$  (voir exercice 9.9); de plus en  $x = 1$  la courbe est nettement en dessous de la valeur maximale, il est donc impossible d'avoir un pic dans ces conditions.

5. La fréquence de coupure est  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$  donc  $L = \frac{R}{2\pi f_0}$ . AN  $L = 1,6 \text{ mH}$  (ordre de grandeur des inductances effectivement utilisées dans les filtres ADSL).

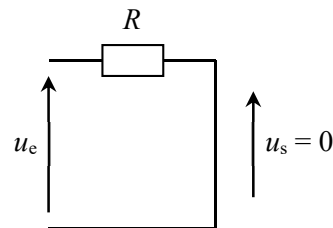
### Exercice 7.7

1. En BF ( $\omega \rightarrow 0$ ) les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Aucun courant ne peut circuler donc  $u_s = 0$ .

En HF ( $\omega \rightarrow \infty$ ) les condensateurs se comportent comme des fils, d'où :



La tension est nulle aux bornes d'un fil.

Le signal de sortie est nul pour les hautes et basses fréquences, et n'est donc important que pour une bande de fréquences intermédiaires : il s'agit d'un filtre passe-bande.

⇒ Méthode 7.1



2. On applique la méthode du diviseur de tension, avec  $Z_{\text{éq}}$  l'impédance des branches  $R$  et  $C$  en

$$\text{parallèle : } \underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{Z_{\text{éq}}}{R + \frac{1}{jC\omega} + Z_{\text{éq}}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) Y_{\text{éq}}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{jx}\right)(1 + jx)} \text{ soit } \underline{H} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{j}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)}. \text{ Par identification, } \boxed{Q = \frac{1}{3}} \text{ et } \boxed{H_0 = \frac{1}{3}}.$$

⇒ Méthodes 7.2, 7.3

3. Le gain s'écrit  $G = |\underline{H}| = |H_0| \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$ . Sa valeur maximale correspond au minimum

du dénominateur, obtenu pour  $x = 1$  ( $x - \frac{1}{x} = 0$ ). Alors  $\underline{H} = H_0$ , soit  $\boxed{G_{\text{max}} = |H_0| = H_0 = \frac{1}{3}}$ ,

$$\boxed{G_{\text{dB max}} = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}} \text{ et } \boxed{\varphi = \arg\left(\frac{1}{3}\right) = 0}.$$

Par définition de la pulsation de coupure réduite :  $G(x_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}}$

⇔  $1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 2$  ⇔  $Q \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1$  ⇔  $\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm \frac{1}{Q}$ , ce qui s'écrit en multipliant

par  $x_c$  :  $x_c^2 \pm \frac{x_c}{Q} - 1 = 0$  (deux équations du second degré). Discriminant :  $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > \frac{1}{Q^2}$  d'où

les quatre solutions  $x_c = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right) = \frac{\omega_c}{\omega_0}$ . Or seules les solutions positives sont possibles,

donc  $\boxed{\omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)}$  et  $\boxed{\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)}$ . La largeur de la bande passante

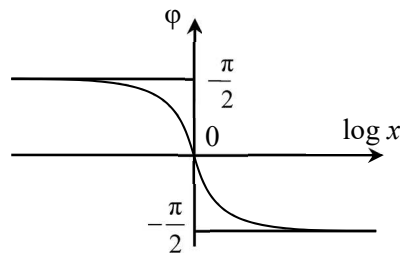
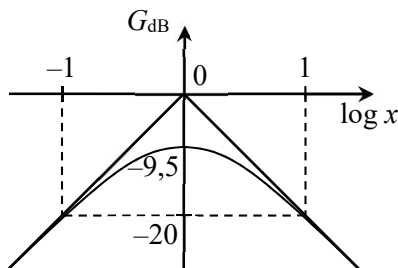
est alors  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  soit  $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$ .

4. Pour  $x \ll 1$  la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{-jQx} = jx$ , car  $\frac{H_0}{Q} = 1$ , donc

$G_{\text{dB}} = 20 \log(x)$  (pente de +20 dB/décade) et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (imaginaire pur positif).

Pour  $x \gg 1$ ,  $\underline{H}(x) \approx \frac{H_0}{jQx} = -\frac{j}{x}$  donc  $G_{dB} = -20 \log x$  (pente de  $-20$  dB/décade) et  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

Les asymptotes de gain se coupent en  $\log x = 0$ , pour  $G_{dB} = 0$ .



5. Les valeurs de  $R$  et  $C$  permettent de déterminer  $\omega_0 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 2,0 \text{ krad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Alors le premier terme de  $u_c(t)$  est à la pulsation  $\omega = \frac{\omega_0}{10}$  soit  $x = \frac{1}{10}$  et  $\log x = -1$ ; donc

$G_{dB} \approx -20 \text{ dB} = 20 \log \frac{1}{10}$  et  $\varphi \approx +\frac{\pi}{2}$ , ce qui donne en sortie  $\frac{E_m}{10} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{E_m}{10} \sin(\omega t)$ .

Le deuxième terme est à la pulsation  $\omega' = 10\omega = \omega_0$  soit  $x' = 1$  et  $\log x' = 0$ ; donc

$G_{dB} = -9,5 \text{ dB} = 20 \log \frac{1}{3}$  et  $\varphi = 0$ , ce qui donne en sortie  $\frac{E_m}{3} \cos(10\omega t)$ .

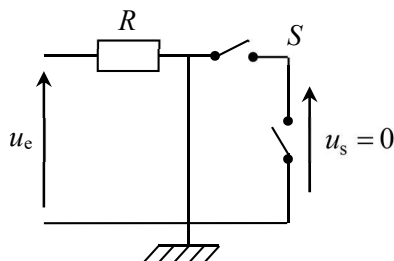
Enfin le troisième terme est à la pulsation  $\omega'' = 100\omega = 10\omega_0$  soit  $x'' = 10$  et  $\log x'' = 1$ ; donc

$G_{dB} \approx -20 \text{ dB} = 20 \log \frac{1}{10}$  et  $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$ , ce qui donne  $\frac{E_m}{10} \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +\frac{E_m}{10} \sin(100\omega t)$ .

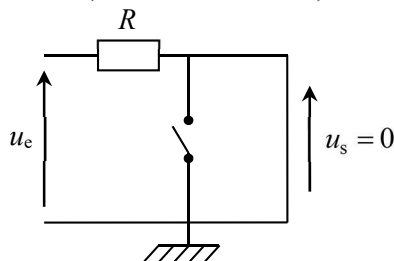
Conclusion :  $u_s(t) = -\frac{E_m}{10} \sin(\omega t) + \frac{E_m}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_m}{10} \sin(100\omega t)$ .

### Exercice 7.8

1. En BF ( $\omega \rightarrow 0$ ), les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, la bobine comme un fil :  $S$  n'est relié à rien donc  $u_s = 0$ .



En HF ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un coupe-circuit :  $u_s = 0$  (aux bornes d'un fil).



Ce quadripôle coupe les basses et les hautes fréquences : c'est donc un filtre passe-bande.

⇒ Méthode 7.1

2. On peut identifier ici, non pas un mais deux diviseurs de tension successifs.

D'une part, les deux condensateurs peuvent être considérés comme étant en série (car rien n'est branché aux bornes de sortie). La tension aux bornes du deuxième ( $2C$ ) est  $u_s$  et la tension aux bornes de l'ensemble des deux est aussi celle aux bornes de l'inductance  $L$ , que l'on note  $u$ . La formule du diviseur de tension donne donc :  $u_s = \frac{1/j3C\omega}{1/j3C\omega + 1/jC\omega} u = \frac{1}{1+3} u$  soit  $u_s = \frac{u}{4}$ .

D'autre part la résistance  $R$  est en série avec l'association des trois autres dipôles : la tension aux bornes de l'ensemble est  $u_e$  et celle aux bornes de l'association des trois dipôles est  $u$ . Pour cette association en parallèle on travaillera avec son admittance  $\underline{Y}$ , beaucoup plus légère à écrire que son impédance  $\underline{Z}$  : ainsi  $u = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} u_e = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} u_e = \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{jL\omega} + jC_{\text{éq}}\omega\right)} u_e$  avec

$$C_{\text{éq}} = \frac{C \times 3C}{C + 3C} = \frac{3C}{4} \text{ (condensateurs en série) donc } u = \frac{1}{1 + jR\left(\frac{3C\omega}{4} - \frac{1}{L\omega}\right)} u_e.$$

On combine les deux relations :  $4u_s = \frac{1}{1 + jR\left(\frac{3C\omega}{4} - \frac{1}{L\omega}\right)} u_e$  d'où  $\underline{H} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + j\left(\frac{3RC\omega}{4} - \frac{R}{L\omega}\right)}$

qu'on peut identifier à la première forme canonique donnée.

Tout d'abord  $A = \frac{1}{4}$ . Ensuite  $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4}$  et  $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$  : en multipliant membre à membre on

obtient  $Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}$ , tandis qu'en divisant membre à membre on trouve  $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}$ .

⇒ Méthodes 7.2, 7.3

**3.** – Pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\underline{H} \approx j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$ .

$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ , la courbe de gain présente une asymptote de pente  $+20 \text{ dB/décade}$

et la phase une asymptote  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

– Pour  $\omega = \omega_0$ ,  $\underline{H} = A$  donc  $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{4} = -12 \text{ dB}$  et  $\varphi = 0$ .

– Pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{H} \approx -j \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$

$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{A}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$  la courbe de gain présente une asymptote de pente  $-20 \text{ dB/décade}$  et

la phase une asymptote  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

On sait que l'intersection des asymptotes de gain d'un passe-bande se fait en  $f_0$ . On lit donc directement sur le diagramme  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

On peut aussi remarquer que lorsque le signal d'entrée est à la pulsation  $\omega_0$ , alors la fonction de transfert s'écrit  $\underline{H} = A = \frac{1}{4}$ . C'est donc la fréquence pour laquelle la phase de la fonction de transfert vaut 0, soit  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

Par définition, la fréquence de coupure correspond à la valeur maximale du gain  $-3 \text{ dB}$ . On lit approximativement sur le diagramme  $f_1 = 950 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 1050 \text{ Hz}$ .

*On vérifie bien pour un passe-bande :*  $\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{1}{Q}$ .

⇒ Méthode 7.5

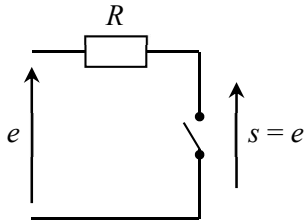
4.  $u_e(t) = 2B \cos(100\omega_0 t) \cos(101\omega_0 t) = B[\cos(\omega_0 t) + \cos(201\omega_0 t)]$ .

La pulsation  $201\omega_0$  est très éloignée de la résonance, donc le second terme est pratiquement éliminé. Pour le terme à  $\omega_0$ ,  $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{4} = -12 \text{ dB}$  et  $\varphi = 0$  donc on obtient

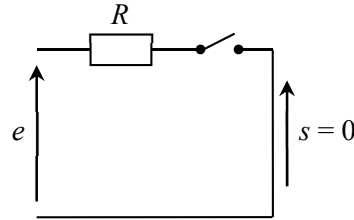
$$u_s(t) \approx \frac{B}{4} \cos(\omega_0 t).$$

### Exercice 7.9

1. À basse fréquence, l'inductance se comporte comme un fil, et le condensateur comme un interrupteur ouvert :



À haute fréquence, l'inductance se comporte comme un interrupteur ouvert, et le condensateur comme un fil :



Ce quadripôle est un filtre passe-bas.

⇒ Méthode 7.1

2. a) Pour établir la fonction de transfert, il suffit d'appliquer la règle du diviseur de tension :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{RjC\omega - LC\omega^2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \text{ C'est un filtre d'ordre 2.}$$

⇒ Méthode 7.2

b) On a les équivalences suivantes entre la notation complexe et la notation réelle :

$j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$  et  $\frac{1}{j\omega} \leftrightarrow \int dt$ . On a  $\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e}$ , soit  $\underline{s} \times \left( 1 + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} + \left( j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = \underline{e}$ . Cette expression

devient en temporel :  $\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$ .

Le régime transitoire correspond à la solution de l'équation sans second membre. Ici tous les coefficients de l'équation différentielle sont positifs, les racines de l'équation caractéristique ont une partie réelle négative : les solutions sont des exponentielles convergentes quand  $t \rightarrow \infty$ .

$$3. |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$$

4.  $|\underline{H}(\omega)|$  est maximal quand  $\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}$  est minimal, donc quand  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}$

est minimal (car la fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  est croissante). Alors sa dérivée est nulle :

$2 \times \left(-2 \frac{\omega}{\omega_0^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + 2 \frac{\omega}{Q^2 \omega_0^2} = 0$  et comme  $\omega \neq 0$ , on obtient  $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \frac{1}{2Q^2}$  soit finalement

$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{1}{2Q^2}$ . La solution existe si  $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ , soit  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  : alors le maximum de  $|\underline{H}(j\omega)|$

se produit pour  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . Ce phénomène s'appelle la résonance.

La solution n'existe pas si  $1 - \frac{1}{2Q^2} < 0$ , soit  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  : alors  $|\underline{H}(j\omega)|$  n'a pas de maximum.

5. Pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} = 0$ ,  $\varphi = 0$ .

Pour  $\omega = \omega_0$ ,  $\underline{H} = -jQ$  donc  $G_{dB} = 20 \log(Q)$ ,  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

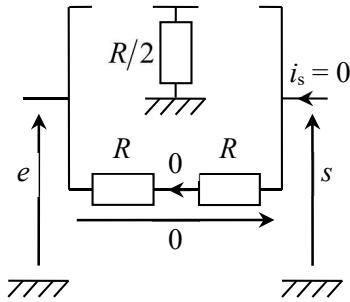
Pour  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{H} \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  donc  $G_{dB} = 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$ ,  $\varphi = -\pi$ .

On lit donc graphiquement la valeur de  $f_0 = 1 \text{ kHz}$  lorsque  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

⇒ Méthode 7.5

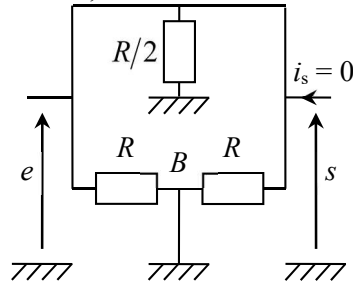
## Exercice 7.10

1. En BF ( $\omega \rightarrow 0$ ) les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Loi des mailles :  $s - 0 - e = 0$  soit  $s = e$ .

En HF ( $\omega \rightarrow \infty$ ) les condensateurs se comportent comme des fils, d'où :



L'entrée et la sortie sont directement reliées par le fil du haut, donc  $s = e$ .

Ce quadripôle laisse passer les signaux de basses fréquences et de hautes fréquences, et ne supprime donc qu'une bande de fréquences intermédiaires : c'est bien un filtre coupe-bande.

⇨ Méthode 7.1

2. On introduit comme intermédiaires de calcul les tensions  $u_A$  (aux bornes de  $R/2$ ) et  $u_B$  (aux bornes de  $2C$ ), qui sont égales aux potentiels des points  $A$  et  $B$  (car l'autre point est la masse). On applique trois fois la loi des nœuds, et on remplace chaque intensité par un rapport  $\underline{u}/\underline{Z}$  ou un produit  $\underline{Y}u$ . En  $A$  :

$$\sum \underline{i}_k = 0 \Leftrightarrow jC\omega(\underline{e} - \underline{u}_A) + jC\omega(\underline{s} - \underline{u}_A) - \frac{2\underline{u}_A}{R} = 0 \Leftrightarrow \underline{u}_A = \frac{jC\omega\underline{e} + jC\omega\underline{s}}{2jC\omega + \frac{2}{R}} \Leftrightarrow \underline{u}_A = \frac{jx\underline{e} + jx\underline{s}}{2jx + 2}.$$

$$\text{En } B : \frac{\underline{e} - \underline{u}_B}{R} + \frac{\underline{s} - \underline{u}_B}{R} - j2C\omega\underline{u}_B = 0 \Leftrightarrow \underline{u}_B = \frac{\frac{\underline{e}}{R} + \frac{\underline{s}}{R}}{\frac{2}{R} + j2C\omega} \Leftrightarrow \underline{u}_B = \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + j2x}.$$

$$\text{Enfin à la sortie : } \frac{\underline{u}_B - \underline{s}}{R} + jC\omega(\underline{u}_A - \underline{s}) + 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{s} = \frac{jC\omega\underline{u}_A + \frac{1}{R}\underline{u}_B}{jC\omega + \frac{1}{R}} \Leftrightarrow (jx + 1)\underline{s} = jx\underline{u}_A + \underline{u}_B.$$

*Les formules obtenues ici constituent la loi des nœuds en termes de potentiels, ou théorème de Millman.*

Dans cette dernière égalité, on remplace  $\underline{u}_A$  et  $\underline{u}_B$  par les expressions trouvées avant :

$$(jx + 1)\underline{s} = jx \frac{jx\underline{e} + jx\underline{s}}{2jx + 2} + \frac{\underline{e} + \underline{s}}{2 + j2x} \Leftrightarrow (2jx + 2)(jx + 1)\underline{s} = (1 - x^2)\underline{e} + (1 - x^2)\underline{s}$$

$$\Leftrightarrow (1 + 4jx - x^2)\underline{s} = (1 - x^2)\underline{e} \text{ d'où finalement } \underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 + 4jx - x^2}.$$

Il s'agit de la forme cherchée avec  $\underline{H}_0 = 1$  et  $\underline{Q} = \frac{1}{4}$ .

**3.** On voit que le gain tend vers  $-\infty$  en  $x=1$ , soit  $f=f_0$ , ce qui correspond au fait que la fonction de transfert s'annule (et dans ce cas, la phase n'est pas définie : on observe une discontinuité).

Par ailleurs,  $H$  tend vers 1 pour  $x \rightarrow 0$  et pour  $x \rightarrow \infty$ , ce qui donne bien  $G_{dB} \rightarrow 0$  et  $\varphi \rightarrow 0$  (asymptotes horizontales).

⇒ Méthode 7.5

On veut éliminer la fréquence  $f_0 = 50$  Hz avec  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}$  donc on doit prendre

$RC = \frac{1}{2\pi f_0} = 3,2 \cdot 10^{-3}$  s. On peut prendre par exemple  $R = 68$  k $\Omega$  et  $C = 47$  nF (valeurs usuelles au laboratoire).

### Exercice 7.11

**1 à 3.** Voir le programme ci-dessous.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

H0=3          #gain du filtre
f0=1e1        #frequence de coupure
fe=1e3        #frequence du signal d'entrée
E=2           #amplitude du signal d'entrée
nb_termes=100 #nombre de termes dans le spectre
t = np.linspace(0, 3/fe, 2000) #liste du temps sur 3 périodes

def generation_coefficient(nombre_termes): #génération des coefficients du carré
    coef=[]
    n=0
    while len(coef) < nombre_termes :
        coef.append(4*E/np.pi*(2*n+1))
        n=n+1
    return(coef)

def entree(coef,temps): #génération du signal carré d'entrée
    e=[0]
    for n in range(len(coef)):
        e=e+coef[n]*np.sin(2*np.pi*fe*(2*n+1)*temps)
    return(e)

def filtre_passe_bas(coef,temps,H0,f0): #génération du signal de sortie
    s=[0]
    for n in range(len(coef)):
        f=fe*(2*n+1)
        s=s+coef[n]*H0/(np.sqrt(1+(f/f0)**2))*np.sin(2*np.pi*f*temps-np.arctan(f/f0))

    return(s)
```

```

coef_carre=generation_coefficient(nb_termes) #Liste des coefficients
carre=entree(coef_carre,t) #Liste du signal carré d'entrée
sortie_passe_bas=filtre_passe_bas(coef_carre,t,H0,f0) #Liste du signal de sortie

```

```

plt.plot(t,carre,label="signal entrée")
plt.title("signal d'entrée")
plt.xlabel('temps (s)')
plt.tick_params(axis='y', labelleft='off', labelright='on')
plt.ylabel('e(t) (V)')
plt.grid()
plt.savefig("entree.pdf")
plt.show()

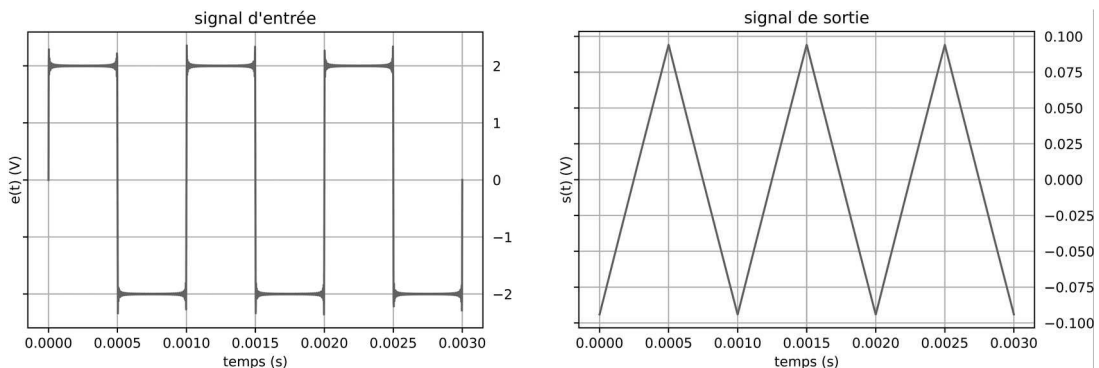
```

```

plt.plot(t,sortie_passe_bas,label="signal de sortie du passe bas")
plt.title("signal de sortie")
plt.xlabel('temps (s)')
plt.tick_params(axis='y', labelleft='off', labelright='on')
plt.ylabel('s(t) (V)')
plt.grid()
plt.savefig("sortie.pdf")
plt.show()

```

**4.a)** On observe les signaux suivants :



On note que le signal est relativement proche d'un signal carré. On pourra observer que si on le décrit avec moins de termes, 10 par exemple, la forme est alors un peu plus éloignée.

Le signal de sortie étant triangulaire, il s'agit de l'intégration du signal d'entrée.

**b)** On note que tous les éléments du signal carré sont dans la partie intégration du signal, car pour

$f > 10f_0$  alors  $\underline{H} \approx \frac{H_0}{jx} = \frac{H_0\omega_0}{j\omega} = \frac{s_i}{e_i}$  pour tous les harmoniques de rang  $i$  du signal d'entrée (et

donc de sortie, puisque le filtre est linéaire). On peut donc écrire  $H_0\omega_0 \underline{e}_i = j\omega s_i$ , soit

$H_0\omega_0 e_i(t) = \frac{ds_i}{dt}$ . On somme tous les termes et l'on obtient  $H_0\omega_0 \sum_i e_i(t) = \frac{d\left(\sum_i s_i\right)}{dt}$ , soit

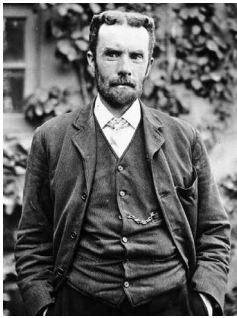
$H_0\omega_0 e(t) = \frac{ds}{dt}$ .



On effectue le calcul sur le premier intervalle par exemple  $H_0\omega_0 E = \frac{ds}{dt} \underset{\substack{\text{pente} \\ \text{constante}}}{=} \frac{\Delta s}{\Delta t \text{ (triangle)}} = \frac{2S_{\max}}{T/2}$ .

On en déduit  $S_{\max} = H_0\omega_0 E \frac{T}{4} = 94 \text{ mV}$ , valeur conforme à ce que donne la simulation.

# Amplificateur linéaire intégré



**Oliver HEAVISIDE** (1850-1925) est un physicien anglais autodidacte. En découvrant en 1873 le *Traité d'électricité et de magnétisme* de MAXWELL qui le fascine, il comprend qu'il ne peut poursuivre sans un sérieux bagage mathématique. Il devient l'un des fondateurs de l'analyse vectorielle avec Josiah GIBBS, et utilise cet outil pour simplifier les équations de MAXWELL. Il introduit l'utilisation des nombres complexes pour l'étude des circuits électriques.

## ■ Un peu d'histoire

La plus grande partie des propriétés de l'électricité et du magnétisme ont été découvertes entre l'expérience d'ØRSTED en 1819 et les découvertes de MAXWELL exposées dans son traité en 1873. En un demi-siècle, il a fallu donner un nom à de nombreuses notions. Pour nommer les unités, les noms des acteurs de ces découvertes ont été utilisés comme AMPÈRE, FARADAY (le farad) et OHM. Le volt, quant à lui, doit son nom à Alessandro VOLTA, l'inventeur de la pile. Curieusement, des dérivés comme l'anglais *voltage* ou même le verbe *survolter* sont entrés dans le langage courant. Ce même savant italien utilise l'expression *tensione elettrica* pour désigner la différence de potentiel. FARADAY utilise le mot *induction* pour nommer sa découverte du courant induit en 1831, et son compatriote HEAVISIDE crée le mot *impedance* en 1886 qu'il dérive du verbe anglais *impede*, signifiant *ralentir* ou *faire obstacle*.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les propriétés de l'amplificateur linéaire intégré (ALI)
- ▷ Le modèle de l'ALI idéal de gain infini
- ▷ Les propriétés du régime linéaire et l'existence du régime saturé
- ▷ La notion de filtre actif
- ▷ Les schémas des montages suiveur, amplificateurs non inverseur et inverseur, intégrateur

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Justifier le comportement linéaire d'un amplificateur linéaire intégré
- ▷ Établir la relation entrée-sortie d'un montage à amplificateur linéaire intégré
- ▷ Déterminer l'impédance d'entrée d'un montage
- ▷ Réaliser et exploiter en TP un montage à amplificateur linéaire intégré

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Caractéristiques d'un amplificateur linéaire intégré

### □ Description

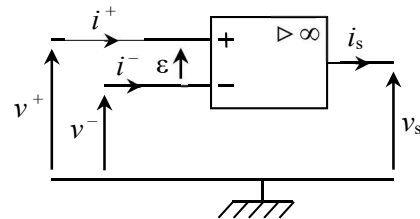
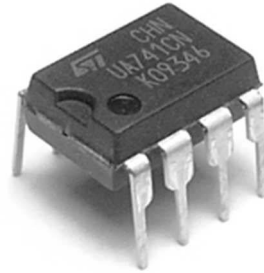
Un amplificateur linéaire intégré (ALI), également appelé amplificateur opérationnel (AO), est un composant électronique comportant sept bornes, dont cinq sont toujours utilisées.

Deux de ces bornes sont reliées à une source d'alimentation continue externe ( $\pm V_{cc}$ , souvent  $\pm 15\text{ V}$ ), qui n'est pas représentée sur le schéma conventionnel.

Celui-ci fait apparaître uniquement les trois bornes qui seront reliées au reste du circuit :

- l'entrée **inverseuse**, notée  $-$
- l'entrée **non inverseuse** notée  $+$
- la sortie.

La **tension différentielle d'entrée** est  $\boxed{\varepsilon = v^+ - v^-}$ .



### □ Modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal

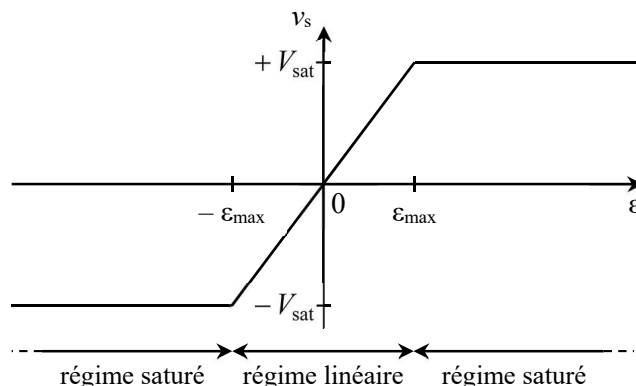
L'amplificateur linéaire intégré **idéal** se caractérise par :

- des courants d'entrée nuls  $\boxed{i^+ = 0}$  et  $\boxed{i^- = 0}$  (impédances d'entrée infinies) ;
- une tension de sortie  $v_s$  indépendante de l'intensité  $i_s$  (impédance de sortie nulle) ;
- une tension de sortie  $v_s$  nulle lorsque  $\varepsilon$  est nulle.

(L'intensité en sortie  $i_s$  est généralement non nulle, et provient des alimentations ; aucune formule simple ne la relie directement aux autres grandeurs de l'ALI.)

### □ Fonctionnement

On distingue trois zones de fonctionnement sur la caractéristique statique d'un ALI.



Intrinsèquement, l'ALI est prévu pour réaliser la fonction  $v_s = A \times \varepsilon$ , avec un gain différentiel  $A$  très grand, d'où son nom d'amplificateur linéaire. Cependant, la sortie est limitée à  $\pm V_{\text{sat}}$  (où la tension de saturation  $V_{\text{sat}}$  est légèrement inférieure à la tension d'alimentation  $V_{\text{cc}}$ ).

### Régime linéaire

Lorsque l'amplificateur est en régime **linéaire**,  $v_s = A \times \varepsilon$  et  $|v_s| < V_{\text{sat}}$ .

Cependant, avec l'ordre de grandeur habituel pour le gain différentiel ( $A \approx 10^5$ ), on trouve

$|\varepsilon| = \frac{|v_s|}{A} < 10^{-4} \text{ V}$  (très faible par rapport aux tensions utilisées habituellement).

Ainsi, dans le modèle de l'ALI de **gain infini** (indiqué par le symbole  $\infty$  sur le schéma), on considère le gain différentiel  $A$  comme infini : alors en fonctionnement linéaire,

$\varepsilon = 0$  soit  $v^+ = v^-$ .

(L'expression *ALI idéal* inclut parfois cette hypothèse du gain infini.)

### Régime saturé

Lorsque l'ALI est en régime **saturé** :  $v_s = +V_{\text{sat}}$  et  $\varepsilon > 0$  ou  $v_s = -V_{\text{sat}}$  et  $\varepsilon < 0$ .

## ■ Utilisation de l'amplificateur linéaire intégré en régime linéaire

### □ Configuration générale

Pour que l'ALI fonctionne en régime linéaire, il faut impérativement une connexion entre la sortie et l'entrée inverseuse (-). Ceci constitue une action stabilisante appelée **rétroaction négative** (ou **contre-réaction**).

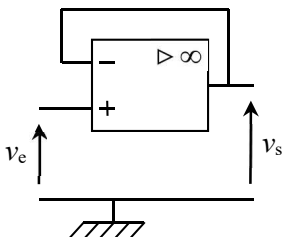
En régime linéaire, l'ALI permet de réaliser diverses opérations mathématiques (intégration, dérivation, sommation...). Il est utilisé aussi pour réaliser des **filtres actifs**, c'est-à-dire capables d'amplifier un signal dans leur bande passante : en effet, l'alimentation continue de l'ALI fournit de l'énergie qui peut servir à l'amplification.

Cependant, lorsque l'entrée impose une tension de sortie qui devrait être supérieure en valeur absolue à  $V_{\text{sat}}$ , alors l'ALI sort du régime linéaire et sature ( $v_s = \pm V_{\text{sat}}$ ).

### □ Montages de base

Pour tous ces montages, on se place dans le cadre du modèle de l'ALI idéal de gain infini.

#### Suiveur

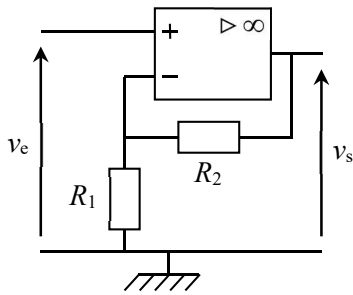


$v_s = v_e$  : le suiveur ne transforme pas le signal.

$Z_e = \infty$  ;  $Z_s = 0$ .

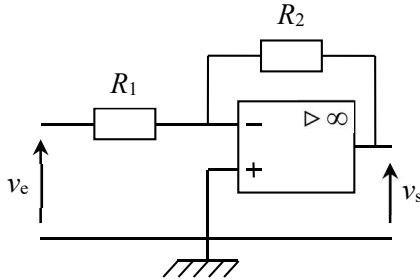
Ce quadripôle étant idéal en entrée et en sortie, il peut être intercalé entre deux quadripôles n'ayant pas ces propriétés, pour réaliser une association idéale.

### Amplificateur non inverseur



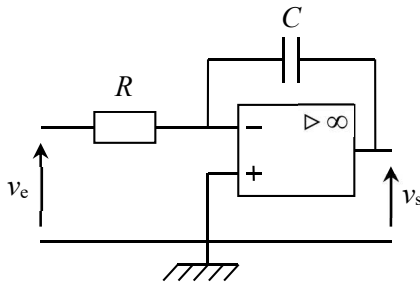
$\frac{v_s}{v_e} = H = 1 + \frac{R_2}{R_1}$  : amplification sans déphasage (et notamment sans changement de signe).  
 $\underline{Z}_e = \infty$  ;  $\underline{Z}_s = 0$ .

### Amplificateur inverseur



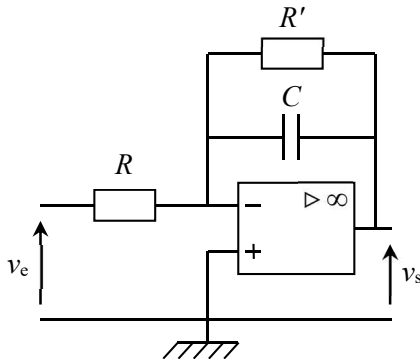
$\frac{v_s}{v_e} = H = -\frac{R_2}{R_1}$  : amplification si  $R_2 > R_1$ , avec changement de signe (donc un déphasage de  $\pi$ ).  
 $\underline{Z}_e = R_1$  ;  $\underline{Z}_s = 0$ .

### Intégrateur (théorique)



$v_s = -\frac{1}{RC} \int v_e dt$  soit  $\frac{v_s}{v_e} = -\frac{1}{j\omega RC}$  quelle que soit la fréquence.  
 Mais en pratique, la sortie finit toujours par saturer à cause de défauts en entrée.  
 $\underline{Z}_e = R$  ;  $\underline{Z}_s = 0$ .

### Pseudo-intégrateur



$\frac{v_s}{v_e} = -\frac{R'}{R} \times \frac{1}{1 + jR'C\omega}$ .  
 On retrouve  $\frac{v_s}{v_e} = -\frac{1}{j\omega RC}$  soit  $v_s = -\frac{1}{RC} \int v_e dt$   
 pour les pulsations  $\omega \gg \frac{1}{R'C}$ .  
 $\underline{Z}_e = R$  ;  $\underline{Z}_s = 0$ .

- ⇒ Méthode 8.1. Détermination de la relation entrée-sortie d'un montage avec un ALI
- ⇒ Méthode 8.2. Détermination de l'impédance d'entrée d'un montage avec un ALI

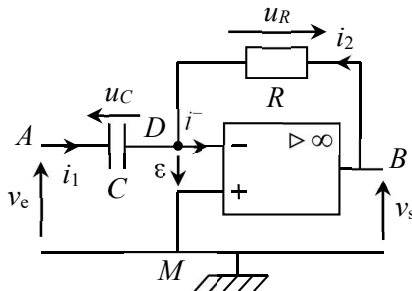
## ■ Comment étudier un montage avec un ALI en régime linéaire ?

### □ Méthode 8.1. Détermination de la relation entrée-sortie d'un montage avec un ALI

- Nommer les intensités et tensions utiles, en n'oubliant pas que dans le modèle de l'ALI idéal, les intensités dans les entrées  $i^+$  et  $i^-$  sont nulles.
- Vérifier qu'il y a une contre-réaction, ce qui implique un fonctionnement linéaire de l'amplificateur linéaire intégré, donc  $\varepsilon = 0$  soit  $v^+ = v^-$  (égalité des potentiels des deux entrées).
- Écrire les lois habituelles (lois des mailles, des nœuds, d'Ohm) avec les grandeurs réelles si on est en régime quelconque, ou avec des grandeurs complexes si on travaille en régime sinusoïdal.
- Éliminer finalement toutes les grandeurs sauf les tensions d'entrée et de sortie.

⇒ Exercices 8.1 à 8.7, 8.9, 8.10, 8.12

Nous cherchons à exprimer le lien entre entrée et sortie du montage ci-dessous. On définit un certain nombre de tensions et d'intensités (en orientant par exemple celles-ci en direction du nœud où sera effectué la loi des nœuds).



Il y a une contre-réaction (retour de la sortie sur l'entrée inverseuse), le montage fonctionne donc en régime linéaire :  $\varepsilon = 0$ , soit  $v^- = v^+$ . De plus, l'entrée + est directement connectée à la masse, donc  $v^+ = 0$ , par conséquent  $v^- = 0$ .

– Calcul en complexes

La loi des mailles s'écrit :

pour la maille <i>MADM</i>	$v_e - u_C + \varepsilon = 0$ soit $v_e - \frac{i_1}{jC\omega} = 0$ ;
pour la maille <i>MBDM</i>	$v_s - u_R + \varepsilon = 0$ , soit $v_s - Ri_2 = 0$ .

La loi des nœuds écrite en  $D$  donne  $i_1 + i_2 = i^- = 0$ , soit en remplaçant :

$$jC\omega v_e + \frac{v_s}{R} = 0, \text{ d'où } \boxed{v_s = -jRC\omega v_e}.$$

En complexes, une multiplication par  $j\omega$  correspond à une dérivation, on peut donc aussi écrire :

$$\boxed{v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}}.$$

Ce montage est un montage *dérivateur*, on peut même préciser *dérivateur inverseur* (à cause du changement de signe).

*✎ Pour des montages plus complexes, il peut être utile d'utiliser une formule dite loi des nœuds en termes de potentiels : il s'agit d'écrire la loi des nœuds en remplaçant directement chaque intensité par son expression en fonction des deux potentiels qui l'entourent. On utilise pour cela le fait que la tension entre un point et la masse est égale au potentiel de ce point : ici par exemple,  $v_e$  est le potentiel du*

*point A et  $v_s$  est celui du point B. On écrirait donc :  $jC\omega(v_e - v^-) + \frac{v_s - v^-}{R} + 0 = 0$ ,*

*ce qui redonne notre relation après avoir écrit  $v^- = 0$ .*

*L'utilisation directe de cette loi peut permettre de gagner quelques lignes et de s'affranchir de la définition des divers courants. Il est donc possible d'utiliser directement la loi des nœuds en termes de potentiels à condition de savoir la retrouver, notamment à l'oral. Sinon, l'écriture habituelle des lois est suffisante pour étudier tous les circuits, et leur application est assez simple pour les circuits dans le cadre du programme.*

– Calcul en réels

On peut écrire les relations caractéristiques des deux dipôles :  $i_1 = C \frac{du_C}{dt}$  et  $u_R = Ri_2$ .

De plus  $u_C = v_e - v^- = v_e$  et  $u_C = v_s - v^- = v_s$ . Enfin la loi des nœuds écrite en  $D$  donne

$i_1 + i_2 = i^- = 0$ , soit en remplaçant :  $C \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_s}{R} = 0$ , ou encore  $\boxed{v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}}$ .

*☛ Il ne faut jamais appliquer la loi des nœuds à la sortie de l'ALI. Il y a en effet un courant d'intensité  $i_s$  inconnue qui sort de l'ALI (et qui provient des deux alimentations, non représentées sur les schémas), pour lequel on n'a aucune autre relation : on ajouterait donc, en même temps qu'une nouvelle équation, une nouvelle inconnue impossible à éliminer.*

*✎ Tous les montages à ALI sont idéaux en sortie, c'est-à-dire que leur impédance de sortie est nulle, car les calculs ci-dessus permettent de déterminer l'expression de la tension de sortie  $v_s$  sans qu'il soit nécessaire de préciser le dipôle de charge (celui branché en sortie) :  $v_s$  est donc toujours indépendante de l'intensité sortant du montage. Seule l'impédance d'entrée varie d'un montage à l'autre, et fait l'objet de la méthode suivante.*

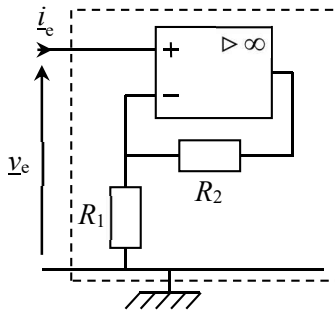


## □ Méthode 8.2. Détermination de l'impédance d'entrée d'un montage avec un ALI

- Placer le courant d'entrée  $i_e$  qui doit être en convention récepteur vis-à-vis de la tension d'entrée  $v_e$ .
- Soit la valeur  $i_e$  est nulle de façon évidente, parce que c'est l'intensité dans l'une des entrées de l'ALI : on en conclut que l'impédance d'entrée est *infinie*.
- Sinon, il faut déterminer le rapport  $\underline{Z}_e = \frac{v_e}{i_e}$  en écrivant d'abord la loi des mailles à l'entrée du montage, puis en utilisant la condition  $v^+ = v^-$  si le fonctionnement est linéaire. On peut éventuellement avoir à écrire une autre fois la loi des mailles.

⇒ Exercices 8.1, 8.8, 8.12

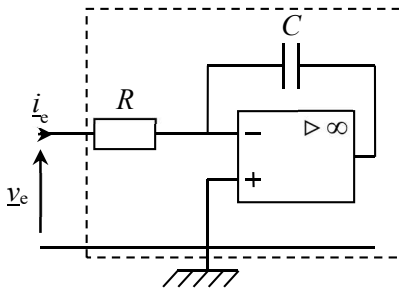
Exemple 1 : amplificateur non inverseur



On constate  $i_e = i^- = 0$ .

L'impédance d'entrée est donc infinie : ce montage est idéal en entrée (en plus de l'être en sortie).

Exemple 2 : intégrateur



On écrit la loi des mailles qui part de l'entrée, soit  $v_e - Ri_e - \underline{\varepsilon} = 0$ .

Le fonctionnement est linéaire du fait de l'unique rétroaction négative, soit  $\underline{\varepsilon} = 0$ .

On en déduit donc  $v_e - Ri_e = 0$ , soit  $\underline{Z}_e = R$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Les courants dans les entrées d'un ALI idéal sont toujours nuls.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. L'impédance d'entrée d'un montage à ALI est infinie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Un filtre actif est un filtre pouvant amplifier le signal dans sa bande passante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Pour que l'amplificateur linéaire intégré puisse fonctionner en régime linéaire, il faut un retour de la sortie sur l'entrée non inverseuse (+).	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Si l'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire, on peut écrire $v^+ = v^-$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Si l'amplificateur linéaire intégré est idéal, on a toujours $v^+ = v^-$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. La tension de saturation $V_{\text{sat}}$ de l'amplificateur linéaire intégré peut être supérieure à la tension d'alimentation $V_{\text{cc}}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Il est possible de réaliser n'importe quel type de filtre avec un amplificateur linéaire intégré.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Les montages à amplificateur linéaire intégré ne fonctionnent qu'en régime sinusoïdal forcé.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Un montage suiveur donne une tension de sortie égale à la tension d'entrée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

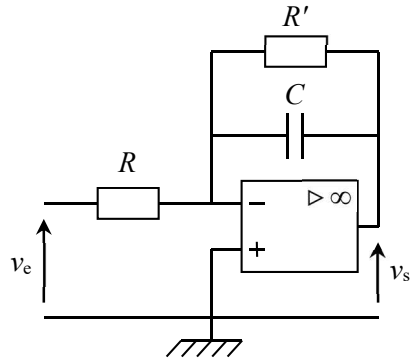
# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Filtres actifs

### □ Exercice 8.1. Montage pseudo-intégrateur

Dans le filtre représenté sur le schéma, l'amplificateur linéaire intégré est idéal.

1. Déterminer la nature de ce filtre à l'aide de son comportement asymptotique.
2. Déterminer la fonction de transfert  $H$  de ce filtre.
3. En déduire son gain maximal  $G_{\max}$  ainsi que sa bande passante.
4. Montrer que ce montage se comporte comme un intégrateur dans un domaine de pulsation que l'on précisera.
5. Déterminer l'impédance d'entrée de ce montage.



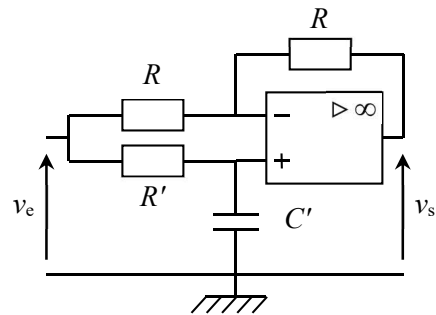
### □ Exercice 8.2. Déphaseur\*

Dans le circuit représenté ci-contre, utilisé en régime sinusoïdal permanent,  $R'$  et  $R$  sont des résistances et  $C'$  une capacité. L'ALI est supposé idéal.

1. Déterminer la fonction de transfert de ce circuit.

On posera  $x = R'C\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  (pulsation réduite).

2. Tracer son diagramme de Bode asymptotique.
3. Déterminer la fonction de ce montage.



*D'après Mines-Ponts*

### □ Exercice 8.3. Filtre universel\*

Le filtre universel peut être réalisé avec les deux montages de base des figures 1 et 2. Tous les amplificateurs opérationnels sont supposés idéaux.

1. Pour le montage de la figure 1, calculer la tension  $v_1$  en fonction de  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$  et de la constante du montage  $a = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ .

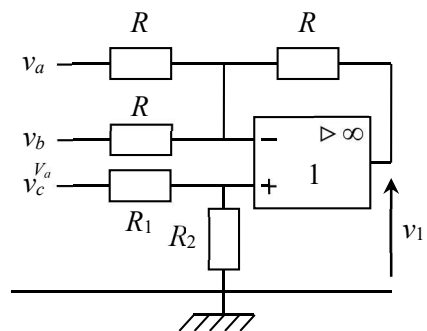


Figure 1

2. Pour le montage de la figure 2, déterminer la relation liant  $v_1(t)$  et  $v_s(t)$  puis en déduire la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_s}{V_1}$  en régime sinusoïdal ; on posera  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

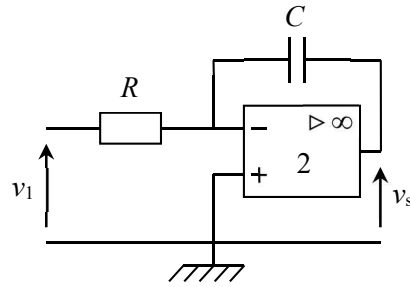


Figure 2

3. On associe les deux montages précédents pour réaliser celui de la figure 3.

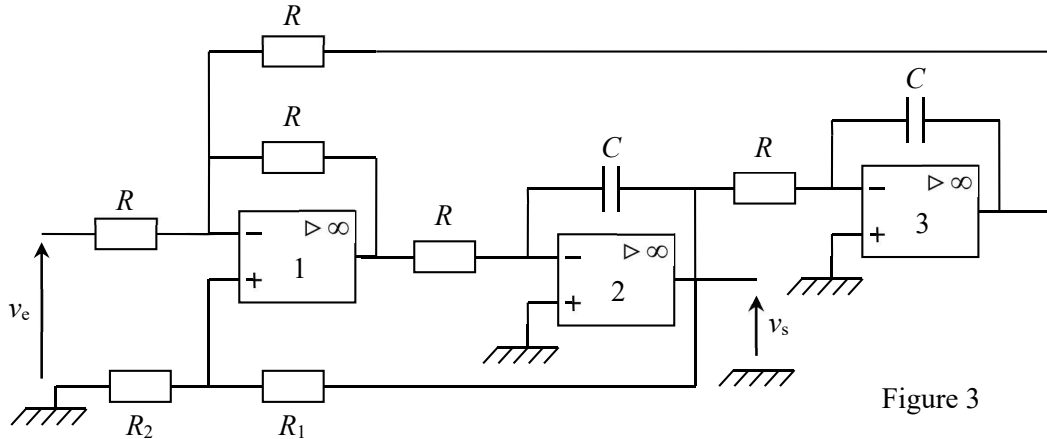


Figure 3

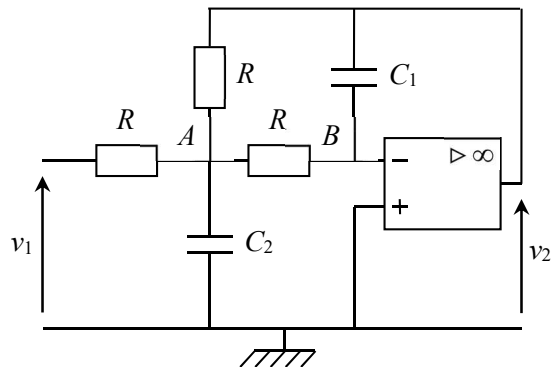
- a) Calculer la fonction de transfert complexe  $\underline{H}' = \frac{V_s}{V_e}$  de ce montage en fonction de  $a$  et de  $x$ .
- b) On se place dans le cas où  $R_1 = 9R_2$ , et pour simplifier on considère  $\log 3 \approx 0,5$ . Tracer le diagramme de Bode de ce filtre. De quel type de filtre s'agit-il ? Déterminer la bande passante  $\Delta\omega$  en fonction du facteur de qualité  $Q$ . Faire une application numérique et conclure.

#### □ Exercice 8.4. Filtre de Rauch\*

Pour obtenir la valeur moyenne du signal  $v_1(t)$  on réalise un filtre passe-bas à l'aide d'un amplificateur linéaire intégré que l'on supposera idéal. Le schéma correspond à une structure dite de Rauch.

1. En utilisant la loi des nœuds au point  $A$  puis au point  $B$ , ainsi que la loi d'Ohm complexe, établir deux relations entre les potentiels  $\underline{V}_A$ ,  $\underline{V}_B$ ,  $\underline{V}_e$  et  $\underline{V}_2$ .

2. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_2}{V_1}$ .



3. On cherche à mettre  $\underline{H}$  sous la forme canonique  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$ .

Déterminer  $H_0$  et donner deux relations entre  $\omega_0$ ,  $m$  et les éléments du circuit.

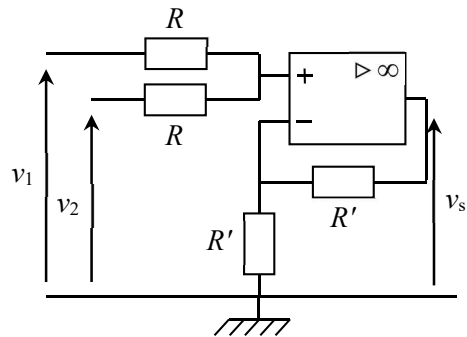
4. On choisit  $R = 470 \text{ k}\Omega$ , et on souhaite obtenir une fréquence propre  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 5,0 \text{ Hz}$  et un coefficient d'amortissement  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Calculer les valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$ .
5. Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure de la courbe réelle.
6. Donner, sans nouveau calcul, l'équation différentielle reliant les tensions  $v_1(t)$  et  $v_2(t)$ , équation où figureront les constantes  $\omega_0$  et  $m$ .

*D'après Banque PT*

## ■ Réalisation de fonctions diverses

### □ Exercice 8.5. Montage sommateur non inverseur

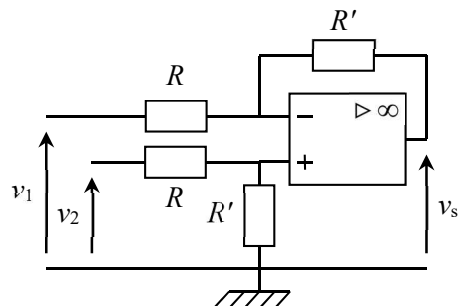
- Justifiez que l'amplificateur linéaire intégré (supposé idéal de gain infini) fonctionne en mode linéaire.
- Déterminer la relation liant  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_s$ .



### □ Exercice 8.6. Montage soustracteur

On considère le montage représenté ci-contre.

- Déterminer l'expression de  $v_s$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ . Quelle est l'opération réalisée par le montage ?
- On remplace chaque conducteur ohmique de résistance  $R'$  par un condensateur de capacité  $C$ .
  - Établir alors la relation entre  $\frac{dv_s}{dt}$  et  $(v_2 - v_1)$ .

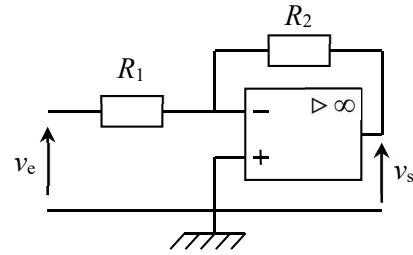


Quelle opération réalise-t-on ?

- Le circuit, tel qu'il a été modifié, peut-il fonctionner pendant un temps très important ?

### □ Exercice 8.7. Limitation de l'amplificateur inverseur\*\*

On réalise le montage représenté sur ce schéma.

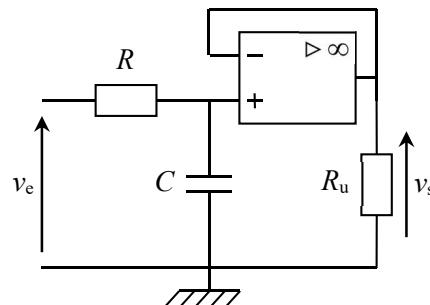
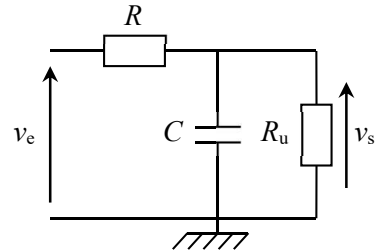


1. Exprimer la tension de sortie  $v_s$  en fonction de la tension d'entrée  $v_e$  et des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .
2. Si on prend la valeur  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ , quelle doit être la valeur de  $R_2$  pour avoir une amplification de la taille du signal d'un facteur 5 ?
3. Représenter la courbe  $v_s = f(v_e)$ , sachant que la tension de saturation de l'amplificateur linéaire intégré vaut 15 V et que la tension  $v_e$  peut varier entre  $\pm 4 \text{ V}$ .
4. On tient compte maintenant du gain non infini de l'ALI,  $\varepsilon$  n'est pas rigoureusement nul, et on pose en régime sinusoïdal  $\underline{A} = \frac{v_s}{\varepsilon} = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_c}$  avec  $A_0 = 2 \cdot 10^5$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 10 \text{ Hz}$ . On appelle  $H_0$  le rapport  $\frac{v_s}{v_e}$  trouvé à la question 1, et on se place dans le cas où  $A_0 \gg |H_0| \gg 1$ .
  - a) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e}$ . Dans quel domaine fréquentiel l'amplificateur fonctionne-t-il ? Préciser la fréquence de coupure  $f_0$  en fonction de  $H_0$ ,  $A_0$  et  $f_c$ .
  - b) Montrer que le produit gain-bande passante  $|H_0| \times f_0$  est une constante et calculer sa valeur. Si on choisit  $H_0 = -100$ , jusqu'à quelle fréquence peut-on utiliser cet amplificateur ?

### □ Exercice 8.8. Intérêt du montage suiveur

On désire utiliser un filtre RC passe-bas pour alimenter une charge résistive notée  $R_u$ .

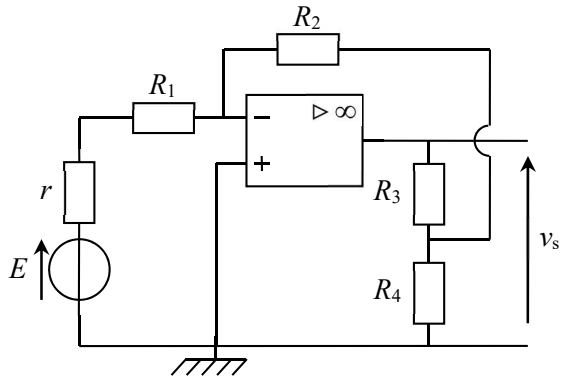
1. La sortie du filtre étant la tension aux bornes du condensateur  $C$ , déterminer la fonction de transfert à vide  $\underline{H}_0$  de ce filtre, c'est-à-dire en l'absence de la résistance de charge  $R_u$ .
2. On considère maintenant le filtre en charge (c'est-à-dire lorsque la résistance de charge est présente), représenté sur la figure ci-contre.
  - a) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}_1$  dans ce cas.
  - b) Comparer les pulsations de coupure à vide et en charge. Que se passe-t-il si on change la valeur de la charge  $R_u$  ?
3. Dans le but de s'affranchir du défaut précédent, on réalise le circuit ci-contre.
  - a) Quelle est la fonction réalisée par l'amplificateur linéaire intégré ? Quelle est son impédance d'entrée ?
  - b) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}_2$  de ce filtre.
  - c) Comparer la pulsation de coupure de ce filtre avec la valeur du filtre RC à vide et en charge. Conclure sur l'intérêt de ce montage.



### □ Exercice 8.9. Montage amplificateur

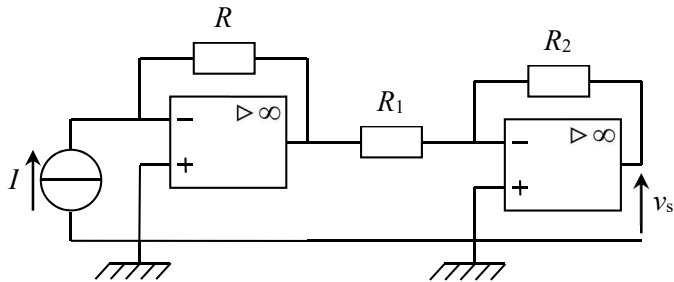
Exprimer  $v_s$  en fonction de  $E$ , puis calculer numériquement  $v_s$ .

On donne  $E = 10 \text{ mV}$ ,  $r = 50 \Omega$ ,  
 $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 100 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_4 = 0,5 \text{ k}\Omega$ .



### □ Exercice 8.10. Convertisseur courant-tension\*

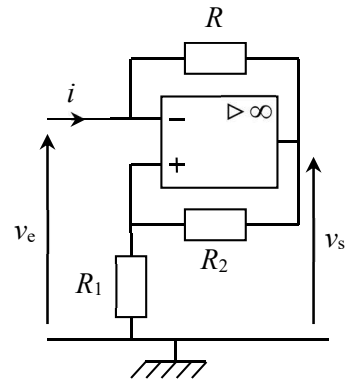
Déterminer  $v_s$  en fonction de  $I$  et des différentes résistances. Les ALI sont supposés idéaux.



### □ Exercice 8.11. Réalisation d'une résistance négative\*

On désire simuler une résistance négative de telle sorte que cette dernière puisse par exemple compenser les pertes Joule d'une bobine réelle dans un circuit  $LC$ . On réalise donc à cet effet le montage ci-contre.

1. Dans le cas où l'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire, déterminer les relations donnant  $v_e$  en fonction de  $i$ , et  $v_s$  en fonction de  $i$ .
2. En déduire l'expression de la résistance négative  $-R_n$  en fonction de  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
3. À quel intervalle doit appartenir l'intensité  $i$  pour que l'amplificateur fonctionne en régime linéaire ?
4. Refaire un schéma pour avoir un circuit  $LC$  série dont on pourrait, à l'aide de ce montage, compenser les pertes Joule de la bobine. La bobine sera représentée par une inductance parfaite  $L$  en série avec une résistance  $r$ .



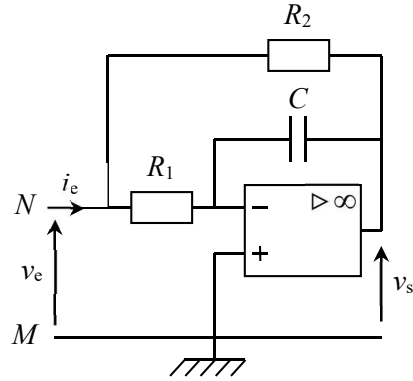
*D'après Centrale-Supélec*

### □ Exercice 8.12. Simulation d'une bobine réelle \* \*

Le montage suivant fait intervenir un condensateur de capacité  $C$  et deux résistors de résistances respectives  $R_1$  et  $R_2$ .

Ce circuit est équivalent, entre les bornes d'entrée  $M$  et  $N$ , à une bobine d'inductance pure  $L$  montée en parallèle avec une résistance pure  $r$ .

1. Exprimer l'impédance complexe de l'association  $Lr$  parallèle, et déterminer celle du montage ci-contre, soit  $\underline{Y}_e = \frac{I_e}{V_e}$ .
2. En déduire  $L$  et  $r$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C$ .
3. Calculer  $L$  et  $r$  pour  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$  et  $C = 15 \mu\text{F}$ .
4. Les inductances usuelles valent quelques dixièmes de henry. Quel est l'intérêt de ce montage ?



### ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 8.2.* Appliquer la méthode 8.1 avec les lois des nœuds et des mailles.

*Exercice 8.9.* Il faut appliquer loi des nœuds au point commun aux résistances  $R_3$  et  $R_4$  et à l'entrée – puis utiliser des lois des mailles.

*Exercice 8.10.* Il faut appliquer la loi des nœuds aux entrées inverseuses des deux ALI et utiliser la loi des mailles.

*Exercice 8.12.* Question 1 : utiliser la loi des nœuds à l'entrée du montage, puis exprimer les deux courants à l'aide de la loi d'Ohm et des propriétés de l'ALI.



## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai

2. L'impédance d'entrée dépend des branchements du montage.
4. Le retour de la sortie doit se faire sur l'entrée *inverseuse* qui a une action stabilisante, alors qu'un retour sur l'entrée non inverseuse est déstabilisant pour le montage.
5. Attention, ceci n'est vrai que dans le modèle de l'ALI idéal, mais c'est le seul que nous utiliserons.
6. Pour avoir  $v^+ = v^-$  il faut que l'amplificateur linéaire intégré (idéal) fonctionne en régime *linéaire* ; en régime saturé,  $v^+ \neq v^-$  soit  $\varepsilon \neq 0$ .
7. La tension de saturation est toujours légèrement inférieure à la tension d'alimentation.
9. Les différents montages peuvent fonctionner avec n'importe quel type de signal ; mais les filtres sont prévus pour sélectionner certaines composantes sinusoïdales dans un signal.
10. Son utilité n'est donc pas de transformer la tension, mais de permettre l'association de certains quadripôles.

### □ Les erreurs classiques

- Ne pas oublier de vérifier que le montage comporte une contre-réaction (connexion entre la sortie et l'entrée inverseuse) avant de pouvoir affirmer que l'ALI fonctionne en régime linéaire, et ainsi écrire  $v^+ = v^-$ .
- Lorsqu'un amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire, on a  $v^+ = v^-$  mais ces tensions ne sont pas forcément nulles : il faut regarder le montage et voir si l'une des entrées est reliée à la masse, et à cette condition uniquement, on pourra écrire  $v^+ = v^- = 0$ .

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 8.1

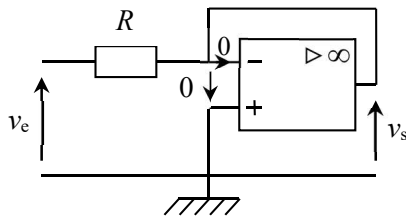
1. L'amplificateur linéaire intégré est en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction (retour de la sortie sur l'entrée inverseuse), donc  $\varepsilon = 0$  ou  $v^+ = v^-$ . De plus l'entrée + est reliée directement à la masse, donc  $v^+ = 0$ , d'où  $v^- = 0$  également. Enfin les courants dans les deux entrées de l'ALI sont nuls.

✪\* Même si cette méthode consiste à simplifier le circuit, on ne peut absolument pas enlever l'ALI ! Et même pour cette étude préliminaire, on a besoin de ces hypothèses sur les potentiels et les courants des entrées.

On redessine le circuit en HF et en BF, avec les propriétés habituelles pour  $C$  (ou pour  $L$  dans d'autres circuits), et on fait aussi apparaître toutes les grandeurs nulles (tensions et intensités) selon les propriétés de l'ALI.

En haute fréquence ( $\omega \rightarrow \infty$ ), un condensateur se comporte comme un fil.

Le schéma équivalent est alors :



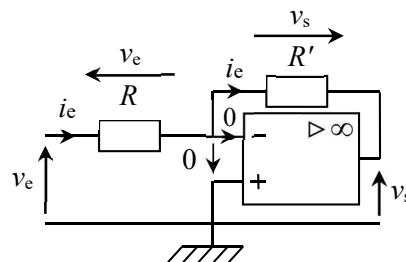
Alors  $v_s = v^- = 0$ .

L'étude en basse fréquence est un peu plus longue. On fait apparaître les tensions  $v_e$  et  $v_s$  aux bornes des deux résistances (car  $v^- = 0$ ), et l'intensité  $i_e$  dans  $R'$  (car  $i^- = 0$ ). La loi d'Ohm donne alors :  $v_e = R i_e$  (convention récepteur) et  $v_s = -R' i_e$  (convention générateur), d'où

$$v_s = -\frac{R'}{R} v_e.$$

En basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ), un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.

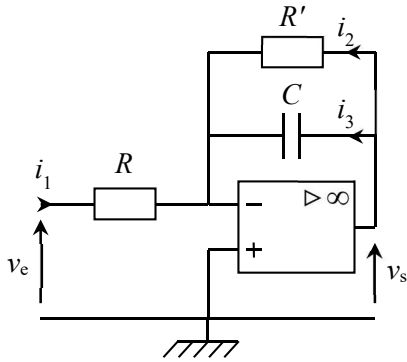
Le schéma équivalent est alors :



⇒ Méthodes 7.1, 8.1

Le quadripôle est donc un filtre passe-bas.

2.



La loi des mailles et la loi d'Ohm complexes donnent :

$$\underline{V}_e - R\underline{I}_1 - \underline{V}^- = 0,$$

$$\underline{V}_s - R'\underline{I}_2 - \underline{V}^- = 0,$$

$$\underline{V}_s - \frac{\underline{I}_3}{jC\omega} - \underline{V}^- = 0.$$

La loi des nœuds s'écrit :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}^- = 0.$$

On remplace les intensités par leurs expressions :  $\frac{\underline{V}_e - \underline{V}^-}{R} + \frac{\underline{V}_s - \underline{V}^-}{R'} + jC\omega(\underline{V}_s - \underline{V}^-) = 0$  (1).

✍ On reconnaît dans la formule (1) la loi des nœuds en termes de potentiels.

Avec la condition  $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$ , on en déduit : 
$$\underline{H} = -\frac{1}{R\left(\frac{1}{R'} + jC\omega\right)} = -\frac{R'}{R} \times \frac{1}{1 + jR'C\omega}.$$

⇒ Méthode 8.1

On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-bas.

☛ La fait d'être en régime linéaire n'entraîne pas toujours  $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$ , il entraîne seulement  $\underline{V}^- = \underline{V}^+$ . Le fait que leur valeur soit nulle ici est dû à la connexion directe de l'entrée + à la masse : ce ne sera pas toujours le cas !

3. Le gain s'exprime par  $G = \frac{R'}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (R'C\omega)^2}}$ . Il est évident que cette fonction est maximum

lorsque son dénominateur est minimum donc pour  $\omega \rightarrow 0$ . On en déduit  $G_{\max} = \frac{R'}{R}$ .

Sa pulsation de coupure est déterminé par  $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{R'}{R} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R'}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (R'C\omega_c)^2}}$ , soit

$R'C\omega_c = 1$ . On en déduit donc que la bande passante du filtre est  $\left[0, \omega_c = \frac{1}{R'C}\right]$ .

4. Pour  $R'C\omega \gg 1$ , soit  $\omega \gg \frac{1}{R'C} = \omega_c$ , la fonction de transfert devient  $\underline{H} \approx -\frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega}$  ce qui correspond à une intégration dans le domaine temporel.

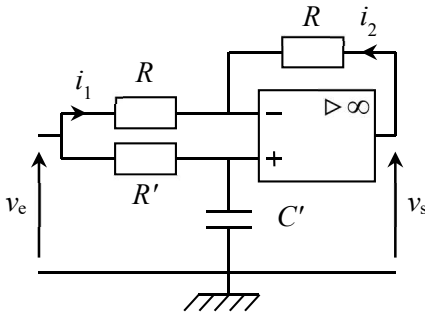
5. On écrit la loi des mailles sur l'entrée,  $\underline{v}_e - R_1 \underline{i}_e - \underline{v}^- = 0$ . Comme on l'a vu,  $\underline{v}^- = \underline{v}^+ = 0$ .

On en déduit donc  $\underline{v}_e - R_1 \underline{i}_e = 0$ , soit  $\underline{Z}_e = \frac{\underline{v}_e}{\underline{i}_e} = R_1$ .

⇒ Méthode 8.2

## Exercice 8.2

1. L'amplificateur linéaire intégré est en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction (retour de la sortie sur l'entrée inverseuse), donc  $V^+ = V^-$ .



À l'entrée +, on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension car aucun courant n'y entre :

$$V^+ = \frac{1}{R' + \frac{1}{jC'\omega}} V_e = \frac{1}{1 + jR'C'\omega} V_e.$$

Loi des mailles pour les deux mailles qui passent par l'entrée - :

$$V_e - RI_1 - V^- = 0 \text{ et } V_s - RI_2 - V^- = 0.$$

La loi des nœuds à l'entrée - donne  $I_1 + I_2 = I^- = 0$ , soit  $\frac{V_e - V^-}{R} + \frac{V_s - V^-}{R} = 0$ .

Pour utiliser plus facilement la relation  $V^+ = V^-$ , on exprime  $V^- = \frac{\frac{V_e}{R} + \frac{V_s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{V_e + V_s}{2}$ .

On utilise  $V^+ = V^-$ , soit  $\frac{1}{1 + jR'C'\omega} V_e = \frac{V_e + V_s}{2}$ , d'où l'on tire  $\boxed{\frac{H}{\frac{V_s}{V_e}} = \frac{1 - jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega} = \frac{1 - jx}{1 + jx}}$ .

⇒ Méthode 8.1

2. Pour  $x \ll 1$  la fonction de transfert devient  $\underline{H} \approx 1$ , soit  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$ .

Pour  $x \gg 1$  la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) = \frac{-jx}{jx} = -1$  soit  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = \pm\pi$ .

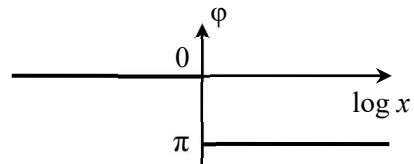
Pour lever l'indétermination sur la phase, il faut évaluer plus précisément l'argument de chaque facteur :  $1 - jx \approx -jx$ , soit  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ , et  $1 + jx \approx +jx$ , soit  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . On en déduit donc

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\pi.$$

*✍ Ici on ne peut pas calculer  $\varphi$  en  $x = 1$  car la fonction de transfert est nulle.*

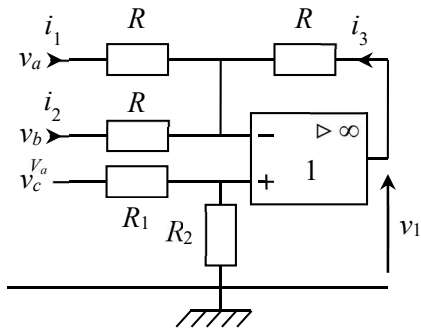
La courbe de gain ne présente aucun intérêt car elle est toujours nulle. On ne représente donc que la phase.

3. La fonction de ce montage est donc de ne pas modifier l'amplitude mais uniquement la phase. C'est un montage déphaseur.



### Exercice 8.3

1.



$$v_a - Ri_1 - v^- = 0, \quad v_b - Ri_2 - v^- = 0 \quad \text{et} \quad v_1 - Ri_3 - v^- = 0.$$

La loi des nœuds donne  $i_1 + i_2 + i_3 = i^- = 0$ . On remplace dans avec les relations précédentes,

$$\frac{v_a - v^-}{R} + \frac{v_b - v^-}{R} + \frac{v_1 - v^-}{R} = 0, \quad \text{on utilise la condition } v^+ = v^- = av_c \text{ soit } \boxed{v_1 = 3av_c - v_a - v_b}.$$

⇒ Méthode 8.1

✍ La notation complexe est ici inutile car le circuit considéré n'est composé que de résistances.

2. L'entrée + est connectée à la masse :  $\underline{V}^+ = 0$ . Et

il y a une rétroaction négative donc le montage fonctionne donc en régime linéaire :  $\underline{V}^- = \underline{V}^+ = 0$ .

Lois des mailles :

$$\text{pour MADM} \quad \underline{V}_e - \frac{I_1}{jC\omega} - \underline{V}^- = 0 ;$$

$$\text{pour MBDM} \quad \underline{V}_s - RI_2 - \underline{V}^- = 0.$$

La loi des nœuds écrite en D donne  $I_1 + I_2 = I^- = 0$ . On remplace les intensités par leurs

$$\text{expressions : } \frac{\underline{V}_e - \underline{V}^-}{R} + jC\omega(\underline{V}_s - \underline{V}^-) = 0. \quad \text{Comme } \underline{V}^- = 0, \quad \text{on obtient } \underline{V}_s = -\frac{\underline{V}_e}{jRC\omega}.$$

$$\text{La fonction de transfert est } \underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}, \quad \text{soit avec les notations de l'énoncé : } \boxed{\underline{H} = -\frac{1}{jx} = \frac{j}{x}}.$$

⇒ Méthode 8.1

On reconnaît bien entendu un montage intégrateur, puisque cela correspond à la formule réelle

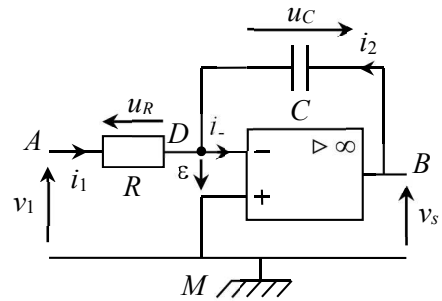
$$v_s(t) = -\frac{1}{RC} \int v_e(t) dt.$$

On applique la formule du diviseur de tension pour  $R_1$  et  $R_2$  car l'ALI est idéal (pas de courant dans les entrées) :

$$v^+ = v_c \frac{R_2}{R_1 + R_2} = av_c \quad \text{donc} \quad v^- = av_c \quad \text{car l'ALI}$$

fonctionne en régime linéaire du fait de la présence d'une contre-réaction.

On applique la loi des mailles combinée avec la loi d'Ohm :



**3. a)** L'ALI 1 fonctionne comme sur la figure 1, avec  $V_a = V_{s3}$ ,  $V_b = V_e$ ,  $V_c = V_s$ . Les deux autres ALI fonctionnent en intégrateurs, donc :  $V_s = \frac{jV_{s1}}{x}$ ,  $V_{s3} = \frac{jV_s}{x}$ . En reportant dans la relation du 1, on obtient  $\frac{xV_s}{j} = 3aV_s - \frac{jV_s}{x} - V_e$ , qui s'écrit encore  $V_e = V_s \left[ 3a - \frac{j}{x} + jx \right]$ .

On obtient la fonction de transfert  $\underline{H}' = \frac{1}{3a + j\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$ , avec  $H_0 = Q = \frac{1}{3a}$ .

**b)** Avec les données de l'énoncé,  $H_0 = Q = \frac{10}{3}$ . Le gain s'écrit  $G = |\underline{H}'| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$ .

Sa valeur maximale correspond au minimum du dénominateur, obtenu pour  $x = 1$   $\left(x - \frac{1}{x} = 0\right)$ .

Alors  $\underline{H} = H_0 = \frac{10}{3}$  soit  $G_{\max} = |H_0| = \frac{10}{3}$ ,  $G_{\text{dB max}} = 20 \log\left(\frac{10}{3}\right) = 20 \log 10 - 20 \log 3 = +10 \text{ dB}$

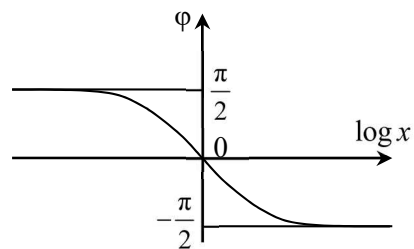
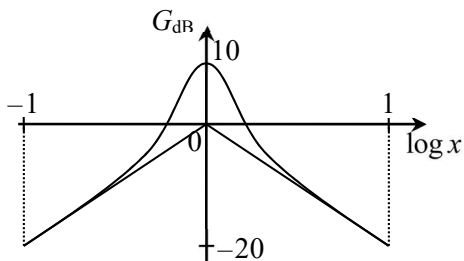
(avec la simplification  $\log 3 \approx 0,5$ ) et  $\varphi = \arg\left(\frac{10}{3}\right) = 0$ .

Pour  $x \ll 1$ , la fonction de transfert devient  $\underline{H}(x) \approx \frac{H_0}{-jQx} = jx$  (car  $\frac{H_0}{Q} = 1$ ) soit  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et

$G_{\text{dB}} = 20 \log(x)$ , (pente de 20 dB/décade). Pour  $x \gg 1$ ,  $\underline{H}(x) \approx \frac{H_0}{jQx} = -\frac{j}{x}$  soit  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  et

$G_{\text{dB}} = -20 \log x$ , (pente de -20 dB/décade).

Les asymptotes de gain se coupent en  $\log x = 0$ , pour  $G_{\text{dB}} = 0$ .



Il s'agit donc d'un filtre passe-bande, avec résonance pour la fréquence  $\omega_0$ . Les pulsations de

coupure sont définies par  $G(x_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}}$ .

Cela équivaut à  $1 + Q^2 \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 2$ , soit  $Q \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right) = \pm 1$  d'où  $x_c - \frac{1}{x_c} = \pm \frac{1}{Q}$ . Ces deux équations (celle avec le + et celle avec le -) se réécrivent comme deux équations du second degré en multipliant par  $x_c$  :  $x_c^2 \pm \frac{x_c}{Q} - 1 = 0$ . Discriminant :  $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > \frac{1}{Q^2}$  d'où les quatre solutions

$x_c = \frac{1}{2} \left( \pm \frac{1}{Q} \pm \sqrt{\Delta} \right) = \frac{\omega_c}{\omega_0}$ . Or seules les deux solutions positives (une pour chaque équation) sont

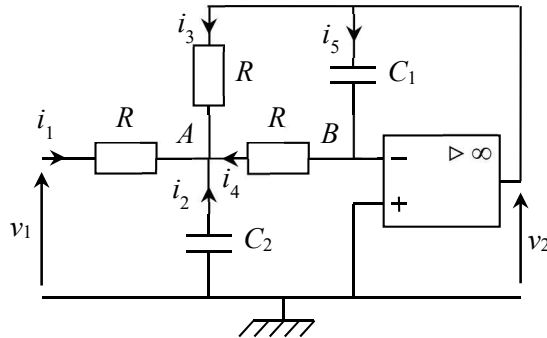
possibles, donc  $\omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$  et  $\omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$ .

On en déduit la bande passante :  $\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  soit  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 3a\omega_0 = 0,3\omega_0$ .

On reconnaît la relation classique, pour un filtre passe-bande ou un oscillateur, entre la bande passante, la fréquence de résonance et le facteur de qualité  $Q$  (ici égal à 3,3 : filtre peu sélectif).

### Exercice 8.4

1. L'amplificateur linéaire intégré est en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction (retour de la sortie sur l'entrée -), donc  $\underline{V}^+ = \underline{V}^- = \underline{V}_B$ . Or  $\underline{V}^+ = 0$  (masse) donc  $\underline{V}_B = 0$ .



- La loi des nœuds en B donne  $\underline{I}_5 = \underline{I}_4 + \underline{I}^- = \underline{I}_4$ . Pour exprimer les courants, on utilise la loi d'Ohm complexe pour  $R$  et  $C_1$  :  $\underline{V}_B - \underline{V}_A = R\underline{I}_4$  et  $\underline{V}_2 - \underline{V}_B = \frac{\underline{I}_5}{jC_1\omega}$ . On remplace alors dans la

loi des nœuds, sachant que  $\underline{V}_B = 0$  :  $\frac{\underline{V}_A}{R} + jC_1\omega\underline{V}_2 = 0$  donc  $\underline{V}_A = -jRC_1\omega\underline{V}_2$  (1).

- Loi des nœuds en A :  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = 0$ . Loi d'Ohm complexe :

$\underline{V}_1 - \underline{V}_A = R\underline{I}_1$ ,  $\underline{V}_2 - \underline{V}_A = R\underline{I}_3$ ,  $\underline{V}^- - \underline{V}_A = R\underline{I}_5$  et  $\underline{V}_A - 0 = -\frac{\underline{I}_2}{jC_2\omega}$ . On remplace dans la loi des

nœuds :  $\frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_A}{R} + \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_A}{R} + \frac{-\underline{V}_A}{R} + jC_2\omega(-\underline{V}_A) = 0$ , soit  $(3 + jRC_2\omega)\underline{V}_A = \underline{V}_1 + \underline{V}_2$  (2).

⇒ Méthode 8.1

2. Il faut éliminer  $V_A$  entre (1) et (2), soit  $(3 + jRC_2\omega)(-jRC_1\omega V_2) = V_1 + V_2$ , qui s'écrit aussi

$V_1 = V_2 [-1 - 3jRC_1\omega - (j\omega)^2 R^2 C_1 C_2]$  d'où la fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{-1}{1 + 3jRC_1\omega + (j\omega)^2 R^2 C_1 C_2}. \text{ C'est un filtre passe-bas du second ordre.}$$

3. Par identification :  $H_0 = -1 < 0$  (dû au fait que l'ALI est attaqué sur l'entrée inverseuse) ;

$$(j\omega)^2 R^2 C_1 C_2 = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 \text{ d'où } \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} ; 3jRC_1\omega = 2m\frac{j\omega}{\omega_0} \text{ d'où } m = \frac{3}{2}RC_1\omega_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}.$$

4. On impose le facteur d'amortissement  $m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , ce qui donne  $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2}{9}$ . La valeur de

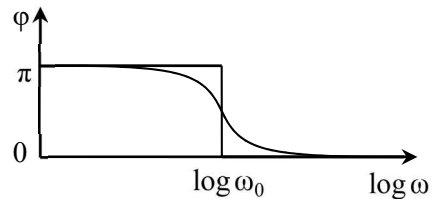
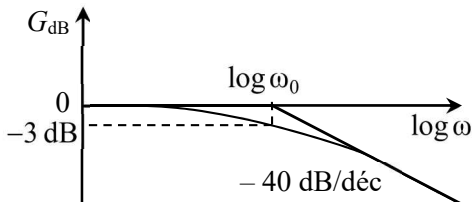
$R$  donne  $\omega_0 R = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2}}$ , ce qui permet de déterminer  $C_1 C_2 = \frac{1}{\omega_0^2 R^2}$ . On résout le système et l'on

$$\text{obtient } C_2 = \sqrt{\frac{9}{2\omega_0^2 R^2}} = 140 \text{ nF} \text{ et } C_1 = \frac{2}{9}C_2 = 32 \text{ nF}.$$

5. Pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\underline{H}(x) \approx -\frac{H_0}{\omega^2} \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  donc  $G_{dB} = 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$  et  $\varphi = 0$ .

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $\underline{H}(x) = \frac{H_0}{2jm} = \frac{j}{\sqrt{2}}$  donc  $G_{dB} = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

Pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\underline{H}(x) \approx H_0 = -1$  donc  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = \pi$  (écart de  $\frac{\pi}{2}$  avec la fréquence  $\omega_0$ ).



6. Partant de la fonction de transfert, on effectue les produits en croix, et on obtient le régime

transitoire en remplaçant  $j\omega$  par  $\frac{d}{dt}$ . Ainsi  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{H_0}{1 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$  devient

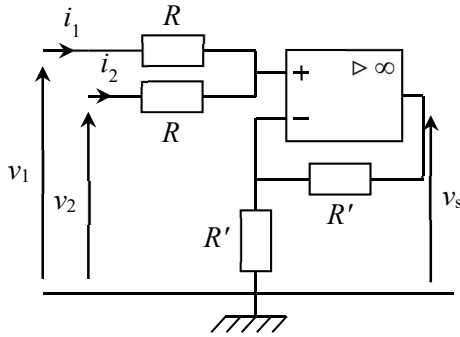
$$V_2 + 2m\frac{j\omega}{\omega_0}V_2 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 V_2 = H_0 V_1 \text{ soit en temporel } \boxed{\frac{d^2 v_2}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dv_2}{dt} + \omega_0^2 v_2 = H_0 \omega_0^2 v_1}.$$



### Exercice 8.5

1. L'amplificateur linéaire intégré fonctionne en régime linéaire car il y a une contre-réaction (connexion de la sortie avec l'entrée -), donc  $v^+ = v^-$ .

2.



À l'entrée -, comme aucun courant n'y entre, on peut utiliser la formule du pont diviseur de tension, soit

$$v^- = \frac{R'}{R' + R'} v_s = \frac{v_s}{2}.$$

Lois des mailles pour l'entrée + :

$$v_1 - Ri_1 - v^+ = 0 \text{ et } v_2 - Ri_2 - v^+ = 0.$$

Loi des nœuds à la même entrée

$$i_1 + i_2 = i^+ = 0.$$

On remplace dans la loi des nœuds :  $\frac{v_1 - v^+}{R} + \frac{v_2 - v^+}{R} = 0$ , or  $v^+ = v^- = \frac{v_s}{2}$ , donc on obtient :

$$v_s = v_1 + v_2.$$

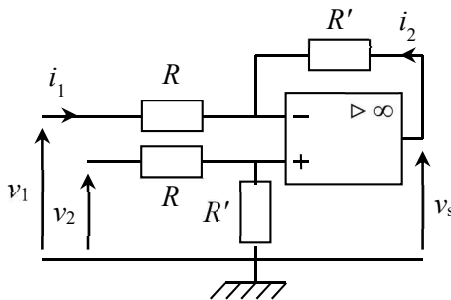
⇒ Méthode 8.1

✍ On peut ici utiliser les lois sans passer par les complexes, car il n'y a pas de condensateur ou d'inductance dans le circuit.

### Exercice 8.6

L'ALI est en régime linéaire car il y a une rétroaction négative, donc  $v^+ = v^-$ .

1.



L'ALI est en régime linéaire car il y a une contre-réaction, donc  $v^+ = v^-$ .

Pont diviseur de tension à l'entrée + (car  $i^+ = 0$ ) :  $v^+ = \frac{R'}{R' + R} v_2$ .

Lois des mailles  $v_1 - Ri_1 - v^- = 0$  et  $v_s - R'i_2 - v^- = 0$ .

Loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$i_1 + i_2 = i^- = 0$ , on remplace  $\frac{v_1 - v^-}{R} + \frac{v_s - v^-}{R'} = 0$ . Pour utiliser plus facilement  $v^- = v^+$ , on

exprime  $v^- = \frac{\frac{v_1}{R} + \frac{v_s}{R'}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}} = \frac{R'v_1 + Rv_s}{R + R'}$ . On utilise  $v^- = v^+$  en égalant les deux expressions, on

obtient  $\frac{R'v_1 + Rv_s}{R + R'} = \frac{R'}{R' + R} v_2$ , soit  $v_s = \frac{R'}{R} (v_2 - v_1)$ .

Le montage réalise donc une soustraction, ainsi qu'une amplification de la différence.

⇒ Méthode 8.1

**2. a)** Il suffit de reprendre le résultat de la question 1, puisque la méthode reste la même en utilisant les impédances complexes, sauf que l'on remplace  $R'$  par  $\frac{1}{jC\omega}$ . La formule

$V_s = \frac{R'}{R}(V_2 - V_1)$  devient donc  $V_s = \frac{1}{jRC\omega}(V_2 - V_1)$ . On effectue le produit en croix et on

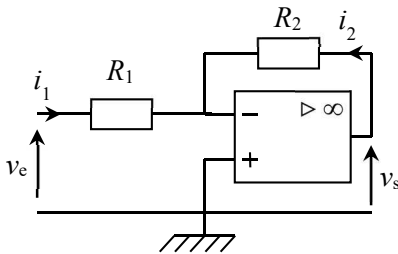
repassé en temporel, soit  $\frac{dv_s}{dt} = \frac{1}{RC}(v_2 - v_1)$ . La sortie est donc l'intégrale de la différence.

**b)** Si les tensions  $v_1$  et  $v_2$  sont continues (ou comportent une composante continue), le circuit modifié ne peut pas fonctionner très longtemps. En effet, on obtient en intégrant

$v_s = \frac{1}{RC}(v_2 - v_1)t + \text{cte}$  : la tension de sortie va donc évoluer linéairement et ainsi atteindre sa valeur de saturation au bout d'une durée de quelques  $\tau = RC$ .

### Exercice 8.7

1.



L'amplificateur linéaire intégré est en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction (retour de la sortie sur l'entrée inverseuse), donc  $v^+ = v^-$ . Or  $v^+ = 0$  donc  $v^- = 0$ .

Lois des mailles  $v_e - Ri_1 - v^- = 0$  et  $v_s - Ri_2 - v^- = 0$ .

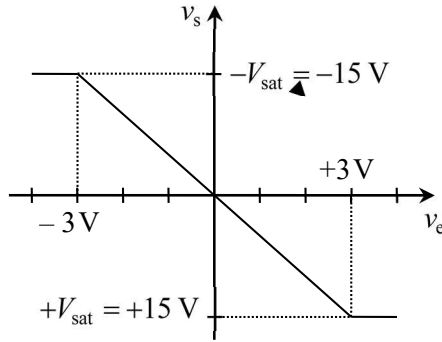
Loi des nœuds à l'entrée inverseuse  $i_1 + i_2 = i^- = 0$ , soit en remplaçant :  $\frac{v_s - v^-}{R_2} + \frac{v_e - v^-}{R_1} = 0$ . On

utilise la condition  $v^- = 0$  donc  $v_s = -\frac{R_2}{R_1}v_e$ .

⇒ Méthode 8.1

**2.** L'amplification du circuit vaut  $\left| \frac{v_s}{v_e} \right| = \frac{R_2}{R_1} = 5$ , il faut donc  $R_2 = 5R_1 = 5 \text{ k}\Omega$ .

**3.** L'amplificateur fonctionne en mode linéaire tant que  $|v_s| < V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$ , c'est-à-dire tant que  $|5v_e| < 15 \text{ V}$ , soit  $|v_e| < 3 \text{ V}$ . Sinon la sortie est limitée (en valeur absolue) à sa valeur maximale, qui est la tension de saturation. On obtient donc le graphique qui suit.



4. a) Maintenant  $v^- = -\varepsilon = -v_s \frac{1 + j\omega/\omega_c}{A_0}$ .

Il faut recalculer le potentiel de l'entrée – sans la simplification  $v^- = 0$ , soit  $v^- = \frac{\frac{v_s}{R_2} + \frac{v_e}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

On utilise les deux expressions :  $-v_s \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_c}}{A_0} = \frac{\frac{v_s}{R_2} + \frac{v_e}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{v_s - H_0 v_e}{1 - H}$

$$\Leftrightarrow v_s \left( \frac{(1 - H_0) \left( 1 + \frac{j\omega}{\omega_c} \right)}{A_0} + 1 \right) = H_0 v_e \text{ d'où en tenant compte de l'approximation } A_0 \gg |H_0| \gg 1:$$

$$\boxed{\frac{H}{\frac{v_s}{v_e}} = \frac{H_0}{1 + j\omega \frac{-H_0}{A_0 \omega_c}}}$$

C'est un passe-bas d'ordre 1 : on retrouve  $\underline{H} \approx H_0$  (ce qu'on souhaite)

pour  $\omega \ll \omega_c \frac{A_0}{-H_0} = \omega_0$  soit  $\boxed{f \ll f_c \frac{A_0}{-H_0} = f_0}$ .

b)  $\boxed{|H_0| f_0 = A_0 f_c = 2 \text{ MHz}}$ . Pour  $H_0 = -100$  on trouve donc  $f_0 = 20 \text{ kHz}$  : on peut travailler jusqu'à quelques kilohertz (soit environ une décade en dessous de  $f_0$ ).

### Exercice 8.8

1. Avec un diviseur de tension, on obtient :  $\underline{H}_0 = \frac{1}{\frac{jC\omega}{1 + jRC\omega} + R}$  soit  $\boxed{\underline{H}_0 = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$ .

2. a) Avec la méthode du diviseur de tension et en considérant l'association de  $C$  et  $R_u$  comme un seul dipôle, on obtient  $\underline{H}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{\underline{Z}_{\text{éq}} + R} = \frac{1}{1 + \underline{Y}_{\text{éq}} R}$ , avec  $\underline{Y}_{\text{éq}} = \frac{1}{R_u} + jC\omega$ , soit :

$$\boxed{H_1 = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_u} + jRC\omega} = \frac{R_u}{R_u + R} \times \frac{1}{1 + j\frac{R_u R}{R_u + R}C\omega}}$$

**b)** Les deux fonctions de transfert précédentes sont sous forme canonique. La pulsation de coupure d'un tel filtre du premier ordre est donc  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  pour le premier et  $\omega_1 = \frac{R_u + R}{R_u RC}$  pour

le second.  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{R_u + R}{R_u} > 1$ , donc  $\boxed{\omega_1 > \omega_0}$ . De plus  $G_{\max} = \frac{R_u}{R_u + R} < 1$ .

La présence de la charge modifie la pulsation de coupure du filtre, ainsi que son gain dans la bande passante. Donc si on change la valeur de  $R_u$ , on change la pulsation de coupure ainsi que le gain dans la bande passante.

**3. a)** L'amplificateur linéaire intégré fonctionne en suiveur :  $v_s = v^- = v^+$  (régime linéaire), le montage « copie » la tension d'entrée.

On constate  $i_e = i^+ = 0$ . L'impédance d'entrée est donc infinie ( $Z_e = \frac{v_e}{i_e}$ ). Le suiveur ainsi inséré

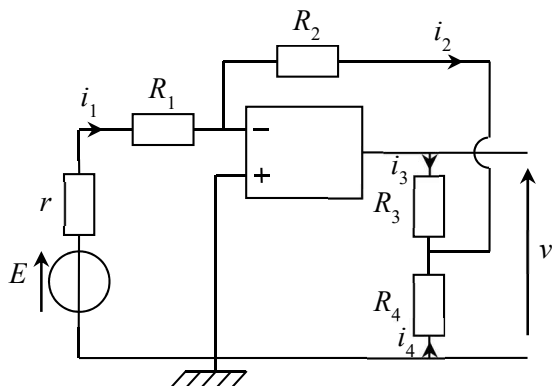
dans le montage recopie la sortie du filtre sans qu'aucun courant ne soit prélevé sur le filtre RC. C'est tout l'intérêt des montages à grande impédance d'entrée, ne pas perturber le montage sur lequel on le branche.

⇒ Méthode 8.2

**b)** Pont diviseur de tension à l'entrée + (car  $i^+ = 0$ ) :  $V^+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} V_e = V_s$  d'où  $\boxed{H_2 = H_0}$ .

**c)** La pulsation de coupure est donc identique à celle du filtre RC à vide (et le gain également). Ce montage permet donc de s'affranchir des effets de la charge sur le fonctionnement du filtre.

### Exercice 8.9



L'amplificateur linéaire intégré est en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction, donc  $v^+ = v^-$ . Or  $v^+ = 0$  (connexion à la masse), donc  $v^- = 0$ .

On nomme  $A$  le point commun aux résistances  $R_3$  et  $R_4$ , et on applique la loi des nœuds en  $A$   $i_2 + i_3 + i_4 = 0$ , pour remplacer les courants, nous allons écrire des lois des mailles

$v^- - Ri_2 - v_A = 0$ ,  $v_s - Ri_3 - v_A = 0$  et  $-Ri_4 - v_A = 0$ . On remplace dans la loi des nœuds, ce qui donne :  $\frac{v^- - v_A}{R_2} + \frac{v_s - v_A}{R_3} + \frac{0 - v_A}{R_4} = 0$  (loi des nœuds en termes de potentiels), on utilise la

condition  $v^- = 0$  soit  $v_A = \frac{v_s}{1 + R_3 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right)}$ .

Idem à l'entrée  $-$  : loi des nœuds  $i_1 = i_2 + i^- = i_2$ , lois des mailles  $E - (r + R_1)i_1 - v^- = 0$  et  $v_A + Ri_2 - v^- = 0$ . On remplace dans la loi des nœuds  $\frac{E - v^-}{r + R_1} + \frac{v_A - v^-}{R_2} = 0$  or  $v^- = 0$  d'où

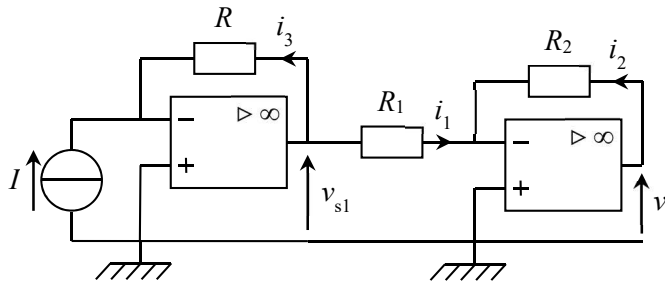
$v_A = -R_2 \frac{E}{r + R_1}$ . On en déduit comme  $v_A = v_A$  que  $v_s = -\frac{R_2}{r + R_1} \left( 1 + R_3 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) \right) E$ .

L'application numérique donne  $v_s = -2 \text{ V}$  (soit  $v_s = -200E$ ).

⇒ Méthode 8.1

⚠ Le courant  $i_2$  ne peut pas être fléché comme arrivant aux deux nœuds. Par conséquent, attention au signe dans la loi des mailles  $v_A + Ri_2 - v^- = 0$ .

### Exercice 8.10



Les amplificateurs opérationnels sont en fonctionnement linéaire car il y a une contre-réaction, donc  $v^+ = v^-$ . Or  $v^+ = 0$  pour chaque ALI (connexion à la masse) donc  $v^- = 0$ .

Pour le premier ALI : Loi des mailles  $v_{s1} - Ri_3 - v^- = 0$ . La loi des nœuds à l'entrée inverseuse donne  $I + i_3 = i^- = 0$ , on remplace ET on obtient  $I + \frac{v_{s1} - v^-}{R} = 0$ . La condition  $v^- = 0$  donne

$v_{s1} = -RI$  à la sortie du premier ALI.

De même pour le second : lois des mailles  $v_{s1} - R_1 i_1 - v^- = 0$  et  $v_s - R_2 i_2 - v^- = 0$ . La loi des nœuds à l'entrée inverseuse permet d'obtenir  $i_1 + i_2 = i^- = 0$  en remplaçant

$\frac{v_{s1} - v^-}{R_1} + \frac{v_s - v^-}{R_2} - i^- = 0$ , soit avec la condition  $v^- = 0$ ,  $v_s = -\frac{R_2}{R_1} v_{s1}$ .

On obtient en combinant les deux résultats  $v_s = \frac{RR_2}{R_1} I$  : la tension de sortie est proportionnelle au courant d'entrée.

⇒ Méthode 8.1

### Exercice 8.11

1. Les impédances d'entrée de l'amplificateur linéaire intégré sont infinies (aucun courant ne pénètre dans les entrées inverseuse et non inverseuse). La loi des mailles permet d'obtenir  $v_e - v_s = Ri$  (1). Le diviseur de tension (car  $i^+ = 0$ ) donne  $v^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$  (2).

L'amplificateur fonctionne en régime linéaire par hypothèse de l'énoncé, donc  $v^+ = v^- = v_e$ . On utilise cette relation pour remplacer  $v_e$  dans (1) :  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s - v_s = Ri$  d'où  $v_s = -R \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i$ .

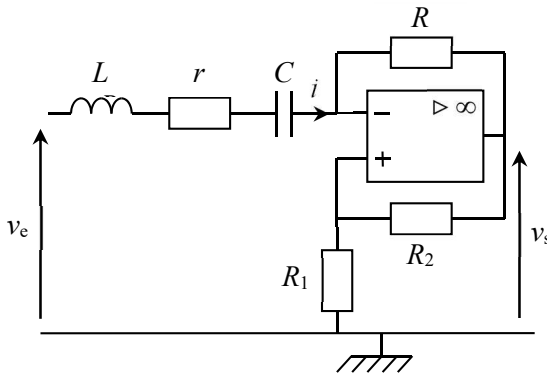
On remplace alors  $v_s$  dans (1), ce qui donne  $v_e = -R \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i + Ri$ , soit  $v_e = -R \frac{R_1}{R_2} i$ .

2. Comme on a trouvé une relation de la forme  $v_e = -R_n i$  entre la tension d'entrée du montage et le courant, la « résistance négative » vaut  $-R_n = -R \frac{R_1}{R_2}$ .

3. Le fonctionnement linéaire n'est possible que si  $v_s \in [-V_{sat}, V_{sat}]$ , donc si :

$$i \in \left[ -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R}, \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{V_{sat}}{R} \right]$$

4.



Ce circuit est équivalent à l'association en série de  $L$ ,  $C$ ,  $r$  et d'une résistance négative  $-R_n$ .

On élimine les pertes par effet Joule en annulant la résistance totale, soit en choisissant  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$  de telle sorte que  $r = R_n = R \frac{R_1}{R_2}$ .

### Exercice 8.12

1. L'admittance d'une inductance pure  $L$  en parallèle avec une résistance  $r$  est  $\underline{Y}_c = \frac{1}{r} + \frac{1}{jL\omega}$ .

Dans le montage, l'ALI est en régime linéaire car il y a une rétroaction sur l'entrée -, donc  $\underline{V}^+ = \underline{V}^-$ . De plus  $\underline{V}^+ = 0$  car l'entrée + est connectée à la masse, donc  $\underline{V}^- = 0$ .

Pour déterminer  $\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e}$ , on calcule le courant d'entrée du montage en appliquant tout d'abord la loi des nœuds, soit  $\underline{I}_e = \underline{I}_{R1} + \underline{I}_{R2}$  (intensités orientées vers la droite).

Puis on cherche à exprimer chacun des deux termes uniquement en fonction de  $\underline{V}_e$ .

La loi d'Ohm pour  $R_1$  :  $\underline{V}_e - \underline{V}^- = R_1 \underline{I}_{R1}$ , or  $\underline{V}^- = 0$  donc  $\underline{I}_{R1} = \frac{\underline{V}_e}{R_1}$ .

De même pour  $R_2$  :  $\underline{V}_e - \underline{V}_s = R_2 \underline{I}_{R2}$  soit  $\underline{I}_{R2} = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R_2}$ . Il reste à éliminer  $\underline{V}_s$  (qui, pour une fois, n'est pas l'inconnue cherchée).

On voit qu'il reste à écrire une relation concernant le condensateur  $C$ . Or  $I^- = 0$  à l'entrée de l'ALI, donc le courant qui traverse  $C$  est le même que celui qui traverse  $R_1$ . On peut donc écrire

la loi d'Ohm (complexe) pour  $C$  :  $\underline{V}^- - \underline{V}_s = \frac{\underline{I}_{R1}}{jC\omega}$  soit  $\underline{V}_s = - = \frac{\underline{I}_{R1}}{jC\omega} = - \frac{\underline{V}_e}{jR_1C\omega}$ .

Finalement, en reportant dans la loi des nœuds initiale :  $\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_e}{R_2} - \frac{\underline{V}_s}{R_2}$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e}{R_1} + \frac{\underline{V}_e}{R_2} + \frac{\underline{V}_e}{jR_1R_2C\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_e = \frac{\underline{I}_e}{\underline{V}_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jR_1R_2C\omega}}$$

$\Rightarrow$  Méthodes 8.1, 8.2

**2.** Par identification on obtient  $\boxed{L = R_1R_2C}$  et  $\boxed{r = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$ .

**3.** On calcule  $\boxed{L = 30 \text{ H}}$  et  $\boxed{r = 670 \Omega}$ .

**4.** L'intérêt d'un tel montage est d'obtenir de très fortes inductances, difficiles à obtenir avec de véritables bobines (elles devraient être énormes).

# Propagation d'un signal

UN SCIENTIFIQUE



Le génie anglais **Thomas Young** (1773-1829) est un esprit universel ; il parle une dizaine de langues, et contribue par exemple au déchiffrement des hiéroglyphes égyptiens. Il se passionne aussi pour la botanique et la philosophie, mais c'est en tant que médecin qu'il exerce. Sa célébrité lui vient pourtant de ses expériences en optique, sur les interférences lumineuses, qui font apparaître la nature ondulatoire de la lumière.

## ■ Un peu d'histoire

La propagation du son est étudiée dès l'Antiquité mais sans en comprendre la nature ondulatoire. **Robert Boyle** (1627-1691) montre que le son ne se propage pas dans le vide et, peu après, **Mersenne** et **Gassendi** essayent d'en estimer la vitesse de propagation dans l'air.

En 1690, **Christiaan Huygens** propose une théorie ondulatoire de la lumière et entre en conflit avec **Newton** qui penche pour une nature corpusculaire. Au tout début du XIX<sup>e</sup> siècle, **Thomas Young** reprend l'idée du savant hollandais qu'il justifie par des expériences de diffraction en obtenant ce qu'il nomme des interférences. Cette approche est peu après confortée par les travaux d'**Augustin Fresnel** puis, en 1850, par l'expérience de **Léon Foucault** sur le calcul de la vitesse de la lumière. La théorie des ondes électromagnétiques, énoncée en 1873 par **James Clerk Maxwell**, confirme le caractère ondulatoire de la lumière.



## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différents types d'ondes
- ▷ La forme mathématique d'une onde progressive (cas général et cas sinusoïdal)
- ▷ La notion de milieu dispersif, et des exemples de propagation dispersive ou non
- ▷ La notion de spectre et des ordres de grandeur de fréquences
- ▷ Les phénomènes d'interférences et de battements
- ▷ La notion de différence de chemin optique entre deux ondes, et sa relation avec le déphasage
- ▷ Les caractéristiques d'une onde stationnaire (modes propres, nœuds, ventres)

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive
- ▷ Établir et utiliser la relation entre fréquence, longueur d'onde et célérité pour une onde progressive sinusoïdale
- ▷ Déterminer l'amplitude résultant d'une interférence entre deux ondes
- ▷ Déterminer la différence de chemin optique entre deux ondes lumineuses
- ▷ Déterminer les caractéristiques d'une onde stationnaire en fonction des conditions aux limites

## ■ Propagation d'un signal

### □ Signaux et ondes

Un **signal** est une fonction  $s(t)$  décrivant les variations d'une grandeur physique au cours du temps. Un signal existant en tout point  $M$  d'une région de l'espace, et comportant des oscillations au cours du temps, constitue une **onde**, décrite par une fonction  $s(M, t)$ .

- Un signal acoustique est constitué de variations de la pression d'un milieu matériel, de sa masse volumique et de la vitesse des particules.
- Un signal électrique est constitué de variations de l'intensité et de la tension dans un circuit.
- Un signal électromagnétique est constitué de variations des champs électrique et magnétique dans le milieu de propagation (qui peut être le vide) ; cela inclut la lumière, les infrarouges, les ultraviolets, les rayons X et gamma, les ondes hertziennes (ondes radio, micro-ondes...).

### □ Onde progressive unidimensionnelle

Une onde **unidimensionnelle** dépend d'une seule coordonnée spatiale le long d'un axe, souvent ( $Ox$ ). Il s'agit, soit d'une onde dans un milieu à une dimension (onde électrique dans un câble, onde mécanique sur une corde...), soit d'un type particulier d'onde, l'**onde plane**, dans un milieu à deux ou trois dimensions.

Une **onde (plane) progressive (OP)** est la propagation d'un signal dans une certaine direction de l'espace, avec une certaine vitesse de propagation dont la norme  $c$  est appelée **célérité**.

Une OP se propageant sans déformation selon l'axe ( $Ox$ ) peut s'écrire sous la forme générale :

$$s(M, t) = F(t - x/c) \text{ ou } s(M, t) = F(x - ct) \text{ si elle se propage dans le sens des } x \text{ croissants ;}$$

$$s(M, t) = G(t + x/c) \text{ ou } s(M, t) = G(x + ct) \text{ si elle se propage dans le sens des } x \text{ décroissants.}$$

En un point  $M$  d'abscisse  $x$ , le signal prend les mêmes valeurs qu'à l'abscisse 0 mais avec un **retard** (algébrique) de  $x/c$  dans le premier cas, ou une **avance** de  $x/c$  dans le second cas.

⇒ **Méthode 9.1.** Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

## ■ Onde progressive sinusoïdale (ou monochromatique)

### □ Forme mathématique

Une onde (plane) progressive sinusoïdale (ou harmonique) est de la forme :

$$s(M, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \text{ si elle se propage dans le sens des } x \text{ croissants ;}$$

$$s(M, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi) \text{ si elle se propage dans le sens des } x \text{ décroissants.}$$

C'est un cas particulier de la forme générale indiquée précédemment, à condition que la **pulsation temporelle**  $\omega$  et la **pulsation spatiale**  $k$  vérifient :  $\boxed{\omega = kc}$  ( $c$  étant plutôt appelée ici **vitesse de phase**).

On appelle **vecteur d'onde** le vecteur  $\vec{k} = k \vec{e}_x$  (premier cas) ou  $\vec{k} = -k \vec{e}_x$  (second cas).

### □ Double périodicité

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité, temporelle et spatiale :

– la **période temporelle**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est l'intervalle de temps minimal séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné ;

– la période spatiale ou **longueur d'onde**  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  est, à un instant donné, la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même.

Ces deux périodes vérifient la relation  $\lambda = cT$  qui montre que la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde en une période. Autre expression :  $\lambda = \frac{c}{f}$  où  $f$  est la fréquence temporelle.

### □ Déphasage

En un point d'abscisse  $x$ , le terme  $\pm kx$  est le **déphasage** entre l'onde en ce point et l'onde au point d'abscisse 0 (où se trouve par exemple la source).

Entre deux point d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , le déphasage est  $\pm k(x_2 - x_1)$ .

## ■ Onde progressive quelconque

### □ Spectre

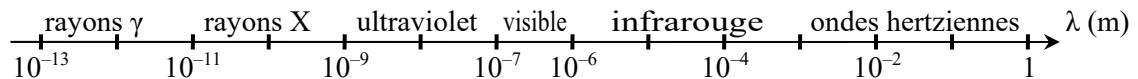
Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes progressives sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes : elles constituent le **spectre** de l'onde.

### □ Cas des ondes électromagnétiques

– La lumière visible correspond aux ondes électromagnétiques dans l'intervalle de fréquences  $4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} < f < 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  environ, soit  $800 \text{ nm} > \lambda > 400 \text{ nm}$  environ dans le vide.

Les différents types de sources ont des spectres variés (voir chapitre 1).

– Les autres domaines du spectre électromagnétique sont les suivants :



### □ Cas des ondes acoustiques

– Les sons audibles sont des ondes acoustiques dans l'intervalle  $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$  environ. La fréquence correspond à la hauteur du son (grave pour  $f$  faible, aigu pour  $f$  élevée).

– Une note de musique est généralement une superposition de signaux appelés **harmoniques**, dont les fréquences sont multiples de la fréquence **fondamentale** définissant cette note.

– Les ultrasons correspondent à  $f > 20 \text{ kHz}$ , les infrasons à  $f < 20 \text{ Hz}$ .

### □ Dispersion

La propagation d'une onde est **dispersive** si la célérité varie en fonction de la fréquence : cela dépend du milieu dans lequel l'onde se propage (on distingue des **milieux dispersifs** ou non).

Lorsqu'une onde non monochromatique se propage dans un milieu dispersif, elle se déforme.

## Exemples de propagation dispersive ou non

- La propagation de la lumière dans la plupart des milieux transparents est dispersive, l'indice de réfraction dépendant de la longueur d'onde (d'où la séparation des couleurs par un prisme). Mais la dispersion est négligeable dans l'air ou dans l'eau. Le vide est un milieu non dispersif.
- La propagation des vagues à la surface de l'eau est fortement dispersive.
- La propagation de l'onde de déformation sur une corde, d'une onde acoustique dans un fluide, d'une onde électrique dans un câble coaxial, peut être considérée comme non dispersive en première approximation.

### □ Diffraction

Lorsqu'une onde traverse une ouverture de largeur  $a$ , elle ressort en divergeant : c'est le phénomène de **diffraction**. La zone où l'amplitude diffractée est importante est un secteur de demi-angle  $\theta$  tel que :  $\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a}$ . Le phénomène n'est donc pas perceptible pour une ouverture large, telle que  $a \gg \lambda$ .

Si l'onde n'est pas monochromatique, ce phénomène peut conduire à séparer les couleurs.

## ■ Superposition d'ondes

### □ Battements

La superposition de deux ondes de fréquences  $f$  et  $f'$  légèrement différentes produit un phénomène de **battements** : l'amplitude de l'onde résultante varie au cours du temps, en tout point, avec une fréquence  $|f' - f|$ .

⇒ **Méthode 9.2. Établir la formule des battements**

### □ Interférences

Lorsque deux ondes progressives sinusoïdales, de célérité  $c$  et de même fréquence  $f$  (donc de même pulsation  $\omega = 2\pi f$ ) se propagent dans une région de l'espace, il existe en tout point  $M$  une différence  $\delta$  entre les chemins parcourus par les deux ondes, d'où un décalage temporel  $\tau$  et un déphasage  $\varphi$  proportionnels à  $\delta$  :  $\tau = \frac{\delta}{c}$  et  $\varphi = k\delta = kc\tau = \omega\tau$ .

Les fonctions correspondant aux deux ondes s'additionnent. On obtient ainsi le phénomène d'**interférences** : l'onde résultante au point  $M$  est encore une onde sinusoïdale, dont l'amplitude dépend du déphasage  $\varphi$  entre les deux ondes initiales en ce point. En particulier :

- en un point où les deux ondes arrivent **en phase** ( $\varphi = 2m\pi$  avec  $m$  entier), l'amplitude résultante est *maximale*, les interférences sont **constructives** ;
- en un point où les deux ondes arrivent **en opposition de phase** ( $\varphi = (2m+1)\pi$  avec  $m$  entier), l'amplitude résultante est *minimale* (et même nulle si ces deux ondes ont la même amplitude), les interférences sont **destructives**.

⇒ **Méthode 9.3. Déterminer l'amplitude résultant des interférences entre deux ondes**

## Formule de Fresnel pour des interférences lumineuses

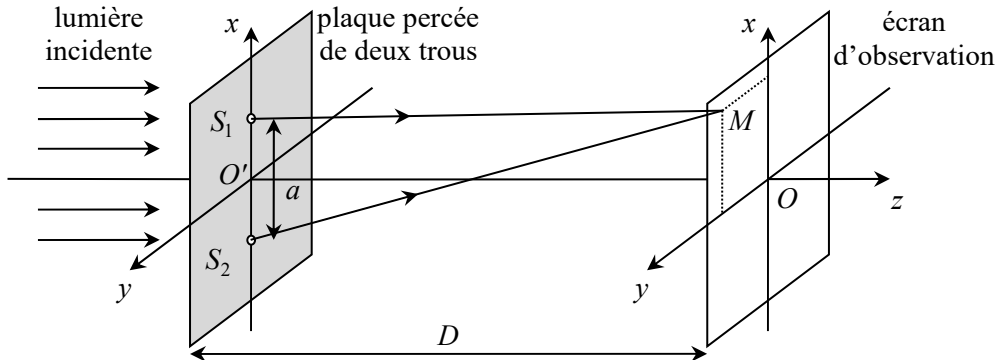
Dans le cas de la lumière, les détecteurs (œil, capteur numérique...) sont sensibles à l'intensité de l'onde, qui est de la forme  $I(M) = KA^2$  pour une onde sinusoïdale.

Lors des interférences entre deux ondes d'intensités  $I_1$  et  $I_2$ , on observe sur un écran une **figure d'interférences** formée de **franges** sombres ou brillantes. L'intensité en un point  $M$  de l'écran est donnée par la **formule de Fresnel** :  $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(M)$ .

Si la lumière change de milieu sur son parcours, le calcul de la différence de chemin optique  $\delta$  fait intervenir les indices des milieux traversés (mais pour l'air, on prend généralement  $n \approx 1$ ).

### Exemple d'interférences lumineuses : trous de Young

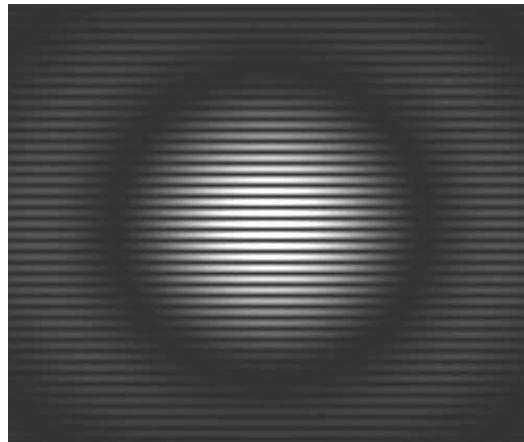
Un faisceau de lumière éclaire une plaque percée de deux trous : ils diffractent la lumière et se comportent comme deux sources ponctuelles. On observe sur un écran parallèle à la plaque.



La différence de chemin optique entre les deux rayons arrivant en un point  $M(x, y)$  de l'écran est  $\delta = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}$  pour  $a \ll D$ ,  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ . Leur déphasage est  $\varphi = k\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$ .

⇒ **Méthode 9.4. Calculer la différence de chemin optique pour les trous de Young**

On observe sur l'écran une figure d'interférences formée de franges rectilignes équidistantes, orthogonales à la direction joignant les deux trous (le tout à l'intérieur d'une tache centrale circulaire entourée d'anneaux, ce qui correspond à la diffraction par chaque trou).



## ■ Onde stationnaire

### □ Caractéristiques

Lorsque le milieu de propagation d'une onde est limité dans au moins une direction, la réflexion des ondes aux extrémités peut engendrer une **onde stationnaire**, qui ne se propage pas.

Dans le cas de la vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités, la forme la plus simple du signal (élongation d'un point) est un produit de deux fonctions sinusoïdales, l'une temporelle et l'autre spatiale :  $s(M, t) = A \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$ .

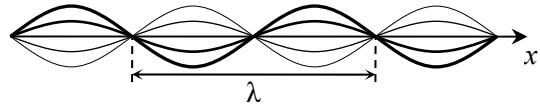
En un point d'abscisse  $x$ , la corde oscille au cours du temps avec une amplitude  $A|\cos(kx + \psi)|$ .

Si  $x$  est tel que  $\cos(kx + \psi) = \pm 1$ , l'amplitude est maximale : ce point est un **ventre** de vibration.

Si  $x$  est tel que  $\cos(kx + \psi) = 0$ , l'amplitude est nulle : ce point est un **nœud** de vibration.

Deux nœuds successifs, ou deux ventres

successifs, sont distants de  $\frac{\lambda}{2}$ .



### □ Modes propres et spectre

Les **conditions aux limites** (corde fixée à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ ) imposent que la pulsation est **quantifiée** : elle ne peut prendre que les valeurs  $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$  où  $c$  est la célérité des ondes et  $n$  un entier positif. Chacune de ces pulsations définit un **mode propre** de la corde.

Les fréquences correspondantes sont de la forme  $f_n = \frac{nc}{2L}$ , les pulsations spatiales  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ .

Une onde stationnaire quelconque est une superposition de modes propres : son spectre est discret (constitué des fréquences  $f_n$ ). Ainsi une note de musique émise par une corde vibrante contient une fréquence fondamentale  $f_1$  (correspondant à la note jouée) et ses multiples (les harmoniques) : le timbre d'un instrument à cordes dépend des amplitudes de ces harmoniques.

⇒ **Méthode 9.5. Déterminer les caractéristiques d'une onde stationnaire**

## ■ Comment étudier une onde progressive ?

### □ Méthode 9.1. Déterminer l'évolution temporelle ou la forme spatiale d'une onde progressive

Supposons qu'on connaisse l'évolution temporelle d'un signal en un point donné, ainsi que la célérité de l'onde considérée.

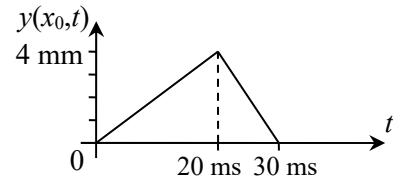
- On peut en déduire l'évolution temporelle du signal en un autre point où passe l'onde, en déterminant simplement le retard entre les deux points.
- On peut également en déduire la forme globale du signal, sur l'ensemble du milieu considéré, à un instant donné. Pour cela, on repère les abscisses où apparaissent à cet instant certaines valeurs particulières du signal ; l'allure de la courbe est alors analogue à la précédente (variation temporelle), mais à l'envers.

Inversement, si on connaît à un instant donné la forme du signal dans l'espace, on peut en déduire sa forme à un autre instant, ou l'évolution temporelle en un point donné.

⇒ Exercices 9.1, 9.2

Considérons une onde de déformation se propageant le long d'une corde, selon l'axe  $(Ox)$ , dans le sens des  $x$  croissants à partir du point d'abscisse 0, à une célérité  $c = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

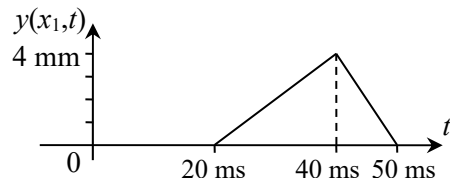
La variation de l'élongation  $y$  en  $x_0 = 0$  au cours du temps est représentée sur le schéma ci-contre ; elle est nulle pour  $t < 0$  et pour  $t > 30 \text{ ms}$ .



On cherche à en déduire, d'une part la variation temporelle de l'élongation en  $x_1 = 1,0 \text{ m}$ , d'autre part l'aspect de la corde aux instants  $t_1 = 20 \text{ ms}$ ,  $t_2 = 40 \text{ ms}$  et  $t_3 = 60 \text{ ms}$ .

- L'onde progressive est une fonction de la forme  $y(M, t) = f(t - x/c)$ . Tout se qui se passe en  $x_0$  se reproduit en  $x$  quelconque avec un retard  $(x - x_0)/c$ .

À l'abscisse  $x_1$ , le retard de l'onde par rapport au point d'abscisse 0 vaut  $x_1/c = 20 \text{ ms}$ . L'évolution temporelle de  $y$  en ce point reproduit donc celle à l'abscisse  $x_0 = 0$  avec un retard de 20 ms.



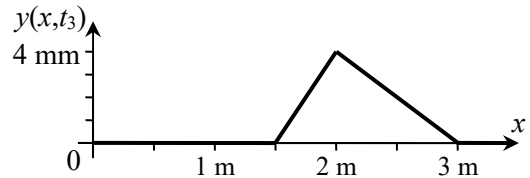
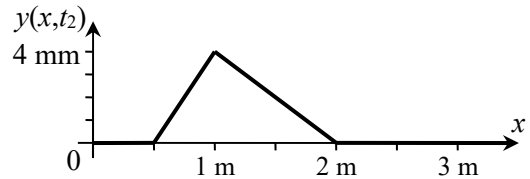
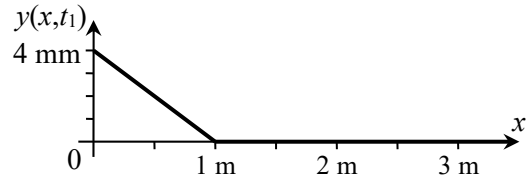
– Déterminons maintenant l'aspect global de la corde à différents instants.

Tout ce qui se passe en  $x_0$  à instant  $t_0$  se reproduit ensuite, à un instant  $t > t_0$ , à l'abscisse  $x_0 + c(t - t_0)$ .

Le « front » du signal, c'est-à-dire le point où une elongation non nulle apparaît à cet instant, se trouve à l'abscisse  $ct_i$ , soit  $ct_1 = 1,0$  m à  $t_1$  puis  $ct_2 = 2,0$  m et  $ct_3 = 3,0$  m.

Le maximum d'elongation, qui se produit en 0 à l'instant  $t_{\max 0} = t_1 = 20$  ms, se trouve à un instant ultérieur  $t_i > t_{\max 0}$  à une abscisse  $c(t_i - t_{\max 0})$ , soit  $c(t_2 - t_{\max 0}) = 1,0$  m à  $t_2$  puis  $c(t_3 - t_{\max 0}) = 2,0$  m à  $t_3$ .

Enfin la « queue » du signal, où se trouve la dernière elongation non nulle, n'apparaît sur la corde qu'à partir de l'instant  $t_{q0} = 30$  ms où l'excitation se termine. Elle se trouve à un instant ultérieur  $t_i > t_{q0}$  à une abscisse  $c(t_i - t_{q0})$ , soit à l'abscisse  $c(t_2 - t_{q0}) = 0,5$  m à  $t_2$  puis  $c(t_3 - t_{q0}) = 1,5$  m à  $t_3$ .



– On peut finalement vérifier la cohérence entre le premier graphe et les deux autres :

en  $x_0 = 0$ , à l'instant  $t_1 = 20$  ms l'ordonnée est à son maximum de 4 mm, puis à  $t_2 = 40$  ms et à  $t_3 = 70$  ms elle est redevenue nulle ;

le point d'abscisse  $x_1 = 1,0$  m a bien une ordonnée nulle (mais qui va juste commencer à augmenter) à  $t_1 = 20$  ms, une ordonnée de 4 mm à  $t_2 = 40$  ms, et de nouveau nulle à  $t_3 = 60$  ms.

### □ Méthode 9.2. Établir la formule des battements

Le calcul utilise une formule trigonométrique d'addition, pour deux signaux de pulsations proches, ce qui fait apparaître une amplitude variable au cours du temps.

En un point  $M$  se superposent deux ondes de même amplitude  $s(M, t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  et  $s'(M, t) = A \cos(\omega' t + \varphi')$ , où  $\omega$  et  $\omega'$  sont deux pulsations très proches, autour d'une valeur moyenne  $\omega_m$  :  $\omega = \omega_m - \frac{\Delta\omega}{2}$  et  $\omega' = \omega_m + \frac{\Delta\omega}{2}$ , soit  $\omega' - \omega = \Delta\omega$ , avec  $\Delta\omega \ll \omega$ .

L'onde résultante a pour expression :

$$s_{\text{tot}}(M, t) = A \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega' t + \varphi') = 2A \cos\left(\frac{\omega' - \omega}{2} t + \frac{\varphi' - \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t + \frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t + \frac{\varphi' - \varphi}{2}\right) \cos\left(\omega_m t + \frac{\varphi + \varphi'}{2}\right).$$



Le second cosinus correspond à une oscillation ayant sensiblement la même pulsation, donc la même période, que les deux ondes initiales. L'amplitude de ces oscillations est  $\left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\varphi - \varphi'}{2}\right) \right|$ , qui varie beaucoup plus lentement, avec une période  $T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \gg \frac{2\pi}{\omega}$

(la valeur absolue d'un cosinus ayant une période deux fois plus courte que le cosinus).

Cela se traduit par la perception de fluctuations dans l'intensité. Par exemple, deux diapasons à 440 Hz et 442 Hz font entendre un son de 441 Hz avec des battements à 2 Hz : on entend distinctement l'intensité fluctuer à raison de deux minima et deux maxima chaque seconde.

### □ Méthode 9.3. Déterminer l'amplitude résultant des interférences entre deux ondes

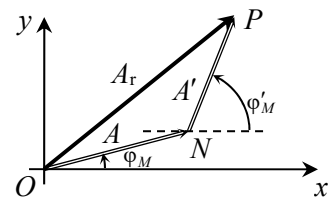
Lorsque deux ondes déphasées s'additionnent au même point, l'amplitude de l'onde résultante peut être obtenue avec une construction de Fresnel, dans laquelle une fonction sinusoïdale  $A \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par un vecteur de norme  $A$  et faisant un angle  $\varphi$  avec l'axe  $(Ox)$ . L'addition des deux ondes correspond à l'addition graphique des deux vecteurs, et on peut alors déterminer l'amplitude de l'onde résultante par calcul géométrique.

#### ⇒ Exercice 9.10

Supposons que les deux ondes  $s(M,t) = A \cos(\omega t + \varphi_M)$  et  $s'(M,t) = A' \cos(\omega t + \varphi'_M)$ , de même pulsation  $\omega$ , interfèrent en un point  $M$  ; leurs phases  $\varphi_M$  et  $\varphi'_M$  au point  $M$  dépendent de la position de celui-ci et des phases de ces ondes à la source.

#### – Calcul général

Dans le plan de Fresnel, on représente les deux ondes par deux vecteurs mis bout à bout. La norme  $A_r$  de leur somme, c'est-à-dire l'amplitude de l'onde résultante, correspond à la longueur du côté  $OP$  de ce triangle.



Elle s'obtient avec le théorème d'Al-Kashi (ou formule du cosinus) :

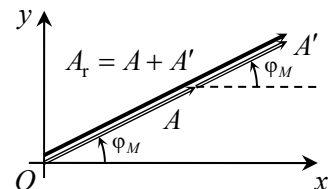
$A_r^2 = A^2 + A'^2 - 2AA' \cos \widehat{ONP}$ . L'angle  $\widehat{ONP}$  vaut  $(\pi - \varphi'_M + \varphi_M)$ , donc

$\cos \widehat{ONP} = -\cos(\varphi'_M - \varphi_M)$  soit  $A_r = \sqrt{A^2 + A'^2 + 2AA' \cos \varphi}$  où  $\varphi = \varphi'_M - \varphi_M$  est le déphasage entre les deux ondes incidentes au point  $M$ .

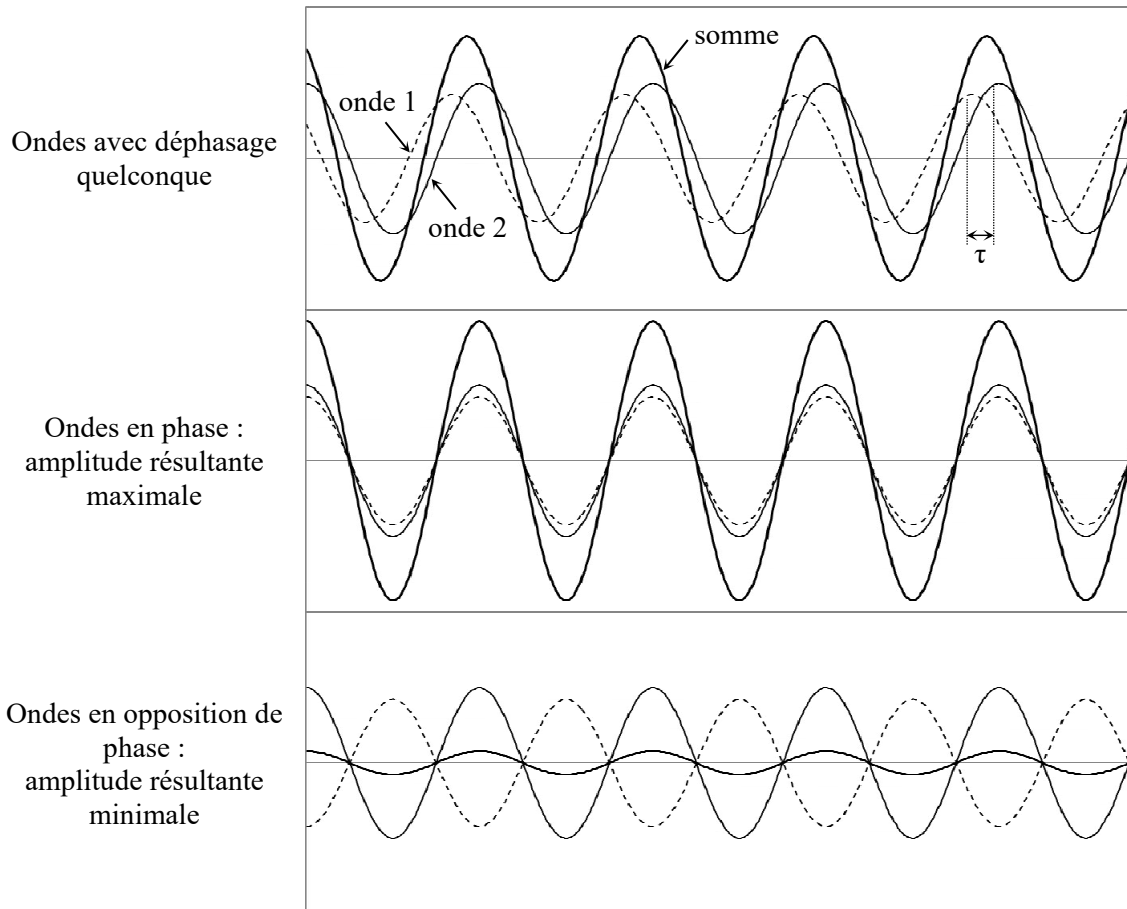
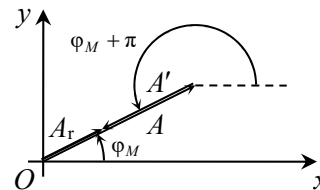
#### – Cas particuliers

Si  $\varphi'_M = \varphi_M$ , soit  $\varphi = 0$  (ondes *en phase* au point  $M$ ) : l'amplitude de l'onde résultante est maximale et vaut  $A_r = A + A'$ .

Il en va de même si  $\varphi = 2m\pi$  avec  $m$  entier quelconque.



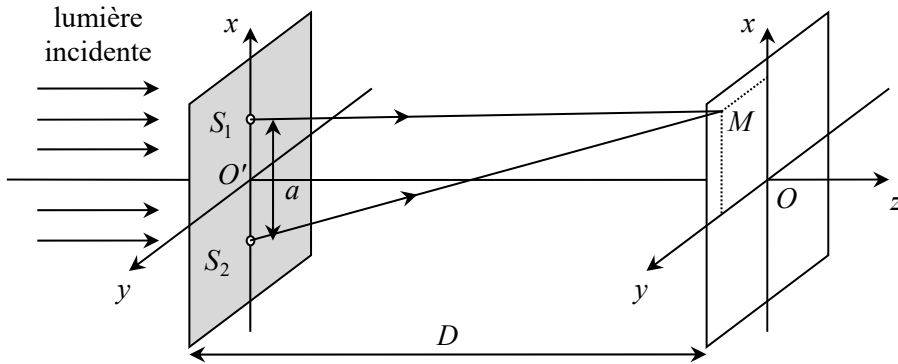
Si  $\varphi'_M = \varphi_M \pm \pi$ , soit  $\varphi = \pm\pi$  (ondes *en opposition de phase* au point  $M$ ) : l'amplitude de l'onde résultante est minimale et vaut  $A_r = |A - A'|$ . Dans le cas où les deux ondes incidentes ont la même amplitude  $A$ , l'onde résultante est nulle en  $M$ .



□ **Méthode 9.4. Calculer la différence de chemin optique pour les trous de Young**

Dans l'air d'indice  $n \approx 1$ , la différence de chemin optique s'identifie à la différence de distance parcourue : il s'agit donc d'un calcul géométrique avec les coordonnées des points. Pour obtenir une expression approchée simple, sur de petites distances, on utilise la formule d'approximation :  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  pour  $\varepsilon \ll 1$ .

⇒ Exercice 9.10



On cherche à déterminer  $\delta = S_2M - S_1M$  en supposant que la lumière incidente arrive sous incidence normale (orthogonalement à la plaque trouée).

On utilise la formule géométrique de la distance entre deux points dans l'espace (trois coordonnées cartésiennes) :  $S_1M = \sqrt{(x_M - x_{S_1})^2 + (y_M - y_{S_1})^2 + (z_M - z_{S_1})^2}$  soit avec les

notations du schéma :  $S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$  et de même  $S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$ .

Donc  $\delta = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$ . Cette formule ne permet pas de déterminer simplement la géométrie des franges d'interférences.

Mais celles-ci ne sont observables qu'au voisinage de l'axe (Oz), on peut donc faire les approximations  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ . Par ailleurs, on prend aussi toujours  $a \ll D$  pour une bonne visibilité du phénomène (franges pas trop serrées). On fait alors apparaître des expressions de la

forme  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  avec  $\varepsilon \ll 1$  :  $\delta = D\sqrt{1 + \left(\frac{x + a/2}{D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}} - D\sqrt{1 + \left(\frac{x - a/2}{D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}}$ .

Et on applique l'approximation  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  :

$$\begin{aligned} \delta &\approx D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x + a/2}{D} \right)^2 + \frac{y^2}{2D^2} - 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x - a/2}{D} \right)^2 - \frac{y^2}{2D^2} \right] \\ &= D \left[ 1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} - 1 - \frac{x^2 - ax + a^2/4}{2D^2} - \frac{y^2}{2D^2} \right] \text{ soit } \boxed{\delta \approx \frac{ax}{D}} \text{ après simplification.} \end{aligned}$$

*✍ Si la direction de la lumière incidente n'est pas orthogonale à la plaque, mais fait un angle  $\theta$  avec l'axe (Oz), il faut ajouter un second terme, qui est la différence de distance parcourue entre la source et chacun des deux trous, et qui vaut  $a \sin \theta$ .*

## ■ Comment étudier des ondes stationnaires ?

### □ Méthode 9.5. Déterminer les caractéristiques d'une onde stationnaire

- On peut tout d'abord établir la forme mathématique de l'onde stationnaire par addition de deux ondes progressives sinusoïdales.
- On en déduit l'existence et les positions des nœuds et des ventres de vibration, en étudiant les extrema de l'amplitude.
- Enfin les conditions aux limites permettent de déterminer les valeurs possibles de la pulsation (modes propres).

⇒ Exercices 9.7, 9.8, 9.9

- On considère une corde fixée aux points  $x = 0$  et  $x = L$ , sur laquelle circulent une onde incidente  $y_1(M, t) = A \cos(\omega t - kx)$  et une onde réfléchie  $y_2(M, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi)$  de même amplitude. L'onde résultante est donc :

$$y(M, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \varphi) = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Les variables  $x$  et  $t$  sont découplées, ce qui est caractéristique d'une onde stationnaire.

C'est le produit d'un cosinus temporel, traduisant les vibrations, et d'un cosinus spatial qui correspond à une amplitude de vibration différente selon l'abscisse.

- En  $x = 0$ , la corde est fixée donc l'amplitude est forcément nulle, soit  $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$  d'où  $\varphi = \pi$  : on réécrit alors  $y(M, t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$ .

En  $x$  tel que  $kx = n\pi$ , soit  $x_n = n \frac{\pi}{k}$  (avec  $n$  entier), l'amplitude est nulle (nœuds de vibration).

En  $x$  tel que  $kx = n\pi + \frac{\pi}{2}$ , soit  $x'_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}$ , elle est maximale (ventres de vibration).

Deux nœuds consécutifs ou deux ventres consécutifs sont séparés d'une distance  $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$ .

- La corde étant également fixée en  $x = L$ , il y a un nœud à cette abscisse, ce qui impose qu'il existe un entier  $m$  tel que  $L = m \frac{\pi}{k}$ , autrement dit  $k$  est nécessairement de la forme  $k_m = m \frac{\pi}{L}$ . Et

sachant que  $\omega = k \times c$ , la pulsation est nécessairement de la forme  $\omega_m = m \frac{\pi c}{L}$  : seuls les

multiples d'une pulsation fondamentale  $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$  peuvent donner lieu à une onde stationnaire.

Ces pulsations sont celles des modes propres de la corde.

## ■ ■ Vrai/Faux

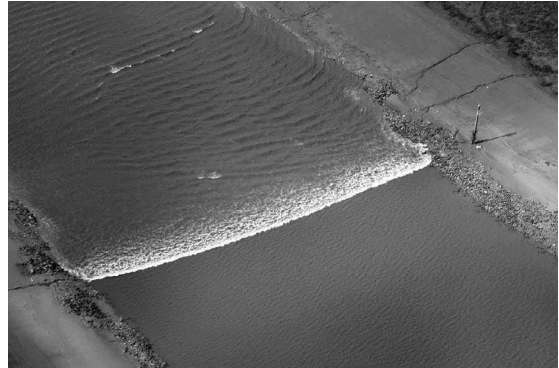
	Vrai	Faux
1. Une onde est une fonction du temps et de l'espace.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Une onde progressive possède une célérité qui dépend du milieu de propagation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Dans une onde plane progressive sinusoïdale, tous les points de l'espace oscillent avec la même amplitude.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Dans une onde stationnaire, tous les points de l'espace oscillent avec la même amplitude.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La période temporelle et la période spatiale d'une onde sinusoïdale sont deux grandeurs indépendantes l'une de l'autre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Les rayons X sont des ondes électromagnétiques.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Un milieu dispersif est un milieu qui fait varier la direction d'une onde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Une onde progressive quelconque peut être considérée comme une somme d'ondes sinusoïdales de fréquences différentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Les battements se produisent entre deux ondes de fréquences différentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le phénomène d'interférences peut se produire entre deux ondes de fréquences différentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Ondes de forme quelconque

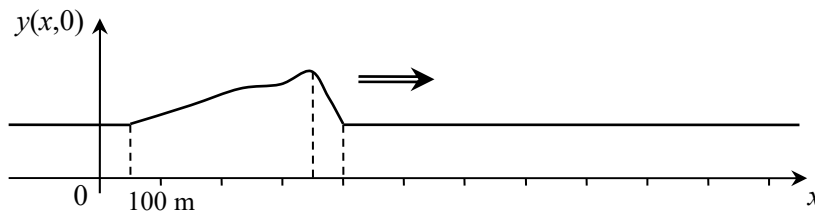
### □ Exercice 9.1. Mascaret

Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoquée par une interaction entre son écoulement et la marée montante.



On considère ici un mascaret se déplaçant à la vitesse  $c = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe  $(Ox)$  dans la direction et le sens de sa propagation.

À un instant  $t_0 = 0$ , le profil de niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



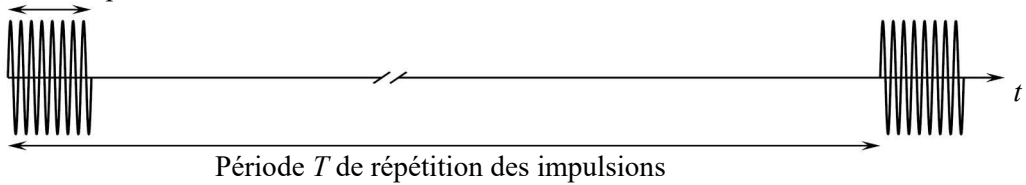
1. Faire un schéma du profil de niveau du fleuve à  $t = 1,0$  minute, en supposant que l'onde se propage sans déformation.
2. Toto attend avec sa planche de surf à l'abscisse  $x_T = 2,0$  km. À quel instant va-t-il recevoir la vague ?
3. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse  $x_d = 1,4$  km. Dessiner l'allure des variations  $y(x,t)$  en fonction de  $t$ .
4. En réalité, l'onde se déforme petit à petit car la vitesse de propagation en un point augmente avec la hauteur d'eau sous ce point. Comment évolue alors le profil de la vague ?

### □ Exercice 9.2. Mesure de distance et de vitesse par radar\*\*

Un radar (mot provenant de l'acronyme anglais pour *radio detection and ranging*) est un appareil utilisant des ondes radio (ondes électromagnétiques de fréquences comprises entre 3 MHz et 110 GHz) pour détecter la présence d'objets mobiles, et pouvant également déterminer leur distance et leur vitesse. On présente ici le principe de ces deux mesures.

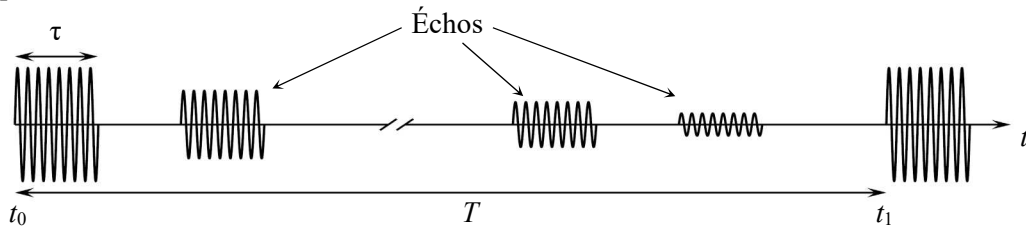
Le radar comporte une antenne qui émet, avec une période  $T$ , des impulsions, c'est-à-dire des signaux sinusoïdaux de durée limitée  $\tau$ . Deux de ces impulsions successives sont représentées sur le schéma ci-dessous (attention, il y a une rupture d'échelle due au fait que les durées sont très différentes).

Durée  $\tau$  d'une impulsion



Ces impulsions sont envoyées dans toutes les directions de l'espace. Lorsque l'une d'elles rencontre un objet réfléchissant, elle est renvoyée vers l'antenne, qui devient réceptrice entre deux impulsions (mais elle ne peut pas détecter de signal reçu tant qu'elle émet une impulsion). Cela fait alors apparaître un point lumineux sur un écran, indiquant la direction de la cible, et l'analyse du signal reçu permet d'effectuer les mesures souhaitées.

1. Un radar émet des impulsions de fréquence  $f = 2,90$  GHz et de durée  $\tau = 1,0$   $\mu\text{s}$ , avec une période  $T = 100,0$   $\mu\text{s}$ . L'enregistrement ci-dessous montre deux impulsions émises par le radar, commençant aux instants  $t_0 = 0,0$   $\mu\text{s}$  et  $t_1 = 100,0$   $\mu\text{s}$ , et trois échos renvoyés par des objets, commençant aux instants  $t_A = 3,0$   $\mu\text{s}$ ,  $t_B = 80,0$   $\mu\text{s}$  et  $t_C = 90,0$   $\mu\text{s}$ , et provenant de la réflexion de l'impulsion émise à  $t_0$ .



- Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes émises pendant une impulsion, et le nombre  $N$  d'oscillations dans chaque impulsion. On prendra pour l'air la célérité  $c = 3,00 \cdot 10^8$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - Déterminer la distance à laquelle se trouvent les différents objets détectés, en supposant que les ondes se propagent à la même célérité que dans le vide. Comment expliquer la différence d'amplitude entre les impulsions initiales et les échos ?
  - Montrer qu'il existe une distance minimale en dessous de laquelle on ne peut pas détecter un objet, et calculer sa valeur numérique.
2. Pour déterminer la vitesse, une première possibilité consiste à utiliser l'effet Doppler : si par exemple l'objet s'éloigne du radar à une vitesse  $v$ , l'onde réfléchie aura une fréquence légèrement inférieure à  $f$  :  $f' = f \left( 1 - \frac{v}{c} \right)$ .

Déterminer la variation relative de fréquence pour un avion s'éloignant à la vitesse  $v = 150$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , et conclure sur la précision de cette méthode.

- On peut également comparer des échos successifs reçus du même objet, en mesurant simplement le décalage temporel entre ces échos. Calculer le décalage temporel entre les deux échos successifs reçus de l'avion ci-dessus, et commenter.
- Enfin une autre méthode consiste à envoyer les impulsions toujours avec la même phase initiale, et à déterminer le déphasage entre deux échos successifs. Déterminer ce déphasage  $\phi$ , en fonction de la vitesse  $v$  dont s'éloigne l'objet selon la ligne de visée, de la durée  $T$ , et de la longueur d'onde  $\lambda$ . Faire l'application numérique pour  $v = 300$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et commenter.

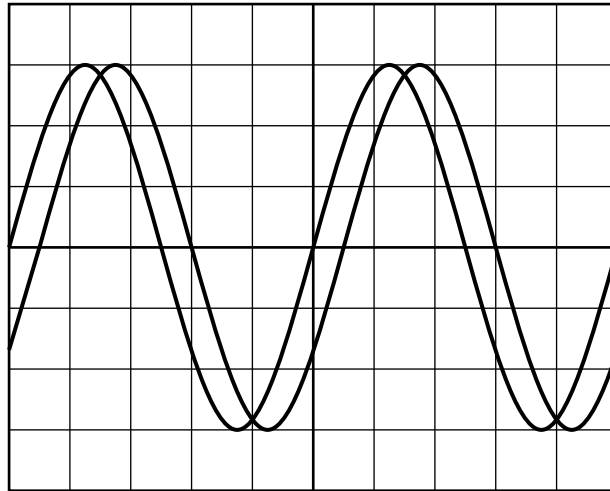
5. Les trois méthodes citées mesurent uniquement la composante de vitesse longitudinale (selon la ligne de visée). Comment détermine-t-on la composante  $v_2$  de vitesse transversale, et finalement la norme de la vitesse de l'objet ?

## ■ Ondes progressives sinusoïdales

### □ Exercice 9.3. Mesure de la célérité du son

Un haut-parleur est mis en vibration par un générateur de tension sinusoïdale fournissant une tension  $u(t) = U_m \cos(2\pi ft)$ , de fréquence  $f = 1500$  Hz. Il émet ainsi une note pure, constituée d'une onde acoustique sinusoïdale de même fréquence, en phase avec la tension  $u(t)$  et se propageant avec une célérité  $c$ . Un microphone est placé à une distance  $d$  du haut-parleur, et convertit le signal sonore reçu en une tension électrique  $u'(t)$  en phase avec ce signal sonore. Sur un oscilloscope, on visualise simultanément les deux tensions  $u(t)$  et  $u'(t)$ . On règle l'amplification du microphone et les échelles de l'oscilloscope de manière à avoir la même amplitude pour les deux courbes.

1. Pour une certaine position du microphone, l'écran a l'allure ci-dessous. Montrer qu'il est possible de faire coïncider les deux courbes en modifiant la distance  $d$ .



2. En augmentant progressivement  $d$ , on trouve cette coïncidence pour deux valeurs successives  $d_1$  et  $d_2$ . Montrer qu'on peut en déduire la célérité du son. Faire l'application numérique pour  $d_1 = 35$  cm et  $d_2 = 57$  cm.

### □ Exercice 9.4. Corde excitée de façon sinusoïdale

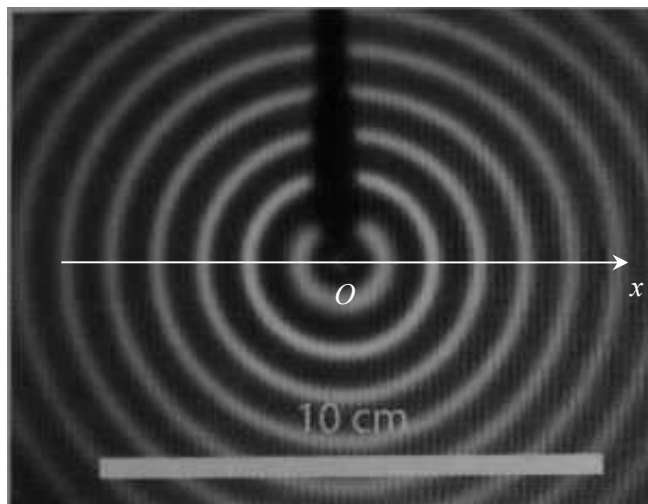
L'extrémité  $S$  d'une corde élastique est reliée à un vibreur qui lui impose un mouvement oscillatoire vertical, sinusoïdal, de fréquence  $f = 100$  Hz et d'amplitude  $Y_m$ . Chaque point de la corde est repéré par son abscisse  $x$  et son élongation verticale  $y$  dans le repère  $(Oxyz)$ ,  $O$  désignant la position d'équilibre de  $S$ . Le mouvement de  $S$  débute à l'instant  $t = 0$ . Un dispositif amortisseur placé à l'autre extrémité de la corde empêche la réflexion de l'onde issue de  $S$ .



1. À l'instant  $t = 0$ ,  $S$  passe par sa position d'équilibre avec une vitesse  $\vec{v}_0$  verticale ascendante de norme  $v_0 = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Donner l'équation horaire du mouvement de  $S$ , notée  $y_S(t)$ , en précisant les valeurs numériques de tous les paramètres.
2. La plus petite distance entre deux points vibrant en opposition de phase étant  $d = 6,0 \text{ cm}$ , en déduire la longueur d'onde  $\lambda$  et la célérité  $c$  des ondes le long de la corde.
3. On considère maintenant un point  $M$  de la corde, d'abscisse  $x_M = 21 \text{ cm}$ .
  - a) Quelle est son équation horaire  $y_M(t)$  ? Calculer la valeur numérique de son retard par rapport à  $S$ .
  - b) Comparer les mouvements des points  $S$  et  $M$ .
  - c) Calculer les élongations des points  $S$  et  $M$  à l'instant de date  $t_1 = 40 \text{ ms}$ .
4. On étudie maintenant la corde globalement à l'instant  $t_1 = 40 \text{ ms}$ .
  - a) Déterminer la fonction  $y_{t_1}(x)$  décrivant l'élongation le long de la corde à cet instant. Quelle est sa période spatiale ?
  - b) Représenter précisément l'aspect de la corde à cet instant.

### □ Exercice 9.5. Vagues à la surface de l'eau

À la surface d'une cuve à ondes, un petit vibreur, oscillant à la fréquence  $f = 20 \text{ Hz}$ , crée une onde circulaire. À un instant choisi comme origine ( $t = 0$ ) on a pris la photo suivante.



1. Déterminer la longueur d'onde, et en déduire la célérité de cette onde à la surface de l'eau.
2. Quelle serait l'allure de la photo aux instants  $t_1 = 100 \text{ ms}$  et  $t_2 = 125 \text{ ms}$  ?
3. En supposant que cette onde est sinusoïdale, donner l'expression de la hauteur d'eau pour les points de l'axe  $(Ox)$ , soit  $z(x, t)$ , pour  $x > 0$  et pour  $x < 0$ .
4. En réalité l'amplitude  $Z_m$  de l'onde ne reste pas constante lors de sa propagation : elle diminue lorsqu'on s'éloigne du point origine  $O$ , car son énergie est répartie sur un domaine de plus en plus grand. Sachant que la densité d'énergie transportée par l'onde est proportionnelle au carré de l'amplitude, proposer une expression de  $Z_m$  en un point  $M$  en fonction de  $r = OM$  s'il n'y a aucune perte d'énergie, et modifier les expressions de la question 3.

### □ Exercice 9.6. Ondes électromagnétiques

Les antennes qui émettent des ondes électromagnétiques dans l'espace, ou qui les reçoivent, doivent avoir une longueur de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes émises : on choisit généralement un sous-multiple comme  $\lambda/4$ ,  $\lambda/8$  ...

1. Pour transmettre la radio, on pourrait envisager d'émettre des signaux électromagnétiques ayant les mêmes fréquences que les sons audibles (audiofréquences), entre 20 Hz et 20 kHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air (assimilable au vide) de telles ondes électromagnétiques, et montrer que la taille des antennes serait irréalisable.
2. On transforme alors ces signaux par un procédé appelé modulation de fréquence (FM), qui leur donne des fréquences beaucoup plus élevées, entre 87,5 MHz et 108 MHz. Calculer les longueurs d'onde dans l'air des ondes de radio FM, et en déduire l'ordre de grandeur de la taille des antennes nécessaires.
3. Voyez-vous une autre raison pour laquelle les stations de radio ne pourraient pas émettre dans le domaine des audiofréquences ?

Donnée : célérité des ondes électromagnétiques dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## ■ Ondes stationnaires

### □ Exercice 9.7. Réflexion sur l'extrémité d'une corde

Une corde  $AB$  a son extrémité  $B$  fixe et son extrémité  $A$  actionnée transversalement par un vibreur de fréquence  $f = 100 \text{ Hz}$ .

La célérité des ondes transversales sur la corde est  $c = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



1. L'onde progressive sinusoïdale se propage de  $A$  vers  $B$ , dans le sens des  $x$  croissants. Dans le repère  $(Oxyz)$ , d'origine  $O$  choisie en un point quelconque de la corde, l'équation horaire de  $O$  est  $y_O(t) = a \cos \omega t$ ,  $a$  étant l'amplitude, supposée constante tout le long de la corde.
  - a) Donner l'équation horaire  $y_M(t)$  d'un point  $M$  de la corde, d'abscisse  $x$ .
  - b) Déterminer la pulsation temporelle  $k$  et la longueur d'onde  $\lambda$ .
2. L'onde se réfléchit en  $B$  en subissant un déphasage  $\varphi$ . Pour simplifier, on prendra maintenant l'origine du repère en  $B$ .
  - a) Exprimer les élongations  $y_{B_i}(t)$  due à l'onde incidente et  $y_{B_r}(t)$  due à l'onde réfléchie, et montrer que  $\varphi = \pi$ .
  - b) Pour un point  $M$  d'abscisse  $x$  (négative), exprimer  $y_{M_i}(t)$  et  $y_{M_r}(t)$ , puis l'élongation  $y_M(t)$  résultant de la superposition des deux ondes.
  - c) En déduire les positions des nœuds et des ventres de vibration.

### □ Exercice 9.8. Onde stationnaire sur une corde de guitare

Une corde de guitare de longueur  $L$  est fixée à ses deux extrémités. La corde est considérée comme étant sans épaisseur, inextensible et sans raideur, et on note  $\mu$  sa masse linéique (masse par unité de longueur). Les frottements ainsi que le poids sont négligés devant la force de tension  $T$ , qui est supposée être la même tout au long de la corde.



1. La célérité des ondes de déformation sur la corde est  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

Vérifier la dimension de cette grandeur par analyse dimensionnelle.

Initialement la corde est horizontale et au repos. On l'écarte localement de cette position en la grattant avec un doigt, puis on la laisse évoluer librement : une onde stationnaire apparaît alors, pour laquelle on cherche une expression de la forme  $z(x,t) = Z_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$ , avec  $\omega = kc$ .

2. a) Montrer que  $\omega$  ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes  $\omega_n$ , dites pulsations propres, avec  $n$  entier positif. Exprimer  $\omega_n$  en fonction de  $L$ ,  $n$  et  $c$ .
- b) À chaque valeur de  $n$  correspond un mode propre de vibration. Le mode  $n=1$  est appelé mode fondamental. Les modes correspondant à  $n$  supérieur à 1 sont les harmoniques de rang  $n$ . Exprimer l'élongation  $z(x,t)$  correspondant à l'harmonique de rang  $n$ , en fonction de son amplitude  $A_n$ , de la phase à l'origine du cosinus à variation temporelle  $\varphi_n$ , de la pulsation  $\omega_1$  du fondamental, ainsi que de  $x$ ,  $L$ ,  $n$  et  $t$ . Quelle est alors la relation entre la longueur  $L$  de la corde et la longueur d'onde  $\lambda_n$  dans ce mode ?
- c) Donner les positions des ventres et des nœuds de vibration dans le mode de rang  $n$ . Combien de nœuds et de ventres comporte ce mode de vibration ?
- d) Donner l'allure des positions extrêmes de la corde dans les modes de vibration correspondant au fondamental et aux deux premiers harmoniques. Donner leur longueur d'onde respective et préciser la position des nœuds et des ventres.

**3.** Une guitare électrique comporte six cordes en acier. Le tableau suivant fournit pour chaque corde la valeur de sa fréquence fondamentale, lorsque la guitare est accordée, ainsi que son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
Fréquence du fondamentale (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
Diamètre (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25

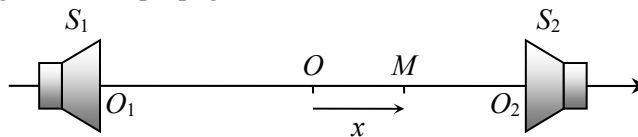
Toutes les cordes ont une longueur  $L = 0,63$  m et une masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Déterminer la norme de la tension d'une corde  $T$  en fonction de  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $d$ ,  $L$  et de la fréquence du mode fondamental. Calculer numériquement les tensions nécessaires pour que la guitare soit accordée. Comparer à la tension usuelle d'un cordage de raquette de tennis, qui est de « 25 kg » (c'est-à-dire égale au poids d'une masse de 25 kg).

*D'après Banque PT*

### □ Exercice 9.9. Deux haut-parleurs

Deux haut-parleurs identiques  $S_1$  et  $S_2$ , de même axe, orientés l'un vers l'autre, sont alimentés par le même générateur. Ils émettent des vibrations en phase, de même amplitude. Les ondes acoustiques ainsi engendrées se propagent dans l'air à la célérité  $c = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



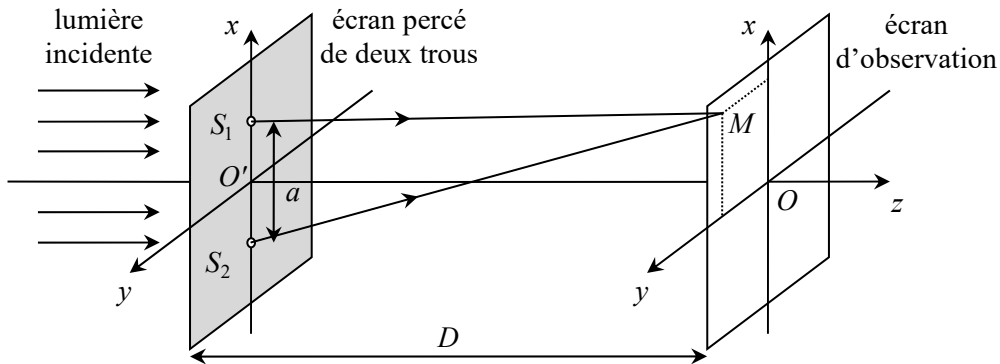
Au point  $O$ , milieu de  $[O_1O_2]$ , chacune des vibrations crée des variations de pression de l'air identiques  $p_{1,O} = p_{2,O} = P_m \cos(2\pi ft)$  avec  $f = 25 \text{ kHz}$ .

1. À quel domaine d'ondes acoustiques correspond cette fréquence ?
2. Exprimer en un point  $M$  quelconque de l'axe  $(O_1O_2)$ , d'abscisse  $x$ , la variation de pression due à la superposition des ondes progressives émises par  $S_1$  et  $S_2$ . On fera apparaître une pulsation spatiale  $k$ , dont on calculera la valeur numérique.
3. Donner les positions des quatre nœuds de variation de pression les plus proches de  $O$ .

## ■ Interférences

### □ Exercice 9.10. Expérience de Young \*

Le génial savant britannique Thomas YOUNG réalisa en 1803 une expérience clé pour établir la nature ondulatoire de la lumière : ayant séparé en deux un mince faisceau de lumière, il observa sur un écran des franges d'interférences résultant de la superposition des deux faisceaux obtenus. L'expérience a ensuite été perfectionnée en utilisant deux trous percés dans un écran. Considérons les deux trous  $S_1$  et  $S_2$  percés dans un écran confondu avec le plan  $(O'xy)$ , et séparés d'une distance  $a$  selon la direction  $(O'x)$ . Ces deux trous étant éclairés par un faisceau de lumière parallèle à l'axe  $(Oz)$ , ils se comportent comme deux sources lumineuses ponctuelles émettant en phase. La longueur d'onde de la lumière est  $\lambda$  dans l'air, assimilé au vide (indice 1). On observe la figure d'interférences sur un écran  $(Oxy)$ .



On suppose  $a \ll D$ ,  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ .

1. Montrer que la différence de chemin optique en  $M(x, y)$  est  $\delta = S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}$ .
2. Exprimer le déphasage  $\varphi$  entre les deux ondes arrivant en un point  $M$  de l'écran. Pour quelles valeurs de  $\varphi$  aura-t-on des interférences constructives ? destructives ?
3. On appelle *frange sombre* un ensemble de points ayant une même valeur de  $\varphi$ , donnant des interférences destructives. Donner l'équation cartésienne d'une frange sombre et en déduire sa nature géométrique précise.
4. On appelle *interfrange* la distance notée  $i$  entre deux franges sombres successives. Calculer  $i$  pour  $D = 2,5 \text{ m}$ ,  $a = 2,5 \text{ mm}$  et  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .
5. Montrer que le déphasage en  $x_a = 0,45 \text{ mm}$  vaut  $270^\circ$ . En déduire l'amplitude  $A_r$  de l'onde résultante, en notant  $A$  l'amplitude de chaque onde incidente. L'intensité lumineuse  $I$  étant proportionnelle au carré de l'amplitude, comparer  $I$  en  $x_a$  à l'intensité maximale  $I_{\max}$  en  $x = 0$ .

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 9.2.* Question 1 : la longueur d'onde  $\lambda$  est liée à la fréquence  $f$  de ces ondes, et non à la période  $T$  de répétition des impulsions. Question 3 : pour pouvoir calculer les instants de réception de deux impulsions successives, définir très précisément des notations pour chaque instant intervenant dans les calculs (instant d'émission, instant d'arrivée sur l'objet et instant de retour pour chaque impulsion) ; la durée mise par l'onde pour atteindre l'objet dépend de la distance qu'il parcourt pendant cette même durée.

*Exercice 9.3.* Écrire la forme du signal au niveau du microphone, et en déduire pour quelles positions le déphasage est nul.

*Exercice 9.8.* Question 1 : la dimension de la tension  $T$  s'obtient avec le principe fondamental de la dynamique (vu en terminale).

*Exercice 9.10.* Question 2 : le déphasage des deux ondes en un point est proportionnel à la différence de marche en ce point. Question 5 : pour déterminer l'amplitude résultante, on peut utiliser une construction de Fresnel.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux

4. L'amplitude est nulle au niveau des nœuds, maximale au niveau des ventres.
5. Elles sont liées par la relation  $\lambda = cT$ .
7. C'est un milieu dans lequel les ondes de fréquences différentes ont des vitesses de propagation différentes.
10. Seules des ondes de même fréquence donnent lieu au phénomène d'interférences.

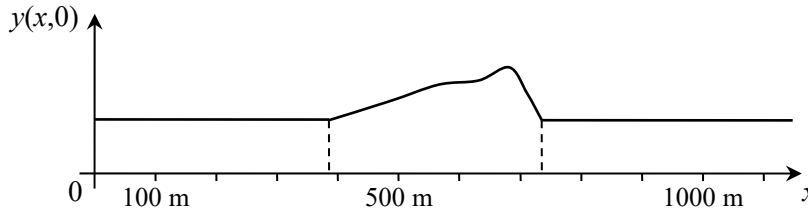
### □ Les erreurs classiques

- Dans l'étude du profil d'une onde quelconque, non périodique, ne pas confondre les variations en fonction de  $x$ , à  $t$  donné (aspect global instantané du système) et les variations en fonction de  $t$ , à  $x$  donné (vibrations locales au cours du temps).
- Ne pas confondre les différentes grandeurs caractéristiques d'une onde sinusoïdale ni leurs dimensions ( $T$  est un temps,  $f$  et  $\omega$  sont les inverses d'un temps,  $\lambda$  est une longueur,  $k$  est l'inverse d'une longueur).
- Ne pas confondre les interférences, qui se produisent entre deux ondes sinusoïdales *de même fréquence*, et donnent une variation *spatiale* de l'amplitude, avec les battements, qui se produisent entre deux ondes sinusoïdales *de fréquences légèrement différentes*, et donnent une variation *temporelle* de l'amplitude.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 9.1

1. À l'instant  $t$ , l'onde s'est déplacée d'une distance  $ct = 330$  m, d'où le profil suivant, avec le front de l'onde aux alentours de  $x = 730$  m et une queue autour de  $x = 380$  m.



⇒ Méthode 9.1

2. Le front de l'onde, qui est en  $x_f = 400$  m à l'instant  $t_0 = 0$ , atteint l'abscisse  $x_T$  avec un retard

$$t = \frac{x_T - x_f}{c}. \text{ Application numérique : } t = \frac{2000 - 400}{20} \times 3,6 \text{ soit } t = 290 \text{ s} = 4 \text{ min } 50 \text{ s}.$$

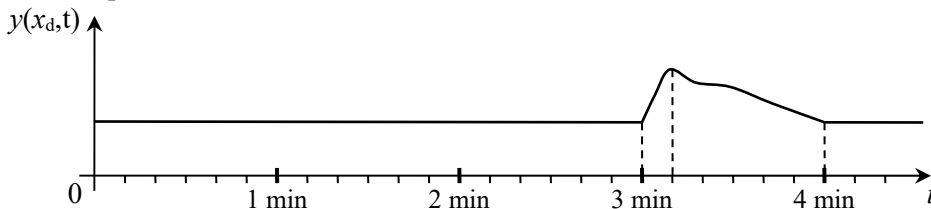
*Le facteur 3,6 correspond à la conversion des kilomètres par heure en mètres par seconde. D'autre part, la précision des données ne permet pas de donner plus de deux chiffres significatifs dans le résultat.*

3. Déterminons les instants particuliers pour l'onde à l'abscisse  $x_d$ . Le front d'onde arrive avec un retard  $t_f = \frac{x_d - x_f}{c} = 180 \text{ s} = 3 \text{ min}$ . Le sommet, qui était en  $x_s = 350$  m à l'instant  $t_0 = 0$ ,

arrive en  $t_s = \frac{x_d - x_s}{c} = 170 \text{ s} = 3 \text{ min } 10 \text{ s}$ . Enfin la queue de la vague, qui était en  $x_q = 50$  m à

l'instant  $t_0 = 0$ , arrive en  $t_s = \frac{x_d - x_q}{c} = 240 \text{ s} = 4 \text{ min}$ .

L'évolution temporelle à l'abscisse  $x_d$  a donc l'allure suivante :



*L'onde apparaît toujours « à l'envers » quand on compare le graphe temporel à  $x$  donné et le graphe spatial à  $t$  donné : ici le point considéré monte d'abord très vite, lorsqu'il est atteint par le front de la vague, puis redescend lentement au fur et à mesure que le « dos » passe.*

4. La vitesse est plus grande là où la hauteur d'eau est plus grande, donc vers le haut de la vague : ainsi le profil à l'avant va s'accroître petit à petit jusqu'au déferlement de la vague :



### Exercice 9.2

1. a)  $\lambda = \frac{c}{f}$ . AN  $\lambda = 10,3 \text{ cm}$ .

L'oscillation à l'intérieur de chaque impulsion a une fréquence  $f$ , donc une période  $T_{\text{imp}} = 1/f$ , à ne pas confondre avec la période  $T$  séparant deux émissions d'impulsions. Le nombre d'oscillations pendant la durée  $\tau$  d'une impulsion est donc :  $N = \frac{\tau}{T_{\text{imp}}} = \tau f$ . AN  $N = 2900$ .

b) Le temps que met l'onde pour faire un aller-retour entre le radar et un objet détecté à une distance  $d$  est :  $t = \frac{2d}{c}$ , d'où  $d = \frac{ct}{2}$ . AN  $d_A = \frac{ct_A}{2} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \times 6 \cdot 10^{-6}}{2}$  soit  $d_A = 450 \text{ m}$ , et de même  $d_B = 12,0 \text{ km}$  et  $d_C = 13,5 \text{ km}$ .

