

# Électro- magnétisme

Ondes et propagation guidée

**Patrice Tchofo Dinda**

Professeur à l'université de Bourgogne - Franche-Comté

**Pierre Mathey**

Maître de conférences à l'université de Bourgogne -  
Franche-Comté

DUNOD

Tout le catalogue sur  
[www.dunod.com](http://www.dunod.com)



Illustration de couverture : © David Evison, Shutterstock

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, 2017

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-076850-9

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.



# Table des matières

À la découverte de votre livre  
Avant-propos

VIII  
X

## Partie 1

---

### Électromagnétisme dans les milieux matériels

#### Chapitre ① Notions mathématiques d'introduction à l'électromagnétisme

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 1. Notion de champ                   | 1  |
| 2. Flux d'un champ vectoriel         | 2  |
| 3. Divergence d'un vecteur           | 4  |
| 4. Théorème de la divergence         | 4  |
| 5. Circulation d'un champ de vecteur | 4  |
| 6. Rotationnel d'un vecteur          | 6  |
| 7. Gradient d'une fonction           | 6  |
| 8. Laplacien scalaire                | 7  |
| 9. Laplacien vectoriel               | 7  |
| 10. Opérateur nabla                  | 7  |
| 11. Angle solide                     | 8  |
| L'essentiel                          | 13 |
| Testez-vous                          | 14 |
| Entraînez-vous                       | 15 |
| Solutions                            | 17 |

#### Chapitre ② Les lois fondamentales de l'électromagnétisme

|  |    |
|--|----|
| 1. La découverte de l'électromagnétisme                | 23 |
| 2. Les lois fondamentales de l'électrostatique         | 24 |
| 3. Rappel des lois fondamentales de la magnétostatique | 27 |
| 4. Passage en régime variable                          | 29 |
| 5. Équations de Maxwell                                | 33 |

|   |     |
|---|-----|
| 6. Méthode des potentiels scalaire et vecteur               | 34  |
| 7. Résolution directe des équations de Maxwell dans le vide | 36  |
| L'essentiel   | 40  |
| Testez-vous   | 41  |
| Entraînez-vous  | 42  |
| Solutions   | 43  |
| <b>Chapitre 3 L'énergie électromagnétique</b>               | 47  |
| 1. Bilan énergétique local                                  | 47  |
| 2. Vecteur de Poynting                                      | 49  |
| 3. Application aux ondes planes                             | 50  |
| 4. Application aux ondes sphériques                         | 52  |
| 5. Rayonnement dipolaire électrique                         | 53  |
| L'essentiel   | 58  |
| Testez-vous   | 60  |
| Entraînez-vous  | 61  |
| Solutions   | 63  |
| <b>Chapitre 4 L'électromagnétisme dans la matière</b>       | 67  |
| 1. État électrique d'un milieu matériel                     | 68  |
| 2. État magnétique d'un milieu matériel                     | 80  |
| 3. Équations de Maxwell dans un milieu matériel             | 85  |
| 4. Conditions aux limites du milieu                         | 86  |
| 5. Relations constitutives pour les milieux LHI             | 90  |
| 6. Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel           | 95  |
| L'essentiel   | 97  |
| Testez-vous   | 101 |
| Entraînez-vous  | 102 |
| Solutions   | 104 |
| <b>Chapitre 5 Les ondes dans les milieux diélectriques</b>  | 114 |
| 1. Rappels  | 114 |
| 2. Mécanismes de polarisation                               | 115 |

|   |     |
|---|-----|
| 3. Polarisation en régime variable                          | 122 |
| L'essentiel   | 133 |
| Testez-vous   | 135 |
| Entraînez-vous  | 136 |
| Solutions   | 140 |
| <b>Chapitre 6 Les ondes dans les milieux conducteurs</b>    | 144 |
| 1. Effet de peau  | 145 |
| 2. Conductivité et permittivité diélectrique des métaux     | 148 |
| 3. Permittivité diélectrique généralisée                    | 153 |
| 4. Ondes de rayonnement et plasmons de volume               | 158 |
| 5. Plasmons de surface                                      | 164 |
| L'essentiel   | 175 |
| Testez-vous   | 179 |
| Entraînez-vous  | 180 |
| Solutions   | 183 |
| <b>Chapitre 7 Introduction aux guides d'ondes</b>           | 190 |
| 1. Équations générales des ondes guidées                    | 192 |
| 2. Choix du système de coordonnées et expression des champs | 194 |
| 3. Classification des modes de propagation                  | 196 |
| 4. Le guide d'ondes rectangulaire                           | 199 |
| 5. Modes TE   | 199 |
| 6. Modes TM   | 205 |
| L'essentiel   | 206 |
| Testez-vous   | 207 |
| Entraînez-vous  | 208 |
| Solutions   | 209 |
| <b>Chapitre 8 La fibre optique</b>                          | 212 |
| 1. Description physique de la fibre à saut d'indice         | 215 |
| 2. Équations de propagation                                 | 216 |
| 3. Expressions des champs en coordonnées cylindriques       | 217 |
| 4. Solutions de l'équation de propagation                   | 219 |

|  |     |
|--|-----|
| 5. Paramètre de fréquence normalisée $V$                 | 222 |
| 6. Relation de dispersion                                | 223 |
| 7. Classification générale des modes de propagation      | 227 |
| 8. Modes de propagation dans les fibres à faible guidage | 231 |
| L'essentiel  | 248 |
| Testez-vous  | 249 |
| Entraînez-vous   | 250 |
| Solutions  | 252 |

## Partie 2

---

# Propagation des ondes dans les diélectriques anisotropes

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chapitre 9</b> Les états de polarisation de la lumière   | 256 |
| 1. Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses   | 257 |
| 2. États de polarisation des ondes électromagnétiques planes  | 257 |
| 3. Propagation des états de polarisation dans les dispositifs optiques : formalisme des matrices de Jones | 266 |
| L'essentiel   | 269 |
| Testez-vous   | 270 |
| Entraînez-vous  | 271 |
| Solutions   | 273 |
| <b>Chapitre 10</b> Propagation selon un axe principal d'un milieu diélectrique anisotrope                 | 286 |
| 1. Tenseur diélectrique, ellipsoïde des indices   | 288 |
| 2. Les différents types de milieux anisotropes  | 290 |
| 3. Propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal                    | 291 |
| 4. Application : les lames optiques   | 293 |
| 5. Interférences en lumière polarisée   | 298 |
| L'essentiel   | 301 |
| Testez-vous   | 302 |

|   |     |
|---|-----|
| Entraînez-vous  | 303 |
| Solutions   | 306 |
| <b>Chapitre 11 Propagation dans un diélectrique linéaire homogène anisotrope</b>            | 313 |
| 1. Définitions  | 315 |
| 2. Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices       | 315 |
| L'essentiel   | 323 |
| Testez-vous   | 324 |
| Entraînez-vous  | 325 |
| Solutions   | 327 |
| <b>Chapitre 12 Faisceaux lumineux dans les diélectriques anisotropes, double réfraction</b> | 336 |
| 1. Direction des faisceaux lumineux   | 337 |
| 2. Surface des vitesses radiales  | 338 |
| 3. Cas des milieux uniaxes  | 341 |
| 4. Double réfraction  | 343 |
| 5. Applications   | 347 |
| 6. Construction des rayons réfléchis  | 350 |
| L'essentiel   | 352 |
| Testez-vous   | 353 |
| Entraînez-vous  | 354 |
| Solutions   | 357 |
| <b>Bibliographie</b>  | 370 |
| <b>Index</b>  | 372 |





# Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit de plusieurs années d'enseignement dans le domaine de l'électromagnétisme, dispensé aux étudiants de la troisième de l'École supérieure d'ingénieurs en matériaux/développement durable et informatique/électronique (ESIREM), de la Licence de physique (niveaux II et III), du Master de physique (PLM-NANO), et du Master enseignement (MEEF), à l'Université de Bourgogne. Il regroupe les notions indispensables pour bien comprendre l'électromagnétisme, depuis les équations de Maxwell dans le vide, jusqu'à la propagation des ondes dans les milieux anisotropes, en passant par les ondes dans les milieux diélectriques, les milieux conducteurs, et les guides d'ondes.

L'ouvrage est constitué de douze chapitres. Les principaux outils mathématiques, nécessaires au traitement des notions qui y sont abordées, sont regroupés au sein du premier chapitre de l'ouvrage. Viennent ensuite les énoncés des lois de l'électromagnétisme classique, la notion d'onde plane puis les aspects énergétiques. La propagation des ondes dans les milieux matériels (diélectriques isotropes, milieux conducteurs) est abordée à partir du quatrième chapitre. La propagation en milieu confiné, c'est-à-dire dans les guides d'ondes, est ensuite traitée et détaillée dans diverses géométries. La notion de modes de propagation y est présentée. Un chapitre entier est consacré à la propagation des ondes dans la fibre optique. La nature vectorielle du champ électromagnétique est une des caractéristiques essentielles des ondes électromagnétiques, qui est pleinement mise en lumière dans l'ouvrage et utilisée dans les quatre derniers chapitres pour analyser la propagation des ondes dans les milieux diélectriques anisotropes. Ces derniers chapitres sont structurés de façon à faire évoluer progressivement la présentation des phénomènes de propagation, depuis la configuration la plus simple (propagation selon un axe principal d'un diélectrique anisotrope) jusqu'au cas le plus général (propagation dans une direction quelconque). La particularité des milieux anisotropes est également pointée dès lors qu'il s'agit de s'intéresser aux rayons lumineux présents dans ces matériaux.

Chaque chapitre de l'ouvrage est constitué d'un cours suivi de ses *points clefs* et d'une sélection de *questions de cours* et d'*exercices d'entraînement* entièrement corrigés. Les *questions de cours* et *exercices d'entraînement* ont été méticuleusement sélectionnés afin de consolider l'acquisition des notions essentielles abordées dans chaque chapitre, tout en donnant un aperçu de l'intérêt pratique de l'électromagnétisme.

De plus, quelques encarts bibliographiques ou à caractère didactique illustrent certaines applications quotidiennes de l'électromagnétisme (chauffage à induction, four à micro-ondes, communications par fibre optique...).

Nous saurons gré aux lecteurs de nous signaler toute erreur qui, malgré notre vigilance, se serait glissée dans cet ouvrage.

Les auteurs

Dijon, Juin 2017

# Notions mathématiques d'introduction à l'électromagnétisme

## Introduction

Un **champ de maïs** correspond à un domaine bien défini de l'espace qui contient des tiges de maïs. Notons que toutes les tiges de maïs ont rarement la même hauteur et qu'elles ne sont pas toutes parfaitement orientées à la verticale. Si on assimile la **tige de maïs** à un **vecteur**, on peut dire qu'un champ de vecteurs est un domaine qui contient beaucoup de vecteurs de longueurs et d'orientations différentes. En électromagnétisme, on utilise des opérateurs (divergence, rotationnel, gradient) pour caractériser l'état d'un champ vectoriel.

## Objectifs

- Définir** la notion de **champ**, que l'on associe aux grandeurs physiques de l'électromagnétisme.
- Identifier** les outils mathématiques qui permettent de caractériser un **champ**.
- Connaître** les principaux opérateurs vectoriels utilisés dans l'expression des lois fondamentales de l'électromagnétisme : divergence, gradient, et rotationnel.

## Plan

- 1 Notion de champ
- 2 Flux d'un champ vectoriel
- 3 Divergence d'un vecteur
- 4 Théorème de la divergence
- 5 Circulation d'un champ de vecteur
- 6 Rotationnel d'un vecteur
- 7 Gradient d'une fonction
- 8 Laplacien scalaire
- 9 Laplacien vectoriel
- 10 Opérateur nabla
- 11 Angle solide

## 1 Notion de champ

Certaines grandeurs physiques couramment utilisées ne peuvent être définies de manière pertinente que par la donnée de la valeur de cette grandeur en différents points d'un milieu. Un exemple de telles grandeurs est la **température**. On ne peut définir de manière pertinente la température (qu'il fait ou qu'il fera) sur un pays qu'en précisant sa valeur en différents endroits du pays. De manière générale, lorsqu'on associe à tout point  $M(x,y,z)$  d'un milieu, une valeur  $U(M, t)$  d'une grandeur physique, on dit qu'on a défini un **champ**

de cette grandeur physique. Par exemple, la donnée des valeurs de températures en différents endroits d'un territoire correspond à la définition d'un **champ de température** pour ce territoire.

Un champ peut être de nature **scalaire** ou **vectorielle** selon qu'il est défini par une grandeur physique scalaire (la température) ou vectorielle (le champ de gravitation terrestre).

- Un **champ** est dit **uniforme** dans une région donnée  $D$  si la grandeur définissant ce champ a la même valeur en chaque point de cette région :

$$U(M, t) = U(t) \quad \forall M \in D$$

- Un champ est dit **stationnaire** (ou **permanent**) si la grandeur définissant ce champ ne dépend pas du temps :

$$U(M, t) = U(M) \quad \forall M \in D \quad \forall t$$

## 2 Flux d'un champ vectoriel

### 2.1 Définition

#### DÉFINITION 1.1

- Le **flux** d'un champ  $\vec{A}$  à travers un élément de surface élémentaire  $dS$  situé en un point  $M$  repéré par le vecteur  $\vec{OM} = \vec{r}$  s'écrit :

$$d\phi = \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \times dS$$

où  $\vec{n}$  représente le vecteur unitaire normal à l'élément de surface  $dS$ .

- Le **flux** de  $\vec{A}$  à travers une surface macroscopique  $S$  s'écrit :

$$\phi(\vec{A}) = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

**Remarque** Dans le cas d'une surface fermée, le vecteur  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  est défini à partir de l'élément de surface  $dS$  et de la normale orientée  $\vec{n}$ . Par convention la normale est orientée positivement de l'intérieur vers l'extérieur de la surface  $S$ .

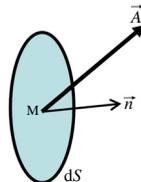


Figure 1.1– Calcul de flux.

### 2.2 Propriétés

Considérons une surface fermée  $S$  entourant un volume  $V$ . On peut séparer  $V$  en deux volumes  $V_A$  et  $V_B$  s'appuyant sur le même contour fermé  $C_f$ . Ainsi  $S = S_A + S_B$ ,

où  $S_A$  et  $S_B$  sont les surfaces entourant respectivement les volumes  $V_A$  et  $V_B$ .

$$\begin{aligned} \phi_S(\vec{A}) &= \iiint_S \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} = \iiint_{S_A} \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} + \iiint_{S_B} \vec{A}(r) \cdot d\vec{S} \\ &= \phi_{S_A}(\vec{A}) + \phi_{S_B}(\vec{A}) \end{aligned}$$

De manière générale, si  $S$  est l'union de plusieurs surfaces disjointes,  $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$ , alors

$$\phi_S(\vec{A}) = \phi_{S_1}(\vec{A}) + \phi_{S_2}(\vec{A}) + \phi_{S_3}(\vec{A}) + \dots$$

**Propriété de linéarité :**  $\phi_S(\alpha_1 \vec{A}_1 + \alpha_2 \vec{A}_2) = \alpha_1 \phi_S(\vec{A}_1) + \alpha_2 \phi_S(\vec{A}_2)$ .

### 2.3 Application

Appliquons ces propriétés au calcul du flux d'un champ  $\vec{E}$  sortant d'un cube infinitésimal de volume  $\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z$ .

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z.$$

$$\begin{aligned} d\phi &= d\phi_1(CBFG + DAEH) + d\phi_2(ABCD + EFGH) + d\phi_3(ABFE + DCGH) \\ &= [E_y(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)] \Delta x \Delta z + [E_x(x + \Delta x, y, z) - E_x(x, y, z)] \Delta y \Delta z \\ &\quad + [E_z(x, y, z + \Delta z) - E_z(x, y, z)] \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim \begin{cases} d\phi = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right] dx dy dz = \text{div}(\vec{E}) d\tau \\ \Delta x \rightarrow 0; \Delta y \rightarrow 0; \Delta z \rightarrow 0 \end{cases}$$

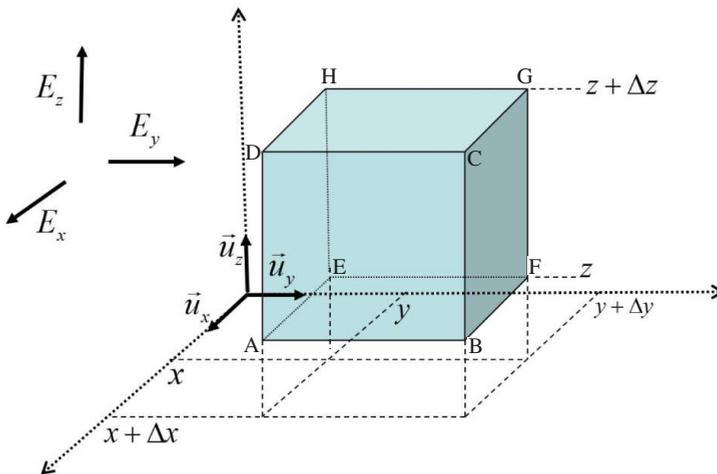


Figure 1.2 – Calcul du flux à travers un cube élémentaire.

On remarque que le flux du vecteur  $\vec{E}$  à travers la surface fermée entourant le volume élémentaire  $d\tau$  est égal au produit de la quantité  $\text{div}(\vec{E})$  par le volume  $d\tau$ . Cette quantité est appelée **divergence** du vecteur  $\vec{E}$ .

### 3 Divergence d'un vecteur

La divergence d'un vecteur  $\vec{E}$  est un scalaire défini par :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

### 4 Théorème de la divergence

Le flux d'un vecteur  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume  $V_S$  délimité par la surface  $S$ .

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_S} \text{div}(\vec{E}) d\tau$$

Ce théorème généralise le résultat précédent obtenu pour un volume élémentaire.

### 5 Circulation d'un champ de vecteur

Considérons un champ  $\vec{E}$  dans une région donnée où l'on a défini une courbe  $\Gamma$  orientée (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens positif) allant d'un point A à un point B. On appelle **circulation du vecteur**  $\vec{E}$  le long de cette courbe, l'intégrale curviligne :

$$C_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

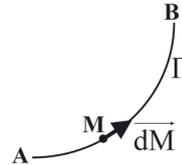


Figure 1.3 – Circulation d'un vecteur.

#### 5.1 Propriétés

- Linéarité :  $\int_{\Gamma} (\lambda_1 \vec{V}_1 + \lambda_2 \vec{V}_2) \cdot d\vec{M} = \lambda_1 \int_{\Gamma} \vec{V}_1 \cdot d\vec{M} + \lambda_2 \int_{\Gamma} \vec{V}_2 \cdot d\vec{M}$
- Changement de sens :  $\int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{M} = - \int_{BA} \vec{V} \cdot d\vec{M}$
- Relation de Chasles :  $\int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{AC} \vec{V} \cdot d\vec{M} + \int_{CB} \vec{V} \cdot d\vec{M}$  si A, B, et C  $\in \Gamma$
- Circulation le long d'un contour fermé :  $\oint_{\Gamma_f} \vec{V} \cdot d\vec{M}$

La circulation le long d'un contour fermé est indépendante du point de départ sur le contour  $\oint_{\Gamma_f} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{CC} \vec{V} \cdot d\vec{M}, \quad \forall C \in \Gamma_f$

## 5.2 Application

Considérons un champ  $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z$ , défini dans l'espace tridimensionnel  $Oxyz$ . On se propose de calculer la circulation du champ  $\vec{E}$  sur un contour élémentaire fermé, de forme rectangulaire, ABCD. On désigne par  $dC_x$  la circulation du champ  $\vec{E}$  lorsque ce contour est placé dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Ox$ , et par  $dC_y$  (ou  $dC_z$ ) la circulation de  $\vec{E}$  lorsque le contour est placé dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oy$  (ou  $Oz$ ).

Évaluons les composantes du vecteur  $d\vec{C} = dC_x \vec{u}_x + dC_y \vec{u}_y + dC_z \vec{u}_z$ .

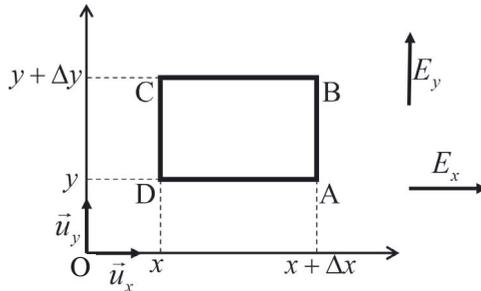


Figure 1.4 – Circulation d'un vecteur le long d'un contour élémentaire.

### • Calcul de $dC_z$

$$dC_z = \Delta x E_x(x, y, z) + E_y(x + \Delta x, y, z)\Delta y - \Delta x E_x(x, y + \Delta y, z) - E_y(x, y, z)\Delta y$$

En utilisant un développement en série de Taylor limité au 1<sup>er</sup> ordre (étant donné que  $\Delta x \ll 1$  et  $\Delta y \ll 1$ , pour un contour élémentaire), on peut écrire que :

$$E_y(x + \Delta x, y, z) \simeq E_y(x, y, z) + \frac{\partial E_y}{\partial x} \Delta x \text{ et } E_x(x, y + \Delta y, z) \simeq E_x(x, y, z) + \frac{\partial E_x}{\partial y} \Delta y.$$

$$\text{On en déduit que } dC_z \simeq \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy = \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dS_z.$$

On remarque alors que la circulation du vecteur  $\vec{E}$  sur le contour fermé ABCD placé dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$ , est égal au flux de la grandeur  $\left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \times \vec{u}_z$  à travers la surface  $dS_z = dx dy$  délimitée par ce contour.

En procédant de manière analogue, nous obtenons :

$$dC_y = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dx dz = \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] dS_y$$

$$dC_x = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dy dz = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] dS_x$$

Ici aussi, on remarque que la circulation du vecteur  $\vec{E}$  sur chaque contour est égale au flux d'une certaine grandeur physique à travers la surface délimitée par le contour.

Cette grandeur physique, qui a pour composantes  $\left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right]$ ,  $\left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right]$ , et  $\left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right]$  (selon les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ ), est appelée **rotationnel** du vecteur  $\vec{E}$ .

Le rotationnel renseigne sur le caractère tourbillonnaire de l'orientation d'un champ vectoriel. En effet, lorsque la composante du rotationnel selon un axe donné est non nulle, cela signifie qu'au voisinage de cet axe, l'orientation du champ  $\vec{E}$  varie en fonction du point d'observation, de telle sorte qu'un déplacement dans la direction de  $\vec{E}$  conduirait à une rotation autour de cet axe. Autrement dit, les lignes du champ  $\vec{E}$  tournent autour de l'axe considéré.

## 6 Rotationnel d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur  $\vec{E}$  est un vecteur défini par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \left[ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \vec{u}_x + \left[ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] \vec{u}_y + \left[ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \vec{u}_z$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{u}_x \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{u}_y \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

### Théorème 1.1

#### Théorème du Rotationnel (théorème de Stokes)

La circulation d'un vecteur  $\vec{E}$  sur un contour fermé est égale au flux du rotationnel de  $\vec{E}$  à travers toute surface ouverte s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_{\Gamma_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_\Gamma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

## 7 Gradient d'une fonction

Soit  $f(x, y, z)$  une fonction scalaire définie en tout point  $M(x, y, z)$  d'un milieu donné. La différentielle de cette fonction, que l'on note  $df$ , représente la variation de cette fonction lorsqu'on passe du point  $M(x, y, z)$  à un point infiniment voisin  $M(x+dx, y+dy, z+dz)$ .

Cette différentielle a pour expression :

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \right] \cdot [dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z] \\ &= \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{M} \end{aligned}$$

Le gradient d'une fonction  $f$  se définit, dans le système de coordonnées cartésiennes, par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Il est à noter que  $df$  est maximum lorsque  $d\vec{M}$  est parallèle à  $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ . Autrement dit, le gradient indique la direction de la plus grande variation d'un champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

## 8 Laplacien scalaire

Le **laplacien scalaire** est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur **gradient** suivie de l'opérateur **divergence** :

$$\Delta = \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \right)$$

Le **laplacien scalaire** d'un champ  $V(x, y, z)$  est un champ scalaire défini par :

$$\Delta V = \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} V \right)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :  $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ .

## 9 Laplacien vectoriel

Le **laplacien vectoriel** d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  est un champ vectoriel défini par  $\Delta \vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$ . Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes,  $\Delta \vec{A}$  a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

## 10 Opérateur nabla

L'opérateur **nabla**, couramment noté  $\vec{\nabla}$ , est un opérateur vectoriel défini en coordonnées cartésiennes comme suit :  $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ .

Cet opérateur possède les caractéristiques d'un vecteur, mais qui aurait pour particularité d'être constitué de composantes qui ne prennent pas de valeurs réelles.

Les composantes du vecteur  $\vec{\nabla}$  sont plutôt des **opérateurs en attente d'argument**. Cependant, on peut manipuler les composantes de  $\vec{\nabla}$  exactement comme on manipule les composantes scalaires d'un vecteur ordinaire (mais avec quelques précautions liées au fait que  $\vec{\nabla}$  n'est pas commutatif avec toutes les opérations).

L'opérateur  $\vec{\nabla}$  est un outil très commode pour manipuler aisément les principaux opérateurs différentiels :

- Gradient :  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$
- Divergence :  $\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$
- Rotationnel :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
- Laplacien :  $\Delta f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = (\nabla^2) f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$ .
- Laplacien vectoriel :  $\Delta \vec{A} = (\nabla^2) \vec{A}$

## 11 Angle solide

L'**angle solide** est l'analogie tridimensionnelle de l'angle **plan** (bidimensionnel).

Un angle **plan**  $\theta$  se construit à partir du point de croisement de deux demi-droites (figure 1.5). À cet angle  $\theta$ , on peut associer l'arc de cercle ( $L$ ) que cet angle découpe sur un cercle (de rayon  $R$ ) centré au point d'intersection des deux demi-droites :  $L = R\theta$ . On peut donc écrire que :

$$\theta = \frac{L}{R}.$$

Dans l'espace tridimensionnel, la portion de l'espace analogue à un angle plan est un cône (figure 1.6). L'ouverture de ce cône est appelée **angle solide**, couramment noté  $\Omega$ . Par analogie avec le rapport  $L/R$  pour l'angle plan, l'angle solide se définit comme le rapport de la portion de surface  $S$  que le cône découpe sur une sphère de rayon  $R$ , au carré du rayon  $R$  :

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

L'unité de l'angle solide est le stéradian, noté *sr*. Notons que pour  $R = 1$  m, on a  $\Omega = S$ . Conséquemment, le stéradian correspond à l'angle solide qui découpe une surface de  $1 \text{ m}^2$  sur une sphère de rayon unité.

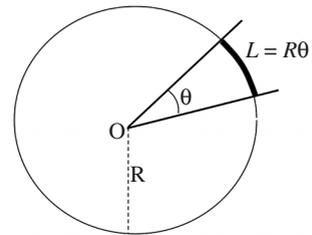


Figure 1.5 – Angle plan.

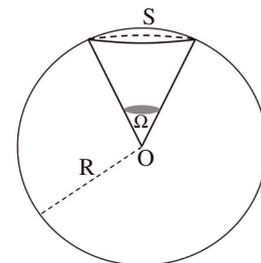


Figure 1.6 – Angle solide.

**Remarque** Pour calculer l'angle solide sous lequel on voit un objet à partir d'un point donné, on projette l'objet sur une sphère (de rayon  $R$ ) centrée en ce point. Si la surface de cette projection sur la sphère est  $S$ , l'angle solide sous lequel l'observateur voit l'objet est alors  $\Omega = S/R^2$ .

- La surface d'une sphère de rayon  $R$  étant  $S = 4\pi R^2$ , on en déduit que le plus grand angle solide mesurable, qui correspond à un objet couvrant toute la sphère, est de  $4\pi$  stéradians.
- Chaque face d'un cube est vue depuis le centre du cube avec un angle solide  $2\pi/3$  stéradians.
- Dans le cas général d'un polyèdre régulier pouvant être inscrit dans une sphère, chacune de ses faces est vue avec un angle solide  $4\pi/n$  ( $n$  étant le nombre de faces du polyèdre).
- Supposons maintenant que l'œil soit placé au sommet d'un cône de sommet  $S$  et d'angle solide  $\Omega$  (figure 1.7). Toutes les surfaces ( $S_1, S_2, S_3$ ) qui s'appuient sur les génératrices du cône sont vues sous le même angle solide, même lorsqu'elles ont des formes et des aires différentes.

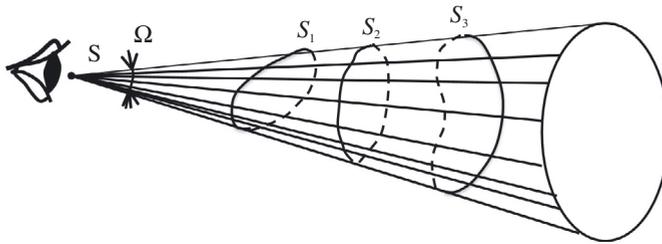


Figure 1.7 – Illustration d'une propriété de l'angle solide.

On est souvent amené à évaluer l'angle solide  $\Omega$  sous lequel on observe une surface  $S$  depuis un point  $O$  (figure 1.8). Si la surface est de forme complexe, on la divise en éléments suffisamment petits pour pouvoir les considérer comme plans. La normale  $\vec{N}$  à un élément de surface  $dS$  fait un angle  $\alpha$  avec la direction d'observation  $\vec{u}$ .

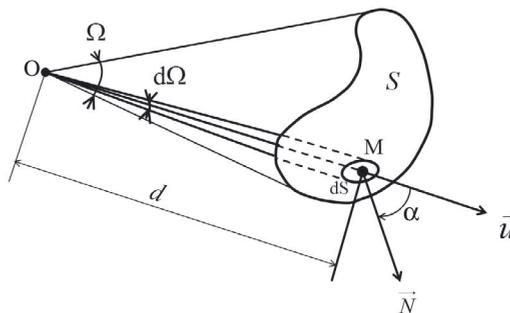
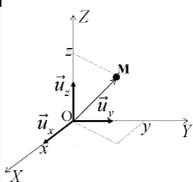
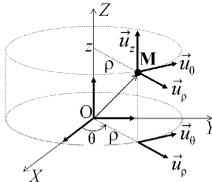
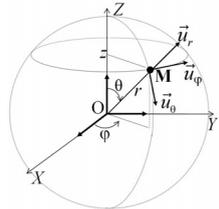


Figure 1.8 – Illustration du calcul de l'angle solide.

**Tableau 1.1** – Formulaire d'analyse vectorielle.

| Système de coordonnées                                   | cartésienne   | cylindrique  | sphérique  |
|--|---|--|--|
|  |  <p style="text-align: center;"><math>M(x, y, z)</math></p>  |  <p style="text-align: center;"><math>M(\rho, \theta, z)</math></p>   |  <p style="text-align: center;"><math>M(r, \theta, \varphi)</math></p>   |
| Base   | $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$   | $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  | $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$   |
| $\vec{OM}$   | $x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$  | $\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z$  | $r\vec{u}_r$   |
| $d\vec{OM}$  | $dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$   | $d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$   | $dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi$   |
| $\vec{A}$  | $A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$  | $A_\rho\vec{u}_\rho + A_\theta\vec{u}_\theta + A_z\vec{u}_z$   | $A_r\vec{u}_r + A_\theta\vec{u}_\theta + A_\varphi\vec{u}_\varphi$   |
| $\vec{\nabla}$   | $\vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$   | $\vec{u}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{u}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$   | $\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$   |
| $\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f$                   | $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$  | $\frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$  | $\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$  |
| $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \text{div } \vec{A}$       | $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$   | $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  | $\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \left[ \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right]$   |
| $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ | $\begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$ | $\begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin\theta} \left( \frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix}$ |
| $\Delta f =$   | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   | $\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   | $\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r f)}{\partial r^2} +$ $\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) +$ $\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$   |

**Tableau 1.2** – Formules d’analyse vectorielle.

|  |   |
|--|---|
| ★ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$ | ★ $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$  |
| ★ $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$              | ★ $\text{rot}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{A} \text{div} \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{A} +$<br>$(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B}$               |
| ★ $\text{rot}(\text{grad} f) = \vec{0}$  | ★ $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \text{rot} \vec{B} + \vec{B} \wedge \text{rot} \vec{A} +$<br>$(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ |
| ★ $\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$   | ★ $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{A}) = 2\vec{A} \wedge \text{rot} \vec{A} + 2(\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{A}$  |
| ★ $\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$   | ★ $\Delta(f g) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \text{grad} f \cdot \text{grad} g$   |
| ★ $\text{div}(f \vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad} f + f \text{div} \vec{A}$   |   |
| ★ $\text{rot}(f \vec{A}) = f \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \wedge \text{grad} f$  |   |
| ★ $\text{grad}(f g) = g (\text{grad} f) + f (\text{grad} g)$   |   |

La projection de l’élément de surface  $dS$  sur une sphère fictive de centre  $O$  et de rayon  $OM$  donne son aire apparente,  $dS_a = dS \cos \alpha$ , tandis que l’angle solide  $d\Omega$  sous lequel on voit  $dS$  depuis  $O$  s’écrit :

$$d\Omega = \frac{dS_a}{d^2} = \frac{dS \cos \alpha}{d^2}.$$

La surface  $S$  n’étant (a priori) pas sphérique, il est clair que  $\alpha$  et  $d$  dépendent de la position du point  $M$  à l’intérieur de  $S$ . L’angle solide total  $\Omega$  sous lequel on voit la surface  $S$  depuis le point  $O$  est la somme de tous les petits angles solides élémentaires  $d\Omega$  :

$$\Omega = \int d\Omega = \int \frac{dS \cos \alpha}{d^2}.$$

Le caractère plus ou moins divergent d’un champ en un point donné est quantitativement mesurable par la valeur du flux de ce champ à travers un élément de surface centré en ce point. Cela se traduit par le théorème qui suit :

**Théorème 1.2**

**Théorème de la divergence  
(Théorème de Green-Ostrogradsky)**

Soit une surface fermée  $S$  délimitant un volume  $V$ . On a :

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

L’élément de surface  $d\vec{S}$  est orienté de l’intérieur de  $V$  vers l’extérieur de  $V$ .  $d\tau$  est un élément de volume centré en un point de  $V$ .