La diminution progressive des amplitudes des échos est due à l'absorption partielle des ondes par l'air : plus la distance parcourue dans l'air est grande, plus l'onde est atténuée.

c) Le radar ne peut pas détecter les échos tant qu'il émet, donc la détection ne peut avoir lieu qu'à des instants  $t > \tau = 2,0 \mu\text{s}$ . Cela correspond à des distances  $d$  telles que  $d > \frac{c\tau}{2} = d_{\text{min}}$ .

AN  $d_{\text{min}} = 150 \text{ m}$ .

2. La variation relative de fréquence est  $\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = -\frac{v}{c}$ . AN  $\frac{\Delta f}{f} = -5 \cdot 10^{-7} = -0,00005 \%$

avec  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour pouvoir détecter l'effet Doppler, avec ce véhicule pourtant très rapide, il faut donc des appareils pouvant mesurer la fréquence avec au moins 7 chiffres significatifs (et même plus si on veut de la précision sur la vitesse), ce qui n'est pas toujours le cas avec les circuits électroniques utilisés.

3. Deux impulsions successives sont séparées d'une durée  $T$ . Si l'objet est immobile, les échos sont aussi séparés de  $T = 100,0 \mu\text{s}$ . En revanche, s'il se déplace le calcul est plus compliqué.

– La première impulsion est émise à  $t = 0$  alors que l'objet est à une distance  $d$  de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant  $t_1$  tel que la distance  $ct_1$  parcourue par l'onde entre 0 et  $t_1$  est égale à la distance  $d + vt_1$  séparant l'objet de l'émetteur à  $t_1$  :  $ct_1 = d + vt_1$  soit

$$t_1 = \frac{d}{c - v}$$

Après réflexion sur l'objet, l'impulsion parcourt la même distance pendant la même durée dans l'autre sens et revient donc au niveau de l'antenne à l'instant  $t_2 = 2t_1 = \frac{2d}{c - v}$ .



– La deuxième impulsion est émise à  $t_3 = T$  alors que l'objet est à une distance  $d + vt_3 = d + vT$  de l'émetteur. Cette impulsion atteint l'objet à un instant  $t_4$  tel que la distance  $c(t_4 - t_3) = c(t_4 - T)$  parcourue par l'onde entre  $t_3$  et  $t_4$  est égale à la distance  $d + vt_4$  séparant l'objet de l'émetteur à  $t_4$  :  $c(t_4 - T) = d + vt_4$  soit  $t_4 = \frac{d + cT}{c - v}$ . Elle revient sur l'antenne après

la même durée  $t_4 - T$ , donc à l'instant  $t_5 = t_4 + (t_4 - T) = 2\frac{d + cT}{c - v} - T = \frac{2d + (c + v)T}{c - v}$ .

– Finalement le décalage temporel recherché est  $\Delta t = t_5 - t_2$ , soit  $\Delta t = T \frac{c + v}{c - v}$ .

*✎ Notons que pour  $v = 0$ , c'est-à-dire pour un objet immobile, on retrouve bien  $\Delta t = T$ .*

An  $\Delta t = 100,0 \mu\text{s}$  avec la précision permise par les données. Pour pouvoir distinguer cette valeur  $\Delta t$  de la valeur  $T$  pour un objet immobile, cette méthode nécessiterait également une

précision extrêmement grande :  $\frac{\Delta t - T}{T} = \frac{2v}{c - v} \approx \frac{2v}{c} = 1 \cdot 10^{-6} = 0,0001\%$ , soit un écart relatif

juste deux fois plus grand que dans la méthode précédente.

**4.** Entre deux impulsions successives, c'est-à-dire sur une durée  $T$ , la distance  $d$  a augmenté de  $vT$ , donc la phase a augmenté de  $\varphi = k \times 2vT = \frac{4\pi vT}{\lambda}$ . AN  $\varphi = 1,83 \text{ rad}$  (un peu plus de  $\frac{\pi}{2}$ ),

valeur tout à fait mesurable.

**5.** Mesurer la vitesse transversale  $v_2$  est beaucoup plus facile : il suffit de repérer sur l'écran différentes positions successives de la cible, et de diviser la distance parcourue par la durée.

Si on note  $v_1$  la vitesse longitudinale (déterminée avec l'une des méthodes précédentes), la norme de la vitesse est alors  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ .

### Exercice 9.3

**1.** Notons  $(Ox)$  l'axe allant du haut-parleur vers le microphone.

L'onde émise par le haut-parleur se propage vers les  $x$  croissants donc elle est de la forme  $s(x, t) = S_m \cos(2\pi ft - kx + \varphi)$ , avec  $\omega = 2\pi f = kc$ .

*✎ A priori il y a un déphasage  $\varphi$ , inconnu, entre la tension qui alimente le haut-parleur et l'onde sonore qu'il émet. Ceci n'aura aucune influence sur la suite.*

Lorsqu'elle arrive sur le microphone, elle vaut donc  $s(d, t) = S_m \cos(2\pi ft - kd + \varphi)$ , ce qui correspond à la tension observée  $u'(t) = U_m \cos(2\pi ft - kd + \varphi)$ . Les deux courbes coïncident si

leur déphasage est un multiple de  $2\pi$ , soit  $kd - \varphi = n \times 2\pi$ , d'où  $d = n \times \frac{2\pi}{k} + \frac{\varphi}{k} = n \times \frac{c}{f} + \frac{\varphi}{k}$ .

**2.** L'écart entre  $d_1$  et  $d_2$  vaut donc  $\frac{c}{f}$ , d'où  $c = f(d_2 - d_1)$ . AN  $c = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 9.4

1.  $S$  a un mouvement rectiligne sinusoïdal vertical, de la forme  $y_S(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La pulsation est  $\omega = 2\pi f = 630 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sa vitesse est  $\vec{v} = \dot{y}_S(t) \vec{e}_y = -Y_m \omega \sin(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$ . À  $t = 0$ ,  $y_S(0) = 0 = Y_m \cos \varphi$  (position d'équilibre) donc  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ; et  $v_0 = -Y_m \omega \sin \varphi > 0$  donc  $\sin \varphi < 0$

d'où  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , ce qui permet de réécrire l'élongation sous la forme  $y_S(t) = Y_m \sin(\omega t)$ .

Enfin  $v_0 = Y_m \omega$  d'où  $Y_m = \frac{v_0}{2\pi f} = 4,0 \text{ mm}$ .

2. Entre deux points en opposition de phase, la distance est  $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ , donc ici  $d = \frac{\lambda}{2}$ . Or

$\lambda = cT = \frac{c}{f}$ , donc  $c = 2fd$ . AN  $c = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. a)  $M$  reçoit l'onde avec un retard  $\Delta t = \frac{x_M}{c}$ . AN  $\Delta t = 18 \text{ ms}$ . Son équation horaire est alors

$y_M(t) = Y_m \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_M}{c}\right)\right)$  pour  $t > 18 \text{ ms}$ .

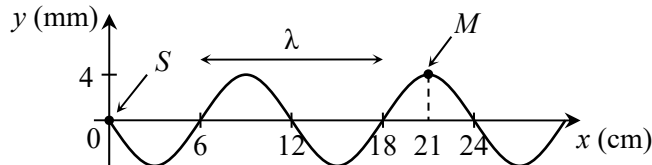
b) La position de  $M$  est telle que  $SM = \frac{7}{2}d = \frac{7}{2} \times \frac{\lambda}{2}$ , sachant que la distance  $d$  correspond à un déphasage de  $\pi$ , donc  $M$  est en retard de  $\frac{7\pi}{2}$ , c'est-à-dire en avance de  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à  $S$ .

c) AN à  $t_1 = 40 \text{ ms} = \frac{4}{f} = 4T$ :  $y_S(t_1) = y_S(0) = 0$  et  $y_M(t_1) = Y_m \sin\left(4\omega T + \frac{\pi}{2}\right) = Y_m \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$  soit  $y_M(t_1) = Y_m = 4,0 \text{ mm}$ .

4. a) Cette fois on fixe  $t = t_1$  dans l'expression de  $y$ , et chaque point d'abscisse  $x$  a un retard de  $\frac{x}{c}$  par rapport à  $S$ :  $y_{t_1}(x) = Y_m \sin\left(\omega\left(t_1 - \frac{x}{c}\right)\right)$  soit  $y_{t_1}(x) = -Y_m \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) = -Y_m \sin(kx)$  avec

$k = 52 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ . Période spatiale (longueur d'onde):  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{f}$ . AN  $\lambda = 12 \text{ cm}$ .

b) Une photographie de la corde à cette instant donnerait donc l'allure suivante :



### Exercice 9.5

1. La longueur d'onde est l'écart entre deux maxima consécutifs, donc entre les rayons de deux cercles clairs successifs sur la photo. Pour plus de précision, on mesure l'écart entre le deuxième cercle et le sixième (les deux étant bien nets), soit 4 longueurs d'onde : avec l'échelle indiquée on trouve un écart  $e = 3,6 \text{ cm}$ , d'où  $\lambda = 0,90 \text{ cm}$ . Alors  $c = \lambda f$ . AN  $c = 18 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. La période des ondes est  $T = \frac{1}{f} = 0,05 \text{ s} = 50 \text{ ms}$ . Donc  $t_1 = 2T$  : après un nombre entier de périodes, toutes les grandeurs reprennent la même valeur, donc la photo serait identique. D'autre part,  $t_2 = 2,5T$  : après une demi-période supplémentaire, les maxima deviennent des minima et inversement, donc le contraste de la photo serait inversé (les cercles blancs deviendraient noirs et inversement).

3. Pour  $x > 0$ , l'onde se déplace vers les  $x$  croissants :  $z(x,t) = Z_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$ .

Pour  $x < 0$ , l'onde se déplace vers les  $x$  décroissants :  $z(x,t) = Z_m \cos(\omega t + kx + \varphi)$ .

4. Au cours de la propagation, une même énergie totale  $E$  se répartit sur des cercles de périmètre  $2\pi r$  de plus en plus grand, avec une densité de la forme  $k Z_m(r)^2$  :

$$E = k Z_m(r)^2 \times 2\pi r = \text{cte} \text{ donc l'amplitude est de la forme } Z_m(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} \left( \text{avec } A = \sqrt{\frac{E}{2\pi k}} = \text{cte} \right).$$

L'expression de l'onde sur l'axe ( $Ox$ ) est donc :  $z(x,t) = \frac{A}{\sqrt{x}} \cos(\omega t - kx + \varphi)$  pour  $x > 0$ , et

$$z(x,t) = \frac{A}{\sqrt{-x}} \cos(\omega t + kx + \varphi) \text{ pour } x < 0.$$

### Exercice 9.6

1.  $\lambda = \frac{c}{f}$ . AN  $15 \text{ km} < \lambda < 15000 \text{ km}$ . Il faudrait donc des antennes de plusieurs kilomètres !

2. Cette fois on trouve  $2,8 \text{ m} < \lambda < 3,4 \text{ m}$ . Les antennes peuvent donc cette fois avoir une taille de l'ordre du mètre ou de quelques dizaines de centimètres.

3. Si les stations de radio émettaient toutes dans le domaine des audiofréquences, leurs émissions se mélangeraient et il n'y aurait aucun moyen pour le récepteur de les séparer. Tandis que l'émission de chaque station dans son propre domaine de fréquences permet de la séparer des autres par filtrage (voir chapitre 7).

### Exercice 9.7

1. a) L'onde se propage vers les  $x$  croissants donc elle arrive au point  $M$  avec un retard  $x/c$

par rapport au point  $O$  : alors  $y_M(t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ .

b) Cette équation horaire peut encore s'écrire  $y_M(t) = a \cos(\omega t - kx)$  en posant  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c}$ .

AN  $k = 25 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ . La longueur d'onde est  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{f}$ . AN  $\lambda = 25 \text{ cm}$ .

2. a) L'onde incidente est l'onde précédente, valant  $y_{Bi}(t) = a \cos(\omega t)$  à l'origine  $B$ . L'onde réfléchiée en  $B$  est déphasée de  $\varphi$ , soit  $y_{Br}(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$ . Or  $B$  est fixé, donc son élongation résultant des deux ondes est toujours nulle :  $y_B(t) = a \cos(\omega t) + a \cos(\omega t + \varphi) = 0, \forall t$ .

Cela impose donc  $\varphi = \pi$  puisque  $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ , soit  $y_{Br}(t) = -a \cos(\omega t)$ .

b) L'onde incidente est toujours  $y_{Mi}(t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ . L'onde réfléchiée se propage vers

les  $x$  décroissants donc  $y_{Mr}(t) = -a \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right)$ . L'élongation résultante est alors :

$$y_M(t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) - a \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)\right) \text{ soit } y_M(t) = 2a \sin(kx) \sin(\omega t).$$

*On reconnaît l'expression d'une onde stationnaire, produit d'une fonction sinusoïdale du temps et d'une fonction sinusoïdale de la position.*

c) Les nœuds sont les points où l'amplitude  $2a \sin(kx)$  est nulle :

$$kx = n\pi \text{ soit } x_{\text{nœuds}} = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2} \text{ avec } n \text{ entier. AN } x_{\text{nœuds}} = n \times 12,5 \text{ cm}.$$

Les ventres sont les points où elle est maximale :

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ soit } x_{\text{ventres}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}. \text{ AN } x_{\text{ventres}} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \times 12,5 \text{ cm}.$$

⇒ Méthode 9.5

### Exercice 9.8

1. La tension est une force, qui a la dimension d'une masse multipliée par une accélération d'après le principe fondamental de la dynamique (voir chap. 11), soit  $[T] = [m \cdot l \cdot t^{-2}]$  en notant  $m$  la masse,  $l$  la longueur et  $t$  le temps. La masse linéique a pour dimensions  $[\mu] = [m \cdot l^{-1}]$ . Donc

$$[c] = \left[\sqrt{\frac{T}{\mu}}\right] = \left[\sqrt{\frac{m \cdot l \cdot t^{-2}}{m \cdot l^{-1}}}\right] = [\sqrt{l^2 \cdot t^{-2}}] \text{ soit } [c] = [l \cdot t^{-1}] \text{ qui correspond bien à une vitesse.}$$

2. a) En  $x = 0$ , la corde est fixée donc l'amplitude est forcément nulle, soit  $\cos \psi = 0$  d'où  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$  : on prend  $\psi = -\frac{\pi}{2}$ , et l'onde s'écrit alors  $z(x, t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx)$ .

De plus la corde est également fixée en  $x = L$ , donc  $\sin(kL) = 0$ , ce qui impose que  $k$  ne peut

prendre que les valeurs  $k_n = n \frac{\pi}{L}$ . Puisque  $\omega = kc$ , on obtient de même  $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$ .

b) Pour l'harmonique de rang  $n$  :  $z(x,t) = A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ .

Longueur d'onde :  $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$  soit  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ .

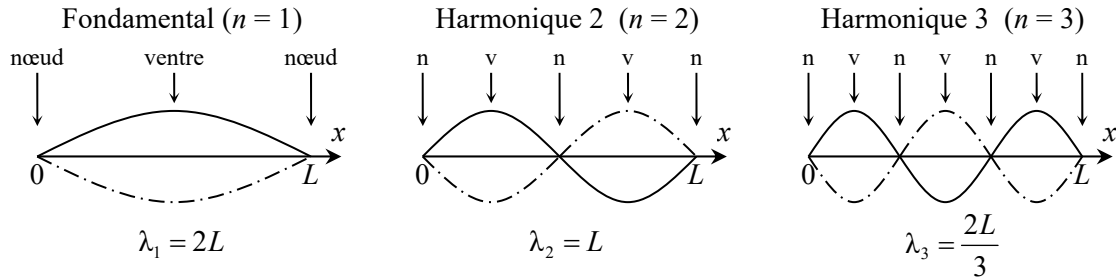
c) Un nœud est défini par  $z(x,t) = 0, \forall t$ , soit  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0$ , ce qui impose que  $x$  soit l'une des

valeurs  $x_p = p \frac{L}{n} = p \frac{\lambda_n}{2}$ , avec  $p$  un entier allant de 0 à  $n$  (pour avoir  $x$  entre 0 et  $L$ ) : il y a donc  $(n+1)$  nœuds (dont les deux extrémités de la corde).

Un ventre est défini par  $z(x,t) = \pm A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ , d'amplitude maximale  $A_n$ , soit  $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \pm 1$ , ce qui impose que  $x$  soit l'une des valeurs  $x_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{L}{n} = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_n}{2}$ , avec  $p$  un entier allant de 0 à  $n-1$  : il y a  $n$  ventres de positions alternées avec les nœuds.

⇒ Méthode 9.5

d) Ci-dessous les allures des trois premiers modes propres et leurs longueurs d'onde.



3.  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  soit  $T = \mu c^2$ , avec  $\mu = \frac{m_{\text{tot}}}{L} = \frac{\rho}{L} \times \pi L \frac{d^2}{4} = \frac{\rho \pi d^2}{4}$  et  $c = \frac{L\omega_n}{n\pi} = \frac{L\omega_1}{\pi} = 2f_1 L$ , donc

$T = \rho \pi L^2 d^2 f_1^2$ . AN pour les six cordes :

Corde n°	1	2	3	4	5	6
Tension (N)	83	93	103	113	73	66

Par comparaison, une tension de l'ordre de « 25 kg » correspond à 250 N : les cordes d'une raquette de tennis sont deux à quatre fois plus tendues que celles d'une guitare... d'ailleurs il est difficile d'en tirer de la musique !

### Exercice 9.9

1. La fréquence 25 kHz est supérieure à celles des sons audibles : ce sont des ultrasons.

2. Les deux ondes progressives ont pour expressions :  $p_{1,M}(t) = P_m \cos(2\pi f(t - x/c))$  et  $p_{2,M}(t) = P_m \cos(2\pi f(t + x/c))$  puisqu'elles ont, en  $x$ , respectivement un retard et une avance de  $x/c$  par rapport à l'origine. La surpression totale est donc :

$$p_M(t) = P_m \cos(2\pi f(t - x/c)) + P_m \cos(2\pi f(t + x/c)) = 2P_m \cos(2\pi f t) \cos(2\pi f x/c)$$

soit  $p_M(t) = 2P_m \cos(2\pi f t) \cos(kx)$  avec  $k = \frac{2\pi f}{c}$ . AN  $k = 480 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ .

*On reconnaît l'expression d'une onde stationnaire, produit d'un cosinus temporel (oscillations) et d'un cosinus spatial (variations de l'amplitude).*

**3.** Les nœuds sont définis par une amplitude nulle des oscillations, soit  $\cos(kx) = 0$ , ce qui équivaut à  $kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$  où  $n$  est un entier relatif, soit  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2f}$ .

Les quatre nœuds les plus proches de  $O$  correspondent aux valeurs  $-2, -1, 0$  et  $1$  de l'entier  $n$ , soit  $x = \pm \frac{c}{4f}$  et  $x = \pm \frac{3c}{4f}$ . AN  $x = \pm 3,3 \text{ mm}$  et  $x = \pm 9,9 \text{ mm}$ .

⇒ Méthode 9.5

### Exercice 9.10

**1.** On calcule les deux distances :

$$S_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \text{ et } S_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}$$

$$\text{donc } \delta = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}.$$

Sachant que  $|x| \ll D$ ,  $|y| \ll D$  et  $a \ll D$ , on fait apparaître des expressions de la forme  $\sqrt{1 + \varepsilon}$  avec  $\varepsilon \ll 1$ , et on applique l'approximation  $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  :

$$\begin{aligned} \delta &= D\sqrt{1 + \left(\frac{x + a/2}{D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}} - D\sqrt{1 + \left(\frac{x - a/2}{D}\right)^2 + \frac{y^2}{D^2}} \\ &\approx D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + a/2}{D}\right)^2 + \frac{y^2}{2D^2} - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x - a/2}{D}\right)^2 - \frac{y^2}{2D^2}\right] \\ &= D\left[1 + \frac{x^2 + ax + a^2/4}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2} - 1 - \frac{x^2 - ax + a^2/4}{2D^2} - \frac{y^2}{2D^2}\right] \text{ soit } \delta \approx \frac{ax}{D} \text{ après simplification.} \end{aligned}$$

⇒ Méthode 9.4

**2.** Le déphasage est proportionnel à la différence des chemins parcourus par les deux ondes :

$\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$  soit  $\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda D}$ . Les interférences sont constructives si  $\varphi = 2m\pi$ , et destructives si  $\varphi = (2m + 1)\pi$ , avec  $m$  entier.

**3.** D'après la question précédente :  $\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda D} = (2m + 1)\pi$  donc  $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a} = \text{cte}$ . Dans le plan  $(Oxy)$ , une équation de la forme  $x = \text{cte}$  caractérise une droite parallèle à l'axe  $(Oy)$ .

La figure d'interférences a donc l'allure ci-contre.

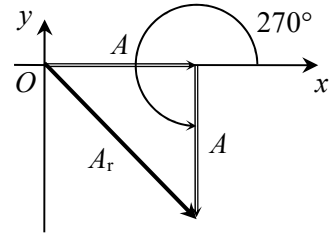
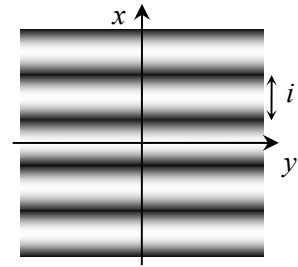
4. L'interfrange  $i$  est la distance entre les franges repérées par  $m$

et  $m+1$ , soit  $i = \frac{\lambda D}{a}$ . AN  $i = 0,60 \text{ mm}$ .

Les franges sont très serrées mais visibles à l'œil nu.

5. On calcule  $\varphi = \frac{2\pi a x_a}{\lambda D}$  : on obtient  $\varphi = 4,7 \text{ rad}$  soit  $\varphi = 270^\circ$ .

On peut alors faire une représentation de Fresnel des deux ondes, en représentant l'une des deux par un vecteur de norme  $A$  et de direction quelconque, par exemple colinéaire à l'axe  $(Ox)$ , et l'autre par un vecteur de même norme faisant avec l'autre un angle de  $270^\circ$ , ce qui est équivalent à  $-90^\circ$ . On obtient alors l'amplitude résultante avec le théorème de Pythagore :  $A^2 + A^2 = A_r^2$  soit  $A_r = A\sqrt{2}$ .



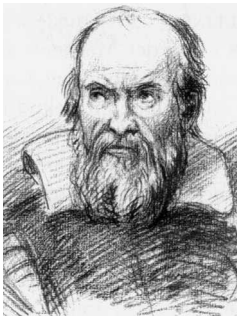
⇒ Méthode 9.3

L'intensité à cette abscisse  $x_a$  vaut donc (à une constante près)  $I = A_r^2 = 2A^2$ . Or l'intensité maximale est obtenue quand les deux ondes sont en phase, ce qui donne  $A_{r,\max} = 2A$  donc

$I_{\max} = A_{r,\max}^2 = 4A^2$ . On a donc trouvé en  $x_a$  :  $I = \frac{I_{\max}}{2}$  (c'est une frange « semi-brillante »).

# Cinématique du point

UN SCIENTIFIQUE



**GALILÉE** (1564-1642) est né en Toscane en pleine Renaissance italienne. Après des études de médecine, il préfère se tourner vers les mathématiques qu'il enseigne pendant plusieurs années. C'est pourtant en physique et en astronomie qu'il effectue ses plus grandes découvertes. Convaincu de la justesse du modèle copernicien, il le défend et se voit condamné par l'Église. Plus généralement, il affirme que la nature suit des lois mathématiques.

## ■ Un peu d'histoire

Au  $XIV^e$  siècle, Nicole ORESME énonce la loi du mouvement uniforme mais son idée, trop visionnaire, n'est pas comprise à l'époque. GALILÉE apporte une compréhension fondamentale à l'étude des mouvements. Il énonce le principe d'inertie selon lequel un mobile conserve sa vitesse acquise quand on supprime l'action de la force extérieure. En 1604, il découvre la loi de la chute des corps qui affirme que l'espace parcouru est proportionnel au carré de la distance. À la même époque, le savant allemand Johannes KEPLER énonce trois lois vérifiées par les orbites des planètes, en particulier il affirme que ces astres décrivent des ellipses ayant pour foyer le soleil. C'est cependant avec Isaac NEWTON que tout s'explique. La loi de la gravitation qu'il introduit explique les constatations de ses prédécesseurs et permet de prévoir plus généralement la trajectoire d'un mobile.



## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les trois systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindriques, sphériques) et les bases correspondantes
- ▷ Les définitions relatives au mouvement
- ▷ Les composantes du vecteur position dans les trois bases, et celles des vecteurs vitesse et accélération dans les bases cartésienne et cylindrique
- ▷ Les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base de Frenet, pour un mouvement plan
- ▷ Les propriétés de quelques mouvements simples d'un point

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer les composantes d'une vitesse et d'une accélération à partir des équations horaires
- ▷ Déterminer des équations horaires à partir de l'accélération
- ▷ Identifier et dessiner une trajectoire à partir des équations horaires
- ▷ Passer d'un système de coordonnées à un autre
- ▷ Dériver un vecteur dans la base cylindrique

## ■ Cadre de la mécanique classique

### □ Définitions

La mécanique est l'étude des systèmes matériels en mouvement.

La mécanique **classique**, ou newtonienne, est valable tant que :

- la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la lumière dans le vide (quand on s'en approche, on doit utiliser la relativité) ;
- la taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome (à l'échelle atomique, on doit utiliser la mécanique quantique).

La **cinématique** est l'étude descriptive des mouvements, indépendamment de leurs causes.

On se limite ici au mouvement d'un point, au sens mathématique du terme.

### □ Référentiel et repères

Le mouvement absolu n'existe pas : un objet est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. Pour pouvoir étudier le mouvement d'un point, il est donc nécessaire de définir un **référentiel**  $\mathcal{R}$  : solide par rapport auquel on observe le mouvement.

On lui associe un **repère spatial** (origine et système d'axes orthogonaux, avec unité de mesure spatiale) et un **repère temporel** (origine des temps et unité de mesure temporelle).

## ■ Systèmes de coordonnées et bases

Un repère orthonormé  $(Oxyz)$  étant choisi, un point  $M$  est repéré, à chaque instant, par trois coordonnées ; celles-ci sont des fonctions du temps appelées **équations horaires**.

On définit trois systèmes de coordonnées, auxquels on associe trois bases orthonormées.

### □ Coordonnées cartésiennes

$x$  est l'abscisse de  $M$  :  $x \in ]-\infty, +\infty[$ .

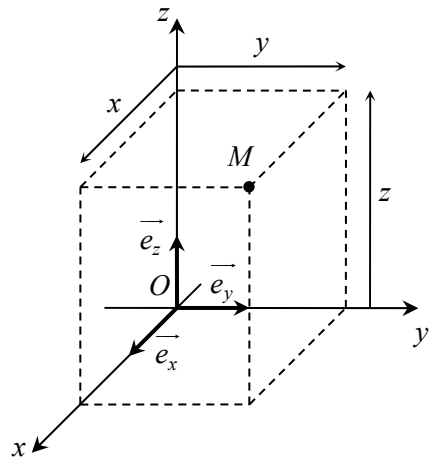
$y$  est l'ordonnée de  $M$  :  $y \in ]-\infty, +\infty[$ .

$z$  est la cote de  $M$  :  $z \in ]-\infty, +\infty[$ .

Base cartésienne

$\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  sont trois vecteurs unitaires dirigés selon les axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$ .

La base cartésienne est une base fixe de  $\mathcal{R}$ .



### □ Coordonnées cylindriques

$r$  est la distance entre  $M$  et l'axe  $(Oz)$  :  $r \in [0, +\infty[$ .

$\theta$  est l'angle entre  $(Ox)$  et  $\overrightarrow{OH}$  : tout l'espace peut être décrit avec  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

$z$  est la cote de  $M$  :  $z \in ]-\infty, +\infty[$ .

Base cylindrique

$\vec{e}_r$  est dirigé de  $O$  vers  $H$ , ou de  $P$  vers  $M$

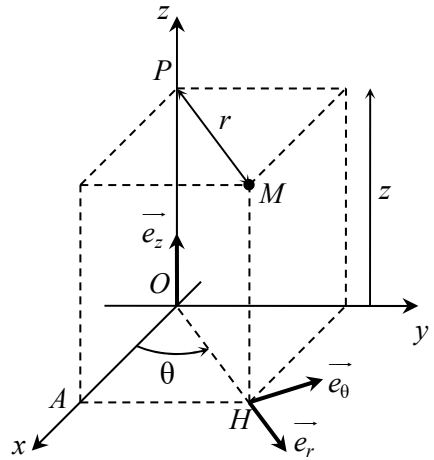
$\vec{e}_\theta$  est orthogonal à  $\vec{e}_r$ , dans le plan  $(Oxy)$  et dirigé dans le sens des  $\theta$  croissants.

$\vec{e}_z$  est dirigé selon l'axe  $(Oz)$ .

Dans le plan  $(Oxy)$ ,  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est appelée **base polaire**.

La direction de  $\vec{e}_r$  est dite **radiale**, celle de  $\vec{e}_\theta$  est dite **orthoradiale**.

$\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$  et  $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y$  donc  $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta$  et  $\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$ .



### □ Coordonnées sphériques

$r$  est la distance entre  $O$  et  $M$  :  $r \in [0, +\infty[$ .

$\theta$  est l'angle entre  $(Oz)$  et  $\overrightarrow{OM}$  :  $\theta \in [0, \pi]$ .

$\varphi$  est l'angle entre  $(Ox)$  et  $\overrightarrow{OH}$  :  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

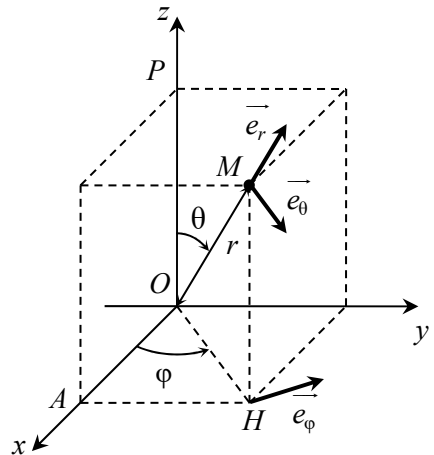
Base sphérique

$\vec{e}_r$  est dirigé de  $O$  vers  $M$ .

$\vec{e}_\theta$  est orthogonal à  $\vec{e}_r$ , dans le plan  $(OHM)$  et dirigé dans le sens des  $\theta$  croissants.

$\vec{e}_\varphi$  est dans le plan  $(Oxy)$ , dirigé vers les  $\varphi$  croissants et orthogonal aux deux autres.

Les bases cylindrique et sphérique, contrairement à la base cartésienne, sont des bases *locales*, c'est-à-dire qu'elles sont mobiles avec  $M$ .



⇒ Méthode 10.1. Passage d'un système de coordonnées à un autre

## ■ Éléments cinématiques

### □ Vecteur position

Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  donne à chaque instant la position du point  $M$  (en mouvement ou non).

L'ensemble des positions successives du point  $M$  définit sa **trajectoire**.

### □ Vecteur vitesse

Il donne les variations du vecteur position. Si le point passe de  $M$  en  $M'$  entre  $t$  et  $t'$ , le vecteur

vitesse à la date  $t$  est défini par :  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \lim_{t' \rightarrow t} \left( \frac{MM'}{t' - t} \right)_{\mathcal{R}}$  soit  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}$ .

Le vecteur vitesse dépend du référentiel  $\mathcal{R}$  mais non du choix du point fixe  $O$ .

Il est tangent, en tout point, à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

S'il est constant en norme, le mouvement du point est **uniforme**.

S'il est constant en direction, le mouvement du point est **rectiligne**.

### □ Vecteur accélération

Il donne les variations du vecteur vitesse. Avec les mêmes notations que précédemment, on

définit :  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \lim_{t' \rightarrow t} \left( \frac{\vec{v}(M')_{\mathcal{R}} - \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{t' - t} \right)$  soit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}}$ .

Le vecteur accélération dépend, lui aussi, du référentiel  $\mathcal{R}$  mais non du point  $O$ .

Si la trajectoire est courbée, il est toujours dirigé vers la concavité de la courbe.

### □ Composantes dans les différentes bases

Dans la base cartésienne

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z ; \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z ; \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Dans la base cylindrique

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z ; \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z ; \vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

Dans la base sphérique

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r ; \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi.$$

⇒ **Méthode 10.2. Dérivation en coordonnées cylindriques**

⇒ **Méthode 10.3. Calcul de la vitesse et de l'accélération à partir des équations horaires**

### □ Évolution de la norme de la vitesse

À un instant donné :

– si  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} > 0$ , le mouvement est **accélééré** (la norme de la vitesse augmente) ;

– si  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} < 0$ , le mouvement est **retardé** (la norme de la vitesse diminue) ;

– si  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$ , la norme de la vitesse passe par un extremum.

Mais si  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$  à *tout instant*, alors le mouvement est uniforme.

## ■ Base de Frenet pour un mouvement plan

### □ Abscisse curviligne

Dans le cas où la trajectoire du point  $M$  est connue ainsi que le sens du mouvement, la position de  $M$  à chaque instant peut être repérée sur cette trajectoire, à partir de sa position initiale  $M_0$ , par son abscisse curviligne  $s(t) = \overline{M_0M}$ , qui est la longueur de la trajectoire qu'il a parcourue depuis l'instant initial.

Dans le cadre du programme, on se limitera à des trajectoires planes.

### □ Rayon de courbure

Au voisinage d'un point  $M$  de la trajectoire, celle-ci peut être assimilée localement à un arc de cercle, de rayon  $R$  et centre  $I$ , appelé **cercle osculateur**.  $R$  est le **rayon de courbure** de la trajectoire au point  $M$ .

La seule courbe plane ayant le même rayon de courbure en tout point est le cercle : son rayon de courbure est son rayon.

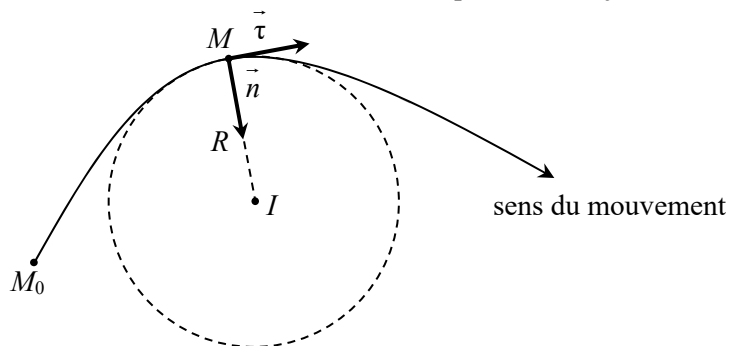
Pour une trajectoire rectiligne, le rayon de courbure est infini.

### □ Base de Frenet

À chaque instant du mouvement de  $M$  on peut définir deux vecteurs unitaires :

- le vecteur  $\vec{\tau}$ , tangent à la trajectoire en  $M$  et orienté dans le sens du mouvement ;
- le vecteur  $\vec{n}$ , orthogonal à  $\vec{\tau}$  et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.

Ces deux vecteurs constituent la base de Frenet dans le plan de la trajectoire.



Cette base est locale, et donc mobile avec  $M$  : elle évolue au cours du temps.

### Remarque

Un troisième vecteur, la binormale  $\vec{b}$ , peut être ajouté pour obtenir une base orthonormée tridimensionnelle, mais il ne sera pas utilisé en cinématique pour une trajectoire plane.

### □ Éléments cinématiques dans la base de Frenet

#### Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse s'exprime simplement dans la base de Frenet :

$$\vec{v}(M)_{\mathbb{R}} = v(M)_{\mathbb{R}} \vec{\tau}$$

où  $v(M)_{\mathbb{R}}$  est sa norme.

## Vecteur accélération

Le vecteur accélération se décompose en  $\vec{a}(M)_{\mathbb{R}} = \vec{a}_t(M)_{\mathbb{R}} + \vec{a}_n(M)_{\mathbb{R}}$  avec :

– l'**accélération tangentielle**  $\vec{a}_t(M)_{\mathbb{R}} = \frac{dv(M)_{\mathbb{R}}}{dt} \vec{\tau}$  qui correspond à la *variation de la norme* du vecteur vitesse (elle est donc nulle si le mouvement est uniforme) ;

– l'**accélération normale**  $\vec{a}_n(M)_{\mathbb{R}} = \frac{v(M)_{\mathbb{R}}^2}{R} \vec{n}$  qui correspond à la *variation de la direction* du vecteur vitesse (elle est donc nulle si le mouvement est rectiligne).

## ■ Exemples de mouvements simples d'un point

### □ Mouvement à vecteur accélération constant

C'est un mouvement où le vecteur accélération est une constante, par exemple  $\vec{a}(M)_{\mathbb{R}} = a \vec{e}_y$ .

Mouvement rectiligne uniformément varié

Si le vecteur vitesse initial est colinéaire à l'accélération, soit  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ , le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré ou retardé.

Le mouvement rectiligne uniforme est un cas particulier obtenu pour  $a = 0$ .

Mouvement parabolique

Si le vecteur vitesse initial n'est pas colinéaire à l'accélération, on peut le prendre dans le plan  $(Oxy)$  et formant un angle  $\alpha$  avec l'accélération.

La trajectoire est alors un arc de parabole, d'axe parallèle à  $(Oy)$  et d'équation cartésienne

$$y(x) = \frac{1}{2} a \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha)x + y_0, \text{ dans le plan d'équation } z = z_0 \text{ [parallèle à } (Oxy)].$$

⇒ **Méthode 10.4. Détermination des équations horaires cartésiennes à partir de l'accélération**

⇒ **Méthode 10.5. Détermination des équations cartésiennes de la trajectoire**

### □ Mouvement circulaire

Par définition, la trajectoire est un cercle ou un arc de cercle ; s'il s'agit d'un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R$ , appartenant au plan  $(Oxy)$ , alors la base polaire est idéale pour décrire ce mouvement. En notant  $\omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire :

$$\vec{OM} = R \vec{e}_r \quad ; \quad \vec{v}(M)_{\mathbb{R}} = R\omega \vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{a}(M)_{\mathbb{R}} = -R\omega^2 \vec{e}_r + R\dot{\omega} \vec{e}_\theta.$$

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

Si  $\omega = \text{cte}$ , le mouvement est circulaire uniforme.

Alors  $\vec{a}(M)_{\mathbb{R}} = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v(M)_{\mathbb{R}}^2}{R} \vec{e}_r = -\omega^2 \vec{OM}$  ou encore  $\vec{a}(M)_{\mathbb{R}} = \frac{v(M)_{\mathbb{R}}^2}{R} \vec{n}$ .

Ce vecteur est dirigé vers  $O$  tout au long du mouvement, on parle d'**accélération centripète**.

## ■ Comment utiliser les différents systèmes de coordonnées ?

### □ Méthode 10.1. Passage d'un système de coordonnées à un autre

On utilise les relations dans les triangles rectangles :

$$\cosinus = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} ; \sinus = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} ; \text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} .$$

⇒ Exercice 10.13

– Passage des cylindriques aux cartésiennes ou inversement

Avec le triangle  $OAH$  (voir schéma du cours), on obtient les relations :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \text{ avec } \cos \theta \text{ du signe de } x$$

$$\left( \text{donc } \theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ si } x > 0, \text{ et } \theta = \arctan \frac{y}{x} \pm \pi \text{ si } x < 0 \right).$$

La troisième coordonnée  $z$  est la même pour les deux systèmes.

– Passage des sphériques aux cartésiennes ou inversement

Avec les triangles  $OPM$  et  $OAH$  (voir schéma du cours), on obtient les relations :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi ; y = r \sin \theta \sin \varphi ; z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \text{ avec } \cos \theta \text{ du signe de } z ;$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ avec } \cos \varphi \text{ du signe de } x.$$

### □ Méthode 10.2. Dérivation en coordonnées cylindriques

On utilise les formules habituelles de dérivation d'une somme et d'un produit, et

celle de la dérivée composée :  $\frac{da}{dt} = \frac{da}{db} \times \frac{db}{dt}$  valable pour une grandeur  $a$  scalaire

ou vectorielle, fonction de  $b$  qui est elle-même fonction de  $t$ .

⇒ Exercices 10.4, 10.5

– Dérivation des vecteurs unitaires

On exprime d'abord les vecteurs unitaires de la base polaire dans la base cartésienne :

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y .$$

De plus  $\frac{d(\cos\theta)}{dt} = \frac{d(\cos\theta)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \times \dot{\theta}$  et  $\frac{d(\sin\theta)}{dt} = \frac{d(\sin\theta)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \cos\theta \times \dot{\theta}$ .

Alors  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d(\cos\theta)}{dt} \vec{e}_x + \frac{d(\sin\theta)}{dt} \vec{e}_y = \dot{\theta} [-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y] = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

et  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d(\sin\theta)}{dt} \vec{e}_x + \frac{d(\cos\theta)}{dt} \vec{e}_y = -\dot{\theta} [\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y] = -\dot{\theta} \vec{e}_r$ .

– Dérivation du vecteur position pour obtenir le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z.$$

– Dérivation du vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt} \vec{e}_z + \dot{r} \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt} \vec{e}_z$$

soit  $\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$ .

## ■ Comment déterminer les caractéristiques du mouvement d'un point ?

### □ Méthode 10.3. Calcul de la vitesse et de l'accélération à partir des équations horaires

À partir des équations horaires en cartésiennes ou en cylindriques on obtient les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération par dérivations successives, suivant les formules du cours.

⇒ Exercices 10.1, 10.2, 10.3, 10.11, 10.13

Soit par exemple un point  $M$  en mouvement, repéré à chaque instant par ses coordonnées cartésiennes :  $x(t) = \alpha t^2 + \beta$  ;  $y(t) = \gamma t$  ;  $z(t) = \delta$ , où  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  sont des constantes.

Les composantes du vecteur vitesse de  $M$  sont :  $\dot{x}(t) = 2\alpha t$  ;  $\dot{y}(t) = \gamma$  ;  $\dot{z}(t) = 0$ , soit

$$\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2\alpha t \vec{e}_x + \gamma \vec{e}_y.$$

Celles de son vecteur accélération sont :  $\ddot{x} = 2\alpha$  ;  $\ddot{y} = 0$  ;  $\ddot{z} = 0$ , soit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = 2\alpha \vec{e}_x$ .



#### □ Méthode 10.4. Détermination des équations horaires cartésiennes à partir de l'accélération

On considère un point en mouvement dont on connaît le vecteur accélération, ainsi que les conditions initiales : vecteurs vitesse et position du point à la date  $t = 0$ . On cherche à déterminer ses équations horaires.

- On détermine les composantes, à chaque instant, du vecteur vitesse de  $M$  par intégration des composantes du vecteur accélération. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur la vitesse.
- De même on détermine les composantes, à chaque instant, du vecteur position de  $M$  par intégration des composantes du vecteur vitesse. Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions initiales sur la position.
- Cette méthode n'est pas utilisable dans les autres systèmes de coordonnées, car on utilise ici le fait que les vecteurs unitaires cartésiens sont des *constantes*.

⇒ Exercices 10.6, 10.7, 10.8, 10.12

Un point  $M$  en mouvement a pour vecteur accélération constant :  $\vec{a} = a\vec{e}_x$ .

Les conditions initiales sont :  $\vec{v}(0) = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$  et  $\vec{OM}(0) = x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$ .

On intègre les composantes du vecteur accélération :  $\vec{v}(t) = (at + \text{cte}_1)\vec{e}_x + \text{cte}_2\vec{e}_y + \text{cte}_3\vec{e}_z$ .

Avec les conditions initiales sur la vitesse, on trouve les trois constantes :

$\vec{v}(t) = (at + v_{0x})\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$ . Puis on intègre les composantes du vecteur vitesse obtenu, en tenant compte de même des conditions initiales sur la position, et on obtient le vecteur

position :  $\vec{OM} = \left(\frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0\right)\vec{e}_x + (v_{0y}t + y_0)\vec{e}_y + (v_{0z}t + z_0)\vec{e}_z$ .

Les équations horaires sont donc :  $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0$  ;  $y(t) = v_{0y}t + y_0$  ;  $z(t) = v_{0z}t + z_0$ .

#### □ Méthode 10.5. Détermination des équations cartésiennes de la trajectoire à partir des équations horaires

Dans l'espace, il faut non pas une mais *deux* équations cartésiennes pour décrire une courbe.

- Pour les courbes planes auxquelles nous nous limiterons, l'une des équations est celle du plan contenant la trajectoire. Il s'agit souvent d'un plan simple à décrire, parallèle à l'un des trois plans de base du repère. (Dans beaucoup d'exercices, il s'agit du plan  $(Oxy)$ .)
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la courbe dans ce plan, il faut éliminer la variable temps entre les différentes équations horaires.

⇒ Exercices 10.3, 10.11, 10.12

– Reprenons l'exemple précédent en supposant que  $v_{0y} = 0$  : les équations horaires deviennent

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_{0x}t + x_0 ; y(t) = y_0 ; z(t) = v_{0z}t + z_0.$$

La deuxième équation,  $y = y_0$ , est l'équation cartésienne d'un plan parallèle à  $(Oxz)$ , la trajectoire que l'on cherche est donc contenue dans ce plan.

Ensuite on peut exprimer  $t$  en fonction de  $z$  et reporter dans  $x$  :  $t = \frac{z - z_0}{v_{0z}}$  d'où

$$x = \frac{1}{2}a \left( \frac{z - z_0}{v_{0z}} \right)^2 + \frac{v_{0x}}{v_{0z}}(z - z_0) + x_0. \text{ C'est l'équation d'une } \underline{\text{parabole d'axe parallèle à } (Ox)}.$$

On aurait pu envisager d'exprimer d'abord  $t$  en fonction de  $x$  puis de reporter dans  $z$ , mais cela nécessiterait de résoudre une équation du second degré et poserait des problèmes de signes.

– Prenons maintenant un mouvement décrit par les équations horaires suivantes :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) ; y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) + B ; z(t) = 0, \text{ avec } A > 0.$$

La troisième équation est celle du plan  $(Oxy)$ .

Pour éliminer  $t$ , la méthode précédente ne marche plus, car l'utilisation de fonctions trigonométriques inverses (arcsinus, arccosinus) nécessite de se limiter à certains intervalles.

En revanche on peut utiliser la formule :  $\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$ , ce qui équivaut à

$$\left( \frac{x}{A} \right)^2 + \left( \frac{y - B}{A} \right)^2 = 1 \text{ ou encore } \underline{x^2 + (y - B)^2 = A^2}. \text{ On reconnaît l'équation cartésienne d'un}$$

cercle de centre  $\Omega$  de coordonnées  $(0, B, 0)$ , et de rayon  $A$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Le vecteur vitesse d'un point en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le vecteur accélération est toujours orthogonal au vecteur vitesse.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont tous fixes au cours du mouvement d'un point $M$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Les vecteurs unitaires de la base cylindrique sont tous fixes au cours du mouvement d'un point $M$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Si le vecteur accélération d'un point en mouvement est constant, le mouvement est uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Si le vecteur accélération d'un point en mouvement est nul, le mouvement est rectiligne et uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Si le mouvement d'un point est uniforme, alors son vecteur vitesse est nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Si le mouvement d'un point est circulaire et uniforme, alors son vecteur accélération est constant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. La base de Frenet est une base mobile.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Lorsque l'accélération tangentielle d'un point $M$ est toujours nulle, on peut affirmer que le mouvement de $M$ est uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Utilisation des différentes bases

### □ Exercice 10.1. Éléments cinématiques en cartésiennes

On considère un point  $M$  en mouvement dont les coordonnées cartésiennes sont, à chaque instant :  $x(t) = a_0 t^2 + x_0$ ,  $y(t) = -vt$  et  $z(t) = z_0$ , avec  $x_0 = 1 \text{ m}$ ,  $z_0 = -1 \text{ m}$ ,  $a_0 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et  $v = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.
2. Calculer la norme de la vitesse de  $M$  à la date  $t = 2 \text{ s}$ .
3. Calculer la norme de l'accélération de  $M$  à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

### □ Exercice 10.2. Éléments cinématiques en cylindriques

On considère un point  $M$  en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant :  $r(t) = a_0 t^2 + r_0$ ,  $\theta(t) = \omega t - \theta_0$  et  $z(t) = -vt$ , avec  $r_0 = 1 \text{ m}$ ,  $a_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\omega = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\theta_0 = 2 \text{ rad}$  et  $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.
2. Calculer la norme de la vitesse de  $M$  à la date  $t = 1 \text{ s}$ .
3. Calculer la norme de l'accélération de  $M$  à l'instant initial ( $t = 0$ ).

### □ Exercice 10.3. Analyse d'équations horaires

Voici différents mouvements dans le plan ( $Oxy$ ) dont on donne les équations horaires, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  étant des constantes). Indiquer, dans chaque cas, les caractéristiques du mouvement du point  $M$  étudié.

1.  $x(t) = at^2 - bt + c$  et  $y(t) = 2c$ .
2.  $r(t) = 2c$  et  $\theta(t) = dt + e$ .
3.  $r(t) = bt + c$  et  $\theta(t) = 2e$ .

### □ Exercice 10.4. Éléments cinématiques dans la base cylindrique\*

1. Donner l'expression du vecteur position d'un point  $M$  en mouvement dans sa base cylindrique.
2. Donner les expressions des vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.
3. Utiliser ces résultats pour retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

### □ Exercice 10.5. Éléments cinématiques dans la base sphérique\*\*

1. Donner l'expression du vecteur position d'un point  $M$  en mouvement dans sa base sphérique.
2. Donner les expressions des vecteurs de la base sphérique dans la base cartésienne.
3. Utiliser ces résultats pour établir les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans la base sphérique.

## ■ Mouvement rectiligne

### □ Exercice 10.6. Freinage d'urgence

Une voiture, animée d'une vitesse  $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sur une trajectoire rectiligne, freine avec une accélération constante de norme  $a = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Calculer la durée et la distance de freinage.

### □ Exercice 10.7. Dépassement\*

Une voiture  $A$  de longueur  $d = 4 \text{ m}$  suit un camion de longueur  $D = 10 \text{ m}$  à la vitesse constante  $v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  sur une route droite et horizontale. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors  $L = 35 \text{ m}$ . À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante  $a = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Établir l'équation horaire  $x_{\text{av}}(t)$  du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle du mouvement de l'avant du camion,  $X_{\text{av}}(t)$ .
2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est 20 m devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

### □ Exercice 10.8. Attention au choc !\*

Deux voitures se suivent sur une ligne droite à la vitesse  $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à une distance  $d = 80 \text{ m}$  l'une de l'autre. À la date  $t = 0$ , la première freine avec une décélération constante de  $\ddot{x}_A = -2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Celle qui la suit commence à freiner seulement 2,0 secondes plus tard, avec une décélération constante de  $\ddot{x}_B = -1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date  $t = 0$ , établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules.
2. Déterminer la position et la date du contact.

### □ Exercice 10.9. Mouvement rectiligne sinusoïdal

Un anneau au bout d'un ressort oscille de manière sinusoïdale le long d'une tige horizontale. On repère sa position par rapport à sa position d'équilibre ; elle est donnée par la fonction  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

1. La longueur totale parcourue par la masse entre ses deux positions extrêmes est de 20 cm. Que vaut  $X_m$  ?
2. La période des oscillations est  $T = 0,5 \text{ s}$ . Calculer  $\omega_0$ .
3. À l'instant  $t = 0$ , la masse est à la position  $x(0) = 5,0 \text{ cm}$ . Calculer  $\varphi$ . En déduire la position de l'anneau à l'instant  $t_1 = 1,5 \text{ s}$ .
4. Exprimer la vitesse de l'anneau en fonction  $X_m$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi$  et  $t$ . Calculer sa vitesse maximale.
5. Établir l'expression de l'accélération de l'anneau en fonction de  $X_m$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi$  et  $t$ , puis en fonction de  $\omega_0$  et  $x$ . Commenter le résultat obtenu.

## ■ Mouvement circulaire

### □ Exercice 10.10. Sortie d'autoroute

Madame Michu, au volant de son automobile (qu'on assimilera à un point matériel) se déplace sur l'autoroute à la vitesse  $V_0 = 130 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Elle souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon  $R = 50 \text{ m}$ . Pour éviter de dérapier dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule ne peut excéder  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. En utilisant la base de Frenet, montrer que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse  $V_0$  au risque de quitter la route.
2. Expliquer pourquoi il ne faut pas freiner dans le virage au risque, encore, de quitter la route.
3. Quelle est la vitesse maximale  $V_{\max}$  à laquelle la voiture peut décrire le virage ?

### □ Exercice 10.11. Mouvement circulaire d'un satellite terrestre

On considère un satellite géostationnaire (dont la période de révolution est égale à celle de la Terre, soit  $T = 86164 \text{ s}$ ) gravitant sur une orbite circulaire dont le centre coïncide avec celui de la Terre à une altitude  $h = 35800 \text{ km}$ . On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique et on supposera que ce mouvement est uniforme.



Donnée : rayon de la Terre  $R_T = 6400 \text{ km}$ .

1. Faire un schéma du problème et représenter la base de Frenet.
2. Calculer la norme du vecteur vitesse du satellite.
3. Calculer la norme du vecteur accélération du satellite.

### □ Exercice 10.12. Mouvement circulaire uniforme \* \*

Une araignée assimilable à un point matériel  $M$  se déplace sur sa toile, par rapport au repère  $Oxyz$  selon les équations horaires cartésiennes suivantes,  $a$  et  $\omega$  étant deux constantes positives :

$$x(t) = a \sin(\omega t) ; y(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) ; z(t) = a \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

1. Montrer que la trajectoire de  $M$  est contenue dans un plan passant par  $O$  et donner l'équation cartésienne de ce plan.
2. Montrer que l'araignée se déplace sur un cercle de centre  $O$ , et donner son rayon.
3. Calculer la norme du vecteur vitesse de l'araignée à chaque instant. Comment peut-on qualifier le mouvement ?
4. Calculer la période  $T$  de ce mouvement.

*D'après ENAC*

### □ Exercice 10.13. Stabilité d'une trajectoire circulaire \*

Une particule  $M$  est soumise à une accélération constamment dirigée vers le point  $O$  du plan  $(Oxy)$  et de norme  $a = k \left(\frac{b}{r}\right)^n$ , où  $k$ ,  $b$  et  $n$  sont des constantes positives.

1. Comment faut-il choisir la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  pour que  $M$  décrive dans le plan  $(Oxy)$  un cercle de centre  $O$  et de rayon  $b$  ?
2. Cette condition étant remplie, exprimer la fréquence associée à ce mouvement.

## ■ Mouvement quelconque

### □ Exercice 10.14. Jeu de plage\*

Le jeune Toto, situé en  $O$  sur la plage, lance un frisbee avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  horizontal, et faisant un angle  $\alpha$  avec la direction  $(Ox)$  dans laquelle se trouve son camarade Lulu, à une distance  $D$  de lui. Le mouvement du frisbee est très complexe, aussi le modélise-t-on de façon simple : il a lieu dans le plan  $(Oxy)$  et le frisbee, assimilable à un point  $M$ , subit tout au long de son mouvement, une accélération  $\vec{a} = -a\vec{e}_y$ . Le mouvement sera donc étudié dans le repère  $(O, x, y, z)$ , muni de la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

1. Déterminer les équations horaires du mouvement de  $M$ .
2. Établir les équations cartésiennes de la trajectoire de  $M$ .
3. Si  $\alpha = 45^\circ$ , exprimer  $V_0$  pour que Lulu puisse récupérer le frisbee sans avoir à bouger.

### □ Exercice 10.15. Toto sur un toboggan\*

Toto, assimilable à un point matériel  $M$ , est installé, prêt à partir, en haut d'un grand toboggan d'un parc aquatique.

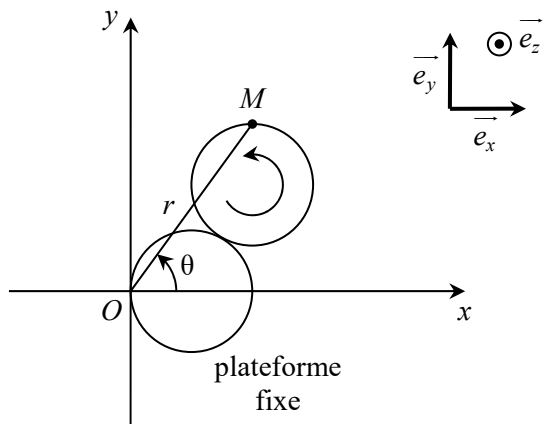
À partir de l'instant  $t=0$ , les équations horaires de  $M$  sont, en coordonnées cartésiennes ;  $x = R \cos(\omega t)$ ,  $y = R \sin(\omega t)$  et  $z = -bt$ , ( $R$ ,  $\omega$  et  $b$  sont des constantes positives).

1. Déterminer ses coordonnées cylindriques.
2. En déduire la nature et les caractéristiques de la trajectoire.
3. Déterminer le module de la vitesse de  $M$ .
4. Déterminer le module de l'accélération de  $M$ .

### □ Exercice 10.16. Toto sur un manège\*

Dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ , on définit un repère  $Oxyz$  avec un axe  $(Oz)$  vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue de dessus. Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon  $R$  : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine  $O$  du repère et son centre est sur l'axe  $(Ox)$  ; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.

Le petit Toto, assimilé à un point  $M$ , a pris place sur le manège, en un point de la circonférence de la plateforme mobile.



$M$  décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal ( $Oxy$ ) et décrite par l'équation polaire :  $r = 2R(1 + \cos\theta)$  et on suppose de plus que la vitesse angulaire  $\omega$  est maintenue constante, soit  $\theta = \omega t$  à partir de l'instant initial  $t = 0$ .

### 1. Trajectoire

Reproduire sur un schéma les axes du plan et le cercle représentant la plateforme fixe. Placer sur ce schéma les quatre points de la trajectoire de  $M$  correspondant aux angles  $\theta = 0$  (ce point sera noté  $A$ ),  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (point  $B$ ),  $\theta = \pi$  (point  $C$ ),  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  (point  $D$ ), puis dessiner l'allure de la trajectoire complète (cette courbe s'appelle une cardioïde). Ajouter la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  au point  $D$ .

### 2. Vitesse

- Déterminer, en fonction du temps  $t$  et des deux constantes  $R$  et  $\omega$ , les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$  dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point  $D$ .
- Calculer la norme de la vitesse.
- En quel point Toto risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?
- En quel point Toto pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

### 3. Accélération

- Déterminer les composantes du vecteur accélération  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$  dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point  $D$ .
- Calculer la norme de l'accélération.
- Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point Toto risque-t-il le plus de se sentir mal (accélération maximale) ?

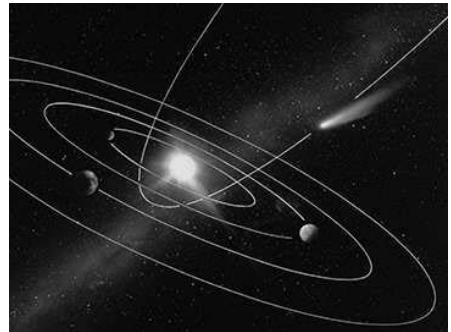
### □ Exercice 10.17. Trajectoire elliptique d'une comète\*\*

Une comète est un petit corps céleste décrivant une orbite elliptique dont l'un des foyers est le Soleil.

La comète est assimilée à un point  $M$ , et se déplace dans le plan ( $xOy$ ) sur une ellipse d'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos\theta} \quad \text{où } e \text{ et } p \text{ sont des constantes (avec}$$

$0 < e < 1$ ). À  $t = 0$ , elle est au point  $P$  défini par  $\theta = 0$ , avec une vitesse  $\vec{v}_P = v_P \vec{e}_y$  (avec  $v_P > 0$ ).



- Quelles sont les valeurs minimale et maximale de  $r$  ? Pour quelles valeurs de  $\theta$  sont-elles obtenues ?
- Faire un schéma de la trajectoire. Faire apparaître le point  $P$ , le point  $A$  le plus éloigné de  $O$ , et également le point  $H$  d'ordonnée maximale et le point  $B$  d'ordonnée minimale. En  $M$  quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.



3. On suppose que l'accélération de  $M$  est toujours radiale. En déduire que  $r^2\dot{\theta}$  est une constante (qu'on notera  $C$ ). Déterminer  $C$  en fonction de  $p$ ,  $e$  et  $v_p$ .
4. Déterminer la vitesse  $\vec{v}_A$  de  $M$  au point  $A$ .

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 10.3.* Commencer dans chaque cas par examiner l'équation la plus simple, et en déduire une information sur la trajectoire.

*Exercice 10.5.* Faire deux schémas plans pour la question 2 : l'un dans le plan méridien ( $OMP$ ), l'autre dans le plan ( $Oxy$ ), et introduire comme intermédiaire un vecteur unitaire  $\vec{u}$  selon ( $OMP$ ).

*Exercice 10.9.* Définir précisément la période pour la question 2.

*Exercice 10.12.* À la question 1, il faut relier  $x$ ,  $y$  et  $z$  en éliminant le temps  $t$  : pour cela, développer les deux derniers sinus et soustraire. À la question 2, montrer que la distance  $OM$  est constante.

*Exercice 10.13.* Avec les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques, déterminer la norme (constante) de la vitesse, puis préciser sa direction.

*Exercice 10.15.* La trajectoire est une courbe complexe car elle n'est pas plane : analyser les informations données par chacune des coordonnées cylindriques pour en déduire l'allure de la courbe.

*Exercice 10.16.* La trajectoire doit passer par les quatre points trouvés et aussi avoir une forme raisonnable : on peut utilement se demander ce que signifie son nom.

*Exercice 10.17.* Pour tracer la trajectoire, commencer par bien placer les deux points trouvés à la question 1, et en déduire la position de l'ellipse sans a priori...

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai

2. Il n'y a aucune relation générale entre leurs directions.
4. Seul le vecteur  $\vec{e}_z$  est fixe.
7. La norme du vecteur vitesse est *constante*, mais non nulle.
8. Seule sa *norme* est constante, mais sa direction tourne avec le point.

### □ Les erreurs classiques

- Les erreurs d'homogénéité sont fréquentes : bien vérifier par exemple que chaque terme d'accélération a les dimensions d'une longueur divisée par un temps au carré (chaque point de dérivation correspondant à une division par un temps).
- Attention, dans les bases cylindriques et sphériques, les *composantes* du vecteur position sont différentes des *coordonnées* du point : ne jamais écrire  $\overline{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + z\vec{e}_z$  ou  $\overline{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta + \varphi\vec{e}_\varphi$  ! Ces formules sont non seulement fausses, elles ne sont même pas homogènes, car un angle est sans dimension !
- Il ne faut pas confondre un vecteur et sa norme. Pour qu'un vecteur soit constant, il faut que sa norme *et* sa direction restent constantes au cours du temps. Par exemple, si le vecteur vitesse est constant, alors le mouvement est rectiligne et uniforme, mais si seule la *norme* du vecteur vitesse est constante, le mouvement est uniforme mais non rectiligne.
- L'accélération étant la dérivée du vecteur vitesse, le *seul* cas où elle est *toujours nulle* est le mouvement *rectiligne uniforme*. Dans un mouvement circulaire uniforme par exemple, l'accélération est non nulle et dirigée vers le centre du cercle.
- Les vecteurs  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  de la base polaire sont définis à partir du point  $O$  et non de la trajectoire, contrairement à la base de Frenet. Pour un mouvement quelconque,  $\vec{e}_r$  n'est pas *orthogonal* à la trajectoire et  $\vec{e}_\theta$  n'est pas *tangent* à la trajectoire. Le seul cas où ces propriétés sont valables est le mouvement *circulaire de centre  $O$*  : en effet, dans ce cas uniquement, les deux bases sont liées par  $\vec{e}_r = -\vec{n}$  et  $\vec{e}_\theta = \vec{\tau}$ .

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 10.1

1.  $v_x(t) = \dot{x}(t) = 2a_0 t$  ;  $v_y(t) = \dot{y}(t) = -v$  ;  $v_z(t) = \dot{z}(t) = 0$  soit  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0 t \vec{e}_x - v \vec{e}_y$ .

$a_x(t) = \ddot{x}(t) = 2a_0$  ;  $a_y(t) = \ddot{y}(t) = 0$  ;  $a_z(t) = \ddot{z}(t) = 0$  soit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0 \vec{e}_x$ .

2.  $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4a_0^2 t^2 + v^2}$ . AN à  $t = 2$  s :  $v(2 \text{ s}) = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3.  $a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 2a_0$  pour toute date  $t$ . AN  $a = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

⇒ Méthode 10.3

## Exercice 10.2

1.  $v_r(t) = \dot{r} = 2a_0 t$  ;  $v_\theta(t) = r\dot{\theta} = (a_0 t^2 + r_0)\omega$  ;  $v_z(t) = \dot{z} = -v$

soit  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 2a_0 t \vec{e}_r + \omega(a_0 t^2 + r_0) \vec{e}_\theta - v \vec{e}_z$ .

$a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2$  ;  $a_\theta(t) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4a_0 t \omega$  ;  $a_z(t) = \ddot{z} = 0$

soit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2) \vec{e}_r + 4a_0 t \omega \vec{e}_\theta$ .

2.  $v(t) = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{4a_0^2 t^2 + (a_0 t^2 + r_0)^2 \omega^2 + v^2}$ . AN à  $t = 1$  s :  $v(1 \text{ s}) = 6,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3.  $a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{(2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2)^2 + (4a_0 t \omega)^2}$ . AN à  $t = 0$  :  $a(0) = 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

⇒ Méthode 10.3

## Exercice 10.3

1. La trajectoire appartient à la droite  $y = 2c$ , donc le mouvement est rectiligne. D'autre part, le vecteur accélération est une constante ( $\ddot{x} = 2a$  et  $\ddot{y} = 0$ ). Le mouvement est donc rectiligne et uniformément accéléré.

2. On constate que  $r$  est constant, ce qui traduit un mouvement circulaire de centre  $O$ . De plus, la vitesse, qui se résume à la composante orthoradiale  $v_\theta = r\dot{\theta}$ , est constante. Le mouvement est donc circulaire et uniforme.

3.  $\theta$  est constant, ce qui entraîne que le mouvement est rectiligne (selon une droite passant par  $O$ ). Ensuite, le vecteur vitesse est une constante ( $v_r = \dot{r} = b$  et  $v_\theta = r\dot{\theta} = 0$ ), donc le mouvement est rectiligne et uniforme.

⇒ Méthode 10.5

### Exercice 10.4

1.  $\overline{OM} = r\overline{e}_r + z\overline{e}_z$ .

2.  $\overline{e}_r = \cos\theta\overline{e}_x + \sin\theta\overline{e}_y$ ,  $\overline{e}_\theta = -\sin\theta\overline{e}_x + \cos\theta\overline{e}_y$ , et le vecteur  $\overline{e}_z$  est commun aux deux bases.

3.  $\overline{v}(M) = \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overline{e}_r + r\frac{d\overline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\overline{e}_z + z\frac{d\overline{e}_z}{dt}$ , avec  $\frac{d\overline{e}_z}{dt} = \overline{0}$  (car  $\overline{e}_z$  est constant) et

$\frac{d\overline{e}_r}{dt} = \frac{d(\cos\theta)}{dt}\overline{e}_x + \frac{d(\sin\theta)}{dt}\overline{e}_y = \dot{\theta}[-\sin\theta\overline{e}_x + \cos\theta\overline{e}_y] = \dot{\theta}\overline{e}_\theta$ , donc  $\overline{v}(M)_{\mathcal{R}} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta + \dot{z}\overline{e}_z$ .

Ensuite on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps.

$\overline{a}(M) = \frac{d\overline{v}(M)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\overline{e}_r + \dot{r}\frac{d\overline{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\overline{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overline{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\overline{e}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\overline{e}_z + \dot{z}\frac{d\overline{e}_z}{dt}$ , donc avec

$\frac{d\overline{e}_\theta}{dt} = -\frac{d(\sin\theta)}{dt}\overline{e}_x + \frac{d(\cos\theta)}{dt}\overline{e}_y = -\dot{\theta}[\cos\theta\overline{e}_x + \sin\theta\overline{e}_y] = -\dot{\theta}\overline{e}_r$  et les deux dérivées précédentes

on obtient  $\overline{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overline{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overline{e}_\theta + \ddot{z}\overline{e}_z$ .

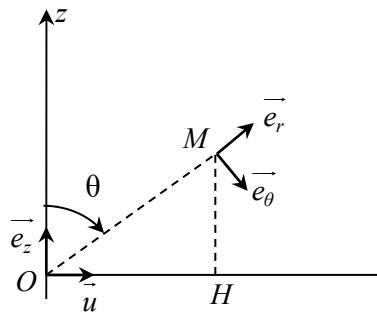
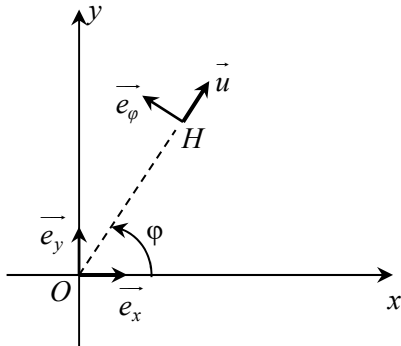
⇒ Méthode 10.2

### Exercice 10.5

1.  $\overline{OM} = r\overline{e}_r$ .

2. Pour y voir plus clair, utilisons deux plans particuliers :  $(Oxy)$  et le plan contenant  $O, M$  et  $H$ .

On utilisera le vecteur unitaire  $\overline{u} = \frac{\overline{OH}}{\|\overline{OH}\|}$  comme intermédiaire de calcul.



On exprime donc les vecteurs unitaires de la base sphérique dans la base cartésienne :

$\overline{e}_r = \sin\theta\overline{u} + \cos\theta\overline{e}_z = \sin\theta \cdot \cos\phi\overline{e}_x + \sin\theta \cdot \sin\phi\overline{e}_y + \cos\theta\overline{e}_z$  ;

$\overline{e}_\theta = \cos\theta\overline{u} - \sin\theta\overline{e}_z = \cos\theta \cdot \cos\phi\overline{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\phi\overline{e}_y - \sin\theta\overline{e}_z$  ;

$\overline{e}_\phi = -\sin\phi\overline{e}_x + \cos\phi\overline{e}_y$ .

3. Le vecteur vitesse s'obtient en dérivant le vecteur position :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M) &= \frac{d\overline{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\left[\cos\theta \cdot \cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta \cdot \sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z\right] + r\dot{\phi}\left[-\sin\theta \cdot \sin\varphi\vec{e}_x + \sin\theta \cdot \cos\varphi\vec{e}_y\right] \quad \text{soit} \\ \boxed{\vec{v}(M) &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\varphi}.\end{aligned}$$

Pour obtenir le vecteur accélération, on dérive à nouveau cette expression.

$$\begin{aligned}\vec{a}(M) &= \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + (\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta + r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{e}_\varphi \\ &+ r\dot{\phi}\sin\theta\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}.\end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\vec{e}_\varphi, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\phi}\left[\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta\right],$$

En remplaçant ces résultats dans l'expression de  $\vec{a}(M)$ , on trouve la « simple » expression :

$$\boxed{\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\vec{e}_\theta + (2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\phi}\dot{\theta})\vec{e}_\varphi}.$$

*✎ Cette expression n'est pas à connaître et ne sera jamais utilisée en dynamique.*

### Exercice 10.6

Si on observe le mouvement rectiligne de la voiture sur un axe ( $Ox$ ), en prenant pour origine des dates le début du freinage, sa vitesse est alors donnée par  $v_x(t) = \dot{x}(t) = -at + v_0$  et son équation

horaire par  $x(t) = -a\frac{t^2}{2} + v_0t + x_0$ . Elle s'arrête quand sa vitesse s'annule, soit pour une date  $t_a$

telle que  $-at_a + v_0 = 0$  donc  $\boxed{t_a = \frac{v_0}{a}}$ . AN  $\boxed{t_a = 6,0 \text{ s}}$ .

☛ Ne pas oublier de convertir la vitesse en mètres par seconde (unité SI).

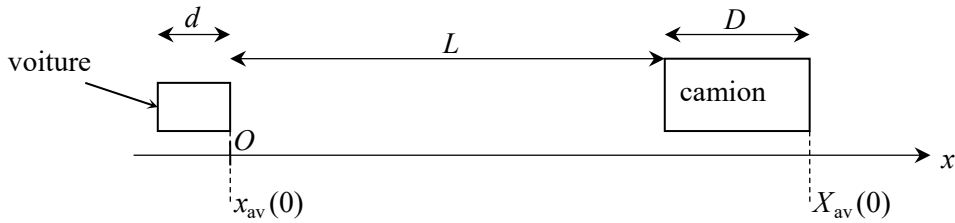
À cette date, son abscisse est donc  $x(t_a)$  et la distance de freinage est

$$d = x(t_a) - x_0 = -a\frac{t_a^2}{2} + v_0t_a, \quad \text{soit} \quad \boxed{d = \frac{v_0^2}{2a}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{d = 74 \text{ m}}.$$

⇒ Méthode 10.4

### Exercice 10.7

1. Un petit schéma de ce qui se passe à  $t = 0$  permettra d'y voir un peu plus clair.



La voiture est animée, pour  $t \geq 0$ , d'un mouvement rectiligne uniformément retardé :

$$\ddot{x}_{av} = +a ; \dot{x}_{av}(t) = at + \dot{x}_{av}(0) = at + v_0 ; x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_{av}(0), \text{ soit } \boxed{x_{av}(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t}.$$

Le camion est, quant à lui, animé d'un mouvement rectiligne uniforme. On obtient donc, en tenant compte des conditions initiales ( $X_{av}(0) = L + D = 45 \text{ m}$ ) :  $\boxed{X_{av}(t) = v_0t + L + D}$ .

⇒ Méthode 10.4

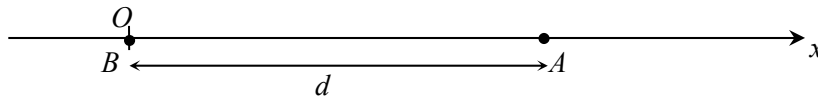
**2.** On cherche donc une date  $t_1$  telle que  $x_{av}(t_1) - X_{av}(t_1) = \ell + d$  avec  $\ell = 20 \text{ m}$ . Cela conduit

$$\text{à : } \frac{a}{2}t^2 + v_0t - v_0t - L - D = \ell + d \text{ d'où } t = \sqrt{\frac{2(\ell + d + L + D)}{a}}. \text{ AN } \boxed{t_1 = 6,8 \text{ s}}.$$

Alors la distance parcourue par le camion est  $\boxed{C = X_{av}(t_1) - X_{av}(0) = v_0t_1}$ . AN  $\boxed{C = 140 \text{ m}}$ .

### Exercice 10.8

**1.** À l'instant initial, les positions des deux véhicules sont les suivantes :



Pour la première voiture à partir de  $t = 0$  :  $\ddot{x}_A = \text{cte}$  donc  $\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + \text{cte}$ , avec  $\dot{x}_A(0) = v$  d'où

$$\dot{x}_A(t) = \ddot{x}_A t + v ; \text{ ensuite } \boxed{x_A(t) = \frac{\ddot{x}_A}{2}t^2 + vt + d} \text{ avec } x_A(0) = d.$$

Pour la seconde à partir de  $t_B = 2,0 \text{ s}$  :  $\ddot{x}_B = \text{cte}$ ,  $\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B t + \text{cte}$ , avec  $\dot{x}_B(t_B) = v$  d'où

$$\dot{x}_B(t) = \ddot{x}_B(t - t_B) + v ; \text{ ensuite } x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt + \text{cte}, \text{ avec } x_B(t_B) = x_B(0) + vt_B = vt_B$$

$$\text{donc } \boxed{x_B(t) = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t - t_B)^2 + vt}.$$

Ces équations horaires ne sont valables que pendant la durée du freinage de chacune des voitures, donc avant leurs dates d'arrêt :  $t'_A = -\frac{v}{\ddot{x}_A} = 15 \text{ s}$  pour la première,  $t'_B = t_B - \frac{v}{\ddot{x}_B} = 32 \text{ s}$  pour l'autre.

⇒ Méthode 10.4

**2.** On cherche s'il existe une date  $t_c$  telle que  $x_A(t_c) = x_B(t_c) \Leftrightarrow \frac{\ddot{x}_A}{2}t_c^2 + d = \frac{\ddot{x}_B}{2}(t_c - t_B)^2$  ce qui donne l'équation du second degré :  $(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)t_c^2 + 2\ddot{x}_B t_B t_c + 2d - \ddot{x}_B t_B^2 = 0$ . La résolution de cette

équation du second degré donne  $t_c = 11 \text{ s}$ . Cette date se trouve bien dans le domaine de validité des équations horaires.

Pour trouver l'abscisse du contact, on utilise, au choix, une des deux équations horaires :

$$x_c = x_A(t_c) = x_B(t_c) = 300 \text{ m}$$

### Exercice 10.9

1. La fonction cosinus variant de  $-1$  à  $+1$ , la coordonnée  $x(t)$  est comprise entre  $-X_m$  et  $+X_m$  : l'anneau parcourt donc une distance égale à  $2X_m$ , d'où  $X_m = 10 \text{ cm}$ .

2. La période  $T$  correspond au plus petit réel positif et non nul tel que pour toute date  $t$  on puisse écrire  $x(t+T) = x(t)$ , ce qui conduit à  $\omega_0 T = n \cdot 2\pi$  ( $n$  entier). Les contraintes de la définition imposent de prendre  $n=1$  et donc  $\omega_0 T = 2\pi$ , ou  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

AN  $\omega_0 = 13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. À l'instant initial,  $x(0) = X_m \cos(\varphi)$  d'où  $\cos(\varphi) = x(0) / X_m$ . AN  $\varphi = 60^\circ$ . Finalement, on en déduit  $x(t_1) = 5,0 \text{ cm}$ .

⚙️ *Toutes les valeurs numériques de l'énoncé sont données avec deux chiffres significatifs. Les résultats des applications numériques doivent respecter la même contrainte et être fournies avec deux chiffres significatifs. Attention toutefois à réaliser les calculs intermédiaires à la calculatrice avec le plus de chiffres possible.*

4. En dérivant la position  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  par rapport aux temps, on obtient  $\dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . La vitesse maximale est alors donnée par  $\dot{x}_{\max} = \omega_0 X_m$ .

AN  $\dot{x}_{\max} = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

5. L'accélération est obtenue en dérivant la vitesse par rapport au temps :  $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . On remarque que  $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ , soit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  : c'est l'équation de l'oscillateur harmonique, cohérente avec la solution  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  proposée.

### Exercice 10.10

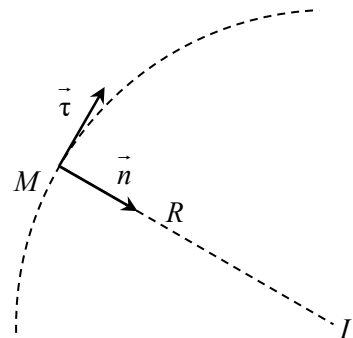
1. La voiture est assimilée à un point matériel  $M$  décrivant une trajectoire circulaire de centre  $I$  et de rayon  $R$  : on utilise la base de Frenet.

Les éléments cinématiques sont  $\vec{v}(M) = v \vec{\tau}$  et  $\vec{a}(M) = \frac{v^2}{R} \vec{n}$

puisque la vitesse est constante en norme.

La norme de l'accélération est  $a_0 = \frac{V_0^2}{R} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Cette valeur est supérieure à la limite de sécurité.



2. Si la voiture freine, la norme  $v$  de sa vitesse est maintenant une fonction du temps.

Son accélération devient donc  $\vec{a}(M) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$ .

Au moment où le véhicule commence à freiner, sa vitesse est  $V_0$ , et la norme de son

accélération est donc  $a = \sqrt{\left(-\frac{V_0^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} > a_0$ . Le freinage va donc avoir

pour première conséquence d'augmenter la norme de l'accélération.

**3.** En supposant que la bretelle est parcourue à vitesse constante, il faut que l'accélération ne

dépasse pas la valeur maximale  $a_{\max} = \frac{V_{\max}^2}{R}$ . Donc  $V_{\max} = \sqrt{R a_{\max}}$ .

AN  $V_{\max} = 22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

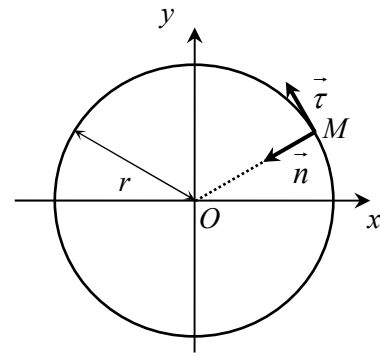
### Exercice 10.11

**1.** On note assimile le satellite à un point matériel  $M$  et on note  $O$  le centre de la Terre. Le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . On note  $r = R_T + h$  le rayon de la trajectoire, où  $h$  est l'altitude.

**2.** La vitesse s'écrit dans la base de Frenet :  $\vec{v}(M) = v \vec{\tau}$ .

La norme du vecteur vitesse étant constante, c'est simplement le rapport de la distance parcourue pendant une période (circonférence du cercle) par la période :

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \text{ AN } v = 3,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$



**3.** L'accélération s'écrit dans la base de Frenet :  $\vec{a}(M) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$  soit ici  $\vec{a}(M) = \frac{v^2}{r} \vec{n}$  car la vitesse est constante en norme, et le rayon de courbure en tout point d'un cercle est le rayon du

cercle. La norme de l'accélération est donc :  $a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ . AN  $a = 0,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### Exercice 10.12

**1.** On cherche à éliminer  $t$  entre les coordonnées. On développe les sinus :

$$y(t) = a \left[ \sin(\omega t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = a \left[ \frac{\sin(\omega t) + \sqrt{3} \cos(\omega t)}{2} \right]$$

$$z(t) = a \left[ \sin(\omega t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos(\omega t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] = a \left[ \frac{\sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{2} \right]$$

et on fait la différence :  $y(t) - z(t) = a \sin(\omega t) = x(t)$ .

La trajectoire de  $M$  est donc contenue dans le plan d'équation  $x - y + z = 0$  qui passe par  $O$ .

⇒ Méthode 10.5



$$2. OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \left[ \sin^2(\omega t) + \left( \frac{\sin(\omega t) + \sqrt{3} \cos(\omega t)}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3} \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{2} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{a^2}{4} [6 \sin^2(\omega t) + 6 \cos^2(\omega t)] = \frac{3a^2}{2}.$$

Le mouvement a donc lieu sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

3. Le vecteur vitesse  $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt}$  a pour composantes :  $v_x = \dot{x} = a\omega \cos(\omega t)$ ,

$v_y = \dot{y} = a\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$  et  $v_z = \dot{z} = a\omega \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ . On en déduit :

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (a\omega)^2 \left[ \cos^2(\omega t) + \left( \frac{\cos(\omega t) - \sqrt{3} \sin(\omega t)}{2} \right)^2 + \left( \frac{-\cos(\omega t) - \sqrt{3} \sin(\omega t)}{2} \right)^2 \right].$$

Le développement des carrés fait disparaître les doubles produits et on obtient :

$$v^2 = (a\omega)^2 \left[ \cos^2(\omega t) + \frac{\cos^2(\omega t) + 3\sin^2(\omega t)}{2} \right] = \frac{3}{2} (a\omega)^2 \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{3}{2}} a\omega = \text{cte}.$$

Il s'agit donc d'un mouvement circulaire uniforme.

4. La période  $T$  est telle que  $\overline{OM}(t+T) = \overline{OM}(t)$  ; les trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  ayant

la même période, c'est aussi la période  $T$  recherchée, donc  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

### Exercice 10.13

1. Si on utilise la base polaire, l'accélération s'écrit, en tenant compte des données de l'énoncé,

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta = -k\left(\frac{b}{r}\right)^n \vec{e}_r.$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon  $r = b = \text{cte}$ ,  $\dot{r} = 0$  et  $\ddot{r} = 0$  donc ces expressions entraînent  $b\dot{\theta}^2 = k$  et  $b\ddot{\theta} = 0$ . On en

déduit donc  $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{k}{b}}$  et  $v = r|\dot{\theta}| = \sqrt{kb} = \text{cte}$  (mouvement uniforme). La vitesse initiale doit

donc avoir la valeur  $v_0 = \sqrt{kb}$  pour norme, mais cette condition n'est pas suffisante : il faut également (propriété du mouvement circulaire) qu'elle soit orthogonale au vecteur position initial  $\overline{OM}_0$ .

2. La fréquence (inverse de la période) est définie par  $f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{v_0}{2\pi b}$  soit  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{b}}$ .

### Exercice 10.14

1. On connaît les composantes du vecteur accélération :  
 $a_x = \ddot{x} = 0$  ;  $a_y = \ddot{y} = -a$  ;  $a_z = \ddot{z} = 0$ .

On peut donc déterminer celles du vecteur vitesse, à chaque instant, par intégration, en déterminant les constantes à l'aide des conditions initiales :

$$v_x = \dot{x} = V_0 \cos(\alpha) ; v_y = \dot{y} = -at + V_0 \sin(\alpha) ; v_z = \dot{z} = 0.$$

Une nouvelle intégration, en tenant compte toujours des conditions initiales, permet d'obtenir

les équations horaires :  $x(t) = V_0 \cos(\alpha)t$  ;  $y(t) = -\frac{a}{2}t^2 + V_0 \sin(\alpha)t$  ;  $z(t) = 0$ .

⇒ Méthode 10.4

2. L'une des équations cartésiennes est  $z = 0$  : le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ .

Il suffit d'éliminer le temps entre les deux premières équations pour obtenir l'équation de la

trajectoire :  $t = \frac{x}{V_0 \cos(\alpha)}$  d'où  $y(x) = -\frac{a}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + \tan(\alpha)x$ .

La trajectoire est parabolique, d'axe parallèle à  $(Oy)$ .

⇒ Méthode 10.5

3. Pour que Lulu attrape le frisbee, il faut que  $y(D) = 0$ , d'où  $V_0 = \sqrt{\frac{aD}{2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}}$  soit

encore  $V_0 = \sqrt{\frac{aD}{\sin(2\alpha)}}$ . (Pour  $\alpha = 45^\circ$ , l'expression se simplifie en  $V_0 = \sqrt{aD}$ .)

### Exercice 10.15

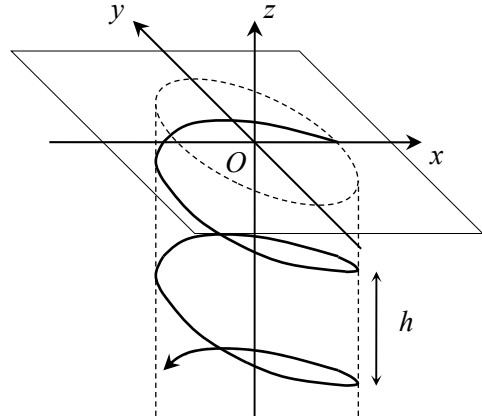
1.  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  donc  $r = R = \text{cte}$ .  $\tan \theta = \frac{y}{x} = \tan(\omega t)$  avec  $\cos \theta = \frac{x}{R} = \cos(\omega t)$ , donc  $\theta = \omega t$ .

⇒ Méthode 10.1

2.  $r = R = \text{cte}$  donc la trajectoire se trouve sur un cylindre d'axe  $(Oz)$  et de rayon  $R$ .

$\theta$  augmente régulièrement donc Toto tourne autour de l'axe, et  $z$  diminue régulièrement donc Toto descend aussi le long de l'axe.

Il s'agit donc globalement d'une hélice circulaire d'axe  $(Oz)$ , de rayon  $R$  et de pas  $h = \frac{2\pi b}{\omega}$  (le pas est la distance dont Toto descend à chaque tour).



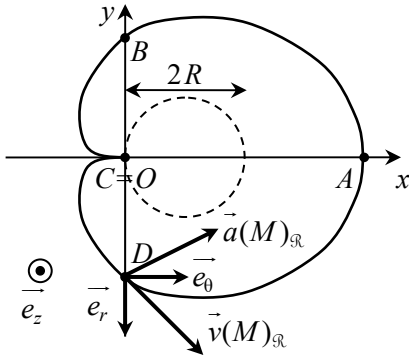
3.  $v_x = \dot{x} = -\omega R \sin(\omega t)$ ,  $v_y = \dot{y} = \omega R \cos(\omega t)$  et  $v_z = \dot{z} = -b$  donc  $v = \sqrt{\omega^2 R^2 + b^2}$ . On constate que le mouvement est uniforme.

4.  $a_x = \ddot{x} = -\omega^2 R \cos(\omega t)$ ,  $a_y = \ddot{y} = \omega^2 R \sin(\omega t)$  et  $a_z = \ddot{z} = 0$  donc  $a = \omega^2 R$ . Le module de l'accélération est également constant au cours du mouvement.

⇒ Méthode 10.3

### Exercice 10.16

1.



Point A :  $\theta = 0$ ,  $r = 4R$ . Point B :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $r = 2R$ .

Point C :  $\theta = \pi$ ,  $r = 0$  (donc c'est l'origine O). Point

D :  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ,  $r = 2R$ .

✍ Pour chaque valeur de  $\theta$  il y a une valeur unique de  $r$ , donc cette courbe ne peut pas comporter de « boucle »... D'autre part,  $r$  diminue quand  $\theta$  varie de 0 à  $\pi$ , puis augmente quand  $\theta$  varie de  $\pi$  à  $2\pi$ .

2. a)  $\vec{v}(M)_{\mathbb{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$  avec  $\dot{\theta} = \omega$  et  $\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -2R \sin\theta \dot{\theta}$  donc

$$\vec{v}(M)_{\mathbb{R}} = -2R \sin(\omega t) \omega \vec{e}_r + 2R(1 + \cos(\omega t)) \omega \vec{e}_\theta.$$

En D la vitesse est donc  $\vec{v}(M)_{\mathbb{R}} = 2R\omega \vec{e}_r + 2R\omega \vec{e}_\theta$ .

b)  $v(M)_{\mathbb{R}} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \sqrt{4R^2 \sin^2(\omega t) \omega^2 + 4R^2 (1 + \cos(\omega t))^2 \omega^2}$

$$\text{soit } v(M)_{\mathbb{R}} = 2R\omega \sqrt{2 + 2\cos(\omega t)} = 4R\omega \left| \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \right|.$$

c) Le maximum de  $v(M)_{\mathcal{R}}$  est  $v_{\max} = 4R\omega$  pour  $\omega t = 0 + 2k\pi$ , c'est-à-dire au point A. Le vecteur vitesse est alors  $\vec{v}_A = 4R\omega \vec{e}_y$  donc Toto serait éjecté dans la direction et le sens de (Oy).

d)  $v(M)_{\mathcal{R}}$  s'annule pour  $\omega t = \pi + 2k\pi$ , c'est-à-dire au point C (point O).

3. a)  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

avec  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2R\omega^2 \cos(\omega t) - 2R(1 + \cos(\omega t))\omega^2 = -4R\omega^2 \cos(\omega t) - 2R\omega^2$  et  $\ddot{\theta} = 0$  donc

$$\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -2R\omega^2 [2\cos(\omega t) + 1]\vec{e}_r - 4R\omega^2 \sin(\omega t)\vec{e}_\theta.$$

En D l'accélération est donc  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -2R\omega^2 \vec{e}_r + 4R\omega^2 \vec{e}_\theta$ .

b)  $a(M)_{\mathcal{R}} = 2R\omega^2 \sqrt{(2\cos(\omega t) + 1)^2 + 4\sin^2(\omega t)}$  soit  $a(M)_{\mathcal{R}} = 2R\omega^2 \sqrt{5 + 4\cos(\omega t)}$ .

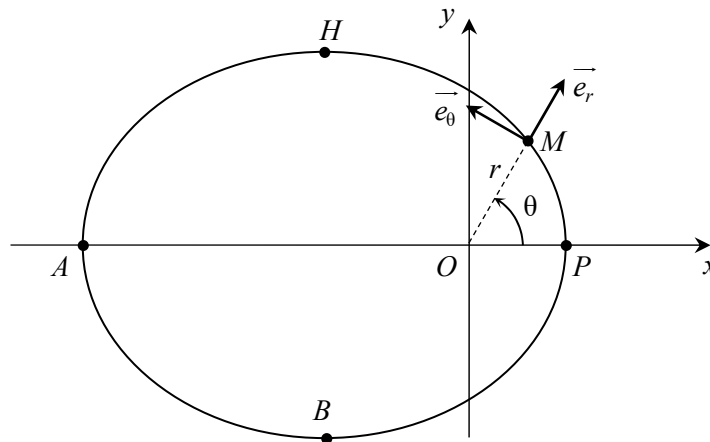
c) Le maximum de  $a(M)_{\mathcal{R}}$  est  $a_{\max} = 6R\omega^2$  pour  $\omega t = 0$ , c'est-à-dire au point A.

### Exercice 10.17

1. La valeur maximale de  $r$  est  $r_{\max} = \frac{p}{1-e}$ , obtenue pour  $\theta = \pi$ ; la valeur minimale est

$r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ , correspondant à  $\theta = 0$  (c'est donc la valeur de  $r$  en P).

2.



⚡ L'origine O n'est pas le centre de symétrie de l'ellipse ! Il ne faut donc pas essayer de mettre à tout prix les points B et H sur l'axe (Oy)... D'autre part, les vecteurs unitaires ne sont ni tangents, ni normaux à la trajectoire : c'est encore plus évident si on les fait apparaître au point H ou au point B.

3. Dans la base polaire, l'accélération s'écrit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$ . Le fait que cette accélération soit radiale entraîne qu'à chaque instant,  $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ .

Pour montrer que  $r^2\dot{\theta}$  est une constante, calculons sa dérivée :

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \text{ donc } r^2\dot{\theta} = \text{cte}.$$

Initialement :  $r_0 = r_{\min} = \frac{p}{1+e}$  (donc  $\dot{r} = 0$ ) ; alors  $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0} + r_{\min}\dot{\theta}_0\vec{e}_y = v_P\vec{e}_y$

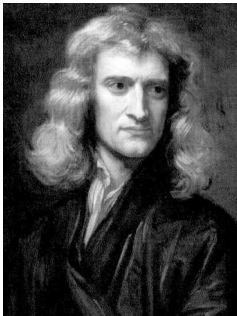
donc  $\dot{\theta}_0 = \frac{v_P}{r_{\min}}$ . On en déduit  $C = r_{\min}v_P = \frac{p}{1+e}v_P$ .

4. Aux points  $A$  et  $P$ ,  $\dot{r} = 0$  et donc  $v_A = r_A\dot{\theta}_A$  et  $v_P = r_P\dot{\theta}_P$ , soit  $\frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_P} = \frac{r_Pv_A}{r_Av_P}$ . Par ailleurs, la loi

démontrée dans la question précédente appliquée en  $A$  et  $P$  donne  $\frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_P} = \left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2$ . Par

identification, on trouve donc que  $r_Av_A = r_Pv_P$ , d'où  $v_A = \frac{1-e}{1+e}v_P$ .

# Principes de la dynamique



Les découvertes d'**Isaac NEWTON** (1643-1727), tant en physique qu'en mathématiques, ont révolutionné ces deux disciplines. En 1672, il découvre la nature de la lumière blanche, superposition de raies colorées. Dans son ouvrage *Principia mathematica*, qu'il publie tardivement en 1687, il établit la loi de la gravitation universelle et surtout les trois lois générales de la dynamique. En mathématiques, NEWTON introduit, avant LEIBNIZ, le calcul différentiel et intégral.

## ■ Un peu d'histoire

Non seulement GALILÉE a mis en évidence le principe d'inertie mais il a compris l'importance des mathématiques pour décrire les lois de la nature. Après lui, divers savants ont emprunté la voie qu'il avait tracée pour l'étude des mouvements. Grâce à des observations précises de son maître Tycho BRAHE, Johannes KEPLER a montré le parcours elliptique des planètes et il a énoncé la loi des aires ; Christiaan HUYGENS, de son côté, a étudié les mouvements du pendule et les chocs élastiques. Il manquait une explication globale de tous ces phénomènes. Ce fut l'œuvre d'Isaac NEWTON ! Le savant anglais a compris le rôle des forces dans les perturbations du mouvement d'un solide. Il a mis en évidence l'existence d'une force gravitationnelle invisible qui expliquait le mouvement des astres et a su mettre en équation son action, ainsi que celle de toute autre force, permettant ainsi de prévoir la trajectoire d'un mobile.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions de point matériel, de masse, de force
- ▷ La quantité de mouvement d'un point matériel, d'un système de points
- ▷ Les caractéristiques des forces usuelles : poids, réaction d'un support, tension d'un ressort ou d'un fil inextensible, force de frottement fluide
- ▷ Les trois lois de Newton
- ▷ Le mouvement relatif de deux référentiels galiléens

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur un point matériel et donner des informations sur leurs composantes
- ▷ Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur un système de points matériels en distinguant forces intérieures et forces extérieures
- ▷ Appliquer la deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) pour obtenir les équations du mouvement
- ▷ Exploiter les équations du mouvement pour en déduire les équations horaires ou bien la valeur d'une force
- ▷ Étudier le mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur
- ▷ Établir l'équation du mouvement du pendule simple, et justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire
- ▷ Étudier un oscillateur mécanique harmonique ou amorti par frottement visqueux
- ▷ Formuler une hypothèse quant au glissement ou non d'un solide, et la valider en utilisant les lois de Coulomb du frottement

## ■ Notions fondamentales de la dynamique

### □ Modèle du point matériel

Un **point matériel** est un objet physique pouvant être assimilé à un point mathématique, c'est-à-dire dont la position est entièrement repérée par trois coordonnées. C'est le cas notamment si ses dimensions sont négligeables à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas. Le mouvement d'un solide en translation peut aussi s'étudier comme celui d'un point matériel (tous ses points ayant la même vitesse et la même accélération à tout instant).

### □ Masse

La masse (inertielle) est une grandeur scalaire positive, intrinsèque, extensive et conservative, qui caractérise l'**inertie** d'un corps, c'est-à-dire la difficulté à le mettre en mouvement ou à modifier son mouvement. L'unité SI de masse est le kilogramme (kg).

### □ Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , est le vecteur :

$$\vec{p}(M)_{\mathcal{R}} = m \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}.$$

### □ Action mécanique et force

Action mécanique

On appelle **action mécanique** toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.

Force

En mécanique classique, une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un **vecteur force** : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité SI de force est le newton (N).

Propriétés

- Les forces ne dépendent pas du référentiel.
- Les forces sont additives : deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  exercées sur un point matériel sont équivalentes à une force unique  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .
- Un point matériel est **isolé** (mécaniquement) s'il n'est soumis à aucune force. Il est **pseudo-isolé** s'il est soumis à des forces dont la somme vectorielle est nulle.

Troisième loi de Newton : principe des interactions

Si deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  sont en interaction :

$$\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} \text{ et ces forces sont colinéaires à la droite } (M_1 M_2).$$



### □ Système de points matériels

Un système  $S$  (discret) est constitué de  $N$  points matériels  $M_i$ , de masses  $m_i$ ,  $i$  étant un entier compris entre 1 et  $N$ . On note  $m_{\text{tot}}$  la masse totale du système :  $m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N m_i$ .

La masse d'un système fermé (contenant toujours les mêmes points matériels) reste constante.

Centre d'inertie du système

On appelle **centre d'inertie**, **centre de masse**, ou **barycentre**, du système  $S$  le point  $G$  tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{OM_i} \quad \text{ou encore} \quad \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

Quantité de mouvement du système

La quantité de mouvement du système  $S$  dans  $R$  est définie par  $\overline{p}(S)_{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(M_i)_{\mathcal{R}}$ .

Elle peut également être exprimée en utilisant le centre d'inertie :  $\overline{p}(S)_{\mathcal{R}} = m_{\text{tot}} \vec{v}(G)_{\mathcal{R}}$ .

Forces intérieures et extérieures

Dans l'inventaire des forces qui s'exercent sur un système, on distingue :

- les forces intérieures, exercées par une partie du système sur une autre partie du système ;
- les forces extérieures, exercées sur tout ou une partie du système par des corps extérieurs.

Le principe des interactions permet d'écrire que  $\sum \overrightarrow{F}_{\text{int}} = \vec{0}$ .

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune force *extérieure*, et pseudo-isolé s'il est soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle : dans les deux cas,  $\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ .

## ■ Première et deuxième lois de Newton

### □ Première loi de Newton : principe d'inertie

Énoncé

Il existe une classe de référentiels, appelés **galiléens** ou **inertiels**, par rapport auxquels le mouvement de tout point matériel isolé est rectiligne et uniforme.

Propriété

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.

Exemples

- En pratique, le **référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléen dans la majorité des expériences usuelles (à l'échelle du laboratoire).
- On utilise le **référentiel géocentrique** (ayant le centre de la Terre pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines) pour étudier les mouvements de corps autour de la Terre.
- On utilise le **référentiel héliocentrique** (ayant le centre du Soleil pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines) pour étudier les mouvements des astres du système solaire.

## □ Deuxième loi : principe fondamental de la dynamique (PFD)

Énoncé

Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$ , soumis à des forces de résultante  $\sum \vec{F}$ , par rapport à un

référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :  $\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}(M)_{\mathcal{R}}}{dt}}$  ou encore  $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}}$  (forme utile en pratique).

Conséquence : théorème de la quantité de mouvement (TQM) pour un système

Pour un système  $S$  de points matériels, soumis à des forces extérieures de résultante  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ , par

rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen :  $\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}(S)_{\mathcal{R}}}{dt}}$ .

On peut aussi l'écrire :  $\boxed{\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{tot}}\vec{a}(G)_{\mathcal{R}}}$  (appelé aussi **théorème du centre de masse**).

## ■ Modélisation des forces usuelles

### □ Tension d'un fil inextensible

Un point matériel accroché à un fil inextensible subit une force de tension, selon la direction du fil et orientée du point vers le fil ; sa norme est une inconnue a priori.

Un fil idéal (sans masse) exerce des tensions opposées à ses deux extrémités.

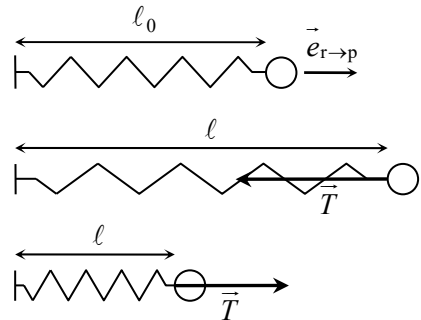
Si le fil passe sur une poulie idéale (sans masse et sans frottements), la tension change de direction mais sa norme reste la même aux deux extrémités.

### □ Tension (ou force de rappel élastique) d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos  $\ell_0$  et son coefficient de raideur  $k$ . Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur produit sur chacune de ses extrémités la force :

$$\boxed{\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r \rightarrow p}} \quad (\text{loi de Hooke})$$

où  $\ell$  est sa longueur et  $\vec{e}_{r \rightarrow p}$  le vecteur unitaire de la direction du ressort, orienté du ressort vers le point d'attache considéré.



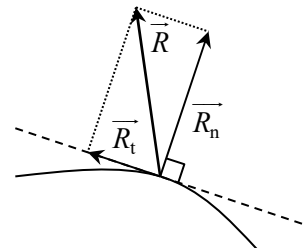
### □ Réaction d'un support solide

Lorsqu'un point matériel ou un solide en translation se déplace sur un support, celui-ci exerce sur lui une force de contact  $\vec{R}$ , appelée aussi **réaction** du support. On peut la décomposer en deux termes :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t}$$

avec  $\vec{R}_n$  la **réaction normale** (orthogonale au support)

$\vec{R}_t$  la **réaction tangentielle** ou **force de frottement solide**.



## Lois de Coulomb du frottement solide

- Lorsque le mobile *glisse* par rapport au support avec une vitesse  $\vec{v}$ , alors  $\vec{R}_t$  est colinéaire et de sens contraire à  $\vec{v}$ , et  $\boxed{\vec{R}_t = f_d \cdot \vec{R}_n}$  où  $f_d$  est le **coefficient de frottement dynamique**.
  - Lorsqu'il est *immobile* sur le support,  $\vec{R}_t$  peut avoir une direction quelconque, et  $\boxed{\vec{R}_t \leq f_s \cdot \vec{R}_n}$  où  $f_s$  est le **coefficient de frottement statique**.  $f_s > f_d$ , mais on suppose parfois  $f_s \approx f_d$ .
- Dans le modèle *sans frottement*,  $f_s = f_d = 0$  donc dans tous les cas  $\vec{R}_t = \vec{0}$ , soit  $\vec{R} = \vec{R}_n$ .

### □ Forces de pression

- La force de pression exercée par un fluide sur une surface  $S$  plane d'un solide est  $\boxed{\vec{F} = PS\vec{n}}$  où  $P$  est la pression du fluide,  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface, du fluide vers le solide.
- La résultante des forces de pression sur un corps totalement entouré par un fluide au repos est la **poussée d'Archimède**, égale à l'opposé du poids du « fluide déplacé ».

### □ Force de frottement fluide (ou visqueux)

Quand un objet est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une force de frottement de direction opposée au vecteur vitesse de l'objet par rapport au fluide.

- Pour une vitesse faible ou un fluide très visqueux, on peut adopter un modèle linéaire :  $\boxed{\vec{F}_f = -h\vec{v}(M) = -h\nu(M)\vec{\tau}}$  avec  $\vec{\tau}$  le vecteur unitaire tangent de la base de Frenet.
- Pour une vitesse plus élevée, on peut adopter un modèle quadratique :  $\boxed{\vec{F}_f = -h\nu(M)^2\vec{\tau}}$ .

### □ Force de gravitation

Deux corps quelconques exercent l'un sur l'autre une force de gravitation attractive, proportionnelle à leurs masses. Pour deux corps ponctuels  $A$  et  $B$  (ou deux sphères de centres  $A$  et  $B$ ) :

$$\boxed{\vec{F}_{g_{A \rightarrow B}} = -\vec{F}_{g_{B \rightarrow A}} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}} \quad \text{avec } G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \text{ la constante de gravitation universelle et } \vec{e}_{A \rightarrow B} \text{ un vecteur unitaire orienté de } A \text{ vers } B.$$

### □ Poids

Au voisinage de la Terre, un corps de masse  $m$  subit une force appelée le poids :  $\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$  avec  $\vec{g}$  le **champ de pesanteur**, souvent considéré comme uniforme (de norme  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Il a pour origine principale l'attraction gravitationnelle de la Terre.

### □ Force électrique (coulombienne)

Deux corps chargés exercent l'un sur l'autre une force électrique, attractive ou répulsive, proportionnelle à leurs charges. Pour deux corps ponctuels  $A$  et  $B$  (ou sphères de centres  $A$  et  $B$ ) :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{él}_{A \rightarrow B}} = -\vec{F}_{\text{él}_{B \rightarrow A}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{e}_{A \rightarrow B}} \quad \text{avec } \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \text{ la permittivité du vide.}$$

⇒ **Méthode 11.1. Écriture des composantes des forces**

⇒ **Méthode 11.2. Inventaire des forces pour un point matériel ou un système**

⇒ **Méthode 11.5. Détermination de composantes de forces inconnues**

## ■ Exemples d'études de mouvements

### □ Chute dans le champ de pesanteur

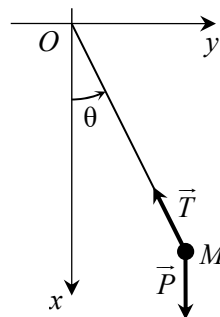
C'est un problème dans lequel un point matériel  $M$  est mobile dans l'espace sans aucune liaison.

- Si on néglige les frottements de l'air, il n'est soumis qu'à son poids : il s'agit alors d'un mouvement à vecteur accélération constant, donnant une trajectoire parabolique.
- Si on tient compte des frottements visqueux dus à l'air, l'équation différentielle ne peut être résolue de façon analytique que dans le cas d'une force linéaire (proportionnelle à la vitesse). Mais on peut exploiter l'équation différentielle sans la résoudre analytiquement : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite (indépendante des conditions initiales), utilisation des résultats obtenus par simulation numérique.

### □ Pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , lié à l'extrémité d'un fil de longueur  $L$  et de masse négligeable, l'autre extrémité étant fixe en un point  $O$ .

Si on ne considère que le mouvement dans un plan vertical fixe, on repère la position de  $M$  avec l'angle  $\theta$  que forme, à chaque instant, le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec la verticale descendante.  $M$  étant soumis à son poids et à la tension du fil, le PFD permet d'établir l'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ .

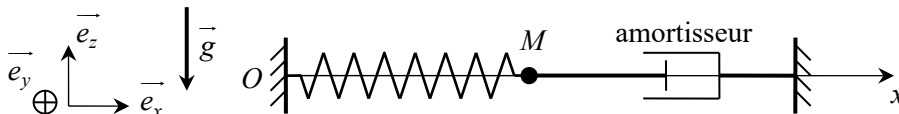


Si l'angle  $\theta$  est petit ( $\theta \ll 1$ ), alors  $\sin \theta \approx \theta$  et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$ .

⇒ Méthode 11.3. Obtention des équations du mouvement  
 ⇒ Méthode 11.4. Résolution des équations du mouvement

### □ Oscillateur amorti par frottement visqueux

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est fixé à un ressort et peut glisser sur un support horizontal. On suppose qu'il existe des frottements visqueux, soit dus au fluide environnant (généralement l'air), soit volontairement introduits à l'aide d'un amortisseur ; on les modélise par une force  $\vec{F} = -h\vec{v}(M)$ , où  $\vec{v}(M)$  est la vitesse de  $M$  par rapport au fluide exerçant ces frottements.



L'équation différentielle du mouvement est alors de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}} \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et } Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}.$$

La résolution de ce type d'équation différentielle a été vue au chapitre 5.

Une excitation sinusoïdale (mouvement de  $O$  par exemple) peut aussi conduire à un régime sinusoïdal forcé, et notamment à des phénomènes de résonance (voir chapitre 6) et de filtrage (voir chapitre 7).

## ■ Comment écrire les informations initiales sur les forces appliquées au point matériel ou au système ?

### □ Méthode 11.1. Écriture des composantes des forces

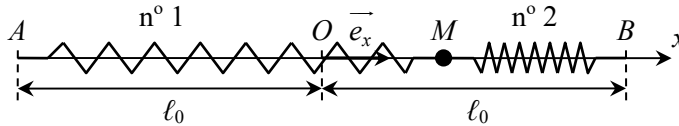
- Pour certaines interactions il existe une formule déterminant complètement le vecteur force. Pour d'autres, il existe seulement une information sur leur direction et leur sens, mais leur norme est inconnue a priori.
- Dans les deux cas, l'application du PFD nécessite de projeter les différentes forces, c'est-à-dire de déterminer leurs composantes dans une certaine base, généralement  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  ou  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Ces projections peuvent nécessiter l'utilisation de formules simples de trigonométrie.

⇒ Exercices 11.1, 11.2, 11.5 à 11.23

- Force de rappel d'un ressort

Appliquer rigoureusement la formule  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r \rightarrow p}$ , ce qui nécessite de bien identifier le vecteur unitaire  $\vec{e}_{r \rightarrow p}$  et la longueur  $\ell$  du ressort en fonction des notations de l'exercice (il s'agit généralement de l'un des vecteurs unitaires de la base utilisée).

Considérons par exemple un objet  $M$  quasi ponctuel pouvant se déplacer sur un axe horizontal  $(Ox)$ , entre deux points  $A$  et  $B$  fixes tels que  $\overline{AB} = 2\ell_0\vec{e}_x$ . L'abscisse  $x = 0$  (origine  $O$ ) correspond au milieu de  $[AB]$ .  $M$  étant lié au point  $A$  par un ressort idéal n° 1 de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , et au point  $B$  par un ressort n° 2, de même raideur  $k$  mais de longueur à vide *nulle*, on cherche les forces  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}_2$  exercées par ces deux ressorts sur  $M$ .



Pour le ressort n° 1 :  $\vec{e}_{r1 \rightarrow p} = \vec{e}_x$ ,  $\ell_1 = \overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = \ell_0 + x$  et  $\ell_{0,1} = \ell_0$  donc la formule donne  $\vec{T}_1 = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{e}_x$  soit  $\vec{T}_1 = -kx\vec{e}_x$ .

Pour le ressort n° 2 :  $\vec{e}_{r2 \rightarrow p} = -\vec{e}_x$ ,  $\ell_2 = \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = \ell_0 - x$  et  $\ell_{0,2} = 0$  donc  $\vec{T}_2 = -k(\ell_0 - x - 0)(-\vec{e}_x)$  soit  $\vec{T}_2 = +k(\ell_0 - x)\vec{e}_x$ .

Ces deux formules sont valables quel que soit le signe de  $x$ .

– Réaction d'un support

A priori, la réaction d'un support quelconque s'écrit  $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$  avec trois composantes inconnues ; mais l'absence de frottement permet d'éliminer la ou les composante(s) tangentielle(s) au support.

Sur le schéma précédent, supposons que  $M$  est mobile sans frottement sur la tige  $AB$ . Parmi les trois vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , le premier est tangent à la tige et les deux autres sont normaux : la réaction normale de la tige s'écrit donc  $\vec{R} = R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$ .

Si maintenant on considère un point  $M$  mobile librement sur un plan  $(Oxy)$ , toujours sans frottement, cette fois les deux vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont tangents au support et seul  $\vec{e}_z$  est orthogonal : la réaction normale du plan s'écrit donc  $\vec{R} = R_z \vec{e}_z$ .

– Tension d'un fil inextensible

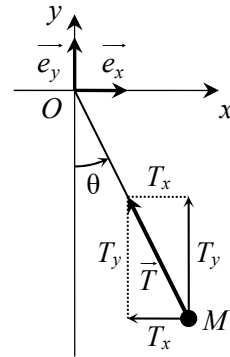
Lorsque le fil n'est pas parallèle à l'un des axes du repère, il faut projeter la tension sur deux (voire trois) directions.

Dans le cas ci-contre d'un fil contenu dans le plan  $(Oxy)$ , on cherche la tension sous la forme  $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$  (la composante sur  $\vec{e}_z$ , orthogonal au plan de figure, est nulle).

On commence par dessiner le vecteur  $\vec{T}$  dont on connaît la direction et le sens, seule sa norme  $T$  étant inconnue. On voit alors que la composante  $T_x$  est négative (car orientée en sens contraire du vecteur  $\vec{e}_x$ ) et que  $T_y$  est positive (dans le même sens que  $\vec{e}_y$ ).

Les valeurs de ces deux composantes sont données par les formules de trigonométrie :

$$\sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{|T_x|}{T} \text{ d'où } T_x = -T \sin \theta ; \cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{|T_y|}{T} \text{ d'où } T_y = +T \cos \theta .$$



**□ Méthode 11.2. Inventaire des forces pour un point matériel ou un système**

C'est une étape capitale en mécanique, c'est pourquoi il faut la traiter avec beaucoup de rigueur.

- Il faut d'abord définir le système dont on veut étudier le mouvement et vérifier qu'il est assimilable à un point matériel ou à un système de points matériels.
- Ensuite faire la liste des interactions entre le système et l'extérieur. On peut, pour s'aider, se poser les questions suivantes : le mouvement a-t-il lieu au voisinage de la surface terrestre ? le point matériel est-il lié (fil, ressort), ou au contact d'un support ? le point matériel a-t-il une charge électrique ?
- Dans le cas d'un point matériel, il faut prendre en compte les forces exercées par l'extérieur sur le point et non les forces exercées par le point sur l'extérieur !

- Dans le cas d'un système de points matériels, il faut prendre en compte toutes les forces exercées par l'extérieur sur les points du système. Les forces intérieures (entre deux points du système) ne sont pas prises en compte pour l'application de la deuxième loi de Newton.
- Il faut ensuite identifier les caractéristiques de ces forces et les exprimer dans la base choisie (méthode précédente), afin de pouvoir appliquer la deuxième loi de Newton (méthode suivante).

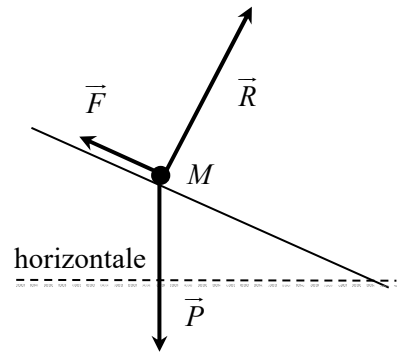
⇒ Exercices 11.3 à 11.23

- Inventaire des forces sur un point matériel

Un skieur, assimilable à un point matériel  $M$ , descend une piste de ski selon un mouvement rectiligne. Les frottements entre le skieur et la piste sont négligés.

- La piste de ski étant située a priori sur Terre, le skieur est soumis à son poids  $\vec{P}$ .
- L'action de la piste sur le skieur est modélisée par une force  $\vec{R}$  orthogonale à la piste puisque les frottements solides sont négligés.
- Rien n'étant dit sur les frottements de l'air, on peut supposer l'existence d'une force  $\vec{F}$  opposée au vecteur vitesse et proportionnelle à sa norme.

L'inventaire des forces sur le skieur est  $\{\vec{P}, \vec{R}, \vec{F}\}$ .



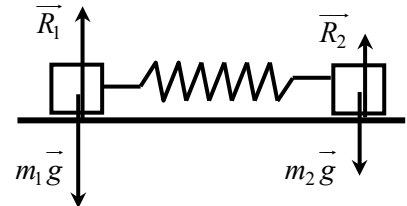
- Inventaire des forces sur un système (déformable)

Deux palets autoporteurs de masses  $m_1$  et  $m_2$  liés par un ressort de masse négligeable se déplacent sur une table horizontale à coussin d'air, dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen. On étudie mécaniquement le système {palets + ressort}.

- Chaque palet est soumis à son poids.
- La table exerce une réaction sur chaque palet, orthogonale à sa surface, car le coussin d'air permet de supposer les frottements solides négligeables.
- Les actions du ressort sur les palets ainsi que celles des palets sur le ressort sont des forces intérieures.

L'inventaire des forces extérieures sur le système est donc :

$\{m_1\vec{g}, m_2\vec{g}, \vec{R}_1, \vec{R}_2\}$ .



## ■ Comment appliquer la deuxième loi de Newton ?

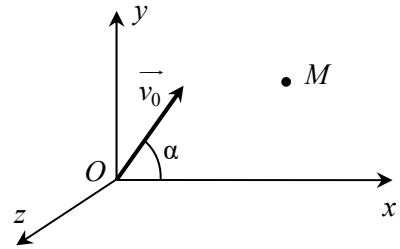
### □ Méthode 11.3. Obtention des équations du mouvement

- Après avoir bien défini le point matériel ou système étudié, préciser le référentiel d'étude. Dans ce chapitre, il s'agira généralement du référentiel terrestre, supposé galiléen.
- Faire un schéma et paramétrer le problème (choisir un système d'axes et une base adaptée, et nommer les grandeurs qui permettront de suivre le mouvement).
- Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le point matériel ou le système et identifier leurs caractéristiques (méthodes 11.1 et 11.2). C'est une étape capitale !
- Analyser le mouvement possible, et en déduire des informations sur les composantes de la vitesse et de l'accélération.
- Appliquer le PFD ou le TQM et le projeter sur la base choisie. Les équations différentielles obtenues, et ne contenant pas d'autres inconnues que les coordonnées et leurs dérivées, sont appelées équations du mouvement. (Celles contenant une composante de force inconnue, telle que réaction de support ou tension de fil, seront traitées dans un deuxième temps : voir méthode 11.5.)
- Attention, dans le cas d'un système de points, l'application du TQM ne permet d'obtenir que le mouvement du centre de masse  $G$  du système, et non celui de chacun de ses points : pour ceux-ci, qui peuvent tourner, se rapprocher ou s'éloigner par rapport à  $G$ , il faut encore appliquer une autre loi.

⇒ Exercices 11.5 à 11.15, 11.19 à 11.23

- Chute libre dans le champ de pesanteur, sans résistance de l'air

Un projectile de masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$ , est lancé depuis un point  $O$  du sol avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans le plan  $(Oxy)$  et formant avec l'axe horizontal  $(Ox)$  un angle  $\alpha$ ;  $(Oy)$  est l'axe vertical ascendant. On cherche à déterminer le mouvement de  $M$  dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, en supposant qu'il est soumis uniquement à son poids.



La position ultérieure quelconque a priori dans l'espace : en l'absence de contraintes sur le mouvement, on utilisera une base cartésienne.

Le PFD s'écrit :  $\sum \vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$  d'où  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \overline{\vec{g}}$ . Il s'agit donc d'un mouvement à vecteur accélération constant, type de mouvement déjà étudié dans le chapitre de cinématique.

Projections du PFD sur la base cartésienne :  $\boxed{\ddot{x} = 0}$ ,  $\boxed{\ddot{y} = -g}$  et  $\boxed{\ddot{z} = 0}$ .

- Chute libre dans le champ de pesanteur, avec résistance de l'air

On suppose maintenant que l'air exerce en plus une force de frottement linéaire  $\vec{F}_f = -h\vec{v}(M)$ .

Le PFD devient alors :  $\sum \vec{F} = m\vec{g} - h\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$  soit  $\boxed{\frac{d\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}}{dt} + \frac{h}{m}\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{g}}$  qui est une équation différentielle d'ordre 1 pour la vitesse.



On peut la projeter sur les trois axes pour résoudre trois équations différentielles scalaires, ou bien intégrer cette équation vectoriellement.

– Pendule simple oscillant dans un plan vertical

Un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , est accroché à un fil inextensible de longueur  $L$ , dont l'autre extrémité est fixée en  $O$ . Il est lâché sans vitesse initiale depuis un point  $M_0$ . On suppose que le mouvement de  $M$  se fait dans le plan vertical  $(Oxy)$ , et on repère sa position par l'angle  $\theta$  avec la verticale descendante  $(Ox)$ . On travaille dans le référentiel  $\mathcal{R}$  terrestre, supposé galiléen.

Informations cinématiques : mouvement circulaire, donc  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

Forces appliquées : poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$  ; tension du fil  $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ .

On applique le PFD à  $M$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ .

$$\text{Projections dans la base cylindrique : } \begin{cases} mg \cos \theta - T = -mL\dot{\theta}^2 & (1) \\ mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} & (2) \\ 0=0 & (3) \end{cases}$$

(3) n'apporte aucune information puisqu'on a supposé dès le départ le mouvement plan.

(2) fournit l'équation du mouvement :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ .

Dans le cas des angles faibles,  $\sin \theta \approx \theta$ , et on obtient alors l'équation différentielle du deuxième ordre  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$  caractéristique d'un oscillateur harmonique.

#### □ Méthode 11.4. Résolution des équations du mouvement

Les équations du mouvement sont des équations différentielles : leur résolution conduit aux équations horaires, c'est-à-dire aux expressions des coordonnées cherchées en fonction du temps.

Les constantes d'intégration sont obtenues à partir des conditions initiales.

⇒ Exercices 11.5 à 11.15, 11.19 à 11.23

– Chute libre dans le champ de pesanteur, sans résistance de l'air

On intègre les équations du mouvement trouvées, en tenant compte des conditions initiales :

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad \text{et} \quad \dot{z} = 0.$$

$$\text{On intègre à nouveau : } \boxed{x(t) = (v_0 \cos \alpha)t}, \quad \boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t} \quad \text{et} \quad \boxed{z(t) = 0}.$$

Le mouvement a donc lieu dans le plan vertical  $(Oxy)$ , et en éliminant  $t$  on obtient l'équation

$$\text{cartésienne de la trajectoire : } y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x.$$

– Chute libre dans le champ de pesanteur, avec résistance de l'air

$$\text{Solution de l'équation différentielle vectorielle : } \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \tau \vec{g} + \vec{A} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{en posant } \tau = \frac{m}{h}.$$

La constante d'intégration  $\bar{A}$  s'obtient avec la condition initiale :

$$\bar{v}_0 = \tau \bar{g} + \bar{A} \text{ soit } \bar{A} = \bar{v}_0 - \tau \bar{g}, \text{ d'où } \bar{v}(M)_{\mathbb{R}} = \tau \bar{g} + (\bar{v}_0 - \tau \bar{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Quand  $t$  tend vers l'infini (c'est-à-dire  $t \gg \tau$ ), la vitesse tend vers une valeur limite  $\bar{v}_{\text{lim}} = \tau \bar{g} = \frac{m \bar{g}}{h}$  (verticale descendante, et indépendante des conditions initiales).

On intègre encore une fois pour obtenir la position :  $\overline{OM} = \tau \bar{g} t - \tau (\bar{v}_0 - \tau \bar{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \bar{B}$ .

À  $t = 0$  :  $\bar{0} = \bar{0} - \tau (\bar{v}_0 - \tau \bar{g}) + \bar{B}$  d'où  $\bar{B} = \tau (\bar{v}_0 - \tau \bar{g})$  et finalement :

$\overline{OM} = \tau \bar{g} t + \tau (\bar{v}_0 - \tau \bar{g}) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$ . Le mouvement est toujours dans le plan vertical ( $Oxy$ ), mais cette fois la trajectoire n'est pas une courbe simple.

– Pendule simple oscillant dans un plan vertical

Solution de l'équation différentielle  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$  :  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  ou bien

$$\theta(t) = \Theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Prenons par exemple la seconde forme, et cherchons les deux constantes d'intégration avec les conditions initiales. La position initiale  $M_0$  étant repérée par l'angle  $\theta_0$  et la vitesse initiale étant nulle :  $\theta(0) = \theta_0 = \Theta_m \cos \varphi$  et  $\dot{\theta}(0) = 0 = -\omega_0 \Theta_m \sin \varphi$ . Donc  $\sin \varphi = 0$  et on peut choisir  $\varphi = 0$  ; alors  $\cos \varphi = 1$  d'où  $\theta_0 = \Theta_m$ . Finalement :  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ .

(En utilisant la première forme de la solution, on aurait trouvé  $A = \theta_0$  et  $B = 0$ .)

### □ Méthode 11.5. Détermination de composantes de forces inconnues

Les projections du PFD permettent également de déterminer une force partiellement inconnue, notamment la tension d'un fil ou la réaction d'un support, lorsqu'on connaît le mouvement (dont on peut déduire les composantes de l'accélération) : il suffit alors d'utiliser les équations du mouvement où la force cherchée apparaît pour déterminer ses composantes.

Dans le cas d'un point matériel à l'équilibre, l'application du PFD et ses projections servent uniquement pour cette étape.

⇒ Exercices 11.10, 11.11, 11.13, 11.16, 11.18, 11.19

Dans le cas du pendule simple oscillant dans un plan vertical, le mouvement ayant été déterminé dans le cas de petits angles, la projection (1) du PFD écrit précédemment donne alors l'expression de la tension du fil :

$$T = mg \cos \theta + mL \dot{\theta}^2 \text{ soit } T = mg \cos[\theta_0 \cos(\omega_0 t)] + mL \omega_0^2 \theta_0^2 \sin^2(\omega_0 t).$$

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. La position d'un point matériel est déterminée par trois coordonnées.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Les forces exercées sur un point matériel dépendent du référentiel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La réaction d'un support est orthogonale au support si le contact se fait sans frottements.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La réaction d'un support a pour origine le poids de l'objet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La force de rappel exercée par un ressort idéal est proportionnelle à sa longueur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. La force de rappel exercée par un ressort, sur une masse accrochée à son extrémité, est toujours orientée de cette masse vers le ressort.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Une force de frottement fluide dépend de la vitesse de l'objet par rapport au fluide.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Le principe d'inertie définit le concept de référentiel galiléen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Le principe fondamental de la dynamique est valable dans tous les référentiels.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Pour appliquer le théorème de la quantité de mouvement à un système de points matériels, on ne prend pas en compte les forces intérieures.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

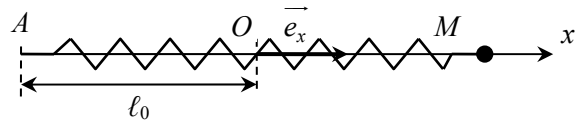
Dans tous les exercices, le référentiel terrestre est supposé galiléen et on prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## ■ Forces

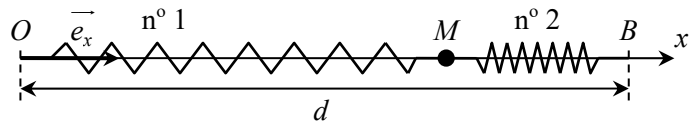
### □ Exercice 11.1. Forces de rappels de ressorts

Exprimer vectoriellement les tensions des différents ressorts dans les cas suivants, où l'objet  $M$  quasi ponctuel est repéré par son abscisse  $x = \overline{OM}$  sur l'axe  $(Ox)$ .

- $M$  est lié à un point fixe  $A$ , tel que  $\overline{AO} = \ell_0 \overline{e}_x$ , par un ressort idéal de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ .



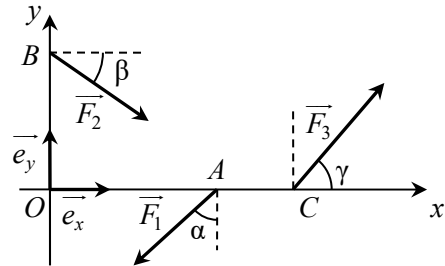
- $M$  se déplace entre l'origine  $O$  et le point  $B$  fixe tel que  $\overline{OB} = d \overline{e}_x$ .



$M$  est lié à l'origine  $O$  par un ressort idéal n° 1 de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , et au point  $B$  par un ressort n° 2, identique au ressort n° 1.

### □ Exercice 11.2. Projections de forces

Projeter chacune des trois forces ci-contre, c'est-à-dire donner ses composantes dans la base cartésienne  $(\overline{e}_x, \overline{e}_y, \overline{e}_z)$  en fonction de sa norme ( $F_1, F_2$  ou  $F_3$ ) et de l'angle  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$ .



### □ Exercice 11.3. Atome d'hydrogène simplifié

Une première étude de l'atome d'hydrogène consiste à envisager un électron en mouvement autour d'un proton fixe, les deux étant assimilés à des points matériels.

- Quelles sont les forces qui s'exercent sur l'électron dans ce modèle ?
- Donner un ordre de grandeur de ces forces. Conclure.
- Peut-on appliquer les lois de Newton à l'électron ?

*Données :* charge d'un proton  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  ; charge d'un électron  $-e$  ; distance moyenne proton-électron  $r = 53 \text{ pm}$  ; masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### □ Exercice 11.4. Débats en CPGE

Toto, élève en première année de CPGE, travaille son cours sur la mécanique des systèmes de points matériels et se demande s'il peut appliquer les théorèmes correspondants au système {Terre + Lune}. Manquant d'assurance, il en parle avec son camarade Lulu, qui lui, est en deuxième année.

Indiquer, dans chaque cas, qui a tort et qui a raison même partiellement, en étudiant la situation physique.

1. Toto pense qu'il n'est pas possible d'assimiler la Terre ou la Lune à des points matériels, compte tenu de leur taille. Lulu a déjà vu un exercice où c'était envisagé et pense donc que c'est possible.
2. Toto déclare que la force exercée par la Lune sur la Terre est négligeable par rapport à celle exercée par la Terre sur la Lune. Lulu pense qu'elles ont le même ordre de grandeur.
3. Lulu explique qu'en faisant l'inventaire des forces extérieures qui s'exercent sur le système {Terre + Lune}, ils pourront connaître le mouvement du centre de la Terre et celui du centre de la Lune.
4. Toto pense pouvoir étudier le mouvement de la Lune par rapport à la Terre en appliquant la deuxième loi de Newton dans le référentiel terrestre.

## ■ Chute libre avec ou sans frottement

### □ Exercice 11.5. Fusée\*

Une fusée balistique, assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est mise à feu à la surface de la Terre avec une vitesse  $\vec{V}_0$ .

On définit un repère  $Oxyz$  tel que  $O$  coïncide avec le point de départ de la fusée,  $(Oz)$  soit un axe vertical ascendant et  $(Ox)$  un axe horizontal. Le vecteur vitesse initial est dans le plan  $(Oxz)$  et fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. L'action de l'air sur la fusée est négligée.

1. a) Montrer que le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxz)$ , et établir l'équation de la trajectoire  $z = f(x)$ .  
b) Exprimer la portée (distance de  $O$  au point d'impact au sol) et la flèche (hauteur maximale atteinte) en fonction de  $g$ ,  $V_0$  et  $\alpha$ .  
c) Calculer la portée maximale et la valeur correspondante de la flèche pour  $V_0 = 1,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2. On suppose que  $V_0$  est fixée et on veut atteindre avec la fusée un point  $A$ . Calculer les deux valeurs possibles de l'angle  $\alpha$ . Application numérique :  $x_A = 73 \text{ km}$  et  $z_A = 20 \text{ km}$ .



### □ Exercice 11.6. Étude d'un mouvement par chronophotographie\*

On étudie le mouvement d'une balle de golf de masse  $m = 45 \text{ g}$  par chronophotographie : on pointe les positions successives de la balle, image par image. On utilise un système d'axes  $(Ox)$  (horizontal et dirigé dans le sens du mouvement) et  $(Oy)$  (vertical et ascendant), le point  $O$  coïncidant avec le moment où la balle quitte la main du lanceur.

On obtient le tableau de résultats ci-contre.

Position	$x$ (m)	$y$ (m)
0	0,000	0,000
1	0,032	0,117
2	0,060	0,219
3	0,093	0,308
4	0,116	0,382
5	0,153	0,434
6	0,185	0,466
7	0,218	0,485
8	0,250	0,485
9	0,278	0,466
10	0,315	0,429
11	0,343	0,373
12	0,375	0,308
13	0,407	0,219
14	0,440	0,117
15	0,468	0,000

1. Le standard vidéo utilisé est de 24 images par seconde.

a) Tracer les courbes  $x(t)$  et  $y(t)$  en utilisant un tableur ou une calculatrice.

b) Utiliser le tableur pour déterminer les courbes de tendance (équations de ces courbes).

2. On étudie à présent la vitesse.

a) Calculer, en utilisant les données du tableau, les composantes  $v_x$  et  $v_y$  du vecteur vitesse pour chaque position (justifier la méthode).

b) Tracer les courbes  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  et déterminer leur équation. Vérifier le lien avec les courbes tracées au 1.

c) Utiliser ces équations pour déterminer les composantes du vecteur accélération.

3. On compare maintenant les courbes obtenues avec les courbes théoriques.

a) Rappeler les expressions théoriques  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $a_x(t)$  et  $a_y(t)$  pour une chute libre, la balle étant lancée avec un vecteur vitesse  $\vec{V}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec  $(Ox)$ .

b) Calculer  $V_0$  et l'angle  $\alpha$ .

### □ Exercice 11.7. Coup franc\* \*

On étudie, dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe  $Oxyz$ , un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical  $(Oxy)$ . L'axe  $(Oy)$  est choisi suivant la verticale ascendante.

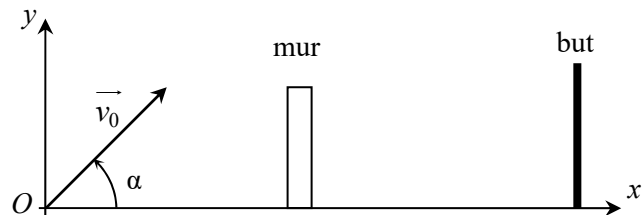


Photo L'Équipe

Le ballon, de masse  $m = 430$  g, est assimilé à un point matériel  $M$  posé sur le sol initialement en  $O$ . Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse

initiale  $\vec{v}_0$  de norme  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  et formant un angle  $\alpha$  de  $20^\circ$  avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a) Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

b) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

c) Le tir est-il cadré ?

2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force  $\vec{F} = -h\vec{v}$  où  $h$  est une constante positive de valeur  $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de  $M$  à chaque instant.

a) Déterminer les équations horaires en introduisant la constante  $\tau = \frac{m}{h}$ .

b) Donner l'équation de la trajectoire.

c) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

d) Le tir est-il cadré ?

### □ Exercice 11.8. Chute verticale \*

On lâche un objet sphérique de rayon  $r = 3 \text{ cm}$  et de masse volumique  $\mu = 1,7 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$  depuis une altitude  $h = 25 \text{ m}$  (comptée à partir du sol). On étudie le mouvement de cet objet dans le référentiel terrestre, muni d'un repère d'origine  $O$  correspondant au point de départ de l'objet et d'un axe vertical orienté vers le bas. Donnée : masse volumique de l'air :  $\mu_a = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

1. La poussée d'Archimède, que subit l'objet de la part de l'air, a pour norme le poids de l'air « déplacé » par la sphère. Montrer qu'elle est négligeable par rapport à son propre poids.

2. On suppose que l'objet n'est soumis qu'à son poids au cours de son mouvement.

a) Établir l'équation horaire  $z(t)$  du mouvement de l'objet.

b) En déduire la durée de sa chute.

3. On suppose à présent qu'en plus de son poids, l'objet est soumis au cours de sa chute à une force de frottements  $\vec{f} = -K\vec{v}$  (avec  $K = 0,020$  unité SI, et  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de l'objet).

a) Quelle est la dimension de  $K$  ? En déduire son unité SI.

b) Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v_z(t)$  de l'objet au cours de son mouvement.

c) Déterminer l'expression de  $v_z(t)$ . Montrer qu'il existe une vitesse limite.

d) Donner l'expression de  $z(t)$ .

4. Pour évaluer la durée de chute, on cherche la solution d'une équation de la forme  $\beta(t) = 0$ . On écrit donc le code suivant en Python, traduisant une méthode dichotomique.

```
import numpy as np

def dichotomie(f, a, b, epsilon = 10**(-4)) :
    if f(a)*f(b)>0 :
        return None # cas où il n'y a pas de solution
    u = a
    v = b
    while abs(v-u) > 2*epsilon:
        w = (u + v)/2
```

```

    if f(u)*f(w) <= 0 :
        v = w instruction 1
    else :
        u = w
    return (u + v)/2

```

```

def position(t):
    return 94.306*(t + 9.6613*(np.exp(-0.104*t)-1)) - 25 instruction 2
dicho(position,0,3)

```

- a) Donner l'expression de  $\beta(t)$ . Montrer que l'équation  $\beta(t) = 0$  admet une solution comprise entre  $t = 0$  et  $t = 3$ .
- b) Indiquer les instructions correspondant à instruction 1 et à instruction 2.
- c) L'exécution de ce code renvoie la valeur : 2.396026611328125. Quelle est la précision de la méthode dichotomique utilisée ?
- d) Quelle est la durée de chute en tenant compte des frottements ?

### □ Exercice 11.9. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère\*

Une goutte d'eau sphérique de rayon  $a$ , indéformable et de masse volumique  $\rho$ , tombe dans le champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  suivant un axe vertical  $Oz$  dirigé vers la bas. L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de traînée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation  $\vec{F} = -6\pi\eta \frac{a\vec{v}}{1 + \ell/a}$ . On négligera la poussée d'Archimède de l'air.

1. Exprimer la vitesse limite de chute de la goutte que l'on notera  $\vec{V}_{\text{lim}}$ .
2. On donne  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\ell = 0,07 \text{ } \mu\text{m}$  et  $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2$ .  
Calculer  $V_{\text{lim}}$  pour  $a = a_1 = 0,01 \text{ mm}$  puis pour  $a = a_2 = 0,1 \text{ mm}$ .
3. L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les résultats précédents, calculer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs  $a_1$  et  $a_2$ .
4. Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles de rayon  $a_2$  et d'épaisseur  $e = 0,1a_2$  ?

*D'après X-ESPCI-ENS*

## ■ Mouvement sur un support solide

### □ Exercice 11.10. Brique sur un plan incliné

On considère un plan incliné d'un angle  $\alpha = 20^\circ$  par rapport à l'horizontale. Une brique de masse  $m = 600 \text{ g}$  est lancée depuis le bas du plan vers le haut avec une vitesse  $\vec{v}_0$  de norme  $2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On utilise, pour étudier le mouvement, un axe  $(Ox)$  parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut et tel que  $O$  coïncide avec le départ de la brique.

1. On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements.
- a) Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de la montée.



b) Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

2. On suppose maintenant qu'il existe des frottements solides. La force de contact a donc la forme suivante :  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$  avec  $\vec{R}_t$  colinéaire et de sens contraire à la vitesse, et  $R_t = f \cdot R_n$  où  $f = 0,20$  est le coefficient de frottement (on confond ici le coefficient de frottement statique et le coefficient de frottement dynamique).

Répondre aux mêmes questions dans ce cas.

### □ Exercice 11.11. Descente à ski\*\*

Madame Michu descend une piste à ski, selon la ligne de plus grande pente faisant l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ , où  $\lambda$  est un coefficient constant positif et  $\vec{v}$  la vitesse de la skieuse.



On note  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par la neige, et  $f$  le coefficient de frottement dynamique tel que  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$ .

On choisit comme origine de l'axe  $(Ox)$  de la ligne de plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note  $(Oy)$  la normale à la piste dirigée vers le haut.

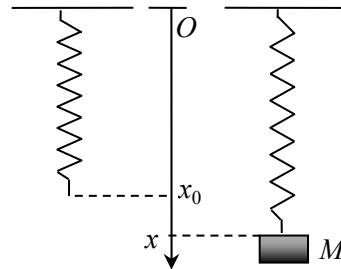
1. Calculer les normes de  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$ .
2. Calculer la vitesse et la position de la skieuse à chaque instant.
3. Montrer qu'elle atteint une vitesse limite  $v_\ell$ . Application numérique : calculer  $v_\ell$  avec  $\lambda = 8,8 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 45^\circ$  et  $f = 0,055$ .
4. Calculer littéralement et numériquement la date  $t_1$  où la skieuse a une vitesse égale à  $\frac{v_\ell}{2}$ .
5. À la date  $t_1$ , Madame Michu tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est multiplié par 20. Calculer la distance parcourue par Madame Michu, dans cette position peu glorieuse, avant de s'arrêter.

*D'après E3A-Polytech*

## ■ Oscillateurs à ressort

### □ Exercice 11.12. Oscillations verticales

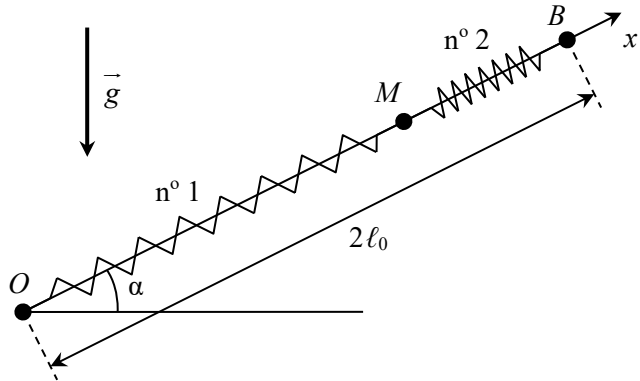
On considère le système ci-contre : une masse  $m$  est suspendue à un ressort vertical idéal, de masse négligeable et de raideur  $k$ . L'extrémité supérieure du ressort est fixe et attachée au point  $O$ . On utilise l'axe  $(Ox)$ , vertical et dirigé vers le bas pour repérer la position de l'extrémité libre du ressort par son abscisse  $x$ . Soit  $x_0$  la longueur à vide du ressort et  $x_{\text{éq}}$  sa longueur lorsque la masse  $m$  est accrochée à l'extrémité inférieure du ressort et est à l'équilibre.



1. Exprimer  $x_{\text{éq}}$  en fonction de  $m, g, k$  et  $x_0$ .
  2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $x$  lorsque la masse est en mouvement.
  3. À l'instant  $t = 0$ , la masse  $m$  est dans une position telle que la longueur du ressort est égale à  $x_{\text{éq}}$ . On lui communique alors une vitesse  $v_0$  verticale et dirigée vers le bas.
- a) Déterminer l'expression de  $x(t)$  en fonction des données du problème.  
 b) Exprimer la période  $T_0$  des oscillations.

□ **Exercice 11.13. Mobile entre deux ressorts \***

Un objet  $M$  de masse  $m$ , assimilé à un point matériel, est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige rectiligne, inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, et fixe par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  (supposé galiléen).  $M$  peut se déplacer entre l'origine  $O$  et un point fixe  $B$  tel que  $\overline{OB} = 2\ell_0 \overline{e_x}$ ; il sera donc repéré par son abscisse  $x$ .



$M$  est lié au point  $O$  par un ressort idéal n° 1, de coefficient de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , et il est également lié au point  $B$  par un ressort idéal n° 2, de même raideur  $k$  mais de longueur à vide nulle (c'est-à-dire négligeable devant  $\ell_0$ ).

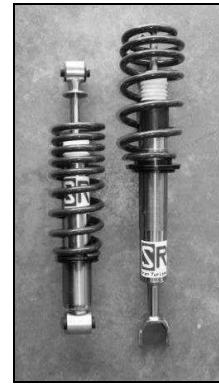
1. Faire une liste complète des forces appliquées à  $M$ , en indiquant précisément pour chacune d'elles quelles sont ses composantes dans une base cartésienne  $(\overline{e_x}, \overline{e_y}, \overline{e_z})$ . [Certaines de ces composantes peuvent être des inconnues a priori.]
  2. Déterminer l'abscisse  $x_{\text{éq}}$  de  $M$  lorsqu'il est à l'équilibre.
  3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$  lorsque  $M$  est en mouvement (on pourra faire apparaître  $x_{\text{éq}}$  dans cette équation différentielle).
  4. À l'instant initial  $t = 0$ , on lâche  $M$  à l'abscisse  $x_0 = x_{\text{éq}}$  avec une vitesse  $\overline{v}_0 = -v_0 \overline{e_x}$ .
- a) Déterminer complètement la solution de l'équation différentielle.  
 b) Quelle est la condition pour que  $M$  ne touche pas le point  $B$ ? Tracer alors la courbe de  $x$  en fonction de  $t$ , en supposant  $x_{\text{éq}} > \ell_0$ .
5. Déterminer la réaction de la tige sur  $M$  à tout instant.

### □ Exercice 11.14. Suspension de voiture

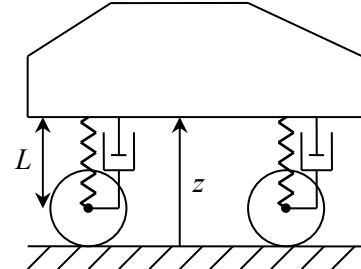
La suspension d'une voiture est assurée par quatre systèmes identiques indépendants, montés entre le châssis et chaque arbre de roue, et constitués chacun :

- d'un ressort hélicoïdal de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$  ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston, fixé parallèlement au ressort, exerçant une force de frottement visqueux linéaire de coefficient d'amortissement  $\lambda$ .

On suppose que la masse totale  $M$  (voiture et passagers) est toujours également répartie entre les quatre systèmes.



Les roues de rayon  $R$  sont considérées comme entièrement rigides. On n'envisage que des déplacements verticaux du châssis, repéré par son altitude  $z$  par rapport au sol ; la longueur commune des quatre ressorts est notée  $L$ .



1. Le véhicule étant immobile sans freins sur un sol horizontal, quelle est la longueur  $L_e$  des ressorts au repos et la « garde au sol »  $z_e$  du véhicule ?

2. Le châssis est abaissé d'une hauteur  $h$ , puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

a) Établir l'équation différentielle de la position  $z(t)$  du châssis par rapport au sol. On introduira

la grandeur  $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$  et un facteur de qualité  $Q$  dont on précisera l'expression.

b) L'amortisseur a été réglé de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible*, lorsque la masse  $M$  est seulement celle de la voiture (1100 kg). Quelle doit être la valeur de  $\lambda$  en fonction de  $M$  et  $k$  ?

c) Déterminer alors l'expression complète de la solution  $z(t)$  en fonction de  $z_e$ ,  $h$  et  $\omega_0$ .

d) Tracer l'allure de la courbe représentant l'évolution de  $z$  en fonction du temps.

3. La même expérience, avec les mêmes conditions initiales, est réalisée sur cette voiture avec à l'intérieur Madame Michu (90 kg), son mari (150 kg) et ses trois filles (80 kg chacune).

Que vaut alors le facteur de qualité ? Déterminer la nouvelle solution  $z(t)$ . Cette situation est-elle plus ou moins confortable que la précédente ?

*D'après E3A-Polytech*

### □ Exercice 11.15. Ressort à attache mobile

On considère une bille  $M$  de masse  $m$ , attachée à une extrémité d'un ressort horizontal ( $k, \ell_0$ ) selon l'axe ( $Ox$ ). Elle subit également une force de frottement visqueux linéaire  $\vec{F} = -h\vec{v}(M)$ .

On communique à l'autre extrémité  $A$  du ressort, à partir de l'instant  $t = 0$ , un mouvement oscillatoire :  $x_A(t) = A_m \cos(\omega t)$ .

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse  $x(t) = \overline{OM}(t)$  du point  $M$ .

2. Déterminer  $x(t)$  en régime permanent.

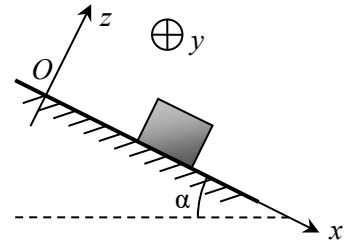
3. Le mouvement de  $M$  peut-il présenter un phénomène de résonance ? de filtrage ?

## ■ Équilibre d'un point matériel

### □ Exercice 11.16. Caisse sur un plan incliné Résolution de problème

Une caisse de masse  $m = 25$  kg est posée sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Il existe entre la caisse et le plan des frottements solides : la réaction du plan sur la caisse est donc de la forme  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ , avec une composante  $\vec{R}_t$  tangente au plan ; en l'absence de glissement, les normes de ces deux composantes sont liées par la relation  $R_t \leq f \cdot R_n$  où  $f = 0,45$  est le coefficient de frottement (statique).

Déterminer la valeur maximale  $\alpha_{\max}$  de l'angle  $\alpha$  pour que la caisse puisse rester immobile.



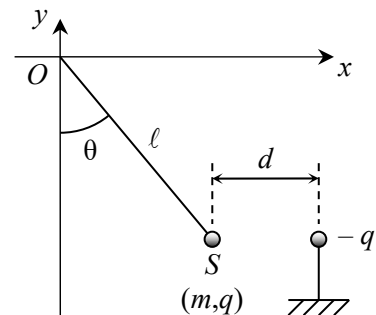
### □ Exercice 11.17. Pendule électrostatique Résolution de problème

Un pendule est constitué d'une petite sphère  $S$ , de masse  $m = 45$  g, attachée au bout d'un fil sans masse de longueur  $\ell$ .

On communique à cette sphère une charge électrique positive  $q$ , que l'on souhaite déterminer. D'autre part, une autre sphère est chargée avec une charge opposée  $-q$  et placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle  $\theta$ . On supposera que les deux sphères sont à la même hauteur.

Les valeurs mesurées sont les suivantes :  $\theta = 36^\circ$  ;  $d = 22$  cm . La permittivité de l'air est pratiquement égale à celle du vide :  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F · m<sup>-1</sup>.

Déterminer la valeur de la charge  $q$ .



### □ Exercice 11.18. Plateau et ressort\*

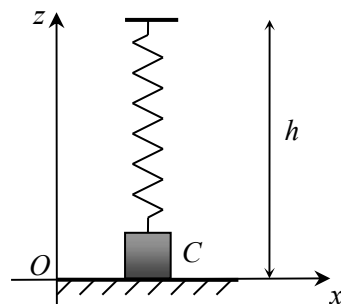
Un cube  $C$  d'arête  $a$ , de masse  $m$ , est accroché à un ressort linéaire de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Il est d'autre part posé sur un plateau horizontal immobile, coïncidant avec le plan  $(Oxy)$ .

L'autre extrémité du ressort est maintenue fixe, à une hauteur  $h$  au-dessus du plateau, et le ressort est vertical.

1. Faire la liste complète des forces s'exerçant sur le cube à l'équilibre, en précisant leurs composantes, connues ou inconnues.

2. Déterminer complètement la réaction du plateau sur le cube.

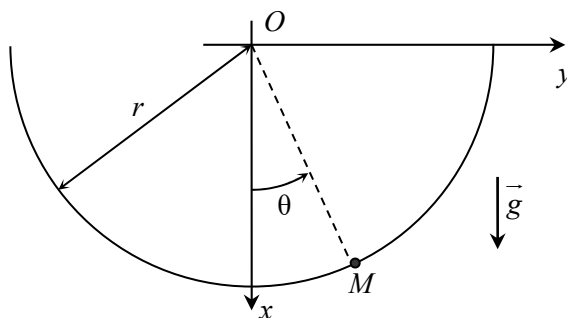
3. Montrer que cette situation n'est possible que si  $h$  est inférieure à une valeur  $h_{\max}$  que l'on déterminera. Que se passe-t-il si  $h > h_{\max}$  ?



## ■ Pendules simples

### □ Exercice 11.19. Oscillations d'un anneau sur un support circulaire\*

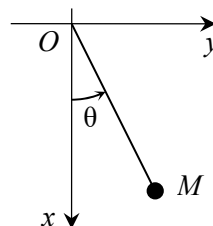
Un petit anneau, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est astreint à coulisser sans frottement le long d'une tige circulaire de centre  $O$  et de rayon  $r$ , située dans le plan vertical  $(Oxy)$ . La position de  $M$  sera repérée par l'angle  $\theta$  entre  $(Ox)$  et  $\overrightarrow{OM}$ . À la date  $t = 0$ , on lâche  $M$  sans vitesse initiale d'un angle  $\theta_0$ .



1. Appliquer la deuxième loi de Newton et la projeter dans la base cylindrique.
2. a) Établir une expression de  $\dot{\theta}^2$  en fonction de  $\theta$ , en intégrant l'une de ces projections (que l'on devra d'abord multiplier par  $\dot{\theta}$ ).
- b) En déduire l'expression de la réaction du support en fonction de  $\theta$  et des données du problème.
- c) À quel instant du mouvement la norme de cette réaction est-elle maximale ?
- 3) On suppose que l'angle  $\theta$  reste petit au cours du mouvement.
  - a) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .
  - b) Donner l'expression de  $\theta(t)$ .

### □ Exercice 11.20. Oscillations d'un pendule simple

Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , lié à l'extrémité d'un fil de longueur  $L$  et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point  $O$ . On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical  $(Oxy)$ , et on repère la position de  $M$  avec l'angle polaire  $\theta$  (voir figure), l'angle  $\theta$  restant toujours faible. À l'instant  $t = 0$ , on lâche la masse depuis un angle  $\theta_0$ , sans vitesse initiale.



Lorsque l'on enregistre expérimentalement  $\theta(t)$ , on constate que l'amplitude de  $\theta$  diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du point  $M$ , et  $\alpha$  une constante positive.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  et l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

2. a) À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

On supposera par la suite que cette condition est vérifiée et que l'angle  $\theta$  peut se mettre sous la forme :  $\theta(t) = A e^{-t/\tau} \cos(\Omega t + B)$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes et  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ .

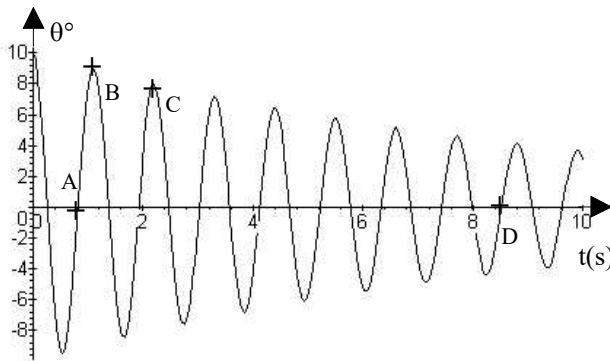
- b) Que représente  $\tau$  ?

3. On appelle **décroissement logarithmique** la quantité  $\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right)$ .

Exprimer  $\delta$  en fonction de  $T$  et  $\tau$ .

4. La figure ci-dessous représente les variations de  $\theta$  avec le temps. On précise les coordonnées de quatre points particuliers :

Points	A	B	C	D
$t$ (s)	0,53	1,10	2,20	8,25
$\theta$ (°)	0,00	8,95	8,02	0,00



La masse est  $m = 470$  g.

Calculer numériquement, à partir des valeurs expérimentales :

- le **décroissement logarithmique**  $\delta$  ;
- la **pseudo-période**  $T$  ;
- le **temps**  $\tau$  ;
- la **constante**  $\alpha$ .

## ■ Systèmes de points matériels

### □ Exercice 11.21. Toto lanceur de cailloux\*\*

Toto a attaché deux cailloux presque identiques (qu'on assimilera à deux points matériels de même masse  $m$ ), l'un à une extrémité d'une ficelle (de longueur  $2\ell$  et de masse négligeable) et l'autre au milieu de celle-ci. Il fait alors tourner l'ensemble, à la vitesse angulaire  $\omega$ , dans un plan horizontal, en le tenant par l'extrémité de la ficelle où il n'y a pas de caillou. À l'instant  $t = 0$ , il lâche la ficelle : seule la portion de ficelle entre les deux cailloux reste alors tendue.

1. Dans un premier temps on néglige l'action de la pesanteur.

- a) Quel est alors le mouvement du centre d'inertie  $G$  des deux cailloux ?
- b) Le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  (ayant  $G$  pour point fixe, et des axes de directions fixes dans le référentiel terrestre) est-il galiléen ?
- c) On suppose que le mouvement des cailloux dans  $\mathcal{R}^*$  reste dans un plan horizontal. Quelle est la forme de leurs trajectoires dans ce plan ?
- d) Faire un schéma dans ce plan, avec la position initiale et une position ultérieure quelconque (a priori). Déterminer l'évolution de la vitesse angulaire des deux cailloux.

2. Maintenant on tient compte de la pesanteur.

- a) Déterminer le mouvement de  $G$ .
- b) Le référentiel barycentrique est-il galiléen ?

### □ Exercice 11.22. Oscillations de deux points élastiquement liés\*

Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont fixées aux extrémités  $M_1$  et  $M_2$  d'un ressort sans masse de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Ces masses, assujetties à glisser sans frottements sur un axe horizontal  $(Ox)$ , sont initialement à l'équilibre,  $M_1$  étant en  $O$ . À l'instant  $t = 0$ , un choc communique à la masse  $m_1$  une vitesse  $v_0 \overline{e_x}$ .

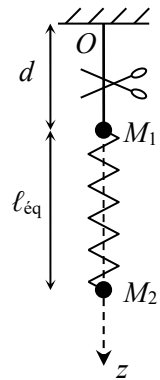
1. Faire un schéma où apparaissent toutes les forces appliquées aux deux points, en distinguant les forces extérieures et intérieures.
2. Montrer que le système est pseudo-isolé et déterminer le mouvement de son barycentre  $G$ .
3. a) Le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  du système, lié au repère  $(Gxyz)$ , est-il galiléen ?  
b) Appliquer le PFD à chacune des deux masses, et en déduire l'évolution temporelle de la longueur  $\ell$  du ressort.

### □ Exercice 11.23. Chute d'un ressort vertical\*

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire, supposé galiléen, on définit un repère  $(Oxyz)$  avec l'axe  $(Oz)$  vertical descendant.

Deux masses ponctuelles identiques  $m$  sont attachées aux extrémités d'un ressort idéal (raideur  $k$ , longueur à vide  $\ell_0$ ). Initialement le système est suspendu en équilibre par un fil, de longueur  $d$ , reliant une des deux masses au point fixe  $O$  (origine des  $z$ ).

1. Quelle est la longueur initiale  $\ell_{\text{eq}}$  du ressort ?  
À l'instant  $t = 0$ , on coupe le fil.
2. Déterminer alors le mouvement du centre d'inertie  $G$  du système.
3. Appliquer le PFD à chacune des deux masses, et en déduire l'évolution temporelle de la longueur  $\ell$  du ressort.



## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 11.7.* Questions 1.b et c : les abscisses du mur et du but étant connues, comparer leurs hauteurs à l'ordonnée du ballon pour ces abscisses.

*Exercice 11.11.* Obtenir d'abord la réaction normale avec une projection du PFD.

*Exercice 11.12.* Appliquer rigoureusement la formule générale pour établir l'expression de la tension du ressort.

*Exercice 11.16.* Déterminer les normes des deux composantes de la réaction du plan incliné, puis appliquer la formule donnée (loi de Coulomb).

*Exercices 11.14 et 11.20.* À partir de la question 2, remarquer l'analogie avec un circuit *RLC* libre et utiliser les connaissances et méthodes du chapitre 5.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai	vrai	faux	vrai

4. Elle a pour origine les interactions microscopiques au niveau des surfaces en contact.
5. Elle est proportionnelle à son *allongement* algébrique, c'est-à-dire à la différence entre sa longueur (actuelle) et sa longueur au repos.
6. Elle va de la masse vers le ressort s'il est étiré, mais en sens contraire s'il est comprimé.
9. Il est valable seulement dans les référentiels galiléens.

### □ Les erreurs classiques

- Il faut un référentiel galiléen pour appliquer le PFD ou TQM : ce sera toujours le cas dans ce chapitre, mais ne pas oublier de le préciser systématiquement.
- La troisième loi peut sembler surprenante (la Lune et la Terre exercent l'une sur l'autre une force de même intensité), mais dans un inventaire de forces, seules les forces exercées *par* l'extérieur *sur* le point considéré interviennent (si on étudie la Terre, la force qu'elle exerce sur la Lune n'a aucune importance).
- Ne pas oublier que l'Univers est à trois dimensions et non deux... Ainsi, même si on fait un schéma plan, il faut toujours envisager ce qui se passe dans la direction orthogonale au plan de figure (mouvement ou forces). Le PFD sera donc toujours projeté a priori sur *trois* vecteurs unitaires, mais dans certains cas on constatera que l'une des projections n'apporte aucune information.
- La réaction normale d'un support modélisé par une courbe comporte a priori deux composantes sur une base. Par exemple, si c'est une tige assimilée à l'axe  $(Ox)$ , la réaction normale est définie par deux composantes selon  $\overline{e}_y$  et  $\overline{e}_z$  : il est hors de question de « deviner » que l'une de ces composantes est nulle, il faut la *déterminer* avec le PFD... et voir si elle est vraiment nulle !
- L'autre erreur classique sur la réaction d'un support est l'affirmation systématique selon laquelle « elle compense le poids »... Ces deux forces ont des origines totalement indépendantes, et elles ne s'annulent que dans le cas particulier où le support est horizontal, sans frottement, immobile dans un référentiel galiléen et en l'absence d'autre force verticale : autant oublier ce pseudo-théorème !



# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 11.1

1. La longueur du ressort est  $\ell_0 + x$  et le vecteur unitaire  $\vec{e}_{r \rightarrow p}$  est  $\vec{e}_x$ , donc la formule générale  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r \rightarrow p}$  donne  $\vec{T} = -k(\ell_0 + x - \ell_0)\vec{e}_x$  soit  $\boxed{\vec{T} = -k x \vec{e}_x}$ .

2. Pour le ressort n° 1 :  $\vec{e}_{r1 \rightarrow p} = \vec{e}_x$ ,  $\ell_1 = x$  donc  $\boxed{\vec{T}_1 = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x}$ .

Pour le ressort n° 2 :  $\vec{e}_{r2 \rightarrow p} = -\vec{e}_x$ ,  $\ell_2 = \overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM} = d - x$  donc  $\vec{T}_2 = -k(d - x - \ell_0)(-\vec{e}_x)$  soit  $\boxed{\vec{T}_2 = +k(d - x - \ell_0)\vec{e}_x}$ .

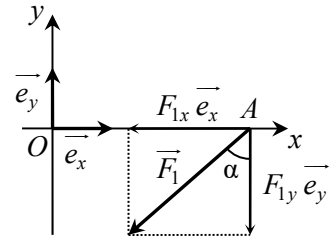
## Exercice 11.2

– Les deux composantes de  $\vec{F}_1$  sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sont négatives car elles vont en sens inverse de ces deux vecteurs unitaires. La composante sur  $\vec{e}_x$  correspond au côté opposé à l'angle  $\alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{|F_{1x}|}{F_1} \text{ d'où } F_{1x} = -F_1 \sin \alpha.$$

La composante sur  $\vec{e}_y$  correspond alors au côté adjacent à  $\alpha$  :

$$\cos \alpha = \frac{|F_{1y}|}{F_1} \text{ d'où } F_{1y} = -F_1 \cos \alpha. \text{ Finalement : } \boxed{\vec{F}_1 = -F_1 \sin \alpha \vec{e}_x - F_1 \cos \alpha \vec{e}_y}.$$



– De même pour  $\vec{F}_2$  : composante positive sur  $\vec{e}_x$ , négative sur  $\vec{e}_y$  ;  $\cos \beta = \frac{|F_{2x}|}{F_2}$  d'où

$$F_{2x} = +F_2 \cos \beta ; \sin \beta = \frac{|F_{2y}|}{F_2} \text{ d'où } F_{2y} = -F_2 \sin \beta. \text{ Finalement : } \boxed{\vec{F}_1 = +F_2 \cos \beta \vec{e}_x - F_2 \sin \beta \vec{e}_y}.$$

– Pour  $\vec{F}_3$  : les deux composantes sont positives ;  $\cos \gamma = \frac{|F_{3x}|}{F_3}$  d'où  $F_{3x} = +F_3 \cos \gamma$  ;

$$\sin \gamma = \frac{|F_{3y}|}{F_3} \text{ d'où } F_{3y} = +F_3 \sin \gamma. \text{ Finalement : } \boxed{\vec{F}_1 = +F_3 \cos \gamma \vec{e}_x + F_3 \sin \gamma \vec{e}_y}.$$

## Exercice 11.3

1. L'électron est soumis à son poids (si on suppose que l'atome se trouve sur Terre) et à la force électrique exercée par le proton.

*✎ On pourrait envisager de tenir compte aussi de l'attraction gravitationnelle exercée par le proton, mais elle serait elle-même infiniment plus faible (plus exactement,  $10^{51}$  fois plus faible) que celle de la Terre, c'est-à-dire le poids.*

2.  $P = mg = 9,1 \cdot 10^{-30} \text{ N}$  et  $F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ .

3. On constate que  $F_e \gg P$ . On pourra négliger le poids par rapport à la force électrique dans l'étude du mouvement de l'électron.

### Exercice 11.4

1. Lulu a raison : il est possible d'assimiler la Terre à un point matériel placé en son centre de masse, et affecté de la masse totale de la Terre. En appliquant la deuxième loi de Newton à ce point, on aura accès aux équations du mouvement du centre de masse de la Terre.

*✎ En revanche, on ne peut pas étudier le mouvement d'un autre point de la Terre.*

2. Toto commet une grave erreur, et Lulu est en dessous de la vérité. Ces deux forces ne sont pas « du même ordre de grandeur », elles sont *rigoureusement égales* en norme ! On le déduit de la troisième loi de Newton (principe des interactions).

3. Non, en effectuant le bilan des forces extérieures qui s'exercent sur le système {Terre + Lune}, ils pourront connaître le mouvement du centre de masse du système, mais pas le mouvement du centre de chaque planète.

4. Oui, il faut faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur la Lune et appliquer la deuxième loi de Newton à la Lune dans le référentiel terrestre. On obtiendra ainsi le mouvement du centre d'inertie de la Lune.

*✎ Il faut supposer que le référentiel terrestre est galiléen. En réalité, le référentiel le plus adapté pour étudier un mouvement autour de la Terre est le référentiel géocentrique, dans lequel l'axe des pôles est fixe, mais qui ne suit pas la Terre dans son mouvement de rotation.*

### Exercice 11.5

1.a) On étudie la fusée, assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La fusée n'étant, au cours de son mouvement, soumise qu'à son poids, la deuxième loi de Newton donne :  $\sum \vec{F} = m\vec{g} = m\vec{a}(M)_{\text{R}}$  d'où  $\vec{a}(M)_{\text{R}} = \vec{g} = \text{cte}$ .

Projections sur la base cartésienne :  $\ddot{x} = 0$ ,  $\ddot{y} = 0$ ,  $\ddot{z} = -g$ .

On intègre deux fois par rapport au temps :  $\dot{x} = V_0 \cos \alpha$ ,  $\dot{y} = 0$  et  $\dot{z} = -gt + V_0 \sin \alpha$

puis  $x(t) = (V_0 \cos \alpha)t$ ,  $y(t) = 0$  et  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t$ .

Comme  $y(t) = 0$ , le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxz)$ . On obtient l'équation cartésienne en

éliminant le temps  $t$ , d'où :  $z(x) = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$ .

**b)** La portée est obtenue en posant  $z(p) = 0$  soit  $-\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} p^2 + (\tan \alpha) p$ . La solution non nulle est :

$$p = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

*L'autre solution,  $p = 0$ , correspond au départ de l'objet en  $O$ .*

Quant à la flèche, elle correspond au maximum de la trajectoire, soit, au moment où la composante  $\dot{z}$  s'annule, ce qui correspond à la date  $t_f = \frac{V_0 \sin \alpha}{g}$ . On remplace donc cette date

dans l'expression de  $z(t)$  pour obtenir la flèche :

$$f = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

**c)** La portée maximale est obtenue pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  :  $p_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$ . AN  $p_{\max} = 100 \text{ km}$ .

La flèche est alors :  $f = \frac{V_0^2}{4g}$ . AN  $f = 26 \text{ km}$ .

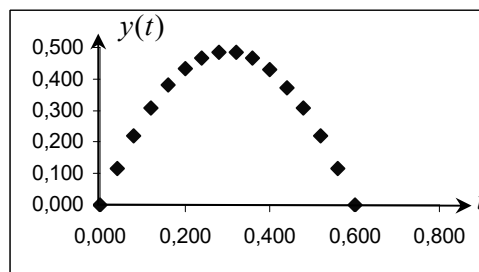
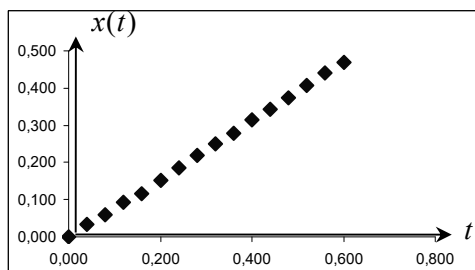
**2.** Les coordonnées de  $A$  doivent vérifier l'équation de la trajectoire :

$$z_A = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x_A^2 + (\tan \alpha) x_A, \text{ soit } \tan^2 \alpha - \frac{2V_0^2}{gx_A} \tan \alpha + \left[ 1 + \frac{2V_0^2 z_A}{gx_A^2} \right] = 0.$$

Avec les valeurs numériques fournies, cette équation devient :  $\tan^2 \alpha - 2,8 \tan \alpha + 1,8 = 0$ . Elle admet deux solutions :  $\tan \alpha_1 = 0,96$  soit  $\alpha_1 = 44^\circ$ , et  $\tan \alpha_2 = 1,8$  soit  $\alpha_2 = 61^\circ$ .

### Exercice 11.6

**1. a)** Le standard vidéo utilisé montre qu'il s'écoule 0,042 s entre deux images. On peut donc tracer les deux courbes :

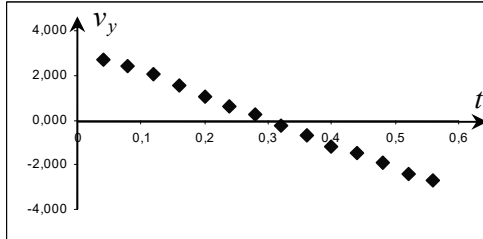
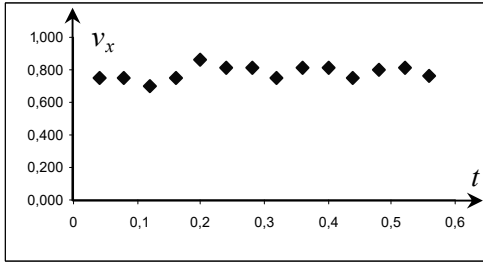


**b)** En utilisant le tableur, on obtient les équations des courbes de régression :

$$x(t) = 0,76t \text{ et } y = -5,0t^2 + 3,2t.$$

**2. a)**  $v_x(t) \approx \frac{x(t+\tau) - x(t-\tau)}{2\tau}$  et  $v_y(t) \approx \frac{y(t+\tau) - y(t-\tau)}{2\tau}$  avec  $\tau = 0,042 \text{ s}$ .

b)



Date (s)	$v_x$ (m·s <sup>-1</sup> )	$v_y$ (m·s <sup>-1</sup> )
0		
0,04166667	0,753	2,738
0,08333333	0,753	2,388
0,125	0,698	2,038
0,16666667	0,755	1,575
0,20833333	0,863	1,050
0,25	0,813	0,638
0,29166667	0,813	0,238
0,33333333	0,750	-0,238
0,375	0,813	-0,700
0,41666667	0,813	-1,163
0,45833333	0,750	-1,513
0,5	0,800	-1,925
0,54166667	0,813	-2,388
0,58333333	0,763	-2,738
0,625		

En utilisant le tableur, on trouve :  $v_x = 0,8$  et  $v_y = -10,3t + 3,2$  en m·s<sup>-1</sup>.

On vérifie qu'on a bien  $v_x = \frac{dx}{dt}$  et  $v_y = \frac{dy}{dt}$ .

c) Sachant que  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  et  $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ , on obtient  $a_x = 0$  et  $a_y = -10,3 \text{ m·s}^{-2}$ .

*L'accélération verticale diffère de 5 % de la valeur connue (g).*

3. a)  $\ddot{x} = 0$ ,  $\dot{x} = V_0 \cos \alpha$ ,  $x = (V_0 \cos \alpha)t$  et  $\ddot{y} = -g$ ,  $\dot{y} = -gt + V_0 \sin \alpha$ ,  $y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin \alpha)t$ .

b) En identifiant les expressions théoriques et expérimentales, on obtient  $V_0 \cos \alpha = 0,77$  et

$V_0 \sin \alpha = 3,2$ . Alors  $V_0 = \sqrt{0,77^2 + 3,2^2}$  soit  $V_0 = 3,3 \text{ m·s}^{-1}$  et  $\alpha = \arctan\left(\frac{3,2}{0,77}\right) = 76^\circ$ .

### Exercice 11.7

1. a) La seule force qui s'exerce sur le ballon au cours du mouvement étant son poids, on en déduit que  $\vec{a} = \vec{g}$  en utilisant la deuxième loi de Newton.

Ceci entraîne que  $\ddot{x} = 0$ , puis  $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ , puis  $x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$  pour le mouvement sur l'axe

(Ox), et  $\ddot{y} = -g$ , puis  $\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$ , puis  $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \alpha)t$  en projection sur l'axe

(Oy). L'équation de la trajectoire, dans le plan (Oxy) est donc :

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha) x.$$

✎ On pourrait vérifier qu'il n'y a pas de mouvement sur (Oz).

**b)** Le ballon passe au-dessus du mur si  $y(x_{\text{mur}}) \geq 1,90$  m. AN  $y(x_{\text{mur}}) = 2,17$  m, donc le ballon passe au-dessus du mur.

**c)** Le tir est cadré si  $y(x_{\text{but}}) \leq 2,44$  m. AN  $y(x_{\text{but}}) = 1,73$  m, donc le tir est cadré.

**2. a)** On prend maintenant en compte la force de frottement  $\vec{F}$ , ce qui donne, en appliquant la deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ . Projections sur (Ox) et (Oy) (en supposant toujours qu'il n'y a pas de mouvement sur (Oz)) :  $m\ddot{x} = -h\dot{x}$  (1) et  $m\ddot{y} = -mg - h\dot{y}$  (2).

(1) s'écrit aussi  $v_x + \tau \frac{dv_x}{dt} = 0$  et admet une solution du type  $Ae^{-t/\tau}$ , où A est une constante qui se détermine par la condition  $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$  : on obtient  $v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}$  (3).

(2) s'écrit  $v_y + \tau \frac{dv_y}{dt} = -g\tau$  et admet pour solution  $Be^{-t/\tau} + C$  où B est une constante à déterminer par les conditions initiales et C une solution particulière de (2).

En cherchant C sous la forme d'une constante, on trouve  $C = -g\tau$ , puis en utilisant la condition  $v_y(0) = V_0 \sin \alpha$ , on trouve  $B = V_0 \sin \alpha + g\tau$ , ce qui donne  $v_y(t) = [v_0 \sin \alpha + g\tau]e^{-t/\tau} - g\tau$  (4).

On intègre alors (3) et (4) en tenant compte des conditions initiales  $x(0) = y(0) = 0$  :

$$x(t) = v_0 \tau \cos \alpha [1 - e^{-t/\tau}] \quad \text{et} \quad y(t) = (v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t.$$

☞ Les constantes d'intégrations ne sont pas toujours nulles !

**b)** On utilise la première équation pour exprimer t :  $t = -\tau \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right)$  et on reporte cette

expression dans la deuxième :  $y(x) = \left( \tan \alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} \right) x + g\tau^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right)$ .

**c)** On calcule  $y(x_{\text{mur}}) = 2,17$  m et le ballon passe donc au-dessus du mur.

**d)**  $y(x_{\text{but}}) = 1,73$  m : le tir est cadré. On constate que les frottements ont peu d'influence sur ce mouvement (car il n'est pas très rapide donc la force de frottement est restée assez faible).

### Exercice 11.8

**1.** On calcule le poids  $P = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu g = 1,9$  N et la poussée d'Archimède  $\Pi = \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_a g = 1,1$  mN et on constate que la poussée d'Archimède représente moins de 0,1 % du poids.

**2. a)** Au cours de la chute libre, l'objet n'est soumis qu'à son poids et l'application de la deuxième loi de Newton entraîne  $\vec{a} = \vec{g}$ . En tenant compte des conventions d'orientations et des conditions initiales, on intègre deux fois :  $\ddot{z} = g \rightarrow \dot{z} = gt \rightarrow z(t) = \frac{1}{2}gt^2$ .

**b)** La durée de chute est la date  $t_c$  à laquelle l'objet touche le sol, donc telle que  $z(t_c) = h$ .

On en déduit alors simplement  $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . AN  $t_c = 2,3 \text{ s}$ .

**3. a)** Analyse dimensionnelle :  $[K] = \frac{[F]}{[V]} = \frac{[M \cdot L \cdot T^{-2}]}{[L \cdot T^{-1}]}$  soit  $[K] = [M \cdot T^{-1}]$  donc son unité SI est le  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**b)** La deuxième loi de Newton s'écrit :  $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$ . On le projette sur l'axe  $(Oz)$  :

$$mg - K\dot{z} = m\ddot{z}, \text{ ou encore, sachant que } \dot{z} = v_z \text{ et } \ddot{z} = \frac{dv_z}{dt}, \quad \frac{dv_z}{dt} + \frac{K}{m}v_z = g.$$

⇒ Méthode 11.1

**c)** La solution de cette équation, avec la CI  $v_z(0) = 0$ , est  $v_z(t) = \frac{mg}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right]$ .

⇒ Méthode 11.2

La vitesse limite est  $v_{im} = \lim_{t \rightarrow \infty} (v_z(t)) = \frac{mg}{K} = 94 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

☛ Cette valeur élevée n'est en rien étonnante car les frottements sont faibles ; d'autre part l'existence d'une vitesse limite n'implique pas que celle-ci sera atteinte au cours de la chute, ce qui, ici est très improbable vu la hauteur de chute.

**d)** En intégrant cette expression par rapport au temps, on obtient  $z(t) = \frac{mg}{K} \left[ t + \frac{m}{K} e^{-\frac{K}{m}t} \right] + B$  où

$B$  est une constante à déterminer en utilisant la condition initiale  $z(0) = 0$ . Après calcul,

$$B = -\frac{m^2g}{K^2} \text{ et } z(t) = \frac{mg}{K} \left[ t + \frac{m}{K} e^{-\frac{K}{m}t} - \frac{m}{K} \right].$$

☛ Ici, la constante d'intégration n'est pas nulle, bien que la fonction soit nulle à l'instant initial. Il ne faut donc pas annuler aveuglément une constante d'intégration parce que « ça fait zéro », mais toujours appliquer rigoureusement les conditions initiales.

**4. a)**  $\beta(t) = z(t) - h = 94,306 \left[ t + 9,6613(e^{-0,104t} - 1) \right] - 25$ . On remarque que la fonction  $\beta(t)$  est continue, que  $\beta(0) = -25$  et  $\beta(3) = 13,7$ . Il existe donc une valeur  $t_c$  comprise entre  $t = 0$  et  $t = 3$  telle que  $\beta(t_c) = 0$ .

**b)** Instruction 1 :  $v = w$

À chaque boucle, on divise par 2 l'intervalle dans lequel on cherche la solution, donc on modifie l'une des deux bornes de l'intervalle.

Instruction 2 :  $94.306*(t + 9.6613*(np.exp(-0.104*t)-1)) - 25$

La fonction  $\text{position}(t)$  doit renvoyer la valeur de  $\beta(t)$ .

**c)** La fonction  $\text{dicho}(f,a,b,\text{epsilon})$  renvoie la solution de l'équation  $f(t)=0$ , recherchée dans l'intervalle  $[a,b]$ , à  $\epsilon$  près. Ici la précision est par défaut de  $10^{-4}$ .

**d)** La précision déterminée à la question précédente est celle de la méthode dichotomique, laquelle repose sur les valeurs de l'énoncé, qui sont connues avec 2 chiffres significatifs. C'est avec cette précision qu'on peut connaître la durée de chute :  $t_c = 2,4 \text{ s}$ .

### Exercice 11.9

1. PFD appliqué à la goutte d'eau, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :  $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$ .

On peut l'écrire sous la forme  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta a}{m(1+\ell/a)}\vec{v} = \vec{g}$ . La vitesse limite est obtenue quand  $\frac{d\vec{v}}{dt}$

s'annule et donc  $\vec{V}_{\text{lim}} = \frac{m}{6\pi\eta a} \left(1 + \frac{\ell}{a}\right) \vec{g} = \frac{2}{9} \frac{\rho a^2}{\eta} \left(1 + \frac{\ell}{a}\right) \vec{g}$ .

2. AN pour  $a_1$ ,  $V_{\text{lim}1} = 1,3 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  et pour  $a_2$ ,  $V_{\text{lim}2} = 1,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. Le temps de transit est donné par  $t = \frac{h}{V_{\text{lim}}}$ . AN pour  $a_1$ ,  $t_1 = 6,2 \cdot 10^5 \text{ s} = 7 \text{ jours}$  et pour  $a_2$ ,

$t_2 = 6,2 \cdot 10^3 \text{ s} = 1,7 \text{ h}$ .

4. L'épaisseur  $e$  de la bulle étant faible par rapport au rayon, on peut estimer le volume de l'eau qui la constitue par la formule  $4\pi a^2 e$ , ce qui permet de calculer sa masse en négligeant celle de l'air enfermé. Cela donne une vitesse limite  $V_{\text{lim}} = \frac{2}{3} a_2 \frac{\rho g e}{\eta} \left(1 + \frac{\ell}{a}\right) = 0,38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le

temps de transit est alors  $t = 2,1 \cdot 10^4 \text{ s} = 6 \text{ h}$ .

### Exercice 11.10

1. **a)** La brique est soumise à son poids  $\vec{P} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$  et à la réaction  $\vec{R}$  du support, orthogonale à ce dernier soit  $\vec{R} = R_y \vec{e}_y$ .

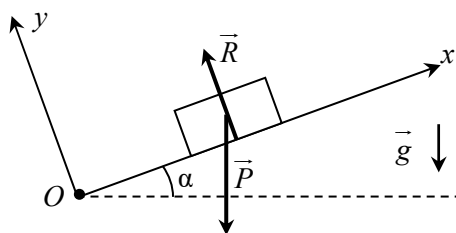
On applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}.$$

Projection sur l'axe  $(Ox)$  :  $\ddot{x} = -g \sin \alpha$ .

On intègre deux fois cette expression avec les conditions initiales  $\dot{x}(0) = v_0$  et  $x(0) = 0$  :

$$\dot{x}(t) = -(g \sin \alpha)t + v_0 \quad \text{puis} \quad x(t) = -\frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + v_0 t.$$



*✎ La projection sur (Oy), donnerait la valeur de la réaction, celle sur (Oz) n'apporte aucune information.*

**b)** La date d'arrêt de la brique est telle que  $\dot{x}(t_a) = 0$ , soit  $t_a = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$  et la distance parcourue par la brique jusqu'à son arrêt est  $d = x(t_a) = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}$ . AN  $t_a = 0,71 \text{ s}$  et  $x(t_a) = 0,86 \text{ m}$ .

**2.** Dans ce cas, la deuxième loi de Newton s'écrit de la même façon, mais la projection sur (Ox) inclut la composante tangentielle de  $\vec{R}$ , soit  $R_x = -|R_t| = -f \cdot |R_n| = -f \cdot R_y$ .

On obtient donc :  $-mg \sin \alpha + R_x = m\ddot{x}$  et on aura, par ailleurs, besoin de la projection sur (Oy) :  $-mg \cos \alpha + R_y = m\ddot{y} = 0$  (pas de mouvement selon cette direction).

On en déduit  $R_y = mg \cos \alpha$ , d'où  $\ddot{x} = -(\sin \alpha + f \cos \alpha)g$  puis on intègre deux fois avec les mêmes conditions initiales :

$$\dot{x}(t) = -(\sin \alpha + f \cos \alpha)gt + v_0 \quad \text{et} \quad x(t) = -\frac{1}{2}(\sin \alpha + f \cos \alpha)gt^2 + v_0 t.$$

La date d'arrêt est définie de la même façon, soit  $t'_a = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$  et la distance parcourue est  $d' = x(t'_a) = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}$ . AN  $t'_a = 0,46 \text{ s}$  et  $d' = 0,55 \text{ m}$ .

*✎ Comme on pouvait le prévoir, les frottements ralentissent encore plus la brique et elle s'arrête plus tôt que dans le premier cas.*

### Exercice 11.11

**1.** La deuxième loi de Newton, appliquée à la skieuse dans le référentiel terrestre galiléen, s'écrit :  $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$ . En projetant cette relation sur l'axe (Oy), on obtient  $-mg \cos \alpha + N = 0$  et donc  $N = mg \cos \alpha$ , puis  $T = f mg \cos \alpha$ .

⇒ Méthode 11.2

**2.** La même relation vectorielle projetée sur (Ox) donne  $mg \sin \alpha - \lambda \dot{x} - f mg \cos \alpha = m\ddot{x}$  en notant  $x$  l'abscisse de la skieuse à chaque instant, comptée par rapport à sa position de départ.

On peut écrire cette équation différentielle sous la forme  $\ddot{x} + a\dot{x} = b$  avec  $a = \frac{\lambda}{m}$  et

$b = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . La solution est donc  $\dot{x}(t) = \frac{b}{a} + Ke^{-at}$  où  $K$  est une constante qui se

détermine par les conditions initiales :  $\dot{x}(0) = \frac{b}{a} + K = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{b}{a}$ .

Donc 
$$\dot{x}(t) = v_x(t) = \frac{mg}{\lambda}(\sin \alpha - f \cos \alpha) \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right).$$

⇒ Méthode 11.2



$x(t)$  est une primitive de cette fonction, avec  $x(0) = 0$ . On obtient :

$$x(t) = \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha) \left( t + \frac{m}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{m}{\lambda} \right).$$

☛ Il faut déterminer rigoureusement la constante d'intégration qui, ici encore, n'est pas nulle.

3. La vitesse tend vers une valeur limite  $v_\ell = \frac{mg}{\lambda} (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . AN  $v_\ell = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

4. La vitesse pouvant également s'écrire  $v_x(t) = v_\ell \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right)$ , on cherche la date  $t_1$  telle que

$$v_x(t_1) = \frac{v_\ell}{2}, \text{ soit } 1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t_1} = \frac{1}{2}, \text{ ou } t_1 = \frac{m}{\lambda} \ln 2. \text{ AN } t_1 = 6,3 \text{ s}.$$

5. On choisit une nouvelle origine des temps et de l'axe : à  $t' = 0$ ,  $x'(0) = 0$  et  $v_x(0) = \frac{v_\ell}{2}$ . On

applique alors la deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$ , que l'on projette sur  $(Ox)$  :

$$mg \sin \alpha - 20f mg \cos \alpha = m\ddot{x}' \text{ et } \ddot{x}' = g \sin \alpha - 20f g \cos \alpha = -a.$$

On en déduit :  $\dot{x}'(t) = -at' + \frac{v_\ell}{2}$  et  $x'(t') = -\frac{a}{2}t'^2 + \frac{v_\ell}{2}t'$ . La vitesse s'annule pour  $t'_2 = \frac{v_\ell}{2a}$  et la

distance parcourue avant l'arrêt final est  $x'(t'_2) = \frac{v_\ell^2}{8g(20f \cos \alpha - \sin \alpha)}$ . AN  $x'(t'_2) = 650 \text{ m}$ .

### Exercice 11.12

1. La masse est soumise à son poids  $\vec{P} = +mg\vec{e}_x$  et à la force de rappel  $\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x$  du ressort. À l'équilibre, on peut écrire le PFD :  $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$ . Projection sur l'axe  $(Ox)$  :

$$-k(x_{\text{éq}} - x_0) + mg = 0, \text{ et on obtient } x_{\text{éq}} = x_0 + \frac{mg}{k}.$$

2. On applique à nouveau la deuxième loi de Newton à un instant quelconque du mouvement

où la longueur du ressort est  $x$  :  $-k(x - x_0) + mg = m\ddot{x}$ , soit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

3. a) Cette équation différentielle admet une solution du type  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + B) + x_{\text{éq}}$ ,  $A$  et  $B$  étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales :  $x(0) = A \cos B + x_{\text{éq}} = x_{\text{éq}}$  donc

$$\cos B = 0 \text{ et on peut prendre } B = \frac{\pi}{2}; \text{ et } \dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin B = -\omega_0 A = v_0, \text{ d'où } A = -\frac{v_0}{\omega_0}.$$

On a donc trouvé  $x(t) = x_{\text{éq}} - \frac{v_0}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_{\text{éq}} + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

$$\text{soit } x(t) = x_{\text{éq}} + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right).$$

b) La période est définie par  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , soit  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

### Exercice 11.13

1. Forces appliquées à  $M$  : poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)$ ; réaction normale de la tige  $\vec{R} = R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$ ; tensions des deux ressorts  $\vec{T}_1 = -k(\ell_1 - \ell_0)\vec{e}_x$  soit  $\vec{T}_1 = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$ , et  $\vec{T}_2 = -k(\ell_2 - 0)(-\vec{e}_x)$  soit  $\vec{T}_2 = +k(2\ell_0 - x)\vec{e}_x$ .

⚡\* Il faut bien prendre le temps d'écrire correctement ces deux tensions, en tenant compte du schéma et de la longueur à vide nulle d'un des deux ressorts.

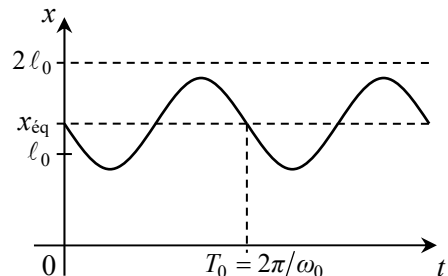
2. PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}$ , à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ . Projection sur  $\vec{e}_x$  :  $-mg\sin\alpha + 0 - k(x_{\text{éq}} - \ell_0) + k(2\ell_0 - x_{\text{éq}}) = 0$  d'où  $x_{\text{éq}} = \frac{3}{2}\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{2k}$ .

3. PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}$ , en mouvement :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ . Projection sur  $\vec{e}_x$  :  $-mg\sin\alpha + 0 - k(x - \ell_0) + k(2\ell_0 - x) = m\ddot{x}$  soit  $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{3k}{m}\ell_0 - g\sin\alpha$ . En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  on peut l'écrire :  $\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2x_{\text{éq}}$ .

4.a) Solution générale :  $x(t) = x_{\text{éq}} + A\cos(\omega_0t) + B\sin(\omega_0t)$ . Conditions initiales :  $x(0) = x_{\text{éq}} + A = x_{\text{éq}}$  donc  $A = 0$ , soit  $x(t) = x_{\text{éq}} + B\sin(\omega_0t)$  et  $\dot{x}(t) = B\omega_0\cos(\omega_0t)$ ;  $\dot{x}(0) = B\omega_0 = -v_0$  donc  $B = -\frac{v_0}{\omega_0}$ . Finalement :  $x(t) = x_{\text{éq}} - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t)$ .

b) Il faut que  $x(t) < 2\ell_0, \forall t$  soit  $\frac{3}{2}\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{2k} - \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t) < 2\ell_0, \forall t$ . Le membre de gauche vaut au maximum  $\frac{3}{2}\ell_0 - \frac{mg\sin\alpha}{2k} + \frac{v_0}{\omega_0}$  donc la condition est  $v_0 < \frac{\omega_0\ell_0}{2} + \frac{g\sin\alpha}{\omega_0}$ .

L'allure de  $x(t)$  est alors la suivante :



5. Projection du PFD sur  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  :  $-mg\cos\alpha + R_y + 0 + 0 = 0$  et  $0 + R_z + 0 + 0 = 0$  donc  $\vec{R} = mg\cos\alpha\vec{e}_y$ .

### Exercice 11.14

**1.** On étudie le châssis du véhicule, assimilé à un point matériel de masse  $M$ , dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Forces appliquées à  $M$  (à l'équilibre) : son poids  $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{u}_z$  ; quatre tensions identiques  $\vec{T} = -k(L_e - L_0)\vec{u}_z$ . Le PFD donne alors :  $M\vec{g} + 4\vec{T} = \vec{0}$ . Projection sur  $\vec{u}_z$  :  $-Mg - 4k(L_e - L_0) = 0$  d'où  $L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}$ ,  $z = L + R$  donc  $z_e = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R$ .

☛ Vous n'avez quand même pas oublié le facteur 4 ? Il est cité pas moins de trois fois dans l'énoncé...

✍ À l'équilibre il n'y a pas de force de frottement des amortisseurs, puisque la vitesse est nulle.

**2. a)** Quatre forces de frottements  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}(M) = -\lambda\dot{z}\vec{u}_z$  s'ajoutent maintenant aux précédentes :  $M\vec{g} + 4\vec{T} + 4\vec{F} = M\vec{a}$ . Projection sur  $\vec{u}_z$  :  $-Mg - 4k(z - R - L_0) - 4\lambda\dot{z} = M\ddot{z}$  d'où  $\ddot{z} + \frac{4\lambda}{M}\dot{z} + \frac{4k}{M}z = -g + \frac{4k}{M}(R + L_0) = \frac{4k}{M}z_e$ . En posant  $\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}$  et  $Q = \frac{M\omega_0}{4\lambda} = \frac{\sqrt{kM}}{2\lambda}$ , on obtient  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_e$ .

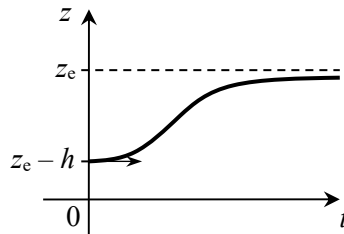
⇒ Méthode 13.2

**b)** Le retour à l'équilibre le plus bref correspond au régime critique. Le discriminant de l'équation caractéristique  $\left(r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0\right)$  est alors nul :  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 0$  d'où  $Q = \frac{1}{2}$ , soit finalement  $\lambda = \sqrt{kM}$ .

⇒ Méthode 13.3

**c)** L'équation caractéristique a pour racine double  $r = -\omega_0$ . La solution générale est alors :  $z(t) = z_e + (At + B)\exp(-\omega_0 t)$ . Conditions initiales :  $z(0) = z_e - h = z_e + B$  donc  $B = -h$  ;  $\dot{z}(0) = 0 = A - \omega_0 B$  donc  $A = -\omega_0 h$ . Finalement :  $z(t) = z_e - h(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)$ .

**d)** Évolution temporelle :



**3.** Avec la masse  $M' = 1580$  kg :  $Q' = \frac{\sqrt{kM'}}{2\lambda} = \frac{\sqrt{kM'}}{2\sqrt{kM}}$  soit  $Q' = \frac{\sqrt{M'}}{2\sqrt{M}}$  ; AN  $Q' = 0,60$ .

$Q' > \frac{1}{2}$  donc  $\Delta' < 0$  : les racines de l'équation caractéristique sont maintenant les complexes

conjugués  $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  que l'on notera  $-\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ . La solution générale est donc :

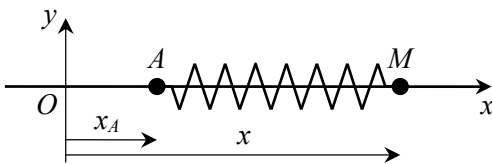
$z(t) = z_e + e^{-t/\tau}[C \cos \omega t + D \sin \omega t]$ . Conditions initiales :  $z(0) = z_e - h = z_e + C$  donc  $C = -h$  ;

$\dot{z}(0) = 0 = -\frac{1}{\tau}C + D\omega$  donc  $D = -\frac{h}{\omega\tau}$ . Finalement :  $z(t) = z_e - he^{-t/\tau} \left[ \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega\tau} \right]$ .

Ce régime transitoire est un peu plus long que le régime critique, ce qui le rend plus désagréable ; cependant le facteur de qualité reste proche de 0,5 donc il n'y aura pas plus d'une oscillation avant l'arrêt.

### Exercice 11.15

1.



Forces appliquées à  $M$  : poids  $\bar{P} = -mg\bar{e}_y$  ;

réaction normale de la tige  $\bar{R} = R_y\bar{e}_y + R_z\bar{e}_z$  ;

tension du ressort  $\bar{T} = -k(AM - \ell_0)\bar{e}_x = -k(x - x_A - \ell_0)\bar{e}_x$  ;

force de frottement fluide  $\bar{F} = -h\dot{x}\bar{e}_x$ . PFD :  $m\bar{a}(M) = \bar{P} + \bar{T} + \bar{R} + \bar{F}$ . Projection sur  $\bar{e}_x$  :

$m\ddot{x} = 0 - k(x - x_A - \ell_0) + 0 - h\dot{x}$  soit  $\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}A_m \cos(\omega t) + \frac{k}{m}\ell_0$ . On pose alors

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$  et  $u = x - \ell_0$ , d'où l'équation :  $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 A_m \cos(\omega t)$ .

⇒ Méthode 6.1

2. Pour déterminer le régime permanent, on ne cherche que la solution particulière sinusoïdale de cette équation différentielle, de la forme  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \text{Re}[U e^{j\omega t}]$  en posant

$\underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$ . Alors l'équation devient :  $-\omega^2 \underline{U} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{U} + \omega_0^2 \underline{U} = \omega_0^2 A_m$  dont la solution

immédiate est  $\underline{U} = \frac{A_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{-A_m j Q \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + j Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ . Finalement,  $x(t) = \ell_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

avec  $U_m = \frac{A_m}{\sqrt{\left(1 - \omega^2/\omega_0^2\right)^2 + \left(\omega/Q\omega_0\right)^2}}$  et  $\varphi_u = -\frac{\pi}{2} - \arctan \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$ .

⇒ Méthode 6.5

3. Pour  $\omega \rightarrow 0$ ,  $U_m \rightarrow A_m$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $U_m \rightarrow 0$ . Le point  $M$  suit donc exactement les oscillations de  $O$  à basse fréquence, la longueur du ressort restant alors pratiquement constante. En revanche  $M$  ne bouge pratiquement pas à haute fréquence : l'excitation étant trop rapide, l'inertie de  $M$  ne lui laisse jamais le temps de démarrer dans un sens ou dans l'autre. On a donc un filtrage passe-bas. On reconnaît d'ailleurs dans  $\underline{U}$  la forme d'un filtre passe-bas d'ordre 2.

Pour trouver les variations de  $U_m$ , et notamment l'éventualité d'un maximum (résonance), on doit dériver  $U_m$  par rapport à  $\omega$  :

$$\frac{dU_m}{d\omega} = -\frac{1}{2} A_m \frac{2(1 - \omega^2/\omega_0^2)(-2\omega/\omega_0^2) + 2\omega/Q^2\omega_0^2}{\left[ (1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2 \right]^{3/2}} = A_m \frac{\omega(2 - 2\omega^2/\omega_0^2 - 1/Q^2)}{\omega_0^2 \left[ (1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2 \right]^{3/2}}.$$

Cette dérivée s'annule pour  $\omega = 0$  et pour  $2 - \frac{2\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2} = 0$  soit  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

La seconde valeur n'existe que si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  : elle correspond alors à un maximum, donc il y a résonance à cette pulsation, et  $\omega = 0$  correspond à un minimum local.

Si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le seul extremum est  $\omega = 0$  et c'est un maximum : ensuite la dérivée est toujours négative donc  $U_m$  décroît jusqu'à la valeur limite 0 ; il n'y a alors pas de résonance.

### Exercice 11.16

Forces exercées sur la caisse :

son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = +mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_z$  ; réaction du plan  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$ , avec  $\vec{R}_n = R_z \vec{e}_z$  et  $\vec{R}_t = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$  puisque le support est le plan  $(Oxy)$ .

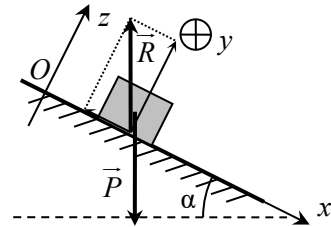
PFD à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_t = \vec{0}$ .

Projections sur la base cartésienne :

$$\begin{cases} mg \sin \alpha + R_x = 0 \\ 0 + R_y = 0 \\ -mg \cos \alpha + R_z = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} R_x = -mg \sin \alpha \\ R_y = 0 \\ R_z = +mg \cos \alpha \end{cases}$$

On en déduit  $R_n = |R_z| = mg \cos \alpha$  et  $R_t = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = |R_x| = mg \sin \alpha$ .

Donc  $R_t \leq f \cdot R_n$  équivaut à  $mg \sin \alpha \leq f mg \cos \alpha$  d'où  $\tan \alpha \leq f$ . La fonction tangente était croissante sur cet intervalle, on en déduit  $\alpha \leq \arctan f = \alpha_{\max}$ . AN  $\alpha_{\max} = 24^\circ$ .



### Exercice 11.17

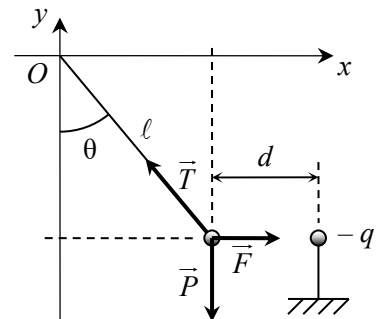
Forces appliquées à la sphère  $S$  : son poids

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_y$  ; la force électrostatique  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} \vec{e}_x$  ;

la tension du fil  $\vec{T} = T(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$ .

PFD à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$ .

Projection sur la direction  $\vec{e}_y$  :  $0 - T \sin \theta + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2} = 0$



d'où  $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 d^2 T \sin\theta}$ . Il reste à déterminer l'inconnue  $T$ , et pour cela on doit projeter la loi également sur la direction  $\vec{e}_x$  :  $+T \cos\theta - mg + 0 = 0$  d'où  $T = \frac{mg}{\cos\theta}$ . On obtient donc finalement :  $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 d^2 mg \tan\theta}$ . AN  $q = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ .

### Exercice 11.18

1. Référentiel  $\mathcal{R}$  : terrestre supposé galiléen, lié au repère  $(Oxyz)$ . On étudie le cube  $C$ , de masse  $m$ , assimilé à un point matériel. Forces appliquées à  $C$  : poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ ; force de rappel du ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{\text{ressort} \rightarrow C}$  soit  $\vec{T} = +k(h - a - \ell_0)\vec{e}_z$ ; réaction du plateau  $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$  a priori, avec  $R_z > 0$  (liaison unilatérale).

*✎ On n'a ici aucune indication sur l'existence ou non de frottements solides : on doit donc supposer a priori que la réaction a trois composantes.*

2. PFD pour  $C$  dans  $\mathcal{R}$ , à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$ . Projections sur  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :  $R_x = 0$ ;  $R_y = 0$ ;  $-mg + R_z + k(h - a - \ell_0) = 0$  d'où  $\vec{R} = [+mg - k(h - a - \ell_0)]\vec{e}_z$ .

⚡ Non, la réaction du support n'est pas l'opposé du poids, même si le support est horizontal et qu'on est à l'équilibre ! Seule l'application rigoureuse du PFD a permis de trouver les composantes, et de montrer en particulier que deux d'entre elles sont nulles, qu'il y ait ou non des frottements.

3. Le calcul n'est valable que s'il donne  $R_z > 0$ , car le cube est simplement posé sur le plateau, qui ne peut donc le repousser que vers le haut (contact unilatéral).  $R_z = mg - k(h - a - \ell_0) > 0$

$$\Leftrightarrow k(h - a - \ell_0) < mg \Leftrightarrow h < \frac{mg}{k} + a + \ell_0 = h_{\max}$$

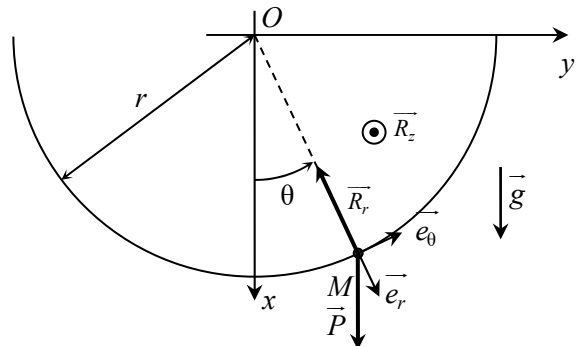
Si  $h > h_{\max}$ , le calcul n'étant plus valable, il faut revenir sur l'une des hypothèses de départ : la seule qui peut ne plus être valable est celle du contact entre le cube et le plateau. Donc si  $h > h_{\max}$ , le cube décolle nécessairement du plateau.

### Exercice 11.19

1. L'anneau est soumis à son poids  $\vec{P} = +mg \cos\theta \vec{e}_r - mg \sin\theta \vec{e}_\theta$  ainsi qu'à la réaction du support (qui est normale puisque les frottements sont inexistantes) :  $\vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_z \vec{e}_z$ . D'autre part le mouvement est circulaire de rayon  $r$ .

Deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ .

Projections dans la base cylindrique :



$$mg \cos \theta + R_r = -mr\dot{\theta}^2 \quad (1); \quad -mg \sin \theta = mr\ddot{\theta} \quad (2); \quad R_z = 0 \quad (3).$$

**2. a)** La seconde projection ne comporte que la fonction  $\theta$ . On la multiplie par  $\dot{\theta}$ , soit  $-mg \sin \theta \dot{\theta} = mr\ddot{\theta}\dot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{g}{r}\sin \theta \dot{\theta}$ . On reconnaît alors deux dérivées que l'on peut intégrer :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{r} \cos \theta + A. \text{ Avec les conditions initiales } \dot{\theta}(0) = 0 \text{ (anneau immobile) et } \theta(0) = \theta_0 \text{ on}$$

obtient finalement : 
$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (4).$$

**b)** (3) montre que la réaction n'a qu'une composante non nulle, selon  $\vec{e}_r$ . On reporte l'expression (4) dans (1) : 
$$\vec{R} = mg[3\cos \theta - 2\cos \theta_0]\vec{e}_r.$$

**c)** Cette expression est maximale pour  $\theta = 0$  (au moment où la particule passe par sa position la plus basse) : alors 
$$R_{\max} = mg[3 - 2\cos \theta_0].$$

**3. a)** On utilise (2), sachant que pour des faibles valeurs de  $\theta$ , on a  $\sin \theta \approx \theta$  : 
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0.$$

**b)** Cette équation possède une solution du type  $\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t + C\right)$ . On détermine  $A$  et  $C$

en utilisant les conditions initiales :  $\theta(0) = A \cos C = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = -A\sqrt{\frac{g}{r}}\sin C = 0$ .

Donc 
$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right).$$

### Exercice 11.20

**1.** Référentiel  $\mathcal{R}$  : terrestre supposé galiléen, lié au repère  $(Oxyz)$ . Forces appliquées : poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$  ; tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$  et force de frottements  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ .

Informations cinématiques : le mouvement est circulaire dans le plan  $(Oxy)$ , donc  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$ .

PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$ .

Projection sur le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$  :  $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin \theta = 0$ . L'angle  $\theta$  restant faible, on peut

écrire 
$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$
 On obtient la forme demandée en posant  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

**2. a)** L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est :  $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$ .

Le régime est pseudo-périodique si le discriminant de cette équation est négatif, soit :

$$\frac{4}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0 \text{ ou } \omega_0 > \frac{1}{\tau}.$$

b)  $\tau$  est le temps de relaxation, qui donne l'ordre de grandeur de la durée de ce régime transitoire.

$$3. \delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A \exp(-t/\tau) \cos(\Omega t + B)}{A \exp(-t/\tau) \exp(-T/\tau) \cos(\Omega t + B)}\right) \text{ soit } \boxed{\delta = \frac{T}{\tau}}.$$

$$4. \delta = \ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_C}\right) = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) \text{ soit } \boxed{\delta = 0,110}; T = \frac{t_D - t_A}{7} = \frac{8,25 - 0,53}{7} \text{ soit } \boxed{T = 1,10 \text{ s}}$$

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{1,10}{0,110} \text{ soit } \boxed{\tau = 10,0 \text{ s}}; \alpha = \frac{2m}{\tau} = \frac{2 \cdot 0,470}{10,0} \text{ soit } \boxed{\alpha = 9,40 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

### Exercice 11.21

1. a) On étudie le système constitué par les deux cailloux et la ficelle (sans masse, donc ses éléments cinétiques sont nuls), dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Si on néglige la pesanteur, il n'y a aucune force extérieure appliquée au système.

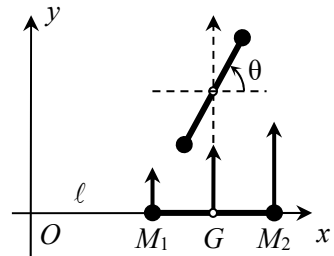
☛ On ne considère que le mouvement après que l'on a lâché la ficelle : seule la portion de ficelle entre les deux cailloux est tendue et exerce une force de tension.

Le théorème de la quantité de mouvement donne donc :  $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{0}$  d'où  $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{cste}$ . Le mouvement de  $G$  est rectiligne uniforme, avec la vitesse qu'il avait au moment où on a lâché la ficelle (vitesse horizontale de norme  $\frac{3}{2}\ell\omega$ ).

b) Le référentiel barycentrique est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Il est donc également galiléen.

c) Puisque la distance entre chaque caillou et le barycentre est fixe, égale à  $\ell/2$ , le mouvement de chaque caillou dans  $\mathcal{R}^*$  est circulaire, de centre  $G$  et de rayon  $r = \ell/2$ .

d) Pour définir entièrement les mouvements (symétriques) des deux cailloux, il reste à déterminer l'évolution de l'angle de rotation  $\theta$ . On peut appliquer le PFD à l'un des cailloux, qui est soumis uniquement à la tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$  (dans la base polaire) :  $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}^*} = \vec{T}$ . Or l'accélération dans un mouvement circulaire s'écrit  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}^*} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$  dans la base polaire. Projection du PFD sur  $\vec{e}_\theta$  :  $mr\ddot{\theta} = 0$  d'où  $\dot{\theta} = cte$ .



Condition initiale :  $\dot{\theta}(0) = \omega$ , donc finalement  $\boxed{\dot{\theta} = \omega = cte}$ .

Les cailloux continuent à tourner à la vitesse angulaire qu'ils avaient quand Toto les a lâchés.

2. a) Le système n'est plus isolé :  $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = 2m\vec{g}$  d'où  $\boxed{\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = cte}$ .  $G$  ayant une vitesse initiale horizontale, son mouvement est donc parabolique, dans un plan vertical.

b) Cette fois le référentiel barycentrique est non galiléen, puisque sa translation par rapport au référentiel terrestre est accélérée.



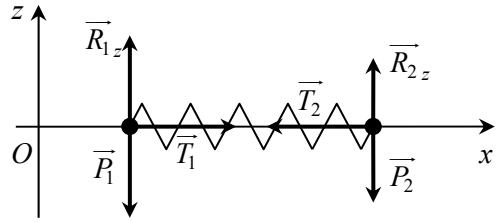
### Exercice 11.22

1. Système étudié :  $\{M_1, M_2, \text{ressort}\}$  (le ressort étant sans masse, il n'interviendra pas dans les éléments cinétiques).

Forces intérieures :  $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{e}_x$ .

Forces extérieures : deux poids  $\vec{P}_i = -m_i g \vec{e}_z$  ;

deux réactions normales  $\vec{R}_i = R_{iy}\vec{e}_y + R_{iz}\vec{e}_z$ .



2. TQM pour le système dans  $\mathcal{R}$  galiléen :  $(m_1 + m_2)\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2$ .

$$\text{Projections : } \begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x}_G = 0 \\ 0 = R_{1y} + R_{2y} \\ 0 = -m_1 g - m_2 g + R_{1z} + R_{2z}. \end{cases}$$

Les trois projections sont nulles, pour des raisons différentes : la première parce qu'il n'y a pas de force selon  $x$ , les deux autres parce qu'il ne peut pas y avoir de mouvement selon  $y$  et  $z$ .

Donc  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$  : le système est pseudo-isolé.

$$\text{Alors } \dot{x}_G = \text{cte} = \frac{m_1 v_0 + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2} \text{ d'où } \boxed{x_G(t) = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t + \text{cte} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell_0.}$$

3. a) Le référentiel barycentrique est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre, lui-même supposé galiléen. Il est donc galiléen.

b) On peut appliquer le PFD à chaque masse dans  $\mathcal{R}$  ou dans  $\mathcal{R}^*$ , mais c'est plus pratique de rester dans  $\mathcal{R}$ , où les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  ont déjà été définies.

Pour  $M_1$  :  $m_1 \vec{a}(M_1)_{\mathcal{R}} = \vec{T}_1 + \vec{R}_1 + \vec{P}_1$ . Projection sur  $\vec{e}_x$  :  $m_1 \ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - \ell_0)$ . De même pour  $M_2$  :  $m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - \ell_0)$ . On divise chaque équation par la masse, puis on soustrait

membre à membre :  $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(x_2 - x_1 - \ell_0) - \frac{k}{m_1}(x_2 - x_1 - \ell_0) \Leftrightarrow \ddot{\ell} = -\left(\frac{k}{m_2} + \frac{k}{m_1}\right)(\ell - \ell_0)$

soit  $\ddot{\ell} + \omega_0^2 \ell = \omega_0^2 \ell_0$  où  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}$ . Solution :  $\ell(t) = \ell_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Avec

les CI  $\ell(0) = \ell_0$  et  $\dot{\ell}(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = -v_0$  on trouve  $\boxed{\ell(t) = \ell_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)}$ .

### Exercice 11.23

1. Forces appliquées à  $M_1$  : poids  $\vec{P}_1 = m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$  ; tension du ressort  $\vec{T}_1 = +k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = +k(z_2 - z_1 - \ell_0)\vec{e}_z$ . Forces appliquées à  $M_2$  : poids  $\vec{P}_2 = m\vec{g} = +mg\vec{e}_z$  ; tension du ressort  $\vec{T}_2 = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z_2 - z_1 - \ell_0)\vec{e}_z = -\vec{T}_1$ .

Ici il suffit d'appliquer le PFD à  $M_2$  seul dans  $\mathcal{R}$  à l'équilibre ( $t \leq 0$ ) :  $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ .

On projette sur  $\vec{e}_z$  :  $+mg - k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$  d'où  $\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ .

**2.** TQM pour le système dans  $\mathcal{R}$  :  $2m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = 2m\vec{g}$  d'où  $\vec{a}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g} = \text{cte}$ .

Le mouvement de  $G$  est donc rectiligne uniformément accéléré. On intègre :  $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = \vec{g}t$  (nulle à  $t = 0$ ) puis

$$\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{OG}_0 = \left(\frac{1}{2}gt^2 + d + \frac{\ell_0}{2}\right)\vec{e}_z \quad (\text{car } G \text{ est au milieu de } [M_1M_2]).$$

**3.** Le référentiel barycentrique n'est pas galiléen, on ne peut donc pas l'utiliser. On applique alors le PFD à  $M_1$  et à  $M_2$  dans  $\mathcal{R}$ , et on projette toujours sur  $\vec{e}_z$  :  $m\ddot{z}_1 = +mg + k(\ell - \ell_0)$  et  $m\ddot{z}_2 = +mg - k(\ell - \ell_0)$ . On soustrait membre à membre :  $m(\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) = m\ddot{\ell} = -2k(\ell - \ell_0)$  soit  $\ddot{\ell} + \frac{2k}{m}(\ell - \ell_0) = 0$  [oscillateur harmonique].

Solution :  $\ell(t) = \ell_0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$  en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ . Conditions initiales :

$$\ell(0) = \ell_0 + \frac{mg}{k} = \ell_0 + A \quad \text{et} \quad \dot{\ell}(0) = \dot{z}_2(0) - \dot{z}_1(0) = 0 = B\omega_0, \quad \text{d'où} \quad \ell(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k}\cos(\omega_0 t).$$



# Énergie mécanique

UN SCIENTIFIQUE



**Gottfried LEIBNIZ** (1646-1716) a suivi des études de philosophie et de théologie et s'est intéressé à tous les domaines de la connaissance de son époque. Il se passionne pour les sciences, suite à sa rencontre à Paris avec Christiaan HUYGENS. C'est alors qu'il développe dans plusieurs articles la notion de calcul intégral ce qui lui permet de résoudre des problèmes de cinématique, solutions d'équations différentielles. Ses écrits en philosophie ont concouru à sa célébrité.

## ■ Un peu d'histoire

La notion d'énergie mécanique est apparue progressivement dans les considérations scientifiques des physiciens. Généralisant une idée de son ami Christiaan HUYGENS, LEIBNIZ affirme la conservation dans un choc élastique de la somme des  $mv^2$  qu'il appelle *vis viva* (*force vive* en français) et l'expose dans un traité paru en 1686, il en fait un principe général, se démarquant ainsi des idées de René DESCARTES.

C'est en étudiant les trajectoires des planètes qu'Isaac NEWTON comprend l'importance de la notion de force et en déduit les lois de l'attraction universelle. L'introduction du calcul différentiel et intégral par NEWTON et LEIBNIZ permet la résolution de nombreux problèmes. Ainsi, Leonhard EULER et Jean LE ROND D'ALEMBERT développent des méthodes de résolution d'équations différentielles et publient chacun un traité complet de mécanique, l'un en 1736 et l'autre en 1743.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions de la puissance et du travail d'une force
- ▷ Le théorème de l'énergie cinétique (forme instantanée et forme intégrale)
- ▷ La définition d'une force conservative et la relation avec son énergie potentielle
- ▷ Les énergies potentielles élastique, de pesanteur et électrostatique
- ▷ Le théorème de l'énergie mécanique (forme instantanée et forme intégrale)

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer le travail d'une force
- ▷ Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer la norme de la vitesse en un point, ou pour établir une équation différentielle du mouvement
- ▷ Déterminer une énergie potentielle à partir de l'expression de la force, ou inversement
- ▷ Déterminer les limites du mouvement d'un point matériel en utilisant son énergie potentielle et son énergie mécanique
- ▷ Déterminer les positions d'équilibre d'un point matériel en utilisant son énergie potentielle
- ▷ Établir l'équation différentielle du mouvement d'un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Travail et puissance d'une force

### □ Puissance d'une force

Soit un point matériel  $M$  en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  et soumis à une force  $\vec{F}$ .

La puissance de  $\vec{F}$  dans  $\mathcal{R}$  est définie par :  $\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ .

Si deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  sont appliquées à  $M$  :  $\mathcal{P}(\vec{F}_1)_{\mathcal{R}} + \mathcal{P}(\vec{F}_2)_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)_{\mathcal{R}}$ .

### □ Travail élémentaire d'une force

Si on considère l'action de  $\vec{F}$  pendant un intervalle de temps  $dt$  au cours duquel la position de

$M$  a varié de  $d\vec{OM}$ , le travail élémentaire de  $\vec{F}$  est :  $\delta W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ .

### □ Travail d'une force le long d'une courbe

Si la force  $\vec{F}$  s'applique à un point matériel  $M$  effectuant une trajectoire allant de  $A$  à  $B$ , le

travail de la force sur cette trajectoire est :  $W(\vec{F})_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$ .

Le travail est dit **moteur** s'il est positif, et **résistant** s'il est négatif.

### □ Cas particuliers

– Une force dont la direction est en permanence orthogonale au déplacement du point  $M$  ne travaille pas :  $\mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = 0$ ,  $W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = 0$ .

– Si une force est un vecteur constant :  $W(\vec{F})_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

⇒ Méthode 12.1. Calculer un travail dans des cas particuliers

⇒ Méthode 12.2. Calculer le travail d'une force quelconque

## ■ Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

### □ Énergie cinétique

Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$  en mouvement relativement à un référentiel  $\mathcal{R}$ , animé

d'une vitesse  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ , l'énergie cinétique de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  est :  $E_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)_{\mathcal{R}}^2$ .

## □ Énoncés du théorème de l'énergie cinétique (TÉC)

Soit un point matériel  $M$ , de masse  $m$  et soumis à un ensemble de forces de résultante  $\sum \vec{F}$ , étudié dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

Forme instantanée

À tout instant :

$$\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}}.$$

Dans un problème à une seule dimension, cette forme du théorème (également appelée *théorème de la puissance mécanique*) permet d'obtenir l'équation du mouvement en éliminant directement les forces qui ne travaillent pas.

Forme intégrale

Entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire :  $E_c(M)_{\mathcal{R}}^B - E_c(M)_{\mathcal{R}}^A = \sum W(\vec{F})_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow B}$

ou plus simplement  $\Delta E_c(M)_{\mathcal{R}} = \sum W(\vec{F})_{\mathcal{R}}$ .

Cette forme du théorème est utile lorsqu'on cherche à relier uniquement un état initial et un état final, sans chercher à déterminer l'évolution temporelle entre les deux.

## ■ Champ de force conservative et énergie potentielle

### □ Champ de force conservative

Une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  constitue un **champ de force**  $\vec{F}(P)$  si elle ne dépend que de la position  $P$  où se trouve  $M$  (et non de sa vitesse, ou des autres forces).

La force est alors dite **conservative** si son travail entre deux positions  $A$  et  $B$  quelconques ne dépend pas de la trajectoire suivie par le point  $M$  entre  $A$  et  $B$ .

### □ Travail et énergie potentielle

On dit qu'une force conservative  $\vec{F}(P)$  dérive d'une énergie potentielle, fonction d'espace  $E_p(P)$  définie par  $dE_p = -\delta W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$  pour tout déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$ .

Cette formule est équivalente à  $\vec{F}(P) = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(P)$  où  $\overrightarrow{\text{grad}}$  est l'opérateur différentiel gradient ; on rencontrera notamment  $\overrightarrow{\text{grad}} E_p(x) = \frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x$  pour une fonction d'une seule

coordonnée cartésienne, et  $\overrightarrow{\text{grad}} E_p(r) = \frac{dE_p}{dr} \vec{e}_r$  pour une fonction de  $r$  seul (coordonnée sphérique ou cylindrique).

⇒ **Méthode 12.3. Déterminer l'énergie potentielle à partir de la force conservative ou l'inverse**

Le travail d'une force conservative entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire est l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :  $W(\vec{F})_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$ .

### □ Propriétés de l'énergie potentielle

- La fonction énergie potentielle est définie à une constante additive près : le choix de cette constante correspond au choix d'une origine des énergies potentielles.
- Si un point  $M$  est soumis à plusieurs forces conservatives, on obtient son énergie potentielle totale en additionnant les énergies potentielles dont dérivent les différentes forces.

### □ Exemples

- Le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  (avec  $\vec{g}$  uniforme) dérive de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz + \text{cte} \quad \text{si } (Oz) \text{ est un axe vertical ascendant}$$

$$E_{pp} = -mgz + \text{cte} \quad \text{si } (Oz) \text{ est un axe vertical descendant.}$$

- La tension d'un ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_{r \rightarrow p}$  dérive de l'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}.$$

- La force de gravitation exercée par un astre sphérique de masse  $M$ ,  $\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$  (en

coordonnées sphériques) dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :  $E_{pg} = -G\frac{Mm}{r} + \text{cte}$

(la constante étant généralement prise nulle, ce qui correspond à une origine à l'infini).

## ■ Énergie mécanique

### □ Définition

L'énergie mécanique d'un point matériel  $M$  est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle totale :  $E_m(M)_{\mathcal{R}} = E_c(M)_{\mathcal{R}} + E_p(M)$ .

### □ Théorème de l'énergie mécanique

Considérons un point matériel  $M$ , soumis à des forces conservatives et également à des forces non conservatives de résultante  $\vec{F}_{nc}$ , étudié dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ .

Forme instantanée

À tout instant : 
$$\frac{dE_m(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}}.$$

Forme intégrale

Entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire :  $E_m(M)_{\mathcal{R}}^B - E_m(M)_{\mathcal{R}}^A = W(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}}^{A \rightarrow B}$

ou plus simplement  $\Delta E_m(M)_{\mathcal{R}} = W(\vec{F}_{nc})_{\mathcal{R}}.$

### □ Cas de conservation de l'énergie mécanique

Un cas particulier intéressant est celui d'une évolution conservative : il n'y a aucune force non conservative, ou bien les forces non conservatives ne travaillent pas. L'énergie mécanique est alors une constante du mouvement (donnée par les conditions initiales).



L'équation  $E_m(M)_{\mathbb{R}} = \text{cte}$  est appelée **intégrale première de l'énergie mécanique** (équation de conservation contenant uniquement les coordonnées de position et leurs dérivées premières).

## ■ Mouvement conservatif unidimensionnel

### □ Définition

Un point matériel est dit à **un degré de liberté** si son repérage dans l'espace ne nécessite qu'un seul paramètre. Ce paramètre sera noté  $x$  par la suite.

Ce point matériel est en mouvement conservatif unidimensionnel s'il n'est soumis qu'à des forces conservatives et des forces de puissance nulle. Son énergie mécanique est alors constante.

### □ Équilibre d'un point matériel dans un champ de force conservative

– Une position d'équilibre est une abscisse  $x_{\text{éq}}$  où  $M$  peut rester immobile. L'équilibre est alors **stable** si, lorsque  $M$  est écarté légèrement de cette position, il a tendance à y revenir. Il est **instable** si, lorsque  $M$  est écarté légèrement de cette position, il continue à s'en éloigner.

– Les positions d'équilibre de  $M$  correspondent aux extrema de son énergie potentielle totale

$$E_p(x), \text{ soit généralement } \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0.$$

Une position d'équilibre *stable* correspond à un *minimum* de l'énergie potentielle totale.

Une position d'équilibre *instable* correspond à un *maximum* de l'énergie potentielle totale.

⇒ **Méthode 12.4. Déterminer les positions d'équilibre**

### □ Limites du mouvement

L'énergie cinétique étant par nature positive, la conservation de l'énergie mécanique entraîne nécessairement  $E_p(x) \leq E_m(M)_{\mathbb{R}} = \text{cte}$ .

Si cette condition limite les valeurs possibles de  $x$ , le point matériel  $M$  est dans un **état lié**.

Si elle n'empêche pas  $x$  de tendre vers l'infini,  $M$  est dans un **état libre** (ou **état de diffusion**).

⇒ **Méthode 12.5. Déterminer les limites du mouvement**

### □ Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

Approximation de l'énergie potentielle

Pour un point matériel en évolution conservative, repéré par une variable  $x$ , l'énergie potentielle totale peut être approchée, au voisinage d'une position d'équilibre stable  $x_{\text{éq}}$  (minimum), par :

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_{\text{éq}})^2 + \text{cte} \quad \text{en posant} \quad k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) > 0.$$

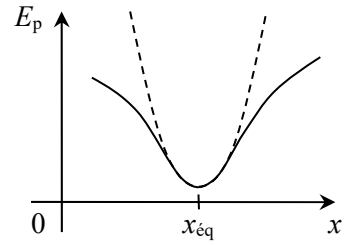
Si on choisit l'origine des  $x$  à la position d'équilibre, la formule devient plus simplement :

$$E_p(x) \approx \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}. \quad \text{La variable élevée au carré est toujours l'écart à la position d'équilibre.}$$

⇒ **Méthode 12.6. Établir l'expression quadratique de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre**

### Interprétation graphique

Cela revient à assimiler la courbe représentative de  $E_p(x)$ , au voisinage de  $x_{\text{éq}}$ , à un arc de parabole (« puits d'énergie potentielle »).



### Force de rappel

La force conservative dérivant de  $E_p(x)$  est alors une force de rappel de la forme :

$$\vec{F}(x) = -\frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x = -k(x - x_{\text{éq}}) \vec{e}_x.$$

Si on choisit l'origine des  $x$  à la position d'équilibre, la formule devient  $\vec{F}(x) = -k x \vec{e}_x$ .

### Équation différentielle

Un point matériel en évolution conservative, au voisinage d'une position d'équilibre  $x_{\text{éq}}$ , obéit à une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad \text{en posant } u = x - x_{\text{éq}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Cette équation différentielle s'obtient facilement en dérivant l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps et en remarquant que cette dérivée doit être nulle.

On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique**.

⇒ **Méthode 12.7. Établir l'équation différentielle d'un mouvement unidimensionnel**

## ■ Théorème de l'énergie cinétique pour un système de points

### □ Énergie cinétique d'un système quelconque

C'est la somme des énergies cinétiques de tous les points du système.

Pour un solide  $S$  de masse  $m$  en translation dans  $\mathcal{R}$  à une vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}}$  :  $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{R}}^2$  comme

pour un point matériel.

Le cas d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$  sera vu au chapitre 15.

### □ Théorème de l'énergie cinétique

Si le système est *indéformable* (solide), le théorème de l'énergie cinétique s'écrit comme pour un point matériel, en tenant compte uniquement des forces *extérieures* exercées sur les différents points du solide.

Si le système est *déformable*, il faut prendre en compte également les forces *intérieures* au système, dont la puissance peut ne pas être nulle.

## ■ Comment calculer le travail d'une force ?

### □ Méthode 12.1. Calculer un travail dans des cas particuliers

- Si la force  $\vec{F}$  dont on cherche à exprimer le travail entre deux points  $A$  et  $B$  est constante (vecteur de *direction* et de *norme* constantes), alors  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \overline{AB}$ .
- Si la force  $\vec{F}$  est conservative, c'est-à-dire dérive d'une énergie potentielle  $E_p$ , alors  $W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = E_p(A) - E_p(B)$ .

⇒ Exercices 12.1, 12.2, 12.3, 12.4

Exemple : travail du poids

Le poids d'un point matériel de masse  $m$  est à la fois une force constante et une force conservative, donc lorsqu'il se déplace depuis l'altitude  $z_A$  jusqu'à l'altitude  $z_B$  :

$$W(\vec{P})_{A \rightarrow B} = \vec{P} \cdot \overline{AB} = E_{pp}(A) - E_{pp}(B) = mg(z_A - z_B).$$

### □ Méthode 12.2. Calculer le travail d'une force quelconque

- Exprimer  $\vec{F}$  en un point  $M$  quelconque dans le système de coordonnées adapté.
- Exprimer  $d\overline{OM}$  dans le même système de coordonnées :  
 $d\overline{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$  en coordonnées cartésiennes (pour un mouvement libre dans l'espace) ;  $d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques (idem) ;  $d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$  en coordonnées sphériques (idem).  
 Si le mouvement est limité dans l'espace (sur une droite, un cercle, un plan...),  $d\overline{OM}$  ne comportera qu'un ou deux des termes précédents.
- Effectuer le produit  $\vec{F} \cdot d\overline{OM}$ , puis calculer l'intégrale entre les deux positions considérées.

⇒ Exercice 12.4

Exemple : travail de la force de rappel d'un ressort

Un point matériel se déplace sur l'axe ( $Ox$ ) de  $A$  en  $B$ , en étant soumis à une force  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$  :

$$W(\vec{F})_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overline{OM} = \int_A^B -kx\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = \int_A^B -kx dx = \frac{k}{2} [x_A^2 - x_B^2].$$

## ■ Comment relier force et énergie potentielle ?

### □ Méthode 12.3. Déterminer l'énergie potentielle à partir de la force conservative ou l'inverse

- L'énergie potentielle  $E_p$  associée à une force conservative  $\vec{F}$  s'exprime à partir de la définition locale :  $dE_p = -\delta W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$ . On exprime  $\vec{F}$  et  $d\vec{OM}$  dans la même base. On effectue le produit scalaire, et s'il s'exprime à l'aide d'une seule variable (ce qui sera toujours le cas dans ce chapitre et les suivants), on obtient la dérivée de  $E_p$  par rapport à cette variable. Il ne reste qu'à intégrer pour obtenir  $E_p$  à une constante près (que l'on peut fixer en choisissant une origine).
- Dans l'autre sens, le calcul de  $\vec{F}$  à partir de  $E_p$  est un simple calcul de gradient, c'est-à-dire de dérivation, l'expression utile du gradient étant fournie.

⇒ Exercices 12.4, 12.6, 12.7

Exemple : énergie potentielle de pesanteur

On considère un système d'axes tel que  $(Oz)$  soit vertical et ascendant.

Par définition :  $dE_{pp} = -\vec{P} \cdot d\vec{OM} = -m\vec{g} \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) = +mg dz$ , donc  $\frac{dE_{pp}}{dz} = +mg$ .

Or  $m$  et  $g$  ne dépendent pas de  $z$ , donc la primitive se déduit immédiatement :  $E_{pp}(z) = +mgz + \text{cte}$ . Si on choisit  $E_{pp}(z_0) = 0$  pour une certaine altitude  $z_0$ , on obtient  $\text{cte} = -mgz_0$ , d'où  $E_{pp}(z) = +mg(z - z_0)$ .

Inversement :  $\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_{pp} = -\overrightarrow{\text{grad}} [mg(z - z_0)] = -\frac{d[mg(z - z_0)]}{dz} \vec{e}_z$  soit  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ .

## ■ Comment utiliser l'énergie potentielle pour étudier un mouvement unidimensionnel ?

### □ Méthode 12.4. Déterminer les positions d'équilibre

Pour un point matériel en évolution conservative unidimensionnelle, ayant une énergie potentielle  $E_p(x)$ , les positions d'équilibre correspondent aux extrema de celles-ci : un minimum correspond à une position d'équilibre stable, un maximum à une position d'équilibre instable.

- Commencer par regarder si les extrema sont évidents : dans ce cas, il n'y a aucun calcul à faire.
- Sinon, on dérive l'énergie potentielle par rapport à  $x$  et on cherche les valeurs de  $x$  pour lesquelles cette dérivée s'annule ; ce sont les positions d'équilibre. Puis on a

deux possibilités : on regarde le signe de la dérivée à gauche et à droite de la position d'équilibre ; ou bien on dérive l'énergie potentielle une nouvelle fois par rapport à  $x$  et on étudie le signe de cette dérivée seconde pour chacune des positions d'équilibre : une dérivée seconde positive caractérise un minimum (position d'équilibre stable), une dérivée seconde négative caractérise un maximum (position d'équilibre instable).

⇒ Exercices 12.7, 12.13 à 12.15

Considérons un point matériel dont le paramètre de position est  $x$  et qui possède une énergie potentielle  $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x-a)^2$ ,  $a$  et  $k$  étant des constantes positives.

– Elle est toujours positive, n'a pas de maximum si  $x$  est illimité, mais a un minimum évident, qui est 0 pour  $x = a$  : cette abscisse est donc une position d'équilibre stable.

– Si on préfère les calculs, on dérive une première fois :  $\frac{dE_p}{dx} = k(x-a)$ . Cette expression s'annule seulement pour  $x = a$ , ce qui constitue la position d'équilibre du point matériel.

$\frac{dE_p}{dx} < 0$  pour  $x < a$  ( $E_p$  décroissante avant  $a$ ) et  $\frac{dE_p}{dx} > 0$  pour  $x > a$  ( $E_p$  croissante après  $a$ ) donc  $E_p(a)$  est bien un minimum, correspondant à une position d'équilibre stable.

Ou bien  $\frac{d^2E_p}{dx^2} = k$ , qui est positive en  $x = a$  (et en  $x$  quelconque d'ailleurs), ce qui donne bien un minimum.

### □ Méthode 12.5. Déterminer les limites du mouvement

Soit  $x$  le paramètre de position du point matériel, et  $E_p(x)$  son énergie potentielle.

– On trace la courbe représentative de  $E_p(x)$ , et on peut y repérer les positions d'équilibre (stable ou instable).

– On détermine l'énergie mécanique  $E_m$  avec les conditions initiales, et on fait apparaître sur le graphe une droite horizontale correspondant à sa valeur.

– On cherche les domaines possibles pour le mouvement, c'est-à-dire les valeurs de  $x$  telles que  $E_p(x) \leq E_m$ .

⇒ Exercices 12.6, 12.11, 12.14

Considérons par exemple un point matériel repéré par le paramètre  $x$ , évoluant dans le champ de force associé à la fonction énergie potentielle ci-après (page suivante).

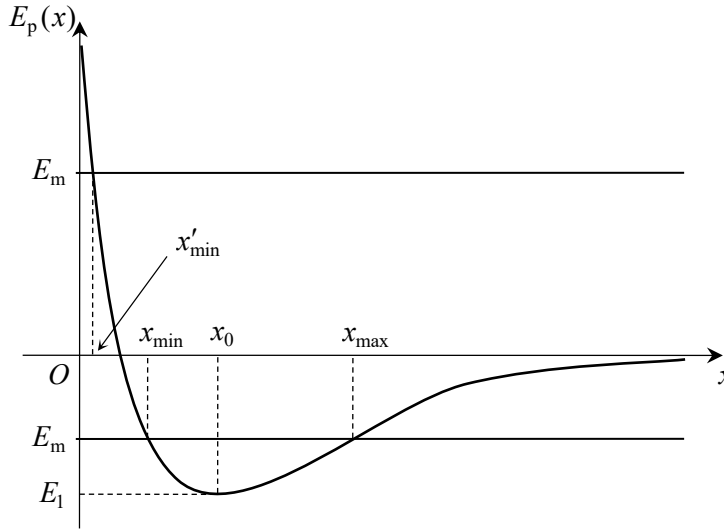
La seule position d'équilibre correspond à  $x = x_0$  et il s'agit d'un équilibre stable (minimum).

On trace une droite horizontale dont l'ordonnée est l'énergie mécanique  $E_m$  (déterminée par les conditions initiales). En fonction de sa valeur on distingue deux cas possibles :

– si  $E_1 \leq E_m < 0$ , le domaine accessible sous la droite est  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  (état lié) ;

– si  $E_m \geq 0$ , le domaine accessible est  $x'_{\min} \leq x < \infty$  (état libre).

Le cas  $E_m < E_1$  est impossible.



**□ Méthode 12.6. Établir l'expression quadratique de l'énergie potentielle au voisinage de l'équilibre**

Connaissant l'énergie potentielle totale et la position d'équilibre stable, on prend comme variable l'écart à la position d'équilibre (en utilisant si nécessaire le fait que cet écart reste faible) pour obtenir la forme caractéristique cherchée.

⇒ Exercices 12.5, 12.9, 12.14

– Considérons tout d'abord une masse  $m$  suspendue à un point  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort ( $k, \ell_0$ ).

Énergie potentielle totale :  $E_p = E_p(\text{élastique}) + E_p(\text{pesanteur}) = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 - mgx + \text{cte}$ .

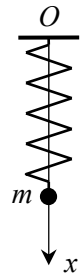
La position d'équilibre vérifie  $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0$  soit  $x_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ . On pose alors

$u = x - x_{\text{éq}}$  et on réécrit l'énergie potentielle en faisant apparaître la variable  $u$  :

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(u + \frac{mg}{k}\right)^2 - mg(u + x_{\text{éq}}) + \text{cte} = \frac{1}{2}ku^2 + umg + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 - mg(u + x_{\text{éq}}) + \text{cte}$$

soit finalement  $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \text{cte}$  après simplification et regroupement de toutes les constantes.

Nous n'avons pas eu à utiliser explicitement l'hypothèse d'un faible écart à la position d'équilibre, car la formule de l'énergie potentielle élastique utilise déjà l'hypothèse que l'élongation du ressort reste faible.

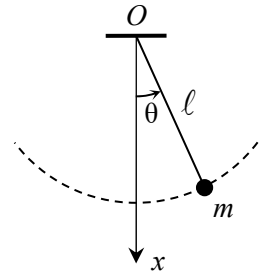


– Considérons maintenant un pendule simple, masse ponctuelle  $m$  attachée à un fil tendu de longueur  $\ell$ , et repérée par son angle  $\theta$  avec la verticale.

Énergie potentielle totale :  $E_p = -mgx + \text{cte} = -mg\ell \cos\theta + \text{cte}$ .

La position d'équilibre stable est le minimum de  $E_p$  soit  $\theta_{\text{eq}} = 0$  : la variable  $\theta$  elle-même représente donc l'écart à la position d'équilibre. Au voisinage de cette position :  $\theta \ll 1$  donc  $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ . On obtient donc

$E_p \approx \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \text{cte}$  (en regroupant les deux constantes en une seule).



**□ Méthode 12.7. Établir l'équation différentielle d'un mouvement unidimensionnel**

L'équation différentielle du mouvement d'un point matériel en évolution unidimensionnelle (de coordonnée  $x$ ) peut s'obtenir par application de l'un des théorèmes énergétiques sous forme instantanée, en éliminant la solution correspondant à l'équilibre ( $\dot{x} = 0$ ).

⇒ Exercice 12.3, 12.8, 12.9, 12.12 à 12.15

Le pendule ci-dessus est en évolution conservative, car il n'a aucun travail de force non conservative. Son énergie mécanique reste donc constante :

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 + \text{cte} = \text{cte}$  donc  $\frac{dE_m}{dt} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\theta\dot{\theta} = 0$ , ce qui donne

soit  $\dot{\theta} = 0$  (équilibre), soit  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$  en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Le travail du poids entre deux points $A$ et $B$ ne dépend pas de la trajectoire suivie par le point matériel entre $A$ et $B$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le travail de la réaction d'un support sur un point matériel est toujours nul.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La puissance d'une force est toujours positive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Le théorème de l'énergie cinétique doit être appliqué dans un référentiel galiléen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Le théorème de l'énergie cinétique doit être projeté sur trois axes pour donner les équations du mouvement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Les forces non conservatives sont toujours des forces de frottement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. L'énergie potentielle d'un point matériel est définie à une constante additive près.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Un point matériel dans un champ de force conservative est en équilibre stable quand son énergie potentielle est maximale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un point matériel dans un champ de force conservative est dans un état lié si son énergie potentielle est négative.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Pour un système matériel indéformable, on peut appliquer le TÈC en tenant compte uniquement des forces extérieures.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



# ■ ■ Énoncé des exercices

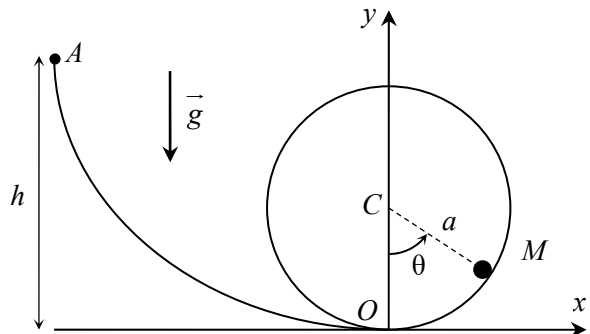
## ■ Théorème de l'énergie cinétique

### □ Exercice 12.1. Toto le skieur

Toto descend une piste de ski d'une longueur  $AB = 50$  m et inclinée d'un angle  $\alpha = 25^\circ$  par rapport à l'horizontale. Il est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la réaction  $\vec{R}$  de la piste, qui se décompose en une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$  (colinéaire et de sens contraire au mouvement) ; les normes de ces composantes sont liées par la relation  $T = \mu N$ , avec  $\mu = 0,10$ . La masse de Toto est de 65 kg. On prendra  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

1. Exprimer et calculer le travail des forces  $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  lors de cette descente.
2. Sachant qu'il est parti du point  $A$  sans vitesse initiale, quelle sera sa vitesse lors de son passage en  $B$  ?

### □ Exercice 12.2. Acrobaties



Un adepte du roller, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , se lâche sans vitesse initiale depuis le point  $A$  d'une rampe, situé à une hauteur  $h$  au-dessus de  $O$ , point le plus bas de la rampe. À partir de  $O$  la rampe a une forme cylindrique de rayon  $a$  : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical  $(Oxy)$ , et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.

On note  $\vec{g} = -g\vec{e}_y$  l'accélération de la pesanteur, et on désigne par  $\vec{e}_r = \frac{\overline{CM}}{CM}$  le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.

1. Déterminer la norme  $v_0$  de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point  $O$ .
2. Déterminer la norme  $v$  de la vitesse du patineur en un point  $M$  quelconque du cercle, repéré par l'angle  $\theta$ .
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur est :

$$\vec{R} = -mg \left( \frac{2h}{a} + 3 \cos \theta - 2 \right) \vec{e}_r .$$

4. a) Que se passe-t-il si, en un certain point du cylindre,  $v$  s'annule avec  $R$  non nulle ? (Répondre sans calcul.)
- b) Que se passe-t-il si c'est la réaction  $R$  qui s'annule avec  $v$  non nulle ? (Répondre sans calcul.)
5. Déterminer la valeur minimale que doit avoir la hauteur  $h$  pour que le patineur puisse faire un tour complet du cylindre.

□ **Exercice 12.3. Distance de freinage d'une moto**

Madame Michu (de masse  $m = 70$  kg) teste une moto (de masse  $m'$ ) sur une route rectiligne et horizontale. À partir d'un instant  $t = 0$  où sa vitesse est  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , elle freine de façon constante jusqu'à l'arrêt de la moto. L'action conjointe des freins et de la route peut être modélisée comme une force de frottement solide, colinéaire et de sens contraire à la vitesse et de norme constante  $F$  (indépendante de la vitesse).

- Par application du théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrale, calculer la distance de freinage  $d$ , c'est-à-dire la distance parcourue par la moto jusqu'à l'arrêt.
- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sous forme instantanée, déterminer l'équation horaire du mouvement de la moto. De quel type de mouvement s'agit-il ?
- Les essais ont donné les valeurs suivantes :

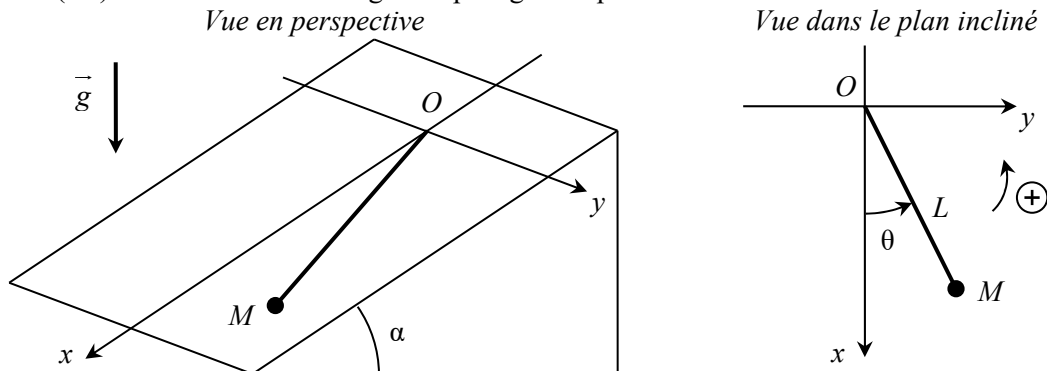
	$m'$ (kg)	$v_0$ (km·h <sup>-1</sup> )	$d$ (m)
Suzuki XF650	162	90	39
		130	79
Yamaha R1	206	90	34
		130	71

Ces valeurs confirment-elles la formule précédente ?

Déterminer pour les deux motos la norme  $F$  de la force de freinage, et celle de l'accélération subie par Madame Michu pendant le freinage ; comparer à  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

□ **Exercice 12.4. Mouvement sur un plan incliné \* \***

Une masse  $m$ , assimilée à un point matériel  $M$ , est reliée à un point fixe  $O$  par un fil inextensible, de longueur  $L$  et de masse négligeable. D'autre part,  $M$  repose sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale ; dans ce plan on définit un axe  $(Oy)$  horizontal et un axe  $(Ox)$  descendant selon la ligne de plus grande pente.



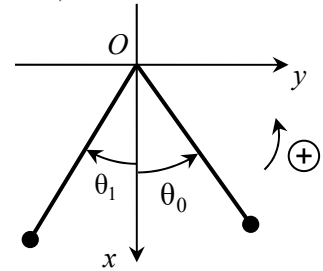
Le mouvement de  $M$  dans le plan  $(Oxy)$  est repéré par l'angle  $\theta$  du fil avec l'axe  $(Ox)$ .

À l'instant initial ( $t = 0$ ),  $M$  est lâchée sans vitesse initiale avec un angle  $\theta_0$  (positif).

- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de  $M$ , à une constante près, en fonction de la variable  $x$  puis en fonction de la variable  $\theta$ .

(Attention, le résultat de ce calcul sera utilisé dans toute la suite ! On prendra donc le temps de le faire soigneusement, en s'aidant d'un ou de plusieurs schémas.)

- On néglige tout frottement de l'air, mais on suppose que le contact entre le plan incliné et la masse se fait avec un coefficient de frottement dynamique  $f$  assez important : il y a donc une force de frottement solide  $\overline{R}_t$ , colinéaire et de sens contraire à la vitesse, et de norme  $R_t = f R_n$  où  $\overline{R}_n$  est la réaction normale. La masse s'arrête alors rapidement, après avoir effectué seulement une demi-oscillation (c'est-à-dire qu'elle s'est déplacée toujours dans le même sens). Son angle final est noté  $\theta_1$  et il est négatif (avec  $|\theta_1| < |\theta_0|$ ).

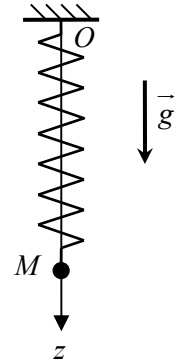


- Calculer les travaux des différentes forces qui s'exercent sur  $M$ , entre la position initiale et la position finale.
- En déduire l'expression du coefficient de frottement  $f$  en fonction des angles  $\alpha$ ,  $\theta_0$  et  $\theta_1$ .

## ■ Énergie potentielle et énergie mécanique

### ■ Exercice 12.5. Masse au bout d'un ressort vertical\*

Considérons un objet  $M$  de masse  $m$ , accrochée à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , se déplaçant sans frottements le long de l'axe vertical ( $Oz$ ). On repère la position de la masse  $M$  par sa cote  $z(t)$ . On note  $\overline{g} = g \overline{e}_z$  l'accélération de la pesanteur.



### 1. Équation du mouvement et équilibre

- Établir l'équation différentielle vérifiée par la cote  $z(t)$  de la masse  $M$ .
- En déduire sa position d'équilibre  $z_{\text{eq}}$ .
- Posons  $u(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$ . Quelle est l'équation différentielle dont  $u(t)$  est solution ? Commenter le résultat obtenu.
- L'objet est lâché à  $t = 0$  depuis sa position d'équilibre avec une vitesse initiale  $\vec{v}(0) = v_0 \overline{e}_z$ . Déterminer l'expression de  $u(t)$  à chaque instant.

### 2. Énergie

Le mouvement de la masse étant vertical, son énergie potentielle comporte non seulement le terme d'énergie potentielle élastique  $E_{pe}$ , mais aussi une énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$ .

- Donner l'expression de ces deux énergies potentielles.
- Montrer que l'énergie potentielle totale peut être mise sous la forme  $E_p = \frac{1}{2} k u^2 + \text{cte}$ .

- c) En déduire l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  en fonction de  $m$ ,  $v_0$ , de la pulsation propre  $\omega_0$  et d'une éventuelle constante additive. Commenter le résultat obtenu.

### □ Exercice 12.6. Interaction électrique

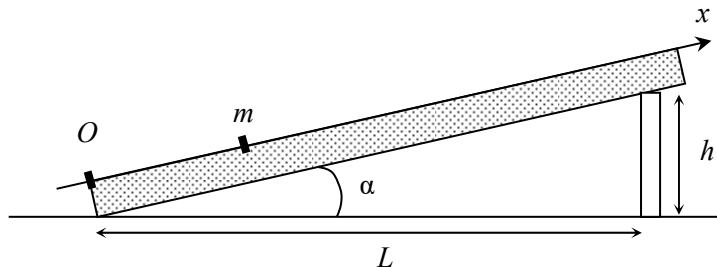
Une particule  $\alpha$  (noyau d'hélium de masse  $m$  et de charge  $q = +2e$ ) est lancée vers un noyau immobile de charge  $Q = +Ze$  et placé en  $O$ . La trajectoire est portée par la demi-droite  $(Ox)$ , la particule venant de l'infini sur l'axe  $(Ox)$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

La charge  $Q$  placée en  $O$  exerce sur la particule  $\alpha$  une force de Coulomb :  $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\overline{OM}}{OM^3}$ .

1. Exprimer l'énergie potentielle électrique dont dérive la force  $\vec{F}$ . On prendra l'énergie potentielle nulle à l'infini.
2. En déduire l'énergie mécanique de la particule  $\alpha$ . Montrer que cette énergie mécanique est constante au cours du mouvement et calculer sa valeur.
3. Déterminer la distance minimale  $d$  entre la particule  $\alpha$  et le noyau.

### □ Exercice 12.7. Étude expérimentale d'une force \* \*

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne  $(Ox)$ , incliné par une cale de hauteur  $h$  d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine  $O$ , et un autre aimant, de masse  $m$ , est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour  $m$  d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée  $\vec{F}$ , prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids  $\vec{P}$ , qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

1. Faire un inventaire des forces à l'équilibre sur un schéma.
2. Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme :  $\vec{F}(x) = k \left( \frac{x_0}{x} \right)^n \vec{e}_x$ , avec  $k > 0$  et  $n$  entier naturel. Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  en fonction de  $x_0$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $h$  et  $n$  dans le cas des petits angles ( $h \ll L$ ). Cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

3. On mesure  $x_{\text{éq}}$  pour différentes cales, puis on note les valeurs de  $\ln h$  en fonction de  $\ln\left(\frac{x_{\text{éq}}}{x_0}\right)$ . En prenant  $x_0 = 1,00 \text{ m}$ , déduire de ces mesures les valeurs de  $n$  et de  $k$ .  
On donne :  $L = 120 \text{ cm}$ ,  $m = 189 \text{ g}$  et  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\ln\left(\frac{x_{\text{éq}}}{x_0}\right)$	$\ln h$
-2,19	-4,61
-2,39	-3,91
-2,56	-3,22
-2,63	-2,81
-2,73	-2,53
-2,76	-2,30
-2,81	-2,12

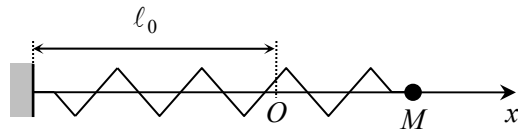
4. Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale  $E_p(x)$  de  $M$ , à une constante additive près, en fonction de  $x$ ,  $x_0$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $h$  et  $n$ , puis en fonction de  $x$ ,  $x_0$ ,  $x_{\text{éq}}$ ,  $k$  et  $n$  seulement.

5. Déterminer si l'équilibre est stable ou instable.

## ■ Mouvement conservatif unidimensionnel

### □ Exercice 12.8. Ressort horizontal

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige, le long de l'axe  $(Ox)$  horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , l'autre extrémité étant fixe.



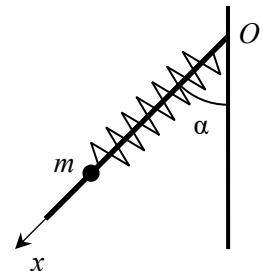
L'origine  $O$  coïncide avec sa position d'équilibre. À l'instant  $t = 0$ , on écarte  $M$  d'une distance  $X_0 = 8,0 \text{ cm}$  et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'expression de l'énergie mécanique de  $M$ .
2. Montrer que cette énergie mécanique est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Établir l'équation différentielle du mouvement de  $M$ .
4. Donner sa solution et calculer la période des oscillations.
5. Avec quelle vitesse le point  $M$  repasse-t-il par le point  $O$  ?

Données :  $m = 250 \text{ g}$  ;  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### □ Exercice 12.9. Ressort sur tige inclinée

Considérons une masse  $m$  accrochée à un ressort  $(k, \ell_0)$  et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. On définit un axe  $(Ox)$  selon la direction de la tige, avec l'origine  $O$  est prise à l'autre extrémité du ressort.



#### 1. Énergie et équilibre

- a) Déterminer l'énergie potentielle totale  $E_p(x)$  de la masse  $m$ .
- b) En déduire la position d'équilibre stable  $x_{\text{éq}}$ .
- c) Exprimer l'énergie potentielle en fonction de  $u = x - x_{\text{éq}}$ .

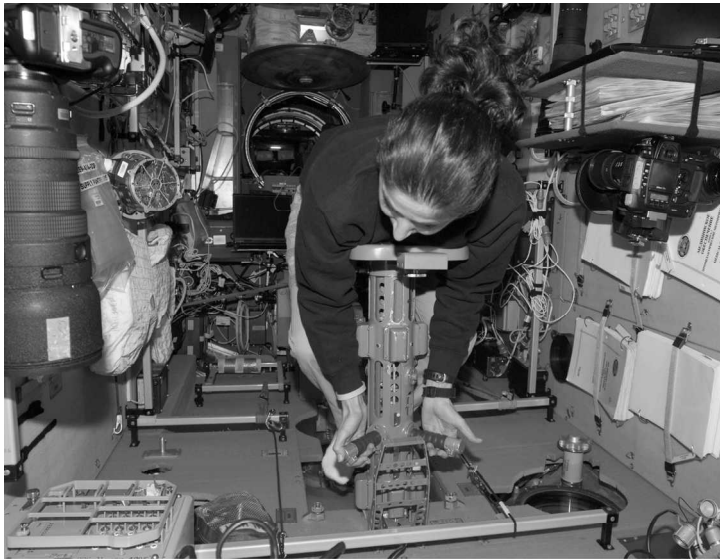
## 2. Oscillations

- Établir l'équation différentielle du mouvement de la masse.
- En déduire la période des petites oscillations.

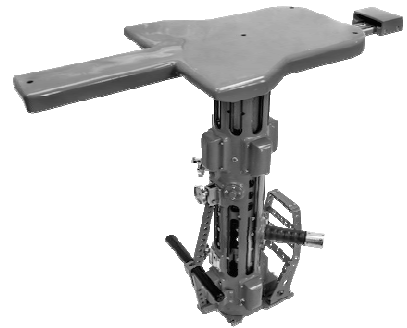
### □ Exercice 12.10. Comment se peser dans une station spatiale ? Résolution de problème

*La question posée n'est pas guidée et requiert la mise en œuvre d'une démarche de résolution. Celle-ci doit s'appuyer sur l'analyse des données fournies, et doit être soigneusement détaillée.*

Dans une station spatiale, les astronautes sont en impesanteur et il ne leur est donc pas possible d'utiliser un pèse-personne traditionnel. Il leur faut pourtant se peser régulièrement afin de suivre l'évolution de leur forme physique. Le problème a été résolu avec différents appareils : celui utilisé actuellement dans la Station spatiale internationale (ISS), de conception soviétique, ressemble à une sorte de tabouret sur lequel les astronautes s'agrippent. Il est muni d'un ressort qui permet de faire osciller l'ensemble {tabouret + astronaute}.



ISS021E014503



*Le dispositif de mesure de masse IM-01M*

*L'astronaute américaine Nicole Stott utilisant le dispositif de mesure de masse lors de la mission ISS-21*

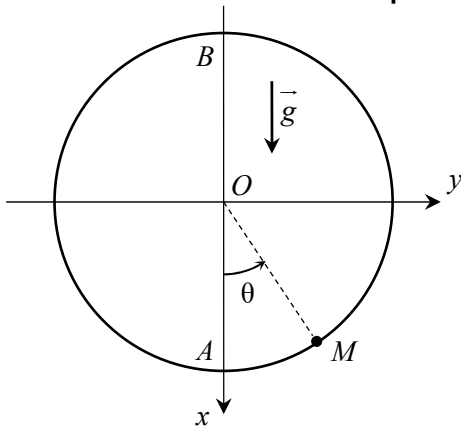
Deux astronautes se pèsent en utilisant cette méthode. Dans un premier temps, ils font osciller le tabouret à vide afin d'étalonner la machine : le tableau d'affichage indique la période des oscillations  $T_0 = 0,75$  s, et ils règlent manuellement la valeur de la masse sur zéro.

Le premier astronaute se pèse ensuite. Le tableau d'affichage indique la période  $T_1 = 2,75$  s ainsi que la masse de l'astronaute, calculée par le logiciel :  $m_1 = 75,0$  kg.

Le deuxième astronaute se pèse et le tableau d'affichage indique la période des oscillations  $T_2 = 2,87$  s, mais l'affichage de la masse est soudain défectueux.

En attendant que les astronautes réparent le tableau d'affichage, pouvez-vous déterminer la masse du deuxième astronaute ?

### □ Exercice 12.11. Équilibre et mouvement sur un cercle\*

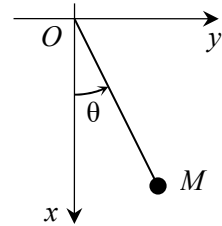


Un anneau de masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$ , peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon  $r$ . L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme  $v_0$  depuis le point  $A$ , point le plus bas du cerceau. On repère sa position au cours de son mouvement par l'angle  $\theta$  avec la verticale descendante.

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de  $M$  en fonction de  $\theta$ .
2. Tracer la courbe  $E_p(\theta)$  et déterminer les positions d'équilibre de  $M$ .
3. On cherche à déterminer le mouvement possible de  $M$  selon la vitesse initiale.
  - a) Montrer que l'énergie mécanique de  $M$  se conserve et donner sa valeur.
  - b) En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de  $v_0$ . Préciser la valeur critique de  $v_0$  séparant ces deux cas.

### □ Exercice 12.12. Oscillations d'un pendule simple\*\*

Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , lié à l'extrémité d'un fil de longueur  $L$  et de masse nulle, l'autre extrémité étant fixe en un point  $O$ . On suppose que le mouvement a lieu dans le plan vertical  $(Oxy)$ , et on repère la position de  $M$  avec l'angle polaire  $\theta$  (voir figure), l'angle  $\theta$  restant toujours faible. À l'instant  $t = 0$ , on lâche la masse depuis un angle  $\theta_0$ , sans vitesse initiale.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$ , en utilisant le théorème de l'énergie cinétique sous forme instantanée. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ .
2. On résout souvent cette équation en utilisant l'approximation des petits angles :  $\sin \theta \approx \theta$ . Établir, dans ce cas, l'expression de  $\theta(t)$  en fonction de  $\theta_0$ ,  $\omega_0$  et  $t$ .
3. On souhaite résoudre numériquement l'équation exacte de la question 1. On écrit donc le code suivant en Python.

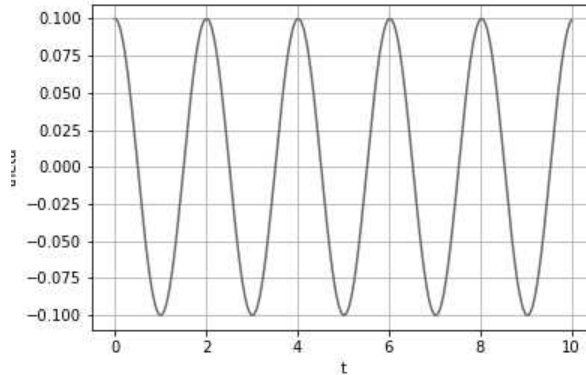
```
import scipy.integrate as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], -omega_0**2*np.sin(X[0])]

omega_0 = 3.13 # unité S.I.
Y0 = [0.1, 0] # Conditions initiales
T = np.linspace(0,10,1001) #Nombre de points temporels
Y = sp.odeint(F,Y0,T) # application de la méthode odeint
```

```
plt.plot(T,Y[:,0]) # sélectionne la 1ère composante de chaque vecteur
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('theta')
plt.grid()
plt.show()
```

L'exécution de ce code permet d'obtenir la courbe suivante :

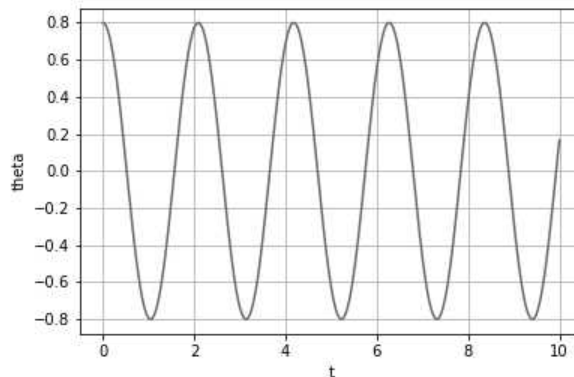


- a) Expliquer le principe de la méthode `odeint`.
- b) Quelle est la valeur du pas de cette méthode numérique ?
- c) Quelle est la valeur de  $L$  (longueur du pendule) dans cette simulation ?

4. On modifie les conditions initiales de la façon suivante :

```
Y0 = [0.8, 0] # Conditions initiales
```

Les autres parties du code ne sont pas modifiées. On obtient alors la courbe suivante :



Peut-on dire que la période est indépendante de l'amplitude des oscillations ? Comparer au modèle de l'oscillateur harmonique.

5. On prend à présent en compte les frottements de l'air, que l'on modélise par une force  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du point  $M$ , et  $\alpha$  une constante positive.

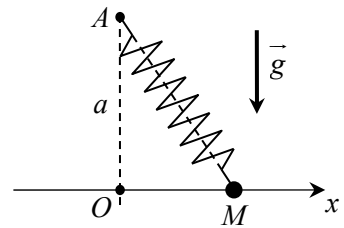
- a) Montrer que  $\theta(t)$  vérifie une équation différentielle du type :  $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ .
- b) On veut obtenir la courbe  $\theta(t)$  avec  $\lambda = 0,10$  unité SI et  $\omega_0 = 3,13$  unité SI en utilisant la méthode `odeint`. Indiquer les modifications qu'il faut apporter au code de la question 4.
- c) Tracer la courbe.



## ■ Oscillations au voisinage d'une position d'équilibre stable

### □ Exercice 12.13. Oscillation le long d'une tige \*

Un petit anneau, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe  $(Ox)$ . Il est relié à un ressort (longueur à vide  $\ell_0$ , raideur  $k$ ) dont l'autre extrémité est fixée en  $A$ . La distance de  $A$  à la tige est  $AO = a$ .



1. Exprimer l'énergie potentielle totale  $E_p(x)$ .

2. Rechercher les différentes positions d'équilibre et étudier leur stabilité.

3. On étudie alors les oscillations autour de  $O$  dans le cas où  $a > \ell_0$ . Établir l'équation différentielle du mouvement.

4. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $x$  (c'est-à-dire en négligeant les termes en  $x^2, x^3, \dots$ ), en déduire la période des petites oscillations.

### □ Exercice 12.14. Molécule diatomique \*

Une molécule de monoxyde de carbone (CO) est modélisée par deux masses ponctuelles,  $m_1$  pour l'atome de carbone et  $m_2$  pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera ici que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe  $(Ox)$ . On néglige la gravitation.



1. L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes est bien représentée par l'équation empirique de Morse :  $V(r) = V_0 [1 - e^{-\beta(r-r_0)}]^2$  où  $r$  est la distance des noyaux des deux atomes et où  $V_0, \beta$  et  $r_0$  sont des constantes positives, avec  $\beta r_0 \gg 1$ .

a) Tracer un graphe de  $V(r)$ , en faisant bien apparaître  $V_0$  et  $r_0$ .

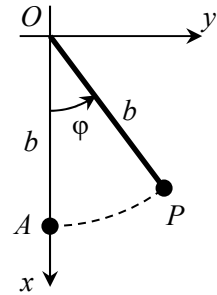
b) Que représentent physiquement ces deux constantes ? Quelle est la dimension de  $\beta$  ?

2. Montrer qu'il existe un domaine de distances où l'énergie potentielle d'interaction peut être modélisée par celle d'un ressort de constante de raideur  $k$  que l'on précisera.

3. Dans le cadre de cette approximation, déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'atome d'oxygène, et en déduire la fréquence des petites oscillations.

### □ Exercice 12.15. Équilibre et oscillations d'un électromètre\* \*

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse  $m$  ; leur rayon est suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. La boule  $A$  est fixe ; l'autre boule  $P$  est à l'extrémité d'un fil de longueur  $b$ , dont le point de suspension  $O$  est à la distance  $b$  au-dessus de  $A$ . L'axe  $(Ox)$  est la verticale descendante du référentiel galiléen d'étude ; l'axe  $(Oy)$  est horizontal, et on envisage uniquement des mouvements de  $P$  dans le plan  $(Oxy)$ .



On note  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.

Dans un premier temps, la boule  $P$  n'est pas chargée, et la boule  $A$  porte une charge électrique  $2q$ . On met alors les deux boules en contact, et la charge se partage entre les deux boules, qui ont désormais la même charge  $q$ . Il en résulte une déviation du fil  $OP$  par rapport à la verticale.

1. On donne l'expression de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux

$$\text{charges } q_1 \text{ et } q_2 \text{ distantes de } r : E_{\text{pe}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}.$$

a) Exprimer l'énergie potentielle électrostatique  $E_{\text{pe}}$  de la boule  $P$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $q$ ,  $b$  et de l'angle  $\varphi$  entre la verticale et le fil  $OP$ . Il est conseillé de faire apparaître l'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

b) Exprimer l'énergie potentielle totale  $E_p$  de la boule  $P$ .

2. Déterminer la valeur  $\varphi_e$  de l'angle  $\varphi$  à l'équilibre.

3. Discuter la stabilité de cet équilibre.

4. Dans le cas d'un équilibre stable, déterminer la période des petites oscillations autour de  $\varphi_e$ .

On introduira pour cela la variable  $\theta = \varphi - \varphi_e$  telle que  $\theta \ll 1$ .

*D'après ENAC*

### ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 12.4.* Pour l'énergie potentielle de pesanteur, faire un troisième schéma dans un plan *vertical*, et utiliser comme intermédiaire de calcul une cote verticale (ou altitude) ; il faut ensuite projeter *deux fois*.

*Exercice 12.6.* Question 3 : lorsque la distance est minimale, la vitesse est nulle.

*Exercice 12.7.* Question 4 : pour l'énergie potentielle de pesanteur, introduire comme intermédiaire un axe vertical, puis projeter la cote sur l'axe  $(Ox)$ .

*Exercice 12.10.* Analyser la ou les forces exercée(s) sur le système {tabouret + astronaute}, et obtenir une équation de son mouvement avec la conservation de l'énergie mécanique.

*Exercice 12.13.* Faire un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	vrai

2. Il peut être non nul si la réaction a une composante tangentielle (frottement solide), ou si le support est lui-même en mouvement (par exemple un plateau qui soulève l'objet).
3. Son signe dépend des orientations relatives de la force et de la vitesse.
5. Ce théorème donne directement une équation scalaire.
6. La tension d'un fil, la réaction normale d'un support sont aussi des forces non conservatives, car elles ne dépendent pas que de la position, et il arrive qu'elles travaillent !
8. Une position d'équilibre stable correspond à un *minimum* de l'énergie potentielle.
9. Un point matériel dans un champ de force conservative est dans un état lié si la condition  $E_p(x) \leq E_m(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  limite les valeurs de  $x$  vers l'infini.

### □ Les erreurs classiques

- Comme pour le PFD, l'application d'un théorème énergétique nécessite une analyse préalable détaillée des différentes forces et du mouvement : ne pas négliger cette étape !
- Ne pas calculer le travail d'une force avec un simple produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{AB}$  si la force n'est pas un *vecteur constant* : il faut dans ce cas calculer une intégrale.
- Éviter de confondre l'énergie potentielle en un point (que l'on utilise par exemple pour étudier l'équilibre) et la *variation* de l'énergie potentielle entre deux points (que l'on peut utiliser dans le TÈC sous forme intégrale, pour calculer la variation de la norme de la vitesse).
- Attention à l'expression de l'énergie potentielle élastique : il faut bien exprimer l'allongement du ressort ( $\ell - \ell_0$ ) en fonction des notations de l'énoncé, et ne pas écrire aveuglément  $\frac{1}{2}kx^2$  qui est rarement la bonne expression.
- Dans un contact sans frottement, la réaction du support est normale *au support*, mais elle n'est pas forcément normale *au mouvement* puisque le support peut éventuellement se déplacer : dans ce cas, la réaction normale travaille.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 12.1

1. Le poids est une force connue mais la réaction normale est inconnue *a priori*. Pour calculer son travail il faut tout d'abord la déterminer (et on en déduira la réaction tangentielle).

Pour cela on applique le PFD au skieur dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{N} = m\vec{a}$$

avec  $\vec{P} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y$ ,  $\vec{N} = N \vec{e}_y$  et  $\vec{T} = T \vec{e}_x = \mu N \vec{e}_x$ . Projection sur l'axe  $(Oy)$ , orthogonal au mouvement :  $-mg \cos \alpha + N = 0$  d'où  $N = mg \cos \alpha$  et  $T = \mu mg \cos \alpha$ .

On peut maintenant calculer les travaux de ces trois forces, qui sont toutes constantes.

$$W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = (-mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y) \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{P}) = +mg \sin \alpha AB}. \quad \text{AN}$$

$$\boxed{W(\vec{P}) = +13 \text{ kJ}}. \quad W(\vec{N}) = \vec{N} \cdot \vec{AB} = +mg \cos \alpha \vec{e}_y \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{N}) = 0}.$$

$$W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{AB} = +\mu mg \cos \alpha \vec{e}_x \cdot (-AB \vec{e}_x) \quad \text{soit} \quad \boxed{W(\vec{T}) = -\mu mg \cos \alpha AB}. \quad \text{AN} \quad \boxed{W(\vec{T}) = -2,9 \text{ kJ}}.$$

2. Théorème de l'énergie cinétique entre les positions  $A$  et  $B$  :

$$\Delta E_c(M)_{\mathbb{R}} = W(\vec{P}) + W(\vec{N}) + W(\vec{T}) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - 0 = +mg \sin \alpha AB + 0 - \mu mg \cos \alpha AB \quad \text{d'où on}$$

$$\text{tire} \quad \boxed{v_B = \sqrt{2g AB(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}. \quad \text{AN} \quad \boxed{v_B = 18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}.$$

⇒ Méthode 12.1

## Exercice 12.2

1. On étudie le point matériel  $M$  (de masse  $m$ ) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Forces appliquées : poids  $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$  ; réaction  $\vec{R}$  de la rampe, réduite à une seule composante normale car il n'y a pas de frottement. Théorème de l'énergie cinétique entre le point  $A$  et le

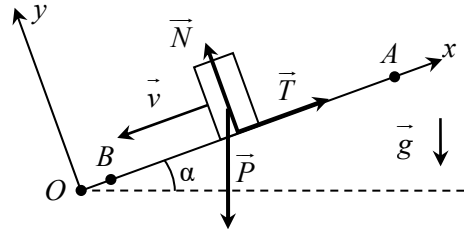
$$\text{point } O : \frac{1}{2} m v_0^2 - 0 = W(\vec{P})_{A \rightarrow O} + W(\vec{R})_{A \rightarrow O}.$$

$$W(\vec{R})_{A \rightarrow O} = 0 \quad \text{car cette force est toujours orthogonale au déplacement.}$$

$$W(\vec{P})_{A \rightarrow O} = \vec{P} \cdot \vec{AO} = -mg \vec{e}_y \cdot (-h \vec{e}_y - x_A \vec{e}_x) = +mgh. \quad \text{Donc} \quad \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh \quad \text{d'où} \quad \boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}.$$

⇒ Méthode 12.1

2. TÉC entre  $A$  et  $M$  :  $\frac{1}{2} m v^2 - 0 = W(\vec{P})_{A \rightarrow M} + W(\vec{R})_{A \rightarrow M}$  avec toujours  $W(\vec{R})_{A \rightarrow M} = 0$



et  $W(\vec{P})_{A \rightarrow M} = \vec{P} \cdot \vec{AM} = -mg \vec{e}_y \cdot (-h \vec{e}_y - x_A \vec{e}_x + a(1 - \cos \theta) \vec{e}_y) = +mg(h + a(\cos \theta - 1))$ .

On obtient donc  $v = \sqrt{2g(h + a(\cos \theta - 1))}$ .

**3. PFD :**  $m \vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$ . Lorsque  $M$  est sur le cylindre,  $\vec{a}(M) = -a \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ ,  $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$  et  $\vec{R} = R_r \vec{e}_r$ . La projection du PFD sur  $\vec{e}_r$  donne donc :  $-m a \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + R_r$ . Or  $v^2 = 2g(h + a(\cos \theta - 1)) = a^2 \dot{\theta}^2$  donc on obtient finalement :

$$R_r = -mg \cos \theta - m \frac{2g}{a} (h + a(\cos \theta - 1)) \text{ soit } \vec{R} = -mg \left( \frac{2h}{a} + 3 \cos \theta - 2 \right) \vec{e}_r.$$

*✎ Seul le PFD permet de déterminer une force qui ne travaille pas, puisque dans tous les théorèmes énergétiques elle disparaît.*

**4. a)** Si  $v$  s'annule, le patineur s'arrête en un certain point du cylindre et il faut alors distinguer deux cas. Soit il est sur la moitié inférieure du cylindre  $\left( \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ , alors le patineur redescend le long du cylindre et remontera finalement jusqu'au point  $A$  (puis oscillera). Soit il est déjà arrivé dans la partie supérieure  $\left( \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \right)$ , donc sous la piste : alors il va quitter la piste et tomber verticalement jusqu'à un point de la partie inférieure de la piste, et repartira ensuite vers la gauche.

**b)** Si  $R$  s'annule (puis change de sens d'après les calculs), c'est que l'hypothèse du contact (unilatéral) entre le patineur et la piste n'est plus valable, donc que le patineur quitte la piste. Il se retrouve alors en chute libre avec une vitesse initiale non nulle, donc il suivra une trajectoire parabolique jusqu'au moment où il touche à nouveau la piste.

**5.** Le patineur pourra faire un tour complet si aucun des deux cas précédents ne se présente. Il faut donc que les valeurs de  $v$  et  $R_r$  restent non nulles jusqu'à  $\theta = \pi$  :  $v_{\min} = \sqrt{2g(h - 2a)} > 0$  donc  $h > 2a$ , et  $R_{\min} = mg \left( \frac{2h}{a} - 5 \right) > 0$  donc  $h > \frac{5}{2}a$  (la seconde inégalité implique la première).

### Exercice 12.3

**1.** Forces appliquées au système {Madame Michu, moto}, de masse  $m_{\text{tot}} = m + m'$ , dans le référentiel terrestre supposé galiléen : poids  $\vec{P} = -m_{\text{tot}} g \vec{e}_z$ , orthogonal au mouvement ; réaction normale de la route  $\vec{R}_n = R_z \vec{e}_z$ , orthogonale au mouvement ; force de frottement  $\vec{F} = -F \vec{e}_x$ . TÉC (intégral) entre le départ ( $A$ ) et l'arrêt ( $B$ ) :  $\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{F})$

$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v_0^2 = 0 + 0 + \vec{F} \cdot \vec{AB} = -Fd \text{ d'où } d = \frac{m_{\text{tot}} v_0^2}{2F}.$$

$\Rightarrow$  Méthode 12.1

$$2. \text{ T\u00c9C instantan\u00e9} : \frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}_n) + \mathcal{P}(\vec{F}) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_{\text{tot}} \dot{x}^2 \right) = 0 + 0 + \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow m_{\text{tot}} \dot{x} \ddot{x} = -F \dot{x} \text{ d'o\u00f9 } \ddot{x} = -\frac{F}{m_{\text{tot}}} = \text{cte (en excluant la solution } \dot{x} = 0, \text{ puisque } v_0 \neq 0).$$

C'est donc un mouvement rectiligne uniform\u00e9ment retard\u00e9 :  $x = -\frac{F}{2m_{\text{tot}}} t^2 + v_0 t + x_0$ .

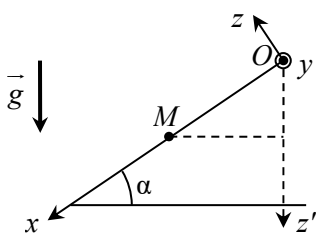
\(\Rightarrow\) *M\u00e9thode 12.7*

3. On v\u00e9rifie que, pour chaque moto, le rapport  $\frac{v_0^2}{d}$  est le m\u00eame dans les deux exp\u00e9riences (\u00e0 3% pr\u00e8s pour la Suzuki, moins de 1% pour la Yamaha). Le calcul donne alors : pour la Suzuki,  $F = 1900 \text{ N}$  et  $|\ddot{x}| = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ; pour la Yamaha,  $F = 2500 \text{ N}$  et  $|\ddot{x}| = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Dans les deux cas,  $|\ddot{x}| < g$  donc l'organisme peut supporter cette acc\u00e9l\u00e9ration sans probl\u00eame.

### Exercice 12.4

1.



On introduit comme interm\u00e9diaire de calcul un axe ( $Oz$ ) vertical descendant.

Alors  $E_{pp} = -mgz' + \text{cte}$  soit  $E_{pp} = -mgx \sin \alpha + \text{cte}$ .

Autre m\u00e9thode :  $dE_{pp} = -\vec{P} \cdot d\vec{OM}$

$$= -mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y)$$

$$= -mg \sin \alpha dx \text{ d'o\u00f9 } E_{pp} = -mgx \sin \alpha + \text{cte}.$$

\(\Rightarrow\) *M\u00e9thode 12.3*

Or le sch\u00e9ma dans le plan inclin\u00e9 permet de lire  $x = L \cos \theta$ , d'o\u00f9 l'expression :

$$E_{pp} = -mgL \cos \theta \sin \alpha + \text{cte}.$$

2.a) Forces exerc\u00e9es sur  $M$  : poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  d\u00e9rivant de  $E_{pp}$ ; tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ ; r\u00e9action du plan inclin\u00e9  $\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$  avec  $\vec{R}_n = R_n \vec{e}_z$  (soit  $R_n = R_z > 0$  car la liaison est unilat\u00e9rale) et  $\vec{R}_t = R_0 \vec{e}_\theta = \pm f R_n \vec{e}_\theta$  :  $\vec{R}_t = +f R_n \vec{e}_\theta$  lorsque  $\theta$  diminue.

Travail du poids :  $W(\vec{P}) = E_{pp}(\theta_0) - E_{pp}(\theta_1)$  soit  $W(\vec{P}) = -mgL \sin \alpha (\cos \theta_0 - \cos \theta_1)$ .

Travail de la tension :  $W(\vec{T}) = 0$  car elle est constamment orthogonale au d\u00e9placement  $d\vec{OM} = L d\theta \vec{e}_\theta$ . Travail de la r\u00e9action normale :  $W(\vec{R}_n) = 0$  pour la m\u00eame raison.

Travail de la r\u00e9action tangentielle :

$$W(\vec{R}_t) = \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} \vec{R}_t \cdot d\vec{OM} = + \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} f R_n \vec{e}_\theta \cdot L d\theta \vec{e}_\theta = +fL \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} R_n d\theta. \text{ Pour calculer cette}$$

int\u00e9grale il faut d\u00e9terminer la r\u00e9action normale, en projetant le PFD sur  $\vec{e}_z$  :  $m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{R}_t + \vec{T}$  d'o\u00f9  $0 = -mg \cos \alpha + R_n + 0 + 0$  soit  $R_n = mg \cos \alpha$ .

Alors  $W(\vec{R}_t) = fLmg \cos \alpha \int_{\theta_0 \rightarrow \theta_1} d\theta$  soit  $W(\vec{R}_t) = fLmg \cos \alpha (\theta_1 - \theta_0)$  ( $< 0$ ).

⇒ Méthodes 12.1 et 12.2

**b)** Théorème de l'énergie cinétique (intégral) entre les positions  $\theta_0$  et  $\theta_1$  :

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W(\vec{R}_n) + W(\vec{R}_t)$$

$$\Leftrightarrow 0 = -mgL \sin \alpha (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) + 0 + 0 + fLmg \cos \alpha (\theta_1 - \theta_0) \text{ d'où } f = \tan \alpha \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_0}{\theta_0 - \theta_1}.$$

### Exercice 12.5

**1. a)** Les forces appliquées sur  $M$  sont : la force de rappel élastique  $\vec{T} = -k(z - \ell_0)\vec{e}_z$  et le poids  $\vec{P} = mg\vec{e}_z$ . Le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit :  $m\vec{a}(M) = \vec{T} + \vec{P}$ . En projection sur  $\vec{e}_z$ , on obtient l'équation du mouvement :  $m\ddot{z} = -k(z - \ell_0) + mg$  soit

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 + g.$$

**b)** À l'équilibre, on a  $z = z_{\text{éq}}$  et  $\ddot{z} = 0$ , d'où  $z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$ .

*On trouve bien  $z_{\text{éq}} > \ell_0$  : la longueur à l'équilibre avec une masse accrochée au bout du ressort est supérieure à la longueur du ressort à vide (sans la masse).*

**c)** Si  $u(t) = z(t) - z_{\text{éq}}$  alors on a  $z(t) = u(t) + z_{\text{éq}}$  et  $\ddot{z} = \ddot{u}$ . L'équation du mouvement est ainsi équivalente à  $\ddot{u} + \frac{k}{m}\left(u + \ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = \frac{k}{m}\ell_0 + g$  soit, après simplifications,  $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$  avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Contrairement à l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la position  $z(t)$ , celle vérifiée par l'écart à la position d'équilibre  $u(t)$  n'a pas de second membre.

**d)** Les solutions de l'équation du mouvement s'écrivent  $u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Pour déterminer les constantes d'intégration  $A$  et  $B$ , utilisons les conditions initiales : l'objet est lâché à  $t = 0$  depuis sa position d'équilibre d'où  $u(0) = 0 = A$  ; il possède en outre une vitesse initiale

d'où  $\dot{u}(0) = \dot{z}(0) = v_0 = \omega_0 B$ . On trouve ainsi l'expression demandée :  $u(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .

**2. a)** Énergie potentielle élastique :  $E_{\text{pe}} = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2 (+ \text{cte})$  Énergie potentielle de pesanteur :

$E_{\text{pp}} = -mgz (+ \text{cte})$ , l'axe  $(Oz)$  étant orienté vers le bas. On peut prendre les deux constantes nulles, puisqu'elles n'ont pas de signification physique.

**b)** L'énergie potentielle totale est la somme des deux :  $E_p = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2 - mgz$ . En introduisant  $z(t) = u(t) + z_{\text{éq}}$ , on obtient  $E_p = \frac{1}{2}k(u + z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 - mg(u + z_{\text{éq}})$ , soit  $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + ku(z_{\text{éq}} - \ell_0) + \frac{1}{2}k(z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 - mgu - mgz_{\text{éq}}$ . Or  $ku(z_{\text{éq}} - \ell_0) = ku \frac{mg}{k} = mgu$  d'où  $E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \frac{1}{2}k(z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 - mgz_{\text{éq}}$ . Les deux derniers termes sont des constantes :

$$E_p = \frac{1}{2}ku^2 + \text{cte} \quad \text{avec} \quad \text{cte} = \frac{1}{2}k(z_{\text{éq}} - \ell_0)^2 - mgz_{\text{éq}}.$$

⇒ Méthode 12.6

**c)** L'énergie cinétique est donnée par  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2$  soit  $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$ .

D'après la question précédente, l'énergie potentielle s'écrit  $E_p = \frac{1}{2}k \frac{v_0}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) + \text{cte}$  ; elle se

simplifie, compte tenu de la relation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , en  $E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \text{cte}$ . On en déduit

l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) + \text{cte}$  soit  $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \text{cte}$ .

C'est une constante au cours du mouvement ; elle ne dépend que des conditions initiales (vitesse  $v_0$ , position d'équilibre) et de l'un des paramètres définissant le système (masse  $m$ ).

### Exercice 12.6

**1.** La force s'écrit ici :  $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x\vec{e}_x}{x^3} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \vec{e}_x$ .

Par définition de l'énergie potentielle :  $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$  avec  $d\vec{OM} = dx\vec{e}_x$  donc

$$dE_p = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{soit} \quad \frac{dE_p}{dx} = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2}.$$

On intègre :  $E_p(x) = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \text{cte}$ . Avec l'origine à l'infini :  $E_p(\infty) = 0 = \text{cte}$  donc finalement

$$E_p(x) = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}.$$

⇒ Méthode 12.3

**2.** L'énergie cinétique de  $M$  est ici  $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  donc  $E_m = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ .

Il n'y a aucune force non conservative, donc l'énergie mécanique est constante. Initialement, la particule est « à l'infini » avec une vitesse  $v_0$  :  $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ .



3. La distance minimale  $d$  est celle du point où la particule s'arrête :  $\dot{x} = 0$  donc

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 d} = E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{d'où on tire } \boxed{d = \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{m v_0^2}}$$

⇒ Méthode 12.5

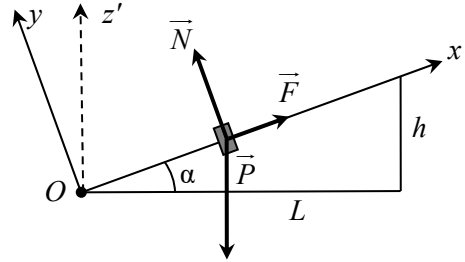
### Exercice 12.7

1. L'aimant  $M$  de masse  $m$  est soumis à trois forces :

- son poids  $\vec{P}$ , vertical descendant ;
- la force  $\vec{F}$  répulsive de l'autre aimant ;
- la réaction  $\vec{R}$  du banc, normale en l'absence de frottement.

Le PFD appliqué à  $M$  à l'équilibre s'écrit :

$$\boxed{\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}}$$



2. On projette le PFD sur la direction  $(Ox)$  :  $-mg \sin \alpha + k \left( \frac{x_0}{x_{\text{éq}}} \right)^n + 0 = 0$ .

Or  $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{L^2 + h^2}} \approx \frac{h}{L}$  (car  $h \ll L$ ), donc  $-mg \frac{h}{L} + k \left( \frac{x_0}{x_{\text{éq}}} \right)^n = 0$  d'où  $x_{\text{éq}} = x_0 \left( \frac{kL}{mgh} \right)^{1/n}$ .

3. La relation précédente peut s'écrire :  $\ln h = \ln \frac{kL}{mg} - n \ln \frac{x_{\text{éq}}}{x_0}$ .

En effectuant une régression linéaire à partir du tableau on obtient  $\ln h = -13,56 - 4,06 \ln \frac{x_{\text{éq}}}{x_0}$ .

On en déduit d'une part  $n = 4$ , et d'autre part  $k = \frac{mg}{L} e^{-13,56}$  soit  $k = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ N}$ .

⚡\* Ne pas oublier l'unité de  $k$  ! Cette constante a la dimension d'une force.

4. Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur, que l'on calcule en introduisant comme intermédiaire un axe vertical ascendant  $(Oz')$  :  $E_{pp} = +mg z' + \text{cte}$  avec  $z' = x \sin \alpha = x \frac{h}{L}$ .

D'autre part, la force magnétique  $\vec{F}$  constitue également un champ de force puisqu'elle ne dépend que de la position  $x$  : on peut donc rechercher une énergie potentielle dont elle dérive.

$$dE_{pm} = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} \quad \text{avec } d\vec{OM} = dx \vec{e}_x \quad \text{donc } dE_{pm} = -k \left( \frac{x_0}{x} \right)^n \vec{e}_x \cdot dx \vec{e}_x = -k \left( \frac{x_0}{x} \right)^n dx \quad \text{soit}$$

$$\frac{dE_{pm}}{dx} = -k x_0^n \frac{1}{x^n} \quad \text{On intègre : } E_{pm}(x) = +k x_0^n \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \text{cte}.$$

⇒ Méthode 12.3

L'énergie potentielle est la somme des deux termes :  $E_p(x) = +\frac{mgh}{L} x + k x_0^n \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \text{cte}$ .

Or  $mg \frac{h}{L} = k \left( \frac{x_0}{x_{\text{éq}}} \right)^n$  donc  $E_p(x) = +k \left( \frac{x_0}{x_{\text{éq}}} \right)^n x + k x_0^n \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \text{cte}$ .

5. On peut tout d'abord vérifier que l'énergie potentielle est bien extrémale en  $x_{\text{éq}}$  :

$$\frac{dE_p}{dx} = k \left( \frac{x_0}{x_{\text{éq}}} \right)^n - k x_0^n \frac{1}{x^n} \text{ donc } \frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = 0. \text{ Pour déterminer si c'est un minimum ou un}$$

maximum, on peut calculer la dérivée second et trouver son signe en  $x_{\text{éq}}$ .

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0 + k x_0^n \frac{n}{x^{n+1}} \text{ donc } \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{\text{éq}}) = k x_0^n \frac{n}{x_{\text{éq}}^{n+1}} > 0 : \text{l'énergie potentielle est minimale en } x_{\text{éq}}$$

donc c'est une position d'équilibre stable.

⇒ Méthode 12.4

### Exercice 12.8

1. La masse est soumise à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ , à la force de rappel du ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$  et à la réaction normale de la tige  $\vec{R} = R_y\vec{e}_y + R_z\vec{e}_z$ .

Les deux premières sont des forces conservatives, donc dérivent d'une énergie potentielle : celle de pesanteur est  $E_{pp} = mgz + \text{cte} = \text{cte}$  et on peut choisir cette constante nulle ; l'énergie

potentielle élastique est  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte} = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$  et on prendra cette deuxième constante nulle (origine de  $E_p$  au point  $O$ ). D'autre part l'énergie cinétique de  $M$  est ici

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \text{ L'énergie mécanique de } M \text{ est donc : } E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

2. La seule force non conservative est la réaction, mais elle est toujours orthogonale au mouvement donc elle ne travaille pas :  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{R}) = 0$  donc  $E_m = \text{cte}$ .

Initialement :  $x = X_0$  et  $\dot{x} = 0$  donc  $E_m = \frac{1}{2}kX_0^2$ .

3. L'énergie mécanique étant constante, sa dérivée temporelle est toujours nulle :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = \frac{1}{2}k(2x\dot{x}) + \frac{1}{2}m(2\dot{x}\ddot{x}) = \dot{x}(kx + m\ddot{x}).$$

Il y a donc deux possibilités :  $\dot{x}(t) = 0 = \text{cte}$ , solution particulière qui correspond à l'équilibre,

ou bien  $kx + m\ddot{x} = 0$  soit  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ , qui est l'équation différentielle cherchée.

On peut l'écrire  $\ddot{x} + \omega_0^2x = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

⇒ Méthode 12.7

4. Cette équation différentielle admet une solution du type  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ,  $A$  et  $\varphi$  étant des constantes à déterminer avec les conditions initiales :  $\dot{x}(0) = -\omega_0 A \sin \varphi = 0$ , donc  $\sin \varphi = 0$  et on peut prendre  $\varphi = 0$  ;  $x(0) = A \cos \varphi = X_0$  soit  $A = X_0$ . Donc  $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$ .

La période est définie par  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , soit  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ . AN  $T_0 = 0,70 \text{ s}$ .

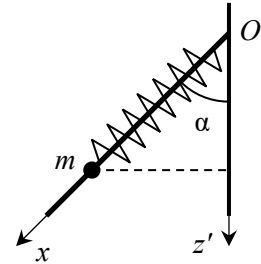
5. Au passage en  $O$  l'énergie potentielle est nulle, donc la conservation de l'énergie mécanique donne :  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k X_0^2$  d'où  $v = \sqrt{\frac{k}{m}} X_0 = \omega_0 X_0$ . AN  $v = 0,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 12.9

1. a) La masse  $m$  est soumise à deux forces conservatives, son poids et la tension du ressort, et à la réaction normale de la tige qui ne travaille pas. Énergie potentielle élastique :  $E_{pe} = \frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}$ .

Énergie potentielle de pesanteur :  $E_{pp} = -mgz' + \text{cte}$  en utilisant un axe  $(Oz')$  vertical descendant ; or  $z' = x \cos \alpha$  donc  $E_{pp} = -mgx \cos \alpha + \text{cte}$ .

Finalement :  $E_p(x) = \frac{1}{2} k(x - \ell_0)^2 - mgx \cos \alpha + \text{cte}$ .



*Il faut toujours commencer par une liste complète des forces, puis voir celles qui sont conservatives et celles qui ne travaillent pas au cours du mouvement. Si toutes les forces entrent dans l'une ou l'autre de ces catégories, alors l'évolution est conservative : la méthode avec l'énergie potentielle est utilisable.*

b)  $x_{\text{éq}}$  vérifie  $\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = k(x_{\text{éq}} - \ell_0) - mg \cos \alpha = 0$  soit  $x_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg \cos \alpha}{k}$ .

*Quand on recherche un extremum, on dérive par rapport à la variable spatiale (ici  $x$ ) et non par rapport au temps  $t$ .*

c)  $E_p = \frac{1}{2} k \left( u + \frac{mg \cos \alpha}{k} \right)^2 - mg(u + x_{\text{éq}}) \cos \alpha + \text{cte}$  soit finalement  $E_p = \frac{1}{2} k u^2 + \text{cte}$  après simplification et regroupement de toutes les constantes. La constante finale peut être prise nulle.

⇒ Méthode 12.6

2. a) La seule force non conservative (la réaction) ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve :  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} k u^2 = \text{cte}$  donc  $\frac{dE_m}{dt} = m \dot{u} \ddot{u} + k u \dot{u} = 0$ , ce

qui donne soit  $\dot{u} = 0$  (équilibre), soit  $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$  en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

⇒ Méthode 12.7

☛ Cette fois on cherche une équation différentielle donnant l'évolution temporelle, donc on dérive par rapport à  $t$ .

b) La solution est de la forme  $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  : la période est donc  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

### Exercice 12.10

On repère la position instantanée de l'astronaute au cours du temps par la variable  $x$ , comptée à partir de sa position correspondant à la longueur à vide du ressort.

En négligeant les différents frottements, l'ensemble {tabouret + astronaute}, de masse  $m$ , est soumis uniquement à la force de rappel du ressort, de raideur  $k$  : il n'y a pas de poids dans l'ISS, et le tabouret et l'astronaute oscillent sans glisser sur un support extérieur donc il n'y a pas de réaction de support.

Le système {tabouret + astronaute} a donc un mouvement conservatif unidimensionnel d'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ . L'application du théorème de l'énergie mécanique permet d'écrire que  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  et donc d'obtenir l'équation différentielle

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ , que l'on peut mettre sous la forme canonique  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On

reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Si on note  $m_0$  la masse du tabouret vide et  $T_0$  la période de ses oscillations, puis  $m_1$  et  $m_2$  les masses des astronautes,  $T_1$  et  $T_2$  les périodes de leurs oscillations, on peut écrire :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}, \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_1}{k}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_2}{k}}.$$

Dans ces trois relations, les trois grandeurs  $m_0$ ,  $k$  et  $m_2$  sont inconnues : on trouvera  $m_2$  en éliminant les deux autres.

On peut éliminer  $m_0$  en écrivant :  $T_1^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_1}{k}$  et  $T_2^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_2}{k}$ . On élimine alors  $k$

en effectuant le rapport de ces deux expressions :  $m_2 = m_1 \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2}$ . AN  $m_2 = 82,2 \text{ kg}$ .

La période du second astronaute étant supérieure à celle du premier, il est cohérent de trouver une masse supérieure.

### Exercice 12.11

1. On étudie le point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Inventaire des forces appliquées à  $M$  :

- son poids, force conservative dérivant d'une énergie potentielle  $E_p(x) = -mgx + \text{cte}$  ;
- la réaction normale du cerceau, toujours orthogonale au mouvement (circulaire) donc ne travaillant pas.

La seule force conservative est le poids, donc l'énergie potentielle est celle de pesanteur, que l'on exprime en fonction de  $\theta$  avec la relation  $x = r \cos \theta$  :  $E_p(x) = -m g r \cos \theta + cte$ .

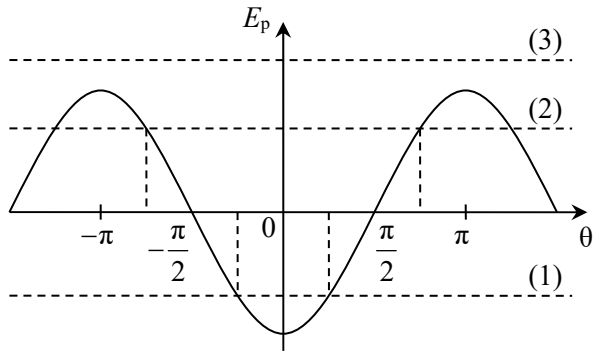
Le choix de la constante est arbitraire, car elle n'a pas de signification physique : on choisit cette constante nulle, soit  $E_p(x) = -m g r \cos \theta$ .

*✎ Cela revient à choisir l'origine au niveau de l'axe (Oy). On peut faire un autre choix, mais dans tous les cas il faut garder la même constante dans toute la suite. En revanche, le choix de cette constante est totalement indépendant des conditions initiales.*

**2.** Sur un intervalle de largeur  $2\pi$ , décrivant la totalité du cercle, on trouve deux positions d'équilibre.

–  $\theta = 0$  est un minimum de l'énergie potentielle, donc une position d'équilibre stable (il s'agit du point A).

–  $\theta = \pi$  (ou  $\theta = -\pi$ ) est un maximum de l'énergie potentielle, donc une position d'équilibre instable (c'est le point B, le plus haut du cercle).



**3. a)** Il n'y a qu'une force non conservative (la réaction normale) et elle ne travaille pas, donc l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

À l'instant initial :  $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g r$ .

**b)** Sur le graphe précédent on ajoute une droite horizontale à l'ordonnée  $E_m$ .  $E_p(\theta) = E_m - E_c \leq E_m$  donc les seules valeurs accessibles de  $\theta$  sont celles pour lesquelles la courbe  $E_p(x)$  se trouve au-dessous de la droite  $E_m$ . On voit qu'on peut distinguer deux cas.

– Premier cas (droite (1) ou droite (2)) : la droite coupe la courbe de l'énergie potentielle pour deux valeurs de  $\theta$  opposées. Les valeurs accessibles de  $\theta$  appartiennent donc à un intervalle  $[-\theta_{\max}; +\theta_{\max}]$ , c'est-à-dire que le point M oscille périodiquement de part et d'autre de A.

– Second cas (droite (3)) : la courbe se trouve entièrement au-dessous de la droite, sans point d'intersection. Alors toutes les valeurs de  $\theta$  sont possibles, et comme  $E_p(\theta)$  n'atteint jamais la valeur  $E_m$ , l'énergie cinétique ne s'annule jamais : M tourne indéfiniment sur le cercle sans jamais s'arrêter (donc toujours dans le même sens).

La limite entre ces deux cas est la situation où la droite  $E_m$  se trouve exactement à la valeur maximale de  $E_p(\theta)$  :  $E_m = E_{p_{\max}} = E_p(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - m g r = +m g r$  d'où on tire  $v_0 = 2\sqrt{g r}$ .

$\Rightarrow$  Méthode 12.5

### Exercice 12.12

**1.** Référentiel  $\mathcal{R}$  : terrestre supposé galiléen, lié au repère (Oxyz). Forces appliquées : poids  $\vec{P} = m\vec{g} = m g \cos \theta \vec{e}_r - m g \sin \theta \vec{e}_\theta$  ; tension du fil  $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ .

Informations cinématiques : le mouvement est circulaire dans le plan  $(Oxy)$ , donc  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -L\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

TÉC :  $\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{T} \cdot \vec{v}$ , soit  $mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\dot{\theta} \sin \theta = 0$  ou encore

$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ . En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  on obtient la forme demandée.

⇒ Méthode 12.7

**2.** L'équation différentielle devient :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ . Solution :  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  avec  $A$  et  $B$  deux constantes d'intégration. Conditions initiales :  $\theta(0) = A = \theta_0$  ;  $\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$ .

Donc  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ .

**3. a)**  $Y$  est une liste de vecteurs  $[y(t), \dot{y}(t)]$  qui est renvoyée par la méthode `odeint`. Elle repose sur le fait que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme  $\dot{Y} = f(Y)$ ,  $f$  étant la fonction qui à tout vecteur  $[y_1(t), y_2(t)]$  associe le vecteur  $[y_2(t), -\omega_0^2 y_1(t)]$ .

La méthode `odeint` du module `integrate` de la bibliothèque `Scipy` prend en paramètres : la fonction  $f$  ; la condition initiale  $Y(0)$ , soit ici  $[y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0]$  ;

la liste  $T$  des dates pour lesquelles on calcule la fonction  $y(t)$ .

La méthode renvoie alors la liste  $Y$ .

*Ici*  $y(t) = \theta(t)$ .

**b)** Il y a 1001 valeurs (en comptant le « 0 ») comprises entre 0 et 10 s, soit un pas de  $0,01$  s.

**c)** On voit dans le code que  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = 3,13$ , donc  $L = \frac{9,81}{3,13^2}$  soit  $L = 1,00$  m.

**4.** La condition initiale a entraîné une augmentation de l'amplitude des oscillations. On observe également que la période des oscillations a augmenté. Celle-ci semble donc dépendre de l'amplitude des oscillations, contrairement à celle de l'oscillateur harmonique, qui ne dépend que de  $\omega_0^2$ .

**5. a)** Il suffit d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique en prenant en compte la force de frottement :  $\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v} + \vec{T} \cdot \vec{v} + \vec{F} \cdot \vec{v}$  et on obtient :  $mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + \alpha L\dot{\theta}^2 + mg\dot{\theta} \sin \theta = 0$ , qu'on

peut mettre sous la forme  $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$  en posant  $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$  et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

**b)** L'équation différentielle peut se mettre sous la forme  $\ddot{\theta} = -2\lambda\dot{\theta} - \frac{g}{L}\theta$ . Il faut donc modifier

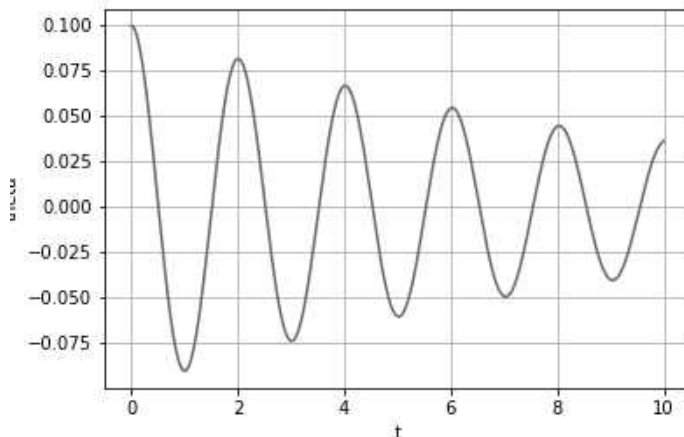
la fonction  $F$  dans le code :

```
def F(X,t): # on définit la fonction F
    return [X[1], -2*lam*X[1] - omega_0**2*np.sin(X[0])]
```

et ajouter une instruction pour définir la valeur de  $\lambda$  :