Le caractère plus ou moins tourbillonnaire d’un champ en un point donné est quantitativement mesurable par la valeur de la circulation de ce champ le long d’un élément

de contour centré en ce point. Cela se traduit par le théorème qui suit :

**Théorème 1.3**

**Théorème du rotationnel (Théorème de Stokes)**

Soit  $S$  une surface ouverte délimitée par un contour fermé ( $\Gamma$ ). On a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{l}$  est un déplacement élémentaire le long de  $\Gamma$ .

**Intégrales de Kelvin**

$$\oint_{\Gamma} f d\vec{l} = - \iint_S (\overrightarrow{\text{grad}} f) \wedge d\vec{S}$$

$$\iint_S f d\vec{S} = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}} f d\tau$$

$$\iint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} = - \iiint_V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} d\tau$$

- 1 Les opérateurs vectoriels (gradient, divergence et rotationnel) servent à caractériser un champ vectoriel ou scalaire.
- 2 Le gradient d'un champ scalaire en un point donné est un vecteur qui pointe dans la direction où le champ varie le plus vite.
- 3 La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire dont la valeur indique le caractère plus ou moins divergent du champ.
- 4 Le rotationnel d'un champ vectoriel renseigne sur le caractère plus ou moins tournant du champ. Lorsqu'un champ vectoriel possède une composante tournante, alors le rotationnel de ce champ correspond à l'axe de rotation du champ.
- 5 La divergence d'un champ rotationnel est nulle.
- 6 Le rotationnel d'un champ de gradient est nul.



## Testez-vous

- 1.1** Soit  $\vec{V}(M)$  et  $\vec{A}(M)$ , deux champs définis en tout point  $M$  d'une région donnée, tels que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})$ . On a :
- $\text{div}\vec{V} = 0$
  - $\text{div}\vec{V} \neq 0$
  - $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 0$
- 1.2** Soit  $\vec{V}(M)$  et  $H(M)$ , deux champs définis en tout point  $M$  d'une région donnée, tels que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(H)$ . On a :
- $\text{div}\vec{V} = 0$
  - $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 0$
  - $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \neq \vec{0}$
- 1.3** Soit  $\vec{V}(M)$  et  $\vec{j}(M)$ , deux champs définis en tout point  $M$  d'une région donnée. L'écriture  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{j}$  signifie que :
- $\vec{j}$  est un vecteur qui tourne autour d'un axe qui coïncide avec  $\vec{V}$
  - $\vec{V}$  est un vecteur tournant, et son axe de rotation est  $\vec{j}$
  - $\vec{V}$  est un vecteur divergent
- 1.4** Soit  $\vec{V}(M)$  un champ défini en tout point  $M$  de l'espace, tel que  $\text{div}(\vec{V}) = 0$ . Alors :
- les lignes de champ de  $\vec{V}$  divergent
  - toutes les lignes de champ de  $\vec{V}$  ne divergent pas
  - les lignes de champ de  $\vec{V}$  sont obligatoirement fermées
- 1.5** Soit  $\vec{B}(M)$  un champ défini en tout point  $M$  de l'espace, tel que  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ . On en déduit que :
- $\vec{B} = \vec{0}$
  - $\vec{B}$  n'est pas forcément nul
- 1.6** Soit  $\vec{E}(M)$  un champ défini en tout point  $M$  de l'espace, tel que  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = 0$ . On en déduit que
- $\vec{E}$  n'est pas forcément nul
  - $\vec{E} = \vec{0}$



- 1.1** 1. Quel est l'angle solide sous lequel on voit la face négative d'une sphère de rayon  $R$  depuis son centre  $O$  ?  
 2. En déduire l'angle solide sous lequel on voit :  
 a. le demi-espace depuis  $O$ .  
 b. l'espace compris entre le trièdre trirectangle de sommet  $O$ .  
 3. Quel est l'angle solide sous lequel on voit l'espace compris à l'intérieur d'un dièdre d'angle  $\theta$ , depuis un point  $O$  de l'arête ?
- 1.2** Calculer l'angle solide  $\Omega_1$  sous lequel on voit la face négative d'un disque ( $D$ ) depuis un point  $O_1$  de son axe. En déduire l'angle solide  $\Omega_2$  sous lequel on voit le demi-espace, et l'angle solide  $\Omega_3$  correspondant à la portion de l'espace ne contenant pas le disque.
- 1.3** Un point  $M(x, y, z)$  est repéré par le rayon vecteur  $\vec{r} = \overline{OM}$ , de module  $r$ .  
 Faire les calculs suivants :  
 1.  $\overline{\text{grad}} r$ ,  $\overline{\text{grad}}(1/r)$ ,  $\overline{\text{grad}}(\log r)$ ,  $\text{div}(\vec{r})$ ,  $\text{rot} \vec{r}$ ,  $\text{rot}(\vec{r}/r^3)$ .  
 2.  $\text{div}(\vec{u}_r)$  avec  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ , et  $\text{div}(K \vec{r}/r^3)$ .  
 3.  $\Delta r$ , et  $\Delta(1/r)$ .
- 1.4** En utilisant les coordonnées cartésiennes, démontrer les relations suivantes :  

$$\overline{\text{grad}}(fg) = f \overline{\text{grad}} g + g \overline{\text{grad}} f$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = f \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overline{\text{grad}} f$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$$

$$\text{rot}(f\vec{A}) = f \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \wedge \overline{\text{grad}} f$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{A}) = 0$$

$$\text{rot}(\overline{\text{grad}} f) = 0$$

$$\Delta \vec{A} = \overline{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{A})$$

$$\Delta V = \text{div}(\overline{\text{grad}} V)$$
- 1.5** En s'appuyant respectivement sur le théorème de la divergence et le théorème de Stokes, indiquer si les champs représentés sur la figure 1.9 ont au point  $M$  une divergence positive, négative, ou nulle ; et si le rotationnel de ces champs est nul ou non nul.

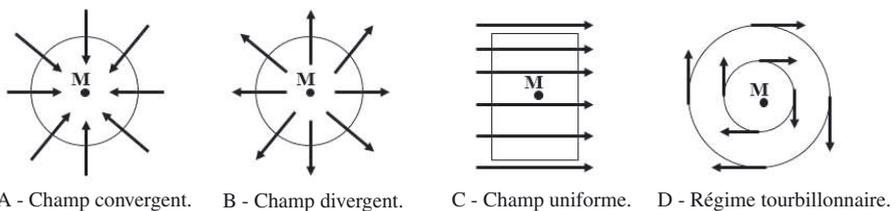


Figure 1.9

**1.6** Calculer la circulation du vecteur  $\vec{A} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$  le long d'un cercle de centre O et de rayon  $r$ , avec :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  et  $\vec{r} = \overline{OM} = r \vec{u}_r$ ,

1. directement en coordonnées cylindriques.
2. en utilisant le théorème de Stokes.

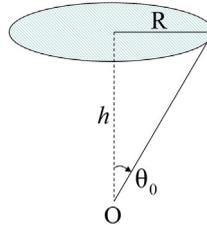


Figure 1.10

**1.7** Soit le vecteur  $\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$ .

Calculer le flux des vecteurs  $\vec{V}_1 = \vec{r}$ ,  $\vec{V}_2 = \vec{r}/r$  et  $\vec{V}_3 = \vec{r}/r^3$  à travers le disque de rayon  $R$  représenté sur la figure 1.10.

**1.8** O étant l'origine du système de coordonnées, calculer le flux du vecteur  $\overline{OM}$ , lorsque M décrit la surface d'un cylindre de révolution de hauteur  $h$ , et dont le cercle de base, qui contient O, a pour rayon  $R$ . Faire ce calcul :

1. directement en coordonnées cylindriques.
2. à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky.



- 1.1** Réponse a ; **1.2** Réponse b ; **1.3** Réponse b ; **1.4** Réponse c ; **1.5** Réponse b ; **1.6** Réponse a.



- 1.1** Dans cet exercice et dans l'exercice 1.2, sauf si spécifié autrement, les angles solides seront exprimés en stéradians.

**1.** La face négative d'une sphère de rayon  $R$  a comme superficie  $S = 4\pi R^2$ . L'angle solide sous lequel on voit cette surface est :  $\Omega_1 = S/R^2 = 4\pi$ .

**2.**

**a.** L'angle solide sous lequel on voit le demi-espace depuis  $O$  est donc :  $\Omega_2 = \Omega_1/2 = 2\pi$ .

**b.** L'angle solide sous lequel on voit l'espace compris entre le trièdre trirectangle de sommet  $O$  correspond à un quart du demi-espace, à savoir  $\Omega_3 = \Omega_2/4 = \pi/2$ .

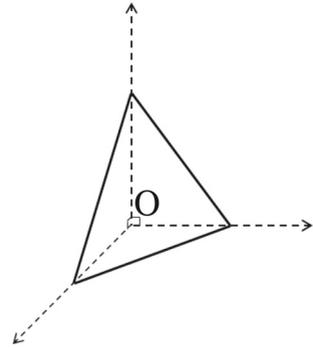


Figure 1.11

**3.** En remarquant que  $\theta = \pi$  correspond à l'angle solide  $\Omega_2$  sous lequel on voit le demi-espace depuis  $O$ , l'espace compris entre le dièdre correspond à  $\Omega_4 = \frac{\theta}{\pi} \Omega_2 = 2\theta$ .

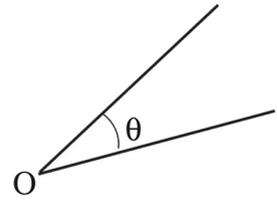


Figure 1.12

- 1.2** L'angle solide élémentaire sous lequel on voit, depuis un point  $O$ , une surface élémentaire  $dS$ , centrée en un point  $M$  du disque ( $D$ ), est donnée par :

$$d\Omega = \frac{dS \vec{u}_z \cdot \vec{u}}{OM^2},$$

où  $\overline{OM} = r\vec{u} = z\vec{u}_z + \rho\vec{u}_\rho$  et  $dS = \rho d\theta d\rho$  (figure 1.13). L'angle solide sous lequel on voit la face négative du disque est donc

$$\Omega_1 = \iint \rho d\theta \times d\rho \frac{\vec{u}_z \cdot \vec{u}}{r^2} = \iint \rho d\theta \times d\rho \frac{\vec{u}_z \cdot \vec{r}}{r^3} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho \frac{z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

$$\text{soit } \Omega_1 = -2\pi z \left[ (z^2 + \rho^2)^{-1/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} = 2\pi \left[ 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right].$$

Donc  $\Omega_1 = 2\pi(1 - \cos \alpha)$

L'angle solide sous lequel on voit le demi-espace correspond à  $\alpha = \pi/2$ , soit  $\Omega_2 = 2\pi$ .

L'angle solide sous lequel on voit la portion de l'espace ne contenant pas le disque est  $\Omega_3 = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\pi \cos \alpha$ .

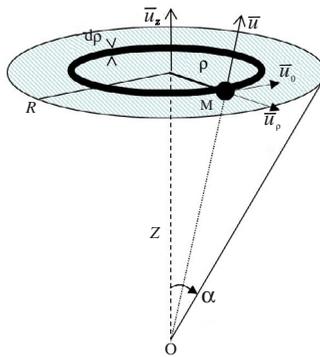


Figure 1.13

**1.3** Un point  $M(x, y, z)$  est repéré par  $\vec{r} = \overline{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ , avec  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ .

1. Calcul de  $\overline{\text{grad}} r$ ,  $\overline{\text{grad}}(1/r)$ ,  $\overline{\text{grad}}(\log r)$ ,  $\text{div}(\vec{r})$ ,  $\text{rot}(\vec{r})$ , et  $\text{rot}(\vec{r}/r^3)$

a. Calcul de  $\overline{\text{grad}} r$

Rappelons que :  $\overline{\text{grad}} f = \nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) f$

Pour l'une des trois coordonnées cartésiennes,  $x_i = x, y, \text{ ou } z$ , on a

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \times 2x_i = \frac{x_i}{r} \text{ et donc } \overline{\text{grad}} r = \vec{r}/r \quad (I-1)$$

b. Calcul de  $\overline{\text{grad}}(1/r)$

Notons que, pour le calcul du gradient d'une fonction quelconque  $f(r)$ , on doit effectuer trois opérations de dérivation, correspondant à chacune des trois coordonnées cartésiennes. Pour l'une d'elle, disons  $x_i = x, y, \text{ ou } z$ , on a  $\frac{\partial}{\partial x_i} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x_i}$ .

On peut donc remplacer les trois opérations de dérivation par une seule opération, en utilisant l'opérateur nabla :

$$\nabla f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \times \nabla r = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \times \overline{\text{grad}} r = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad (I-2)$$

Pour  $f(r) = 1/r$ , la relation (I-2) donne immédiatement

$$\overline{\text{grad}}(1/r) = -\vec{r}/r^3 \quad (I-3)$$

c. Calcul de  $\overline{\text{grad}}(\log r)$

Pour  $f(r) = \log(r)$ , la relation (I-2) donne immédiatement

$$\overline{\text{grad}}(\log r) = \vec{r}/r^2 \quad (I-4)$$

d. Calcul de  $\text{div}(\vec{r})$

Rappelons que :  $\text{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Pour  $\vec{A} = \vec{r}$  on trouve immédiatement  $\text{div}(\vec{r}) = 3 \quad (I-5)$ .

e. Calcul de  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r})$

$$\text{Rappelons que } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Pour  $\vec{A} = \vec{r}$  on trouve immédiatement que  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}) = 0$  (I-6)

f. Calcul de  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}/r^3)$

Ici aussi, on peut simplifier considérablement les opérations de dérivation en utilisant l'opérateur nabla.

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}/r^3) = \vec{\nabla} \wedge [(1/r^3) \times \vec{r}]$$

En appliquant la règle usuelle de dérivation d'un produit de deux fonctions

$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}/r^3) &= \vec{\nabla} \wedge [(r^{-3}) \times \vec{r}] = \vec{\nabla} (r^{-3}) \wedge \vec{r} + r^{-3} \vec{\nabla} \wedge \vec{r} = -3r^{-2}(\vec{\nabla} r) \wedge \vec{r} + r^{-3} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{r} = \\ &= -3r^{-2} \frac{\vec{r}}{r} \wedge \vec{r} = 0. \text{ Donc } \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{r}/r^3) = 0 \quad (I-7) \end{aligned}$$

2. Calcul de  $\text{div}(\vec{u}_r)$  avec  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ , et  $\text{div}(K \vec{r}/r^3)$ .

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{u}_r) &= \text{div}(\vec{r}/r) = \vec{\nabla} \cdot [r^{-1} \times \vec{r}] = \vec{\nabla} (r^{-1}) \cdot \vec{r} + r^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \\ &= -r^{-2}(\vec{\nabla} r) \cdot \vec{r} + r^{-1} \text{div} \vec{r} = -r^{-2}(\overrightarrow{\text{grad}} r) \cdot \vec{r} + 3r^{-1} = -r^{-2}(\vec{r}/r) \cdot \vec{r} + 3r^{-1} = 2/r \end{aligned}$$

Donc  $\text{div}(\vec{u}_r) = 2/r$  (I-8)

$$\begin{aligned} \text{div}(K \vec{r}/r^3) &= K \vec{\nabla} \cdot [r^{-3} \times \vec{r}] = \vec{\nabla} (r^{-3}) \cdot \vec{r} + r^{-3} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = -3r^{-4}(\vec{\nabla} r) \cdot \vec{r} \\ &+ r^{-3} \text{div} \vec{r} = -3r^{-4}(\overrightarrow{\text{grad}} r) \cdot \vec{r} + 3r^{-3} = -3r^{-4}(\vec{r}/r) \cdot \vec{r} + 3r^{-3} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\text{div}(K \vec{r}/r^3) = 0$  (I-9)

3. Calcul de  $\Delta r$ , et  $\Delta(1/r)$ .

$$\begin{aligned} \Delta r &= \text{div} \overrightarrow{\text{grad}}(r) = \text{div}(r^{-1} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (r^{-1} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} (r^{-1}) \cdot \vec{r} + r^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \\ &= -r^{-2}(\vec{\nabla} r) \cdot \vec{r} + r^{-1} \text{div} \vec{r} \\ &= -r^{-2}(\overrightarrow{\text{grad}} r) \cdot \vec{r} + 3r^{-1} = -r^{-2}(r^{-1} \vec{r}) \cdot \vec{r} + 3r^{-1} = -r^{-1} + 3r^{-1} = 2/r \end{aligned}$$

Donc  $\Delta r = 2/r$  (I-10).

$\Delta r^{-1} = \text{div} \overrightarrow{\text{grad}}(r^{-1}) = \text{div}(-\vec{r}/r^3) = 0$ , compte tenu de (I-3) et (I-9).

**Remarque** Les calculs de cet exercice peuvent être exécutés plus rapidement en se plaçant dans le système de coordonnées sphériques. En effet, les fonctions scalaires ou vectorielles considérées ici, ne dépendent que d'une seule coordonnée sphérique, à savoir  $r$ .

**1.4** Les démonstrations proposées s'exécutent rapidement à l'aide de l'opérateur nabla, et en appliquant la règle usuelle de dérivation d'un produit de deux fonctions  $[(f \times g)' = f' \times g + f \times g']$ .

- $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = \overrightarrow{\nabla}(fg) = g \overrightarrow{\nabla}(f) + f \overrightarrow{\nabla}(g) = g \overrightarrow{\text{grad}} f + f \overrightarrow{\text{grad}} g$
- $\text{div}(f\vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f + f \text{div} \vec{A}$
- $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

Ici, on peut appliquer la règle usuelle de dérivation d'un produit de deux fonctions, et la règle de permutation des vecteurs dans un produit mixte,

$\left[ \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) \right]$  mais en gardant à l'esprit que l'opérateur  $\overrightarrow{\nabla}$  ne commute pas avec la grandeur à laquelle il s'applique. Autrement dit, une grandeur  $\vec{A}$  ne peut passer à gauche de  $\overrightarrow{\nabla}$  que lorsque  $\vec{A}$  est traité comme une constante.

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\overrightarrow{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{A})$$

$$= \vec{B} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$\text{soit } \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \bullet \overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) &= \overrightarrow{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} f \wedge \vec{A} + f \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A} = -\vec{A} \wedge \overrightarrow{\nabla} f + f \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A} \\ &= -\vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0 \text{ car } \overrightarrow{\nabla} \text{ est perpendiculaire à } \overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{\nabla} f = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \vec{A}) = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla})\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{donc } \Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}).$$

$$\bullet \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} V) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} V) = (\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla})V = \nabla^2 V = \Delta V.$$

**1.5** A- Champ convergent : flux négatif (divergence négative) et circulation nulle (rotationnel nul).

B- Champ divergent : flux positif (divergence positive) et circulation nulle (rotationnel nul).

C- Champ uniforme : flux nul (divergence nulle) et circulation nulle (rotationnel nul).

D- Régime tourbillonnaire : flux nul (divergence nulle) et circulation non nulle (rotationnel non nul).

**1.6** Calcul de la circulation du vecteur  $\vec{A} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ , avec :  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  et  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$  :

1. En coordonnées cylindriques, on a  $\vec{A} = \omega \vec{u}_z \wedge r \vec{u}_r = \omega r \vec{u}_\theta$ . La circulation de  $\vec{A}$  sur le cercle de centre O et de rayon  $r$  s'écrit :  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{M} = \int_0^{2\pi} \omega r \times r d\theta = 2\pi\omega r^2$ .

2. D'après le théorème de Stokes

$\oint \vec{A} \cdot d\vec{M} = \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{S}$ , où  $\Sigma$  est une surface s'appuyant sur le cercle de rayon  $r$ . Ici nous choisissons pour  $\Sigma$ , le disque plan de rayon  $r$  et de centre O.

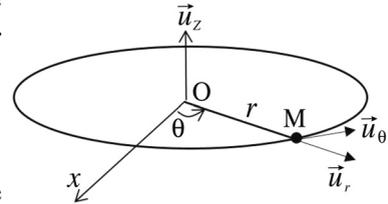


Figure 1.14

En coordonnées cylindriques :

$$\text{rot} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega r^2)}{\partial r} \vec{u}_z = 2\omega \vec{u}_z$$

$$\text{Donc } \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{A}) \cdot d\vec{S} = 2\pi\omega r^2.$$

**1.7** Calcul du flux des vecteurs  $\vec{V}_1 = \vec{r}$ ,  $\vec{V}_2 = \vec{r}/r$  et  $\vec{V}_3 = \vec{r}/r^3$  à travers le disque de rayon  $R$ .

D'après la figure 1.10, on a :  $\vec{OM} = \vec{r} = h \vec{u}_z + \rho \vec{u}_\rho$  et  $d\vec{S} = \rho d\theta d\rho \vec{u}_z$ .

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \iint \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} = \iint \vec{r} \cdot (\rho d\theta d\rho) \vec{u}_z = \iint h \rho d\theta d\rho \\ &= h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho d\rho = 2\pi h \left[ \rho^2/2 \right]_0^R. \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_1 = \pi h R^2$

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \iint \vec{V}_2 \cdot d\vec{S} = \iint r^{-1} \vec{r} \cdot (\rho d\theta d\rho) \vec{u}_z \\ &= \iint (\rho^2 + h^2)^{-1/2} h \rho d\theta d\rho = 2\pi h \left[ (\rho^2 + h^2)^{1/2} \right]_0^R. \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_2 = 2\pi h \left( \sqrt{R^2 + h^2} - h \right)$

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= \iint \vec{V}_3 \cdot d\vec{S} = \iint r^{-3} \vec{r} \cdot (\rho d\theta d\rho) \vec{u}_z \\ &= \iint (\rho^2 + h^2)^{-3/2} h \rho d\theta d\rho = -2\pi h \left[ (\rho^2 + h^2)^{-1/2} \right]_0^R. \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_3 = 2\pi \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) = 2\pi (1 - \cos \theta_0)$ .

**1.8** D'après la figure 1.15, on a :  $\overline{\text{OM}} = \vec{r} = z\vec{u}_z + R\vec{u}_r$

**1.** Calcul du flux du vecteur  $\overline{\text{OM}}$ , en coordonnées cylindriques.

Flux de  $\overline{\text{OM}}$  à travers la surface latérale du cylindre :

$$\begin{aligned} \phi_{lat} &= \iint \overline{\text{OM}} \cdot \vec{dS} \\ &= \iint (z\vec{u}_z + R\vec{u}_r) \cdot (R d\theta dz) \vec{u}_r = 2\pi h R^2 \end{aligned}$$

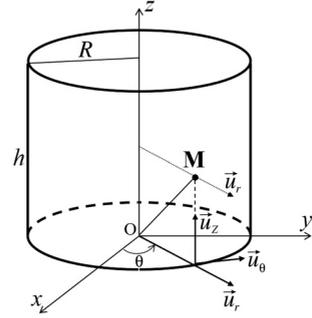


Figure 1.15

Flux de  $\overline{\text{OM}}$  à travers la face supérieure du cylindre :

$$\begin{aligned} \phi_{sup} &= \iint \overline{\text{OM}} \cdot \vec{dS} = \iint (h\vec{u}_z + r\vec{u}_r) \cdot (r d\theta dr) \vec{u}_z \\ &= 2\pi h \int_0^R r dr = \pi h R^2 \end{aligned}$$

Flux de  $\overline{\text{OM}}$  à travers la base du cylindre :

$$\phi_{inf} = \iint \overline{\text{OM}} \cdot \vec{dS} = \iint -(r\vec{u}_r) \cdot (r d\theta dr) \vec{u}_z = 0$$

$$\phi = \phi_{lat} + \phi_{sup} + \phi_{inf} = 3\pi h R^2$$

**2.** Calcul du flux du vecteur  $\overline{\text{OM}}$ , à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky.

Calculons la divergence du vecteur  $\vec{V} = \overline{\text{OM}} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$ , dans le volume intérieur du cylindre.

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial(V_\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \right] + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

donc  $\iiint \text{div } \vec{V} d\tau = 3\pi h R^2$ .

# Les lois fondamentales de l'électromagnétisme

## Introduction

En 1864 le physicien écossais James Maxwell unifiait des lois antérieures de l'électrostatique, de l'électrocinétique et de la magnétostatique, en une théorie permettant d'expliquer la propagation des ondes électromagnétiques. Cette théorie unifiée a donné naissance à l'électromagnétisme et s'est imposée au fil des ans comme l'une des grandes branches de la physique.

## Objectifs

**Connaître** les lois fondamentales de l'électrostatique et de la magnétostatique.

**Connaître** les lois fondamentales de l'électromagnétisme, qui ont été unifiées en un jeu d'équations appelées **équations de Maxwell**.

**Expliquer** le contenu physique des équations de Maxwell.

**Expliquer** comment on utilise ces équations pour étudier la propagation des ondes électromagnétiques.

## Plan

- 1 La découverte de l'électromagnétisme
- 2 Les lois fondamentales de l'électrostatique
- 3 Rappel des lois fondamentales de la magnétostatique
- 4 Passage en régime variable
- 5 Équations de Maxwell
- 6 Méthode des potentiels scalaire et vecteur
- 7 Résolution directe des équations de Maxwell dans le vide

## 1 La découverte de l'électromagnétisme

L'**électromagnétisme** est la branche de la physique qui étudie les effets de l'électricité, en englobant les effets dépendants ou indépendants du temps. Elle est née à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, de la découverte des effets magnétiques de l'électricité et de la mise en évidence d'un lien entre des phénomènes électriques et magnétiques. Avant la découverte de l'électromagnétisme, les effets de l'électricité étaient traités dans des registres différents selon qu'ils étaient générés respectivement par des **forces électriques** ou par des **forces magnétiques**. Depuis les travaux de Maxwell (1864), il est devenu clair que les effets électrique et magnétique ne sont indépendants l'un de l'autre qu'en régime stationnaire (c'est-à-dire, lorsque ces effets sont indépendants du temps), et ne le sont

pas en régime variable. Plusieurs travaux importants ont permis la mise en place des lois fondamentales de l'électromagnétisme.

En 1820, Hans Christian Oersted fait l'observation suivante : un fil parcouru par un courant dévie l'aiguille d'une boussole placée à proximité. Cette expérience démontre alors qu'un courant électrique peut générer un champ magnétique dans l'espace environnant.

En 1831, Michael Faraday étudie le comportement d'un circuit électrique placé dans un champ magnétique et découvre qu'un champ magnétique variable peut engendrer un courant électrique.

En 1864 James Maxwell élabore une théorie unifiée qui donne naissance à l'**électromagnétisme**. Le concept fondamental de la théorie unifiée est la notion de champ électromagnétique, entité qui englobe le champ électrique et le champ magnétique. Dans certains cas particuliers cette entité se réduit à un seul des deux champs :

- le champ électrique, lorsque toutes les charges qui créent ce champ sont immobiles : c'est le domaine de l'électrostatique ;
- le champ magnétique, lorsque les courants qui créent ce champ sont constants dans le temps : c'est le domaine de la magnéto-statique.

Nous allons faire un rappel des lois fondamentales de l'électrostatique et de la magnéto-statique, avant de présenter les lois fondamentales de l'électromagnétisme.

## 2 Les lois fondamentales de l'électrostatique

L'**électrostatique** est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques. On dit qu'un système est en régime électrostatique lorsqu'il n'y règne aucun champ magnétique. La charge électrique du système est immobile, et est conservée lors de toutes les interactions. Sa valeur est mesurée en **coulomb** (symbole C).

### 2.1 Loi de Coulomb

#### DÉFINITION 2.1

Deux particules ponctuelles portant respectivement les charges  $q$  et  $q'$ , placées dans le vide, exercent l'une sur l'autre une force appelée **force de Coulomb**. Cette force est portée par la droite joignant les deux particules, et a pour expression :  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$ ,

où  $r$  est la distance entre les deux particules, et  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$  est la constante électrique du vide (appelée aussi **permittivité du vide**).

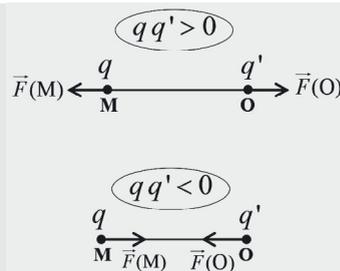


Figure 2.1– Forces d'interaction coulombienne entre deux particules chargées situées aux points M et O.

- Lorsque les charges  $q$  et  $q'$  sont de même signe, les deux particules se repoussent.
- Lorsque les charges  $q$  et  $q'$  sont de signes contraires, les deux particules s'attirent.

**Champ électrique et potentiel électrique.** En considérant l'une des deux particules ; par exemple, la particule située au point M, porteuse de la charge  $q$ , on peut exprimer la force de Coulomb subie par cette particule de la manière suivante :

$$F(M) = qE(M)$$

où la grandeur physique  $E(M) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  représente le **champ électrique** qui règne au point M. En fait,  $E(M)$  est le champ électrique créé en M par la particule située au point O et de charge  $q'$ .

De manière plus générale, l'effet d'une répartition statique de charges créant un champ  $\vec{E}$  sur une **charge**  $q$  placée au point M est une **force** :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

où le champ électrique  $\vec{E}(M)$  est aussi appelé **champ électrostatique**, grandeur qui se mesure en  $V.m^{-1}$ .

La loi de Coulomb est en fait applicable à toute distribution de charges statiques. Par exemple, dans le cas d'une distribution de charge répartie dans un volume  $V_0$  avec une densité volumique de charge  $\rho$ , le champ électrique créée par cette distribution en un point M de l'espace environnant s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho \vec{u}}{r^2} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\tau,$$

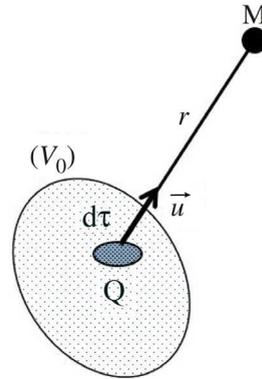


Figure 2.2

où  $\vec{r} = \vec{QM} = \vec{r}_M - \vec{r}_Q$ , et  $\rho d\tau$  représente la charge contenue dans le volume élémentaire  $d\tau$  centré en un point Q du volume  $V_0$ .

En utilisant  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \text{grad}_Q \left( \frac{1}{r} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right)$ , on peut exprimer le champ  $\vec{E}$  de la manière suivante :

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \rho d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}(V),$$

avec  $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho}{r} d\tau.$

Le champ électrostatique est donc un champ de gradient ; ce qui implique que

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0}$$

Plus généralement, à tout champ électrostatique, on peut associer un **potentiel électrique**  $V$  (aussi appelé **potentiel électrostatique**) donné par la relation

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V).$$

Le potentiel  $V$  se mesure en **volt**.

## 2.2 Loi de Gauss

### a) Forme intégrale

Considérons une région de même nature que le vide, mais qui contient des charges immobiles. La loi de Gauss stipule que « le flux du champ électrique à travers une surface fermée  $S$  est proportionnel à la charge totale  $Q_{\text{int}}$  se trouvant à l'intérieur de cette surface » :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

où  $\vec{n}$  est perpendiculaire à la surface  $S$  en chaque point de  $S$ , et est dirigé vers l'extérieur de  $S$ .

### b) Forme locale

Supposons que la charge  $Q_{\text{int}}$  soit uniformément répartie à l'intérieur du volume  $V$  délimité par  $S$ , avec une densité volumique de charge  $\rho$ . La loi de Gauss s'écrit alors

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau.$$

D'autre part, d'après le théorème de la divergence,  $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{E}) d\tau$ .

En comparant ces deux expressions, on déduit la forme locale de la loi de Gauss :

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

#### Encart 2.1

### Carl Friedrich Gauss

Né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort en 1855 à Göttingen, Carl Friedrich Gauss est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Il a apporté de très importantes contributions à ces trois domaines. Surnommé « le prince des mathématiciens », il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. A partir de 1831 il mène une collaboration fructueuse avec le professeur de physique Wilhelm Weber, qui conduit à la découverte des lois de Kirchhoff en électricité, et à la mise au point d'un télégraphe primitif qui pouvait envoyer des messages à plus d'un kilomètre de distance. Leurs travaux sur le magnétisme ont conduit à la formulation de deux des quatre équations de Maxwell. La loi de Gauss pour les champs électriques exprime qu'une charge électrique crée un champ électrique divergent. Sa loi pour les champs magnétiques énonce qu'il n'existe aucune charge magnétique analogue à une charge électrique, et que les lignes de champ magnétique sont obligatoirement fermées.



### 3 Rappel des lois fondamentales de la magnétostatique

#### 3.1 Loi de Biot-Savart

##### a) Champ d'induction magnétique

Lorsqu'un courant constant traverse un conducteur électrique de longueur élémentaire  $d\vec{l}$ , ce conducteur crée en tout point M de l'espace environnant un champ d'induction magnétique donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

où  $r$  est la distance séparant l'élément de courant du point M,  $\vec{u} = \vec{r}/r$ , et

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  est la perméabilité du vide.

Cette loi démontre ainsi que les **courants électriques** sont des **sources de champ magnétique**.

##### b) Potentiel vecteur

La loi de Biot-Savart étant applicable à toute distribution de courants statiques, si on considère une distribution de courants répartis dans un volume  $V_0$  avec une densité volumique de courant  $\vec{j}$ , le champ  $\vec{B}$  créé par cette distribution en un point M de l'espace environnant s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau,$$

où  $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_Q$ , et  $\vec{j} d\tau$  représente le courant contenu dans le volume élémentaire  $d\tau$  centré en un point Q du volume  $V_0$ .