```
lam = 0.1
```

c) On obtient la courbe suivante :



### Exercice 12.13

1. L'anneau  $M$  est soumis à deux forces conservatives, son poids et la tension du ressort, et à la réaction normale de la tige qui ne travaille pas. Énergie potentielle de pesanteur :  $E_{pp} = \text{cte}$  car l'altitude de  $M$  est constante (nulle) ; on choisit  $E_{pp} = 0$ . L'énergie potentielle est alors unique-

ment élastique :  $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$  soit  $E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0)^2 + \text{cte}$ .

2. Recherche des positions d'équilibre :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_{\text{éq}}) = k(\sqrt{x_{\text{éq}}^2 + a^2} - \ell_0) \frac{2x_{\text{éq}}}{2\sqrt{x_{\text{éq}}^2 + a^2}} = k \left( 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x_{\text{éq}}^2 + a^2}} \right) x_{\text{éq}} = 0.$$

Si  $a > \ell_0$ , la parenthèse est toujours strictement positive donc la seule solution est  $x_{\text{éq}} = 0$ .

De plus  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k \left( 1 - \frac{\ell_0}{a} \right) + 0 > 0$  donc  $x_{\text{éq}} = 0$  est un minimum de  $E_p$ , ce qui correspond à une position d'équilibre stable.

Si  $a < \ell_0$ , la parenthèse peut s'annuler, donc en plus de la solution  $x_{\text{éq}(1)} = 0$  on a deux autres solutions :  $x_{\text{éq}(2)} = +\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$  et  $x_{\text{éq}(3)} = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ .

$\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k \left( 1 - \frac{\ell_0}{a} \right) + 0 < 0$  : la position  $x_{\text{éq}(1)} = 0$  est cette fois une position d'équilibre instable.

Et  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(\pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}) = k \left( 1 - \frac{a^2}{\ell_0^2} \right) + 0 > 0$  : les positions symétriques  $x_{\text{éq}(2)} = +\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$  et  $x_{\text{éq}(3)} = -\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$  sont des positions d'équilibre stable.

⇒ Méthode 12.4

3. L'énergie mécanique se conserve :  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - \ell_0)^2 = \text{cte}$  donc

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + k\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)x\dot{x} = 0, \text{ soit } \dot{x} = 0 \text{ (équilibre) ou } \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)x = 0}.$$

4. Cette équation différentielle est non linéaire, cependant pour des petites oscillations ( $x \ll a$ ) elle peut être approchée par :  $\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)x = 0$ . Cela correspond à un oscillateur

harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 - \frac{\ell_0}{a}\right)}$  donc de période  $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{ma}{k(a - \ell_0)}}}$ .

⇒ Méthode 12.7

### Exercice 12.14

1. a) Limites : pour  $r \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow V_0$  ; pour  $r \rightarrow 0$ ,

$$V \rightarrow V_0 e^{2\beta r_0} \gg V_0. \text{ Et pour } r = r_0, V = 0 \text{ (minimum).}$$

b)  $r_0$  est donc la position d'équilibre stable (distance d'équilibre entre les deux atomes de la molécule).

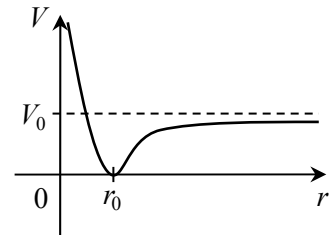
L'énergie mécanique de l'atome O est  $E_m = E_c + V(r)$  avec  $E_c \geq 0$ , donc  $V(r) \leq E_m$  : les valeurs de  $r$  ne vérifiant pas cette inégalité ne peuvent pas être atteintes.

Donc il faut que  $E_m \geq V_0$  pour que l'atome O puisse s'éloigner à l'infini, de l'atome C.

$V_0$  est donc l'énergie qu'il faut fournir à la molécule, dans son état stable ( $r_0$ ), pour que les atomes puissent s'éloigner à l'infini : c'est l'énergie de dissociation de la molécule.

Le produit  $\beta(r - r_0)$  est sans dimension, donc  $\beta$  est l'inverse d'une longueur.

⇒ Méthode 12.5



2. Pour  $r$  très proche de  $r_0$  (c'est-à-dire pour  $\beta(r - r_0) \ll 1$ ) :  $e^{-\beta(r - r_0)} \approx 1 - \beta(r - r_0)$ .

Donc  $V(r) \approx V_0 [\beta(r - r_0)]^2$  qu'on peut écrire  $V(r) \approx \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$  en posant  $\boxed{k = 2V_0\beta^2}$ . Cette expression est la même que pour un ressort de longueur à vide  $r_0$  et de raideur  $k$ .

⇒ Méthode 12.6

3. L'atome O ne subit pas d'autre force que celle exercée par C, donc son énergie mécanique se conserve :  $E_m = E_c + V = \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + \frac{1}{2}k(r - r_0)^2 = \text{cte}$  d'où  $\frac{dE_m}{dt} = m_2\dot{r}\ddot{r} + k(r - r_0)\dot{r} = 0$ , soit en

éliminant la solution  $\dot{r} = 0$  (équilibre) :  $\boxed{\ddot{r} + \frac{k}{m_2}r = \frac{k}{m_2}r_0}$ . C'est un oscillateur harmonique de

pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m_2}}$  donc de fréquence  $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m_2}}}$ .

⇒ Méthode 12.7



### Exercice 12.15

1. a)  $E_{pe} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{AP}$  avec  $AP = 2b \sin \frac{\varphi}{2}$  donc  $E_{pe}(\varphi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 b \sin(\varphi/2)}$ .

b) La boule  $P$  est soumise aux forces suivantes : force électrostatique dérivant de  $E_{pe}$  ; poids dérivant de l'énergie potentielle  $E_{pp} = -mgx(+cte) = -mgb \cos \varphi(+cte)$  ; tension du fil, orthogonale au déplacement donc ne travaillant pas. L'énergie potentielle totale de  $P$  est donc :

$$E_p(\varphi) = E_{pe}(\varphi) + E_{pp}(\varphi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 b \sin(\varphi/2)} - mgb \cos \varphi(+cte).$$

2. La position d'équilibre est donnée par  $\frac{dE_p}{d\varphi} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 b} \frac{-\cos(\varphi/2)}{2\sin^2(\varphi/2)} + mgb \sin \varphi = 0$ , soit

$$\cos \frac{\varphi}{2} \left( -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 b} \frac{1}{\sin^2(\varphi/2)} + 2mgb \sin \frac{\varphi}{2} \right) = 0. \text{ Il y a donc deux possibilités : } \cos \frac{\varphi}{2} = 0, \text{ soit}$$

$\varphi = \pi$  (a priori impossible, car le fil se détendrait) ou bien  $\sin^3 \frac{\varphi}{2} = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 b^2 mg}$ , soit

$$\varphi_e = 2 \arcsin \left[ \left( \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 b^2 mg} \right)^{1/3} \right].$$

⇔ Méthode 12.4

3.  $\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 b} \frac{-(1/2)\sin^3(\varphi/2) - \cos^2(\varphi/2)\sin(\varphi/2)}{\sin^4(\varphi/2)} + mgb \cos \varphi$   
 $= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 b} \frac{1 + \cos^2(\varphi/2)}{2\sin^3(\varphi/2)} + mgb \cos \varphi$  donc en utilisant la valeur trouvée précédemment pour  $\varphi_e$  :

$\frac{d^2 E_p}{d\varphi^2}(\varphi_e) = mgb \left( 1 + \cos^2 \frac{\varphi_e}{2} \right) + mgb \cos \varphi_e = \frac{3}{2} mgb (1 + \cos \varphi_e) > 0$ .  $E_p(\varphi_e)$  est donc un minimum, ce qui correspond à une position d'équilibre stable.

4. Au voisinage de  $\varphi_e$  :  $E_p(\varphi_e + \theta) \approx E_p(\varphi_e) + \frac{1}{2} k \theta^2$  avec  $k = \frac{d^2 E_p}{d\varphi^2}(\varphi_e) = \frac{3}{2} mgb (1 + \cos \varphi_e)$ .

$E_m = E_c + E_p = cte$  (pas de travail de force non conservative) avec  $E_c = \frac{1}{2} mb^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} mb^2 \dot{\theta}^2$ ,

donc  $\frac{dE_m}{dt} = mb^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{3}{2} mgb (1 + \cos \varphi_e) \theta \dot{\theta} = 0$ . En excluant  $\dot{\theta} = 0$  (équilibre) on obtient :

$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2b} (1 + \cos \varphi_e) \theta = 0$ . C'est un oscillateur harmonique de période  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2b}{3g(1 + \cos \varphi_e)}}$ .

⇔ Méthode 12.7

# Mouvement dans un champ électrique ou magnétique

UN SCIENTIFIQUE



**André-Marie AMPÈRE** (1775-1836) s'instruit seul et acquiert des connaissances dans de nombreuses matières. Passionné de physique, il transforme son habitation en laboratoire.

Il confirme l'hypothèse de l'origine électrique du magnétisme, ce qui justifie que certains le considèrent comme le père de l'électrodynamique. AMPÈRE exprime ses découvertes dans des formules précises, il est l'un des acteurs de la mathématisation de la physique.

## ■ Un peu d'histoire

L'invention de la pile par VOLTA a permis de nouvelles expérimentations. En 1819 le Danois Hans ØRSTED montre qu'une aiguille aimantée est déviée par un courant électrique. Le physicien français André-Marie AMPÈRE comprend alors tout de suite que l'électricité et le magnétisme sont intimement liés. Il introduit alors la notion de courant électrique et lui définit un sens. Il présente ses découvertes dans deux mémoires fondamentaux ; dans le premier il décrit l'action mutuelle de deux courants électriques et compare la Terre à un gigantesque aimant tandis que dans le second, il introduit la formule donnant la valeur de la force en fonction de l'intensité et du champ magnétique. Ses travaux ont permis à Michael FARADAY de découvrir l'induction magnétique. Ils justifient pleinement le choix de son nom pour désigner l'unité d'intensité du courant dans le Système international.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La force de Lorentz et sa puissance
- ▷ Des ordres de grandeur de champs électriques ou magnétiques
- ▷ L'énergie potentielle électrostatique
- ▷ Des applications du mouvement d'une particule chargée dans un champ

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Évaluer les ordres de grandeur des forces électriques ou magnétiques et les comparer à ceux des forces gravitationnelles
- ▷ Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique la dévie sans lui fournir d'énergie
- ▷ Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la vitesse acquise par une particule accélérée par une différence de potentiel
- ▷ Déterminer le mouvement d'une particule chargée en présence d'un champ électrostatique uniforme ou d'un champ magnétostatique uniforme
- ▷ Déterminer le rayon de la trajectoire d'une particule dans un champ magnétique et le sens de parcours

## ■ Principes de l'électromagnétisme

### □ Interaction électromagnétique et champs

L'interaction électromagnétique est l'une des quatre interactions fondamentales, qui s'exerce entre les corps dotés de charges électriques. L'étude de l'interaction d'une charge électrique  $q$  avec un ensemble  $S$  d'autres charges étant complexe, on divise le problème en deux parties :

- l'ensemble  $S$  crée en tout point  $P$  de l'espace et à tout instant  $t$  un champ électromagnétique, constitué du **champ électrique**  $\vec{E}(P,t)$  et du **champ magnétique**  $\vec{B}(P,t)$ , dépendant du référentiel  $\mathcal{R}$  ;
- une charge  $q$  placée au point  $P$  subit une force exercée par ces deux champs, appelée **force de Lorentz**  $\vec{F}_L$ .

Si les champs sont **stationnaires** (indépendants du temps), on parle de champs **électrostatique**  $\vec{E}(P)$  et **magnétostatique**  $\vec{B}(P)$ .

La théorie de l'électromagnétisme repose sur cinq postulats.

### □ Équations de Maxwell

Les quatre premiers postulats sont les équations de Maxwell, qui permettent de déterminer les champs  $\vec{E}(P,t)$  et  $\vec{B}(P,t)$  en fonction des charges et des courants électriques qui les créent.

Ces équations seront vues dans le cours de 2<sup>e</sup> année. Dans ce chapitre, on décrira quelques dispositifs créant des champs stationnaires et uniformes (indépendants du point  $P$ ). Au chapitre **21**, on décrira d'autres dispositifs créant des champs magnétostatiques plus variés.

### □ Force de Lorentz

Le cinquième postulat est l'expression de la force de Lorentz subie par une particule  $M$  de charge  $q$ , se trouvant à l'instant  $t$  en un point  $P$  avec une vitesse  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$  :

$$\vec{F}_L = q(\vec{E}(P,t) + \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(P,t)).$$

Cette force, comme toutes les autres, est indépendante du référentiel.

Dans ce chapitre on se limite à des champs stationnaires et uniformes, l'expression s'écrira donc plus simplement :

$$\boxed{\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B})}$$

### □ Unités et ordre de grandeur

Unité SI du champ électrique  $\vec{E}$  : le volt par mètre ( $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Valeurs usuelles : 1 à  $10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Unité SI du champ magnétique  $\vec{B}$  : le tesla (T). Valeurs usuelles :  $10^{-6}$  à 1 T.

Pour des particules chargées à l'échelle atomique (noyaux, électrons, ions...), la force de Lorentz est toujours beaucoup plus intense que les forces gravitationnelles (dont le poids) : on négligera donc celles-ci.

## ■ Mouvement dans un champ électrostatique uniforme

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  entre avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  uniforme, dans le vide : elle est soumise à la seule force électrique  $\vec{F}_L = q\vec{E}$ . Le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  est celui du laboratoire, considéré comme galiléen.

### □ Mouvement de la particule

Il s'agit d'un mouvement à accélération constante :  $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \text{cte}$ .

- Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{E}$  ne sont pas colinéaires, la trajectoire est un arc de parabole, d'axe parallèle à  $\vec{E}$ , dans le plan  $(M_0, \vec{E}, \vec{v}_0)$ , en notant  $M_0$  la position de la particule à l'instant initial.
- Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{E}$  sont colinéaires, le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré si  $q\vec{E} \cdot \vec{v}_0 > 0$  ou bien uniformément retardé si  $q\vec{E} \cdot \vec{v}_0 < 0$ .

### □ Aspect énergétique

La force électrique dérive de l'énergie potentielle électrostatique :  $\mathcal{E}_p(M) = qV(M)$  (+cte) où  $V(M)$  est le potentiel électrostatique au point  $M$ .

Le travail reçu par une particule entre deux points  $A$  et  $B$  de la trajectoire est donc :

$$\boxed{W_{AB} = q\vec{E} \cdot \vec{AB} = qU_{AB}}, \quad U_{AB} \text{ étant la différence de potentiel entre les points } A \text{ et } B.$$

Une particule sans vitesse initiale acquiert ainsi une vitesse  $v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}}$  si  $qU_{AB} > 0$ .

⇒ **Méthode 13.1. Calcul de la vitesse acquise par une particule accélérée par une tension**

Remarque : limite relativiste

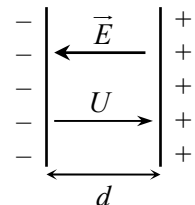
Pour des particules de vitesse proche de celle de la lumière ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), la description relativiste devient nécessaire :  $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$  et  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (> 1)$ .

La mécanique classique est une approximation de la mécanique relativiste pour des vitesses faibles devant celle de la lumière :  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ . Après un calcul classique de vitesse, le calcul de  $\frac{v^2}{c^2}$  permet donc d'évaluer avec combien de chiffres significatifs la valeur trouvée est valable.

### □ Création d'un champ électrostatique uniforme

Un condensateur plan est constitué de deux plaques conductrices planes parallèles, les *armatures*, séparées d'une distance  $d$  et portant des charges opposées  $+Q$  et  $-Q$  liées à une tension constante  $U$  (positive si on l'oriente de l'armature négative vers la positive).

Le champ électrostatique uniforme créé à l'intérieur est orthogonal aux armatures, orienté de l'armature positive vers la négative, et de norme  $E = \frac{U}{d}$ .



## ■ Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme

Une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  entre avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans un champ magnétostatique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme, dans le vide : elle est soumise à la seule force magnétique  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  galiléen est celui du laboratoire.

### □ Mouvement de la particule

Les équations du mouvement font apparaître la **pulsation cyclotron**  $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ .

⇒ **Méthode 13.2. Établissement des équations différentielles cartésiennes du mouvement**

– Lorsque  $\vec{v}_0$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux, la particule chargée a un mouvement *circulaire*

*uniforme*, de rayon  $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B}$ , dans un plan orthogonal au champ  $\vec{B}$ .

– Lorsque  $\vec{v}_0$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires, la force est toujours nulle et la particule a un mouvement rectiligne uniforme.

⇒ **Méthode 13.3. Résolution des équations différentielles par découplage**

⇒ **Méthode 13.4. Résolution des équations différentielles avec une variable complexe**

⇒ **Méthode 13.5. Obtention de l'équation cartésienne de la trajectoire**

⇒ **Méthode 13.6. Démonstration du mouvement circulaire avec la base de Frenet**

### □ Aspect énergétique

La puissance de la force magnétique est toujours nulle car  $\vec{F}_L$  et  $\vec{v}$  sont orthogonales. Par conséquent *la force magnétique ne travaille pas*.

La force magnétique ne modifie donc pas l'énergie cinétique de la particule, qui reste constante au cours du mouvement : celui-ci est *uniforme*.

⇒ **Méthode 13.7. Démonstration du mouvement uniforme**

### □ Création d'un champ magnétostatique uniforme

Divers dispositifs permettent de créer un champ magnétostatique uniforme dans une région limitée de l'espace, notamment les bobines de Helmholtz ou certaines formes d'aimants (voir chapitre 21).

## ■ Comment étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme ?

### □ Méthode 13.1. Calcul de la vitesse acquise par une particule accélérée par une tension

On applique le théorème de l'énergie cinétique à la particule chargée entre l'entrée et la sortie du champ accélérateur.

⇒ Exercices 13.1 à 13.5

Considérons une particule de charge  $q$  entrant, en un point  $A$ , dans un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$ .

Le théorème de l'énergie cinétique pour la particule, entre  $A$  et un autre point  $B$  de la trajectoire,

s'écrit :  $\Delta E_c = W_{AB} = qU_{AB}$ , soit  $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qU_{AB}$ . Donc  $v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m} + v_0^2}$  est la vitesse acquise par la particule au point  $B$ . Si la particule est initialement « au repos » (vitesse initiale

$v_0$  négligeable devant la vitesse acquise), alors  $v = \sqrt{\frac{2qU_{AB}}{m}}$ , ce qui nécessite  $qU_{AB} > 0$ .

## ■ Comment étudier le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme ?

Dans toutes les méthodes suivantes, on considère une particule de charge  $q$  entrant en  $O$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ , dans un champ magnétostatique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  avec  $qB > 0$ .

### □ Méthode 13.2. Établissement des équations différentielles cartésiennes du mouvement

- On applique le PFD à la particule chargée, en calculant la force magnétique avec les composantes cartésiennes des deux vecteurs (vitesse et champ magnétique).
- Les projections sur les axes donnent trois équations différentielles, dont deux sont couplées (celles des composantes orthogonales à la direction du champ).

⇒ Exercices 13.4, 13.6, 13.7

Le PFD pour la particule s'écrit :  $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . On calcule le produit vectoriel avec les

composantes en colonne :  $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix}$  ou bien en utilisant les vecteurs

unitaires :  $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_z = -qBv_x\vec{e}_y + qBv_y\vec{e}_x$ .

En projetant le PFD sur les axes, on obtient donc :

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = +qBv_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \text{ donc en posant } \omega_c = \frac{qB}{m} : \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = +\omega_c v_y & (1) \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x & (2) \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 & (3) \end{cases}$$

Si  $qB < 0$ , on posera plutôt  $\omega_c = -\frac{qB}{m}$  pour avoir toujours une pulsation cyclotron positive.

On peut aussi écrire ces équations avec les coordonnées du point :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = +\omega_c \frac{dy}{dt} & (4) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_c \frac{dx}{dt} & (5) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0 & (6) \end{cases}$$

Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément.

### □ Méthode 13.3. Résolution des équations différentielles par découplage

- On résout tout d'abord l'équation non couplée.
- On dérive l'une des équations pour la vitesse, puis on reporte dans l'autre : on obtient ainsi une équation différentielle linéaire du second ordre pour l'une des composantes de la vitesse. Après l'avoir résolue séparément, on en déduira l'autre composante.
- On peut aussi intégrer une fois l'une des équations pour la position, puis reporter dans l'autre : on obtient alors une équation différentielle linéaire du second ordre pour l'une des coordonnées spatiales. Après l'avoir résolue séparément, on en déduira l'autre coordonnée.

⇒ Exercices 13.7

- On intègre deux fois l'équation (3), en tenant compte des conditions initiales :  $v_z(t) = \text{cte} = 0$  puis  $z(t) = \text{cte} = 0$ . Cette équation nous montre que le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).



– On dérive les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = +\omega_c \frac{dv_y}{dt} & (1') \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c \frac{dv_x}{dt} & (2') \end{cases}$$

Puis, en combinant (1') et (2') :  $\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0$  ; et en combinant (2') et (1') :  $\frac{d^2 v_y}{dt^2} + \omega_c^2 v_y = 0$ .

$v_x$  et  $v_y$  obéissent à la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre, de type oscillateur harmonique.

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} v_x(t) = A \cos(\omega_c t) + C \sin(\omega_c t) \\ v_y(t) = D \cos(\omega_c t) + F \sin(\omega_c t) \end{cases}$$

où  $A, C, D$  et  $F$  sont des constantes qu'on détermine à partir des conditions initiales.

$v_x(0) = A = v_0$  ;  $v_y(0) = D = 0$  ;  $\frac{dv_x}{dt}(0) = 0 = C\omega_c$  d'où  $C = 0$  ;  $\frac{dv_y}{dt}(0) = -\omega_c v_0 = F\omega_c$  d'où  $F = -v_0$ . Donc  $v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t)$  et  $v_y(t) = -v_0 \sin(\omega_c t)$ .

Les lois horaires s'écrivent alors, en intégrant les expressions obtenues pour les vitesses :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_c t) + X \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega_c t) + Y$$

où  $X$  et  $Y$  sont les constantes d'intégration qu'on détermine à partir des conditions initiales.

$x(0) = y(0) = 0$  donc  $X = 0$  et  $Y = -\frac{v_0}{\omega_c}$ . Attention, ici  $Y \neq y(0)$  !

Finalement :  $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$  et  $y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1)$ .

– On peut aussi intégrer une fois l'une des équations (4) et (5), contenant  $x$  et  $y$  (en tenant compte des conditions initiales), puis la reporter dans l'autre, ce qui amène à résoudre des

équations du second ordre pour  $x$  et  $y$  :  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_c^2 x = 0$  et  $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0$ .

Leur résolution donne directement les solutions précédentes.

Cette méthode est détaillée dans le corrigé de l'exercice 13.7.

#### □ Méthode 13.4. Résolution des équations différentielles avec une variable complexe

- On résout tout d'abord l'équation non couplée.
- Si  $x$  et  $y$  sont les deux coordonnées vérifiant les équations différentielles couplées, on introduit une variable complexe  $u = v_x + i v_y$ . La combinaison des deux équations donne alors une unique équation différentielle complexe d'ordre 1 pour  $u$ .

– Après résolution de cette équation différentielle, les parties réelle et imaginaire donnent les composantes de la vitesse, que l'on intègre pour obtenir les équations horaires.

⇒ Exercices 13.4, 13.6

– L'équation en  $z$  donne toujours  $v_z(t) = 0$  puis  $z(t) = 0$ .

– Pour les deux autres :  $i \times (2) \Leftrightarrow i \frac{dv_y}{dt} + i\omega_c v_x = 0$  (2'') puis en additionnant (1) et (2'') :

$$\frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt} + \omega_c (iv_x - v_y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(v_x + iv_y)}{dt} + i\omega_c (v_x + iv_y) = 0 \text{ soit } \frac{du}{dt} + i\omega_c u = 0 \text{ en posant } u = v_x + iv_y.$$

La solution de cette équation différentielle d'ordre 1 est de la forme  $u(t) = K \exp(-i\omega_c t)$ .

$K$  est une constante qu'on détermine à partir des conditions initiales sur la vitesse :

$v_x(0) = v_0$  et  $v_y(0) = 0$  donc  $u(0) = v_0 = K$ . On en déduit :  $u(t) = v_0 \exp(-i\omega_c t)$ .

– En séparant les parties réelle et imaginaire de cette fonction, on obtient les expressions :

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t) \text{ et } v_y(t) = -v_0 \sin(\omega_c t).$$

On obtient finalement, par intégration et en tenant compte des conditions initiales sur la position, les équations horaires du mouvement :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \text{ et } y(t) = -\frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1).$$

### □ Méthode 13.5. Obtention de l'équation cartésienne de la trajectoire et du sens de parcours

– On a montré que le mouvement est plan, donc il suffit d'une équation cartésienne pour déterminer la forme de la trajectoire.

– Comme on l'a vu en cinématique, il s'agit de relier directement les coordonnées  $x$  et  $y$  en éliminant la variable  $t$ . On utilise pour cela la relation trigonométrique  $\cos^2(\omega_c t) + \sin^2(\omega_c t) = 1$  : il faut donc isoler les termes en  $\cos(\omega_c t)$  et  $\sin(\omega_c t)$ , les élever au carré et les additionner.

– On obtient une équation de la forme  $(x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2 = R^2$ , dans laquelle on reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle de centre  $Q$  et de rayon  $R$ .

– Le sens de parcours est alors donné par le sens du vecteur vitesse initial. On constate toujours qu'une particule de charge *negative* tourne autour du vecteur champ magnétique dans le sens *positif* défini par celui-ci, et inversement (ce sens positif étant défini par une règle comme celle du tire-bouchon ou celle des doigts de la main droite).

⇒ Exercices 13.4, 13.6

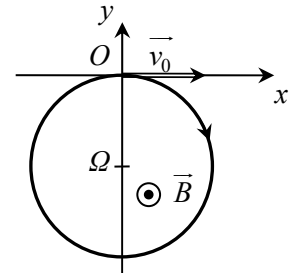
Dans les équations horaires précédentes,  $x$  ne comporte qu'un terme en  $\sin(\omega_c t)$ , tandis que  $y$  comporte un terme en  $\cos(\omega_c t)$  et un terme constant : ce n'est donc pas  $y$ , mais  $y + \frac{v_0}{\omega_c}$ , qu'il

faut élever au carré :  $x^2 + \left(y + \frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \sin^2(\omega_c t) + \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2 \cos^2(\omega_c t) = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$

soit  $\boxed{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2}$ , équation d'un cercle de centre  $\Omega \left(x_\Omega = 0 ; y_\Omega = -\frac{v_0}{\omega_c}\right)$  et de

rayon  $\boxed{R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{qB}}$  (cette fraction étant bien positive avec les notations choisies).

Le vecteur  $\vec{v}_0$  étant orienté vers la droite (car on a supposé  $v_0 > 0$ ), on voit que la trajectoire circulaire est parcourue dans le sens horaire. La particule, de charge *positive* (puisqu'on a supposé  $B > 0$  et  $qB > 0$ ), tourne autour du vecteur  $\vec{B}$  dans le sens *négalif* défini par celui-ci.



☛\* *Puisque la position initiale était le point O, le cercle doit passer par O, et ne peut donc pas être de centre O !*

### □ Méthode 13.6. Démonstration du mouvement circulaire avec la base de Frenet

On peut démontrer que le mouvement est circulaire sans passer par les équations horaires cartésiennes, mais en utilisant la base de Frenet. Il faut pour cela avoir préalablement montré que le mouvement est plan (en intégrant la projection du PFD sur  $\vec{e}_z$ , voir méthode 13.3).

- Projeter le PFD sur la base de Frenet.
- La projection sur le vecteur tangent  $\vec{\tau}$  permet de montrer que le mouvement est uniforme.
- La projection sur le vecteur normal  $\vec{n}$  permet de montrer que la trajectoire est circulaire, et de calculer son rayon.

⇒ Exercices 13.5

Dans la base de Frenet,  $\vec{v} = v\vec{\tau}$  et  $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}$ . La force de Lorentz magnétique s'écrit :

$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\vec{\tau} \wedge B\vec{e}_z = \pm qvB\vec{n}$  (on ne sait pas de quel côté est courbée la trajectoire). Les

projections du PFD sur la base de Frenet sont donc :  $m \frac{dv}{dt} = 0$  (1) et  $m \frac{v^2}{R} = \pm qvB$  (2).

– D’après (1),  $v = \text{cte}$  : le mouvement est uniforme. Avec les conditions initiales,  $v = v_0$ .

– L’équation (2) peut se réécrire  $m \frac{v_0^2}{R} = |q|v_0 B$  puisque  $v = v_0$  et que le premier membre est

positif. On en déduit le rayon de courbure de la trajectoire  $R = \frac{mv_0}{|q|B}$  et on voit qu’il est constant.

Or la seule courbe plane ayant un rayon de courbure constant est le cercle : la particule a donc

un mouvement circulaire de rayon  $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ .

*✎ Cette méthode ne nous donne pas le sens de courbure : pour savoir si la particule part vers la droite ou vers la gauche, il faut regarder l’orientation du vecteur force à l’instant initial.*

*La méthode ne donne pas non plus directement les coordonnées du centre du cercle : si nécessaire, on peut les trouver par des considérations géométriques.*

### □ Méthode 13.7. Démonstration du mouvement uniforme

On peut utiliser trois méthodes.

– Si on a déjà effectué tous les calculs de la méthode 13.3 ou 13.4 (équations horaires), on a obtenu au passage les composantes de la vitesse, ce qui permet de calculer sa norme et de montrer qu’elle reste égale à sa valeur initiale.

– Si on a utilisé la base de Frenet (méthode 13.6), on a pu déjà montrer directement que le mouvement est uniforme, en projetant le PFD sur la tangente.

– Sinon, avant tout calcul de trajectoire, on peut aussi appliquer le théorème de l’énergie cinétique, sous forme instantanée ou intégrale, à la particule chargée.

⇒ Exercices 13.5, 13.7

– On a trouvé dans les méthodes 13.3 et 13.4 :  $v_x(t) = v_0 \cos(\omega_c t)$ ,  $v_y(t) = -v_0 \sin(\omega_c t)$ , ainsi que  $v_z(t) = 0$  puisque le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ .

La norme du vecteur vitesse est donc à tout instant :

$v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2(\omega_c t) + v_0^2 \sin^2(\omega_c t)}$  soit  $v(M)_{\mathcal{R}} = v_0$ . La norme de la vitesse reste bien toujours égale à sa valeur initiale.

– TÉC sous forme instantanée pour la particule, qui n’est soumise qu’à la force de Lorentz magnétique  $\vec{F}_L = q\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{B}$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}$  terrestre galiléen :  $\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_L)_{\mathcal{R}}$ .

Or  $\mathcal{P}(\vec{F}_L)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$  puisque  $\vec{F}_L \perp \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ . Ainsi  $\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = 0$ , soit  $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$ .

Puisque  $\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)_{\mathcal{R}}^2$ , on en déduit  $v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  : le mouvement est uniforme.

Et les conditions initiales donnent  $v(M)_{\mathcal{R}} = v_0$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Pour un électron, l'intensité de la force de Lorentz et de la pesanteur sont du même ordre de grandeur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le champ électrique qui s'exerce sur une particule chargée l'accélère dans une direction parallèle à celle du champ.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La force électrique exercée par un champ stationnaire et uniforme est une force conservative.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La trajectoire d'une particule chargée dans un champ électrique peut être une droite.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique est uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Le champ électrique qui s'exerce sur une particule chargée au repos la met en mouvement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique peut être une droite.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique est plane si sa vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Le champ magnétique qui s'exerce sur une particule chargée au repos la met en mouvement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Une particule ayant acquis une vitesse de $2 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ peut être étudiée au moyen de la mécanique classique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Mouvement dans un champ électrique

### □ Exercice 13.1. Limites de validité des hypothèses

Un proton de masse  $m$  et de charge  $q = +e$ , ayant une vitesse initiale nulle, est accéléré dans le vide par un champ électrostatique  $\vec{E}$ . On note  $U$  la différence de potentiel entre sa position initiale et sa position finale où la vitesse  $v$  a été acquise.

1. On considère que le poids de la particule n'est plus négligeable quand il dépasse le centième de la valeur de la force électrique. Calculer la valeur limite  $E_{\text{lim}}$  du champ  $E$  pour laquelle le poids n'est plus négligeable.
2. On considère la vitesse  $v$  de la particule comme relativiste quand elle dépasse le centième de la vitesse  $c$  de la lumière. Calculer la valeur limite  $U_{\text{lim}}$  de la tension pour laquelle le proton acquiert une vitesse relativiste.

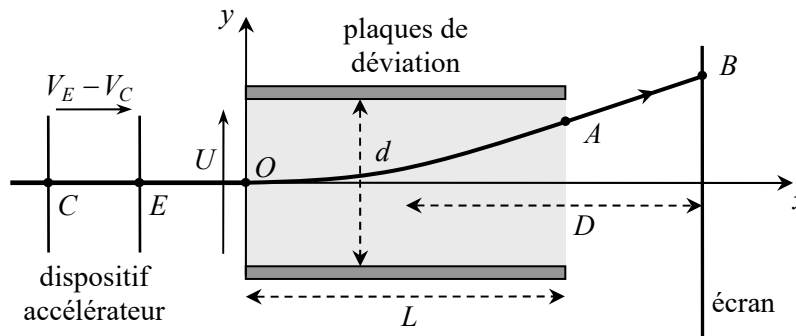
Données :  $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C ;  $g = 9,8$  m · s<sup>-2</sup> ;  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>.

### □ Exercice 13.2. Déviation d'un faisceau d'électrons

Avant la généralisation des oscilloscopes numériques dans les années 2010, on utilisait des oscilloscopes analogiques, contenant un tube cathodique dont on donne ici une description.

Un faisceau d'électrons émis en un point  $C$ , avec une vitesse quasi nulle, est accéléré par une tension  $U_0$  entre les points  $C$  et  $E$  situés sur un axe  $(Ox)$ . Puis il pénètre en  $O$ , avec la vitesse  $v_0 e_x$ , dans le champ électrique  $\vec{E}$  supposé uniforme régnant entre deux plaques parallèles métalliques, symétriques par rapport au plan  $(Oxz)$ , de longueur  $L$  et séparées par une distance  $d$ . Le champ est créé par une tension  $U$  appliquée entre ces plaques.

Le faisceau sort en  $A$  de la zone où règne le champ, puis il atteint finalement l'écran de l'oscilloscope en un point  $B$  (spot lumineux). L'écran est à la distance  $D$  du milieu des plaques.



1. a) Indiquer, en le justifiant, le signe de  $V_E - V_C$ .

b) Calculer, en fonction de  $U_0 = |V_E - V_C|$ , la norme  $v_0$  de la vitesse au point  $O$  d'un électron, de masse  $m$  et de charge  $-e$ .

Données :  $U_0 = 1000$  V ;  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

2. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre  $O$  et  $A$ . En déduire l'ordonnée  $y_A$  du point de sortie  $A$ .
3. a) Quel est la nature du mouvement d'un électron entre  $A$  et  $B$ , où ne règne aucun champ ?
- b) Déterminer l'équation de cette trajectoire et montrer que l'ordonnée  $y_B$  du spot est proportionnelle à la tension  $U$  appliquée entre les plaques.

□ **Exercice 13.3. Expérience de Lenard\***

L'une des étapes fondatrices de la mécanique quantique fut l'étude et l'interprétation de l'*effet photoélectrique*. Découvert en 1887 par Heinrich HERTZ et son assistant Wilhelm HALLWACHS, cet effet consiste en une émission d'électrons par un métal lorsqu'il est soumis à un rayonnement électromagnétique, notamment ultraviolet. Les propriétés de ce phénomène ont été étudiées expérimentalement par Philipp LENARD en 1902, ce qui a conduit Albert EINSTEIN à en proposer une interprétation théorique en 1905 ; puis Robert MILLIKAN a publié des mesures supplémentaires en 1916, confortant la théorie d'EINSTEIN.

L'expérience de LENARD consiste à mesurer d'une part la quantité d'électrons émis par le métal, d'autre part leur énergie cinétique maximale, en fonction des caractéristiques du rayonnement.

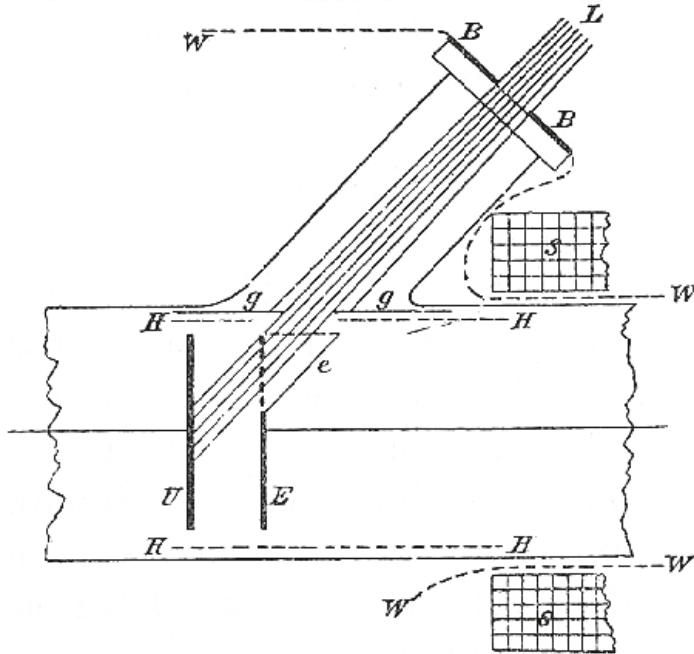


Fig. 1.

Schéma de l'article original de Philipp LENARD, « Über die lichtelektrische Wirkung », *Annalen der Physik*, 4<sup>e</sup> série, volume 8 (1902)

Dans un tube à vide, le rayonnement issu de la source  $L$  frappe la plaque métallique  $U$ , qui émet alors des électrons : ceux qui sont reçus par la plaque voisine  $E$  créent un courant mesuré par un ampèremètre. Une tension variable  $X$  est appliquée entre  $U$  et  $E$ , ce qui permet de ralentir les électrons, et même de les empêcher d'atteindre  $E$ .

1. Quel doit être le signe de la tension  $X = V_U - V_E$  pour ralentir les électrons émis par  $U$  ?

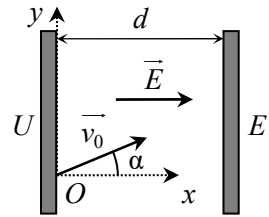
Considérons un électron au repos dans le métal de la plaque  $U$ . Selon l'interprétation d'EINSTEIN, lorsque cet électron interagit avec le rayonnement de fréquence  $f$ , il absorbe un quantum d'énergie (photon) de valeur  $hf$ , ce qui revient à recevoir un travail  $hf$ . L'électron doit ensuite fournir un travail au reste du métal, pour pouvoir en sortir ; la valeur minimale de ce travail d'extraction, pour un électron juste à la surface, est notée  $W$  (grandeur positive).

2. Déterminer l'énergie cinétique maximale d'un électron lorsqu'il arrive sur la plaque  $E$ , en fonction de  $h, f, W, e$  (charge élémentaire) et  $X$ .

3. On note  $V$  la plus petite valeur de la tension  $X$  qui annule le courant mesuré. Montrer que  $V$  vérifie l'équation d'EINSTEIN (confirmée expérimentalement par MILLIKAN) :  $eV = hf - W$ .

4. On souhaite décrire précisément le mouvement d'un électron entre  $U$  et  $E$ , distantes de  $d$ , en supposant un champ uniforme  $\vec{E} = \frac{X}{d} \vec{e}_x$ .

La vitesse initiale de l'électron en  $O$  fait un angle  $\alpha$  avec le champ, dans le plan  $(Oxy)$ , et sa norme est  $v_0 = \sqrt{\frac{2(hf - W)}{m}}$ .

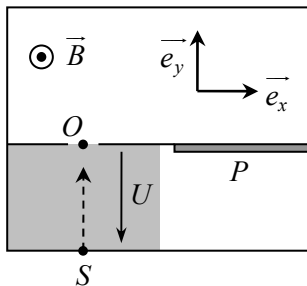


- a) Déterminer les équations horaires de la trajectoire, puis son équation cartésienne : de quelle courbe s'agit-il ?
- b) Déterminer l'abscisse maximale  $x_{\max}$  atteinte par l'électron.
- c) Dessiner l'allure de la trajectoire dans les cas suivants :  $\alpha = 0$  et  $0 < X < V$  ;  $\alpha = 0$  et  $X = V$  ;  $\alpha = 0$  et  $X > V$  ;  $\alpha \neq 0$  et  $X > V$ . Vérifier la compatibilité avec la question 3.

## ■ Mouvement dans un champ magnétique

### □ Exercice 13.4. Spectrographe de masse

Le spectrographe de masse est un appareil permettant, entre autres, de séparer les différents isotopes d'un élément dans un échantillon (pour les compter ou pour en sélectionner un).



Un faisceau de particules chargées est constitué des ions de deux isotopes du mercure :  $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$  et  $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$  notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau est émis par la source  $S$  avec une vitesse quasi nulle, puis accéléré par une tension  $U > 0$ . Il pénètre alors en  $O$  dans une zone de champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  uniforme, orthogonal au faisceau incident.

Données : masse d'un nucléon  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg (la masse de l'électron sera négligée devant  $m$ ) ;  $U = 10$  kV ;  $B = 0,10$  T ;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

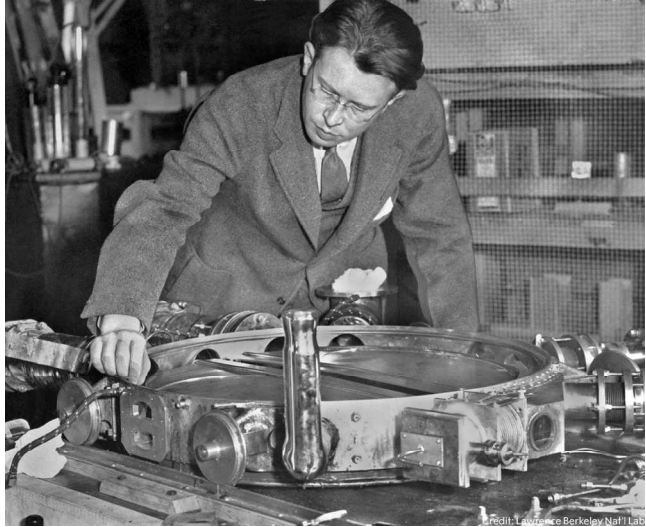
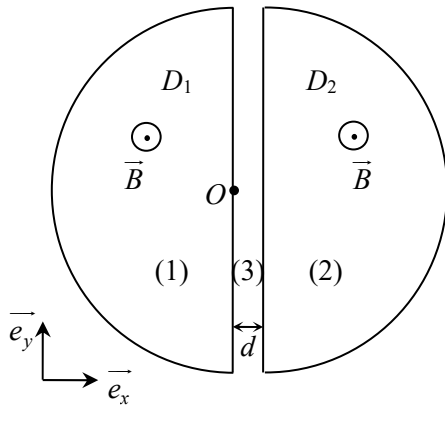
- 1. Exprimer les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  acquises respectivement par les isotopes (1) et (2) suite à l'accélération par la tension  $U$ .



2. Déterminer la trajectoire des ions dans la zone de champ magnétique. Exprimer les rayons  $R_1$  et  $R_2$  des trajectoires des isotopes (1) et (2).
3. On recueille les particules sur un détecteur  $P$  après qu'elles ont fait demi-tour. Exprimer puis calculer la distance  $d$  entre les deux traces observées.

□ **Exercice 13.5. Cyclotron \***

Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé en 1930 par Ernest LAWRENCE, et ayant permis la découverte de nouveaux noyaux. Il est formé de deux enceintes demi-cylindriques  $D_1$  (région (1)) et  $D_2$  (région (2)), appelées *dees* en anglais, dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ; entre ces deux *dees*, une bande étroite de largeur  $d$  (région (3)) est plongée dans un champ électrique alternatif de module constant  $E$ , mais qui change de sens.



*E. LAWRENCE examinant un cyclotron dans son laboratoire de Berkeley en 1935*

On introduit au point  $O(0,0,0)$  une particule de charge  $q > 0$ , sans vitesse initiale ; la tension  $U_{D_1D_2}$  est alors positive.

1. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3), avant qu'elle ne pénètre dans la région (2) où règne un champ magnétique ? Calculer la vitesse  $v_1$  de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2).
2. a) Montrer que le mouvement de la particule dans la région (2) est plan et uniforme.  
b) Montrer que la trajectoire est circulaire en utilisant la base de Frenet, et déterminer son rayon.  
c) Quelle est la vitesse de la particule lorsqu'elle sort de la région (2) ?
3. Pendant que la particule était dans la région (2), le signe de la tension  $U_{D_1D_2}$  a changé. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3), avant qu'elle ne pénètre dans la région (1) ? Calculer la vitesse  $v_2$  de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (1).
4. La particule est à nouveau déviée dans la zone (1).  
a) Quelle est la nature de sa trajectoire ?

- b) Exprimer la durée de cette trajectoire. Montrer que cette durée a la même valeur à chaque passage dans la zone (1), et permet de calculer le rapport  $\frac{q}{m}$ .
- c) En déduire la fréquence de la tension alternative  $U_{D_1D_2}$  nécessaire pour accélérer la particule à chacun de ses passages entre les *dees*, en négligeant le temps de passage dans la région (3).
5. a) Après  $n$  passages dans la région (3), quelle est la vitesse  $v_n$  de la particule ?  
 b) Quel est l'intérêt du passage de la particule dans la région (3) ?
6. Un cyclotron a un diamètre maximal utile de 52 cm.  
 a) Calculer, en joules puis en MeV, l'énergie cinétique maximale des protons (de masse  $m_p$ ) accélérés par ce cyclotron lorsque la fréquence de l'oscillateur électrique qui accélère les protons entre chaque *dee* est de 12 MHz. Quelle est alors la valeur du champ magnétique ?  
 b) L'amplitude de la tension alternative appliquée entre les deux *dees* est de 200 kV. Calculer le nombre de tours effectués par les protons pour atteindre leur énergie cinétique maximale.

Données :  $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$  ;  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

### □ Exercice 13.6. Particules dans une chambre à bulles \* \*

La chambre à bulles est un dispositif mis au point en 1952 par Donald Arthur GLASER (prix Nobel 1960), et destiné à visualiser des trajectoires de particules subatomiques. Il s'agit d'une enceinte remplie d'un liquide (généralement du dihydrogène) à une température légèrement supérieure à celle de vaporisation : le passage d'une particule chargée déclenche la vaporisation et les petites bulles formées ainsi matérialisent la trajectoire de la particule.



D'autre part l'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, qui courbe les trajectoires et permet ainsi d'identifier les particules (à partir de leur masse et de leur charge).

On étudie ici une particule  $P$  de masse  $m$ , de charge  $q$  (positive ou négative), introduite à  $t = 0$  dans la chambre à bulles où règne le champ  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  (avec  $B > 0$ ). Sa position initiale est l'origine  $O$  du repère, et sa vitesse initiale est  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$  (avec  $v_0 > 0$ ).

Le poids de la particule est négligé dans tout le problème. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Dans un premier temps, on suppose que les frottements du liquide sur la particule  $P$  sont négligeables.

1. Établir les équations différentielles du mouvement de  $P$ . On posera  $\omega = \frac{qB}{m}$ .
2. En déduire les équations horaires de  $P$  et indiquer *précisément* la nature de sa trajectoire.  
 Représenter sur un même schéma les trajectoires :
  - d'un proton ( $q = +e$ )
  - d'un électron ( $q = -e$  et masse beaucoup plus faible que celle du proton).

En fait les frottements du liquide de la chambre à bulles sur les particules sont importants : on les modélise par une force  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}(P)$  où  $\lambda$  est une constante positive. On posera  $\alpha = \frac{\lambda}{m}$ .

3. Établir les nouvelles équations différentielles du mouvement (avec les paramètres  $\omega$  et  $\alpha$ ). Montrer que le mouvement reste plan.
4. Déterminer complètement les équations horaires de  $P$ . On pourra poser  $u = x + iy$ , et déterminer tout d'abord  $\dot{u}(t)$ .
5. Déterminer les coordonnées du point asymptotique  $P_\infty$ . Représenter sur un schéma la trajectoire d'un proton.
6. La figure ci-dessous est une photographie prise dans une chambre à bulles.

Les trajectoires quasi rectilignes sont celles des particules à grande vitesse d'un faisceau incident venant du bas de l'image (ce sont des kaons  $K^-$ , de charge  $-e$  et de masse voisine de celle du proton). En certains points, un kaon subit un choc avec une particule du milieu, ce qui la dévie ou fait apparaître de nouvelles particules, dont on voit alors les trajectoires si ces particules sont chargées (les particules neutres ne laissant pas de trace).

La trajectoire **1** est celle d'un kaon  $K^-$  de vitesse plus faible que celle du faisceau incident.

- a) Au point marqué **v**, la collision d'un kaon avec un proton produit quatre particules : quels sont les signes de leurs charges respectives ? Justifier.
- b) Au point **y**, un kaon subit une collision avec une particule et celle-ci suit alors la petite trajectoire en spirale. Identifier la nature de cette particule parmi les possibilités suivantes : proton, antiproton, électron, antiélectron (positon), neutron. Justifier la réponse. (On rappelle qu'une antiparticule a la même masse que la particule correspondante, mais une charge opposée).

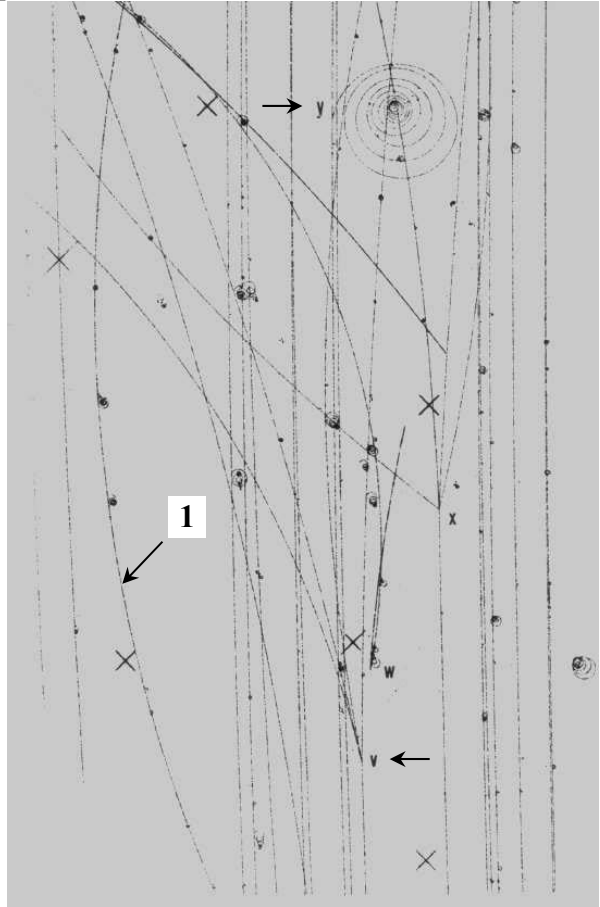


Image de Peter Watkins (Birmingham University) et Tom Adams (Cheltenham College)

## ■ Mouvement dans un champ électromagnétique

### □ Exercice 13.7. Champs électrique et magnétique orthogonaux\*\*

Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de repère  $Oxyz$ , on considère une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , ayant une vitesse nulle et se trouvant au point  $O$  à l'instant  $t=0$ . On établit à cet instant deux champs uniformes et indépendants du temps :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  et  $\vec{E} = E\vec{e}_y$ .

On pose  $\omega = \frac{qB}{m}$  et  $A = \frac{E}{B\omega}$ .

1. Établir les équations différentielles régissant le mouvement de la particule.
2. Déterminer les équations horaires du mouvement de la particule.
3. Dessiner l'allure de la trajectoire (elle est appelée *cycloïde*).
4. a) Déterminer l'expression de la norme de la vitesse  $v(t)$ .  
b) Exprimer la valeur de la vitesse à l'instant  $t = \frac{\pi}{\omega}$  en fonction de  $E$  et  $B$ . Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.  
c) Exprimer la vitesse moyenne de la particule, appelée vitesse de dérive  $\vec{v}_d$ , en fonction de  $E$  et  $B$  et du vecteur unitaire adéquat.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 13.1.* Question 2 : appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

*Exercices 13.4 et 13.6.* Utiliser la méthode 13.3 ou 13.4 pour résoudre le système d'équations couplées.

*Exercice 13.7.* À la question 3, dresser un tableau de valeurs particulières pour connaître l'allure de la trajectoire.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	faux	faux

1. La force de pesanteur est négligeable.

4. C'est le cas lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ électrique (mouvement rectiligne uniformément accéléré).

5. Le mouvement est toujours accéléré ou retardé, car la force électrique travaille.

7. C'est le cas lorsque la vitesse initiale est parallèle au champ magnétique (mouvement rectiligne uniforme).

9. Si la vitesse est nulle, la force magnétique est nulle donc il n'y a pas de mouvement.

10. Cela donne  $v = \frac{2}{3}c$ , soit  $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0,44$  qui n'est pas du tout négligeable devant 1, donc la mécanique classique ne donne même pas un chiffre significatif.

### □ Les erreurs classiques

- Le produit vectoriel n'est pas commutatif (contrairement au produit scalaire) :  
 $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \neq q\vec{B} \wedge \vec{v}$ .
- Les champs électrique et magnétique n'ont pas les mêmes dimensions : on ne peut pas les additionner !
- Attention aux ordres de grandeur : le tesla (T) est une « grande » unité, l'intensité d'un champ magnétique étant généralement comprise entre  $10^{-6}$  et 1 T, tandis que le volt par mètre ( $V \cdot m^{-1}$ ) est une « petite » unité, l'intensité d'un champ électrique étant généralement comprise entre 1 et  $10^6 V \cdot m^{-1}$ .

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 13.1

1. L'intensité de la force électrique est  $F = eE$ , celle du poids est  $P = mg$ .

Le poids dépasse le centième de la force électrique lorsque  $P > \frac{F}{100}$  soit  $E < E_{\text{lim}} = \frac{100mg}{e}$ .

AN  $E_{\text{lim}} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . C'est une valeur extrêmement faible : le poids est donc négligeable devant toute force électrique usuelle.

2. Théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial et l'état final où la vitesse  $v$  a été acquise :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = e(V_f - V_i) = eU \quad \text{soit} \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

⇒ Méthode 13.1

La particule est relativiste lorsque  $v > \frac{c}{100}$  soit  $U > U_{\text{lim}} = \frac{mc^2}{2 \cdot 10^4 e}$ . AN  $U_{\text{lim}} = 48 \text{ kV}$ .

C'est une tension élevée mais fréquemment atteinte dans les dispositifs d'accélération de particules : on doit dans ce cas utiliser la mécanique relativiste.

*✎ Pour un électron, de masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , on trouve  $U_{\text{lim}} = 26 \text{ V}$  : la mécanique relativiste doit donc toujours être utilisée.*

## Exercice 13.2

1. a) Théorème de l'énergie cinétique entre  $C$  et  $E$  :  $\frac{1}{2}mv_E^2 - 0 = -e(V_C - V_E) > 0$  donc on doit avoir  $V_E - V_C > 0$ .

⇒ Méthode 13.1

b) La vitesse reste constante entre  $E$  et  $O$ , car il n'y a aucun champ dans cette zone : d'après le

calcul précédent,  $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$ . AN  $v_0 = 1,9 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. PFD pour l'électron dans le référentiel terrestre galiléen :  $m\vec{a} = -e\vec{E}$ . En intégrant on obtient

$\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$  puis  $\vec{OM} = -\frac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t$ . On projette cette équation vectorielle sur les axes

du repère :  $x(t) = v_0t$ ,  $y(t) = \frac{eEt^2}{2m}$  et  $z(t) = 0$ . Le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy), et

en remplaçant  $t$  par  $x/v_0$  on trouve l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y(x) = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2. \quad \text{À la sortie, } x_A = L \quad \text{donc} \quad y_A = \frac{eE}{2mv_0^2}L^2.$$

**3. a)** Les électrons ont un mouvement rectiligne et uniforme, car ils ne sont plus soumis à aucune force (leur poids étant toujours négligeable sur cette durée très courte).

**b)** La pente de la trajectoire au point  $A$  est donnée par la dérivée de l'équation de la trajectoire

calculée en 2 :  $\frac{dy}{dx} = \frac{eEx}{mv_0^2}$ , soit  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_A} = \frac{eEL}{mv_0^2}$ .

L'équation de la droite tangente à la trajectoire s'écrit à partir de la cote et de la pente :

$$y(x) = y(x_A) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_A} (x - x_A) = \frac{eEL^2}{2mv_0^2} + \frac{eEL}{mv_0^2} (x - L) \text{ d'où } \boxed{y(x) = \frac{eEL}{mv_0^2} \left( x - \frac{L}{2} \right)}$$

On en déduit  $y_B = y\left(\frac{L}{2} + D\right) = \frac{eELD}{mv_0^2}$ . La norme du champ entre les armatures étant  $E = \frac{U}{d}$ ,

on obtient finalement  $\boxed{y_B = \frac{eLD}{mdv_0^2} U}$  : cette valeur est proportionnelle à  $U$ .

### Exercice 13.3

**1.** Le travail électrique reçu par l'électron entre  $U$  et  $E$  est  $W_{\text{élec}} = -e(V_U - V_E) = -eX$ . Pour ralentir l'électron, ce travail doit être négatif, d'où  $\boxed{X > 0}$ .

Autre argument plus qualitatif : l'électron, chargé négativement, doit être repoussé par la plaque  $E$  et attiré par la plaque  $U$ , donc  $E$  doit être la plaque négative et  $U$  la plaque positive, ce qui correspond à  $X = V_U - V_E > 0$ .

**2.** Entre sa position initiale à l'intérieur de  $U$  et son arrivée sur  $E$ , l'électron reçoit un travail  $hf$ , puis fournit un travail  $W'$  (de valeur minimale  $W$ ), ce qui revient à recevoir un travail  $-W'$  ; enfin il reçoit un travail électrique  $-eX$ . Théorème de l'énergie cinétique :

$$E_{c,E} - 0 = hf - W' - eX. \text{ Puisque } W' \geq W, E_{c,E} \leq hf - W - eX, \text{ soit } \boxed{E_{c,E,\text{max}} = hf - W - eX}.$$

**3.** Le courant mesuré est nul lorsque plus aucun électron ne parvient jusqu'à  $E$ . Or pour qu'un électron arrive sur  $E$ , il faut que le calcul précédent donne une énergie cinétique positive :

$$E_{c,E,\text{max}} \geq 0 \Leftrightarrow eX \leq hf - W. \text{ Pour une tension } X \text{ telle que } eX > hf - W, \text{ aucun électron}$$

n'arrive sur  $E$ . La tension minimale d'arrêt  $V$  est donc donnée par  $\boxed{eV = hf - W}$ .

**4. a)** PFD pour l'électron dans le référentiel terrestre galiléen :  $m\vec{a} = -e\vec{E}$ . En intégrant on obtient  $\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$  puis  $\vec{OM} = -\frac{e}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t = -\frac{e}{2m}\frac{X}{d}t^2\vec{e}_x + v_0t(\cos\alpha\vec{e}_x + \sin\alpha\vec{e}_y)$ .

Projections :  $\boxed{x(t) = -\frac{eX}{2md}t^2 + v_0\cos(\alpha)t}$ ,  $\boxed{y(t) = v_0\sin(\alpha)t}$  et  $\boxed{z(t) = 0}$ . Le mouvement a donc lieu dans le plan  $(Oxy)$ . En remplaçant  $t$  par  $y/v_0\sin\alpha$  on trouve l'équation cartésienne de la

trajectoire :  $\boxed{x = -\frac{eX}{2mdv_0^2\sin^2\alpha}y^2 + \frac{1}{\tan\alpha}y}$ . Il s'agit d'un arc de parabole, d'axe parallèle à

$(Ox)$ , de concavité tournée vers la gauche (vers les  $x$  faibles) car le coefficient de  $y^2$  est négatif.

**b)** Dérivée de  $x$  par rapport à  $t$  :  $\frac{dx}{dt} = v_x = -\frac{eX}{md}t + v_0\cos\alpha$  (déjà calculée).

$x$  est maximale quand cette dérivée s'annule, soit en  $t_1 = \frac{mdv_0 \cos \alpha}{eX}$ .

Alors  $x_{\max} = -\frac{eX}{2md} \left( \frac{mdv_0 \cos \alpha}{eX} \right)^2 + v_0 \cos \alpha \frac{mdv_0 \cos \alpha}{eX} = \frac{mdv_0^2 \cos^2 \alpha}{2eX}$ . Finalement, on

remplace  $v_0^2$  avec l'expression donnée :  $x_{\max} = \frac{d(hf - W) \cos^2 \alpha}{eX}$ .

**c]** – Cas 1 :  $\alpha = 0$  et  $0 < X < V$

Pour  $\alpha = 0$ , l'expression se simplifie en  $x_{\max} = \frac{d(hf - W)}{eX}$ , et la trajectoire est rectiligne (car  $y = 0$ ).  $V$  étant donnée par la relation  $eV = hf - W (> 0)$ ,  $X < V$  équivaut à  $eX < hf - W$ , d'où  $x_{\max} > d$ . Les particules ayant cette vitesse initiale maximale parviennent à la plaque  $E$ .

– Cas 2 :  $\alpha = 0$  et  $X = V$

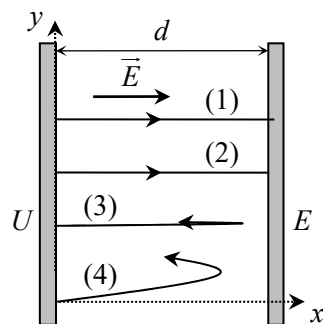
Cette fois on obtient  $x_{\max} = d$  : l'électron atteint tout juste la plaque  $E$ .

– Cas 3 :  $\alpha = 0$  et  $X > V$

Cette fois on obtient  $x_{\max} < d$  : l'électron ne peut plus atteindre la plaque  $E$ , il revient en arrière avant d'y arriver.

– Cas 4 :  $\alpha \neq 0$  et  $X > V$

On trouve maintenant  $x_{\max} < d \cos^2 \alpha < d$ , donc un électron ayant une vitesse initiale oblique ne parvient pas non plus à la plaque  $E$ .



Ces résultats sont bien compatibles avec ceux de la question 3 : la norme  $v_0$  donnée ici étant la valeur maximale en sortie de la plaque  $U$ , on retrouve le fait que  $V$  est la valeur limite de la tension  $X$  au-delà de laquelle plus aucun électron ne parvient à la plaque  $E$ .

### Exercice 13.4

1. Théorème de l'énergie cinétique pour un ion entre  $S$  et  $O$  :  $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - 0 = 2eU$  d'où

$$v_1 = \sqrt{\frac{4eU}{m_1}} = \sqrt{\frac{4eU}{200m}} \quad \text{De même} \quad v_2 = \sqrt{\frac{4eU}{m_2}} = \sqrt{\frac{4eU}{202m}}$$

⇒ Méthode 13.1

2. PFD :  $m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  donc

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = +qBv_y \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = +\omega v_y & (1) \\ \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x & (2) \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 & (3) \end{cases} \text{ avec } \omega = \frac{qB}{m}$$

⇒ Méthode 13.2

La troisième équation se résout par simple intégration, en tenant compte des conditions initiales :  $\boxed{z(t) = 0}$ , le mouvement est donc dans le plan ( $Oxy$ ).



Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément. Posons  $u = v_x + iv_y$  : alors (1) +  $i \times$  (2) devient  $\frac{du}{dt} + i\omega u = 0$ . En résolvant cette équation avec la condition initiale  $\vec{v}(0) = \vec{v}_i = v_i \vec{e}_y$  soit  $u(0) = iv_i = K$ , on trouve :  $u(t) = iv_i \exp(-i\omega t)$ . Parties réelle et imaginaire :  $v_x(t) = v_i \sin(\omega t)$  et  $v_y(t) = v_i \cos(\omega t)$ . On intègre à nouveau, avec les conditions initiales  $x(0) = y(0) = 0$  :  $x(t) = \frac{v_i}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$  et  $y(t) = \frac{v_i}{\omega} \sin(\omega t)$ .

⇒ Méthode 13.4

Il s'agit des équations paramétriques d'un cercle de rayon  $R_i = \frac{v_i}{\omega}$ .

On peut obtenir l'équation cartésienne de ce cercle en éliminant  $t$  :  $\left(x - \frac{v_i}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2$ .

On en déduit :  $R_1 = \frac{v_1}{\omega_1} = \frac{m_1 v_1}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{200mU}{e}}$  et  $R_2 = \frac{m_2 v_2}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{202mU}{e}}$ .

⇒ Méthode 13.5 ou 13.6

3.  $d = 2R_2 - 2R_1 = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{mU}{e}} (\sqrt{202} - \sqrt{200})$ . AN  $d = 1,4 \text{ cm}$ .

### Exercice 13.5

1. PFD pour la particule dans le référentiel  $\mathcal{R}$  terrestre galiléen :  $m\vec{a} = q\vec{E}$  (on néglige le poids devant la force électrique), donc  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$ . En intégrant cette équation et en tenant compte des conditions initiales, on trouve :  $\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t = \frac{qE}{m}t\vec{e}_x$  (comme  $U_{D_1D_2} > 0$ , alors  $\vec{E} = +E\vec{e}_x$ ), puis

$\vec{OM} = \frac{qE}{2m}t^2\vec{e}_x$ . Le mouvement est donc rectiligne uniformément accéléré, selon l'axe (Ox).

Lorsque la particule pénètre dans la région (2) :  $x = d$  et donc  $t = t_1 = \sqrt{\frac{2dm}{qE}}$ . La vitesse de la

particule est alors  $v_1 = v(t_1) = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$ . Vectoriellement :  $\vec{v}_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}\vec{e}_x$ .

2. a) PFD dans la zone (2) :  $m\vec{a} = \vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Projection sur  $\vec{e}_z$  :  $m\ddot{z} = 0$  donc  $\dot{z}(t) = \text{cte}$ . Initialement,  $\dot{z}(0) = 0$ , donc  $\dot{z}(t) = 0, \forall t$ . On intègre à nouveau :  $z(t) = \text{cte}$ . Initialement,  $z(0) = 0$ , donc  $z(t) = 0, \forall t$  : le mouvement a lieu dans le plan (Oxy).

Par ailleurs, on peut appliquer à la particule le TÈC :  $\frac{d\mathcal{E}_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_L)_{\mathcal{R}}$ .

Or  $\mathcal{P}(\vec{F}_L)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_L \cdot \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = 0$  puisque  $\vec{F}_L \perp \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$ . Ainsi  $\frac{d\varepsilon_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = 0$ , soit  $\varepsilon_c(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$ .

Puisque  $\varepsilon_c(M)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v(M)_{\mathcal{R}}^2$ , on en déduit  $v(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  : le mouvement est uniforme.

⇒ Méthode 13.7

**b)** Utilisons maintenant la base de Frenet (complétée par  $\vec{e}_z$ ) :  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$  et  $\vec{v} = v \vec{\tau}$  donc  $\vec{F}_L = qv \vec{\tau} \wedge B \vec{e}_z = \pm qvB \vec{n}$  (on ne sait pas de quel côté est courbée la trajectoire). La projection du PFD sur  $\vec{n}$  est donc :  $m \frac{v^2}{R} = \pm qvB$ , qui peut se réécrire  $m \frac{v^2}{R} = qv_1 B$  puisque  $v = v_1$  et que le premier membre est positif. On en déduit le rayon de courbure de la trajectoire  $R = \frac{mv_1}{qB}$  et on voit qu'il est constant. Or la seule courbe plane ayant un rayon de courbure constant est le

cercle : la particule a donc un mouvement circulaire de rayon  $R_1 = \frac{mv_1}{qB}$ .

⇒ Méthode 13.6

**c)** La norme de la vitesse étant constante au cours de son mouvement dans la région (2), lorsque la particule sort de la région (2) la norme de sa vitesse est toujours égale à  $v_1$ . Mais cette fois le

vecteur vitesse est  $\vec{v}'_1 = -\vec{v}_1 = -\sqrt{\frac{2qEd}{m}} \vec{e}_x$ .

**3.** Dans la région (3), le mouvement de la particule est à nouveau rectiligne uniformément accéléré. Pour connaître la vitesse  $v_2$  on applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée et la sortie de la particule dans la région (3) :

$$\frac{1}{2} m_1 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = qEd \quad \text{d'où} \quad v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}$$

⇒ Méthode 13.1

**4. a)** La particule effectue de nouveau un mouvement circulaire (un demi-tour), à vitesse constante ; comme précédemment, le rayon du cercle est  $R_2 = \frac{mv_2}{qB}$ .

**b)** La période du mouvement circulaire uniforme est :  $T_c = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$ . La durée d'un demi-

tour est donc indépendante de la vitesse de la particule : elle est égale à  $\tau = \frac{T_c}{2} = \frac{\pi m}{qB}$  et reste

constante au cours du mouvement : en la mesurant, on peut donc remonter au rapport  $\frac{q}{m} = \frac{\pi}{\tau B}$ .

c) Pour qu'il y ait accélération à chaque demi-tour, le vecteur  $\vec{E}$  doit changer de sens à chaque passage de la particule. Il faut donc que la fréquence de la tension alternative appliquée dans la région (3) soit la fréquence de rotation des particules :  $f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{qB}{2\pi m}$  (fréquence cyclotron).

5. a) À chaque passage dans la région (3), l'énergie cinétique de la particule augmente de la quantité  $W = qEd$ , de sorte qu'après  $n$  passages :  $\frac{1}{2}mv_n^2 = n \times W$ , donc  $v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}$ .

b) Le passage de la particule dans la région (3) permet d'augmenter son énergie cinétique, et donc sa vitesse : c'est le but d'un accélérateur de particules.

6. a)  $v_{\max} = R_{\max} \omega_c = R_{\max} \frac{qB}{m} = 2\pi R_{\max} f_c$ . On en déduit l'énergie cinétique maximale du proton :  $E_{c \max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m(2\pi R_{\max} f_c)^2$ . AN  $E_{c \max} = 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,0 \text{ MeV}$  (avec

$R_{\max} = 26 \text{ cm}$ ). Et  $B = \frac{2\pi m f_c}{e}$ . AN  $B = 0,79 \text{ T}$ .

b) À chaque accélération, le proton acquiert une énergie cinétique  $W = eEd = eU$ . Or il subit deux accélérations par tour. L'énergie cinétique maximale sera donc obtenue au bout d'un nombre  $N$  de tours tel que :  $E_{c \max} = N \times 2eU$ , d'où  $N = \frac{E_{c \max}}{2eU}$ . AN  $N = 5$ .

### Exercice 13.6

1. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule  $P$  est soumise uniquement à la force magnétique  $\vec{F} = q\vec{v}(P) \wedge \vec{B}$ . Principe fondamental de la dynamique :  $m\vec{a}(P) = q\vec{v}(P) \wedge \vec{B}$ .

$$\text{Projections : } \begin{cases} m\ddot{x} = +qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

2. La troisième donne par intégration  $\dot{z} = \text{cte} = 0$  puis  $z = \text{cte} = 0$  : le mouvement a lieu dans le plan  $(Oxy)$ . On pose alors  $u = x + iy$  : (1) +  $i$ (2)  $\Leftrightarrow \ddot{u} + i\omega\dot{u} = 0$ . Solution :  $\dot{u}(t) = A \exp(-i\omega t)$ . Conditions initiales :  $\dot{u}(0) = 0 + i v_0 = A$ , d'où  $\dot{u}(t) = i v_0 \exp(-i\omega t)$ . On intègre encore une fois :

$$u(t) = -\frac{v_0}{\omega} \exp(-i\omega t) + C. \quad u(0) = 0 = -\frac{v_0}{\omega} + C \quad \text{d'où} \quad u(t) = \frac{v_0}{\omega} [1 - \exp(-i\omega t)]. \quad \text{Finalement :}$$

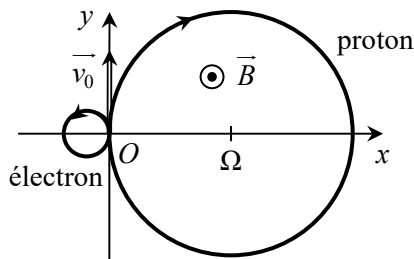
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

$\Rightarrow$  Méthode 13.4

L'équation cartésienne est  $\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \frac{v_0^2}{\omega^2}$ , ce qui correspond à un cercle de centre

$$\Omega\left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right) \quad \text{et de rayon} \quad R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{m v_0}{|q| B}.$$

$\Rightarrow$  Méthode 13.5



Proton :  $\frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} > 0$  donc la trajectoire est à droite.

Électron : la trajectoire est à gauche et le rayon (proportionnel à  $m$ ) beaucoup plus petit.

3. PFD :  $m\vec{a}(P) = q\vec{v}(P) \wedge \vec{B} - \lambda\vec{v}(P)$ .

$$\text{Projections : } \begin{cases} m\ddot{x} = +qB\dot{y} - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} - \lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} - \alpha\dot{x} & (1') \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} & (2') \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} & (3') \end{cases}$$

Solution de (3') :  $\dot{z}(t) = D \exp(-\alpha t)$ .  $\dot{z}(0) = 0 = D$  donc  $\dot{z}(t) = 0$ . On intègre :  $z = \text{cte} = 0$  donc le mouvement a toujours lieu dans le plan (Oxy).

4. En posant à nouveau  $u = x + iy$  :  $(1') + i(2') \Leftrightarrow \ddot{u} + (\alpha + i\omega)\dot{u} = 0$ . Dans la solution précédente il suffit donc de remplacer  $i\omega$  par  $\alpha + i\omega$  :

$$u(t) = \frac{iv_0}{\alpha + i\omega} [1 - \exp(-\alpha t - i\omega t)] = \frac{iv_0\alpha + v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} [1 - \exp(-\alpha t)\exp(-i\omega t)].$$

On obtient donc finalement :

$$x(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} [1 - \exp(-\alpha t)\cos(\omega t)] - \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t)\sin(\omega t)$$

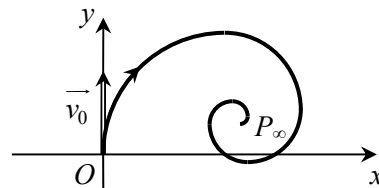
$$\text{et } y(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t)\sin(\omega t) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} [1 - \exp(-\alpha t)\cos(\omega t)].$$

$\Rightarrow$  Méthode 13.4

5. Pour  $t \rightarrow \infty$ , le point asymptote est :

$$P_\infty \left( \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, 0 \right).$$

La particule tourne toujours (facteurs sinusoïdaux) mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale, tournant toujours vers la droite pour un proton, et s'enroulant autour du point  $P_\infty$ .



6. a) Deux des quatre trajectoires tournent vers la droite, comme celle du kaon, et les deux autres tournent vers la gauche : il y a donc deux particules positives et deux négatives.

b) La particule tourne vers la droite, donc elle est chargée négativement. De plus son rayon de courbure est beaucoup plus faible que les autres, donc sa masse également : il s'agit d'un électron.

### Exercice 13.7

1. On néglige le poids devant la force de Lorentz. PFD :  $m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ . Projections :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \left( \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \right), \text{ d'où : } \begin{cases} \ddot{x} = \frac{q}{m}(0 + B\dot{y}) \\ \ddot{y} = \frac{q}{m}(E - B\dot{x}) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

En posant  $\omega = \frac{qB}{m}$ , on obtient le système d'équation différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m} - \omega \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

2. La troisième équation se résout par simple intégration, en tenant compte des conditions initiales :  $z(t) = 0$ , le mouvement est donc dans le plan  $(Oxy)$ .

Les deux premières équations sont couplées et ne peuvent donc pas être résolues séparément :

On intègre (1) :  $\dot{x} = \omega y$  (comme  $v_x(0) = 0$ ), et on la reporte dans (2) :  $\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{qE}{m}$ .

La solution de cette équation est de la forme :  $y(t) = A + C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$  avec

$A = \frac{qE}{m\omega^2} = \frac{E}{B\omega}$ .  $C$  et  $D$  sont des constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales :  $y(0) = A + C = 0$  d'où  $C = -A$  ;  $\dot{y}(0) = D\omega = 0$  d'où  $D = 0$ .

Donc finalement :  $y(t) = A(1 - \cos \omega t)$ .

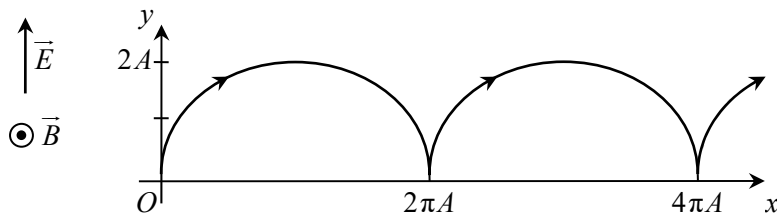
Comme  $\dot{x} = \omega y = A\omega(1 - \cos \omega t)$ , on obtient en intégrant :  $x = A(\omega t - \sin \omega t)$  (en tenant compte de la condition initiale  $x(0) = 0$ ).

⇨ Méthode 13.3

3. Pour déterminer l'allure de la trajectoire, on dresse un tableau de valeurs :

$\omega t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x$	0	$\frac{A}{2}(\pi - 2)$	$\pi A$	$\frac{A}{2}(3\pi + 2)$	$2\pi A$
$y$	0	$A$	$2A$	$A$	0

On limite l'étude à l'intervalle  $[0, 2\pi]$  compte tenu de la périodicité des fonctions cosinus et sinus. La trajectoire obtenue est appelée *cycloïde*.



*✎ Cette trajectoire est la même que celle d'un point d'un cercle roulant sur une droite à vitesse constante.*

**4. a)** Norme du vecteur vitesse :  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ , avec  $v_x = A\omega(1 - \cos\omega t) = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t)$  et

$$v_y = \frac{E}{B}\sin\omega t, \text{ donc : } v(t) = \frac{E}{B}\sqrt{2(1 - \cos\omega t)} = \left| 2\frac{E}{B}\sin\frac{\omega t}{2} \right| \left( \text{avec } \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \right).$$

**b)** D'après cette expression,  $v\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2\frac{E}{B}$ .

Théorème de l'énergie cinétique entre les dates  $t = 0$ , où la particule est au point  $O$  avec une vitesse nulle, et  $t = \frac{\pi}{\omega}$  où la particule est au point  $M$  avec la vitesse  $v$  :

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_0^M q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} = \int_0^M q\vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_0^M qE dy \quad \text{donc finalement, comme}$$

$$y\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = 2A : \frac{1}{2}mv^2 = 2AqE = 2qE\frac{E}{B\omega} = 2m\frac{E^2}{B^2} \quad \text{d'où } v = 2\frac{E}{B}.$$

On retrouve bien le même résultat.

**c)**  $\langle \dot{x} \rangle = \frac{E}{B}$ ,  $\langle \dot{y} \rangle = 0$  et  $\langle \dot{z} \rangle = 0$  donc  $\vec{v}_d = \frac{E}{B}\vec{e}_x$ .

On constate en effet, d'après le schéma de la trajectoire, que la particule a tendance à dériver vers la droite selon l'axe ( $Ox$ ).



# Moment cinétique

# Force centrale

UN SCIENTIFIQUE



Dans chaque domaine qu'il aborde, **Christiaan HUYGENS** (1629-1695) est capable d'élaborer une théorie physique, de développer les éléments mathématiques pour l'étudier et de concevoir des instruments pour étayer ses hypothèses. Il étudie le mouvement du pendule, ce qui l'amène à construire des horloges ; il conçoit des instruments d'optique, avec lesquels il découvre les anneaux de Saturne et détermine avec précision les dimensions des planètes et leur distance. Il développe aussi le calcul des probabilités.

## ■ Un peu d'histoire

Dans un Moyen-Âge où les sciences étaient peu en vogue, Jean BURIDAN (env. 1300-1358) fait exception. Il s'intéresse à la chute des corps et introduit la notion d'*impetus* qui préfigure celle d'inertie. Le concept de quantité de mouvement est étudié par DESCARTES, mais c'est le savant hollandais Christiaan HUYGENS qui en explique la nature : il s'intéresse aux collisions élastiques et se rend compte que la conservation de la quantité de mouvement doit se comprendre globalement et vectoriellement. Les lois de la dynamique, publiées par NEWTON en 1687, permettent d'étayer ces propriétés. Celle de la gravitation universelle, introduite dans le même ouvrage, permet de démontrer les lois du mouvement des planètes, qui avaient été énoncées empiriquement par Johannes KEPLER en 1621, après une longue analyse des observations extrêmement précises de l'astronome danois Tycho BRAHE.



# ■■ Objectifs

## ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les définitions du moment cinétique par rapport à un point, à un axe orienté
- ▷ Les définitions du moment d'une force par rapport à un point, à un axe orienté
- ▷ Le théorème du moment cinétique sous ses différentes formes
- ▷ Les notions de force centrale et de mouvement à force centrale
- ▷ Les expressions des deux forces newtoniennes et des énergies potentielles dont elles dérivent
- ▷ Les trois lois de Kepler
- ▷ L'ordre de grandeur des vitesses cosmiques en dynamique terrestre

## ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement
- ▷ Étudier le mouvement d'un point matériel avec le théorème du moment cinétique
- ▷ Démontrer les lois du mouvement à force centrale : conservation du moment cinétique, planéité, loi des aires
- ▷ Définir une énergie potentielle effective, et l'utiliser pour déterminer les limites du mouvement radial
- ▷ Établir l'expression de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique
- ▷ Étudier un mouvement circulaire à force centrale gravitationnelle
- ▷ Différencier les orbites des satellites en fonction de leurs missions, et établir celle d'un satellite géostationnaire
- ▷ Calculer les vitesses cosmiques

# ■ ■ Résumé de cours

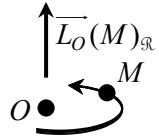
## ■ Moment cinétique

### □ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

Le moment cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , par rapport à un point  $O$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est le vecteur :

$$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{OM} \wedge \vec{p}(M)_{\mathcal{R}}.$$

Sa direction indique un axe de rotation instantané de  $M$  autour de  $O$ .



### □ Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique de  $M$  par rapport à un axe  $\Delta$ , passant par  $O$  et de vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$ , dans  $\mathcal{R}$ , est la projection de  $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$  sur  $\Delta$  :

$$L_\Delta(M)_{\mathcal{R}} = \vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\Delta = [m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}}] \cdot \vec{e}_\Delta.$$

Il ne dépend pas du choix du point  $O$  sur l'axe  $\Delta$ .

Son signe est positif si  $M$  tourne autour de l'axe dans le sens positif (règle du tire-bouchon...).

### □ Moment cinétique d'un système de points matériels

C'est la somme des moments cinétiques de tous les points du système.

## ■ Moment d'une force

### □ Moment (vectoriel) d'une force par rapport à un point

Le moment par rapport à  $O$  d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant en  $M$  est le vecteur :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}.$$

### □ Moment (scalaire) d'une force par rapport à un axe orienté

Le moment d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant en  $M$ , par rapport à un axe  $\Delta$  passant par  $O$  et de vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$ , est la projection de  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  sur  $\Delta$  :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta = [\vec{OM} \wedge \vec{F}] \cdot \vec{e}_\Delta.$$

Il ne dépend pas du choix du point  $O$  sur l'axe  $\Delta$ .

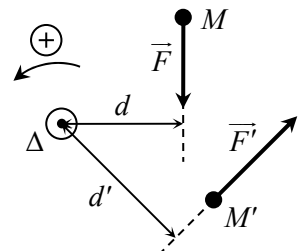
– Une force a un moment nul par rapport à  $\Delta$  si elle est parallèle à l'axe  $\Delta$ , ou si son support (droite passant par  $M$  et dirigée par  $\vec{F}$ ) coupe  $\Delta$ .

– Pour une force dans un plan orthogonal à  $\Delta$ , cette formule est équivalente à  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d F$  où  $F$  est la norme de  $\vec{F}$  et  $d$  le

**bras de levier**, distance entre le support de la force et l'axe  $\Delta$ .

Le signe de ce moment est positif si cette force tend à faire tourner  $M$  dans le sens positif autour de l'axe, il est négatif sinon.

Sur ce schéma :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) < 0$ ,  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}') > 0$ .



⇒ Méthode 14.1. Calcul des moments

## ■ Théorème du moment cinétique (TMC)

### □ Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Par rapport à un point  $O$  fixe dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\vec{F}).$$

Par rapport à un axe  $\Delta$  fixe dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{dL_\Delta(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathfrak{M}_\Delta(\vec{F}).$$

⇒ Méthode 14.2. Utilisation du TMC pour obtenir l'équation du mouvement

### □ Théorème du moment cinétique pour un système de points

Le théorème du moment cinétique pour un système, déformable ou non, s'écrit comme pour un point matériel, en tenant compte uniquement des moments des actions *extérieures* exercées sur les différents points du système (la somme des moments des actions intérieures étant nulle).

## ■ Application au mouvement à force centrale

### □ Forces centrales

On appelle **force centrale** toute force dont le support passe par un point fixe du référentiel. On choisit généralement ce point comme origine  $O$  du référentiel : la force est donc, à chaque instant, colinéaire au vecteur  $\vec{OM}$  et au vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  des coordonnées sphériques.

Exemples

– Force de rappel élastique isotrope :  
 $\vec{F} = -k\vec{OM} = -kr\vec{e}_r$ .

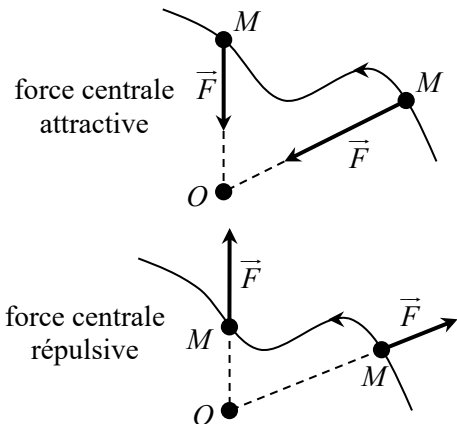
– Force **gravitationnelle** exercée par une masse ponctuelle  $M$  située à l'origine  $O$  sur une masse

ponctuelle  $m$  : 
$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r = -GMm \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

avec  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  (constante de gravitation universelle).

– Force **électrostatique** exercée par une charge ponctuelle  $Q$  située en  $O$  sur une charge pon-

ctuelle  $q$  : 
$$\vec{F}_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$$
 avec  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  (permittivité du vide).



On dit que  $M$  est en **mouvement à force centrale** s'il est soumis uniquement à une force centrale (ou éventuellement à d'autres forces dont la somme est nulle).

### □ Conservation du moment cinétique

Pour  $M$  en mouvement à force centrale, dans  $\mathcal{R}$  galiléen, le moment cinétique de  $M$  en  $O$  (le centre de force) se conserve :  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \overline{cte}$ .

### □ Conséquences

Mouvement plan

Le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan contenant  $O$  (le centre de force) et orthogonal à  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$  (donné par les conditions initiales).

Dans le cas où  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$  est nul, alors le mouvement a lieu selon une droite passant par  $O$ .

⇒ **Méthode 14.3. Démonstration du mouvement plan**

Loi des aires

Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires et la base  $(\overline{e}_r, \overline{e}_\theta, \overline{e}_z)$  associée (dans ce plan, le  $r$  cylindrique se confond avec le  $r$  sphérique). Alors  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m r^2 \dot{\theta} \overline{e}_z = \overline{cte}$  donc  $r^2 \dot{\theta} = C = cte$  (**intégrale première du moment cinétique**).

Cette grandeur  $C$  est appelée **constante des aires**. En effet, l'aire balayée par  $\overline{OM}$  pendant une durée  $\Delta t$  est  $S_{\Delta t} = \frac{|C|}{2} \Delta t$  : elle est proportionnelle à la durée.

⇒ **Méthode 14.4. Constante des aires et démonstration de la loi des aires**

## ■ Mouvement à force centrale conservative

### □ Conservation de l'énergie mécanique

Si la force  $\overline{F}$  est conservative et dérive de l'énergie potentielle  $E_p$ , l'énergie mécanique se conserve :  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = cte$  (intégrale première de l'énergie mécanique). On peut l'écrire :

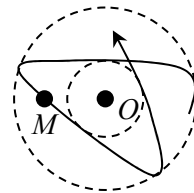
$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) = cte \text{ avec l'énergie potentielle effective } E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r).$$

### □ Limites du mouvement radial

Les seules valeurs accessibles de  $r$  sont celles qui vérifient l'inégalité  $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$ . On applique alors un raisonnement graphique analogue à celui de la méthode 12.5.

Deux cas sont possibles, selon les conditions initiales.

- Si  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ , la trajectoire du mobile  $M$  est comprise entre deux cercles de centre  $O$  et de rayons  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  :  $M$  est dans un **état lié**.



- Si  $r \in [r_{\min}, +\infty[$ , la trajectoire du mobile  $M$  n'est pas bornée et il peut donc s'éloigner à l'infini :  $M$  est dans un **état libre** ou **état de diffusion**.



⇒ Méthode 14.5. Détermination des limites du mouvement radial

## ■ Cas du mouvement à force centrale newtonienne

### □ Force newtonienne

C'est une force centrale de la forme  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$  avec  $K$  constante. On en connaît deux exemples.

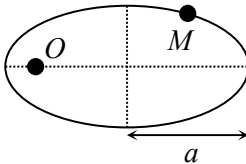
- La force gravitationnelle est toujours attractive ( $K = -GMm < 0$ ).
- La force électrostatique est attractive ou répulsive selon le signe de  $K = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}$  : des charges de même signe se repoussent ( $K > 0$ ), des charges de signes opposés s'attirent ( $K < 0$ ).

Énergie potentielle

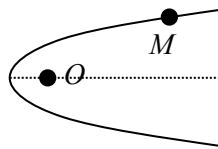
Une force newtonienne dérive d'une énergie potentielle :  $E_p = \frac{K}{r}$  (avec origine à l'infini).

### □ Trajectoires possibles

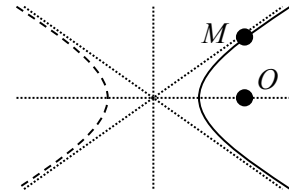
Dans le cas d'une force newtonienne attractive, il y a trois types de trajectoires possibles selon la valeur de l'énergie mécanique :



$E_m < 0$  : ellipse de foyer  $O$   
(état lié)



$E_m = 0$  : parabole de foyer  $O$   
(état de diffusion)

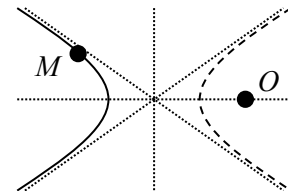


$E_m > 0$  : branche d'hyperbole de foyer  $O$  (état de diffusion)

Une ellipse possède un grand axe (de longueur  $2a$ ) et un petit axe (de longueur  $2b$ ).

Le cercle est un cas particulier d'ellipse pour lequel  $a = b = r$  (rayon).

Dans le cas d'une force newtonienne répulsive,  $E_m > 0$  et la trajectoire est toujours une branche d'hyperbole de foyer  $O$  (branche la plus éloignée de  $O$ ), correspondant à un état de diffusion.



### □ Mouvement des planètes : lois de Kepler

1. Les planètes décrivent des trajectoires elliptiques, dont le Soleil est l'un des foyers.
2. Le vecteur Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

3. La période  $T$  et le demi-grand axe  $a$  sont tels que  $\frac{T^2}{a^3}$  est le même pour toutes les planètes.

### □ Mouvement d'un satellite sur une trajectoire circulaire

Pour un astre attracteur de masse  $M$  et de rayon  $R$ , la vitesse de satellisation sur une trajectoire circulaire de rayon  $r$  est  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . On en déduit l'énergie mécanique :  $E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c$ .

Pour une orbite basse (altitude  $h \ll R$ , donc  $r \approx R$ ) :  $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$  (1<sup>re</sup> vitesse cosmique).

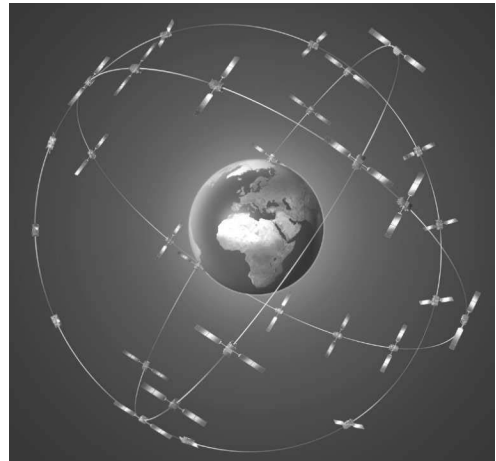
Pour la Terre, on trouve  $v_1 = 7,92 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

⇒ **Méthode 14.6. Étude d'une trajectoire circulaire**

### Exemples de trajectoires circulaires

– Un satellite **géostationnaire** est immobile par rapport à la Terre : sa trajectoire est un cercle dans le plan équatorial et sa période de révolution est  $T = 86164 \text{ s}$  (1 jour sidéral), ce qui détermine le rayon de sa trajectoire  $r = 42200 \text{ km}$  et son altitude  $h = r - R_T = 35800 \text{ km}$ .

– Les systèmes de géolocalisation et de navigation par satellites (GNSS) sont constitués de *constellations* de satellites : pour chaque système comme GPS ou Galileo, 24 satellites actifs sont répartis sur 3 orbites d'altitude moyenne (19000 à 23000 km), correspondant à une période de quelques heures. À tout instant, tout objet de la Terre est visible depuis au moins 3 satellites (et souvent 9 ou 10), ce qui permet de calculer sa position.



Constellation du système Galileo  
Image ESA/Pierre Carril

– Un satellite météorologique peut être géostationnaire (pour observer toujours la même moitié de Terre), ou bien en **orbite circumpolaire**, orbite basse (altitude 600 à 800 km) passant pratiquement au-dessus des pôles : ainsi il peut observer chaque point de la Terre deux fois par jour.

### □ Vitesse de libération (ou vitesse parabolique)

À partir de la surface d'un astre de masse  $M$  et de rayon  $R$ , la vitesse minimale pour obtenir un

état de diffusion est  $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$  (2<sup>e</sup> vitesse cosmique). Pour la Terre,  $v_2 = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

⇒ **Méthode 14.7. Calcul de la vitesse de libération**

### □ Énergie mécanique sur une trajectoire elliptique

Sur une trajectoire elliptique de demi-grand axe  $a$ , l'énergie mécanique vaut :  $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ .

⇒ **Méthode 14.8. Calcul de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique**

## ■ Comment étudier le mouvement d'un point matériel avec le théorème du moment cinétique ?

### □ Méthode 14.1. Calcul des moments

Le moment cinétique et le moment d'une force par rapport à un point sont des produits vectoriels de deux vecteurs, qui peuvent être calculés de deux manières :

- avec la définition du produit vectoriel (rarement utilisable en pratique) ;
- en utilisant les composantes des deux vecteurs dans une même base.

Les moments par rapport à un axe s'obtiennent par simple projection des moments vectoriels, ou bien avec la formule du « bras de levier » pour une force.

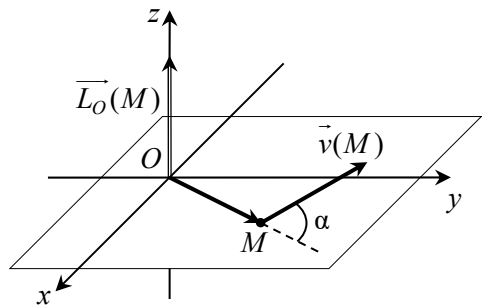
⇒ Exercices 14.1 à 14.14

- Par définition, le produit vectoriel de  $\overline{OM}$  et  $\vec{v}$  est orthogonal au plan défini par  $\overline{OM}$  et  $\vec{v}$ , son sens est tel que  $(\overline{OM}, \vec{v}, \overline{OM} \wedge \vec{v})$  forment un trièdre direct (règle des trois doigts de la main droite...) et sa norme est  $\|\overline{OM} \wedge \vec{v}\| = \|\overline{OM}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\overline{OM}, \vec{v})$ .

Sur l'exemple du schéma ci-contre :

$$\overline{L}_O(M) = m \overline{OM} \wedge \vec{v}(M) = +m OM v \sin \alpha \vec{e}_z$$

donc par rapport à l'axe  $(Oz)$  :  $L_{(Oz)}(M) = +m OM v \sin \alpha$ .



- Le produit vectoriel de  $\overline{OM} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$  a pour composantes  $\begin{pmatrix} r_2 v_3 - r_3 v_2 \\ r_3 v_1 - r_1 v_3 \\ r_1 v_2 - r_2 v_1 \end{pmatrix}$ .

Par exemple dans une base cylindrique :  $\overline{OM} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$  donc  $\overline{L}_O(M) \begin{pmatrix} -mzr\dot{\theta} \\ m(z\dot{r} - r\dot{z}) \\ mr^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$ .

On peut aussi faire ce calcul en écrivant explicitement les vecteurs unitaires de la base. On utilise alors le fait que le produit vectoriel de deux d'entre eux, pris dans l'ordre, donne le troisième (et s'ils sont pris dans le désordre, cela donne l'opposé) : par exemple  $\vec{e}_0 \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$ , mais  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_0 = -\vec{e}_r$ . Enfin le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul.

Par exemple, toujours dans la base cylindrique :  $\overline{OM} = r\overline{e}_r + z\overline{e}_z$  et  $\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta + \dot{z}\overline{e}_z$  donc

$$\begin{aligned} \overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} &= m(r\overline{e}_r + z\overline{e}_z) \wedge (\dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta + \dot{z}\overline{e}_z) \\ &= \overline{0} + mr^2\dot{\theta}\overline{e}_r \wedge \overline{e}_\theta + mr\dot{z}\overline{e}_r \wedge \overline{e}_z + mz\dot{r}\overline{e}_z \wedge \overline{e}_r + mzr\dot{\theta}\overline{e}_z \wedge \overline{e}_\theta + \overline{0} \\ &= -mzr\dot{\theta}\overline{e}_r + m(z\dot{r} - r\dot{z})\overline{e}_\theta + mr^2\dot{\theta}\overline{e}_z. \end{aligned}$$

Alors le moment par rapport à l'axe  $(Oz)$  est  $L_{(Oz)}(M) = mr^2\dot{\theta}$ .

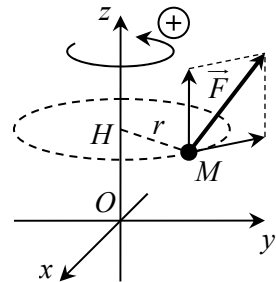
– Pour le moment par rapport à un axe d'une force quelconque, on peut la décomposer en deux termes : l'un parallèle à l'axe, donc de moment nul, et l'autre dans un plan orthogonal à l'axe, pour lequel on peut faire le calcul avec le bras de levier.

Si on connaît les composantes de la force sur une base, on peut aussi faire un calcul analogue aux précédents (produit vectoriel puis projection sur l'axe).

Cherchons par exemple le moment par rapport à  $(Oz)$  d'une force  $\overline{F} = F_\theta\overline{e}_\theta + F_z\overline{e}_z$  appliquée à un point  $M$  quelconque.

$F_z\overline{e}_z$  est parallèle à l'axe, donc de moment nul ; et  $F_\theta\overline{e}_\theta$  a pour bras de levier  $HM = r$  donc  $\mathcal{M}_{(Oz)}(\overline{F}) = rF_\theta$  (le signe de  $F_\theta$  donnant le « sens de rotation » donc le signe du moment).

On peut aussi le calculer à partir du moment par rapport à un point  $O$  de l'axe :  $\mathcal{M}_O(\overline{F}) = \overline{OM} \wedge \overline{F} = (r\overline{e}_r + z\overline{e}_z) \wedge (F_\theta\overline{e}_\theta + F_z\overline{e}_z)$   
 $= rF_\theta\overline{e}_z - rF_z\overline{e}_\theta + zF_\theta\overline{e}_r$  d'où  $\mathcal{M}_{(Oz)}(\overline{F}) = \mathcal{M}_O(\overline{F}) \cdot \overline{e}_z = rF_\theta$ .



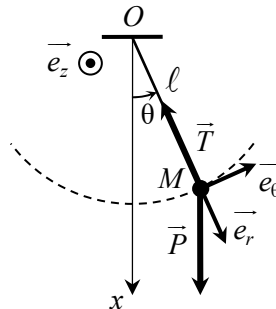
### □ Méthode 14.2. Utilisation du TMC pour obtenir l'équation du mouvement

On utilise le TMC dans certains cas particuliers pour éliminer une force inconnue, notamment la tension d'un fil ou la réaction d'un support : pour cela on applique le TMC par rapport à un point fixe donnant un moment nul pour cette force. Cette méthode peut permettre une mise en équation plus rapide que le PFD. (On utilise aussi, et surtout, le TMC pour un mouvement à force centrale : voir méthodes suivantes.)

⇒ Exercices 14.1, 14.2, 14.3

L'exemple le plus classique est celui du pendule pesant simple, constitué d'une masse  $m$  assimilée à un point matériel  $M$ , suspendue par un fil idéal inextensible à un point fixe  $O$  du référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  (considéré comme galiléen). On suppose que  $M$  ne peut se déplacer que dans le plan vertical  $(Oxy)$ . Forces appliquées à  $M$  : poids  $\overline{P} = m\overline{g} = mg(\cos\theta\overline{e}_r - \sin\theta\overline{e}_\theta)$  ; tension du fil  $\overline{T} = -T\overline{e}_r$ . On applique le TMC à  $M$  par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$\frac{d\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{M}_O(\overline{P}) + \mathcal{M}_O(\overline{T}).$$





$\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = \overline{OM} \wedge \overline{P} = \ell \overline{e}_r \wedge mg(\cos\theta \overline{e}_r - \sin\theta \overline{e}_\theta) = \vec{0} - mg\ell \sin\theta \overline{e}_z$  ;  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) = \overline{OM} \wedge \overline{T} = \vec{0}$  car  $\overline{T}$  est toujours colinéaire à  $\overline{OM}$  ; et  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m\ell \overline{e}_r \wedge \ell \dot{\theta} \overline{e}_\theta = m\ell^2 \dot{\theta} \overline{e}_z$  donc le TMC équivaut à :  $m\ell^2 \ddot{\theta} \overline{e}_z = -mg\ell \sin\theta \overline{e}_z$  d'où l'équation différentielle  $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$ .

## ■ Comment étudier un mouvement à force centrale ?

### □ Méthode 14.3. Démonstration du mouvement plan

Pour un point matériel  $M$  soumis uniquement à une force centrale  $\overline{F}$ , on applique le TMC par rapport au centre de force  $O$  : on en déduit que le moment cinétique est constant, puis que le mouvement a lieu dans un plan contenant  $O$  et dépendant des conditions initiales.

⇒ Exercice 14.4, 14.5, 14.6, 14.10

TMC par rapport au point  $O$  fixe dans  $\mathcal{R}$  galiléen :  $\frac{d\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F}) = \overline{OM} \wedge \overline{F} = \vec{0}$  car  $\overline{F}$

est colinéaire à  $\overline{OM}$ , donc  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  : le moment cinétique de  $M$  en  $O$  se conserve.

Or  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m\overline{OM} \wedge \overline{v}(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  : le vecteur position  $\overline{OM}$  est toujours orthogonal au vecteur constant  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$ , donc le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan contenant  $O$  et orthogonal à  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}$ .

– Supposons par exemple que les conditions initiales sont les suivantes :  $\overline{OM}_0 = a\overline{e}_y$  et  $\overline{v}_0 = v_0 \overline{e}_x$ . Alors  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte} = ma\overline{e}_y \wedge v_0 \overline{e}_x = -mav_0 \overline{e}_z$ .  $\overline{OM}$  est alors toujours orthogonal à  $\overline{e}_z$ , soit  $\overline{OM} = x\overline{e}_x + y\overline{e}_y$ , donc le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan  $(Oxy)$ .

– Supposons maintenant  $\overline{OM}_0 = a\overline{e}_y$  et  $\overline{v}_0 = v_0 \overline{e}_y$ . Alors  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte} = ma\overline{e}_y \wedge v_0 \overline{e}_y = \vec{0}$  donc  $\overline{OM}$  et  $\overline{v}(M)_{\mathcal{R}}$  restent toujours colinéaires : le mouvement est rectiligne, selon l'axe  $(Oy)$  (donné par la position et la vitesse initiales).

### □ Méthode 14.4. Constante des aires et démonstration de la loi des aires

– On commence par montrer que  $r^2 \dot{\theta}$  est une constante du mouvement.  
 – On calcule l'aire balayée par  $\overline{OM}$  pendant une durée infinitésimale, ce qui fait apparaître cette constante. Puis on intègre sur une durée quelconque.

⇒ Exercices 14.4, 14.5, 14.6, 14.10, 14.13, 14.14

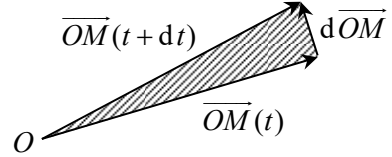
– Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires et la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associée : alors  $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte}$  donc  $r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$ .

Avec les conditions initiales précédentes, on trouve  $C = -av_0$ .  $C < 0$  donc  $\dot{\theta} < 0$  :  $M$  tourne autour de  $O$  dans le sens négatif (par rapport au sens de  $\vec{e}_z$ ).

– L'aire balayée par le vecteur  $\vec{OM}$  pendant une durée infinitésimale  $dt$  est :

$$dS = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2} \|r \vec{e}_r \wedge (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta)\| = \frac{1}{2} r^2 |d\theta|$$

donc  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 |\dot{\theta}| = \frac{|C|}{2}$  (vitesse aréolaire constante).



On intègre sur une durée  $\Delta t$  : l'aire balayée pendant  $\Delta t$  est alors  $S_{\Delta t} = \frac{|C|}{2} \Delta t$ .

Pour les conditions initiales précédentes on obtient donc  $S_{\Delta t} = \frac{av_0}{2} \Delta t$ .

**□ Méthode 14.5. Détermination des limites du mouvement radial**

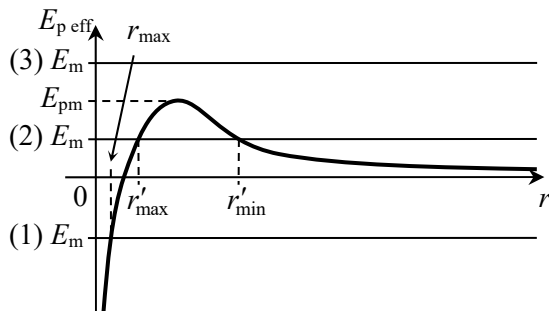
- On montre tout d'abord que les valeurs accessibles de  $r$  vérifient  $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$ .
- On trace alors la courbe donnant l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$ , et on détermine, graphiquement puis éventuellement par le calcul, les valeurs de  $r$  accessibles d'après les conditions initiales.

⇒ Exercice 14.4, 14.5, 14.7, 14.10, 14.14

– L'énergie mécanique peut s'écrire  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \text{cte}$  (après élimination de  $\dot{\theta}$  avec  $r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$ ), soit  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) = \text{cte}$  en introduisant l'énergie potentielle effective

$E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ . Or  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0$  donc  $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$  : les seules valeurs accessibles de  $r$  sont celles qui vérifient cette inégalité.

– Supposons par exemple que la courbe  $E_{p \text{ eff}}(r)$  a l'allure ci-dessous.



On distingue alors trois cas.

Cas 1 : si  $E_m \leq 0$ , alors  $0 \leq r \leq r_{\text{max}}$  (état lié).

Cas 2 : si  $0 < E_m < E_{pm}$ , alors selon la valeur initiale de  $r$  on peut avoir  $0 \leq r \leq r'_{\text{max}}$  (état lié) ou  $r \geq r'_{\text{min}}$  (état de diffusion).

Cas 3 : si  $E_m \geq E_{pm}$ , alors toutes les valeurs de  $r$  sont accessibles (état de diffusion).

## ■ Comment calculer les paramètres d'un mouvement à force centrale newtonienne ?

### □ Méthode 14.6. Étude d'une trajectoire circulaire

On suppose au départ que la trajectoire est circulaire.

- Pour calculer la vitesse, on applique le PFD.
- On en déduit l'expression de l'énergie mécanique, ainsi que la troisième loi de Kepler pour les cercles.

⇒ Exercice 14.8, 14.9, 14.12

- PFD pour un satellite en orbite circulaire de rayon  $r$  :  $m\vec{a} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$ . Projection sur  $\vec{e}_r$  :

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r^2} \text{ d'où } \dot{\theta}^2 = G\frac{M}{r^3} \text{ et } \boxed{v = r|\dot{\theta}| = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

- Alors l'énergie cinétique vaut  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$ , donc l'énergie mécanique vaut

$$E_m = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \text{ soit } \boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c}$$

- De plus la période est  $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$  donc  $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$  : c'est la même valeur pour tous

les objets tournant autour de l'astre de masse  $M$ . Dans le cas où cet astre est le Soleil, on obtient donc la troisième loi de Kepler (dans l'approximation de trajectoires circulaires).

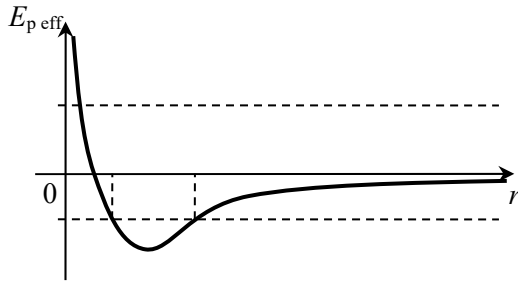
### □ Méthode 14.7. Calcul de la vitesse de libération

La vitesse de libération correspond à la limite de l'énergie mécanique donnant un état de diffusion. On l'obtient avec la méthode 14.3 utilisant l'énergie potentielle effective.

⇒ Exercice 14.10

Dans le cas de la force centrale gravitationnelle, l'énergie potentielle effective a pour expression

$$E_{p\text{ eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} \text{ (courbe page suivante).}$$



D'après la méthode précédente :

- si  $E_m < 0$ , alors  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$  (état lié, trajectoire elliptique) ;
- si  $E_m \geq 0$ , alors  $r \in [r_{\min}, +\infty[$  (état de diffusion, trajectoire hyperbolique, ou parabolique dans le cas limite).

Les états de diffusion correspondent donc à  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0$  d'où  $v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_2$ .

### □ Méthode 14.8. Calcul de l'énergie mécanique sur une trajectoire elliptique

Avec l'énergie potentielle effective, on détermine l'équation donnant les deux valeurs extrêmes de la distance  $r$ . Leur somme étant le grand axe de l'ellipse, on en déduit la relation cherchée.

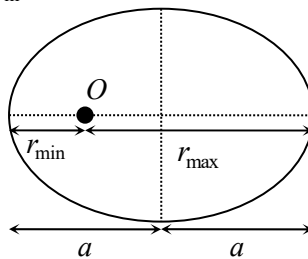
⇒ Exercice 14.9

Dans le cas d'un état lié, les deux distances extrêmes  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  sont les solutions de

$$\text{l'équation : } E_{p \text{ eff}}(r) = E_m \Leftrightarrow \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E_m \Leftrightarrow 2E_m r^2 + 2GMmr - mC^2 = 0.$$

Sans même écrire les deux solutions, on sait que leur produit vaut  $r_{\min} r_{\max} = \frac{-mC^2}{2E_m} (> 0)$  et que

leur somme vaut  $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{GMm}{E_m} (> 0)$ . Cela équivaut à  $2a = -\frac{GMm}{E_m}$ , soit  $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ .



En particulier, si la trajectoire est circulaire, alors  $a$  est le rayon du cercle et on retrouve bien

$$E_m = -\frac{GMm}{2r}.$$

## ■ ■ Vrai/Faux

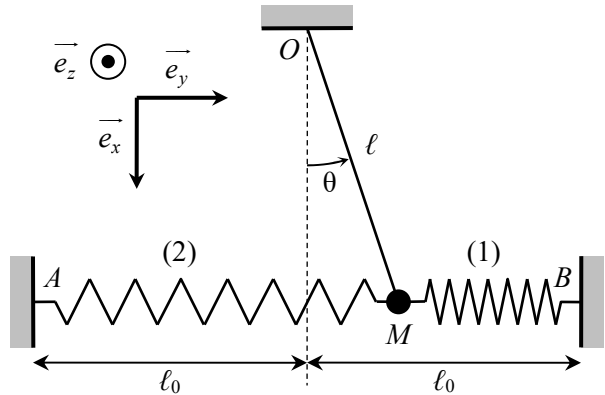
	Vrai	Faux
1. Les moments par rapport à un point sont des vecteurs.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Les moments par rapport à un axe sont des vecteurs.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le moment d'une force a les mêmes dimensions qu'une énergie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Une force centrale est un vecteur de direction constante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La direction d'une force centrale est orthogonale au déplacement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Pour un point en mouvement à force centrale, le moment cinétique (par rapport au centre de force) est constant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Un mouvement à force centrale est toujours plan.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Un mouvement à force centrale peut être rectiligne.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. La constante des aires provient de l'énergie mécanique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. La constante des aires est utilisée pour faire apparaître l'énergie potentielle effective.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Pendules

### □ Exercice 14.1. Pendule simple relié à des ressorts

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur  $\ell$ , à l'extrémité duquel est fixé un point matériel  $M$  de masse  $m$ . Il est accroché au point  $O$ , fixe par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire.  $M$  est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , fixés entre deux points  $A$  et  $B$  distants de  $2\ell_0$  : lorsque le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.



On déplace légèrement  $M$  par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre  $O$ , dans un plan vertical, et on repère sa position par l'angle  $\theta$  avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.

1. Donner l'expression du moment cinétique de  $M$  par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$ , en utilisant une base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  d'origine  $O$ .
2. Calculer les moments des forces s'exerçant sur  $M$ , en fonction de la seule variable  $\theta$ .
3. Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  et en déduire la pulsation des petites oscillations.

### □ Exercice 14.2. Pendule pesant simple : mouvement horizontal\*

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur  $\ell$ , dont l'une des extrémités est fixée au point  $O$  (origine du repère) ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel  $M$  de masse  $m$ . On prend l'axe  $(Oz)$  comme verticale ascendante (dans le référentiel terrestre supposé galiléen), et on utilise le système de coordonnées cylindriques. Le pendule est écarté d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, et lancé avec une vitesse  $\vec{v}_0$  pour que le point  $M$  décrive des cercles *horizontaux*.

1. Faire un schéma en perspective, en faisant apparaître la trajectoire de  $M$  et ses trois coordonnées. Préciser les valeurs de  $r$  et  $z$ .
2. Déterminer le vecteur  $\vec{v}_0$  par application du TMC et montrer que le mouvement de  $M$  est uniforme.
3. Calculer la période  $T$  du mouvement. Quelle est la valeur approchée de  $T$  si  $\alpha$  est faible ?

### □ Exercice 14.3. Pendule pesant simple : mouvement vertical\* \*

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur  $\ell$ , dont l'une des extrémités est fixée au point  $O$  (origine du repère) ; à l'autre extrémité se trouve un point matériel  $M$  de masse  $m$ . L'axe  $(Ox)$  est la verticale descendante, le repère  $(Oxyz)$  étant lié au référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le pendule est écarté d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, puis lâché sans vitesse initiale : on souhaite montrer que le mouvement aura lieu dans un plan vertical.

#### La « démonstration » qui tue !

1. On rencontre souvent le raisonnement suivant (auquel vous avez sûrement pensé...) : on fait un schéma dans le plan vertical  $(Oxy)$ , on fait apparaître les deux forces, on écrit le PFD et sa projection sur  $\vec{e}_z$  donne  $\ddot{z} = 0$ , d'où  $\dot{z} = 0$  et finalement  $z = 0$  (avec les conditions initiales). Voyez-vous l'erreur fondamentale de ce raisonnement ?

#### Une démonstration rigoureuse

2. En appliquant le TMC en *coordonnées cartésiennes* (donc sans utiliser d'angle) au point  $M$ , montrer que le moment cinétique  $L_{(Ox)}$  est une constante que l'on précisera. En déduire une équation différentielle liant  $y(t)$  et  $z(t)$ .
3. Intégrer cette équation différentielle et en déduire que le mouvement de  $M$  a lieu dans un plan vertical (dépendant des conditions initiales).  
(L'étude des oscillations elles-mêmes, dans ce plan vertical, a été vue au chapitre II, dans la méthode 11.3.)

## ■ Mouvement à force centrale quelconque

### □ Exercice 14.4. Force de rappel isotrope

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen lié au repère  $(Oxyz)$ , un point matériel  $M$  de masse  $m$  est mobile sans contrainte cinématique. Il subit une unique force  $\vec{F}$ , force centrale dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$  où  $k$  est une constante positive et  $r$  la distance  $OM$ . En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes :

$$x(0) = a > 0 ; y(0) = z(0) = 0 ; \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0 ; \dot{y}(0) = v_0 > 0.$$

1. Déterminer la force  $\vec{F}$ , et montrer qu'elle s'exprime simplement en fonction de  $\overline{OM}$ .
2. Montrer que le moment cinétique  $\overline{L}_O$  de  $M$  en  $O$  se conserve, et déterminer sa valeur avec les conditions initiales. En déduire que le mouvement est situé dans un plan que l'on précisera.
3. Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  de  $M$  se conserve, et déterminer sa valeur.
4. Démontrer que le produit  $r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement et préciser sa valeur. Déduire alors de la conservation de l'énergie une équation liant  $r$ ,  $\dot{r}$  et les constantes  $m$ ,  $a$ ,  $v_0$  et  $k$ .
5. Définir une énergie potentielle effective de  $M$ . Montrer alors que la trajectoire est comprise entre deux cercles dont on donnera les rayons.
6. En utilisant le PFD (que l'on peut intégrer vectoriellement), déterminer les équations horaires cartésiennes de  $M$ . En déduire la nature exacte de la trajectoire, et vérifier le résultat de la question précédente. Représenter la trajectoire sur un schéma.

### □ Exercice 14.5. Nucléon dans un potentiel de Yukawa\*

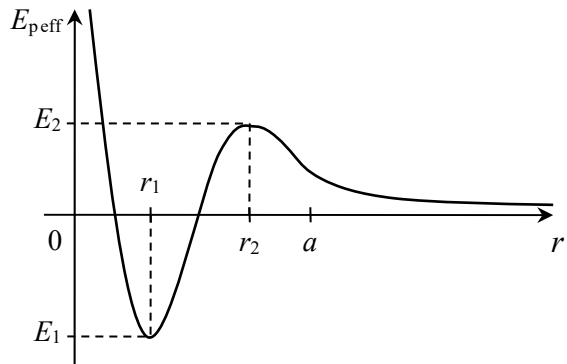
Le physicien japonais YUKAWA Hideki (prix Nobel 1949) a proposé en 1935 une interprétation des interactions nucléaires. On en donne ici quelques éléments simplifiés.

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen lié au repère  $(Oxyz)$ , un nucléon  $M$  de masse  $m$  est soumis uniquement à une force centrale  $\vec{F}$  dérivant de l'énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{K}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$  où  $K$  et  $a$  sont deux constantes (avec  $a$  positive) et  $r$  la distance  $OM$ . Cette énergie potentielle a pour origine les autres nucléons du noyau atomique.



1. Quelles sont les dimensions des constantes  $K$  et  $a$  ?
2. Déterminer l'expression de la force centrale  $\vec{F}$  subie par le nucléon. Quel doit être le signe de  $K$  pour que cette force soit attractive ?
3. Démontrer que la trajectoire de  $M$  se situe dans un plan que l'on précisera.
4. On choisit ce plan comme plan  $(Oxy)$  du repère, et on utilise maintenant les coordonnées polaires de  $M$  dans ce plan. Montrer que  $r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement, et donner sa valeur à partir des conditions initiales : position  $\overline{OM}_0 = r_0 \overline{e}_x$  ; vitesse  $\overline{v}_0 = v_1 \overline{e}_x + v_2 \overline{e}_y$ .
5. Montrer que l'énergie mécanique de  $M$  peut s'écrire sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r)$  avec une fonction  $E_{p \text{ eff}}(r)$  à préciser.  $E_m$  est-elle constante au cours du mouvement ?

6. Si la valeur de  $C$  est suffisamment faible, la courbe représentative de  $E_{p \text{ eff}}(r)$  a l'allure ci-contre. Déterminer alors, en fonction des conditions initiales, si le nucléon est dans un état lié ou dans un état de diffusion. Lequel de ces deux cas correspond à la situation usuelle d'un nucléon ?



L'utilisation de ce type de potentiel a été envisagée pour décrire les quatre interactions fondamentales. Yukawa a également proposé de les interpréter comme des échanges de particules (bosons vecteurs) de masses très diverses : la portée  $a$  de chaque interaction, intervenant dans l'expression du potentiel, est alors liée à la masse  $m_b$  d'un boson vecteur par  $a = \frac{h}{2\pi m_b c}$  avec les constantes universelles  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (célérité de la lumière dans le vide) et  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  (constante de Planck). Les bosons vecteurs envisagés par Yukawa sont les suivants :



interaction forte	pion $\pi$	$m_b = 2,4 \cdot 10^{-28}$ kg
interaction faible	boson intermédiaire $W^\pm$	$m_b = 1,4 \cdot 10^{-25}$ kg
interaction électromagnétique	photon $\gamma$	$m_b = 0$
interaction gravitationnelle	graviton (hypothétique) $g$	$m_b = 0$

- Calculer la portée  $a$  des quatre interactions et commenter les valeurs obtenues.
- Pour les interactions gravitationnelle et électromagnétique, simplifier l'expression de  $\vec{F}$  en tenant compte de la valeur trouvée pour  $a$  : montrer qu'on retrouve alors une forme connue.
- Pour un proton dans un noyau, on peut ne considérer que les deux interactions électromagnétique et forte (les deux autres étant beaucoup plus faibles). Quel est le signe de la constante  $K$  dans le potentiel de Yukawa de l'interaction électromagnétique ? Quel doit être alors celui de la constante  $K'$  de l'interaction forte ?

#### □ Exercice 14.6. Formules de Binet et application \* \*

On considère, dans un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, une particule  $M$  (de masse  $m$ ) soumise uniquement à une force centrale  $\vec{F} = F_r(r)\vec{e}_r$  (coordonnées sphériques).

- Démontrer que la trajectoire de  $M$  est plane.
- On repère alors  $M$  par ses coordonnées polaires dans ce plan. Déterminer une intégrale première du mouvement en fonction de  $r$  et  $\dot{\theta}$ .
- On pose  $u = \frac{1}{r}$ ,  $u' = \frac{du}{d\theta}$  et  $u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$ . Montrer qu'il est possible d'exprimer la vitesse de  $M$  sous la forme  $\vec{v} = -Cu'\vec{e}_r + Cu\vec{e}_\theta$ , puis son accélération sous la forme  $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$  avec  $C = r^2\dot{\theta}$ . Ces deux formules sont appelées formules de Binet.
- En utilisant la seconde formule de Binet, déterminer la fonction  $F_r(r)$  pour que la trajectoire soit une spirale logarithmique, définie par l'équation polaire :  $r = ae^{\theta}$ .
- Déterminer de même  $F_r(r)$  pour que la trajectoire soit une ellipse, d'équation  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ .

#### □ Exercice 14.7. Atome d'hydrogène dans un champ magnétique \* \*

On définit un repère  $Oxyz$  lié au référentiel terrestre, supposé galiléen.

Un atome d'hydrogène est modélisé par un proton de charge  $e$ , fixe à l'origine  $O$  du repère, et un électron mobile de charge  $-e$  et de masse  $m$  ; on rappelle que la force exercée par le proton

sur l'électron est  $\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r$  en coordonnées sphériques. De plus on applique à cet atome

un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme et stationnaire (avec  $B > 0$ ).

On suppose que l'électron se trouve immobile à l'instant 0 au point  $\vec{OM}_0 = a\vec{e}_x$  (avec  $a > 0$ ).

On traite le problème de son mouvement dans le cadre de la mécanique classique, et on admet que ce mouvement a lieu dans le plan  $z = 0$ .

On rappelle la formule du double produit vectoriel :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ .

1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, que l'on justifiera, montrer que la distance de l'électron au proton ne peut pas dépasser  $a$ .
2. Montrer que le moment cinétique de l'électron pour rapport à  $O$  est  $\vec{L} = \frac{1}{2}e(r^2 - a^2)\vec{B}$ .
3. Montrer que l'électron tourne toujours dans le même sens, que l'on précisera.
4. Montrer que l'énergie mécanique de  $M$  peut s'écrire sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r)$  avec une fonction  $E_{p\text{eff}}(r)$  dont on précisera l'expression.
5. Déterminer le signe de  $\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr}$  pour  $r = a$  et pour  $r \rightarrow 0$ . Tracer l'allure de la courbe de la fonction  $E_{p\text{eff}}(r)$ .
6. En déduire que la distance entre l'électron et le proton oscille entre deux valeurs  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  ; on déterminera l'une de ces deux valeurs, et on écrira l'équation déterminant l'autre.
7. Quelle est la vitesse de l'électron lorsque  $r = a$  ? Dessiner une trajectoire possible de l'électron, en tenant compte de ce résultat et des autres informations.

## ■ Mouvement à force centrale newtonienne

Dans les exercices suivants, on note  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  la constante de gravitation universelle,  $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  la masse de la Terre et  $R = 6370 \text{ km}$  son rayon.

### □ Exercice 14.8. Satellite circulaire \*

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse  $m$  se déplace suivant une orbite circulaire de rayon  $r = R + h$  autour du centre de la Terre ( $h$  étant son altitude par rapport à la surface terrestre). Ce mouvement peut s'étudier simplement à l'aide du PFD.

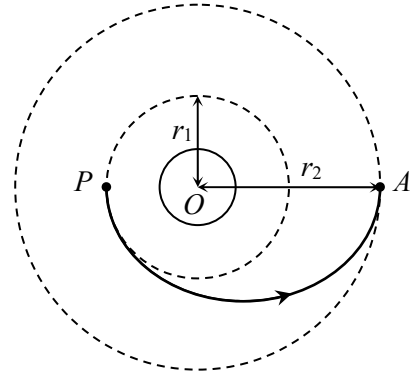
1. Montrer que la vitesse  $v$  est constante, et donner sa valeur en fonction de  $G, M, R$  et  $h$ .
2. En déduire la période  $T$  du mouvement, et montrer que la constante  $\frac{T^2}{r^3}$  a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
3. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite ; quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.
4. Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude  $h$  et commenter.
5. Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude  $\lambda$ , une fusée lui fournit le travail  $W$  pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée ci-dessus.
  - a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (On n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la Terre.)
  - b) Calculer le travail  $W$  que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?
  - c) Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur ( $\lambda_1 = 0$ ) et un lancement depuis le Nord de l'Europe ( $\lambda_2 = 55^\circ$ ), pour  $h \ll R$ . Commenter.

### □ Exercice 14.9. Changement d'orbite\*

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m = 900$  kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon  $r_1 = 7500$  km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon  $r_2 = 42200$  km (orbite géostationnaire).

Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périégée  $P$  est à la distance  $r_1$  et l'apogée  $A$  à la distance  $r_2$  du centre de la Terre ; lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon  $r_2$ .

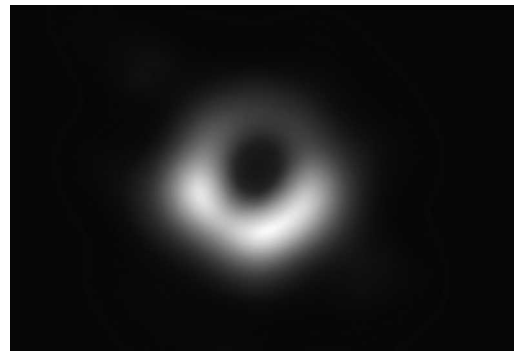
Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considérera que la vitesse passe instantanément de  $v_1$  à  $v_{e1}$  en  $P$ , puis de  $v_{e2}$  à  $v_2$  en  $A$  (sans changer de direction dans chaque cas).



1. Calculer la vitesse  $v_1$ .
2. Démontrer que sur la trajectoire elliptique, le produit  $C = r^2\dot{\theta}$  est une constante (en notant  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires du satellite).
3. Montrer que l'énergie mécanique de  $M$  peut s'écrire sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ .
4. Déterminer l'équation dont sont solutions les deux valeurs extrêmes de  $r$ , et en déduire que pour une trajectoire elliptique de demi-grand axe  $a$ , l'énergie mécanique du satellite s'écrit : 
$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$
. Exprimer alors l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites.
5. Calculer la vitesse  $v_{e1}$  après le premier transfert, et la variation  $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$ . Calculer également le travail  $W_P$  fourni par le moteur au satellite en ce point.
6. Déterminer une relation entre  $v_{e1}$ ,  $v_{e2}$ ,  $r_1$  et  $r_2$ . Calculer  $v_{e2}$ .
7. Calculer la variation de vitesse  $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$  lors du second transfert, et le second travail  $W_A$  fourni par le moteur au satellite.

### □ Exercice 14.10. Trou noir

En 1783, le physicien britannique John MICHELL eut l'idée pour la première fois de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par LAPLACE en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale, lorsque le jeune Karl SCHWARZSCHILD vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'EINSTEIN. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de *trou noir* s'est imposée dans les années 1960.



Première photographie d'un trou noir, obtenue par le télescope Event Horizon en 2019

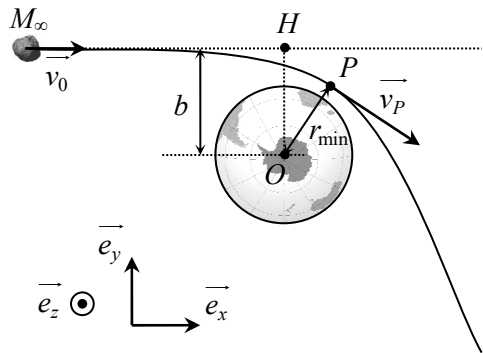
On se propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille d'un trou noir dans le cadre de la physique newtonienne. Considérons pour cela un point matériel  $P$  de masse  $m$  à proximité d'un astre sphérique de centre  $O$ , de masse  $M$  et de rayon  $R$ . Ce point matériel est soumis uniquement à la force gravitationnelle due à l'astre. On se place dans un référentiel  $\mathcal{R}$  astrocentrique (dans lequel le point  $O$  est fixe), qui est supposé galiléen.

1. Exprimer cette force, ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive (supposée nulle à l'infini) et l'énergie mécanique du point matériel  $P$ . Cette dernière se conserve-t-elle ?
2. Montrer que le mouvement de  $P$  est nécessairement plan.  $P$  étant alors repéré par ses coordonnées polaires, démontrer que le produit  $r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement.
3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p\text{eff}}(r)$  en introduisant une fonction  $E_{p\text{eff}}(r)$  dont on précisera l'expression.
4. Tracer la courbe représentative de  $E_{p\text{eff}}(r)$ . À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de  $E_m$  le point  $P$  peut « échapper » à l'attraction de l'astre, c'est-à-dire se trouver en état de diffusion.
5. En déduire la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$  à la surface de cet astre.
6. Un trou noir est un astre pour lequel la vitesse de libération est supérieure à  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : aucun objet, pas même la lumière, ne peut donc dépasser cette vitesse et s'échapper du voisinage du trou noir.  
Calculer le rayon maximal  $R_S$  que doit avoir l'astre de masse  $M$  pour être un trou noir (ce rayon est appelé rayon de Schwarzschild). Faire l'application numérique avec la masse du Soleil ( $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ) puis celle de la Terre, et commenter.

### □ Exercice 14.11. Alerte à l'astéroïde !\*

De nombreux objets, dits géocroiseurs, traversent l'orbite de la Terre... et parfois la heurtent !

On considère ici un astéroïde de masse  $m$ , actuellement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, et ayant donc une vitesse constante  $\vec{v}_0$ . Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance  $b$  (appelée *paramètre d'impact*) du centre  $O$  de la Terre ; cependant, lorsqu'il se rapprochera de la Terre, l'attraction gravitationnelle de celle-ci va dévier l'astéroïde, selon une trajectoire hyperbolique. On appelle *périgée* le point  $P$  de cette trajectoire le plus proche du centre de la Terre.



1. Quelles sont les deux grandeurs dynamiques de l'astéroïde qui se conservent au cours de son mouvement ? Écrire les deux équations correspondantes en considérant les deux positions  $M_\infty$  et  $P$ .
2. En déduire la distance minimale d'approche  $r_{\text{min}} = OP$ .
3. Application numérique : pour l'astéroïde Toto,  $v_0 = 2,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $b = 140000 \text{ km}$ .  
Toto va-t-il nous tomber sur la tête ?

### □ Exercice 14.12. Erreur de satellisation

On souhaite lancer un satellite artificiel, de masse  $m$ , sur une orbite circulaire de rayon  $r$  autour de la Terre. Pour cela, on doit l'amener à cette distance  $r_0$  du centre de la Terre, et lui donner une vitesse  $\vec{v}$  orthoradiale (suivant  $\vec{e}_\theta$ ) avec une valeur très précise.

1. Montrer qu'un mouvement circulaire du satellite est nécessairement uniforme. Calculer alors la valeur à donner à  $v$  pour obtenir la trajectoire de rayon  $r_0$ .
2. En déduire dans ce cas la valeur de la constante des aires  $C$  et de l'énergie mécanique  $E_m$ .
3. Le satellite ayant été amené à la distance  $r_0$ , une petite erreur est commise dans la direction de la vitesse : le vecteur  $\vec{v}$  a la norme voulue mais il fait un petit angle  $\alpha$  avec le vecteur  $\vec{e}_\theta$ .
  - a) Quelles sont alors les valeurs de la constante des aires et de l'énergie mécanique ?
  - b) Que peut-on dire du grand axe de l'ellipse réellement décrite par le satellite ? Représenter sur un même schéma la trajectoire circulaire souhaitée et la trajectoire réelle.

### □ Exercice 14.13. Lois de Kepler\* \*

Par rapport au référentiel de Kepler  $\mathcal{R}$  (supposé galiléen), les mouvements de toutes les planètes du système solaire s'effectuent dans un même plan, appelé écliptique. On note  $O$  le centre du Soleil (de masse  $m_S$ ) ; on négligera les interactions entre les planètes.

1. Énoncer les trois lois de Kepler, lois relatives à la trajectoire des planètes (K1), aux aires balayées (K2) et à la période (K3).
2. On étudie tout d'abord le mouvement de la Terre, considérée comme un point matériel  $O_T$  (de masse  $m_T$ ) ; on repère la position de  $O_T$  par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de centre  $O$ .  
Montrer que la quantité  $r^2\dot{\theta}$  est constante au cours du temps, et en déduire la deuxième loi de Kepler. On notera  $\frac{C}{2}$  la vitesse aréolaire (supposée positive).

On montre que l'équation polaire de la trajectoire elliptique est :  $r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$  où  $a$  est

le demi-grand axe de l'ellipse et  $e$  un paramètre appelé *excentricité* de l'ellipse. Ces grandeurs vérifient par ailleurs la relation  $C = \sqrt{Gm_S a(1-e^2)}$ .

3. Calculer, en fonction de  $a$  et  $e$ , les distances  $r_{\text{pér}}$  et  $r_{\text{aph}}$  correspondant au périhélie (point le plus proche du Soleil) et à l'aphélie (point le plus éloigné). Donner également la vitesse de la Terre en ces points.
4. Montrer qu'il est possible, à partir de l'expression précédente de  $r(\theta)$ , d'obtenir sous forme d'intégrale la loi horaire  $t = t(\theta)$ . *Il n'est pas demandé le calcul explicite de cette intégrale !*

La Terre est au périhélie (point le plus proche du Soleil) le 3 janvier. On considère que le début de l'hiver (solstice d'hiver le 21 ou 22 décembre) correspond avec le choix précédent à  $\theta = 0$ .

De même  $\theta = \frac{\pi}{2}$  correspond à l'équinoxe de printemps (20 ou 21 mars),  $\theta = \pi$  au solstice d'été

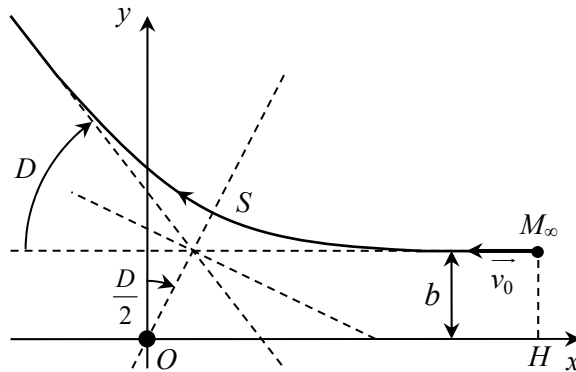
et  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  à l'équinoxe d'automne. Un calcul avec l'intégrale précédente conduit aux durées

moyennes en jours : printemps 92,8 j ; été 93,6 j ; automne 89,8 j ; hiver 89,0 j.

5. Comment expliquez-vous la durée inégale des saisons ? On s'aidera d'un schéma précis de la trajectoire elliptique de la Terre autour du Soleil, en y plaçant les cinq points particuliers cités (le périhélie, les deux équinoxes, les deux solstices).
6. On donne la valeur du demi-grand axe  $a$  de la trajectoire pour trois planètes (en unités astronomiques) : Mercure  $a = 0,39$  ua ; Terre  $a = 1,0$  ua ; Neptune  $a = 30$  ua. En utilisant la troisième loi de Kepler, déterminer les périodes orbitales de Mercure et Neptune, directement en *années*.

□ **Exercice 14.14. Expérience de Rutherford\***

Entre 1909 et 1911, Ernest RUTHERFORD et ses étudiants Hans GEIGER et Ernest MARSDEN ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules  $\alpha$  (identifiées comme des noyaux d'hélium). Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne rencontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement : la déviation pouvant être reliée à la distance microscopique, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille. On considère ici une particule  $\alpha$  de masse  $m$  et de charge  $2e$ , venant de l'infini avec la vitesse  $-v_0 \vec{e}_x$ , et s'approchant avec le paramètre d'impact  $b$  d'un noyau cible de numéro atomique  $Z$ . Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant centré sur la position  $O$  du noyau. La trajectoire suivie par la particule  $\alpha$  est une branche d'hyperbole représentée ci-dessous.



1. Donner l'expression de la force électrique subie par la particule  $\alpha$ , sous la forme  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ , ainsi que celle de son énergie potentielle d'interaction.
2. Montrer que l'énergie mécanique  $E_m$  de la particule  $\alpha$  est une constante du mouvement et donner sa valeur.
3. Montrer que le moment cinétique  $\vec{L}_O$  de la particule  $\alpha$  en  $O$  est un vecteur constant, et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans le plan  $(Oxy)$ , montrer que  $\vec{L}_O$  s'exprime de manière simple en fonction des variables  $r$  et  $\dot{\theta}$ .
4. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'_p(r)$  et expliciter la fonction  $E'_p(r)$ . Comment appelle-t-on  $E'_p(r)$  ?

5. On note  $S$  la position de la particule  $\alpha$  pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note  $r_{\min} = OS$  la distance minimale d'approche. Que devient l'expression de  $E_m$  lorsque

$$r = r_{\min} ? \text{ En d\u00e9duire que la valeur de } r_{\min} \text{ est : } r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right).$$

6. On donne  $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ,  $v_0 = 2,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $Z = 79$  pour l'or. D'autre part on peut montrer que l'angle de d\u00e9viation  $D$  de la particule est donn\u00e9 par  $\tan \frac{D}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$ . Calculer  $b$  puis  $r_{\min}$  pour  $D_1 = 60^\circ$  et pour  $D_2 = 180^\circ$  (particule renvoy\u00e9e vers l'arri\u00e8re) ; en d\u00e9duire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

## ■ Pour vous aider \u00e0 d\u00e9marrer

*Exercice 14.1.* \u00c9crire les d\u00e9finitions des diff\u00e9rents moments (vectoriels), et les calculer en exprimant chaque vecteur dans la base cylindrique. Faire attention en particulier \u00e0 l'allongement de chaque ressort.

*Exercice 14.2.* La trajectoire circulaire est n\u00e9cessairement centr\u00e9e sur l'axe ( $Oz$ ), \u00e0 une altitude  $z$  n\u00e9gative : faire le sch\u00e9ma classique des coordonn\u00e9es et de la base cylindriques, et exprimer les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}(M)$  dans cette base.

*Exercice 14.3.* Commencer par faire la pseudo-d\u00e9monstration en entier... pour bien comprendre ensuite o\u00f9 se situe l'erreur ! Ensuite on travaille en *cart\u00e9siennes*, donc *il ne faut surtout pas introduire un angle !*

*Exercice 14.4.* Pour la question 1, se rappeler la relation g\u00e9n\u00e9rale entre une force conservative et l'\u00e9nergie potentielle dont elle d\u00e9rive. Ensuite l'exercice suit point par point les d\u00e9monstrations du cours pour un mouvement \u00e0 force centrale.

*Exercice 14.5.* \u00c0 la question 6 on doit distinguer trois cas, selon la valeur de  $E_m$ .

*Exercice 14.6.* Les premi\u00e8res questions sont les d\u00e9monstrations du cours. Pour les formules de Binet, utiliser des formules de d\u00e9riv\u00e9e compos\u00e9e du type  $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ .

*Exercice 14.8.* Question 5.b : le travail  $W$  ne peut pas \u00eatre d\u00e9termin\u00e9 \u00e0 partir de la force de pouss\u00e9e exerc\u00e9e sur la fus\u00e9e (inconnue), mais en appliquant le th\u00e9or\u00e8me de l'\u00e9nergie m\u00e9canique \u00e0 la fus\u00e9e entre un instant o\u00f9 elle est pos\u00e9e sur la Terre et un instant o\u00f9 elle est sur son orbite d\u00e9finitive.

*Exercice 14.11.* \u00c0 la question 2, il faut \u00e9liminer l'inconnue  $v_P$  (vitesse au p\u00e9rih\u00e9lie) entre les deux \u00e9quations provenant des lois de conservation.

*Exercice 14.13.* Question 3 : les valeurs extr\u00eames de la distance s'obtiennent avec les extr\u00e9mums du cosinus ; celles de la vitesse en utilisant la conservation du moment cin\u00e9tique. Question 4 : partir de l'expression de la constante des aires et s\u00e9parer les variables. Question 5 : attention,  $O$  n'est pas le centre de l'ellipse mais l'un de ses *foyers* (donc plus pr\u00e8s du p\u00e9rih\u00e9lie), et les axes du rep\u00e8re *ne sont pas* les axes de sym\u00e9trie de l'ellipse !

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai

- 3.** Le moment d'une force et l'énergie ont les dimensions d'une force multipliée par une longueur.
- 4.** La direction de la force centrale est toujours  $(OM)$ , c'est une direction variable au cours du mouvement de  $M$  (sauf dans le cas particulier d'un mouvement rectiligne).
- 5.** La direction de la force n'a en général *aucun rapport* avec la direction du mouvement. Mais *dans le cas d'une trajectoire circulaire*, elle se trouve être orthogonale à la trajectoire.
- 9.** La constante des aires provient du moment cinétique. Donc le calcul de  $C$  à partir de conditions initiales revient à calculer le moment cinétique.
- 10.** Elle permet d'éliminer  $\dot{\theta}$ , donc d'obtenir une relation avec le seul paramètre  $r$ .

### □ Les erreurs classiques

- Les démonstrations concernant le mouvement à force centrale sont de grands classiques, et ne peuvent être faites que *dans l'ordre* indiqué. Ainsi, une erreur fréquente est de calculer  $\overline{L}_O(M)_{\mathbb{R}} = m r^2 \dot{\theta} \overline{e}_z$  avec les coordonnées cylindriques alors qu'on n'a *pas encore* montré que le mouvement est plan (et choisi ce plan comme  $(Oxy)$ ). Il faudrait alors travailler en coordonnées *sphériques* et non cylindriques, avec  $\overline{v}(M) = \dot{r} \overline{e}_r + r \dot{\theta} \overline{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \overline{e}_\varphi$ , ce qui ne donne pas la formule attendue. C'est seulement dans  $(Oxy)$  que les deux  $r$  deviennent confondus.
- D'autre part, le mouvement plan est souvent très mal justifié, et le plan non précisé : il faut bien indiquer que  $\overline{OM}$  est toujours orthogonal au vecteur constant  $\overline{L}_O(M)_{\mathbb{R}}$ , ce qui définit un plan contenant  $O$  et orthogonal à  $\overline{L}_O(M)_{\mathbb{R}}$ .
- Ne pas énoncer la troisième loi de Kepler en disant que le rapport  $T^2/a^3$  est « une constante » : il est évident que le rapport de deux constantes ne peut être qu'une constante ! Ce qu'il faut indiquer, c'est que cette constante *a la même valeur pour toutes les planètes* du système solaire.



# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 14.1

1. Par définition :  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m \overline{OM} \wedge \overline{v}(M)_{\mathcal{R}} = m \ell \overline{e}_r \wedge \ell \dot{\theta} \overline{e}_\theta$  soit  $\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m \ell^2 \dot{\theta} \overline{e}_z$ .

2. Forces appliquées à  $M$  : poids  $\overline{P} = m \overline{g} = +mg \overline{e}_x$  ; tensions des deux ressorts  $\overline{T}_1 = -k(\ell_0 - \ell \sin \theta - \ell_0)(-\overline{e}_y) = -k\ell \sin \theta \overline{e}_y$  et  $\overline{T}_2 = -k(\ell_0 + \ell \sin \theta - \ell_0) \overline{e}_y = -k\ell \sin \theta \overline{e}_y$  ; tension du fil  $\overline{T} = -T \overline{e}_r$ .

•\* Les tensions  $\overline{T}_1$  et  $\overline{T}_2$  sont bien égales et non opposées ! Par exemple lorsque (1) est comprimé et (2) étiré, leurs deux tensions sont orientées vers la gauche.

Les moments par rapport à  $O$  sont donc :  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = \overline{OM} \wedge \overline{P} = \ell \overline{e}_r \wedge mg \overline{e}_x$  soit  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = -mg\ell \sin \theta \overline{e}_z$  ;  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2) = \overline{OM} \wedge \overline{T}_1 = \ell \overline{e}_r \wedge (-k\ell \sin \theta \overline{e}_y)$  soit  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2) = -k\ell^2 \sin \theta \cos \theta \overline{e}_z$  ;  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) = \overline{OM} \wedge \overline{T} = \overline{0}$  (vecteurs colinéaires).

⇒ Méthode 14.1

3. Théorème du moment cinétique appliqué à  $M$ , par rapport à  $O$  dans  $\mathcal{R}$  (supposé galiléen) :

$$\frac{d\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_1) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}_2). \text{ Projection sur } \overline{e}_z :$$

$m\ell^2 \ddot{\theta} = -mg\ell \sin \theta - 2k\ell^2 \sin \theta \cos \theta$ . Pour  $\theta \ll 1$  :  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\cos \theta \approx 1$  donc l'équation devient

$$\ddot{\theta} + \left( \frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) \theta = 0. \text{ La pulsation est donc } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}.$$

⇒ Méthode 14.2

## Exercice 14.2

1. La trajectoire circulaire est nécessairement centrée sur l'axe vertical ( $Oz$ ), puisque le fil a une longueur constante.

On lit alors :  $r = \ell \sin \alpha$  et  $z = -\ell \cos \alpha$  (valeurs constantes).

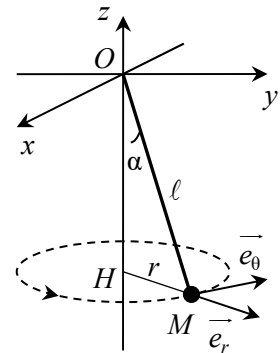
2. Forces appliquées à  $M$  : poids  $\overline{P} = m \overline{g} = -mg \overline{e}_z$  ; tension du fil

$\overline{T} = -T \frac{\overline{OM}}{OM}$ . TMC pour  $M$  par rapport à  $O$  (dans le référentiel terrestre

$\mathcal{R}$ ) :  $\frac{d\overline{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) + \overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T})$ . On calcule alors chaque terme de

cette équation.  $\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{T}) = \overline{OM} \wedge \overline{T} = \overline{0}$  (vecteurs colinéaires).

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{P}) = \overline{OM} \wedge \overline{P} = (\ell \sin \alpha \overline{e}_r - \ell \cos \alpha \overline{e}_z) \wedge (-mg \overline{e}_z) = +mg\ell \sin \alpha \overline{e}_\theta.$$



$$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m \overline{OM} \wedge \vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = m\ell (\sin \alpha \vec{e}_r - \cos \alpha \vec{e}_z) \wedge \ell \sin \alpha \dot{\theta} \vec{e}_\theta = m\ell^2 \dot{\theta} (\sin^2 \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_r)$$

donc  $\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = m\ell^2 \ddot{\theta} (\sin^2 \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_r) + m\ell^2 \dot{\theta}^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_\theta$ .

⇒ Méthode 14.1

⊛ Ne pas oublier de dériver le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  :  $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

Projections du TMC sur la base cylindrique :

$$\begin{cases} m\ell^2 \ddot{\theta} \sin \alpha \cos \alpha = 0 \\ m\ell^2 \dot{\theta}^2 \sin \alpha \cos \alpha = +mg\ell \sin \alpha \\ m\ell^2 \ddot{\theta} \sin^2 \alpha = 0. \end{cases}$$

⇒ Méthode 14.2

La première et la troisième équations indiquent simplement que  $\ddot{\theta}$  est nulle donc que  $\dot{\theta}$  est une constante. La deuxième équation donne la valeur de cette constante (au signe près) :

$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \alpha}}$ . La vitesse sur ce cercle étant  $\ell \sin \alpha \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ , on voit donc que la norme de cette vitesse est constante (mouvement uniforme), et que le vecteur vitesse initial doit donc être de la forme  $\vec{v}_0 = \pm \ell \sin \alpha \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \alpha}} \vec{e}_{\theta_0}$  soit  $\vec{v}_0 = \pm \sqrt{g\ell \sin \alpha \tan \alpha} \vec{e}_{\theta_0}$  où  $\vec{e}_{\theta_0}$  est le vecteur orthoradial initial : par exemple  $\vec{e}_y$  si  $M$  est lancé dans le plan  $(Oxz)$ .

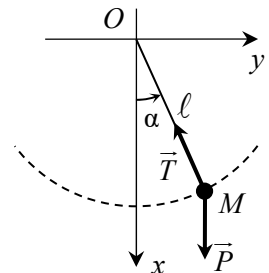
**3. Période du mouvement circulaire uniforme :**  $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|}$  soit  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \alpha}{g}}$ . Pour  $\alpha \ll 1$  :

$\cos \alpha \approx 1$  donc  $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$  (période du mouvement pendulaire « classique », c'est-à-dire dans un plan vertical).

### Exercice 14.3

**1.** Détaillons un peu ce « raisonnement classique » : il s'appuie généralement sur le schéma ci-contre.

La première erreur fréquente sur le schéma est de nommer  $\alpha$  l'angle avec la verticale : l'énoncé donne ce nom à l'angle *initial* uniquement, mais à un instant quelconque l'angle aura a priori une autre valeur, que l'on doit donc noter autrement, par exemple (de façon très originale)  $\theta$ . Mais l'erreur principale est dans la suite.



Si on projette les deux forces (poids et tension du fil) en lisant ce schéma, on trouve que leurs projections sur  $\vec{e}_z$  sont toutes les deux nulles, et le PFD projeté sur  $\vec{e}_z$  donne donc  $\ddot{z} = 0$ , etc. L'erreur fondamentale est d'avoir supposé le résultat dès le départ : on prétend alors démontrer ce qu'on a déjà admis. En effet on a supposé *en faisant ce schéma* que le mouvement se ferait

toujours dans le plan  $(Oxy)$ , donc que la tension n'aurait pas de composante sur  $\vec{e}_z$  : on « prouve » donc que le mouvement est plan en ayant supposé qu'il est plan...

Pour éviter de faire cette hypothèse sans s'en rendre compte, il faudrait commencer par un schéma en perspective (analogue à celui de l'exercice précédent), dans lequel on verrait que la tension du fil a trois composantes a priori, quelle que soit la base de projection. Alors le raisonnement avec le PFD ne permet pas d'obtenir le résultat simplement.

**2.** Reprenons donc au départ, sans faire aucune hypothèse a priori. Lorsqu'on ne connaît pas le mouvement cherché, on utilise les coordonnées cartésiennes : alors  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  et  $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$  donc  $\vec{L}_O(M) = m((y\dot{z} - z\dot{y})\vec{e}_x + (z\dot{x} - x\dot{z})\vec{e}_y + (x\dot{y} - y\dot{x})\vec{e}_z)$  et  $L_{(Ox)} = m(y\dot{z} - z\dot{y})$ . Moments par rapport à  $(Ox)$  des deux forces appliquées à  $M$  (poids  $\vec{P}$  et tension  $\vec{T}$  du fil) :  $\mathfrak{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \wedge mg\vec{e}_x = +mg(z\vec{e}_y - y\vec{e}_z)$  donc  $\mathfrak{M}_{(Ox)}(\vec{P}) = 0$  ;  $\mathfrak{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$  donc  $\mathfrak{M}_{(Ox)}(\vec{T}) = 0$ . Le TMC par rapport à  $(Ox)$  donne donc :  $\frac{dL_{(Ox)}}{dt} = 0$  d'où  $L_{(Ox)} = \text{cte}$  soit  $y\dot{z} - z\dot{y} = \text{cte}$ . La vitesse initiale est nulle donc la constante est nulle :  $\boxed{y\dot{z} - z\dot{y} = 0}$ .

⇒ Méthodes 14.1, 14.2

**3.** Il y a tout d'abord deux solutions particulières évidentes :  $y = \text{cte} = 0$  (donc mouvement dans le plan  $(Oxz)$ ) ou  $z = \text{cte} = 0$  (mouvement dans le plan  $(Oxy)$ ) ; dans les deux cas, le plan du mouvement est bien vertical.

Pour trouver la solution générale on sépare les variables :  $\frac{\dot{z}}{z} = \frac{\dot{y}}{y}$ . On intègre par rapport à  $t$  :

$\ln|z| = \ln|y| + \ln A$  d'où  $|z| = A|y|$  soit  $z = Ay$  ou  $z = -Ay$  avec une constante  $A$  positive. Il s'agit dans les deux cas d'un plan contenant l'axe  $(Ox)$ , c'est-à-dire d'un plan vertical.

*✎ D'un point de vue purement mathématique, la solution est la réunion des deux plans  $z = Ay$  et  $z = -Ay$ . Mais physiquement on ne peut pas passer d'un plan à l'autre, car cela supposerait une vitesse discontinue, donc une accélération infinie.*

#### Exercice 14.4

**1.**  $M$  est mobile a priori dans tout l'espace, donc le  $r$  utilisé est celui des coordonnées sphériques. Par définition :  $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} = -F_r\vec{e}_r \cdot (dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi) = -F_r dr$

d'où  $F_r = -\frac{dE_p}{dr} = -kr$  et finalement  $\boxed{\vec{F} = -kr\vec{e}_r = -k\vec{OM}}$ .

**2.** Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, la particule  $M$  est soumise uniquement à la force centrale  $\vec{F}$ .

Théorème du moment cinétique par rapport à  $O$  :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathfrak{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires) donc  $\vec{L}_O$  est constant. Or  $\vec{L}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M) \perp \vec{OM}$  donc  $\vec{OM}$  est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan contenant  $O$  et

orthogonal au vecteur  $\vec{L}_O$ . Avec les conditions initiales :  $\vec{L}_O = m \overline{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = ma \vec{e}_x \wedge v_0 \vec{e}_y$  soit

$$\boxed{\vec{L}_O = mav_0 \vec{e}_z} \text{ donc le plan du mouvement est } (Oxy).$$

⇒ Méthode 14.3

3. L'énergie mécanique est également constante car la seule force est conservative :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}.$$

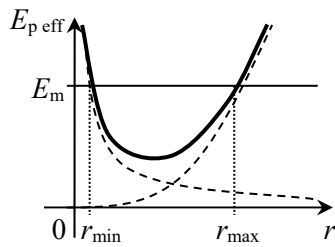
4.  $\vec{L}_O = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \vec{cste}$  donc  $\boxed{r^2 \dot{\theta} = cte = av_0}$ . De plus la conservation de

$$E_m \text{ s'écrit : } \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2. \quad \text{Or } \dot{\theta} = \frac{av_0}{r^2} \text{ donc}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{a^2v_0^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2}.$$

⇒ Méthode 14.4

5. Cela peut s'écrire  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) = E_m$  en posant  $\boxed{E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2}$ .



$E_m - E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$  donc les seules valeurs de  $r$  accessibles sont celles qui vérifient  $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$ . Quelle que soit la valeur de  $E_m$ , on obtient  $\boxed{r_{\min} \leq r \leq r_{\max}}$ , les deux valeurs extrêmes vérifiant  $\frac{1}{2}m\frac{a^2v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 = E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$ . Cette équation bicarrée peut être résolue en posant  $X = r^2$  puis en calculant le discriminant, etc.

Mais on peut trouver directement les deux racines qui sont évidentes (pour un œil avisé !), en

identifiant terme à terme : l'une est  $\boxed{r_{\min/\max} = a}$  et l'autre est  $\boxed{r_{\max/\min} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}}$ . (En l'absence de

valeurs numériques, on ne peut pas préciser laquelle est la plus grande des deux.)

La trajectoire de  $M$  dans  $(Oxy)$  est donc comprise entre deux cercles de rayons  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ .

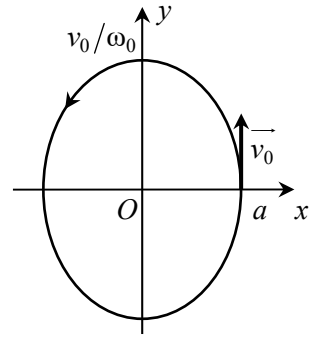
⇒ Méthode 14.5

6. PFD :  $m \frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} = -k \overline{OM}$  soit  $\frac{d^2 \overline{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \overline{OM} = \vec{0}$  en posant

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Solution :  $\overline{OM} = \vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t)$ .

CI :  $\overline{OM}_0 = \vec{A} = a \vec{e}_x$  et  $\vec{v}_0 = \vec{B} \omega_0 = v_0 \vec{e}_y$  donc finalement

$$\overline{OM} = a \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \vec{e}_y \text{ soit } \begin{cases} x = a \cos(\omega_0 t) \\ y = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$



Équation cartésienne :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\omega_0^2 y^2}{v_0^2} = 1$ . Il s'agit d'une ellipse de centre de symétrie  $O$ . On

retrouve bien  $r_{\min/\max} = a$  et  $r_{\max/\min} = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}} = \frac{v_0}{\omega_0}$ .

### Exercice 14.5

1.  $\frac{r}{a}$  est sans dimension donc  $[a] = [L]$  ( $a$  est une longueur).  $\frac{K}{r}$  est une énergie  $[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$  donc  $[K] = [M \cdot L^3 \cdot T^{-2}]$ .

2. Par définition,  $dE_p = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\overline{OM} = -F_r \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = -F_r dr$  donc  $F_r = -\frac{dE_p}{dr}$  soit  $\vec{F} = \frac{K}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right) \vec{e}_r$ . La force est attractive si sa projection sur  $\vec{e}_r$  est négative, ce qui suppose  $[K < 0]$ .

3. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen, la particule  $M$  est soumise uniquement à la force centrale  $\vec{F}$ . TMC par rapport à  $O$  :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{N}_O(\vec{F}) = \overline{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires) donc  $\vec{L}_O$  est constant. Or  $\vec{L}_O = m \overline{OM} \wedge \vec{v}(M) \perp \overline{OM}$  donc  $\overline{OM}$  est toujours orthogonal au vecteur constant  $\vec{L}_O$  : le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan contenant  $O$  et orthogonal au vecteur  $\vec{L}_O$ .

⇒ Méthode 14.3

4.  $\vec{L}_O = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte}$  donc  $[C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}]$ . Avec les conditions initiales :  $\vec{L}_O = m \overline{OM}_0 \wedge \vec{v}_0 = m r_0 \vec{e}_x \wedge (v_1 \vec{e}_x + v_2 \vec{e}_y) = m r_0 v_2 \vec{e}_z$  donc  $[C = r_0 v_2]$ .

⇒ Méthode 14.4

5. L'énergie mécanique de  $M$  est  $E_m = E_c + E_p(r)$ , avec  $E_c = \frac{1}{2} m v(M)^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ . Or

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{r_0 v_2}{r^2} \text{ donc } E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_2^2}{r^2} + \frac{K}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r) \text{ en posant}$$

$E_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{r_0^2 v_2^2}{r^2} + \frac{K}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$  (énergie potentielle effective). La seule force appliquée à  $M$

est  $\vec{F}$  et elle est conservative, donc  $E_m$  est constante au cours du temps  
 $\left[ E_m = \text{cte} = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) + \frac{K}{r_0} \exp\left(-\frac{r_0}{a}\right) \text{ d'après les conditions initiales} \right]$ .

6.  $E_m - E_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$  donc les seules valeurs de  $r$  accessibles sont celles qui vérifient  $E_{\text{peff}}(r) \leq E_m$ .

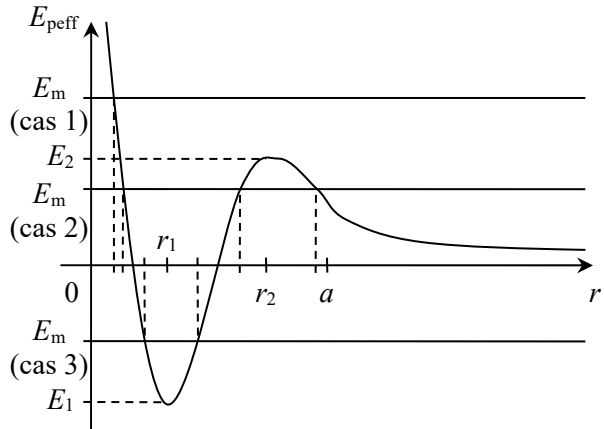
• Premier cas :  $E_m \geq E_2$ .

Alors  $r \geq r_{\text{min}}$  : le nucléon est dans un état de diffusion.

• Deuxième cas :  $0 < E_m < E_2$ . Selon la valeur initiale de  $r$  on peut avoir  $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$  (état lié) ou  $r \geq r_{\text{min}} (> r_2)$  (état de diffusion).

• Troisième cas :  $E_1 \leq E_m \leq 0$ . Alors  $r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$  : c'est un état lié.

En général un nucléon reste confiné dans le noyau atomique, ce qui correspond à un état lié.



⇒ Méthode 14.5

7. Interaction forte :  $a = 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ . Cette valeur correspond à la taille du noyau atomique : l'interaction forte devient négligeable au-delà de cette distance. Interaction faible :  $a = 2,5 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ . Cette valeur est beaucoup plus faible que la taille du noyau : l'interaction faible ne s'exerce donc qu'entre deux nucléons voisins ou même à l'intérieur de chaque nucléon. Interactions électromagnétique et gravitationnelle :  $a = \infty$ . La portée de ces deux interactions est infinie, c'est pourquoi on peut les observer à notre échelle ou à des échelles encore plus grandes (astronomique pour l'interaction gravitationnelle).

8. On remplace  $\frac{1}{a}$  par 0, d'où  $E_p(r) = \frac{K}{r}$  et  $\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ . On retrouve l'expression classique de ces deux forces  $\left( K = -Gm_0m \text{ pour la gravitationnelle, } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_0q \text{ pour l'électrique} \right)$ .

9. L'interaction électromagnétique entre un proton et le reste du noyau est répulsive car ces charges sont toutes positives : cela correspond à  $K > 0$ . Pour que le proton reste au sein du noyau il faut donc que l'interaction forte soit attractive, soit  $K' < 0$ .

### Exercice 14.6

1. Théorème du moment cinétique pour  $M$  par rapport à  $O$  (centre de force) dans  $\mathcal{R}$  :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathfrak{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires) donc  $\vec{L}_O$  est constant au cours du mouvement. Or  $\vec{L}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M) \perp \vec{OM}$  donc  $\vec{OM}$  est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan contenant  $O$  et orthogonal au vecteur  $\vec{L}_O$ .

2.  $\vec{L}_O = mr\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \vec{cte}$  donc  $\boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cte}}$  (notée  $C$ ).

$\Rightarrow$  Méthode 14.4

3.  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  avec  $r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu$  et  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(1/u)}{d\theta} \frac{C}{r^2} = -\frac{u'}{u^2} \frac{C}{r^2} = -Cu'$  d'où