En utilisant  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}_Q(1/r)$ , avec  $\vec{r} = \overrightarrow{QM}$ , le champ s'écrit :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \vec{j} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau.$$

L'utilisation de l'identité

$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{a}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f$ , conduit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}}{r} d\tau.$$

Dans l'élément de volume  $d\tau$ , le vecteur  $\vec{j}$  est pratiquement constant, ce qui implique que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = 0$ , et conduit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau = \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}),$$

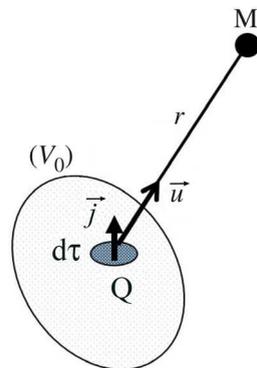


Figure 2.3

$$\text{avec } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\vec{j}}{r} d\tau.$$

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  est donc un champ de rotationnel. On en déduit que

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

Plus généralement, à tout champ  $\vec{B}$ , on peut associer un champ vectoriel  $\vec{A}$ , appelé « **potentiel vecteur** », donné par la relation

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$

### 3.2 Loi d'Ampère

Cette loi est une conséquence de la loi de Biot et Savart. Elle confirme que les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

#### a) Forme intégrale

La circulation du champ  $\vec{B}$  le long d'une courbe  $\Gamma$ , est proportionnelle au courant traversant la surface  $S$  délimitée par la courbe  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

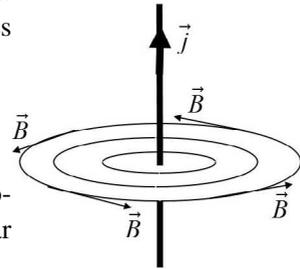


Figure 2.4 – Lignes de champ magnétique.

#### b) Forme locale

D'après le théorème de Stokes,  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

Soit  $\iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  et donc

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Cette équation montre que la densité de courant  $\vec{j}$  crée un champ  $\vec{B}$  qui tourne autour de  $\vec{j}$  (qui se confond alors avec l'axe de rotation de  $\vec{B}$ ).

#### Récapitulatif.

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \text{rot } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Ce récapitulatif montre qu'en **régime stationnaire** (indépendant du temps),

- les champs électriques et magnétiques sont complètement découplés ;
- le champ électrique ne peut être créé que par des charges électriques ;
- le champ magnétique ne peut être créé que par des courants électriques.

## 4 Passage en régime variable

### 4.1 Charges et courants volumiques

En pratique il est impossible d'isoler les champs respectifs créés par les différentes particules qui constituent la matière. Pour appliquer les lois fondamentales de l'électromagnétisme dans les milieux matériels, il est indispensable d'introduire un modèle plus adapté : le modèle volumique. Cela consiste à s'intéresser aux effets de la charge contenue dans un petit volume du milieu entourant un point  $M$ . Il importe de remarquer qu'un tel volume, bien qu'il soit élémentaire au sens mathématique du terme, contiendra en général un nombre immense de charges particulières. L'échelle caractéristique de ce volume, intermédiaire entre l'échelle **microscopique** et l'échelle **macroscopique**, est appelée échelle **mésoscopique**. Les grandeurs qui y sont associées (densités de charge, densités de courants et champ électromagnétique) sont dites nivelées ou moyennées ; ce qui signifie qu'elles indiquent une valeur moyenne à cette échelle, leurs fluctuations au niveau microscopique pouvant être très grandes.

Ainsi, au volume élémentaire  $d\tau$ , on associe la charge  $dq$  qu'il contient et on pose :

$$dq = \rho(M, t) d\tau$$

où  $\rho(M, t)$  est la **densité volumique de charges** au point  $M$ , dépendant de ce point et du temps, et exprimée en  $C.m^{-3}$ .

En outre, une partie de ces charges peut être animée, par rapport à un référentiel  $R$  lié au système, d'une vitesse  $\vec{v}$ . Le **vecteur densité de courant**  $\vec{j}(M, t)$  est alors défini par :

$$\vec{j}(M, t) = \rho_m(M, t) \vec{v}(M, t)$$

où  $\rho_m$  représente la **densité de charges mobiles**, qui n'est pas nécessairement égale à  $\rho$  ;  $\vec{j}(M, t)$  s'exprime en  $A.m^{-2}$ .

Le flux du vecteur  $\vec{j}(M, t)$  à travers une surface  $S$  quelconque représente l'intensité  $I$  du courant à travers cette surface :

$$I = \iint_S \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho_m \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho_m \frac{dq}{dt} dS = \frac{d}{dt} \iiint \rho_m d\tau = \frac{dq_m}{dt}$$

où  $dq_m$  est la quantité de charge qui traverse la surface  $dS$  pendant le temps  $dt$  (figure 2.5).

### 4.2 Loi de conservation de la charge

#### a) Forme intégrale

Considérons un volume  $V$  contenant une quantité de charge  $Q$ , délimité par une surface fermée  $S_f$ . En supposant que cette surface ne soit pas étanche (c'est-à-dire, que des charges puissent la traverser), alors le volume  $V$  contient une quantité

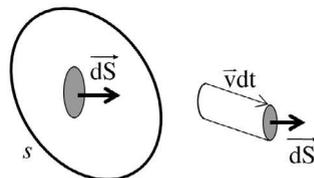


Figure 2.5

de charge susceptible de varier au cours du temps, qui s'écrit :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(\mathbf{M}, t) d\tau. \text{ Soit } \frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Le principe de conservation de la charge consiste à affirmer qu'en l'absence de toute création ou disparition de charges à l'intérieur du volume, toute variation de la charge contenue dans le volume  $V$  ne peut être due qu'au fait que certaines charges ont franchi la surface  $S_f$ . Lorsqu'une telle variation se produit, le mouvement des charges qui franchissent la surface

$$S_f \text{ donnent lieu à un courant } I = \iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Avec la convention habituelle d'orientation de l'élément  $d\vec{S}$  d'une surface fermée vers l'extérieur du volume qu'elle délimite, ce courant est positif quand globalement des charges sortent du volume  $V$ . Dans ce cas, le volume  $V$  voit sa charge diminuer ( $dQ < 0$ ). On peut donc écrire que

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \text{ soit}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cette équation est l'« **équation de conservation de la charge** », exprimée sous sa forme intégrale.

### b) Forme locale

D'autre part, d'après le théorème de la divergence,

$$\iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d\tau$$

$$\text{soit } \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} d\tau = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

L'expression locale de la loi de conservation de la charge s'écrit donc :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

## 4.3 Équation de Maxwell-Ampère

En 1864, James Maxwell a pointé une incompatibilité entre l'équation de conservation de la charge ( $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) et le théorème d'Ampère ( $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ ). En effet,

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}. \text{ Soit } \operatorname{div} [\operatorname{rot}(\vec{B})] = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} \text{ et } \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

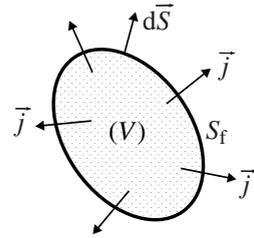


Figure 2.6

Maxwell a alors proposé de modifier le théorème d'Ampère de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette équation, connue comme étant l'**équation de Maxwell-Ampère**, se distingue du théorème d'Ampère par la présence du terme  $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , ajouté par Maxwell. Ce terme supplémentaire, appelé « **courant de déplacement** », assure la compatibilité de l'équation de Maxwell-Ampère avec la loi de conservation de la charge.

#### 4.4 Loi de conservation du flux magnétique

Le flux du champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée est toujours nul.

a) Forme intégrale

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

b) Forme locale

D'après le théorème de la divergence,  $\iiint_V \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{B} d\tau$ , et donc

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

#### 4.5 Loi de l'induction électromagnétique de Faraday

**Forme intégrale.** La loi de Faraday stipule que lorsqu'un circuit électrique est soumis à un flux magnétique variable,  $\Phi(t)$ , généré d'un champ magnétique  $\vec{B}$ , ce circuit acquiert une force électromotrice (f.e.m)  $U$  proportionnelle à la variation temporelle du flux magnétique :

$$U = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Le signe « - » correspond à la **loi de Lenz**, qui stipule que la f.e.m induite dans le circuit s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance. La loi de Faraday peut être mise en évidence par la mise en rotation d'un aimant au voisinage d'un bobinage.

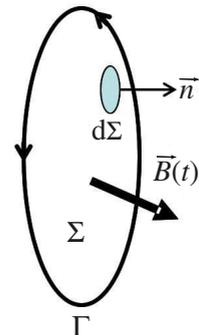


Figure 2.7

**Forme locale.** Considérons une surface  $\Sigma$  immobile, délimitée par un contour  $\Gamma$ , placée dans une région où règne un champ magnétique variable  $\vec{B}$  (figure 2.7). Le flux de  $\vec{B}$

à travers  $\Sigma$  est :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\Sigma,$$

où  $\vec{n}$  est la normale à l'élément de surface  $d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{n}$ . Les variations de flux de  $\vec{B}$  à travers la surface  $\Sigma$  créent un champ électrique induit  $\vec{E}$  dont la circulation le long du contour  $\Gamma$  détermine la f.e.m induite  $U$ .

$$U = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

D'après le théorème du rotationnel, on a :  $U = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\Sigma$

$$\text{Par ailleurs, } U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, d\Sigma.$$

En comparant ces deux dernières expressions, on déduit la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Cette relation, qui a été mise dans sa forme locale par Maxwell, est appelée **équation de Maxwell-Faraday**. Elle constitue l'une des quatre équations de Maxwell, et est considérée comme l'un des postulats de l'électromagnétisme.

### Encart 2.2

## L'induction électromagnétique

Nous côtoyons quotidiennement divers types d'appareils, tels que les **plaques à induction** (utilisées pour la cuisson des aliments), les **transformateurs** utilisés pour abaisser la tension électrique (dans les réseaux de distribution d'électricité), les **alternateurs** pour la recharge des **batteries de voitures**, des **disques de freins de camions** et **autobus**, ou les **fours de bijoutiers** utilisés pour la fonte de métaux précieux. En dépit de leur diversité, les appareils cités ont comme point commun d'exploiter le phénomène d'induction électromagnétique découvert par le physicien Michael Faraday et remis en équation par James Maxwell sous la forme suivante :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial \vec{B} / \partial t$ . Le second membre de cette équation n'est non nul que lorsque le champ magnétique varie dans le temps. En d'autres termes, la variation du champ magnétique en tout point d'un milieu matériel crée en ce point un champ électrique. C'est ce **champ électrique induit** qui est exploité dans les différentes applications suscitées.

Lorsqu'on est capable de créer un champ magnétique variant sinusoïdalement,  $\vec{B} = B_0 \sin(\omega t)$ , alors  $\partial \vec{B} / \partial t = \omega B_0 \cos(\omega t)$  et l'amplitude du second membre vaut  $\omega B_0$ . Cela implique que l'amplitude du champ électrique créé est d'autant plus grande que l'amplitude du champ magnétique est élevée, et que sa fréquence de variation est élevée. Deux ingrédients sont nécessaires pour les applications : il faut disposer d'une source de champ magnétique (qui est généralement un **aimant**, ou une **bobine**). Il faut ensuite un procédé de variation du champ magnétique (comme la rotation d'un aimant autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de l'aimant).

Une bobine alimentée par un courant alternatif, constitue un moyen très pratique et très utilisé pour réaliser l'induction électrique. L'amplitude du champ magnétique est réglable par le nombre de spires de la bobine, tandis que le courant alternatif d'alimentation de la bobine assure la variation du champ magnétique.

## 5 Équations de Maxwell

Les **équations de Maxwell** sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme. Elles traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui existaient de manière indépendante avant que Maxwell ne les réunisse sous la forme d'équations intégrales.

**Équation de Maxwell-Gauss.** Cette équation locale décrit comment un champ électrique  $\vec{E}$  est généré par des charges électriques :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

**Équation de Maxwell-Flux magnétique.** Cette équation énonce que les lignes de champ magnétique  $\vec{B}$  sont obligatoirement fermées, et qu'il n'existe aucune « charge magnétique » analogue à une charge électrique.

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (2.2)$$

**Équation de Maxwell-Faraday.** Cette équation décrit comment la variation d'un champ magnétique peut créer un champ électrique. Par exemple, un aimant en rotation crée un champ magnétique variable qui génère un champ électrique.

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

**Équation de Maxwell-Ampère.** Cette équation énonce que les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par les courants électriques (c'est le théorème d'Ampère), ou par la variation d'un champ électrique (c'est l'apport de Maxwell sur cette loi).

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Ainsi, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, énoncent respectivement que la variation d'un champ magnétique crée un champ électrique et que la variation d'un champ électrique crée un champ magnétique. Par conséquent, ces deux équations permettent la propagation d'ondes électromagnétiques auto-entretenues, y compris dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

Les équations de Maxwell font intervenir les grandeurs physiques suivantes :

- Le **champ électrique**  $\vec{E}$ , qui s'exprime en  $\text{V.m}^{-1}$  ;

- Le **champ d'induction magnétique**  $\vec{B}$ , qui s'exprime en T ou  $\text{Wb}\cdot\text{m}^{-2}$  ;
- La **densité de charge électrique**  $\rho$ , qui s'exprime en  $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$  ;
- La **densité de courant électrique**  $\vec{j}$ , qui s'exprime en  $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$  ;
- Les constantes fondamentales du vide :  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

**Principe général.** Pour qu'un champ électromagnétique puisse exister dans un milieu, il faut qu'en tout point de ce milieu les équations de Maxwell soient satisfaites.

**Méthodologie.** Les équations de Maxwell offrent un cadre mathématique permettant la détermination du champ électromagnétique, par deux méthodes distinctes. La première consiste à déterminer préalablement le couple de potentiels scalaire et vecteur  $(V, \vec{A})$  associé au champ électromagnétique. Il s'agit ensuite de déduire le champ électromagnétique à l'aide des relations champ-potential. La deuxième méthode consiste à mettre en place l'équation de propagation, et ensuite résoudre cette équation. Dans ce qui suit, nous présentons les deux méthodes.

### Encart 2.3

### James Clerk Maxwell

James Maxwell est un physicien écossais, né à Édimbourg en 1831 et mort à Cambridge en 1879. Il se fait connaître en 1857 en publiant un article sur la composition des anneaux de Saturne, et il s'intéresse ensuite aux systèmes constitués d'un grand nombre de particules, travaux qui feront de lui l'un des fondateurs de la théorie de la cinétique des gaz (qu'il établit indépendamment de Boltzmann en 1866) et de la mécanique statistique. Sa formule, appelée distribution de Maxwell, donne la proportion des molécules d'un gaz se déplaçant à une certaine vitesse à une température donnée. En 1865, il propose sa théorie complète de l'électromagnétisme avec ses célèbres équations aux dérivées partielles qui décrivent l'évolution couplée des champs électriques et magnétiques. Il en déduit une théorie de la lumière en tant qu'ondes de fréquences particulières, vérifiée expérimentalement par Heinrich Hertz en 1887. À Cambridge, il est nommé premier directeur du célèbre Cavendish Laboratory. De 1855 à 1872, il publie également une série de recherches concernant la perception des couleurs.



## 6 Méthode des potentiels scalaire et vecteur

### 6.1 Relations champ-potentiels

Les équations de Maxwell qui ne contiennent pas de termes de source matérielle (charge électrique et courants) sont les suivantes :  $\text{div } \vec{B} = 0$  et  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ . Sachant que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , on peut écrire que  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \text{rot } \vec{A}}{\partial t} = \text{rot} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$  et donc

$\overline{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$ , ce qui montre que  $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$  est un champ de gradient. Pour retrouver l'expression habituelle de l'électrostatique, il suffit de poser que  $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t = -\overline{\text{grad}} V$ , soit :

$$\boxed{\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} \quad (2.5)$$

On remarque qu'en régime variable  $\vec{E}$  dépend à la fois de  $V$  et de  $\vec{A}$ , alors que la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  garde la même expression qu'en régime statique :

$$\boxed{\vec{B} = \overline{\text{rot}} \vec{A}} \quad (2.6)$$

## 6.2 Changement de jauge

Une indétermination pèse sur  $V$  et  $\vec{A}$ , car à un même champ électromagnétique, on peut associer plusieurs couples de potentiels vecteur et scalaire. Par exemple, en considérant les couples  $(\vec{A}, V)$  et  $(\vec{A}', V')$ , on peut écrire que :

$\vec{B} = \overline{\text{rot}} \vec{A}$  et  $\vec{B} = \overline{\text{rot}} \vec{A}'$  Soit  $\overline{\text{rot}}(\vec{A} - \vec{A}') = 0$ , et donc  $\vec{A}' = \vec{A} + \overline{\text{grad}} \psi$ , où  $\psi$  est une fonction quelconque de l'espace.

Pour le champ  $\vec{E}$  on peut écrire que  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$ .  
Donc  $-\overline{\text{grad}}(V' - V) - \frac{\partial(\vec{A}' - \vec{A})}{\partial t} = 0$ , soit  $-\overline{\text{grad}}(V' - V) - \frac{\partial(\overline{\text{grad}} \psi)}{\partial t} = 0$  et donc

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Lorsqu'on fait le choix d'un couple de potentiel, on dit qu'on a choisi une jauge.

## 6.3 Relations potentiels-sources

Considérons les équations de Maxwell avec sources matérielles :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ et } \overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Dans ces deux équations, en remplaçant les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  par leurs expressions en fonction des potentiels, nous obtenons :

$$\text{div} \left( -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ et } \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \left( -\overline{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}{\partial t}.$$

En tenant compte des identités  $\text{div grad} = \Delta$  et  $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ , on obtient :

$$\begin{cases} \Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \text{grad} \left( \text{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ \Delta V + \rho / \varepsilon_0 = -\partial(\text{div} \vec{A}) / \partial t \end{cases}$$

Ces deux équations sont couplées, mais on peut profiter de la possibilité d'un changement de jauge pour imposer à  $\vec{A}$  et  $V$  des conditions particulières :

(i) L'une des conditions, dite jauge de Coulomb, consiste à imposer :

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (2.7)$$

(ii) Une autre condition de jauge, dite jauge de Lorentz, consiste à poser :

$$\text{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (2.8)$$

Dans ce dernier cas, les équations d'évolution des potentiels s'écrivent :

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = 0 \text{ et } \Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \rho / \varepsilon_0 = 0 \quad (2.9)$$

Les solutions de ces deux équations sont connues sous le nom de potentiels retardés :

$$V(\mathbf{M}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(v_0)} \frac{\rho(t - r/c)}{r} d\tau \quad \vec{A}(\mathbf{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(v_0)} \frac{\vec{j}(t - r/c)}{r} d\tau \quad (2.10)$$

La connaissance des potentiels  $(V, \vec{A})$  permet de déterminer  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à l'aide des relations champ-potentiels (2.5) et (2.6).

## 7 Résolution directe des équations de Maxwell dans le vide

### 7.1 Cas d'un milieu vide contenant par endroit des charges et courants

Dans un tel milieu les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (2.11)$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.12)$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.14)$$

**Équation de propagation du champ  $\vec{E}$ .** En appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{E}$ , puis les équations (2.11), (2.12) et (2.14), nous obtenons :

$$\overline{\text{rot}} \left[ \overline{\text{rot}} \left( \vec{E} \right) \right] = \overline{\text{grad}} \left[ \text{div} \left( \vec{E} \right) \right] - \Delta \vec{E} \quad \text{et}$$

$$\overline{\text{grad}} \left[ \rho / \epsilon_0 \right] - \Delta \vec{E} = \overline{\text{rot}} \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial \overline{\text{rot}} \left( \vec{B} \right)}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Donc  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left( \rho / \epsilon_0 \right)$  (2.15)

**Équation de propagation du champ  $\vec{B}$ .** On applique la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{B}$ , puis les équations (2.12), (2.13) et (2.14) :

$$\overline{\text{rot}} \left[ \overline{\text{rot}} \left( \vec{B} \right) \right] = \overline{\text{grad}} \left[ \text{div} \left( \vec{B} \right) \right] - \Delta \vec{B} \quad \text{et}$$

$$-\Delta \vec{B} = \overline{\text{rot}} \left( \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \overline{\text{rot}} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \overline{\text{rot}} \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \overline{\text{rot}} \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Donc  $\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overline{\text{rot}} \vec{j}$  (2.16)

Les équations (2.15) et (2.16) sont les équations de propagation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le milieu considéré.

## 7.2 Cas du vide en l'absence de charges et courants

En posant :  $\rho = 0$  et  $|\vec{j}| = 0$ , on déduit des équations (2.15) et (2.16) les équations de propagation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

## 7.3 Propagation d'une onde plane dans le vide

Les solutions des équations (2.17) et (2.18) sont nombreuses. Considérons par exemple une propagation suivant l'axe Oz. Il résulte des équations (2.17) et (2.18) que les composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  obéissent à l'équation d'onde du type :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

où  $\psi$  désigne l'une des composantes de  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

La solution de type **onde plane** peut être représentée par une combinaison de la forme :

$$\psi = f(t - z/c) + g(t + z/c) \quad (2.20)$$

où le terme  $f(t - z/c)$  représente une onde se propageant dans le sens des  $z$  positifs, et le terme  $g(t + z/c)$  une onde se propageant dans le sens des  $z$  négatifs.

Quelle que soit la direction de propagation d'une onde plane, on montre facilement que :

- les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux ;
- chacun des deux champs est perpendiculaire à la direction de propagation.

Une onde plane sinusoïdale monochromatique peut être représentée en notation réelle par :

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.21)$$

où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde, et  $\omega$  la pulsation de l'onde. En notation complexe, on peut représenter cette onde par

$$\psi = \psi_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] \quad (2.22)$$

Cette notation complexe conduit à :

$$\vec{\nabla}\psi = -i\vec{k}\psi \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = i\omega\psi \quad (2.23b)$$

Les équations de Maxwell se mettent alors sous la forme

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega\vec{B}, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\omega\vec{E} \quad (2.24)$$

L'équation de propagation n'admet une solution de type onde plane que si :

$$k = \sqrt{\mu_0\epsilon_0}\omega. \quad (2.25)$$

Cette relation est la **relation de dispersion** des ondes planes dans le vide.

#### Encart 2.4

### Le chauffage par induction électromagnétique

Lorsqu'un milieu conducteur est soumis au champ électrique induit (par la variation d'un champ magnétique), ce **champ induit** met en mouvement un grand nombre d'électrons du milieu (avec une proportion significative d'électrons libres). Les courants résultants de ce mouvement d'électrons sont appelés **courants induits**, ou **courants de Foucault** lorsqu'ils sont générés dans le volume du conducteur. Les mouvements d'électrons s'accompagnent de frottements et chocs avec les autres porteurs de charges du conducteur (réseau d'ions fixes et électrons liés), et donc, d'une transformation de l'énergie électrique (reçue par les électrons mobiles) en chaleur (effet Joule). Cette chaleur prend d'abord naissance dans une fine épaisseur pelliculaire située au niveau de la surface du conducteur (effet de peau), avant de

diffuser (par conduction thermique) dans une certaine profondeur au sein du conducteur. Le chauffage par induction est applicable à divers types de matériaux, de résistivité électrique comprise entre  $10^{-8} \Omega.m$  (cuivre) et  $10^{-1} \Omega.m$  (verre).

### Plaques de cuisson des aliments

Dans une plaque à induction utilisée pour la cuisson des aliments, on utilise un récipient spécial dont le fond est un disque métallique. Lors de la cuisson, ce disque est soumis à un champ magnétique alternatif dont l'amplitude est amplifiée par un noyau en acier doux. L'effet Joule créé par les courants de Foucault chauffe le disque. La chaleur diffuse ensuite dans le reste du récipient.

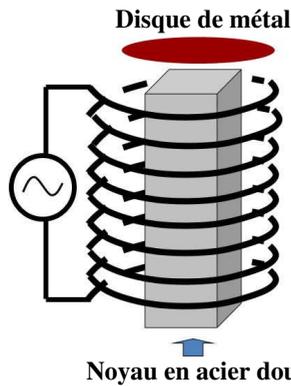


Schéma de principe d'une plaque de cuisson.

### Fours de fusion à creuset

Ce sont des dispositifs très utilisés en métallurgie pour la fusion et la transformation des métaux. Une bobine inductrice placée à l'extérieur d'un creuset, qui renferme le métal à liquéfier, crée de forts courants induits dans le métal. L'effet Joule créé par ces courants chauffe le métal jusqu'à son point de fusion.

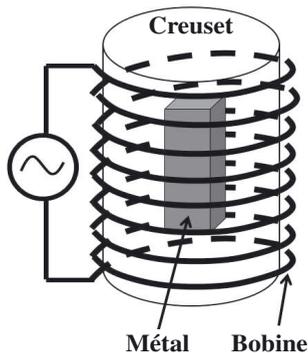


Schéma de principe d'un four de fusion à creuset.

# ● L'essentiel

- 1 En régime stationnaire (indépendant du temps), les champs électrique et magnétique sont complètement découplés.
- 2 En électrostatique, le champ électrique ne peut être créé que par des charges électriques. Cela se traduit localement par une relation entre le champ électrique en un point et la densité volumique de charge en ce point :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ .
- 3 En magnétostatique, le champ magnétique ne peut être créé que par des courants électriques. Cela se traduit localement par une relation entre le champ magnétique en un point et la densité volumique de courant en ce point :  $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ .
- 4 En régime variable (dépendant du temps), la condition d'existence d'une onde électromagnétique dans un milieu contenant des charges et des courants est donnée par les équations de Maxwell :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$





# Entraînez-vous

## 2.1 Équations de propagation dans le vide

1. Dédurre des équations de Maxwell les équations différentielles satisfaites par  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide.

2. Montrer que, lorsqu'on adopte la jauge de Lorentz, les potentiels vecteur et scalaire,  $\vec{A}$  et  $V$ , satisfont la même équation différentielle que celle qui décrit les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

## 2.2 Solution de l'équation d'onde

On considère l'équation de propagation, à une coordonnée d'espace, de l'une des composantes de  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  :  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ .

1. Quelle est la direction de propagation de cette onde ?

2. Vérifier qu'une fonction de la forme  $\varphi = f(t - z/c) + g(t + z/c)$  satisfait à cette équation.

## 2.3 Onde sphérique

On considère l'équation de propagation d'une onde  $\psi$  ne dépendant que de  $r = OM$  et de  $t$ , pouvant être l'une des composantes du champ électrique  $\vec{E}$  ou du champ magnétique  $\vec{B}$  :  $\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , où l'expression du laplacien en coordonnées sphériques s'écrit  $\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$ .

1. Quelle est la direction de propagation de cette onde ?

2. Vérifier que l'expression des solutions  $\psi(r, t)$  correspondant aux ondes sphériques issues d'une source O, est de la forme  $\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(t - r/c) + g(t + r/c)]$ .

## 2.4 Opérateurs en notation complexe

On considère une onde monochromatique plane dans le vide, caractérisée par le champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ , le potentiel vecteur  $\vec{A}$ , le potentiel scalaire  $V$ , le vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

1. Démontrer les relations suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}, \operatorname{rot} \vec{E} = -i\vec{k} \wedge \vec{E}, \operatorname{grad} V = -i\vec{k}V.$$

2. À partir de la jauge de Lorentz, montrer que pour une onde plane monochromatique,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation.



- 2.1** Réponse e ; **2.2** Réponse b ; **2.3** Réponse c ; **2.4** Réponse a ; **2.5** Réponse c ; **2.6** Réponse c ; **2.7** Réponse a ; **2.8** Réponse c.



## 2.1 Équations de propagation dans le vide

1. Dans le vide les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2) \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad (3) \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

### Équation de propagation du champ $\vec{E}$

En appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{E}$ , puis les équations (1), (2) et (4), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) \right] &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left[ \operatorname{div}(\vec{E}) \right] - \Delta \vec{E} \Rightarrow -\Delta \vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = \\ &= -\frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5) \end{aligned}$$

### Équation de propagation du champ $\vec{B}$

On applique la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{B}$ , puis les équations (2), (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left[ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) \right] &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left[ \operatorname{div}(\vec{B}) \right] - \Delta \vec{B} \Rightarrow -\Delta \vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

Les équations (5) et (6) sont les équations de propagation des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le vide.

### 2. Équation de propagation de $\vec{A}$

On sait que  $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$  (7)

$$\Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \rightarrow \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ compte tenu de (4).}$$

Par ailleurs, la relation champ-potentiel  $\vec{E}$  s'écrit  $= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\text{on a donc } \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \left( -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)$$

$$\text{soit } \Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \operatorname{div} \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

En appliquant la jauge de Lorentz :  $\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ,

on obtient :  $\Delta \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$  (10)

**Équation de propagation de  $V$**

La relation champ-potentiel  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  conduit à  $\text{div } \vec{E} = -\text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} V \right) - \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t}$ , et donc  $-\Delta V - \frac{\partial \text{div } \vec{A}}{\partial t} = 0$ .

En appliquant la jauge de Lorentz, on trouve :

$$\Delta V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

Les relations (10) et (11) montrent que les potentiels vecteur et scalaire,  $\vec{A}$  et  $V$ , satisfont la même équation différentielle que celle qui décrit les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  [(5) et (6)].

**2.2 Solution de l'équation d'onde**

1. L'équation  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ , ne fait intervenir qu'une seule coordonnée spatiale,  $z$ . En conséquence, l'onde se propage dans la direction  $Oz$ .

2. Posons  $\varphi = f(u) + g(v)$ , avec  $u = t - z/c$ , et  $v = t + z/c$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial z} g'(v) = -\frac{1}{c} f'(u) + \frac{1}{c} g'(v) = \frac{1}{c} [-f'(u) + g'(v)].$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial z} [-f'(u) + g'(v)] = \frac{1}{c} \left[ -\frac{\partial u}{\partial z} f''(u) + \frac{\partial v}{\partial z} g''(v) \right] = \frac{1}{c^2} [f''(u) + g''(v)] \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial t} g'(v) = f'(u) + g'(v).$$

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} [f'(u) + g'(v)] = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} f''(u) + \frac{\partial v}{\partial t} g''(v) \right] = [f''(u) + g''(v)] = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ , en tenant compte de (1).

$\varphi = f(t - z/c) + g(t + z/c)$  satisfait bien l'équation  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$ .

**2.3 Onde sphérique**

1. On considère l'équation  $\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  (1), avec  $\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$ .

L'équation (1) ne fait intervenir qu'une seule coordonnée spatiale :  $r$ . Conséquemment, l'onde se propage dans toutes les directions de manière radiale, à savoir  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ .

2. Posons  $\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(u) + g(v)] = C \times D$ , avec  $u = t - r/c$ ,  $v = t + r/c$ ,  $C = r^{-1}$ , et  $D = f(u) + g(v)$ .

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = D \frac{\partial C}{\partial r} + C \frac{\partial D}{\partial r}, \text{ avec } \frac{\partial C}{\partial r} = -r^{-2} \text{ et } \frac{\partial D}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial r} g'(v) = \frac{1}{c} [-f'(u) + g'(v)]$$

$$\text{soit } \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r^{-2} [f(u) + g(v)] + \frac{r^{-1}}{c} [-f'(u) + g'(v)]$$

$$\text{et } r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} = -[f(u) + g(v)] + \frac{r}{c} [-f'(u) + g'(v)] = -D + r \frac{\partial D}{\partial r}$$

$$\text{donc } \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = -\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{\partial D}{\partial r} + r \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} = \frac{r}{c^2} [f''(u) + g''(v)]$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = \frac{1}{rc^2} [f''(u) + g''(v)] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = r^{-1} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} f'(u) + \frac{\partial v}{\partial t} g'(v) \right] = r^{-1} [f'(u) + g'(v)].$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = r^{-1} [f''(u) + g''(v)] = c^2 \Delta \psi, \text{ en tenant compte de (2).}$$

On conclut que  $\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(t - r/c) + g(t + r/c)]$  satisfait l'équation

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

## 2.4 Opérateurs en notation complexe

On considère le champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ .

1. Posons :  $\vec{r} = \overline{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$ ,  $\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$ ,

et  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} \vec{u}_z$

$$\text{Alors } \vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} \exp i\theta, \text{ avec } \theta = \omega t - x k_x - y k_y - z k_z$$

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = -ik_x E_x - ik_y E_y - ik_z E_z = -i\vec{k} \cdot \vec{E} \rightarrow$$

$$\text{div} \vec{E} = -i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ik_y E_z + ik_z E_y \\ -ik_z E_x + ik_x E_z \\ -ik_x E_y + ik_y E_x \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } \overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -i\vec{k} \wedge \vec{E} \quad (2)$$

Dans l'exercice 2.1, nous avons vu que dans le vide les potentiels vecteur et scalaire satisfont la même équation de propagation que celle de  $\vec{E}$  lorsque l'on adopte la jauge de Lorentz. Par analogie avec l'expression de  $\vec{E}$  on peut considérer que  $V = V_0 \exp i\theta$  et  $\vec{A} = \vec{A}_0 \exp i\theta$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} V &= \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \vec{u}_z \\ &= -ik_x V \vec{u}_x - ik_y V \vec{u}_y - ik_z V \vec{u}_z \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\text{grad}} V = -i\vec{k}V$$

2. Démonstrations :

$$\text{div } \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \text{soit } -i\vec{k} \cdot \vec{A} + i\omega \mu_0 \varepsilon_0 V = 0 \quad (4)$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \vec{E} = i\vec{k}V - i\omega \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = iV k^2 - i\omega \vec{k} \cdot \vec{A} \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) donnent  $\vec{k} \cdot \vec{E} = iV k^2 - i\omega \vec{k} \cdot \vec{A} = i(k^2 V - \omega \times \omega \mu_0 \varepsilon_0 V) = iV(k^2 - \omega^2/c^2)$ .

Comme la relation de dispersion dans le vide s'écrit :  $k^2 = \omega^2/c^2$ , il en résulte  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ .

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -i\vec{k} \wedge \vec{A} \quad \text{et donc} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = -i\vec{k} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{A}) = 0.$$

# L'énergie électromagnétique

## Introduction

De toutes les branches de la physique, l'électromagnétisme est sans doute celle qui a été la plus fertile en applications pratiques. Tous les jours, nous utilisons et côtoyons une diversité d'outils tels que la plaque à induction utilisée pour la cuisson des aliments, le four à micro-ondes, l'imagerie médicale, la radio, la télévision, le téléphone portable, le GPS, les radars, et bien d'autres encore, qui ont comme point commun d'exploiter de manière directe ou indirecte l'énergie que transportent les ondes électromagnétiques.