$$\boxed{\vec{v} = -Cu'\vec{e}_r + Cu\vec{e}_\theta}, \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad r\dot{\theta}^2 = r \frac{C^2}{r^4} = C^2u^3 ;$$

$$\ddot{r} = \frac{d(-Cu')}{dt} = \frac{d(-Cu')}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -Cu'' \frac{C}{r^2} = -C^2u^2u'' ; \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r}.$$

*✎ Cette démonstration classique utilise simplement, de façon répétée, l'égalité  $C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}$  et la technique des dérivées composées.*

4. PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}$  :  $m\vec{a} = \vec{F}$ . Projection sur  $\vec{e}_r$  :  $-mC^2u^2(u'' + u) = F_r$ . Or  $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a}e^{-\theta}$

$$\text{donc } u' = -\frac{1}{a}e^{-\theta} \text{ et } u'' = \frac{1}{a}e^{-\theta} = u. \text{ Alors } F_r = -mC^2u^2(u'' + u) = -2mC^2u^3 \text{ soit } \boxed{F_r = -\frac{2mC^2}{r^3}}.$$

5. Ici  $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta$  donc  $u' = -\frac{e}{p}\sin\theta$  et  $u'' = -\frac{e}{p}\cos\theta$ .

$$\text{Alors } F_r = -mC^2u^2(u'' + u) = -\frac{mC^2}{p}u^2 \text{ soit } \boxed{F_r = -\frac{K}{r^2}} \text{ avec } K = \frac{mC^2}{p}.$$

*✎ On reconnaît une force newtonienne : on a ainsi démontré que les trajectoires elliptiques observées par Kepler ne peuvent être dues qu'à une force en  $1/r^2$ . Inversement, si la fonction  $u$  est l'inconnue, on démontre qu'une force en  $1/r^2$  donne nécessairement une conique : ellipse, parabole ou branche d'hyperbole.*

### Exercice 14.7

1. Dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  galiléen, l'électron  $M$  est soumis à la force centrale électrique

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r \text{ et à la force magnétique } \vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

*✎ La force électrique est une force centrale, mais pas la force magnétique : le mouvement de l'électron n'est donc pas un mouvement à force centrale. Dans la*

suite on ne retrouvera donc pas tous les résultats du cours, mais on utilisera quand même des raisonnements analogues.

Or  $\vec{F}$  est une force conservative, dérivant de l'énergie potentielle  $E_p = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$ , et  $\vec{F}_m$  ne travaille pas car elle est toujours orthogonale au mouvement, donc l'énergie mécanique se conserve :  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \text{cte}$ . D'après les conditions initiales, cette constante vaut  $0 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$ , soit  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$ . Comme  $\frac{1}{2} m v^2 \geq 0$ , on en déduit  $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \leq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$  soit  $r \leq a$ .

**2.** Théorème du moment cinétique par rapport à  $O$  :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \overline{\mathcal{N}}_O(\vec{F}) + \overline{\mathcal{N}}_O(\vec{F}_m)$  avec  $\overline{\mathcal{N}}_O(\vec{F}) = \overline{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires) et  $\overline{\mathcal{N}}_O(\vec{F}_m) = \overline{OM} \wedge \vec{F}_m = \overline{OM} \wedge (-e\vec{v} \wedge \vec{B}) = -(\overline{OM} \cdot \vec{B})e\vec{v} + (\overline{OM} \cdot e\vec{v})\vec{B} = \vec{0} + e\left(\overline{OM} \cdot \frac{d\overline{OM}}{dt}\right)\vec{B} = e\frac{1}{2} \frac{dOM^2}{dt} \vec{B} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} e r^2 \vec{B} \right)$ .

Donc  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} e r^2 \vec{B} \right)$ , d'où  $\vec{L} = \frac{1}{2} e r^2 \vec{B} + \text{cte}$ . À l'instant initial :

$$\vec{L} = \frac{1}{2} e a^2 \vec{B} + \text{cte} = m a \vec{e}_x \wedge \vec{0} = \vec{0} \text{ d'où } \vec{L} = \frac{1}{2} e (r^2 - a^2) \vec{B}.$$

**3.**  $\vec{L} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$  donc  $m r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} e (r^2 - a^2) B$  soit  $\dot{\theta} = \frac{e(r^2 - a^2) B}{2 m r^2}$ .

Puisque  $r \leq a$ ,  $\dot{\theta} \leq 0$  : l'électron tourne toujours dans le sens négatif (sens indirect par rapport au champ magnétique).

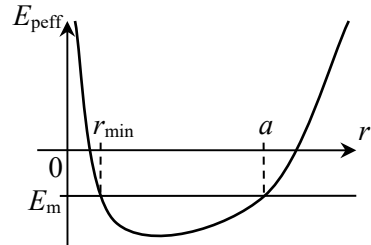
**4.**  $E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{e^2 (r^2 - a^2)^2 B^2}{4 m^2 r^4} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$   
 $= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{peff}}(r)$  en posant  $E_{\text{peff}}(r) = \frac{e^2 B^2 (r^2 - a^2)^2}{8 m r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  (énergie potentielle effective).

**5.**  $\frac{dE_{\text{peff}}}{dr} = \frac{e^2 B^2}{8m} \frac{2(r^2 - a^2)2r^3 - 2r(r^2 - a^2)^2}{r^4} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{e^2 B^2}{4m} \frac{(r^2 - a^2)(r^2 + a^2)}{r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ .

Pour  $r = a$  :  $\frac{dE_{\text{peff}}}{dr}(a) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} > 0$ .

Pour  $r \rightarrow 0$  :  $\frac{dE_{\text{peff}}}{dr} \rightarrow -\infty$  (et  $E_{\text{peff}} \rightarrow +\infty$ ).

De plus  $E_{\text{peff}}(a) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = E_m < 0$ .





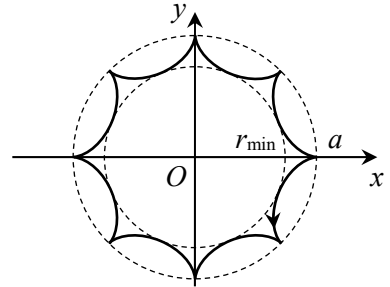
6.  $E_m - E_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$  donc les seules valeurs de  $r$  accessibles sont celles qui vérifient  $E_{\text{peff}}(r) \leq E_m$ . D'après le graphe, on obtient donc  $r_{\min} \leq r \leq a$ , où  $r_{\min}$  est donné par

$$E_{\text{peff}}(r_{\min}) = E_m, \text{ soit } \boxed{\frac{(r_{\min}^2 - a^2)^2 B^2}{8m r_{\min}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}}$$

*La deuxième solution de cette équation est bien sûr  $a$ , solution évidente.*

7. Chaque fois que  $r = a$ ,  $\dot{r} = 0$  puisque c'est le maximum de  $r$ , et  $\dot{\theta} = 0$  d'après la formule de la question 3, donc la vitesse est nulle.

Cela correspond à des points d'arrêt sur la trajectoire. La courbe a donc l'allure ci-contre (avec sens de rotation négatif d'après la question 3).



### Exercice 14.8

1. PFD pour le satellite, soumis uniquement à la force de gravitation de la Terre, dans le référentiel géocentrique :  $m\vec{a} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$ . Projection sur  $\vec{e}_r$  :  $-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{Mm}{r^2}$  d'où

$$\dot{\theta}^2 = G\frac{M}{r^3}. \text{ Or } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ donc } \boxed{v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}}$$

⇒ Méthode 14.6

2.  $T = \frac{2\pi}{|\dot{\theta}|} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$  donc  $\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$ . Ce rapport est indépendant des caractéristiques du satellite, il est donc le même pour tous les satellites de la Terre.

Cette loi est l'équivalent de la troisième loi de Kepler dans le système solaire : le rapport  $\frac{T^2}{a^3}$  a la même valeur pour toutes les planètes.

3.  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$  et  $E_p = -\frac{GMm}{r}$  donc  $\boxed{E_m = -\frac{GMm}{2r} = -E_c}$ . L'énergie mécanique est négative, ce qui correspond à un état lié si on fait l'étude avec l'énergie potentielle effective.

4.  $\boxed{T = T_T}$  (il fait un tour sur son orbite en même temps que la Terre sur elle-même) d'où

$\boxed{h = \left(\frac{GMT_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R}$ . AN  $\boxed{h = 35800 \text{ km}}$ . On trouve  $h \approx 6R$  : les satellites géostationnaires sont très éloignés, par rapport à d'autres satellites (observation, communication...).

5. a) Le satellite est à la distance  $R$  du centre de la Terre, et tourne avec elle à la vitesse angulaire  $\omega_T$  et selon un cercle de rayon  $R \cos \lambda$ . Alors  $E_{m0} = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$ .

b) Tém entre le point de départ sur la Terre et un point de l'orbite circulaire :  $\Delta E_m = W$  soit  $W = -\frac{GMm}{2(R+h)} - \left( -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2 \right) \Leftrightarrow W = \frac{GMm(R+2h)}{2R(R+h)} - \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$ .

Pour minimiser  $W$  on doit donc maximiser  $\cos^2 \lambda$ , donc se rapprocher de l'équateur ( $\lambda = 0$ ).

c) Pour  $h \ll R$  :  $W \approx \frac{GMm}{2R} - \frac{1}{2}mR^2 \cos^2 \lambda \omega_T^2$ . On calcule  $\frac{W_1}{W_2}$  avec  $\omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$  (où

$T_T = 1$  jour sidéral = 86164 s) ; la donnée de  $m$  n'est pas nécessaire. AN  $\frac{W_1}{W_2} = 0,9977$  soit une

économie de  $0,23\%$  seulement en lançant depuis l'équateur : contrairement à une croyance répandue, l'économie d'énergie due à « l'effet de fronde » donné par la Terre n'est pas la raison pour laquelle les bases spatiales sont situées près de l'équateur (Kourou, Cap Canaveral...). L'intérêt réel est une plus grande facilité pour placer des satellites en orbite équatoriale.

### Exercice 14.9

1. On obtient avec le PFD :  $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}$ . AN  $v_1 = 7300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

⇒ Méthode 14.6

2. TMC par rapport au point  $O$  fixe dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}$  supposé galiléen :

$\frac{d\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  car  $\vec{F}$  (force gravitationnelle) est colinéaire à  $\vec{OM}$ , donc

$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = \text{cte}$  : le moment cinétique de  $M$  en  $O$  se conserve. Or sur cette trajectoire plane :

$\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}} = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte}$  donc  $r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte}$ .

⇒ Méthode 14.4

3. Conservation de l'énergie mécanique :  $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \text{cte}$  soit en utilisant la constante des aires  $C$  :

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = \text{cte}$ . On a donc trouvé  $E_{\text{p eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$ .

4. Lorsque la distance  $r$  est extrémale ( $r_{\min}$  ou  $r_{\max}$ ), sa dérivée  $\dot{r}$  est nulle, donc  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$

sont les solutions de l'équation :  $\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r} = E_m \Leftrightarrow 2E_m r^2 + 2GMmr - mC^2 = 0$ . La

somme des racines est  $r_{\min} + r_{\max} = -\frac{GMm}{E_m}$ . Cela équivaut à  $2a = -\frac{GMm}{E_m}$ , soit  $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ .

⇒ Méthode 14.8

Pour un cercle,  $a$  est égal au rayon, donc  $E_{m1} = -\frac{GMm}{2r_1}$  sur le premier cercle et  $E_{m2} = -\frac{GMm}{2r_2}$  sur le second. Sur l'ellipse de transfert :  $r_1 + r_2 = r_{\min} + r_{\max} = 2a$  donc  $E_{me} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$ .

**5.** Le changement d'orbite a lieu en un point donné, donc à énergie potentielle constante. Alors la variation d'énergie mécanique est une variation d'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}m(v_{e1}^2 - v_1^2) = E_{me} - E_{m1} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2} + \frac{GMm}{2r_1} = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} \text{ donc } v_{e1} = \sqrt{\frac{GM(r_2 - r_1)}{r_1(r_1 + r_2)}} + v_1^2 \text{ soit}$$

$$v_{e1} = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}. \text{ AN } v_{e1} = 9520 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ donc } \Delta v_P = 2220 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Travail fourni par le moteur : } W_P = E_{me} - E_{m1} = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)}. \text{ AN } W_P = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ J} = 17 \text{ GJ}.$$

☛ On peut aussi calculer la valeur numérique de  $W_P$  avec la formule  $\frac{1}{2}m(v_{e1}^2 - v_1^2)$ , mais ce n'est pas égal à  $\frac{1}{2}m(\Delta v_P)^2$  !

**6.** En  $P$  et en  $A$ , les vecteurs vitesse et position sont orthogonaux : la conservation du moment

$$\text{cinétique donne } mr_1 v_{e1} \vec{e}_z = mr_2 v_{e2} \vec{e}_z \text{ d'où } v_{e2} = v_{e1} \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}. \text{ AN } v_{e2} = 1690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**7.**  $v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}$  donc  $\Delta v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} - \sqrt{\frac{2GM r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$ . AN  $\Delta v_A = 1390 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (donc la vitesse sur l'orbite géostationnaire sera  $v_2 = 3080 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

$$\text{Travail fourni par le moteur : } W_A = E_{m2} - E_{me} = -\frac{GMm}{2r_2} + \frac{GMm}{r_1 + r_2} \text{ soit } W_A = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}.$$

$$\text{AN } W_A = 3,0 \cdot 10^9 \text{ J} = 3,0 \text{ GJ}.$$

✍ Les vitesses étant plus faibles quand la distance à la Terre est plus grande, la dépense énergétique du moteur est nettement moins grande à l'apogée qu'au périogée.

### Exercice 14.10

**1.** Force de gravitation :  $\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$  en posant  $\vec{OP} = r \vec{e}_r$ . Elle dérive de l'énergie

potentielle  $E_p = -\frac{GMm}{r}$  en prenant l'origine à l'infini. L'énergie mécanique de  $P$  est donc

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}; \text{ elle se conserve puisque la seule force appliquée à } P \text{ est conservative.}$$

**2.** Théorème du moment cinétique pour  $P$  par rapport à  $O$  (centre de force) dans  $\mathcal{R}$  :  
 $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires) donc  $\vec{L}_O$  est constant au cours du mouvement. Or  $\vec{L}_O = m\vec{OP} \wedge \vec{v}(P) \perp \vec{OP}$  donc  $\vec{OP}$  est toujours orthogonal à un vecteur constant : le mouvement de  $P$  a lieu dans le plan contenant  $O$  et orthogonal au vecteur  $\vec{L}_O$ .

⇒ Méthode 14.3

Or  $\vec{L}_O = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte}$  donc  $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$  (notée  $C$ ).

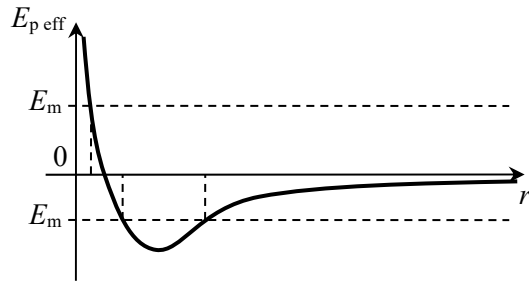
⇒ Méthode 14.4

**3.**  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r}$  et on utilise la formule précédente pour éliminer la variable  $\dot{\theta}$  :  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}$ , ce qui a bien la forme demandée en

posant 
$$E_{p \text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{GMm}{r}.$$

**4.** L'allure de la courbe est donnée ci-dessous.

$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r)$  avec  $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 > 0$  donc  $E_{p \text{ eff}}(r) \leq E_m$  : les seules valeurs accessibles de  $r$  sont celles qui vérifient cette inégalité. On ajoute donc sur le graphe une droite horizontale représentant la valeur de  $E_m$  : seule la partie de la courbe située sous cette droite correspond à des positions accessibles.



– Si  $E_m < 0$ , alors  $r \in [r_{\min}; r_{\max}]$ ,  $P$  est dans un état lié.

– Si  $E_m \geq 0$ , alors  $r \in [r_{\min}; +\infty[$ ,  $P$  est dans un état de diffusion, il peut « échapper » à l'attraction gravitationnelle de l'astre et s'éloigner à l'infini.

⇒ Méthode 14.5

**5.** La vitesse de libération est la vitesse minimale permettant d'obtenir un état de diffusion :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \text{ d'où } v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_{\text{lib}}.$$

⇒ Méthode 14.7

**6.**  $v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c \Leftrightarrow R \leq \frac{2GM}{c^2} = R_S.$

AN pour la masse du Soleil ;  $R_S = 3 \text{ km}$  ; pour la masse de la Terre :  $R_S = 9 \text{ mm}$ .

Il faudrait que toute la masse de la Terre soit concentrée dans une sphère de rayon 9 mm pour qu'elle constitue un trou noir !

Les trous noirs (du moins ceux qui ne sont pas trop massifs) sont donc des astres où la matière est extrêmement concentrée, autant voire plus que la matière nucléaire ( $10^{18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

*✎ On pense aujourd'hui que les trous noirs dont la présence a été détectée proviennent de l'effondrement de certaines étoiles sur elles-mêmes, lorsque l'attraction gravitationnelle n'est plus compensée par l'énergie provenant de la fusion nucléaire.*

### Exercice 14.11

1. L'énergie mécanique de l'astéroïde est conservée, car la seule force est conservative :

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \text{cte}$ . Lorsqu'il est très éloigné ( $M_\infty$ ),  $v = v_0$  et  $r \rightarrow \infty$  donc

$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Lorsqu'il est au périégée  $P$ ,  $E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_{\min}}$ . Donc  $\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{Mm}{r_{\min}}}$ .

D'autre part, le moment cinétique de l'astéroïde est également conservé, car il n'est soumis qu'à une force centrale :  $\vec{L}_O = m\vec{OM} \wedge \vec{v} = \text{cte}$ . On le calcule aux points  $M_\infty$  et  $P$  :

$\vec{L}_O = m\vec{OM}_\infty \wedge \vec{v}_0 = m\vec{OP} \wedge \vec{v}_P \Leftrightarrow (\vec{OH} + \vec{HM}_\infty) \wedge \vec{v}_0 = \vec{OP} \wedge \vec{v}_P \Leftrightarrow -bv_0\vec{e}_z + \vec{0} = -r_{\min}v_P\vec{e}_z$  soit

finalement  $\boxed{bv_0 = r_{\min}v_P}$ .

$\Rightarrow$  Méthode 14.1

2. Dans les deux équations précédentes, il faut éliminer la vitesse  $v_P$  au périégée. On la remplace

par  $v_0 \frac{b}{r_{\min}}$  dans la première équation :  $G\frac{Mm}{r_{\min}} = \frac{1}{2}mv_0^2 \left( \frac{b^2}{r_{\min}^2} - 1 \right)$  ce qui donne une équation du

second degré :  $v_0^2 r_{\min}^2 + 2GM r_{\min} - v_0^2 b^2 = 0$ .  $\Delta = 4G^2 M^2 + 4v_0^4 b^2 > 0$  et il y a une seule

solution positive :  $\boxed{r_{\min} = \frac{-GM + \sqrt{G^2 M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}}$ .

3. AN  $\boxed{r_{\min} = 72000 \text{ km}}$ . On trouve  $r_{\min} > R$  donc Toto ne heurtera pas la Terre !

### Exercice 14.12

1.  $C = r^2\dot{\theta} = \text{cte}$  donc si  $r = \text{cte} = r_0$  (cercle), alors  $\dot{\theta} = \text{cte}$  ; or  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  donc  $\boxed{v = \text{cte}}$ .

PFD pour le satellite, soumis uniquement à la force de gravitation de la Terre :  $m\vec{a} = -G\frac{Mm}{r_0^2}\vec{e}_r$ .

Projection sur  $\vec{e}_r$  :  $-mr\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{r_0} = -G\frac{Mm}{r_0^2}$  d'où  $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}}$ .

$\Rightarrow$  Méthode 14.6

2.  $\vec{L}_O = m \overline{OM} \wedge \vec{v} = m r_0 \vec{e}_r \wedge v \vec{e}_\theta = m r_0 v \vec{e}_z$  donc  $C = r_0 v = \sqrt{GM r_0}$ .

Et  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{GMm}{2r_0} - \frac{GMm}{r_0}$  soit  $E_m = -\frac{GMm}{2r_0}$ .

3.a) Maintenant  $\vec{L}_O = m \overline{OM} \wedge \vec{v}' = m r_0 \vec{e}_r \wedge (v \sin \alpha \vec{e}_r + v \cos \alpha \vec{e}_\theta) = m r_0 v \cos \alpha \vec{e}_z$  donc

$C' = r_0 v \cos \alpha = \sqrt{GM r_0} \cos \alpha$ .

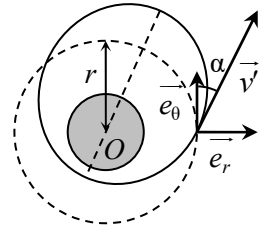
En revanche,  $v$  et  $r_0$  ayant les mêmes valeurs que sur la

trajectoire circulaire, on a toujours  $E_m = -\frac{GMm}{2r_0}$ .

b) Le demi-grand axe de l'ellipse ne dépend que de l'énergie

mécanique, selon la formule :  $E_m = -\frac{GMm}{2a}$ .

Puisque l'énergie est la même sur le cercle souhaité et sur l'ellipse réelle, le grand axe de celle-ci a la même longueur que celui du cercle, c'est-à-dire son diamètre  $2r_0$ .



Il faut donc dessiner une ellipse donc la longueur du grand axe est égale au diamètre du cercle, qui passe par le point initial, qui est tangente au vecteur vitesse initial, et enfin dont le grand axe passe par  $O$ . On voit bien alors apparaître le périhélie (point le plus proche de la Terre) et l'apogée (point le plus éloigné).

### Exercice 14.13

1. K1 : les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.

K2 : le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

K3 : le rapport du carré de la période orbitale et du cube du demi-grand axe est le même pour toutes les planètes.

2.  $O_T$  étant soumis uniquement à la force centrale  $\vec{F} = -G \frac{m_T m_S}{r^2} \vec{e}_r$ , on lui applique le TMC par

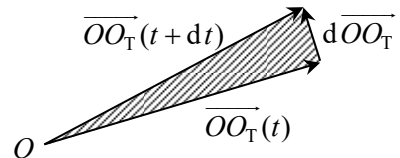
rapport au point fixe  $O$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overline{OO_T} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  donc  $\vec{L}_O$  est constant.

Dans le plan du mouvement :  $\vec{L}_O = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte}$  donc  $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ .

Or l'aire balayée par le vecteur  $\overline{OO_T}$  pendant une durée infinitésimale  $dt$  est :

$dS = \frac{1}{2} \|\overline{OO_T} \wedge d\overline{OO_T}\| = \frac{1}{2} \|r \vec{e}_r \wedge (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta)\| = \frac{1}{2} r^2 d\theta$

donc  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2}$  (vitesse aréolaire).



L'aire balayée pendant une durée  $\Delta t$  est alors  $S_{\Delta t} = \frac{C}{2} \Delta t$ .

⇒ Méthode 14.4

3. Le périhélie ( $r$  minimal) correspond à un dénominateur maximal, donc à  $\cos(\theta - \theta_0) = 1$  : alors  $r_{\text{pér}} = a(1 - e)$ . De même l'aphélie ( $r$  maximal) correspond à  $\cos(\theta - \theta_0) = -1$  :

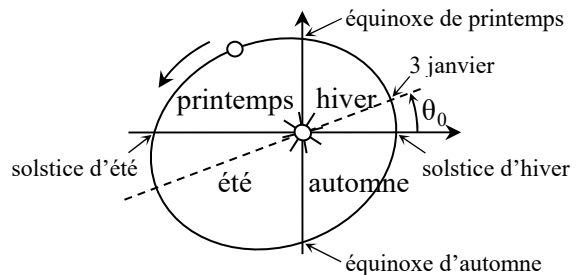
$$r_{\text{aph}} = a(1 + e). \text{ De plus en ces points } \dot{r} = 0 \text{ donc } \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \frac{C}{r}\vec{e}_\theta : v_{\text{pér}} = \frac{C}{r_{\text{pér}}} = \sqrt{\frac{Gm_S(1+e)}{a(1-e)}}$$

$$\text{et } v_{\text{aph}} = \frac{C}{r_{\text{aph}}} = \sqrt{\frac{Gm_S(1-e)}{a(1+e)}}.$$

4.  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{C[1 + e \cos(\theta - \theta_0)]^2}{a^2(1 - e^2)^2}$ . On sépare les variables :  $dt = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{C[1 + e \cos(\theta - \theta_0)]^2} d\theta$ . Et

$$\text{on intègre à partir d'un instant initial : } t(\theta) = \int \frac{a^2(1 - e^2)^2}{C[1 + e \cos(\theta - \theta_0)]^2} d\theta.$$

5. La durée d'une saison est proportionnelle à l'aire balayée, d'après la loi K2. La plus courte est donc celle qui contient le périhélie (3 janvier), c'est l'hiver ; l'automne est un peu plus long. La saison la plus longue est celle qui contient l'aphélie, soit l'été, et le printemps est un peu moins long.



6. La valeur de  $\frac{T^2}{a^3}$  est 1 avec  $T$  en années et  $a$  en ua.

Pour Mercure,  $a^3 = 0,059 \text{ ua}^3$  donc  $T = \sqrt{0,059} = 0,24 \text{ année (soit 88 jours)}$ .

Pour Neptune,  $a^3 = 27000 \text{ ua}^3$  donc  $T = \sqrt{27000} = 160 \text{ années}$  (à deux chiffres significatifs).

### Exercice 14.14

1. La force est  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \vec{e}_r$  (donc  $K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$ ) et l'énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}$ .

2. Dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la particule  $\alpha$  n'est soumise qu'à la force conservative  $\vec{F}$ . Son énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$  est donc constante au cours du temps.

Initialement  $v \rightarrow v_0$  et  $r \rightarrow \infty$  donc  $E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$ .

3. Théorème du moment cinétique en  $O$  :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$  (vecteurs colinéaires)

donc  $\vec{L}_O$  est constant. Avec les conditions initiales :  $\vec{L}_O = m(x_0 \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge (-v_0 \vec{e}_x)$  soit

$$\vec{L}_O = m b v_0 \vec{e}_z. \text{ Enfin } \vec{L}_O = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \text{ soit } \vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \text{ (donc } r^2 \dot{\theta} = b v_0 \text{).}$$

⇒ Méthode 14.4

4.  $E_m = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + E_p(r) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{b^2 v_0^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$  soit  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E'_p(r)$  en

posant  $E'_p(r) = \frac{1}{2} \frac{mb^2 v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$ . C'est l'énergie potentielle effective (ou efficace).

5. Lorsque  $r$  est minimal, sa dérivée  $\dot{r}$  est nulle donc  $E_m = E'_p(r_{\min})$ , soit

$$E_m = \frac{1}{2} \frac{mb^2 v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r_{\min}}$$

ou encore  $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{mb^2 v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}}$  que l'on met sous forme d'une

équation du second degré :  $mv_0^2 r_{\min}^2 - 2K r_{\min} - mb^2 v_0^2 = 0$ .  $\Delta' = K^2 + (mbv_0^2)^2 > 0$  d'où la

racine positive :  $r_{\min} = \frac{K + \sqrt{K^2 + (mbv_0^2)^2}}{mv_0^2}$  soit  $r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{mbv_0^2}{K} \right)^2} \right)$ .

6.  $b = \frac{K}{mv_0^2 \tan(D/2)} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 mv_0^2 \tan(D/2)}$ . AN  $b_1 = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  et  $b_2 = 0$ , d'où

$r_{\min 1} = 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ m}$  et  $r_{\min 2} = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ m}$ .

La taille caractéristique du noyau d'or (assez gros) est donc de l'ordre de  $10^{-14} \text{ m}$ , soit environ 10 000 fois plus petit que l'atome ( $10^{-10} \text{ m}$ ).





# Mouvement d'un solide

UN SCIENTIFIQUE



Le physicien français **Léon Foucault** (1819-1868) conçoit de nombreuses expériences astucieuses mettant en évidence des phénomènes physiques. C'est ainsi qu'il montre que la lumière se propage plus rapidement dans l'air que dans l'eau, qu'il découvre l'existence de courants induits dans une masse métallique, et surtout qu'il met en évidence la rotation de la Terre, par le mouvement d'un immense pendule puis grâce à son invention du gyroscope.

## ■ Un peu d'histoire

**GALILÉE**, initiateur de l'étude scientifique du mouvement, affirme l'isochronisme du pendule. **HUYGENS** utilise cette propriété pour concevoir les premières pendules. Ceci l'amène à définir, en 1673, dans *Horologium Oscillatorium*, la notion de centre de gravité et celle de moment d'inertie : il parle de la somme des masses fois les carrés des distances. L'introduction du calcul différentiel et intégral à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle fournit un puissant outil de développement de la mécanique du solide, dont **EULER** et **D'ALEMBERT** sont les principaux artisans. Le terme *moment d'inertie* est introduit par le savant suisse en 1765.

La conservation du moment cinétique pour un solide isolé sera exploitée par **FOUCAULT** avec son gyroscope, solide tournant à grande vitesse autour d'un axe fixe dans l'espace, par rapport auquel on peut voir la rotation de la Terre.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La définition d'un solide et de ses mouvements élémentaires (translation, rotation autour d'un axe fixe)
- ▷ Le moment d'inertie, le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide en rotation
- ▷ La notion de couple et l'expression d'un couple de torsion
- ▷ La liaison pivot

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire, une rotation autour d'un axe fixe
- ▷ Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses
- ▷ Étudier le mouvement de rotation ou l'équilibre d'un solide avec le théorème (scalaire) du moment cinétique
- ▷ Établir l'équation du mouvement et une intégrale première du mouvement pour un pendule de torsion, pour un pendule pesant
- ▷ Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un solide en rotation

## ■ Cinématique du solide

### □ Généralités

Un **solide** est un système de points matériels tel que la distance entre deux points quelconques du système est invariante au cours du temps. On définit donc ici le solide comme **indéformable**, par opposition aux systèmes déformables (système élastique, ensemble de solides articulés, fluide...). La répartition de masse d'un solide est généralement décrite de façon *continue* : le solide peut être découpé en éléments infinitésimaux de masse  $dm$ , et sa masse totale est alors  $m = \int_{\text{solide}} dm$ .

Il s'agit d'une intégrale triple (sur le volume du solide, par exemple d'une boule), qui se ramène à une intégrale double si le solide est modélisé comme une surface (par exemple une sphère, un disque dont on néglige l'épaisseur), ou à une intégrale simple s'il est modélisé comme une courbe (par exemple une tige modélisée comme un segment, un anneau modélisé comme un cercle). Le mouvement d'un solide peut être complexe. On se limite à l'étude de deux cas particuliers.

### □ Mouvement de translation

Définition

Un solide  $S$  est en **translation** par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  si pour tout couple de points  $A$  et  $B$  de  $S$ , le vecteur  $\overline{AB}$  reste constant au cours du mouvement du solide.

Propriétés

Si le solide  $S$  est en translation, alors *tous ses points ont le même vecteur vitesse* à chaque instant, donc aussi le même vecteur accélération.

Les trajectoires de tous les points de  $S$  sont superposables. On peut parler en particulier de **translation rectiligne** si ces trajectoires sont des segments de droites (nécessairement parallèles entre eux), de **translation circulaire** si ce sont des cercles (nécessairement de même rayon), etc. L'étude dynamique d'un solide en translation utilise les mêmes méthodes que celle d'un point matériel, puisqu'il suffit d'étudier le mouvement du centre d'inertie  $G$ .

### □ Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Définition

Un solide  $S$  est en **rotation** autour d'un axe fixe  $\Delta$  si tous les points de  $S$  ont une trajectoire circulaire centrée sur un point de  $\Delta$ . Si des points de  $S$  appartiennent à l'axe  $\Delta$ , ils sont immobiles.

Vitesse et accélération angulaires

La **vitesse angulaire** du solide est la dérivée temporelle  $\omega = \dot{\theta}$  de l'angle repérant sa position.

(On la définit aussi parfois comme la valeur absolue de cette dérivée, soit  $\omega = |\dot{\theta}|$  ; dans ce cas on doit préciser le sens de rotation.)

L'**accélération angulaire** du solide est la dérivée temporelle  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$ .

## Relation entre vitesse et vitesse angulaire

Soit un solide  $S$  en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$  et  $M$  un point quelconque de  $S$  :  $M$  décrit une trajectoire circulaire dont le centre est son projeté orthogonal  $H$  sur  $\Delta$ .

On peut donc lui appliquer les formules du mouvement circulaire, dans la base cylindrique d'axe  $(Oz)$  confondu avec  $\Delta$  :

- sa vitesse est  $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = r\omega\vec{e}_\theta$  (avec  $r = HM$ ), de norme  $v(M)_{\mathcal{R}} = |\omega| \cdot HM$  ;
- son accélération est  $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = -R\omega^2\vec{e}_r + R\dot{\omega}\vec{e}_\theta$ .

Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire (et la même accélération angulaire), mais ils ont une vitesse de norme d'autant plus grande qu'ils sont plus éloignés de l'axe de rotation.

⇒ **Méthode 15.1. Identifier le mouvement d'un solide**

## ■ Éléments cinétiques d'un solide en rotation

### □ Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

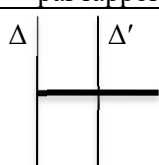
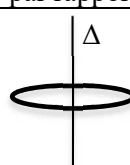
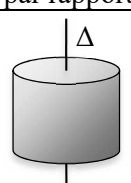
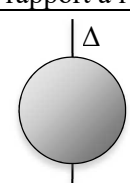
Pour un solide  $S$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$  :

$$L_\Delta(S)_{\mathcal{R}} = J_\Delta \omega \quad \text{où } J_\Delta \text{ est le } \mathbf{moment\ d'inertie} \text{ du solide par rapport à l'axe } \Delta.$$

$J_\Delta$  est défini par :  $J_\Delta = \int_{\text{solide}} dm r_\Delta^2$  avec  $r_\Delta$  la distance de chaque point du solide à l'axe  $\Delta$ .

Pour une même masse totale, le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus grand que sa répartition de masse est plus éloignée de l'axe de rotation.

Exemples de moments d'inertie de solides homogènes

<p>Tige de masse <math>m</math>, de longueur <math>L</math> par rapport à un axe orthogonal</p>  <p><math>J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2</math> <math>J_{\Delta'} = \frac{1}{12}mL^2</math></p>	<p>Cerceau de masse <math>m</math>, de rayon <math>R</math> par rapport à son axe de révolution</p>  <p><math>J_\Delta = mR^2</math></p>
<p>Disque ou cylindre de masse <math>m</math>, de rayon <math>R</math> par rapport à son axe de révolution</p>  <p><math>J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2</math></p>	<p>Boule (pleine) de masse <math>m</math>, de rayon <math>R</math> par rapport à l'un de ses axes de révolution</p>  <p><math>J_\Delta = \frac{2}{5}mR^2</math></p>

### □ Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour un solide  $S$  en rotation autour de  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$  :  $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ .

## ■ Moment d'un couple

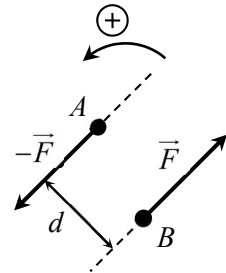
### □ Moment d'un couple par rapport à un axe

Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle, mais de moment total non nul.

Le cas le plus simple est celui de deux forces opposées  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  appliquées en deux points différents du système considéré.

La distance entre leurs deux supports étant  $d$ , le moment du couple de forces, par rapport à un axe quelconque orthogonal au plan des deux supports, est  $\mathcal{M}_{\text{couple}} = \pm d F$ .

Le signe est positif si le couple tend à faire tourner le système dans le sens positif, négatif sinon. Sur ce schéma :  $\mathcal{M}_{\text{couple}} > 0$ .



### □ Couple de torsion

Lorsqu'un fil est tordu d'un angle  $\alpha$ , il exerce un couple de rappel, appelé **couple de torsion**, de moment  $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C\alpha$  par rapport à la direction du fil,  $C$  étant la constante de torsion.

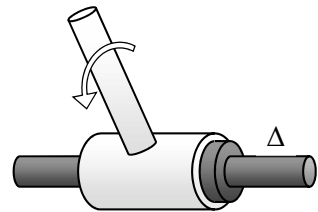
Ce couple dérive de l'énergie potentielle  $E_{p,\text{torsion}} = \frac{1}{2} C\alpha^2$  (+cte).

### □ Liaison pivot

C'est une liaison entre un bâti fixe et une pièce mobile, donnant à celle-ci un seul degré de liberté de rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ .

Si elle est **parfaite**, elle n'exerce aucun moment selon l'axe  $\Delta$ .

Si elle n'est pas parfaite, elle exerce sur la pièce mobile un **couple de frottement solide**, dont le moment  $\mathcal{M}_f$  par rapport à l'axe est de signe opposé au sens de rotation.



## ■ Théorèmes de la dynamique pour un solide en rotation

### □ Théorème du moment cinétique

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , le théorème s'écrit :

$$J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta \text{ ext}}$$

⇒ **Méthode 15.2.** Utiliser le TMC pour un solide en rotation

⇒ **Méthode 15.4.** Utiliser le TAM et le TMC pour un solide en équilibre

### □ Théorème de l'énergie cinétique

Puissance et travail en fonction du moment

Puissance d'une force ou d'un couple de moment  $\mathcal{M}_{\Delta}$  exercé sur  $S$  en rotation :  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\Delta} \cdot \omega$ .

Travail d'une force ou d'un couple de moment  $\mathcal{M}_{\Delta}$  exercé sur  $S$  en rotation :  $W_{\mathcal{R}} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mathcal{M}_{\Delta} d\theta$ .

Le solide étant indéformable, *la puissance totale des forces intérieures est nulle* : seules les actions extérieures (forces et couples) interviennent donc dans le théorème de l'énergie cinétique.

Forme instantanée du TÉC

L'équation  $\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R},\text{ext}}$  est ici équivalente à  $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}}$  (donnée par le TMC).

Forme intégrale du TÉC

L'équation  $\Delta E_c(S)_{\mathcal{R}} = \sum W_{\mathcal{R},\text{ext}}$  devient :  $\boxed{\frac{1}{2} J_{\Delta} (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \sum W_{\mathcal{R},\text{ext}}^{i \rightarrow f}}$ .

⇒ **Méthode 15.3. Utiliser le TÉC pour un solide en rotation**

## ■ Comment décrire le mouvement d'un solide ?

### □ Méthode 15.1. Identifier le mouvement d'un solide

En cinématique du solide, dans le cadre du programme, les deux types de mouvements simples à connaître sont la translation et la rotation autour d'un axe fixe. Il convient donc de savoir les identifier, et en particulier de ne pas confondre la rotation avec la translation circulaire.

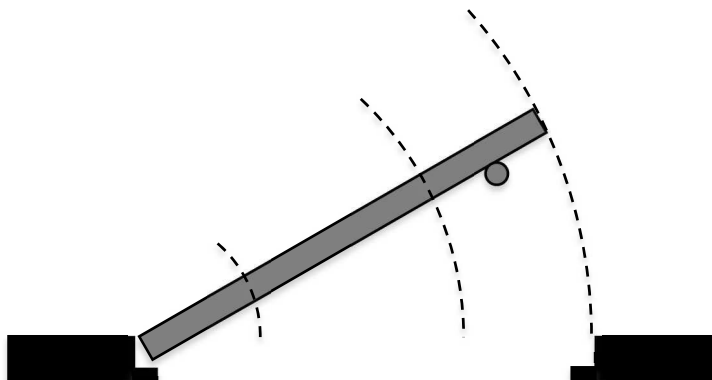
- Choisir deux points quelconques  $A$  et  $B$  du solide et étudier le comportement du vecteur  $\overline{AB}$ .
- Si ce vecteur garde une direction constante au cours du mouvement du solide, alors ce dernier a un mouvement de translation.
- Sinon, le solide n'a pas un mouvement de translation. Il faut alors vérifier qu'il est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe : les trajectoires de  $A$  et  $B$  doivent être des cercles centrés sur un même axe.

⇒ Exercices 15.1, 15.3

- Premier exemple : mouvement d'une porte

Lorsqu'on ouvre une porte, elle effectue un mouvement de rotation autour de l'axe fixe de ses gonds.

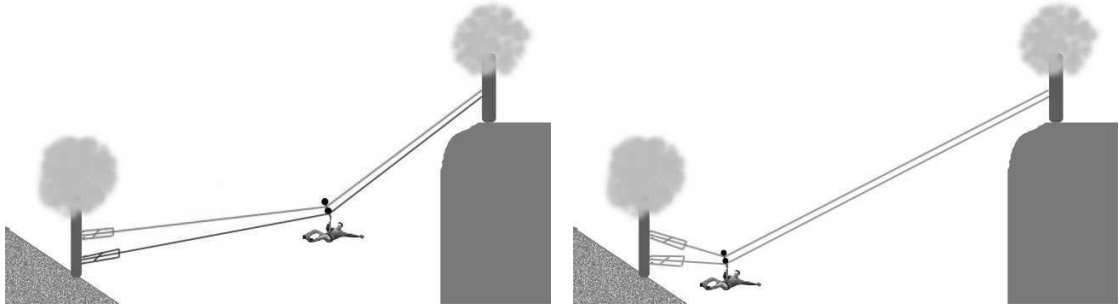
Sur un schéma représentant la porte vue de dessus, le schéma étant dans un plan orthogonal à l'axe des gonds, on constate que chaque point de la porte effectue une trajectoire circulaire dont le centre est sur l'axe.



- Deuxième exemple : tyrolienne

Il s'agit d'une méthode pour franchir un espace vide en étant suspendu(e) à une corde.





Images www.osons.c.la

Dans les différentes positions successives, deux points quelconques de la personne gardent approximativement la même orientation l'un par rapport à l'autre : il s'agit donc d'une translation. La trajectoire décrite par chaque point, quant à elle, n'est ni rectiligne, ni circulaire, c'est une courbe plus complexe : on peut juste parler de translation curviligne.

## ■ Comment étudier le mouvement d'un solide en rotation ?

### □ Méthode 15.2. Utiliser le TMC pour un solide en rotation

Le système étant un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , il a un seul degré de liberté correspondant à l'angle  $\theta$  de rotation autour de  $\Delta$ , dont la dérivée temporelle est la vitesse angulaire  $\omega$ .

L'application du TMC scalaire par rapport à  $\Delta$  donne directement l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par  $\theta$  (ou d'ordre 1 vérifiée par  $\omega$ ).

⇒ Exercice 15.4, 15.5, 15.6, 15.7

#### – Pendule de torsion

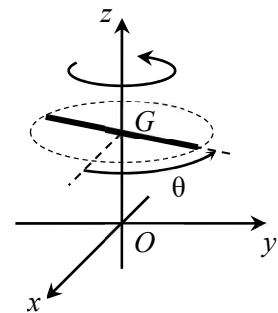
Un pendule de torsion est constitué d'un solide accroché à un fil vertical et pouvant tourner autour de l'axe  $\Delta$  confondu avec le fil.

Le barycentre  $G$  du solide se trouve sur le fil, et on note  $J$  le moment d'inertie du solide par rapport à cet axe. Lorsque l'angle de rotation a une valeur  $\theta$ , le fil exerce sur le solide un couple de torsion de moment  $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C\theta$  ( $C$  étant sa constante de torsion).

Les actions extérieures exercées sur le solide sont donc : le poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , appliqué en  $G$  dont de moment nul par rapport à l'axe ; la réaction vertical du fil (empêchant le solide de tomber), de moment nul pour la même raison ; et le couple de torsion.

$G$  étant immobile (sur le fil), il est inutile d'appliquer le théorème de la quantité de mouvement.

TMC par rapport à  $\Delta$  :  $\frac{dL_{\Delta\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}$  soit  $J\ddot{\theta} = -C\theta$  que l'on peut encore écrire  $\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0$ .

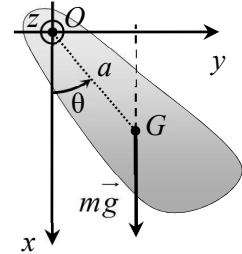


On reconnaît immédiatement l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique, de pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} \text{ et de période } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}.$$

– Pendule pesant

Il est constitué d'un solide  $S$  pouvant tourner librement autour d'un axe horizontal ( $Oz$ ) (liaison pivot parfaite). Son barycentre  $G$  se situe à une distance  $a$  de l'axe, et son moment d'inertie par rapport à ( $Oz$ ) est  $J$ . On cherche à déterminer la période des petites oscillations.



On fait l'inventaire de toutes les actions extérieures exercées sur le pendule, et on calcule leurs moments par rapport à ( $Oz$ ).

Le poids  $m\vec{g}$ , qui s'exerce au barycentre  $G$ , a pour bras de levier  $a\sin\theta$  et son signe est opposé à celui de  $\theta$ , soit  $\mathcal{M}_{(Oz)}(m\vec{g}) = -mga\sin\theta$ . Sur la figure, ce moment est négatif (il a tendance à ramener le solide vers la verticale, donc à la faire tourner dans le sens négatif autour de l'axe). La liaison pivot n'exerce aucun moment, puisque sa résultante coupe l'axe et qu'elle est parfaite donc sans frottement.

TMC pour le pendule par rapport à l'axe ( $Oz$ ) :  $\frac{dL_{(Oz)\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(Oz)}$  soit  $J\ddot{\theta} = -mga\sin\theta$  ou

encore  $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\sin\theta = 0$ . Pour les petits angles ( $\theta \ll 1$ ), on peut faire l'approximation  $\sin\theta \approx \theta$ ,

d'où  $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta = 0$ . On reconnaît alors un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}}$  et

$$\text{de période } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}.$$

**□ Méthode 15.3. Utiliser le TÉC pour un solide en rotation**

L'équation différentielle du mouvement d'un solide, en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , peut également être obtenue par application du théorème de l'énergie cinétique. Dans le cas d'un mouvement sans force non conservative, on peut alors faire apparaître l'intégrale première de l'énergie mécanique.

⇒ Exercice 15.4, 15.10, 15.11, 15.12

Reprenons les deux exemples précédents.

– Pendule de torsion

L'énergie cinétique du solide est  $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ . Le poids et la réaction verticale du fil s'exerçant en  $G$  qui est immobile, leurs puissances sont nulles. La puissance du couple de torsion est  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\text{torsion}}\dot{\theta} = -C\dot{\theta}$ . Enfin le solide étant rigide, il n'y a pas de puissance des forces intérieures.

Théorème de l'énergie cinétique :  $\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -C\theta\dot{\theta} \Leftrightarrow \dot{\theta}(J\ddot{\theta} + C\theta) = 0$ .

On obtient donc la solution particulière  $\dot{\theta} = 0, \forall t$  (équilibre), et l'équation différentielle du mouvement :  $J\ddot{\theta} = -C\theta$ .

On peut aussi intégrer directement l'équation donnée par le théorème :

$J\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2 \right) = 0$  soit  $\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C\theta^2 = \text{cte}$ . C'est l'intégrale première de l'énergie mécanique  $E_c + E_{p \text{ torsion}} = \text{cte}$ .

– Pendule pesant

De même  $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$  et la seule force qui travaille est le poids : sa puissance est

$\mathcal{P}(m\vec{g})_{\mathcal{R}} = m\vec{g} \cdot \vec{v}(G)_{\mathcal{R}} = mg\vec{e}_x \cdot a\dot{\theta}\vec{e}_\theta = -mga\dot{\theta}\sin\theta$ . Théorème de l'énergie cinétique :

$\frac{dE_c(M)_{\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mga\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow \dot{\theta}(J\ddot{\theta} + mga\sin\theta) = 0$ .

Comme précédemment on obtient le cas particulier de l'équilibre, et l'équation différentielle du mouvement :  $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\sin\theta = 0$ .

L'intégration du théorème donne également une intégrale première du mouvement :

$\frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = \text{cte}$ , c'est-à-dire  $E_c + E_{pp} = \text{cte}$ .

## ■ Comment étudier l'équilibre d'un solide ?

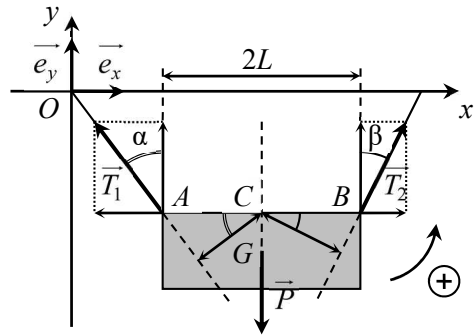
### □ Méthode 15.4. Appliquer le TQM et le TMC à un solide en équilibre

- Le théorème de la quantité de mouvement (TQM) est une loi vectorielle : sa projection sur trois directions de l'espace donne trois équations.
- Le TMC par rapport à un axe est une loi scalaire, donnant une seule équation. Le solide ne tournant pas, on peut appliquer le TMC par rapport à n'importe quel axe : on choisira celui donnant les calculs les plus simples.
- Les deux lois doivent être vérifiées pour que le solide soit à l'équilibre. Cependant, dans beaucoup de cas simples, une ou plusieurs des quatre équations obtenues ne donne(nt) aucune information.

⇒ Exercice 15.6, 15.8, 15.9

Cherchons par exemple à déterminer les normes des tensions des deux fils dans l'exemple ci-contre, où une plaque rectangulaire homogène de masse  $m$  est suspendue en équilibre dans le référentiel terrestre (supposé galiléen). Les fils sont attachés aux deux bords  $A$  et  $B$  de la plaque, faisant des angles  $\alpha$  et  $\beta$  avec la verticale.

On montrera d'autre part que ces deux angles sont nécessairement liés, pour que cette situation (plaque horizontale) soit possible.



Il y a en tout trois forces appliquées à la plaque : son poids,  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$  ; la tension du fil en  $A$ ,  $\vec{T}_1 = -T_1 \sin\alpha \vec{e}_x + T_1 \cos\alpha \vec{e}_y$  ; la tension du fil en  $B$ ,  $\vec{T}_2 = +T_2 \sin\beta \vec{e}_x + T_2 \cos\beta \vec{e}_y$ .

– Première loi de l'équilibre (TQM) :  $\vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$ .

$$\text{Projections sur } \vec{e}_x, \vec{e}_y \text{ et } \vec{e}_z : \begin{cases} -T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = 0 & (1) \\ -mg + T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0 & (2) \\ 0 = 0 & (3) \end{cases}$$

La (3) ne donne aucune information, on a donc deux équations pour les deux inconnues  $T_1$  et  $T_2$ .

Résolution : (1)  $\Leftrightarrow T_2 = T_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$  ; on reporte dans (2), soit  $T_1 \cos\alpha + T_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\beta = mg$  d'où

$$T_1 = \frac{mg \sin\beta}{\cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta} = \frac{mg \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} ; \text{ et finalement } T_2 = \frac{mg \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

– Seconde loi de l'équilibre (TMC) :  $\mathcal{N}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{N}_\Delta(\vec{T}_1) + \mathcal{N}_\Delta(\vec{T}_2) = 0$  par rapport à tout axe  $\Delta$  fixe. Choisissons l'axe  $(Cz)$ , orthogonal au plan de figure, et pour sens positif le sens trigonométrique habituel dans ce plan. Alors  $\mathcal{N}_{(Cz)}(\vec{P}) = 0$  (car  $\vec{P}$  peut être considéré comme s'appliquant au centre de gravité  $G$ , au centre de la plaque, donc son support vertical passe par  $C$ ) ;  $\mathcal{N}_{(Cz)}(\vec{T}_1) = -L \cos\alpha T_1$  ;  $\mathcal{N}_{(Cz)}(\vec{T}_2) = +L \cos\beta T_2$ . L'équation obtenue est donc :

$$-L \cos\alpha T_1 + L \cos\beta T_2 = 0 \text{ soit } -\cos\alpha \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} + \cos\beta \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = 0 . \text{ On en}$$

déduit nécessairement  $\alpha = \beta$ , et les expressions des deux tensions deviennent  $T_1 = T_2 = \frac{mg}{2 \cos\alpha}$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Un solide est en mouvement de translation si tous ses points ont le même vecteur vitesse à chaque instant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Si un solide est en rotation autour d'un axe fixe, alors tous les points du solide ont une trajectoire circulaire de même rayon.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus petit que sa masse est plus concentrée au voisinage de l'axe de rotation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Pour un solide constitué de deux parties, le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie des deux parties.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Une liaison pivot est une liaison sans frottement.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Le bras de levier est la distance entre le point d'application d'une force et l'axe considéré.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le moment d'un couple de torsion est proportionnel à l'angle de torsion.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. La puissance d'un couple est nulle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Le théorème du moment cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Le théorème de l'énergie cinétique pour un solide fait intervenir les forces intérieures.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Cinématique du solide

### □ Exercice 15.1. Grande roue

La petite Gudule monte dans la grande roue de la fête foraine. Elle en profite pour faire le point sur ses connaissances en cinématique du solide.

1. Quel est le mouvement de chaque rayon de la roue ?
2. Quel est le mouvement d'une nacelle ?
3. Ces résultats resteraient-ils vrais si soudain le moteur s'emballait et faisait tourner la roue dix ou vingt fois plus vite ?



### □ Exercice 15.2. Mouvement d'une scie circulaire

Une scie circulaire d'un diamètre de 60 cm tourne à 640 tours par minute.

1. Calculer sa vitesse angulaire.
2. Calculer la vitesse d'une de ses dents, appelée vitesse de coupe. À quelle fréquence devrait tourner la scie pour que la vitesse de coupe soit de  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ?
3. Lorsqu'on coupe le moteur, la scie ralentit uniformément et s'arrête en 6 s. Calculer la valeur absolue de l'accélération angulaire de la scie. On note  $t = 0$  le moment où l'on coupe le moteur. Donner l'expression numérique de la vitesse angulaire de la scie entre  $t = 0$  et  $t = 6 \text{ s}$ .
4. Combien de tours aura effectué la scie durant cette phase d'arrêt ?

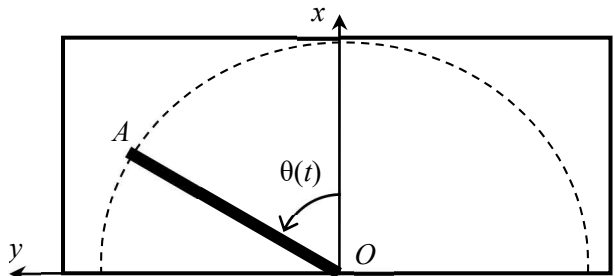


### □ Exercice 15.3. Mouvement d'un essuie-glace \* \*

Toto et son camarade Lulu sont en voiture lorsque la pluie se met à tomber. Toto met donc en route les essuie-glaces. Lulu, scientifique dans l'âme, essaie d'analyser leur mouvement.

Il fait un schéma du problème, note que l'angle entre les deux positions extrêmes du balai unique est de  $160^\circ$  et que le balai effectue 10 allers-retours en 9,0 s. Les deux positions extrêmes sont symétriques par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Enfin, la longueur du balai est  $OA = 60 \text{ cm}$ .

1. Quel est le mouvement du balai ?

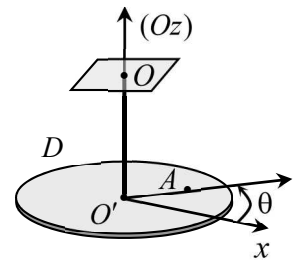


2. On note  $\theta(t)$  la position angulaire, et  $\theta_0$  la position initiale du balai, correspondant à la position extrême, à droite sur le schéma. Lulu fait l'hypothèse que  $\theta(t)$  est une fonction sinusoïdale du temps et que le balai part de sa position  $\theta_0$  à la date  $t=0$  sans vitesse initiale. Donner l'expression numérique de  $\theta(t)$ .
3. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité  $A$  du balai ?
4. Il existe une deuxième « vitesse » pour les essuie-glaces, pour laquelle le temps d'un aller-retour du balai est divisé par deux. Comment seraient affectées  $\theta(t)$  et la vitesse maximale du point  $A$  si cette deuxième vitesse était enclenchée ?
5. Pour mesurer l'efficacité de l'essuie-glace, Lulu définit la vitesse aréolaire comme la surface balayée par unité de temps. Donner l'expression numérique de cette vitesse aréolaire à chaque instant. Quelle est la partie du pare-brise la mieux protégée de la pluie ?

## ■ Application du TMC à un solide en rotation

### □ Exercice 15.4. Pendule de torsion

Un disque  $D$  est accroché par son centre  $O'$  à un fil de torsion vertical  $O'O$  de constante de torsion  $C$ . On note  $J_{Oz}$  le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe vertical  $(Oz)$  confondu avec le fil, orienté vers le haut,  $O$  étant un point fixe du référentiel terrestre. La rotation du disque  $D$  est repérée par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{O'x}, \overrightarrow{O'A})$  où  $A$  est un point fixe du disque, choisi de telle sorte que le fil de torsion ne soit pas tordu lorsque  $\theta = 0$ .



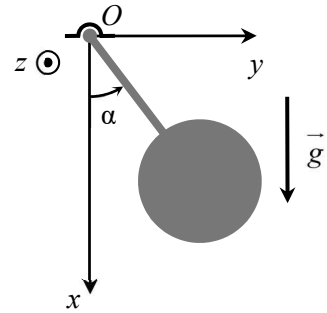
1. Les frottements de l'air sont tout d'abord négligés.
  - a) Préciser le moment en  $O'$  exercé par le fil de torsion sur le disque  $D$  lorsque  $\theta \neq 0$ .
  - b) Montrer que ce couple dérive d'une énergie potentielle quadratique  $E_p$  que l'on exprimera.
2. On abandonne sans vitesse angulaire initiale le disque dans la position  $\theta = \theta_0$ .
  - a) Donner l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de l'angle  $\theta$ . En déduire l'expression de  $\theta$  en fonction du temps ainsi que celle de la pulsation propre  $\omega_0$  du système. Pourquoi parle-t-on d'oscillations harmoniques ?
  - b) Le moment cinétique par rapport à  $O'$  et l'énergie cinétique de  $D$  sont-elles des grandeurs conservatives ? L'énergie mécanique est-elle conservative ? Donner son expression.
3. Les frottements de l'air sont à présent pris en compte, on les modélise par un couple de frottement visqueux qui, en projection sur l'axe de rotation, s'écrit :  $M_{Oz}^{\text{frott}} = -f\dot{\theta}$ , où  $f > 0$ . Par la suite on posera  $f = 2aJ_{Oz}$ .
  - a) Déterminer les dimensions du coefficient  $a$  par analyse dimensionnelle.
  - b) Donner l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de  $\theta$ . L'énergie mécanique du système définie au 2.c se conserve-t-elle ?
  - c) On suppose que les paramètres vérifient  $2a = \omega_0$ . Donner l'expression de  $\theta(t)$ .

*D'après École de l'Air*

### □ Exercice 15.5. Pendule pesant

On considère le pendule ci-contre, capable d'osciller librement autour de l'axe  $(Oz)$  horizontal grâce à une liaison pivot parfaite. Il est constitué d'une barre homogène, de section constante et de masse  $m$ , à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse  $2m$  et de centre  $C$ . L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. La distance  $OG$  entre le point  $O$  et le centre de masse du système est notée  $b$ .

Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe  $(Oz)$  est  $J_{(Oz)} = kmb^2$ ,  $k$  étant un réel positif.



On écarte le pendule d'un angle  $\alpha_0$  par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse initiale à la date  $t=0$ . On étudie son mouvement ultérieur en observant l'angle  $\alpha$  que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant  $(Ox)$ .

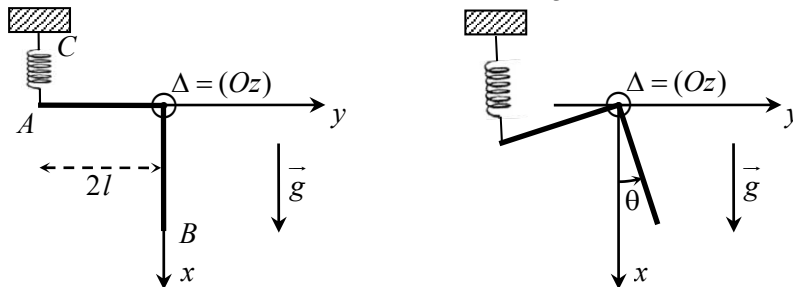
1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit  $\alpha$ .
2. Une mesure expérimentale permet de déterminer la période  $T$  des petites oscillations. Déterminer le coefficient  $k$  en fonction de  $T$ ,  $g$  et  $b$ .

### □ Exercice 15.6. Oscillations d'un solide soumis à une force élastique\*

Un solide  $(S)$  est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre,  $AO$  et  $OB$ , faisant entre elles un angle droit. Chaque tige a pour masse  $m$  et pour longueur  $2l$ .  $(S)$  peut tourner autour d'un axe horizontal  $\Delta = (Oz)$  passant par  $O$ .

La liaison en  $O$  est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur  $k$ , est accroché à l'une de ses extrémités en  $A$ , l'autre extrémité  $C$  étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé vertical et uniforme,  $AO$  est horizontale, et  $OB$  verticale.

On donne le moment d'inertie d'une tige de masse  $m$  et de longueur  $2l$ , par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité :  $I = \frac{4}{3}ml^2$ .



#### 1. Préliminaires

- a) Que vaut le moment d'inertie  $J_\Delta$  de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe  $\Delta$  ?
- b) Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

#### 2. Oscillations

On étudie les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle  $\theta$  restant petit, on considère que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement.



- a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$  et  $l$ .
- b) Calculer la période sachant que  $m = 100 \text{ g}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $k = 12 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

D'après TPE/EIVP

□ **Exercice 15.7. Compétition de toupies\* \***

Madame Michu possède des toupies de forme et de taille identiques, mais faites de trois métaux différents.

Pour faire tourner une toupie, elle exerce pendant une brève durée ( $\tau = 0,10 \text{ s}$ ) un couple de forces avec le pouce et l'index sur sa partie supérieure ; la force exercée par chaque doigt peut être évaluée à  $F = 0,60 \text{ N}$ .

Lorsque la toupie tourne à une vitesse angulaire  $\omega$ , elle est freinée par deux types de frottements :

- les frottements fluides exercés par l'air environnant correspondent à un couple de moment  $\mathcal{M}_{f,\text{air}} = -h \omega$  ;
- les frottements solides exercés par le support se traduisent par un couple de moment  $\mathcal{M}_{f,\text{supp}} = -r N$  où  $N$  est la réaction normale du support.

Les coefficients  $h$  et  $r$  dépendent du traitement de surface des toupies.

Madame Michu essaie d'obtenir le temps de rotation  $T$  le plus long possible ; on suppose qu'une toupie tourne toujours autour d'un axe vertical immobile, mais elle tombe finalement sur le côté quand sa vitesse angulaire devient inférieure à  $\omega_f = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Photo ForeverSpin

On note  $m$  la masse de la toupie,  $J$  son moment d'inertie,  $g$  l'intensité de la pesanteur.

	Acier	Titane	Magnésium
Masse $m$ (g)	28,45	15,91	6,41
Coefficient $h$ (unité SI)	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-9}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$
Coefficient $r$ (unité SI)	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$

Photos ForeverSpin

1. Quelles sont les dimensions et les unités SI des coefficients  $h$  et  $r$  ?
2. Déterminer littéralement la vitesse angulaire  $\omega_0$  obtenue initialement par action des doigts, en supposant que les frottements sont négligeables sur cette phase.

3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\omega(t)$ , à partir du moment où madame Michu lâche la toupie. Donner sa solution et en déduire l'expression de la durée  $T$ .
4. Pour la toupie en acier, indiquer laquelle de ces quatre valeurs correspond au bon ordre de grandeur pour son moment d'inertie  $J$ , en unité SI :  $9,42 \cdot 10^{-7}$  ;  $9,42 \cdot 10^{-4}$  ; 0,942 ; 942. On prendra cette valeur pour la suite. En déduire les valeurs de  $J$  pour les deux autres toupies.
5. Laquelle des trois toupies tourne le plus longtemps ? On prendra  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

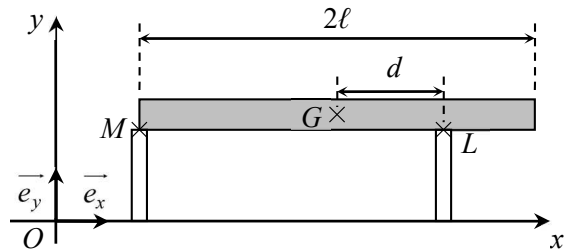
## ■ Application du TMC à un solide en équilibre

### □ Exercice 15.8. Portage d'une poutre

Les deux charpentiers Mario et Luigi portent ensemble une poutre, de longueur  $2\ell = 4,0 \text{ m}$  et de masse  $m = 30 \text{ kg}$ . Mario est à une extrémité  $M$  de la poutre, Luigi étant au point  $L$  à une distance  $d = 1,4 \text{ m}$  du milieu de la poutre. Les deux forces qu'ils exercent sur la poutre sont verticales.

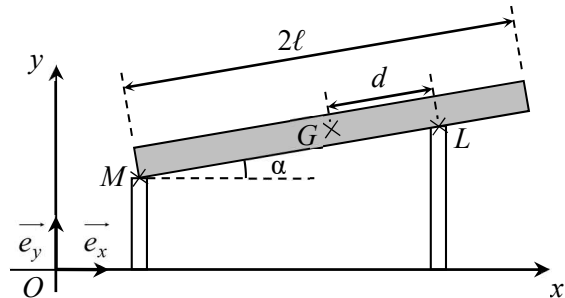
1. On suppose tout d'abord que les deux charpentiers ont la même taille, la poutre étant donc maintenue horizontale.

Déterminer les normes des forces  $\vec{F}_M$  et  $\vec{F}_L$  exercées par les deux charpentiers.



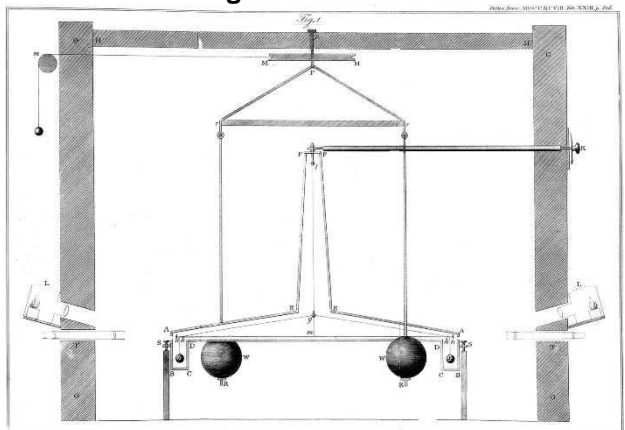
2. En fait Mario est plus petit que Luigi, la poutre faisant alors un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales.

Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.



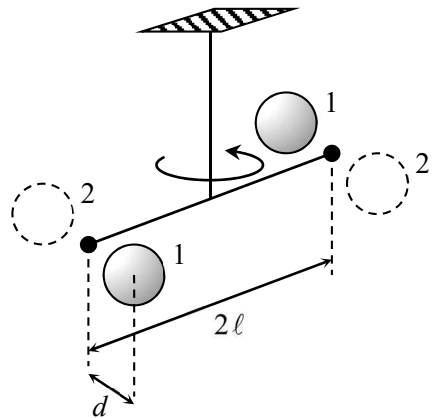
### □ Exercice 15.9. Mesure de la constante de gravitation \*

Le physicien britannique Henry CAVENDISH a réalisé en 1798, sur un dispositif conçu par John MICHELL, une expérience destinée à « peser la Terre », ou plus exactement à déterminer sa masse volumique  $\rho$ . Cette expérience est considérée aujourd'hui comme une détermination de la constante de gravitation  $G$  (apparaissant dans l'expression de la force de gravitation), car celle-ci peut se déduire de  $\rho$  et du champ de pesanteur terrestre  $g$ .



L'expérience utilise un pendule de torsion, consistant en un fléau (tige rigide horizontale de longueur  $2\ell = 1,86 \text{ m}$ , de masse négligeable) suspendu à un fil vertical ; celui-ci, lorsqu'il est tordu d'un angle  $\theta$ , exerce sur le fléau un couple de torsion dont le moment par rapport à l'axe confondu avec le fil vaut  $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C \times \theta$ , avec  $C = 6,79 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

À chaque extrémité du fléau sont placées deux petites sphères de même masse  $m = 730 \text{ g}$ . On approche de chacune d'elle une sphère beaucoup plus grosse, de masse  $M = 158 \text{ kg}$ , la distance entre le centre d'une grosse sphère et celui de la petite sphère la plus proche étant  $d = 22,5 \text{ cm}$ .



Pour chaque grosse sphère, on ne tiendra compte que de son action sur la petite sphère la plus proche. Lorsqu'on fait passer, par un dispositif opératoire non représenté ici, les deux grosses sphères de la position 1 à la position 2, le fléau tourne d'un angle  $2\theta$ .

1. On rappelle que la force attractive de gravitation s'exerçant entre deux sphères de masses  $m_1$  et  $m_2$ , dont les centres sont séparés d'une distance  $r$ , a pour norme  $F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ .

Que devient cette expression si l'une des sphères est la Terre (de rayon  $R_T = 6370 \text{ km}$  et de masse  $M_T$ ) et l'autre une masse  $m$  quelconque au voisinage de la Terre ? En déduire l'expression de la norme du champ de pesanteur  $g$  en fonction de  $G$ ,  $R_T$  et  $M_T$ , puis en fonction de  $G$ ,  $R_T$  et  $\rho$ .

2. L'angle de torsion mesuré dans l'expérience de Cavendish vaut  $2\theta = 8,38 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ . Cet angle étant très faible, on peut considérer que les droites joignant les centres des sphères voisines sont orthogonales au fléau. Déterminer la valeur de la constante de gravitation  $G$ .
3. En déduire la masse volumique de la Terre, sachant que  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

*D'après CCINP*

## ■ Étude énergétique d'un solide en rotation

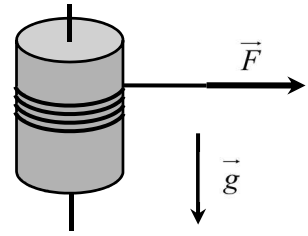
### □ Exercice 15.10. Volant freiné par un couple constant

Un volant tourne autour d'un axe horizontal par rapport auquel son moment d'inertie est  $J$  ; son barycentre est sur l'axe. On schématise le frottement solide par un couple opposé au mouvement, dont le moment vaut en valeur absolue :  $|\mathcal{M}| = \alpha J$  ( $\alpha$  étant un paramètre positif supposé constant).

1. On lance le volant avec une vitesse angulaire initiale  $\omega_0$  : on constate qu'il s'arrête après  $N$  tours. Calculer  $\alpha$ .
2. Comment pourrait-on vérifier expérimentalement que  $\alpha$  est bien constant au cours du mouvement et indépendant de la vitesse angulaire  $\omega$  ?

### □ Exercice 15.11. Toupie lancée avec un fil

Le jeune Toto joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible entouré sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse  $m$  et de rayon  $R$ . Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. Toto enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme  $F$  constante.



On note  $\omega$  la vitesse angulaire instantanée de la toupie.

Toto commence à exercer la force à la date  $t = 0$ , la toupie étant initialement immobile.

1. Exprimer la puissance instantanée de la force  $\vec{F}$ .
2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'accélération angulaire de la toupie.
3. Quelle est la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé (4 tours) ?

### □ Exercice 15.12. Toto le cycliste

Toto roule sur son vélo, à vitesse constante, en ligne droite, sur une route horizontale, à la vitesse de  $36 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Les roues roulent sans glisser sur le sol.

On étudie tout d'abord la rotation d'une des roues par rapport au référentiel lié au cadre du vélo. La roue est assimilable à un cerceau de section négligeable, de masse  $m = 1450 \text{ g}$ , de diamètre  $D = 67 \text{ cm}$ . La masse totale du vélo est  $m_{\text{tot}} = 9100 \text{ g}$ .

1. Si le référentiel terrestre est supposé galiléen, que peut-on dire du référentiel lié au vélo ?
2. Vérifier que la vitesse angulaire de la roue est d'environ  $30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
3. Calculer l'énergie cinétique de rotation de la roue (dans le référentiel lié au vélo).
4. Calculer l'énergie cinétique totale du vélo dans le référentiel terrestre, définie comme la somme des énergies cinétiques de rotation des deux roues et de l'énergie cinétique de translation de l'ensemble du vélo.
5. Toto freine et met une durée  $\Delta t = 5,0 \text{ s}$  à s'arrêter. Calculer la puissance moyenne de la force de freinage.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 15.4.* Question 1.b : écrire le travail élémentaire du couple (qui peut se déduire de la puissance), montrer que cela peut s'écrire  $dE_p = -\delta W$  et intégrer.

*Exercice 15.6.* Les moments des différentes forces peuvent être calculés avec un produit vectoriel puis un produit scalaire, ou bien avec les bras de levier : pour cela faire un schéma détaillé, et faire attention comme toujours à l'expression de la tension du ressort.

*Exercice 15.10.* Le T C sous forme intégrale donne la réponse rapidement, sans avoir à résoudre d'équation différentielle.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	faux	faux

2. Le rayon est plus grand pour les points plus éloignés de l'axe.
4. L'intégrale sur l'ensemble du solide est la somme des intégrales sur les deux sous-ensembles.
5. Elle peut être avec ou sans frottement : dans ce dernier cas elle est dite *parfaite*.
6. C'est la distance entre le *support de la force* et l'axe, qui peut donc être plus petite que la distance entre le point d'application et l'axe (selon la direction de la force).
8. C'est le produit du moment du couple par la vitesse angulaire.
9. Le TMC ne fait jamais intervenir les forces intérieures (de moment total nul).
10. Le TÈC fait intervenir les forces intérieures dans le cas d'un système *déformable* ; mais pour un solide, la puissance totale des forces intérieures est nulle.

### □ Les erreurs classiques

- Pour un solide, l'inventaire des « forces extérieures » est plutôt ici un inventaire des « actions extérieures » : en plus des différentes *forces*, ayant un point d'application défini (poids, tension d'un ressort...), ne pas oublier d'éventuels *couples* (de torsion, de frottement...).
- Dans le calcul du moment d'une force avec le bras de levier, ne pas oublier de déterminer le *signe* de ce moment.
- De même les moments des couples sont souvent donnés en valeur absolue : ne pas oublier d'ajouter le signe en fonction du sens de rotation.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 15.1

1. Chaque point d'un rayon de la roue décrit un cercle centré sur le même axe : les rayons sont en rotation autour d'un axe fixe.
2. Chaque nacelle garde la même orientation dans l'espace au cours du mouvement : elle est en translation circulaire.
3. Si la roue tourne beaucoup plus vite, les rayons sont toujours en rotation. En revanche les nacelles ne peuvent plus garder un mouvement de translation :
  - dans un premier temps elles vont osciller fortement autour de leur axe de suspension (leur mouvement est donc complexe, composé de deux rotations) ;
  - si la grande roue tourne vraiment très vite, on peut arriver à la situation où les nacelles ne tourneraient plus autour de leur propre axe de suspension mais auraient le même mouvement de rotation que l'ensemble de la roue (c'est-à-dire que Gudule se retrouverait la tête en bas chaque fois que sa nacelle est tout en haut de la grande roue).

⇒ Méthode 15.1

## Exercice 15.2

1.  $\omega = \frac{640 \times 2\pi}{60} = 67 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2.  $v = R\omega$ . AN  $v = 20,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Pour avoir une vitesse de coupe de  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , il faudrait une vitesse angulaire de  $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une fréquence de  $\frac{100 \times 60}{2\pi} = 954 \text{ tours/min}$ , soit  $15,9 \text{ Hz}$ .

3. Accélération angulaire :  $\left| \frac{d\omega}{dt} \right| = \alpha_0 = \frac{67}{6} = 11,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ .

On intègre pour obtenir la vitesse angulaire :  $\omega(t) = \omega_0 - \alpha_0 t$ . AN  $\omega(t) = 67 - 11,2t$  avec  $t$  en s.

4. On intègre une nouvelle fois pour obtenir l'équation horaire :  $\theta(t) = \omega_0 t - \frac{\alpha_0}{2} t^2$ . AN  $\theta(t) = 67t - 5,6t^2$  avec  $t$  en s. À la date  $t = 6 \text{ s}$  :  $\theta(6 \text{ s}) = 201 \text{ rad} = 32 \text{ tours}$ .

## Exercice 15.3

1. Le balai est en rotation autour de l'axe fixe ( $Oz$ ), puisque chaque point décrit un cercle de centre  $O$  dans le plan ( $Oxy$ ).

⇒ Méthode 15.1

2. La fonction recherchée est du type  $\theta(t) = A \cos(\omega t + B)$ , avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  étant la période.

Compte tenu des données,  $T = 0,90 \text{ s}$  d'où  $\omega = 7,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales :

$$\theta(0) = A \cos(B) = -60^\circ = -\frac{\pi}{3} \text{ et } \dot{\theta}(0) = -A\omega \sin(B) = 0, \text{ soit } B = 0 \text{ et } A = -\frac{\pi}{3}.$$

Donc  $\theta(t) = -\frac{\pi}{3} \cos(7,0t)$  avec  $t$  en secondes.

**3.** La vitesse de l'extrémité  $A$  est donnée par la relation  $\vec{v}(A) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ , soit  $v(A) = R |\dot{\theta}|$ .

Or  $\dot{\theta}(t) = \frac{7\pi}{3} \sin(7,0t)$ , donc  $v(A) = 1,4\pi |\sin(7,0t)|$ . La valeur maximale correspond au moment

où le balai passe par la position centrale, pour  $\theta = 0$  :  $v(A)_{\max} = 4,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**4.** Si Toto passe la deuxième vitesse, seule la période, et donc le terme  $\omega$ , est changée.

On a  $\omega = 14 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\theta(t) = -\frac{\pi}{3} \cos(14t)$  et  $v(A)_{\max} = 8,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**5.** Pendant une durée  $dt$ , la position angulaire du balai varie de  $d\theta$  et le balai passe sur une surface

$dS = \frac{R^2 d\theta}{2}$ . La vitesse aréolaire est donc

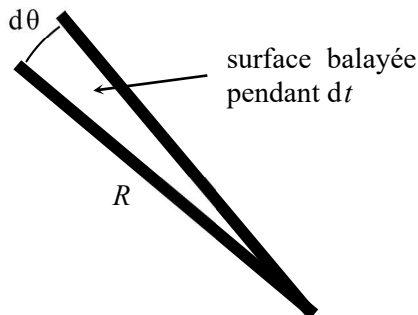
$$\frac{dS}{dt} = \frac{R^2 d\theta}{2 dt} \text{ soit } \frac{dS}{dt} = \frac{R^2 \dot{\theta}}{2}.$$

Numériquement,  $\frac{dS}{dt} = 0,42\pi \sin(7,0t)$ . Cette

grandeur est maximale quand le balai passe par l'axe

$$(Ox) \text{ et } \left( \frac{dS}{dt} \right)_{\max} = 1,3 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

On peut donc en déduire que la partie centrale du pare-brise est mieux protégée de la pluie.



### Exercice 15.4

**1. a)** Le couple de torsion a pour moment par rapport à l'axe :  $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$ .

**b)** Le travail élémentaire  $\delta W$  correspondant à une petite évolution de l'angle  $\theta$  entre  $t$  et  $t + dt$

est obtenu en écrivant la puissance du couple de rappel  $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{Oz} \dot{\theta} = -C\theta \dot{\theta} = \frac{\delta W}{dt}$  soit

$$\delta W = -C\theta d\theta. \text{ On peut alors écrire } dE_p = -\delta W = +C\theta d\theta \text{ d'où } E_p = \frac{1}{2} C\theta^2 (+ \text{cte}).$$

**2. a)** Le moment du poids et celui de la résultante exercée par le fil sur le disque (pour l'empêcher de tomber) sont nuls, puisque ces forces s'exercent parallèlement à l'axe.

Appliquons le théorème du moment cinétique, par rapport à l'axe  $(Oz)$ , au disque :

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = J_{Oz} \ddot{\theta} = -C\theta. \text{ En posant } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_{Oz}}}, \text{ l'équation se met sous la forme : } \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}.$$

⇒ Méthode 15.2

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, c'est-à-dire sinusoïdal : en effet la solution est de la forme  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Les constantes  $A$  et  $B$  se déterminent avec les conditions initiales :  $\theta = \theta_0 = A$ , et  $\dot{\theta} = 0 = B\omega_0$ . Finalement :  $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)}$ .

**b)** On a vu que  $\frac{dL_{Oz}}{dt}$  est non nul, donc le moment cinétique n'est pas conservatif.

De même le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :  $\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F})$ . Le poids et la résultante du fil ont une puissance nulle puisque leur point d'application  $O'$  est immobile ; en revanche le couple de torsion travaille (question 1.b), donc l'énergie cinétique n'est pas conservative.

En revanche, puisque le seul travail reçu par le disque est celui du couple, qui dérive d'une énergie potentielle, l'énergie mécanique est conservative : en effet le TÉC donne  $J_{Oz} \dot{\theta} \ddot{\theta} = -C\theta \dot{\theta}$  soit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C \theta^2 + \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 \right) = 0, \text{ d'où } \boxed{E_m = \frac{1}{2} C \theta^2 + \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 = \text{cte}}.$$

On peut remplacer  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  par leurs expressions en fonction du temps :

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} J_{Oz} \theta_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \text{ soit finalement } \boxed{E_m = \frac{1}{2} C \theta_0^2}.$$

⇒ Méthode 15.3

**3. a)** Équations aux dimensions :  $[a] = \left[ \frac{f}{J} \right]$  avec  $[J] = [M \cdot L^2]$  et  $[f] = \left[ \frac{\mathcal{M}}{\dot{\theta}} \right] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]$

d'où  $\boxed{[a] = [T^{-1}]}$  (inverse d'un temps). Ce sont les mêmes dimensions que la pulsation propre.

**b)** Le théorème du moment cinétique s'écrit maintenant :

$$J_{Oz} \ddot{\theta} = -C\theta - f\dot{\theta} = -C\theta - 2aJ_{Oz}\dot{\theta}, \text{ soit } \boxed{\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}.$$

$$J_{Oz} \dot{\theta} \ddot{\theta} + C\theta \dot{\theta} = -f\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_{Oz} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \right) = -f\dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\mathcal{M}_{Oz}^{\text{frott}}) < 0.$$

Donc l'énergie mécanique ne se conserve pas, elle décroît au cours du temps. On a redémontré ici le théorème de l'énergie mécanique.

**c)** Avec  $\omega_0 = 2a$ , l'équation différentielle devient :  $\ddot{\theta} + \omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ .

Équation caractéristique :  $r^2 + \omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ .  $\Delta = -3\omega_0^2 < 0$  d'où les racines complexes conjuguées :  $r = -\frac{\omega_0}{2} \pm i \frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2}$ . La solution générale est donc de la forme :

$$\theta(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2}\right) \left[ A \cos\left(\frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2} t\right) + B \sin\left(\frac{\omega_0 \sqrt{3}}{2} t\right) \right].$$



Conditions initiales :  $\theta = \theta_0 = A$  et  $\dot{\theta} = 0 = -\frac{\omega_0}{2}A + B\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}$  d'où  $B = \frac{\theta_0}{\sqrt{3}}$ . Finalement :

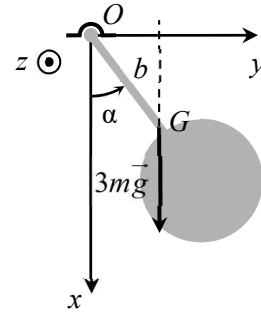
$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

⇒ Méthode 5.4

### Exercice 15.5

1. On fait l'inventaire de toutes les actions extérieures exercées sur le pendule, et on calcule leurs moments par rapport à  $(Oz)$  :

- le poids  $3m\vec{g}$ , qui s'exerce au barycentre  $G$ , a pour bras de levier  $b\sin\alpha$  et son signe est opposé à celui de  $\alpha$ , soit  $\mathcal{M}_{(Oz)}(m\vec{g}) = -3mgb\sin\alpha$  ;
- la liaison pivot n'exerce aucun moment, puisque sa résultante coupe l'axe et qu'elle est parfaite donc sans frottement.



On applique le TMC pour le pendule par rapport à l'axe  $(Oz)$  :  $\frac{dL_{(Oz)\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(Oz)}$  soit  $J_{(Oz)}\ddot{\alpha} = -3mgb\sin\alpha$ .

Avec l'expression  $J_{(Oz)} = kmb^2$  on obtient l'équation différentielle :  $\ddot{\alpha} + \frac{3g}{kb}\sin\alpha = 0$ .

⇒ Méthode 15.2

2. Si  $\alpha$  reste faible, on peut linéariser l'équation :  $\ddot{\alpha} + \frac{3g}{kb}\alpha = 0$ . On reconnaît une équation différentielle caractéristique d'un oscillateur harmonique, de mouvement sinusoïdal de période  $T = 2\pi\sqrt{\frac{kb}{3g}}$ . Par identification, on obtient  $k = \frac{3gT^2}{4\pi^2b}$ .

### Exercice 15.6

1. a) Le moment d'inertie s'obtient en faisant une somme sur tous les points du solide. Il est donc la somme des moments des deux tiges par rapport au même axe :

$$J_{\Delta} = 2I = \frac{8}{3}ml^2$$

b) Faisons l'inventaire des actions extérieures auxquelles est soumis le solide, et déterminons leurs moments par rapport à  $\Delta$  :

- la réaction de la liaison pivot s'exerce en  $O$  donc coupe l'axe, son moment est nul, et de plus il n'y a pas de couple de frottement (liaison parfaite) ;
- le poids de la tige  $OA$  s'exerce au milieu de  $OA$ , son bras de levier est  $l$ , et il a tendance à faire tourner le solide dans le sens positif, donc  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_A) = +mgl$  ;
- le poids de la tige  $OB$  s'exerce au milieu de  $OB$ , son support coupe l'axe donc son moment est nul ;

– la tension du ressort  $\vec{T} = -k(L_{\text{éq}} - L_0)\vec{e}_x$  a pour bras de levier  $2l$  et fait tourner dans le sens négatif si  $L_{\text{éq}} > L_0$ , donc  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = -k(L_{\text{éq}} - L_0)2l$ .

*✎ On aurait pu aussi calculer ces moments avec le produit vectoriel puis la projection sur l'axe : le calcul est plus long mais il évite d'avoir à regarder en détails le schéma.*

TMC pour le solide à l'équilibre :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_A) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0 \Leftrightarrow +mgl - k(L_{\text{éq}} - L_0)2l = 0 \text{ d'où on tire } \boxed{L_{\text{éq}} = L_0 + \frac{mg}{2k}}.$$

⇒ Méthode 15.4

**2. a)** On recalcule les moments :

– toujours aucun moment de la liaison pivot ;

– le poids de la tige  $OA$  a pour bras de levier  $l \cos \theta$ , donc  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_A) = +mgl \cos \theta$  ;

– le poids de la tige  $OB$  a pour bras de levier  $l |\sin \theta|$ , et il est négatif quand  $\theta$  est positif, donc  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_B) = -mgl \sin \theta$  ;

– la tension a pour bras de levier  $2l \cos \theta$ , donc  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = -2kl(L - L_0) \cos \theta$  avec  $L = L_{\text{éq}} + 2l \sin \theta$ , soit  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = -2kl(L_{\text{éq}} + 2l \sin \theta - L_0) \cos \theta$ .

$$\text{TMC : } \frac{dL_{\Delta\mathcal{R}}}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta \Leftrightarrow J_\Delta \ddot{\theta} = +mgl \cos \theta - 2kl(L_{\text{éq}} + 2l \sin \theta - L_0) \cos \theta - mgl \sin \theta.$$

Pour  $\theta \ll 1$  :  $\cos \theta \approx 1$  et  $\sin \theta \approx \theta$  donc l'équation peut s'écrire :  $J_\Delta \ddot{\theta} = +mgl - 2kl(L_{\text{éq}} + 2l\theta - L_0) - mgl\theta = -4kl^2\theta - mgl\theta$  (la somme des constantes est nulle)

d'où finalement l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :  $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{4kl^2 + mgl}{J_\Delta} \theta = 0}$ .

$$\text{La période est } T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{4kl^2 + mgl}} \text{ soit } \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{8ml}{12kl + 3mg}}}.$$

⇒ Méthode 15.2

**b)** AN  $\boxed{T = 0,43 \text{ s}}$ .

### Exercice 15.7

**1.** Le moment d'une force ou d'un couple a la dimension d'une force multipliée par une longueur, soit  $[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$ . Donc d'après la formule  $\mathcal{M}_{f,\text{supp}} = -rN$ ,  $\boxed{[r] = [L]}$ , unité SI :  $\boxed{m}$  (mètre). Et

d'après la formule  $\mathcal{M}_{f,\text{air}} = -h\omega$ ,  $\boxed{[h] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]}$ , unité SI :  $\boxed{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$ .

**2.** Sur cette phase de démarrage, la toupie est soumise à son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ , à la réaction du support  $\vec{R} = N\vec{e}_z [+T]$ , et au couple exercé par madame Michu, de moment  $\mathcal{M} = d \times F$ . Pour

évaluer la vitesse de rotation acquise après la durée  $\tau$ , on applique le théorème du moment cinétique à la toupie :  $\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{R}) + \mathcal{M}$ .

Les forces  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  ont des moments nuls puisque leurs points d'application sont sur l'axe de rotation ; et  $L_{(Oz)} = J\omega$ . Donc  $J\frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M} = dF \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{dF}{J} = \text{cte}$ . L'intégration sur la durée  $\tau$

donne  $\boxed{\omega_0 = \frac{dF}{J} \tau}$ .

$\Rightarrow$  Méthode 15.2

**3.** Les actions extérieures sont maintenant  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\mathcal{M}_{f,\text{supp}}$  et  $\mathcal{M}_{f,\text{air}}$ . On applique tout d'abord le théorème de la quantité de mouvement, permettant de trouver la réaction normale et ainsi d'exprimer le moment de frottement. Puisque le barycentre de la toupie est immobile :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$  d'où en projection sur la verticale :  $N = mg$ .

On applique ensuite à nouveau le TMC :  $\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = 0 + 0 + \mathcal{M}_{f,\text{supp}} + \mathcal{M}_{f,\text{air}} \Leftrightarrow J\frac{d\omega}{dt} = -h\omega - rmg$

$\Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{h}{J}\omega = -\frac{rmg}{J}$ . Solution générale :  $\omega(t) = A \exp\left(-\frac{h}{J}t\right) - \frac{rmg}{h}$ .

Si on prend  $t=0$  lorsque  $\omega = \omega_0$  :  $\omega_0 = A - \frac{rmg}{h}$  donc  $A = \omega_0 + \frac{rmg}{h}$  et finalement

$\boxed{\omega(t) = \left(\omega_0 + \frac{rmg}{h}\right) \exp\left(-\frac{h}{J}t\right) - \frac{rmg}{h}}$ .

Cette solution reste valable tant que la toupie tourne, c'est-à-dire d'après l'énoncé jusqu'à l'instant  $T$  où  $\omega(T) = \omega_f$ , donc  $\boxed{T = \frac{J}{h} \ln \frac{\omega_0 + rmg/h}{\omega_f + rmg/h}}$ .

**4.** Pour un objet tournant de masse  $m$  et de rayon  $R$ , le moment d'inertie est toujours de la forme  $kmR^2$  où  $k$  est un coefficient sans dimension dépendant de la forme de l'objet (1/2 pour un cylindre, 2/5 pour une boule... et d'une façon générale un coefficient plus petit quand la masse est plus concentrée près de l'axe). Le calcul de  $mR^2$  donne ici  $5,54 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , et on doit trouver une valeur plus petite, donc la bonne valeur est  $\boxed{J_{\text{acier}} = 9,42 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$ , et le coefficient est  $k = 0,170$ . On calcule alors de même  $J = kmR^2$  pour les deux autres métaux :

$\boxed{J_{\text{titane}} = 5,27 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$  et  $\boxed{J_{\text{magnésium}} = 2,12 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$ .

**5.** La combinaison des formules précédentes donne :  $\boxed{T = \frac{J}{h} \ln \frac{dF\tau/J + rmg/h}{\omega_f + rmg/h}}$

AN  $\boxed{T_{\text{acier}} = 45 \text{ s}}$  ;  $\boxed{T_{\text{titane}} = 23 \text{ s}}$  ;  $\boxed{T_{\text{magnésium}} = 77 \text{ s}}$ . La toupie de magnésium est gagnante !

### Exercice 15.8

1. Il y a en tout trois forces appliquées à la poutre : son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$  ; la force de Mario  $\vec{F}_M = +F_M\vec{e}_y$  ; la force de Luigi  $\vec{F}_L = +F_L\vec{e}_y$ .

– Théorème de la quantité de mouvement à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{F}_M + \vec{F}_L = \vec{0}$ .

$$\text{Projections sur } \vec{e}_x, \vec{e}_y \text{ et } \vec{e}_z : \begin{cases} 0 = 0 \\ -mg + F_M + F_L = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Deux d'entre elles ne donnent aucune information, on a donc une seule équation pour les deux inconnues  $F_M$  et  $F_L$ .

– TMC à l'équilibre :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_M) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_L) = 0$  par rapport à tout axe  $\Delta$  fixe. Choisissons par exemple l'axe  $(Mz)$ , orthogonal au plan de figure, et pour sens positif le sens trigonométrique habituel dans ce plan.

Alors  $\mathcal{M}_{(Mz)}(\vec{P}) = -\ell mg$  (car  $\vec{P}$  peut être considéré comme s'appliquant au centre de gravité  $G$ , au centre de la poutre, donc son support vertical est à la distance  $\ell$  de  $M$ ) ;  $\mathcal{M}_{(Mz)}(\vec{F}_M) = 0$  puisque  $\vec{F}_M$  s'applique en  $M$  (donc son support coupe l'axe) ;  $\mathcal{M}_{(Mz)}(\vec{F}_L) = +(\ell + d)F_L$ . L'équation obtenue est donc  $-\ell mg + (\ell + d)F_L = 0$ , qui donne directement  $F_L = mg \frac{\ell}{\ell + d}$ . La résolution de

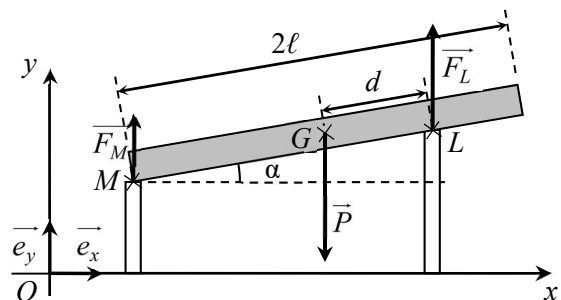
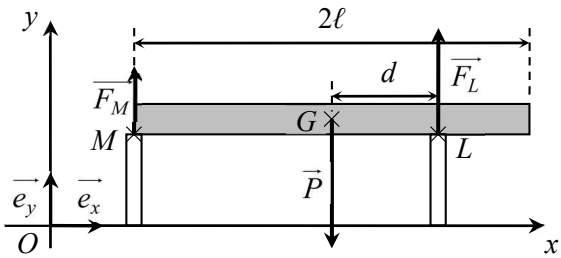
l'autre équation donne alors  $F_M = mg \frac{d}{\ell + d}$ . AN  $F_L = 170 \text{ N}$  et  $F_M = 120 \text{ N}$ .

⇒ Méthode 15.4

✎ Si on avait appliqué le TMC par rapport à l'axe  $(Lz)$ , on aurait trouvé d'abord  $F_M$  puis  $F_L$ . Si on l'avait appliqué par rapport à  $(Gz)$ , on aurait obtenu une seconde relation entre  $F_M$  et  $F_L$ , puis résolu le système de deux équations à deux inconnues.

2. Les expressions des forces sont toujours les mêmes, donc la première loi de l'équilibre donne toujours la même équation :  $F_M + F_L = mg$ .

Calculons à nouveau les moments des forces par rapport à l'axe  $(Mz)$ .



Alors  $\mathcal{M}_{(M_2)}(\vec{P}) = -\ell \cos \alpha mg$  (le bras de levier étant maintenant  $\ell \cos \alpha$ );  $\mathcal{M}_{(M_2)}(\vec{F}_M) = 0$  comme précédemment;  $\mathcal{M}_{(M_2)}(\vec{F}_L) = +(\ell + d) \cos \alpha F_L$ . L'équation obtenue est donc  $-\ell \cos \alpha mg + (\ell + d) \cos \alpha F_L = 0$ , ce qui redonne  $F_L = mg \frac{\ell}{\ell + d}$  et  $F_M = mg \frac{d}{\ell + d}$ .

L'inclinaison de la poutre ne change donc rien à la force totale, ni à la répartition entre les forces exercées par les deux personnes.

### Exercice 15.9

1. Dans le cas d'une masse  $m$  au voisinage de la Terre :  $F_g = G \frac{M_T m}{R_T^2}$ . Par identification avec le

poids  $mg$ , on obtient  $g = G \frac{M_T}{R_T^2}$ . De plus  $M_T = \rho \frac{4}{3} \pi R_T^3$ , d'où  $g = \frac{4}{3} G \pi \rho R_T$ .

2. Le solide formé par le fléau et les deux petites sphères est soumis aux forces suivantes : le poids des deux sphères (celui du fléau étant négligé) ; la tension du fil de suspension ; les forces gravitationnelles exercées par chaque grosse sphère sur la petite sphère voisine ; auxquelles on doit ajouter le couple de torsion.

On applique le TMC à l'équilibre, par rapport à l'axe  $\Delta$  confondu avec le fil :  $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = 0$ .

Les deux poids et la tension du fil sont parallèles à cet axe, donc leurs moments sont nuls.

Pour chaque force gravitationnelle, dirigée selon les centres des deux sphères voisines donc orthogonale au fléau, le bras de levier est  $\ell$  donc le moment vaut  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_g) = \ell \times G \frac{M m}{d^2}$ .

Enfin le fléau tourne de  $2\theta$  lorsque les sphères passent de la position 1 à la position 2, ce qui signifie que le fil est tordu d'un angle  $\theta$  dans chacune des positions : le moment du couple de torsion vaut alors  $\mathcal{M}_{\text{torsion}} = -C \times \theta$ .

Donc  $2 \times \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_g) + \mathcal{M}_{\text{torsion}} = 0 \Leftrightarrow 2 \ell G \frac{M m}{d^2} - C \theta = 0$  d'où  $G = \frac{C \theta d^2}{2 \ell M m}$ .

AN  $G = 6,71 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

$\Rightarrow$  Méthode 15.4

*✎ Si on applique le théorème de la quantité de mouvement à l'équilibre, ses deux projections horizontales ne donnent aucune information, et sa projection verticale permet de déterminer la tension du fil, qui n'était pas demandée ici.*

3. D'après la formule de la question 1 :  $\rho = \frac{3g}{4G\pi R_T}$ . AN  $\rho = 5,48 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

*✎ Dans son article de 1798, Cavendish indique comme résultat une « densité » de  $5,48 \pm 0,38$ , soit  $\rho = (5,48 \pm 0,38) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , en faisant une statistique sur 23 mesures. La valeur admise aujourd'hui est une masse volumique moyenne  $\rho = 5,51 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , qui est bien dans l'intervalle d'incertitude de Cavendish.*

### Exercice 15.10

1. La seule action de moment non nul est celle des frottements, puisque le poids et la réaction s'exercent sur l'axe. Notons  $W$  son travail total entre le lancement et l'arrêt.

Théorème de l'énergie cinétique :  $E_{c(f)} - E_{c(i)} = W$  soit  $-\frac{1}{2}J\omega_0^2 = W$ . Or la puissance du couple

de frottement est  $\mathcal{P} = \mathcal{M}\omega = -\alpha J\omega = -\alpha J\dot{\theta}$  donc son travail entre  $\theta=0$  et  $\theta=2N\pi$  vaut :

$$W = -\int_i^f \alpha J \dot{\theta} dt = -\alpha J \int_0^{2\pi N} d\theta = -2\pi N \alpha J. \text{ Donc } \frac{1}{2}J\omega_0^2 = 2\pi N \alpha J \text{ d'où } \alpha = \frac{\omega_0^2}{4\pi N}.$$

⇒ Méthode 15.3

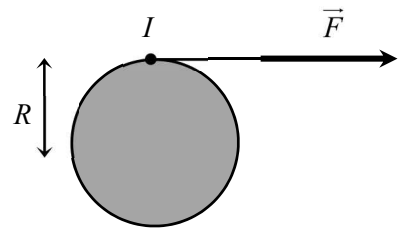
2. L'intégration précédente n'est valable que si  $\alpha$  est une constante : la formule montre alors que le nombre total de tours est proportionnel au carré de la vitesse angulaire initiale. Pour tester cette hypothèse, il suffit de lancer le volant avec différentes valeurs de la vitesse angulaire initiale. Par exemple si on le lance deux fois plus vite, il doit effectuer quatre fois plus de tours. Si ce n'est pas le cas, le modèle est incorrect.

### Exercice 15.11

1. La force  $\vec{F}$  s'exerce sur un point de la corde, ayant la même vitesse que le point  $I$  de la périphérie du cylindre.

La puissance de cette force est donc

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(I) = FR\omega.$$



2. La toupie est soumise à :

- son poids, qui ne travaille pas (altitude constante) ;
- la réaction du sol qui ne travaille pas (son point d'application ne se déplaçant pas) ;
- la force  $\vec{F}$  exercée par Toto.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :  $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F})$ . Or  $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta \omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2$ , donc

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\omega\dot{\omega}. \text{ Le T C donne donc } \frac{1}{2}mR^2\omega\dot{\omega} = FR\omega \text{ d'où } \dot{\omega} = \frac{2F}{mR} = \text{cte}.$$

La vitesse angulaire de la toupie augmente donc proportionnellement au temps, pendant toute la durée où Toto tire sur la corde.

⇒ Méthode 15.3

3. On peut utiliser le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial et l'instant final ou

tout le fil a été déroulé :  $E_{c(f)} - E_{c(i)} = W(\vec{F})_{i \rightarrow f}$  soit  $\frac{1}{2}J_\Delta \omega_f^2 - 0 = 4 \times 2\pi R \times F$ .

On en déduit 
$$\omega_f = \sqrt{\frac{16\pi RF}{J}} = \sqrt{\frac{32\pi F}{mR}}.$$

### Exercice 15.12

1. Le référentiel du vélo est galiléen puisqu'il est en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel terrestre, lui-même galiléen.

2. Chaque fois que la roue effectue 1 tour (soit un angle de  $2\pi$ ), le vélo avance d'une distance

$2\pi R$ . Donc  $v = \frac{2\pi R}{T} = R\omega$  et  $\omega = \frac{v}{R} = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3.  $E_{c(\text{roue/vélo})} = \frac{1}{2} J \omega^2$  avec  $J = mR^2$ . Donc  $E_{c(\text{roue/vélo})} = \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mv^2 = 72,5 \text{ J}$ .

4.  $E_{c(\text{totale})} = 2E_{c(\text{roue/vélo})} + E_{c(\text{translation})} = mv^2 + \frac{1}{2} m_{\text{tot}} v^2$ . AN  $E_{c(\text{totale})} = 600 \text{ J}$ .

5. Si on suppose que la force de freinage est constante, d'après le théorème de l'énergie

cinétique :  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt} = \frac{\Delta E_c}{\Delta t} = \frac{-E_{c(\text{totale})}}{\Delta t}$ . AN  $\mathcal{P}(\vec{F}) = -120 \text{ W}$ .

⇒ Méthode 15.3

# Description d'un système thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



Après une passion pour les mathématiques, **William THOMSON** (1824-1907), se tourne vers la physique, d'abord l'électricité puis la thermodynamique dont il énonce en 1850 le deuxième principe, indépendamment de Rudolf **CLAUSIUS**. Passionné de tout, il décrit les vagues du sillage d'un navire, étudie les marées, invente le galvanomètre à cadre mobile. Il est aussi connu sous le nom de **LORD KELVIN** suite à son anoblissement, nom qui est donné à l'échelle de température qu'il a introduite.

## ■ Un peu d'histoire

En 1846, William THOMSON consulte par hasard un article de **CLAPEYRON** dans lequel celui-ci présente un diagramme représentant un cycle de **CARNOT** idéal. Le jeune physicien écossais est séduit par la logique de cette présentation, qui lui inspire l'échelle de température absolue.

Faute d'avoir été publiés, les travaux de **CARNOT** sur la conservation de l'énergie étaient inconnus de James **JOULE** en 1840 lorsque le savant anglais expérimente les effets calorifiques du passage d'un courant dans un circuit ; il en déduit que la chaleur produite par unité de temps est proportionnelle au carré de l'intensité du courant. Peu après, en 1847, **HELMHOLTZ** présente un mémoire dans lequel il énonce le principe de conservation de l'énergie. En 1850, Rudolf **CLAUSIUS** démontre que la production d'énergie mécanique correspond à la destruction de la même quantité de chaleur.



## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différentes échelles de description d'un système
- ▷ La définition d'un système ouvert, fermé ou isolé
- ▷ Les propriétés respectives des grandeurs extensives et intensives
- ▷ La notion d'équilibre thermodynamique
- ▷ Les hypothèses du modèle du gaz parfait et son équation d'état
- ▷ L'équation d'état d'une phase condensée idéale
- ▷ Le diagramme d'équilibre  $(P, T)$ , le point triple et le point critique
- ▷ Le diagramme de Clapeyron  $(P, v)$  pour l'équilibre liquide/gaz

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Utiliser un modèle unidirectionnel pour justifier l'expression de la pression cinétique
- ▷ Calculer une pression à partir d'une condition d'équilibre mécanique, déduire une température d'une condition d'équilibre thermique
- ▷ Retrouver la loi d'évolution de la pression cinétique et l'expression de la vitesse quadratique moyenne en fonction des autres variables d'état
- ▷ Comparer le comportement d'un gaz réel au modèle du gaz parfait
- ▷ Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point du diagramme de Clapeyron  $(P, v)$
- ▷ Interpréter des propriétés de gaz ou de liquides à partir de réseaux d'isothermes expérimentales
- ▷ Déterminer la composition finale d'un système à l'issue d'une vaporisation

## ■ Différentes échelles de description d'un système

### □ Libre parcours moyen

Dans un solide, les atomes vibrent légèrement autour de positions fixes. Dans un fluide (liquide ou gaz), les molécules sont libres de se déplacer. On appelle **libre parcours moyen**  $\ell_p$  la distance moyenne parcourue par les molécules d'un fluide entre deux chocs successifs. Dans un liquide,  $\ell_p$  est de l'ordre du diamètre moléculaire, soit  $\ell_p \sim 10^{-10}$  m. Dans un gaz à pression et température ambiante, il est de plusieurs centaines de fois leur taille, soit  $\ell_p \sim 10^{-7}$  m.

### □ Échelles microscopique, macroscopique et mésoscopique

- Une longueur de l'ordre du libre parcours moyen  $\ell_p$  caractérise l'échelle **microscopique**. Un volume de l'ordre de  $\ell_p^3$  ne contient que quelques molécules ; celles-ci entrant et sortant sans cesse du volume, leur nombre présente de fortes fluctuations relatives.
- L'échelle **macroscopique** correspond à la taille  $L$  des objets de notre quotidien ( $L \sim 10^{-2}$  à 1 m). Un volume de l'ordre de  $L^3$  contient un nombre de molécules de l'ordre du nombre d'Avogadro ( $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ).
- L'échelle **mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre les deux précédentes, soit  $\ell_p \ll l \ll L$ . Un volume  $d\tau$  de l'ordre de  $\ell^3$  est assez petit à l'échelle macroscopique pour pouvoir être considéré comme quasi ponctuel, mais il contient assez de molécules pour que leur nombre ait des fluctuations faibles : la notion de moyenne statistique a un sens à cette échelle.

### □ Système thermodynamique

On appelle **système** une portion de matière séparée du **milieu extérieur** par une frontière (fictive ou matérielle). La réunion du système et de son milieu extérieur constitue l'**Univers**. Si le système est constitué d'un trop grand nombre de particules pour qu'une description microscopique de celui-ci soit envisageable, il est qualifié de **thermodynamique**.

En fonction de la nature des échanges entre le système et le milieu extérieur, on distingue :

- les systèmes **isolés** qui n'échangent ni matière ni énergie avec le milieu extérieur ;
- les systèmes **fermés** qui échangent de l'énergie mais pas de matière avec le milieu extérieur ;
- les systèmes **ouverts** qui échangent matière et énergie avec le milieu extérieur.

### □ État microscopique et état macroscopique

- On peut imaginer caractériser un système par l'état individuel de tous ses constituants : position et quantité de mouvement de chaque particule dans un formalisme classique, nombres quantiques dans un formalisme quantique. On parle alors d'**état microscopique** (ou **microétat**).
- Le système peut aussi être décrit à l'aide de grandeurs accessibles à notre échelle (voir paragraphe suivant). On parle alors d'**état macroscopique** (ou **macroétat**).
- À un macroétat donné correspond en général un grand nombre de microétats.

## ■ Grandeurs d'état et équilibre thermodynamique

### □ Grandeurs d'état

Les propriétés à notre échelle d'un système thermodynamique peuvent être décrites à l'aide d'un petit nombre de grandeurs macroscopiques, appelées **grandeurs d'état**. Pour les gaz, les liquides et les solides, on utilise fréquemment :

- la **quantité de matière**  $n$ , dont l'unité SI est la mole (mol) ;
- la **pression**  $P$ , dont l'unité SI est le pascal (Pa) ;
- le **volume**  $V$ , dont l'unité SI est le mètre cube ( $\text{m}^3$ ) ;
- la **température** (absolue)  $T$ , dont l'unité SI est le kelvin (K).

La température Celsius  $\theta$ , en degrés Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ), est définie par  $\theta = T - T_0$  avec  $T_0 = 273,15 \text{ K}$ .

### □ Variables, fonctions et équation d'état

Les grandeurs d'état indépendantes, et en nombre suffisant, choisies pour décrire l'état macroscopique d'un système sont appelées **variables d'état** ; les autres grandeurs d'état, exprimées en fonction des variables d'état, sont alors qualifiées de **fonctions d'état**.

Pour un corps pur de quantité  $n$  fixée, on choisira deux variables d'état parmi  $P$ ,  $V$  et  $T$ , et la troisième leur est liée par une **équation d'état**.

⇒ **Méthode 16.1. Passer de l'équation d'état molaire à l'équation d'état extensive**

### □ Extensivité ou intensivité des grandeurs d'état

– Une grandeur **extensive** est relative à un système entier, elle constitue un stock contenu dans le système. Elle est additive lors de la réunion de deux systèmes. Exemples : quantité de matière, volume, masse...

– Une grandeur **intensive** est définie en chaque point  $M$  d'un système, elle décrit une propriété locale. Exemples : pression, température, concentration...

Un système dont les grandeurs intensives ont même valeur en tout point est dit **homogène**.

– Le rapport de deux grandeurs extensives (éventuellement sous la forme d'une dérivée) est une grandeur intensive.

### □ Équilibre thermodynamique

Un système est en **équilibre thermodynamique** lorsque ses variables d'état sont définies et constantes au cours du temps et que tout échange de matière et d'énergie avec le milieu extérieur a cessé. L'existence d'un état d'équilibre thermodynamique impose notamment la valeur de certaines variables d'état :

– en présence d'une paroi mobile ou déformable, égalité des pressions  $P$  à l'intérieur et  $P_{\text{ext}}$  à la frontière extérieure du système (**équilibre mécanique**) ;

– en présence d'une paroi diatherme, égalité des températures  $T$  à l'intérieur et  $T_{\text{ext}}$  à l'extérieur du système (**équilibre thermique**).

L'équilibre mécanique est généralement atteint plus rapidement que l'équilibre thermique.

Hors équilibre, les grandeurs d'état ne sont pas forcément toutes définies.

## ■ Gaz parfait

### □ Hypothèses microscopiques du modèle du gaz parfait

À l'échelle microscopique, un gaz est considéré comme parfait quand on peut négliger les interactions entre ses molécules. En distinguant les interactions à courte et longue portée, on obtient le jeu d'hypothèses suivant :

- les particules n'ont pas de volume propre ;
- les particules n'ont pas d'interactions attractives entre elles.

### □ Théorie cinétique du gaz parfait monoatomique

Hypothèses sur la distribution moléculaire et la distribution des vitesses

- La densité moléculaire  $n^* = N/V$  est homogène ( $N$  particules contenues dans le volume  $V$ ).
- La distribution des vitesses est homogène et isotrope.

Pression cinétique

$$P = \frac{1}{3} n^* m u^2 \quad \text{où } u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \text{ est la vitesse quadratique moyenne des particules de masse } m.$$

⇒ **Méthode 16.2.** Établir l'expression de la pression cinétique

Température cinétique

Elle est définie à partir de l'énergie cinétique moyenne de translation d'une molécule :

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

d'où l'expression de la vitesse quadratique moyenne :  $u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

avec  $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante de Boltzmann,  $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  la constante d'Avogadro et  $R = k_B \mathcal{N}_A = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

### □ Équation d'état

L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit  $PV = nRT$ . Elle découle directement de la relation  $P = n^* k_B T$  obtenue dans le cadre de la théorie cinétique.

## ■ Autres corps

### □ Gaz réel

Pour de faibles valeurs de la pression  $P$  ou de la concentration  $n/V$ , le produit  $PV$  pour tout gaz réel tend vers la valeur prédite par l'équation des gaz parfaits :  $PV \xrightarrow{P \rightarrow 0 \text{ ou } n/V \rightarrow 0} nRT$ .

### □ Phase condensée

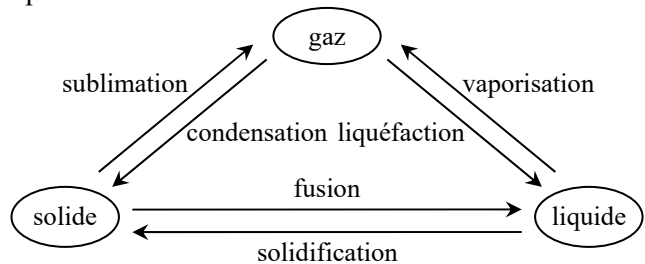
On désigne par **phase condensée** un liquide ou un solide. Dans le modèle de la phase condensée incompressible et indilatable, ou **phase condensée idéale**, leur équation d'état est :  $V = \text{cte}$ .

## ■ Corps pur diphasé

### □ Phases, transitions de phase et équilibre

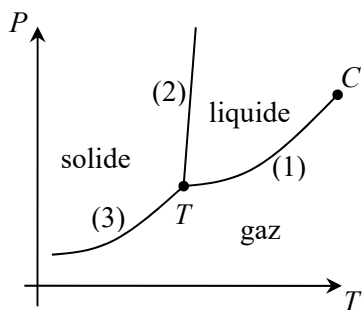
On appelle **phase** toute partie d'un système thermodynamique dans laquelle les paramètres intensifs sont des fonctions continues de l'espace.

Un corps pur peut se présenter sous différentes phases usuelles (on dit aussi *états*) : solide, liquide, gaz (ou vapeur). Quand il passe d'une phase à l'autre, il y a **transition de phase** (ou *changement de phase* ou encore *changement d'état*). Les transitions de phase usuelles ont un nom traditionnel.



### □ Description dans le diagramme d'équilibre ( $P, T$ )

Un corps pur en équilibre sous deux phases est un système monovariant (une seule variable intensive indépendante). Dans un diagramme ( $P, T$ ), un tel équilibre correspond donc à une courbe  $P = f(T)$ . Les différentes courbes d'équilibre délimitent les domaines d'existence du corps pur sous l'une des phases liquide, solide ou gaz.



(1) est la **courbe de vaporisation** (équilibre liquide/gaz). La pression d'équilibre entre liquide et gaz à la température  $T$  est appelée **pression de vapeur saturante**  $P = P_{\text{sat}}(T)$ .

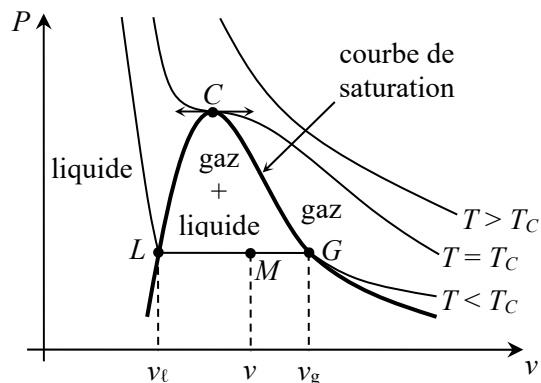
Cette courbe se termine au **point critique**  $C$ , au-delà duquel la distinction entre état gazeux et état liquide n'existe plus ; on parle alors de **fluide supercritique**.

(2) est la **courbe de fusion** (équilibre liquide/solide). Elle est quasi verticale, de pente positive pour la plupart des corps mais négative pour l'eau.

(3) est la **courbe de sublimation** (équilibre solide/gaz).

Le point d'intersection de ces trois courbes est le **point triple**  $T$ . En ce point, le corps pur est en équilibre sous ses trois phases, la pression et la température sont fixées (pour un corps donné).

### □ Description de l'équilibre liquide/gaz en diagramme ( $P, v$ )



Courbe de saturation

Elle comporte deux parties.

– La **courbe d'ébullition**, à gauche du point critique  $C$ , est l'ensemble des points  $L$  pour lesquels le liquide est saturant (apparition de la première bulle de gaz).

– La **courbe de rosée**, à droite du point critique  $C$ , est l'ensemble des points  $G$  pour lesquels le gaz est saturant (apparition de la première goutte de liquide).

## Isothermes d'Andrews

- Une isotherme  $T < T_C$  possède un *palier* dans la zone de coexistence liquide/gaz. En effet, à  $T$  fixée, la pression à l'équilibre liquide/gaz est égale à la pression de vapeur saturante  $P = P_{\text{sat}}(T)$ . Par ailleurs, la pente d'une isotherme dans la zone où le système est gazeux est beaucoup plus faible que celle dans la zone où le système est liquide : la compressibilité des gaz (variation de  $v$  sous l'effet d'une variation de  $P$ ) est beaucoup plus élevée que celle des liquides.
- L'isotherme  $T = T_C$ , appelée isotherme critique, présente un point d'inflexion à tangente horizontale au point critique  $C$ .
- Une isotherme  $T > T_C$  ne possède pas de palier, car il n'y a plus de transition liquide/gaz.

## Titres massiques

Pour un état diphasé, on appelle  $x_g = \frac{m_g}{m}$  le **titre massique en gaz** et  $x_\ell = \frac{m_\ell}{m}$  le titre massique en liquide : ils vérifient  $x_\ell + x_g = 1$ . Dans l'état du système correspondant à un point  $M$  sur un palier isotherme (volume massique moyen  $v$ ), les proportions en liquide et en gaz sont données

par les relations de proportionnalité :  $x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{LM}{LG}$  et  $x_\ell = 1 - x_g = \frac{MG}{LG}$ .

⇒ **Méthode 16.3.** Déterminer la composition d'un système pouvant être liquide et/ou gazeux

## ■ Équilibre liquide/gaz en présence d'une atmosphère inerte

### □ Mélange idéal de gaz parfaits

Un mélange de gaz parfaits est **idéal** quand on peut négliger les interactions mutuelles entre les molécules des gaz mélangés. La **pression partielle**  $P_i$  d'un des constituants de quantité de matière  $n_i$  du mélange est la pression qu'aurait ce gaz parfait s'il occupait à lui seul le volume  $V$  disponible, ce qui conduit à la relation  $P_i V = n_i RT$  à la température  $T$ . La pression  $P$  dans ce mélange idéal vérifie alors la **loi de Dalton** :  $P = \sum_i P_i$ .

### □ Vaporisation ou liquéfaction en présence d'une atmosphère inerte

En présence d'une atmosphère inerte assimilée à un mélange idéal de gaz parfaits, les conditions de l'équilibre liquide/gaz, valables pour un corps pur seul, restent vraies pour un constituant donné du mélange, en raisonnant sur sa pression partielle : si  $P_i = P_{\text{sat}}(T)$  il est à l'équilibre liquide/gaz, si  $P_i < P_{\text{sat}}(T)$  il se vaporise, si  $P_i > P_{\text{sat}}(T)$  il se liquéfie.

⇒ **Méthode 16.3.** Déterminer la composition d'un système pouvant être liquide et/ou gazeux

### □ Humidité relative

Dans le cas particulier de l'eau, l'humidité relative est par définition :  $\phi = \frac{P_{\text{eau}}}{P_{\text{sat}}(T)}$ .

## ■ Comment manipuler une équation d'état quelconque ?

### □ Méthode 16.1. Passer de l'équation d'état molaire à l'équation d'état extensive

Remplacer le volume molaire par son expression en fonction de  $V$  et  $n$  :  $V_m = V/n$ .  
L'équation d'état obtenue est alors celle d'une quantité quelconque  $n$  de fluide.

⇒ Exercices 16.7, 16.8

Par exemple, pour un gaz réel dans le modèle de Dieterici :  $P(V_m - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV_m}\right)$ .

On remplace  $V_m$  par son expression en fonction de  $V$  et  $n$  :  $P\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV/n}\right)$ .

En reformulant, on obtient l'équation d'état pour une quantité de matière  $n$  quelconque :

$$P(V - nb) = nRT \exp\left(-\frac{na}{RTV}\right).$$

## ■ Comment modéliser la pression cinétique ?

### □ Méthode 16.2. Établir l'expression de la pression cinétique

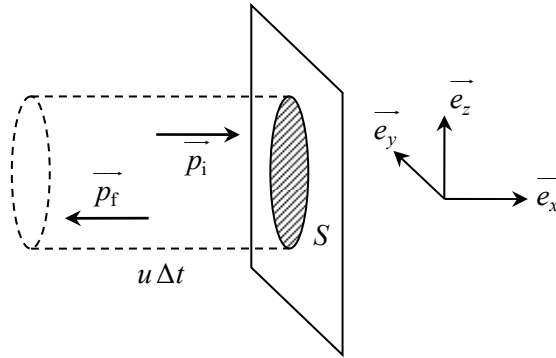
On cherche à établir la loi d'évolution de la pression cinétique  $P \propto mn^*u^2$  où  $m$  est la masse des particules (identiques),  $n^*$  la densité moléculaire et  $u$  la vitesse quadratique moyenne.

- Déterminer la variation de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}$  d'une particule au cours d'un choc sur une paroi dans un modèle homocinétique unidirectionnel (selon  $\vec{e}_x$ ).
- Exprimer la variation de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}(\Sigma)$  du système de particules heurtant une surface  $S$  de la paroi pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ .
- Appliquer le PFD à la paroi et en déduire la pression qui s'exerce sur la paroi.

⇒ Exercice 16.5

- Variation de quantité de mouvement d'une particule au cours du choc :

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -m u \vec{e}_x - (m u \vec{e}_x) = -2m u \vec{e}_x$$



- Les particules qui viennent frapper la paroi pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  sont situées dans un cylindre de longueur  $u \Delta t$  et d'aire de base  $S$ , contenant  $n^* S u \Delta t$  particules. La distribution des vitesses étant isotrope, toutes ces particules ne se dirigent pas vers la paroi : seule une fraction  $k n^* S u \Delta t$  avec  $0 < k < 1$  vient effectivement heurter la paroi. La variation de quantité de mouvement de ce système  $\Sigma$  de molécules au cours du choc s'écrit donc :

$$\Delta \vec{p}(\Sigma) = k n^* S u \Delta t \times (-2mu \vec{e}_x) = -2k m n^* u^2 S \Delta t \vec{e}_x .$$

- On applique à  $\Sigma$  le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel lié à la paroi,

supposé galiléen :  $\frac{d\vec{p}(\Sigma)}{dt} = \vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \Sigma} = -\vec{F}_{\Sigma \rightarrow \text{paroi}} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}(\Sigma)}{\Delta t} = -P S \vec{e}_x .$

Par identification, on obtient l'expression de la pression  $P = 2k m n^* u^2$ , soit  $P \propto m n^* u^2$ .

Un calcul statistique exact fournirait  $k = \frac{1}{6}$ , d'où  $P = \frac{1}{3} m n^* u^2$ .

## ■ Comment raisonner dans le cas d'un système pouvant exister sous phase liquide ou gazeuse ?

### □ Méthode 16.3. Déterminer la composition d'un système pouvant être liquide ou gazeux

Quand on cherche à déterminer l'état final d'un corps pur à la fin d'une transformation, connaissant sa température finale, s'il est susceptible d'exister sous forme de gaz ou de liquide on peut faire trois hypothèses différentes.

- Si on suppose que toute la masse  $m$  du corps pur étudié est sous forme de gaz dans l'enceinte de volume  $V$ , on calcule alors la pression  $P_{\text{gaz}} = \frac{mRT}{MV}$  (pression tout court si l'enceinte ne contient que le corps pur, pression partielle si l'enceinte contient d'autres gaz) dans l'hypothèse du gaz parfait. Cette hypothèse est la bonne si on trouve  $P_{\text{gaz}} < P_{\text{sat}}(T)$  : la pression calculée est alors effectivement celle du gaz. En revanche si on trouve  $P_{\text{gaz}} > P_{\text{sat}}(T)$ , il faut changer d'hypothèse.



– Si on suppose que le système est diphasé (une partie de la masse sous forme de liquide, l'autre sous forme de gaz), alors automatiquement la pression du gaz (ou sa pression partielle, selon le cas) est égale à  $P_{\text{sat}}(T)$  à l'équilibre. On détermine alors la composition du système à l'équilibre en calculant le titre massique en gaz  $x_g$  avec la relation de proportionnalité sur le palier de changement d'état :

$$x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell}. \text{ Cette hypothèse est la bonne si on trouve } 0 < x_g < 1.$$

– Si aucune des deux hypothèses précédentes ne convient, c'est que le corps pur est sous forme entièrement liquide. Alors la pression est  $P > P_{\text{sat}}(T)$ , mais généralement on ne dispose pas d'une équation d'état pour la calculer.

⇒ Exercices 16.10, 16.11, 16.12

Une enceinte indéformable de volume  $V = 10,0 \text{ L}$  est maintenue à la température constante  $T_0 = 353 \text{ K}$  ( $80 \text{ }^\circ\text{C}$ ). On y introduit une masse  $m = 1,00 \text{ g}$  d'eau liquide à la température  $T_0 = 353 \text{ K}$ . La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait. On donne :  $P_{\text{sat}}(353 \text{ K}) = 0,447 \text{ bar}$  la pression de vapeur saturante de l'eau à  $T_0$ ,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits et  $M = 18,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire de l'eau. Sous quelle forme et dans quelles proportions l'eau liquide initialement introduite dans l'enceinte se trouve-t-elle à l'équilibre final ? Déterminer également la pression finale dans les deux cas suivants :

(1) l'enceinte est initialement vide ;

(2) l'enceinte est initialement remplie d'air sous pression  $P_{\text{air}} = 0,500 \text{ bar}$ .

En supposant que l'eau liquide a été totalement vaporisée, on a  $P_{\text{eau}} = \frac{mRT}{MV}$ .

AN  $P_{\text{eau}} = 0,163 \text{ bar}$ . Comme  $P_{\text{eau}} < P_{\text{sat}}(353 \text{ K})$ , l'hypothèse est correcte : à l'équilibre final, l'enceinte contient  $m = 1,00 \text{ g}$  de vapeur d'eau à  $T_0 = 353 \text{ K}$ .

La pression  $P$  est alors égale à : (1)  $P = P_{\text{eau}} = 0,163 \text{ bar}$  ; (2)  $P = P_{\text{eau}} + P_{\text{air}} = 0,663 \text{ bar}$ .

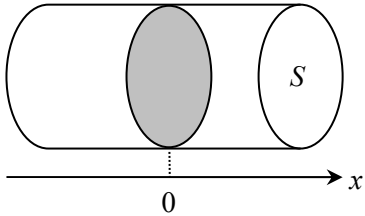
## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Un système fermé n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Un système fermé n'échange pas de matière.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. La densité moléculaire est une grandeur intensive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La pression cinétique est proportionnelle à la masse, donc elle est extensive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Les gaz réels suivent le modèle du gaz parfait aux très faibles pressions.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Dans un diagramme $(P,T)$ , la pente de la courbe de fusion est toujours positive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Dans un diagramme $(P,T)$ , la pente de la courbe de vaporisation est toujours positive.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. La pression de vapeur saturante dépend uniquement de la température et du corps considéré.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un changement d'état a lieu à température et pression constante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. À une température donnée, le gaz ne peut exister seul que pour une pression inférieure à la pression de vapeur saturante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Gaz parfait

### □ Exercice 16.1. Enceinte à deux compartiments



On place dans les deux compartiments d'une enceinte la même quantité  $n$  de deux gaz parfaits monoatomiques identiques. Ces deux compartiments sont séparés par un piston mobile de section  $S = 200 \text{ cm}^2$ . Initialement, les deux gaz ont même température  $T_0 = 300 \text{ K}$ , même volume  $V_0 = 10,0 \text{ L}$  et même pression  $P_0 = 10,0 \text{ bar}$ , et le piston est au centre de l'enceinte, à l'abscisse  $x = 0$ .

1. Calculer la quantité de matière  $n$  de gaz dans chacun des compartiments.
2. On élève la température du gaz du compartiment de gauche jusqu'à  $T_F = 350 \text{ K}$ , tout en maintenant la température du compartiment de droite à  $T_0$ . Calculer l'abscisse  $x$  du piston une fois le nouvel état d'équilibre atteint.

### □ Exercice 16.2. Enceinte verticale à deux compartiments\*

Un cylindre vertical, de section  $S$ , fermé aux deux bouts, est séparé en deux compartiments égaux étanches par un piston sans frottements, de forme cylindrique, et homogène (masse surfacique  $\sigma = 136 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$ ). Chaque compartiment, de hauteur  $h = 0,50 \text{ m}$ , contient un gaz parfait à  $T_0 = 273 \text{ K}$ ; la pression dans le compartiment inférieur est  $P_1 = 1,33 \text{ bar}$ . L'intensité de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

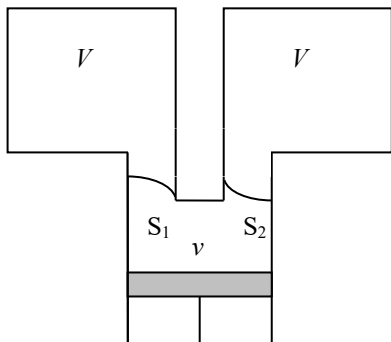
1. Déterminer la pression  $P_2$  dans le compartiment supérieur.
2. On chauffe l'ensemble du système à  $T = 373 \text{ K}$ . Déterminer le déplacement  $x$  du piston.
3. À partir de la situation initiale, on retourne maintenant le cylindre de bas en haut, la température restant égale à  $T_0$ . Déterminer le déplacement  $x'$  du piston.

(Pour ces deux questions, on établira littéralement l'équation du second degré donnant  $x$  ou  $x'$ , mais on pourra la résoudre directement avec les valeurs numériques.)

### □ Exercice 16.3. Étude d'une pompe\*

Deux réservoirs, de même volume  $V$ , sont mis en communication par une pompe dont le cylindre a un volume maximal  $v$ . À l'instant initial, les deux réservoirs contiennent deux gaz parfaits identiques à la même pression  $P_0$  et à la même température  $T_0$ . Le piston est initialement en position haute, de telle sorte que le volume du cylindre est nul au début de l'expérience.

À la descente du piston, la soupape  $S_1$  est ouverte et la soupape  $S_2$  est fermée. À la remontée du piston, la soupape  $S_1$  est fermée et la soupape  $S_2$  est ouverte.



On note  $P_n^g$  et  $P_n^d$  les pressions respectivement dans le réservoir de gauche et le réservoir de droite après  $n$  aller-retours du piston, depuis sa position haute initiale. On suppose que toutes les transformations s'effectuent de manière isotherme, et que le système constitué par le gaz contenu dans les deux réservoirs et le cylindre est fermé.

1. En utilisant une loi de conservation, établir une relation entre  $P_n^g$ ,  $P_n^d$  et  $P_0$ .
2. Quelle est la relation entre  $P_{n-1}^g$  et  $P_n^g$  ? En déduire les expressions de  $P_n^g$  puis de  $P_n^d$  en fonction de  $P_0$ ,  $V$  et  $v$ .

*D'après oral Centrale-Supélec*

#### □ Exercice 16.4. Stabilité de l'atmosphère terrestre

1. Calculer la vitesse de libération  $v_\ell$  à la surface de la Terre, c'est-à-dire la vitesse minimale à communiquer à un objet pour qu'il échappe définitivement à l'attraction gravitationnelle.
2. Calculer la vitesse quadratique moyenne  $u$  pour le dihydrogène, le diazote et le dioxygène, pour une température  $T = 300$  K. Commenter le résultat obtenu en admettant que des molécules peuvent s'échapper dans l'espace si la vitesse quadratique moyenne atteint le dixième de la vitesse de libération.
3. Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température à la surface de la Terre pour que les molécules de diazote puissent échapper à l'attraction terrestre ?

*Données :* masse de la Terre  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg ; constante de gravitation universelle  $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup> · s<sup>-2</sup> ; constante des gaz parfaits  $R = 8,3$  J · K<sup>-1</sup> · mol<sup>-1</sup> ; masses molaires  $M_{H_2} = 2,0$  g · mol<sup>-1</sup>,  $M_{N_2} = 28$  g · mol<sup>-1</sup>,  $M_{O_2} = 32$  g · mol<sup>-1</sup>.

#### □ Exercice 16.5. Effusion gazeuse \*

Un récipient est constitué de deux compartiments de même volume  $V$  maintenus à la température  $T$ . Initialement, une certaine quantité d'un gaz parfait remplit le compartiment (1) et le compartiment (2) est vide. À l'instant  $t = 0$ , on perce un petit trou de section  $s$  entre les deux compartiments. On étudie alors le passage du gaz entre les compartiments (1) et (2), phénomène appelé *effusion gazeuse*. On note  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  les nombres de molécules respectivement dans les compartiments (1) et (2). Soit  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  un trièdre cartésien dans lequel  $\vec{e}_x$  est le vecteur unitaire normal au trou dirigé du compartiment (1) vers le compartiment (2).

On adopte pour le gaz parfait le modèle cinétique suivant :

- la norme  $v$  de la vitesse de toutes les molécules est identique et égale à la vitesse quadratique moyenne  $u$  ;
- partout dans le gaz, les vecteurs vitesses des molécules sont parallèles à l'une des six directions définies par  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ ,  $-\vec{e}_x$ ,  $-\vec{e}_y$ ,  $-\vec{e}_z$ , avec un sixième des molécules dans chacune de ces six directions.

1. a) Établir l'expression du nombre  $\delta N_{1 \rightarrow 2}$  de molécules contenues dans le compartiment (1) à l'instant  $t$  et traversant la surface  $s$  vers le compartiment (2) entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
- b) Établir de même l'expression du nombre  $\delta N_{2 \rightarrow 1}$  de molécules contenues dans le compartiment (2) à l'instant  $t$  et traversant la surface  $s$  vers le compartiment (1) entre les instants  $t$  et  $t + dt$ .
2. En déduire les expressions de  $dN_1/dt$  et  $dN_2/dt$  en fonction de  $N_1, N_2, s, u$  et  $V$ .
3. Établir les expressions de  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$ . On fera apparaître une constante de temps  $\tau$  caractéristique du phénomène observé.
4. Comment varie  $\tau$  avec la masse des molécules ? À quoi un tel dispositif peut-il servir ?

□ **Exercice 16.6. Distribution de Maxwell-Boltzmann** \* \*

Un gaz parfait, en équilibre thermique dans une enceinte à la température  $T$  est constitué de  $N$  molécules de masse  $m$ . Les chocs moléculaires se traduisent par une répartition aléatoire des vitesses des molécules suivant la distribution de MAXWELL-BOLTZMANN. Ainsi, le nombre de molécules de l'enceinte dont le module de la vitesse est compris entre  $v$  et  $v + dv$  est donné par :

$$dN_v = N \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv = N f(v) dv.$$

1. Que représente la quantité  $f(v) dv$  ? Donner l'allure de la fonction  $f(v)$ .
2. Calculer la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  et la vitesse quadratique moyenne  $u$  d'une molécule de ce gaz, en fonction de  $k_B$  (constante de Boltzmann),  $T$  et  $m$ , puis en fonction de  $R$  (constante des gaz parfaits),  $T$  et  $M$  (masse molaire). On rappelle que  $R = k_B \mathcal{N}_A$  avec  $\mathcal{N}_A$  la constante d'Avogadro, et on donne :  $I_k = \int_0^\infty e^{-ax^2} x^k dx$ ,  $I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ,  $I_1 = \frac{1}{2a}$ ,  $I_k = \frac{k-1}{2a} I_{k-2}$ .
3. Donner les valeurs numériques de  $\langle v \rangle$  et  $u$  pour le diazote à  $T = 273 \text{ K}$ , sachant que  $M(N) = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Commenter.
4. Déduire de ce qui précède l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'une molécule en fonction de  $k_B$  et  $T$ .

5. En utilisant la loi des gaz parfaits, montrer que la pression est donnée par :  $P = \frac{1}{3} n^* m u^2$

avec  $n^*$  la densité moléculaire.

6. Le trajet en ligne droite effectué par une molécule de gaz entre deux chocs s'appelle le libre parcours moyen. Il est donné par la relation suivante :  $\ell_p = \frac{1}{\pi \sqrt{2} \sigma^2 n^*}$

où  $\sigma$  est le diamètre des molécules. Pour le diazote, on donne  $\sigma = 3,77 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

Exprimer  $\ell_p$  en fonction des variables  $P$  et  $T$ . Calculer  $\ell_p$  pour du diazote lorsque  $T = 273 \text{ K}$  et  $P = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Que devient cette valeur si la pression est réduite d'un facteur  $10^8$  ? Pourquoi dit-on qu'à très basse pression, les phénomènes de paroi sont prépondérants ?

*D'après CCINP*

## ■ Gaz réels

### □ Exercice 16.7. Comportement d'un gaz réel

1. Donner l'équation d'état d'un gaz parfait. Quelles sont les deux hypothèses qui définissent, au niveau microscopique, un gaz parfait ?
2. L'argon est un gaz noble qui peut être modélisé, aux faibles pressions, par l'équation d'état molaire :  $P(V_m - b) = RT$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits, et  $b$  une constante positive caractéristique de ce gaz.
  - a) Écrire cette équation d'état pour une quantité de matière  $n$  quelconque.
  - b) Quelle est l'hypothèse du gaz parfait qui reste valable pour ce gaz, et quelle est celle qui ne l'est plus ?
  - c) Tracer l'allure de quelques courbes isothermes (ensembles de points pour une valeur de  $T$  fixée) en coordonnées d'Amagat, c'est-à-dire  $y = PV$  en fonction de  $P$ . Si on obtient de telles isothermes expérimentalement, comment en déduire la valeur de  $b$  ?
  - d) Déterminer la limite du produit  $PV$  quand  $P$  tend vers 0 et commenter le résultat obtenu.

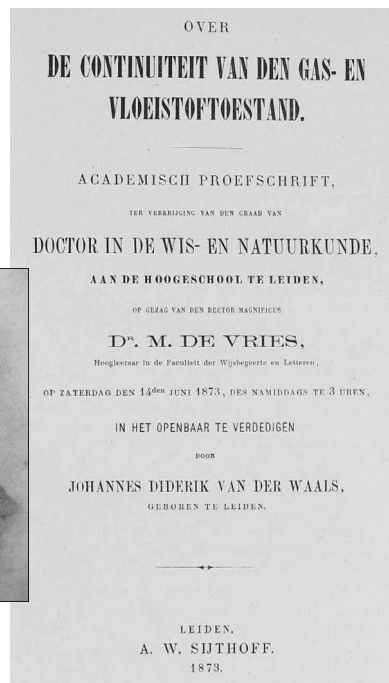
### □ Exercice 16.8. Étude d'un gaz réel de Van der Waals\*

Johannes Diderik VAN DER WAALS a proposé dans sa thèse de doctorat, en 1873, l'équation d'état molaire suivante pour un gaz réel :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

où  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  est la constante des gaz parfaits, et  $a$  et  $b$  des constantes positives caractéristiques de ce gaz.

1. Donner l'équation d'état correspondante pour une quantité quelconque ( $n$  moles).
2. Laquelle des deux constantes  $a$  ou  $b$  est-elle associée à l'existence d'un volume propre pour les molécules ? Quelle autre hypothèse constitutive du modèle du gaz parfait est mise en défaut par la présence de l'autre constante ?



3. Montrer que dans l'approximation  $\frac{b}{V_m} \ll 1$  des volumes élevés, on a  $PV_m = RT \left(1 + \frac{A(T)}{V_m}\right)$

avec  $A(T)$  une fonction qu'on exprimera en fonction des données du problème.

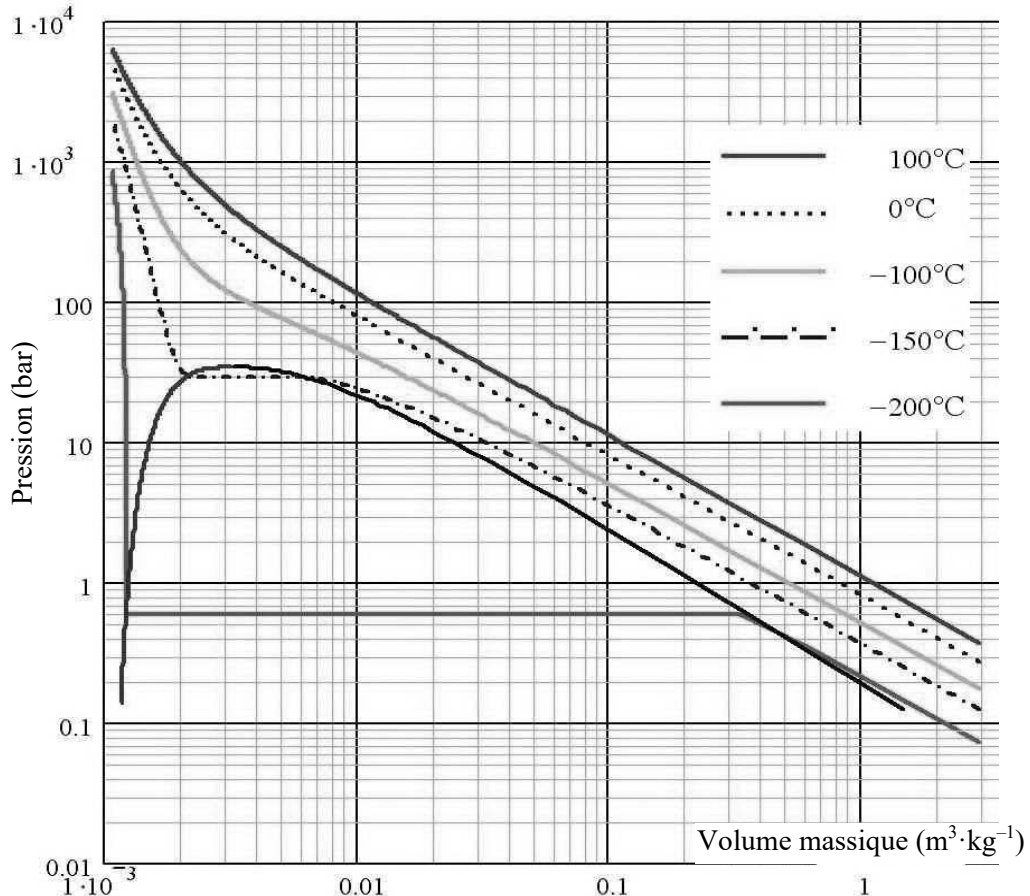
On pourra utiliser la relation approchée  $(1+x)^a \approx 1+ax$  pour  $x \ll 1$ .

4. Dans le cadre de l'approximation de la question précédente, montrer qu'il existe une température  $T_M$  (température de Mariotte) pour laquelle ce gaz se comporte comme un gaz parfait. Calculer  $T_M$  pour le diazote, avec  $a = 0,137 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}$  et  $b = 3,87 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ■ Corps pur diphasé

### □ Exercice 16.9. Diazote liquide ou gazeux

On donne ci-dessous le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) liquide/vapeur pour le diazote ( $\text{N}_2$ ) : il comporte la courbe de saturation et cinq isothermes. Les échelles sur les deux axes sont logarithmiques (voir comment les graduations se resserrent vers la droite et vers le haut).



1. Évaluer d'après ce diagramme la pression et la température du point critique du diazote.
2. Sous quelle phase se trouve le diazote en équilibre à la pression  $P = 1 \text{ bar}$  et à la température  $\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  ? Évaluer alors graphiquement son volume massique, et comparer à celui donné par l'équation d'état du gaz parfait. Que peut-on en conclure ?  
On donne  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et la masse molaire  $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On stocke couramment, pour des applications médicales par exemple, du diazote liquide dans un type de récipient appelé *vase Dewar*. Ses parois sont suffisamment calorifugées pour que le diazote puisse s'y maintenir longtemps à une température très inférieure à la température ambiante. En revanche, un petit orifice maintient l'intérieur du récipient à la même pression que l'extérieur, soit généralement  $P=1$  bar.

3. Évaluer la température du diazote à l'intérieur du récipient, où il se trouve à l'état diphasé.
4. Une masse  $m = 750$  g de diazote est stockée dans ce récipient, de volume  $V = 6,0$  L. Déterminer les proportions en masse des deux phases liquide et gazeuse.
5. La notice commerciale de ce vase Dewar indique une diminution du stock de diazote liquide de « 0,12 L par jour » dans des conditions ordinaires. Quel phénomène se produit exactement ? De combien diminue ainsi la masse du récipient chaque jour de stockage ?



### □ Exercice 16.10. Transformations de masses d'eau

1. De la vapeur d'eau sèche, assimilée à un gaz parfait, se trouve à  $300$  °C sous une pression de  $10,0$  bar ; on la refroidit à volume constant jusqu'à  $150$  °C.
  - a) Sur un schéma en coordonnées de Clapeyron, tracer l'allure de la courbe de saturation et les deux isothermes  $150$  °C et  $300$  °C, puis représenter la transformation (il faudra envisager deux possibilités).
  - b) Déterminer l'état final (composition et pression).
2. On prend maintenant  $0,10$  m<sup>3</sup> d'eau liquide et  $0,90$  m<sup>3</sup> de vapeur d'eau en équilibre sous une pression de  $4,76$  bar. Un transfert thermique isobare porte la température à  $200$  °C.
  - a) Quelle est la masse totale du mélange ?
  - b) Représenter la transformation dans le diagramme de Clapeyron précédent, et déterminer le volume final.

#### Données

Pour l'eau : masse molaire  $M = 18,0$  g·mol<sup>-1</sup> ; à  $150$  °C, la pression de vapeur saturante est  $P_s = 4,76$  bar, et les volumes massiques sont  $v_l = 1,09 \cdot 10^{-3}$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup> pour le liquide et  $v_v = 0,393$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup> pour la vapeur.

La constante des gaz parfaits est  $R = 8,314$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup>.



### □ Exercice 16.11. Comment bien faire sécher son linge ?

On introduit une masse  $m = 100 \text{ g}$  d'eau liquide dans une enceinte indéformable de volume  $V = 2,00 \text{ m}^3$  maintenue à la température constante  $T_0 = 303 \text{ K}$  ( $30^\circ\text{C}$ ). La pression de l'air est  $P_{\text{air}} = 1,00 \text{ bar}$ . La pression de vapeur saturante de l'eau à la température absolue  $T$  est donnée avec une bonne précision pour des températures d'ébullition comprises entre  $0^\circ\text{C}$  et  $100^\circ\text{C}$  par la formule de Rankine :

$$\ln\left(\frac{P_{\text{sat}}(T)}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T} \quad \text{avec } A = 13,7, B = 5,12 \cdot 10^3 \text{ K et } P_0 = 1,00 \text{ bar}.$$

La vapeur d'eau et l'air sont assimilés à des gaz parfaits, et leur mélange est supposé idéal. On donne  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits,  $M = 18,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire de l'eau et  $\rho = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$  la masse volumique de l'eau liquide.

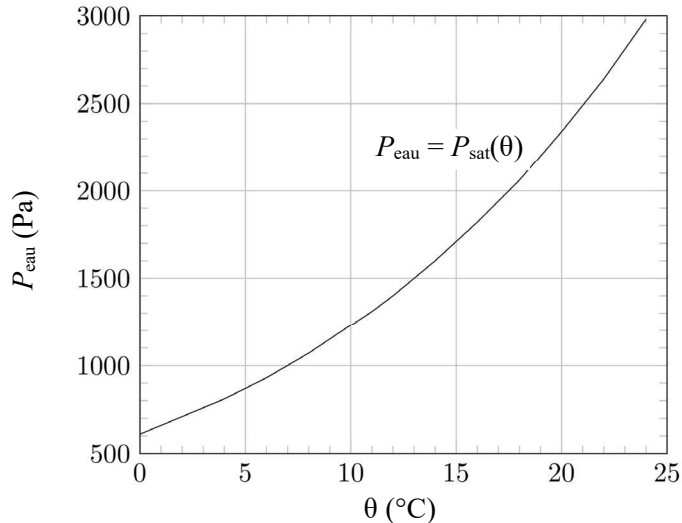
1. Que se passe-t-il dans l'enceinte après introduction de l'eau liquide ? Montrer qu'il reste de l'eau liquide dans l'enceinte à l'état final.
2. Calculer à l'équilibre : la pression partielle  $P_{\text{air}}$  de l'air, la pression partielle  $P_{\text{eau}}$  de l'eau vaporisée et la pression totale  $P$ .
3. Déterminer la composition exacte du système à l'équilibre. Montrer qu'on peut se contenter d'un calcul approché en utilisant des hypothèses simplificatrices dont on commentera la légitimité.
4. Ces 100 g d'eau sont en fait initialement « emprisonnés » dans les fibres du linge mis à sécher dans un placard. Comment optimiser le séchage du linge ?

### □ Exercice 16.12. Faut-il aérer quand il fait froid et humide ?

L'air ambiant contient toujours une proportion d'eau sous forme de vapeur. On le qualifie alors d'air humide. Sur le graphe fourni, dont les axes correspondent à la pression partielle  $P_{\text{eau}}$  en vapeur d'eau et à la température  $\theta$ , la courbe a pour équation  $P_{\text{eau}} = P_{\text{sat}}(\theta)$  avec  $P_{\text{sat}}(\theta)$  la pression de vapeur saturante de l'eau à la température  $\theta$ . On donne  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire de l'eau et  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

1. On considère une chambre hermétiquement fermée de volume égal à  $40 \text{ m}^3$  et occupée par Madame Michu qui se couche à 22 h. La température de la pièce au coucher est de  $18^\circ\text{C}$  et l'humidité relative de 50 %. La chambre n'est pas chauffée pendant la nuit et la température au réveil à 8 h le lendemain matin est de  $16^\circ\text{C}$ . On suppose que Madame Michu rejette  $50 \text{ g} \cdot \text{h}^{-1}$  de vapeur d'eau. Cette dernière est assimilée à un gaz parfait.
  - a) Quelle est la masse d'eau contenue dans l'air humide à l'heure du coucher ?
  - b) En supposant qu'il n'y ait pas eu de liquéfaction (ou « condensation ») pendant la nuit, calculer l'humidité relative dans la chambre au réveil. Conclure.
2. Le problème de la condensation peut être résolu en aérant les pièces du logement suffisamment et régulièrement. Toutefois, certaines personnes sont réticentes à aérer lors des journées humides où l'air extérieur est froid et saturé en vapeur d'eau. Pour comprendre l'intérêt de ce procédé, considérons une pièce initialement à la température de  $20^\circ\text{C}$  et saturée en vapeur d'eau. L'air extérieur est à la température de  $10^\circ\text{C}$ . On renouvelle entièrement l'air de la pièce avec un courant d'air.

- a) Reproduire le graphe donnant la pression partielle en eau en fonction de la température, en y indiquant les points correspondant à l'état de la vapeur d'eau dans les systèmes suivants : air humide extérieur, air humide de la pièce avant aération, air humide de la pièce après aération.
- b) En déduire l'humidité relative une fois que l'air de la pièce est revenu, après aération, à la température de 20 °C. Conclure.



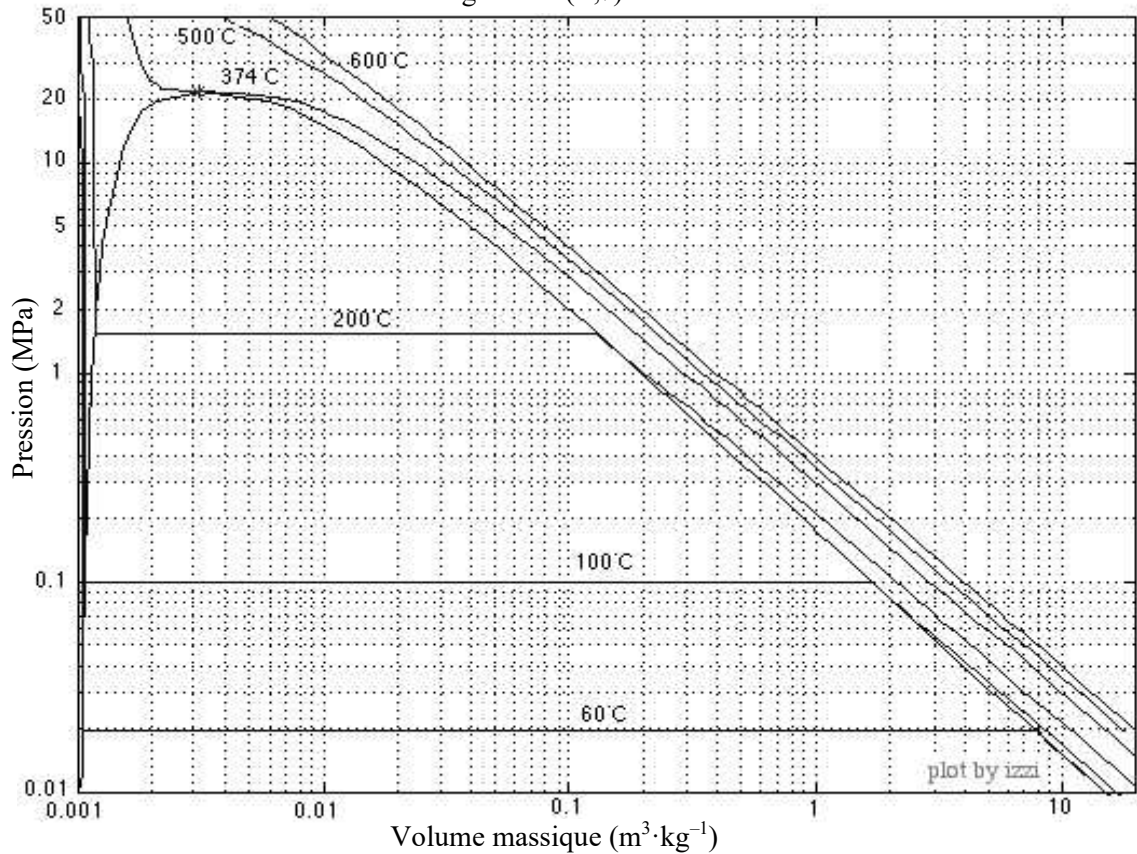
*D'après Centrale-Supélec*

### □ Exercice 16.13. Stockage dans un ballon d'eau chaude

On souhaite stocker une masse  $m$  d'eau dans un ballon d'eau chaude modélisé par un récipient fermé et indéformable de volume  $V_0 = 200$  L. Pour simplifier, on suppose qu'il ne contient que de l'eau (pas d'air). Suite à un échauffement accidentel, l'eau maintenue initialement à  $T_0 = 333$  K (soit  $\theta_0 = 60$  °C) passe à la température  $T = 647$  K (soit  $\theta = 374$  °C). La masse molaire de l'eau est  $M = 18,0$  g · mol<sup>-1</sup>, la constante des gaz parfaits est  $R = 8,314$  J · K<sup>-1</sup> · mol<sup>-1</sup>.

1. On suppose dans un premier temps que le ballon est presque vide et contient seulement une masse  $m = m_1 = 400$  g d'eau.
  - a) En utilisant le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) fourni (en échelles logarithmiques, voir page suivante), déterminer la composition du mélange liquide-gaz dans le ballon à  $T_0$ .
  - b) Sous quelle forme trouve-t-on l'eau après l'échauffement accidentel ? Lire la pression  $P_1$  correspondante sur le diagramme. Retrouver cette pression  $P_1$  par un calcul et commenter la pertinence du modèle utilisé.
2. On suppose maintenant que le ballon contient une masse importante d'eau :  $m = m_2 = 100$  kg. Déterminer la composition du mélange avant échauffement puis la nouvelle pression  $P_2$  à l'issue de l'échauffement. Conclusion ?

Diagramme ( $P,v$ ) de l'eau



## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 16.1.* Traduire la condition d'équilibre en une relation entre les pressions dans les deux compartiments.

*Exercice 16.2.* À la question 1, écrire l'équilibre mécanique du piston. Pour la suite, attention : la quantité de matière n'est pas la même en haut et en bas.

*Exercice 16.5.* À la question 3, penser à utiliser la conservation du nombre total de molécules (enceinte fermée).

*Exercice 16.6.* Raisonner en termes de probabilités.

*Exercice 16.11.* Formuler une hypothèse sur la masse d'eau vaporisée et vérifier cette hypothèse en comparant la pression partielle de l'eau à la pression de vapeur saturante.

*Exercice 16.13.* Déterminer dans chaque cas le volume massique, et placer le point correspondant à l'état initial sur le graphe.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai

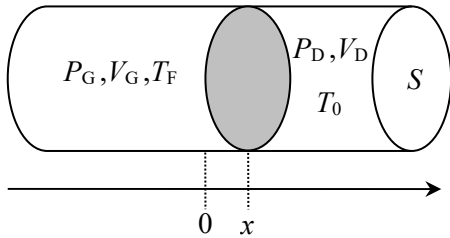
1. Un système fermé n'échange pas de matière mais peut échanger de l'énergie avec l'extérieur.
3. C'est le rapport de deux grandeurs extensives : la quantité de matière sur le volume.
4. Elle n'est pas proportionnelle à la masse *du système* (extensive) mais à la masse *de chaque molécule* (intensive, car elle ne dépend pas de l'étendue du système).
6. Pour l'eau et quelques autres corps, la pente de la courbe de fusion est négative.
9. Ce n'est pas forcément le cas. En revanche, *si* on fixe la valeur d'un des deux paramètres intensifs, pression ou température, alors l'autre prend une valeur bien déterminée tout au long de l'équilibre de changement d'état (équilibre monovariant).

### □ Les erreurs classiques

- Attention à bien utiliser la température absolue  $T$  (en kelvins) dans les formules, et non la « température Celsius » qui est une grandeur différente  $\theta$  (ce n'est pas un simple changement d'unité).
- Les erreurs sont fréquentes dans les calculs numériques où on doit multiplier différentes grandeurs, parce que les unités SI ne sont pas les unités les plus usuelles : les pressions doivent être exprimées en pascals (et non en bars), les volumes en mètres cubes (et non en litres), les masses en kilogrammes (et non en grammes)...

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 16.1



1. Utilisons l'équation d'état du gaz parfait :  $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0}$ .

AN  $n = \frac{10 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 300}$  soit  $n = 4,01 \text{ mol}$ .

2. Supposons que le chauffage du compartiment de gauche provoque un déplacement du piston vers la droite d'abscisse  $x$  :  $V_G = V_0 + Sx$  et  $V_D = V_0 - Sx$ .

Loi des gaz parfait des les deux compartiments :  $P_G (V_0 + Sx) = nRT_F$  et  $P_D (V_0 - Sx) = nRT_0$ .

Équilibre mécanique :  $P_G = P_D$  d'où  $x = \frac{V_0}{S} \frac{T_F - T_0}{T_F + T_0}$ . AN  $x = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{200 \cdot 10^{-4}} \frac{350 - 300}{350 + 300}$  soit  $x = 3,85 \text{ cm}$ .

## Exercice 16.2

1. Le piston est soumis à son poids et aux forces de pression des deux compartiments.

PFd à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} = \vec{0}$ . Projection sur  $\vec{e}_x$  (ascendant) :  $-\sigma S g + P_1 S - P_2 S = 0$  d'où  $P_2 = P_1 - \sigma g$ . AN  $P_2 = 1,20 \text{ bar}$ .

2. À l'état initial et à l'état final :  $P_2 = P_1 - \sigma g$  ;  $P'_2 = P'_1 - \sigma g$ . Conservation de la matière dans chaque compartiment :  $\frac{P'_1 S (h+x)}{RT} = \frac{P_1 S h}{RT_0}$  ;  $\frac{P'_2 S (h-x)}{RT} = \frac{P_2 S h}{RT_0}$ . En combinant ces équations

on obtient  $P_2 \frac{T}{T_0} \frac{h}{h-x} = P_1 \frac{T}{T_0} \frac{h}{h+x} - \sigma g$ . On multiplie par  $T_0 (h-x)(h+x)$  :

$P_2 T h (h+x) - P_1 T h (h-x) + \sigma g T_0 (h^2 - x^2) = 0$  d'où finalement l'équation du second degré :  $\sigma g T_0 x^2 - (P_1 + P_2) T h x + \sigma g (T - T_0) h^2 = 0$ . Solutions :  $x = 13 \text{ m}$  (impossible) ou  $x = 7,1 \text{ mm}$ .

3. Maintenant  $P'_2 = P'_1 + \sigma g$  ;  $P'_1 S (h-x') = P_1 S h$  ;  $P'_2 S (h+x') = P_2 S h$  (et toujours  $P_2 = P_1 - \sigma g$ ) d'où l'équation du second degré :  $\sigma g x'^2 - (P_1 + P_2) h x' - 2 \sigma g h^2 = 0$ . Solutions :  $x' = 9,5 \text{ m}$  (impossible) ou  $x' = -5,2 \text{ cm}$ .

## Exercice 16.3

1. Soient  $n_0$  la quantité de matière initiale,  $n_g$  et  $n_d$  les quantités de matière respectivement dans le réservoir de gauche et le réservoir de droite. Conservation de la matière pour le système fermé constitué par le gaz contenu dans les deux réservoirs après  $n$  coups de piston :

$n_0 = n_g + n_d$ . La transformation étant isotherme, la température du système est constante, d'où, d'après la loi des gaz parfaits :  $P_0 \cdot 2V = P_n^g \cdot V + P_n^d \cdot V$  soit  $2P_0 = P_n^g + P_n^d$ .

2. Après  $n-1$  coups de piston, le piston est en position haute et la pression dans le réservoir de gauche vaut  $P_{n-1}^g$ . La première moitié du  $n$ -ième coup de piston correspond à une descente de celui-ci avec  $S_1$  ouverte et  $S_2$  fermée. La quantité de matière contenu dans le réservoir de gauche à l'issue du  $(n-1)$ -ième coup de piston passe donc de manière isotherme d'un volume  $V$  à un

volume  $V+v$ , d'où  $P_{n-1}^g V = P_n^g (V+v)$ . Par récurrence, on obtient  $P_n^g = P_0 \left( \frac{V}{V+v} \right)^n$ . En

utilisant les résultats de la question 1., on en déduit  $P_n^d = P_0 \left[ 2 - \left( \frac{V}{V+v} \right)^n \right]$ .

*✎  $P_n^g$  décroît avec  $n$  alors que  $P_n^d$  croît avec  $n$ . On retrouve bien le résultat que laissait entrevoir l'étude du fonctionnement des soupapes et du piston : le gaz contenu dans le réservoir de gauche est transféré par la pompe dans le réservoir de droite.*

### Exercice 16.4

1. La vitesse de libération  $v_\ell$  correspond à la vitesse initiale minimale à communiquer à un point à la surface de la Terre pour qu'il échappe définitivement à l'attraction terrestre. Par conservation de l'énergie mécanique, on peut écrire  $\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GmM_T}{R_T} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GmM_T}{r_\infty} = 0$

d'où  $v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ . AN  $v_\ell = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. Vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait diatomique :  $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  avec  $M$  la masse molaire du gaz considéré. Pour le dihydrogène  $u_{\text{H}_2} = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , pour le diazote  $u_{\text{N}_2} = 0,67 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et pour le dioxygène  $u_{\text{O}_2} = 0,62 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . On constate que  $u_{\text{H}_2} > v_\ell / 10$  alors que  $u_{\text{N}_2}, u_{\text{O}_2} < v_\ell / 10$  : à température ambiante, les molécules de dihydrogène peuvent échapper à l'attraction terrestre alors que les molécules de diazote et de dioxygène restent piégées. Le résultat obtenu est conforme à la composition de l'air dans la troposphère : 1/5 de dioxygène, 4/5 de diazote, et du dihydrogène sous forme de traces uniquement.

*✎ Le critère consistant à comparer la vitesse quadratique moyenne au 1/10 de la vitesse de libération, et non pas simplement à la vitesse de libération, peut sembler curieux au premier abord. Toutefois, nous verrons dans l'exercice 16.6 que la vitesse quadratique moyenne n'est pas la vitesse de toutes les molécules, celle-ci obéissant à une loi de distribution. Ajoutons que la probabilité qu'une molécule dépasse la vitesse de libération est d'autant plus élevée que la vitesse quadratique moyenne est proche de la vitesse de libération.*

3. Les molécules de diazote pourraient échapper à l'attraction terrestre si  $u_{N_2} > v_\ell / 10$  soit

$T > T_0 = \frac{Mv_\ell^2}{500R}$ . AN  $T_0 = 815 \text{ K}$ , température de l'atmosphère (heureusement) impossible à la surface de la Terre.

### Exercice 16.5

1. a) Les particules contenues dans le compartiment (1) à l'instant  $t$ , et traversant la surface  $s$  vers le compartiment (2) entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , doivent vérifier les conditions suivantes : (i) être contenues à l'instant  $t$  dans le cylindre de section orientée  $s\vec{e}_x$  et de hauteur  $u dt$  selon  $\vec{e}_x$  ; (ii) avoir un vecteur vitesse dirigée selon  $+\vec{e}_x$  (soit un sixième seulement des particules du cylindre précédent). En introduisant la densité moléculaire  $N_1/V$  dans le compartiment (1), on

en déduit  $\delta N_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1}{V} su dt$ .

⇒ Méthode 16.2

b) De manière analogue, on obtient :  $\delta N_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2}{V} su dt$ .

2. En comptant positivement les molécules qui entrent dans le compartiment (1) et négativement les particules qui en sortent, un bilan de matière entre  $t$  et  $t + dt$  donne :

$$N_1(t + dt) - N_1(t) = -\delta N_{1 \rightarrow 2} + \delta N_{2 \rightarrow 1} \text{ soit } \frac{dN_1}{dt} dt = -\delta N_{1 \rightarrow 2} + \delta N_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{su}{V} (N_2 - N_1) dt.$$

En simplifiant par  $dt$  :  $\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{6} \frac{su}{V} (N_2 - N_1)$ . De même :  $\frac{dN_2}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{su}{V} (N_2 - N_1)$ .

3. Conservation de la matière pour le système fermé constitué par le gaz contenu dans les deux compartiments :  $N_0 = N_1 + N_2$  (avec  $N_0 = \mathcal{N}_A$ ). En utilisant les résultats de la question précédente :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{6} \frac{su}{V} (N_0 - 2N_1) \text{ soit } \frac{dN_1}{dt} + \frac{N_1}{\tau} = \frac{N_0}{2\tau} \text{ avec } \tau = \frac{3V}{su} \text{ constante de temps. La}$$

solution de l'équation différentielle est  $N_1(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{N_0}{2}$  avec  $A$  une constante à déterminer.

À  $t = 0$ ,  $N_1(0) = N_0$  d'où  $A = \frac{N_0}{2}$ .

Finalement,  $N_1(t) = \frac{N_0}{2} (1 + e^{-t/\tau})$  et  $N_2(t) = N_0 - N_1(t) = \frac{N_0}{2} (1 - e^{-t/\tau})$ .

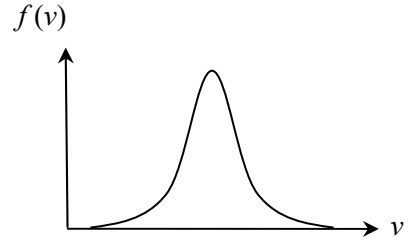
*✎ Pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $N_1 \rightarrow \frac{N_0}{2}$  et  $N_2 \rightarrow \frac{N_0}{2}$ . À l'état final, la densité moléculaire est uniforme : un état d'équilibre thermodynamique interne a été atteint.*

4. La vitesse quadratique moyenne est proportionnelle à  $1/\sqrt{m}$  donc  $\tau$  est proportionnelle à  $\sqrt{m}$ . Le dispositif étudié peut être utilisé pour réaliser une séparation isotopique. Par exemple,

l'hydrogène H possède un isotope utilisé pour réaliser la fusion thermonucléaire, le deutérium D dont le noyau est constitué d'un proton et d'un neutron. Alors le dideutérium D<sub>2</sub>, deux fois plus lourd que le dihydrogène H<sub>2</sub> possède une constante de temps  $\sqrt{2}$  fois plus élevée. En partant d'un mélange des deux gaz dans le compartiment (1), le dihydrogène passera plus vite dans le compartiment (2) que le dideutérium D<sub>2</sub>. En obturant le trou bien avant que l'équilibre soit atteint et en répétant l'opération un grand nombre de fois, on peut séparer par ce processus les deux gaz initialement mélangés.

### Exercice 16.6

1.  $f(v)dv = \frac{dN_v}{N}$  est la probabilité qu'une molécule ait le module de sa vitesse compris entre  $v$  et  $v + dv$ . La fonction  $f(v)$  tend vers 0 pour  $v \rightarrow 0$  et  $v \rightarrow \infty$ . Comme elle est toujours positive, elle passe par un maximum pour une certaine valeur de  $v$  (vitesse la plus probable).



2. Pour une distribution discrète de vitesses  $v_i$  de probabilités  $P_i$ , on aurait  $\langle v \rangle = \sum_i P_i v_i$ . Avec

la distribution continue étudiée ici, cette dernière formule devient  $\langle v \rangle = \int_0^\infty dP(v)v$ , soit

$\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv$ . De même, on a pour expression de la vitesse quadratique moyenne :

$u = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv}$ . On injecte la distribution  $f(v)$  dans l'intégrale :

$$\langle v \rangle = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \exp(-\alpha v^2) dv \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{m}{2k_B T}$$

$$\text{donc } \langle v \rangle = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} I_3 = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{I_1}{\alpha} = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1}{2\alpha^2} = \sqrt{\frac{4}{\pi\alpha}} \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}}$$

$$\text{De même : } u^2 = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \exp(-\alpha v^2) dv \quad \text{avec}$$

$$\alpha = \frac{m}{2k_B T} \quad \text{donc} \quad u^2 = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} I_4 = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3I_2}{2\alpha} = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3I_1}{4\alpha^2} = 4\pi \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3}{8\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{3}{2\pi\alpha}$$

$$\text{soit } \boxed{u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}. \text{ De plus } \frac{M}{m} = \frac{R}{k_B} = \mathcal{N}_A \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}} \quad \text{et} \quad \boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

☛ Ici  $m$  n'est pas la masse du système mais celle d'une molécule, donc ne pas écrire aveuglément  $m = nM$ , formule habituelle en chimie macroscopique.



3.  $M(\text{N}_2) = 28,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  d'où  $\langle v \rangle = 454 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $u = 493 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ces deux vitesses sont du même ordre de grandeur (et elles sont également du même ordre de grandeur que la vitesse la plus probable évoquée en 1).

☛ Ne pas oublier de convertir la masse molaire en unité SI, qui est le  $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

4. Énergie cinétique moyenne :  $\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m u^2$  soit  $\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T$ .

5. Équation des gaz parfaits :  $P = \frac{nRT}{V} = \frac{Nk_B T}{V} = n^* k_B T$ . Or d'après la question 2,  $T = \frac{mu^2}{3k_B}$

d'où  $P = \frac{1}{3} n^* m u^2$ .

6. Avec  $n^* = \frac{P}{k_B T}$ , on obtient  $\ell_p = \frac{k_B T}{\pi \sqrt{2\sigma^2 P}}$ . AN Pour  $T = 273 \text{ K}$  et  $P = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  :

$\ell_p = 4,41 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ . Pour une diminution de la pression d'un facteur  $10^8$ ,  $\ell_p = 4,41 \text{ m}$ . Aux très basses pressions,  $\ell_p$  peut devenir nettement supérieur aux dimensions de l'enceinte contenant le gaz. Dans ce cas, les chocs des particules sur les parois deviennent beaucoup plus fréquents que les chocs des particules entre elles.

### Exercice 16.7

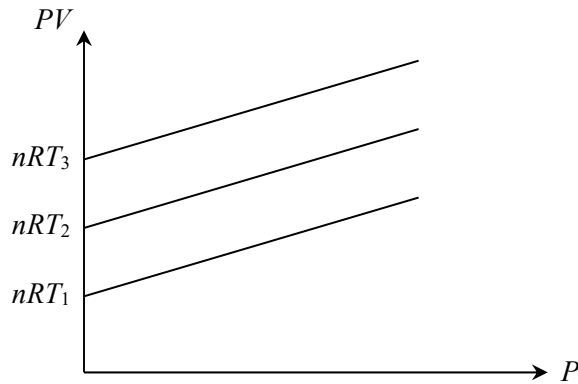
1. Équation d'état d'un gaz parfait :  $PV = nRT$ . Les particules d'un gaz parfait sont supposées sans volume propre et sans interactions à distance entre elles.

2. a) En remplaçant  $V_m$  par  $V/n$ , on obtient  $P(V - nb) = nRT$ .

⇒ Méthode 16.1

b) L'équation d'état précédente diffère de l'équation d'état du gaz parfait par le volume accessible aux molécules : celui-ci est  $V - nb < V$  pour le gaz réel considéré, alors qu'il est  $V$  pour le gaz parfait. Cette différence correspond à l'attribution d'un volume propre aux molécules du gaz réel. En revanche, les interactions à distance entre particules sont ici négligées comme dans le modèle du gaz parfait.

c) L'équation d'état peut se réécrire :  $PV = nRT + nbP$ . En coordonnées d'Amagat, les isothermes sont donc des droites de pente  $nb$  et d'ordonnée à l'origine égale à  $nRT$ .



On obtient donc  $b$  en calculant la pente des courbes et en divisant par la quantité de matière  $n$ .

d)  $\boxed{PV \xrightarrow{P \rightarrow 0} nRT}$  : aux basses pressions, on retrouve pour tout gaz réel la valeur prédite par le modèle du gaz parfait.