## Objectifs

**Connaître** les grandeurs énergétiques qui permettent de quantifier l'énergie électromagnétique.

**Savoir** calculer ces grandeurs énergétiques (puissance dissipée, puissance rayonnée).

**Avoir** un aperçu de l'utilisation de l'énergie électromagnétique dans quelques applications du quotidien.

## Plan

- 1 Bilan énergétique local
- 2 Vecteur de Poynting
- 3 Application aux ondes planes
- 4 Application aux ondes sphériques
- 5 Rayonnement dipolaire électrique

## 1 Bilan énergétique local

Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. La propagation de cette énergie se ressent dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, comme par exemple, lors d'une exposition aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude, lorsqu'on fait chauffer un aliment dans un four à micro-ondes, ou lorsqu'on capte les émissions d'une station de radio ou de télévision. On peut donc dire qu'en tout point où règne un champ électromagnétique, il existe une certaine densité d'énergie électromagnétique.

En admettant qu'en tout point de l'espace où existe un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , on puisse définir une **densité volumique d'énergie** électromagnétique  $u(x, y, z, t)$ , alors un domaine fini  $\mathcal{D}$  limité par une surface  $S$ , contiendra par hypothèse, à l'instant

$t$ , une énergie électromagnétique

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{D}} u(x, y, z, t) d\tau. \quad (3.1)$$

Cette énergie contenue dans le domaine  $\mathcal{D}$  peut varier au cours du temps pour deux raisons.

(i) Les charges contenues dans  $\mathcal{D}$  subissent les forces créées par le champ électromagnétique, et reçoivent donc de l'énergie du champ électromagnétique ; ce qui a pour effet de diminuer l'énergie  $U$ . Plus précisément, si  $\rho$  est la densité volumique de charges, un volume élémentaire  $d\tau$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  subira la force :

$$d\vec{f} = \rho d\tau \times (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Le travail reçu par ces charges pendant le laps de temps  $dt$  où les charges se sont déplacées de  $d\vec{l} = \vec{v} dt$  est :

$$dW_1 = d\vec{f} \cdot \vec{v} dt = \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} dt = \vec{j} \cdot \vec{E} dt d\tau,$$

où  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  est le vecteur **densité de courant**. D'après le théorème de l'énergie cinétique, ce travail reçu provoque une variation de l'énergie cinétique de ces charges :  $dE_c = dW_1$ . Dans tout le domaine  $\mathcal{D}$ , la variation d'énergie par unité de temps correspond à la puissance reçue du champ électromagnétique par les charges mobiles, à savoir :

$$P_1 = \frac{dW_1}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dE_c}{dt} d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau. \quad (3.2)$$

(ii) D'autre part, comme il n'existe aucune raison pour que l'énergie du champ électromagnétique reste confinée dans un domaine fini de l'espace, une partie de cette énergie peut entrer ou sortir du domaine  $\mathcal{D}$ . Autrement dit, au cours du temps, une partie de l'énergie électromagnétique traverse la surface  $S$  délimitant le domaine  $\mathcal{D}$ . Pour l'exprimer on peut, sans restreindre la généralité du problème, se placer dans la situation où l'énergie sort de  $\mathcal{D}$  (figure 3.1).

On peut définir la quantité d'énergie qui traverse un élément de surface  $d\vec{S}$  pendant l'unité de temps, comme étant le flux à travers  $d\vec{S}$  d'un certain vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$ . La puissance qui s'échappe du domaine  $\mathcal{D}$  en franchissant la surface  $S$  est donc :

$$P_2 = \iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}. \quad (3.3)$$

La puissance totale perdue au sein du domaine  $\mathcal{D}$ , à savoir  $-\frac{dU}{dt}$ , est donc *a priori* égale à  $P_1 + P_2$ . La définition de la densité d'énergie électromagnétique donnée par (3.1) implique que :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau. \quad (3.4)$$

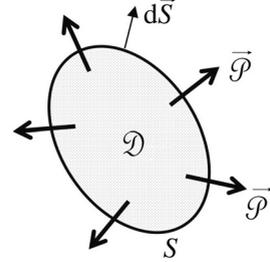


Figure 3.1

Les relations (3.2), (3.3), et (3.4), conduisent à :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -P_1 - P_2 = - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}. \quad (3.5)$$

D'après le théorème de la divergence, on a :

$$\iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div} \vec{\mathcal{P}} d\tau. \quad (3.6)$$

Les relations (3.5) et (3.6) conduisent à :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iiint_{\mathcal{D}} \text{div} \vec{\mathcal{P}} d\tau. \quad (3.7)$$

Comme la relation (3.7) est valable quel que soit le domaine  $\mathcal{D}$ , on peut finalement écrire que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{\mathcal{P}} = 0. \quad (3.8)$$

La relation (3.8) traduit le bilan local de l'énergie électromagnétique, avec un vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$  dont l'expression en fonction du champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) sera définie dans la prochaine section.

## 2 Vecteur de Poynting

Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs non nuls. D'après l'analyse vectorielle, on peut écrire que :

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b}.$$

L'application de cette relation au champ électromagnétique s'écrit :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}. \quad (3.9)$$

L'équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  soit

$$\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}. \quad (3.10)$$

L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}. \quad (3.11)$$

En tenant compte de (3.10) et (3.11), l'équation (3.9) devient :

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}, \quad (3.12)$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 0. \quad (3.13)$$

L'expression (3.13) coïncide avec le bilan local d'énergie donné par (3.8), si nous posons :

$$u = \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (3.14)$$

et

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (3.15)$$

Le vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$  ainsi défini s'appelle le **vecteur de Poynting**. Rappelons que le **flux** de  $\vec{\mathcal{P}}$  à travers une surface donnée représente la quantité d'énergie électromagnétique qui traverse cette surface pendant l'unité de temps.

### Encart 3.1 Michael Faraday

Faraday est un physicien britannique, né à Newington en 1791 et mort à Hampton Court en 1867. Il est connu pour ses travaux fondamentaux dans le domaine de l'électromagnétisme, l'électrochimie, le diamagnétisme, et l'électrolyse. Il découvre de multiples lois et phénomènes dans ces domaines, notamment la loi de Faraday (ou Lenz-Faraday) en induction électromagnétique qui est l'une des quatre équations de Maxwell, les lois de Faraday en électrochimie, l'effet Faraday, ou encore à des dispositifs expérimentaux comme la cage de Faraday et la cavité de Faraday. Son nom a été donné à une unité de mesure de la capacité électrique : le farad.



## 3 Application aux ondes planes

Nous nous plaçons dans le cas des ondes planes progressives dans le vide.

Nous savons que dans le vide les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont liés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad (3.16)$$

avec  $k = \omega/c$ . Il en résulte immédiatement que :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{\vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{k})}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2 \vec{k}}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n}. \quad (3.17)$$

Cette relation montre que le vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$  est orienté dans la direction de propagation  $\vec{n} = \vec{k}/k$ .

La relation (3.16) implique que  $B = E/c$ , et comme  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$ , on a :

$$\frac{1}{2}\epsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0c^2B^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \Rightarrow u = \epsilon_0E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (3.18)$$

Il en résulte que dans ce cas les contributions des deux champs à la densité d'énergie électromagnétique  $u$  sont égales. On peut alors écrire que :

$$\vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0E^2c\vec{n} = \frac{B^2}{\mu_0}c\vec{n} = uc\vec{n}. \quad (3.19)$$

Par ailleurs  $E$  et  $B$  étant fonctions de  $x - ct$ , il en est de même de  $\vec{\mathcal{P}}$ .

À titre d'exemple, considérons une onde plane sinusoïdale monochromatique, se propageant suivant la direction Ox. On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t),$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant orthogonaux et dans le rapport  $c$ . Le vecteur de Poynting s'écrit selon

$$(3.19) : \vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0E^2c\vec{e}_x = \epsilon_0cE_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\vec{e}_x.$$

Sa valeur moyenne dans le temps en tout point  $x$  est

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \epsilon_0cE_0^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle \vec{e}_x = (\epsilon_0cE_0^2/2)\vec{e}_x. \quad (3.20)$$

D'après (3.18), la densité d'énergie électromagnétique en un point d'abscisse  $x$  s'écrit :

$$u = \epsilon_0E_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Sa valeur moyenne est une valeur constante :

$$\langle u \rangle = \langle \epsilon_0E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \epsilon_0E_0^2/2 = c \langle \mathcal{P} \rangle. \quad (3.21)$$

**Remarque** Les expressions (3.20) et (3.21) montrent que  $\langle \mathcal{P} \rangle = c \langle u \rangle$ . Le fait que la densité d'énergie électromagnétique soit constante en tout point  $x$  implique une énergie totale infinie. Cela est dû au fait que, par construction, une onde plane n'est pas bornée dans l'espace. Comme l'onde s'étend jusqu'à l'infini, l'énergie qu'elle transporte est donc nécessairement infinie. En pratique, une telle onde n'existe pas. L'onde plane n'est qu'un modèle mathématique permettant de représenter localement une onde ayant une structure plus complexe.

### Exemple

Calculons l'amplitude du champ électrique associé à un faisceau laser de diamètre  $d$  et de puissance  $P_L$ .

La valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers une section transverse du faisceau s'écrit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle \times S = \langle \mathcal{P} \rangle \frac{\pi d^2}{4} = \langle u \rangle c \frac{\pi d^2}{4} = P_L$$

avec  $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 / 2$  soit :  $P_L = \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c = \frac{\pi d^2}{8} \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2$ .

On en déduit :  $E_0 = \frac{8\mu_0 c}{\pi d^2} P_L$  soit  $E_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{8\mu_0 c}{\pi} P_L}$ .

Pour un laser HeNe avec  $P_L = 1 \text{ mW}$  et  $d = 2 \text{ mm}$ , on a  $E_0 \approx 250 \text{ V.m}^{-1}$ .

Pour un laser CO<sub>2</sub> avec  $P_L = 40 \text{ kW}$  et  $d = 0,1 \text{ mm}$ , on a  $E_0 \approx 32 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$ .

## 4 Application aux ondes sphériques

Les champs associés aux ondes sphériques sont de la forme suivante :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(t - r/c) + g(t + r/c)] .$$

Considérons une onde sphérique dont le champ électrique a pour expression  $\vec{E} = \frac{1}{r} E_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\theta = E_\theta \vec{u}_\theta$ , dans un système de coordonnées sphériques de vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ .

L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B} \quad \text{soit}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \text{rot} \vec{E} = \frac{1}{i\omega} \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta E_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r E_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} = \frac{1}{i\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} \right) \end{vmatrix}$$

et donc

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega r} E_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\phi = B_\phi \vec{u}_\phi .$$

En notation réelle, le champ électromagnétique s'écrit donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{r} E_0 \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega r} E_0 \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\phi ,$$

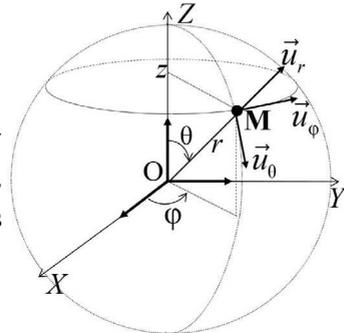


Figure 3.2

avec  $k = \frac{\omega}{c}$ , le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{r^2 \mu_0 c} \cos^2(kr - \omega t) \vec{u}_r. \quad (3.22)$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \frac{E_0^2}{2r^2 \mu_0 c} \vec{u}_r. \quad (3.23)$$

Ici aussi, on peut remarquer que  $\vec{\mathcal{P}}$  est colinéaire à la direction de propagation de l'onde.

Le flux du vecteur  $\vec{\mathcal{P}}$  à travers une demi-sphère de rayon  $r = R$  centrée à l'origine s'écrit :

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{E_0^2}{2r^2 \mu_0 c} \times (2\pi r \sin \theta) \times r d\theta = \frac{\pi E_0^2}{\mu_0 c} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\pi E_0^2}{\mu_0 c} \quad (3.24)$$

On constate que ce flux indépendant de  $R$ .

## 5 Rayonnement dipolaire électrique

Considérons le cas d'un milieu comportant des charges libres. En présence d'un champ électromagnétique sinusoïdal monochromatique, toute charge libre  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  subit la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

La vitesse  $\vec{v}$  étant généralement très faible devant la vitesse de la lumière, l'effet du champ électrique est prépondérant car  $|E| \gg |q\vec{v} \wedge \vec{B}| \simeq q \frac{v}{c} |E|$ . La charge est donc soumise à une force sinusoïdale directement proportionnelle à  $\vec{E}$ . Elle exécute alors des oscillations autour de sa position d'équilibre. Ce mouvement oscillatoire génère un champ électromagnétique (**champ induit**), qui vient se superposer au **champ incident**. Cette particule chargée est donc animée d'un mouvement oscillatoire dont l'effet est équivalent à celui d'un dipôle électrique .

Pour calculer le champ rayonné par ce dipôle (champ induit), nous allons considérer que la charge ponctuelle  $q$  est animée d'un mouvement le long de l'axe Oz, au voisinage de l'origine O d'un trièdre de référence. La position de cette charge à l'instant  $t$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{r}_q(t) = z_0 \vec{u}_z e^{-i\omega t}. \quad (3.25)$$

Sa vitesse est alors :

$$\vec{v}(t) = -i\omega z_0 \vec{u}_z e^{-i\omega t} \quad (3.26)$$

Comme nous ne nous intéressons qu'au champ rayonné à grande distance du dipôle, nous pouvons nous placer dans le cadre de l'approximation dipolaire, qui consiste à négliger

l'extension spatiale du mouvement de la particule,  $z_0$  (qui est de l'ordre de quelques angströms), par rapport à toutes les autres grandeurs caractéristiques du problème. En d'autres termes, nous supposons que

$$z_0 \ll \lambda,$$

où  $\lambda = 2\pi c/\omega$  est la longueur d'onde (dans le vide) du champ électromagnétique incident de pulsation  $\omega$ , qui est de l'ordre du micron. On a également

$$z_0 \ll r,$$

où  $r$  est le module de  $\vec{r}$ , distance de l'origine au point d'observation du champ.

Par ailleurs, il est à noter qu'à grande distance du dipôle, les effets du mouvement de la particule chargée ne sont pas immédiats. On doit donc prendre en compte le temps de propagation des champs entre la charge et le point d'observation, en utilisant les **potentiels retardés** de Liénard-Wiechert.

Dans les conditions que nous venons de préciser, et en tenant compte du fait que la charge est en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$ , le potentiel vecteur créé par la charge ponctuelle s'écrit :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\vec{j}(t')}{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}(t')}{c}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{q \vec{v}(t')}{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}(t')}{c}} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{q \vec{v}(t')}{1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')}{c}}, \quad (3.27)$$

où  $\vec{u}_r = \vec{r}/r$ , et

$$t' = t - r/c \quad (3.28)$$

est le **temps retardé**. Dans l'expression (3.27)  $\vec{j}$  désigne la densité de courant créé par la charge mobile. Compte tenu de (3.28) on a

$$\vec{j}(t') = q\vec{v}(t') = -iqz_0\omega e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z = -ij_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z, \quad (3.29)$$

avec

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad j_0 = qz_0\omega. \quad (3.30)$$

Pour le potentiel scalaire, on a :

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}(t')}{c}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{1 - \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')}{c}} \quad (3.31)$$

On peut effectuer un développement de ces potentiels au premier ordre en  $v(t')/c$ , en écrivant :

$$\frac{1}{1 - \vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')/c} \simeq 1 + \vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')/c \quad (3.32)$$

On remarque alors dans (3.29) et (3.32) que le premier ordre non nul pour le potentiel scalaire correspond au potentiel électrostatique  $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ . Ce terme ne contribue pas au rayonnement et peut donc être ignoré. Le second terme, proportionnel à  $\vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')/c$ , contribue au rayonnement. On peut noter que

$$\vec{u}_r \cdot \vec{v}(t')/c = -i \frac{z_0 \omega}{c} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = -i \frac{z_0 \omega}{c} \cos \theta e^{i(kr - \omega t)}. \quad (3.33)$$

D'autre part, on remarque dans (3.29) et (3.32) que le premier ordre non nul pour le potentiel vecteur contribue au rayonnement. Ainsi, en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  avec la base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ , au premier ordre significatif, les expressions des potentiels contribuant au rayonnement s'écrivent :

$$\vec{A} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r} i q z_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z = -i \frac{\mu_0 j_0}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_z = -i \frac{\mu_0 j_0}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)} (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta), \quad (3.34)$$

$$\vec{V} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}}{c} = -i \frac{a}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\omega}{c} \cos \theta e^{i(kr - \omega t)}, \quad (3.35)$$

avec

$$a = q z_0. \quad (3.36)$$

Le champ  $\vec{B}$  s'obtient en écrivant  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ . La formule (3.34) conduit alors à :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} \quad \text{soit}$$

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{u}_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi = -i \left( \frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi \quad (3.37)$$

En négligeant le terme en  $\frac{1}{r^2}$ , puisque l'on s'intéresse au champ à grande distance, on obtient

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{u}_\varphi = -\frac{\omega \mu_0 j_0}{4\pi r c} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi = -\frac{\omega^2 \mu_0 a}{4\pi r c} \sin \theta e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi. \quad (3.38)$$

On constate qu'à grande distance le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire à la direction de propagation  $\vec{u}_r$  et (quasi) sphérique.

On peut obtenir le champ  $\vec{E}$  (associé à  $\vec{B}$ ) de plusieurs manières. L'une d'entre elles consiste à utiliser les potentiels scalaire et vecteur :

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.39)$$

La relation (3.34) conduit à :

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{vmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \frac{\mu_0 a \omega^2}{4\pi r} e^{i(kr - \omega t)}.$$

La relation (3.35) conduit à :

$$\vec{\text{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi = \begin{vmatrix} (-ik + 1/r)\cos\theta \\ \frac{1}{r}\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \frac{ia}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\omega}{c} e^{i(kr-\omega t)}.$$

Comme les termes en  $1/r^2$  sont négligeables devant ceux en  $1/r$ , on obtient finalement :

$$\vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta = -\frac{\mu_0 a \omega^2}{4\pi r} \sin\theta e^{i(kr-\omega t)} \vec{u}_\theta. \quad (3.40)$$

On remarque que le champ  $\vec{E}$  est également transversal, qu'il est normal à  $\vec{B}$ , et que :

$$\frac{E_\theta}{B_\varphi} = c. \quad (3.41)$$

Autrement dit, à grande distance, l'onde rayonnée par le dipôle peut être considérée comme localement plane et localement sphérique.

Après la remise des champs en notation réelle, le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_\theta \vec{u}_\theta \wedge B_\varphi \vec{u}_\varphi}{\mu_0} = \frac{E_\theta B_\varphi}{\mu_0} \vec{u}_r = \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 a \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 \cos^2(kr-\omega t) \vec{u}_r, \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 a \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 \vec{u}_r. \quad (3.44)$$

La puissance rayonnée par le dipôle électrique dans tout l'espace est le flux du vecteur de Poynting  $\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle$  à travers la sphère de centre O et de rayon  $r$ . On peut remarquer que cette énergie n'est pas distribuée de façon isotrope, mais dépend de l'angle  $\theta$ .

La puissance rayonnée dans le cône compris entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est :

$$d \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P}(r, \theta) \rangle \times dS = \frac{1}{2\mu_0 c} \left( \frac{\mu_0 a \omega^2}{4\pi r} \sin\theta \right)^2 \times (2\pi r \sin\theta) \times r d\theta$$

$$= \frac{a^2 \omega^4 \mu_0}{16\pi c} \sin^3\theta d\theta.$$

Sachant que  $\sin 3\theta = 3 \sin\theta - 4 \sin^3\theta$  et que  $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$ , la puissance totale rayonnée par le dipôle est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle_{total} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{a^2 \omega^4 \mu_0}{12\pi c}. \quad (3.45)$$

Il est intéressant de noter que :

- La densité de rayonnement est fortement anisotrope :  $f(\theta) = \frac{d \langle \mathcal{P} \rangle}{d\theta} = \frac{a^2 \omega^4 \mu_0}{16\pi c} \sin^3 \theta$ . La représentation de la fonction  $f(\theta)$  en coordonnées polaires s'appelle le **diagramme de rayonnement du dipôle** (figure 3.3). Il est facile de voir que dans le cas présent il est formé d'un lobe ayant une symétrie de révolution autour de l'axe du dipôle. Le rayonnement est maximal dans la direction perpendiculaire à l'axe du dipôle (axe Oz), et nul sur l'axe du dipôle.

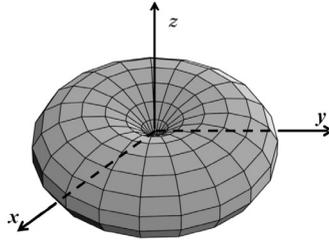


Figure 3.3 – Diagramme de rayonnement d'un dipôle électrique.

- La relation (3.45) montre que la puissance rayonnée est proportionnelle à  $\omega^4$  c'est-à-dire à la puissance 4 de la fréquence. Si le champ incident est polychromatique, les hautes fréquences seront donc davantage diffusées que les basses fréquences ; autrement dit, la puissance diffusée pour les hautes fréquences sera plus grande que celle des basses fréquences. Cette remarque est à la base de l'explication de la couleur bleu du ciel. En effet les charges présentes dans l'atmosphère diffusent  $2^4 = 16$  fois plus le violet (et bleu) que le rouge puisque leurs fréquences respectives sont dans le rapport 2. En effet  $f_{\text{violet}} \sim 0,4 \mu\text{m}$  et  $f_{\text{rouge}} \sim 0,7 \mu\text{m}$ .

Des grandeurs physiques spécifiques permettent de quantifier l'énergie électromagnétique.

- 1 Toute onde électromagnétique transporte une certaine quantité d'énergie.
- 2 Dans le vide, il ne peut y avoir de perte d'énergie électromagnétique.
- 3 Dans un milieu matériel, une partie de l'énergie électromagnétique est toujours perdue par effet Joule.
- 4 Tout domaine matériel atteint par une onde électromagnétique n'absorbe qu'une partie de l'énergie transportée par l'onde. La partie restante franchit les surfaces limitrophes du domaine. L'énergie qui traverse une surface  $S$  (par unité de temps) constitue la **puissance rayonnée** par l'onde électromagnétique. On fait référence à cette densité de puissance  $\vec{P}$  comme étant le **vecteur de Poynting**.
- 5 **Densité volumique d'énergie électromagnétique.** En tout point d'un milieu où règne un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , on peut définir une **densité volumique d'énergie électromagnétique**, dont l'expression est donnée par :

$$u = (\epsilon_0 E^2 + B^2 / \mu_0) / 2.$$

Ainsi, un volume élémentaire  $d\tau$  du milieu, contient une énergie  $u d\tau$ , tandis qu'un domaine fini  $\mathcal{D}$  contient à l'instant  $t$ , une énergie électromagnétique :

$$U(t) = \int \int \int_{\mathcal{D}} u(t) d\tau.$$

- 6 **Puissance dissipée par l'onde électromagnétique.** Une onde électromagnétique qui arrive dans un milieu matériel, ne peut conserver la totalité de son énergie ; une partie de l'énergie électromagnétique est transférée au milieu matériel. Dans un domaine  $\mathcal{D}$  où règne une onde électromagnétique, la puissance reçue par les charges présentes dans  $\mathcal{D}$ , s'écrit :

$$P_t = \int \int \int_{\mathcal{D}} \frac{dW}{dt} d\tau = \int \int \int_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

On fait référence à cette puissance comme étant la puissance dissipée par l'onde électromagnétique.

- 7 Puissance rayonnée par l'onde électromagnétique.** De manière générale, tout domaine matériel  $\mathcal{D}$  atteint par une onde électromagnétique, n'absorbe qu'une partie de l'énergie transportée par l'onde. La partie restante de l'énergie électromagnétique franchit les surfaces limitrophes du domaine  $\mathcal{D}$ . L'énergie qui traverse une surface  $S$  (par unité de temps) constitue la puissance rayonnée par l'onde électromagnétique à travers la surface  $S$ . La puissance rayonnée à travers une surface  $S$ ,  $P_r$ , est définie comme étant le flux à travers cette surface, d'une densité surfacique de puissance  $\mathcal{P}$  :  $P_r = \int \int_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}$ .

On fait référence à cette densité de puissance  $\mathcal{P}$  comme étant le **vecteur de Poynting**. Son expression est donnée par :

$$\vec{\mathcal{P}} = (\vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0).$$



## Testez-vous

- 3.1** Une onde électromagnétique est constituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Dans un milieu matériel, une partie de cette énergie est dissipée sous forme d'effet Joule. La puissance dissipée résulte principalement des collisions et frottements occasionnés par les porteurs de charge, induits par le :
- a. champ électrique
  - b. champ magnétique
- 3.2** En principe, la puissance dissipée par une onde électromagnétique dans un milieu matériel est plus importante dans un :
- a. milieu peu dense (comme l'air)
  - b. milieu très dense (comme le béton)
- 3.3** La puissance mesurée par un détecteur d'ondes électromagnétiques correspond à :
- a. la puissance dissipée par l'onde
  - b. la puissance rayonnée par l'onde
- 3.4** La puissance mesurée par un détecteur d'onde électromagnétique correspond à :
- a. la moyenne temporelle du vecteur de Poynting
  - b. la moyenne spatiale du vecteur de Poynting
  - c. l'amplitude du vecteur de Poynting
- 3.5** En principe, le calcul du vecteur de Poynting :
- a. peut se faire uniquement à l'aide du champ électrique
  - b. peut se faire à l'aide uniquement du champ magnétique
  - c. nécessite de connaître le champ électrique et le champ magnétique de l'onde
- 3.6** En principe, le calcul de la densité volumique de l'énergie électromagnétique :
- a. peut se faire uniquement à l'aide du champ électrique
  - b. peut se faire uniquement à l'aide du champ magnétique
  - c. nécessite de connaître le champ électrique et le champ magnétique de l'onde
- 3.7** L'énergie électromagnétique se propage à une vitesse correspondant à :
- a. la vitesse de groupe de l'onde
  - b. la vitesse de phase de l'onde



- 3.1** Une onde électromagnétique plane se propage dans le vide, avec un champ électrique donné par  $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{u}_x$ , où  $z$  et  $t$  représentent respectivement les coordonnées d'espace et de temps,  $k$  désigne le module du vecteur d'onde, et  $\omega$  désigne la pulsation de l'onde.
1. Donner l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{P}$  de cette onde, et sa valeur moyenne temporelle  $\langle \vec{P} \rangle$ , en fonction de  $E_0$ ,  $c$ ,  $\mu_0$ .
  2. Que représentent physiquement le vecteur  $\langle \vec{P} \rangle$  et la direction de ce vecteur ?
- 3.2** Une mesure de champ électromagnétique a été effectuée dans un appartement situé à proximité d'un émetteur radiofréquence. La mesure, effectuée à l'aide d'un mesureur de champ électrique, indique un champ électrique d'amplitude crête  $10 \text{ V.m}^{-1}$ .
1. Déterminer les densités de puissance crête et moyenne transportées par l'onde électromagnétique provenant de cet émetteur.
  2. Des recommandations européennes d'exposition du public aux champs électromagnétiques exigent que les personnes ne soient pas soumises à une densité de puissance crête supérieure à  $2 \text{ W.m}^{-2}$ . Que peut-on conclure de cette mesure ?
- 3.3** Radio campus émet sur 94,7 MHz. Supposons que cette station envoie dans la direction Ox une onde polarisée suivant Oy, de champ électrique  $E_0 = 43 \times 10^{-3} \text{ V.m}^{-1}$  dans la région où se trouve le récepteur.
1. Comment doit-on placer le récepteur constitué d'un cadre rectangulaire de surface  $S = 100 \text{ cm}^2$  comprenant  $N = 1\,000$  spires pour recevoir la f.e.m.  $e$  maximale ? Calculer la valeur maximale de  $e$ .
  2. Exprimer le vecteur de Poynting et la puissance émettrice de la station si le récepteur est placé à 5 km, et si l'on admet que l'émission est uniforme sur une demi-sphère concentrique avec la station.
  3. Comment varie l'amplitude du champ électrique en fonction de la distance  $R$  à l'émetteur ? En déduire la portée de l'émetteur si le récepteur a un seuil de détection de  $0,5 \text{ mV.m}^{-1}$ .
- 3.4** Une station radio émet une puissance moyenne de  $10^5 \text{ W.m}^{-2}$ . Cette émission est uniforme sur une demi-sphère concentrique avec la station. En un point situé à 10 km de la station, calculer l'amplitude du champ électrique.
- 3.5** Un téléphone portable émet une puissance de 1 W de façon sensiblement uniforme dans l'espace. Calculer la puissance rayonnée par unité de surface à 10 cm du téléphone.
- 3.6** Un petit laser hélium néon produit typiquement 1 mW dans un faisceau de 1 mm de diamètre. Estimer l'amplitude des champs électrique et magnétique dans le faisceau laser.
- 3.7** Un laser émet des impulsions de durée 10 ns et d'énergie 100 mJ, dans un faisceau de section transversale  $0,25 \text{ cm}^2$ .

### Chapitre 3 • L'énergie électromagnétique

1. Calculer l'amplitude du champ électrique associée à l'onde laser, considérée comme plane.
2. Calculer la quantité de mouvement cédée par unité de temps par l'onde laser sur un miroir parfait en incidence normale (collision élastique), et en déduire la pression exercée par l'onde sur le miroir (appelée pression de radiation).



**3.1** Réponse a ; **3.2** Réponse b ; **3.3** Réponse b ; **3.4** Réponse a ; **3.5** Réponse c ; **3.6** Réponse c ; **3.7** Réponse a.



**3.1** 1. Expression du vecteur de Poynting

$$\text{Ici, } \vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{u}_x \text{ et } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z.$$

D'après la relation de structure des ondes planes,  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \vec{u}_y.$

L'expression du vecteur de Poynting est donc  $\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_z.$

La valeur moyenne temporelle de  $\vec{P}$  est

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(kz - \omega t) \rangle \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

2.

- $\langle \vec{P} \rangle$  est la densité surfacique de puissance moyenne transportée par l'onde.
- La direction de  $\langle \vec{P} \rangle$  est la direction de propagation de l'énergie électromagnétique.

**3.2** 1. Densités de puissances de l'onde

Il découle de l'exercice 3.1 que :

- la densité de puissance moyenne transportée par l'onde est :  $\langle \vec{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$
- la densité de puissance crête est :  $\vec{P}_c = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{u}_z = 2 \langle \vec{P} \rangle.$

2. Applications numériques et conclusion

Avec  $E_0 = 10 \text{ V.m}^{-1}$ , on trouve  $\langle P \rangle = 0,13 \text{ W.m}^{-2}$  et  $P_c = 0,26 \text{ W.m}^{-2}$ .

Comme  $P_c \ll 2 \text{ W.m}^{-2}$ , on peut conclure que l'exposition de cet appartement aux ondes électromagnétiques respecte ces recommandations européennes.

**3.3** 1. Position du récepteur et f.e.m.

Le cadre du récepteur est un circuit soumis à un flux magnétique variable  $\Phi(t)$  généré par le champ magnétique  $\vec{B}$  de l'onde électromagnétique. D'après la loi de Faraday, ce circuit acquiert une force électromotrice (f.e.m) :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

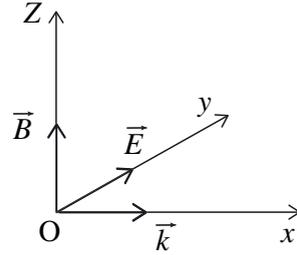
À grande distance, on peut considérer que le champ électromagnétique émis par la station Radio-Campus a localement la structure d'une onde plane, telle que :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y \text{ et } \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x = \frac{2\pi\nu}{c} \vec{u}_x, \text{ avec } \nu = 94,7 \text{ MHz}$$

et  $E_0 = 43 \cdot 10^{-3} \text{ V.m}^{-1}$ .

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers le cadre formé des  $N$  spires est  $\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = NS \vec{B} \cdot \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la surface du cadre. Il est clair que le flux est maximal si  $\vec{B}$  est colinéaire à  $\vec{n}$ . En d'autres termes, **le cadre doit donc être orienté de telle sorte que son plan soit perpendiculaire à  $\vec{B}$ .**



Dans ce cas,  $\Phi = N \vec{B} \cdot \vec{S} = NSB = \frac{NS E_0}{c} \cos(kx - \omega t)$   
 $\rightarrow e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{NS E_0 \omega}{c} \sin(\omega t - kx) = e_{\max} \sin(\omega t - kx)$ , avec  
 $e_{\max} = NS E_0 \omega / c = 0,85 \text{ V}$ .

2. Vecteur de Poynting et puissance émise :

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \vec{u}_x \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

Si l'on admet que la station émet pratiquement la même énergie dans une demi-sphère concentrique avec la station, alors le flux de  $\vec{P}$  à travers une demi-sphère de rayon  $R$  correspond à la puissance émise par la station :

$$P_{\text{rayonnée}} = \int \langle P \rangle dS = \langle P \rangle \times 2\pi R^2 = \frac{\pi R^2 E_0^2}{\mu_0 c} = 385 \text{ W}$$

3. Portée de l'émetteur.

La puissance rayonnée pouvant être considérée comme constante, on a :

$$P_{\text{rayonnée}} = \text{cste et } \frac{\pi R^2 E_0^2}{\mu_0 c} = \text{cste, soit } E_0 R = \text{cste}; E_0 \text{ varie donc en } 1/R.$$

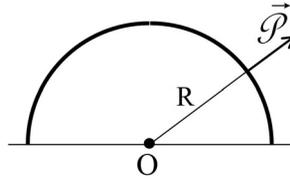
Le seuil de détection du récepteur est  $E'_0 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ V.m}^{-1}$  et la distance  $R'$  correspondante est la portée de l'émetteur. Puisque  $E_0 R = \text{cste}$ , on a :

$$E_0 R = E'_0 R' \text{ donc } R' = \frac{E_0 R}{E'_0} = 430 \text{ km}$$

### 3.4 Calcul de l'amplitude du champ électrique

À très grande distance de la station radio, l'onde émise par la station peut être considérée comme ayant localement la structure d'une onde plane. Cette émission est uniforme sur une demi-sphère concentrique avec la station. Si nous désignons par  $E_{0R}$  l'amplitude du champ électrique à une distance  $R$  de la station, alors la valeur moyenne du vecteur

de Poynting s'écrit  $\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \frac{E_{0R}^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_r$  (comme nous l'avons vu dans les exercices 3.1 et 3.2).