### Exercice 16.8

1. En remplaçant  $V_m$  par  $V/n$ , on obtient  $\boxed{\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT}$ .

⇒ Méthode 16.1

2. La constante  $b$  est associée à l'existence d'un volume propre. La constante  $a$  est ainsi liée aux interactions à distance entre les particules du gaz. En effet, en réécrivant l'équation d'état pour  $b=0$  sous la forme  $P = \frac{nRT}{V} - \frac{n^2 a}{V^2} = P^{\text{GP}} - \frac{n^2 a}{V^2}$ , on constate que la pression qu'exercerait ce gaz sur une paroi est inférieure à la pression qu'exercerait le gaz parfait correspondant. Ce résultat est conforme à la nature attractive de l'interaction entre les molécules dans un gaz réel.

3. L'équation de Van der Waals s'écrit  $PV = \frac{RT}{1 - \frac{b}{V_m}} - \frac{a}{V_m}$ . Pour des volumes élevés, on a ainsi

$$PV \approx RT \left(1 + \frac{b}{V_m}\right) - \frac{a}{V_m} = RT \left[1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right) \frac{1}{V}\right] \text{ soit la relation demandé } \boxed{PV_m = RT \left(1 + \frac{A(T)}{V_m}\right)}$$

avec  $\boxed{A(T) = b - \frac{a}{RT}}$ .

4. Le gaz parfait étant caractérisé par son équation d'état  $PV_m = RT$ , la température de Mariotte est solution de  $A(T_M) = 0$ , soit  $\boxed{T_M = \frac{a}{bR}}$ . AN  $\boxed{T_M = 426 \text{ K}}$ .

## Exercice 16.9

1. Le point critique est le sommet de la courbe de saturation. En ce point on lit approximativement :  $P_C = 35 \text{ bar}$ . Par ailleurs, ce point se situe juste au-dessus de la courbe isotherme à  $-150 \text{ }^\circ\text{C}$ , et assez loin de l'isotherme à  $-100 \text{ }^\circ\text{C}$  : on peut évaluer la température critique à environ  $\theta_C = -140 \text{ }^\circ\text{C}$ , soit  $T_C = 130 \text{ K}$  avec deux chiffres significatifs.

*Les valeurs plus précises que l'on peut trouver dans des tables sont  $P_C = 34,1 \text{ bar}$  et  $T_C = 126,3 \text{ K}$ .*

2. La température  $\theta = 0 \text{ }^\circ\text{C}$  se trouve bien au-dessus de la température critique  $\theta_C$ , donc on pourrait penser à qualifier le diazote dans ces conditions de fluide supercritique. Mais en fait le point de l'isotherme  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  d'ordonnée  $P = 1 \text{ bar}$  se trouve dans la partie droite du diagramme, loin du point critique, et  $P$  est bien inférieure à  $P_C$ , donc il s'agit de diazote sous forme de gaz.

*Il s'agit ici de conditions usuelles en hiver : on considère alors habituellement que l'air qui nous entoure est un gaz et non un fluide supercritique !*

Le point de l'isotherme  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  d'ordonnée  $P = 1 \text{ bar}$  a pour abscisse  $v = 0,83 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  environ (au milieu des graduations 0,8 et 0,9).

Avec le modèle du gaz parfait on calcule :  $v = \frac{V}{m} = \frac{V}{nM} = \frac{RT}{PM}$ . AN  $v = 0,81 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Le modèle du gaz parfait est donc convenable pour le diazote dans ces conditions.

3. La température cherchée est celle de l'isotherme dont le palier se trouve à  $P = 1 \text{ bar}$ . Cette isotherme est un peu au-dessus à  $-200 \text{ }^\circ\text{C}$ , et assez loin de l'isotherme à  $-150 \text{ }^\circ\text{C}$ , donc on peut évaluer cette température à  $\theta = -190 \text{ }^\circ\text{C}$ , soit environ  $T = 80 \text{ K}$ .

*La valeur plus précise que l'on peut trouver dans des tables est  $T = 77,36 \text{ K}$ .*

4. Le titre massique en vapeur est donné par :  $x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{V/m - v_\ell}{v_g - v_\ell}$ . On lit sur le diagramme, aux deux extrémités du palier à  $1 \text{ bar}$  :  $v_\ell = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $v_g = 0,22 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , d'où  $x_g = 0,031$ , soit 3,1 % de gaz (23 g) et 96,9 % de liquide (727 g).

5. La très faible quantité de chaleur qui traverse les parois provoque une lente ébullition du diazote liquide, et le gaz ainsi créé s'échappe par l'orifice de contact avec l'extérieur.

Le volume massique du liquide ayant la valeur indiquée à la question précédente

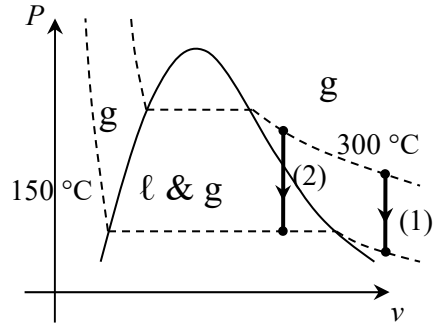
( $v_\ell = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ), on calcule la masse perdue :  $m_{\text{perdue}} = \frac{V_{\text{perdue}}}{v_\ell} = 92 \text{ g}$ .

## Exercice 16.10

**1. a)** L'état initial se trouve dans la zone de vapeur seule (à droite de la courbe de saturation). Le refroidissement isochore correspond alors à un segment vertical.

On peut envisager deux possibilités pour l'état final :

- (1) le système est toujours entièrement gazeux, et le point représentant l'état final se trouve dans la zone de vapeur seule ;
- (2) une partie du gaz s'est liquéfiée, et le point représentant l'état final se trouve dans la zone diphasée.



**b)** – Hypothèse (1) : gaz seul (vapeur sèche). Alors pour un gaz parfait :

$$V = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{T}{P} = \text{cte} \Leftrightarrow P_f = P_i \frac{T_f}{T_i}. \text{ AN } P_f = 10,0 \frac{423}{573} = 7,38 \text{ bar} > P_s(T_f) \text{ donc cette hypothèse ne}$$

convient pas (la vapeur sèche ne peut exister que pour  $P_f \leq P_s(T_f)$ ).

– Hypothèse (2) : mélange diphasé. Alors  $P_f = P_s(T_f) = 4,76 \text{ bar}$  et il reste à déterminer les proportions des deux phases, c'est-à-dire le titre massique en vapeur  $x_v$ .

Or l'état gazeux initial permet d'obtenir le volume massique moyen du système (qui reste constant) :  $v = \frac{V}{m} = \frac{V}{nM} = \frac{RT_i}{P_i M} = 0,265 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . Alors  $x_v = \frac{v - v_\ell}{v_v - v_\ell} = \frac{RT_i / M P_i - v_\ell}{v_v - v_\ell}$ .

AN  $x_v = 0,673$  (soit **67,3 % de vapeur et 32,7 % de liquide**).

On trouve bien  $0 < x_v < 1$  donc l'hypothèse est valide.

⇒ Méthode 16.2

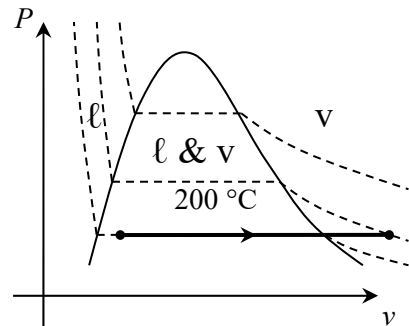
**2. a)** On repart d'un point sur le palier précédent.

Masse totale :  $m = m_v + m_\ell = \frac{V_v}{v_v} + \frac{V_\ell}{v_\ell}$ .

AN  $m = 2,3 + 91,7 = 94 \text{ kg}$ .

(Il y a donc initialement 97,6 % de liquide : le point de départ est proche de l'extrémité gauche du palier.)

**b)** Cette fois on se déplace horizontalement ( $P = \text{cte}$ ), jusqu'à rejoindre l'isotherme 200 °C, donc nécessairement vers la droite jusqu'à un point de la zone de vapeur seule.



On peut alors utiliser l'équation d'état du gaz parfait :  $V_f = \frac{nRT_f}{P_f} = \frac{mRT_f}{M P_f}$ . AN  $V_f = 43 \text{ m}^3$ .

## Exercice 16.11

**1.** Commençons par calculer la pression de vapeur saturante à la température  $T_0$ . En utilisant la

formule de Rankine, on obtient  $P_{\text{sat}}(T_0) = 4,09 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$ . Lorsqu'on introduit de l'eau liquide, celle-ci est partiellement ou complètement vaporisée. Supposons que toute l'eau liquide initialement présente passe à l'état vapeur. Dans ce cas, la pression partielle de la vapeur d'eau

s'écrit  $P_{\text{eau}} = \frac{mRT}{MV}$ ; AN :  $P_{\text{eau}} = 6,99 \cdot 10^{-2}$  bar. Comme  $P_{\text{eau}} > P_{\text{sat}}(T_0)$ , l'hypothèse de départ est erronée : la vaporisation de l'eau dans l'air s'est arrêtée dès que  $P_{\text{eau}}$  a atteint la valeur de  $P_{\text{sat}}(T_0)$ . Il reste donc de l'eau liquide dans l'enceinte une fois l'équilibre atteint.

**2.** On considère que l'air est un gaz inerte. À l'équilibre, on a donc toujours  $P_{\text{air}} = 1,00$  bar. Compte tenu de la question précédente,  $P_{\text{eau}} = P_{\text{sat}}(T_0) = 4,09 \cdot 10^{-2}$  bar, d'où  $P = P_{\text{eau}} + P_{\text{air}} = 1,04$  bar.

**3.** La fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par  $x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell}$ , avec  $v = \frac{V}{m}$ ,  $v_\ell = \frac{1}{\rho}$  et  $v_g = \frac{RT_0}{MP_{\text{sat}}}$ . Avec les données numériques fournies, on a  $v = 20,0 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $v_\ell = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $v_g = 34,2 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $x_g = 0,585$ , soit une masse de gaz  $m_g = mx_g = 58,5$  g; la masse de liquide restant est alors  $m_\ell = m - m_g = 41,5$  g.

⇒ Méthode 16.3

On remarque que  $v_\ell \ll v, v_g$  d'où  $x_g \approx \frac{v}{v_g} = \frac{MP_{\text{sat}}V}{mRT_0}$  : on obtient le même résultat que si on avait

négligé le volume de l'eau liquide devant le volume des gaz dans l'enceinte. Compte tenu des données numériques, cette hypothèse est tout à fait légitime. L'application numérique donne dans ce cas  $x_g = 0,585$ . Avec trois chiffres significatifs, le calcul exact et le calcul approché fournissent des résultats identiques.

**4.** Pour optimiser le séchage du linge, le plus simple est de diminuer la pression partielle de l'eau en augmentant le volume disponible pour le gaz : on ouvre la porte du placard et on met le linge à l'extérieur.

### Exercice 16.12

**1. a)** La pression partielle de vapeur d'eau, assimilée à un gaz parfait, vérifie l'équation  $P_{\text{eau}}V = \frac{m}{M}RT$ . De plus, l'humidité relative est par définition  $\varphi = \frac{P_{\text{eau}}}{P_{\text{sat}}(T)}$ . On en déduit

$m = \varphi \frac{P_{\text{sat}}(T)MV}{RT}$ . Pour  $T_1 = 291$  K où  $P_{\text{sat}}(T_1) = 2,1 \cdot 10^3$  Pa (lue sur le graphique) et  $\varphi_1 = 0,50$ ,

on obtient  $m_1 = \varphi_1 \frac{P_{\text{sat}}(T_1)MV}{RT_1}$ . AN  $m_1 = 0,31$  kg.

**b)** En supposant qu'il n'y ait pas eu de condensation (liquéfaction) pendant la nuit, la masse d'eau dans l'air humide au réveil est  $m_2 = m_1 + D\tau$  où  $D = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$  et  $\tau = 10$  h.

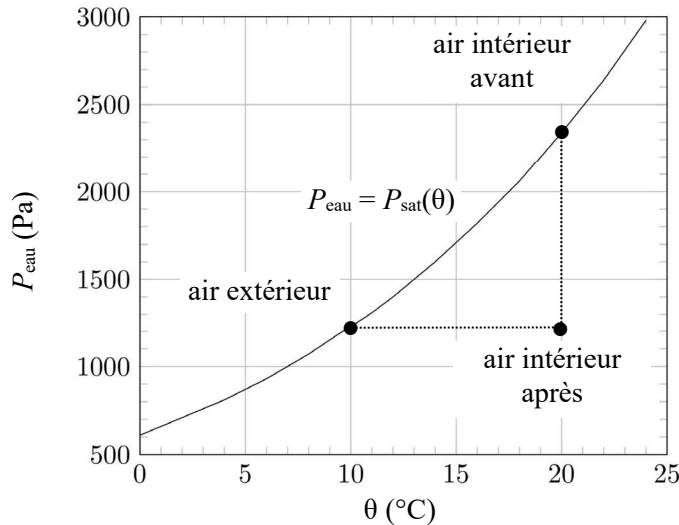
AN  $m_2 = 0,81$  kg. On en déduit la nouvelle humidité relative  $\varphi_2 = \frac{m_2RT_2}{P_{\text{sat}}(T_2)MV}$  avec

$T_2 = 289$  K où  $P_{\text{sat}}(T_2) = 1,8 \cdot 10^3$  Pa. AN  $\varphi_2 = 1,51$ . Cette valeur est plus grande que 1, ce qui signifie que la pression partielle de l'eau est supérieure à sa pression de vapeur saturante.

L'hypothèse de départ est donc erronée : une partie de l'eau vaporisée s'est liquéfiée pendant la nuit.

**2. a)** Les points correspondant à l'état de la vapeur d'eau dans les systèmes sont représentés sur le graphe ci-dessous. Comme l'air extérieur et l'air de la pièce avant aération sont saturés en vapeur d'eau, la pression partielle de l'eau y est égale à la pression de vapeur saturante à la température considérée. Une fois la pièce aérée, la pression partielle en eau y est la même que dans l'air extérieur. En supposant que le retour à la température de 20 °C dans la pièce s'effectue sans évaporation d'eau supplémentaire (pas de source d'eau dans la pièce), la pression partielle en eau ne varie pas au cours du chauffage.

**b)** Compte tenu de la question précédente, à la température  $\theta_3 = 20\text{ °C}$  où  $P_{\text{sat}}(\theta_3) = 2,3 \cdot 10^3\text{ Pa}$ , la relation  $\varphi_3 = \frac{P_{\text{eau}}}{P_{\text{sat}}(\theta_3)}$  avec  $P_{\text{eau}} = 1,2 \cdot 10^3\text{ Pa}$  fournit la valeur numérique  $\varphi_3 = 0,52$  : après aération, l'air de la pièce n'est plus saturé en eau, ce qui la rend plus agréable.



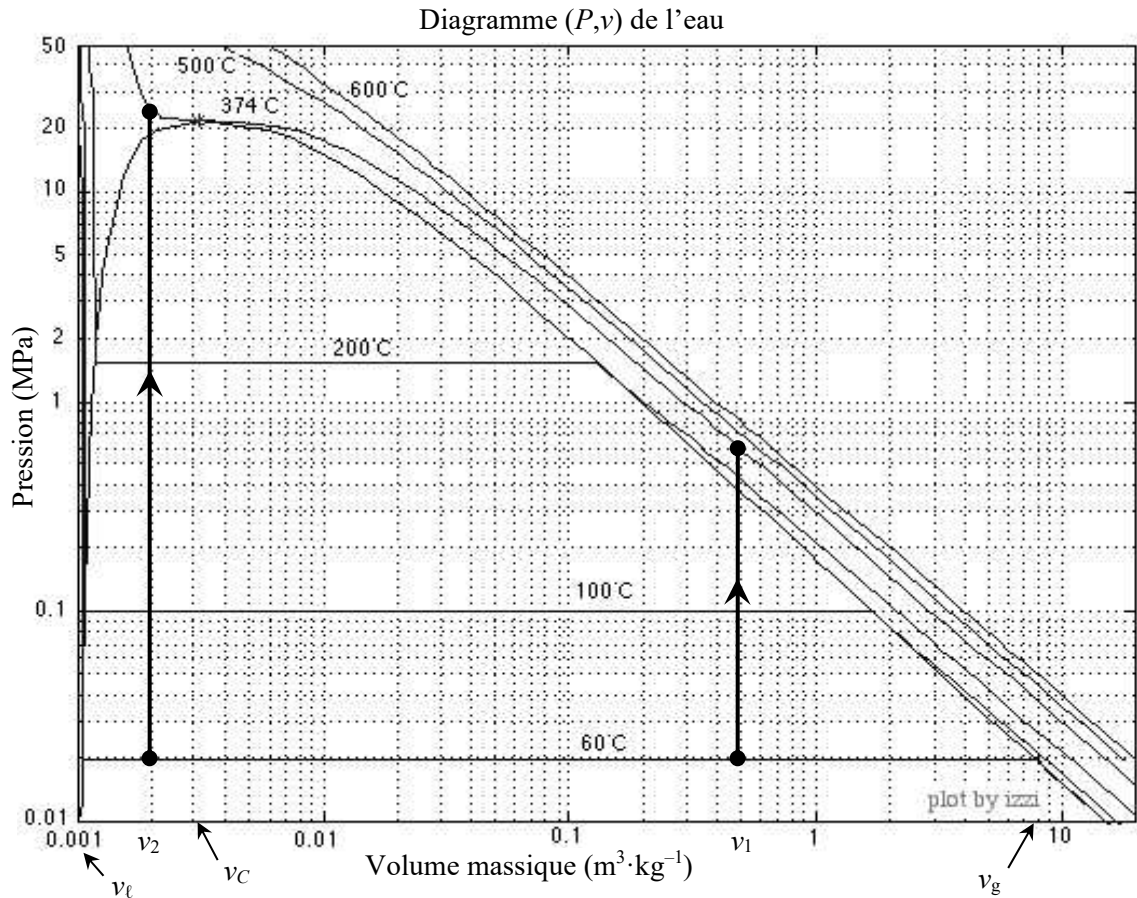
### Exercice 16.13

**1. a)** Avec le peu d'eau contenue dans le ballon, le volume massique moyen  $v_1 = \frac{V}{m_1}$  est relativement grand. AN  $v_1 = 0,50\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . À  $T_0 = 333\text{ K}$  ( $\theta_0 = 60\text{ °C}$ ), le point  $M_1$  correspondant dans le diagramme de Clapeyron est situé sur le palier de changement de phase liquide/gaz et sa fraction massique en gaz est  $x_{g1} = \frac{v_1 - v_\ell}{v_g - v_\ell}$  avec  $v_g = 8,0\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $v_\ell = 1 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . AN  $x_{g1} = 6,2 \cdot 10^{-2}$ , soit une masse de gaz  $m_{g1} = m_1 x_{g1} = 25\text{ g}$ ; la masse de liquide restant est alors  $m_{\ell 1} = m - m_{g1} = 375\text{ g}$ .

☞ Attention à l'échelle logarithmique qui empêche ici de calculer  $x_{g1}$  à l'aide d'un simple rapport de longueurs mesurées sur le graphe.

b) Le volume de la cuve étant constant, le chauffage est isochore à  $V = V_0$ . À  $T = 647 \text{ K}$  ( $\theta = 374 \text{ °C}$ ) et  $v_1 = 0,50 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , on constate sur le graphique que le système à l'issue du chauffage est totalement gazeux à la pression  $P_1 = 0,60 \text{ MPa} = 6,0 \text{ bar}$ . Dans l'hypothèse où la vapeur se comporte comme un gaz parfait, on peut aussi calculer  $P_1 = \frac{mRT}{MV_0}$ .

AN  $P_1 = 6,0 \text{ bar}$ . Le modèle du gaz parfait pour la vapeur d'eau est donc ici tout à fait pertinent. Par ailleurs, cette pression est du même ordre de grandeur que la pression atmosphérique : le ballon pourrait y résister.



2. Compte tenu de la masse plus importante d'eau dans le ballon, le volume massique moyen de l'eau  $v_2 = \frac{V}{m_2}$  est maintenant beaucoup plus faible. AN  $v_2 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

À  $T_0 = 333 \text{ K}$  ( $\theta_0 = 60 \text{ °C}$ ), le point  $M_2$  correspondant dans le diagramme de Clapeyron est situé sur le palier de changement d'état liquide/gaz, beaucoup plus à gauche que le précédent.

La fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par  $x_{g2} = \frac{v_2 - v_\ell}{v_g - v_\ell}$ . AN  $x_{g2} = 1,3 \cdot 10^{-4}$ ,

soit une masse de gaz égale à  $m_{g2} = m_2 x_{g2} = 13 \text{ g}$  seulement, le reste des 100 kg d'eau étant sous forme liquide.

À  $T = 647 \text{ K}$  ( $\theta = 374 \text{ °C}$ ) et  $v_2 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ , on constate cette fois sur le graphique que l'eau est entièrement liquide à la pression  $P_2 = 2,2 \cdot 10^2 \text{ bar}$ . Cette pression est énorme : elle pourrait provoquer l'explosion du ballon !

Comme l'illustre cet exemple, il est donc préférable, pour stocker un fluide sans danger, d'être dans le premier cas, où  $v_1 > v_C = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  (volume massique du point critique), plutôt que dans le deuxième, caractérisé par  $v_2 < v_C$ .





# Premier principe de la thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



**Sadi CARNOT** (1796-1832) est le fils aîné de Lazare CARNOT, mathématicien de renom et révolutionnaire convaincu. Après un passage à l'École du génie de Metz, Sadi quitte l'armée et rentre à Paris ; il se penche alors sur l'étude des machines à vapeur et en décortique le fonctionnement théorique. Il comprend que l'efficacité d'une machine à vapeur est liée à la production de chaleur. On le considère souvent comme le père de la thermodynamique.

## ■ Un peu d'histoire

Soucieux d'améliorer le fonctionnement des machines à vapeur, le jeune Sadi CARNOT étudie la création d'énergie mécanique à l'aide de la chaleur et émet une hypothèse nouvelle connue de nos jours sous le nom de théorème de CARNOT. Il publie ses conclusions en 1824 dans un mémoire appelé *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*. Passé inaperçu, ce texte est sorti de l'oubli par Émile CLAPEYRON.

Sadi CARNOT énonce en 1831 le premier principe de la thermodynamique mais considère la chaleur comme indestructible. Grâce à de nombreuses expériences, James JOULE revient sur cette idée et explicite le principe de conservation de l'énergie en 1843. Dans les années 1850, Rudolf CLAUSIUS et William THOMSON précisent ces notions.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différents types de transformations (monotherme, isotherme, monobare, isobare, isochore, adiabatique, quasi-statique, réversible, cyclique)
- ▷ L'énoncé du premier principe de la thermodynamique
- ▷ L'expression du travail élémentaire des forces de pression, pour une transformation quelconque et dans le cas d'une transformation réversible
- ▷ La définition d'un thermostat et sa réalisation pratique
- ▷ Les définitions de l'enthalpie, des capacités thermiques et du coefficient gamma
- ▷ La relation de Mayer pour le gaz parfait
- ▷ L'approximation  $C_p \approx C_v \approx C$  pour les phases condensées
- ▷ La loi de Laplace (énoncé et conditions d'application)

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer le travail des forces de pression pour différentes transformations
- ▷ Appliquer le premier principe et déterminer un transfert thermique
- ▷ Retrouver les expressions des capacités thermiques pour un gaz parfait, à partir de la définition de  $\gamma$  et de la relation de Mayer
- ▷ Retrouver les autres relations de Laplace à partir de  $PV^\gamma = \text{cte}$
- ▷ Déterminer l'état final d'un système
- ▷ Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et appliquer le premier principe en prenant en compte des transitions de phase

## ■ Transformations thermodynamiques

Quand on modifie les contraintes extérieures, l'équilibre thermodynamique est rompu et le système subit une évolution. On appelle **transformation** une évolution entre deux états d'équilibre thermodynamiques. Au cours d'une transformation quelconque, toutes les grandeurs d'état ne sont pas forcément définies à chaque instant.

### □ Transformation infinitésimale et transformation quasi-statique

Une transformation est **infinitésimale** quand les états d'équilibres thermodynamiques initial et final sont infiniment proches. Une transformation correspondant à une succession de transformations infinitésimales est qualifiée de **quasi-statique**. En conséquence, toutes les grandeurs d'état à l'intérieur du système ( $P, T, \dots$ ) sont constamment définies au cours d'une transformation quasi-statique, le système étant toujours infiniment proche d'un état d'équilibre.

### □ Transformation réversible ou irréversible

Une transformation est dite **réversible** si elle est quasi-statique et si en outre le système y est constamment à l'équilibre thermodynamique avec l'extérieur (ce qui implique  $P = P_{\text{ext}}$  si la paroi est mobile ou déformable et  $T = T_{\text{ext}}$  si elle est diatherme).

Si une telle transformation est qualifiée de réversible, c'est parce qu'une modification infinitésimale des contraintes extérieures responsables de la transformation permet d'inverser le sens dans lequel elle se déroule, et ce en repassant par les mêmes états intermédiaires.

En pratique, une transformation ne pourra être réversible que si, simultanément :

- la transformation est quasi-statique ;
- il n'y a aucune des causes d'irréversibilité suivantes : inhomogénéités (température, densité, pression...), phénomènes dissipatifs (frottements, effet Joule...), hystérésis, réactions chimiques ou nucléaires.

Dans le cas contraire, la transformation est dite **irréversible**. Les transformations réelles sont par nature irréversibles : la transformation réversible est un modèle idéal obtenu par passage à la limite.

### □ Transformations particulières

- Transformation **monotherme** : la température extérieure  $T_{\text{ext}}$  reste constante.
- Transformation **isotherme** : la température  $T$  du système reste constante.
- Transformation **monobare** : la pression extérieure  $P_{\text{ext}}$  reste constante.
- Transformation **isobare** : la pression  $P$  du système reste constante.
- Transformation **isochore** : le volume du système reste constant.
- Transformation **cyclique** : l'état initial et l'état final sont confondus, d'où  $\Delta X = 0$  pour toute grandeur d'état  $X$ .

## ■ Premier principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état extensive  $E$  appelée **énergie** (totale), qui ne peut être qu'échangée (pas de création ni de disparition), soit sous forme de travail  $W$ , soit sous forme de transfert thermique  $Q$ .

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc :

- $\Delta E = W + Q$  pour une transformation globale entre deux états I et F;
- $dE = \delta W + \delta Q$  pour une transformation infinitésimale.

D'après cet énoncé, un travail ou un transfert thermique positif correspond à de l'énergie reçue par le système ; un transfert négatif correspond à de l'énergie fournie à l'extérieur.

## ■ Énergie interne

### □ Définition

On a déjà rencontré différentes formes d'énergie d'un système en mécanique et en électricité. Un système macroscopiquement au repos et non soumis à une action extérieure stocke aussi de l'énergie sous une forme « invisible » à notre échelle, appelée **énergie interne**  $U$ . Elle est extensive et s'interprète, à l'échelle microscopique, comme la somme des énergies cinétiques d'agitation thermique et des énergies potentielles d'interaction des particules du système.

Nous considérerons des systèmes pour lesquels l'énergie totale  $E$  se limite à  $U$ , ou bien comporte aussi un terme d'énergie cinétique macroscopique ( $E = U + E_c$ ).

### □ Cas du gaz parfait

Énergie interne du gaz parfait

Les molécules d'un gaz parfait n'interagissent pas entre elles. L'énergie interne d'un gaz parfait a ainsi une origine purement cinétique et ne dépend que de la température :  $U^{\text{GP}} = U^{\text{GP}}(T)$ .

Pour un GP monoatomique contenant  $N$  molécules, soit une quantité de matière  $n = N/\mathcal{N}_A$  :

$$U^{\text{GPM}} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T \quad (k_B \text{ constante de Boltzmann, } \mathcal{N}_A \text{ nombre d'Avogadro, } R \text{ constante des gaz parfaits).}$$

Cette énergie correspond aux mouvements de translation aléatoire des molécules.

Pour un GP polyatomique, les énergies cinétiques associées aux mouvements propres de rotation et de vibration s'ajoutent à celles des translations :  $U^{\text{GPP}}(T) \geq U^{\text{GPM}}(T)$ .

Capacité thermique à volume constant du gaz parfait

Pour un GP subissant une transformation entre un état 1 et un état 2, l'énergie interne varie de  $\Delta U^{\text{GP}} = U_2^{\text{GP}} - U_1^{\text{GP}}$  quand la température varie de  $\Delta T = T_2 - T_1$ . On définit ainsi sa **capacité thermique à volume constant**  $C_V$  (unité SI :  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ) par la relation :

$\Delta U^{\text{GP}} = C_V \Delta T$ . Pour une transformation infinitésimale :  $dU^{\text{GP}} = C_V dT$ .

On définit également :

- la capacité thermique *molaire* à volume constant :  $C_{Vm} = C_V/n$  (unité SI :  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) ;
- la capacité thermique *massique* à volume constant :  $c_V = C_V/m$  (unité SI :  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

Pour un GP monoatomique,  $C_V^{\text{GPM}} = \frac{3}{2}nR$ . Pour un GP diatomique,  $C_V^{\text{GPD}} = \frac{5}{2}nR$  sur une large gamme de températures.

### □ Cas des gaz réels

L'énergie interne d'un gaz réel dépend à la fois de la température et du volume ::  $U^{\text{GR}} = U^{\text{GR}}(T, V)$ . La dépendance vis-à-vis du volume est associée à la présence d'interactions à distance entre les molécules du gaz, donc d'énergie potentielle microscopique.

### □ Cas d'une phase condensée idéale

L'énergie interne d'une phase condensée idéale ne dépend que de la température :  $U^{\text{PC}} = U^{\text{PC}}(T)$ . Dans le domaine des températures ordinaires, la capacité thermique à volume constant des solides est constante. Pour de nombreux liquides, tels que l'eau, elle est également constante sur une large gamme de températures. On a ainsi  $\Delta U^{\text{PC}} = C_V \Delta T$  pour une transformation globale et  $dU^{\text{GP}} = C_V dT$  pour une transformation infinitésimale.

## ■ Travail

### □ Notion de travail

Le **travail**  $W$  correspond à l'énergie échangée sous l'action de forces extérieures macroscopiques. Quand un système reçoit de l'énergie sous forme de travail (mécanique ou électrique), un mouvement cohérent est communiqué à ses particules.

### □ Travail des forces de pression

Un système soumis à une pression extérieure  $P_{\text{ext}}$  reçoit un travail élémentaire  $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$  où  $dV$  est le volume élémentaire balayé par les parties mobiles du système (qui correspond généralement à la variation de volume du système). Au cours d'une transformation quelconque

entre l'état initial I et l'état final F, le travail reçu est alors  $W = - \int_{V_I}^{V_F} P_{\text{ext}} dV$ .

⇒ **Méthode 17.1. Calcul du travail des forces de pression**

Cas d'une transformation réversible

Lors d'une transformation réversible, on a  $P = P_{\text{ext}}$  d'où  $W_{\text{rév}} = - \int_{V_I}^{V_F} P dV$ .

Dans un **diagramme de Clapeyron** (ou de Watt)  $P = f(V)$ ,  $|W|$  est égal à l'aire sous la courbe décrivant la transformation,  $W > 0$  si  $V$  diminue (compression),  $W < 0$  si  $V$  augmente (détente).

## ■ Transfert thermique

### □ Notion de transfert thermique

Le **transfert thermique**  $Q$  (ou **chaleur**) correspond à de l'énergie échangée par l'interaction désordonnée des particules du système avec les particules du milieu extérieur, au niveau microscopique. Quand un système reçoit de l'énergie sous forme de transfert thermique, un mouvement incohérent est communiqué à ses particules.

On distingue qualitativement trois grands types de transferts thermiques :

- la **conduction**, transfert thermique par diffusion de proche en proche ;
- la **convection**, transfert thermique accompagné d'un mouvement de fluide ;
- le **rayonnement**, transfert thermique par l'intermédiaire d'une onde électromagnétique.

Une paroi est dite **diatherme** (ou **diathermane**) si elle permet le transfert thermique ; dans le cas contraire, elle est dite **athermane** (ou **calorifugée**).

⇒ Méthode 17.2. Calcul d'un transfert thermique

### □ Transformation adiabatique

Une transformation au cours de laquelle il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur ( $Q = 0$ ) est qualifiée d'**adiabatique**.

Cela peut correspondre à une transformation où le système est entouré de parois athermanes, ou bien à une transformation trop rapide pour que les transferts thermiques puissent avoir lieu.

### □ Thermostat

On appelle **thermostat** (ou **source de chaleur**) un système fermé n'échangeant pas de travail avec l'extérieur, mais capable d'échanger un transfert thermique sans que sa température varie. En pratique, c'est un système de taille beaucoup plus grande que ceux avec lesquels il est susceptible d'être mis en contact : ses capacités thermiques sont considérées comme infinies.

## ■ Enthalpie

### □ Définition

L'**enthalpie** est une fonction d'état extensive définie par  $H = U + PV$ .

Pour une transformation monobare entre deux états I et F tels que  $P_I = P_F = P_{\text{ext}}$ , ou pour une transformation isobare réversible :  $\Delta H = Q + W'$  avec  $W'$  le travail autre que celui de pression.

### □ Cas du gaz parfait

Enthalpie du gaz parfait

L'enthalpie du gaz parfait ne dépend que de la température :  $H^{\text{GP}} = H^{\text{GP}}(T)$ .

Capacité thermique à pression constante du gaz parfait

La **capacité thermique à pression constante**  $C_p$  du gaz parfait est définie par la relation :

$\Delta H^{\text{GP}} = C_p \Delta T$ . Pour une transformation infinitésimale, on a ainsi :  $dH^{\text{GP}} = C_p dT$ .

On définit aussi la capacité thermique molaire à pression constante  $C_p^m = C_p/n$  et la capacité thermique massique à pression constante  $c_p = C_p/m$ .

On note  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  le rapport des capacités thermiques à pression et volume constant.

Relation de Mayer

Pour tout gaz parfait :  $C_p - C_v = nR$  ou encore  $C_p^m - C_v^m = R$ .

Expressions des capacités thermiques

Elles se déduisent de la définition de  $\gamma$  et de la relation de Mayer :  $C_v = \frac{nR}{\gamma-1}$  et  $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}$ .

Relations de Laplace

Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz parfait (tel que  $\gamma = \text{cte}$  et soumis aux seules forces de pression) :  $PV^\gamma = \text{cte}$   $\Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$   $\Leftrightarrow T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$ .

### □ Cas d'une phase condensée idéale

Pour une phase condensée,  $PV \ll U$  d'où  $H \approx U$ . Ainsi, pour une phase condensée idéale :

$$H^{\text{pc}} \approx H^{\text{pc}}(T), C_p \approx C_v \text{ (notée } C), \Delta H^{\text{pc}} \approx \Delta U^{\text{pc}} \approx C \Delta T \text{ et } dH^{\text{pc}} \approx dU^{\text{pc}} \approx C dT.$$

L'eau liquide possède une capacité thermique massique très élevée ( $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ) lui permettant d'emmagasiner beaucoup d'énergie sans bouillir : c'est ce qui justifie son utilisation fréquente dans les systèmes d'échanges thermiques.

⇒ **Méthode 17.3. Détermination de l'état final avec l'équation d'état**

⇒ **Méthode 17.4. Détermination de l'état final avec le premier principe**

⇒ **Méthode 17.5. Détermination de l'état final avec les relations de Laplace**

### □ Cas du corps pur diphasé

Enthalpie massique de transition de phase

L'**enthalpie massique de transition de phase** à la température  $T$  est définie comme la différence des enthalpies massiques d'un corps pur dans la phase 2 et dans la phase 1, à la même température  $T$  de changement d'état et à la pression d'équilibre  $P = P_{\text{sat}}(T)$  :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T) = h_2(T) - h_1(T) \quad (\text{unité SI : } \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}).$$

Elle est aussi appelée chaleur latente de transition de phase, et notée  $\ell_{1 \rightarrow 2}(T)$ .

Elle est égale au transfert thermique nécessaire pour faire passer une unité de masse du corps pur de la phase 1 à la phase 2 de manière isotherme à  $T$  (donc isobare à  $P = P_{\text{sat}}(T)$ ).

Variation d'enthalpie du corps pur diphasé

Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'enthalpie massique du système diphasé varie de  $\Delta h(T) = \Delta x_2 \times \Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$ ,  $x_2$  étant le titre massique dans la phase 2.

Donc pour une variation  $\Delta m_2$  de la masse de la phase 2 :  $\Delta H(T) = \Delta m_2 \times \Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$ .

⇒ **Méthode 17.6. Détermination d'un état final par hypothèse et validation**

⇒ **Méthode 17.7. Calcul d'une variation d'enthalpie par décomposition en étapes**



## ■ Comment calculer les transferts énergétiques au cours d'une transformation ?

### □ Méthode 17.1. Calcul du travail des forces de pression

Pour une transformation ayant des propriétés particulières, partir de la définition

$$W = - \int_{V_I}^{V_F} P_{\text{ext}} dV \text{ et calculer l'intégrale avec les hypothèses et l'expression de } P_{\text{ext}}.$$

⇒ Exercices 17.1, 17.2, 17.5

– Transformation isochore

$V = \text{cte}$  soit  $dV = 0$ , donc  $W = 0$ .

– Transformation monobare

$P_{\text{ext}} = \text{cte}$  : on peut la sortir de l'intégrale, donc  $W = -P_{\text{ext}} \Delta V$ .

– Transformation isotherme réversible pour un gaz parfait

$P_{\text{ext}} = P$  car la transformation est réversible, et  $P = \frac{nRT}{V}$  d'après l'équation d'état.

La transformation est isotherme ( $T = \text{cte}$ ) et pour un système fermé il n'y a pas de variation de quantité de matière ( $n = \text{cte}$ ) donc  $nRT$  peut être sorti de l'intégrale.

Finalement,  $W = -nRT \int_{V_I}^{V_F} \frac{dV}{V}$  soit  $W = -nRT \ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right) = +nRT \ln\left(\frac{P_F}{P_I}\right)$ .

– Transformation adiabatique

$Q = 0$  donc  $W = \Delta U$ .

### □ Méthode 17.2. Calcul d'un transfert thermique

– Dans le cas général, pour une transformation finie, le transfert thermique reçu est calculé à partir du premier principe par la relation :  $Q = \Delta U - W$  (en l'absence de variation d'énergie mécanique). La variation d'énergie interne  $\Delta U$  se calcule à partir de la fonction d'état du fluide étudié, et le travail  $W$  à l'aide de la méthode précédente.

– Pour certaines transformations particulières, on obtient des résultats simples.

⇒ Exercices 17.1, 17.3

– Transformation adiabatique

Par définition :  $Q = 0$ .

– Transformation isochore

$W = 0$  donc  $Q = \Delta U$ .

– Transformation isobare réversible, ou monobare entre deux états I et F tels que  $P_1 = P_F = P_{\text{ext}}$

$U_F - U_1 = W + Q$  avec  $W = - \int_{V_1}^{V_F} P_{\text{ext}} dV = -P_{\text{ext}}(V_F - V_1) = -P_F V_F + P_1 V_1$  donc

$(U_F + P_F V_F) - (U_1 + P_1 V_1) = Q$  soit finalement  $Q = \Delta H$ .

## ■ Comment étudier une transformation sans transition de phase ?

### □ Méthode 17.3. Détermination de l'état final avec l'équation d'état

Dans le cas où l'équation d'état du fluide est connue, ainsi que toutes les autres grandeurs d'état à l'exception de la grandeur finale recherchée, cette dernière peut être calculée en utilisant l'équation d'état.

⇒ Exercices 17.1, 17.3

Un gaz parfait enfermé dans une enceinte de volume  $V_0 = 2,00$  L, initialement à la pression  $P_0 = 1,00$  bar et à la température  $T_0 = 300$  K subit une compression qui l'amène au volume  $V_1 = 1,00$  L et à pression  $P_1 = 3,00$  bar. Quelle est sa température finale  $T_1$  ?

À  $n$  constant, l'équation d'état du gaz parfait conduit à  $T_1 = \frac{P_1 V_1}{P_0 V_0} T_0$  soit  $T_1 = 450$  K.

### □ Méthode 17.4. Détermination de l'état final avec le premier principe

Dans le cas où il est possible de déterminer  $W$  et  $Q$  indépendamment sans utiliser le premier principe, l'application du premier principe permet de déterminer l'état final (la température finale pour un gaz parfait).

⇒ Exercices 17.5

Soit une compression adiabatique d'une quantité  $n$  d'un gaz parfait diatomique, passant d'un volume initial  $2V_0$  à un volume final  $V_0$  sous l'effet d'un piston exerçant une pression extérieure constante  $P_0$  sur le gaz.  $T_0$  étant la température initiale, on cherche la température finale  $T_1$ .

La détente est adiabatique donc le transfert thermique reçu par le gaz est nul :  $Q = 0$ .

En outre, la transformation est monobare d'où  $W = -P_0(V_0 - 2V_0) = P_0 V_0$ .

Au cours de la transformation, l'énergie interne du gaz parfait diatomique a varié de  $\Delta U = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_0)$ . En appliquant le premier principe au gaz, on obtient  $T_1 = T_0 + \frac{2P_0V_0}{5nR}$ .

**□ Méthode 17.5. Détermination de l'état final avec les relations de Laplace**

Connaissant les autres grandeurs d'état, on utilise les relations de Laplace pour trouver la grandeur finale recherchée :  $PV^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte} \Leftrightarrow T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte}$ .  
 Pour pouvoir utiliser les relations de Laplace, il faut que le gaz soit parfait, que son coefficient  $\gamma$  soit constant, et que la transformation soit adiabatique et réversible.

⇒ Exercice 17.3

Un gaz parfait diatomique ( $\gamma = 1,4$ ), sous pression initiale  $P_0 = 1,0$  bar, subit une compression adiabatique et réversible qui le fait passer d'un volume  $V_0$  à un volume  $V_1 = V_0/10$  : quelle est la pression finale  $P_1$  ?

Compte tenu des hypothèses, il est possible d'appliquer les relations de Laplace :  $P_0V_0^\gamma = P_1V_1^\gamma$

soit  $P_1 = P_0 \left( \frac{V_0}{V_1} \right)^\gamma$ . AN  $P_1 = 25$  bar.

**■ Comment étudier une transformation avec transition de phase ?**

**□ Méthode 17.6. Détermination d'un état final par hypothèse et validation**

- Émettre une hypothèse sur la composition finale : mélange diphasé ou bien une seule des deux phases possibles.
- Calculer en conséquence le paramètre restant à déterminer, en fonction des conditions de l'expérience : dans l'hypothèse diphasée on cherche la composition du mélange ; dans l'hypothèse monophasée on cherche la température ou la pression.
- Vérifier la validité de l'hypothèse de départ. Si les calculs conduisent à une composition incohérente, ou à une température ou pression finale incompatible avec l'hypothèse, recommencer l'étude en émettant une autre hypothèse sur la composition finale.

⇒ Exercice 17.11, 17.12

On introduit dans un calorimètre aux parois calorifugées et de capacité thermique négligeable une masse  $m = 1,00$  kg d'eau liquide initialement à  $20$  °C. On y ajoute  $0,50$  kg de glace à  $0$  °C. Déterminer la composition et la température finale. On suppose que la transformation a lieu à pression constante  $P = 1,0$  bar. On donne :  $\Delta_{\text{fus}}h = 3,3 \cdot 10^2$  kJ·kg<sup>-1</sup> (enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C) et  $c = 4,2$  kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup> (capacité thermique de l'eau liquide).

Compte tenu des masses d'eau et de glace mises en jeu, on peut supposer que le refroidissement de l'eau dégage une énergie permettant de faire fondre uniquement une partie de la glace dans le calorimètre. On suppose donc que l'état final est un mélange d'eau liquide et solide à  $0$  °C.

Pour le système {eau + glace},  $\Delta H = Q_P = 0$  dans le calorimètre. L'enthalpie étant une fonction d'état, on calcule sa variation au cours de cette transformation en imaginant un chemin qui amène d'abord la masse d'eau de  $20$  °C à  $0$  °C, et fait ensuite fondre une masse  $m'$  de glace, d'où :  $\Delta H = 0 = \Delta H_{\text{refroidissement}} + \Delta H_{\text{fonte}} = mc(T_f - T_i) + m'\Delta_{\text{fus}}h$

avec  $T_f = 273$  K et  $T_i = 293$  K. On en déduit  $m' = \frac{mc(T_i - T_f)}{\Delta_{\text{fus}}h}$ . AN  $m' = 0,25$  kg  $< m$ .

Le résultat cohérent obtenu valide l'hypothèse de départ. Finalement, la composition du mélange à l'équilibre est : 0,25 kg de glace et 1,25 kg d'eau, le tout à 0 °C.

### □ Méthode 17.7. Calcul des variations d'enthalpie par décomposition en étapes

L'enthalpie étant une fonction d'état, sa variation sur une transformation complexe peut toujours être calculée en imaginant un chemin en plusieurs étapes, au cours desquelles il ne se passe qu'une chose à la fois : variation de température pour une phase seule, changement d'état à une température donnée. Dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur, ce chemin peut être visualisé sur le diagramme  $(P, v)$ .

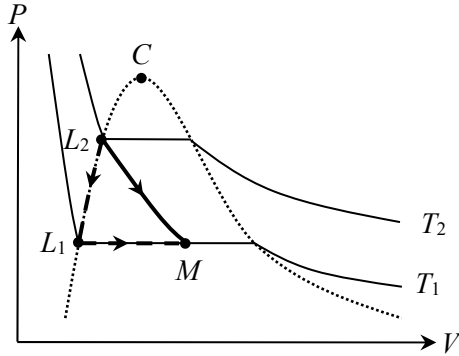
On additionne alors les variations d'enthalpie sur chacune des étapes, en utilisant les différentes formules :

- pour un liquide seul ou un solide seul (considéré comme une phase condensée idéale de capacité thermique massique  $c$ ),  $\Delta h = c(T_2 - T_1)$  ;
- pour un gaz seul (considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ ),  $\Delta h = c_p(T_2 - T_1)$  ;
- pour une transition de phase à la température  $T$ ,  $\Delta h = \Delta x_2 \times \Delta_{1 \rightarrow 2}h(T)$  avec  $\Delta x_2$  la variation du titre massique de la phase 2.

⇒ Exercices 17.8, 17.10, 17.11

On fait subir une détente isenthalpique (de Joule-Kelvin) à de l'ammoniac, de l'état liquide  $L_2$  ( $P_2 = 6,2$  bar,  $T_2 = 283$  K) à l'état diphasé  $M$  ( $P_1 = 1,9$  bar,  $T_1 = 253$  K). On donne  $\Delta_{\text{vap}}h(T_1) = 1,3 \cdot 10^3$  kJ·kg<sup>-1</sup> et  $c = 4,6$  kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup> (capacité thermique de l'ammoniac liquide).

On cherche à exprimer la variation d'enthalpie massique  $\Delta h = h_M - h_{L_2}$ , puis à en déduire le titre massique en vapeur final  $x_M$ .



La détente est isenthalpique donc  $\Delta h = h_M - h_{L_2} = 0$ .

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut calculer sa variation sur le chemin  $L_2L_1M$  :

$$\Delta h = (h_M - h_{L_1}) + (h_{L_1} - h_{L_2})$$

d'où  $x_M \Delta_{\text{vap}} h(T_1) + c(T_1 - T_2) = 0$ .

On en déduit  $x_M = \frac{c(T_2 - T_1)}{\Delta_{\text{vap}} h(T_1)}$ . AN  $x_M = 0,11$ . Ainsi,

11 % du liquide s'est vaporisé au cours de la détente.

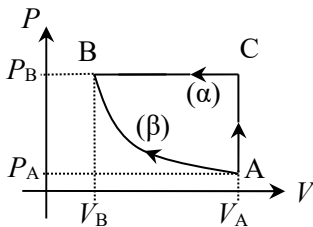
## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Au cours d'une transformation quelconque, toutes les grandeurs d'état sont définies à chaque instant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Au cours d'une transformation monobare, la pression $P$ du système est constante.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Une transformation monotherme et réversible est isotherme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Au cours d'une transformation quelconque, le travail reçu par un gaz soumis uniquement aux forces de pression est $W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La présence de frottements rend la transformation irréversible.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Pour une transformation adiabatique et réversible d'un gaz de coefficient $\gamma = \text{cte}$ soumis aux seules forces de pression, $PV^\gamma = \text{cte}$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Par définition de l'enthalpie, $\Delta H = Q$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Si un système reçoit de la chaleur ( $Q > 0$ ), sa température augmente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Au cours d'une vaporisation isotherme totale d'un corps pur, l'énergie interne du système ne varie pas.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Les variations d'énergie interne et d'enthalpie sont considérées comme égales pour une phase condensée idéale.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Systèmes gazeux

### □ Exercice 17.1. Transformations d'un gaz parfait



On fait passer une certaine quantité de gaz parfait d'un état d'équilibre A ( $P_A, V_A, T_A$ ) à un autre état d'équilibre B

( $P_B = 3P_A, V_B, T_A$ ) par deux chemins distincts :

- $\alpha$  : isochore AC puis isobare CB ;
- $\beta$  : isotherme réversible AB.

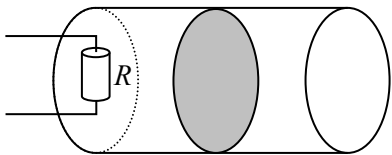
Déterminer  $T_B$  et  $V_B$  ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz au cours des transformations  $\alpha$  et  $\beta$ . Commenter les résultats obtenus.

### □ Exercice 17.2. Compression d'un gaz de Van der Waals\*

On considère un gaz réel obéissant à l'équation de Van der Waals :  $\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$ .

1. Calculer le travail reçu par une mole de gaz au cours d'une compression isotherme à  $T_0$  faisant passer le gaz de  $V_{m1}$  à  $V_{m2}$ .
2. a) Donner une expression approchée de ce travail aux faibles densités ( $b \ll V_m$ ). On mettra en évidence dans le résultat le terme correctif par rapport au travail qui serait reçu par le gaz parfait correspondant et on pourra utiliser la relation approchée  $\ln(1+x) \approx x$  pour  $x \ll 1$ .  
b) En déduire qu'il existe une température, appelée température de Mariotte, pour laquelle le gaz réel se comporte comme un gaz parfait.  
c) Vérifier que pour cette température, l'isotherme correspondante dans le diagramme d'Amagat admet une tangente horizontale.

### □ Exercice 17.3. Transformations couplées



Un cylindre horizontal est séparé en deux parties par une paroi mobile. Le mouvement de la paroi s'effectue sans frottements. Le cylindre horizontal, ainsi que la paroi mobile (de masse et de capacité thermique négligeables), sont calorifugés et rigides. À partir d'un état initial identique pour chaque compartiment (quantité  $n$  de gaz parfait avec les

paramètres  $P_0, T_0$  et  $V_0$ ), on chauffe lentement le compartiment de gauche à l'aide d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  jusqu'à obtenir  $P_g = 5P_0$  dans le compartiment de gauche.

1. Déterminer les paramètres d'état à gauche (indice g) et à droite (indice d) :  $V_g, T_g, V_d, P_d$  et  $T_d$  dans l'ordre de votre choix. On suppose  $\gamma = C_p/C_v$  connu.

- Déterminer le travail  $W_d$ , le transfert thermique  $Q_d$  et la variation d'énergie interne  $\Delta U_d$  pour le gaz contenu dans le compartiment de droite.
- Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U_g$  pour le gaz contenu dans le compartiment de gauche et déduire de ce qui précède le transfert thermique  $Q$  reçu par le gaz, conséquence de l'effet Joule dans le conducteur ohmique.

#### □ Exercice 17.4. Détente de Joule et Gay-Lussac

Au XIX<sup>e</sup> siècle, James JOULE et Louis Joseph GAY-LUSSAC imaginaient le dispositif suivant pour étudier les propriétés des gaz réels. Deux compartiments aux parois calorifugées et indéformables communiquent par un robinet. Ce robinet, initialement fermé, sépare le compartiment (1), de volume  $V_1$ , initialement rempli d'une quantité  $n$  de gaz en équilibre à la température  $T_1$ , du compartiment (2), de volume  $V_2$ , dans lequel on a fait le vide. On ouvre le robinet et on attend l'établissement d'un nouvel équilibre, caractérisé par une température  $T_F$  du gaz.

- Montrer que l'énergie interne  $U$  du gaz ne varie pas au cours de la transformation. Cette propriété dépend-elle de la nature du gaz ?
- Déterminer la température  $T_F$  dans le cas où le gaz subissant la détente est supposé parfait.
- Supposons maintenant que l'expérience est réalisée avec de l'argon, assimilé à un gaz réel de

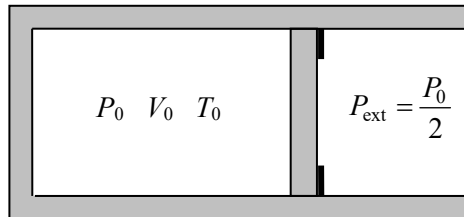
Van der Waals d'énergie interne :  $U = nC_{Vm}T - \frac{n^2a}{V}$  avec  $C_{Vm} = 12 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $a$  une constante positive caractéristique du gaz étudié.

- Nommer la constante  $C_{Vm}$  et donner son interprétation physique.
- Expérimentalement, on constate que la température du gaz diminue au cours de la détente :  $\Delta T = T_F - T_1 = -5,4 \text{ K}$  pour  $V_1 = V_2 = 1,0 \text{ L}$  et  $n = 1,0 \text{ mol}$ .  
En déduire la valeur du coefficient  $a$  de l'argon.

#### □ Exercice 17.5. Détente d'un gaz parfait

Une certaine quantité  $n$  d'un gaz, supposé parfait, est enfermée dans un récipient aux parois parfaitement calorifugées ; l'une des parois est mobile horizontalement, sans frottement.

Dans l'état initial (figure ci-contre), la paroi est bloquée et le gaz occupe alors un volume  $V_0$ , à une température  $T_0$  et sous une pression  $P_0$ .



On débloque alors la paroi mobile et le gaz se détend spontanément, jusqu'à un nouvel état d'équilibre caractérisé par les paramètres  $V_1$ ,  $T_1$  et  $P_1$ . La pression de l'air extérieur est

constante :  $P_{\text{ext}} = \frac{P_0}{2}$ . La capacité thermique à volume constant du gaz est  $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ .

- Déterminer la pression finale  $P_1$ .
- Par application du premier principe, déterminer  $V_1$  et  $T_1$ . Vérifier qu'il s'agit bien d'une détente. Le gaz s'est-il réchauffé ou refroidi ?



## ■ Phases condensées et corps pur diphasé

### □ Exercice 17.6. Calorimétrie par méthode des mélanges

Madame Michu a acheté chez un antiquaire une statue garantie en or massif, de masse  $m = 860$  g. Pour vérifier sa composition, elle souhaite mesurer la capacité thermique massique  $c$  du métal qui la constitue. Pour cela elle plonge la statue, à la température initiale  $T_0 = 293$  K, dans une masse  $m_e = 300$  g d'eau, de température initiale  $T_e = 353$  K et de capacité thermique massique  $c_e = 4,18 \cdot 10^3$  J·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup>, contenue dans un calorimètre (aux parois parfaitement athermanes) initialement à la température  $T_e$ , et elle mesure alors la température finale  $T_f$  du système  $\Sigma$  {eau + statue + calorimètre} à l'équilibre thermodynamique.

On définit la masse équivalente en eau du calorimètre  $\mu$  par la relation  $\mu = C_{\text{cal}}/c_e$  avec  $C_{\text{cal}}$  la capacité thermique du calorimètre, sa valeur est  $\mu = 40$  g. Pendant toute la transformation, le système  $\Sigma$  est en contact avec l'atmosphère où règne une pression  $P_0$ .

1. Déterminer la capacité thermique  $c$  du solide en fonction de  $m_0$ ,  $m$ ,  $\mu$ ,  $c_e$ ,  $T_f$  et  $T_0$ . Faire l'application numérique, sachant que la température finale mesurée est  $T_f = 346$  K.
2. Pour tous les métaux à température ordinaire, la capacité thermique molaire a la même valeur  $C_m = 3R = 24,9$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup> (loi de Dulong et Petit). En déduire la masse molaire du métal constituant la statue et la comparer à celle de l'or ( $M_{\text{Au}} = 197$  g·mol<sup>-1</sup>): Madame Michu s'est-elle fait arnaquer ?

### □ Exercice 17.7. Température d'un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique de résistance  $R = 1,00$  k $\Omega$ , assimilé à une phase condensée idéale de capacité thermique  $C$ , est placé dans l'air ambiant dont la température  $T_0 = 293$  K (20 °C) est supposée constante. On modélise les transferts thermiques entre ces deux systèmes en supposant que le conducteur ohmique à la température  $T$  reçoit pendant un intervalle de temps  $dt$  un transfert thermique infinitésimal  $\delta Q = a(T_0 - T)dt$  de la part de l'atmosphère. À partir de  $t = 0$ , le conducteur ohmique est parcouru par un courant d'intensité  $I = 100$  mA constante.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T$  du conducteur ohmique pour  $t \geq 0$ . Quel est la durée caractéristique  $\tau$  du phénomène décrit par cette équation ?
2. Au bout d'un temps suffisamment long, le conducteur ohmique atteint une température limite  $T_1 = 313$  K (40 °C). En déduire la valeur du coefficient  $a$ .

### □ Exercice 17.8. Variation des fonctions d'état

Une masse  $m = 1,00$  kg d'éther liquide est entièrement vaporisée à la température constante de 34,6 °C sous sa pression de vapeur saturante  $P_{\text{sat}} = 1,01$  bar. L'éther gazeux est assimilé à un gaz parfait.

Calculer la variation d'enthalpie et la variation d'énergie interne de l'éther.

Données : constante des gaz parfaits  $R = 8,31$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup> ; enthalpie massique de vaporisation de l'éther  $\Delta_{\text{vap}} h = 377$  kJ·kg<sup>-1</sup> à 34,6 °C ; masse molaire de l'éther  $M = 74,1$  g·mol<sup>-1</sup>.

### □ Exercice 17.9. Thermoplongeur de voyage

Toto possède un thermoplongeur de voyage, constitué d'un serpentín métallique fournissant par effet Joule une puissance thermique constante  $\mathcal{P}_{\text{th}} = 300 \text{ W}$ . Elle souhaite utiliser ce thermoplongeur pour chauffer à l'air libre une masse  $m = 200 \text{ g}$  d'eau liquide, initialement à la température  $T_0 = 293 \text{ K}$  ( $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) contenue dans une tasse de capacité thermique négligeable. On négligera les transferts thermiques avec l'air environnant.



1. Calculer le temps  $\tau_1$  au bout duquel l'eau se met à bouillir.
2. Toto, étourdi, laisse l'eau bouillir entièrement sans débrancher le thermoplongeur. Calculer le temps  $\tau_2$  au bout duquel toute l'eau s'est vaporisée.

Données :  $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  (capacité thermique de l'eau liquide)

et  $\Delta_{\text{vap}}h = 2,25 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

### □ Exercice 17.10. Échauffement isochore d'un mélange diphasé\*

Une enceinte de volume  $V = 1,00 \text{ L}$  contient à l'équilibre  $m_g = 0,600 \text{ g}$  de vapeur d'eau et  $m_l = 0,400 \text{ g}$  d'eau liquide à la température  $T = 373 \text{ K}$  ( $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ) pour laquelle la pression de vapeur saturante est  $P_{\text{sat}} = 1,01 \text{ bar}$ . On chauffe réversiblement ce mélange à volume constant jusqu'à la température  $T' = 383 \text{ K}$  ( $110 \text{ }^\circ\text{C}$ ) pour laquelle la pression de vapeur saturante est  $P'_{\text{sat}} = 1,32 \text{ bar}$ . Le système est alors toujours à l'équilibre liquide-vapeur.

1. Déterminer la nouvelle composition du système à l'équilibre.
2. Calculer le transfert thermique  $Q$  qu'il a fallu fournir pour réaliser cette transformation.

Données :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  la constante des gaz parfaits ;  $\Delta_{\text{vap}}h = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\Delta_{\text{vap}}h' = 2,23 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  les enthalpies massiques de vaporisation de l'eau respectivement à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $110 \text{ }^\circ\text{C}$  ;  $c = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  la capacité thermique massique de l'eau ; et  $\rho = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$  la masse volumique de l'eau (sur le domaine de températures considéré,  $c$  et  $\rho$  sont supposées constantes).

### □ Exercice 17.11. Surfusion du phosphore

Certains corps purs sont susceptibles d'exister à l'état liquide, sous une pression donnée, à une température inférieure à leur température de fusion : c'est le phénomène de surfusion. Il nécessite des conditions expérimentales particulières (composition très pure, refroidissement brusque...) et peut cesser dès qu'on introduit un cristal de solide ou une impureté, ou si on agite le liquide. (Cet état de surfusion est dit métastable : la moindre perturbation fait revenir le système à l'état d'équilibre stable.)

On considère ici un récipient calorifugé contenant une masse  $m = 10,0 \text{ g}$  de phosphore liquide surfondu à la température  $T = 307 \text{ K}$  sous la pression atmosphérique.

1. On fait cesser la surfusion et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé du phosphore. Déterminer les masses des deux phases.
  2. Quel serait l'état final du système si on faisait cesser la surfusion d'une même masse de phosphore initialement à la température  $T' = 290,5 \text{ K}$  ?
- Données pour le phosphore* :  $T_{\text{fus}} = 317 \text{ K}$  et  $\ell_{\text{fus}}(T_{\text{fus}}) = 20,9 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  sous cette pression ; capacités thermiques  $c_{\text{liq}} = 795 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour le liquide (valeur constante dans l'intervalle de température considéré) et  $c_{\text{sol}} = 840 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour le solide (idem).

### □ Exercice 17.12. Mélange d'eau sous trois états \* \*

On introduit dans un calorimètre aux parois athermanes et de capacité thermique négligeable :

- une masse  $m_1 = 100 \text{ g}$  de glace à la température  $T_1 = 273 \text{ K}$  ( $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) ;
- une masse  $m_2 = 250 \text{ g}$  d'eau liquide à la température  $T_2 = 293 \text{ K}$  ( $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ) ;
- une masse  $m_3 = 100 \text{ g}$  de vapeur d'eau à la température  $T_3 = 373 \text{ K}$  ( $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

On suppose que la transformation a lieu à pression constante  $P = 1,01 \text{ bar}$ . Déterminer la composition et la température finales.

On donne :  $\Delta_{\text{fus}}h = 3,35 \cdot 10^2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  (enthalpie massique de fusion de la glace à  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ),  $c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  (capacité thermique de l'eau liquide) et  $\Delta_{\text{vap}}h = 2,25 \cdot 10^3 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 17.2.* À la question 2.c, exprimer le produit  $PV_m$  en fonction de  $P$  et simplifier l'expression obtenue dans l'hypothèse d'une transformation isotherme d'un gaz réel aux faibles pressions et faibles densités.

*Exercice 17.3.* À la question 2, on pourra utiliser les relations de Laplace.

*Exercice 17.5.* Pour la question 1, il suffit de se poser la question : pourquoi le piston s'arrête-t-il ?

*Exercice 17.6.* La transformation est monobare : appliquer le premier principe au système complet (calorifugé) en utilisant l'enthalpie.

*Exercice 17.7.* Quelle forme du premier principe, globale ou infinitésimale, a-t-elle selon vous le plus de chance d'aboutir à une équation différentielle ?

*Exercice 17.10.* À la question 2, il faut montrer que  $Q$  correspond à la variation d'une fonction d'état et imaginer un chemin pour calculer cette variation.

*Exercice 17.12.* Il y a beaucoup d'hypothèses possibles : pour avoir une idée de l'état final, évaluer par un calcul d'ordres de grandeur la quantité de vapeur nécessaire pour faire fondre la glace et amener à  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  toute l'eau du calorimètre (celle initialement présente et celle résultant de la fonte de la glace).

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	faux	vrai

1. Par exemple, lors d'une transformation brutale (explosion...), la pression n'est pas définie.
2. C'est la pression *extérieure* qui est constante.
3. La transformation est monotherme donc  $T_{\text{ext}} = \text{cte}$ , et également réversible donc à chaque instant  $T = T_{\text{ext}}$  : on en déduit  $T = \text{cte}$ .
4. Dans le cas général, le travail des forces de pression fait intervenir  $P_{\text{ext}}$  et non  $P$ .
6. Il faut aussi que le gaz soit *parfait* pour pouvoir appliquer les relations de Laplace.
7. On trouve  $\Delta H = Q$  pour certaines transformations (isobare...): c'est une propriété qui justifie l'utilisation de l'enthalpie, mais ce n'est pas la définition de l'enthalpie ( $H = U + PV$ ).
8. Si dans le même temps il se détend, donc fournit du travail ( $W < 0$ ), son énergie interne peut diminuer ou rester constante, donc sa température également.
9.  $\Delta U = \Delta(H - PV) = \Delta H - P_{\text{sat}} \Delta V \neq 0$  *a priori*.

### □ Les erreurs classiques

- La formule générale du travail des forces de pression fait intervenir  $P_{\text{ext}}$  et non  $P$ . Ce n'est que dans le cas *réversible* qu'on remplacera  $P_{\text{ext}}$  par  $P$ .
- Ne pas appliquer les relations de Laplace si toutes les hypothèses ne sont pas vérifiées (gaz parfait à  $\gamma$  constant, transformation adiabatique et réversible).
- Ne pas écrire le premier principe avant d'avoir défini clairement à quel système on l'applique, et entre quels états (ou quels instants).
- Quand un corps est susceptible d'exister sous différentes phases, on est amené à faire une hypothèse sur l'état final : attention à ne pas oublier de vérifier *a posteriori* la validité de cette hypothèse. Par exemple, il est peu probable que la température finale d'un mélange à l'équilibre eau liquide/glace soit de 150 °C...

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 17.1

La transformation  $\beta$  est isotherme donc  $T_B = T_A$ . Alors  $P_B V_B = P_A V_A$  (gaz parfait), donc  $V_B = V_A/3$ .

$\Rightarrow$  Méthode 17.3

De plus, sur une isotherme réversible :  $W_{AB} = nRT_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$  soit  $W_{\beta} = W_{AB} = P_A V_A \ln 3$ .

$\Rightarrow$  Méthode 17.1

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température donc sur l'isotherme AB,  $\Delta U_{\beta} = \Delta U_{AB} = 0$ . D'après le premier principe, on a alors  $Q_{AB} = \Delta U_{AB} - W_{AB}$  d'où  $Q_{\beta} = Q_{AB} = -P_A V_A \ln 3$ .

$\Rightarrow$  Méthode 17.2

AC est isochore donc  $W_{AC} = 0$ ; CB est isobare donc  $W_{CB} = -P_B(V_B - V_A)$  soit  $W_{CB} = 2P_A V_A$ . Finalement,  $W_{\alpha} = W_{AC} + W_{CB} = 2P_A V_A$ . L'énergie interne est une fonction d'état donc  $\Delta U_{\alpha} = \Delta U_{\beta} = 0$ . D'après le premier principe, on a alors  $Q_{\alpha} = \Delta U_{\alpha} - W_{\alpha}$  d'où  $Q_{\alpha} = -2P_A V_A$ .

## Exercice 17.2

1. Pour une mole,  $\delta W_m = -P_{\text{ext}} dV_m = -P dV_m$  (transformation réversible). D'après l'équation d'état, et avec  $T = T_0 = \text{cte}$  (transformation isotherme) :  $W_m = -\int_{V_{m1}}^{V_{m2}} \left( \frac{RT_0}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right) dV_m$  soit

$$W_m = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1} - b}{V_{m2} - b}\right) - a\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right).$$

$\Rightarrow$  Méthode 17.1

2. a) On a  $\ln\left(\frac{V_{m1} - b}{V_{m2} - b}\right) = \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right) + \ln\left(\frac{1 - b/V_{m1}}{1 - b/V_{m2}}\right)$ . Avec un développement limité à l'ordre

1 en  $\frac{b}{V_m}$ , le 2<sup>e</sup> terme devient :  $\ln\left(\frac{1 - b/V_{m1}}{1 - b/V_{m2}}\right) = \ln\left(1 - \frac{b}{V_{m1}}\right) - \ln\left(1 - \frac{b}{V_{m2}}\right) \approx b\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)$

d'où  $W_m = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right) + (RT_0 b - a)\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)$ . Le cas du gaz parfait est obtenu pour  $a = 0$

et  $b = 0$  d'où  $W_{mGR} = W_{mGP} + (RT_0 b - a)\left(\frac{1}{V_{m2}} - \frac{1}{V_{m1}}\right)$  avec  $W_{mGP} = RT_0 \ln\left(\frac{V_{m1}}{V_{m2}}\right)$ .

b)  $W_{mGR} = W_{mGP}$  pour  $RT_0b - a = 0$  soit  $T_0 = \frac{a}{Rb}$  (température de Mariotte).

c) Le diagramme d'Amagat correspond à  $PV = f(P)$  [ou  $PV_m = f(P)$ ]. Pour le gaz de Van der Waals considéré,  $PV_m = RT \left( \frac{V_m}{V_m - b} \right) - \frac{a}{V_m} = RT \left( 1 - \frac{b}{V_m} \right)^{-1} - \frac{a}{V_m}$ . L'étude de la tangente horizontale correspond à l'étude du comportement du gaz aux faibles pressions. Dans ce cas, le comportement du gaz tend vers celui du gaz parfait. En particulier,  $P \approx \frac{RT}{V_m} \rightarrow 0$ .

Ainsi,  $PV_m \approx RT \left( 1 + \frac{b}{V_m} \right) - \frac{a}{V_m} \approx RT + \frac{1}{V_m} (RTb - a) = RT + \left( b - \frac{a}{RT} \right) P$  d'où

$\left. \frac{d(PV_m)}{dP} \right|_{T=T_0} = b - \frac{a}{RT_0} = 0$  pour  $T_0 = \frac{a}{Rb}$ . On retrouve la température de Mariotte.

### Exercice 17.3

1. Équilibre mécanique du piston :  $P_d = P_g = 5P_0$ . Le chauffage étant lent, le mouvement du piston sans frottements et le cylindre et les parois calorifugés, on peut supposer que le gaz parfait contenu dans le compartiment de droite, soumis aux seules forces de pression, subit une transformation adiabatique et réversible. L'application des relations de Laplace conduit alors à  $P_d V_d^\gamma = P_0 V_0^\gamma$  d'où  $V_d = 5^{-1/\gamma} V_0$ .

⇒ Méthode 17.5

Conservation de la quantité de matière et loi des gaz parfaits dans le compartiment de droite :

$$nR = \frac{P_d V_d}{T_d} = \frac{P_0 V_0}{T_0} \text{ d'où } T_d = 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0.$$

⇒ Méthode 17.3

Le volume total du cylindre reste inchangé d'où  $2V_0 = V_d + V_g$ . On en déduit  $V_g = (2 - 5^{-1/\gamma}) V_0$ .

Enfin, la conservation de la quantité de matière et loi des gaz parfaits dans le compartiment de

gauche fournit  $\frac{P_g V_g}{T_g} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$  soit  $T_g = \left( 10 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) T_0$ .

2. Le gaz contenu dans le compartiment de droite subit une transformation adiabatique :  $Q_d = 0$ . La variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le compartiment de droite

s'écrit  $\Delta U_d = C_V (T_d - T_0)$  soit  $\Delta U_d = \frac{nR}{\gamma-1} \left( 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) T_0$ . L'application du premier principe à ce

même gaz conduit alors à  $\Delta U_d = W_d$  d'où  $W_d = \frac{nR}{\gamma-1} \left( 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) T_0$ .

3. La variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le compartiment de gauche s'écrit

$$\Delta U_g = C_V(T_g - T_0) \text{ soit } \Delta U_g = \frac{nR}{\gamma-1} \left( 9 - 5^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) T_0. \text{ Le premier principe appliqué au système}$$

{gaz de gauche + gaz de droite + paroi mobile}, compte tenu du fait que l'évolution est globalement isochore (donc  $W = 0$ ) s'écrit  $\Delta U + \Delta E_m = Q$ . La variation d'énergie mécanique provient exclusivement de la paroi mobile. Cependant, comme son altitude est constante et que par définition, la transformation s'effectue entre deux états d'équilibre où la paroi mobile est donc au repos, alors  $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 0$ . En outre, l'énergie interne est une fonction extensive : en négligeant la variation d'énergie interne de la paroi mobile, on a

$$\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_d. \text{ Finalement, on obtient } Q = \frac{8nR}{\gamma-1} T_0.$$

### Exercice 17.4

1. Appliquons le premier principe au système {gaz + vide} au repos macroscopique :  $\Delta U_\Sigma = W + Q$ . Les parois des enceintes étant rigides, le travail des forces de pression est nul :  $W = 0$ ; comme ces dernières sont aussi calorifugées, la transformation est adiabatique :  $Q = 0$ . Dans ce cas, on a  $\Delta U_\Sigma = 0$ . Or, par extensivité de l'énergie interne,  $U_\Sigma = U + U_{\text{vide}}$ . Comme  $U_{\text{vide}} = 0$ , on en déduit le résultat demandé :  $\Delta U = 0$  pour un gaz subissant une détente de Joule Gay-Lussac. Ce résultat ne dépend pas de la nature du gaz.

2. Pour un gaz parfait, on a  $\Delta U = C_V \Delta T$ . Comme  $C_V \neq 0$ , on en déduit que  $\Delta T = T_F - T_I = 0$ , d'où  $T_F = T_I$  pour un gaz parfait.

3. a) Pour  $\frac{n}{V} \rightarrow 0$ , on a  $U \rightarrow nC_{Vm}T = U^{\text{GP}}$ . Dans ce cas,  $\Delta U^{\text{GP}} = nC_{Vm}\Delta T$  : on en déduit que la constante  $C_{Vm}$  est la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait vers lequel tend le gaz réel aux faibles concentrations molaires.

b) En écrivant  $\Delta U = 0$  on obtient, compte tenu de l'équation d'état :  $nC_{Vm}T_I - \frac{n^2 a}{V_1} = nC_{Vm}T_F - \frac{n^2 a}{V_1 + V_2}$  d'où  $a = -\frac{V_1(V_1 + V_2)}{V_2} \frac{C_{Vm}}{n} \Delta T$ . AN  $a = 0,13 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}$ .

### Exercice 17.5

1. L'état final est un état d'équilibre donc la paroi mobile ne bouge plus. On lui applique alors le théorème de la quantité de mouvement :  $m\vec{g} + \vec{R}_n + \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p\text{ext}} = \vec{0}$ .

$$\text{Projection sur la direction horizontale : } +P_1S - \frac{P_0}{2}S = 0 \text{ d'où } P_1 = \frac{P_0}{2}.$$

2. Premier principe pour le gaz contenu dans le récipient, entre l'état initial et l'état final :  $\Delta U = W + Q$ . Toutes les parois sont calorifugées donc  $Q = 0$ .

$$\text{Le gaz est parfait donc } \Delta U = C_V(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0).$$

Et le travail des forces de pression extérieures est :

$$W = - \int_{V_0}^{V_1} P_{\text{ext}} dV = - \frac{P_0}{2} \int_{V_0}^{V_1} dV = - \frac{P_0}{2} (V_1 - V_0), \text{ donc } \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) = \frac{P_0}{2} (V_0 - V_1).$$

D'autre part il y a conservation de la matière :  $n = \frac{P_0 V_0}{RT_0} = \frac{P_0 V_1}{2RT_1}$ . Alors

$$\frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) = \frac{nRT_0}{2} - nRT_1 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{\gamma-1} + 1 \right) T_1 = \left( \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \right) T_0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{T_1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} T_0} : T_1 < T_0$$

puisque  $\gamma > 1$ , donc le gaz s'est refroidi.

Enfin  $V_1 = V_0 \frac{2T_1}{T_0}$  soit  $\boxed{V_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma} V_0}$  :  $V_1 > V_0$  donc il s'agit bien d'une détente.

### Exercice 17.6

1. Pendant la transformation, le système  $\Sigma$  {eau + statue + calorimètre} est en contact avec l'atmosphère où règne une pression  $P_0$ . Il subit donc une transformation monobare telle que  $P_1 = P_f = P_{\text{ext}} = P_0$  :  $\Delta H_\Sigma = Q$ . Or les parois du calorimètre sont athermanes :  $Q = 0$  d'où  $\Delta H_\Sigma = 0$ . L'enthalpie est une fonction extensive donc  $\Delta H_\Sigma = \Delta H_{\text{calorimètre}} + \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{statue}}$  soit  $\Delta H_\Sigma = C_{\text{cal}}(T_f - T_e) + m_e c_e (T_f - T_e) + mc(T_f - T_0) = (\mu + m_e) c_e (T_f - T_e) + mc(T_f - T_0) = 0$ .

Finalement, on obtient  $c = \frac{(\mu + m_e) c_e (T_e - T_f)}{m(T_f - T_0)}$ . AN  $\boxed{c = 218 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}}$ .

2.  $mc = nC_m = \frac{m}{M} C_m$  donc  $\boxed{M = \frac{C_m}{c}}$ . AN  $\boxed{M = 114 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$  : Madame Michu s'est fait avoir !

### Exercice 17.7

1. Appliquons le premier principe au conducteur ohmique sous sa forme infinitésimale :  $dU = \delta W + \delta Q$ . D'après l'énoncé, le transfert thermique élémentaire reçu par le système au contact de l'atmosphère s'écrit  $\delta Q = a(T_0 - T)dt$ . En outre, le courant qui parcourt le conducteur ohmique fournit à celui-ci pendant  $dt$  un travail électrique élémentaire  $\delta W = RI^2 dt$ . Enfin, pour le conducteur ohmique assimilé à une phase condensée idéale de capacité  $C$ , on peut

écrire  $dU = CdT$ . Finalement :  $CdT = a(T_0 - T)dt + RI^2 dt$  soit  $\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{a}{C} T = \frac{a}{C} T_0 + \frac{RI^2}{C}}$ . On

reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de constante de temps  $\boxed{\tau = \frac{C}{a}}$ .

2. La température limite  $T_1$  correspond à la solution particulière de l'équation précédente. On a

ainsi :  $0 + \frac{a}{C} T_1 = \frac{a}{C} T_0 + \frac{RI^2}{C}$  d'où  $\boxed{a = \frac{RI^2}{T_1 - T_0}}$ . AN  $\boxed{a = 5,00 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}}$ .



### Exercice 17.8

Sur le palier de liquéfaction, la variation d'enthalpie est donnée par  $\Delta H = m\Delta_{\text{vap}}h$ . AN  $\Delta H = 377 \text{ kJ}$ . La variation d'énergie interne s'écrit  $\Delta U = \Delta(H - PV) = \Delta H - P_{\text{sat}}\Delta V$ . Le liquide est entièrement vaporisé au cours de la transformation donc  $\Delta V = V_g - V_\ell \approx V_g$  (on néglige le volume de la phase liquide devant celui de la phase gazeuse). L'éther gazeux étant assimilé à un gaz parfait,  $V_g = \frac{nRT_0}{P_{\text{sat}}}$  d'où finalement  $\Delta U = m\left(\Delta_{\text{vap}}h - \frac{RT_0}{M}\right)$ . AN  $\Delta U = 342 \text{ kJ}$ .

### Exercice 17.9

1. Le chauffage a lieu à l'air libre, donc la transformation est monobare. Le premier principe s'écrit alors  $\Delta H = Q_p$ . Or  $Q_p = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$  (la puissance étant constante), et  $\Delta H = mc\Delta T$  (phase condensée idéale), donc  $mc\Delta T = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$ . L'eau se met à bouillir dès que  $T(\tau_1) = T_1 = 373 \text{ K}$

(soit  $\theta_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ), d'où  $\tau_1 = \frac{mc(T_1 - T_0)}{\mathcal{P}_{\text{th}}}$ . AN  $\tau_1 = 220 \text{ s} = 3 \text{ min } 40 \text{ s}$ .

2. À partir de l'apparition de la première bulle de vapeur à  $t = \tau_1$ , l'eau se vaporise progressivement sur le palier de liquéfaction jusqu'à  $t = \tau_2$ . Pour calculer la variation d'enthalpie correspondante, on imagine une transformation réversible isotherme et isobare : on a alors toujours  $\Delta H = Q_p = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t$  mais avec cette fois  $\Delta H = m\Delta_{\text{vap}}h$ , soit

$$m\Delta_{\text{vap}}h = \mathcal{P}_{\text{th}} \Delta t = \mathcal{P}_{\text{th}} (\tau_2 - \tau_1), \text{ d'où } \tau_2 = \tau_1 + \frac{m\Delta_{\text{vap}}h}{\mathcal{P}_{\text{th}}}.$$

En injectant dans cette expression celle de  $\tau_1$  déterminée précédemment, on obtient finalement :

$$\tau_2 = \frac{m}{\mathcal{P}_{\text{th}}} \left[ c(T_1 - T_0) + \Delta_{\text{vap}}h \right]. \text{ AN } \tau_2 = 1720 \text{ s} = 29 \text{ min}.$$

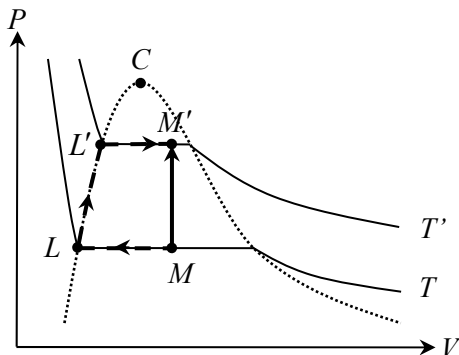
### Exercice 17.10

1. La fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par  $x'_g = \frac{v - v_\ell}{v'_g - v_\ell}$ , avec  $v = \frac{V}{m}$

( $m = m_g + m_\ell$ ),  $v_\ell = \frac{1}{\rho}$  et  $v_g = \frac{RT'}{MP'_{\text{sat}}}$ . Avec les données numériques fournies, on a

$v = 1,00 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $v_\ell = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $v'_g = 1,34 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $x'_g = 0,740$ , soit une masse de gaz  $m'_g = mx'_g = 0,740 \text{ g}$ ; la masse de liquide est alors  $m'_\ell = m - m'_g = 0,260 \text{ g}$ .

2. La transformation étant isochore, en appliquant le premier principe au mélange diphasé, on obtient  $Q = \Delta U$ .



On peut alors utiliser le fait que  $U$  est une fonction d'état pour décomposer la transformation complexe sur un chemin sur lequel la variation d'énergie interne se calcule simplement à chaque étape.

– Sur  $ML$ , on liquéfie une masse  $m_g$  de vapeur à la température  $T$  et à la pression  $P_{\text{sat}}$  :

$$\Delta U_{ML} = \Delta H_{ML} - P_{\text{sat}}(0 - V) = -m_g \Delta_{\text{vap}} h + P_{\text{sat}} V \quad (\text{en négligeant le volume final du liquide}).$$

$$\text{AN } \Delta U_{ML} = -1,26 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

– Sur  $LL'$ , on chauffe une masse  $m$  d'eau liquide de  $T$  à  $T'$  :  $\Delta U_{LL'} = mc(T' - T)$ .

$$\text{AN } \Delta U_{LL'} = 41,8 \text{ J}.$$

– Sur  $L'M'$ , on vaporise une masse  $m'_g$  d'eau liquide :

$$\Delta U_{L'M'} = \Delta H_{L'M'} - P'_{\text{sat}}(V - 0) = m'_g \Delta_{\text{vap}} h' - P'_{\text{sat}} V. \text{ AN } \Delta U_{L'M'} = +1,52 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Finalement, on obtient  $Q = \Delta U_{ML} + \Delta U_{LL'} + \Delta U_{L'M'}$ . AN  $Q = 305 \text{ J}$ .

⇒ Méthode 17.5

### Exercice 17.11

1. État initial : liquide seul,  $T = 307 \text{ K}$ . État final : diphasé,  $T_{\text{fus}} = 317 \text{ K}$  (puisque l'équilibre diphasé, sous la pression atmosphérique, ne peut exister qu'à cette température). Deux choses se sont donc produites simultanément : changement de température et changement d'état.

Premier principe pour cette transformation monobare :  $\Delta H = Q = 0$  (réipient calorifugé). Or  $H$  est une fonction d'état donc on peut exprimer  $\Delta H$  en imaginant un chemin où il y aurait d'abord le changement de température seul (l'ensemble restant liquide) puis la solidification d'une partie ( $m_{\text{sol}}$ ) de la masse totale (à  $T_{\text{fus}}$ , seule température pour laquelle on connaît  $L_{\text{fus}}$ ).

Alors  $\Delta H = m c_{\text{liq}}(T_{\text{fus}} - T) - m_{\text{sol}} L_{\text{fus}} = 0$  d'où  $m_{\text{sol}} = \frac{m c_{\text{liq}}(T_{\text{fus}} - T)}{L_{\text{fus}}}$ . AN  $m_{\text{sol}} = 3,8 \text{ g}$  (donc  $m_{\text{liq}} = 6,2 \text{ g}$ ).

⇒ Méthode 17.6

2. – Hypothèse : état final diphasé comme précédemment. On reprend alors le même calcul, qui donne  $m_{\text{sol}} = 10,1 \text{ g}$  : l'hypothèse est donc fautive puisqu'on trouve  $m_{\text{sol}} > m$ .

– Hypothèse : état final monophasé solide (ce que suggère le résultat précédent). Alors il reste à déterminer la température finale  $T_f$ . Pour cela on utilise toujours  $\Delta H = 0$ , en imaginant un chemin comportant successivement : changement de température du liquide seul (de  $T'$  à  $T_{\text{fus}}$ ) ; solidification complète à  $T_{\text{fus}}$  ; changement de température du solide seul (de  $T_{\text{fus}}$  à  $T_f$ ).

$$\Delta H = m c_{\text{liq}}(T_{\text{fus}} - T') - m L_{\text{fus}} + m c_{\text{sol}}(T_f - T_{\text{fus}}) = 0 \text{ d'où } T_f = T_{\text{fus}} - \frac{c_{\text{liq}}(T_{\text{fus}} - T') - L_{\text{fus}}}{c_{\text{sol}}}.$$

AN  $T_f = 316,8 \text{ K}$ . On trouve bien  $T_f < T_{\text{fus}}$ , ce qui valide l'hypothèse.

## Exercice 17.12

Commençons par analyser les données pour avoir une idée de l'état final.

Comme les transformations ont lieu dans un calorimètre aux parois athermanes, toute l'énergie libérée par un changement d'état peut directement servir à induire un autre changement d'état, ou une variation de température. En particulier, pour faire fondre 100 g de glace, il suffit de liquéfier  $0,100 \cdot 3,35 \cdot 10^2 / 2,25 \cdot 10^3 = 14,9$  g de vapeur. Pour amener les 100 g d'eau formés de  $0^\circ\text{C}$  à  $100^\circ\text{C}$ , il faut encore liquéfier  $0,100 \cdot 4,18 \cdot 100 / 2,25 \cdot 10^3 = 18,6$  g de vapeur. Enfin, pour porter de  $20^\circ\text{C}$  à  $100^\circ\text{C}$  les 250 g d'eau initialement introduits, il faut liquéfier  $0,250 \cdot 4,18 \cdot 80 / 2,25 \cdot 10^3 = 37,2$  g de vapeur. Au total, en liquéfiant 70,7 g de vapeur, on fait fondre toute la glace et on porte toute l'eau du calorimètre à  $100^\circ\text{C}$ .

On suppose donc que l'état final est un mélange à l'équilibre d'eau liquide et de vapeur d'eau à  $100^\circ\text{C}$ .

*On se rend compte ici de l'importance de ces calculs d'ordre de grandeur. En l'absence de ces derniers, il est difficile de prévoir l'état d'équilibre du système : on risque alors de faire de longs calculs sur une hypothèse erronée.*

La transformation est monobare et adiabatique donc  $\Delta H = Q_p = 0$ . L'enthalpie étant une fonction d'état extensive, on décompose la transformation de manière à avoir  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 = 0$  avec :

- $\Delta H_1 = m_1 \Delta_{\text{fus}} h$  (fusion d'une masse  $m_1$  de glace) ;
- $\Delta H_2 = m_1 c (T_3 - T_1)$  (chauffage jusque  $100^\circ\text{C}$  de l'eau formée) ;
- $\Delta H_3 = m_2 c (T_3 - T_2)$  (chauffage jusque  $100^\circ\text{C}$  de l'eau initialement présente) ;
- $\Delta H_4 = x_\ell m_3 \Delta_{\text{liq}} h = -x_\ell m_3 \Delta_{\text{vap}} h = -(1 - x_g) m_3 \Delta_{\text{vap}} h$  (liquéfaction d'une fraction massique  $x_\ell$  de vapeur d'eau).

Finalement,  $m_1 \Delta_{\text{fus}} h + m_1 c (T_3 - T_1) + m_2 c (T_3 - T_2) - (1 - x_g) m_3 \Delta_{\text{vap}} h = 0$ , d'où on tire :

$$x_g = 1 - \frac{m_1 \Delta_{\text{fus}} h + m_1 c (T_3 - T_1) + m_2 c (T_3 - T_2)}{m_3 \Delta_{\text{vap}} h}.$$

AN  $x_g = 0,294 = 29,4\%$  : on trouve bien  $0 \leq x_g \leq 1$  donc l'hypothèse est la bonne.

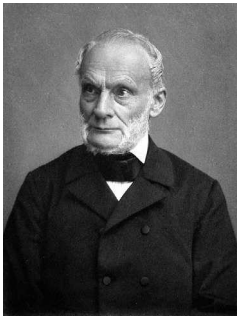
Le mélange final est donc constitué de 29,4 g de vapeur d'eau (soit 29,4 % des 100 g de départ) et de 420 g d'eau liquide (la masse totale étant 450 g), en équilibre à la température finale

$T_3 = 373 \text{ K}$  ( $\theta_3 = 100^\circ\text{C}$ ).

⇒ Méthode 17.6

# Deuxième principe de la thermodynamique

UN SCIENTIFIQUE



**Rudolf CLAUSIUS** (1822-1888) étudie à Stettin puis à Berlin et se spécialise en physique mathématique. Il s'interroge sur le statut de la chaleur. Reprenant les idées de James JOULE et de Sadi CARNOT, il met en équation le lien entre la chaleur et l'énergie mécanique. Il introduit la notion d'entropie en thermodynamique. Par ailleurs, CLAUSIUS a fourni des travaux intéressants en théorie statistique des gaz et en électromagnétisme.

## ■ Un peu d'histoire

Le deuxième principe de la thermodynamique est en filigrane dans le texte de Sadi CARNOT publié en 1824. C'est cependant William THOMSON, alias Lord KELVIN, qui en fournit la première formulation en 1850. C'est indépendamment, la même année mais un peu différemment que Rudolf CLAUSIUS l'énonce lui aussi. Il explicite la transformation de chaleur en énergie et se rend compte que c'est un processus irréversible, ce qui l'amène à introduire en 1865 la notion d'entropie.

L'étude des gaz permet d'affiner ces notions avec Ludwig BOLTZMANN. Le savant autrichien reformule la notion d'entropie en 1878, dans le cadre de la physique statistique, sous l'aspect d'ordre et de désordre correspondant respectivement au travail et à la chaleur. En 1894, Max PLANCK cherche à reformuler ce principe, ce qui l'amène à étudier les corps noirs et à introduire la constante de PLANCK.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique
- ▷ L'expression de l'entropie échangée avec un thermostat
- ▷ L'expression de l'entropie massique de transition de phase

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Retrouver les relations de Laplace pour une transformation isentropique d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant
- ▷ Utiliser la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase
- ▷ Calculer l'entropie créée au cours d'une transformation, et la relier à une ou plusieurs causes physiques d'irréversibilité
- ▷ Interpréter qualitativement l'entropie en termes de désordre statistique à l'aide de la formule de Boltzmann

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Deuxième principe de la thermodynamique

### □ Énoncé

Pour tout système thermodynamique fermé, il existe une fonction d'état extensive  $S$  appelée **entropie**, dont la variation se décompose en un terme d'échange  $\mathfrak{S}_e$  et un terme de création  $\mathfrak{S}_c$ .

Pour une transformation globale entre deux états I et F, le deuxième principe de la thermodynamique s'écrit donc  $\Delta S = \mathfrak{S}_e + \mathfrak{S}_c$  avec :

- $\mathfrak{S}_e = \sum_i \frac{Q_i}{T_{th,i}}$  où  $Q_i$  est le transfert thermique reçu par le système au contact d'un thermostat de température  $T_{th,i}$  ;
- $\mathfrak{S}_c \geq 0$ , l'égalité  $\mathfrak{S}_c = 0$  correspondant au cas d'une transformation réversible.

⇒ **Méthode 18.3.** Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur l'Univers

⇒ **Méthode 18.4.** Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur un sous-système donné

### □ Cas d'un système isolé

Pour un système isolé, il ne peut y avoir d'échange d'entropie donc  $\Delta S = \mathfrak{S}_c \geq 0$ .

Ainsi, l'entropie d'un système isolé (en particulier l'entropie de l'Univers) ne peut pas décroître : elle croît jusqu'à une valeur maximale correspondant à l'équilibre.

## ■ Variation d'entropie de quelques systèmes caractéristiques

### □ Gaz parfait

$$S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln T + nR \ln V + \text{cte} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln T - nR \ln P + \text{cte} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln P + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln V + \text{cte} \quad \text{d'où}$$

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_F}{T_I} + nR \ln \frac{V_F}{V_I} = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_F}{T_I} - nR \ln \frac{P_F}{P_I} = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{P_F}{P_I} + \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{V_F}{V_I} \quad \text{si } \gamma = \text{cte} .$$

Pour une évolution isentropique (en particulier une adiabatique réversible) d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant,  $\Delta S = 0$  donc les variables d'état vérifient les relations de Laplace :

$$PV^\gamma = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad TV^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \Leftrightarrow \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cte} .$$

### □ Phase condensée idéale

Pour une phase condensée idéale telle que  $C = \text{cte}$  :  $S = C \ln T + \text{cte}$  d'où  $\Delta S = C \ln \frac{T_F}{T_I}$ .

## □ Thermostat

En notant  $Q_{\text{th}}$  le transfert thermique reçu algébriquement par le thermostat :  $\Delta S_{\text{th}} = \frac{Q_{\text{th}}}{T_{\text{th}}}$ .

⇒ **Méthode 18.1. Calcul d'une variation d'entropie pour différents corps**

## □ Corps pur diphasé

Entropie massique de transition de phase

L'**entropie massique de transition de phase** à la température  $T$  est définie comme la différence des entropies massiques d'un corps pur dans la phase 2 et dans la phase 1, à la même température  $T$  de changement d'état et à la pression d'équilibre  $P = P_{\text{sat}}(T)$  :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} s(T) = s_2(T) - s_1(T) = \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T} \quad (\text{unité SI : } \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}).$$

avec  $\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)$  l'enthalpie massique de transition de phase à la température  $T$ .

Variation d'entropie du corps pur diphasé

Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'entropie massique du

système diphasé varie de  $\Delta s(T) = \Delta x_2 \times \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T}$ ,  $x_2$  étant le titre massique dans la phase 2.

Donc pour une variation  $\Delta m_2$  de la masse de la phase 2 :  $\Delta S(T) = \Delta m_2 \times \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T}$ .

⇒ **Méthode 18.2. Calcul d'une variation d'entropie par décomposition en étapes**

Titre massique en vapeur

Pour un système diphasé liquide-vapeur :  $x_{\text{g}} = \frac{s - s_{\ell}}{s_{\text{g}} - s_{\ell}}$ .

## ■ Interprétation statistique de l'entropie

À un état macroscopique donné, ou **macroétat**, peut correspondre un nombre  $\Omega$  d'états microscopiques, ou **microétats**. L'entropie peut être définie par la formule de Boltzmann :

$$S = k_{\text{B}} \ln \Omega \quad \text{avec } k_{\text{B}} = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ la constante de Boltzmann.}$$

Seuls les macroétats étant accessibles à la mesure, l'entropie constitue une mesure indirecte du *manque d'information* (sur les microétats du système), ou encore du *désordre* microscopique.

## ■ Comment calculer une variation d'entropie ?

### □ Méthode 18.1. Calcul d'une variation d'entropie pour différents corps

- Déterminer les grandeurs d'état du système à l'équilibre initial et final.
- Utiliser la relation fournie pour la variation d'entropie  $\Delta S$  du système étudié.

⇒ Exercices 18.1, 18.2, 18.3

Calculons par exemple la variation d'entropie d'un gaz parfait subissant une détente dans un compartiment vide d'une enceinte calorifugée et indéformable (détente de Joule et Gay-Lussac), qui le fait passer d'un volume initial  $V_1$  à un volume final  $V_2 > V_1$ .

Appliquons le premier principe au système {gaz + vide} au repos macroscopique :  $\Delta U_{\Sigma} = W + Q$ . Les parois de l'enceinte sont rigides : le travail des forces de pression est donc nul, soit  $W = 0$ . Ces dernières étant aussi calorifugées, la transformation est adiabatique :  $Q = 0$ . Dans ce cas, on a  $\Delta U_{\Sigma} = 0$ . Or, par extensivité de l'énergie interne,  $U_{\Sigma} = U + U_{\text{vide}}$ . Comme  $U_{\text{vide}} = 0$ , on en déduit  $\Delta U = 0$ . Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, on en déduit que la température  $T_2$  du gaz en fin de détente est égale à la température  $T_1$  du gaz en début de détente, soit  $T_2 = T_1$ .

Les variables d'état connues au début et à la fin de la transformation sont le volume et la température. On choisit donc la variation d'entropie sous la forme  $\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$ .

Comme  $T_2 = T_1$ , on en déduit  $\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$ .

### □ Méthode 18.2. Calcul d'une variation d'entropie par décomposition en étapes

L'entropie étant une fonction d'état, sa variation sur une transformation complexe peut toujours être calculée en imaginant un chemin en plusieurs étapes, au cours desquelles il ne se passe qu'une chose à la fois : variation de température pour une phase seule, changement d'état à une température donnée. Dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur, ce chemin peut être visualisé sur le diagramme  $(P, v)$ .

On additionne alors les variations d'entropie sur chacune des étapes, en utilisant les différentes formules :

- pour un liquide seul ou un solide seul (considéré comme une phase condensée

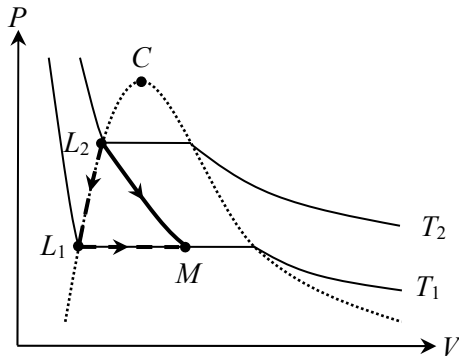


idéale de capacité thermique massique  $c$ ),  $\Delta s = c \ln \frac{T_2}{T_1}$  ;

– pour un gaz seul (considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ ),  
 $\Delta s = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1}$  ;

– pour une transition de phase à la température  $T$ ,  $\Delta s = \Delta x_2 \times \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T}$  avec  
 $\Delta x_2$  la variation du titre massique de la phase 2.

⇒ Exercice 18.7



On fait subir une détente à de l'ammoniac, de l'état liquide  $L_2$  ( $P_2 = 6,2$  bar,  $T_2 = 283$  K) à l'état diphase  $M$  ( $P_1 = 1,9$  bar,  $T_1 = 253$  K). On donne  $\Delta_{\text{vap}} h(T_1) = 1,3 \cdot 10^3$  kJ · kg<sup>-1</sup> et  $c = 4,6$  kJ · K<sup>-1</sup> · kg<sup>-1</sup> (capacité thermique de l'ammoniac liquide). Calculer la variation d'entropie massique  $\Delta s = s_M - s_{L_2}$  connaissant le titre massique en vapeur final  $x_M = 0,69$ .

L'enthalpie étant une fonction d'état, on peut calculer sa variation sur le chemin  $L_2L_1M$  :

$$\Delta s = (s_M - s_{L_1}) + (s_{L_1} - s_{L_2}) \text{ d'où } \Delta s = x_M \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_1)}{T_1} + c \ln \frac{T_2}{T_1}. \text{ AN } \Delta s = 4,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

## ■ Comment calculer une entropie créée ?

### □ Méthode 18.3. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur l'Univers

- Déterminer l'état final et calculer la variation d'entropie (voir méthode 18.1) de chaque sous-système subissant une transformation.
- L'entropie étant une fonction d'état extensive, en sommant les variations d'entropie précédentes, on obtient la variation d'entropie  $\Delta S_{\text{Univers}}$  de l'Univers. Compte tenu du caractère isolé de ce dernier, on en déduit  $\mathfrak{S}_c = \Delta S_{\text{Univers}}$ .

⇒ Exercices 18.3, 18.4, 18.5

Calculons l'entropie créée lors de la mise en contact d'un solide de température initiale  $T_1$  et de capacité thermique  $C$  avec un thermostat de température  $T_2$ .

À l'équilibre thermique, le solide a atteint la température  $T_2$  du thermostat (constante par définition). Le système {solide + thermostat} étant isolé par construction, la variation d'entropie de l'ensemble correspond à  $\Delta S_{\text{Univers}} = \mathfrak{S}_c$ .

La variation d'entropie du solide est  $\Delta S_{\text{solide}} = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ . La variation d'entropie du thermostat est

$\Delta S_{\text{thermostat}} = \frac{Q_{\text{thermostat}}}{T_2} = \frac{-Q_{\text{solide}}}{T_2}$ . Or, d'après le premier principe appliqué à une phase conden-

sée idéale,  $Q_{\text{solide}} = \Delta U_{\text{solide}} = C(T_2 - T_1)$  d'où  $\Delta S_{\text{thermostat}} = -\frac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$ .

Finalement,  $\mathfrak{S}_c = \Delta S_{\text{Univers}} = \Delta S_{\text{solide}} + \Delta S_{\text{thermostat}}$  soit  $\mathfrak{S}_c = C \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$ .

Vérifions que cette expression est bien positive ou nulle. En posant  $x = \frac{T_1}{T_2}$ , on a

$\mathfrak{S}_c = C(-\ln x + x - 1) = C f(x)$ . L'étude du tableau de variation montre que la fonction  $f(x)$  possède un minimum nul en  $x=1$ . Pour  $x \neq 1$ , on a bien  $\mathfrak{S}_c > 0$  comme prévu par le second principe (et pour  $x=1$ , soit  $T_1 = T_2$ , il ne se passe rien !).

#### □ Méthode 18.4. Calcul de l'entropie créée en raisonnant sur un sous-système donné

- Déterminer l'état final et calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  (voir méthode 18.1) d'un des sous-systèmes subissant une transformation.
- Déterminer son entropie échangée  $\mathfrak{S}_e$  et en déduire l'entropie créée par la relation  $\mathfrak{S}_c = \Delta S - \mathfrak{S}_e$ .

⇒ Exercices 18.3, 18.4, 18.5

Reprenons l'exemple de la méthode précédent, et calculons par cette nouvelle méthode l'entropie créée lors de la mise en contact d'un solide, de température initiale  $T_1$  et de capacité thermique  $C$ , avec un thermostat de température  $T_2$ .

La variation d'entropie du solide est  $\Delta S_{\text{solide}} = C \ln \frac{T_2}{T_1}$ . Au cours de la transformation, il échange

avec le thermostat une entropie  $\mathfrak{S}_e = \frac{Q}{T_2}$ . Or le premier principe appliqué au solide considéré

comme une phase condensée idéale ( $dV=0$ ) s'écrit  $\Delta U = Q$ . Le solide est en équilibre thermique avec le thermostat à la fin de la transformation donc  $\Delta U = C(T_2 - T_1)$ . On en déduit

$\mathfrak{S}_e = \frac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$  soit finalement  $\mathfrak{S}_c = \Delta S - \mathfrak{S}_e = C \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{C(T_2 - T_1)}{T_2}$ .

On trouve bien le même résultat avec les deux méthodes 18.3 et 18.4. On pourra donc utiliser indifféremment l'une ou l'autre pour déterminer une entropie créée.

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Une transformation quasi-statique est toujours réversible.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Une transformation réversible est forcément quasi-statique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Une transformation adiabatique et réversible est isentropique, quelle que soit la nature du système.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La variation d'entropie d'un système dépend du chemin suivi pour effectuer la transformation.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. L'entropie d'un système subissant une transformation irréversible augmente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. L'entropie d'un système isolé ne peut pas décroître.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. L'entropie échangée $\mathfrak{S}_e$ est une fonction d'état.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Une transformation isentropique d'un gaz parfait de coefficient $\gamma$ constant vérifie les lois de Laplace.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. L'entropie d'une phase condensée idéale de capacité thermique constante ne dépend que de la température.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Au cours d'un changement d'état isotherme entre deux phases 1 et 2, l'entropie d'un système diphasé varie de $\frac{\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T)}{T} \Delta x_2$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

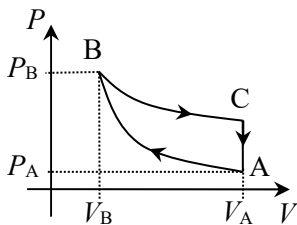
## ■ Transformations de systèmes gazeux

### □ Exercice 18.1. Transformation monobare

Un récipient, muni d'un piston mobile de masse négligeable pouvant se déplacer sans frottement, contient un gaz parfait occupant initialement un volume  $V_1 = 10,0 \text{ L}$  à la température  $T_1 = 373 \text{ K}$ . Les parois du récipient ainsi que le piston sont calorifugés. La pression qui s'exerce sur le piston vaut initialement  $P_1 = 1,00 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ . On donne  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Calculer la quantité de matière  $n$  de gaz contenue dans le récipient.
2. La contrainte qui maintient le piston en équilibre est supprimée, de sorte que la pression qui s'exerce sur lui tombe brutalement à la valeur  $P_2 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  correspondant à la pression atmosphérique du lieu. Le gaz évolue vers un nouvel état d'équilibre caractérisé par les valeurs respectives  $T_2$  et  $V_2$  de la température et du volume.
  - a) Calculer  $T_2$  et  $V_2$  pour une capacité thermique à volume constant  $C_V = 5nR/2$ .
  - b) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S$  du gaz.
  - c) Calculer l'entropie créée  $\mathfrak{S}_c$  au cours de la transformation. Quelle est la cause de l'irréversibilité ?

### □ Exercice 18.2. Étude d'un cycle



Un gaz parfait de quantité de matière constante et caractérisé par un rapport  $\gamma = C_P/C_V = 1,4$  parcourt le cycle ci-contre, constitué des transformations suivantes :

- AB : isentropique ;
- BC : isotherme réversible ;
- CA : isochore et monotherme (température extérieure  $T_A$ ).

On donne  $P_A = 1,0 \text{ bar}$ ,  $V_A = 500 \text{ cm}^3$ ,  $T_A = 100 \text{ K}$ ,  $T_B = 300 \text{ K}$ .

1. Calculer  $P_B$ ,  $V_B$  et  $P_C$ .
2. Calculer les variations d'entropie  $\Delta S_{BC}$ ,  $\Delta S_{CA}$  ainsi que l'entropie créée  $\mathfrak{S}_{cCA}$  au cours de la transformation CA.

### □ Exercice 18.3. Entrée d'air dans une bouteille \* \*

Une bouteille rigide de volume  $V_1$  possède des parois calorifugées, et elle est fermée par un bouchon également calorifugé ; elle est initialement vide. L'air qui l'entoure est à la pression  $P_0$  et à la température  $T_0$  ; on le considère comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma$  constant. On enlève le bouchon et la bouteille se remplit très rapidement d'air ; dès que l'air n'entre plus, on rebouche la bouteille. On notera  $V_0$  le volume occupé *initialement* par l'air qui est entré dans la bouteille.

1. Représenter sur un schéma l'état initial, un état intermédiaire et l'état final, en précisant bien le système étudié.
2. Pourquoi peut-on considérer la transformation comme adiabatique ? Déterminer alors l'état final de l'air dans la bouteille, notamment sa température finale  $T_1$ .
3. Déterminer l'entropie créée, et préciser la cause de cette création d'entropie.

## ■ Transformations de systèmes solides

### □ Exercice 18.4. Contact thermique entre deux solides

Deux solides  $S_1$  et  $S_2$  de capacités thermiques respectives  $C_1$  et  $C_2$  et de températures initiales  $T_{01}$  et  $T_{02}$  sont mis en contact. Des parois rigides et athermanes isolent l'ensemble de l'extérieur.

1. Déterminer l'expression de la température finale  $T_f$  du système  $\Sigma$  constitué par la réunion des deux solides.
2. Pour simplifier, on suppose que  $C_1 = C_2 = C$ . Exprimer la variation d'entropie  $\Delta S_\Sigma$  du système global, ainsi que l'entropie créée  $\mathfrak{S}_c$  au cours de la transformation. Commenter.

### □ Exercice 18.5. Effet Joule \*

Un conducteur ohmique de résistance  $R = 20,0 \Omega$ , parcouru par un courant d'intensité constante  $I = 10,0 \text{ A}$ , est plongé dans une masse  $m_e = 500 \text{ g}$  d'eau pendant un intervalle de temps  $\Delta t = 30,0 \text{ s}$ . On note  $\Sigma$  le système constitué par la réunion de l'eau et du conducteur ohmique. On donne : masse du conducteur  $m_c = 200 \text{ g}$ ; capacité thermique massique du conducteur  $c_c = 0,385 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ ; capacité thermique massique de l'eau  $c_e = 4,19 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ .

1. La température de l'ensemble est maintenue constante à  $T_0 = 290 \text{ K}$  par contact avec un thermostat.

- a) Calculer la variation d'entropie de  $\Sigma$  ainsi que l'entropie créée.
- b) Quelle est la cause physique d'irréversibilité ?

2. Partant d'une température  $T_0 = 290 \text{ K}$ , on plonge le système  $\Sigma$  dans un calorimètre aux parois athermanes, et de capacité calorifique négligeable.

- a) Calculer la température finale du système  $\Sigma$  au bout de la même durée.
- b) Calculer la variation d'entropie de  $\Sigma$  ainsi que l'entropie créée.



### □ Exercice 18.6. Contact avec une suite de $N$ thermostats \* \*

On désire porter progressivement un solide, de capacité thermique  $C$ , de la température  $T_0$  à la température  $T_F > T_0$ . Pour réaliser cette transformation, le solide est mis successivement en contact avec  $N$  thermostats de températures  $T_k$  en progression arithmétique :

$$T_k = T_0 + k \frac{T_F - T_0}{N} \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, N.$$

1. a) Déterminer l'entropie créée  $\mathfrak{S}_c^k$  au cours du  $k$ -ième contact, correspondant au passage du solide de la température  $T_{k-1}$  à la température  $T_k$ .
- b) On pose  $\varepsilon_k = \frac{T_k - T_{k-1}}{T_k}$ . Donner une expression approchée de  $\mathfrak{S}_c^k$  dans l'hypothèse  $\varepsilon_k \ll 1$ .
2. Exprimer l'entropie créée  $\mathfrak{S}_c$  à l'issue des  $N$  contacts en utilisant une somme sur  $k$ . Quel résultat obtient-on en faisant tendre  $N$  vers l'infini ? Commentaires.

## ■ Corps pur diphasé

### □ Exercice 18.7. Vaporisation d'eau dans le vide

Une enceinte de volume  $V = 1,00$  L, initialement vide, est maintenue à la température constante  $T_0 = 373$  K ( $\theta_0 = 100$  °C). On y introduit une masse  $m = 1,00$  g d'eau liquide à la température  $T_0 = 373$  K. La vapeur d'eau sera assimilée à un gaz parfait.

On donne :  $P_{\text{sat}} = 1,01$  bar (pression de vapeur saturante de l'eau à  $T_0$ ),  $R = 8,31$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup> (constante des gaz parfaits),  $\Delta_{\text{vap}}h = 2,25$  kJ·g<sup>-1</sup> (enthalpie massique de vaporisation de l'eau liquide à  $T_0$ ),  $M = 18,0$  g·mol<sup>-1</sup> (masse molaire de l'eau) et  $\rho = 1,00$  kg·L<sup>-1</sup> (masse volumique de l'eau liquide).

1. a) Déterminer la composition finale du système.
- b) Calculer la variation d'entropie au cours de cette transformation.
2. Reprendre les questions précédentes en considérant cette fois que la masse d'eau introduite dans les mêmes conditions est  $m' = m/2$ .

### □ Exercice 18.8. Surfusion de l'eau

Une masse  $m = 20,0$  g d'eau liquide très pure a été refroidie très lentement à la température  $T_1 = 261$  K ( $\theta_1 = -12$  °C). Cet état dans lequel l'eau est encore à l'état liquide malgré une température inférieure à  $T_0 = 273$  K ( $\theta_0 = 0$  °C) est qualifié de métastable : la moindre perturbation (choc, introduction d'une poussière...) conduit à une solidification très rapide du liquide. On propose dans cet exercice d'examiner ce phénomène. On supposera que toutes les transformations ont lieu à pression atmosphérique  $P = 1,01$  bar. En outre, compte tenu de la rapidité avec laquelle l'eau surfondue se solidifie, on considérera les transformations adiabatiques.

1. Déterminer la masse de glace  $m_g$  obtenue ainsi que la température finale  $T_2$ .
2. Calculer l'entropie créée au cours de la transformation.

*Données* : enthalpie massique de fusion de la glace  $\Delta_{\text{fus}}h = 3,35 \cdot 10^2$  kJ·kg<sup>-1</sup> à 0 °C ; capacité thermique de l'eau liquide  $c_\ell = 4,18$  kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup> ; capacité thermique de la glace  $c_s = 2,06$  kJ·K<sup>-1</sup>·kg<sup>-1</sup> ; masse molaire de l'eau  $M = 18,0$  g·mol<sup>-1</sup>.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 18.3.* Attention à la valeur de la pression extérieure pour le calcul du travail : elle vaut  $P_0$  pour l'air au contact de l'atmosphère, mais elle est nulle pour l'air au contact du vide (on doit donc séparer le calcul en deux parties).

*Exercice 18.4.* À la question 1, appliquer le premier principe au système constitué par la réunion des deux solides.

*Exercice 18.5.* Penser au travail des forces électriques. À la question 2.a, appliquer le premier principe au système  $\Sigma$ .

*Exercice 18.6.* Dans la deuxième partie de la question 2, on pourra donner un majorant de l'entropie.

*Exercice 18.7.* À la question 1.a, calculer la pression à l'équilibre en supposant que tout le liquide s'est vaporisé, puis conclure.

*Exercice 18.8.* Faire une hypothèse sur l'état final, puis calculer  $\Delta H$  en décomposant la transformation envisagée en étapes simples.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai	faux	vrai	vrai	faux

1. Le caractère quasi-statique est une condition nécessaire mais pas suffisante.
4. L'entropie est une fonction d'état, donc sa variation est indépendante du chemin suivi pour réaliser la transformation considérée.
5. L'irréversibilité d'une transformation n'impose pas le signe de  $\Delta S$  : elle entraîne  $\delta_c > 0$ , mais on peut avoir en même temps  $\delta_c < 0$  et au total  $\Delta S < 0$ .
7. En revanche,  $\Delta S = \delta_e + \delta_c$  et bien que  $\delta_e$  et  $\delta_c$  ne soient pas des fonctions d'état (l'échange et la création d'entropie dépendant du chemin suivi), l'entropie  $S$  en est une.
10. Cette variation est celle de l'entropie massique, et non de l'entropie.

### □ Les erreurs classiques

- Ne pas écrire le deuxième principe avant d'avoir défini clairement à quel système on l'applique, et entre quels états (ou quels instants).
- $\Delta S = 0$  n'implique pas que la transformation associée soit réversible. Pour qu'une transformation soit réversible, il faut que  $\delta_c = 0$ . De la même manière,  $\Delta S > 0$  ne signifie pas que la transformation soit irréversible, sauf si le système est isolé ; l'entropie d'un système non isolé peut augmenter du fait de transferts thermiques reçus de l'extérieur.
- La relation  $\Delta S = \frac{\Delta H}{T}$  est valable uniquement pour une transition de phase à température constante : ne pas l'appliquer en dehors de ces conditions restrictives.



# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 18.1

1. D'après la loi des gaz parfaits à l'équilibre initial :  $n = \frac{P_1 V_1}{RT_1}$ . AN  $n = 3,22 \text{ mol}$ .

2. a) Au cours de la transformation, la variation d'énergie interne du gaz parfait contenu dans le récipient ne dépend que de la température :  $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1)$ . En outre, comme les parois du récipient et le piston sont calorifugées, la transformation est adiabatique : le premier principe pour le gaz se simplifie donc en  $\Delta U = W$ .

De plus, la transformation est monobare sous la pression  $P_2$ , d'où  $W = -P_2(V_2 - V_1)$ .

$$\text{Ainsi } \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = -P_2(V_2 - V_1) = -nRT_2 + P_2V_1 = -nRT_2 + nRT_1 \frac{P_2}{P_1} \quad \text{d'où } T_2 = \frac{2}{7} \left( \frac{5}{2} + \frac{P_2}{P_1} \right) T_1.$$

$$\text{AN } T_2 = 277 \text{ K}.$$

En utilisant la loi des gaz parfaits à l'état final :  $V_2 = \frac{nRT_2}{P_2}$ . AN  $V_2 = 7,42 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 74,2 \text{ L}$ .

b) En utilisant la variation d'entropie du gaz parfait, on obtient  $\Delta S = nR \left( \frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$ .

$$\text{AN } \Delta S = 33,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

⇒ Méthode 18.1

c) La transformation est adiabatique donc l'entropie échangée  $\mathfrak{S}_e$  est nulle. On en déduit  $\mathfrak{S}_e = \Delta S = 33,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . La cause d'irréversibilité est l'inhomogénéité de pression de part et d'autre du piston, qui provoque son déplacement brutal.

## Exercice 18.2

1. La transformation AB est isentropique : la loi de Laplace donne  $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma$ , d'où

$$P_B = \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A. \quad \text{AN } P_B = 47 \text{ bar}. \quad \text{De même, } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \text{d'où } V_B = \left( \frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_A.$$

AN  $V_B = 32 \text{ cm}^3$ . La détente BC est isotherme, donc l'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$P_B V_B = P_C V_C = P_C V_A, \quad \text{d'où } P_C = P_B \frac{V_B}{V_A}. \quad \text{AN } P_C = 3,0 \text{ bar}.$$

2. La transformation BC est réversible donc  $\delta_{cBC} = 0$ , et à chaque instant on peut supposer que

$$T = T_{\text{ext}}. \text{ Ainsi } \Delta S_{BC} = \delta_{cBC} = \frac{Q_{BC}}{T_B}. \text{ Or, d'après le premier principe } \Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC}.$$

Comme l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température, le caractère isotherme de la transformation implique que  $\Delta U_{BC} = 0$  donc  $Q_{BC} = -W_{BC}$ . La transformation étant réversible, à chaque instant  $P = P_{\text{ext}}$  d'où  $\delta W = -P_{\text{ext}} dV = -P dV$ .

$$\text{Finalement, } \Delta S_{BC} = -\frac{1}{T_B} \int_B^C \delta W = \frac{1}{T_B} \int_B^C P dV = \int_B^C nR \frac{dV}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A} \int_B^C \frac{dV}{V} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_C}{V_B} \text{ soit}$$

$$\boxed{\Delta S_{BC} = \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{V_A}{V_B}}. \text{ AN } \boxed{\Delta S_{BC} = 1,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}.$$

Pour calculer  $\Delta S_{CA}$ , on utilise la relation :  $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_A}{T_B} + nR \ln \frac{V_A}{V_B}$ . Comme la

$$\text{transformation est isochore } V_B = V_A \text{ d'où } \boxed{\Delta S_{CA} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P_A V_A}{T_A} \ln \frac{T_A}{T_B}}. \text{ AN } \boxed{\Delta S_{CA} = -1,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}.$$

⇒ Méthode 18.1

*✎ On aurait pu établir directement ce résultat en écrivant que sur le cycle  $\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$ . La transformation AB étant isentropique,  $\Delta S_{AB} = 0$  d'où  $\Delta S_{CA} = -\Delta S_{BC}$ .*

L'expression de l'entropie créée  $\delta_c$  au cours de la transformation CA peut être déterminée de manière indirecte par la différence  $\delta_{cCA} = \Delta S_{CA} - \delta_{eCA}$ .

L'expression de l'entropie échangée pour la transformation monotherme s'écrit  $\delta_{eCA} = \frac{Q_{CA}}{T_A}$ .

Or  $W_{CA} = 0$  (transformation isochore) d'où  $Q_{CA} = \Delta U_{CA} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_A - T_C)$ . Finalement, on

$$\text{obtient } \delta_{eCA} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P_A V_A}{T_A} \left( 1 - \frac{T_C}{T_A} \right) \text{ donc } \boxed{\delta_{cCA} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{P_A V_A}{T_A} \left( \frac{T_B}{T_A} - 1 - \ln \frac{T_B}{T_A} \right)}. \text{ AN}$$

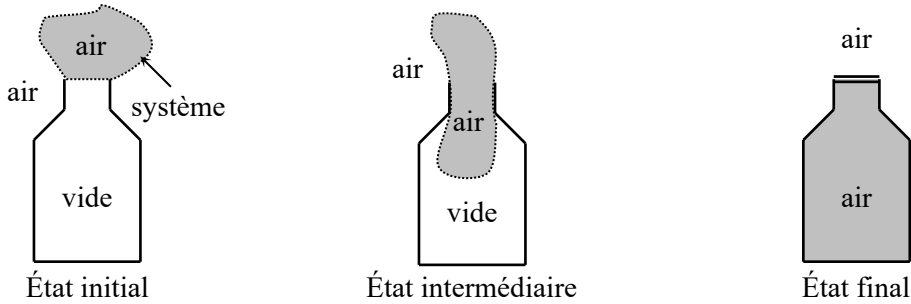
$$\boxed{\delta_{cCA} = 1,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0}.$$

⇒ Méthode 18.4

*✎ On constate que la transformation CA est irréversible. Ce résultat était prévisible. En effet, pendant toute la transformation, le gaz est en contact avec un thermostat à la température  $T_A$  alors que sa température interne diminue pour passer de  $T_C = T_B$  à  $T_A$ . Le système est donc constamment en présence d'une inhomogénéité de température, source d'irréversibilité.*

### Exercice 18.3

1. On choisit comme système la quantité totale d'air qui va entrer dans la bouteille. Au départ, ce système se trouve entièrement en dehors de la bouteille.



☛ On ne peut pas choisir « la bouteille » comme système pour lui appliquer les deux principes, car ce serait un système ouvert : d'abord vide puis rempli d'air.

2. Le volume final de cette quantité d'air est celui de la bouteille, soit  $V_1$ . L'air cesse d'entrer lorsque sa pression devient égale à celle de l'air extérieur : la pression finale est donc  $P_0$ . L'entrée d'air dans la bouteille vide est une transformation très rapide : elle est donc adiabatique car les transferts thermiques (toujours lents par rapport aux transferts mécaniques) n'ont pas le temps de s'effectuer.

Premier principe pour ce système, entre les états initial et final :  $\Delta E = Q + W = W$ .

Membre de gauche :  $\Delta E = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p \approx \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0)$  car la variation d'énergie

cinétique est nulle, et on néglige celle de l'énergie potentielle (en l'absence de données).

Pour le travail des forces de pression, on divise la frontière du système en deux parties : celle en contact avec le vide (pression extérieure nulle donc pas de travail), et celle en contact avec l'air extérieur à la pression  $P_0$  constante, qui subit une diminution de volume de  $V_0$  à 0.

Alors  $W = -\int_{V_0}^0 P_0 dV = -P_0 \int_{V_0}^0 dV = P_0 V_0$ , ou encore  $W = nRT_0$ .

Donc  $\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = nRT_0$  d'où on tire  $T_1 = \gamma T_0$ .

3. La variation d'entropie s'écrit  $\Delta S = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} + nR \ln \frac{V_1}{V_0}$ . Or  $nR = \frac{P_0 V_0}{T_0}$ ,  $\frac{T_1}{T_0} = \gamma$  et

$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T_1 P_0}{P_0 T_0} = \frac{T_1}{T_0} = \gamma$  donc  $\Delta S = \frac{P_0 V_0}{T_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \gamma$ . Second principe :  $\Delta S = \delta_e + \delta_c$  avec  $\delta_e = 0$  car

il n'y a pas de transfert thermique, donc  $\delta_c = \frac{P_0 V_0}{T_0} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \gamma$  (qui est bien positive).

⇒ Méthode 18.4

La cause de l'irréversibilité est l'inhomogénéité de densité entre l'air extérieur et le vide.

### Exercice 18.4

1. Au cours de la transformation, l'énergie interne de  $S_1$  varie de  $\Delta U_1 = C_1(T_f - T_{01})$ , celle de  $S_2$  varie de  $\Delta U_2 = C_2(T_f - T_{02})$ . Et l'énergie interne est une grandeur extensive donc pour le système global  $\Sigma$  :  $\Delta U_\Sigma = \Delta U_1 + \Delta U_2$ . Or  $\Sigma$  est isolé de l'extérieur par des parois rigides (donc  $W = 0$ ) et athermanes (d'où  $Q = 0$ ). Le premier principe appliqué à  $\Sigma$  donne donc  $\Delta U_\Sigma = 0$

d'où on tire  $T_f = \frac{C_1 T_{01} + C_2 T_{02}}{C_1 + C_2}$ . En particulier, si  $C_1 = C_2 = C$  on trouve  $T_f = \frac{T_{01} + T_{02}}{2}$ .

2. Les variations d'entropie des solides  $S_1$  et  $S_2$  au cours de la transformation sont respectivement  $\Delta S_1 = C \ln \frac{T_f}{T_{01}}$  et  $\Delta S_2 = C \ln \frac{T_f}{T_{02}}$ . L'entropie étant une grandeur extensive, pour

le système  $\Sigma$  on a  $\Delta S_\Sigma = \Delta S_1 + \Delta S_2$ , soit  $\Delta S_\Sigma = C \ln \frac{T_f^2}{T_{01} T_{02}} = C \ln \frac{(T_{01} + T_{02})^2}{4 T_{01} T_{02}}$ .

Le système  $\Sigma$  est isolé : sa variation d'entropie peut être assimilée à celle de l'Univers. Son entropie d'échange est nulle donc  $\mathfrak{S}_c = \Delta S_\Sigma$ .

⇒ Méthode 18.3

Pour être en accord avec le deuxième principe, le résultat obtenu doit nécessairement conduire à une entropie créée positive. On peut vérifier la cohérence du résultat en remarquant que

$$(T_{01} + T_{02})^2 = T_{01}^2 + T_{02}^2 + 2T_{01}T_{02} = T_{01}^2 + T_{02}^2 - 2T_{01}T_{02} + 4T_{01}T_{02} = (T_{01} - T_{02})^2 + 4T_{01}T_{02}.$$

Donc  $(T_{01} + T_{02})^2 \geq 4T_{01}T_{02}$  soit  $\frac{(T_{01} + T_{02})^2}{4T_{01}T_{02}} \geq 1$ . Ainsi  $\mathfrak{S}_c = C \ln \frac{(T_{01} + T_{02})^2}{4T_{01}T_{02}} \geq 0$  comme attendu.

### Exercice 18.5

1. a) La température de l'ensemble étant maintenue constante, pour le système constitué par la réunion des deux phases condensées que constituent l'eau et le conducteur ohmique, on a  $\Delta S_\Sigma = 0$  et  $\Delta U_\Sigma = 0$ . Pour calculer l'entropie créée on peut remarquer que, le système global  $\{\Sigma + \text{thermostat}\}$  étant isolé par construction, la variation d'entropie de l'ensemble correspond à  $\Delta S = \mathfrak{S}_c$  (que l'on peut considérer comme la variation d'entropie de l'Univers). Or, comme l'entropie est une grandeur extensive,  $\Delta S = \Delta S_\Sigma + \Delta S_{\text{thermostat}} = \Delta S_{\text{thermostat}}$ . En outre,

$\Delta S_{\text{thermostat}} = \frac{Q_{\text{thermostat}}}{T_0} = \frac{-Q_\Sigma}{T_0}$ . Le premier principe appliqué au système  $\Sigma$  (seul) s'écrit

$\Delta U_\Sigma = Q_\Sigma + W_\Sigma = Q_\Sigma + RI^2 \Delta t = 0$ . Finalement,  $\mathfrak{S}_c = \frac{RI^2 \Delta t}{T_0} > 0$ . AN  $\mathfrak{S}_c = 1,13 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$ .

⇒ Méthode 18.3

b) La cause d'irréversibilité est ici l'effet Joule.

2. a) Compte tenu des propriétés des parois du calorimètre, on peut considérer que la transformation subie par le système  $\Sigma$  est adiabatique. En outre, pour les phases condensées que

constituent l'eau et le conducteur ohmique, le travail des forces de pression est négligé : seul le travail électrique est à considérer. Le premier principe appliqué à  $\Sigma$  s'écrit alors  $\Delta U_\Sigma = RI^2\Delta t$ , soit, étant donné le caractère extensif de l'énergie interne  $m_e c_e (T_f - T_0) + m_c c_c (T_f - T_0) = RI^2\Delta t$ .

On en déduit  $T_f = T_0 + \frac{RI^2\Delta t}{m_e c_e + m_c c_c}$ . AN  $T_f = 318 \text{ K}$ .

**b)** Les variations d'entropie de l'eau et du conducteur ohmique au cours de la transformation sont respectivement  $\Delta S_{\text{eau}} = m_e c_e \ln \frac{T_f}{T_0}$  et  $\Delta S_{\text{conducteur}} = m_c c_c \ln \frac{T_f}{T_0}$ . L'entropie étant extensive,

pour le système  $\Sigma$  on a  $\Delta S_\Sigma = \Delta S_{\text{eau}} + \Delta S_{\text{conducteur}}$  soit  $\Delta S_\Sigma = (m_e c_e + m_c c_c) \ln \frac{T_f}{T_0}$ .

Le système  $\Sigma$  subit une transformation adiabatique : son entropie échangée est donc nulle d'où

$$\mathfrak{S}_c = \Delta S_\Sigma = (m_e c_e + m_c c_c) \ln \left( 1 + \frac{RI^2\Delta t}{T_0(m_e c_e + m_c c_c)} \right) > 0.$$

AN  $\mathfrak{S}_c = \Delta S_\Sigma = 198 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$ .

### Exercice 18.6

**1. a)** Le résultat s'obtient directement à partir de l'exemple illustratif de la méthode 18.2 ou

18.3, en remplaçant  $T_2$  par  $T_k$  et  $T_1$  par  $T_{k-1}$ , soit  $\mathfrak{S}_c^k = -C \left( \frac{T_k - T_{k-1}}{T_k} + \ln \frac{T_{k-1}}{T_k} \right)$ .

**b)** En posant  $\varepsilon_k = \frac{T_k - T_{k-1}}{T_k}$ , l'expression précédente devient  $\mathfrak{S}_c^k = -C \left[ \varepsilon_k + \ln(1 - \varepsilon_k) \right]$ .

Pour  $\varepsilon_k \ll 1$ , le logarithme se développe à l'ordre 2 en  $\ln(1 - \varepsilon_k) = -\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{2}$  d'où  $\mathfrak{S}_c^k = C \frac{\varepsilon_k^2}{2}$ .

**2.** À l'issue des  $N$  contacts, l'entropie créée est  $\mathfrak{S}_c = \sum_{k=1}^N \mathfrak{S}_c^k = \frac{C}{2} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k^2$ . En explicitant  $\varepsilon_k$ , on

obtient l'expression demandée :  $\mathfrak{S}_c = \frac{C}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(T_F - T_0)^2}{(NT_0 + k(T_F - T_0))^2}$ .

Pour déterminer le comportement de  $\mathfrak{S}_c$  quand  $N$  tend vers l'infini, on peut encadrer l'entropie

créée en remarquant que  $0 \leq \mathfrak{S}_c < \frac{C}{2} \sum_{k=1}^N \frac{(T_F - T_0)^2}{N^2 T_0^2}$ , soit  $0 \leq \mathfrak{S}_c < \frac{C}{2} \frac{(T_F - T_0)^2}{T_0^2} \frac{1}{N}$ . On en déduit

que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_c = 0$  : pour un contact avec un nombre infini de thermostats, de température augmentant chaque fois infiniment peu, la transformation devient réversible. On vérifie comme prévu que cette transformation réversible est un modèle obtenu par passage à la limite.

*✎ Lors du contact thermique, il a été possible d'obtenir une transformation réversible en augmentant très lentement et de manière quasi continue la température des thermostats. De même, on pourrait se demander s'il est possible de rendre réversible la détente de Joule et Gay-Lussac, en augmentant très progressivement le volume occupé par le gaz. La réponse est non. La différence essentielle entre ces deux expériences tient dans la manière dont on agit sur les inhomogénéités. Pour le contact thermique, l'utilisation d'un nombre infini de sources permet de supprimer (par passage à la limite) les inhomogénéités de température. Au cours d'une détente de Joule et Gay-Lussac, même si le volume occupé par le gaz croît infiniment lentement, celui-ci est systématiquement mis au contact du vide au cours de chaque petit accroissement de volume. Ainsi l'inhomogénéité de densité moléculaire reste présente, conduisant à une transformation toujours irréversible.*

### Exercice 18.7

**1. a)** À  $T_0 = 373 \text{ K}$  ( $100^\circ \text{C}$ ), la pression de vapeur saturante de l'eau est  $P_{\text{sat}} = 1,01 \text{ bar}$ . L'enceinte étant initialement vide, des molécules d'eau vont passer de la phase liquide à la phase gazeuse afin d'augmenter la pression dans l'enceinte. Deux situations peuvent se présenter :

- la masse d'eau liquide introduite n'est pas suffisante pour atteindre la pression de vapeur saturante ; tout le liquide est alors vaporisé et la pression à l'équilibre est telle que  $P < P_{\text{sat}}$  ;
- la masse d'eau liquide introduite est suffisante pour atteindre la pression de vapeur saturante ; une fois cette pression atteinte, le liquide cesse de se vaporiser et un équilibre diphasé s'établit.

Supposons que tout le liquide se vaporise. Dans ce cas, la pression à l'équilibre est donnée par  $P = \frac{mRT_0}{MV}$ . AN  $P = 1,72 \text{ bar}$ . Cette pression est supérieure à  $P_{\text{sat}}$  : l'hypothèse de départ est donc erronée, et seule une fraction du liquide initialement introduit est vaporisée.

Dans ce cas, la fraction massique du gaz dans le mélange est donnée par  $x_g = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell}$ , avec

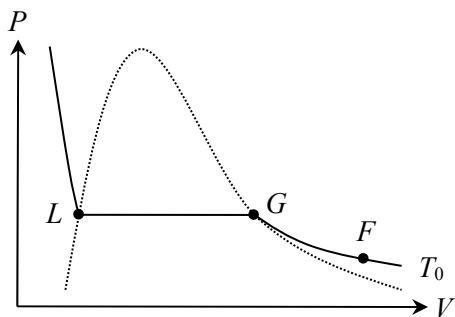
$v = \frac{V}{m}$ ,  $v_\ell = \frac{1}{\rho}$  et  $v_g = \frac{RT_0}{MP_{\text{sat}}}$ . On obtient  $x_g = 5,88 \cdot 10^{-2}$ , soit une masse de gaz

$$\boxed{m_g = mx_g = 5,88 \cdot 10^{-1} \text{ g}} ; \text{ la masse de liquide restant est alors } \boxed{m_\ell = m - m_g = 4,12 \cdot 10^{-1} \text{ g}}.$$

⇒ Méthode 16.3

**b)** Sur le palier de liquéfaction,  $\boxed{\Delta S = mx_g \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_0}}$ . AN  $\boxed{\Delta S = 3,55 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}$ .

**2.** Supposons que tout le liquide s'évapore. Dans ce cas, la pression à l'équilibre est donnée par  $P = \frac{m'RT_0}{M'V}$ . AN  $P = 0,861 \text{ bar}$ . Cette pression est inférieure à  $P_{\text{sat}}$  : l'hypothèse de départ est donc correcte. On en déduit  $\boxed{m'_g = m' = 5,00 \cdot 10^{-1} \text{ g}}$  et  $\boxed{m'_\ell = 0,00 \text{ g}}$ .



Pour calculer la variation d'entropie, on imagine pour simplifier une transformation réversible isotherme LGF (représentée sur le diagramme ci-contre) dont l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final coïncident avec ceux de la transformation étudiée. L'entropie est une fonction d'état donc  $\Delta S = \Delta S_{LG} + \Delta S_{GF}$ .

Or  $\Delta S_{LG} = \frac{m' \Delta_{\text{vap}} h}{T_0}$  et  $\Delta S_{GF} = \frac{m' R}{M} \ln \frac{V_F}{V_G}$  d'où  $\Delta S = m' \left( \frac{\Delta_{\text{vap}} h}{T_0} + \frac{R}{M} \ln \frac{V_F}{V_G} \right)$ .

AN avec  $V_F = 1,00 \text{ L}$  et  $V_G = \frac{m' R T_0}{M P_s} = 0,850 \text{ L}$  :  $\Delta S = 3,05 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

⇒ Méthode 18.2

### Exercice 18.8

1. Les deux situations finales les plus probables sont :

- toute l'eau liquide s'est solidifiée et la température finale est inférieure à  $0^\circ \text{C}$ ;
- seule une partie de l'eau s'est solidifiée et l'état final est un équilibre diphasé à  $0^\circ \text{C}$ .

Supposons d'abord que toute l'eau s'est solidifiée. Pour réaliser cette transformation, on imagine la succession suivante de transformations :

- l'eau liquide est d'abord réchauffée jusqu'à  $0^\circ \text{C}$  :  $\Delta H_1 = m c_\ell (T_0 - T_1)$  ;
- puis elle est entièrement solidifiée à cette température :  $\Delta H_2 = m \Delta_{\text{sol}} h = -m \Delta_{\text{fus}} h$  ;
- enfin la glace formée est refroidie jusque  $T_2$  :  $\Delta H_3 = m c_s (T_2 - T_0)$ .

La transformation est monobare et suffisamment rapide pour être considérée comme adiabatique donc  $\Delta H = Q_p = 0$ .

L'enthalpie est une fonction d'état. En utilisant la décomposition ci-dessus, on obtient

$$\Delta H = m c_\ell (T_0 - T_1) - m \Delta_{\text{fus}} h + m c_s (T_2 - T_0) = 0, \text{ soit } T_2 = T_0 + \frac{\Delta_{\text{fus}} h - c_\ell (T_0 - T_1)}{c_s}.$$

AN  $T_2 = 460 \text{ K}$  ( $187^\circ \text{C}$ ). À cette température, toute l'eau devrait être en phase vapeur : l'hypothèse de départ est donc incorrecte.

Supposons maintenant que seule une partie de l'eau s'est solidifiée. Pour réaliser cette transformation, on imagine la succession suivante de transformations :

- l'eau liquide est d'abord réchauffée jusqu'à  $0^\circ \text{C}$  :  $\Delta H_1 = m c_\ell (T_0 - T_1)$  ;
- une fraction  $x_s$  de liquide est solidifiée à cette température :  $\Delta H_2 = x_s m \Delta_{\text{sol}} h = -x_s m \Delta_{\text{fus}} h$ .

En utilisant les mêmes hypothèses que précédemment :  $\Delta H = m c_\ell (T_0 - T_1) - x_s m \Delta_{\text{fus}} h = 0$ , soit

$$x_s = \frac{c_\ell (T_0 - T_1)}{\Delta_{\text{fus}} h}. \text{ AN } x_s = 15,0 \%. \text{ On trouve bien } 0 \leq x_s \leq 1 \text{ donc l'hypothèse est la bonne.}$$

Le mélange final est donc composé de 3,0 g de glace et de 17,0 g d'eau liquide, en équilibre à la température 0 °C.

⇒ Méthode 17.6


**2.** La transformation est adiabatique donc l'entropie créée est égale à la variation d'entropie :  $\mathfrak{S}_c = \Delta S$ . Comme l'entropie est une fonction d'état, en utilisant la décomposition précédente on

obtient :  $\Delta S = \Delta S_{\text{chauffage liquide}} + \Delta S_{\text{solidification partielle}} = mc_\ell \ln \frac{T_0}{T_1} - x_s m \frac{\Delta_{\text{fus}} h}{T_0}$ .

Avec la valeur de  $x_s$  déterminée à la question précédente, on obtient finalement :

$$\boxed{\mathfrak{S}_c = \Delta S = mc_\ell \left[ \ln \frac{T_0}{T_1} - \frac{T_0 - T_1}{T_0} \right]}. \text{ AN } \boxed{\mathfrak{S}_c = 8,32 \cdot 10^{-2} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}.$$

⇒ Méthode 18.2

 Cette transformation brutale, aboutissant à un équilibre stable, est bien irréversible.





# Machines thermiques

UN SCIENTIFIQUE



L'ingénieur écossais **James WATT** (1736-1819) n'est pas un théoricien mais un inventeur de génie. Dans les années 1760, il est chargé de réparer des machines à vapeur conçues par **NEWCOMEN**, ce qui l'amène à y faire de notables améliorations. **WATT** s'allie alors avec des industriels qui se chargent de la commercialisation de ses inventions. L'ingéniosité de **WATT** a contribué grandement au développement des transports et à l'avènement de la révolution industrielle.

## ■ Un peu d'histoire

La transformation d'énergie thermique en énergie mécanique a permis les premiers déplacements motorisés. Dans un article publié en 1690, Denis **PAPIN** décrit le principe de l'action de la vapeur dans un piston. Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'industriel anglais Thomas **NEWCOMEN** conçoit une machine à vapeur pour extraire du minerai. Conscient du manque de rendement de telles machines à vapeur dans lesquelles près des trois quarts de l'énergie étaient perdus, en particulier à cause de la condensation dans le cylindre, James **WATT** ajoute un récipient supplémentaire, le condenseur, ce qui améliore sensiblement le rendement. D'autres inventions permettent d'améliorer encore l'efficacité des machines. Les justifications scientifiques de ces propriétés arriveront plus tard avec Sadi **CARNOT**, Rudolf **CLAUSIUS**, James **JOULE** et William **THOMSON**.

## ■■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'écriture particulière des principes de la thermodynamique sur un cycle
- ▷ La définition de la performance d'une machine thermique
- ▷ Les signes des transferts thermiques et des travaux échangés par l'agent thermique dans un moteur, un réfrigérateur et une pompe à chaleur dithermes
- ▷ Le théorème de Carnot
- ▷ Des ordres de grandeur de performances de machines réelles
- ▷ Le principe de la cogénération

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme
- ▷ Représenter le schéma de principe d'une machine thermique, en y indiquant les travaux et les transferts thermiques
- ▷ Identifier un cycle moteur ou récepteur d'après le sens de parcours du cycle sur un graphique
- ▷ Calculer la performance d'une machine thermique
- ▷ Retrouver l'expression du rendement ou de l'efficacité de Carnot

## ■ Présentation générale

### □ Modélisation d'une machine thermique

Une **machine thermique** est un dispositif qui permet de réaliser une conversion continue d'énergie. En pratique, un fluide, appelé **agent thermique**, y décrit des transformations cycliques au cours desquelles il échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de travail et de transfert thermique.

Les étapes du cycle où ont lieu des transferts thermiques sont modélisées comme des mises en contact du fluide avec  $N$  thermostats de températures  $T_i$  ; on note  $Q_i$  les transferts thermiques correspondants, et  $W$  le travail total sur le cycle.

### □ Application des deux principes sur un cycle

Sur un cycle de fonctionnement,  $\Delta U = 0$  et  $\Delta S = 0$ . Pour un contact avec  $N$  thermostats, on en déduit les relations suivantes.

– Premier principe :  $W + \sum_{i=1}^N Q_i = 0$ .

– Deuxième principe :  $\oint \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$  (inégalité de Clausius).

### □ Travail total sur le cycle

Un cycle peut être représenté par exemple sur un diagramme de Clapeyron  $(P, V)$  ou  $(P, v)$ .

- Le cycle est **moteur**, c'est-à-dire que le système fournit globalement du travail à l'extérieur ( $W < 0$ ), si la courbe est parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre.
- Le cycle est **récepteur**, c'est-à-dire que le système reçoit globalement du travail de l'extérieur ( $W > 0$ ), si la courbe est parcourue dans le sens trigonométrique.

### □ Performance

La **performance** d'une machine thermique est définie par le rapport positif suivant :

$$\text{performance} = \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}}$$

Il est d'usage de l'appeler **efficacité** si elle peut prendre des valeurs supérieures à 1. Si elle est par nature comprise entre 0 et 1, c'est le terme **rendement** qui est utilisé.

## ❑ Cogénération

La cogénération est la production simultanée d'un travail mécanique (le plus souvent transformé en travail électrique) et d'un transfert thermique, à partir d'une source unique d'énergie. Elle permet notamment d'augmenter la performance globale des équipements de production.

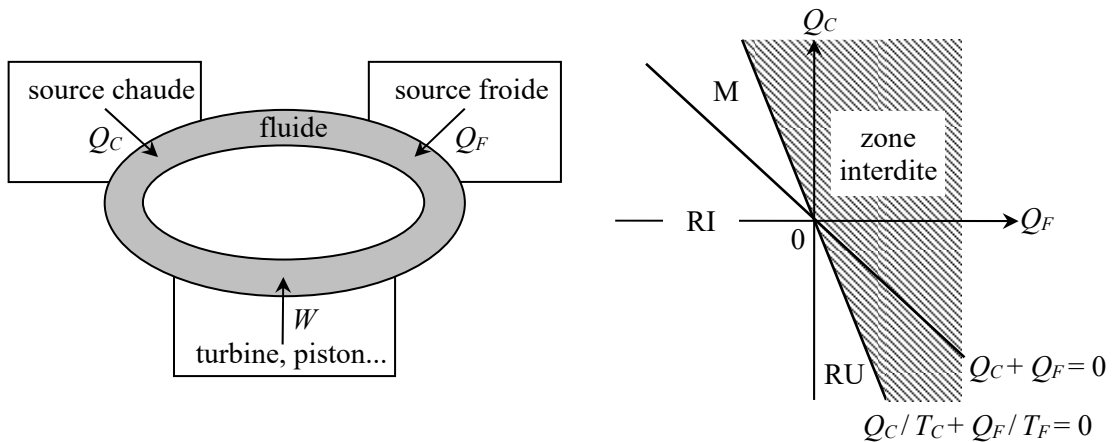
## ■ Machines dithermes

### ❑ Modélisation et application des principes

Les machines dithermes n'échangent de l'énergie par transfert thermique qu'avec deux thermostats : une source chaude de température  $T_C$  et une source froide de température  $T_F$ .

L'application des deux principes sur un cycle donne alors :  $W + Q_C + Q_F = 0$  et  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$ .

Le **diagramme de Raveau** ( $Q_C, Q_F$ ) permet de classer les machines dithermes en fonction de leur utilité, notamment en fonction de leur caractère moteur ( $W < 0$ ) ou récepteur ( $W > 0$ ).



Les machines de la zone M sont des moteurs, celle de la zone RU des récepteurs utiles (machines frigorifiques ou pompes à chaleur), et celles de la zone RI des récepteurs inutiles d'un point de vue technologique.

### ❑ Moteur ditherme

Un moteur thermique a pour objectif de fournir un travail ( $W < 0$ ). Pour ce faire, il utilise le sens spontané des transferts thermiques : il reçoit effectivement un transfert thermique de la source chaude ( $Q_C > 0$ ), qu'il est obligé de restituer en partie à la source froide ( $Q_F < 0$ ).

Son rendement est donc  $\eta = \frac{-W}{Q_C}$ . Il est toujours inférieur au rendement de Carnot  $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$

d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible :  $0 \leq \eta \leq \eta_C < 1$ .

Rendements usuels de moteurs dithermes réels :  $0,2 < \eta < 0,3$  (soit entre 20 % et 30 %).

### □ Machine frigorifique et pompe à chaleur dithermes

Ces machines réceptrices dépensent un travail ( $W > 0$ ) afin d'aller à l'encontre du sens spontané des transferts thermiques ( $Q_F < 0$  et  $Q_C > 0$ ).

– Dans une **machine frigorifique**, l'objectif est d'extraire un transfert thermique de la source froide ( $Q_F > 0$ ), qui constitue l'espace à refroidir. L'efficacité d'une machine frigorifique est

donc  $e = \frac{Q_F}{W}$ . Elle est toujours inférieure à l'efficacité de Carnot  $e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}$  d'une machine cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible :  $0 \leq e \leq e_C$ .

Efficacités usuelles de machines frigorifiques réelles :  $3 < e < 4$ .

– Dans une **pompe à chaleur**, l'objectif est d'injecter un transfert thermique vers la source chaude ( $Q_C < 0$ ), qui constitue l'espace à réchauffer. L'efficacité d'une pompe à chaleur est

donc  $e = \frac{-Q_C}{W}$ . Elle est toujours inférieure à l'efficacité de Carnot  $e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}$  d'une pompe cyclique ditherme fonctionnant de manière réversible :  $0 \leq e \leq e_C$ .

Efficacités usuelles de pompes à chaleur réelles :  $2 < e < 5$ .

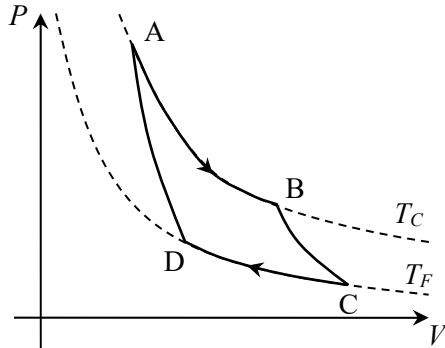
⇒ **Méthode 19.1. Calculer la performance d'une machine thermique**

### □ Cycle de Carnot

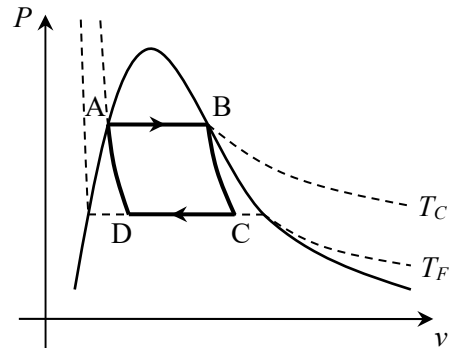
Le cycle de Carnot est un cycle *réversible* décrit par une machine ditherme. Il est composé de :

- deux isothermes aux températures des sources  $T_C$  (isotherme AB) et  $T_F$  (isotherme CD) ;
- deux adiabatiques (isentropiques) BC et DA.

Il peut être parcouru dans le sens moteur ou récepteur.



Allure d'un cycle de Carnot moteur décrit par un gaz parfait



Exemple d'allure d'un cycle de Carnot moteur décrit par un fluide diphasé

Un tel cycle permet d'atteindre les performances maximales  $e_C$  et  $\eta_C$ . Il présente toutefois peu d'intérêt en pratique. En effet, un cycle de Carnot est forcément décrit de manière quasi-statique : une machine utilisant ce cycle fournit donc une puissance qui tend vers zéro.

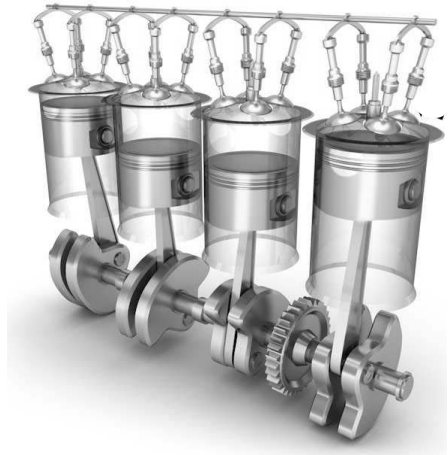
## ■ Les deux structures de machines

### □ Machines à cylindre et piston

Dans les moteurs à combustion interne (moteur à quatre temps, moteur Diesel...), et d'autres machines analogues, l'essentiel des transformations du fluide a lieu dans un même cylindre muni d'un piston. Dans ce cas, pour chaque transformation constituant le cycle, le travail  $W$  et le transfert thermique  $Q$  associés peuvent être déterminés par application du premier principe sous sa forme habituelle  $\Delta U = W + Q$  (qui devient  $\Delta H = Q$  pour une isobare).

Les travaux sont tous échangés par le fluide avec le piston, ils sont donc tous « utiles ».

Un moteur de véhicule comporte plusieurs cylindres identiques pour pouvoir fournir une puissance mécanique suffisante.

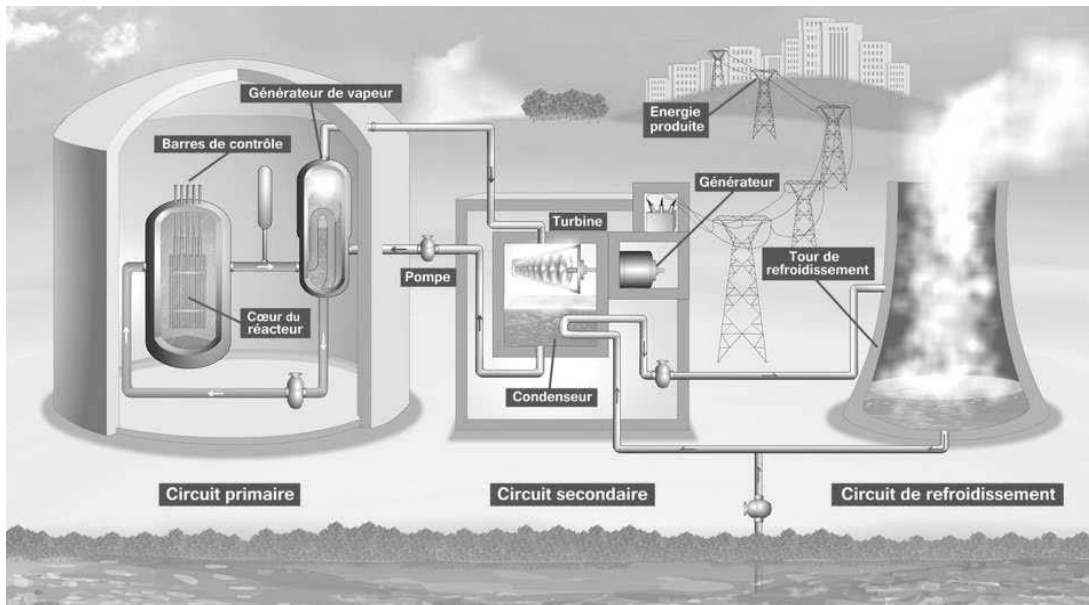


*Moteur à essence à quatre cylindres en ligne*

### □ Machines à circuit de fluide

#### Description

Dans de nombreuses machines (turbines à vapeur, machines frigorifiques, pompes à chaleur...), un fluide est en circulation et traverse successivement différents compartiments (échangeur thermique, turbine, compresseur, condenseur...) dans lesquels il subit des transformations.



*Image Corinne Beurtey/CEA*

*Centrale nucléaire, dont la partie centrale (circuit secondaire) est une turbine à vapeur*

### Écriture du premier principe pour un écoulement stationnaire

Pour un fluide s'écoulant à travers un compartiment donné d'une machine, le premier principe en régime stationnaire s'écrit :  $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + w'$

avec  $\Delta h$  la variation d'enthalpie massique entre l'amont et l'aval du compartiment,  $\Delta e_c$  la variation d'énergie cinétique massique,  $\Delta e_p$  la variation d'énergie potentielle de pesanteur massique,  $q$  le transfert thermique massique et  $w'$  le **travail utile** massique (ou **travail indiqué** massique), *échangé avec les pièces mobiles de la machine* (ce qui exclut le travail des forces de pression qu'une tranche de fluide échange avec le fluide qui la précède et avec celui qui la suit). Cette écriture sera justifiée et exploitée plus largement dans le programme de 2<sup>e</sup> année.

### Cas particulier

Pour un écoulement qui s'effectue suffisamment lentement ( $\Delta e_c \approx 0$ ) et dans une canalisation horizontale ou peu inclinée ( $\Delta e_p \approx 0$ ), la relation précédente se simplifie en  $\Delta h = q + w'$ .

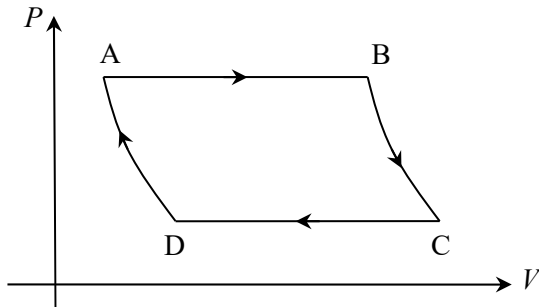


# ■ ■ Méthodes

## □ Méthode 19.1. Calculer la performance d'une machine thermique

- Déterminer les transferts thermiques  $Q_i$  sur chaque étape du cycle et en déduire  $Q_C = \sum_{i, Q_i > 0} Q_i$  ou  $Q_F$  selon le cas.
- Utiliser le premier principe sur un cycle pour en déduire le travail total  $W$ .
- Connaissant la fonction attendue de la machine, adapter la définition de la performance.

⇒ Exercices 19.2 à 19.9



Un gaz parfait décrit le cycle moteur ABCDA ci-contre, composé de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isobares.

Exprimer son rendement en fonction de  $\gamma$ ,  $V_A$  et  $V_D$ .

Le transfert thermique reçu pendant les deux adiabatiques BC et DA est nul. Pendant la transformation isobare AB, le gaz jouant le rôle d'agent thermique reçoit un transfert thermique  $Q_{AB} = \Delta H_{AB} = C_P(T_B - T_A) > 0$ . De même, pendant la transformation isobare CD, le transfert thermique reçu est  $Q_{CD} = \Delta H_{CD} = C_P(T_D - T_C) < 0$ . En appliquant le premier principe au gaz sur un cycle, on obtient  $0 = W + Q_{CD} + Q_{AB}$  d'où  $-W = Q_{CD} + Q_{AB}$ .

La machine thermique est un moteur : son rendement est  $\eta = \frac{-W}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}}$ . En explicitant les

transferts thermiques, on obtient :  $\eta = 1 + \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A} = 1 - \frac{T_D}{T_A} \left( \frac{1 - T_C/T_D}{1 - T_B/T_A} \right)$ .

Or d'après la loi de Laplace sur les adiabatiques réversibles BC et DA :  $T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} = T_C^\gamma P_C^{1-\gamma}$  et  $T_D^\gamma P_D^{1-\gamma} = T_A^\gamma P_A^{1-\gamma}$ . Les transformations CD et AB sont isobares donc  $P_C = P_D$  et  $P_A = P_B$ , d'où  $T_B/T_C = (P_B/P_C)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (P_A/P_D)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_A/T_D$  soit  $T_C/T_D = T_B/T_A$ .

L'expression du rendement se simplifie alors en  $\eta = 1 - \frac{T_D}{T_A}$ , soit finalement  $\eta = 1 - \left( \frac{V_A}{V_D} \right)^{\gamma-1}$  en

utilisant la relation de Laplace  $T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$  sur l'adiabatique réversible DA.

## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. L'inégalité de Clausius pour un cycle est : $\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Dans un cycle de Carnot, pendant les deux isothermes, la température de l'agent thermique est forcément égale à la température des sources.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Deux moteurs dithermes en fonctionnement réversible entre les mêmes sources ont le même rendement, quel que soit l'agent thermique utilisé.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Le rendement d'un moteur ditherme peut être supérieur à 1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. L'efficacité d'une pompe à chaleur peut être supérieure à 1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Une machine frigorifique et une pompe à chaleur dithermes, fonctionnant de manière réversible entre les mêmes sources, ont la même efficacité.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le cycle décrit par l'agent thermique d'un réfrigérateur est parcouru dans le sens trigonométrique dans un diagramme de Clapeyron.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Dans une machine frigorifique, on cherche à refroidir la source froide donc $Q_F < 0$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Dans une machine thermique à circuit de fluide, le travail utile est le travail autre que celui des forces de pression.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Un récepteur qui dépenserait du travail pour faire passer de la chaleur d'une source chaude à une source froide serait une machine inutile.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Transferts énergétiques et performances

### □ Exercice 19.1. Moteurs de la sonde Rosetta : étude qualitative

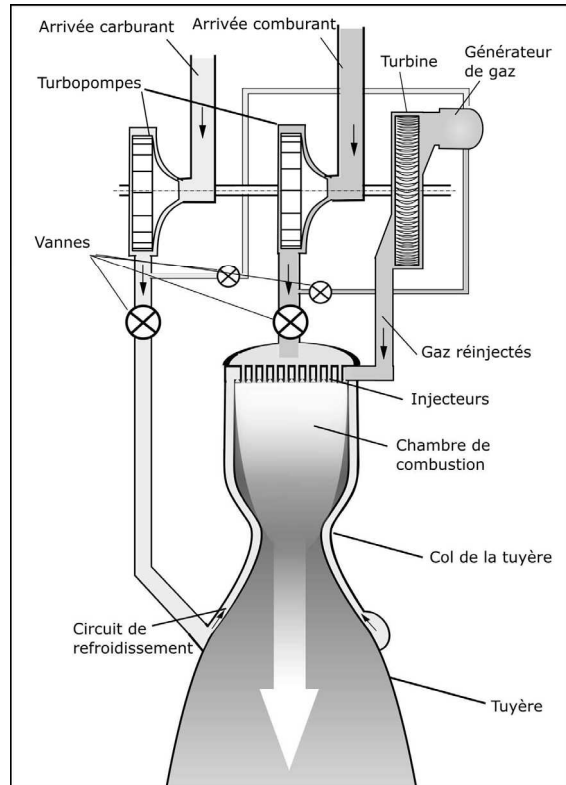
L'année 2014 a été marquée par la mission Rosetta au cours de laquelle la sonde du même nom est entrée en orbite autour de la comète 67P/Churyumov-Gerasimenko, surnommée Tchouri, après un voyage de 10 ans.

La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteurs-fusées à ergols liquides qui disposent de 1720 kg d'ergols (monométhylhydrazine et peroxyde d'azote). Les ergols sont stockés dans deux réservoirs, le premier contenant 660 kg de monométhylhydrazine (carburant), le second 1060 kg de peroxyde d'azote (comburant).

Le schéma de ce type de propulseur est présenté ci-contre.

Extrait du site :

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur-fusée>



1. Le principe général des moteurs thermiques repose sur des transferts thermiques et des transferts de travail. Montrer comment le premier et le second principe de la thermodynamique conduisent à l'impossibilité d'un moteur thermique fonctionnant avec une seule source thermique.
2. Sur un schéma de principe, identifier les différents transferts énergétiques, notés  $W$ ,  $Q_c$  et  $Q_f$  à l'œuvre dans le moteur de fusée entre les différents éléments ci-dessous, les représenter au moyen d'une flèche et préciser le signe de chaque grandeur.

Source froide

Source chaude

Mélange de gaz

Véhicule solidaire du moteur

3. Indiquer à quel élément du schéma de principe on peut identifier la chambre de combustion présente sur le schéma du propulseur. Préciser l'élément qui fait office de source froide dans le propulseur, et indiquer le rôle des turbopompes.

*D'après Agro-Véto*

### □ Exercice 19.2. Cogénération dans un chalet

Considérons un chalet comportant deux installations : une chaudière utilisée pour le chauffage, et un moteur ditherme à combustion externe utilisé pour la production d'électricité. Dans les deux cas, du bois est utilisé comme combustible. Les échanges énergétiques mis en jeu quotidiennement dans les deux installations sont donnés dans le tableau suivant.

Combustible consommé par la chaudière	52 kW · h
Transfert thermique fourni par la chaudière	47 kW · h
Combustible consommé par le moteur dans une enceinte à 400 °C	48 kW · h
Travail fourni par le moteur	14 kW · h
Transfert thermique rejeté par le moteur dans l'atmosphère à 10 °C	34 kW · h

1. Supposons que la chaudière et le moteur constituent des systèmes indépendants.
  - a) Calculer le rendement du moteur ditherme. Le comparer au rendement maximal qu'il pourrait théoriquement atteindre.
  - b) Calculer le rendement de l'ensemble {chauffage + moteur}.
2. Pour améliorer le rendement global, l'énergie consommée par la chaudière est augmentée, et cette dernière est alors utilisée à la fois pour le chauffage et pour l'alimentation du moteur. Un dispositif permet en outre de récupérer 80 % du transfert thermique rejeté dans l'atmosphère par le moteur pour le réinjecter dans le réseau de chauffage. Les besoins en chauffage et en électricité restent les mêmes que précédemment.
  - a) Quel doit être le transfert thermique quotidien fourni directement par la chaudière au chalet ?
  - b) En déduire l'énergie consommée quotidiennement par la chaudière.
  - c) Calculer le rendement de l'association de cogénération {chauffage + moteur}, et commenter le résultat obtenu.
  - d) La combustion du bois libère dans la chaudière un transfert thermique massique égal à  $14 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Quelle masse de bois doit-on brûler quotidiennement pour faire fonctionner l'association {chaudière + moteur} ? On donne :  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,6 \text{ MJ}$ .

### □ Exercice 19.3. Étude d'un congélateur

Un congélateur est placé dans une pièce à la température de 20 °C (supposée constante). Pour maintenir l'intérieur de ce congélateur à la température constante de -19 °C, il est nécessaire d'en extraire, par transfert thermique, 400 kJ par heure. Cette opération est supposée être réalisée de manière réversible.

1. Calculer le transfert thermique fourni à la pièce en une heure par l'agent thermique.
2. Calculer la puissance à fournir par heure pour réaliser cette opération.
3. Définir puis calculer l'efficacité de cette machine frigorifique.

### □ Exercice 19.4. Réchauffement d'un fleuve par une centrale nucléaire

Dans une centrale nucléaire, la turbine à vapeur est un moteur ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur :

- une source chaude (eau du circuit primaire) de température  $T_C = 579 \text{ K}$  ;
- une source froide (eau d'un fleuve) de température  $T_F = 283 \text{ K}$  .

La centrale fournit une puissance  $P = 1,00 \text{ GW}$  .

1. Calculer le rendement  $\eta$  de la centrale sachant qu'il est égal à 60,0 % du rendement maximal de Carnot.
2. Exprimer le transfert thermique  $\dot{Q}_C$  par unité de temps de la source chaude vers l'agent thermique en fonction de  $\eta$  et  $P$ . En déduire le transfert thermique  $\dot{Q}_F$  par unité de temps de l'eau du fleuve vers l'agent thermique. Le calculer.
3. L'eau du fleuve servant de source froide a un débit volumique  $D_V = 300 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  . Calculer la variation de température  $\Delta T$  de l'eau du fleuve en contact à chaque instant avec l'agent thermique. On donne :  $\rho = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  masse volumique et  $c = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  capacité thermique massique de l'eau liquide.

### □ Exercice 19.5. Chauffage d'une serre



On souhaite maintenir la température d'une serre à la valeur constante  $T_1 = 293 \text{ K}$  . L'air extérieur est à la température  $T_2 = 283 \text{ K}$  .

Dans ce but, on utilise une chaudière à la température  $T_3 = 600 \text{ K}$  capable de fournir un transfert thermique  $Q_3 > 0$  .

On décide de ne pas utiliser directement la chaudière pour chauffer la serre mais d'adopter le dispositif suivant : la chaudière fournit le transfert thermique  $Q_3$  à l'agent thermique d'un moteur réversible fonctionnant entre la chaudière à  $T_3$  et l'air extérieur à  $T_2$  . Le travail récupéré est utilisé pour actionner une pompe à chaleur réversible fonctionnant entre l'air extérieur à  $T_2$  et l'intérieur de la serre à  $T_1$  . On note  $Q_2$  le transfert thermique algébrique de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe.

1. Reporter sur un schéma de principe les différents échanges énergétiques algébriques mis en jeu lors du chauffage.
2. Exprimer le travail algébrique  $W$  reçu par le moteur en fonction de  $Q_3$ ,  $T_2$  et  $T_3$  .

3. Exprimer le transfert thermique algébrique  $Q_1$  de l'intérieur de la serre vers l'agent thermique de la pompe en fonction de  $W$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .
4. Définir puis exprimer l'efficacité  $e$  de l'ensemble du dispositif de chauffage en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ .

## ■ Cycles de machines à cylindre

### □ Exercice 19.6. Moteur de Stirling

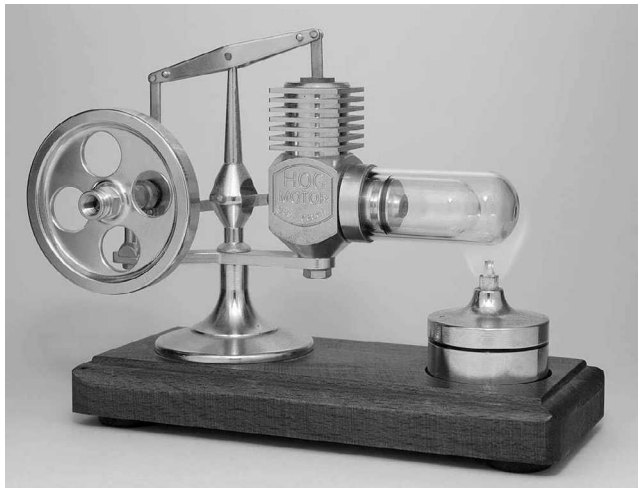
Un moteur de Stirling peut être réalisé très simplement. Il fonctionne entre une source chaude de température  $T_C = 450$  K (flamme) et une source froide de température  $T_F = 300$  K (air ambiant). L'agent thermique est constitué d'une quantité  $n$  d'air, considéré comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma = C_P/C_V = 1,40$ , enfermé dans un cylindre muni d'un piston.

Il décrit de manière quasi-statique le cycle suivant :

- AB : compression à la température  $T_F$  de la source froide ;
- CD : détente à la température  $T_C$  de la source chaude ;
- BC et DA : isochores respectivement à  $V_1$  et  $V_2$ .

On donne  $R = 8,31$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup> et  $\alpha = V_2/V_1 = 2,00$  (taux de compression).

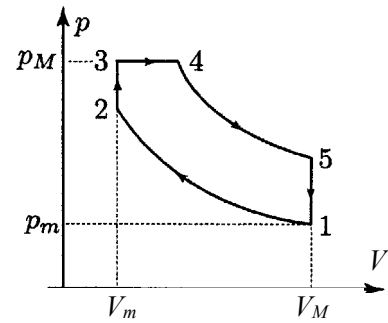
1. Représenter le cycle de ce moteur dans le diagramme de Clapeyron.
2. Identifier les étapes non réversibles.
3. Calculer les différents transferts thermiques reçus par le gaz au cours du cycle.
4. Définir puis exprimer le rendement  $\eta$  du moteur. Le calculer.
5. Afin d'améliorer le rendement du moteur, on utilise un dispositif qui permet d'éviter les échanges thermiques avec l'extérieur en dehors des deux phases isothermes. Calculer le nouveau rendement  $\eta'$  du moteur. Commenter.



*Moteur de Stirling de démonstration*

### □ Exercice 19.7. Moteur Diesel à double combustion

Dans les moteurs Diesel à double combustion, le cycle décrit par l'air est celui représenté en coordonnées de Clapeyron ( $p, V$ ) ci-contre. Après la phase d'admission qui amène l'air au point 1 du cycle, celui-ci subit une compression adiabatique réversible jusqu'au point 2. Après injection du carburant en 2, la combustion s'effectue d'abord de façon isochore de 2 à 3 puis se poursuit de façon isobare de 3 à 4. La phase de combustion est suivie d'une détente adiabatique réversible de 4 à 5 puis d'une phase d'échappement isochore de 5 à 1. Au point 1 du cycle, la pression  $p_m = 1,0$  bar et la température  $T_m = 293$  K sont minimales.



La pression maximale (aux points 3 et 4) est  $p_M = 60$  bar et la température maximale (au point 4) est  $T_M = 2073$  K. On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique et on notera respectivement  $C_p$  et  $C_v$  ses capacités thermiques molaires à pression et à volume constants.

On donne : le rapport volumétrique de compression  $\beta = \frac{V_M}{v_m} = 17$ , la masse molaire de l'air

$M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , la constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,40$ .

1. Calculer les températures  $T_2, T_3, T_5$  aux points 2, 3 et 5 du cycle.
2. Calculer la quantité de chaleur  $Q_c$  reçue par 1,0 kg d'air au cours de la phase de combustion entre les points 2 et 4.
3. Calculer la quantité de chaleur  $Q_f$  échangée avec le milieu extérieur par 1,0 kg d'air entre les points 5 et 1.
4. En déduire, le travail  $W$  échangé par 1,0 kg d'air avec le milieu extérieur au cours d'un cycle.
5. Définir et calculer le rendement de ce moteur. Commenter la valeur trouvée.

*D'après ENAC*

## ■ Cycles de machines à circuit de fluide

### □ Exercice 19.8. Machine frigorifique\*

1. On considère un cycle de transformations réversibles  $DABCD$  réalisé à partir du point  $D$  sur la courbe de rosée pour une masse unité de fluide :
  - $DA$  : liquéfaction isotherme à la température  $T_1$  (on parcourt la totalité du palier de liquéfaction) ;
  - $AB$  : détente isentropique qui amène le fluide dans l'état  $B$  défini par la température  $T_0$  et une fraction massique en gaz  $x_g(B)$  ;

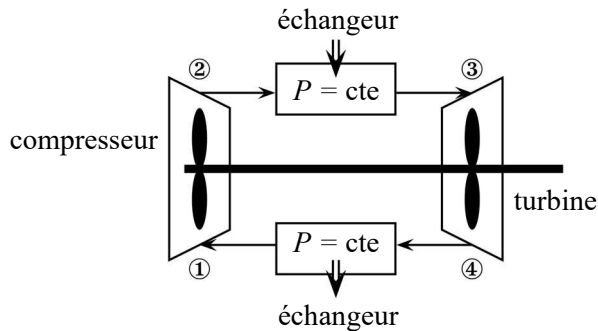
–  $BC$  : vaporisation isotherme jusqu'à l'intersection  $C$  avec la courbe isentropique passant par  $D$  ; l'état  $C$  est caractérisé par une fraction massique en vapeur  $x_g(C)$  .

- a) Représenter le cycle  $DABCD$  sur un diagramme de Clapeyron.
  - b) Exprimer les fractions massiques  $x_g(B)$  et  $x_g(C)$  en fonction de  $T_0$ ,  $T_1$ , de la capacité thermique massique  $c$  du liquide, et des enthalpies massiques de vaporisation  $\Delta_{\text{vap}}h(T_0)$  et  $\Delta_{\text{vap}}h(T_1)$  aux températures  $T_0$  et  $T_1$ .
  - c) Donner les expressions des transferts thermiques massiques  $q_{BC}$  et  $q_{DA}$  avec le milieu extérieur au cours des transformations isothermes  $BC$  et  $DA$ .
  - d) En déduire le travail  $w$  reçu par l'unité de masse du fluide au cours du cycle.
2. Le cycle précédent peut être utilisé pour faire fonctionner une machine frigorifique. Le travail consommé est utilisé pour refroidir la source froide de température  $T_0 < T_1$ . Exprimer l'efficacité  $e$  de cette machine frigorifique. Commentez le résultat obtenu.

### □ Exercice 19.9. Cycle de Brayton des centrales nucléaires \*

Les centrales nucléaires de la génération 6 prévues vers les années 2030 devront être sûres et présenter un rendement important. Une option étudiée parmi six grands choix est le réacteur à très haute température refroidi à l'hélium. Ce type de réacteur offrirait l'avantage d'améliorer l'efficacité de la conversion énergétique, compte tenu de la température élevée de la source chaude et de permettre en sus la production d'hydrogène. Dans ces installations de forte puissance, on utilise le cycle de Brayton (ou cycle de Joule) pour extraire le travail et, en fin de compte, produire de l'électricité.

Un gaz parfait circule dans une installation. Il échange du travail avec l'extérieur uniquement dans le compresseur et la turbine. Le travail fourni par le passage du gaz dans la turbine sert d'une part à faire fonctionner le compresseur (turbine et compresseur montés sur le même axe) et d'autre part à fabriquer de l'électricité. On suppose que les transferts thermiques ont lieu exclusivement dans des échangeurs. Le fluide, ici un gaz d'hélium, décrit le cycle de Brayton.



Ce cycle est constitué de deux isobares et de deux isentropiques :

- compression adiabatique réversible (dans le compresseur) du point 1 avec une température  $T_1 = 300$  K et une pression  $P_1 = 20 \cdot 10^5$  Pa vers le point 2 à la pression  $P_2 = 80,0 \cdot 10^5$  Pa ;
- détente isobare (dans l'échangeur) du point 2 vers le point 3 à la température  $T_3 = 1,30 \cdot 10^3$  K ;
- détente adiabatique réversible (dans la turbine) de 3 vers 4 (de  $P_3 = P_2$  à  $P_4 = P_1$ ) ;
- compression isobare (dans l'échangeur) de 4 vers 1.



L'hélium est un supposé être un gaz parfait monoatomique tel que  $C_{V_m} = 3R/2$  et  $C_{P_m} = 5R/2$  représentent respectivement les capacités thermiques molaires à volume et pression constante avec  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Pour une transformation isentropique, justifier que la relation entre  $T$  et  $P$  peut se mettre sous la forme :  $\frac{T}{P^\beta} = \text{cte}$ . Exprimer  $\beta$  en fonction de  $\gamma = C_{P_m}/C_{V_m}$ .
2. Déterminer les températures  $T_2$  et  $T_4$ . Effectuer l'application numérique.
3. Tracer l'allure du cycle de Brayton du moteur sur un diagramme  $(P, V_m)$ .

Pour l'écoulement du fluide à travers l'un des compartiments, en régime stationnaire, le premier principe s'écrit  $\Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W'$ , où  $W'$  est le travail utile reçu, c'est-à-dire échangé avec les pièces mobiles (hélices...).

4. Calculer les travaux utiles  $W'_{12}$  et  $W'_{34}$  échangés lors des transformations isentropiques 1-2 et 3-4 au cours desquelles le fluide circule « lentement » et horizontalement, respectivement dans le compresseur et dans la turbine. Effectuer l'application numérique pour  $n = 1,00 \text{ mol}$  d'hélium.
5. Exprimer les transferts thermiques  $Q_{23}$  et  $Q_{41}$ .  
Effectuer l'application numérique pour  $n = 1,00 \text{ mol}$  d'hélium.
6. Montrer que le rendement  $\eta$  du moteur se met sous la forme :  $\eta = 1 - \frac{1}{(r_p)^\beta}$  avec  $r_p = \frac{P_2}{P_1}$ .
7. Calculer numériquement ce rendement et le comparer au rendement de Carnot obtenu en utilisant les deux températures extrêmes du cycle.

*D'après CCINP*

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 19.3.* À la question 1, appliquer le deuxième principe sur un cycle (où toutes les transformations sont réversibles).

*Exercice 19.5.* Question 2 : écrire les deux principes sur un cycle.

*Exercice 19.6.* Pour la question 3, calculer d'abord le travail sur les évolutions isothermes, et en déduire les transferts thermiques sur ces deux mêmes phases.

*Exercice 19.8.* Décomposer les transformations isentropiques.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	vrai	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	vrai

2. Dans le cas contraire, il y aurait une inhomogénéité de température, source d'irréversibilité. Or, par définition, un cycle de Carnot est réversible.

4. Par construction, le rendement d'un moteur est inférieur à 1.

5. Elle est même *toujours* supérieure à 1, ce qui fait tout l'intérêt de la pompe à chaleur par rapport à un simple chauffage électrique.

6. L'efficacité de Carnot est  $e_C = \frac{T_F}{T_C - T_F}$  pour une machine frigorifique, mais  $e_C = \frac{T_C}{T_C - T_F}$  pour une pompe à chaleur.

8. On note habituellement  $Q_F$  le transfert thermique reçu par l'agent thermique de la part de la source froide : pour que l'intérieur de la machine frigorifique cède effectivement un transfert thermique à l'agent thermique, il faut  $Q_F > 0$ .

9. Dans une telle machine il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression. Mais le travail utile est celui que le fluide échange *avec les pièces mobiles de la machine*, tandis que le travail « inutile » est celui échangé entre une tranche donnée du fluide et le reste du fluide.

10. Ce transfert thermique peut être réalisé sans consommation de travail, par simple mise en contact des deux sources.

### □ Les erreurs classiques

- Il est essentiel de bien distinguer les *conventions algébriques* choisies pour décrire les échanges énergétiques du *sens réel* de ces échanges. Pour l'étude d'une seule machine, on définit généralement les échanges énergétiques par rapport à l'agent thermique (ils sont donc positifs lorsque l'énergie est effectivement reçue par celui-ci). En présence de plusieurs machines en interaction, on fixe les conventions au début de l'étude et on s'y tient jusqu'à la fin.
- La performance d'une machine thermique (rendement ou efficacité) est définie positive : attention de bien respecter cette contrainte.

# ■ ■ Corrigé des exercices

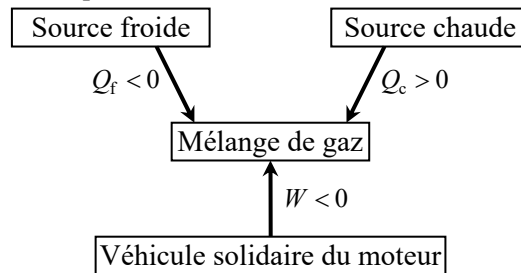
## Exercice 19.1

1. Dans une machine cyclique monotherme, l'agent thermique échange un transfert thermique  $Q$  avec une unique source à la température  $T_0$  et un travail  $W$  avec l'extérieur. Pour qu'un fonctionnement moteur soit possible, il faut  $W < 0$ .

Or l'application des deux principes de la thermodynamique à l'agent thermique, sur un cycle de fonctionnement donne :  $0 = W + Q$  et  $\frac{Q}{T_0} \leq 0$ .

Donc  $[W = -Q \geq 0]$  : le cycle est nécessairement récepteur, c'est-à-dire qu'un moteur cyclique monotherme est impossible.

2. On peut faire le schéma de principe suivant, où le sens des flèches indique *par rapport à qui sont définis* les trois transferts – en l'occurrence, ils sont tous définis par rapport au mélange de gaz qui constitue l'agent thermique du moteur.



Si on voulait faire apparaître le *sens effectif* de transfert de l'énergie, on mettrait une flèche de la source chaude vers le mélange de gaz (ce qui correspond au signe positif de  $Q_c$ ), et deux flèches partant du mélange de gaz et allant vers la source froide et vers le véhicule (signes négatifs de  $Q_f$  et de  $W$ ).

3. La chambre de combustion peut être assimilée à la source chaude.

*✎ C'est en fait plus exactement la réaction chimique de combustion, qui a lieu dans la chambre de combustion entre le carburant (réducteur) et le comburant (oxydant) qui joue le rôle de la source chaude, c'est-à-dire qui apporte de l'énergie à une température élevée.*

Et c'est le circuit de refroidissement qui joue le rôle de la source froide.

Les turbopompes servent à amener les deux ergols dans la chambre de combustion. Il s'agit donc d'un moteur secondaire qui s'ajoute au schéma de principe ci-dessus : il fournit du travail aux deux ergols pour les déplacer (travail cependant beaucoup plus faible que le travail de poussée qui est le but de la machine), en consommant lui-même un (petit) transfert thermique venu du générateur de gaz, et en restituant un transfert thermique à la chambre de combustion par l'intermédiaire des gaz réinjectés.

## Exercice 19.2

**1. a)** Le rendement du moteur ditherme est donné par  $\eta_{\text{moteur}} = \frac{-W}{Q_C}$  avec  $-W = 14 \text{ kW} \cdot \text{h}$  et

$Q_C = 48 \text{ kW} \cdot \text{h}$ . AN  $\eta_{\text{moteur}} = 29 \%$ . Il est toujours inférieur au rendement de Carnot

$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ , rendement théorique maximal d'un moteur cyclique ditherme fonctionnant de

manière réversible. Avec  $T_F = 283 \text{ K}$  et  $T_C = 673 \text{ K}$ , on obtient  $\eta_C = 58 \%$ . Comme prévu, on constate que  $\eta_{\text{moteur}} < \eta_C$  (le rendement réel n'est que la moitié du rendement maximal).

**b)** Pour l'ensemble {chauffage + moteur}, les transferts énergétiques désirés sont le transfert thermique fourni par la chaudière et le travail fourni par le moteur ; et les transferts énergétiques dépensés résultent du combustible brûlé à la fois dans la chaudière et dans le moteur.

Donc  $\eta_{\text{global}} = \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}}$ . AN  $\eta_{\text{global}} = \frac{47 + 14}{52 + 48}$  soit  $\eta_{\text{global}} = 61 \%$ .

**2. a)** Le moteur devant toujours fournir un travail de  $14 \text{ kW} \cdot \text{h}$ , il rejette toujours  $34 \text{ kW} \cdot \text{h}$  sous forme transfert thermique, dont on récupère  $80 \%$ , soit  $Q_{\text{récup}} = 27 \text{ kW} \cdot \text{h}$ . Pour le chauffage du chalet, le besoin étant toujours  $Q_{\text{chalet}} = 47 \text{ kW} \cdot \text{h}$ , la chaudière donc doit seulement fournir  $Q_{\text{chaud}} = Q_{\text{chalet}} - Q_{\text{récup}} = 20 \text{ kW} \cdot \text{h}$  sous forme de chauffage direct.

**b)** La chaudière doit fournir en plus un autre transfert thermique  $Q_{\text{ch} \rightarrow \text{mot}} = 48 \text{ kW} \cdot \text{h}$  pour faire fonctionner le moteur. D'après les données, le rendement de la chaudière est  $\eta_{\text{ch}} = \frac{47}{52} = 0,90$ .

Pour fournir  $Q_{\text{tot}} = Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{ch} \rightarrow \text{mot}} = 68 \text{ kW} \cdot \text{h}$ , elle doit donc consommer  $Q_{\text{conso}} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\eta_{\text{ch}}}$ .

AN  $Q_{\text{conso}} = 76 \text{ kW} \cdot \text{h}$ .

**c)** Maintenant  $Q_{\text{récup}} = 27 \text{ kW} \cdot \text{h}$  est à comptabiliser dans les transferts énergétiques désirés. Le rendement de l'association de cogénération {chauffage + moteur} est donc :

$\eta_{\text{assoc}} = \frac{Q_{\text{chaud}} + Q_{\text{récup}} + W_{\text{moteur}}}{Q_{\text{conso}}} = \frac{Q_{\text{chalet}} + W_{\text{moteur}}}{Q_{\text{conso}}}$ . AN  $\eta_{\text{assoc}} = \frac{47 + 14}{76}$ , soit  $\eta_{\text{assoc}} = 80 \%$ .

On constate bien sûr que  $\eta_{\text{assoc}} > \eta_{\text{global}}$  : le dispositif basé sur une cogénération a permis d'augmenter notablement le rendement du système global.

**d)** L'énergie libérée quotidiennement lors de la combustion du bois est  $Q_{\text{conso}} = 76 \text{ kW} \cdot \text{h} = 270 \text{ MJ}$ . Il faut donc brûler quotidiennement une masse de bois  $m = \frac{Q}{q}$

avec  $q = 14 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . AN  $m = 19 \text{ kg}$ .

## Exercice 19.3

**1.** L'agent thermique reçoit de la part de l'intérieur du congélateur à la température  $T_F = 254 \text{ K}$  un transfert thermique  $\dot{Q}_F = +400 \text{ kJ/heure}$ . En notant  $\dot{Q}_F$  le transfert thermique

horaire reçu par l'agent thermique de la part de la pièce à  $T_C = 293 \text{ K}$ , on a pour un fonctionnement réversible  $\frac{\dot{Q}_F}{T_F} + \frac{\dot{Q}_C}{T_C} = 0$ , soit  $\dot{Q}_C = -T_C \frac{\dot{Q}_F}{T_F}$  par heure. Le transfert thermique horaire

fourni à la pièce est par conséquent  $\dot{Q}'_C = -\dot{Q}_C = +T_C \frac{\dot{Q}_F}{T_F}$ . AN  $\dot{Q}'_C = 461 \text{ kJ/heure}$ .

*On peut aussi noter  $Q_F$ ,  $Q_C$  et  $Q'_C$  et les exprimer en kJ.*

**2.** En utilisant le premier principe, on obtient le travail horaire  $\dot{W} = -\dot{Q}_F - \dot{Q}_C$  qui doit être reçu par l'agent thermique. Par définition,  $P = \dot{W} = -\dot{Q}_F - \dot{Q}_C$ . AN avec  $1 \text{ W} = 3,6 \text{ kJ/h}$  :  $P = 17 \text{ W}$ .

**3.** L'efficacité du congélateur est  $e = \frac{\dot{Q}_F}{\dot{W}}$ . Ainsi  $e = -\frac{\dot{Q}_F}{\dot{Q}_F + \dot{Q}_C}$  soit  $e = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ . AN  $e = 6,51$ .

*Le réfrigérateur fonctionnant de manière réversible, on retrouve bien pour l'efficacité précédente l'expression de l'efficacité (maximale) de Carnot.*

### Exercice 19.4

**1.** En fonctionnement réversible, le rendement maximal de la centrale nucléaire est celui d'un moteur de Carnot, soit  $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ . On en déduit le rendement réel de la centrale :

$\eta = 0,600 \cdot \eta_C$  soit  $\eta = 0,600 \cdot \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right)$ . AN  $\eta = 0,307 = 30,7\%$ .

**2.** Par définition, le rendement d'un moteur est  $\eta = \frac{-W}{Q_C} = \frac{-W/\Delta t}{Q_C/\Delta t} = \frac{+P}{\dot{Q}_C}$  d'où  $\dot{Q}_C = \frac{P}{\eta}$ .

*$P$  est la puissance fournie par la centrale. Elle est donc opposée à la puissance reçue par l'agent thermique, d'où  $\frac{-W}{\Delta t} = +P$ .*

En appliquant le premier principe (par unité de temps) à l'agent thermique sur un cycle, on obtient  $\dot{Q}_F = -\dot{Q}_C + P$ , soit  $\dot{Q}_F = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)P$ . AN  $\dot{Q}_F = -2,27 \text{ GW}$ .

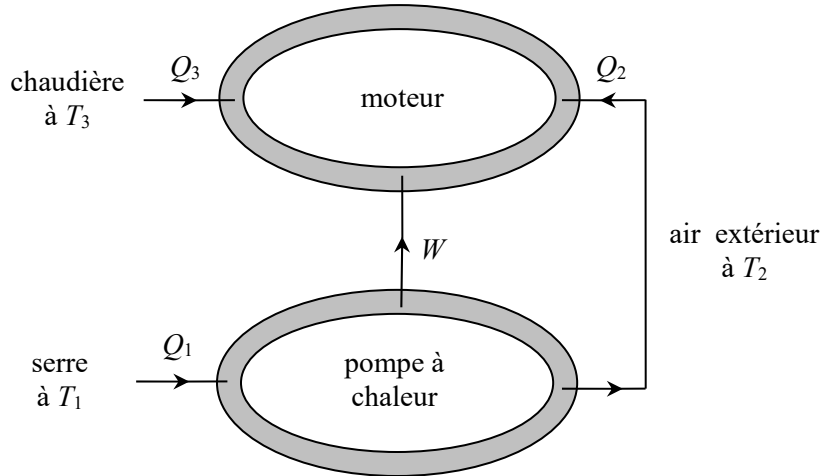
*$\dot{Q}_F < 0$  donc de l'énergie est effectivement fournie à l'eau du fleuve sous forme de transfert thermique.*

**3.** L'eau du fleuve reçoit un transfert thermique  $-\dot{Q}_F > 0$  par unité de temps de la part de l'agent thermique. En considérant l'eau du fleuve comme une phase condensée idéale, on applique le premier principe au volume d'eau  $D_V t$  traversant la centrale pendant une durée  $t$  :

$\Delta H = -\dot{Q}_F t$  soit  $mc\Delta T = \rho D_V t c \Delta T = -\dot{Q}_F t$  d'où une augmentation de la température de l'eau du fleuve de  $\Delta T = \frac{-\dot{Q}_F}{c \rho D_V}$ . AN  $\Delta T = 1,80 \text{ K}$ .

### Exercice 19.5

1.



2. Les deux principes de la thermodynamique appliqués à l'agent thermique du moteur sur un cycle réversible s'écrivent :  $W + Q_2 + Q_3 = 0$  et  $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$ . Donc  $W = -\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) Q_3 < 0$ .

3. En utilisant les conventions algébriques fixées à la question 1, les deux principes de la thermodynamique appliqués à l'agent thermique de la pompe à chaleur sur un cycle réversible s'écrivent :  $-W + Q_1 - Q_2 = 0$  et  $\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$ . On en déduit :  $Q_1 = \frac{W}{1 - \frac{T_2}{T_1}} < 0$ .

⚡ *Le respect des conventions algébriques est ici essentiel pour obtenir un résultat cohérent.*

4. Par définition  $e = \left| \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|$ . Chauffer la serre signifie permettre un transfert thermique  $-Q_1 > 0$  de l'agent thermique de la pompe à chaleur vers l'intérieur de la serre. Dans ce but, il est nécessaire d'utiliser une chaudière capable de fournir un transfert thermique  $Q_3 > 0$  à l'agent thermique du moteur.

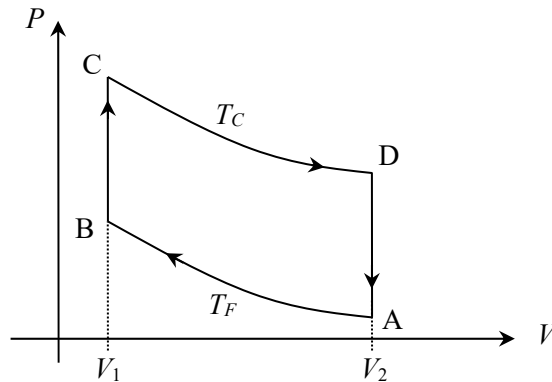
⇒ Méthode 19.1

Par conséquent l'efficacité est  $e = \frac{-Q_1}{Q_3}$ . Les questions 2 et 3 permettent d'éliminer le travail  $W$

dans l'expression de l'efficacité, d'où finalement  $e = \frac{1 - \frac{T_2}{T_3}}{1 - \frac{T_2}{T_1}}$ . AN  $e = 15,5$ .

### Exercice 19.6

1.



2. Le cycle est décrit de manière quasi-statique. Sur les isothermes, la température du système est égale à celle des sources : sur ces transformations, il n'y a donc pas d'inhomogénéités de températures, sources d'irréversibilité. Les deux isothermes sont donc réversibles.

L'isochore BC fait passer le gaz de la température  $T_F$  à la température  $T_C$  au contact de la source chaude à  $T_C$ . De même, isochore DA fait passer le gaz de la température  $T_C$  à la température  $T_F$  au contact de la source froide à  $T_F$ . Bien que ces deux étapes soient réalisées de manière quasi-statique, les inhomogénéités de température empêchent qu'elles puissent être considérées comme réversibles.

En conclusion : les étapes AB et CD sont réversibles, les étapes BC et DA sont irréversibles.

3. Au cours des évolutions isochores, le travail des forces de pression est nul : le transfert thermique reçu par le gaz s'identifie donc, d'après le premier principe, à sa variation d'énergie interne. On en déduit  $Q_{BC} = C_V (T_C - T_F) > 0$  et  $Q_{DA} = C_V (T_F - T_C) = -Q_{BC} < 0$ , soit en explicitant  $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$  :

$$Q_{BC} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_F) > 0 \quad \text{et} \quad Q_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_F - T_C) = -Q_{BC} < 0.$$

Au cours des évolutions isothermes (réversibles),  $\Delta U = 0$  donc le travail et le transfert thermique sont opposés :  $W_{AB} = -nRT_F \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = -Q_{AB}$  et  $W_{CD} = -nRT_C \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -Q_{CD}$ .

Finalement, on obtient  $Q_{AB} = -nRT_F \ln \alpha < 0$  et  $Q_{CD} = nRT_C \ln \alpha > 0$ .

4. Par définition  $\eta = \left| \frac{\sum \text{transferts énergétiques désirés}}{\sum \text{transferts énergétiques dépensés}} \right|$ . Le transfert thermique reçu pendant les phases BC et CD permet de fournir un travail  $W_{\text{cycle}}$  sur l'ensemble du cycle. Ainsi, le rendement du moteur de Stirling est donné par  $\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_C}$  avec  $Q_C = \sum_{i, Q_i > 0} Q_i = Q_{BC} + Q_{CD}$

d'où 
$$\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{BC} + Q_{CD}}$$

⇒ Méthode 19.1

Sur un cycle de fonctionnement, le premier principe s'écrit  $-W_{\text{cycle}} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}$  soit  $-W_{\text{cycle}} = Q_{AB} + Q_{CD}$  (car  $Q_{DA} = -Q_{BC}$ ). On peut donc réécrire le rendement

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{BC} + Q_{CD}} \text{ d'où } \eta = \frac{(\gamma - 1)(T_C - T_F) \ln \alpha}{T_C - T_F + (\gamma - 1)T_C \ln \alpha}. \text{ AN } \eta = 15,1\%$$

5. Compte tenu des hypothèses de l'énoncé, le nouveau rendement du moteur s'écrit

$$\eta' = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{CD}}. \text{ D'après la question 3, on en déduit } \eta' = 1 - \frac{T_F}{T_C}. \text{ AN } \eta' = 33,3\%$$

Le rendement obtenu correspond au rendement de Carnot. En limitant les transferts thermiques aux phases isothermes, qui sont réversibles, il a été possible de s'affranchir des sources d'irréversibilité.

### Exercice 19.7

1. Loi de Laplace sur la transformation 1-2 isentropique :  $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$  d'où

$$T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_m \beta^{\gamma-1}. \text{ AN } T_2 = 910 \text{ K}. \text{ Sur la transformation 2-3 isochore : } T_3 = T_2 \frac{p_3}{p_2},$$

avec  $p_3 = p_M$  et  $p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma$  soit  $p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = p_m \beta^\gamma$ , d'où  $T_3 = T_2 \frac{p_M}{p_m} \beta^{-\gamma} = \frac{T_m p_M}{\beta p_m}$ . AN

$$T_3 = 1034 \text{ K}. \text{ Loi de Laplace sur la 4-5 isentropique : } T_5 = T_4 \left( \frac{V_4}{V_5} \right)^{\gamma-1} = T_M \left( \frac{V_4}{V_M} \right)^{\gamma-1}, \text{ avec}$$

$$V_4 = V_3 \frac{T_4}{T_3} = V_m \frac{T_M}{T_3}, \text{ d'où } T_5 = T_M \left( \frac{1}{\beta} \frac{T_M}{T_3} \right)^{\gamma-1}. \text{ AN } T_5 = 882 \text{ K}.$$

2.  $Q_c = Q_{2-3} + Q_{3-4} = \Delta U_{2-3} + \Delta H_{3-4}$  (isochore puis isobare), soit en utilisant les expressions

des capacités :  $Q_c = \frac{mR}{M(\gamma-1)} (T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3))$ . AN  $Q_c = 1131 \text{ kJ}$ .

3.  $Q_f = Q_{5-1} = \Delta U_{5-1}$  (isochore), soit  $Q_f = \frac{mR}{M(\gamma-1)} (T_1 - T_5)$ . AN  $Q_f = -422 \text{ kJ}$ .



4. Premier principe appliqué au gaz sur un cycle :  $\Delta U = 0 = W + Q_c + Q_f$  (puisqu'il n'y a pas d'autre transfert thermique) d'où  $W = -Q_c - Q_f$ . AN  $W = -709 \text{ kJ}$ .

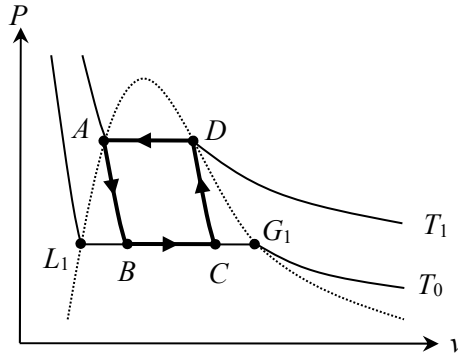
5. Rendement d'un moteur :  $r = \frac{-W}{Q_c}$ . AN  $r = 0,627$  (soit 62,7 %).

⇒ Méthode 19.1

Ce très bon rendement a été calculé avec une modélisation extrême des transformations et du gaz. En pratique, on obtient des rendements nettement plus faibles, de l'ordre de 40 %.

### Exercice 19.8

1. a)



✎ Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique : il s'agit bien d'une machine frigorifique.

b) La transformation  $AB$  est isentropique donc  $\Delta s_{AB} = 0$ . Or l'entropie est une fonction d'état donc  $\Delta s_{AB} = \Delta s_{AL_1} + \Delta s_{L_1B} = c \ln \frac{T_0}{T_1} + x_g(B) \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_0)}{T_0} = 0$ .

On en déduit  $x_g(B) = \frac{cT_0}{\Delta_{\text{vap}} h(T_0)} \ln \frac{T_1}{T_0}$ .

De même, la transformation  $CD$  est isentropique donc  $\Delta s_{CD} = 0$ . Comme on ne dispose pas de la capacité thermique du gaz, on ne peut pas calculer  $x_g(C)$  en décomposant la transformation  $CD$  et  $CG_1D$ . En revanche, l'énoncé fournit  $\Delta_{\text{vap}} h(T_1)$ . On décompose donc  $CD$  en  $CL_1AD$ , d'où

$\Delta s_{CD} = \Delta s_{CL_1} + \Delta s_{L_1A} + \Delta s_{AD}$ , avec  $\Delta s_{CL_1} = -\Delta s_{L_1C} = -x_g(C) \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_0)}{T_0}$ ,  $\Delta s_{L_1A} = c \ln \frac{T_1}{T_0}$  et

$\Delta s_{AD} = \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_1)}{T_1}$ . On en déduit  $x_g(C) = \frac{T_0}{\Delta_{\text{vap}} h(T_0)} \left( c \ln \frac{T_1}{T_0} + \frac{\Delta_{\text{vap}} h(T_1)}{T_1} \right)$ .

c) Si la liquéfaction du corps pur étudié est isotherme, alors elle est également isobare (équilibre monovariant).

Ainsi  $q_{BC} = \Delta h_{BC} = \Delta_{\text{vap}} h(T_0) (x_g(C) - x_g(B))$  soit  $q_{BC} = \Delta_{\text{vap}} h(T_1) \frac{T_0}{T_1}$ .

De même,  $q_{DA} = -q_{AD} = -\Delta_{\text{vap}} h(T_1) [x_g(D) - x_g(A)] = -\Delta_{\text{vap}} h(T_1)(1-0)$  soit  $q_{DA} = -\Delta_{\text{vap}} h(T_1)$ .

**d)** Les transformations  $AB$  et  $CD$  sont isentropiques et réversibles : d'après le deuxième principe, elles sont donc adiabatiques. Sur un cycle, le premier principe s'écrit alors

$$w + q_{DA} + q_{BC} = 0. \text{ On en déduit } w = -q_{DA} - q_{BC} \text{ soit } w = \Delta_{\text{vap}} h(T_1) \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right).$$

**2.** Dans cette machine frigorifique, la source froide cède effectivement un transfert thermique  $q_{BC} > 0$  à l'agent thermique grâce au travail  $w > 0$  effectivement reçu par celui-ci. Ainsi,

l'efficacité de cette machine frigorifique est définie par  $e = \frac{q_{BC}}{w}$  soit  $e = \frac{T_0}{T_1 - T_0}$ .

⇒ Méthode 19.1

L'efficacité obtenue correspond à l'efficacité de Carnot. Ce résultat était prévisible dans la mesure où le cycle décrit par l'agent thermique de la machine est bien un cycle de Carnot (cycle réversible composé de deux isothermes, respectivement à  $T_0$  et  $T_1$ , et de deux adiabatiques).

### Exercice 19.9

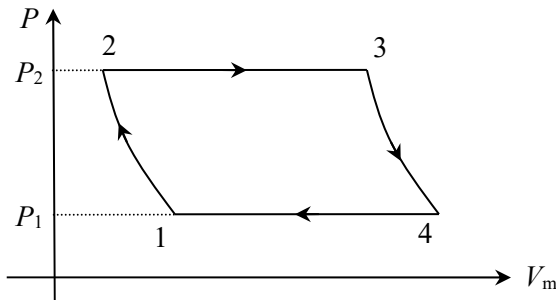
**1.** Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma = C_{Pm}/C_{Vm}$  constant, on peut appliquer les lois de Laplace :  $PV^\gamma = \text{cte}$ . En utilisant l'équation d'état du gaz parfait,

$$V = \frac{nRT}{P}, \text{ on en déduit } \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{cte} \text{ soit } \frac{T}{P^\beta} = \text{cte} \text{ avec } \beta = \frac{\gamma-1}{\gamma}.$$

**2.** Les transformations adiabatiques et réversibles 1-2 et 3-4 sont isentropiques. Avec les

relations établies question 1 :  $T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^\beta$  et  $T_4 = T_3 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^\beta$ . AN  $T_2 = 522 \text{ K}$  et  $T_4 = 747 \text{ K}$ .

**3.**



**4.** Pour un écoulement de fluide en régime stationnaire, le premier principe s'écrit  $\Delta H + \Delta E_c + \Delta E_p = Q + W'$ . L'écoulement dans le compresseur ou la turbine étant supposé lent ( $\Delta E_c \approx 0$ ), horizontal ( $\Delta E_p = 0$ ) et adiabatique ( $Q = 0$ ), on a dans ce cas  $\Delta H = W'$ . On en

déduit  $W'_{12} = \Delta H_{12} = nC_{pm}(T_2 - T_1)$  soit  $W'_{12} = \frac{5}{2}nRT_1 \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^\beta - 1 \right]$ . De même, on obtient

$$W'_{34} = \frac{5}{2}nRT_3 \left[ \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^\beta - 1 \right]. \text{ AN } W'_{12} = 4,62 \text{ kJ} \text{ et } W'_{34} = -11,5 \text{ kJ}.$$

**5.** Pour les transformations isobares, on a  $Q = \Delta H$ . On en déduit  $Q_{23} = nC_{pm}(T_3 - T_2)$  d'où  $Q_{23} = \frac{5}{2}nR(T_3 - T_2)$ . De même  $Q_{41} = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_4)$ . AN  $Q_{23} = 16,2 \text{ kJ} > 0$ ,  $Q_{41} = -9,29 \text{ kJ} < 0$ .

**6.** Le rendement du moteur s'écrit  $\eta = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_C}$  d'où  $\eta = -\frac{W'_{12} + W'_{34}}{Q_{23}}$ . En utilisant les résultats établis aux questions 4 et 5, on obtient  $\eta = -\frac{(T_2 - T_1) + (T_4 - T_3)}{(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_3 - T_2)}$ . Or

$$T_1 - T_4 = \frac{1}{(r_p)^\beta} (T_2 - T_3) \text{ d'où finalement } \eta = 1 - \frac{1}{(r_p)^\beta} \text{ avec } r_p = \frac{P_2}{P_1}.$$

⇒ Méthode 19.1

**7.** L'application numérique donne  $\eta = 0,426$ . Le rendement de Carnot obtenu en utilisant les deux températures extrêmes du cycle serait  $\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_3}$ . AN  $\eta_C = 0,769$ . On obtient comme prévu que  $\eta < \eta_C$ , le rendement de Carnot correspondant au rendement maximal obtenu pour une machine idéale fonctionnant de manière réversible.

# Statique des fluides



« *Eurêka*, j'ai trouvé ! » aurait crié **ARCHIMÈDE** (env. 287 av. J.-C.- env. 212 av. J.-C.), sortant tout nu de son bain, lorsqu'il comprend ce que l'on appelle désormais la poussée d'**ARCHIMÈDE**. Ce qui est certain est que le savant syracusain est l'un des plus géniaux de l'Antiquité grecque. Outre l'hydrostatique, **ARCHIMÈDE** s'est intéressé à la mécanique et à l'optique. En mathématiques, **ARCHIMÈDE** calcule des aires et des volumes et donne une remarquable approximation de  $\pi$ .

## ■ Un peu d'histoire

On attribue à **ARCHIMÈDE** le théorème de statique des fluides qui porte son nom. À la Renaissance, le savant flamand Simon **STEVIN** affirme qu'une quantité de liquide, aussi petite soit-elle, est en mesure de soutenir n'importe quel poids. Cette propriété est connue sous le nom de *paradoxe hydrostatique* ou de *principe de PASCAL*. Le savant auvergnat, en effet, l'a étudiée et a compris la notion de pression définie comme quotient de l'intensité d'une force par l'unité de surface. Evangelista **TORRICELLI** met en évidence la pression atmosphérique en 1643 grâce à une expérience avec un tube rempli de mercure, et Blaise **PASCAL** rédige peu après un traité sur ce sujet. En 1743, Alexis **CLAIRAUT** pose le problème d'équilibre d'un fluide et calcule la forme qu'aurait la Terre si elle le respectait ; il donne ainsi raison à **NEWTON** qui affirmait que notre planète était aplatie aux pôles.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'expression de la force de pression élémentaire exercée par un fluide sur un élément de surface
- ▷ La continuité de la pression à l'interface entre deux fluides
- ▷ L'équation locale de la statique des fluides
- ▷ Le facteur de Boltzmann
- ▷ Le théorème d'Archimède

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Établir l'équation locale de la statique des fluides à partir d'un bilan de forces
- ▷ Déterminer un champ de pression à partir de l'équation locale
- ▷ Calculer la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur une surface, à l'aide d'une intégrale
- ▷ Calculer la résultante des forces de pression exercées sur un objet totalement immergé, à l'aide du théorème d'Archimède
- ▷ Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient

## ■ Forces au sein d'un fluide au repos

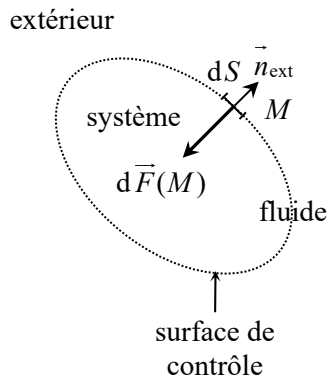
### □ Forces volumiques, forces surfaciques

Une portion de fluide au repos est soumise à deux types de forces.

– Les *forces volumiques* modélisent une action à distance de longue portée (notamment la pesanteur), ou rendent compte du caractère non galiléen du référentiel d'étude (force d'inertie d'entraînement, voir cours de 2<sup>e</sup> année).

– Les *forces surfaciques* modélisent les actions à très courte portée (interactions électrostatiques entre particules de fluide). Au repos, ces forces surfaciques se réduisent à leur composante normale : ce sont les **forces de pression**.

La force de pression élémentaire qu'exerce le fluide extérieur sur un élément de surface  $dS$  (de la surface fermée délimitant un système) est :  $\boxed{d\vec{F}(M) = -P(M)dS\vec{n}_{\text{ext}}}$ .



### □ Conditions aux limites : continuité de la pression

La pression à l'interface entre deux fluides est une fonction continue de l'espace (il n'y a pas de saut brusque de pression de part et d'autre de l'interface).

## ■ Statique des fluides dans le champ de pesanteur

### □ Équation locale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

Pour un fluide de masse volumique  $\rho$  en équilibre dans le champ de pesanteur,  $(Oz)$  étant un axe

vertical :  $\boxed{\frac{dP}{dz} = \pm \rho g}$  avec le signe  $-$  si l'axe  $(Oz)$  est ascendant (altitude), et le signe  $+$  s'il est descendant (profondeur).

**Méthode 20.1. Démontrer l'équation locale de la statique des fluides**

### □ Champ de pression dans un liquide incompressible et homogène

Dans un liquide incompressible,  $\rho = \rho_0$  est indépendante de  $P$  et de  $z$ .

On obtient alors :  $P(z) = \pm \rho_0 g z + \text{cte}$  donc  $P(z_2) - P(z_1) = \pm \rho_0 g (z_2 - z_1)$ .

– Pour l'eau ( $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ),  $P(z_2) - P(z_1) = 1,0 \text{ bar}$  correspond à  $|z_2 - z_1| = 10 \text{ m}$ .

– Pour le mercure à  $0^\circ\text{C}$  ( $\rho_0 = 13595,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), avec  $g = 9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , une différence de pression  $P(z_2) - P(z_1) = 1,01325 \text{ bar}$  correspond à une dénivellation  $|z_2 - z_1| = 760,000 \text{ mm}$ .

Ainsi, l'unité de pression mmHg (millimètre de mercure), utilisée notamment en médecine pour la surpression artérielle (ou « tension »), est telle que  $1,01325 \text{ bar} = 760,000 \text{ mmHg}$  (atmosphère normale).



*Tensiomètre médical, indiquant les pressions en mmHg*

### □ Champ de pression dans une atmosphère isotherme

On considère une atmosphère isotherme à  $T = T_0$ , dans laquelle l'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ . En négligeant les variations de  $g$  avec l'altitude  $z$ , on obtient :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right).$$

⇒ **Méthode 20.3.** Déterminer un champ de pression par intégration de l'équation locale

⇒ **Méthode 20.4.** Calculer la résultante des forces de pression sur une surface

La hauteur caractéristique de la variation de pression avec l'altitude est  $H = \frac{RT_0}{Mg} \approx 8 \text{ km}$ .

Ainsi, pour des expériences à l'échelle du laboratoire, on peut considérer la pression comme uniforme dans l'air (ou dans un autre gaz).

#### Répartition statistique

La densité volumique de particules étant proportionnelle à la pression, sa variation est :

$$n^*(z) = n^*(0) \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T_0}\right) \text{ où } k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ est la constante de Boltzmann.}$$

Plus généralement, dans un système thermodynamique à l'équilibre thermique à une température  $T$ , le nombre de particules possédant une énergie  $E$  est proportionnel au **facteur de Boltzmann**

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right).$$

## ■ Statique des fluides en présence de forces volumiques quelconques

### □ Équivalent volumique des forces de pression

La résultante des forces de pression s'exerçant sur les faces d'un volume mésoscopique  $d\tau$  peut se mettre sous la forme :  $d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau$ .

Le rapport  $\boxed{\vec{f}_p = \frac{d\vec{F}_p}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}} P}$  est appelé **équivalent volumique** de forces de pression.

### □ Équation locale de la statique des fluides

La forme la plus générale de l'équation locale est  $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{f}_v}$ , où  $\vec{f}_v$  est la densité volumique de forces à distance ( $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$  dans le cas de la pesanteur seule).

⇒ **Méthode 20.2.** Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression

## ■ Théorème d'Archimède

### □ Énoncé

La résultante des forces de pression s'exerçant sur un corps totalement entouré par un ou plusieurs fluides au repos est égale à l'opposé du poids des « fluides déplacés ». Cette force est appelée **poussée d'Archimède**.

Elle s'applique au centre de masse du fluide déplacé, appelé **centre de poussée**.

Remarque

Cette résultante ascendante est due au fait que la pression est toujours plus forte en bas qu'en haut. Mais si le champ de pression peut être considéré comme uniforme (par exemple en l'absence de pesanteur), alors la résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle.

### □ Application

Cette force est celle qui permet à des objets de flotter immobiles sur l'eau (iceberg, bateau à l'arrêt...) ou à un ballon gonflé d'hélium et attaché de flotter immobile dans l'air.

Si un objet est *mobile* au sein d'un fluide, la résultante des forces de pression exercées par le fluide est plus complexe, car elle dépend de l'écoulement du fluide autour de l'objet ; mais pour des vitesses faibles, on utilise parfois encore l'expression de la poussée d'Archimède.

⇒ **Méthode 20.5.** Utiliser le théorème d'Archimède

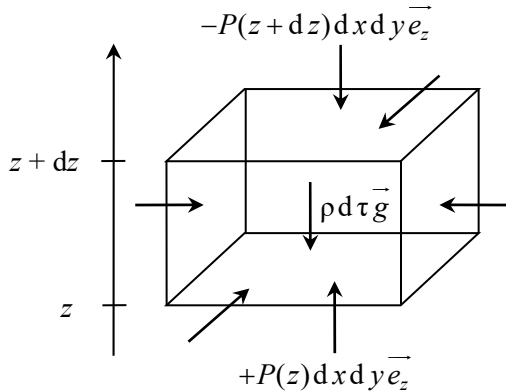


## ■ Comment déterminer un champ de pression ?

### □ Méthode 20.1. Démontrer l'équation locale de la statique des fluides

- Isoler par la pensée un volume élémentaire mésoscopique et lui appliquer le PFD à l'équilibre.
- Projeter sur les vecteurs unitaires du repère d'étude, et en déduire l'équation différentielle cherchée.

Isolons par la pensée un élément de volume de forme parallélépipédique, de dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . On suppose que la seule force volumique présente est le poids.



Cet élément de volume subit donc son poids et six forces de pressions (sur les six faces).

Appliquons le PFD à l'équilibre à ce volume élémentaire :  $\sum (-P dS \vec{n}_{ext}) + \rho d\tau \vec{g} = \vec{0}$ .

Projection sur l'axe  $(Ox)$  :

$$+P(x) dy dz - P(x+dx) dy dz + 0 = 0$$

d'où  $P(x+dx) = P(x)$ .

$P$  a donc la même valeur pour tout  $x$ .

On obtient de même sur  $(Oy)$  :  $P(y+dy) = P(y)$ .

$P$  a donc aussi la même valeur pour tout  $y$ .

Projection sur l'axe  $(Oz)$  :  $+P(z) dx dy - P(z+dz) dx dy - \rho g d\tau = 0$  d'où en divisant par

$$d\tau = dx dy dz : \boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho g}. \text{ Si } (Oz) \text{ était vers le bas, on aurait trouvé } \boxed{\frac{dP}{dz} = +\rho g}.$$

### □ Méthode 20.2. Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de pression

- Isoler par la pensée un volume élémentaire mésoscopique et exprimer les six forces de pression s'exerçant sur les six faces.
- Déterminer la résultante vectorielle de ces six forces et remettre en forme l'expression pour faire apparaître l'opérateur gradient.

⇒ Exercice 20.4

En reprenant le schéma de la méthode 20.1, les six forces s'exerçant sur les six faces sont  $+P(x)dydz\vec{e}_x$ ,  $-P(x+dx)dydz\vec{e}_x$ ,  $+P(y)dx dz\vec{e}_y$ ,  $-P(y+dy)dx dz\vec{e}_y$ ,  $+P(z)dx dy\vec{e}_z$  et  $-P(z+dz)dx dy\vec{e}_z$ . La résultante vectorielle de ces forces s'écrit :

$$d\vec{F}_p = [P(x) - P(x+dx)]dydz\vec{e}_x + [P(y) - P(y+dy)]dx dz\vec{e}_y + [P(z) - P(z+dz)]dx dy\vec{e}_z$$

$$= \left( -\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z \right) dx dy dz = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau \quad \text{avec} \quad d\tau = dx dy dz.$$

L'équivalent volumique des forces de pression est donc  $\frac{d\vec{F}_p}{d\tau} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$ .

Cette relation établie en coordonnées cartésiennes reste vraie dans tout système de coordonnées, les composantes du vecteur gradient étant les suivantes :

- en coordonnées cartésiennes  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z$  ;
- en coordonnées cylindriques  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e}_z$  ;
- en coordonnées sphériques  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$ .

### □ Méthode 20.3. Déterminer le champ de pression par intégration de l'équation locale

- Intégrer l'équation locale en fonction des propriétés du fluide (variations de la masse volumique  $\rho$ ) et éventuellement des variations du champ de pesanteur  $g$ .
- Déterminer la constante d'intégration en utilisant une condition aux limites.

⇒ Exercices 20.1, 20.2, 20.3, 20.5, 20.7, 20.8

On se place dans un champ de pesanteur, en négligeant les variations spatiales de  $g$ , et en notant  $P_0$  la pression à la cote  $z = 0$ .

- Cas d'un liquide incompressible et homogène

Dans ce cas  $\rho$  est une constante :  $\frac{dP}{dz} = +\rho g = \text{cte}$  en choisissant d'appeler  $z$  la *profondeur* (axe vertical *descendant*). On intègre :  $P(z) = +\rho g z + A$ . En  $z = 0$  :  $P(0) = A = P_0$ , d'où finalement

$$P(z) = +\rho g z + P_0.$$

- Cas d'un gaz parfait isotherme

Considérons une atmosphère isotherme à  $T = T_0$  dans laquelle l'air est considéré comme un gaz

parfait, de masse molaire  $M$ . Alors  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{Pm}{nRT} = \frac{PM}{RT}$ .

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \text{ en appelant } z \text{ l'altitude (axe vertical ascendant), d'où } \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz.$$

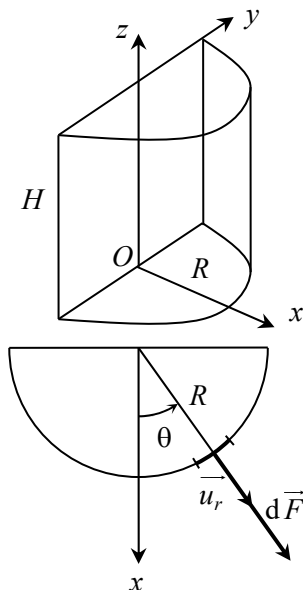
En intégrant cette relation entre 0 et  $z$ , on obtient  $\ln \frac{P(z)}{P_0} = -\frac{Mgz}{RT_0}$  soit  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$ .

## ■ Comment calculer la résultante des forces de pression exercées par un fluide ?

### □ Méthode 20.4. Calculer la résultante des forces de pression sur une surface

- Donner l'expression du champ de pression  $P(M)$  en un point de la paroi.
- Exprimer l'élément de surface  $dS(M)$  de la paroi dans le système de coordonnées adapté au problème, et en déduire la force de pression élémentaire  $d\vec{F}(M) = P(M)dS(M)\vec{n}_M$ .
- En étudiant les symétries du problème, déterminer la direction de la résultante des forces pressantes :  $\vec{F} = F_e \vec{e}$ .
- Calculer  $F_e = \vec{F} \cdot \vec{e} = \left( \iint d\vec{F}(M) \right) \cdot \vec{e} = \iint d\vec{F}(M) \cdot \vec{e} = \iint P(M)dS(M)\vec{n}_M \cdot \vec{e}$ .

⇒ Exercices 20.6, 20.7, 20.8



Calculons la résultante des forces pressantes exercées sur la face bombée d'un demi-cylindre de rayon  $R$  rempli d'eau (de masse volumique  $\rho_0 = \text{cte}$ ) sur une hauteur  $H$ . On négligera les variations de  $g$  avec l'altitude, et on posera  $P(z=H) = P_0$ .

- Pour déterminer le champ de pression, on intègre l'équation locale de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g \text{ (axe ascendant) soit } P(z) = P_0 + \rho_0 g(H - z).$$

- Les coordonnées cylindriques sont naturellement adaptées à l'étude du problème. À rayon constant, on a  $dS = R d\theta dz$ , d'où  $d\vec{F}_{\text{eau}} = P(z)R d\theta dz \vec{e}_r$  et  $d\vec{F}_{\text{air}} = -P_0 R d\theta dz \vec{e}_r$ , d'où au total,  $d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau}} + d\vec{F}_{\text{air}} = \rho_0 g(H - z)R d\theta dz \vec{e}_r$ .

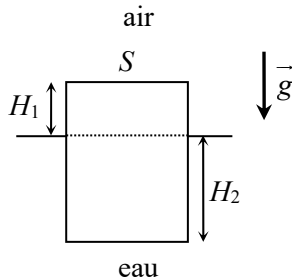
- Par symétrie, la résultante des forces pressantes exercées sur la face bombée est portée par (Ox) :  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x$ .

– Alors  $F_x = \iint dF \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \rho_0 g R \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} \cos \theta d\theta \int_{z=0}^{z=H} (H-z) dz$  soit  $\boxed{\vec{F} = \rho_0 g R H^2 \vec{e}_x}$ .

□ **Méthode 20.5. Utiliser le théorème d'Archimède**

- Déterminer le volume déplacé pour chaque fluide en contact avec l'objet.
- Calculer le poids de chaque volume de fluide déplacé et en déduire la poussée d'Archimède (totale).

⇒ Exercice 20.9, 20.10



Considérons un objet de section  $S$ , flottant à la surface de l'eau de telle sorte qu'une hauteur  $H_1$  soit émergée et une hauteur  $H_2$  immergée.

On note  $\rho_a$  et  $\rho_e$  les masses volumiques de l'air et de l'eau.

La partie émergée « déplace » un volume d'air  $V_a = SH_1$ , et la partie immergée un volume d'eau  $V_e = SH_2$ .

La poussée d'Archimède subie par l'objet est alors :  $\vec{F}_A = -[\rho_a SH_1 + \rho_e SH_2] \vec{g}$ .

On peut généralement négliger le premier terme devant le second, car dans les conditions ordinaires  $\rho_a \ll \rho_e$ .

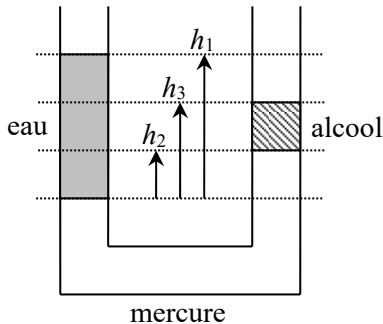
## ■ ■ Vrai/Faux

- |                                                                                                                                                          | Vrai                     | Faux                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. L'unité SI de pression est le bar.                                                                                                                    |                          |                          |
| 2. L'équation locale de la statique est la même pour tous les fluides.                                                                                   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. L'équation locale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur s'écrit $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ uniquement si l'axe ( $Oz$ ) est ascendant. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Pour un liquide incompressible et homogène dans le champ de pesanteur, la pression est une fonction affine de l'altitude.                             | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Pour un gaz parfait de masse molaire $M$ , le champ de pression est toujours de la forme $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$ .              | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. La pression dans un gaz peut généralement être considérée comme uniforme à petite échelle.                                                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. Dans un système à l'équilibre thermique, le nombre de particules possédant une énergie $E$ est égal à $\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$ .           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. À l'interface entre deux fluides, il y a une discontinuité de la pression.                                                                            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. La force de pression totale sur une surface fermée est nulle.                                                                                         | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10. La poussée d'Archimède exercée par un liquide est plus forte que celle exercée par un gaz.                                                           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Champs de pression et applications

### □ Exercice 20.1. Équilibre de trois liquides non miscibles

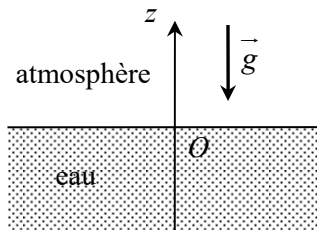


1. Montrer, à partir de l'équation locale de la statique des fluides, que la pression est une fonction affine de l'altitude  $z$  dans un liquide incompressible.

2. Un système de trois liquides incompressibles non miscibles (eau, mercure, alcool) est en équilibre dans un tube en U ouvert à l'air libre. On note respectivement  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$  les masses volumiques de l'eau, du mercure et de l'alcool. Calculer  $\rho_3$  en fonction de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$ .

Application numérique :  $h_1 = 0,80$  m,  $h_2 = 0,050$  m,  $h_3 = 0,20$  m,  $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$  et  $\rho_2 = 1,4 \cdot 10^4$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ .

### □ Exercice 20.2. Toto en plongée



Toto pratique la plongée en apnée, c'est-à-dire sans bouteille.

L'eau où il évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique  $\rho = 1,0 \cdot 10^3$  kg  $\cdot$  m $^{-3}$ , en équilibre dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  uniforme, avec  $g = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .

La surface libre de l'eau (à la cote  $z = 0$ ) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante  $P_{\text{atm}} = 1,013 \cdot 10^5$  Pa.

- Déterminer, littéralement et numériquement, la pression  $p(z)$  de l'eau en un point de cote  $z$  ; tracer le graphe de  $p(z)$ .
- On assimile l'air contenu dans les poumons de Toto à un gaz parfait ; cet air est caractérisé par une pression  $p(z)$  identique à celle de l'eau à la cote  $z$ , un volume  $V(z)$  (capacité pulmonaire) variable (la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression), et enfin par une température  $T_i$  constante et indépendante de la profondeur.
  - Calculer la capacité pulmonaire de Toto à une cote  $z$  sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale  $V_M$  puis bloque sa respiration.  
Application numérique :  $z = -10$  m et  $V_M = 7 \cdot 10^{-3}$  m $^3$ .
  - On définit le poids apparent du plongeur (nommé aussi flottabilité) comme la résultante de la poussée d'Archimède et des forces de pesanteur. Comment varie la flottabilité lorsque la profondeur augmente, diminue-t-elle ou augmente-t-elle ?
- Afin de faciliter sa descente lors des premiers mètres, Toto utilise un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accrochée à une ceinture et facilement largable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. On appelle  $m$  la masse de Toto,  $V^*(z)$  le volume de son corps et  $V_0$  le volume de son corps hors celui de la

cage thoracique, de sorte que  $V^*(z) = V_0 + V(z)$ . Quelle masse  $m_1$  de lest choisir si Toto adopte comme règle de sécurité le fait qu'il doit avoir une flottabilité nulle à la profondeur de 5 mètres ? Application numérique :  $V_0 = 0,077 \text{ m}^3$  et  $m = 80 \text{ kg}$ .

*D'après Mines-Ponts*

### □ Exercice 20.3. Modèles d'atmosphère \*

L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire  $M$ . On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol ( $z = 0$ ), la pression est  $P_0$  et la température  $T_0$ .

1. On suppose que la température de l'atmosphère est uniforme. À partir de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir la loi de variation de la pression en fonction de l'altitude  $z$ . On introduira une hauteur caractéristique  $H$  du phénomène.
2. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude  $z$  selon la loi  $T(z) = T_0 - \lambda z$  (avec  $\lambda > 0$ ).

a) Montrer que la pression à l'altitude  $z$  est de la forme  $P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$ .

b) Calculer, dans ce modèle, la pression au sommet de l'Everest (8850 m).

3. Pour  $z \ll H$ , montrer que les résultats obtenus à l'aide des deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine  $P(z)$  donnant la pression en fonction de l'altitude.

On donne :  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 310 \text{ K}$  et  $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ .

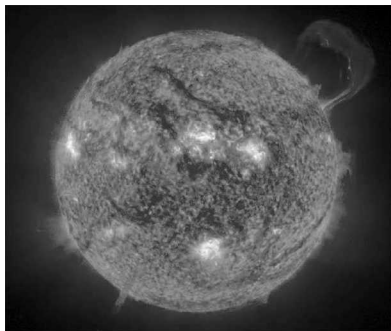
### □ Exercice 20.4. Évaluation de la masse de l'atmosphère \*

Dans le modèle de l'atmosphère isotherme à  $T_0$  (273 K), où l'air est considéré comme un gaz parfait ( $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), l'évolution de la pression avec l'altitude  $z$  est donnée par :

$$P(z) = P_0 \exp(-z/H) \text{ avec } P_0 = P(0) = 1,0 \text{ bar et } H = 8,0 \text{ km}.$$

1. Exprimer la masse volumique  $\rho(z)$  de l'atmosphère. En déduire la masse  $dm$  d'atmosphère dans une « coquille sphérique » comprise entre les rayons  $r (= R_T + z)$  et  $r + dr$ .
2. Pour simplifier, on suppose que l'altitude  $z$  est petite devant le rayon  $R_T$  de la Terre, et que l'épaisseur de l'atmosphère est grande devant  $H$ . En déduire dans le cadre de ces approximations la masse  $m$  de l'atmosphère. La calculer. On prendra  $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

### □ Exercice 20.5. Pression et température au centre du Soleil \* \*



Pour évaluer la pression et la température au centre du Soleil, on adopte le modèle suivant :

- Le Soleil est une étoile sphérique homogène de masse volumique  $\rho(r) = \rho_S = \text{cte}$ , de rayon  $R_S = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$  et de masse totale  $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .
- Le Soleil contient principalement de l'hydrogène, de masse molaire  $M = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , sous forme de gaz, supposé parfait ( $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

– Le champ de pesanteur à une distance  $r \leq R_{\odot}$  du centre du Soleil est donné par  $g(r) = \frac{GM_{\text{int}}(r)}{r^2}$  avec  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  la constante de gravitation universelle et  $M_{\text{int}}(r)$  la masse contenue dans une sphère de rayon  $r$  à l'intérieur du Soleil.

On donne le gradient d'une fonction scalaire  $f$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi}.$$

1. Montrer que la pression à l'intérieur du Soleil ne dépend que de  $r$  et déterminer son expression  $P(r)$ . En déduire la valeur numérique de la pression  $P(0)$  et de la température  $T(0)$  au centre du Soleil.
2. Les réactions nucléaires de fusion de l'hydrogène en hélium nécessitent une température d'au moins dix millions de kelvins. Au regard des hypothèses de l'énoncé, commenter le résultat obtenu à la question précédente.

## ■ Calculs de résultantes des forces de pression

### □ Exercice 20.6. Forces de pression sur une cloche à vide

Une cloche à vide est un dispositif dans lequel on peut diminuer fortement la pression au moyen d'un dispositif d'aspiration, jusqu'à aboutir à du « vide », c'est-à-dire à une pression très inférieure à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}} = 1,0 \text{ bar}$ .

La cloche considérée ici a une base circulaire de rayon  $R = 20 \text{ cm}$ .

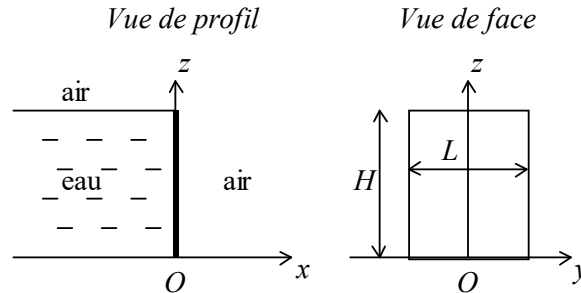


1. Quelle est la résultante des forces de pression s'exerçant sur la cloche à vide quand on n'a pas encore fait le vide ?
2. Lorsque le « vide » est fait, la pression à l'intérieur est d'environ  $0,2 \text{ Pa}$  : peut-on effectivement la négliger devant la pression atmosphérique ?
3. Justifier le fait que la résultante des forces de pression s'exerçant sur la cloche à vide est la même que sur un disque de rayon  $R$  (comme si la cloche était plate).
4. Calculer alors la résultante des forces de pression s'exerçant sur la cloche à vide, et commenter.



□ **Exercice 20.7. Forces de pression sur un barrage plan\***

On considère un barrage constitué d'une paroi rectangulaire de hauteur  $H$  et de largeur  $L$ , située dans un plan vertical ( $Oyz$ ).

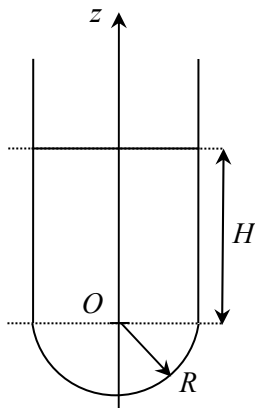


L'une des faces du barrage est en contact sur toute sa hauteur avec de l'eau, supposée incompressible, de masse volumique  $\rho$ . De l'autre côté se trouve l'air à la pression atmosphérique uniforme  $P_0$ . L'intensité de la pesanteur est notée  $g$ .

1. Déterminer la pression  $P(z)$  dans l'eau en fonction des données.
2. Exprimer la force de pression totale (eau et air)  $d\vec{F}$  sur une « tranche » de barrage de largeur  $L$  et de hauteur infinitésimale  $dz$ .
3. En déduire la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression sur toute la surface du barrage.
4. Calculer la norme de cette force pour le barrage des Trois-Gorges (Chine), et la comparer au poids du barrage.

On donne  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $H = 185 \text{ m}$  ;  $L = 2309 \text{ m}$  ; épaisseur moyenne  $E = 63 \text{ m}$  ; masse volumique du béton  $\rho_b = 2200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

□ **Exercice 20.8. Résultante des forces de pression au fond d'un tube à essai\***

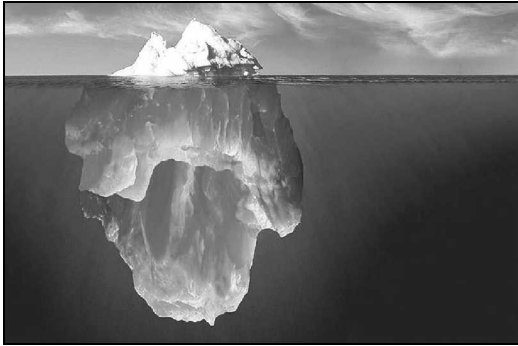


Un tube à essai, de fond hémisphérique (rayon  $R$ ), est partiellement rempli d'un liquide incompressible de masse volumique  $\rho_0$  sur une hauteur  $H$ .

1. Déterminer la pression  $P(z)$  dans le liquide.
2. Calculer la résultante des forces de pression exercées sur les parois du tube à essai. Commenter le résultat obtenu.

## ■ Théorème d'Archimède

### □ Exercice 20.9. La partie émergée de l'iceberg



Considérons un iceberg de volume total  $V$  flottant sur l'eau. Soit  $v$  le volume de la partie émergée.

Déterminer le rapport  $v/V$ .

On donne les masses volumiques respectives de l'eau, de la glace et de l'air :

$$\rho_e = 1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} ;$$

$$\rho_g = 0,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} ; \rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} .$$

### □ Exercice 20.10. Analyse d'une bague\*

Afin de déterminer si une bague est constituée d'un métal précieux, on réalise les manipulations suivantes.

#### *Manipulation 1*

On place un bécher rempli d'eau pure sur une balance et on appuie sur le bouton « tare ». La balance indique alors 0,0 g.

#### *Manipulation 2*

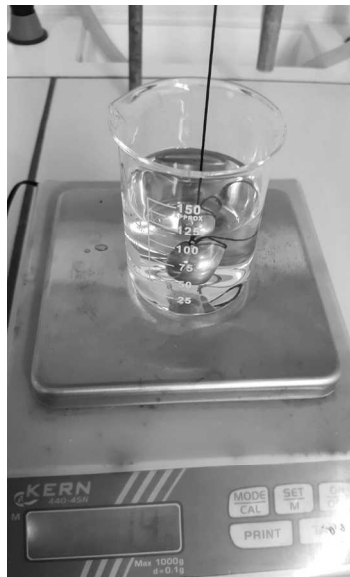
On attache la bague à un fil et on plonge la bague dans l'eau de telle sorte que la bague ne touche ni les bords ni le fond du bécher, mais qu'elle soit entièrement immergée en tenant l'extrémité supérieure du fil. La balance indique alors 1,4 g.

#### *Manipulation 3*

On enlève le fil et on place la bague dans l'eau, au fond du bécher. La balance indique 10,4 g.



*Manipulation 1*



*Manipulation 2*



*Manipulation 3*

1. Analyser rigoureusement les manipulations et interpréter les indications de la balance.

2. La bague est-elle constituée d'un métal précieux ?

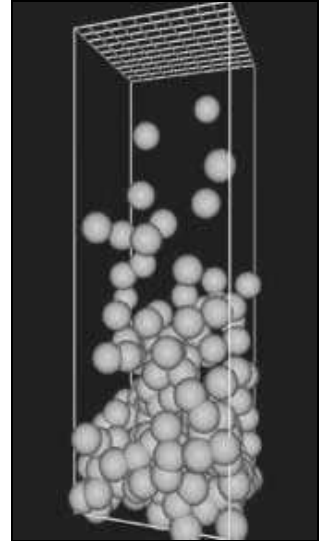
On donne la densité de quelques métaux :

Al 2,70	Sn 7,29	Fe 7,87	Ni 8,27
Cu 8,96	Ag 10,5	Au 19,3	Pt 21,5

## ■ Facteur de Boltzmann

### □ Exercice 20.11. Expérience de Jean Perrin \* \*

Dans certaines conditions, une suspension de petites particules solides dans un liquide se comporte comme un gaz parfait, dans lequel le rôle des molécules serait joué par les particules solides. Au tout début du XX<sup>e</sup> siècle, Jean PERRIN a eu l'idée d'observer une telle suspension au microscope. Ainsi, il a pu compter le nombre de particules (des grains de gomme-gutte) dans des tranches de petite épaisseur, situées à différentes altitudes. Cette expérience lui a permis de déterminer la valeur du nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$ .



1. En utilisant le facteur de Boltzmann, montrer que le nombre de grains compris, dans une colonne verticale, entre les plans de cotes  $z$  et  $z+dz$  est de la forme  $dN = A \exp(-z/\ell) dz$ , où  $A$  est une constante, et  $\ell$  une fonction qu'on exprimera en fonction de  $R$ ,  $\mathcal{N}_A$ , du rayon  $r$  des grains, des masses volumiques  $\rho_0$  et  $\rho$  respectivement de l'eau et des grains, de la température d'équilibre  $T_0$  et de  $g$ .

2. À un certain niveau défini par  $z=0$ , Jean Perrin a compté 100 grains dans une tranche de petite épaisseur. À l'altitude  $z=h=90,0 \mu\text{m}$ , il a compté 17 grains dans une tranche de même épaisseur. En déduire la valeur de  $\mathcal{N}_A$ .

On donne :  $r=0,212 \mu\text{m}$ ,  $\rho=1,19 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $\rho_0=1,00 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $T_0=293 \text{ K}$ ,  $g=9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  et  $R=8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 20.1.* La pression du fluide au niveau des surfaces libres de l'eau et de l'alcool est égale à la pression atmosphérique.

*Exercice 20.3.* À la question 3, penser à un développement limité.

*Exercice 20.5.* Question 1 : utiliser l'équation locale de la statique de fluides sous sa forme la plus générale.

*Exercice 20.11.* Déterminer l'énergie potentielle associée à la résultante du poids et de la poussée d'Archimède.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	faux	vrai	faux	vrai	faux	faux	faux	vrai

1. L'unité SI est le pascal (Pa). Mais le bar (1 bar =  $10^5$  Pa) est une unité fréquemment employée, car elle est de l'ordre de grandeur de la pression atmosphérique normale (et la conversion entre bars et pascals est simple).

3. Pour un axe ( $Oz$ ) descendant, elle s'écrit  $\frac{dP}{dz} = +\rho g > 0$ .

5. Il est nécessaire en plus que la température soit uniforme (indépendante de  $z$ ).

7. Ce nombre est *proportionnel* et non égal au facteur de Boltzmann. Le facteur de proportionnalité s'obtient, si nécessaire, à partir du nombre total de particules.

8. La pression est continue, quelle que soit la nature du ou des fluides.

9. Elle est non nulle en général : c'est la poussée d'Archimède.

10. En effet, la masse volumique d'un liquide est nettement plus grande que celle d'un gaz.

### □ Les erreurs classiques

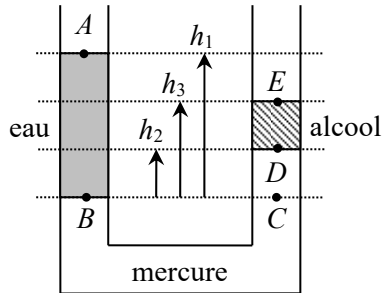
- Attention à l'orientation des axes pour l'écriture de l'équation locale de la statique des fluides.
- Dans les applications numériques de formules complexes, ne pas oublier d'utiliser les unités SI : pressions en pascals et non en bars, masses volumiques en kilogrammes par mètre cube (et non par litre), etc.
- Pour pouvoir appliquer le théorème d'Archimède, il est nécessaire que l'objet considéré soit totalement entouré par un ou plusieurs fluides. Le cas où un solide repose au fond d'un récipient sur une de ses faces est par conséquent à exclure. En revanche, un iceberg par exemple est effectivement totalement entouré de fluides : dans l'air pour sa partie visible, et dans l'eau pour sa partie cachée.
- Il convient de déterminer avec le plus grand soin l'élément de surface élémentaire sur lequel s'appliquent les forces élémentaires de pression, sans oublier d'écrire le vecteur unitaire normal.

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 20.1

1. En prenant un axe ( $Oz$ ) vertical descendant, l'équation locale de la statique des fluides est  $\frac{dP}{dz} = -\rho g = \text{cte}$ . En intégrant on obtient  $P(z) = -\rho g z + \text{cte}$ , fonction affine de  $z$ .

⇒ Méthode 17.2



2. La continuité de la pression implique que  $P_A = P_E = P_0$  (pression dans l'air). En outre, d'après le résultat précédent :

$$P_B = P_0 + \rho_1 g h_1$$

$$P_C = P_B = P_D + \rho_2 g h_2$$

$$P_D = P_0 + \rho_3 g (h_3 - h_2).$$

On en déduit :  $\rho_3 = \frac{\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2}{h_3 - h_2}$ . AN  $\rho_3 = 6,7 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

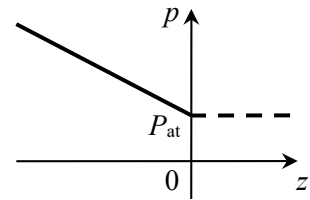
## Exercice 20.2

1. Équation locale de la statique des fluides :  $\frac{dp}{dz} = -\rho g = \text{cte}$ .

On intègre avec  $p(0) = P_{\text{atm}}$  :  $p(z) = P_{\text{atm}} - \rho g z$  (pour  $z \leq 0$ ).

AN  $p(z) = 1,013 \cdot 10^5 - 9,81 \cdot 10^3 z$  (avec  $p$  en Pa,  $z$  en m).

⇒ Méthode 17.2



●\* La droite est à tracer du côté gauche de l'axe et non du côté droit, puisque l'eau correspond à  $z < 0$ . Du côté droit, la pression atmosphérique est uniforme.

2. a) Lorsque la respiration est bloquée, la quantité de matière dans les poumons se conserve :

$$n = \text{cte} = \frac{P_{\text{atm}} V_M}{R T_i} = \frac{p(z) V(z)}{R T_i} \text{ donc } V(z) = V_M \frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z}. \text{ AN } V(-10 \text{ m}) = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 3,6 \text{ L}.$$

b) Flottabilité :  $\vec{F} = -m g \vec{e}_z + \rho V^* g \vec{e}_z = (\rho V^* - m) g \vec{e}_z$ . Elle est ascendante au voisinage de la surface, car la masse volumique moyenne du plongeur est plus faible que celle de l'eau. Quand la profondeur augmente,  $V^*$  diminue donc la flottabilité diminue (puis elle s'annule et devient descendante : on devrait alors l'appeler « coulabilité » !).

3. À la profondeur  $z = -5 \text{ m}$  :  $F = 0 = -(m + m_1) g + \rho \left[ V_0 + V_M \frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z} \right] g$  d'où on tire

$$m_1 = +\rho \left[ V_0 + V_M \frac{P_{\text{atm}}}{P_{\text{atm}} - \rho g z} \right] - m. \text{ AN } m_1 = 1,7 \text{ kg}.$$

### Exercice 20.3

1. Pour un gaz parfait :  $\rho = \frac{PM}{RT}$  d'où  $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} P$ . On peut résoudre cette équation différentielle en séparant les variables (voir méthode 20.2), ou bien en la considérant comme une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : la solution est  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$ , soit

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \text{ avec } H = \frac{RT_0}{Mg}.$$

2. a) Pour un axe ( $Oz$ ) orienté vers le haut,  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ . Or pour un gaz parfait,  $\rho = \frac{PM}{RT}$ .

Comme  $T$  est une fonction de  $z$ , la masse volumique dépend également de l'altitude :

$\rho(z) = \frac{PM}{R(T_0 - \lambda z)}$ . On obtient  $\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z}$  qui s'intègre en

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \lambda z} \text{ soit } \ln \frac{P(z)}{P_0} = +\frac{Mg}{\lambda R} \ln \frac{T_0 - \lambda z}{T_0} = \frac{T_0}{\lambda H} \ln \frac{T_0 - \lambda z}{T_0}. \text{ En isolant } P(z)$$

on obtient finalement : 
$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{T_0/\lambda H}.$$

⇨ Méthode 20.3

⚠ Attention, l'expression  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right)$  n'est valable que si la température de l'atmosphère est uniforme. Si la température du gaz parfait est une fonction de  $z$ , la masse volumique l'est également, il est donc nécessaire de repartir de l'équation locale de la statique des fluides et de l'intégrer à nouveau.

b) Au sommet de l'Everest, on trouve  $P(8850 \text{ m}) = 0,34 \text{ bar}$ , soit un tiers seulement de la pression au niveau de la mer.

3. Avec les données de l'énoncé,  $H = 9,1 \text{ km}$  et  $T_0/\lambda = 62 \text{ km}$ . Dans le modèle isotherme de la question 1,  $P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)$  à l'ordre 1 en  $\frac{z}{H}$ .

Dans le modèle à décroissance linéaire de la question 2,

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{T_0/\lambda H} \approx P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} \frac{T_0}{\lambda H} z\right) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \text{ à l'ordre 1 en } \frac{\lambda z}{T_0}.$$

Les deux modèles conduisent donc à la même fonction affine : 
$$P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right).$$

## Exercice 20.4

1. Pour un gaz parfait,  $\rho(z) = \frac{P(z)M}{RT_0}$  d'où  $\rho(z) = \frac{P_0 M}{RT_0} \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ .

On en déduit la masse d'atmosphère dans une « coquille sphérique » entre  $r$  et  $r + dr$  :

$$dm = \rho(z)4\pi r^2 dr \text{ soit, avec } r = R_T + z \text{ et } dr = dz, \quad dm = \frac{4\pi P_0 M}{RT_0} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) (R_T + z)^2 dz.$$

2. En supposant  $R_T \gg z$ ,  $dm \approx \frac{4\pi P_0 M}{RT_0} \exp\left(-\frac{z}{H}\right) R_T^2 dz$ . En supposant que l'épaisseur de l'atmosphère est grande devant  $H$ , on peut intégrer  $z$  de 0 à  $\infty$  pour obtenir une évaluation de la masse totale de l'atmosphère :  $m \approx \frac{4\pi P_0 M R_T^2}{RT_0} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz$  soit  $m \approx \frac{4\pi P_0 M R_T^2 H}{RT_0}$ .

AN  $m = 5,3 \cdot 10^{18}$  kg. C'est environ un millionième de la masse totale de la Terre.

⚠ Attention à bien exprimer la pression en pascals (et non en bars), les distances en mètres et la masse molaire en kilogrammes par mole.

## Exercice 20.5

1. L'équation locale de la statique des fluides s'écrit :  $\text{grad } P = \rho_S \vec{g} = -\rho_S g(r) \vec{e}_r$ . En utilisant l'expression fournie du gradient en coordonnées sphériques, on obtient par projection sur  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$  :  $\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho_S g(r)$  (1),  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$  (2) et  $\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0$  (3). On conclut des relations (2) et (3) que  $P$  ne dépend que de  $r$ .

⇨ Méthode 20.2

La relation (1) peut donc être réécrite en utilisant une dérivée droite :  $\frac{dP}{dr} = -\rho_S g(r) = -\rho_S \frac{GM_{\text{int}}(r)}{r^2}$ . Pour calculer  $M_{\text{int}}(r)$ , on utilise le fait que la masse est répartie

de manière homogène :  $\rho_S = \frac{M_S}{\frac{4}{3}\pi R_S^3} = \frac{M_{\text{int}}(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}$  d'où  $M_{\text{int}}(r) = M_S \left(\frac{r}{R_S}\right)^3$ . En injectant

l'expression de  $M_{\text{int}}(r)$  dans l'équation de la statique des fluides, on obtient  $\frac{dP}{dr} = -\frac{\rho_S GM_S}{R_S^3} r$ .

qui s'intègre en  $P(r) = -\frac{\rho_S GM_S}{2R_S^3} r^2 + k$ . La constante  $k$  est obtenue par continuité de la pression

à la surface du Soleil en contact avec le vide  $P(R_S) = 0 = -\frac{\rho_S GM_S}{2R_S^3} R_S^3 + k$  d'où

$$P(r) = \frac{\rho_S GM_S}{2R_S^3} (R_S^2 - r^2). \text{ Au centre du Soleil } (r = 0) : P(0) = \frac{\rho_S GM_S}{2R_S} = \frac{3GM_S^2}{8\pi R_S^4}.$$

L'hydrogène étant assimilé à un gaz parfait :  $P(0) = \frac{nRT(0)}{V} = \frac{M_S RT(0)}{MV} = \frac{\rho_S RT(0)}{M}$

soit  $T(0) = \frac{P(0)M}{\rho_S R} = \frac{GMM_S}{2RR_S}$ . AN  $P(0) = 1 \cdot 10^{14}$  Pa et  $T(0) = 1 \cdot 10^7$  K.

⇒ Méthode 20.3

**2.** La température obtenue dans ce modèle est de l'ordre de celle permettant les réactions nucléaires de fusion de l'hydrogène en hélium. À cet égard, il est donc satisfaisant. Toutefois, supposer que la masse volumique est constante en tout point du Soleil et que l'hydrogène se comporte comme un gaz parfait à des pressions de l'ordre de  $10^{14}$  Pa est bien évidemment non conforme à la réalité. Ce modèle permet donc de dégager des ordres de grandeur (les mêmes que ceux qu'on obtiendrait par analyse dimensionnelle) sans avoir besoin de faire appel à une modélisation précise de la structure interne du Soleil.

### Exercice 20.6

**1.** Si on ne fait pas le vide, la pression est la même de part et d'autre de la paroi : les forces de pression de l'intérieur et de l'extérieur se compensent donc, et la résultante est nulle.

**2.** La pression extérieure étant  $P_{\text{atm}} = 1,0 \text{ bar} = 1,0 \cdot 10^5$  Pa, le rapport des deux pressions est

$$\frac{P_{\text{int}}}{P_{\text{atm}}} = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ soit } 0,0002 \%. \text{ La pression sous la cloche est donc bien négligeable devant la}$$

pression atmosphérique, ce qui permet de considérer qu'on a fait le vide.

**3.** Notons  $\vec{F}$  la force de pression exercée par l'air extérieur sur la cloche, et  $\vec{F}'$  celle qui s'exercerait sur un disque de même rayon. Imaginons que la cloche ne soit pas posée sur un plateau, mais qu'elle soit fermée en bas par un disque, et que l'ensemble soit entièrement entouré d'air : la résultante des forces de pression sur la surface de ce système, qui est une surface fermée, serait alors nulle car on considère le champ de pression de l'air comme uniforme à cette échelle. Or cette résultante serait  $\vec{F} + (-\vec{F}')$  (puisque l'air serait au-dessus de la cloche mais au-dessous de la partie en forme de disque), donc  $\vec{F} + (-\vec{F}') = \vec{0}$  soit  $\boxed{\vec{F} = \vec{F}'}$ .

**4.** Si on note  $\vec{e}_z$  un vecteur unitaire orienté vers le bas, la force élémentaire de pression sur un élément de surface  $ds$  du disque est :  $d\vec{F} = P_{\text{atm}} ds \vec{e}_z$ .

La résultante sur un disque horizontal est donc :

$$\vec{F} = \iint_{\text{disque}} d\vec{F} = \iint_{\text{disque}} P_{\text{atm}} ds \vec{e}_z = P_{\text{atm}} \vec{e}_z \iint_{\text{disque}} ds \text{ soit } \boxed{\vec{F} = P_{\text{atm}} \pi R^2 \vec{e}_z}.$$

⇒ Méthode 20.4

AN  $\boxed{F = 1,3 \cdot 10^4 \text{ N} = 13 \text{ kN}}$ . Cette force est égale au poids d'une masse de plus d'une tonne !



## Exercice 20.7

1. Pour obtenir la pression dans l'eau à une profondeur  $z$ , on utilise l'équation locale de la statique des fluides :  $\frac{dP}{dz} = -\rho g = \text{cte}$ .

☞ Attention à l'orientation des axes dans l'écriture de l'équation locale de la statique des fluides. On vérifie bien ici que  $\frac{dP}{dz} = -\rho g < 0$  : la pression diminue avec l'altitude (mais augmente avec la profondeur).

L'équation précédente s'intègre en :  $P(z) = -\rho g z + A$  où  $A$  est une constante à déterminer.

Conditions aux limites : on connaît la pression à la surface, soit  $P(H) = P_0 = -\rho g H + A$ , d'où  $A = P_0 + \rho g H$ . Finalement :  $P(z) = P_0 + \rho g(H - z)$ .

⇒ Méthode 20.2

2. Sur la partie supérieure du barrage, qui n'est pas en contact avec l'eau, les forces de pression exercées par l'atmosphère sur chacune des deux faces sont opposées donc s'annulent.

Sur la partie inférieure, en contact avec l'eau, l'air exerce des forces de pression dirigées selon  $-\vec{e}_x$ , et l'eau des forces de pression dirigées selon  $+\vec{e}_x$ .

Ainsi, la somme des forces de pression élémentaires exercées par l'eau (à gauche) et par l'air (à droite) sur un élément  $ds$  de paroi s'écrit :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau}} + d\vec{F}_{\text{air}} = P(z) ds \vec{e}_x - P_0 ds \vec{e}_x = \rho g(H - z) ds \vec{e}_x.$$

L'élément de surface considéré ici est un rectangle de largeur  $L$  et de hauteur  $dz$ , donc  $ds = L dz$ , d'où la force élémentaire  $d\vec{F} = \rho g(H - z)L dz \vec{e}_x$ .

3. Résultante :

$$\vec{F} = \int_{z=0}^{z=H} d\vec{F} = \int_{z=0}^{z=H} \rho g(H - z)L dz \vec{e}_x = \rho g L \vec{e}_x \int_{z=0}^{z=H} (H - z) dz = \rho g L \vec{e}_x \left[ Hz - \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=H}$$

d'où finalement :  $\vec{F} = \frac{1}{2} \rho g L H^2 \vec{e}_x$ .

⇒ Méthode 20.4

4. AN  $F = 7,7 \cdot 10^{11} \text{ N} = 770 \text{ GN}$ .

Norme du poids du barrage :  $P = mg = \rho_b L H E g$ . AN  $F = 5,8 \cdot 10^{11} \text{ N} = 580 \text{ GN}$ .

Ces deux forces sont du même ordre de grandeur.

✍ Dans ce type de barrage, appelé barrage poids, les forces de frottement au sol dues au poids du barrage suffisent à compenser les forces de pression pour empêcher tout glissement du barrage.

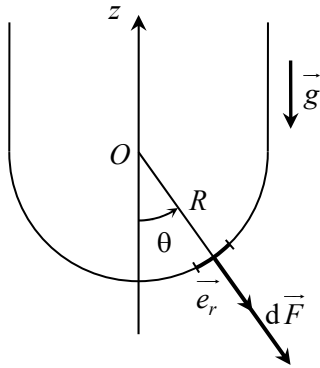
## Exercice 20.8

1. Avec l'orientation de l'axe ( $Oz$ ) choisie, l'équation locale de la statique des fluides s'écrit :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g.$$

La surface libre du liquide est en contact avec l'atmosphère. Par continuité de la pression, on a donc  $P(H) = P_0$ . Après séparation des variables, l'équation précédente s'intègre alors en :

$$\int_{P(z)}^{P_0} dP = -\rho_0 g \int_z^H dz \text{ soit } \boxed{P(z) = P_0 + \rho_0 g (H - z)} \text{ pour } -R \leq z \leq H.$$



**2.** Compte tenu de la symétrie du problème, la résultante des forces de pression sur les parois latérales du tube est nulle. Il suffit donc de calculer la résultante des forces de pression sur le fond du tube.

Les coordonnées sphériques sont naturellement adaptées à l'étude du problème. À rayon constant, un élément de surface élémentaire du fond sphérique du tube à essai a pour expression  $dS = R d\theta \cdot R \sin\theta d\varphi$ , et le vecteur unitaire normal est  $\pm \vec{e}_r$ .

Les forces de pression s'exerçant sur cet élément de surface sont alors :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{eau}} + d\vec{F}_{\text{air}} = P(z) dS \vec{e}_r - P_0 dS \vec{e}_r = \rho_0 g (H - z) R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r.$$

Par symétrie, la résultante des forces pressantes exercées sur le fond du tube est portée par  $(Oz)$  :

$\vec{F} = F_z \vec{e}_z$  donc  $F_z = \iint dF \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z$ . En remarquant que  $z = -R \cos\theta$  et  $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos\theta$ , on peut

calculer :  $F_z = -\rho_0 g R^2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi/2} (H + R \cos\theta) \sin\theta \cos\theta d\theta$ . L'intégration sur  $\theta$  fait

$$\text{apparaître } \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \left[ -\frac{1}{2} \cos^2\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \text{ et } \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \left[ -\frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\vec{F} = - \left[ \rho_0 g \pi R^2 H + \rho_0 g \frac{2}{3} \pi R^3 \right] \vec{e}_z}.$$

Cette force est égale au poids de l'eau dans le tube.

⇒ Méthode 20.4

### Exercice 20.9

La partie émergée de l'iceberg déplace un volume d'air  $v$ , et la partie immergée un volume d'eau  $V - v$ . La poussée d'Archimède subie par l'iceberg s'écrit alors :

$$\vec{F}_A = -[\rho_a v + \rho_e (V - v)] \vec{g}.$$

⇒ Méthode 20.5

Le PFD appliqué à l'iceberg, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, donne à l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{F}_A = \vec{0}$  soit  $\rho_g V \vec{g} - [\rho_a v + \rho_e (V - v)] \vec{g} = \vec{0}$ .

Finalement, on obtient en simplifiant :  $\boxed{\frac{v}{V} = \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e - \rho_a} \approx \frac{\rho_e - \rho_g}{\rho_e}}$ . AN  $\boxed{\frac{v}{V} = 10\%}$  : on ne voit à la

surface qu'une toute petite partie de l'iceberg.

## Exercice 20.10

1. Pour interpréter les manipulations décrites, il faut considérer que la balance mesure une force : celle qui s'exerce sur son plateau. Si rien n'est posé sur le plateau, la seule force qui s'exerce sur lui est la force de pression atmosphérique, que l'on élimine de la mesure en faisant la tare (c'est-à-dire en ramenant l'affichage à zéro). On pourra donc ne pas considérer la force de pression atmosphérique dans la suite, puisqu'elle a toujours la même valeur.

*✎ Lorsqu'on pose un objet sur le plateau, une partie de sa surface n'est plus soumise à la pression atmosphérique, mais une surface équivalente y est soumise en haut de l'objet, ce qui donne donc une force de pression identique du fait de l'uniformité de la pression atmosphérique.*

Cette première tare étant faite, quand on pose un objet sur le plateau, la force mesurée est la norme de la force exercée par l'objet sur le plateau, qui est l'opposée de la réaction  $\vec{R}$  du plateau sur l'objet. L'affichage correspond alors à la norme de cette force divisée par l'intensité  $g$  de la pesanteur.

Faisons un inventaire des forces extérieures exercées sur le système  $S$  {bêcher, eau}, de masse  $m$ , dans chacune des expériences.

– Manipulation 1

$S$  est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la réaction  $\vec{R}_1$  du plateau. À l'équilibre,  $\vec{P} + \vec{R}_1 = \vec{0}$  donc  $R_1 = P = mg$ . La balance afficherait donc au départ la masse  $m$  de ce système, mais en faisant la tare on soustrait cette valeur  $m$  et il reste 0.

– Manipulation 2

$S$  est maintenant soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , à la réaction  $\vec{R}_2$  du plateau et à une force exercée par la bague sur l'eau : d'après la troisième loi de Newton, cette force est l'opposée de la poussée d'Archimède  $\vec{F}_A$  exercée par l'eau sur la bague.

À l'équilibre,  $\vec{P} + \vec{R}_2 + (-\vec{F}_A) = \vec{0}$  donc  $R_2 = P + F_A = (m + m_{\text{eau déplacé}})g = (m + \rho_{\text{eau}}V_{\text{bague}})g$ . La balance affiche la différence entre la masse  $m + \rho_{\text{eau}}V_{\text{bague}}$  et la masse  $m$ , soit  $\rho_{\text{eau}}V_{\text{bague}} = 1,4 \text{ g}$ .

– Manipulation 3

Ici la situation est plus simple, car il n'y a plus le fil de suspension et la balance est donc utilisée de façon habituelle : elle affiche la différence entre la masse totale qui est posée dessus, soit  $m + m_{\text{bague}}$ , et la masse  $m$  utilisée pour tarer, donc  $m_{\text{bague}} = 10,4 \text{ g}$ .

*✎ Si on veut raisonner comme pour le cas précédent, il faut considérer que la bague exerce ici une force totale  $\vec{X}$  sur le système  $S$ , l'équilibre de la bague donne  $\vec{X} = m_{\text{bague}}\vec{g}$ , et l'équilibre de  $S$  donne alors  $\vec{P} + \vec{R}_3 + \vec{X} = \vec{0}$  soit  $R_3 = P + X = (m + m_{\text{bague}})g$ , d'où l'affichage de  $m_{\text{bague}}$ .*

2. Pour évaluer la composition de la bague, il faut comparer sa densité  $d = \frac{\rho_{\text{bague}}}{\rho_{\text{eau}}}$  à celles des

métaux indiqués. Or  $m_{\text{bague}} = \rho_{\text{bague}}V_{\text{bague}}$  donc  $d = \frac{m_{\text{bague}}}{\rho_{\text{eau}}V_{\text{bague}}}$ . AN  $d = 7,4$ .

Cette densité est comparable à celles des métaux « ordinaires » (fer, nickel, cuivre), mais non à celles des métaux précieux (argent, or et platine) qui sont supérieures à 10. La bague n'est donc pas en métal précieux.

### Exercice 20.11

1. Considérons un axe ( $Oz$ ) vertical et ascendant. Les particules sont soumises à leur poids  $\vec{P} = -mg \vec{e}_z = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \vec{e}_z$  et à la poussée d'Archimède  $\vec{F}_A = +\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g \vec{e}_z$ . La résultante  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_A = -\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0) g \vec{e}_z$  de ces deux forces est conservative, et l'énergie potentielle associée est :  $E_p = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0) g z$ . À l'équilibre thermique, le nombre de particules possédant une énergie potentielle  $E_p$  est proportionnelle au facteur de Boltzmann. Entre les plans de cotes  $z$  et  $z + dz$ , on trouve donc  $dN = A \exp\left(-\frac{4\pi r^3 (\rho - \rho_0) g}{3k_B T_0} z\right) dz$  particules, soit avec  $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$  :

$$dN = A \exp\left(-\frac{z}{\ell}\right) dz \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{3RT_0}{4\pi r^3 (\rho - \rho_0) g \mathcal{N}_A}.$$

2. À  $z=0$ , on a  $dN(0) = Adz = 100$ . À  $z=h=90,0 \mu\text{m}$ , on compte  $dN(h) = 17$  d'où  $17 = 100 \cdot \exp\left(-\frac{h}{\ell}\right)$ . On en déduit  $\mathcal{N}_A = -\frac{3RT_0 \ln(0,17)}{4\pi r^3 (\rho - \rho_0) gh}$ . AN  $\mathcal{N}_A = 6,45 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  soit une erreur relative de 7 % seulement par rapport à la valeur attendue  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .



# Champ magnétique

UN SCIENTIFIQUE



Les premiers intérêts scientifiques de **Wilhelm WEBER** (1804-1891) concernent la propagation du son. En 1831 il obtient une chaire à l'université de Göttingen grâce à Carl Friedrich GAUSS. Les deux hommes entament alors des expériences sur le magnétisme ; ils élaborent ensemble le premier télégraphe électromagnétique. Les travaux de WEBER ont permis de comprendre la nature électromagnétique de la lumière. L'unité de flux magnétique porte son nom dans le Système international.

## ■ Un peu d'histoire

L'existence du magnétisme est connue depuis l'Antiquité et la boussole apparaît vers l'an 1000 en Chine. Le premier exposé sur le sujet est l'œuvre de William GILBERT, daté de 1600, qui analyse les propriétés du magnétisme terrestre. Pourtant, la compréhension scientifique du phénomène ne se fait jour qu'en 1820 lorsque Hans ØRSTED constate la déviation d'une aiguille aimantée placée à proximité d'un courant électrique. Dès qu'il prend connaissance de cette propriété, André-Marie AMPÈRE en déduit l'origine électrique du magnétisme. Les connaissances avancent alors très rapidement. Michael FARADAY découvre le phénomène de l'induction en 1831 et Wilhelm WEBER montre que le rapport entre les unités électrostatique et électromagnétique est la vitesse de la lumière. James MAXWELL établit alors, au début des années 1860, les équations qui régissent l'électromagnétisme.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ L'allure du champ magnétique créé par un aimant droit, une bobine plate, une bobine longue
- ▷ Un dispositif permettant de créer un champ magnétique quasi uniforme
- ▷ Des ordres de grandeur de champs magnétiques usuels
- ▷ Les propriétés de symétrie du champ magnétique
- ▷ La notion de moment magnétique et son ordre de grandeur pour un aimant
- ▷ La force de Laplace, sa résultante pour une barre rectiligne et son moment pour une spire rectangulaire
- ▷ Une description sommaire d'un moteur à courant continu et d'un moteur synchrone

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Identifier, sur une carte de champ magnétique, les zones de champ uniforme, fort ou faible, et l'emplacement des sources
- ▷ Déterminer la direction d'un champ magnétostatique, à partir des symétries de la distribution de courant
- ▷ Orienter un champ selon la règle du tire-bouchon
- ▷ Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies
- ▷ Calculer la résultante ou le moment des forces de Laplace dans des cas simples
- ▷ Calculer la puissance des forces de Laplace

## ■ Champ magnétique

### □ Notion de champ magnétique

Le **champ magnétique** est introduit pour décrire indirectement les interactions entre des charges électriques en mouvement les unes par rapport aux autres.

- Des charges en mouvement créent un champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace.
- Une charge  $q$  en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}$ , en un point où le champ magnétique vaut  $\vec{B}$ , subit la force de Lorentz  $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

### □ Sources du champ magnétique

- Le mouvement des charges à l'origine du champ magnétique est le plus souvent décrit par un courant électrique parcourant un circuit.
- Dans un **aimant** (permanent), aucun courant n'existe à l'échelle macroscopique, mais des mouvements microscopiques de charges sont à l'origine d'un champ magnétique.

### □ Lignes de champ

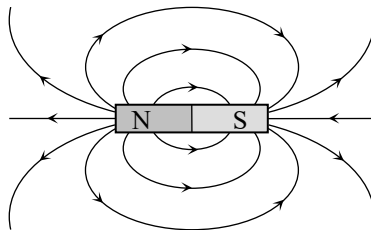
Une **ligne de champ** est une courbe tangente au champ en chacun de ses points, orientée dans le sens du champ.

D'une manière générale, les lignes de champ magnétique enlacent les courants électriques, et inversement les lignes de courant électrique enlacent le champ magnétique.

Une **carte de champ magnétique** représente l'allure de quelques lignes de champ, pour divers dispositifs créant un champ magnétique.

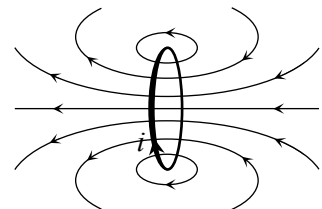
### □ Exemples de champ magnétiques

Champ créé par un aimant droit



Champ créé par une spire circulaire

Une spire circulaire, ou boucle de courant, est un conducteur filiforme circulaire de rayon  $R$  et parcouru par un courant  $i$ . Le sens de ce courant et le sens du champ magnétique créé par la spire sont liés par la **règle du tire-bouchon**.

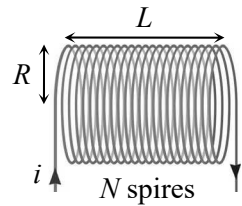


⇒ **Méthode 21.2. Déterminer le sens du champ magnétique**



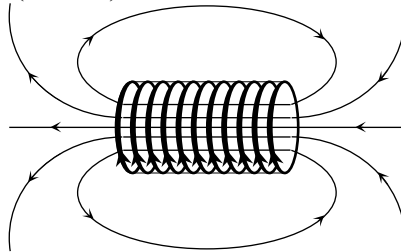
## Champ créé par une bobine

Une bobine est un enroulement de fil sur un support, généralement cylindrique. L'intérêt est d'obliger le courant à faire de nombreux tours, ce qui permet d'obtenir un champ magnétique important. On caractérise une bobine par sa longueur  $L$ , son rayon  $R$  et le nombre de spires  $N$ .



On peut distinguer deux cas extrêmes.

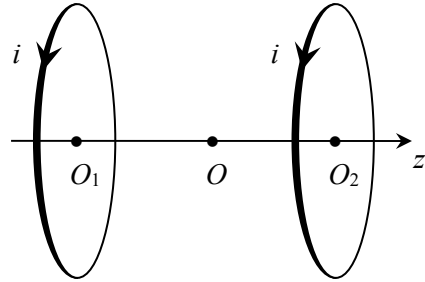
- Bobine plate ( $L \ll R$ ) : on peut l'assimiler à  $N$  spires confondues, donc l'allure du champ créé est la même que pour une spire, il est simplement  $N$  fois plus intense.
- Bobine longue ou solénoïde ( $L \gg R$ ) :



⇒ **Méthode 21.1. Exploiter une carte de champ magnétique**

## Champ créé par des bobines de Helmholtz

Il s'agit de deux bobines plates de même rayon  $R$  et de  $N$  spires chacune, de même axe ( $Oz$ ), et séparées par une distance  $O_1O_2$  égale à leur rayon  $R$ . Un courant d'intensité  $i$  circule dans le même sens dans les deux bobines. Au voisinage du point  $O$ , ce dispositif crée un



champ sensiblement uniforme :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{R} \left(\frac{5}{4}\right)^{-3/2} \vec{e}_z$ .

où  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la **perméabilité du vide**.

D'une manière plus générale, le champ magnétique créé par une bobine est *proportionnel à l'intensité du courant*.

## □ Ordres de grandeur de champs magnétiques

L'unité SI de champ magnétique est le tesla (T).

Champ magnétique créé par une spire simple	$\sim 1 \mu\text{T}$
Champ magnétique terrestre	$\sim 50 \mu\text{T}$
Champ magnétique créé par un aimant permanent usuel	$\sim 10 \text{ mT}$
Champ magnétique créé par une bobine utilisée en TP	$\sim 10 \text{ mT}$
Champ magnétique utilisé en imagerie IRM	$\sim 10 \text{ T}$
Champs les plus intenses créés par des bobines supraconductrices	$\sim 50 \text{ T}$

## ■ Symétries de la distribution de courants et du champ

### □ Propriétés de symétrie du champ magnétostatique

Pour rechercher les plans de symétrie ou d'antisymétrie des courants, on associe à un courant d'intensité  $I$  en un point  $P$  un vecteur, tangent au circuit en ce point et orienté dans le sens de  $I$ .

Plan de symétrie pour les courants

Un plan de symétrie pour la distribution de courants est un plan d'*antisymétrie* pour le champ magnétostatique : pour deux points  $P$  et  $P'$  symétriques,  $\vec{B}(P')$  est l'opposé du symétrique de  $\vec{B}(P)$ , donc leurs composantes parallèles au plan sont opposées et celles orthogonales au plan sont égales.

En particulier, *en un point d'un plan de symétrie des courants, le champ est orthogonal à ce plan.*

Plan d'antisymétrie pour les courants

Inversement, un plan d'antisymétrie pour la distribution de courants est un plan de *symétrie* pour le champ magnétostatique : pour  $P$  et  $P'$  symétriques,  $\vec{B}(P')$  est le symétrique de  $\vec{B}(P)$ , leurs composantes parallèles au plan sont égales et celles orthogonales au plan sont opposées.

En particulier, *en un point d'un plan d'antisymétrie des courants, le champ est parallèle à ce plan.*

⇒ **Méthode 21.3. Déterminer la direction du champ magnétique à partir des symétries**

### □ Invariances

Invariance par translation

Si la distribution de courants est invariante par translation selon un axe, le champ l'est aussi : il ne dépend donc pas de la coordonnée le long de cet axe.

Invariance par rotation autour d'un axe (symétrie de révolution)

Si la distribution de courants est invariante par rotation autour d'un axe, les composantes du champ le sont aussi, dans une base adaptée (cylindrique ou sphérique) : elles ne dépendent donc pas de la coordonnée angulaire qui définit la rotation autour de cet axe.

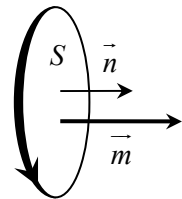
⇒ **Méthode 21.4. Déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ**

## ■ Moment magnétique

### □ Moment magnétique d'une boucle de courant plane

Le **moment magnétique** (ou moment dipolaire magnétique) associé à une spire est défini par la relation  $\vec{m} = i S \vec{n}$ , où  $i$  est l'intensité du courant,  $S$  la surface de la spire et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à la surface, orienté selon la règle du tire-bouchon.

Unité SI du moment magnétique : l'ampère-mètre carré ( $A \cdot m^2$ ).



### □ Moment magnétique d'un aimant

Les atomes possèdent un moment magnétique (de l'ordre de  $10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ), mais en général dans la matière les champs magnétiques créés par ces moments magnétiques s'annulent, car leur orientation est aléatoire. En revanche, dans un aimant permanent, tous les moments magnétiques sont sensiblement alignés, et leurs effets s'ajoutent, un aimant permanent est donc à l'origine d'un champ magnétique.

Une aiguille de boussole possède un moment magnétique de l'ordre de  $10 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

Dans les aimants permanents les plus puissants, le moment magnétique moyen par unité de volume est de l'ordre de  $10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## ■ Forces de Laplace

### □ Expression

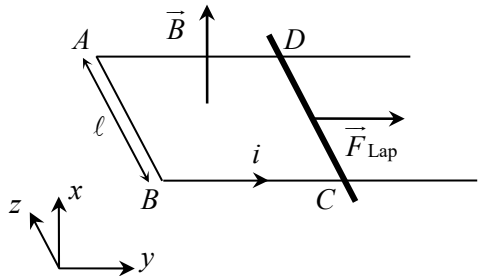
Une force de Laplace s'exerce sur un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. L'expression la plus générale est : 
$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Dans le cas particulier important où le champ  $\vec{B}$  est uniforme,  $\vec{F}_{\text{Lap}} = \left( \int i d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B}$ .

Dans ce cas, sur un circuit fermé dans lequel l'intensité est partout la même, la résultante des forces de Laplace est nulle car  $\int d\vec{\ell} = \vec{0}$  pour un circuit fermé.

### □ Expérience des rails de Laplace

On fait circuler un courant  $i$  dans un barreau mobile  $CD$  placé dans un champ magnétique constant et uniforme  $\vec{B}$ , les sens étant indiqués sur le schéma. On observe une déviation du barreau vers la droite, due à une force de Laplace  $\vec{F}_{\text{Lap}} = i \ell B \vec{e}_y$ .



⇒ Méthode 21.5. Calculer la résultante des forces de Laplace

### □ Moteur à courant continu

Une application importante des forces de Laplace est la possibilité d'obtenir un mouvement à partir d'un courant électrique, ce qui constitue un moteur électrique. Les rails de Laplace constituent ainsi un moteur électrique très rudimentaire.

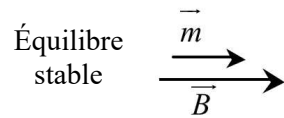
Il est cependant plus efficace d'utiliser un mouvement de rotation, ce qui conduit à une géométrie du dispositif (notamment du champ magnétique) plus compliquée, mais il s'agit toujours d'un champ magnétique indépendant du temps. Celui-ci est créé par une partie fixe, le **stator**, et il met en mouvement un **rotor** comportant des conducteurs rectilignes (analogues au barreau sur les rails de Laplace); le contact électrique entre ces conducteurs et leur circuit

d'alimentation est assuré par des balais en carbone frottant sur des lamelles. La vitesse de rotation obtenue est proportionnelle à la tension d'alimentation.

Les moteurs à courant continu sont utilisés dans divers appareils usuels : lecteur de disques, démarreur de voiture, modélisme, outillage portatif, gros engin de levage ou d'enroulage.

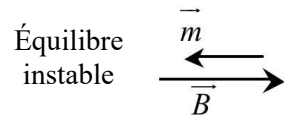
### □ Effet d'un champ magnétique uniforme sur un moment magnétique

Un moment magnétique est associé à un circuit fermé, ainsi, avec un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace est nulle. En revanche, le moment des forces de Laplace est en général non nul, et vaut  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .



Leur moment par rapport à un axe  $\Delta$  est alors  $\mathcal{M}_\Delta = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_\Delta$ .

Il y a donc deux situations d'équilibre (où le couple est nul), stable si le moment et le champ sont dans le même sens et instable s'ils sont en sens opposé. D'une manière générale, le moment a tendance à s'aligner sur le champ.

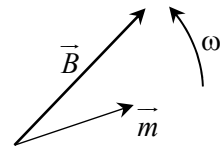


C'est notamment ce qui se passe pour un aimant permanent, que l'on peut en première approximation assimiler à un moment magnétique. L'aiguille d'une boussole, qui est un aimant permanent, « indique le nord » parce qu'elle s'aligne sur le champ magnétique terrestre.

⇒ **Méthode 21.6.** Calculer le moment du couple des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation

### □ Moteur synchrone

On peut mettre à profit l'effet d'alignement d'un moment magnétique sur le champ en créant un champ tournant au moyen de bobines fixes (constituant le stator), et en plaçant un rotor (moment permanent pouvant tourner : aimant permanent ou bobine alimentée en continu) dans ce champ magnétique. Le rotor tourne alors à la même vitesse angulaire que le champ (dite *vitesse de synchronisme*), d'où le nom de moteur *synchrone*.



⇒ **Méthode 21.7.** Calculer la puissance des forces de Laplace

Les moteurs synchrones sont utilisés dans des installations industrielles travaillant à vitesse constante (pompe, concasseur, laminoir...).

Par ailleurs, les machines synchrones sont réversibles, et sont surtout utilisées comme alternateurs (voir chapitre suivant).

## ■ Comment identifier les caractéristiques du champ magnétique ?

### □ Méthode 21.1. Exploiter une carte de champ magnétique

Le plus souvent, ce sont les lignes de champ qui sont représentées. On relève évidemment la direction et le sens du champ, mais aussi des informations relatives à la valeur du champ.

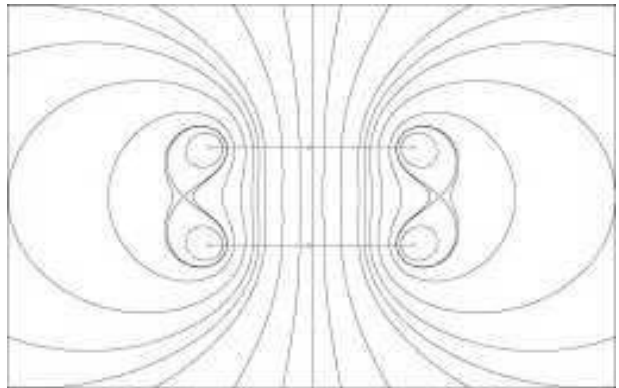
- Dans une zone où les lignes de champ sont parallèles, le champ est uniforme.
- Le champ est d'autant plus intense que les lignes de champ sont rapprochées (Ces deux affirmations découlent d'une propriété très générale du champ magnétique qui sera vue en détails en 2<sup>e</sup> année : le flux du champ magnétique au travers de toute surface fermée est nul.)

Par ailleurs, à l'intérieur d'une ligne de champ fermée, il y a nécessairement un courant qui traverse.

#### Exemple 1 : bobines de Helmholtz

On remarque que le champ est uniforme sur une assez large zone autour du centre du dispositif. Il est ensuite moins intense lorsque l'on s'éloigne des bobines (et la direction change). Le champ est faible sur les cotés.

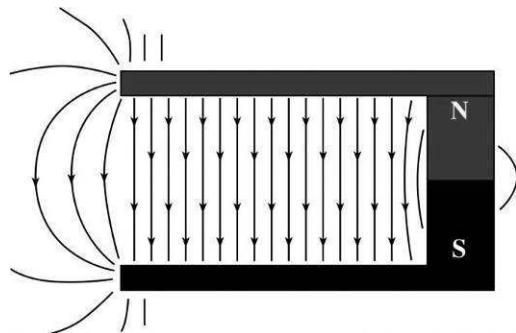
On repère également les endroits où les courants traversent le plan de la figure.



#### Exemple 2 : aimant en U

On remarque là encore une zone de champ uniforme, dans l'entrefer de l'aimant.

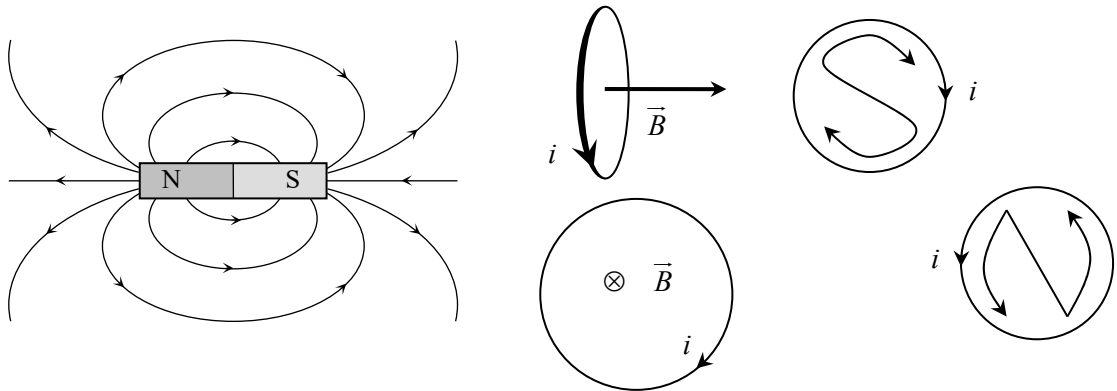
Les bobines de Helmholtz et l'aimant en U sont deux exemples courants de dispositifs permettant d'obtenir un champ magnétique uniforme.



### □ Méthode 21.2. Déterminer le sens du champ magnétique

- Dans le cas d'un aimant permanent, ayant un pôle nord (N) et un pôle sud (S), le champ magnétique va du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de l'aimant.
- S'il s'agit d'une bobine, on utilise la règle du tire-bouchon de Maxwell. On peut également nommer nord et sud les faces d'une bobine, par analogie avec l'aimant : la face où le courant est vu dans le sens horaire est la face sud, l'autre est la face nord.

⇒ Exercice 21.6



### □ Méthode 21.3. Déterminer la direction du champ magnétique à partir des symétries

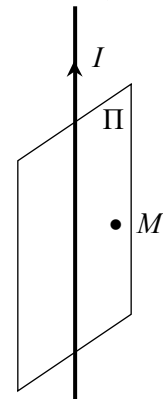
- Préciser d'abord en quel point on recherche la direction du champ magnéto-statique.
- Si on trouve un plan de symétrie des courants *qui passe par le point considéré*, la direction du champ est orthogonale à ce plan.
- Si on trouve un plan d'antisymétrie des courants *qui passe par le point considéré*, la direction du champ est parallèle à ce plan.

⇒ Exercices 21.7, 21.8

#### Exemple 1 : fil infini

Le modèle est celui d'un fil rectiligne infini, parcouru par un courant  $I$ . Il constitue une bonne approximation d'une situation où l'on considère le champ à une distance d'un fil faible devant son rayon de courbure.

Tout plan qui contient le fil est un plan de symétrie de cette distribution de courant, donc d'antisymétrie pour le champ magnéto-statique. Donc si on considère un point  $M$  et un tel plan  $\Pi$  passant par  $M$ , le champ sera orthogonal à  $\Pi$ . Si l'on repère la position de  $M$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  et que l'on note  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_z$  les vecteurs de base associés, le champ magnéto-statique en  $M$  est dirigé selon  $\vec{e}_\theta$ , c'est-à-dire de la forme  $\vec{B}(M) = B_\theta \vec{e}_\theta$  : on dit qu'il est *orthoradial*.

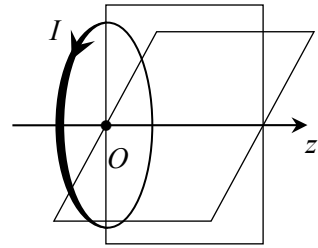


### Exemple 2 : spire circulaire

C'est un conducteur filiforme circulaire de centre  $O$ , de rayon  $R$  et parcouru par un courant  $I$ .

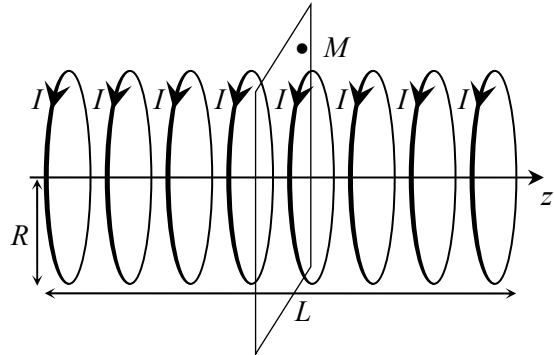
On note  $(Oz)$  l'axe de la spire et on s'intéresse au champ magnétostatique créé par la spire en un point  $M$  sur cet axe, dont la position est caractérisée par la coordonnée  $z$ .

Tout plan qui contient l'axe est plan d'antisymétrie de cette distribution de courant, donc en un point situé sur l'axe le champ est selon l'axe, donc selon  $\vec{e}_z$  :  $\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z$ .



### Exemple 3 : solénoïde infini

Pour  $L \gg R$  (typiquement  $L \approx 10R$ ), le modèle de solénoïde infini (longueur  $L$  infinie) donne une bonne approximation du champ magnétostatique dans un solénoïde réel au voisinage de son milieu (mais elle devient moins bonne près des extrémités).



On considère le solénoïde comme un ensemble de spires planes, ce qui est correct si les spires sont jointives (mais le courant suit en réalité une trajectoire en hélice). Comme la longueur du solénoïde est infinie, tout plan orthogonal à l'axe  $(Oz)$  du solénoïde est plan de symétrie de la distribution de courant. Donc, quel que soit le point  $M$  de l'espace (à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde), il existe un plan de symétrie des courants passant par  $M$ , auquel le champ magnétostatique est orthogonal. Le champ est donc dans tout l'espace selon l'axe du solénoïde, soit selon  $\vec{e}_z$  :  $\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z$ .

*✍ Tout point  $M$  est aussi dans un plan d'antisymétrie du courant : c'est le plan  $(MOz)$ . Mais ce plan n'apporte aucune information supplémentaire, puisqu'il nous permet juste de dire que le champ est parallèle à ce plan, ce qu'on a déjà trouvé.*

### □ Méthode 21.4. Déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ

La méthode est en tous points semblable à celle de l'électrostatique : rechercher les invariances de la distribution de courants puis déterminer les coordonnées dont dépendent les composantes du champ.

- Invariance par rotation autour d'un axe  $(Oz)$  : utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Les composantes du champ (donc sa norme) ne dépendent pas de la coordonnée angulaire  $\theta$ .
- Invariance par translation le long d'un axe : utiliser la coordonnée linéaire sur cet axe. Le champ ne dépend pas de cette coordonnée.

⇒ Exercices 21.7, 21.8

### Exemple 1 : fil infini

On note  $(Oz)$  l'axe du fil et on repère la position de  $M$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La distribution de courants est invariante par rotation autour de  $(Oz)$ , la norme du champ ne dépend donc pas de  $\theta$ . Elle est aussi invariante par translation le long de  $(Oz)$ , le champ ne dépend donc pas de  $z$ . Finalement, en combinant avec le résultat de la méthode précédente (direction du champ selon  $\vec{e}_\theta$ ), on trouve que le champ magnétostatique est de la forme :  $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e}_\theta$ .

*✍ Le calcul de la fonction  $B_\theta(r)$  sera vu en 2<sup>e</sup> année.*

### Exemple 2 : solénoïde infini

Là encore il y a invariance de la distribution par rotation autour de l'axe du solénoïde et par translation le long de cet axe (le solénoïde étant infini), les conclusions sont donc les mêmes que dans l'exemple précédent. Cependant, pour ce cas on avait trouvé avec la méthode précédente une direction du champ selon  $\vec{e}_z$ . Le champ est donc finalement de la forme :  $\vec{B}(M) = B_z(r)\vec{e}_z$ .

## ■ Comment calculer l'effet total des forces de Laplace ?

### □ Méthode 21.5. Calculer la résultante des forces de Laplace

Il s'agit d'utiliser la relation  $\vec{F}_{\text{Lap}} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ .

Il suffit généralement de décomposer le circuit en plusieurs morceaux pour lesquels la force est simple à calculer. Enfin, se souvenir que pour un circuit fermé avec le même courant en tous points du circuit et dans un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace est nulle.

⇒ Exercices 21.9, 21.10, 21.11, 21.14

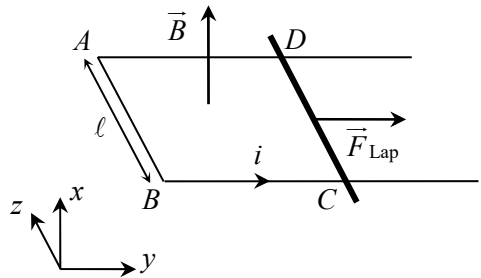
### Exemple 1 : rails de Laplace

On cherche ici à calculer la force sur le barreau mobile  $CD$ . Sur ce morceau de circuit,  $d\vec{\ell} = dz\vec{e}_z$  (attention,  $d\vec{\ell}$  doit être orienté dans le sens du courant, donc ici  $dz > 0$  : on intégrera de  $C$  à  $D$ ).

D'autre part le champ est  $\vec{B} = B\vec{e}_x$ , donc  $d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = B dz \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = B dz \vec{e}_y$ .

Donc  $\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_C^D i B dz \vec{e}_y = i B \vec{e}_y \int_C^D dz$  avec  $\int_C^D dz = z_D - z_C = CD = \ell$ , c'est-à-dire la

longueur du barreau mobile où circule le courant. On obtient finalement  $\vec{F}_{\text{Lap}} = i \ell B \vec{e}_y$ . Cette expression se retrouve très souvent, mais selon les notations le signe peut être différent. Ici, si le courant  $i$  est positif et que le champ est vers le haut, la force de Laplace est bien vers la droite.





Exemple 2 : spire rectangulaire (champ uniforme)

Comme une spire (rectangulaire ou non) est un circuit fermé, on sait que la résultante va être nulle. Néanmoins, il est intéressant de le vérifier sur un exemple.

On considère une spire rectangulaire  $CDEF$ , de cotés  $CD = EF = a$  et  $DE = CF = b$ , le champ  $\vec{B}$  est orthogonal à l'axe de symétrie  $(\Delta)$  de la spire.

Ici, on décompose le circuit en ses quatre cotés, on écrit donc

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{CD} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{DE} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{EF} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{FC} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

Commençons par le coté  $CD$  :

$$\vec{F}_{CD} = \int_{CD} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left( \int_{CD} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} \text{ puisque } i \text{ ne varie pas entre } C$$

et  $D$  et que  $\vec{B}$  est uniforme.

$$\text{Comme } \int_{CD} d\vec{\ell} = \vec{CD}, \text{ on obtient } \vec{F}_{CD} = \int_{CD} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \vec{CD} \wedge \vec{B}.$$

$$\text{De la même manière, } \vec{F}_{EF} = \int_{EF} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \vec{EF} \wedge \vec{B}.$$

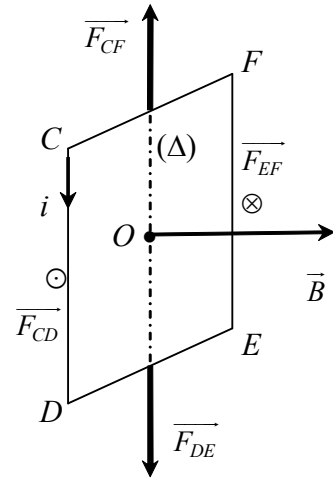
La somme de ces deux contributions est

$$\vec{F}_{CD} + \vec{F}_{EF} = i \vec{CD} \wedge \vec{B} + i \vec{EF} \wedge \vec{B} = i (\vec{CD} + \vec{EF}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

puisque  $\vec{CD} = -\vec{EF}$ .

$$\text{De même, } \vec{F}_{DE} + \vec{F}_{CF} = \int_{DE} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_{FC} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i (\vec{DE} + \vec{FC}) \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

La résultante des forces de Laplace sur la spire est donc bien nulle.



□ **Méthode 21.6. Calculer le moment du couple des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation**

Comme on peut associer un moment magnétique à une spire, la réponse est directement donnée par l'expression du couple subi par un moment magnétique dans un champ uniforme :  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .

On va ici détailler le calcul pour une spire rectangulaire ce qui permet, dans ce cas particulier, de vérifier la relation.

⇒ Exercices 21.9, 21.13, 21.14

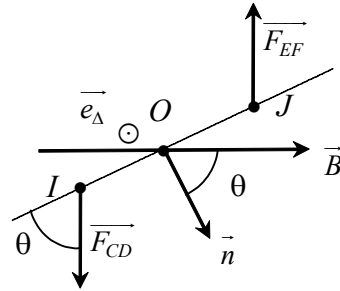
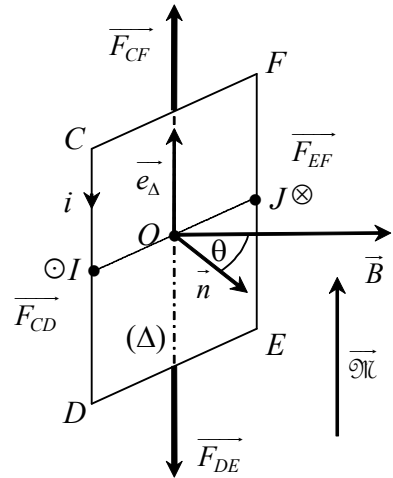
On reprend la situation et les calculs de la méthode 21.4. On sait que la résultante des forces de Laplace est nulle, leur moment est donc indépendant du point choisi pour le calculer : le plus simple est d'utiliser le point  $O$ , centre de la spire. On considérera que le point d'action de chaque force est le milieu du côté sur lequel elle s'exerce. Il est clair que le moment des forces  $\vec{F}_{CF}$  et  $\vec{F}_{DE}$  en  $O$  est nul, leur droite d'action passant par  $O$ . Pour  $\vec{F}_{CD}$ , le moment vaut  $\vec{OI} \wedge \vec{F}_{CD} = OI F_{CD} \sin(\theta) \vec{e}_\Delta$  (car  $(\vec{OI}, \vec{F}_{CD}) = \theta$ ).

On avait obtenu  $\vec{F}_{CD} = i \vec{CD} \wedge \vec{B}$ , comme  $\vec{CD}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux,  $F_{CD} = iaB$  (on note  $a$  la longueur  $CD$ ). De plus,  $OI = b/2$  (on note  $b$  la longueur  $DE$ ).

Le moment par rapport à  $O$  de  $\vec{F}_{CD}$  est donc  $\frac{iabB}{2} \sin(\theta) \vec{e}_\Delta$ . Le moment associé à  $\vec{F}_{EF}$ , égal à  $\vec{OJ} \wedge \vec{F}_{EF}$ , est égal à la même chose, les signes des deux vecteurs étant inversés.

On a au total :  $\vec{\mathcal{M}} = iabB \sin(\theta) \vec{e}_\Delta$ .

On peut maintenant vérifier que cela coïncide avec  $\vec{m} \wedge \vec{B}$  :  $\vec{m} \wedge \vec{B} = iS \vec{n} \wedge \vec{B} = iab \sin(\theta) \vec{e}_\Delta$ , la relation est vérifiée.



### □ Méthode 21.7. Calculer la puissance des forces de Laplace

Une fois la résultante ou le moment des forces de Laplace calculé(e), il suffit d'exploiter les relations vues en mécanique : dans le cas d'un mouvement de translation,  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$  ; et dans le cas d'une rotation,  $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega}$  ou  $\mathcal{P} = \pm \mathcal{M}_\Delta \cdot \omega$ .

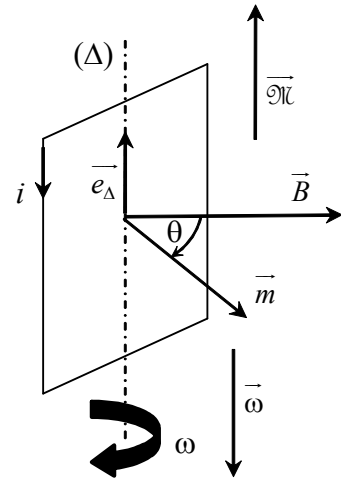
⇒ Exercices 21.10, 21.13

Prenons comme exemple la puissance des forces de Laplace sur une spire rectangulaire en rotation. On verra qu'on peut l'identifier à  $-\frac{dE_p}{dt}$  en définissant une énergie potentielle  $E_p$ . (Voir schéma page suivante.)

Avec les notations ci-contre,  $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{M}} \cdot \overline{\omega} = -\mathcal{M} \omega$  (c'est-à-dire que l'on pose  $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \overline{e_\Delta}$  et  $\overline{\omega} = \omega \overline{e_\Delta}$ ). On peut reprendre l'expression de  $\mathcal{M}$  obtenue précédemment :  $\mathcal{M} = iSB \sin(\theta)$ , on arrive ainsi à  $\mathcal{P} = -iSB \sin(\theta) \omega$ . En remarquant que  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , on a  $\mathcal{P} = -iSB \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d}{dt}(-iSB \cos(\theta))$ .

On voit alors que l'on peut identifier l'expression de l'énergie potentielle associée à l'orientation du moment magnétique de la spire relativement au champ  $\overline{B}$  :  $E_p = -iSB \cos(\theta)$ , ce qui correspond à l'expression générale  $E_p = -\overline{m} \cdot \overline{B}$ .

On retrouve bien la stabilité ou non des positions d'équilibre :  $E_p$  est minimale lorsque  $\overline{m}$  et  $\overline{B}$  sont colinéaires et dans le même sens, maximale lorsque  $\overline{m}$  et  $\overline{B}$  sont colinéaires et de sens contraires.



## ■ ■ Vrai/Faux

	Vrai	Faux
1. Le champ magnétique créé par une bobine est toujours uniforme.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le champ magnétique créé par une bobine est proportionnel au courant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Un champ magnétique est toujours dû à un courant, même dans le cas d'un aimant permanent.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Le champ magnétique terrestre est suffisamment intense pour modifier l'orientation d'un petit aimant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Le sens du champ magnétique créé par une bobine ne dépend pas du sens du courant.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Les champs magnétiques les plus intenses que l'on est capables de produire actuellement sont de l'ordre d'un million de fois plus grands que le champ magnétique terrestre.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le dispositif des rails de Laplace peut être considéré comme un moteur électrique très rudimentaire.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. L'effet d'un champ magnétique sur un moment magnétique est d'aligner le moment magnétique sur le champ.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Dans un champ magnétique uniforme, la résultante des forces de Laplace sur un moment magnétique est nulle.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Il existe une énergie potentielle associée au moment des forces de Laplace sur un moment magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Bobines et champs magnétiques

### □ Exercice 21.1. Solénoïde\*

Avec un solénoïde de longueur  $L = 41,2 \text{ cm}$  et dont le rayon des spires vaut  $R = 2,5 \text{ cm}$ , une source de courant et un teslamètre on fait les expériences suivantes.

*Expérience 1* – On place la sonde au centre du solénoïde et on alimente seulement une partie des spires, sur une longueur  $l$  de part et d'autre du centre. On mesure l'intensité du champ  $B$ .

$l$ (cm)	1,0	2,1	4,1	6,2	10,3	14,4	20,6
$B$ (mT)	1,2	2,0	2,6	2,8	3,0	3,0	3,0

*Expérience 2* – On place la sonde au centre du solénoïde que l'on alimente sur toute sa longueur et on fait varier le courant  $i$ . On mesure l'intensité du champ  $B$ .

$i$ (A)	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	4,5	5,0
$B$ (mT)	0,4	0,7	1,4	2,0	2,7	3,0	3,4

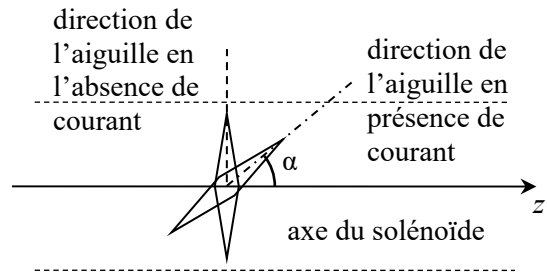
*Expérience 3* – On alimente le solénoïde sur toute sa longueur et on place la sonde à une distance  $d$  du centre. On mesure l'intensité du champ  $B$ .

$d$ (cm)	0,0	5,1	10,3	12,6	15,2	17,8	20,6
$B$ (mT)	3,0	3,0	3,0	3,0	2,9	2,5	1,8

1. Quel est le nombre de spires  $N$  du solénoïde ? On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .
2. Quelle est la valeur du courant dans les première et troisième expériences ?
3. À partir de quel rapport entre la longueur (alimentée) du solénoïde et le rayon des spires le champ au centre est-il donné par l'approximation du solénoïde infini avec un écart relatif inférieur à 10 % ?
4. Lorsque toutes les spires sont alimentées, sur quelle proportion de la longueur du solénoïde cette approximation est-elle vérifiée avec un écart relatif inférieur à 10 % ?

### □ Exercice 21.2. Mesure du champ magnétique terrestre

Pour mesurer approximativement la composante horizontale du champ magnétique terrestre, on utilise le dispositif suivant : une petite aiguille aimantée est placée à l'intérieur d'un solénoïde (pour les calculs, on se place dans l'approximation du solénoïde infini), de manière à ce que, en l'absence de courant dans le solénoïde, l'aiguille soit orthogonale à son axe.

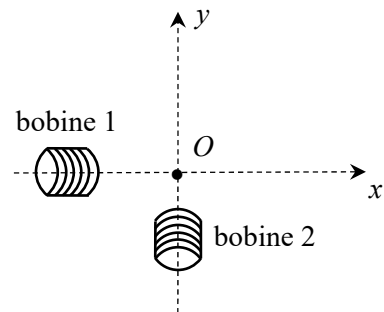


On donne le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini :  $\vec{B}_s = \frac{\mu_0 Ni}{L} \vec{e}_z$ .

1. Indiquer qualitativement ce qui se produit lorsqu'un courant circule dans le solénoïde.
2. Avec un courant  $i = 96 \text{ mA}$ , on relève  $\alpha = 37^\circ$ . Sachant que le solénoïde est constitué de  $N = 130$  spires et que sa longueur est de  $L = 60 \text{ cm}$ , calculer la valeur de la composante horizontale du champ terrestre.
3. On estime que l'incertitude sur l'angle  $\alpha$  est de  $2^\circ$ , et on néglige les incertitudes sur les autres grandeurs. Quelle est l'incertitude sur la valeur du champ ?

### □ Exercice 21.3. Réalisation d'un champ tournant

Les deux bobines représentées ci-contre ont même rayon, même hauteur et même nombre de spires. Elles sont parcourues par des courants  $i_1 = I_m \cos(\omega t)$  et  $i_2 = I_m \sin(\omega t)$ .



1. Quel est le déphasage entre ces deux courants ?
2. Montrer que le champ en  $O$  a une valeur constante et qu'il tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  (dans quel sens ?).
3. On envisage un dispositif similaire utilisant trois bobines. Comment doit-on disposer les bobines et quel doivent être les déphasages entre les courants ?

### □ Exercice 21.4. Spires concentriques\*

Une bobine circulaire plate est considérée comme un ensemble de  $N$  spires circulaires concentriques dont les rayons sont régulièrement répartis entre deux valeurs extrêmes  $R_1$  et  $R_2$ . On note  $i$  le courant dans la bobine, et on prendra pour les applications numériques :  $N = 100$ ,  $i = 100 \text{ mA}$ ,  $R_1 = 19,0 \text{ cm}$  et  $R_2 = 21,0 \text{ cm}$ .

1. Donner l'expression du champ créé au centre de la bobine, sachant que le champ au centre d'une spire de rayon  $R$  est égal à  $\frac{\mu_0 i}{2R}$ .
2. Calculer numériquement le champ au centre de la bobine.
3. Calculer l'écart relatif entre cette valeur et celle que l'on obtiendrait en considérant  $N$  spires de rayon égal à la moyenne de  $R_1$  et  $R_2$ .

□ **Exercice 21.5. Bobine plate\*\***

On qualifie de plate une bobine dont la hauteur  $h$  est très inférieure au rayon des spires  $R$ .

La bobine plate considérée comporte  $N$  spires et est parcourue par un courant  $i$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $R = 20 \text{ cm}$ ,  $h = 1 \text{ cm}$ ,  $N = 200$  et  $i = 500 \text{ mA}$ .

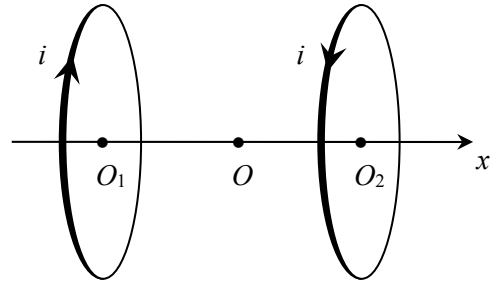
1. L'approximation faite généralement pour une bobine plate est de considérer que toutes les spires sont confondues et donc que le champ créé est égal à  $N$  fois celui d'une spire. Donner l'expression du champ créé sur l'axe de la bobine et calculer sa valeur numérique au centre de la bobine. On utilisera l'expression du champ créé par une spire sur son axe ( $Oz$ ):

$$\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_z.$$

2. On prend maintenant en compte la hauteur  $h$  de la bobine. En la considérant comme un ensemble de spires planes régulièrement réparties, donner l'expression du champ au centre de la bobine. Faire l'application numérique et calculer l'écart relatif avec la valeur approchée précédente. Conclure quant à la validité de l'approximation dans ce cas.

□ **Exercice 21.6. Création d'un champ linéaire\*\***

On considère un dispositif analogue aux bobines de Helmholtz : deux bobines plates de rayon  $R$  de  $N$  spires chacune, de même axe ( $Ox$ ) et séparées par une distance  $d = O_1O_2$ . La différence est que le courant d'intensité  $i$  (positive) circule en sens opposé dans les deux bobines. On s'intéresse au champ magnétique créé par ce dispositif au voisinage du point  $O$ , milieu de  $[O_1O_2]$ .



On donne le champ créé par *une* spire sur son axe ( $Ox$ ):  $\vec{B} = \pm \frac{\mu_0 i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x$

avec dans cette formule un signe + ou – selon le sens de  $i$ .

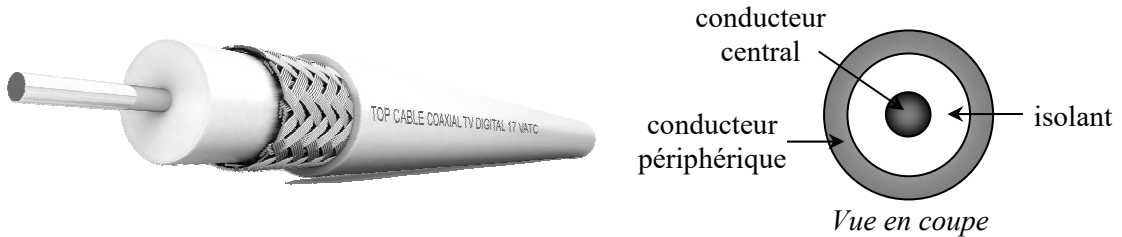
1. À laquelle des deux bobines correspond le signe + ? Vérifier que le champ créé par les deux bobines est nul au point  $O$ .
2. En considérant chaque bobine comme  $N$  spires circulaires confondues, donner l'expression du champ en un point  $M$  sur l'axe ( $Ox$ ).
3. Montrer que si  $d = R\sqrt{3}$  le champ au voisinage du point  $O$  varie linéairement avec  $x$ , à des termes du cinquième ordre en  $x$  près.
4. On veut un champ au voisinage de  $O$  dont la pente (variation du champ avec  $x$ ) vaut  $a = 10 \text{ T} \cdot \text{m}^{-1}$  avec un courant d'intensité  $i = 10 \text{ mA}$  et des bobines de rayon  $R = 10 \text{ cm}$ . Calculer le nombre  $N$  de spires que doit comporter chaque bobine.

## ■ Propriétés de symétrie

### □ Exercice 21.7. Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs concentriques, séparés par un isolant, parcourus par des courants égaux et de sens opposés. Le conducteur central est un fil fin et le conducteur périphérique est très mince, de rayon  $R$  ; le courant qui circule dans le conducteur périphérique est réparti uniformément sur toute sa surface.

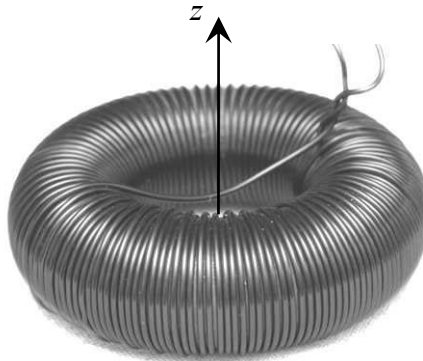
On considère que le câble coaxial est rectiligne et infiniment long.



Étudier les symétries et invariances de cette distribution de courant, et conclure sur la forme du champ  $\vec{B}(M)$  qu'elle crée.

### □ Exercice 21.8. Bobine torique

Une bobine torique est un enroulement sur un support de forme torique (la forme d'une bouée).



Le support torique est caractérisé par un rayon  $R$  autour de son axe de symétrie ( $Oz$ ) et une section circulaire de rayon  $a$ . L'enroulement comporte  $N$  spires que l'on considérera comme des spires planes, circulaires de rayon  $a$ . Les spires sont jointives et leur nombre  $N$  est suffisamment grand pour que l'on puisse considérer les spires comme continûment réparties le long du tore.

On repère la position d'un point  $M$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  autour de l'axe de symétrie du tore.

Montrer que le champ magnétostatique créé par cette bobine est orthoradial (selon  $\vec{e}_\theta$ ) et que sa norme ne dépend pas de la coordonnée  $\theta$ .

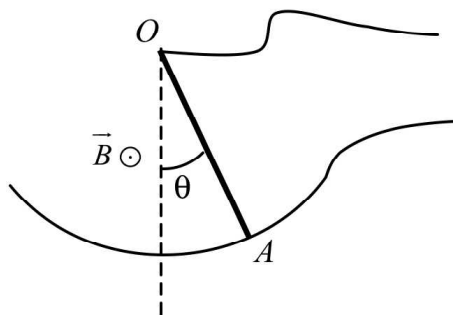


## ■ Forces de Laplace, moments magnétiques

### □ Exercice 21.9. Équilibre d'une tige

Une tige rectiligne de longueur  $\ell = OA$  fixée en  $O$  et parcourue par un courant  $i$  (il y a un contact mobile en  $A$ ) est plongée dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ .

1. Quel doit être le sens du courant pour que la position d'équilibre corresponde à ce qui est indiqué sur le schéma ?
2. Donner l'expression de l'angle d'équilibre  $\theta_{\text{eq}}$  en fonction de  $B$ ,  $i$ ,  $\ell$ , la masse  $m$  de la tige et l'accélération de la pesanteur  $g$ .



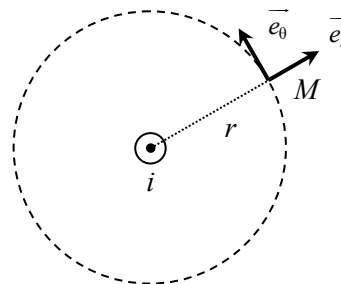
### □ Exercice 21.10. Rails de Laplace en pente

On reprend la situation des rails de Laplace, mais au lieu d'être horizontaux, ils font un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. Le champ magnétique est constant et uniforme, vertical, dirigé vers le haut. On prendra  $B = 150 \text{ mT}$ ,  $m = 8,0 \text{ g}$ ,  $\ell = 12 \text{ cm}$  (masse et longueur du barreau mobile),  $\alpha = 30^\circ$  et  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . On néglige les frottements.

1. Faire un schéma en précisant le sens du courant pour que la force permette au barreau mobile de monter le long des rails.
2. Calculer la valeur de  $i$  pour que le barreau monte à vitesse constante (on imagine qu'il a une vitesse initiale...)
3. Calculer la puissance des forces de Laplace sur le barreau s'il met  $0,5 \text{ s}$  pour augmenter son altitude de  $10 \text{ cm}$ .

### □ Exercice 21.11. Forces de Laplace entre deux fils parallèles\*

Deux fils parallèles distants de  $a$  sont parcourus par le même courant  $i$ . Pour évaluer le champ magnétique créé par l'un des fils, on se placera dans l'approximation d'un fil infini, le champ est alors donné par la relation :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ .



1. Pour que la force soit attractive, les courants doivent-ils être dans le même sens ou en sens inverse ?
2. Donner l'expression de la force sur une longueur  $\ell$  de fil. Comment cette force dépend-elle du courant  $i$  ?
3. Calculer numériquement cette force pour une longueur  $\ell = 20 \text{ cm}$  de fil, les fils étant distants de  $a = 1 \text{ cm}$  et le courant valant  $i = 12 \text{ A}$ .
4. Calculer la valeur de l'intensité  $i$  nécessaire pour que, la distance entre les fils étant de  $1 \text{ mètre}$ , la force d'attraction entre les deux fils soit égale à  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$  par mètre de fil.

□ **Exercice 21.12. Magnéton de Bohr\***

On adopte pour l'atome d'hydrogène le modèle de Bohr. Dans ce modèle, l'électron gravite autour du proton avec un mouvement circulaire uniforme de rayon  $a_0$ , et le moment cinétique  $L$  associé à ce mouvement (dit orbital) est quantifié :  $L = n\hbar$  où  $n$  est un entier et  $\hbar$  la constante de Planck réduite. On notera  $m_e$  la masse de l'électron pour ne pas confondre avec son moment magnétique  $m$ . On donne  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg et  $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$  J·s.

1. Montrer que l'on peut associer au mouvement orbital de l'électron un courant d'intensité

$$i = \frac{ev}{2\pi a_0}$$

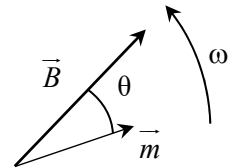
et en déduire le moment magnétique  $m$  associé.

2. Exprimer  $m$  en fonction du moment cinétique orbital  $L$  de l'électron, en déduire l'expression du magnéton de Bohr  $\mu_B$ , qui est le moment magnétique de l'électron dans son état fondamental. Calculer numériquement  $\mu_B$ .

□ **Exercice 21.13. Moteur synchrone\***

On considère un modèle simple pour décrire le moteur synchrone.

Le rotor, décrit par un moment magnétique  $\vec{m}$ , tourne avec la même vitesse angulaire (constante)  $\omega$  que le champ magnétique  $\vec{B}$  qui l'entraîne. On s'intéresse à l'angle interne du moteur  $\theta = \widehat{\vec{m}, \vec{B}}$  et au couple  $\mathcal{M}$  exercé par le champ sur le moment magnétique.

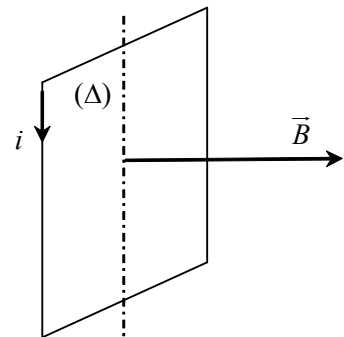


On prendra  $B = 0,2$  T,  $m = 8,0$  A·m<sup>2</sup> et  $f = 50$  tours/s.

1. Donner l'expression de  $\mathcal{M}$  en fonction de  $\theta$ .
2. Que vaut  $\theta$  si le moteur fonctionne « à vide » (il n'entraîne rien), dans l'hypothèse où on néglige tout frottement ?
3. Le moteur doit entraîner un dispositif mécanique (charge) qui exerce un couple résistant  $\mathcal{M}_r = 0,65$  N·m. Calculer l'angle interne et la puissance fournie par le moteur.
4. La vitesse de rotation dépend-elle de la charge ? Quel est le couple maximal que peut fournir ce moteur ?

□ **Exercice 21.14. Cadre mobile en courant alternatif\***

Une spire rectangulaire de surface  $S$ , dans laquelle circule un courant  $i$  sinusoïdal, d'amplitude  $I_m$  et de pulsation  $\omega$ , est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  constant et uniforme, orthogonal à son axe de rotation ( $\Delta$ ).



1. En considérant la spire dans une position quelconque et  $i = I_m$ , indiquer les sens des forces de Laplace et du couple.
2. Expliquer qualitativement pourquoi, si la spire tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ , le couple moyen des forces de Laplace sur la spire est non nul.

3. Quelle doit être la position de la spire lorsque  $i = I_m$  pour que le couple soit maximal ? Dans quel sens doit-elle tourner ?
4. Dans ce cas, calculer la valeur moyenne du couple des forces de Laplace sur la spire.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 21.1.* Penser à dessiner des graphes à partir des données.

*Exercice 21.3.* Écrire le champ créé par chaque bobine, puis faire la somme.

*Exercice 21.4.* Exprimer le champ créé par une petite épaisseur de spires comprises entre  $r$  et  $r + dr$  en faisant intervenir une densité radiale de spires  $\frac{N}{R_2 - R_1}$ .

*Exercice 21.5.* Même principe, avec une petite épaisseur de spires comprises entre  $z$  et  $z + dz$ . Pour calculer l'intégrale, poser  $\tan(\theta) = \frac{z}{R}$  et intégrer sur  $\theta$ .

*Exercice 21.6.* Question 3 : calculer un développement limité.

*Exercice 21.12.* Calculer l'intensité moyenne sur le trajet suivi par l'électron en écrivant que la charge de l'électron traverse une petite surface toutes les périodes.

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai

1. C'est évidemment faux, le champ est éventuellement uniforme dans certaines zones de l'espace (à l'intérieur d'un solénoïde, au voisinage du centre des bobines de Helmholtz).
3. Il existe des courants à l'échelle atomique, dits courants ampériens, responsables du champ magnétique créé par un aimant.
4. C'est ce qui se passe avec l'aiguille d'une boussole...
5. Le sens est donné par les règles d'orientation (tire-bouchon de Maxwell et équivalents).
7. On obtient effectivement un mouvement à partir d'un courant électrique... l'inconvénient est que cela ne peut pas fonctionner très longtemps !
10. L'expression est  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ .

### □ Les erreurs classiques

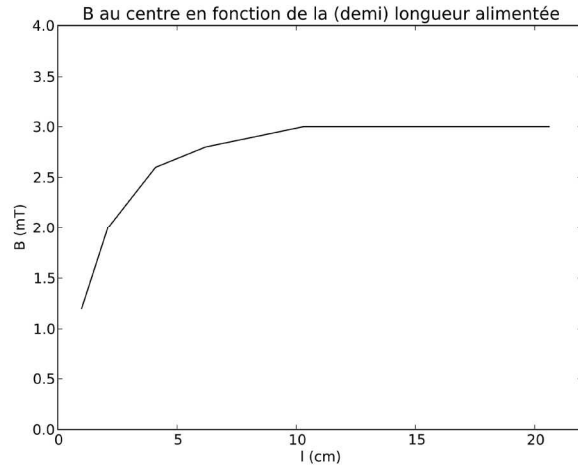
- Les notions de pôles nord et sud d'un aimant peuvent prêter à confusion. Bien se rappeler que le champ magnétique est dirigé du pôle nord vers le pôle sud à l'extérieur de l'aimant (et donc du pôle sud vers le pôle nord à l'intérieur de l'aimant, « à l'intérieur » signifiant dans la matière qui compose l'aimant).
- Il faut bien distinguer le champ magnétique qui agit sur un circuit parcouru par un courant (souvent qualifié de champ extérieur) du champ magnétique créé par le circuit lui-même (auquel on ne s'intéresse pas en général, si le but est de calculer la force de Laplace subie *par* ce circuit).
- Il faut faire attention à la portion de circuit sur laquelle on calcule la force de Laplace. Par exemple, dans le cas des rails de Laplace, il est inutile de calculer la force sur les rails eux-mêmes (sauf si on veut calculer la force qui tend à les écarter l'un de l'autre...).

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 21.1

1. On remarque, d'après le graphe ci-contre issu de la première série de données, que lorsque plus de la moitié de la longueur du solénoïde est alimentée, la longueur alimentée n'a plus d'influence, et donc l'approximation du solénoïde infini est satisfaite.

Si on traite ensuite la deuxième série de mesures en effectuant une régression linéaire (ce qui donne une pente de 0,661 mT/A, une ordonnée à l'origine de 0,038 mT, négligeable, et un coefficient de corrélation de 0,999), on peut en

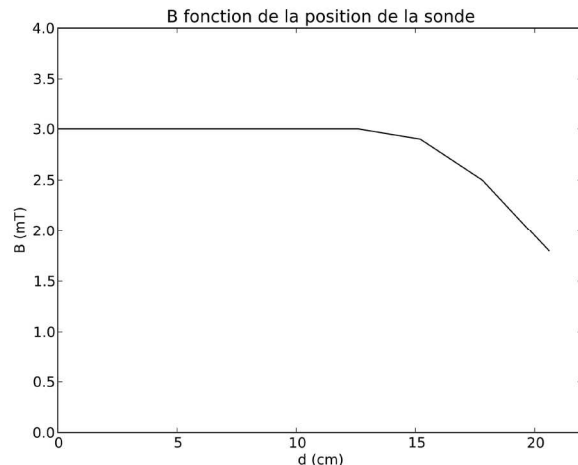


déduire le nombre de spires : dans l'approximation du solénoïde infini  $B = \mu_0 \frac{N}{L} i$ , la pente trouvée ci-dessus est donc égale à  $\mu_0 \frac{N}{L}$  et on en déduit  $N = 220$ .

2. Dans ces deux expériences, on a un champ de 3,0 mT lorsque  $B = \mu_0 \frac{N}{L} i$  est vérifiée. On en déduit que  $i = 4,5$  A.

3. On exploite là encore la première série de mesures : pour avoir 90 % de la valeur maximale du champ, il faut environ 10 cm de solénoïde alimenté ( $l \approx 5$  cm), donc un rapport de l'ordre de 4.

4. Le graphe ci-contre est issu de la troisième série de mesures, on constate que le champ devient

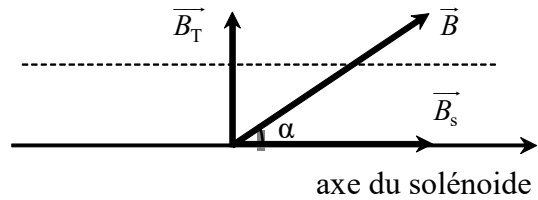


inférieur à 90 % de sa valeur au centre pour une distance d'environ 17 cm. Le critère est donc vérifié sur 34 cm environ, de l'ordre de 80 % de la longueur du solénoïde.

## Exercice 21.2

1. L'aiguille, que l'on peut assimiler à un moment magnétique, s'aligne toujours sur le champ. En l'absence de courant dans le solénoïde, le champ est orthogonal à son axe (il s'agit seulement du champ magnétique terrestre  $\vec{B}_T$ ).

Lorsqu'un courant circule, le solénoïde créé un champ parallèle à son axe  $\vec{B}_s$ , et le champ total résulte de la superposition des deux champs :  $\vec{B} = \vec{B}_T + \vec{B}_s$ , sur lequel s'aligne l'aiguille aimantée.



2. Le champ créé par le solénoïde (approximation du solénoïde infini) vaut  $B_s = \frac{\mu_0 Ni}{L}$ .

De plus  $\tan(\alpha) = \frac{B_T}{B_s}$ , on en déduit que  $B_T = \frac{\mu_0 Ni}{L} \tan(\alpha)$ . AN  $B_T = 20 \mu\text{T}$ .

3. En calculant  $B_T$  pour les valeurs extrêmes ( $35^\circ$  et  $39^\circ$ ) on trouve des valeurs de  $18,3 \mu\text{T}$  et  $21,1 \mu\text{T}$ , ainsi l'incertitude est de l'ordre de  $1,5 \mu\text{T}$ , que l'on doit arrondir par excès à  $2 \mu\text{T}$  (un seul chiffre significatif avec nos méthodes simples). On peut donc écrire :  $B_T = 20 \pm 2 \mu\text{T}$ .

*C'est effectivement le bon ordre de grandeur pour la composante horizontale du champ magnétique terrestre à Paris ; la composante verticale est plus élevée (vers le bas) puisque le champ est de l'ordre de  $50 \mu\text{T}$ .*

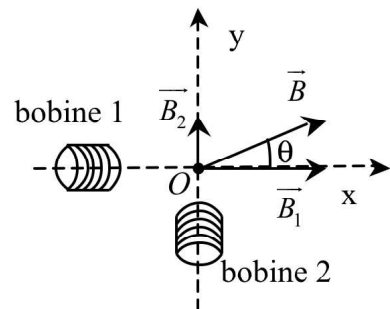
## Exercice 21.3

1. Le courant  $i_1$  est en avance de  $\frac{\pi}{2}$  sur  $i_2$  :  $\varphi_{i_1/i_2} = +\frac{\pi}{2}$ .

2. Les deux bobines étant identiques (ainsi que les amplitudes des courants qui les traversent), les champs créés ont la même amplitude, que l'on note  $B_m$ .

Comme le point  $O$  est sur l'axe de la bobine (1) le champ créé en  $O$  est selon cet axe, et on suppose que si le courant  $i_1$  est positif le champ est vers les  $x$  positifs, on peut donc écrire  $\vec{B}_1 = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . À partir de considérations analogues pour la bobine (2),  $\vec{B}_2 = B_m \sin(\omega t) \vec{e}_y$ .

Le champ total en  $O$  est la somme de ces deux contributions :  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_m (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y)$ .



On identifie le terme entre parenthèses à un vecteur unitaire radial  $\vec{e}_r = \cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y$ , qui fait un angle  $\theta = \omega t$  avec l'axe  $(Ox)$ , et qui tourne donc avec une vitesse angulaire  $\omega$ , dans le sens trigonométrique avec ce schéma (tous ces calculs ont été vus en cinématique).

On a donc  $\vec{B} = B_m \vec{e}_r$ , ce qui correspond bien à un champ de norme constante, tournant à la vitesse angulaire  $\omega$  (dans le sens trigonométrique).

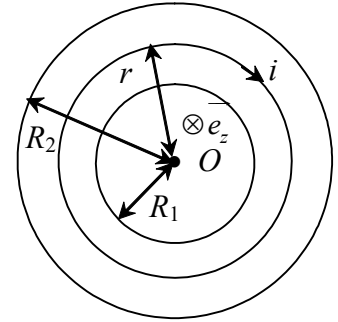
3. S'il y a trois bobines au lieu de deux, on remplace  $\frac{\pi}{2}$  par  $\frac{2\pi}{3}$  dans les calculs : les axes des bobines doivent faire des angles de  $\frac{2\pi}{3}$  entre eux, et les déphasages doivent être de  $\frac{2\pi}{3}$  d'une bobine à la suivante.

### Exercice 21.4

1. Le champ créé par une spire de rayon  $R$  et d'axe ( $Oz$ ) parcourue par un courant  $I$  est, en son centre  $O$ ,  $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2R} \vec{e}_z$ .

Les  $N$  spires sont régulièrement réparties sur la distance  $R_2 - R_1$ , donc si on considère une largeur radiale  $dr$  de bobine, elle comporte  $\frac{N dr}{R_2 - R_1}$  spires et sa contribution au champ en  $O$  est

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 i}{2r} \frac{N dr}{R_2 - R_1} \vec{e}_z.$$



On intègre sur  $r$  entre  $R_1$  et  $R_2$  pour faire la somme de toutes ces contributions :

$$\vec{B}(O) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i}{2r} \frac{N dr}{R_2 - R_1} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)} (\ln(R_2) - \ln(R_1)) \vec{e}_z$$

soit finalement 
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N i}{2(R_2 - R_1)} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \vec{e}_z.$$

2. AN  $B(O) = 3,144 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ .

3. On aurait  $R_{\text{moy}} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 20 \text{ cm}$  et  $B'(O) = \frac{\mu_0 N i}{2R_{\text{moy}}} = 3,141 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ .

L'écart relatif est :  $\frac{B(O) - B'(O)}{B'(O)} = 1 \cdot 10^{-3}$  soit 0,1 %.

### Exercice 21.5

1. Le champ créé par une spire de rayon  $R$  d'axe ( $Oz$ ) parcourue par un courant  $i$  est

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_z. \text{ Si l'on considère la bobine plate comme } N \text{ spires confondues, le}$$

champ créé vaut  $N$  fois le champ d'une spire, donc 
$$\vec{B}(M) = \frac{N \mu_0 i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{z}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_z.$$

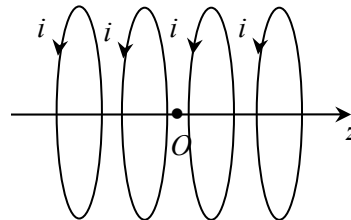
Au centre, on a donc  $B = \frac{\mu_0 N i}{2R} = 3,15 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ .

2. Une longueur  $dz$  de bobine située en  $z$  comporte  $\frac{N dz}{h}$

spires et crée donc en  $O$  un champ égal à  $\frac{N dz}{h}$  fois le champ

créé par une spire, à une distance  $z$  avant la spire (on doit donc

remplacer  $z$  par  $-z$  dans l'expression du champ créé par une spire). La contribution au champ en  $O$  d'une longueur  $dz$  de bobine est donc  $\frac{N dz}{h} \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{-z}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \vec{e}_z$ .



Il faut ensuite intégrer sur  $z$  de  $-\frac{h}{2}$  à  $+\frac{h}{2}$ , le champ total en  $O$  est donc :

$$\vec{B}(O) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{N}{h} \frac{\mu_0 i}{2R} \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2} dz \vec{e}_z = \frac{N \mu_0 i}{h 2R} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{-3/2} dz \vec{e}_z .$$

En effectuant les changements de variable  $y = \frac{z}{R}$  puis  $\tan \theta = y$ , on trouve :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \left(\frac{-z}{R}\right)^2\right)^{-3/2} dz = R \int_{-\frac{h}{2R}}^{\frac{h}{2R}} (1 + y^2)^{-3/2} dy = R \int_{\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)}^{\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)} (1 + \tan^2 \theta)^{-3/2} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= R \int_{\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)}^{\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)} \cos \theta d\theta = R \sin\left(\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)\right) - R \sin\left(\arctan\left(-\frac{h}{2R}\right)\right)$$

$$= 2R \sin\left(\arctan\left(\frac{h}{2R}\right)\right) = 2R \frac{\left(\frac{h}{2R}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2R}\right)^2}} = 2R \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4R^2}}$$

d'où finalement  $\vec{B}(O) = \frac{N \mu_0 i}{h 2R} 2R \frac{h^2}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \vec{e}_z$ , soit  $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N i}{h} \sqrt{\frac{h^2}{h^2 + 4R^2}} \vec{e}_z$ .

AN  $B(O) = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ .

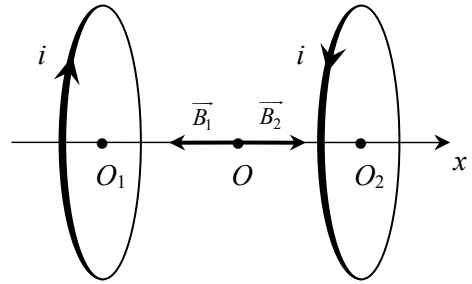
L'approximation faite dans la première question donne donc le bon résultat à 0,3 % près.

### Exercice 21.6

1. L'intensité  $i$  étant positive, le signe + dans la formule donne un champ orienté vers la droite (sens positif de l'axe  $(Ox)$ ). Cela correspond au sens du courant dans la bobine 2.



D'après l'expression donnée, la norme du champ en  $O$  est la même pour les deux bobines.  
La direction est également la même mais les sens sont opposés, ainsi les deux contributions  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  s'annulent au point  $O$ .



⇒ Méthode 21.2

**2.** On considère un point  $M$  de coordonnée  $x$ . Par rapport aux points  $O_1$  et  $O_2$  il est respectivement situé en  $\frac{d}{2} + x$  et  $\frac{d}{2} - x$ . La première bobine crée en  $M$  un champ

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 N i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{d/2 + x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x \quad \text{et la seconde crée } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 N i}{2R} \left( 1 + \left( \frac{d/2 - x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \vec{e}_x.$$

Champ créé par l'ensemble :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2R} \left[ - \left( 1 + \left( \frac{d/2 + x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( 1 + \left( \frac{d/2 - x}{R} \right)^2 \right)^{-3/2} \right] \vec{e}_x.$$

**3.** On peut poser  $\vec{B} = B_x(x) \vec{e}_x$ .  $B_x(x)$  est une fonction impaire, on en déduit que les termes d'ordre pair du développement au voisinage de 0 sont nuls. Comme on veut développer jusqu'au quatrième ordre, il faut calculer les termes d'ordre 1 et 3 en  $\frac{x}{R}$ .

On pose donc  $y = \frac{x}{R}$ , alors  $B_x(y) = \frac{\mu_0 N i}{2R} \left[ - \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} - y \right)^2 \right)^{-3/2} \right]$  et

$$B_x(y) \approx \frac{dB_x}{dy}(0)y + \frac{1}{6} \frac{d^3 B_x}{dy^3}(0)y^3.$$

On commence par calculer les dérivées de  $\left( 1 + \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)^{-3/2}$  :

la dérivée première est égale à  $-3 \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)^{-5/2} \left( \frac{d}{2R} + y \right)$  ;

la dérivée seconde à  $-3 \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)^{-7/2} \left( 1 - 4 \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)$  ;

et la dérivée troisième à  $15 \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)^{-9/2} \left( \frac{d}{2R} + y \right) \left( 3 - 4 \left( \frac{d}{2R} + y \right)^2 \right)$ .

Donc en  $y = 0$  les dérivées première et troisième valent respectivement  $-3 \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} \right)^2 \right)^{-5/2} \frac{d}{2R}$

et  $15 \left( 1 + \left( \frac{d}{2R} \right)^2 \right)^{-9/2} \left( \frac{d}{2R} \right) \left( 3 - 4 \left( \frac{d}{2R} \right)^2 \right)$ . Pour le terme en  $\left( 1 + \left( \frac{d}{2R} - y \right)^2 \right)^{-3/2}$ ,

on trouve les mêmes expressions avec les signes opposés. On remarque alors que si  $d = R\sqrt{3}$ ,  $3 - 4 \left( \frac{d}{2R} \right)^2 = 3 - \left( \frac{R\sqrt{3}}{R} \right)^2 = 0$  et les dérivées troisièmes sont donc nulles en  $y = 0$ .

En rassemblant tous ces résultats, on obtient finalement  $\frac{dB_x}{dy}(0) = \frac{\mu_0 N I}{2R} - \left( \left( -3 \left( 1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{-5/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( 3 \left( 1 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{-5/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \frac{3\sqrt{3} \mu_0 N I}{2R} \left( \frac{4}{7} \right)^{5/2}$ , le

développement recherché est  $B_x(x) \approx \frac{3\sqrt{3} \mu_0 N I}{2R^2} \left( \frac{4}{7} \right)^{5/2} x$ . La variation du champ avec  $x$  est

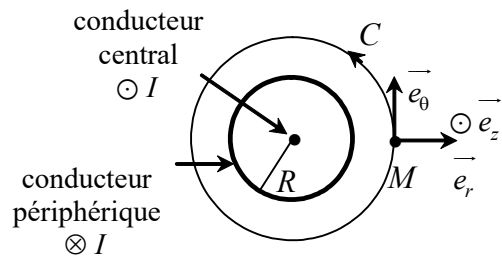
donc bien linéaire, à des termes du cinquième ordre en  $\frac{x}{R}$  près.

4. D'après l'expression précédente,  $a = \frac{3\sqrt{3} \mu_0 N I}{2R^2} \left( \frac{4}{7} \right)^{5/2}$ . On en déduit  $N = \frac{2R^2 a}{3\sqrt{3} \mu_0 I} \left( \frac{7}{4} \right)^{5/2}$ .

AN  $N = 12400$ , ce qui semble assez élevé mais pas irréaliste...

### Exercice 21.7

On note  $(Oz)$  l'axe du câble coaxial et on repère la position d'un point  $M$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Le courant dans le conducteur central circule dans le sens des  $z$  positifs, et celui du conducteur périphérique dans le sens des  $z$  négatifs. Tout plan qui contient l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution de courants, et donc du champ magnétostatique, qui lui est alors orthogonal.



Le champ magnétostatique est donc selon  $\vec{e}_\theta$ . Par ailleurs la distribution de courants est invariante par translation selon  $(Oz)$  et par rotation autour de  $(Oz)$ , la norme du champ est donc indépendante de  $\theta$  et  $z$ . En conclusion,  $\vec{B}(M) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

⇒ Méthodes 21.3, 21.4

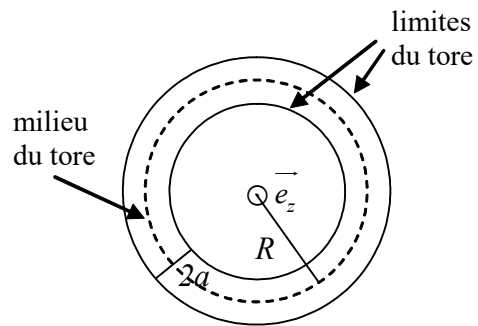
### Exercice 21.8

Tout plan qui contient l'axe  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution de courants, donc d'antisymétrie pour le champ magnétostatique : il est orthogonal à ce plan, donc selon  $\vec{e}_\theta$ .

Par ailleurs, cette distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), dans la mesure où l'on considère les spires comme continûment réparties le long du tore. La norme du champ ne dépend donc pas de  $\theta$ .

On peut donc écrire  $\vec{B}(M) = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$ .

⇒ Méthodes 21.3, 21.4



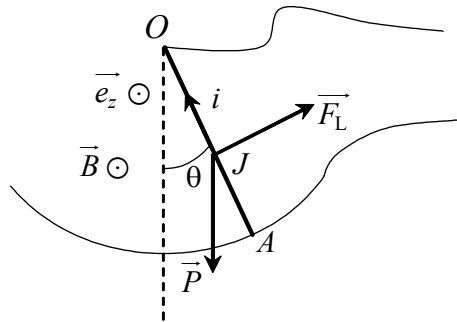
### Exercice 21.9

1. Le courant doit aller de  $A$  vers  $O$ , d'après la règle d'orientation du produit vectoriel.

2. La force de Laplace sur la tige  $OA$  est orthogonale à  $(OA)$ , vers la droite et vaut  $F_L = i \ell B$ .

Comme cette force est uniformément répartie sur toute la longueur de la tige, pour calculer le moment on peut considérer que la totalité de la force s'exerce au milieu de la tige. Le moment en  $O$  des forces de

Laplace s'écrit donc  $\mathcal{M}_L = \vec{OJ} \wedge \vec{F}_L = \frac{i \ell^2 B}{2} \vec{e}_z$ .



Par ailleurs, le moment du poids est  $\mathcal{M}_p = \vec{OJ} \wedge \vec{P} = -\frac{mg \ell \sin(\theta)}{2} \vec{e}_z$  (là encore, le poids est uniformément réparti sur la longueur de la tige). À l'équilibre la somme des moments est nulle :

$$\mathcal{M}_L + \mathcal{M}_p = \vec{0} \text{ donne } \sin \theta_{\text{eq}} = \frac{i \ell B}{mg}$$

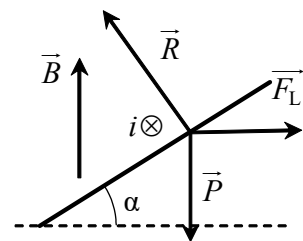
⇒ Méthode 21.6

### Exercice 21.10

1. Le courant dans le barreau mobile (qui est orthogonal au plan de la figure) doit être vers l'arrière.

2. Le barreau se déplace à vitesse constante si la résultante des forces est nulle :  $\vec{R} + \vec{F}_L + \vec{P} = \vec{0}$ , ce qui donne en projetant sur  $(Ox)$ , c'est-à-dire la direction des rails :  $F_L \cos \alpha = mg \sin \alpha$ .

Comme  $F_L = i \ell B$ , on obtient  $i = \frac{mg \tan \alpha}{\ell B}$  AN  $i = 2,5 \text{ A}$ .



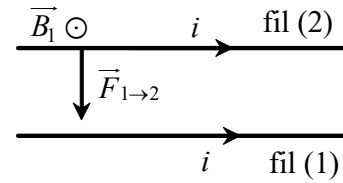
3. Si l'altitude augmente de 10 cm en 0,5 s, la vitesse verticale est de  $v_z = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse le long des rails est donc  $v_x = \frac{v_z}{\sin(\alpha)} = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La puissance de la force de Laplace

est donnée par  $\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = F_L v_x$ . On trouve ainsi  $\mathcal{P}_L = 18 \text{ mW}$ .

⇒ Méthode 21.7

### Exercice 21.11

1. Les courants doivent être dans le même sens. On peut l'illustrer en considérant le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par le fil (1) et la force de Laplace  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  qui en résulte.



2. Comme le champ magnétique  $\vec{B}_1$  est le même sur toute la longueur du fil (2) et qu'il est orthogonal au fil,  $F_{1 \rightarrow 2} = i \ell B_1$ . D'après la formule donnée dans l'énoncé,  $B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ .

On a donc  $F_{1 \rightarrow 2} = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{2\pi a}$  : la force est proportionnelle au carré de l'intensité (on obtient évidemment le même résultat pour  $F_{2 \rightarrow 1}$ ).

3. An  $F_{1 \rightarrow 2} = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ .

Cette force est très peu intense (malgré deux fils relativement proches et un courant assez élevé), ce qui fait qu'elle est délicate à mettre en évidence expérimentalement.

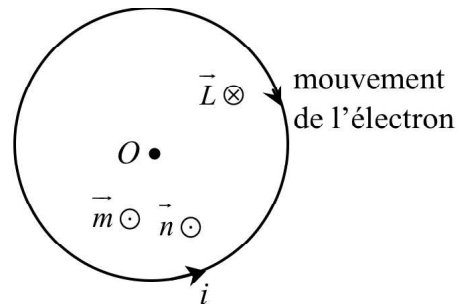
4. En reprenant le relation du 2. on obtient  $i = \sqrt{\frac{2\pi a F_{1 \rightarrow 2}}{\mu_0 \ell}}$ , et l'application numérique donne exactement 1 A. En effet, cette situation sert à définir l'ampère.

### Exercice 21.12

1. On considère une petite surface traversée par l'électron lors de son mouvement orbital.

À chaque période  $T$  la charge  $e$  traverse la surface, l'intensité moyenne est donc  $i = \frac{e}{T}$ . Le mouvement étant circulaire uniforme  $v = \frac{2\pi a_0}{T}$ , et donc

$i = \frac{ev}{2\pi a_0}$ . Comme par définition  $m = iS$ , où  $S$  est



l'aire entourée par la trajectoire de l'électron (donc  $S = \pi a_0^2$ ), finalement  $m = \frac{ev a_0}{2}$ .

2. Cette situation est habituelle en mécanique,  $L = m_e v a_0$  donc  $m = \frac{eL}{2m_e}$ . Dans l'état

fondamental décrit par le modèle de Bohr,  $L = \hbar$  ( $n=1$ ) d'où  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ .

L'application numérique (avec deux chiffres significatifs) donne  $\mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

### Exercice 21.13

1.  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ , donc  $\vec{\mathcal{M}} = m B \sin \theta \vec{e}_z$ .

2. Dans ce cas, le couple est nul, donc  $\theta = 0$  : le moment reste aligné sur le champ.

3. Le couple moteur et le couple résistant se compensent (vectoriellement), donc ils ont la même

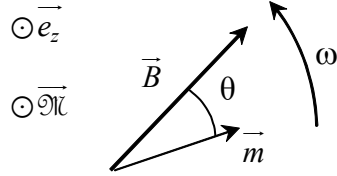
valeur. D'où  $m B \sin \theta = \mathcal{M}_r$ , soit  $\sin \theta = \frac{\mathcal{M}_r}{m B}$ .

La puissance est donnée par  $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\omega}$ , avec  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ , donc  $\mathcal{P} = m B \omega \sin \theta$ .

Les applications numériques donnent  $\theta = 24^\circ$  et  $\mathcal{P} = 205 \text{ W}$ . Lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important.

4. La vitesse de rotation est indépendante de la charge, qui n'influe que sur l'angle interne (c'est un avantage du moteur synchrone par rapport au moteur à courant continu).

Le couple maximal correspond à un angle interne de  $90^\circ$ . On a donc ici  $\mathcal{M}_{\max} = m B = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m}$ .



### Exercice 21.14

1. Les forces de Laplace sur les parties du cadre qui sont orthogonales à l'axe ( $\Delta$ ) sont parallèles à celui-ci et ne contribuent pas au couple. Les forces sur les parties du cadre parallèles à ( $\Delta$ )  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  sont représentées.

2. Imaginons la situation un demi-tour plus tard : les parties verticales du cadre sont échangées, mais le courant  $i$  a changé de signe ce qui fait que les forces, et donc le couple, sont dans le même sens. On peut aussi remarquer que le moment magnétique de la spire reste, en moyenne, dans le même sens car la spire tourne mais le courant varie sinusoïdalement avec la même période.

3. Il faut que  $\theta = 0$  et que le vecteur rotation soit dans le même sens que le couple.

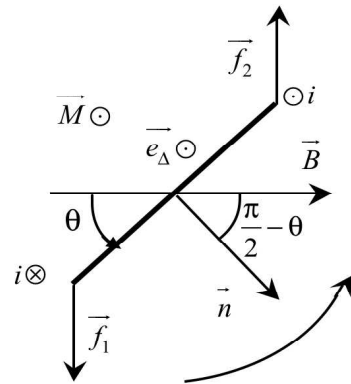
4. On utilise le moment magnétique  $\vec{m}$  associé à la spire :  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B} = i S B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{e}_\Delta$ ,

donc  $\vec{\mathcal{M}} = i S B \cos \theta \vec{e}_\Delta$ . De plus, comme on doit avoir  $i = I_m$  lorsque  $\theta = 0$ , on peut écrire  $i = I_m \cos \theta$ , ce qui conduit à  $\vec{\mathcal{M}} = I_m S B \cos^2 \theta \vec{e}_\Delta$ .

On veut la valeur moyenne sur une période, c'est-à-dire pour  $\theta$  variant entre 0 et  $2\pi$  :

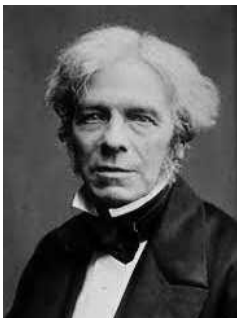
$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \text{ étant nulle.}$$

Finalement :  $\langle \vec{\mathcal{M}} \rangle = \frac{I_m S B}{2} \vec{e}_\Delta$ .



# Induction électromagnétique

UN SCIENTIFIQUE



**Michael FARADAY** (1791-1867) découvre la physique et la chimie dans les livres qu'il consulte dans l'atelier de relieur où il est embauché. Il se passionne rapidement pour cette discipline et en devient rapidement un très grand spécialiste. Son œuvre est immense : il étudie l'électromagnétisme, montre que l'on peut transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique. Il découvre en 1831 le phénomène d'induction puis les lois de l'électrolyse et en fin de carrière l'électroluminescence.

## ■ Un peu d'histoire

En 1831, Michael FARADAY enroule sur un anneau de fer deux bobines de fil de cuivre en spirales isolées par de la ficelle. Il connecte l'une de ces bobines à une pile et l'autre à un galvanomètre. Il constate qu'à chaque ouverture du circuit, l'aiguille aimantée dévie. Un courant est apparu, qu'il nomme induit : c'est la découverte de l'induction. Peu après, il découvre un courant induit dans un solénoïde. En fin d'année, il fait part de ces découvertes.

Le physicien américain Joseph HENRY découvre, indépendamment de FARADAY, le phénomène d'induction électromagnétique mais tarde à publier ses résultats. Deux ans plus tard, le savant russe Heinrich LENZ précise cette propriété. C'est un Allemand, Franz NEUMANN qui établit, dans deux articles publiés en 1845 et 1847, une théorie mathématique de ce thème et donne une formule donnant la force électromotrice.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La notion de flux d'un champ à travers une surface orientée
- ▷ La loi de modulation de Lenz
- ▷ La loi de Faraday pour le calcul algébrique d'une FÉM induite
- ▷ Les notions de coefficients d'inductance (inductance propre, inductance mutuelle)
- ▷ Le principe de fonctionnement d'un transformateur de tension, d'un alternateur
- ▷ L'origine des courants de Foucault et des exemples de leur utilisation

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Calculer une FÉM induite, dans le cas du circuit fixe dans un champ magnétique variable et dans le cas du circuit mobile dans un champ magnétique constant
- ▷ Obtenir un schéma électrique équivalent : utiliser la FÉM induite pour un circuit orienté et écrire avec les signes corrects la loi des mailles
- ▷ Calculer les coefficients d'inductance dans les cas simples
- ▷ Utiliser les coefficients d'inductance pour obtenir les schémas électriques équivalents de circuits couplés
- ▷ Effectuer un bilan d'énergie (obtenu a priori et retrouvé à partir des équations électromécaniques)

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Le phénomène d'induction

### □ Description

L'induction électromagnétique est l'apparition d'un courant électrique, appelé **courant induit**, dans un circuit placé dans un champ magnétique, ceci se produisant dans deux types de situations :

- si le champ magnétique est variable au cours du temps ;
- si le circuit n'est pas fixe (il se déplace, il tourne autour d'un axe, il se déforme...).

### □ Loi de modération de Lenz

On constate expérimentalement que le sens du courant induit est tel qu'il tend toujours à s'opposer, par ses effets, à la cause qui l'a produit :

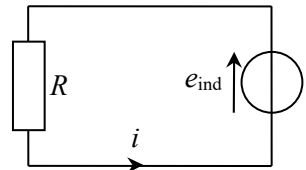
- dans le cas d'un champ magnétique variable, le champ créé par le courant induit lui-même s'oppose à la variation du champ initial ;
- dans le cas d'un circuit mobile, les forces de Laplace dues au courant induit s'opposent au mouvement initial du circuit.

## ■ Force électromotrice induite et loi de Faraday

### □ Force électromotrice (FÉM) induite

Le courant induit dans un circuit fermé est lié à l'apparition d'une force électromotrice induite, qui joue le même rôle que la FÉM d'un générateur électrochimique.

La FÉM est répartie sur toute la longueur du circuit siège du phénomène d'induction, mais pour en tenir compte dans les lois de l'électricité, il est commode de la représenter par une source idéale de tension, localisée en un point du circuit ; on l'oriente dans le même sens que celui qui définit l'intensité du courant induit.



On peut ainsi donner un schéma équivalent du circuit en représentant également sa résistance par un dipôle ohmique (et d'autres caractéristiques éventuelles du circuit par d'autres dipôles).

### □ Flux du champ magnétique au travers d'une surface

Flux du champ magnétique au travers d'une surface  $\Sigma$  :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire localement orthogonal à la surface, et dont le sens définit une orientation de la surface (le flux est donc une grandeur *algébrique*).

Dans le cas où la surface est plane et le champ uniforme, l'expression devient simplement :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S$  où  $S$  est l'aire de la surface.



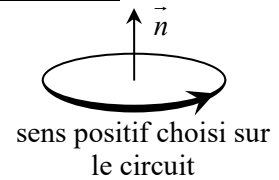
## □ Loi de Faraday

Les observations expérimentales montrent que le phénomène d'induction n'a lieu que si quelque chose varie (champ magnétique variable, circuit en mouvement...). Plus précisément, ce qui est important est la variation du flux du champ magnétique au travers du circuit.

C'est le contenu de la loi de Faraday relative à un circuit fermé :

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Cette formule suppose que l'orientation choisie pour le vecteur normal (servant à calculer le flux) soit cohérente avec le sens positif choisi sur le circuit (servant à orienter la FÉM induite et le courant), selon la règle habituelle d'orientation de l'espace (règle du tire-bouchon).



⇒ **Méthode 22.1. Orienter arbitrairement un circuit et appliquer la loi des mailles**

Lien avec la loi de Lenz

Le signe moins dans la loi de Faraday est lié au fait que les courants induits s'opposent par leurs effets à la cause qui les produit, c'est-à-dire à la variation du flux magnétique.

## ■ Circuit fixe dans un champ magnétique variable (cas de Neumann)

### □ Auto-induction

Lorsque le courant dans une bobine est variable, le flux du champ magnétique créé par la bobine elle-même, appelé **flux propre**, est variable, ce qui induit une FÉM dans la bobine, dite **FÉM d'auto-induction**. Conformément à la loi de Lenz, celle-ci s'oppose à la variation de courant qui lui a donné naissance, ce qui explique notamment le phénomène de retard à l'allumage dans un circuit comportant des bobines.

Inductance propre

L'inductance propre  $L$  d'une bobine est définie par la relation :

$$\Phi = Li$$

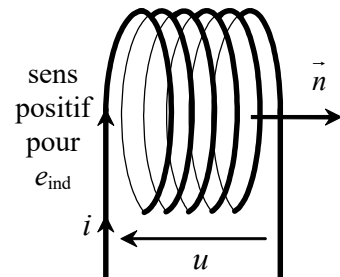
où  $i$  est l'intensité du courant dans la bobine et  $\Phi$  le flux propre, en utilisant des orientations pour le flux et pour le courant cohérentes entre elles. L'inductance propre est *toujours positive*.

La loi de Faraday  $e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi}{dt}$  associée à la définition de

l'inductance  $\Phi = Li$  conduit à la relation  $u = L \frac{di}{dt}$  utilisée

en électrocinétique, en posant  $u = -e_{\text{ind}}$  (la tension  $u$  aux bornes de la bobine étant assimilée à la FÉM induite, mais en sens inverse en convention récepteur).

On peut relier l'inductance propre d'une bobine à ses caractéristiques géométriques (rayon, longueur, nombre de spires). L'unité SI d'inductance est le henry (H). Les bobines usuelles ont des inductances allant de quelques mH à quelques H.



⇒ **Méthode 22.2. Déterminer le coefficient d'inductance propre d'un long solénoïde**

### □ Inductance mutuelle

Lorsque deux circuits sont en présence, le flux magnétique à travers l'un d'eux comporte non seulement son flux propre, mais aussi le flux du champ magnétique créé par l'autre circuit. Le flux  $\Phi_{12}$  à travers le circuit ( $C_2$ ) du champ généré par le courant circulant dans le circuit ( $C_1$ ) s'écrit  $\Phi_{12} = M i_1$  où  $M$  est le **coefficient d'inductance mutuelle**. De même  $\Phi_{21} = M i_2$ .

Le signe de  $M$  dépend de l'orientation relative des deux circuits.

Les inductances propres  $L_1$  et  $L_2$  et l'inductance mutuelle  $M$  vérifient l'inégalité :  $M^2 \leq L_1 L_2$ .

Le cas où  $M^2 = L_1 L_2$  correspond au meilleur couplage possible entre les circuits.

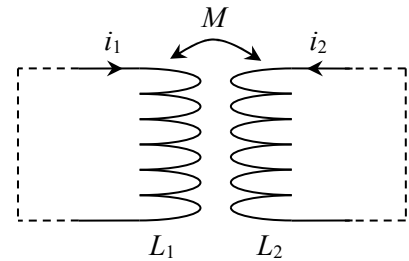
⇒ **Méthode 22.3. Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe**

### □ Circuits électriques couplés par inductance mutuelle

La représentation conventionnelle de deux circuits couplés par mutuelle est indiquée ci-contre.

Les FÉM d'induction des deux circuits sont dues à la fois aux flux propres et aux flux mutuels :

$$\begin{cases} e_{1 \text{ ind}} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_{2 \text{ ind}} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

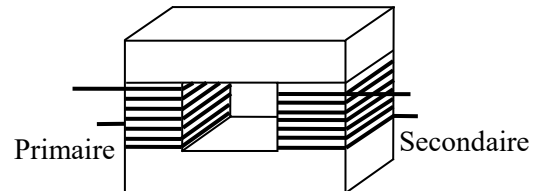


Il suffit de prendre en compte ces FÉM dans les circuits électriques équivalents pour mettre en équation des circuits couplés par mutuelle.

⇒ **Méthode 22.4. Mettre en équation deux circuits couplés par mutuelle**

### □ Transformateurs

Un transformateur comporte deux bobines : le **primaire** ( $N_1$  spires), soumis à une tension variable, crée un champ magnétique variable traversant le **secondaire** ( $N_2$  spires), où apparaît donc une tension induite.