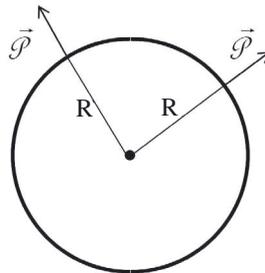
Le flux de  $\vec{\mathcal{P}}$  à travers la demi-sphère de rayon  $R$  correspond à la puissance  $P_0$  émise par la station :

$$P_0 = \int \langle \mathcal{P} \rangle dS = \langle \mathcal{P} \rangle \times 2\pi R^2 = \frac{\pi R^2 E_{0R}^2}{\mu_0 c} \rightarrow E_{0R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{P_0 \mu_0 c}{\pi}}.$$

AN : Pour  $P_0 = 10^5$  W et  $R = 10$  km, on a  $E_{0R} = 0,346$  V.m<sup>-1</sup>.

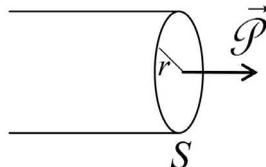
- 3.5** La densité de puissance rayonnée par le téléphone est le vecteur de Poynting  $\vec{\mathcal{P}}$ . Le flux de  $\vec{\mathcal{P}}$  à travers la sphère de rayon  $R$  correspond à la puissance  $P_0$  émise par le téléphone :

$$P_0 = \int \langle \mathcal{P} \rangle dS = \langle \mathcal{P} \rangle \times 4\pi R^2 \rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{P_0}{4\pi R^2}.$$



AN : Pour  $P_0 = 1$  W et  $R = 10$  cm, on a  $\langle \mathcal{P} \rangle = 7,96$  W.m<sup>-2</sup>.

- 3.6** Ici on peut considérer que l'onde a localement la structure d'une onde plane. La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit alors  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ , où  $E_0$  représente l'amplitude du champ électrique.



La puissance qui traverse une section  $S$  du faisceau de diamètre  $d = 2r$  est

$$P_0 = \int \langle \mathcal{P} \rangle dS = \langle \mathcal{P} \rangle \times \pi r^2 = \frac{\pi r^2 E_0^2}{2\mu_0 c} \rightarrow E_0 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2P_0 \mu_0 c}{\pi}}.$$

AN : Pour  $P_0 = 10^{-3}$  W et  $r = 0,5$  mm, on obtient  $E_0 = 979,8$  V.m<sup>-1</sup>

L'amplitude du champ magnétique de cette onde est  $B_0 = E_0/c = 3,26 \times 10^{-6}$  T.

**3.7** 1. Soit  $E_0$  l'amplitude du champ électrique. La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ .

La puissance moyenne qui traverse la section  $S$  du faisceau, est  $P_0 = \langle \mathcal{P} \rangle S = \frac{S E_0^2}{2\mu_0 c}$ .

D'autre part, comme  $P_0 = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ , où  $\Delta W$  est l'énergie qui traverse la section  $S$  du faisceau pendant le temps  $\Delta t$ , on en déduit :

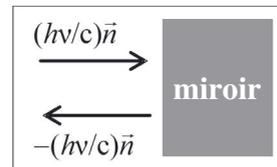
$$E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c \Delta W}{S \Delta t}}$$

AN : Pour  $\Delta t = 10 \text{ ns}$ ,  $\Delta W = 100 \text{ mJ}$ , et  $S = 0,25 \text{ cm}^2$ , on obtient  $E_0 = 1,74 \times 10^7 \text{ V.m}^{-1}$ .

**2. Pression de radiation**

L'énergie d'un photon de fréquence  $\nu$  est  $h\nu$ . Sa quantité de mouvement est  $p = \frac{h\nu}{c}$ .

Le nombre de photons arrivant sur le miroir pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est :  $N_{ph} = \frac{\Delta W}{h\nu}$ .



Au cours du choc d'un photon sur le miroir, la variation de la quantité de mouvement du photon est  $\Delta p = \frac{2h\nu}{c}$ . La force s'exercée par le photon sur le miroir est alors

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

La force totale créée par  $N_{ph}$  photons est

$$F_{tot} = \frac{1}{\Delta t} \frac{2h\nu}{c} N_{ph} = \frac{1}{\Delta t} \frac{2h\nu}{c} \frac{\Delta W}{h\nu} = \frac{2}{c} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{2}{c} \langle \mathcal{P} \rangle S \tag{3.46}$$

La pression exercée par l'onde est :

$$\Pi = \frac{F_{tot}}{S} = \frac{2 \langle \mathcal{P} \rangle}{c} = \epsilon_0 E_0^2 \tag{3.47}$$

A.N : Avec  $E_0 = 1,74 \times 10^7 \text{ V.m}^{-1}$  on obtient  $\Pi \simeq 2,67 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ .

# L'électromagnétisme dans la matière

## Introduction

En 1945, l'ingénieur américain Percy Spencer, qui travaillait dans la société Raytheon spécialisée dans la construction de sources micro-ondes (appelées magnétrons) pour l'équipement des radars, ressent de la chaleur dans la poche de sa blouse lorsqu'il passe à proximité d'un magnétron en activité. En plongeant la main dans la poche, il constate qu'une barre de chocolat y a fondu. Le chauffage micro-ondes était ainsi né. Cette découverte illustre de manière spectaculaire un des effets de l'électromagnétisme sur la matière.

## Objectifs

**Connaître** la manière dont un milieu matériel réagit lorsqu'il est soumis à un champ électromagnétique, et connaître les conséquences de cette réaction.

**Définir** les conditions d'existence et de propagation des ondes électromagnétique dans un milieu matériel.

**Connaître** la formulation des équations de Maxwell dans un milieu matériel, le contenu physique de ces équations ainsi que leurs conséquences.

## Plan

- 1 État électrique d'un milieu matériel
- 2 État magnétique d'un milieu matériel
- 3 Équations de Maxwell dans un milieu matériel
- 4 Conditions aux limites du milieu
- 5 Relations constitutives pour les milieux L.H.I.
- 6 Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel

Lorsqu'un matériau est placé dans une région où règne initialement un champ électromagnétique  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$ , ce champ ne pénètre pas nécessairement dans le matériau. Lorsque le champ électromagnétique pénètre dans le matériau, il s'établit alors au sein de son volume un champ  $(\vec{E}, \vec{B})$  différent de  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$ . Cette modification de champ s'explique nécessairement par le fait que le matériau, soumis à un champ électromagnétique, ne reste pas inerte.

De manière générale, un milieu matériel réagit lorsqu'il est soumis à un champ électrique ou à un champ magnétique. Dans un premier temps, le champ appliqué au matériau modifie le comportement de son système atomique, en créant en son sein des **dipôles électriques** ou des **dipôles magnétiques** selon que le champ appliqué est un

champ électrique ou un champ magnétique. Ces dipôles correspondent à des déformations particulières du nuage électronique qui entoure chaque atome. Si le système atomique est déjà doté de dipôles permanents, le champ appliqué modifie l'orientation de ces dipôles en fonction de sa propre orientation.

Les dipôles électriques (ou magnétiques) agissent ensuite comme des **sources de champ** (au même titre que des charges ou des courants électriques), c'est-à-dire, des sources capables de créer un champ électrique (ou magnétique) dans l'espace environnant. L'ensemble des dipôles présents dans le matériau contribuent (conjointement avec les sources immatérielles : courant de déplacement, variation du champ électrique, variation du champ magnétique) à créer un champ interne  $(\vec{E}, \vec{B})$  différent de  $(\vec{E}_0, \vec{B}_0)$ .

La grandeur qui caractérise un dipôle est appelée « **moment dipolaire** ». Au sein d'un milieu matériel soumis à un champ électromagnétique, les moments dipolaires de tous les atomes s'additionnent pour générer au sein du milieu une **polarisation** et une **aimantation**. Plus précisément, on définit la **polarisation** comme la quantité de moments dipolaires électriques par unité de volume du matériau, tandis que l'**aimantation** correspond à la quantité de moments magnétiques par unité de volume. Les vecteurs **polarisation** et **aimantation** peuvent donc être considérés comme la **réponse macroscopique du milieu matériel** à l'application d'un champ électromagnétique. La résolution d'un problème de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu matériel nécessite de prendre en compte la réponse du milieu, ce qui nécessite de faire apparaître explicitement la **polarisation** et l'**aimantation** comme des sources de champ dans les équations de Maxwell. Ce chapitre examine les conditions d'existence et de propagation des ondes électromagnétique dans un milieu matériel.

## 1 État électrique d'un milieu matériel

### DÉFINITION 4.1

L'état électrique d'un milieu matériel est caractérisé par deux grandeurs vectorielles :

- le **champ électrique**  $\vec{E}$  présent dans le milieu ;
- la **polarisation**  $\vec{P}$ , qui caractérise la façon dont le milieu réagit à la présence du champ  $\vec{E}$ .

### 1.1 Dipôle électrique

#### DÉFINITION 4.2

On appelle **dipôle électrique** (ou **doublet électrique**) un ensemble de deux charges électriques de signes contraires  $-q$  et  $+q$ , situées respectivement aux points N et P de l'espace et distante de  $d$ .

Bien que le dipôle électrique constitue un système globalement neutre (la somme de ses charges est nulle), le dipôle est apte à créer un champ électrique dans son voisinage. Le dipôle électrique est donc une source de champ électrique.

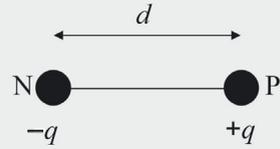


Figure 4.1

a) Champ créé par un dipôle électrique

**Calcul du potentiel créé par un dipôle ponctuel.** Considérons un repère tel que  $\overline{NP} = d \frac{\overline{NP}}{|\overline{NP}|} = d \vec{u}_z = 2a \vec{u}_z$ . Soit le point O, milieu du segment NP, et M un point repéré en coordonnées sphériques par  $\overline{OM} = r \vec{u}_r$ .

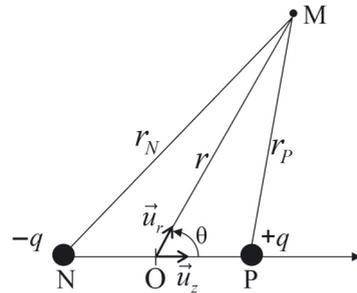


Figure 4.2

D'après le principe de superposition, le potentiel créé au point M par les deux charges s'écrit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} \right)$$

Nous allons nous limiter au cas où le point M est suffisamment éloigné du dipôle, soit :

$$OM = r \gg NP = 2a.$$

$$\vec{r}_N = \overline{NM} = \overline{NO} + \overline{OM} = a \vec{u}_z + r \vec{u}_r \text{ soit } r_N^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta \text{ soit } \frac{1}{r_N} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{-1/2}$$

$$\vec{r}_P = \overline{PM} = \overline{PO} + \overline{OM} = -a \vec{u}_z + r \vec{u}_r \text{ soit } r_P^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

$$\text{soit } \frac{1}{r_P} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a \cos \theta}{r} \right)^{-1/2}$$

En choisissant  $\frac{a}{r} = \epsilon \ll 1$ , on peut écrire :  $(1 + \epsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{3\epsilon^2}{8} + \dots$

En se limitant aux termes du premier degré en  $\epsilon$ , on obtient :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a \cos \theta}{r^2} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_z \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

où le vecteur  $\vec{p} = 2aq\vec{u}_z = q\overline{NP}$  est appelé **moment dipolaire**.

**Calcul du champ électrique.** De l'expression du gradient de V en coordonnées sphériques,  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , on déduit les composantes du champ électrique du dipôle :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \text{ et}$$

$$|\vec{E}| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

### b) Moment dipolaire d'un dipôle électrique

L'intensité du champ rayonné par un dipôle électrique est proportionnelle à une grandeur vectorielle  $\vec{p}$  appelée **moment dipolaire**, qui a pour origine le centre du dipôle O, et qui est définie par :

$$\vec{p} = (+q)\overrightarrow{OP} + (-q)\overrightarrow{ON} = q\overrightarrow{NP}$$

**Orientation du moment dipolaire.** le vecteur  $\vec{p}$  est dirigé de la charge négative vers la charge positive.

**Unité de moment dipolaire.** Dans le système international, l'unité du moment dipolaire est le coulomb mètre (C.m).

### c) Champ créé par une distribution de charges

Examinons le potentiel créé par une distribution de charges ponctuelles, à grande distance de cette distribution.

Soit un système de  $n$  charges  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , situées dans un domaine D, aux points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Soit O un point du domaine D, choisi comme origine du repère, et M un point situé à grande distance du domaine D (par rapport à la taille de ce domaine), tel que  $|\overrightarrow{OM}| \gg |\overrightarrow{OP_i}|$ , pour tout i. Posons  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{r}_i = \overrightarrow{P_iM}$ ,  $\vec{a}_i = \overrightarrow{OP_i}$ ,  $\alpha_i = \widehat{(\overrightarrow{OP_i}, \overrightarrow{OM})}$  soit  $\cos \alpha_i = \frac{\vec{a}_i \cdot \vec{r}}{a_i r}$ .

Le théorème de superposition conduit à :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i},$$

avec  $\vec{r}_i = \overrightarrow{P_iM} = \overrightarrow{P_iO} + \overrightarrow{OM} = -\vec{a}_i + \vec{r}$  et donc  $r_i = (r^2 + a_i^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{a}_i)^{1/2} = r \left( 1 + \frac{a_i^2}{r^2} - \frac{2a_i \cos \alpha_i}{r} \right)^{1/2}$ .

Le développement limité de  $r_i$  conduit à :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a_i \cos \alpha_i}{r} + \frac{1}{2} \frac{a_i^2}{r^2} (-1 + 3 \cos^2 \alpha_i) + \dots \right)$$

En ordonnant l'expression du potentiel selon les puissances de  $a_i/r$ , on obtient :

$$V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + \dots$$

où

$$V^{(0)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n q_i, \quad V^{(1)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^n q_i a_i \cos \alpha_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \sum_{i=1}^n q_i \vec{a}_i$$

et

$$V^{(2)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2r^3} \sum_{i=1}^n q_i a_i^2 (3 \cos^2 \alpha_i - 1).$$

Le potentiel créé par cette distribution diffère notablement selon que

$$\sum_{i=1}^n q_i \neq 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^n q_i = 0.$$

d) Terme polaire  $\left( \sum_{i=1}^n q_i \neq 0 \right)$

Lorsque la charge totale de la distribution est non nulle,  $Q \equiv \sum_{i=1}^n q_i \neq 0$ , le terme dominant du potentiel est  $V^{(0)}$ . Le barycentre des charges est un point G du domaine  $D$ , défini par la relation :

$$\overline{OG} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n q_i \vec{a}_i.$$

En choisissant comme origine le point G, ( $G \equiv O$ ), on a alors  $\sum_{i=1}^n q_i \vec{a}_i = \vec{0}$ , et  $V^{(1)}(M) = 0$ .

On peut donc écrire que :

$$V(M) \simeq V^{(0)}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r},$$

qui correspond au terme polaire du potentiel. Ainsi, à grande distance, cette distribution de charge se comporte comme une charge ponctuelle située au barycentre de la distribution.

e) Terme dipolaire  $\left( \sum_{i=1}^n q_i = 0 \right)$

Une distribution de charges caractérisée par une charge totale nulle, est qualifiée de milieu électriquement neutre. Cette situation est d'une grande importance, car elle correspond à l'état de la plupart des milieux matériels.

Lorsque  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$ , G n'est plus défini. Il n'y a plus de terme polaire dans l'expression du potentiel ( $V^{(0)}=0$ ). Le terme prépondérant dans l'expression du potentiel est alors  $V^{(1)}$ , qui dépend de la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OP}_i$$

Le vecteur  $\vec{p}$  n'est rien d'autre que l'expression du **moment dipolaire** d'un système électriquement neutre, formé de  $n$  charges :  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Il est important de noter que  $\vec{p}$  ne dépend pas de l'origine O choisie.

Si nous désignons par  $G_+$  le barycentre des charges positives, alors :

$$\overrightarrow{OG_+} = \frac{1}{\sum_{q^+} q_i} \sum_{q^+} q_i \overrightarrow{OP}_i.$$

Si nous désignons par  $G_-$  le barycentre des charges négatives, alors :

$$\overrightarrow{OG_-} = \frac{1}{\sum_{q^-} q_i} \sum_{q^-} q_i \overrightarrow{OP}_i.$$

En tenant compte du fait que le système est électriquement neutre, on peut écrire que  $\sum_{q^+} q_i = \tilde{Q} = -\sum_{q^-} q_i$ ; ce qui permet de réécrire  $\vec{p}$  de la manière suivante :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OP}_i = \sum_{q^+} q_i \overrightarrow{OP}_i + \sum_{q^-} q_i \overrightarrow{OP}_i = \tilde{Q} \left( \overrightarrow{OG_+} - \overrightarrow{OG_-} \right) = \tilde{Q} \overrightarrow{G_-G_+}$$

Cette expression illustre le fait qu'un système de charges (électriquement neutre) n'acquiert un moment dipolaire  $\vec{p}$  que si le barycentre des charges positives ( $G_+$ ) ne coïncide pas avec celui des charges négatives ( $G_-$ ).

Dans la nature, les milieux matériels se répartissent en deux grandes catégories, selon qu'ils possèdent un **moment dipolaire permanent** :  $\vec{p} \neq \vec{0}$  (systèmes polaires), ou qu'ils n'en possèdent pas :  $\vec{p} = \vec{0}$  (systèmes apolaires).

**Système polaires.** Rappelons qu'une molécule est une entité neutre constituée d'atomes reliés entre eux par des liaisons covalentes. Chaque atome est caractérisé par son électronégativité, c'est-à-dire, sa capacité à attirer les électrons impliqués dans les liaisons qu'il forme avec les autres atomes au sein de la molécule. Plus un atome est électronégatif, plus il attire fortement les électrons, qui, en moyenne, se rapprochent de lui. Le nuage électronique est alors déformé et le barycentre des charges négatives ne coïncide plus avec celui des charges positives.

Ainsi, l'atome d'oxygène est plus électronégatif que l'atome de carbone, et aussi plus électronégatif que l'atome d'hydrogène. On peut donc assimiler les atomes à des charges positives ou négatives selon leur électronégativité. Une molécule est dite polaire (ou à caractère dipolaire) lorsque le barycentre de ses charges positives ne coïncide pas avec

celui de ses charges négatives. Les molécules de ce type sont caractérisées par un moment dipolaire non nul :  $\vec{p} \neq \vec{0}$ . C'est par exemple le cas des molécules diatomiques hétéronucléaires (HCl, HF, HBr,...) et des molécules polyatomiques dissymétriques ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{SO}_2$ , ...).

Dans le cas de la molécule d'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ), les deux atomes d'hydrogène sont assimilables à des charges d'une certaine valeur  $+\delta/2$ . Comme le montre la figure 4.3, leur barycentre ( $G_+$ ) se trouve sur l'axe de symétrie de la molécule. L'atome d'oxygène est assimilable à une charge  $-\delta$  et son centre est confondu avec le barycentre des charges négatives. Comme les deux barycentres ne coïncident pas, la molécule d'eau est assimilable à un dipôle électrique (constitué de charges  $-\delta$  et  $+\delta$ , situées respectivement en  $G_-$  et  $G_+$ ), caractérisé par un moment dipolaire permanent  $\vec{p} = \delta \overline{G_-G_+}$ .

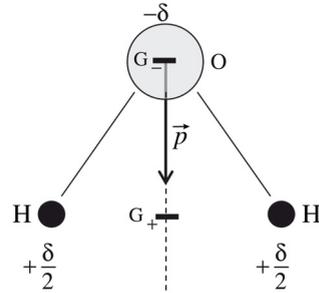


Figure 4.3 – Molécule  $\text{H}_2\text{O}$ .

De manière générale, lorsque  $\vec{p} \neq \vec{0}$ , le terme prépondérant dans l'expression du potentiel est alors  $V^{(1)}$ , qui se met sous la forme suivante :

$$V(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3}. \quad (4.1)$$

Cette expression correspond au **terme dipolaire** du potentiel. Il est équivalent au potentiel créé par un doublet électrique de **moment dipolaire**  $\vec{p}$ .

**Systèmes apolaires.** Ils sont constitués de molécules (apolaires) caractérisées par un moment dipolaire nul :  $\vec{p} = \vec{0}$ . C'est le cas des molécules diatomiques homonucléaires et des molécules polyatomiques symétriques présentant un centre de symétrie ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{C}_2\text{H}_4$ , benzène...).

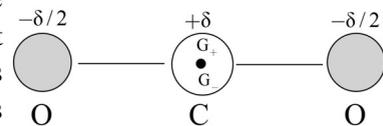


Figure 4.4 – Molécule  $\text{CO}_2$ .

Dans ce cas, on a  $V^{(0)} = 0$ , et  $V^{(1)} = 0$ . Le premier terme non nul du développement du potentiel est supérieur ou égal à 2.

## 1.2 Dipôle électrique induit

Toutes les molécules, qu'elles soient polaires ou apolaires, peuvent acquérir occasionnellement un **moment électrique induit**, non permanent. Cela peut se produire chaque fois que la molécule se trouve placée dans un champ électrique, mais le comportement de la molécule diffère selon qu'elle est polaire ou apolaire.

**Cas des molécules apolaires.** Dans ce type de molécules, en l'absence de champ électrique, le barycentre des charges positives coïncide avec celui des charges négatives. En présence d'un champ électrique  $\vec{E}$ , les charges positives et négatives migrent en sens

inverse sous l'action de la force que Coulomb ; ce qui entraîne un déplacement en sens inverse de leurs barycentres respectifs  $G_-$  et  $G_+$ .

Autrement dit,  $G_-$  ne coïncide plus avec  $G_+$  ; le système se comporte alors comme un dipôle constitué de deux charges identiques mais de signes opposés,  $-Q$  et  $Q$ , placées respectivement aux points  $G_-$  et  $G_+$ . La molécule acquiert un **moment dipolaire induit**  $\vec{p} = Q \overrightarrow{G_- G_+}$ , qui perdure tant que le champ  $\vec{E}$  est présent, et qui disparaît si le champ  $\vec{E}$  disparaît.

**Cas des molécules polaires.** Considérons un dipôle situé dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme. Le dipôle est alors soumis à un couple de forces  $\vec{F}_{(+q)} = q\vec{E}$  et  $\vec{F}_{(-q)} = -q\vec{E}$ . La résultante des forces exercées sur le dipôle étant nulle, le dipôle ne se déplace pas. En revanche, le champ électrique agit sur le dipôle par l'intermédiaire d'un couple dont le moment est donné par :

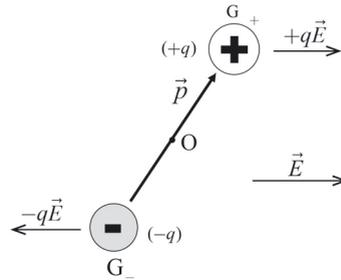


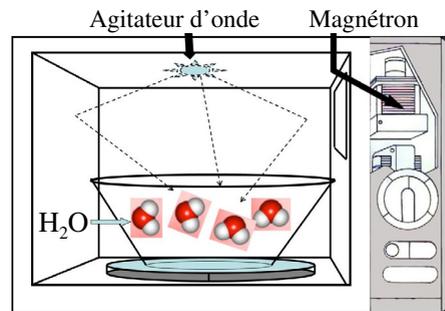
Figure 4.5

$$\vec{C} = \vec{M}_{\vec{F}_{(+q)}} + \vec{M}_{\vec{F}_{(-q)}} = \overrightarrow{OG_+} \wedge \vec{F}_{(+q)} + \overrightarrow{OG_-} \wedge \vec{F}_{(-q)} = \vec{p} \wedge \vec{E}.$$

Autrement dit, le couple de forces agit sur le dipôle dans un sens qui tend à le faire tourner autour du point O, de telle sorte que  $\vec{p}$  s'aligne avec  $\vec{E}$ . Si le dipôle peut tourner, il s'aligne alors selon  $\vec{E}$ . Cette rotation s'accompagne d'une minimisation de l'énergie potentielle du dipôle, qui est donnée par  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ .

### Encart 4.1 Le chauffage micro-onde

Lorsqu'un champ électromagnétique pénètre dans un milieu matériel, il y crée des forces électriques et magnétiques qui provoquent des mouvements de divers porteurs de charges (électrons, noyaux atomiques, ions ou molécules polaires). Comme ces mouvements se font en sens inverses pour les charges de signes contraires, et comme chaque porteur de charge ne peut se mouvoir librement du fait de la présence des autres particules du milieu, les mouvements induits par le champ électromagnétique s'accompagnent de collisions et frottements entre porteurs de charges, qui génèrent de la chaleur au sein du milieu matériel. Dans certaines applications, ce processus entraîne une perte irréversible de l'énergie électromagnétique (l'effet Joule dans les circuits électriques en est l'exemple le plus connu), alors qu'il est mis à profit dans d'autres applications, dont l'une des plus répandues est le chauffage et la cuisson des aliments par le four à micro ondes, qui est aujourd'hui un bien de consommation courant présent dans près de 80 %

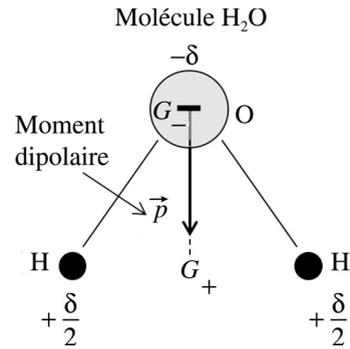


Représentation schématique d'un four à micro-ondes

des foyers en France. Le chauffage micro-onde résulte des frottements générés par les mouvements de rotation des molécules d'eau (présentes dans les aliments) lorsqu'elles sont soumises à des micro-ondes. Un four à micro-onde est constitué des principaux éléments suivants :

- Le **magnétron** émet des micro-ondes dans le four.
- Les ondes produites sont ensuite guidées jusqu'à un agitateur d'onde (ou brasseur d'onde) qui les renvoie dans l'enceinte métallique où se trouve l'aliment à chauffer.
- Les parois métalliques réfléchissent les ondes et les confinent à l'intérieur du four. Une fois dans l'enceinte métallique, les ondes pénètrent dans les aliments, atteignent les molécules d'eau qui s'y trouvent, et les mettent en vibration.

La vibration de la molécule d'eau est liée à son caractère polaire. Rappelons que lorsqu'une molécule polaire est soumise à un champ électrique, si la molécule est libre de ses mouvements, elle effectuera alors une rotation de manière à orienter son moment dipolaire dans la direction du champ électrique. Le champ électrique d'une onde électromagnétique est un champ alternatif (qui inverse son sens d'orientation deux fois au cours de chaque période), qui va forcer la molécule polaire à vibrer à la même fréquence que celle de l'onde électromagnétique. Les molécules d'eau étant en contact avec les autres constituants de l'aliment ne peuvent pas tourner librement pour orienter leur moment dipolaire dans la direction du champ électrique. Leur mouvement s'accompagne inévitablement de frottements avec les autres constituants des aliments, ce qui produit de la chaleur qui permet de chauffer ou de cuire les aliments. Les molécules d'eau sous l'action des micro-ondes, sont forcées à vibrer à une fréquence de 2,5 GHz. Les aliments sont placés sur un plateau qui tourne à l'intérieur du four afin de répartir de façon optimale les ondes dans les aliments et obtenir un chauffage homogène.



### 1.3 Polarisation

#### a) Vecteur polarisation

Un milieu matériel (qu'il soit constitué de molécules polaires ou apolaires) soumis à un champ électrique, acquiert nécessairement à l'échelle microscopique, un caractère dipolaire. Ce comportement dipolaire est influencé par le champ électrique appliqué au dipôle.

On peut généraliser la notion de dipôle électrique à tout ensemble de charges  $Q_i$  contenues dans tout volume élémentaire  $d\tau$  d'un milieu matériel, qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- $dQ = \sum_i Q_i = 0$  (la charge totale contenue dans le volume  $d\tau$  est nulle) ;
- $d\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{OM}_i \neq \vec{0}$  (le moment dipolaire électrique total du volume  $d\tau$  est non nul).

Ici,  $Q_i$  désigne la charge située au point  $M_i$  du volume  $d\tau$ , et O un point de ce volume.

Le vecteur **polarisation** d'un milieu se définit comme la **densité volumique du moment dipolaire électrique** ; autrement dit, la quantité de moments dipolaires électriques par unité de volume du matériau. Son expression est donnée par :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \tag{4.2}$$

où  $d\vec{p}$  désigne le moment dipolaire total contenu dans le volume élémentaire  $d\tau$ .

### b) Charges liées et charges libres

Les effets d'un champ électrique dans un milieu matériel ne se limitent pas aux effets relatifs à la polarisation. En effet, dans certains milieux (métaux, plasmas), sous l'action d'un champ électrique, des charges peuvent se déplacer « librement » (c'est-à-dire sans que leurs déplacements soient strictement limités à une région particulière du milieu). De telles charges sont appelées **charges libres**. Les courants générés par leurs déplacements sont appelés **courants libres** (et parfois, **courant de conduction**). Les charges pouvant se déplacer aussi librement dans ces milieux sont essentiellement des électrons (issus des couches périphériques des atomes), car leur masse est considérablement plus faible (de plusieurs ordres de grandeur) que celles des autres constituants du milieu (ions, atomes, ou molécules).

En principe, le phénomène de polarisation concerne des charges qui ne peuvent se déplacer que dans une région restreinte au voisinage immédiat des positions qu'elles occupent en l'absence de champ électrique. De telles charges sont appelées **charges liées**. Les courants générés par leurs déplacements sont appelés **courants liés**.

### c) Principaux mécanismes de polarisation

Sous l'action du champ électrique, les charges liées d'un milieu matériel (électrons, atomes, ions, ou molécules) ne se déplacent que très peu, mais ces déplacements polarisent le milieu. On distingue plusieurs mécanismes majeurs de polarisation : la **polarisation électronique**, la **polarisation ionique**, la **polarisation ionique** et la **polarisation d'orientation**. L'importance de chacun de ces phénomènes diffère selon la nature du milieu (isolant, conducteur, ou

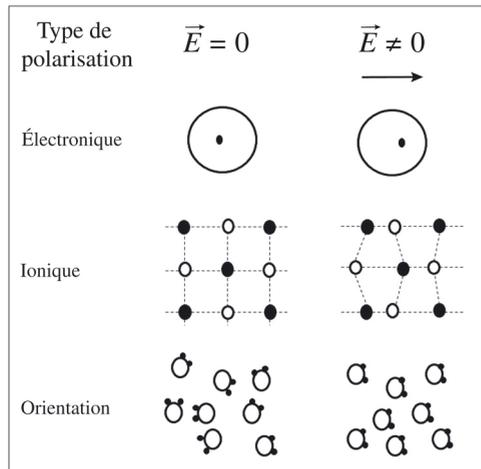


Figure 4.6

semi-conducteur), selon que le milieu possède ou non un moment dipolaire électrique permanent, et selon la fréquence du champ appliqué au matériau.

**Polarisation électronique.** Ce type de polarisation est dû au déplacement des électrons et à la déformation du nuage électronique. Elle est présente dans tous les milieux, et devient le phénomène dominant dans les milieux diélectriques dépourvus de moment dipolaire électrique permanent.

**Polarisation ionique.** Un cristal ionique peut se déformer sous l'action d'un champ électrique ; ce qui donne lieu à un moment dipolaire, et donc à une polarisation ionique (qualifiée aussi de polarisation atomique).

**Polarisation d'orientation.** Comme nous l'avons déjà mentionné, les milieux constitués de molécules polaires sont dotés d'un moment dipolaire permanent au niveau de chaque molécule. Cependant, en l'absence de tout champ électrique, l'orientation de ces dipôles élémentaires est aléatoire ; ce qui conduit à une polarisation globale nulle. En présence d'un champ électrique, les moments dipolaires ont tendance à s'orienter dans le sens du champ ; ce qui fait apparaître un moment dipolaire résultant non nul.

## 1.4 Densités de charges et de courants équivalentes à la polarisation

### a) Densités de charge de polarisation

Le vecteur polarisation est dépend de la densité macroscopique de charges liées. On peut établir ce lien à partir du calcul du potentiel électrostatique créé par un diélectrique en un point extérieur.

Soit un milieu diélectrique  $\mathfrak{D}$ , limité par la surface fermée  $\Sigma$  de dimensions grandes devant les dimensions atomiques.

- Si ce milieu est **non polarisé** et immobile, mais doté d'une distribution de charge répartie dans le volume  $\mathfrak{D}$  avec une densité volumique  $\rho$  et sur la surface  $\Sigma$  avec une densité surfacique  $\sigma$ , alors il créera en tout point M de l'espace environnant un potentiel électrostatique donné par :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\rho(A)}{r} d\tau_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{r} d\Sigma \quad \text{avec } \vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_A.$$

- Supposons à présent que le milieu soit électriquement neutre, mais **polarisé**, et qu'un élément de volume  $d\tau_A$  centré en A soit doté d'un moment dipolaire  $d\vec{p} = \vec{P}(A) d\tau_A$ , où  $\vec{P}(A)$  désigne le vecteur polarisation au point A. Compte tenu de ce que nous avons

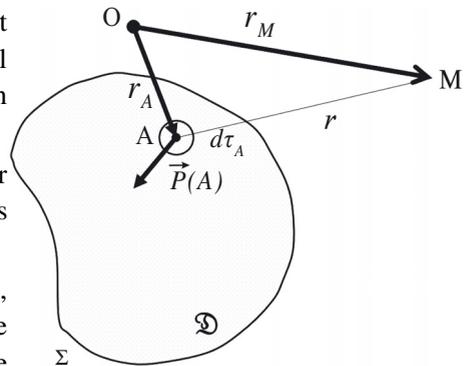


Figure 4.7

vu précédemment sur une distribution de charges ponctuelles, le potentiel  $dV(M)$  créé au point  $M$  par l'élément de volume  $d\tau_A$  est :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(A)}{r^3} d\tau_A.$$

On déduit le potentiel total créé par la polarisation en sommant les contributions de tous les moments dipolaires contenus dans le domaine  $\mathfrak{D}$ .

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}(A)}{r^3} d\tau_A.$$

On peut transformer cette expression en remarquant que  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}_A(1/r)$ , où l'indice  $A$  indique simplement que les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées du point  $A$ . Par ailleurs, nous savons que pour un champ de vecteur  $\vec{a}$  et une fonction  $f$ ,

$$\text{div}(f \vec{a}) = f \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

On en déduit que :

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{\text{div} \vec{P}}{r},$$

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}}{r^3} d\tau_A \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau_A - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\text{div} \vec{P}}{r} d\tau_A. \end{aligned}$$

D'après le théorème de la divergence :

$$\iiint_{\mathfrak{D}} \text{div} \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau_A = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} d\Sigma,$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\Sigma$  délimitant  $\mathfrak{D}$ , et dirigé vers l'extérieur du milieu.

L'expression du potentiel s'écrit alors :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{-\text{div} \vec{P}}{r} d\tau_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} d\Sigma.$$

En comparant cette expression à celle du potentiel créé par la distribution de charge ( $\rho$ ,  $\sigma$ ) on constate que le potentiel électrostatique créé par la polarisation  $\vec{P}$  est identique à celui d'une distribution macroscopique de charges caractérisées dans le volume  $\mathfrak{D}$  par une densité volumique  $\rho_p$  et sur la surface  $\Sigma$  par une densité surfacique  $\sigma_p$  données par :

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P}, \quad \sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (4.3)$$

Ainsi, d'un point de vue macroscopique, la distribution de polarisation  $\vec{P}$  a un effet équivalent à celui d'une distribution macroscopique de charges appelées « charges de polarisation » ( $\rho_p, \sigma_p$ ).

### b) Densités de courant de polarisation

Lorsque les porteurs de charge sont en mouvement, le moment dipolaire (et donc la polarisation) devient une fonction du temps. Dans ce cas, la relation entre **polarisation** et **densité de charges équivalente** établie au paragraphe précédent dans le régime statique, s'applique aussi :

$$\boxed{\rho_p(t) = -\text{div } \vec{P}(t)} \quad (4.4)$$

À ce mouvement des porteurs de charge, correspond un courant appelé **courant de polarisation**, de densité volumique  $\vec{j}_p$ . On peut l'obtenir en appliquant la loi de conservation de la charge à  $\rho_p$  :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \text{div } \vec{j}_p &= -\frac{\partial \rho_p}{\partial t} = -\frac{\partial(-\text{div } \vec{P})}{\partial t} = \text{div} \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \quad (4.5)$$

### c) Résumé

À l'échelle macroscopique, lors de l'étude du champ électromagnétique dans un milieu matériel, on peut substituer à la polarisation  $\vec{P}$  du milieu ;

- une densité volumique de charges de polarisation  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$  ;
- une densité surfacique de charges de polarisation  $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ , ( $\vec{n}$  étant orienté vers l'extérieur du milieu matériel) ;
- une densité de courant volumique de polarisation  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ .

## 1.5 Vecteur induction électrique $\vec{D}$

Comme nous l'avons déjà mentionné, les porteurs de charge au sein d'un milieu matériel peuvent être classés dans deux catégories :

- les **charges libres** (ou charges de conduction), constituées essentiellement d'**électrons libres** que l'on peut caractériser par une densité volumique de charge  $\rho_l$  ;

- les **charges liées**, qui se manifestent par l'intermédiaire de la polarisation, dont la densité volumique n'est autre que  $\rho_p$ .

De manière générale, la densité totale de charge est la somme :

$$\rho = \rho_l + \rho_p \quad (4.6)$$

On peut considérer que le champ électrique  $\vec{E}$  présent dans le milieu matériel, résulte de la superposition d'un champ  $\vec{E}_l$  créé par les charges libres et d'un champ  $\vec{E}_p$  créé par la polarisation (ou les charges liées) :  $\vec{E} = \vec{E}_l + \vec{E}_p$ .

Dans un tel milieu, l'équation de Maxwell-Gauss peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0} - \operatorname{div} \vec{P} / \epsilon_0 \\ \text{soit } \operatorname{div} \left( \vec{E} + \vec{P} / \epsilon_0 \right) &= \frac{\rho_l}{\epsilon_0} \quad \text{et donc} \quad \operatorname{div} \left( \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho_l \end{aligned}$$

Par définition, on appelle « **vecteur induction électrique** » ou « vecteur  $\vec{D}$  » le vecteur défini par :

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad (4.7)$$

Il obéit à la relation fondamentale suivante :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_l} \quad (4.8)$$

**Remarque** Il serait erroné de conclure de cette relation que  $\vec{D}$  est déterminé uniquement par la densité des charges libres. En effet, son rotationnel dépend de la polarisation :

$$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{D}) = \epsilon_0 \overline{\operatorname{rot}}(\vec{E}) + \overline{\operatorname{rot}}(\vec{P}) = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \overline{\operatorname{rot}}(\vec{P}).$$

## 2 État magnétique d'un milieu matériel

Considérons un milieu contenant des courants ou des aimants. La présence de ces courants et aimants crée en tout point M du milieu un état magnétique caractérisé par deux vecteurs :

- le **champ d'induction magnétique**  $\vec{B}$ , qui représente la résultante des champs créés par tous les courants ou aimants présents dans le milieu ;
- l'**aimantation**  $\vec{M}$ , qui correspond à la réponse du milieu en présence d'un champ  $\vec{B}$ .

### 2.1 Dipôle magnétique

Le modèle le plus simple de dipôle magnétique est celui d'une **boucle de courant**. Ce dipôle crée dans son voisinage un champ  $\vec{B}$  dont l'orientation est donnée par la règle du « bonhomme d'Ampère ». Par convention, la direction de  $\vec{B}$  correspond au **pôle nord** du

dipôle, et la direction opposée le **pôle sud**. La droite passant par le centre de la boucle correspond à l'**axe du dipôle**.

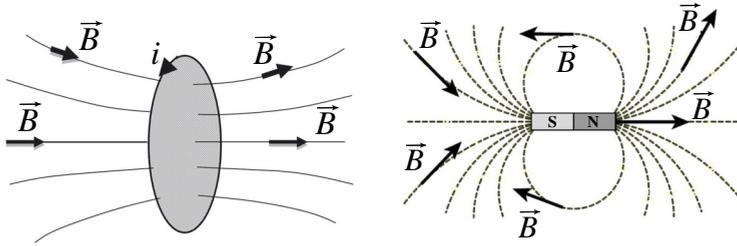


Figure 4.8 – Dipôle magnétique.

Un dipôle magnétique est analogue à un **aimant droit**. Les lignes de champ magnétique générées par un dipôle magnétique sont orientées du pôle nord vers le pôle sud. Le champ magnétique est tangent en chaque point à la ligne de champ.

## 2.2 Moment magnétique

### DÉFINITION 4.3

Le **moment magnétique** est une grandeur qui caractérise une source magnétique. La source peut être une distribution de courant, ou bien un matériau présentant un moment magnétique spontané. À chaque dipôle magnétique on peut donc associer un **moment magnétique**  $\vec{m}$ .

Le moment magnétique d'une boucle de courant  $i$  entourant une surface  $S$  est :

$$\vec{m} = i S \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire orthogonal à la surface sous tendue par le courant électrique  $i$ . Cette normale est orientée selon la règle du bonhomme d'Ampère. L'unité du moment magnétique dans le système international d'unités est  $A.m^2$ .

**Remarque** Le dipôle magnétique présente quelques similitudes avec le dipôle électrique :

- Le dipôle magnétique crée dans l'espace environnant un champ magnétique.
- Si un dipôle magnétique est placé dans une région où règne déjà un champ magnétique, il subira les effets de ce champ externe. Le principal effet du champ magnétique externe sera une action qui tend à faire tourner l'axe du dipôle de manière à l'aligner sur la direction du champ magnétique externe. À titre d'illustration, notons que si un dipôle est libre de ses mouvements et qu'on le rapproche d'un aimant, il alignera son axe sur celui de l'aimant, de telle sorte que son pôle nord se rapproche du pôle sud de l'aimant.

Encart 4.2

## André Marie Ampère

André Marie Ampère est un physicien français, né à Lyon en 1775 et mort à Marseille en 1836. À la fois mathématicien, mécanicien et chimiste, ses contributions concernent essentiellement l'électricité et l'électromagnétisme, comme la loi des actions électrodynamiques (dans un de ses ouvrages parus en 1827) ou l'hypothèse des courants dans la matière. C'est lui qui forge les termes de courants et de tensions pour désigner ces grandeurs électriques. L'unité de mesure de l'intensité électrique dans le système international porte désormais son nom.



## 2.3 Moment magnétique dans la matière

Lorsqu'un matériau est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , ce dernier agit sur les électrons et les noyaux constituant le milieu matériel, mais l'influence de  $\vec{B}$  est nettement plus importante sur les électrons (beaucoup plus légers) que sur les noyaux. En conséquence, les propriétés magnétiques de la matière s'expliquent essentiellement par la présence de courants microscopiques dans la matière, liés au mouvement des électrons autour du noyau (qui donne lieu à un moment magnétique qualifié d'**orbital**). À ce **moment magnétique orbital** de l'électron, s'ajoute un moment magnétique intrinsèque, qualifié de **moment magnétique de spin**.

Notons que, outre les électrons, les protons et les neutrons possèdent des moments magnétiques intrinsèques. Le moment magnétique des atomes, des molécules ou des ions, résulte donc de la superposition des moments orbitaux, des moments de spin des électrons et des moments des noyaux qui constituent ces particules.

Cependant, au niveau macroscopique, le moment résultant est dû essentiellement aux moments magnétiques des électrons.

## 2.4 Vecteur aimantation $\vec{M}$

Plongé dans un champ magnétique, chaque volume élémentaire  $d\tau$  de matière acquiert un moment magnétique  $d\vec{m}$  induit par le champ. On définit le **vecteur aimantation**  $\vec{M}$  comme la **densité volumique de moments magnétiques** ; autrement dit, la quantité de moments magnétiques par unité de volume du matériau. Son expression est donnée par :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau} \quad (4.9)$$

## 2.5 Densités de courants équivalentes à l'aimantation

Dans le cas du magnétisme orbital, ce sont les porteurs de charges en mouvement mais **liés** (essentiellement les électrons) qui génèrent les courants localisés auxquels

sont associés les moments magnétiques. On peut montrer qu'il existe un lien direct entre la moyenne  $\vec{j}_m$  des densités volumiques de ces courants microscopiques et l'aimantation  $\vec{M}$ .

Notons qu'à l'échelle macroscopique rien ne distingue un champ magnétique dû à des dipôles magnétiques, d'un champ dû à des courants. L'action de l'aimantation peut donc être assimilée à celle d'une densité équivalente de courants volumiques et surfaciques.

Pour obtenir les expressions des densités de courants équivalentes à l'aimantation, nous passerons par le calcul du **potentiel-vecteur** créé par une distribution volumique d'aimantation.

Soit un milieu diélectrique  $\mathfrak{D}$  limité par une surface fermée  $\Sigma$ , de dimensions grandes devant les dimensions atomiques.

- Si ce milieu est **non aimanté** ( $\vec{M}(P) = 0, \forall P$ ), mais doté d'un courant réparti dans le domaine  $\mathfrak{D}$  avec une densité volumique  $\vec{j}$  et sur la surface  $\Sigma$  avec une densité surfacique  $\vec{j}_s$ , alors ce courant créera dans en tout point Q de l'espace environnant un potentiel-vecteur donné par

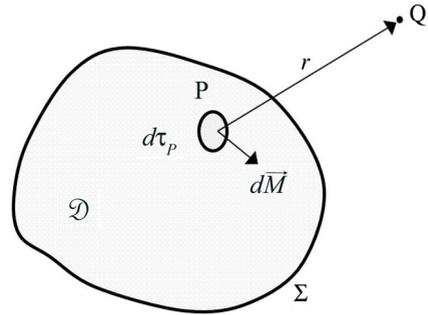


Figure 4.9

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\vec{j}}{r} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}_s}{r} d\Sigma, \text{ avec } \vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P.$$

- Supposons à présent que le milieu soit aimanté (avec une aimantation indépendante du temps) et dépourvu de courant. Considérons un élément de volume  $d\tau_P$  centré en P et doté d'un moment magnétique  $d\vec{M} = \vec{M}(P) d\tau_P$ , où  $\vec{M}(P)$  désigne l'aimantation au point P. Le potentiel-vecteur  $d\vec{A}(Q)$  créé au point Q par cet élément est

$$d\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{M} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(P) \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau_P.$$

Par intégration dans le domaine  $\mathfrak{D}$  on obtient le potentiel-vecteur total en Q, soit

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\vec{M}(P) \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau_P.$$

En utilisant  $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}_P(1/r)$ , avec  $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$ , le potentiel-vecteur s'écrit :

$$\vec{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \vec{M}(P) \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) d\tau_P.$$

Par ailleurs, en appliquant l'identité suivante :  $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{a}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f$ , l'expression de  $\vec{A}$  devient :

$$\vec{A}(\text{Q}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau_P$$

La première intégrale se transforme à l'aide de la formule du rotationnel

$$\iiint_{\mathfrak{D}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} d\tau = \iint_{\Sigma} \vec{n} \wedge \vec{a} d\Sigma,$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\Sigma$  délimitant  $\mathfrak{D}$  et dirigé vers l'extérieur du milieu. L'expression du potentiel s'écrit alors :

$$\vec{A}(\text{Q}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}}{r} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} d\Sigma,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathfrak{D}} \frac{\vec{j}_m}{r} d\tau_P + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\vec{j}_{sm}}{r} d\Sigma,$$

avec

$$\boxed{\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}.} \quad (4.10)$$

L'interprétation de cette expression est immédiate. Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  (et donc le champ magnétique qui en dérive) est identique à celui que produirait une distribution macroscopique de courants caractérisée :

- à l'intérieur du domaine  $\mathfrak{D}$  par une densité volumique de courant d'aimantation  $\vec{j}_m$  ;
- sur la surface  $\Sigma$ , par une densité surfacique de courant d'aimantation  $\vec{j}_{sm}$ .

**Remarque** La présence d'une densité superficielle de courant  $\vec{j}_{sm}$  est liée au fait que nous avons considéré un domaine fini  $\mathfrak{D}$ . À la sortie de ce domaine, l'aimantation  $\vec{M}$  passe à zéro de manière très abrupte. Cette discontinuité de  $\vec{M}$  est à l'origine de la création d'une densité superficielle de courants au niveau de la surface  $\Sigma$ .

En résumé, pour étudier à l'échelle macroscopique le champ électromagnétique dans un milieu matériel, on peut substituer à l'aimantation  $\vec{M}$  du milieu :

- une densité de courant volumique d'aimantation  $\vec{j}_m = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}$  ;
- une densité de courant surfacique d'aimantation  $\vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n}$  ( $\vec{n}$  étant la normale orientée vers l'extérieur du milieu matériel).

## 2.6 Vecteur excitation magnétique $\vec{H}$

Dans un milieu matériel, au champ magnétique  $\vec{B}_l$  créé par les courants de conduction (courants des charges libres, de densité volumique  $\vec{j}_l$ ), se superpose le champ  $\vec{B}_m$  créé

par l'aimantation (associée à une densité volumique de courant d'aimantation  $\vec{j}_m$ ). Il peut s'y ajouter le champ créé par les courants de polarisation (de densité volumique  $\vec{j}_p = \partial \vec{P} / \partial t$ ). Par conséquent, dans le cas le plus général, la densité totale des courants volumiques s'écrit :

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_m + \vec{j}_p. \quad (4.11)$$

Dans un milieu matériel, l'équation de Maxwell-Ampère peut donc s'écrire :

$$\overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 (\vec{j}_l + \vec{j}_p + \vec{j}_m) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overline{\text{rot}}(\vec{M}) \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \overline{\text{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \left( \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_l + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{et donc } \overline{\text{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Par définition, on appelle vecteur **excitation magnétique** ou vecteur  $\vec{H}$  le vecteur défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (4.12)$$

Il obéit à la relation fondamentale suivante :

$$\boxed{\overline{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \quad (4.13)$$

**Remarque** Il serait erroné de conclure de cette relation que  $\vec{H}$  est déterminé uniquement par la densité de courants libres. Sa divergence dépend en effet de l'aimantation :  $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$ .

### 3 Équations de Maxwell dans un milieu matériel

Dans un milieu matériel, les équations de Maxwell sont plus facilement exploitables sous la forme suivante :

- équation de Maxwell-Gauss (M-G) :  $\text{div } \vec{D} = \rho_l$
- équation de Maxwell-Ampère (M-A) :  $\overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
- équation du flux magnétique (M- $\Phi$ ) :  $\text{div}(\vec{B}) = 0$
- équation de Maxwell-Faraday (M-F) :  $\overline{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Cette formulation des équations de Maxwell, a comme principal avantage de faire apparaître explicitement les densités de charges et de courants libres,  $\rho_l$  et  $\vec{j}_l$  (dont on

connaît le comportement dans de nombreux matériaux). Mais cet avantage s'accompagne de l'introduction de deux vecteurs supplémentaires ( $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ ), qui correspondent à des « inconnues » supplémentaires.

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \leftrightarrow \text{induction électrique} \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \leftrightarrow \text{excitation magnétique}\end{aligned}$$

**Remarque** La plupart des milieux matériels occupe un volume fini de l'espace. Pour que les ondes électromagnétiques puissent exister dans ces milieux, il faut que les équations de Maxwell soient satisfaites non seulement à l'intérieur du volume mais aussi sur les frontières du domaine occupé par le matériau. Nous montrerons dans le prochain paragraphe que, sur les frontières qui séparent le matériau du milieu extérieur, les équations de Maxwell se réduisent à un jeu d'équations qualifiées de « conditions aux limites ».

## 4 Conditions aux limites du milieu

Les équations de Maxwell présentées dans la section précédente ne sont applicables qu'en tout point  $M$  situé à l'intérieur du volume d'un milieu matériel, caractérisé par une densité volumique de charge  $\rho(M)$  et une densité volumique de courant  $\vec{j}(M)$ . Il est cependant possible d'appliquer les équations de Maxwell aux frontières d'un milieu matériel, et plus généralement, aux surfaces de séparation de milieux ayant des propriétés différentes. L'application des équations de Maxwell conduit alors à des relations qualifiées de **relations de passage** ou **conditions aux limites**.

Pour être précis, considérons une surface  $S$  séparant deux milieux, que nous appellerons « milieu 1 » et « milieu 2 » (figure 4.10). Soit  $\vec{n}_{12}$  un vecteur unitaire normal à la surface et orienté du milieu 1 vers le milieu 2, dans la direction de l'axe  $Oz$  d'un trièdre  $(O, x, y, z)$ . Selon l'orientation des vecteurs du champ électromagnétique, la surface  $S$  peut acquérir une densité superficielle de charges et/ou de courants. L'accumulation de charges électriques à la surface  $S$  ne se produit que lorsque le champ électrique incident possède une composante normale à cette surface, car c'est uniquement cette composante qui peut attirer (via la force de Coulomb) des charges vers la surface. Cependant, la densité superficielle de charges créées par le champ incident crée à son tour un champ électrique orthogonal à la surface  $S$  et orienté en sens inverse du champ incident (loi de Lentz), qui se superpose au champ incident. Il en résulte une variation (ou discontinuité) de la composante normale du champ électrique à la traversée de la surface  $S$ .

Par ailleurs, nous savons que l'effet d'un champ magnétique  $\vec{B}$  sur une particule chargée, est de faire tourner la particule autour de l'axe orienté dans la direction de  $\vec{B}$ . Autrement dit, si le champ  $\vec{B}$  possède une composante parallèle à la surface  $S$ ,

cette composante provoquera un mouvement de rotation qui amènera des particules chargées vers la surface ; ce qui créera sur  $S$  une densité superficielle de courant. Ici aussi, il y aura un effet de contre-réaction sur l'effet du champ incident, car la densité superficielle de courant ainsi créée créera elle-même un champ magnétique qui se superposera au champ incident, et qui provoquera finalement une variation de sa composante tangentielle lors de la traversée de la surface  $S$ . On utilise plutôt le terme « discontinuité » pour qualifier cette variation. Ainsi, à la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux, toute composante tangentielle du champ magnétique  $\vec{B}$ , lorsqu'elle existe, subit une discontinuité, tandis que la composante normale de  $\vec{B}$  traverse la surface sans discontinuité.

Ainsi, à la traversée de la surface de séparation entre deux milieux, certaines composantes du champ électromagnétique subissent une discontinuité ( $\vec{E}_{normal}$ ,  $\vec{B}_{tangential}$ ). Toutes les autres composantes traversent la surface  $S$  dans la continuité.

En réalité, ces charges et courants qui peuvent s'accumuler à l'interface entre deux milieux, ne sont pas strictement superficielles mais réparties sur une épaisseur  $e$  extrêmement petite (qui peut être de l'ordre du  $\mu m$ ). Le volume  $e dS$  contient alors une charge  $dQ = \int_{-e}^0 \rho dz dS = dS \int_{-e}^0 \rho dz$ , où l'on considère comme négligeables les variations de  $\rho$  le long de surface  $S$ . On peut alors définir une densité superficielle de charge  $\sigma$  par  $dQ = \sigma dS$ , avec :

$$\sigma = \int_{-e}^0 \rho dz.$$

De la même façon, on peut définir une densité superficielle de courant :  $\vec{j}_s = \int_{-e}^0 \vec{j} dz$ .

Le vecteur  $\vec{j}_s$  est tangent à la surface  $S$ , en tout point de cette surface. Conséquent, si  $X$  est une composante de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{B}$ , on peut affirmer qu'au niveau de la surface  $S$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z}$  est certainement important, mais que  $\frac{\partial X}{\partial x}$  et  $\frac{\partial X}{\partial y}$  sont négligeables. De plus,  $\frac{\partial X}{\partial t}$  ne varie pas de manière significative lorsque l'onde traverse la surface  $S$ .

Il en résulte que si on intègre ces quantités entre  $z = -e$  et  $z = 0$ , on aura :

$$\int_{-e}^0 \frac{\partial X}{\partial z} dz = X(0) - X(-e) \neq 0$$

alors que :

$$\int_{-e}^0 \frac{\partial X}{\partial x} dz = 0, \quad \int_{-e}^0 \frac{\partial X}{\partial y} dz = 0, \quad \text{et} \quad \int_{-e}^0 \frac{\partial X}{\partial t} dz = 0.$$

Dans la configuration décrite ci-dessus, au voisinage immédiat de la surface  $S$  mais du côté du milieu 1, le champ électromagnétique sera noté  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$ , tandis qu'au voisinage

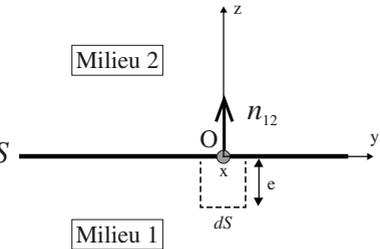


Figure 4.10

immédiat de la surface  $S$  mais du côté du milieu 2, le champ électromagnétique sera noté  $\vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ .

### 4.1 Relations de continuité

L'équation de Maxwell-flux magnétique  $\text{div}(\vec{B}) = 0$ , en coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Si on intègre cette équation (membre à membre) par rapport à  $z$ , depuis  $z = -e$  jusqu'à  $z = 0$ , et si on tient compte de ce qui précède, on obtient immédiatement :

$$\int_{-e}^0 \frac{\partial B_z}{\partial z} dz = 0 \text{ soit } B_z(0) - B_z(-e) = 0 \text{ et donc } B_{2z} = B_{1z}.$$

**Il y a donc toujours continuité de la composante normale du champ  $\vec{B}$  soit  $\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}$**

• L'équation de Maxwell  $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

Si on intègre chaque équation (membre à membre) par rapport à  $z$ , depuis  $z = -e$  jusqu'à  $z = 0$ , on obtient immédiatement :

$$\begin{cases} -(E_y(0) - E_y(-e)) = 0 \\ E_x(0) - E_x(-e) = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} E_{2y}(z=0) = E_{1y}(z=0) \\ E_{2x}(z=0) = E_{1x}(z=0) \end{cases}$$

**Il y a donc toujours continuité de toutes les composantes tangentielles du champ  $\vec{E}$  soit  $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$**

### 4.2 Relations de discontinuité

L'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$  (ou  $\text{div}(\vec{D}) = \rho_l$ ), en coordonnées cartésiennes, s'écrit :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_l \right).$$

Si on intègre cette équation (membre à membre) par rapport à  $z$ , depuis  $z = -e$  jusqu'à  $z = 0$ , on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} \int_{-e}^0 \frac{\partial E_z}{\partial z} dz &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-e}^0 \rho dz \text{ soit } E_z(0) - E_z(-e) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E_{2z} - E_{1z} &= \sigma/\epsilon_0 \quad (D_{2z} - D_{1z} = \sigma_l). \end{aligned}$$

- Il y a donc toujours discontinuité de la composante normale du champ  $\vec{E}$  soit  $E_{N_2} - E_{N_1} = \sigma/\epsilon_0$ .
- Il y a discontinuité de la composante normale du champ  $\vec{D}$  si l'un des milieux contient des charges libres soit  $D_{N_2} - D_{N_1} = \sigma_l$ .

**Remarque** Si aucun des deux milieux en présence ne contient de charge libre (comme à l'interface entre deux diélectriques) alors  $\sigma_l = 0$ , et il y a continuité de la composante normale du champ  $\vec{D}$  soit  $D_{N_2} = D_{N_1}$ .

L'équation de Maxwell-Ampère  $\overline{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ( $\overline{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

Si on intègre chaque équation (membre à membre) par rapport à  $z$ , depuis  $z = -e$  jusqu'à  $z = 0$ , on obtient immédiatement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(B_y(0) - B_y(-e)) = \mu_0 \int_{-e}^0 j_x dz = \mu_0 j_{sx} \\ B_x(0) - B_x(-e) = \mu_0 \int_{-e}^0 j_y dz = \mu_0 j_{sy} \\ 0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} -(B_{2y} - B_{1y}) = \mu_0 j_{sx} \\ B_{2x} - B_{1x} = \mu_0 j_{sy} \end{array} \right.$$

- Il y a donc toujours discontinuité de toutes les composantes tangentielles du champ  $\vec{B}$  soit  $\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ .
- Il y a discontinuité de toutes les composantes tangentielles du champ  $\vec{H}$  si l'un des milieux contient des courants libres soit  $\vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{j}_{sl} \wedge \vec{n}_{12}$ .

**Remarque** Si aucun des deux milieux en présence ne contient de courant libre (comme à l'interface entre deux diélectriques) alors  $j_{sl} = 0$ , et il y a continuité des composantes tangentielles du champ  $\vec{H}$  soit  $\vec{H}_{T_2} = \vec{H}_{T_1}$ .

### 4.3 Relations de passage aux interfaces

• D'après ce qui précède  $\vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1}$  et  $\vec{E}_{N_2} - \vec{E}_{N_1} = \vec{n}_{12} \sigma/\epsilon_0$ . En additionnant ces deux relations membre à membre on obtient :  $\vec{E}_{N_2} + \vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} - \vec{E}_{N_1} = \vec{n}_{12} \sigma/\epsilon_0$ ; ce qui s'écrit :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \vec{n}_{12} \sigma/\epsilon_0$$

Cette relation, qui regroupe les relations de continuité et de discontinuité du champ  $\vec{E}$ , correspond à la **relation de passage du champ électrique** à l'interface entre les deux milieux matériels.

• De la même manière, en regroupant les relations de continuité et de discontinuité du champ  $\vec{B}$  ( $\vec{B}_{N_1} = \vec{B}_{N_2}$ ,  $\vec{B}_{T_2} - \vec{B}_{T_1} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ ) on obtient la **relation de passage du champ magnétique** à l'interface entre deux milieux matériels :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

**Remarque** En multipliant scalairement et vectoriellement les relations de passage par  $\vec{n}_{12}$ , on retrouve les relations de continuité et de discontinuité :

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \sigma / \epsilon_0$$

#### 4.4 Relations de passage aux interfaces pour les champs $\vec{D}$ et $\vec{H}$

• L'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div}(\vec{D}) = \rho_l$  conduit à :

$$\vec{D}_{N_2} - \vec{D}_{N_1} = \vec{n}_{12} \sigma_l \quad \text{soit} \quad \vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_l$$

• L'équation de Maxwell-Ampère  $\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  conduit à :

$$\vec{H}_{T_2} - \vec{H}_{T_1} = \vec{j}_{ls} \wedge \vec{n}_{12} \quad \text{soit} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_{ls}$$

### 5 Relations constitutives pour les milieux LHI

Les équations de Maxwell dans un milieu matériel, qui font intervenir les champs  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ , ne suffisent pas pour résoudre certains problèmes d'électromagnétisme, en raison d'un nombre d'inconnues plus élevé que le nombre d'équations. En pratique, il faut adjoindre aux équations de Maxwell, d'autres relations, qualifiées de **relations constitutives**, afin d'aboutir à la solution des problèmes d'électromagnétisme dans la matière. Les relations constitutives décrivent le comportement du milieu soumis à un champ électromagnétique.

## 5.1 Permittivité diélectrique d'un milieu matériel

### a) Cas statique et quasi-statique

**Milieu linéaire.** On constate expérimentalement dans de nombreux matériaux que, lorsque l'amplitude du champ électrique  $\vec{E}$  appliqué au matériau n'est pas trop importante, la relation entre la polarisation du milieu ( $\vec{P}$ ) et le champ électrique ( $\vec{E}$ ) est linéaire. Si de plus  $\vec{E}$  ne varie pas trop vite alors la polarisation suit instantanément les variations du champ électrique ; ce qui se traduit par une relation du type :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$$

Un milieu où  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  sont liés par une relation de ce type est dit linéaire. La relation  $\vec{P} = \epsilon_0 [\chi_e] \vec{E}$  se met sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{exx} & \chi_{exy} & \chi_{exz} \\ \chi_{eyx} & \chi_{eyy} & \chi_{eyz} \\ \chi_{ezx} & \chi_{ezy} & \chi_{ezz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

**Remarque**  $[\chi_e]$  est une matrice symétrique appelée tenseur de susceptibilité électrique.

**Milieu isotrope.** Un milieu est dit isotrope si ses propriétés ne dépendent pas de la direction considérée. Dans un tel milieu, la matrice  $[\chi_e]$  est proportionnelle à la matrice unité. La polarisation  $\vec{P}$  est localement parallèle au champ et s'écrit :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

où  $\chi_e$  est fonction de la pulsation  $\omega$  du champ électrique.

**Milieu homogène.** Un milieu est dit homogène si ses propriétés ne dépendent pas du point du milieu où on se place. Dans un tel milieu,  $\chi_e$  a la même valeur en tout point du volume occupé par le matériau.

Dans un milieu **linéaire, homogène et isotrope** (LHI), lorsque le champ électrique ne varie pas trop vite dans le temps, les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  et  $\vec{D}$  sont liés par les relations :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

Ces deux relations font partie d'un groupe de relations appelées **relations constitutives**, elles correspondent aux formules qui relient la réponse du milieu (représentée par la polarisation et l'aimantation) aux champs électrique et/ou magnétique. Les relations constitutives font intervenir des grandeurs physiques caractéristiques du milieu considéré.

Ainsi,  $\chi_e$  est un nombre positif (sans dimension) appelé **susceptibilité électrique** du milieu  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  est la **permittivité diélectrique relative** du milieu (paramètre sans dimension)  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$  est la **permittivité du milieu** et s'exprime en  $F.m^{-1}$ .

**Tableau 4.1** – Susceptibilités et permittivités relatives de quelques fluides et solides

| Gaz (20 °C –1 atm) | $10^6 \cdot \chi_e$ | Liquides (20 °C)   | $\epsilon_r$ | Solides          | $\epsilon_r$ |
|--------------------|---------------------|--------------------|--------------|------------------|--------------|
| hélium             | 65                  | eau                | 80,36        | diamant          | 5,5          |
| néon               | 127                 | tétrachlorométhane | 2,238        | silice pure      | 3,78         |
| argon              | 517                 | benzène            | 2,284        | paraffine        | 2,20         |
| hydrogène          | 254                 | nitrobenzène       | 35,74        | nylon            | 5            |
| oxygène            | 495                 | acide acétique     | 6,15         | polyéthylène     | 2,3          |
| azote              | 547                 | éthanal            | 4,34         | verres           | 4 à 7        |
| gaz carbonique     | 921                 | éthanol            | 25,1         | plexiglass       | 3,4          |
| air sec            | 537                 | glycérol           | 43,5         | téflon           | 2,1          |
|                    |                     | acétone            | 21,2         | titane de baryum | 1500         |

**b) Cas dynamique**

Lorsque les variations de  $\vec{E}$  sont trop rapides, la polarisation ne peut plus suivre instantanément les variations du champ électrique. Il apparaît alors un retard entre la polarisation et le champ électrique. Cela se traduit par un déphasage ( $\varphi$ ) de la polarisation par rapport au champ électrique. Ainsi, pour un champ sinusoïdal de pulsation  $\omega$ ,

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t),$$

la polarisation se met sous la forme suivante :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \cos(\omega t - \varphi).$$

**ATTENTION !**

Il est important de noter que cette relation entre  $\vec{P}(t)$  et  $\vec{E}(t)$  n'est plus linéaire.

Cependant, il est possible de retrouver une relation linéaire entre le champ électrique et la polarisation, à condition d'exprimer les champs en notation complexe. À cette fin, on définit une susceptibilité électrique complexe, en écrivant :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t), \text{ et } \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \exp[-i(\omega t - \varphi)].$$

$\vec{P}(t)$  s'écrit alors :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}_0 \exp(-i\omega t) \exp(i\varphi) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(t) \exp(i\varphi) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\omega) \vec{E}$$

$$\text{avec } \tilde{\chi}_e(\omega) = \chi_e \exp(i\varphi)$$

La notation complexe permet d'établir, d'un point de vue purement mathématique, une relation linéaire, entre la polarisation complexe et le champ électrique complexe :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\omega) \vec{E}$$

avec  $\tilde{\chi}_e(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$  où  $\chi' = \chi_e \cos \varphi$  et  $\chi'' = \chi_e \sin \varphi$

On introduit également la permittivité diélectrique complexe avec

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \tilde{\epsilon}(\omega) \vec{E}, \text{ et } \tilde{\epsilon}(\omega) = \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega).$$

## 5.2 Perméabilité magnétique d'un milieu matériel

### a) Milieux diamagnétiques et paramagnétiques

Une proportion significative de milieux matériels présente des propriétés magnétiques extrêmement faibles. Dans ces milieux, l'aimantation induite  $\vec{M}$  est proportionnelle au champ magnétique  $\vec{B}$  (même lorsque  $\vec{B}$  varie rapidement dans le temps) : ces milieux sont linéaires et isotropes quant à leurs propriétés magnétiques. Nous les supposerons également homogènes. Pour des raisons historiques, on définit la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  d'un tel milieu par :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (4.14)$$

Sachant que  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ , nous en déduisons :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}} \quad (4.15)$$

en posant  $\mu_r = 1 + \chi_m$ , où  $\mu_r$  est la **perméabilité magnétique relative** du milieu, et  $\mu = \mu_0\mu_r$  est la **perméabilité du milieu** (ou **perméabilité absolue**).