Pour que le champ magnétique créé par le primaire passe autant que possible au travers du secondaire, on bobine les deux enroulements autour d'une carcasse en fer doux (appelée circuit magnétique), qui a la propriété de canaliser le champ magnétique.

Le modèle du transformateur parfait correspond au cas idéal où  $M^2 = L_1 L_2$ .

Dans ce modèle, les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie vérifient :  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$ .

Utilité d'un transformateur

- Il permet d'abaisser ou d'augmenter l'amplitude d'une tension variable, notamment sinusoïdale (mais il ne peut fonctionner en régime continu, car il n'y a alors pas d'induction).
- Comme il n'y a pas de connexion électrique entre le primaire et le secondaire, un transformateur permet aussi de résoudre certains problèmes de masse (on parle dans ce cas de transformateur d'isolement,  $N_1$  et  $N_2$  sont généralement égaux).

### □ Autres appareils usuels avec induction de Neumann

Appareils avec bobines émettrice et réceptrice : boucle auditive (émettrice dans les murs d'une pièce, réceptrice dans une prothèse), détecteur de métaux, appareil de contrôle de pièces métalliques (voir ci-après).

Appareil avec bobine émettrice et masse métallique : chauffage par induction.

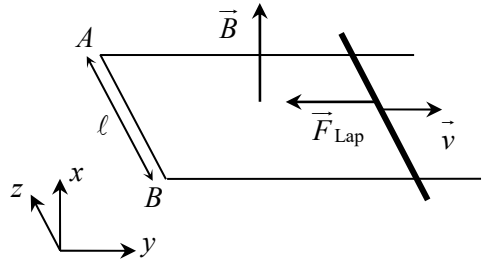
## ■ Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (cas de Lorentz)

### □ Rails de Laplace

Ce dispositif a été vu au chapitre précédent.

Lorsqu'un courant  $i$  parcourt la tige, celle-ci subit une force de Laplace :  $\vec{F}_{\text{Lap}} = \pm i B \ell \vec{e}_y$ .

D'autre part, lorsque la tige est en mouvement à une vitesse  $\vec{v}$ , la variation de la surface du circuit, donc du flux magnétique, crée une FÉM d'induction  $e_{\text{ind}} = \pm v B \ell$ .



On peut écrire deux équations électromécaniques couplées, reliant les grandeurs  $i(t)$  et  $v(t)$ , en appliquant à ce dispositif une loi électrique (loi des mailles) et une loi mécanique (théorème de la quantité de mouvement).

⇒ Méthode 22.5. Obtenir les équations couplées d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique

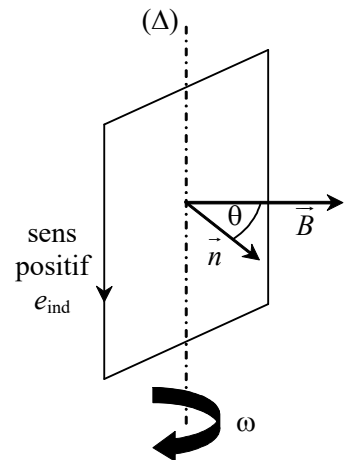
### □ Spire rectangulaire en rotation

Une spire de surface  $S$  est en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de l'axe  $(\Delta)$ , dans un champ magnétique constant et uniforme orthogonal à  $(\Delta)$ . Le flux au travers de la spire est égal à  $\Phi = B S \cos(\omega t)$ , donc d'après la loi de

Faraday :  $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = B S \omega \sin(\omega t)$ .

On néglige dans ce calcul l'auto-induction.

Comme pour les rails de Laplace, on peut établir un système d'équations électromécaniques couplées.



### □ Bilans énergétiques

Dans tous les dispositifs correspondant au cas de Lorentz (circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire), la puissance électrique fournie par la FÉM d'induction et la puissance mécanique de la résultante des forces de Laplace vérifient :

$$\mathcal{P}_{\text{Laplace}} + \mathcal{P}_{\text{fém}} = 0.$$

Cette relation traduit le fait que la puissance de la force de Lorentz sur un porteur de charge est nulle. Ainsi, le fait que la puissance mécanique des forces de Laplace et la puissance électrique associée au phénomène d'induction soient non nulles n'est pas en contradiction avec la puissance nulle de la force de Lorentz, simplement ces deux puissances se compensent systématiquement.

⇒ **Méthode 22.6. Effectuer un bilan énergétique**

### □ Alternateur

La conversion de travail mécanique en travail électrique est mise en œuvre dans les alternateurs. La situation de la spire en rotation dans un champ magnétique constant constitue un alternateur rudimentaire, avec lequel on obtient une tension sinusoïdale.

On retrouve cette idée de circuit en rotation (rotor) dans un champ magnétique statique (créé par le stator) dans les alternateurs utilisés industriellement, notamment dans les centrales électriques. Cependant, pour être réellement efficace, la géométrie d'un alternateur est beaucoup plus complexe.



*Mise en place du rotor dans un alternateur de centrale nucléaire*

### □ Courants de Foucault

Des courants induits peuvent apparaître dans tout le volume d'un conducteur non filiforme, on les appelle alors **courants de Foucault**. Du fait de l'effet Joule, ces courants conduisent à un échauffement plus ou moins important du conducteur.

- Souvent, cet échauffement n'est pas souhaitable : c'est le cas, par exemple, quand le conducteur est le noyau d'un transformateur. On évite alors ces courants en feuilletant le noyau pour gêner leur circulation, ou en utilisant un noyau en ferrite, non conductrice.
- Au contraire, on exploite cet effet Joule dans un dispositif de chauffage par induction.
- Dans un détecteur de métaux ou un appareil de contrôle de pièces métalliques, une bobine émettrice crée des courants de Foucault dans la pièce métallique, puis une bobine réceptrice capte le champ créé par ces courants.
- Enfin, lorsque le phénomène d'induction résulte d'un déplacement du conducteur, les courants de Foucault conduisent à un effet de freinage par les forces de Laplace. Ce freinage électromagnétique est utilisé par exemple dans les gros véhicules.

## ■ Comment obtenir l'équation électrique d'un circuit en présence d'induction ?

### □ Méthode 22.1. Orienter arbitrairement un circuit et appliquer la loi des mailles

Avant tout, il faut choisir une orientation pour les circuits. Le choix de cette orientation est arbitraire.

Il est préférable de choisir la même orientation pour la FEM et pour le courant.

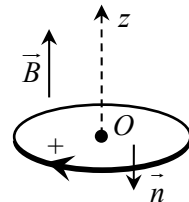
Le choix de cette orientation fixe l'orientation de la normale sur une surface qui s'appuie sur le circuit par la règle du tire-bouchon de Maxwell.

Le circuit électrique équivalent s'obtient alors en « ajoutant » une source de tension  $e_{\text{ind}}$  orientée dans le sens positif choisi. On raisonne alors sur ce circuit équivalent comme on raisonnait auparavant en l'absence d'induction.

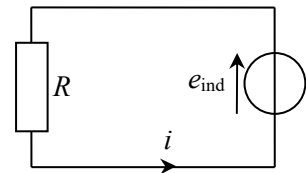
⇒ Exercices 22.1, 22.7, 22.8

On cherche l'intensité qui circule dans une spire circulaire de rayon  $a$ , de résistance totale  $R$  placée dans un champ magnétique uniforme et parallèle à l'axe de la spire  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ .

– On oriente le circuit comme indiqué sur la figure et l'on choisit comme surface fermée s'appuyant sur le circuit un disque de surface totale  $S = \pi a^2$ . Avec l'orientation indiquée, la normale est  $\vec{n} = -\vec{e}_z$ . Comme le champ magnétique est uniforme, le flux du champ magnétique est simplement :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = -\pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$ .

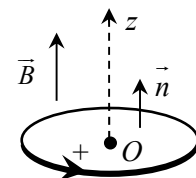


La FEM induite est  $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)$  et le circuit électrique équivalent est représenté ci-contre. L'équation électrique

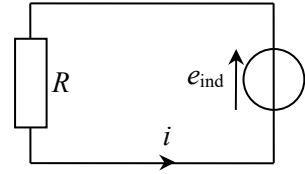


est  $e_{\text{ind}} = Ri$  ce qui donne : 
$$i(t) = \frac{-\pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)}{R}$$

– Imaginons maintenant que l'on oriente (c'est arbitraire !) le circuit dans l'autre sens. Avec cette nouvelle orientation, la normale est  $\vec{n} = +\vec{e}_z$ . Le flux du champ magnétique s'écrit alors  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S = \pi a^2 B_0 \cos(\omega t)$ .



La FÉM induite est  $e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)$  et le circuit électrique équivalent est le suivant. C'est le même que précédemment ! L'équation électrique est donc encore  $e_{\text{ind}} = Ri$  mais comme la FÉM est de signe opposé, on trouve une intensité de signe opposé  $i(t) = \frac{+\pi a^2 B_0 \omega \cos(\omega t)}{R}$ , ce qui correspond néanmoins (heureusement !) à une même situation physique.



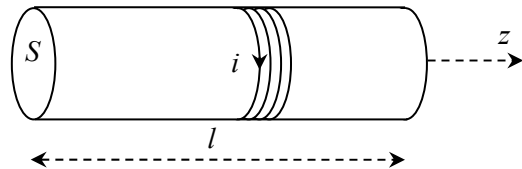
## ■ Comment déterminer et utiliser les coefficients d'inductance ?

### □ Méthode 22.2. Déterminer le coefficient d'inductance propre d'un long solénoïde

C'est l'exemple le plus important de circuit dont on peut calculer simplement le coefficient d'inductance propre à partir du flux propre. Il faut chercher le champ créé par le solénoïde puis son flux à travers une surface limitée par le circuit.

⇒ Exercice 22.2

Le solénoïde est caractérisé par sa section, sa longueur  $l$  et le nombre de spires par unité de longueur  $n$ . Il est supposé « long » de sorte que l'on peut négliger la contribution des bords dans le calcul du flux (on dit encore qu'il est infiniment long). À l'intérieur du solénoïde, le



champ magnétique est uniforme et s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z$ . Le flux du champ  $\vec{B}$  à travers une spire est donc  $\Phi_{1\text{spire}} = \mu_0 n i \vec{e}_z \cdot S \vec{e}_z = \mu_0 n i S$ . Comme il y a  $nl$  spires, le flux total à travers le circuit est  $\Phi = nl\Phi_{1\text{spire}} = nl\mu_0 n i S = \mu_0 n^2 l S i$ .

Le coefficient d'inductance propre, coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité est ainsi :  $L = \mu_0 n^2 l S$ .

Bien noter que son signe ne serait pas modifié par un changement de l'orientation du solénoïde : cela changerait à la fois le signe de  $\vec{B}$  et celui de  $\vec{n}$ , ce qui n'aurait pas d'influence sur  $L$ .

Pour donner un ordre de grandeur, considérons une bobine de 1000 spires réparties sur 10 cm de longueur avec une section de  $5 \text{ cm}^2$  : on a  $n = 10^4$  spires par mètre et  $L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ H} = 6 \text{ mH}$ .

On voit que le henry représente un ordre de grandeur d'inductance assez élevé ; pour des bobines à air usuelles, on trouve généralement quelques mH ou dizaines de mH.

□ **Méthode 22.3. Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe**

On n'envisage que le cas de deux bobines de même axe et de grande longueur en « influence totale ». Dans l'approximation du solénoïde infini, le champ créé par l'un des deux enroulements est facile à exprimer, et son flux au travers de l'autre enroulement l'est aussi puisque le champ est uniforme à l'intérieur. Le signe dépend de l'orientation relative de ces deux circuits. Le coefficient d'inductance mutuelle doit obligatoirement être associé à un choix de cette orientation relative.

⇒ Exercices 22.3, 22.4

Les deux enroulements (respectivement  $N_1$  et  $N_2$  spires) sont bobinés sur le même support de longueur  $\ell$  et de section  $S$ . Il faut d'abord choisir l'orientation relative des deux enroulements : si les courants (donc les vecteurs unitaires normaux utilisés pour calculer les flux) sont orientés dans le même sens, l'inductance mutuelle est positive ; s'ils sont en sens contraires, elle est négative. Les schémas ci-contre illustrent ces conventions, en ne représentant qu'une seule spire de chaque enroulement.

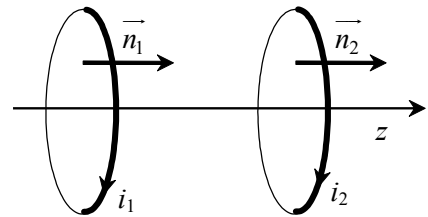
Pour effectuer le calcul, on se place dans le cas où  $M$  est positive et on calcule par exemple  $M_{12}$  (sachant que  $M_{12} = M_{21} = M$ ), c'est-à-dire que l'on exprime le champ magnétique  $\vec{B}_1$  créé par le premier enroulement et que l'on calcule ensuite son flux  $\Phi_{12}$  au travers du deuxième

enroulement :  $\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \vec{e}_z$  et  $\Phi_{12} = N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_2 S$

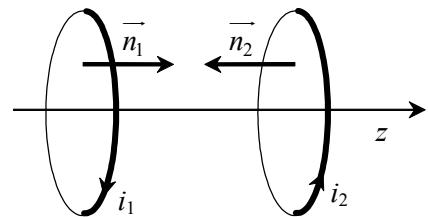
(on calcule le flux au travers d'une spire et on multiplie par le nombre de spires), ce qui donne

finalement  $\Phi_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S i_1$ . On en déduit  $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} S$ .

On remarque que dans cette situation on a bien  $L_1 L_2 = M^2$ , le terme « influence totale » correspond au meilleur couplage possible entre les deux circuits.



Convention pour laquelle  $M > 0$



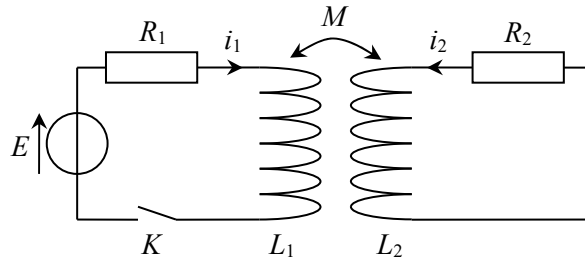
Convention pour laquelle  $M < 0$

□ **Méthode 22.4. Mettre en équation deux circuits couplés par mutuelle**

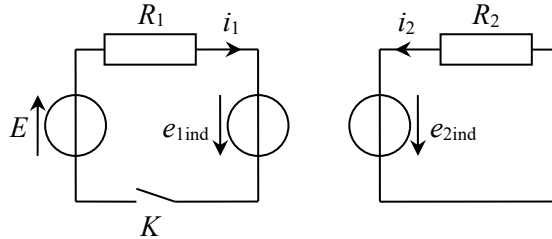
Une fois les circuits orientés, le coefficient d'inductance mutuelle est fixé avec son signe. Il n'y a plus qu'à appliquer la méthode 22.1 pour obtenir les schémas électriques équivalents et leur appliquer la loi des mailles.

⇒ Exercices 22.5, 22.6

On considère le circuit suivant :



Après fermeture de l'interrupteur ( $K$ ), les schémas électriques équivalents s'obtiennent immédiatement suivant la méthode 22.1.



Dans ces schémas équivalents, il est préférable de ne pas faire apparaître à part les inductances propres  $L_1$  et  $L_2$ .

– Calcul des FÉM induites

Les flux totaux  $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21}$  et  $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{12}$  sont reliés aux intensités par les coefficients d'inductance :  $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  et  $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$ . La loi de Faraday conduit aux FÉM induites :

$$e_{1ind} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_{2ind} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

– Équations électriques des deux circuits

Par application de la loi des mailles :  $E + e_{1ind} = R_1 i_1$  et  $e_{2ind} = R_2 i_2$ . En remplaçant les FÉM par

leurs valeurs on obtient finalement :

$$\boxed{E = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}} \quad \text{et} \quad \boxed{0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}}.$$



## ■ Comment aborder les problèmes faisant intervenir un conducteur en mouvement ?

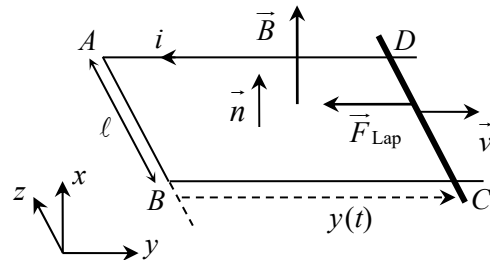
### □ Méthode 22.5. Obtenir les équations couplées d'un circuit en mouvement dans un champ magnétique

- Le calcul de la FÉM induite permet d'obtenir le circuit électrique équivalent et l'équation électrique associée. Comme la FÉM dépend de la vitesse, on arrive à une première équation électromécanique.
- L'autre équation électromécanique s'obtient en écrivant le théorème de la résultante cinétique (ou, en rotation, le théorème du moment cinétique). Comme la force de Laplace dépend de l'intensité qui circule dans le circuit, on obtient une deuxième équation électromécanique.

⇒ Exercices 22.9, 22.10

Prenons l'exemple des rails de Laplace. Le barreau de masse  $m$  est lancé initialement avec la vitesse  $\vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_y$ , et seule la force de Laplace agit ensuite, il n'y a pas de force supplémentaire pour maintenir la vitesse constante. On choisit l'origine de sorte que  $y(0) = 0$ .

La partie mobile du circuit, de longueur « utile » (c'est-à-dire entre les points  $C$  et  $D$ ) notée  $\ell$ , se déplace à la vitesse  $v$ . Le champ magnétique, constant et uniforme, est orthogonal au plan du circuit. On cherche à déterminer le mouvement ultérieur du rail supposé glisser sans frottement.



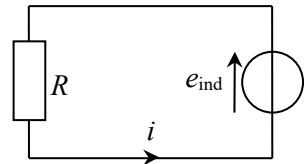
– Équation d'origine électrique

On calcule tout d'abord la FÉM d'induction. Le flux du champ magnétique au travers du circuit (orienté par  $\vec{n}$ , comme indiqué sur le schéma) vaut  $\Phi = +BS$ , où  $S$  est la surface du rectangle  $ABCD$ . La FÉM induite, avec le sens positif choisi, vaut donc (loi de Faraday)

$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}$ ; et comme  $\frac{dS}{dt} = v\ell$ , on obtient finalement  $e_{\text{ind}} = -vB\ell$ . On néglige dans ce calcul l'auto-induction.

Le circuit électrique équivalent comporte simplement, en plus de  $e_{\text{ind}}$ , une résistance  $R$  modélisant la résistance de l'ensemble des fils.

L'équation électrique correspondante est donnée par la loi des mailles :  $e_{\text{ind}} = Ri(t)$  soit  $\boxed{-B\ell v(t) = Ri(t)}$ .



C'est bien une équation électromécanique, qui couple la grandeur électrique  $i(t)$  et la grandeur mécanique  $v(t)$ .

– Équation d'origine mécanique

On calcule tout d'abord la résultante  $\vec{F}_{\text{Lap}}$  des forces de Laplace sur le rail :

$$\vec{F}_{\text{Lap}} = \int_C^D (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) = \int_C^D (i dz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x) = \int_C^D i B dz \vec{e}_y = i B \ell \vec{e}_y .$$

La deuxième équation électromécanique s'obtient en appliquant le théorème de la résultante cinétique au rail, soumis à son poids  $\vec{P}$ , à la réaction normale des rails  $\vec{R}$  et à la résultante

$\vec{F}_{\text{Lap}}$  des forces de Laplace :  $m \vec{a} = \vec{F}_{\text{Lap}} + \vec{P} + \vec{R}$ . Projection sur  $(Oy)$  :  $m \frac{dv}{dt} = i B \ell$ .

– Découplage

Pour obtenir la vitesse  $v(t)$ , il suffit d'éliminer l'intensité  $i(t)$  entre ces deux équations :

$$i(t) = -\frac{B \ell v(t)}{R} \text{ donc } m \frac{dv}{dt} = -\frac{B \ell v(t)}{R} B \ell = -\frac{B^2 \ell^2}{R} v(t) \text{ ou encore } \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 \ell^2}{m R} v(t) .$$

On voit que finalement, le rail est soumis à une force de freinage proportionnelle à la vitesse. Dans la constante de proportionnalité, le champ magnétique apparaît au carré si bien que la force reste une force de freinage quel que soit le signe de  $B$ . C'est conforme à la loi de Lenz : la force de Laplace s'oppose au mouvement du rail et donc à la variation de flux.

On retrouve le point très important : le choix de l'orientation du circuit (arbitraire) conditionne le signe de la FÉM induite (avec un choix opposé, on trouverait une FÉM opposée), mais cela ne changerait rien à la physique du problème ; dans cet exemple, on a dans tous les cas une force de freinage.

### □ Méthode 22.6. Effectuer un bilan énergétique

- La relation  $P_{\text{fém}} + P_{\text{Laplace}} = 0$ , qui traduit la puissance nulle de la force magnétique, peut se démontrer à partir des équations électromécaniques couplées. Elle permet d'éliminer le champ magnétique qui assure le couplage électromécanique.
- Le bilan final pour l'ensemble du système fait alors apparaître les autres puissances mises en jeu (effet Joule, frottements éventuels...) et les différentes formes d'énergie emmagasinées dans le système (cinétique, électromagnétique dans une bobine ou un condensateur...). Il est toujours prévisible sans connaissance préalable des équations électromécaniques couplées.

⇒ Exercices 22.7, 22.9, 22.10, 22.11

– Puissances de la FÉM et de la force de Laplace

Reprenons la situation des rails de Laplace d'un point de vue énergétique. Si on prend en compte la résistance  $R$  du circuit, on a obtenu l'équation électrique :  $e_{\text{ind}} = -B \ell v(t) = R i(t)$ .

La puissance dissipée dans la résistance est égale à la puissance reçue par le circuit via le phénomène d'induction, que l'on notera  $P_{\text{fém}}$  :  $P_{\text{fém}} = e_{\text{ind}} i = -i \ell B v$ .

Calculons par ailleurs la puissance des forces de Laplace qui s'exercent sur le barreau mobile :  $\vec{F}_{\text{Lap}} = i \ell B \vec{e}_y$ , ce qui donne  $P_{\text{Laplace}} = \vec{F}_{\text{Lap}} \cdot \vec{v} = i \ell B \vec{e}_y \cdot v \vec{e}_y = +i \ell B v$ .

On constate ainsi que  $P_{\text{Laplace}}$  et  $P_{\text{fém}}$  sont opposées, ce que l'on peut écrire  $P_{\text{Laplace}} + P_{\text{fém}} = 0$ .

– Bilan global

Les deux équations électromécaniques couplées sont  $m \frac{dv}{dt} = i B \ell$  et  $-B \ell v = R i$ . On multiplie la première par  $v$  et la seconde par  $i$  puis l'on fait la somme, ce qui élimine le terme en  $B$  :

$$m v \frac{dv}{dt} + R i^2 = 0, \text{ ou encore : } \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = -R i^2.$$

Cette relation était attendue et pouvait s'écrire directement sans faire appel aux équations couplées. Elle traduit simplement la conversion de l'énergie cinétique du rail en énergie thermique ou lumineuse via l'effet Joule. Notons enfin que ce bilan doit lui aussi servir à éviter de regrettables erreurs de signes. Un bilan de la forme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = +R i^2$  doit conduire à s'interroger sur l'écriture de la loi des tensions ou le calcul du produit vectoriel en ce qui concerne la force de Laplace !

## ■ ■ Vrai/Faux

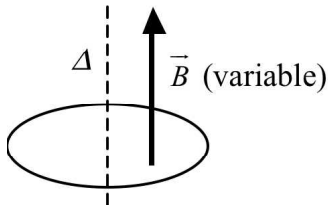
	Vrai	Faux
1. Pour observer un courant induit, il suffit de placer un circuit électrique fermé dans un champ magnétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Le signe du coefficient d'inductance propre dépend du choix de l'orientation du circuit.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Le signe du coefficient d'inductance mutuelle dépend du choix de l'orientation des circuits.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Si l'on inverse le choix d'orientation du circuit, la FÉM induite change de signe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. Si l'on inverse le choix d'orientation du circuit, le courant induit change de signe.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Pour un circuit en mouvement dans un champ magnétique permanent, celui-ci est à l'origine du couplage électromécanique mais disparaît du bilan d'énergie.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Dans un transformateur, l'intensité en sortie est la même qu'en entrée.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Un alternateur réalise une conversion de travail mécanique en travail électrique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Les courants de Foucault sont des courants induits circulant dans tout le volume d'une pièce métallique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Les courants de Foucault peuvent être utilisés pour réaliser un système de freinage.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

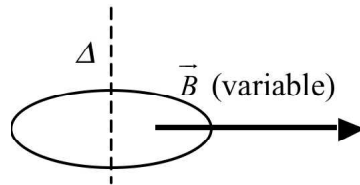
## ■ Loi de Faraday

### □ Exercice 22.1. Calculs de courants induits

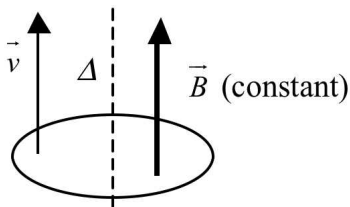
Dans chacun des six cas suivants, calculer la valeur efficace du courant induit dans la spire d'axe ( $\Delta$ ) de surface  $10\text{cm}^2$  et de résistance  $0,5\ \Omega$ .



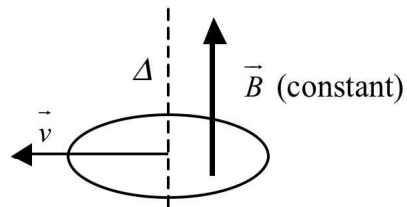
Cas 1 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme parallèle à son axe, d'amplitude  $0,1\text{T}$  et de fréquence  $50\text{Hz}$ .



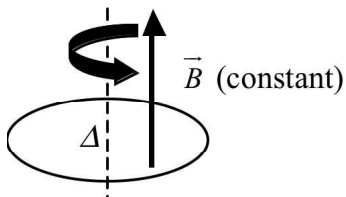
Cas 2 : la spire est immobile dans un champ magnétique uniforme orthogonal à son axe, d'amplitude  $0,1\text{T}$  et de fréquence  $50\text{Hz}$ .



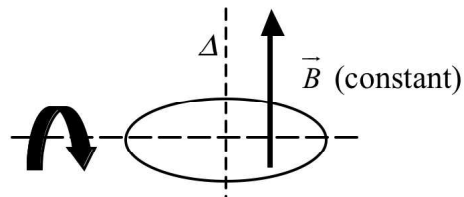
Cas 3 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse de  $2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  parallèle à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de  $0,1\text{T}$ .



Cas 4 : la spire se déplace sans changer d'orientation avec une vitesse  $2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  orthogonale à son axe dans un champ magnétique constant et uniforme de  $0,1\text{T}$ .



Cas 5 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de  $5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  autour de son axe dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de  $0,1\text{T}$ .



Cas 6 : la spire tourne avec une vitesse angulaire de  $5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  autour d'un de ses diamètres dans un champ magnétique constant et uniforme parallèle à son axe de  $0,1\text{T}$ .

## ■ Circuit fixe dans un champ variable

### □ Exercice 22.2. Comparaison entre induction par un champ « extérieur » et auto-induction dans une spire

Lorsque l'on considère une spire unique, on peut généralement négliger la FÉM induite devant celle qui est due à un champ « extérieur », c'est-à-dire créé par une autre bobine, variable.

On considère ici une spire circulaire de rayon  $R = 5 \text{ cm}$  et de résistance interne  $r = 1 \Omega$ .

Le champ « extérieur » variable est uniforme, orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$  et d'amplitude  $B_0 = 50 \text{ mT}$ .

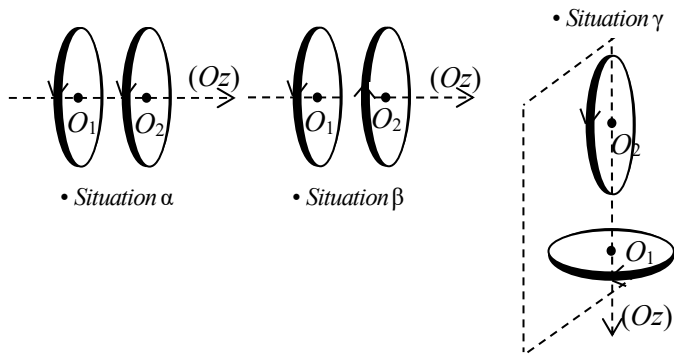
1. Calculer l'amplitude de la FÉM induite dans la bobine du fait du champ extérieur.
2. En déduire (en négligeant l'auto-induction) l'amplitude du courant induit.
3. Expliquer pourquoi, en négligeant ainsi l'auto-induction, on surestime le courant induit.
4. L'expression de l'inductance propre d'une spire est délicate à établir, car on ne peut utiliser une modélisation filiforme des conducteurs (dans une telle modélisation, le champ diverge au voisinage des conducteurs) et il faut donc prendre en compte le rayon du fil, que l'on note  $a$ .

On donne l'expression :  $L = \mu_0 R \left( \ln \left( \frac{8R}{a} \right) - 2 \right)$ . Calculer  $L$  pour cette spire, avec  $a = 0,1 \text{ mm}$ .

5. Calculer l'amplitude  $E'_{\text{ind}}$  de la FÉM associé à l'auto-induction et conclure.

### □ Exercice 22.3. Signe d'une inductance mutuelle\*

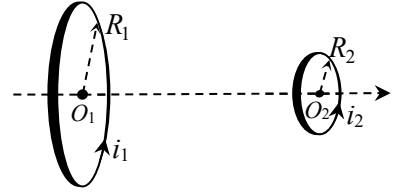
Deux spires circulaires filiformes orientées notées (1) et (2), de centres  $O_1$  et  $O_2$ , sont représentées ci-dessous dans trois situations. Ces spires sont perpendiculaires au plan de la figure, la partie en gras étant située en avant de ce plan. L'orientation choisie pour chaque circuit est indiquée par une flèche. Dans les deux premières dispositions, notées  $\alpha$  et  $\beta$ , les deux spires sont coaxiales. Dans la dernière, leurs axes sont coplanaires et orthogonaux.



Indiquer si possible le signe de leur inductance mutuelle dans les trois cas.

□ **Exercice 22.4. Calcul d'une inductance mutuelle et vérification de l'égalité  $M_{12} = M_{21}$**

On considère deux spires circulaires coaxiales ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) de centres  $O_1$  et  $O_2$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ . On suppose que la distance  $O_1O_2$  est grande devant  $R_1$  et  $R_2$ . On se propose de calculer l'inductance mutuelle de ces deux spires en adoptant les deux points de vue (on calcule  $M_{12}$  ou  $M_{21}$ ).



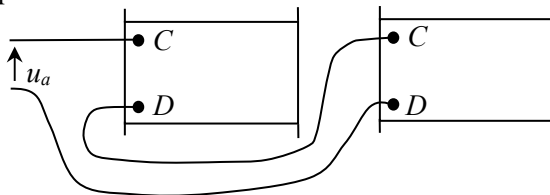
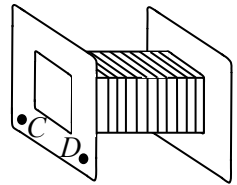
On rappelle l'expression du champ créé par une spire de rayon  $R$  sur son axe, à une distance  $z$  de son centre :

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

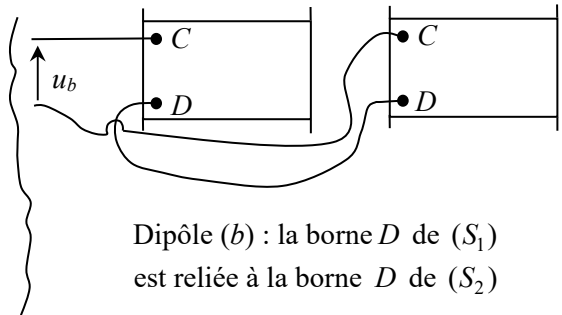
1. On admettra que le champ magnétique créé par ( $C_1$ ) au niveau de ( $C_2$ ) est pratiquement  $\vec{B}_1(O_2)$ . En déduire le flux  $\Phi_{12}$  puis le coefficient  $M_{12}$  tel que  $\Phi_{12} = M_{12} i_1$ .
2. De la même manière, calculer  $\Phi_{21}$  et en déduire  $M_{21}$  tel que  $\Phi_{21} = M_{21} i_2$ .
3. Vérifier qu'on retrouve bien  $M_{12} = M_{21}$  dans la mesure où  $O_1O_2 \gg R_1$  et  $R_2$ .

□ **Exercice 22.5. Couplage entre deux bobines\***

On dispose de deux bobines identiques ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) chacune d'inductance propre  $L$  et de résistance ohmique  $r = 8 \Omega$ . On repère les bornes de chaque bobine par les lettres  $C$  et  $D$ . Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre. On les connecte en série sans les déplacer de manière à créer un nouveau dipôle. La connexion se fait selon les deux possibilités suivantes :



Dipôle (a) : la borne  $D$  de ( $S_1$ ) est reliée à la borne  $C$  de ( $S_2$ )



Dipôle (b) : la borne  $D$  de ( $S_1$ ) est reliée à la borne  $D$  de ( $S_2$ )

On alimente successivement chacun des dipôles (a) et (b) par un courant sinusoïdal de fréquence  $f = 2 \text{ KHz}$ . La mesure du module de l'impédance donne  $Z_a = 375 \Omega$  et  $Z_b = 225 \Omega$ . En déduire les valeurs de l'inductance propre  $L$  de chaque bobine et de l'inductance mutuelle  $M$  des deux bobines (on précisera les orientations choisies).

□ **Exercice 22.6. Régime transitoire dans deux circuits couplés par mutuelle**

On reprend l'exemple traité à la méthode 22.4. On suppose pour simplifier  $R_1 = R_2 = R$  et  $L_1 = L_2 = L$ . L'interrupteur est fermé à l'instant  $t = 0$  et l'on suppose qu'avant fermeture, les intensités étaient nulles.

1. Écrire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
2. La symétrie de ce système différentiel permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires  $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$  et  $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$ .  
Écrire les équations différentielles vérifiées par  $S(t)$  et  $D(t)$ .
3. Résoudre les équations différentielles précédentes. Déterminer enfin les expressions des intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ . Représenter l'allure des courbes de ces intensités.  
(On notera que toutes les inductances imposent la continuité des intensités à la fermeture de l'interrupteur.)

## ■ Circuit mobile dans un champ stationnaire

### □ Exercice 22.7. Énergie dissipée dans une bobine plate\*

Une bobine plate comportant  $N$  spires rectangulaires de surface  $S$  tourne à une vitesse angulaire constante  $\omega$  dans un champ magnétique constant et uniforme d'intensité  $B$ . Ses bornes sont reliées à une résistance  $R$ , et la résistance interne de la bobine est  $r$ . Pour les calculs, on assimilera la bobine plate à  $N$  spires confondues. On néglige le phénomène d'auto-induction.

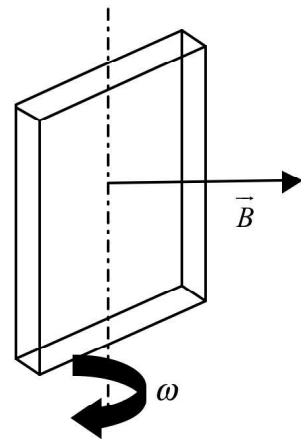
1. Faire un schéma en indiquant notamment les directions du champ magnétique et du vecteur rotation de la bobine, de manière à ce que le courant induit soit le plus élevé possible.
2. Donner (relativement au sens de la rotation) la direction et le sens du couple nécessaire pour maintenir la vitesse angulaire constante de la spire (on le notera  $\vec{M}_{\text{op}} = M_{\text{op}} \vec{e}_z$ ).
3. Donner le schéma électrique équivalent de l'ensemble et expliciter l'expression de la FÉM induite.
4. Établir l'expression du courant induit et en déduire la puissance dissipée par effet Joule.
5. À partir d'un bilan d'énergie, en déduire l'expression du couple  $\vec{M}_{\text{op}}$ .
6. Retrouver cette expression en calculant le moment des forces de Laplace.

### □ Exercice 22.8. Établissement du courant dans une bobine en rotation

On considère une bobine plate comportant  $N = 500$  spires rectangulaires de surface  $S = 25 \text{ cm}^2$ , d'inductance  $L = 54 \text{ mH}$  et de résistance interne  $r = 15 \Omega$ . Elle est refermée sur une résistance  $R = 100 \Omega$  et tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  dans un champ magnétique constant et uniforme d'intensité  $B = 300 \text{ mT}$ .

On s'intéresse à l'évolution du courant dans la bobine à partir d'un instant initial où il est nul (par exemple, la bobine est connectée à un interrupteur, et à  $t = 0$  on ferme l'interrupteur).

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant qui circule dans la bobine.

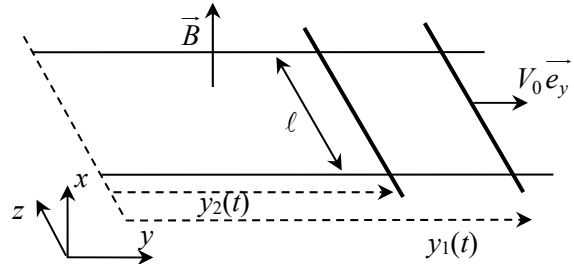




- Donner l'expression la plus générale de la solution (sans chercher à calculer les constantes), et interpréter les différents termes. Après combien de temps le régime permanent est-il atteint ?
- Calculer la valeur efficace du courant une fois le régime permanent atteint.

□ **Exercice 22.9. Rails de Laplace à deux barreaux \* \***

Deux barreaux conducteurs peuvent glisser sans frottement suivant l'axe ( $Oy$ ) sur des rails de Laplace, formant ainsi un circuit fermé. On note  $R$  la résistance électrique de l'ensemble, supposée constante. L'inductance propre du circuit fermé est négligée. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_x$ .

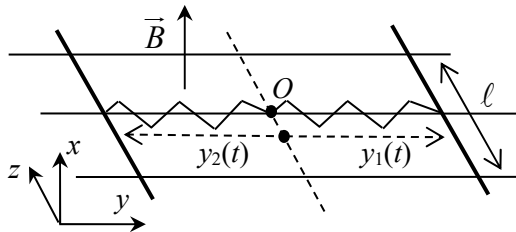


Les deux barreaux coïncident initialement

à la cote nulle  $y_1(0) = y_2(0) = 0$ . À cet instant initial, le barreau (2) est au repos alors que le barreau (1) est animé d'une vitesse uniforme  $V_0 \vec{e}_y$  imposée par une force extérieure.

- Expliquer pourquoi le barreau (2) se met en mouvement.
- Déterminer l'expression de  $y_2(t)$ . Décrire la situation de régime permanent. L'évolution du système est-elle en accord avec la loi de Lenz ?
- Écrire sans utiliser ce qui précède un bilan énergétique, en faisant intervenir la puissance de la force extérieure qui agit sur le barreau (1). Retrouver ce bilan à partir de l'écriture des équations électromécaniques appliquées aux barreaux.

□ **Exercice 22.10. Oscillations de deux barreaux de Laplace couplés par induction \***



Les deux barreaux identiques à ceux de l'exercice précédent sont liés (séparément) au point  $O$  fixe par deux ressorts identiques de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . On repère leurs positions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  par rapport au point de fixation commun  $O$ . (Noter que  $y_2(t)$  est négatif sur le schéma.)

À l'instant  $t=0$ , le barreau (1) est écarté vers la droite de sa position d'équilibre, d'une distance  $a$ , et lâché sans vitesse initiale. Au même instant, le barreau (2) est immobile à sa position d'équilibre.

- Écrire les trois équations électromécaniques couplées liant les positions  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  ainsi que l'intensité  $i(t)$ .
- Éliminer l'intensité  $i(t)$  pour obtenir deux équations différentielles couplées vérifiées par  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .

3. La symétrie du système différentiel précédent permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires  $S(t) = y_1(t) + y_2(t)$  et  $D(t) = y_1(t) - y_2(t)$ . Écrire les équations différentielles vérifiées par  $S(t)$  et  $D(t)$ .
4. Résoudre l'équation vérifiée par  $S(t)$  et discuter rapidement les différents cas pour celle vérifiée par  $D(t)$ . Dans tous les cas, quelle est la limite de  $D(t)$  au bout d'un temps suffisamment long ? Décrire le mouvement des deux barreaux quand ce régime permanent est atteint. La loi de Lenz est-elle vérifiée ?
5. Déterminer l'énergie mécanique du système au départ et au bout d'un temps assez long pour n'avoir que le régime permanent de la question précédente. Qu'est devenue l'énergie mécanique manquante ?

□ **Exercice 22.11. Freinage par induction \* \***

Les freins à induction (ou ralentisseurs électromagnétiques), utilisés sur divers véhicules, sont avantageux par rapport aux freins mécaniques classiques : étant sans frottement, ils ne s'usent pas et ne produisent pas de particules fines. On présente ici une modélisation simple de leur principe de fonctionnement.

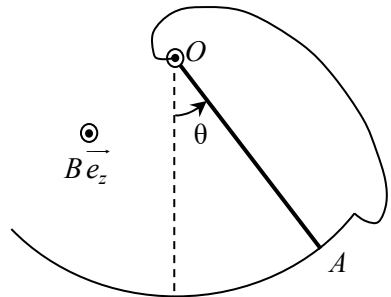


*Frein à induction de l'entreprise française Telma, leader mondial du secteur*

Une tige métallique  $OA$  de masse  $m$ , de résistance  $R$  et de longueur  $a$  oscille sans frottement (liaison pivot parfaite) autour d'un axe fixe  $(Oz)$ , perpendiculaire au plan de figure.

Le moment d'inertie de la tige autour de  $(Oz)$  est  $J = \frac{1}{3}ma^2$ .

La tige est en contact en  $A$  avec un rail métallique, formant ainsi un circuit électrique dont le seul élément résistant est la tige  $OA$ . Elle est placée dans un champ magnétique uniforme  $B \vec{e}_z$  normal au plan du système.



1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta(t)$  avec la verticale.
2. On se limite à de petites oscillations autour de la position d'équilibre. Linéariser l'équation différentielle précédente. Déterminer la valeur minimale  $B_{\min}$  de  $B$  pour que la tige atteigne sa position d'équilibre sans oscillation.
3. Écrire sans calcul l'expression du taux de variation de l'énergie mécanique du pendule  $\frac{dE_m}{dt}$  en fonction de l'intensité  $i(t)$  qui circule dans la tige. Retrouver la relation précédente à partir des deux équations électromécaniques couplées utilisées à la question 1.

## ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 22.1.* Le courant induit est nul dans plusieurs cas. Il faut se demander si le flux au travers de la spire varie.

*Exercice 22.3.* Bien réfléchir à la forme du champ magnétique généré par une spire.

*Exercice 22.5.* Commencer par bien préciser les orientations pour lesquelles on définit l'inductance mutuelle  $M$ . Appliquer ensuite la méthode 22.6. Quand on permute les branchements, il suffit d'inverser les orientations pour revenir à la situation précédente. Que devient alors  $M$  ?

*Exercice 22.9.* Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant.

*Exercice 22.10.* Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant. Pour écrire la force exercée par un ressort, utiliser rigoureusement la formule générale vue au chapitre 11.

*Exercice 22.11.* Orienter le circuit fermé le long duquel circule le courant. Attention au fait que, en rotation, la vitesse n'est plus uniforme !

## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
faux	faux	vrai	vrai	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai

1. Le flux du champ magnétique doit être variable.
2. Le coefficient d'inductance propre est toujours positif.
4. Le flux change de signe, sa dérivée aussi.
5. La FÉM change de signe, l'intensité aussi. Comme l'orientation est opposée, cela correspond à la même situation physique !
7. La tension en sortie est plus élevée qu'en entrée pour un transformateur élévateur. Si l'intensité restait la même, la puissance en sortie serait plus grande qu'en entrée, ce qui est impossible : le transformateur élévateur de tension *abaisse* nécessairement l'intensité.

### □ Les erreurs classiques

- L'erreur la plus grave et la plus fréquente est de ne pas choisir une orientation pour les circuits. Toutes les relations sont algébriques et supposent le choix de cette orientation ! Quand le circuit est orienté, le flux est algébrique, la FÉM est algébrique ainsi que l'écriture de la loi des mailles.
- Il faut prendre garde à ne pas compter deux fois les inductances propres par utilisation d'un schéma électrique faux dans lequel on dessinerait à la fois la FÉM induite totale et la bobine symbolisant l'inductance propre.
- Beaucoup d'étudiant(e)s ne pensent pas à introduire un courant électrique si le sujet ne l'indique pas. Il faut se souvenir que si l'on a un circuit en mouvement dans un champ permanent, la FÉM induite sera à l'origine d'un courant si le circuit est fermé. Et ce courant entraîne lui-même l'existence d'une force de Laplace.
- Enfin, dans l'intégration des équations électromécaniques couplées, l'intensité est une fonction inconnue et non pas une constante !

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 22.1

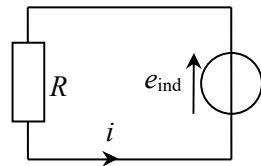
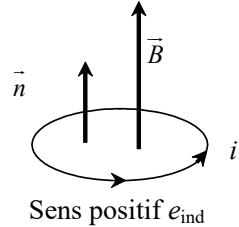
– Cas 1

On retrouve la situation simple vue dans le résumé de cours : avec les orientations indiquées ci-contre, on a  $\Phi = BS = B_0 S \cos(\omega t)$ , et la loi de Faraday donne  $e_{\text{ind}} = \omega B_0 S \cos(\omega t)$ . On peut alors modéliser le comportement électrique de la spire par une source de tension en série avec une résistance, et on obtient  $i = \frac{e_{\text{ind}}}{R} = \frac{\omega B_0 S \cos(\omega t)}{R}$ .

La valeur efficace d'un courant sinusoïdal est égale à son amplitude

divisée par  $\sqrt{2}$ , donc  $I_{\text{eff}} = \frac{\omega B_0 S}{R\sqrt{2}}$ .

AN  $I_{\text{eff}} = 45 \text{ mA}$  ( $\omega = 2\pi f = 315 \text{ rad.s}^{-1}$ ).



– Cas 2

Le champ magnétique est orthogonal à l'axe de la spire, donc le flux au travers de la spire est nul. Il n'y a donc pas de variation de flux : la FÉM induite est nulle, le courant induit est nul également.

– Cas 3 et 4

Le champ étant uniforme et la spire ne changeant pas d'orientation, le flux ne varie pas quel que soit le mouvement. Le courant induit est nul.

*✍ On peut retenir que d'une manière générale un mouvement de **translation** d'un circuit dans un champ magnétique **uniforme** n'engendre pas de phénomène d'induction.*

– Cas 5

Là encore il n'y a aucune variation du flux au travers de la spire et donc le courant induit le long de la spire est nul.

– Cas 6

On retrouve la situation classique d'une spire en rotation dans un champ uniforme. Des calculs analogues à ceux développés dans le résumé de cours (que la spire soit circulaire ou rectangulaire, ou de toute autre forme pourvu qu'elle soit plane, n'a aucune importance) conduisent à  $e_{\text{ind}} = BS\omega \sin(\omega t)$ , où  $\omega$  est la vitesse angulaire. On conclut ensuite comme dans

le cas 1, et on obtient  $I_{\text{eff}} = \frac{\omega BS}{R\sqrt{2}}$ . L'application numérique donne  $I_{\text{eff}} = 0,71 \text{ mA}$ .

### Exercice 22.2

1. On note  $B = B_0 \cos(\omega t)$  et le flux est égal à  $\Phi = BS = B_0 S \cos(\omega t)$ , en utilisant la loi de Faraday on obtient  $e_{\text{ind}} = \omega B_0 S \sin(\omega t)$ , c'est-à-dire que l'amplitude est  $E_{\text{ind}} = \omega B_0 S$ .

AN  $E_{\text{ind}} = 0,12 \text{ V}$ .

2. Le circuit électrique équivalent est simplement une source de tension  $e_{\text{ind}}$  aux bornes d'une résistance. On en déduit que le courant (orienté dans le même sens que  $e_{\text{ind}}$ ) est  $i = \frac{e_{\text{ind}}}{r}$ , d'où son

amplitude :  $I_m = \frac{\omega B_0 S}{r}$ . AN  $I_m = 0,12 \text{ A}$ .

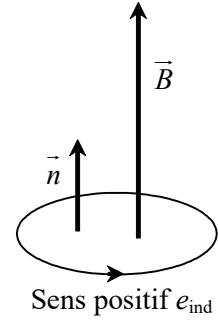
3. Le courant induit s'oppose par ses effets à la variation de flux (loi de Lenz), de ce fait en négligeant le champ magnétique qu'il crée on surestime la variation de flux, donc la FÉM induite et donc le courant induit.

4. L'application numérique donne  $L = 0,39 \mu\text{H}$ .

5. Le flux associé à l'auto-induction est donné par  $\Phi' = Li$  et la FÉM correspondante est donc

$e'_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi'}{dt} = -L \frac{di}{dt}$ . Comme  $i$  est sinusoïdal, on en déduit  $E'_{\text{ind}} = L \omega I_m$ . L'application

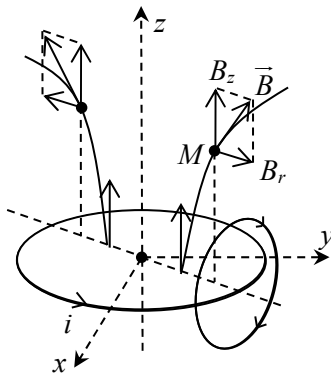
numérique donne  $E'_{\text{ind}} = 15 \mu\text{V}$ , l'auto-induction est ici effectivement négligeable.



### Exercice 22.3

Pour bien aborder cet exercice, il faut avoir une vision claire du champ magnétique créé par une spire. Les lignes de champ sont des courbes fermées entourant la spire. Une ligne passant par un point  $M$  est contenue dans le plan passant par  $M$  et contenant l'axe de la spire.

En coordonnées cylindriques, on a :  $\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$ . Les symétries, suggérées dans le schéma ci-dessous, imposent :  $B_z(r, -z) = B_z(r, z)$ .



Avec les choix d'orientations de la figure, la composante  $B_z(r, z)$  est du même signe que l'intensité  $i$ .

– Disposition  $\alpha$

Pour calculer le flux du champ magnétique à travers une spire, on peut prendre comme surface fermée s'appuyant sur la spire le disque plan qu'elle limite. Seul intervient alors dans le calcul du flux la composante de  $\vec{B}$  normale à ce disque.

Dans la disposition  $\alpha$ , on voit que si  $i_1$  est positif,  $B_{z1}$  est

positif et donc le flux  $\Phi_{12} = \iint_{\text{disque } \Sigma_2} \vec{B}_1 \cdot dS_2 \vec{e}_z = \iint_{\text{disque } \Sigma_2} B_{1z} dS_2$

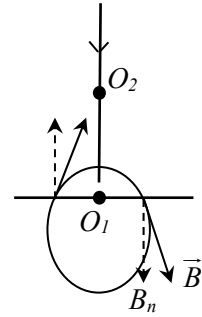
est positif. On en déduit que  $M_\alpha = M_{12\alpha} \geq 0$ .

– Dans la disposition  $\beta$ , on inverse une des deux orientations et donc on change le signe du coefficient de mutuelle  $M_\beta \leq 0$ .

– Dans la situation  $\gamma$ , on peut commencer par chercher le flux  $\Phi_{12}$ . Comme la spire (2) est entièrement contenue dans un plan contenant l'axe de la spire (1), le champ  $\vec{B}_1$  est entièrement dans ce plan et donc le produit scalaire  $\vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$  est nul. Le flux total  $\Phi_{12}$  est nul, comme le coefficient d'inductance mutuelle :  $M_{\gamma} = 0$ .

On peut changer de point de vue et chercher le flux  $\Phi_{21}$ . Le schéma ci-contre, en coupe, montre pourquoi ce flux est nul.

Une ligne de champ qui traverse la spire (2) coupe le disque qui s'appuie sur la spire (1) en deux points symétriques pour lesquels la composante utile, normale au disque, change de signe.



### Exercice 22.4

1. Le champ magnétique créé en  $O_2$  par la bobine 1 s'écrit :  $\vec{B}_1(O_2) = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ .

Avec l'approximation  $\vec{B}_1(M) \approx \vec{B}_1(O_2)$  pour un point  $M$  du disque qui s'appuie sur  $C_2$ , le flux de  $\vec{B}_1$  à travers ce disque orienté suivant  $+\vec{e}_z$  sera :

$$\Phi_{12} \approx \vec{B}_1(O_2) \cdot \pi R_2^2 \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}} \pi R_2^2.$$

On en déduit immédiatement le coefficient d'inductance :  $M_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}}$ .

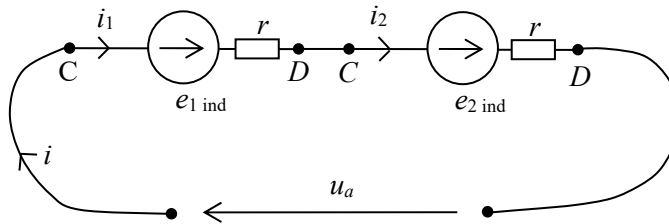
2. De la même manière, on obtient :  $M_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + O_1 O_2^2)^{3/2}}$ .

3. Dans la mesure où  $O_1 O_2 \gg R_1$  et  $O_1 O_2 \gg R_2$ , les dénominateurs des deux expressions sont quasiment égaux (à la valeur  $2O_1 O_2^3$ ) et on a bien  $M_{12} \approx M_{21} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2O_1 O_2^3}$ .

*✎ On ne retrouve pas exactement l'égalité, c'est lié à l'approximation faite dans le calcul. Cet exemple montre que le calcul sans approximation du coefficient d'inductance mutuelle de deux spires de même axe est délicat. Il nécessite en effet d'utiliser le champ magnétique d'une spire en dehors de son axe.*

## Exercice 22.5

Notons  $M$  l'inductance mutuelle algébrique des deux solénoïdes quand les intensités  $i_1$  et  $i_2$  qui circulent sont comptées positivement de  $C$  vers  $D$ . Le circuit électrique équivalent au dipôle (a) sera le suivant :



avec les relations :  $i_1 = i_2 = i$  et  $e_{1\text{ind}} = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$  ainsi que  $e_{2\text{ind}} = -L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$ .

Finalement l'équation électrique est :  $u = -e_{1\text{ind}} + ri_1 - e_{2\text{ind}} + ri_2$ .

En remplaçant, avec  $i_1 = i_2 = i$ , il vient :

$$u = L \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + ri = 2(L + M) \frac{di}{dt} + 2ri.$$

On voit que l'association des deux bobines dans la configuration (a) est équivalente à une unique bobine d'inductance  $L_{\text{eq}a} = 2(L + M)$  et de résistance  $r_{\text{eq}a} = 2r$ . Pour le dipôle (b), on se ramène à la configuration du dipôle (a) si l'on change l'orientation du deuxième bobinage. Cela conduit simplement à changer le signe de l'inductance mutuelle qui devient  $-M$ . On en déduit que l'association des deux bobines dans la configuration (b) est équivalente à une unique bobine d'inductance  $L_{\text{eq}b} = 2(L - M)$  et de résistance  $r_{\text{eq}b} = 2r$ .

En régime sinusoïdal forcé, on passe aux impédances complexes :  $\underline{Z}_a = 2(L + M)j\omega + 2r$  et  $\underline{Z}_b = 2(L - M)j\omega + 2r$ .

En passant aux modules :  $|\underline{Z}_a|^2 = Z_a^2 = ((2(L + M)\omega)^2 + (2r)^2) = 4(L + M)^2\omega^2 + 4r^2$ , et

$$|\underline{Z}_b|^2 = Z_b^2 = 4(L - M)^2\omega^2 + 4r^2. \text{ On en déduit } L + M = \sqrt{\frac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}} \text{ et } L - M = \sqrt{\frac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}}.$$

*En prenant la racine, on n'a pas à s'inquiéter du signe car on sait que  $L + M$  est toujours positif, quel que soit le signe de  $M$ . On a en effet le résultat général*

$$\left| \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right| = \left| \frac{M}{L} \right| \leq 1 \text{ ou encore, comme } L \text{ est toujours positive : } |M| \leq L.$$

Finalement : 
$$L = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}} + \sqrt{\frac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}} \right) \text{ et } L = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{Z_a^2 - 4r^2}{4\omega^2}} - \sqrt{\frac{Z_b^2 - 4r^2}{4\omega^2}} \right).$$

AN  $L = 11,9 \text{ mH}$  et  $M = 2,99 \text{ mH}$ .



## Exercice 22.6

1. Le système d'équation à résoudre, après fermeture de l'interrupteur, est donné par la loi des mailles :

$$E = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

2. C'est un système d'équations différentielles couplées. La symétrie du système permet de le découpler simplement en introduisant les fonctions  $S = i_1 + i_2$  et  $D = i_1 - i_2$ . En faisant la somme et la différence des équations différentielles, on trouve :

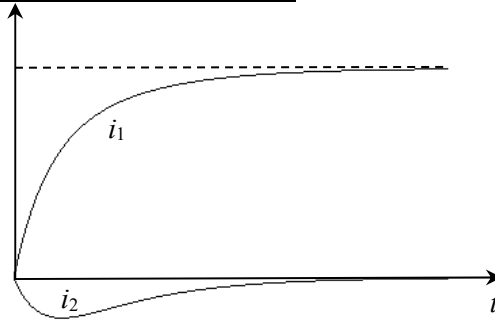
$$E = RS + (L + M) \frac{dS}{dt} \quad \text{et} \quad E = RD + (L - M) \frac{dD}{dt}.$$

3. Les solutions sont :  $S(t) = \frac{E}{R} + A \exp(-t/\tau_1)$  et  $D(t) = \frac{E}{R} + B \exp(-t/\tau_2)$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes d'intégration, et  $\tau_1 = \frac{L+M}{R}$  et  $\tau_2 = \frac{L-M}{R}$  sont des temps caractéristiques de variation des courants. Ces deux temps sont bien positifs d'après la remarque de l'exercice précédent. La continuité des intensités  $i_1$  et  $i_2$  entraîne celle de  $S$  et  $D$ . On doit donc avoir immédiatement après fermeture de l'interrupteur  $S(0^+) = 0$  et  $D(0^+) = 0$  ce qui fixe les constantes :

$S(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau_1))$  et  $D(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau_2))$ . On en tire ainsi les expressions des intensités :

$$i_1(t) = \frac{1}{2}(S + D) = \frac{E}{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \exp(-t/\tau_1) - \frac{1}{2} \exp(-t/\tau_2) \right) \quad \text{et}$$

$$i_2(t) = \frac{1}{2}(S - D) = \frac{E}{2R} (-\exp(-t/\tau_1) + \exp(-t/\tau_2)).$$



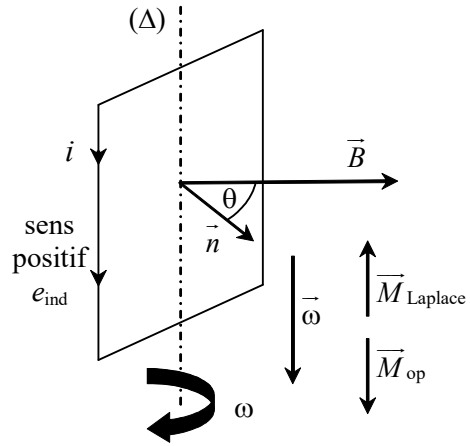
Dans le cas  $M \geq 0$ , on a  $\tau_1 \geq \tau_2$ . Le terme en  $\exp(-t/\tau_1)$  est donc toujours supérieur à celui en  $\exp(-t/\tau_2)$ . L'intensité  $i_2$  est donc négative ce qui est conforme à la loi de Lenz : le flux correspondant  $\Phi_{21} = Mi_2$  s'oppose au flux  $\Phi_{12} = Mi_1$ . Dans le cas  $M \leq 0$ , l'intensité  $i_2$  reste au contraire positive. Une fois le régime permanent atteint, le couplage disparaît.

## Exercice 22.7

1. Il faut que le flux du champ magnétique au travers des spires soit le plus élevé possible d'où, par exemple, la configuration suivante.

2. D'après la loi de Lenz, le courant induit tend à s'opposer à la cause qui lui donne naissance, c'est-à-dire ici la rotation de la bobine. Le moment des forces de Laplace est donc de sens opposé au vecteur rotation, et le couple qui permet de maintenir la rotation est dans le même sens que le vecteur rotation.

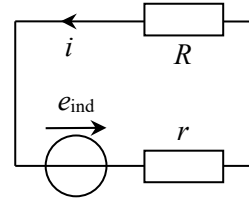
3. On néglige l'auto-induction dans la bobine, on la modélise donc par une source de tension  $e_{\text{ind}}$  associée au mouvement de rotation en série avec sa résistance interne  $r$ .



On calcule  $e_{\text{ind}}$  avec la loi de Faraday : avec les notations du schéma,

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ et } \Phi = N\vec{B} \cdot \vec{n}S = NBS \cos\theta, \text{ d'où } e_{\text{ind}} = -NBS \frac{d(\cos\theta)}{dt}$$

soit  $e_{\text{ind}} = NBS \omega \sin(\omega t)$  puisque,  $\omega$  étant constante,  $\theta = \omega t$ .



4. Le schéma électrique équivalent permet d'obtenir  $i = \frac{e_{\text{ind}}}{r+R}$ , et donc  $i = \frac{NBS \omega \sin(\omega t)}{r+R}$ .

La puissance dissipée par effet Joule dans l'ensemble (bobine et résistance  $R$ ) est donnée par

$$P_J = (r+R)i^2, \text{ soit } P_J = \frac{(NBS \omega \sin(\omega t))^2}{r+R}.$$

5. D'un point de vue mécanique la puissance du couple  $P_{\text{op}}$  est égale, en valeur absolue, à celle des forces de Laplace (puisque, la vitesse angulaire étant constante,  $\vec{M}_{\text{op}} + \vec{M}_{\text{Laplace}} = \vec{0}$ ). D'un point de vue électrique, toujours en valeur absolue, la puissance associée à la FÉM est égale à la puissance dissipée par effet Joule. Étant donné que d'une manière générale  $|P_{\text{Laplace}}| = |P_{\text{fém}}|$ , on en déduit que  $P_{\text{op}} = P_J$ . Enfin,  $P_{\text{op}} = \vec{M}_{\text{op}} \cdot \vec{\omega} = \omega M_{\text{op}}$ .

On en déduit que 
$$M_{\text{op}} = \frac{\omega(NBS \sin(\omega t))^2}{r+R}.$$

Ce moment est algébrique, ce n'est pas la norme de  $\vec{M}_{\text{op}}$  mais sa projection sur la direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$  :  $\vec{M}_{\text{op}} = M_{\text{op}}\vec{u}$ .

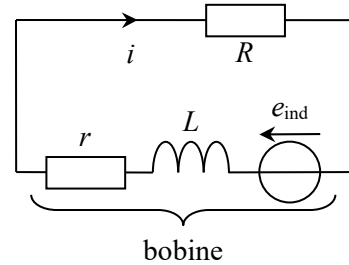
6. On peut assimiler la bobine à un moment magnétique  $\vec{m} = NiS\vec{n}$  (l'orientation de  $\vec{n}$  est cohérente avec celle du courant) et le moment des forces de Laplace est donné par

$\vec{M}_{\text{Laplace}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ , d'où  $\vec{M}_{\text{Laplace}} = NiS\vec{n} \wedge \vec{B} = NiSB \sin\theta(-\vec{u})$  et comme  $\vec{M}_{\text{op}}$  en est l'opposé, on a finalement  $\vec{M}_{\text{op}} = NiSB \sin\theta\vec{u}$ , donc  $M_{\text{op}} = NiSB \sin\theta$  et on retrouve le résultat de la question précédente en remplaçant  $i$  par son expression.

### Exercice 22.8

On peut reprendre les notations de l'exercice précédent, la situation étant très proche (la principale différence étant que l'on prend ici en compte le phénomène d'auto-induction).

1. Pour modéliser la bobine, on associe en série la résistance interne, une inductance pure et la FÉM induite du fait de la rotation notée  $e_{\text{ind}}$  (on aurait pu aussi ne pas faire figurer l'inductance et prendre en compte dans  $e_{\text{ind}}$  les deux contributions, celle associée à la rotation et celle associée à l'auto-induction). Le calcul de  $e_{\text{ind}}$  a déjà été fait plusieurs fois (voir résumé de cours ou exercice précédent) et donne :  $e_{\text{ind}} = NBS\omega \sin(\omega t)$ . Loi des mailles :



$e_{\text{ind}} = (r + R)i + L \frac{di}{dt}$ . L'équation différentielle vérifiée par  $i$  est donc, en posant  $\tau = \frac{L}{r + R}$  :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{NBS\omega}{L} \sin(\omega t).$$

2. La solution la plus générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière sinusoïdale :  $i = \lambda e^{-t/\tau} + I_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La solution homogène correspond à un régime transitoire, qui tend vers 0, alors que la solution particulière correspond au régime permanent sinusoïdal (tout cela revient à considérer la réponse d'un circuit  $RL$  à une excitation sinusoïdale). Le régime permanent est atteint au bout de quelques  $\tau$ , avec  $\tau = 0,47 \text{ ms}$ .

3. Il faut calculer  $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ , et pour cela on utilise la notation complexe en posant

$i_p(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[i_p(t)]$  avec  $i_p(t) = I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$ . L'équation vérifiée par  $i_p$  est

$\frac{di_p}{dt} + \frac{1}{\tau}i_p = \frac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$  soit  $I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi} \left( j\omega + \frac{1}{\tau} \right) = \frac{NBS\omega}{L}(-j)e^{j\omega t}$ . L'égalité des

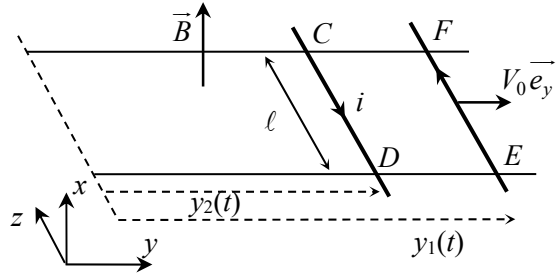
modules donne  $I_m = \frac{NBS\omega}{L\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}}$  et finalement  $I_{\text{eff}} = \frac{NBS\omega}{L\sqrt{2(\omega^2 + (1/\tau)^2)}}$ . AN  $I_{\text{eff}} = 0,23 \text{ A}$ .

### Exercice 22.9

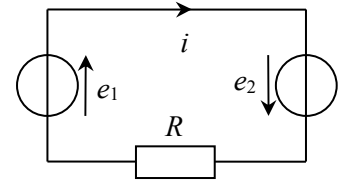
1. On a un conducteur en mouvement dans un champ magnétique permanent. Il est le siège d'une FÉM induite qui génère un courant électrique dans le circuit fermé limité par les deux barreaux. Le barreau (2) parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique est soumis à la force de Laplace qui le met en mouvement.

2. Il faut obtenir les deux équations électromécaniques couplées pour le barreau (2).

– Pour trouver l'équation électrique, il faut obtenir le schéma électrique équivalent. Chaque barre est le siège d'une FÉM induite. Comme toujours, la première chose à faire est d'orienter le circuit, par exemple comme indiqué sur le schéma ci-contre.



On calcule la FÉM induite  $e_1 + e_2$  sur tout le circuit fermé en utilisant la loi de Faraday. Comme le champ magnétique est uniforme, le flux à travers une surface orientée qui s'appuie sur le circuit fermé s'écrit encore  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  avec ici  $\vec{S} = (y_1 - y_2) \ell \vec{e}_x$ , soit  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \vec{e}_x \cdot (y_1 - y_2) \ell \vec{e}_x = B \ell (y_1 - y_2)$



d'où  $e = e_1 + e_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \ell \left( \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right) = -B \ell \left( V_0 - \frac{dy_2}{dt} \right)$ . L'application de la loi des

mailles donne finalement : 
$$-B \ell \left( V_0 - \frac{dy_2}{dt} \right) = R i$$

– L'équation mécanique s'obtient en projetant sur  $(Oy)$  le théorème de la résultante cinétique appliqué au barreau (2). La résultante des forces de Laplace sur ce barreau s'écrit :

$\vec{R}_2 = \int_C^D i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_C^D i dz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x = -i \ell B \vec{e}_y$ . Ainsi, en projection sur  $(Oy)$ , on obtient l'autre

équation électromécanique : 
$$m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -i \ell B$$

– Il reste à éliminer l'intensité entre ces deux équations couplées, ce qui ici est immédiat :

$i = \frac{1}{R} \left( -V_0 \ell B + \frac{dy_2}{dt} \ell B \right)$  donc  $m \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\ell B \frac{1}{R} \left( -V_0 \ell B + \frac{dy_2}{dt} \ell B \right) = -\frac{B^2 \ell^2}{R} \frac{dy_2}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{R} V_0$ .

On introduit la vitesse  $v_2 = \frac{dy_2}{dt}$  du barreau (2) ce qui conduit à : 
$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{\tau} = \frac{V_0}{\tau}$$

Avec le temps caractéristique  $\tau = \frac{B^2 \ell^2}{mR}$  qui a sa forme habituelle, invariante dans un changement de signe de  $B$ . Comme la vitesse initiale du barreau (2) est nulle, la solution est immédiate :  $v_2(t) = V_0 (1 - \exp(-t/\tau))$ . Puis, par une intégration supplémentaire, en prenant en compte la condition initiale  $y_2(0) = 0$  :

$$y_2(t) = \int_0^t v_2(u) du = V_0 (t + \tau (\exp(-t/\tau) - 1))$$
, soit 
$$y_2(t) = V_0 (t - \tau) + V_0 \tau \exp(-t/\tau)$$
.

Le terme en exponentielle traduit un régime transitoire de durée typique  $\tau$ . Au bout d'un temps très supérieur à cette durée, il reste :  $y_2(t) \approx V_0 (t - \tau)$ , ce qui signifie que le barreau (2) avance lui aussi à la vitesse  $V_0$ .

Lors de la phase transitoire de mise en vitesse il a pris un retard spatial  $V_0\tau$  sur le barreau (1) (l'ordre de grandeur de ce retard était aisément prévisible à partir d'arguments dimensionnels). En ce qui concerne le barreau (2), les effets des courants induits ne sont pas des effets de freinage. La loi de Lenz est cependant vérifiée car le système évolue dans le sens qui annule la variation de flux associée aux vitesses différentes des deux barreaux.

**3.** La puissance  $P_{op} = FV_0$  sert à modifier l'énergie cinétique du barreau (2) et à produire de

l'effet Joule. Le bilan global doit donc prendre la forme suivante : 
$$P_{op} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_2^2 \right) + R i^2.$$

Pour retrouver ce bilan, il faut faire intervenir le théorème de la résultante cinétique appliquée au barreau (1). La résultante des forces de Laplace sur ce barreau s'écrit :

$\vec{R}_1 = \int_E^F i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_0^\ell i dz \vec{e}_z \wedge B \vec{e}_x = +i\ell B \vec{e}_y$ . Comme le barreau est en mouvement rectiligne

uniforme, l'opérateur exerce une force opposée :  $\vec{F}_{op} = -i\ell B \vec{e}_y$  et  $P_{op} = -i\ell B V_0$ . L'équation

électrique  $-V_0\ell B + \frac{dy_2}{dt}\ell B = Ri$  permet d'exprimer  $V_0$  :  $V_0 = V_2 - Ri/\ell B$ . Que l'on substitue

dans  $P_{op} = -i\ell B V_0$  :  $P_{op} = -i\ell (V_2 - Ri/\ell B) = Ri^2 - i\ell B V_2$ . On a aussi  $m \frac{dV_2}{dt} = -i\ell B$  ce qui

donne finalement :  $P_{op} = -i\ell B (V_2 - Ri/\ell B) = Ri^2 + m \frac{dV_2}{dt} V_2 = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m V_2^2 \right)$ , qui est bien

le bilan attendu.

### Exercice 22.10

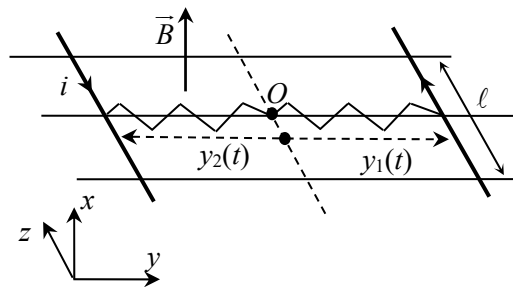
**1.** Si l'on oriente le circuit comme dans l'exercice précédent, les FÉM induites s'expriment de la même manière et l'équation électrique est inchangée à condition de remplacer la vitesse  $V_0$  par la vitesse  $V_1 = \frac{dy_1}{dt}$  du barreau

$$(1) : \left[ -\frac{dy_1}{dt} \ell B + \frac{dy_2}{dt} \ell B = Ri \right].$$

Pour obtenir les équations mécaniques, il faut encore appliquer à chaque tige le théorème de la résultante cinétique puis le projeter suivant  $(Oy)$ , en prenant en compte les actions des ressorts en plus des forces de Laplace.

Sur le barreau (1), la résultante des forces de Laplace est encore  $\vec{R}_1 = +i\ell B \vec{e}_y$  et l'action du ressort est traduite par la force  $\vec{F}_{1\text{ressort}} = -k(y_1 - \ell_0) \vec{e}_y$ . On obtient donc :

$$\left[ m \frac{dV_1}{dt} = -k(y_1 - \ell_0) + i\ell B \right].$$



Sur le barreau (2), la résultante des forces de Laplace est  $\overline{R}_2 = -i\ell B\overline{e}_y$  et l'action du ressort est

traduite par la force  $\overline{F}_{2\text{ressort}} = -k(-y_2 - \ell_0)\overline{e}_y$ . Donc  $m\frac{dV_2}{dt} = +k(-y_2 - \ell_0) - i\ell B$ .

☛\* L'allongement du ressort est bien  $\Delta l = -y_2 - \ell_0$  puisque  $y_2$  est négatif sur le schéma. D'autre part, quand le ressort est allongé, la force qu'il exerce est visiblement dirigée suivant les  $y$  positifs. La difficulté provient du choix peu intuitif (mais formateur !) des abscisses  $y_1$  et  $y_2$ .

2. On élimine l'intensité  $i$  dans les deux équations mécaniques en utilisant l'équation électrique

$$i = \frac{B\ell}{R}(V_2 - V_1) :$$

$$m\frac{dV_1}{dt} = -k(y_1 - \ell_0) + \frac{B^2\ell^2}{R}(V_2 - V_1) \quad \text{et} \quad m\frac{dV_2}{dt} = +k(-y_2 - \ell_0) - \frac{B^2\ell^2}{R}(V_2 - V_1).$$

3. On fait la somme et la différence des deux équations précédentes :

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = -kS \quad \text{et} \quad m\frac{d^2D}{dt^2} = -kD - \frac{B^2\ell^2}{R}\frac{dD}{dt}.$$

4. La solution de l'équation pour  $S(t)$  est de la forme :  $S(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ . Les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  s'obtiennent en utilisant les conditions initiales  $S(0) = a$  et

$\frac{dS}{dt}(0) = 0$ , ce qui conduit à  $B = 0$  et  $A = a$  :  $S(t) = a\cos(\omega t)$ . L'équation vérifiée par  $D(t)$

est une équation du second ordre amortie de la forme :  $\frac{d^2D}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\frac{dD}{dt} + \omega_0^2D = 0$ .

La nature précise de la solution dépend du signe du discriminant réduit  $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ .

Si  $\Delta' < 0$ , le régime est pseudo-périodique amorti. Si  $\Delta' = 0$  (cas théorique), le régime est critique. Si  $\Delta' > 0$ , le régime est aperiodique.

Dans tous les cas,  $D(t)$  tend vers 0. Au bout d'un temps suffisant, on a donc  $y_1(t) \approx y_2(t)$  et

comme  $S(t) = y_1(t) + y_2(t) = a\cos(\omega t)$ , il vient :  $y_1(t) \approx y_2(t) \approx \frac{a}{2}\cos(\omega t)$ . En régime

permanent, les deux barreaux ont des mouvements identiques, si bien que le flux à travers le circuit ne varie plus : la loi de Lenz est bien vérifiée !

5. Pour un système masse-ressort d'amplitude maximale  $x_0$ , l'énergie mécanique est

$E_m = \frac{1}{2}kx_0^2$ . L'énergie mécanique initiale est donc :  $E_{m\text{ initiale}} = \frac{1}{2}ka^2$ . L'énergie mécanique

une fois le régime permanent atteint est :  $E_{m\text{ finale}} = \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\right)^2$  soit  $E_{m\text{ finale}} = \frac{1}{4}ka^2$ .

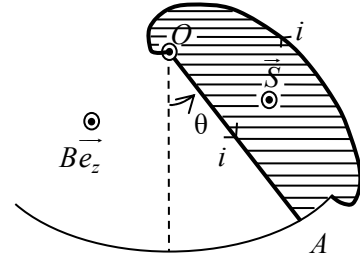
L'énergie mécanique manquante  $E_{m\text{ finale}} - E_{m\text{ initiale}} = \frac{1}{4}ka^2 - \frac{1}{2}ka^2 = -\frac{1}{4}ka^2$  a été transformée

par effet Joule, dans la résistance  $R$ , en énergie interne de la résistance et en transfert thermique fourni à l'extérieur.

## Exercice 22.11

1. Comme toujours, il faut commencer par introduire l'intensité  $i$  qui circule et choisir un sens positif. On choisit (par exemple !) le sens positif indiqué sur le schéma ci-après. Pour obtenir l'équation électrique, il faut calculer la FÉM induite. On utilise la loi de Faraday.

Avec le sens positif choisi, la normale à la surface plane qui s'appuie sur le circuit est  $\vec{n} = \vec{e}_z$  et le flux du champ magnétique s'écrit, comme  $\vec{B}$  est uniforme :  $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$  avec  $\vec{S} = S \vec{e}_z$  si  $S$  est l'aire hachurée sur le schéma.



En notant  $S_0$  est l'aire limitée par l'axe vertical en pointillé et le circuit fixe, on a algébriquement :  $S = S_0 - \frac{1}{2} a^2 \theta$ , car  $\frac{1}{2} a^2 \theta$  est l'aire limitée par le secteur circulaire d'angle  $\theta$ .

Le flux est finalement :  $\Phi = B \left( S_0 - \frac{1}{2} a^2 \theta \right)$ . La loi de Faraday conduit à :

$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = +\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt}$ . Le schéma électrique équivalent est du même type que celui des

exercices précédents. Il conduit à l'équation électrique habituelle :  $e_{\text{ind}} = +\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt} = Ri$ .

Il reste à obtenir l'autre équation électromécanique. Pour cela, on applique le théorème du moment cinétique en projection suivant  $(Oz)$ . Comme la liaison est pivot parfaite, le moment en projection suivant  $(Oz)$  des actions de liaison est nul. Il en va de même pour les actions associées au contact glissant en  $A$ , supposé ponctuel et sans frottement. Les seuls moments à prendre en compte sont ceux du poids et des forces de Laplace.

Pour le poids, on sait qu'il est équivalent à une force ponctuelle unique appliquée au centre de gravité :  $\vec{M}_{O \text{ poids}} = \vec{OG} \wedge m \vec{g} = \frac{a}{2} \vec{e}_r \wedge mg (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta) = -mg \frac{a}{2} \sin(\theta) \vec{e}_z$ .

En projection suivant  $(Oz)$  :  $M_{(Oz) \text{ poids}} = -mg \frac{a}{2} \sin \theta$ . Le moment des forces de Laplace nécessite a priori de revenir à la définition du moment d'un système de force :

$$\vec{M}_{O \text{ Laplace}} = \int_O^A \vec{OP} \wedge d\vec{f}(P) \text{ avec } d\vec{f} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}.$$

En coordonnées cylindriques :  $d\vec{f} = i dr \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z = -i B dr \vec{e}_\theta$  et donc :

$$\vec{M}_{O \text{ Laplace}} = \int_0^a r \vec{e}_r \wedge (-i B dr \vec{e}_\theta) = -i B \vec{e}_z \int_0^a r dr = -i B \frac{a^2}{2} \vec{e}_z.$$

Et en projection suivant  $(Oz)$  :  $M_{(Oz) \text{ Laplace}} = -i B \frac{a^2}{2}$ .

✍ On remarque que le moment précédent aurait pu s'obtenir en considérant que l'on a affaire à une force ponctuelle égale à la résultante des forces de Laplace

$$\vec{R}_{\text{Laplace}} = \int_0^A d\vec{f} = -i l B \vec{e}_0, \text{ appliquée au centre de gravité de la tige. C'était}$$

prévisible car la force de Laplace est ici répartie uniformément le long de la tige. Mais ce résultat n'est pas général. Il est donc prudent de savoir calculer le moment des forces à partir de sa définition !

Le théorème du moment cinétique en projection suivant ( $Oz$ ) s'écrit alors :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = M_{(Oz)} = -mg \frac{a}{2} \sin \theta - i B \frac{a^2}{2}. \text{ En remplaçant l'expression de } i \text{ obtenue avec l'équation}$$

$$\text{électrique, } i = + \frac{1}{2R} B a^2 \frac{d\theta}{dt}, \text{ il vient finalement : } \boxed{J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \frac{a}{2} \sin \theta - \frac{B^2 a^4}{4R} \frac{d\theta}{dt}}.$$

On voit que les courants induits se traduisent par un terme de freinage proportionnel à la vitesse angulaire. C'est un cas classique de freinage par induction.

**2.** Si l'on se limite à de petites oscillations autour de  $\theta = 0$ , on peut linéariser le sinus en

$$\sin(\theta) \approx \theta \text{ et on est conduit à l'équation linéaire du second ordre : } \boxed{\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{B^2 a^4}{4RJ} \frac{d\theta}{dt} + \frac{mga}{2J} \theta = 0}.$$

La forme des solutions dépend du signe du discriminant  $\Delta = \left(\frac{B^2 a^4}{4RJ}\right)^2 - 4 \frac{mga}{2J}$ . La limite entre

le régime oscillant et le régime apériodique correspond au régime (apériodique) critique, pour

lequel on a un retour le plus rapide possible sans oscillation :  $\Delta = \left(\frac{B_{\min}^2 a^4}{4RJ}\right)^2 - 4 \frac{mga}{2J} = 0$ , ce qui

$$\text{donne la valeur } \boxed{B_{\min} = \sqrt{\frac{8R}{a^4} \sqrt{\frac{mgaJ}{2}}}}.$$

**3.** L'énergie mécanique du pendule est dissipée par l'effet Joule (c'est-à-dire transformée en

transfert thermique et en énergie interne). On doit donc avoir :  $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = -Ri^2}$ . L'expression de

l'énergie mécanique est  $E_m = E_c + E_p$  avec  $E_c = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$  et  $E_p = mg \frac{a}{2} (1 - \cos \theta)$ , en prenant

l'origine de l'énergie potentielle en  $\theta = 0$ , donc  $E_m = \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg \frac{a}{2} (1 - \cos \theta)$  et

$$\frac{dE_m}{dt} = J \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \frac{a}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}. \text{ L'équation qui traduit le théorème du moment cinétique en}$$

$$\text{projection suivant } (Oz) \text{ multipliée par } \frac{d\theta}{dt} \text{ conduit à : } J \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + mg \frac{a}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -i B \frac{a^2}{2} \frac{d\theta}{dt}.$$

Et l'équation électrique  $\frac{1}{2} B a^2 \frac{d\theta}{dt} = Ri$  donne immédiatement le résultat attendu.





# Introduction à la physique quantique

UN SCIENTIFIQUE



Historien de formation, **LOUIS DE BROGLIE** (1892-1987) se tourne vers la physique au début des années 1910, sous l'impulsion de son frère Maurice qui dirige à Paris un laboratoire de rayons X. Il étudie la mobilité des ions et l'électrisation des particules fines de matière.

Il révolutionne la perception de la matière en affirmant que « *non seulement les photons de lumière mais toutes les autres particules de la matière, comme les électrons, sont accompagnés d'une onde.* »

## ■ Un peu d'histoire

La description adéquate du monde microscopique date seulement du tout début du  $xx^e$  siècle. Max PLANCK, lors de son travail sur les corps noirs, puis Albert EINSTEIN, avec son interprétation de l'effet photoélectrique, ont montré la nature corpusculaire de la lumière en mettant en évidence des « grains d'énergie », appelés plus tard *photons* par Gilbert LEWIS. LOUIS DE BROGLIE a mis en évidence en 1923 la double nature de la matière, qui peut se concevoir, elle aussi, comme une onde. Peu après, Werner HEISENBERG énonce en 1927 le principe d'incertitude suivant lequel on ne peut connaître précisément la position exacte et la vitesse d'une particule. En un quart de siècle, ce monde de l'infiniment petit a dévoilé des propriétés très différentes des concepts physiques connus et de nombreuses propriétés se sont révélées peu intuitives, mais parfaitement en accord avec les observations expérimentales.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les relations de Planck–Einstein et de Louis de Broglie exprimant la dualité onde/corpuscule pour la lumière et la matière
- ▷ L'interprétation probabiliste associée à la fonction d'onde
- ▷ La quantification de l'énergie dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène et dans le puits de potentiel unidimensionnel de profondeur infinie
- ▷ L'inégalité de Heisenberg spatiale (en ordre de grandeur)

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon
- ▷ Décrire un exemple d'expérience illustrant la notion d'ondes de matière
- ▷ Évaluer des ordres de grandeur typiques dans des phénomènes quantiques
- ▷ Interpréter une expérience d'interférences (matière ou lumière) « particule par particule » en termes probabilistes
- ▷ Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr en exploitant la quantification du moment cinétique
- ▷ Obtenir les niveaux d'énergie d'une particule libre confinée en une dimension par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante
- ▷ Établir l'inégalité de Heisenberg spatiale en ordre de grandeur par analogie avec la diffraction des ondes lumineuses
- ▷ Exploiter l'inégalité de Heisenberg pour mettre en évidence l'existence d'une énergie minimale de confinement
- ▷ Établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Dualité onde/corpuscule de la lumière et de la matière

### □ Dualité du comportement de la lumière : relations de Planck–Einstein

Albert EINSTEIN a mis en évidence que lors de l'interaction de la lumière avec la matière, un rayonnement de fréquence  $\nu$  et de longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , se comporte comme s'il était constitué de « grains d'énergie » appelés **photons** et possédant les propriétés suivantes :

– ce sont des particules de masse nulle, de charge nulle, se déplaçant dans le vide à la vitesse  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

– ils possèdent une **énergie**  $E = h\nu$  et une **quantité de mouvement**  $\vec{p} = \hbar \vec{k} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}$  avec  $\vec{k}$  le vecteur d'onde orienté par vecteur unitaire  $\vec{e}$  donnant le sens de propagation de la lumière,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la **constante de Planck** et  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  la constante de Planck réduite.

### □ Dualité du comportement de la matière : relation de Louis de Broglie

Louis DE BROGLIE a postulé qu'à toute particule matérielle de quantité de mouvement de norme  $p$ , on peut associer une **onde de matière** de longueur d'onde  $\lambda = \frac{h}{p}$ .

⇒ Méthode 23.1. Évaluer des ordres de grandeur de longueurs d'onde de De Broglie

## ■ La fonction d'onde et son interprétation probabiliste

### □ Fonction d'onde

La description complète de l'état d'une particule dans l'espace à l'instant  $t$  se fait à l'aide d'une **fonction d'onde** complexe  $\psi(x, y, z, t)$ , continue par rapport aux variables d'espace.

### □ Interprétation probabiliste de la fonction d'onde

La fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$  correspond à une amplitude de probabilité de présence. Plus précisément, la **probabilité** de trouver la particule dans un volume élémentaire  $d^3\tau = dx dy dz$  autour d'un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est donnée par  $d^3P = |\psi|^2 d^3\tau$ . La particule étant avec certitude dans tout l'espace, on a donc  $\iiint |\psi|^2 d^3\tau = 1$  (fonction d'onde « normée »).

La fonction d'onde contenant toute l'information disponible, le caractère probabiliste et aléatoire ne résulte pas d'une mauvaise connaissance initiale du système, mais fait partie intégrante du formalisme quantique.

⇒ **Méthode 23.2.** Interpréter une expérience d'interférences « particule par particule » en termes probabilistes

## ■ Quantification de l'énergie

### □ Modèle de Bohr

Niels BOHR propose en 1913 un modèle planétaire semi-classique de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron est en orbite autour du noyau. Le modèle repose sur trois grandes hypothèses :

- il existe des orbites circulaires stables sur lesquelles l'électron ne rayonne pas d'énergie ;
- l'électron peut passer d'une orbite stable à une autre par absorption ou émission d'un photon ;
- la norme du moment cinétique orbital de l'électron est quantifiée :  $\| \overline{L_O}(M) \| = n\hbar \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ .

Le succès de ce modèle tient principalement au fait qu'il rend compte de manière satisfaisante de la quantification de l'énergie dans l'atome d'hydrogène. Cependant, il échoue sur les atomes polyélectroniques. En outre, par son nombre important d'hypothèses, il soulève de nombreuses questions auxquelles seul l'avènement de la mécanique quantique permettra de répondre de manière claire.

⇒ **Méthode 23.3.** Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène

### □ Lien entre confinement spatial et quantification de l'énergie

Dans le cadre de la mécanique quantique, on montre que le **confinement spatial** d'une particule entraîne une **quantification de son énergie**. Qualitativement, cette quantification est associée à un phénomène d'ondes stationnaires apparaissant sous l'effet de conditions aux limites particulières (annulation, périodicité...) sur la densité de probabilité de présence  $|\psi|^2$ .

⇒ **Méthode 23.4.** Obtenir les niveaux d'énergie d'une particule libre confinée 1D par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante

## ■ Inégalité de Heisenberg spatiale

Il est impossible de connaître simultanément, avec une précision aussi grande qu'on le souhaite, la position et la quantité de mouvement (ou impulsion) d'une particule.

Pour un problème caractérisé par une unique variable  $x$ , les incertitudes  $\Delta x$  sur la position et  $\Delta p_x$  sur la quantité de mouvement vérifient l'**inégalité de Heisenberg** :

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}.$$

En pratique, on utilisera souvent l'**inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur** :

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar.$$

Cette relation ne correspond pas à une limitation due à la résolution des appareils de mesure (largeur des canaux des histogrammes par exemple), mais elle est une conséquence de la nature intrinsèquement quantique des particules.

- ⇒ **Méthode 23.5.** Établir l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur à l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses
- ⇒ **Méthode 23.6.** Évaluer l'énergie minimale d'une particule confinée

## ■ Comment déterminer si un objet a un comportement quantique observable ?

### □ Méthode 23.1. Évaluer des ordres de grandeur de longueurs d'onde de De Broglie

On relie tout d'abord la quantité de mouvement  $p$  aux données du problème :

– pour une particule non relativiste (c'est-à-dire de vitesse  $v$  telle que  $(v/c)^2 \ll 1$ ),

$$p = mv = \sqrt{2mE_c} \quad \text{où } E_c \text{ est son énergie cinétique ;}$$

– pour une particule libre relativiste d'énergie totale  $E$  et de masse au repos  $m$ ,

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = E_c + mc^2.$$

Puis on utilise la relation de Louis de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$ .

⇒ Exercices 23.2, 23.3, 23.4, 23.6

– Déterminer la longueur d'onde d'une personne de 50 kilogrammes se déplaçant à la vitesse de 1,0 mètre par seconde. Observera-t-on un phénomène d'interférences avec un flot d'individus se précipitant vers les deux portes d'entrée (situées sur la même façade) d'un grand magasin un jour de soldes ?

La longueur d'onde est donnée par  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ . AN  $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ . Cette longueur d'onde

est infiniment plus petite que toutes les dimensions des objets macroscopiques de notre quotidien : le caractère ondulatoire d'un individu n'est en pratique jamais observé.

– Déterminer de même la longueur d'onde d'un neutron de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ , d'énergie cinétique égale à 0,00843 eV. Justifier que l'on peut observer le comportement ondulatoire de ces neutrons en les envoyant sur un cristal dont les atomes sont distants de  $a = 398 \text{ pm}$ .

La longueur d'onde est :  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$ . AN  $\lambda = 3,12 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 312 \text{ pm}$ , sachant que

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

La longueur d'onde  $\lambda$  du neutron et les distances interatomiques  $a$  dans le cristal sont du même ordre de grandeur avec  $\lambda \leq a$ . Le comportement ondulatoire peut donc se manifester à travers le phénomène de diffraction des neutrons par le cristal.

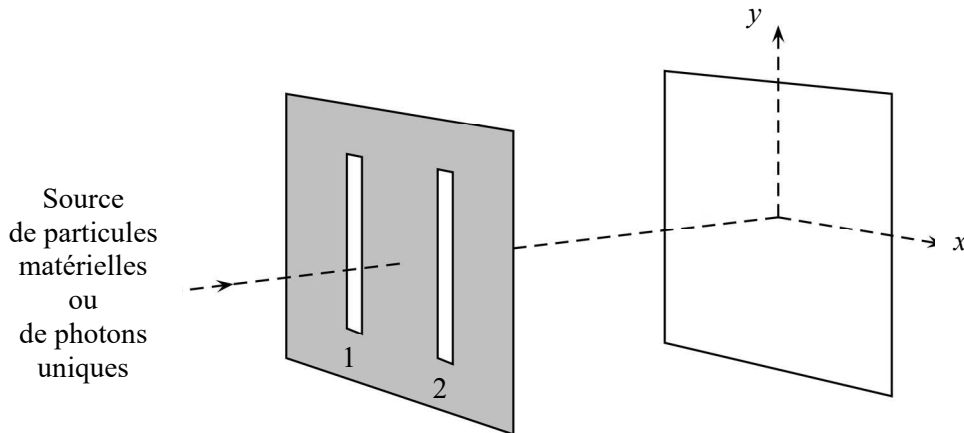
## ■ Comment utiliser la notion de fonction d'onde ?

### □ Méthode 23.2. Interpréter une expérience d'interférences « particule par particule » en termes probabilistes

L'analyse d'une expérience d'interférences quantiques se fait au moyen de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$ .

⇒ Exercice 23.6

Supposons que des particules (photons ou particules matérielles), toutes préparées dans le même état quantique, sont envoyées une par une sur un dispositif interférentiel de type fentes de Young. Après les fentes, on place un détecteur de particules (figure ci-dessous). Les résultats obtenus pour différentes expériences sont résumés dans le tableau page suivante.



#### – Dualité onde/corpuscule

Chaque particule individuelle allume un seul pixel de l'écran : *elle se comporte donc comme un corpuscule* (expériences *a*, *b* et *c*). Quand on répète l'expérience avec un grand nombre de particules, toutes préparées dans le même état, le *comportement ondulatoire* se révèle avec la présence de franges d'interférences (expérience *b*). On retrouve le fait que la particule est à la fois une onde et un corpuscule.

*✎ Le comportement ondulatoire est ici indiscutable dans la mesure où la figure d'interférences obtenue sur l'écran quand les deux fentes sont ouvertes ne se réduit pas à la superposition des deux figures obtenues quand une seule des deux fentes est successivement ouverte (expérience *b* pour les interférences et expérience *c* pour les figures de diffraction, centrées respectivement sur les fentes 1 et 2).*



Deux fentes ouvertes et $N \approx$ quelques unités	Deux fentes ouvertes et $N \gg 1$	Une seule fente ouverte et $N \gg 1$
Expérience <i>a</i>	Expérience <i>b</i>	Expérience <i>c</i>

– Analyse en termes probabilistes

Le point d'impact est *aléatoire*, c'est-à-dire que pour des particules préparées toutes dans le même état, on ne peut pas prévoir à l'avance la position du pixel qui sera allumé sur le détecteur.

Mais si on fait une mesure de la position de chaque particule avec un détecteur de résolution spatiale  $\delta x$  (largeur d'un canal), à condition de répéter l'expérience un grand nombre de fois, l'histogramme des résultats représentant le nombre  $n_i$  de particules (sur un total de  $N$ ) détectées dans chaque canal  $i$  présente une forme caractéristique, qui n'est autre que celle de la *densité de probabilité de présence*  $|\psi(x,t)|^2$  (expériences *b* et *c*).

*✎* Si  $\psi_1(x,t)$  et  $\psi_2(x,t)$  sont les fonctions d'ondes correspondant aux particules dans les configurations où respectivement seules les fentes 1 et 2 sont ouvertes, la mécanique quantique prévoit que pour les deux fentes ouvertes simultanément  $\psi(x,t) \propto \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$  (principe de superposition); on en déduit la relation entre les densités de probabilité de présence :

$$|\psi(x,t)|^2 \propto |\psi_1(x,t)|^2 + |\psi_2(x,t)|^2 + \text{terme d'interférences.}$$

## ■ Comment obtenir les niveaux d'énergie électroniques de différents édifices quantiques ?

### □ Méthode 23.3. Obtenir les niveaux d'énergie électroniques de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr

- On commence par exprimer l'accélération de l'électron, en mouvement circulaire de rayon  $r$  à la vitesse  $v$  autour du proton, dans la base polaire (ou dans la base de Frenet).
- On applique le PFD à l'électron et on le projette sur cette base, ce qui permet de relier la norme  $v$  de la vitesse au rayon  $r$  de la trajectoire.
- La relation de quantification du moment cinétique fournit une autre relation entre  $r$  et  $v$ .
- Finalement, les expressions classiques des énergies cinétique et potentielle conduisent à l'expression des niveaux d'énergie.

⇒ Exercice 23.7

- L'accélération de l'électron  $M$  en mouvement circulaire de rayon  $r$  et de vitesse  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  s'écrit, dans la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  centrée sur le proton :  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta$ .
- Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel galiléen lié au proton s'écrit :  $m_e\vec{a} = \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ . La projection sur  $\vec{e}_\theta$  conduit à  $\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cte}$  : le mouvement de l'électron est uniforme. La projection sur  $\vec{e}_r$  est  $m_e\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  d'où  $v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}$  (1).
- Par ailleurs, la norme du moment cinétique orbital de l'électron s'écrit :  $\|\vec{L}_O(M)\| = \|\vec{OM} \wedge m_e\vec{v}\| = \|r\vec{e}_r \wedge m_e v\vec{e}_\theta\| = m_e r v$  d'où  $m_e r v = n\hbar$  (2) avec  $n \in \mathbb{N}^*$  d'après l'hypothèse de Bohr.

On identifie  $v^2$  dans les expressions (1) et (2) :  $\frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}$  d'où  $r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{m_e e^2}$  (3).

- L'énergie totale (mécanique) est  $E = E_c + E_p$  avec  $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2$  et  $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ . Cela

donne, en exploitant l'expression (1) :  $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ .

- En utilisant finalement la relation (3) :  $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2} \right) = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$  ou encore,

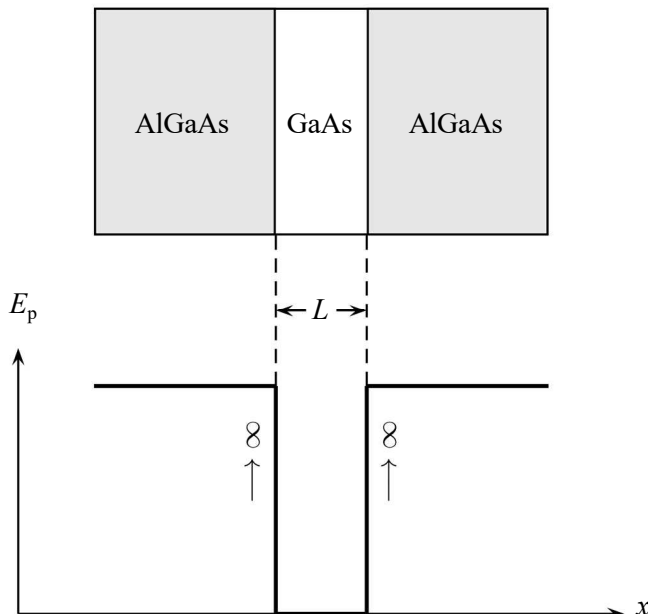
avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $E = E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

□ **Méthode 23.4. Obtenir les niveaux d'énergie d'une particule libre confinée 1D par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante**

L'énergie totale  $E$  d'une particule libre (non soumise à un potentiel) se réduit à son énergie cinétique  $E = E_c = \frac{p^2}{2m}$ . En utilisant la relation de Louis de Broglie  $p = \frac{h}{\lambda}$ , on obtient  $E = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$ . Les niveaux d'énergie d'une particule libre confinée sont alors obtenus, par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, en supposant que les conditions aux limites imposées par le confinement sur une largeur  $L$  sont à l'origine de l'apparition d'ondes stationnaires de longueurs d'onde  $\lambda$  telles que  $L = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

⇒ Exercice 23.8, 23.9, 23.10

Un électron de conduction est confiné dans une couche de GaAs (arséniure de gallium) de largeur  $L$  entourée de deux couches de AlGaAs (arséniure d'aluminium et de gallium). On suppose qu'il « ressent » une énergie potentielle nulle tant qu'il reste dans la couche de GaAs, et une énergie potentielle qui tend vers l'infini sinon (modèle du puits quantique infini). Donner les niveaux d'énergie de cet électron libre.



L'énergie totale  $E$  de l'électron libre confiné est égale à son énergie cinétique ( $E_p = 0$ ) d'où

$$E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

En supposant la présence d'ondes stationnaires à l'intérieur du puits,

on a  $L = n \frac{\lambda}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), d'où

$$E = E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

On constate que le confinement spatial a conduit à une quantification de l'énergie.

## ■ Comment établir et exploiter l'inégalité de Heisenberg spatiale ?

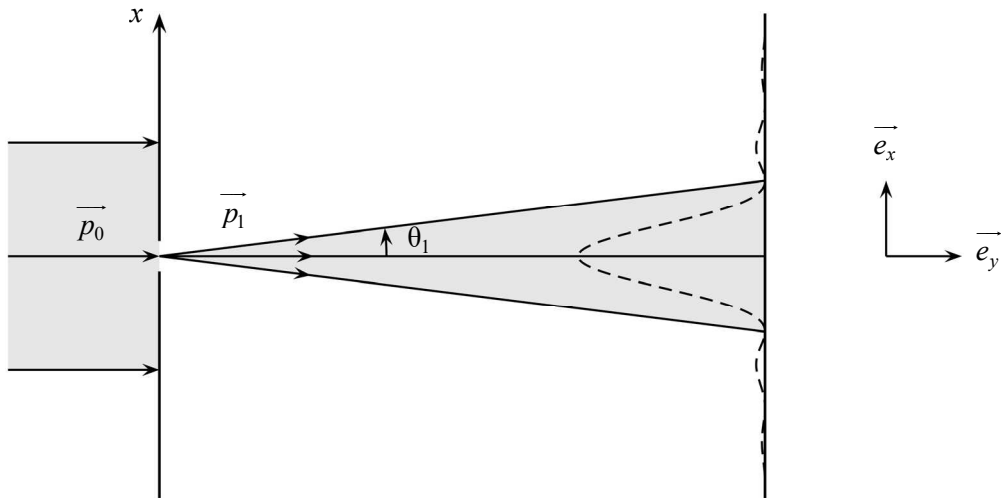
### □ Méthode 23.5. Établir l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur à l'aide d'une analogie avec la diffraction des ondes lumineuses

On exprime la demi-largeur angulaire  $\theta_1$  de la tache centrale de diffraction :

- en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  et de la largeur  $a = \Delta x$  de la fente diffractante (aspect ondulatoire) dans l'approximation des petits angles ;
- en fonction de la quantité de mouvement incidente  $\vec{p}$  du photon et de la variation  $\Delta p_x$  de sa composante sur  $\vec{e}_x$  due au passage par la fente (aspect corpusculaire).

On identifie ensuite ces deux expressions de  $\theta_1$  et on utilise la relation de Louis de Broglie pour éliminer  $\lambda$ .

⇒ Exercice 23.11



Considérons un faisceau lumineux arrivant sur une plaque percée d'une fente de largeur  $a$ . Expérimentalement, on observe l'apparition d'une figure de diffraction sur un écran placé derrière la fente. La demi-largeur angulaire  $\theta_1$  de la tache centrale est donnée, d'après la théorie ondulatoire, par la relation  $\sin \theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$  (1) pour  $\theta_1$  suffisamment petit. En utilisant des considérations corpusculaires, le passage d'un photon dans la fente, en changeant sa direction, provoque une variation de sa quantité de mouvement : dans le faisceau incident, elle est donnée par  $\vec{p}_0 = p \vec{e}_y$  ; dans le faisceau émergent, sur les bords de tache centrale, elle s'écrit  $\vec{p}_1 = p \vec{e}$  avec  $\vec{e} = \cos \theta_1 \vec{e}_y + \sin \theta_1 \vec{e}_x$ . Dans ce cas, la composante de la quantité de mouvement selon  $\vec{e}_x$  a varié au passage de la fente de  $\Delta p_x = p_{x1} - p_{x0} = p \sin \theta_1$  ; on a donc  $\sin \theta_1 = \frac{\Delta p_x}{p}$  (2).

De plus, le passage d'un photon dans la fente correspond à une incertitude  $\Delta x = a$  sur sa position dans la direction des  $x$ . En identifiant les relations (1) et (2), on obtient  $\frac{\Delta p_x}{p} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$ .

Finalement, en utilisant la relation de Louis de Broglie  $p = \frac{h}{\lambda}$ , on aboutit à l'inégalité de Heisenberg spatiale en ordres de grandeur (avec  $h$  au lieu de  $\hbar = h/2\pi$ ) :  $\boxed{\Delta x \Delta p_x \approx h}$ .

### □ Méthode 23.6. Évaluer l'énergie minimale d'une particule confinée

Pour une particule confinée dans une région d'extension spatiale  $\Delta x = a$  :

- l'inégalité de Heisenberg implique que l'énergie cinétique d'une particule de quantité de mouvement moyenne nulle ne peut pas être inférieure à une certaine valeur (qui est d'autant plus élevée que  $a$  est plus petit), soit  $E_c \geq E_{c,\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$  ;
- l'énergie potentielle est de l'ordre de  $E_p(a)$ .

L'énergie totale est donc inférieure ou égale à  $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + E_p(a)$ . Dans le cas

particulier où  $E_p(a) = 0$ , on obtient directement  $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ . Dans le cas

général, on détermine la valeur  $a_1$  de  $a$  qui rend cette fonction minimale ; on obtient alors l'énergie minimale  $E_{\min}(a_1)$  du système quantique étudié compatible avec la relation de Heisenberg.

⇒ Exercice 23.12

- Énergie cinétique :  $E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} = E_{c,\min}$ .

L'égalité s'explique ainsi :  $p = \langle p \rangle + \Delta p = \Delta p$  dans le cas où la quantité de mouvement moyenne  $\langle p \rangle$  est nulle. L'inégalité est une conséquence de la relation de Heisenberg spatiale en ordre de grandeur  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{a}$ .

- Déterminons par exemple l'énergie minimale de confinement d'une particule libre dans un puits quantique infini unidimensionnel de largeur  $a$ .

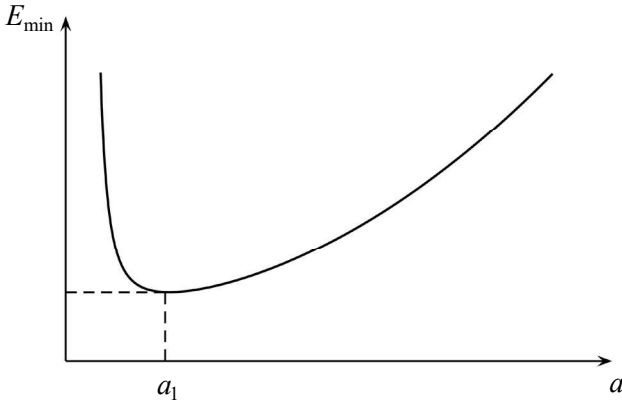
Comme  $E_p(a) = 0$ , on a  $E_{\min} = E_{c,\min}$ , soit  $\boxed{E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}}$ . Pour  $n=1$  et en posant  $a = L$ , la

formule  $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}$  établie dans la méthode 23.4 donne le même ordre de grandeur.

– Déterminons maintenant l'énergie minimale d'un oscillateur harmonique quantique à une dimension, d'énergie potentielle  $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ .

Énergie cinétique (avec ici  $\langle p \rangle = 0$ ) :  $E_c \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} = E_{c,\min}$ . Énergie potentielle :  $E_p \approx \frac{1}{2}m\omega^2a^2$ .

Énergie totale minimale :  $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2}m\omega^2a^2$ . Comme le montre le graphe suivant, cette fonction présente un minimum pour une certaine valeur  $a_1$  de  $a$ .



$$\frac{dE_{\min}}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + m\omega^2a \quad \text{s'annule pour}$$

$$a = a_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

On en déduit l'énergie minimale du système compatible avec la relation de Heisenberg :  $E_{\min}(a_1) = \hbar\omega$ .

## ■ ■ Vrai/Faux

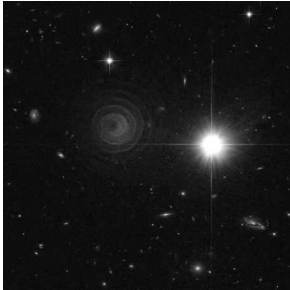
	Vrai	Faux
1. Plus la longueur d'onde d'un photon diminue, plus l'énergie qu'il transporte augmente.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. La masse d'un photon étant nulle, sa quantité de mouvement l'est également.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Si on multiplie par deux la vitesse d'un électron non relativiste, on divise par deux sa longueur d'onde.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. La dimension du produit d'une quantité de mouvement par une longueur est la même que la dimension du produit d'une énergie par un temps.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. La fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$ représente la probabilité de trouver la particule en $(x, y, z)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. Dans une expérience d'interférences quantiques, des particules préparées de manière rigoureusement identiques ne seront pas forcément détectées en un même point de l'écran après passage dans le dispositif interférentiel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Le caractère ondulatoire d'une particule ne peut être révélé dans une expérience d'interférences quantiques que si le nombre de particules envoyées sur le dispositif interférentiel est suffisamment grand.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. On peut choisir arbitrairement l'énergie totale d'une particule libre confinée à une dimension.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. L'énergie totale d'une particule libre confinée à une dimension peut être égale à zéro.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. En mécanique quantique, plus on confine une particule dans un espace de petite dimension, plus on augmente son énergie cinétique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

# ■ ■ Énoncé des exercices

## ■ Dualité onde/corpuscule

### □ Exercice 23.1. Flux de photons d'une étoile

Une étoile émet un flux lumineux constant reçu sur Terre  $\phi = 1 \cdot 10^{-10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$  à une longueur d'onde moyenne de  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ . On donne  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la célérité de la lumière dans le vide et  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.



1. Calculer le nombre de photons traversant chaque seconde la pupille de l'œil de rayon  $r = 4 \text{ mm}$ .
2. Calculer la pression de radiation  $P = \frac{1}{S} \frac{N}{\Delta t} p$  exercée par ce flux constant issu de l'étoile sur la surface  $S$  de la pupille (supposée totalement absorbante), où  $p$  représente la quantité de mouvement d'un photon et  $N$  le nombre de photons arrivant sur la pupille durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

Calculer de même la pression de radiation  $P_{\odot}$  du Soleil, de flux sur Terre  $\phi_{\odot} = 1 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ . Comparer ces résultats à la pression atmosphérique  $P_{\text{atm}} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

### □ Exercice 23.2. Des neutrons pour la recherche

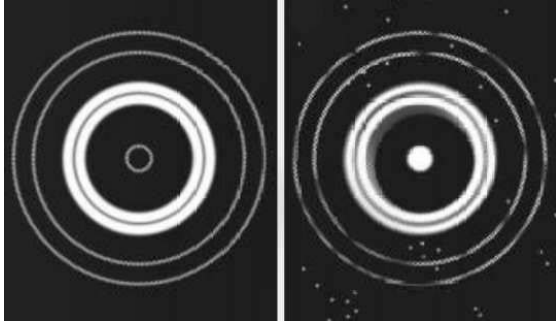
Le réacteur haut flux de l'institut Laue-Langevin de Grenoble produit un flux de neutrons très intense grâce à la fission d'uranium enrichi. À proximité du cœur du réacteur, ces neutrons sont ralentis par refroidissement dans différents dispositifs. En particulier, une sphère de graphite maintenue à  $T_c = 2,00 \cdot 10^3 \text{ K}$  produit des neutrons « chauds » et une sphère de deutérium à  $T_f = 20,0 \text{ K}$  constitue une source de neutrons « froids ». La relation thermodynamique définissant la température  $T$  à partir de l'énergie cinétique de translation est  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ , avec  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante de Boltzmann et  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  la masse des neutrons en mouvement à la vitesse  $v$ . On donne  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.

1. Déterminer les vitesses des neutrons « chauds » et « froids », notées respectivement  $v_c$  et  $v_f$ . Justifier que ces derniers peuvent être considérés comme non relativistes.
2. Calculer les longueurs d'ondes de ces neutrons. Laquelle des deux sources est la mieux adaptée pour étudier la formation de gouttelettes micrométrique d'anéthol (huile essentielle issue de l'anis étoilé) en suspension dans un mélange eau-alcool ?



### □ Exercice 23.3. Expérience de G. P. Thomson

En 1927, les physiciens américains DAVISSON et GERMER fournissaient la preuve expérimentale de l'hypothèse de Louis DE BROGLIE en mettant en évidence le phénomène de diffraction d'électrons sur un échantillon monocristallin de nickel. Quelques mois plus tard, le Britannique G. P. THOMSON confirmait ce résultat en faisant passer un faisceau d'électrons monocinétique à travers une mince feuille de métal. Avec des électrons accélérés par une tension de l'ordre de la dizaine de kilovolts (kV), il obtint sur une plaque photographique placée derrière la cible une figure de diffraction identique à celle observée avec des rayons X de même énergie.



La figure ci-contre représente les anneaux concentriques obtenus par diffraction sur un mince feuillet métallique :

- de rayons X (à gauche) ;
- d'électrons (à droite).

1. En quoi l'expérience de G. P. Thomson confirma-t-elle la nature ondulatoire des électrons ?
2. Donner l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des rayons X. L'utilisation de ces derniers vous semble-t-elle adaptée pour mener une étude cristallographique par diffraction ?
3. Soumis à une différence de potentiel  $U > 0$ , un électron de charge  $q = -e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et de masse  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , initialement au repos acquiert une énergie cinétique égale à  $eU$ . Établir la relation numérique approchée  $\lambda \approx \frac{1,23}{\sqrt{U}} \text{ nm}$  où  $U$  est la tension accélératrice en volts (V). En déduire la longueur d'onde des électrons utilisés par Thomson. Commenter. On donne  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.

### □ Exercice 23.4. Microscope électronique à balayage

Le pouvoir de résolution d'un microscope, c'est-à-dire la taille caractéristique des plus petits détails qu'il permet d'observer, est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde utilisée. On donne  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.

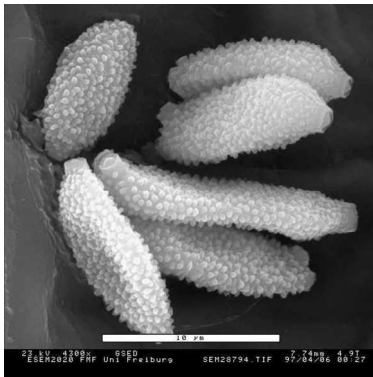


Image de Y. & R. Thomann

1. Quel est le phénomène qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope ?
2. Rappeler les valeurs des longueurs d'ondes extrêmes (dans le vide) du spectre visible et déterminer les énergies en eV des photons correspondants.
3. La taille des grains de pollen d'orchidée dont l'image est fournie ci-contre est de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ .
  - a) Expliquer pourquoi cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique, sachant qu'en grossissant l'image ci-contre, on peut observer des détails 100 fois plus petits que la taille des grains de pollen.

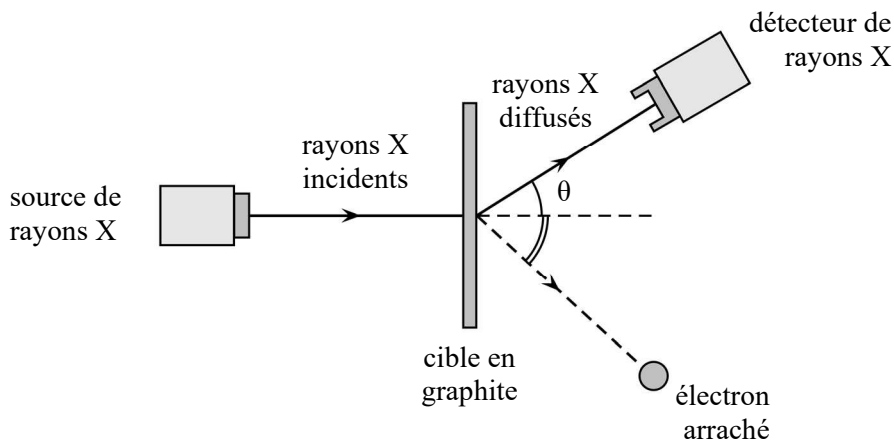
b) Cette image a été obtenue à l'aide d'un microscope électronique à balayage (MEB), dans lequel un faisceau d'électrons est envoyé sur l'échantillon à analyser. Après interaction avec la matière, ces électrons sont récupérés par des capteurs dont les informations permettent de reconstruire l'image. Évaluer l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique minimale des électrons qui ont été utilisés pour obtenir ce « cliché ». On donne  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg la masse de l'électron.

### □ Exercice 23.5. Effet Compton \*

La nature corpusculaire des rayonnements électromagnétiques, et en particulier l'existence d'un quantum d'énergie, le photon, doté d'une énergie et d'une quantité de mouvement bien définies, a été mise en évidence expérimentalement en 1922 par le physicien américain Arthur COMPTON. Dans son expérience de diffusion schématisée ci-dessous, il bombarde une mince feuille de graphite avec des rayons X. Derrière cette cible, il place un détecteur de rayons X qu'il peut faire tourner d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction des rayons incidents. Il constate alors que des électrons sont arrachés de la cible. De plus, il observe que les rayons X incidents sont diffusés dans toutes les directions avec une longueur d'onde  $\lambda'$ , fonction de l'angle  $\theta$ , différente de leur longueur d'onde incidente  $\lambda$ . Il justifie plus tard ses observations dans le cadre d'un modèle théorique de collision relativiste entre un photon incident et un électron « libre », supposé initialement immobile et faiblement lié aux atomes de carbone dans la cible graphite. Il obtient ainsi la relation, conforme aux données expérimentales :

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

avec  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s la constante de Planck,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg la masse de l'électron et  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup> la célérité de la lumière dans le vide.



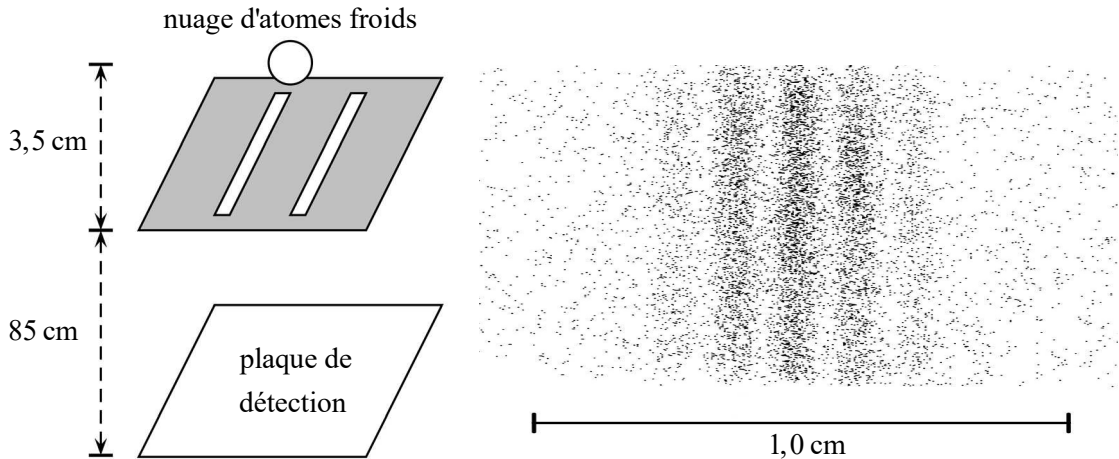
Pour démontrer l'expression précédente, on note  $\vec{p}$  la quantité de mouvement du photon avant le choc,  $\vec{p}'$  la quantité de mouvement du photon après le choc et  $\vec{p}_e$  la quantité de mouvement de l'électron après le choc. L'électron est supposé initialement immobile dans le référentiel de

la cible. De plus, ce dernier étant considéré relativiste dans l'expérience, son énergie totale est donnée par  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$ .

1. Exprimer la conservation de la quantité de mouvement du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
2. Exprimer de même la conservation de l'énergie totale du système {photon + électron} entre avant et après le choc.
3. Dédire des deux lois de conservation précédentes l'expression de la variation de longueur d'onde  $\lambda' - \lambda$  du photon X telle qu'obtenue par Compton, en fonction de  $h$ ,  $c$ ,  $m_e$  et  $\theta$ . Calculer  $\lambda' - \lambda$  pour un angle  $\theta = 30^\circ$ .

### □ Exercice 23.6. Expérience de Shimizu et Takuma

En 1992, les physiciens japonais SHIMIZU et TAKUMA réalisaient une expérience d'interférences atomiques : un nuage d'atomes de néon est lâché sans vitesse initiale à 3,5 cm au-dessus d'un écran percé de deux fentes parallèles, de largeur égale à 2,0  $\mu\text{m}$  et distantes de  $d = 6,0 \mu\text{m}$ . Les atomes sont alors détectés sur une plaque située à une distance  $D = 85 \text{ cm}$  à l'aplomb du plan des fentes. Chaque point noir sur la plaque réceptrice représente l'impact d'un atome (voir figure ci-dessous, à droite).



1. Comment se manifestent respectivement les caractères corpusculaire et ondulatoire des atomes de néon dans cette expérience ?
2. Déterminer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde  $\lambda$  des atomes de néon dans ce dispositif interférentiel. On donne l'expression de l'interfrange  $i$  dans une expérience de type fentes de Young avec écran à grande distance :  $i = \frac{\lambda D}{d}$ .
3. En déduire un ordre de grandeur de la vitesse  $v$  des atomes de néon au cours de leur chute. On donne  $\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  le nombre d'Avogadro,  $M = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire du néon et  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  la constante de Planck.

## ■ Quantification de l'énergie

### □ Exercice 23.7. Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron décrit une trajectoire circulaire autour du noyau composé d'un unique proton. On donne  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg la masse de l'électron,  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C la charge du proton,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F·m<sup>-1</sup> la permittivité diélectrique du vide,  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup> la célérité de la lumière dans le vide et  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s la constante de Planck. On étudie le mouvement de l'électron  $M$  dans le référentiel du proton supposé galiléen. On note  $(\vec{n}, \vec{\tau})$  la base de Frenet liée à la trajectoire circulaire de l'électron.

1. Rappeler l'expression de la force de Coulomb exercée par le proton sur l'électron.
2. Établir l'expression de la vitesse  $v$  de l'électron sur son orbite circulaire en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$  et du rayon  $r$  de la trajectoire.

3. Exploiter l'hypothèse de quantification  $\|\vec{L}_O(M)\| = n \frac{h}{2\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de la norme du moment cinétique orbital de l'électron pour fournir une relation entre  $m_e$ ,  $r$ ,  $v$ ,  $h$  et  $n$ .

4. Dédire de ce qui précède l'expression des rayons possibles  $r_n$  de l'orbite circulaire en fonction de  $m_e$ ,  $e$ ,  $h$  et  $n$ . Calculer numériquement la valeur de  $r_1$  correspondant à  $n = 1$ .

5. Exprimer l'énergie mécanique de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme  $E = E_n = \frac{E_1}{n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) avec  $E_1$  l'énergie (négative) du niveau fondamental, qu'on exprimera en fonction des données du problème. Calculer numériquement  $E_1$  en joules puis en électronvolts ( $1,00$  eV =  $1,60 \cdot 10^{-19}$  J).

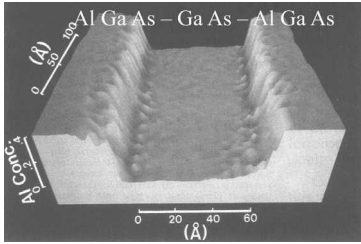
6. Un atome d'hydrogène peut émettre ou absorber un photon de longueur d'onde  $\lambda_{n,k}$  si l'écart  $E_n - E_k$  ( $n > k$ ) entre deux niveaux d'énergie de l'édifice quantique vérifie la relation  $E_n - E_k = \frac{hc}{\lambda_{n,k}}$ . Retrouver la formule établie expérimentalement par Ritz en 1908 :

$$\frac{1}{\lambda_{n,k}} = R_H \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } R_H \text{ la constante de Rydberg de l'hydrogène, dont on donnera}$$

l'expression littérale et la valeur numérique.

7. Les raies d'émission ou d'absorption dans le visible de l'atome d'hydrogène appartiennent à la série de Balmer caractérisée par  $k = 2$ . Calculer les longueurs d'onde de ces raies et préciser pour chacune d'elle la couleur associée.

### □ Exercice 23.8. Absorption de photons par un puits quantique



1. En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies totales  $E_n$  d'une particule libre de masse  $m$  confinée dans un puits quantique infini de largeur  $L$ . On exprimera le résultat en fonction de  $m$ ,  $L$ , de la constante de Planck  $h$  et d'un entier  $n$  non nul.

2. Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence  $\nu_{nk}$  si l'écart  $E_n - E_k$  entre deux niveaux d'énergie de l'édifice vérifie la relation  $E_n - E_k = h\nu_{nk}$  ( $n > k$ ).

a) Quelle est l'interprétation physique de la relation précédente ?

b) Déterminer les fréquences  $\nu_{21}$  et  $\nu_{31}$ , ainsi que les longueurs d'ondes correspondantes  $\lambda_{21}$  et  $\lambda_{31}$  pour un puits à semi-conducteurs à base d'arséniure de gallium (AsGa), d'épaisseur  $L = 60 \text{ \AA}$  (on précise que l'angström est défini par  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), et tel que  $m = 0,067 m_e$  avec  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  la masse de l'électron. On donne  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  la constante de Planck.

c) À quel domaine du spectre appartiennent les longueurs d'ondes des photons obtenues dans la question précédente ? Proposer des applications pratiques de tels puits quantiques.

### □ Exercice 23.9. Énergie et fonction d'onde d'un électron confiné\*

Certaines molécules ayant une longue chaîne linéaire, comme le  $\beta$ -carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule.

On modélise un tel électron, de masse  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  ; l'énergie potentielle  $E_p$  est nulle sur le segment et infiniment grande partout ailleurs (particule dans une « boîte »). Sa fonction d'onde  $\psi(x)$  est alors liée à son énergie totale  $E$  par l'équation différentielle :

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left( \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right) = E \psi$$
 (équation de Schrödinger stationnaire), où  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  est la constante de Planck.

1. On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'onde  $\psi(x)$ .

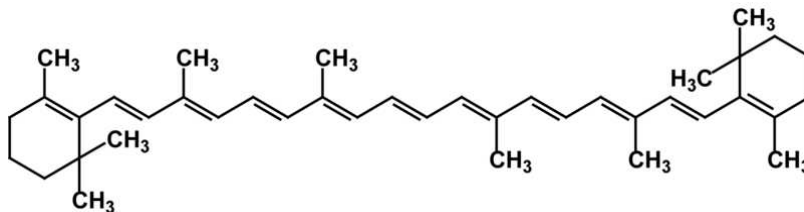
a) Justifier que  $\psi(x)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[0 ; L]$ .

b)  $\psi(x)$  étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule :  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ . Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
 où  $n$  est un entier et  $A$  une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.

2. Donner l'expression des énergies  $E = E_n$  en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $h$  et  $n$ .

3. Dans le  $\beta$ -carotène (formule ci-dessous), ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur  $L = 1,83 \text{ nm}$ . Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.



- Calculer les niveaux d'énergie  $E_{11}$  et  $E_{12}$ .
- En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles...).

### □ Exercice 23.10. Boîte quantique

En généralisant dans l'espace tridimensionnel le modèle du puits quantique de profondeur infinie, on obtient le modèle de la *boîte quantique* (ou *point quantique*, en anglais *quantum dot*). En notant  $a$ ,  $b$  et  $c$  les dimensions du puits dans les trois directions orthogonales, on montre que

les énergies de la particule libre de masse  $m$  s'écrivent 
$$E_{n,m,l} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right)$$

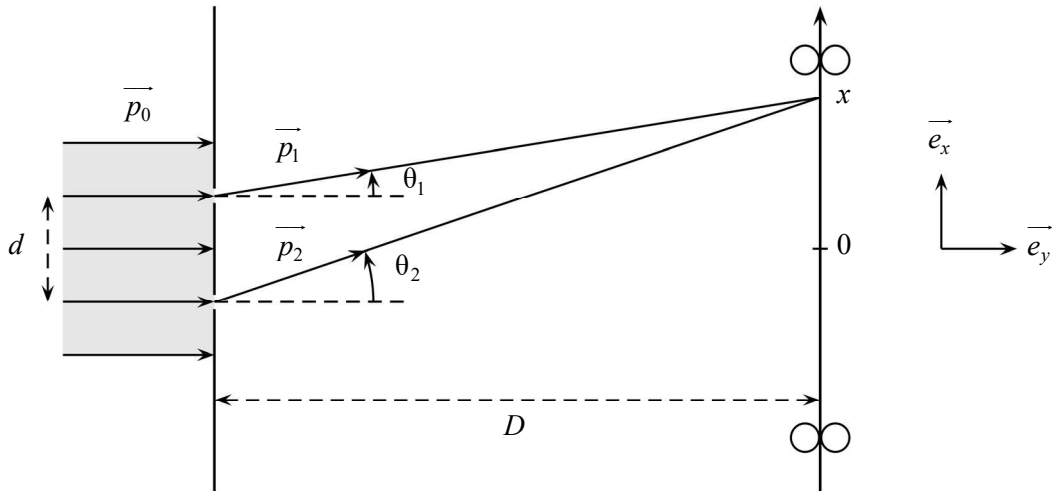
( $n, m, l \in \mathbb{N}^*3$ ). On suppose pour simplifier qu'on étudie une boîte cubique telle que  $a = b = c$ .

- Quelle est l'énergie du niveau fondamental ? Exprimer par ordre croissant les énergies des cinq premiers niveaux excités en fonction de  $h$ ,  $m$  et  $a$ .
- Montrer que les six énergies de la question précédente correspondent à dix-sept triplets ( $n, m, l$ ) de nombres quantiques. Pour chaque énergie, préciser la *multiplicité*, c'est-à-dire le nombre de triplets associés.
- La boîte quantique cubique est excitée à l'aide d'un rayonnement ultraviolet. Sur quel paramètre de la boîte pourrait-on jouer pour contrôler la longueur d'onde des photons émis lors de sa désexcitation ?

## ■ Inégalité de Heisenberg spatiale

### □ Exercice 23.11. Une question fondamentale, une expérience de pensée\*

Posons-nous la question suivante : dans une expérience d'interférences de type fentes de Young, est-il possible d'observer à la fois la figure d'interférences et de savoir par quelle fente est passée la particule ? Pour y répondre, imaginons une expérience de pensée utilisant le fait que la quantité de mouvement mesurée au niveau de l'écran dépend de la fente par laquelle est passée la particule. En mesurant cette quantité de mouvement, on sait donc si la particule est passée par la fente 1 ou 2. Notons  $\overline{p_0} = p_{e_y}$  la quantité de mouvement de la particule incidente,  $\overline{p_1}$  sa quantité de mouvement lorsqu'elle émerge de la fente 1 et  $\overline{p_2}$  sa quantité de mouvement lorsqu'elle émerge de la fente 2.



L'écran d'observation est monté sur « roulettes » pour pouvoir se déplacer dans la direction de  $\vec{e}_x$  sous l'effet de l'impact d'une particule. Il est placé à une distance  $D$  des fentes, ces dernières étant distantes de  $d$  ( $d \ll D$ ). La position du point d'observation sur l'écran est caractérisée par la variable  $x$  ( $x \ll D$ ).

1. Exprimer la composante  $p_{x1}$  de la quantité de mouvement de la particule selon  $\vec{e}_x$  lorsqu'elle émerge de la fente 1 en fonction de  $p$  et  $\sin\theta_1$ . Dans l'approximation des petits angles où  $\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 \approx \theta_1$ , en déduire l'expression de  $p_{x1}$  en fonction de  $p$ ,  $x$ ,  $a$  et  $D$ . Exprimer de même la composante  $p_{x2}$  de la quantité de mouvement de la particule selon  $\vec{e}_x$  lorsqu'elle émerge de la fente 2.
2. Déduire de la question précédente que la différence  $\Delta p_x = p_{x2} - p_{x1}$  des quantités de mouvement transférées à l'écran dans la direction de  $\vec{e}_x$  s'écrit  $\Delta p_x = p \frac{d}{D}$ .  
Pour savoir par quelle fente la particule est passée, il faut donc connaître la quantité de mouvement de l'écran avec une précision  $\Delta p_{x,\text{écran}}$  telle que  $\Delta p_{x,\text{écran}} \ll p \frac{d}{D}$ .
3. Après l'impact d'une particule, l'écran s'est légèrement translaté dans la direction de  $\vec{e}_x$ .  
Pour espérer observer une figure d'interférences d'interfrange  $i = \frac{\lambda D}{d}$ , il faut donc le remettre en place avant l'impact suivant avec une précision  $\Delta x_{\text{écran}}$  telle que  $\Delta x_{\text{écran}} \ll i$ .  
Comparer dans ce cas le produit  $\Delta x_{\text{écran}} \Delta p_{x,\text{écran}}$  à la constante de Planck  $\hbar$ . Conclure sur la faisabilité de cette expérience de pensée et répondre à la question initiale.

### □ Exercice 23.12. Énergie minimale d'un atome d'hydrogène\*

Considérons un atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron. Le proton est supposé fixe et constitue l'origine du repère. L'électron possède une énergie potentielle

$E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  du fait de son interaction électrostatique avec le proton, avec  $r$  la distance entre

les deux particules,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C la charge élémentaire et  $\epsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$  F·m<sup>-1</sup> la permittivité du vide. L'électron possède également une énergie cinétique  $E_c$ . On donne  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J·s la constante de Planck.

1. Supposons que l'électron est confiné au voisinage du proton dans une région d'extension spatiale notée  $a$ . Établir l'inégalité sur l'énergie cinétique  $E_c \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .
2. Déterminer la valeur  $a_1$  de  $a$  pour laquelle l'énergie totale est minimale. Exprimer l'énergie correspondante, notée  $E_1$ . Calculer  $a_1$  en picomètres (1 pm = 10<sup>-12</sup> m) et  $E_1$  en électronvolts (1,0 eV = 1,6 · 10<sup>-19</sup> J). Commenter les résultats obtenus.

### ■ Pour vous aider à démarrer

*Exercice 23.1.* Écrire de deux façons l'énergie reçue par la pupille pendant  $\Delta t$  et identifier les expressions obtenues.

*Exercice 23.5.* Pour commencer la résolution, exprimer  $\overline{p_e} \cdot \overline{p_e}$  et utiliser la définition du produit scalaire  $\overline{p} \cdot \overline{p'} = pp' \cos \theta$ .

*Exercice 23.8.* L'énergie totale d'une particule libre non relativiste se réduit à son énergie cinétique.

*Exercice 23.9.* Question 1.b : l'équation différentielle est analogue à celle d'un oscillateur harmonique, avec simplement la variable  $x$  au lieu de  $t$ .

*Exercice 23.12.* Exprimer  $E_c$  en fonction de  $\Delta p$  dans l'hypothèse  $\langle p \rangle = 0$  et exploiter l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur.



## ■ ■ Corrigé des vrai/faux

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
vrai	faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux	faux	vrai

2. Un photon de masse nulle transporte une quantité de mouvement  $\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{e}$  avec  $\vec{e}$  un vecteur unitaire donnant le sens de propagation de la lumière. La formule  $\vec{p} = m\vec{v}$  ne concerne que des particules matérielles non relativistes.

5. La fonction d'onde  $\psi(x, y, z, t)$  n'est qu'une *amplitude* de probabilité de présence. La probabilité de trouver la particule dans un volume élémentaire  $d^3\tau = dx dy dz$  autour d'un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  est donnée par  $d^3P = |\psi|^2 d^3\tau$ .

8. L'énergie totale d'une particule libre confinée à une dimension est quantifiée. Autrement dit, elle ne peut prendre qu'un ensemble de valeurs discrètes.

9. Pour un confinement sur une dimension  $a$  est toujours supérieure à  $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ .

### □ Les erreurs classiques

- La relation  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  n'est vraie que pour le photon : elle n'est pas valable pour une particule matérielle de masse  $m$ .
- La mécanique quantique est probabiliste par nature, contrairement à la mécanique classique qui est déterministe. La connaissance complète de l'état quantique d'une particule donné par sa fonction d'onde ne donnera ainsi accès qu'à des probabilités de présence.
- Lorsqu'on doit exprimer la quantité de mouvement d'une particule, ne pas oublier de vérifier s'il faut se placer dans le cadre relativiste ou non relativiste (pour ce dernier il faut vérifier  $(v/c)^2 \ll 1$ ).

# ■ ■ Corrigé des exercices

## Exercice 23.1

1. L'énergie reçue par l'œil pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  est égale à  $E = \varphi S \Delta t = \pi r^2 \varphi \Delta t$ .

Si  $N$  photons arrivent sur la pupille pendant  $\Delta t$ , on a également  $E = N \frac{hc}{\lambda}$ . En identifiant ces

deux formules, on en déduit la quantité recherchée  $\frac{N}{\Delta t} = \frac{\pi r^2 \varphi \lambda}{hc}$ . AN  $\frac{N}{\Delta t} = 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

●\* La quantité recherchée correspond à un nombre de photons par seconde : elle s'exprime en  $\text{s}^{-1}$ .

2. Un photon transporte une quantité de mouvement  $p = \frac{h}{\lambda}$ . En utilisant le résultat de la

question précédente, on en déduit  $P = \frac{1}{S} \frac{N}{\Delta t} p = \frac{1}{S} \frac{S \varphi \lambda}{hc} \frac{h}{\lambda}$  soit  $P = \frac{\varphi}{c}$ . AN  $P = 3 \cdot 10^{-19} \text{ Pa}$ .

Pour le Soleil, on trouve une pression de radiation  $P_{\odot} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ . Ces deux pressions sont comme prévues négligeables devant la pression atmosphérique : le fameux « coup » de Soleil ne résulte pas d'un transfert de quantité de mouvement mais plutôt d'un transfert énergétique.

## Exercice 23.2

1. En utilisant la relation fournie  $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ , on obtient  $v_c = 7,04 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $v_f = 704 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Ces vitesses étant très petites devant  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , les neutrons sont considérés comme des particules non relativistes dans cette expérience.

2. La longueur d'onde est donnée par la relation de Louis de Broglie :  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ .

AN  $\lambda_f = 5,64 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  et  $\lambda_c = 5,64 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ . La longueur d'onde des neutrons « froids » est inférieure à la taille caractéristique des gouttelettes tout en étant plus proche de celle-ci en ordre de grandeur que la longueur d'onde des neutrons « chauds ». Les neutrons « froids » sont donc mieux adaptés à l'étude de la dynamique de formation de gouttelettes micrométriques. Ce sont d'ailleurs ces microgouttelettes d'anéthol, huile essentielle peu soluble dans l'eau, qui troublent une célèbre boisson anisée alcoolisée quand on y ajoute de l'eau.

⇒ Méthode 23.1

## Exercice 23.3

1. L'expérience de G. P. Thomson montra que la figure de diffraction obtenue avec un faisceau d'électrons avait les mêmes caractéristiques que celle obtenue avec des rayons X dont le

caractère ondulatoire était bien connu à l'époque : les électrons avaient donc eux aussi une nature ondulatoire.

**2.** Les rayons X ont une longueur d'onde  $\lambda$  comprise entre  $10^{-11}$  et  $10^{-8}$  m. Les distances caractéristiques  $a$  entre les atomes dans un cristal étant de l'ordre de quelques  $10^{-10}$  m, la condition  $\lambda \leq a$  tout en ayant  $\lambda$  et  $a$  du même ordre de grandeur, permettant une étude cristallographique par diffraction, peut être vérifiée.

**3.** La relation de Louis de Broglie  $\lambda = \frac{h}{p}$  fournit, compte tenu de la relation  $E_c = \frac{p^2}{2m} = eU$ ,

l'égalité  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$ . Évaluation numérique :  $\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31} \times 1,60 \cdot 10^{-19} \times U}} \times 10^9 \text{ nm}$

soi  $\lambda \approx \frac{1,23}{\sqrt{U}} \text{ nm}$ . Avec  $U = 1,00 \cdot 10^4 \text{ V}$ , on trouve  $\lambda = 0,0123 \text{ nm} = 12,3 \text{ pm}$  : cette longueur d'onde se situe dans le domaine des rayons X.

⇒ Méthode 23.1

### Exercice 23.4

**1.** La diffraction limite le pouvoir de résolution d'un microscope. En effet, à cause de la diffraction, l'image d'un point n'est plus un point mais une tache d'extension spatiale inversement proportionnelle à la taille de l'objet diffractant. Si deux détails d'un objet sont trop proches, leurs images se chevauchent et il devient alors impossible de les distinguer.

**2.** Le spectre de la lumière visible est compris entre  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  pour l'extrémité violette et  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$  pour l'extrémité rouge. Les énergies correspondantes s'obtiennent par la relation

$E = \frac{hc}{\lambda}$ . AN  $E_V = 4,97 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,11 \text{ eV}$  et  $E_R = 2,49 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,55 \text{ eV}$ .

**3. a)** D'après l'énoncé, la taille des détails que l'on peut distinguer sur les grains de pollen est de l'ordre de  $d = 100 \text{ nm}$ . Cette longueur étant plus petite que les longueurs d'ondes du spectre visible, cette image ne peut pas provenir d'un microscope optique.

**b)** En posant  $\lambda = d$  dans la relation de Louis de Broglie, on obtient  $p = \frac{h}{d} \Leftrightarrow \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2md^2}$  soit

$E_c = \frac{h^2}{2md^2}$ . AN  $E_c = 1,51 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$ . Notons que les MEB actuels permettent en fait de détecter des détails de l'ordre de  $0,1 \text{ nm}$ , ce qui correspond à une énergie cinétique de  $150 \text{ eV}$ .

⇒ Méthode 23.1

### Exercice 23.5

**1.** Conservation de la quantité de mouvement du système {photon + électron} entre avant et après le choc :

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \quad (1).$$

**2.** Conservation de l'énergie totale du système {photon + électron} entre avant et après le choc :

$$\boxed{\frac{hc}{\lambda} + m_e c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}} \quad (2).$$

☛ L'électron libre au repos possède quand même une énergie de masse  $m_e c^2$ .

3. La relation (1) se réécrit :

$$\begin{aligned} \vec{p} - \vec{p}' &= \vec{p}_e \\ (\vec{p} - \vec{p}')^2 &= p_e^2 \\ \vec{p}^2 + \vec{p}'^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{p}' &= p_e^2 \\ p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta &= p_e^2 \\ \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta &= p_e^2 \\ \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta &= p_e^2 c^2 \quad (3) \end{aligned}$$

La relation (2) fournit :

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2 &= \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \\ \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right)^2 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) &= p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \\ \left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{hc}{\lambda'}\right)^2 - 2\frac{h^2 c^2}{\lambda\lambda'} + 2m_e c^2 \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right) &= p_e^2 c^2 \quad (4) \end{aligned}$$

En identifiant les relations (3) et (4), on obtient  $-\frac{h^2 c^2}{\lambda\lambda'} \cos \theta = -\frac{h^2 c^2}{\lambda\lambda'} + m_e c^2 \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}\right)$

d'où finalement :  $\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)}$ . AN pour  $\theta = 30^\circ$  :  $\boxed{\lambda' - \lambda = 0,32 \text{ pm}}$ .

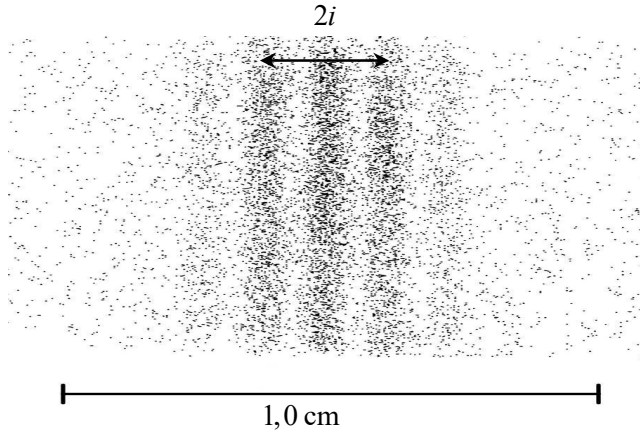
### Exercice 23.6

1. La présence d'impacts de faible extension spatiale sur la plaque de détection prouve le caractère corpusculaire des particules. L'apparition de franges d'interférences pour un nombre suffisant de particules envoyées vers les fentes est quant à elle une manifestation de la nature ondulatoire des particules.

⇒ Méthode 23.2

2. En utilisant la figure d'interférences, on trouve une interfrange de l'ordre de  $\boxed{i = 1,2 \text{ mm}}$ . En

utilisant la formule  $\lambda = \frac{id}{D}$ , on obtient la valeur demandée :  $\boxed{\lambda = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$ .



3. La formule de L. de Broglie s'écrit  $p = \frac{h}{\lambda}$ . Avec  $p = mv = \frac{M}{\mathcal{U}_A} v$ , on en déduit  $v = \frac{h\mathcal{U}_A}{M\lambda}$ .

AN  $v = 2,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette valeur n'est qu'une moyenne : atomes sont lâchés sans vitesse initiale et accélèrent au cours de leur chute sous l'effet du champ de pesanteur.

⇒ Méthode 23.1

### Exercice 23.7

1. Dans la base de Frenet  $(\vec{n}, \vec{\tau})$  liée à la trajectoire circulaire, la force de Coulomb exercée par le proton sur l'électron s'écrit  $\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n}$ .

2. Étudions le mouvement de l'électron  $M$  dans le référentiel du proton supposé galiléen. Le poids étant négligé, la seule force qui s'applique sur l'électron est la force de Coulomb. Dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire de rayon  $r$ , on a  $\vec{OM} = -r\vec{n}$ ,  $\vec{v}(M) = v\vec{\tau}$  et  $\vec{a}(M) = \frac{v^2}{r} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$ . Le PFD appliqué à l'électron s'écrit :  $m_e \vec{a}(M) = \vec{F}$ . La projection sur  $\vec{\tau}$

conduit à  $\frac{dv}{dt} = 0 \Leftrightarrow v = \text{cte}$  : le mouvement de l'électron est uniforme. La projection sur  $\vec{n}$

s'écrit  $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  soit  $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$ .

⇒ Méthode 23.3

3. Pour exploiter l'hypothèse de quantification, écrivons la norme du moment cinétique orbital de l'électron :  $\|\vec{L}_O(M)\| = \|\vec{OM} \wedge m_e \vec{v}\| = \|-r\vec{n} \wedge m_e v\vec{\tau}\| = m_e r v$  d'où  $m_e r v = n \frac{h}{2\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

4. Identifions les expressions de  $v^2$  fournies par les questions 2 et 3 :  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2}$ . En simplifiant cette expression, on trouve les rayons quantifiés des orbites :  $r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$ . Pour  $n=1$ , on trouve  $r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$ , quantité appelée *rayon de Bohr*. AN  $r_1 = 52,9 \text{ pm}$ .

5. L'énergie totale de l'électron est définie par  $E = E_c + E_p$ , avec  $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2$  l'énergie cinétique et  $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  l'énergie potentielle associée à la force de Coulomb. D'après le résultat de la question 2,  $E_c = \frac{1}{2} m_e \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$  d'où  $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ . En utilisant l'expression  $r = r_n$  de la question 4, on obtient  $E = E_n$  avec  $E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$ . Par identification avec la formule de l'énoncé, on aboutit finalement à  $E_n = \frac{E_1}{n^2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) avec  $E_1 = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}$ . AN  $E_1 = -2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$ .

⇒ Méthode 23.3

6. D'après l'énoncé, l'émission ou l'absorption de photons vérifie la relation  $E_n - E_k = \frac{hc}{\lambda_{n,k}}$ .

Or, en utilisant la question précédente, on peut écrire  $E_n - E_k = E_1 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$ . Identifions les deux expressions :  $\frac{hc}{\lambda_{n,k}} = E_1 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$  ou encore  $\frac{hc}{\lambda_{n,k}} = -E_1 \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ . En simplifiant

membre à membre par  $hc$ , on obtient la relation demandée :  $\frac{1}{\lambda_{n,k}} = R_H \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  avec

$$R_H = -\frac{E_1}{hc} \text{ soit } R_H = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3}. \text{ AN } R_H = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

7. La série de Balmer correspond à  $k=2$ . Les longueurs d'onde  $\lambda_{n,2}$  des raies associées vérifient donc  $\frac{1}{\lambda_{n,2}} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$  avec  $n$  un entier strictement supérieur à 2. Une exploitation numérique de cette relation fournit les longueurs d'onde des raies situées dans le spectre visible :  $\lambda_{3,2} = 660 \text{ nm}$  (rouge),  $\lambda_{4,2} = 490 \text{ nm}$  et  $\lambda_{5,2} = 437 \text{ nm}$  (bleu),  $\lambda_{6,2} = 413 \text{ nm}$  et  $\lambda_{7,2} = 400 \text{ nm}$  (violet). Les longueurs d'ondes prédites par le modèle de Bohr correspondent à celle observées dans les expériences de spectroscopie de l'atome d'hydrogène.

### Exercice 23.8

1. L'énergie totale de l'électron libre confiné est égale à son énergie cinétique ( $E_p = 0$ ) d'où

$E = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$ . Si l'intérieur du puits est le siège d'ondes stationnaires, on a

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*), \text{ d'où les énergies quantifiées } E = E_n : \boxed{E = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

⇨ Méthode 23.4

2. a) Cette relation traduit la conservation de l'énergie totale au cours de l'absorption ou l'émission d'un photon par une particule du puits :  $E_n = E_k + h\nu_{nk}$  ( $n > k$ ).

b) Compte tenu de la question 1, la conservation de l'énergie s'écrit  $\frac{h^2}{8mL^2}(n^2 - k^2) = h\nu_{nk}$  soit

$$\nu_{nk} = \frac{h}{8mL^2}(n^2 - k^2). \text{ Les fréquences demandées s'écrivent donc } \boxed{\nu_{21} = \frac{3h}{8mL^2}} \text{ et } \boxed{\nu_{31} = \frac{h}{mL^2}}.$$

Les longueurs d'ondes des photons correspondants s'obtiennent en utilisant la relation de

dispersion  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  :  $\boxed{\lambda_{21} = \frac{8mcL^2}{3h}}$  et  $\boxed{\lambda_{31} = \frac{mL^2}{h}}$ . AN  $\boxed{\nu_{21} = 1,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$ ,  $\boxed{\nu_{31} = 3,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$ ,

$$\boxed{\lambda_{21} = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \text{ et } \boxed{\lambda_{31} = 9,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}}.$$

c) Les longueurs d'ondes précédentes sont situées dans l'infrarouge. Les cellules photovoltaïques actuelles n'absorbant pas dans ce domaine du spectre, y ajouter de tels puits quantiques pourrait augmenter leur rendement. On pourrait aussi envisager d'utiliser ces puits quantiques pour réaliser des caméras infrarouges.

### Exercice 23.9

1. a) La fonction d'onde est liée à la densité de probabilité de présence de l'électron : en dehors du segment de longueur  $L$  (molécule), la probabilité de présence de l'électron est nulle.

b) On résout l'équation différentielle  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2}\psi = 0$ , qui est analogue à celle d'un

oscillateur harmonique. Forme des solutions :  $\psi(x) = A \cos(kx + \varphi)$  en posant  $k = \sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}$ .

Comme  $\psi(0) = 0 = A \cos \varphi$ , on prend  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , ce qui donne  $\psi(x) = A \sin(kx)$ .

Enfin  $\psi(L) = 0 = A \sin(kL)$ , donc  $kL = n\pi$ , d'où finalement  $\boxed{\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$ .

2. D'après les calculs précédents :  $k_n = \sqrt{\frac{8\pi^2mE_n}{h^2}} = \frac{n\pi}{L}$  d'où  $\boxed{E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}}$ .

⇨ Méthode 23.4

3. a) AN  $\boxed{E_{11} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}}$  et  $\boxed{E_{12} = 2,59 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 16,2 \text{ eV}}$ .

b) Un photon absorbé a alors une énergie  $E = E_{12} - E_{11} = (144 - 121) \frac{h^2}{8mL^2}$ , soit  $E = \frac{23h^2}{8mL^2}$ .

AN  $E = 4,14 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,6 \text{ eV}$ . Longueur d'onde :  $\lambda = \frac{hc}{E}$ . AN  $\lambda = 480 \text{ nm}$ .

c) Cette longueur d'onde correspond à du violet. Lorsque la molécule reçoit de la lumière blanche, elle absorbe donc beaucoup dans le violet, mais restitue les autres couleurs, ce qui explique la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule.

### Exercice 23.10

1. Les énergies de la boîtes cubiques s'écrivent  $E_{n,m,l} = \frac{h^2}{8ma^2} (n^2 + m^2 + l^2)$  ( $n, m, l \in \mathbb{N}^{*3}$ ).

Par définition, le niveau fondamental correspond au niveau de plus basse énergie, soit  $E_{1,1,1} = \frac{3h^2}{8ma^2}$ . La détermination des premiers niveaux excités est un problème d'arithmétique. Il s'agit en effet de classer par ordre croissant le résultat de la somme du carré de trois entiers naturels non nuls. On obtient ainsi :

$$E_{2,1,1} = \frac{6h^2}{8ma^2} < E_{2,2,1} = \frac{9h^2}{8ma^2} < E_{3,1,1} = \frac{11h^2}{8ma^2} < E_{2,2,2} = \frac{12h^2}{8ma^2} < E_{3,2,1} = \frac{14h^2}{8ma^2}.$$

2. Associons un ensemble de triplets  $(n, m, l)$  à chaque énergie et déterminons sa multiplicité.

Énergie	Triplets	Multiplicité
$\frac{3h^2}{8ma^2}$	(1,1,1)	1
$\frac{6h^2}{8ma^2}$	(2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)	3
$\frac{9h^2}{8ma^2}$	(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)	3
$\frac{11h^2}{8ma^2}$	(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)	3
$\frac{12h^2}{8ma^2}$	(2,2,2)	1
$\frac{14h^2}{8ma^2}$	(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,2,1), (3,1,2)	6

On trouve bien dix-sept triplets comme annoncé dans la question.

3. Lors de la désexcitation de la boîte quantique cubique, la longueur d'onde des photons émis vérifie la relation  $\lambda = \frac{hc}{\Delta E}$  où  $\Delta E$  est l'énergie de transition, en  $\frac{1}{a}$ . Il suffit alors de faire varier la taille  $a$  de la boîte pour contrôler  $\lambda$ . De telles boîtes sont par exemple utilisées dans la fabrication d'écrans où ils permettent d'améliorer le rendu colorimétrique.



### Exercice 23.11

1. Par projection de  $\vec{p}_1$  sur  $\vec{e}_x$ , on trouve  $p_{x1} = p \sin \theta_1$ . Dans l'approximation des petits angles, on a  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 \approx \theta_1$ . Or  $\tan \theta_1 = \frac{x-d/2}{D}$  d'où  $p_{x1} \approx p \frac{2x-d}{2D}$ .

De même, on trouve  $p_{x2} \approx p \frac{2x+d}{2D}$ .

⇒ Méthode 23.5

2. On déduit des résultats de la question précédente que  $\Delta p_x = p \frac{d}{D}$ .

3.  $\Delta x_{\text{écran}} \Delta p_{x,\text{écran}} \ll \frac{\lambda D}{d} \frac{pd}{D} = p\lambda$  se simplifie compte tenu de la relation de L. de Broglie

$p = \frac{h}{\lambda}$  en  $\Delta x_{\text{écran}} \Delta p_{x,\text{écran}} \ll h$ . Cette inégalité est l'opposée de la relation de Heisenberg en

ordre de grandeur. La mécanique quantique interdit donc la réalisation d'une telle expérience : dans une expérience d'interférences de type fentes de Young, il est donc impossible d'observer à la fois la figure d'interférences et de savoir par quelle fente est passée la particule.

### Exercice 23.12

1. L'énergie cinétique est égale à  $E_c = \frac{p^2}{2m}$ . Or  $p = \langle p \rangle + \Delta p = \Delta p$  car  $\langle p \rangle = 0$  ici. On en

déduit  $E_c = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$ . De plus, d'après l'inégalité de Heisenberg en ordre de grandeur,  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{a}$ .

Finalement, on trouve l'inégalité demandée :  $E_c \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} = E_{c,\min}$ .

⇒ Méthode 23.6

2. L'énergie potentielle est de l'ordre de  $E_p \approx -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ . On en déduit l'énergie totale

minimale :  $E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Cette fonction de  $a$  présente un minimum. En effet,

$\frac{dE_{\min}}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$  s'annule pour  $a = a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$ . On en déduit l'énergie minimale du

système compatible avec la relation de Heisenberg :  $E_{\min}(a_1) = E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2 \hbar^2}$ .

AN  $a_1 = 53 \text{ pm}$  et  $E_1 = -14 \text{ eV}$ . Ces valeurs sont identiques à celles que donnerait un traitement quantique exact dans l'atome d'hydrogène. La longueur  $a_1$  est appelée rayon de Bohr ; elle caractérise bien les dimensions atomiques. L'énergie  $E_1$  est exactement celle du niveau fondamental de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire le niveau de plus basse énergie.

⇒ Méthode 23.6

# Index

## A

accélération, 311  
accélération angulaire, 495  
accélération centripète, 313  
accélération normale, tangentielle, 313  
accommodation, 38  
action mécanique, 339  
adiabatique, 562  
admittance complexe, 172  
afocal, 7, 39  
agent thermique, 607  
aimant, 659, 662  
alternateur, 695  
ampèremètre, 77  
amplificateur inverseur, non inverseur, 249  
amplificateur linéaire intégré (ALI), 247  
amplitude (oscillations), 142  
amplitude complexe, 172  
analyse de Fourier, 205  
angle de réfraction limite, 5  
antisymétrie, 661  
aplanétisme, 7  
appareil photographique, 36  
approximation de l'optique géométrique, 3  
ARQS, 107  
association de lentilles, 38  
athermane, 562

atmosphère isotherme, 634  
auto-induction, 108, 692  
avance, 277  
axe optique, 7

## B

bande passante, 207  
barycentre, 340  
base de Frenet, 312  
base polaire, cylindrique, sphérique, 310  
battements, 279  
bilan énergétique (induction), 694  
bilan énergétique d'un circuit, 109, 142  
bobine, 108, 660  
bobines de Helmholtz, 660  
branche, 75  
bras de levier, 453

## C

calorifugé, 562  
capacité (d'un condensateur), 107  
capacité thermique, 560  
caractéristique d'un dipôle, 77  
carte de champ, 659  
cas de Lorentz, 694

cas de Neumann, 692  
célérité, 3, 277  
centre d'inertie (ou de masse), 340  
centre optique, 35  
chaleur, 562  
champ de force conservative, 386  
champ de pesanteur, 342  
champ de pression, 634  
champ électrique, 423  
champ magnétique, 423, 659  
changement d'état, 528  
chute libre, 343  
circuit, 75  
circuit du premier ordre, 108  
circuit du deuxième ordre, 141  
circuit *LC*, 141  
circuit *RLC* série, 142, 174  
circuits électriques couplés, 693  
circuits *RL*, *RC*, 109  
coefficient de frottement, 342  
coefficient de performance, 607  
coefficient gamma, 563  
cogénération, 608  
comportement asymptotique, 173  
condensateur, 107, 424  
conditions de Gauss, 7  
conditions initiales d'un circuit, 109, 145  
conductance, 78  
conductance de fuite, 107  
cône d'acceptance, 5

confinement spatial, 728  
 conservation de l'énergie  
   mécanique, 387  
 conservation du moment cinétique,  
 455  
 constante de Boltzmann, 527  
 constante de Planck, 727  
 constante de torsion, 497  
 constante des aires, 455  
 constante des gaz parfaits, 527  
 construction graphique (optique), 36  
 contre-réaction, 248  
 convention récepteur, générateur, 77  
 coordonnées cartésiennes, 309  
 coordonnées cylindriques,  
   sphériques, 310  
 corps pur diphasé, 528, 563, 586  
 couleur, 3  
 coupe-circuit, 77  
 couple de forces, 497, 663  
 courant électrique, 75  
 courant électromoteur (CÉM), 78  
 courant induit, 691  
 courants de Foucault, 695  
 courbe de saturation, 528  
 courbes de gain et de phase, 206  
 cristallin, 37  
 cycle (thermodynamique), 559, 607  
 cycle de Carnot, 609

## D

degré de liberté, 388  
 déphasage, 206, 278  
 dérivateur, 206  
 deuxième principe, 585  
 diagramme d'équilibre ( $P, T$ ), 528  
 diagramme d'équilibre ( $P, v$ ), 528  
 diagramme de Bode, 206  
 diagramme de Clapeyron, 561  
 diagramme de Raveau, 608  
 diaphragme, 36  
 diatherme (ou diathermane), 562  
 différence de potentiel, 76  
 diffraction, 279  
 dioptre, 4  
 dipôle ohmique, 78

dipôles en série, en parallèle, 75, 79  
 dispersion, 278  
 dispersion intermodale, 5  
 distance focale, 35  
 distance minimale de projection, 36  
 ditherme, 608  
 diviseur de tension, de courant, 79,  
 173  
 double périodicité, 278  
 dualité onde/corpuscule, 727  
 dynamique relativiste, 424

## E

échelle mésoscopique, 525  
 échelon de tension, 108  
 effet Joule, 78  
 efficacité, 607  
 ellipse, 456  
 emmétrape, 38  
 énergie cinétique, 385, 496  
 énergie interne, 560  
 énergie mécanique, 387  
 énergie potentielle, 386, 424, 497  
 énergie potentielle effective, 455  
 enthalpie, 562  
 enthalpie de transition de phase, 563  
 entropie, 585  
 entropie de transition de phase, 586  
 entropie statistique, 586  
 équation d'état, 526, 527  
 équation différentielle d'un circuit,  
 108, 141  
 équation différentielle du  
   mouvement, 347  
 équation horaire, 309  
 équation locale de la statique des  
   fluides, 633, 635  
 équations cartésiennes de la  
   trajectoire, 348  
 équilibre diphasé, 528  
 équilibre mécanique, 388, 502, 526  
 équilibre stable, instable, 388  
 équilibre thermodynamique, 526  
 équivalent volumique des forces  
   de pression, 635  
 état lié, état de diffusion, 388, 455

état macroscopique, microscopique,  
 525, 586

## F

facteur de Boltzmann, 634  
 facteur de qualité, 142, 208  
 fibre optique, 5  
 figure d'interférences, 280  
 filtrage, 206  
 filtre actif, 248  
 filtres d'ordre 1 ou 2, 207  
 fluide dans le champ de pesanteur, 633  
 fluide incompressible et homogène,  
 634  
 fluide supercritique, 528  
 flux du champ magnétique, 691  
 flux propre, 692  
 focale, 35  
 fonction d'état, 526  
 fonction d'onde, 727  
 fonction de transfert, 205  
 fondamental, 205, 278  
 force, 339  
 force centrale, 454  
 force conservative, 386  
 force de frottement fluide, 342  
 force de frottement solide, 342  
 force de Laplace, 662  
 force de Lorentz, 423  
 force de pression, 342, 633  
 force de rappel élastique, 341, 389  
 force électrique (coulombienne),  
 342, 454  
 force électromotrice (FÉM), 78  
 force électromotrice induite, 691  
 force gravitationnelle, 342, 454  
 force newtonienne, 456  
 force volumique, surfacique, 633  
 formation d'une image, 36  
 formule de Fresnel, 280  
 formules de conjugaison  
   et de grandissement, 36  
 formules de Descartes, de Newton,  
 36  
 foyer principal, secondaire, 7, 35  
 franges d'interférences, 280

fréquence propre, 142  
frottement visqueux, 342

## G

gain, 206  
gain infini, 248  
gaz parfait, 527, 560, 562, 585  
gaz réel, 527, 561  
générateur, 79  
gradient de pression, 635  
grandeur complexe, 171  
grandeur intensive, extensive, 526  
grandissement (transversal), 36  
gravitation, 342, 454

## H

harmonique, 205, 278  
humidité relative, 529  
hyperbole, 456

## I

image réelle, virtuelle, à l'infini, 6  
impédance complexe, 172  
impédance d'entrée, de sortie, 208, 248  
impédance de charge, 205  
indice de réfraction, 3  
inductance (propre), 108, 692  
inductance mutuelle, 693  
induction électromagnétique, 691  
inégalité de Clausius, 607  
inégalité de Heisenberg spatiale, 728  
instrument d'optique, 39  
intégrale première de l'énergie mécanique, 388  
intégrale première du moment cinétique, 455  
intégrateur, 206, 249  
intensité du courant, 75  
interférences, 279  
interprétation statistique de l'entropie, 586

interrupteur, 77  
invariance par translation ou rotation, 661  
irréversible, 559  
isochronisme, 142  
isolé, 339, 525, 585  
isotherme d'Andrews, 529  
isotherme, isobare, isochore, 559

## L

lampe spectrale, 4  
laser, 4  
lentille mince, 35  
liaison pivot, 497  
libre parcours moyen, 525  
ligne de champ, 659  
limite relativiste, 424  
limites du mouvement, 388, 455  
liquide incompressible et homogène, 634  
loi d'Ohm, 78, 172  
loi de Dalton, 529  
loi de Faraday, 692  
loi de Laplace, 563, 585  
loi de modération de Lenz, 691  
loi de retour inverse, 4  
loi des aires, 455  
loi des mailles, 76  
loi des nœuds, 76  
lois de Coulomb du frottement, 342  
lois de Kepler, 456  
lois de Kirchhoff, 76, 173  
lois de Newton, 339, 340  
lois de Snell–Descartes, 4  
longueur d'onde, 3, 278  
loupe, 39  
lumière, 3  
lunette, 39

## M

machine à cylindre, à circuit, 610  
machine frigorifique, 609  
machine thermique, 607  
macroétat, 525, 586

maille, 75  
masse (d'un circuit), 76  
masse (d'un corps), 339  
mécanique classique, 309  
mélange idéal de gaz, 529  
ménisque, 35  
méthode complexe, 171  
méthode d'Euler, 113  
microétat, 525, 586  
milieu dispersif, 278  
miroir plan, 6  
mise au point, 36  
mode propre, 281  
modèle de Bohr, 728  
modèle de Thévenin, de Norton, 79, 173  
moment cinétique, 453, 496  
moment d'inertie, 496  
moment d'un couple, 497  
moment d'une force, 453  
moment magnétique, 661  
monochromatique, 3  
monotherme, monobare, 559  
moteur à courant continu, 662  
moteur ditherme, 608  
moteur synchrone, 663  
moteur thermique, 607  
mouvement à force centrale, 454  
mouvement accéléré, retardé, 311  
mouvement circulaire, 313  
mouvement conservatif unidimensionnel, 388  
mouvement d'une particule chargée, 424  
mouvement elliptique, hyperbolique, 456  
mouvement parabolique, 313, 456  
mouvement uniforme, 311  
moyenleur, 206  
mutuelle inductance, 693

## N

nœud (de circuit), 75  
nœud de vibration, 281

## O

objectif, 36, 39  
objet réel, virtuel, à l'infini, 5  
oculaire, 39  
œil, 37  
onde acoustique, 278  
onde de matière, 727  
onde électromagnétique, 3, 278  
onde plane, 277  
onde progressive  
  unidimensionnelle, 277  
onde sinusoidale, 277  
onde stationnaire, 281  
orthoradial, 310  
oscillateur amorti, 143, 343  
oscillateur harmonique, 141, 146, 389  
oscilloscope, 78  
ouverture numérique, 5

## P

parabole, 313, 456  
particule confinée, 728  
passe-haut, passe-bas,  
  passe-bande, 207  
pendule simple, 343  
performance, 607  
période propre, 142  
période temporelle, 142, 171, 278  
perméabilité du vide, 660  
phase (oscillations), 142, 206  
phase (thermodynamique), 528  
phase condensée, 527, 561, 563, 585  
photon, 3, 727  
plan d'incidence, 4  
plan focal, 7  
planète, 456  
poids, 342  
point critique, 528  
point matériel, 339  
point objet, image, 5  
point triple, 528  
pôles nord et sud, 659, 665  
pompe à chaleur, 609  
pont diviseur, 79, 173  
position d'équilibre, 388

potentiel électrique, 76  
poussée d'Archimède, 635  
premier principe, 560  
pression cinétique, 527  
pression de vapeur saturante, 528  
pression partielle, 529  
principe d'inertie, 340  
principe des interactions, 339  
principe fondamental  
  de la dynamique (PFD), 341  
probabilité de présence, 727  
profondeur de champ, 37  
programmation Python, 113  
propagation dispersive, 278  
pseudo-intégrateur, 249  
pseudo-isolé, 339  
puissance d'une force, 385  
puissance des forces de Laplace, 663  
puissance électrique, 76  
puits d'énergie potentielle, 389  
pulsation cyclotron, 425  
pulsation de coupure, 207  
pulsation propre, 141  
pulsation spatiale, 277  
pulsation temporelle, 141, 277  
punctum proximum, remotum, 38

## Q

quadripôle, 205  
quadripôles en cascade, 208  
quantification de l'énergie,  
  du moment cinétique, 728  
quantification de la pulsation, 281  
quantité de mouvement, 339, 340  
quasi-statique, 559

## R

radial, 310  
rails de Laplace, 662, 694  
rapport de transformation, 693  
rayon de courbure, 312  
rayon lumineux, 3  
rayon paraxial, 7  
réaction d'un support, 341

récepteur (thermodynamique), 607  
référentiel, 309  
référentiel galiléen (ou inertiel), 340  
réflexion, 4  
réflexion totale, 5  
réfraction, 4  
régime apériodique,  
  pseudo-périodique, 143, 147  
régime continu, 75  
régime libre, 108  
régime linéaire, saturé, 248  
régime sinusoidal forcé, 171  
régime transitoire, permanent, 108  
règle du tire-bouchon, 659  
relation de Louis de Broglie, 727  
relation de Mayer, 563  
relation fondamentale de la statique  
  des fluides, 633, 635  
relations de Laplace, 563, 585  
relations de Planck–Einstein, 727  
rendement, 607  
repère, 309  
réponse en intensité, en tension, 174  
représentation de Fresnel, 172, 177  
résistance, 78  
résistance d'entrée, de sortie, 79  
résistance interne, 79  
résonance, 174  
ressort, 341  
retard, 277  
réticule, 39  
rétine, 37  
rétroaction, 248  
réversible, 559  
rotation, 495  
rotor, 662

## S

satellite, 457  
second principe, 585  
série de Fourier, 205  
signal, 277  
solénoïde, 660  
solide, 495  
source de chaleur, 562  
source de lumière, 3

source de tension, de courant, 78  
spectre, 3, 278, 281  
spire circulaire, 659  
spire rectangulaire en rotation, 694  
stator, 662  
stigmatisme, 5  
suiveur, 248  
symétrie, 661  
système centré, 7  
système de points matériels, 340  
système optique, 5  
système thermodynamique, 525

## T

température cinétique, 527  
temps de relaxation, 108  
tension d'un fil, d'un ressort, 341  
tension efficace, 171, 205  
tension électrique, 76  
théorème d'Archimède, 635  
théorème de l'énergie cinétique  
(TÉC), 386, 389, 497  
théorème de l'énergie mécanique  
(TÉM), 387

théorème de la quantité  
de mouvement (TQM), 341  
théorème du centre de masse, 341  
théorème du moment cinétique  
(TMC), 454, 497  
théorie cinétique du gaz parfait, 527  
thermostat, 562, 586  
titre massique, 529, 586  
torsion, 497  
trajectoire elliptique, 456  
transfert thermique, 562  
transformateur, 693  
transformation thermodynamique,  
559  
transition de phase, 528  
translation, 495  
travail d'une force, 385  
travail des forces de pression, 561  
travail électrique, 76  
travail utile (ou indiqué), 611  
trous de Young, 280

## U

uniforme, 311

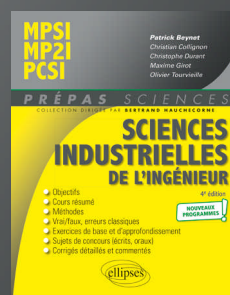
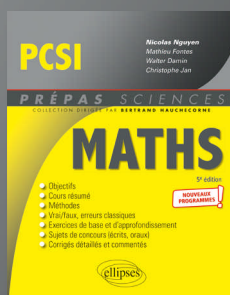
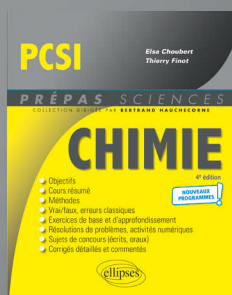
## V

valeur efficace, 171, 205  
valeur moyenne, 205  
variable d'état, 526  
vecteur d'onde, 277  
vecteur de Fresnel, 172, 177  
vecteur force, 339  
vecteur position, 310  
vecteur vitesse, accélération, 311  
ventre de vibration, 281  
vergence, 35  
viseur, 39  
vitesse angulaire, 313, 495  
vitesse de phase, 277  
vitesse quadratique moyenne, 527  
vitesses cosmiques, 457  
voltmètre, 78



Dans la même collection

NOUVEAUX PROGRAMMES!



# PRÉPAS SCIENCES

Les ouvrages de la collection **PRÉPAS SCIENCES** sont le complément indispensable à la réussite en CPGE. Ils ont été conçus et rédigés par des professeurs enseignant en classes préparatoires dans différents lycées de notre pays. Leur contenu a été discuté et pensé avec soin pour permettre la meilleure adéquation avec les attentes et les besoins des étudiants.

Pour intégrer, il faut assimiler le cours, en connaître les points fondamentaux et savoir le mettre en application dans des exercices ou des problèmes souvent ardu. Cette collection est conçue pour répondre à ces difficultés. Dans chaque chapitre, correspondant à peu près à une semaine de cours, vous trouverez :

- **Le résumé de cours**  
Il vous permettra d'accéder à une connaissance synthétique des notions.
- **Les méthodes**  
Elles vous initieront aux techniques usuelles qu'il faut savoir mettre en place.
- **Le vrai/faux**  
Il testera votre compréhension du cours et vous évitera de tomber dans les erreurs classiques.
- **Les exercices, avec des indications**  
Souvent tirés d'annales de concours, ils vous entraîneront aux écrits comme aux oraux.
- **Les corrigés**  
Toujours rédigés avec soin, ils vous aideront à progresser dans la résolution d'exercices.

Ainsi, avec un seul livre par année et par matière, la collection **PRÉPAS SCIENCES** vous permettra de surmonter les colles, d'affronter les devoirs, et elle vous guidera, jour après jour, dans votre cheminement vers la **réussite aux concours**.

www.editions-ellipses.fr