$\chi_m$  et  $\mu_r$  sont sans dimensions tandis que  $\mu$  (comme  $\mu_0$ ) s'exprime en  $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Contrairement à la susceptibilité électrique  $\chi_e$ , la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  peut être positive ou négative, et le signe de  $\chi_m$  distingue les milieux diamagnétiques des milieux paramagnétiques :

**Cas d'une substance diamagnétique.** ( $\chi_m < 0$ ) Le champ magnétique créé par l'aimantation acquise par le matériau s'oppose au champ extérieur  $\vec{B}$ . Cette aimantation induite, toujours très faible, reste quasiment indépendante de la température. Les matériaux diamagnétiques ont une susceptibilité magnétique  $\chi_m$  négative qui dépend peu de la température.

**Cas d'une substance paramagnétique.** ( $\chi_m > 0$ ) Lorsque les atomes possèdent déjà leur propre moment magnétique permanent, le diamagnétisme (toujours présent) est masqué par le paramagnétisme. Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur, les dipôles magnétiques (petits aimants permanents) s'orientent dans la direction du champ appliqué et l'amplifient. Ici, l'amplification du champ magnétique est due au fait que le paramagnétisme est plus important que le diamagnétisme. Cependant, l'aimantation globale induite  $\vec{M}$ , reste également très faible, mais elle dépend fortement de la température, car l'agitation thermique entrave l'orientation privilégiée des dipôles. Les matériaux paramagnétiques ont une susceptibilité magnétique  $\chi_m$  positive qui décroît (en général) avec la température.

**Tableau 4.2** – Susceptibilité magnétique de quelques milieux.

| Corps diamagnétiques : $10^6 \cdot \chi_m$ | Corps paramagnétiques : $10^6 \cdot \chi_m$ |
|--|---|
| dihydrogène -0,002                         | dioxygène +4,8                              |
| diazote -0,006                             | air +0,37                                   |
| eau -9,1                                   | sodium +8,5                                 |
| diamant -21,6                              | aluminium +20,7                             |
| cuiivre -9,6                               | calcium +19,5                               |
| plomb -15,8                                | chlorure ferrique FeCl <sub>3</sub> +3 300  |
| argent -23,8                               |   |

**Remarque**

1. Lorsque la susceptibilité  $\chi_m$  est très faible, on peut écrire de manière générale :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)} \vec{B} \approx \frac{\chi_m}{\mu_0} \vec{B} \tag{4.16}$$

2. Dans la matière, le champ  $\vec{B}$  total résulte de la superposition du champ créé par les sources extérieures au milieu et du champ créé par la matière elle-même (via l'aimantation). Dans un milieu diamagnétique ou paramagnétique, ce dernier champ est souvent négligé et l'on suppose  $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$ .

3. Pour la plupart des gaz et matériaux diélectriques,  $\mu_r \approx 1$ .

**b) Milieux ferromagnétiques**

Les milieux ferromagnétiques peuvent présenter une aimantation très importante lorsqu'ils sont plongés dans un champ  $\vec{B}$  et cette aimantation peut subsister lorsque le champ extérieur est supprimé. Des métaux comme le fer, le nickel, le cobalt, certains de leurs alliages ou de leurs oxydes, sont ferromagnétiques. Ces matériaux ne sont pas linéaires. Autrement dit, la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  n'est pas linéaire.

**5.3 Conductivité des matériaux**

**a) Loi d'Ohm locale**

La plupart des milieux conducteurs, sont caractérisés par une relation de proportionnalité entre le champ électrique en un point et la densité volumique de courant  $\vec{j}$  en ce point :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \tag{4.17}$$

où  $\gamma$  est appelé **conductivité**. Cette relation est connue sous le nom de **loi d'Ohm locale**.

**b) Loi de Joule**

Les charges mobiles du conducteur reçoivent de l'énergie de la part du champ électromagnétique. Cette énergie est ensuite dissipée en chaleur dans le conducteur au

cours des chocs entre porteurs mobiles et charges fixes du milieu. C'est ce phénomène qui est appelé **effet Joule**. Sachant que  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ , la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges mobiles contenues dans un volume élémentaire  $d\tau$  s'écrit :

$$dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \gamma E^2 d\tau = \frac{j^2}{\gamma} d\tau \quad (4.18)$$

## 6 Grandeurs énergétiques dans un milieu matériel

En multipliant respectivement les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère par  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ , nous obtenons :

$$\vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{E} \cdot \left[ \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right]$$

Sachant que :  $\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}$ , en faisant la soustraction de ces deux équations membre à membre, nous déduisons la relation suivante :

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{j}_l \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.19)$$

Soit  $\tau$  un volume entouré par une surface fermée  $\Sigma$  dont la normale  $\vec{n}$  est orientée vers l'extérieur. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky et l'équation (4.19), nous établissons le bilan de puissance suivant :

$$\iint_{\Sigma} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} d\Sigma + \iiint_{\tau} \vec{j}_l \cdot \vec{E} d\tau = - \iiint_{\tau} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] d\tau. \quad (4.20)$$

### 6.1 Densité d'énergie électromagnétique

Le terme à droite de l'équation (4.20) traduit la diminution de l'énergie électromagnétique totale associée au volume  $\tau$ . On peut donc écrire :

$$\frac{dU}{dt} = - \iiint_{\tau} \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] d\tau = \iiint_{\tau} \frac{du}{dt} d\tau,$$

où  $U$  représente l'énergie électromagnétique totale contenue dans volume  $\tau$ , tandis que  $u$  représente la **densité volumique d'énergie électromagnétique**.

Dans un milieu LHI de constantes  $\epsilon$  et  $\mu$ , en posant  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , on obtient :

$$\frac{du}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right)$$

La **densité volumique d'énergie électromagnétique dans le milieu LHI** est donc définie par

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (4.21)$$

Cette densité d'énergie est constituée de deux termes :

- Le premier terme représente la **densité d'énergie électrique**, que nous notons :

$$W_E = \epsilon E^2 / 2 = D^2 / (2\epsilon) = E D / 2 ; \quad (4.22)$$

- Le second terme représente la **densité d'énergie magnétique**, que nous notons :

$$W_H = \mu H^2 / 2 = B^2 / (2\mu) = H B / 2. \quad (4.23)$$

## 6.2 Vecteur Poynting

Le premier terme à gauche de l'équation (4.20) représente le débit de l'énergie électromagnétique qui s'échappe de  $\Sigma$  par rayonnement ; et le deuxième terme à gauche de cette équation nous donne l'accroissement de l'énergie cinétique des particules présentes dans le volume. Cela correspond à une perte d'énergie électromagnétique.

La quantité  $\vec{E} \wedge \vec{H}$  représente le **vecteur Poynting** que nous noterons  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (4.24)$$

À un instant donné  $t$ , le flux du vecteur  $\vec{P}$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  donne la puissance  $\vec{P}(t)$  rayonnée.

## 6.3 Vecteur de Poynting complexe

On peut définir un **vecteur de Poynting complexe**  $\vec{P}_c$  de la manière suivante :

$$\vec{P}_c = \frac{1}{2}\vec{E} \wedge \vec{H}^* \quad (4.25)$$

où  $\vec{H}^*$  est le complexe conjugué de  $\vec{H}$ .

La partie réelle de  $\vec{P}_c$  donne le vecteur de Poynting moyenné sur une période  $T$  :

$$\langle \vec{P} \rangle = \text{Re} \left[ \vec{P}_c \right] \quad (4.26)$$

La partie réelle du flux du vecteur complexe  $\vec{P}_c$  à travers la surface fermée  $\Sigma$ , nous donne le débit moyen d'énergie à travers  $\Sigma$ . Ce vecteur permet de quantifier la puissance moyenne que véhiculent les ondes en se propageant :

$$\langle \vec{P} \rangle = \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \text{Re} \left[ \vec{P}_c \right] d\Sigma. \quad (4.27)$$

- ❶ Tout milieu matériel est constitué par un agencement de divers porteurs de charges (électrons, noyaux atomiques, ions, etc).
- ❷ En l'absence d'onde électromagnétique, chaque volume élémentaire du milieu, disons  $d\tau$ , contient donc un très grand nombre de charges positives et négatives en quantités égales, qui sont toutes en perpétuelle agitation, et réparties de manière à peu près uniforme dans le volume  $d\tau$ , de telle sorte que les centres de gravité des charges négatives et positives, disons  $G_-$  et  $G_+$ , soient situés au même point au sein du volume  $d\tau$  :  $G_- = G_+$ .
- ❸ Un milieu matériel interagit toujours avec l'onde qu'il reçoit, par l'intermédiaire de ses constituants élémentaires porteurs de charge. En présence d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , la force de Coulomb créée par le champ  $\vec{E}$ , provoque un déplacement en bloc des charges positives dans la direction du vecteur  $\vec{E}$ , tandis que les charges négatives se déplacent dans la direction inverse. Conséquemment, les centres de gravité des charges négatives et positives ne coïncident plus ( $G_- \neq G_+$ ). Tout se passe alors comme si toutes les charges positives présentes dans le volume  $d\tau$  étaient regroupées au point  $G_+$  avec une charge totale  $Q$ , et toutes les charges négatives regroupées au point  $G_-$  avec une charge totale  $-Q$ . En d'autres termes, chaque élément de volume  $d\tau$  se comporte comme un dipôle électrique, devenant ainsi créateur d'un champ électrique l'espace environnant. L'ensemble des dipôles présents dans le milieu matériel contribuent ainsi (avec les autres sources de champ) à la création du champ électrique présent dans le milieu.

#### ❹ Moment dipolaire électrique

Le champ crée par un diôle électrique dépend de son **moment dipolaire**, défini par  $\vec{p} = Q \overrightarrow{G_- G_+}$ .

#### ❺ Vecteur polarisation

On définit la **polarisation** comme étant la quantité de moments dipolaires électriques par unité de volume du matériau :  $\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}$ . C'est ce vecteur qui caractérise au niveau macroscopique la façon dont le milieu réagit à la présence d'un champ électrique. On peut donc considérer le vecteur  $\vec{P}$  comme la réponse du milieu à la présence du champ électrique.

• **Densité volumique de charges équivalente à la polarisation**

La polarisation est une source de champ électrique. On montre qu'en tout point du volume du milieu, la polarisation  $\vec{P}$  crée un champ électrique équivalent à celui que créerait une densité de charge définie par :  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$  appelée "densité volumique de charges de polarisation".

• **Densité volumique de courants équivalente à la polarisation**

On montre qu'en tout point du volume d'un milieu, une polarisation variant temporellement crée une densité de courant définie par :  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , appelée "densité volumique de courants de polarisation".

**6 Induction électrique**

L'état électrique d'un milieu matériel est défini par le **champ électrique**  $\vec{E}$  au sein du milieu, et par les effets induits par ce champ  $\vec{E}$ , à savoir, la **polarisation**  $\vec{P}$ , et les courants résultant des variations temporelles de  $\vec{P}$ .

Par définition, on appelle « **induction électrique** » le vecteur défini par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.28)$$

Ce vecteur est d'une importance capitale, car il est utilisé pour faire apparaître explicitement la contribution du milieu dans les équations de Maxwell. La prise en compte de cette réponse du milieu, nécessite aussi de distinguer la façon dont les porteurs de charges se comportent ; ce qui conduit à classer les charges en deux catégories, qualifiées respectivement de **charges liées** et de **charges libres**.

**7 Charges liées** : Ce sont des charges qui peuvent se mouvoir, mais qui sont astreintes (même en présence d'un champ électromagnétique) à rester au voisinage immédiat d'un lieu précis, par des forces d'interaction avec une ou plusieurs autres porteurs de charges du milieu. Les charges présentes dans un matériau diélectrique est essentiellement des **charges liées**.

**8 Charges libres** : Ce sont des charges qui peuvent se mouvoir sans être astreintes à rester au voisinage immédiat d'un lieu particulier du milieu. De telles charges sont présentes dans les milieux conducteurs et semi-conducteurs. Il s'agit d'électrons qui ont été arrachés de leurs atomes d'origine par effet thermique. Ces électrons, qualifiés d'**électrons libres**, sont présents en très grand nombre dans les métaux, et en nombre

restreint dans les semi-conducteurs. Les métaux et semi-conducteurs contiennent donc à la fois des **charges liées** et des **charges libres**.

### 9 Etat magnétique d'un milieu matériel

Au sein d'un matériau, un champ magnétique  $\vec{B}$  agit principalement sur les électrons, car ils sont beaucoup plus légers que les noyaux. La force magnétique agissant sur un électron animé d'une vitesse  $\vec{v}$ ,  $\vec{f} = -e(\vec{v} \wedge \vec{B})$ , tend à faire tourner l'électron autour d'un axe qui coïncide avec la direction de  $\vec{B}$ . Ce mouvement de rotation d'un électron crée une **boucle de courant** que l'on qualifie de **dipôle magnétique**. Une fois créé, le dipôle magnétique crée à son tour un champ magnétique dans l'espace environnant. Au dipôle magnétique on associe un moment magnétique  $\vec{m} = i S \vec{n}$ , où  $i$  est le courant généré par le mouvement de rotation de l'électron,  $S$  la surface délimitée par sa trajectoire, et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à cette surface et orienté selon la **règle d'Ampère**.

### 10 Vecteur aimantation $\vec{M}$

En présence d'un champ magnétique, chaque volume élémentaire du milieu  $d\tau$  acquiert un moment magnétique  $d\vec{m}$ . On définit le **vecteur aimantation**  $\vec{M}$  comme étant la **densité volumique de moments magnétiques** :  $\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}$ .

#### • Densité de courants équivalente à l'aimantation

On montre qu'en tout point du volume de la matière, l'aimantation  $\vec{M}$  crée un champ magnétique équivalent à celui que créerait une densité de courant définie par :  $\vec{j}_m = \text{rot} \vec{M}$  appelée « densité volumique de courant d'aimantation ».

### 11 Équations de Maxwell dans un milieu matériel

Dans un milieu matériel, les équations de Maxwell-Flux magnétique et Maxwell-Faraday, restent inchangées :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \text{ et } \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Pour faire apparaître explicitement la polarisation comme une source de champ électrique, on décompose la densité volumique de charges comme suit  $\rho = \rho_l + \rho_p$ , où  $\rho_l$  désigne la **densité volumique des charges libres**. Cela permet de remplacer l'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div}(\vec{E}) = (\rho_l + \rho_p)/\epsilon_0 = (\rho_l - \text{div} \vec{P})/\epsilon_0$ , par :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f}, \text{ où } \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}.$$

Pour faire apparaître explicitement les contributions respectives de la polarisation et de l'aimantation dans les courants, on écrit que  $\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_m + \vec{j}_p$ , où  $\vec{j}_l$  désigne la **densité volumique de courants libres**; ce qui permet de remplacer l'équation de Maxwell-Ampère  $\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , par :

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_l + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \text{ où } \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \text{ est appelé } \mathbf{excitation magnétique}.$$

• **Relations constitutives :**

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), on a :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}}.$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}.$$

$$\boxed{\vec{j}_l = \gamma \vec{E}},$$

où  $\chi_e \equiv$  **susceptibilité électrique**,  $\epsilon \equiv$  **permittivité électrique**,  
 $\chi_m \equiv$  **susceptibilité magnétique**,  $\mu \equiv$  **perméabilité magnétique**,  
 $\gamma \equiv$  **conductivité électrique**.

• **Conditions aux limites du milieu**

L'application des équations de Maxwell aux frontières d'un milieu matériel, et plus généralement, aux surfaces de séparation de milieux ayant des propriétés différentes, conduit aux relations de continuité ou de discontinuité du champ électromagnétique.

• **Conditions de continuité :**

- Il y a toujours continuité de la composante tangentielle du champ électrique.
- Il y a toujours continuité de la composante normale du champ magnétique.



Lorsqu'une onde électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) pénètre dans un milieu matériel, elle met en mouvement les constituants élémentaires de la matière (porteurs de charge) par l'intermédiaire de la force de Lorentz. Pour un constituant porteur d'une charge  $Q$ , cette force est la somme de la force électrique  $\vec{f}_e$  et de la force magnétique  $\vec{f}_m$  :  $\vec{f}_L = \vec{f}_e + \vec{f}_m$ , avec  $\vec{f}_e = Q\vec{E}$ , et  $f_m = Q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ .

- 4.1** La force électrique  $\vec{f}_e$  provoque :
- un mouvement oscillatoire translationnel du porteur de charge  $Q$
  - un mouvement oscillatoire rotationnel du porteur de charge  $Q$
- 4.2** La force électrique  $\vec{f}_e$  est ainsi à l'origine de la création, au sein du milieu, de :
- une aimantation
  - une polarisation
  - un courant de déplacement
  - un courant d'aimantation
  - un courant de polarisation
- 4.3** La force magnétique  $\vec{f}_m$  provoque :
- un mouvement oscillatoire translationnel du porteur de charge  $Q$
  - un mouvement oscillatoire rotationnel du porteur de charge  $Q$
- 4.4** La force magnétique  $\vec{f}_m$  est ainsi à l'origine de la création, au sein du milieu, de :
- une aimantation
  - une polarisation
  - un courant de déplacement
  - un courant d'aimantation
  - un courant de polarisation
- 4.5** Dans un milieu matériel, les constituants élémentaires porteurs de charges peuvent être classés en deux catégories : les charges liées et les charges libres. Les charges liées sont-elles toujours présentes dans tout milieu matériel ?
- oui
  - non
- 4.6** Les charges libres sont-elles toujours présentes dans tout milieu matériel ?
- oui
  - non
- 4.7** Identifier l'effet (ou les effets) générés par le mouvement des charges liées :
- aimantation
  - courant d'aimantation
  - courant de conduction
  - polarisation
  - courant de polarisation
  - courant de déplacement
- 4.8** Identifier l'effet (ou les effets) générés par le mouvement des charges libres :
- aimantation
  - courant d'aimantation
  - courant de conduction
  - polarisation
  - courant de polarisation
  - courant de déplacement
- 4.9** Identifier les effets que l'on peut négliger dans un conducteur parfait ayant des propriétés magnétiques comparables à celles du vide, lorsqu'il est soumis à une onde radioélectrique (onde de basse fréquence) :
- aimantation
  - courant d'aimantation
  - courant de conduction
  - polarisation
  - courant de polarisation
  - courant de déplacement
- 4.10** Identifier les effets que l'on peut négliger dans un isolant parfait ayant des propriétés magnétiques comparables à celles du vide, lorsqu'il est soumis à une onde radioélectrique :
- aimantation
  - courant d'aimantation
  - courant de conduction
  - polarisation
  - courant de polarisation
  - courant de déplacement



# Entraînez-vous

## 4.1 Équations de Maxwell dans les milieux matériels

1. Rappeler les quatre équations de Maxwell portant sur les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , ainsi que sur les densités de charge et de courant  $\rho$  et  $\vec{j}$  dans un milieu matériel.
2. Écrire les expressions des densités de charge et de courant équivalentes aux vecteurs **polarisation** et **aimantation**.
3. En déduire les quatre équations de Maxwell pour un milieu matériel, en fonction des vecteurs  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  et des densités de charges et courants libres  $\rho_{\text{lib}}$  et  $\vec{j}_{\text{lib}}$ .
4. Dénombrer les inconnues et les équations. Pour résoudre les équations de Maxwell et obtenir les champs, il est donc nécessaire de modéliser les propriétés du milieu au moyen d'équations supplémentaires, appelées **relations constitutives**. Rappeler ces relations pour un milieu LHI (linéaire, homogène et isotrope), caractérisé par une perméabilité absolue  $\mu$ , une permittivité  $\epsilon$ , et une conductivité  $\sigma$ .

## 4.2 Dissipation des charges dans divers milieux - Constante de dissipation des charges

On considère un milieu LHI doté d'une permittivité  $\epsilon$ , une perméabilité  $\mu_0$ , et une conductivité  $\gamma$ . Ce milieu est le siège d'un champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) de basse fréquence (ondes radio). À un instant  $t$  donné, pris comme origine des temps, le milieu est affecté d'une perturbation soudaine qui provoque une accumulation de charges libres en un point M du milieu, avec une densité volumique de charge  $\rho_0$  à  $t = 0$ .

1. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère et l'équation de conservation de charge au point M, et en déduire l'équation qui donne l'évolution temporelle de la densité volumique de charges libres  $\rho_{\text{lib}}(t)$  au point M.
2. Résoudre cette équation et tracer l'allure de la courbe  $\rho_{\text{lib}}(t)$ . Déduire l'expression de la constante de dissipation des charges  $\tau$  en fonction de  $\epsilon$  et  $\gamma$ .
3. Calculer les valeurs de  $\tau$  et compléter la quatrième colonne du tableau ci-après. On rappelle que  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , avec  $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$ .
4. Le champ électromagnétique considéré est un champ sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . On cherche à évaluer le caractère plus ou moins conducteur de ces milieux en fonction de la pulsation  $\omega$ , à partir du rapport  $R = \left| \vec{j}_p + \vec{j}_{\text{depl}} \right| / \left| \vec{j}_{\text{lib}} \right|$ , où  $\vec{j}_{\text{lib}}$ ,  $\vec{j}_p$ , et  $\vec{j}_d$ , représentent respectivement les densités volumiques de courants libres, courant de polarisation, et courant de déplacement. On rappelle que :  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  et  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

| Milieux           | $\epsilon_r$ | $\gamma$ [ $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ] | $\tau$ [s] | $\nu_0$ [Hz] |
|-------------------|--------------|--|------------|--------------|
| Cuivre            | 5,6          | $5,9 \times 10^7$                              |            |              |
| Eau de mer        | 80           | 4  |            |              |
| Eau douce         | 80           | $10^{-2}$                                      |            |              |
| Terrains cultivés | 20           | $10^{-2}$                                      |            |              |
| Eau distillée     | 80           | $10^{-4}$                                      |            |              |
| Sol très sec      | 4            | $10^{-4}$                                      |            |              |

- Montrer que la densité de courants libres est prédominant (comportement « conducteur ») à basses fréquences,  $\nu \ll \nu_0$ , où  $\nu_0$  est une fréquence caractéristique du milieu.
- Donner l'expression  $\nu_0$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $\gamma$ , puis son expression en fonction de  $\tau$ .
- Calculer les valeurs de  $\nu_0$  pour les milieux considérés dans le tableau. Tirez vos conclusions.

### 4.3 Réflexion sur un conducteur parfait

On considère un plan P infini séparant l'espace en un demi-espace vide et un demi-espace rempli d'un métal. Une onde électromagnétique plane, du domaine des radiofréquences, arrive en incidence normale sur le plan P, avec un champ électrique parallèle à  $\vec{u}_x$ , une pulsation  $\omega$ , et un vecteur d'onde incident  $\vec{k} = k\vec{u}_z$ .

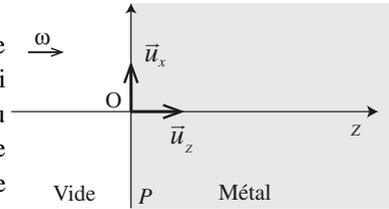


Figure 4.11

- Le conducteur est supposé parfait. Préciser ce que signifie « conducteur parfait ».
- En utilisant les conditions aux limites, montrer la présence d'une onde réfléchie. Préciser son champ électrique  $\vec{E}_r$ , et son champ d'induction magnétique  $\vec{B}_r$ .
- En déduire la densité de courant de surface  $\vec{j}_s$  sur le plan P.

### 4.4 Effet de peau dans un conducteur réel

On considère un milieu conducteur de conductivité  $\sigma$  et permittivité  $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ .

- Écrire l'équation de propagation dans le conducteur pour le champ électrique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(kx - \omega t)]$  d'une onde électromagnétique située dans le domaine des radiofréquences.
- Déterminer la relation de dispersion de cette onde dans le conducteur.
- Justifier l'approximation  $\mu_0 \sigma c^2 \gg \omega$ , et montrer que  $k \simeq (1 + i)/\delta$ . Calculer  $\delta$ .
- Interpréter le résultat de l'effet de peau.  
A.N. :  $\omega = 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$   $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

### 4.5 Puissance dissipée dans un conducteur réel

On considère le même système que dans l'exercice 4.3, mais avec un métal de conductivité  $\gamma \gg \omega \varepsilon_0$ . L'onde électromagnétique plane de pulsation  $\omega$ , se propageant initialement dans le vide, arrive en incidence normale sur le plan P de ce métal.

- Établir l'équation différentielle vérifiée par le champ  $\vec{B}$  à l'intérieur du métal. Intégrer cette équation en cherchant des solutions de la forme  $\vec{B} = B(z) \exp(i\omega t) \vec{u}_y$ . En déduire la valeur du courant  $\vec{j}$  à l'intérieur du métal.
- Calculer la puissance dissipée dans le conducteur par unité de surface du plan P, en fonction de  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\mu_0$  et  $B(0)$ .

# ● Solutions



- 4.1** Réponse a ; **4.2** Réponses b, e ; **4.3** Réponse b ; **4.4** Réponses a, d ; **4.5** Réponse a ; **4.6** Réponse b ; **4.7** Réponses a, b, d, e ; **4.8** Réponse c ; **4.9** Réponses a, b, d, e ; **4.10** Réponses a, b, c.



## 4.1 Équations de Maxwell dans les milieux matériels

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (4.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (4.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (4.32)$$

2. Dans un milieu matériel, on peut décomposer les densités volumique de charges et de courants de la manière suivante :

$$\rho = \rho_{\text{lib}} + \rho_p \quad (4.33)$$

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{lib}} + \vec{J}_m + \vec{J}_p \quad (4.34)$$

où  $\rho_{\text{lib}}$  est la densité volumique des charges libres,

$\rho_p$  est la densité volumique de charges équivalente à la polarisation,

$\vec{J}_{\text{lib}}$  est la densité volumique de courants libres,

$\vec{J}_p$  est la densité volumique de courants induits par les charges liées,

$\vec{J}_m$  est la densité volumique de courant équivalente à l'aimantation.

On a donc :

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}. \quad (4.35)$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (4.36)$$

$$\vec{J}_m = \overline{\operatorname{rot}} \vec{M}. \quad (4.37)$$

3. Les équations (4.29), (4.33) et (4.35) conduisent à :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}} + \rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\varepsilon_0} - \operatorname{div} \vec{P} / \varepsilon_0 \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{E} + \vec{P} / \varepsilon_0) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{lib}} \text{ soit}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{lib}} \quad (4.38)$$

avec  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . En tenant compte de (4.36) et (4.37), la relation (4.32) devient :

$$\overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{J}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \overline{\operatorname{rot}} \vec{M} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \overline{\operatorname{rot}} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \left( \vec{J}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{lib}} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} + \varepsilon_0 \vec{E}) = \vec{J}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \overline{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{J}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.39)$$

avec  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ .

Aux équations (4.38) et (4.39), il faut donc adjoindre les équations (4.30) et (4.31).

4. Dans le cas le plus général, dans les équations de Maxwell [(4.38), (4.30), (4.31), (4.39)] il y a total :

- **12 inconnues** :  $D_x, D_y, D_z, H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ .
- **8 équations** : En effet, les équations (4.30) et (4.39) fournissent chacune trois équations. Les équations (4.38) et (4.31) fournissent chacune une équation.

Le nombre d'inconnues est donc supérieur au nombre d'équations. Pour résoudre les équations de Maxwell et obtenir les champs, il est donc nécessaire de modéliser les propriétés du milieu au moyen d'équations supplémentaires, appelées **relations constitutives**. Dans un milieu LHI (linéaire, homogène et isotrope), caractérisé par une perméabilité absolue  $\mu$ , une permittivité  $\varepsilon$ , et une conductivité  $\sigma$ , les relations constitutives s'écrivent :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (4.40)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (4.41)$$

$$\vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E}. \quad (4.42)$$

## 4.2 Dissipation des charges dans divers milieux - Constante de dissipation des charges

1. Équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.43)$$

Équation de conservation de charge :

$$\text{div} \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \rho_{\text{lib}}}{\partial t} = 0. \quad (4.44)$$

Loi d'Ohm :

$$\vec{j}_{\text{lib}} = \gamma \vec{E}. \quad (4.45)$$

$$(4.43) \rightarrow \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = \text{div} \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \text{div}(\vec{D})}{\partial t} \quad (4.46)$$

$$\text{soit } 0 = \text{div} \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \text{div}(\vec{D})}{\partial t} = \gamma \text{div} \vec{E} + \frac{\partial \text{div}(\vec{D})}{\partial t} \quad (4.47)$$

$$= \frac{\gamma}{\varepsilon} \text{div}(\varepsilon \vec{E}) + \frac{\partial \text{div}(\vec{D})}{\partial t} = \frac{\gamma}{\varepsilon} \text{div}(\vec{D}) + \frac{\partial \text{div}(\vec{D})}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho_{\text{lib}}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \rho_{\text{lib}} \quad (4.48)$$

2. La solution de (4.48) s'écrit :

$$\rho_{\text{lib}} = \rho_0 \exp(-t/\tau) \quad (4.49)$$

avec

$$\tau = \varepsilon/\gamma = \varepsilon_0 \varepsilon_r / \gamma \quad (4.50)$$

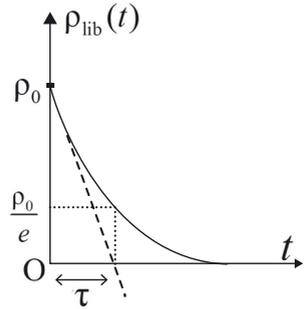


Figure 4.12

3. Il ressort de ce tableau que  $\tau \ll 1 \text{ s}$  ; autrement dit, le temps de dissipation des charges est extrêmement court, et qu'il est d'autant plus court que la conductivité du milieu est élevée.

En d'autres termes, dans un milieu conducteur, bien que des charges libres puissent exister et se déplacer au sein du milieu ; une accumulation de ces charges en un point donné du milieu ne peut se maintenir dans le milieu, et disparaît au bout d'un temps qui est trop court pour provoquer un effet significatif.

Dans de nombreux milieu conducteur, on peut donc considérer que  $\rho_{\text{lib}} \simeq 0$ , à condition que la pulsation  $\omega$  du champ électromagnétique soit suffisamment basse pour que sa période  $T = \nu^{-1} = 2\pi/\omega$  soit très grande par rapport à  $\tau$ . Ainsi :

$$\rho_{\text{lib}} \simeq 0 \quad \text{si} \quad \nu \ll 1/\tau \quad (4.51)$$

4. On pose :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ . Ici, il convient de noter que les milieux considérés ont des propriétés magnétiques comparables à celle du vide ( $\mu \simeq \mu_0$ ) ; autrement dit, l'aimantation y est pratiquement nulle (ainsi que le courant d'aimantation). Le courant total présent dans ces milieux se décompose alors de la manière suivante :

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J}_{\text{lib}} + \vec{J}_p + \vec{J}_d \quad (4.52)$$

où  $\vec{J}_{\text{lib}}$ ,  $\vec{J}_p$ , et  $\vec{J}_d$ , représentent respectivement les densités volumiques de **courants libres**, **courant des charges liées**, et **courant de déplacement**, avec :

$$\vec{J}_{\text{lib}} = \gamma \vec{E} \quad (4.53)$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (4.54)$$

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.55)$$

Le milieu étant LHI ( $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ ), il convient de regrouper le courant des charges liées et le courant de déplacement, sous le terme

$$\vec{J}_{dg} = \vec{J}_p + \vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \varepsilon \vec{E} \quad (4.56)$$

qui est directement proportionnel à la fréquence de l'onde. Le rapport entre les courants  $\vec{J}_{dg}$  et  $\vec{J}_{lib}$  s'écrit :

$$R = \frac{|\vec{J}_{dg}|}{|\vec{J}_{lib}|} = \frac{\omega \varepsilon}{\gamma} = \omega \tau = (2\pi\nu) \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\nu}{\nu_0} \quad (4.57)$$

avec

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (4.58)$$

L'expression (4.57) montre que pour

(i)  $\omega \ll 1/\tau$  soit  $\nu \ll \nu_0$  alors  $R \ll 1$  ;

Autrement dit, pour des fréquences suffisamment inférieures à la fréquence caractéristique  $\nu_0$ , le courant des charges libres est prédominant. Le comportement du matériau est alors assimilable à celui d'un « conducteur ohmique ».

(ii)  $\omega \gg 1/\tau$  soit  $\nu \gg \nu_0$  alors  $R \gg 1$  ;

En d'autres termes, pour des fréquences suffisamment supérieures à la fréquence caractéristique  $\nu_0$ , le courant des charges libres devient négligeable devant le courant des charges liées et le courant de déplacement. Le comportement du matériau est alors assimilable à celui d'un diélectrique.

| Milieux           | $\varepsilon_r$ | $\gamma$ [ $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ ] | $\tau$ [s]            | $\nu_0$ [Hz]         |
|-------------------|-----------------|---|-----------------------|----------------------|
| cuivre            | 5,6             | $5,9 \times 10^7$                       | $8,4 \times 10^{-19}$ | $1,9 \times 10^{17}$ |
| eau de mer        | 80              | 4                                       | $1,7 \times 10^{-10}$ | $9 \times 10^8$      |
| eau douce         | 80              | $10^{-2}$                               | $7 \times 10^{-8}$    | $2,25 \times 10^6$   |
| terrains cultivés | 20              | $10^{-2}$                               | $1,7 \times 10^{-8}$  | $9 \times 10^6$      |
| eau distillée     | 80              | $10^{-4}$                               | $7 \times 10^{-6}$    | $2,25 \times 10^4$   |
| sol très sec      | 4               | $10^{-4}$                               | $3,5 \times 10^{-7}$  | $4,5 \times 10^5$    |

**Remarque** Dans le bas du domaine des très basses fréquences ( $\nu \leq 10$  kHz), pour tous les milieux considérés dans le tableau précédent, on a  $\nu \ll \nu_0$  soit  $R \ll 1$  ; ce qui signifie que tous ces matériaux ont, à ces fréquences, un comportement de type « conducteur ».

Le cuivre conserve un comportement conducteur dans tout le domaine des ondes radio ( $0 < \nu \leq 1\,000$  Hz) et même bien au-delà.

Les autres milieux considérés ont des fréquences caractéristiques  $\nu_0$  situées à l'intérieur du domaine radio ; ce qui indique qu'ils adopteront un caractère plus ou moins « conducteur » en fonction de la fréquence de l'onde dans ce domaine.

### 4.3 Réflexion sur un conducteur parfait

1. Le terme « conducteur parfait » désigne un conducteur idéal ayant en volume une conductivité infinie :  $\gamma = \infty$ . Dans un tel conducteur, la densité de courant de conduction ne pouvant prendre de valeur infinie, la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  implique nécessairement que  $\vec{E} = 0$  et donc que  $\vec{B} = 0$  dans le volume du conducteur.

2. Le champ électrique incident peut se mettre sous la forme suivante :

$$\vec{E}_i = E_0 \vec{u}_x \exp [i(\omega t - kz)]. \quad (4.59)$$

Ce champ électrique étant tangentiel à la surface de séparation vide-métal, la condition de continuité du champ électrique s'applique, et impose :

$$\vec{E}_{\text{vide}}(z = 0) = \vec{E}_{\text{métal}}(z = 0) = 0 \quad (4.60)$$

Cette relation ne peut être satisfaite que s'il existe un champ réfléchi  $\vec{E}_r$  du côté du vide,

$$\vec{E}_r = E_{0r} \vec{u}_x \exp [i(\omega t + kz)]. \quad (4.61)$$

On a donc  $\vec{E}_{\text{vide}} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ .

Les relations (4.59), (4.60) et (4.61) conduisent à :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{vide}}(0) = \vec{E}_i(z = 0) + \vec{E}_r(z = 0) &= E_0 \vec{u}_x \exp(i\omega t) + E_{0r} \vec{u}_x \exp(i\omega t) = 0 \\ E_{0r} &= -E_0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

**Détermination du champ  $\vec{B}_r$  :**

D'après l'équation de Maxwell-Faraday  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_r) = -\frac{\partial \vec{B}_r}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_r$ ,

$$\vec{B}_r = \begin{pmatrix} B_{rx} \\ B_{ry} \\ B_{rz} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_r = -\frac{1}{i\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{k}{\omega} E_r \vec{u}_y,$$

$$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \exp [i(\omega t + kz)] \vec{u}_y, \quad (4.63)$$

3. Le champ magnétique étant tangentiel, on applique la relation de discontinuité du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{vide}}(z = 0) - \vec{B}_{\text{métal}}(z = 0) &= \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{MV} = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{B}_{\text{vide}}(z = 0) &= -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\vec{B}_{\text{vide}} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \quad (4.65)$$

**Détermination du champ  $\vec{B}_i$  :**

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}_i) = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_i$$

$$\vec{B}_i = \begin{pmatrix} B_{ix} \\ B_{iy} \\ B_{iz} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_i = -\frac{1}{i\omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_i}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} E_i \vec{u}_y,$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{u}_y, \quad (4.66)$$

$$\vec{B}_{\text{vide}}(z=0) = \vec{B}_i(0) + \vec{B}_r(0) = \frac{2E_0}{c} \exp(i\omega t) \vec{u}_y, \quad (4.67)$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{B}_{\text{vide}}(z=0) = -\mu_0 \vec{u}_z \wedge (\vec{j}_s \wedge \vec{u}_z) = -\mu_0 \left[ (\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z) \vec{j}_s - (\vec{u}_z \cdot \vec{j}_s) \vec{u}_z \right] = -\mu_0 \vec{j}_s$$

$$\vec{j}_s = (-1/\mu_0) \vec{u}_z \wedge \vec{B}_{\text{vide}}(z=0) \text{ soit } \vec{j}_s = \frac{2E_0}{c\mu_0} \exp(i\omega t) \vec{u}_x \quad (4.68)$$

#### 4.4 Effet de peau dans un conducteur réel

##### 1. Équations de Maxwell :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{lib}} \quad (4.69)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.70)$$

$$\vec{B} = 0 \quad (4.71)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.72)$$

Relations constitutives :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.73)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.74)$$

$$\vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E} \quad (4.75)$$

##### Remarque

- Dans la relation (4.69) on peut écrire  $\rho_{\text{lib}} \simeq 0$  en raison de la dissipation rapide des charges dans les milieux conducteurs.
- Dans la relation (4.73), le fait d'écrire  $\mu \simeq \mu_0$  revient à considérer que les propriétés magnétiques du milieu sont assimilables à celles du vide. Cela conduit, dans tout le problème, à négliger l'aimantation et le courant d'aimantation.
- Dans la relation (4.74), le fait d'écrire  $\epsilon \simeq \epsilon_0$  revient à négliger les effets des charges liées devant celle des charges libres ; ce qui est possible pour un bon conducteur soumis aux ondes de basses fréquences.

Équation de propagation :

$$(4.69) \text{ et } (4.74) \Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0 \quad (4.76)$$

$$(4.72), (4.73), (4.74) \text{ et } (4.75) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.77)$$

On applique la formule du double rotationnel au champ  $\vec{E}$ , puis les équations (4.69), (4.76), et (4.77) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} \right) \right] &= \overrightarrow{\text{grad}} \left[ \text{div} \left( \vec{E} \right) \right] - \Delta \vec{E} \Rightarrow \\ -\Delta \vec{E} &= \overrightarrow{\text{rot}} \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{B} \right)}{\partial t} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \left| \Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right. &= 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

2. En écrivant  $\vec{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}$ ,  $\Delta E$  se réduit à  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k^2 E$ , et l'équation (4.78) conduit à

$$-k^2 + i\mu_0 \sigma \omega + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = 0 \quad \text{soit} \quad (4.79)$$

$$k^2 = i\mu_0 \sigma \omega + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left( 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right). \quad (4.80)$$

3. On peut remettre la relation de dispersion (4.80) sous la forme suivante :

$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left( 1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)$ , où  $\tau = \epsilon_0 / \sigma$  correspond à la constante de dissipation des charges définie dans le corrigé de l'exercice 4.2. Nous avons démontré dans l'exercice 4.2, que dans un bon conducteur soumis à une onde radiofréquence, on a :  $\omega \tau \ll 1$  soit  $\omega \frac{\epsilon_0}{\sigma} \ll 1$  et donc  $\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \mu_0 c^2 \sigma$  soit  $\mu_0 \sigma c^2 \gg \omega$

Dans ces conditions  $k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left( 1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right) \simeq \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \left( \frac{i}{\omega \tau} \right) = i\mu_0 \sigma \omega$

On a donc  $k = \sqrt{i} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \sigma \omega}$  soit

$$k = \frac{1+i}{\delta} \quad (4.81)$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \text{ A.N. : } \delta = 1,63 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

4. Avec l'expression de  $k$  donnée par (4.81), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)} \quad (4.82)$$

- Le terme  $\vec{E}_0 e^{-x/\delta}$  traduit l'atténuation de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation.
- $\delta$  est la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde a été divisée par  $e$  : C'est l'épaisseur de peau du conducteur.

## 4.5 Puissance dissipée dans un conducteur réel

### 1. Équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{lib}} \quad (4.83)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.84)$$

$$\vec{B} = 0 \quad (4.85)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (4.86)$$

Relations constitutives :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4.87)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (4.88)$$

$$\vec{j}_{\text{lib}} = \sigma \vec{E} \quad (4.89)$$

### Remarque

- Dans la relation (4.83), on peut écrire  $\rho_{\text{lib}} \simeq 0$  (dissipation rapide des charges)
- Dans la relation (4.87), on écrit  $\mu \simeq \mu_0$  (propriétés magnétiques équivalentes à celles du vide).
- Dans la relation (4.88), on écrit  $\epsilon \simeq \epsilon_0$  (on néglige le rôle des charges liées devant celui des charges libres).

### Équation de propagation :

$$(4.83) \text{ et } (4.88) \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (4.90)$$

$$(4.86) \text{ et } (4.87) \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \sigma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.91)$$

On applique la formule du double rotationnel au champ  $\vec{B}$  :

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \vec{B}] = \operatorname{grad} [\operatorname{div} \vec{B}] - \Delta \vec{B}.$$

On applique les équations (4.85) et (4.91) :

$$-\Delta \vec{B} = \operatorname{rot} \left[ \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \gamma \operatorname{rot} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t}.$$

On applique finalement l'équation (4.84) pour obtenir l'équation de propagation de  $\vec{B}$  :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.92)$$

Pour  $\vec{B} = B(z) \exp(i\omega t) \vec{u}_y$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \mu_0 \gamma i \omega B + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 B = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = \left( \mu_0 \gamma i \omega - \frac{\omega^2}{c^2} \right) B = \tilde{k}^2 B \quad (4.93)$$

avec  $\tilde{k}^2 = \mu_0 \gamma i \omega - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{i \mu_0 \gamma \omega c^2}{\omega^2} \right) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{i \gamma}{\varepsilon_0 \omega} \right) \simeq i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i \gamma}{\varepsilon_0 \omega} = i \mu_0 \gamma \omega$ , car  $\gamma \gg \omega \varepsilon_0$  (en basse fréquence, le courant de conduction est prédominant dans les bons conducteurs).

Dans ces conditions  $\tilde{k} = \pm \sqrt{i} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1+i}{\delta}$  avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

La solution de l'équation (4.92) s'écrit :

$$B(z) = c_1 e^{z/\delta} e^{iz/\delta} + c_2 e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta}$$

Mais, comme  $B(z)$  doit rester fini lorsque  $z$  tend vers  $+\infty$ , il faut que  $c_1 = 0$ . La solution peut finalement se mettre sous la forme  $B(z) = B(0) e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta}$  d'où :

$$\vec{B} = B(0) e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y \quad (4.94)$$

Pour obtenir le champ  $\vec{E}$  associé à  $\vec{B}$ , on peut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère (4.91) :

soit  $\text{rot } \vec{B} = (\mu_0 \gamma + \mu_0 \varepsilon_0 i \omega) \vec{E} = \zeta \vec{E}$ , avec  $\zeta = \mu_0 \gamma + \mu_0 \varepsilon_0 i \omega \simeq \mu_0 \gamma$ , compte tenu que  $\gamma \gg \omega \varepsilon_0$ .

$$\vec{E} = \frac{1}{\zeta} \text{rot } \vec{B} = \frac{1}{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z \right) \wedge B_y \vec{u}_y = -\frac{1}{\zeta} \frac{\partial B_y}{\partial z} \vec{u}_x = \frac{1+i}{\delta \zeta} B_y \vec{u}_x$$

$$\text{soit } \vec{E} = \frac{1+i}{\delta \zeta} B(0) e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$$

On en déduit :

$$\left| \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{1+i}{\delta \mu_0} B(0) e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x \right. \quad (4.95)$$

2. La puissance dissipée dans un volume élémentaire  $d\tau$  s'écrit :

$$dP = \gamma \langle E \rangle^2 d\tau = \frac{1}{\gamma} \langle j \rangle^2 d\tau,$$

où  $\vec{j}$  doit s'exprimer en grandeur réelle. Pour mettre  $\vec{j}$  en notation réelle, notons que  $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ .

$$\text{soit } \vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{\delta \mu_0} B(0) e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta + \pi/4)} \vec{u}_x.$$

En notation réelle,  $\vec{j} = \frac{\sqrt{2} B(0)}{\delta \mu_0} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \pi/4) \vec{u}_x$

$$dP = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\sqrt{2} B(0)}{\delta \mu_0} e^{-z/\delta} \right]^2 \langle \cos^2(\omega t - z/\delta + \pi/4) \rangle dx dy dz$$

Comme la moyenne temporelle de  $\langle \cos^2(\omega t - z/\delta + \pi/4) \rangle$  est  $1/2$ , on a donc :

$$dP = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{B(0)}{\delta\mu_0} e^{-z/\delta} \right]^2 dx dy dz$$

La puissance dissipée par unité de surface du plan d'incidence de l'onde sur le métal est :

$$P = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{B(0)}{\delta\mu_0} \right]^2 \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_0^{+\infty} e^{-2z/\delta} dz = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{B(0)}{\delta\mu_0} \right]^2 \frac{\delta}{2} = \frac{B(0)^2}{4\mu_0} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$$

$$P = \frac{B(0)^2}{4\mu_0} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$$

# Les ondes dans les milieux diélectriques

## Introduction

Si nous pouvons regarder la télévision, ou écouter la radio, avec portes et fenêtres fermées, c'est parce que les ondes électromagnétiques peuvent traverser nos murs (qu'ils soient en bétons ou en briques), nos fenêtres (en bois ou en plastique), et nos toits (en tuile). Plus généralement, si les applications issues des ondes électromagnétiques se sont autant développées et autant répandues dans les activités humaines, c'est aussi en raison de l'aptitude de ces ondes à traverser la plupart des milieux matériels qui nous entourent, et que l'on qualifie de « milieux diélectriques ».

## Objectifs

**Expliquer** les processus fondamentaux résultant de l'interaction entre une onde électromagnétique et la matière d'un milieu diélectrique.

**Connaître** l'impact de ces processus sur la propagation de l'onde, et leurs grandeurs caractéristiques : constante diélectrique, indice de réfraction, indice d'extinction.

**Avoir** un aperçu d'une application pratique majeure des diélectriques, à savoir, leur utilisation comme support physique pour la transmission des informations à grande distance.

## Plan

- 1 Rappels
- 2 Mécanismes de polarisation
- 3 Polarisation en régime variable

## 1 Rappels

La matière est constituée de particules chargées qui créent dans leur environnement immédiat des champs électriques et magnétiques,  $\vec{E}_{\text{micro}}$  et  $\vec{B}_{\text{micro}}$ , qualifiés de **champs microscopiques**. De tels champs peuvent être localement très intenses et varier rapidement (en module et en direction) sur des distances atomiques ou interatomiques. Les champs microscopiques sont impossibles à mesurer, et la connaissance de leurs valeurs

exactes n'est pas nécessaire pour décrire les effets qu'ils sont susceptibles de créer à l'échelle macroscopique.

Considérons un milieu matériel soumis à un champ externe,  $\vec{E}_0$  ou  $\vec{B}_0$ . Ce champ aura comme effet direct de provoquer des déplacements de porteurs de charges, d'une manière dépendant de l'amplitude et de l'orientation spatiale du champ externe. Ces déplacements des porteurs de charges modifient le **champ microscopique** en termes de module et de direction, mais sans supprimer ses fluctuations à l'échelle des distances atomiques ou interatomiques. La procédure générale d'étude des effets liés à l'application d'un champ électromagnétique à un milieu matériel, consiste à niveler les grandeurs étudiées en les débarrassant des fluctuations spatiales qui existent à l'échelle microscopique. Ce nivellement s'obtient en considérant une moyenne spatiale des champs sur un domaine très petit à l'échelle macroscopique, mais très grand devant les dimensions atomiques, appelé **échelle mésoscopique** (qui est de l'ordre de quelques nanomètres). On définit donc au sein de la matière un **champ macroscopique** ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ), qui correspond au champ moyen à l'échelle mésoscopique. C'est ce champ qui intervient dans les équations de Maxwell.

Pendant, au sein du milieu matériel, un atome donné n'est pas effectivement soumis au **champ macroscopique**  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ , ni au **champ externe** ( $\vec{E}_0$  ou  $\vec{B}_0$ ) appliqué au milieu. L'atome est plutôt à soumis un champ effectif appelé **champ local**,  $\vec{E}_L$  ou  $\vec{B}_L$ , qui dépend du champ externe, de l'environnement de l'atome, et des propriétés (électriques ou magnétiques) intrinsèques du milieu matériel. La connaissance de ce champ local, du moins approximative, est indispensable pour évaluer les effets du champ externe à l'échelle macroscopique.

Comme nous l'avons mentionné dans les chapitres précédents, en présence d'un champ électromagnétique, un milieu matériel ne reste généralement pas inerte. À l'échelle microscopique, le champ électromagnétique provoque des déplacements de charges au sein de la matière, qui se manifestent à l'échelle macroscopique par l'apparition de divers phénomènes tels que la polarisation, l'aimantation, ou des courants électriques. Dans la suite de ce chapitre nous procéderons à l'analyse macroscopique des phénomènes les plus marquants liés à la présence d'un champ électromagnétique dans un milieu diélectrique, en partant des processus microscopiques dont ils sont issus.

## 2 Mécanismes de polarisation

En principe, le phénomène de polarisation concerne tous les matériaux, mais ce phénomène se manifeste de façon plus prononcée dans une classe de matériaux qualifiés de **matériaux diélectriques**. Un matériau est qualifié de **diélectrique** s'il ne contient que très peu, ou pas du tout de charges électriques libres. À ce titre, ces matériaux sont parfois qualifiés de matériaux isolants. On compte parmi ces milieux : le verre, la céramique, la plupart des plastiques, de nombreux fluides, des milieux peu denses,

incluant une majorité de gaz, etc. Les matériaux diélectriques sont donc constitués essentiellement de charges liées qui, en présence d'un champ électrique, ne peuvent se déplacer que dans une région restreinte au voisinage immédiat des positions qu'elles occupent en l'absence de champ électrique. En principe, le phénomène de polarisation est lié au mouvement des charges liées d'un milieu matériel.

En électromagnétisme, la grandeur qui sert à caractériser la polarisation créée par un champ électrique est la **susceptibilité électrique**. Dans bien des cas, l'intensité du champ électrique  $\vec{E}$  utilisé est suffisamment faible pour que la polarisation s'exprime linéairement en fonction du champ électrique  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , où  $\chi$  est la susceptibilité électrique. C'est un nombre complexe sans dimension (dont la valeur dépend de la fréquence du champ électrique) qui joue un rôle majeur dans les phénomènes de réfraction et d'absorption des ondes électromagnétiques. Nous verrons comment les équations de Maxwell permettent d'établir un lien entre la susceptibilité et les indices de réfraction et d'extinction d'un matériau. Sachant que le champ électrique pénètre en profondeur dans un matériau diélectrique, pour calculer la susceptibilité électrique, il est nécessaire d'examiner la manière dont les constituants élémentaires de la matière (particules porteuses de charges) réagissent lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique, et les effets de la réaction collective de ces constituants élémentaires. Plusieurs mécanismes ont été identifiés comme étant à l'origine des trois principaux types de phénomènes de polarisation que l'on rencontre dans les milieux matériels, à savoir :

- la **polarisation électronique**, qui est due au déplacement et à la déformation du nuage électronique qui entoure chaque atome de la matière, sous l'effet d'un champ électrique ;
- la **polarisation atomique** (ou **ionique**), résultant des déplacements des atomes ou des ions par rapport à leurs positions d'équilibre dans l'édifice auquel ils appartiennent ;
- la **polarisation d'orientation**, se manifestant dans les matériaux qui sont initialement déjà polarisés au niveau microscopique (c'est-à-dire dotés d'un moment dipolaire permanent). Sous l'action du champ électrique, le moment dipolaire d'un édifice rigide, atomique ou moléculaire, tend à s'orienter sous l'action du champ électrique.

Dans la plupart des cas, plusieurs de ces phénomènes sont présents et se cumulent. La principale difficulté du calcul réside dans le fait que le champ électrique macroscopique dans lequel est plongé le matériau est souvent différent du champ électrique local qui agit réellement sur les constituants microscopiques. C'est cette raison qui amènera à distinguer la susceptibilité  $\chi$  (grandeur macroscopique) de la polarisabilité  $\alpha$  (grandeur microscopique). Il s'agit en fait de deux grandeurs qui caractérisent le même comportement physique, mais à des échelles différentes.

## 2.1 Régimes statique et quasi-statique

Au niveau microscopique, l'effet de la polarisation est directement lié au **champ électrique local** auquel sont réelement soumises les charges du milieu. Dans ce qui suit,

nous nous plaçons dans le cas où le milieu est soumis à un champ électrique statique. Cependant, les expressions des susceptibilités qui seront obtenues seront aussi valables dans le cas d'un champ électrique variant à basse fréquence.

### a) Champ local

Considérons un milieu matériel soumis à un champ électrique externe  $\vec{E}_0$ . Ce milieu est donc nécessairement le siège d'un **champ de polarisation**  $\vec{P}$ , qui peut résulter des **moments dipolaires induits** par le champ  $\vec{E}_0$  (si le milieu est apolaire), ou de l'orientation forcée (par  $\vec{E}_0$ ) des **moments dipolaires permanents** (si le milieu est polaire). Pour évaluer la contribution individuelle d'une entité élémentaire porteuse de charge (telle qu'un électron, un ion ou une molécule) à la polarisation macroscopique  $\vec{P}$ , il est indispensable de connaître le **champ électrique local**  $\vec{E}_L$  agissant effectivement sur cette entité élémentaire. Lorentz a proposé une procédure qui permet d'estimer le champ local  $E_L$  à partir de deux contributions :

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \vec{E}_P, \quad (5.1)$$

où  $\vec{E}$  est le champ macroscopique au point M où se trouve l'entité porteuse de charge, et  $\vec{E}_P$  est un champ appelé précisément « **champ de Lorentz** ». Le champ  $\vec{E}_P$  est défini comme étant le champ créé au point M par tous dipôles du milieu ; autrement dit, le champ créé par la polarisation  $\vec{P}$  au point M.

Dans la méthode de Lorentz, pour estimer le champ  $\vec{E}_P(\text{M})$ , on divise formellement le milieu matériel en deux régions séparées par une sphère S centrée en M, et on sépare le champ créé par les dipôles situés à l'intérieur de la sphère,  $\vec{E}_{P_{\text{int}}}$ , de celui créé par les dipôles situés à l'extérieur de la sphère,  $\vec{E}_{P_{\text{ext}}}$ . Cette procédure revient à poser que  $\vec{E}_P(\text{M}) = \vec{E}_{P_{\text{int}}}(\text{M}) + \vec{E}_{P_{\text{ext}}}(\text{M})$ . Le calcul détaillé de  $\vec{E}_{P_{\text{ext}}}$  conduit à :

$$\vec{E}_{P_{\text{ext}}} = \vec{P}/(3\epsilon_0) \quad (5.2)$$

Les dipôles internes à la sphère étant proches du point M, il n'est pas possible de calculer le champ qu'ils créent sans tenir compte de leur répartition précise autour du point M. Finalement, la méthode de Lorentz permet d'écrire le champ local sous la forme suivante :

$$\vec{E}_L = \vec{E}_{P_{\text{int}}} + \vec{E} + \vec{P}/(3\epsilon_0) \quad (5.3)$$

Une approximation applicable à de nombreux milieux consiste à écrire que :

$$\vec{E}_L \simeq \vec{E} + \vec{P}/(3\epsilon_0). \quad (5.4)$$

La relation (5.4) est connue sous le nom de **champ de Lorentz**.

### b) Polarisabilité

Lorsque le champ local  $\vec{E}_L$  est relativement faible, la polarisation est caractérisée au niveau microscopique par une relation linéaire entre le moment dipolaire élémentaire  $\vec{p}$  et le champ local  $\vec{E}_L$ , que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_L, \quad (5.5)$$

où  $\alpha$ , homogène à un volume, est appelée **polarisabilité**. Celle-ci est toujours positive car le moment dipolaire est toujours orienté dans le sens de  $\vec{E}_L$ . Dans ce qui suit, nous illustrerons les conditions dans lesquelles se manifestent les trois principaux types de phénomènes de polarisation (**électronique**, **atomique** et **orientation**), et présenterons un calcul approché de la polarisabilité  $\alpha$  associée à chacun de ces trois phénomènes.

### c) Polarisabilité électronique

Cette polarisation est liée à la modification (induite par le champ électrique) de la répartition des électrons autour de chaque atome ou ion. On définit la **polarisabilité électronique** du matériau par le coefficient  $\alpha_e$  tel que :

$$\vec{p} = \alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}_L \quad (5.6)$$

### d) Polarisabilité atomique

Cette polarisation concerne les déplacements des atomes ou des ions par rapport à leurs positions d'équilibre dans l'édifice auquel ils appartiennent (molécule ou réseau cristallin). Elle est d'autant plus marquée que la liaison interatomique présente un caractère ionique. Dans l'approximation linéaire, elle est caractérisée par la relation

$$\vec{p} = \alpha_a \varepsilon_0 \vec{E}_L \quad (5.7)$$

### e) Polarisabilité d'orientation

Ce mécanisme de polarisation concerne les édifices atomiques ou moléculaires possédant un moment dipolaire permanent  $\vec{p}_0$ , et où les édifices ont la possibilité de tourner pour modifier l'orientation de  $\vec{p}_0$ . L'action d'un champ électrique local  $\vec{E}_L$  sur un dipôle moléculaire de moment  $\vec{p}_0$  se traduit par le couple  $\vec{p}_0 \wedge \vec{E}_L$ , qui force le vecteur  $\vec{p}_0$  à tourner de manière à l'orienter dans le sens du champ  $\vec{E}_L$ . Cependant, l'agitation thermique tend plutôt à orienter les moments dipolaires de manière isotrope. En conséquence, seule la composante  $\vec{p}_0$  dans la direction du champ local  $\vec{u} = \vec{E}_L / |\vec{E}_L|$  a un effet significatif. Sa valeur moyenne, évaluée dans le cadre de la statistique de Maxwell-Boltzman, en tenant compte des diverses orientations de  $\vec{p}_0$  au sein du milieu, s'écrit :

$$p_{0u} = \langle \vec{p}_0 \cdot \vec{u} \rangle = p_0 \mathcal{L} \left( \frac{p_0 E_L}{k_B T} \right), \quad (5.8)$$

où  $\mathcal{L}(x)$  est la **fonction de Langevin**, définie par :  $\mathcal{L}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x}$ , avec  $x = p_0 E_L / (k_B T)$ . Ici  $T$  désigne la température et  $k_B$  est la constante de Boltzmann. On remarque que :

- À très basse température,  $T \rightarrow 0$  et  $x = p_0 E_L / (k_B T) \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{L}(x) \rightarrow 1$ .
- À très haute température,  $T \rightarrow \infty$  et  $x = p_0 E_L / (k_B T) \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{L}(x) \rightarrow 0$ .

Dans le cas des températures modérées, incluant la température ambiante ( $\sim 300$  K), même pour un champ local très intense, on a  $x \ll 1$ , et  $\mathcal{L}(x) \rightarrow x/3$ . Le moment dipolaire associé à ce mécanisme de polarisation s'écrit alors :

$$\vec{p}_{0u} = \frac{p_0^2}{3k_B T} \vec{E}_L. \quad (5.9)$$

On définit ainsi une polarisabilité d'orientation  $\alpha_{Or}$  en écrivant que :  $\vec{p}_{0u} = \alpha_{Or} \varepsilon_0 \vec{E}_L$ , avec :

$$\alpha_{Or} = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 k_B T} \quad (5.10)$$

On peut noter ici une particularité de la polarisation d'orientation (lorsqu'on la compare aux polarisations électroniques et atomiques), qui est sa dépendance vis-à-vis de la température.

## f) Relation de Clausius-Mossotti – Susceptibilité des milieux denses

À partir des comportements que nous avons présentés comme étant ceux des charges constituant un milieu matériel soumis à un champ électrique, il est possible d'interpréter les effets macroscopiques d'un champ électrique sur la matière, tels que l'apparition d'une susceptibilité. On peut ensuite en déduire la **constante diélectrique**, qui est l'un des paramètres les plus couramment utilisés pour définir les propriétés électriques d'un milieu. À cette fin, il est important de pouvoir relier analytiquement les grandeurs macroscopiques et microscopiques d'un milieu.

La polarisation est liée aux moments dipolaires microscopiques de la façon suivante :

$$\vec{P} = N \vec{p} \quad (5.11)$$

où  $N$  est le nombre de moments dipolaires par unité de volume. Comme  $\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_L$ , la relation (5.11) devient :

$$\vec{P} = N \alpha \varepsilon_0 \vec{E}_L. \quad (5.12)$$

Lorsqu'on approxime le champ local par le champ de Lorentz,  $\vec{E}_L \simeq \vec{E} + \vec{P}/(3\varepsilon_0)$ , on obtient la relation :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{N \alpha}{1 - \frac{N \alpha}{3}} \vec{E}. \quad (5.13)$$

Par ailleurs, nous avons vu que lorsque le champ macroscopique  $\vec{E}$  n'est pas trop élevée, on a  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ , qui s'identifie à (5.13), avec

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \quad (5.14)$$

Dans un milieu LHI, la constante diélectrique est directement liée à l'induction électrique par la relation  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ . Par ailleurs, comme  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \vec{E}$ , il en résulte que :

$$\epsilon_r = \chi + 1 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}. \quad (5.15)$$

On peut facilement remettre la relation (5.15) sous la forme suivante :

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3}, \quad (5.16)$$

qui est connue comme étant la **relation de Clausius-Mossotti**. Cette relation établit le lien entre la grandeur microscopique  $\alpha$  et la grandeur macroscopique  $\epsilon_r$ .

**Remarque** La relation de Clausius-Mossotti est particulièrement adaptée pour décrire les milieux très denses, où la densité  $N$  est si élevée que le champ local diffère sensiblement du champ macroscopique. Cette différence se traduit par la présence du terme correctif  $N\alpha/3$  au dénominateur de l'expression (5.14).

### g) Relation de Langevin-Debye – Constante diélectrique des milieux dilués

Pour un milieu peu dense ( $N$  relativement petit) on peut négliger le terme correctif  $\frac{N\alpha}{3}$  au dénominateur de l'expression (5.14); et dans ce cas,  $\chi \simeq N\alpha$ , et

$$\vec{P} \simeq N\alpha\epsilon_0\vec{E} = N\alpha\epsilon_0\vec{E}_L. \quad (5.17)$$

Autrement dit, dans ce type de milieu, le champ local est très proche du champ macroscopique. Considérons le cas d'un milieu gazeux constitué de molécules polaires de même type. Soient  $\alpha_e$  et  $\alpha_a$  les polarisabilités électronique et atomique de ces molécules,  $p_0$  leur moment dipolaire permanent, et  $N$  le nombre de molécules par unité de volume du milieu. La polarisation est alors donnée par la relation :

$$\vec{P} = \epsilon_0 N \left( \alpha_e + \alpha_a + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \right) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (5.18)$$

La relation (5.18) permet d'obtenir la susceptibilité électrique et la constante diélectrique en posant :

$$\chi = \epsilon_r - 1 = N \left[ \alpha_e + \alpha_a + \frac{p_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \right] \quad (5.19)$$

La relation (5.19) est connue comme étant la relation de Langevin-Debye. Cette relation montre que la susceptibilité  $\chi$  dépend de la température (pour une molécule polaire). Par

ailleurs, comme la densité  $N$  dépend de la pression et de la température, il est clair que les constantes  $\chi$  et  $\varepsilon_r$  dépendent elles aussi de la pression et de la température.

## 2.2 Le spectre électromagnétique

Le spectre électromagnétique désigne la répartition des ondes électromagnétiques en fonction de leur longueur d'onde, de leur fréquence ou bien encore de leur énergie. Le spectre s'étend théoriquement de zéro à l'infini en fréquence (ou en longueur d'onde), de façon continue. Mais, pour des raisons tant historiques que physiques, la partie accessible (et exploitée) du spectre a été divisée en plusieurs grandes classes de rayonnement, que l'on désigne par des noms particuliers, comme l'illustre le tableau 5.1.

En partant des ondes les plus énergétiques vers les moins énergétiques, on distingue successivement :

**Les rayons gamma  $\gamma$ .** Leurs longueurs d'onde s'étendent de  $10^{-14}$  m à  $10^{-12}$  m. Ils sont naturellement émis par les éléments radioactifs. Très énergétiques, ils traversent facilement la matière et sont très dangereux pour les cellules vivantes (ils peuvent causer des brûlures, des cancers et des mutations génétiques).

**Applications :** traitement du cancer, conservation des aliments.

**Les rayons X.** Leurs longueurs d'onde s'étendent de  $10^{-12}$  m à  $10^{-8}$  m. Ce sont des rayonnements très énergétiques, traversant plus ou moins facilement les corps matériels. Ils sont un peu moins nocifs que les rayons gamma.

**Applications :** ils sont utilisés en médecine pour les radiographies, dans l'industrie pour le contrôle des bagages dans le transport aérien, et dans la recherche pour l'étude de la matière (rayonnement synchrotron).

**Les ultraviolets.** Leurs longueurs d'onde s'échelonnent de  $10^{-8}$  m à 390 nm. Ce sont des rayonnements relativement énergétiques. Ils sont nocifs pour la peau. Cependant, une grande partie des ultraviolets est stoppée par l'ozone atmosphérique qui sert ainsi de bouclier.

**Applications :** traitement de certaines maladies, stérilisation d'instruments chirurgicaux.

**Le visible.** Il s'étend de 390 nm à 780 nm, et correspond à la partie très étroite du spectre électromagnétique perceptible par l'œil humain. Il contient l'ensemble des six couleurs (rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet) qui composent la lumière blanche. C'est dans le domaine visible que le rayonnement solaire atteint son maximum (0,5  $\mu\text{m}$ ).

**Applications :** éclairage, lasers et applications, photographie, écrans d'ordinateurs.

**L'infrarouge.** Cette région du spectre couvre les longueurs d'onde allant de 780 nm à un millimètre. Le rayonnement infrarouge est émis naturellement par tous les corps dont la température est supérieure au zéro absolu ( $-273$  °C).

**Applications :** télécommande à distance, communication par satellites. C'est aussi le domaine des communications à ultra-haut débit par fibre optique, support physique du réseau Internet dans les fenêtres télécom 1 300 nm, et 1 550 nm. En télédétection, on utilise certaines bandes spectrales de l'infrarouge pour mesurer la température des surfaces terrestres et océaniques, ainsi que celle des nuages.

**Les micro-ondes.** Ce domaine du spectre s'étend des longueurs d'onde de l'ordre du millimètre jusqu'au mètre.

**Applications :** four à micro-ondes, communications par satellite, téléphone portable, activités radar, télévision (UHF), géo-localisation, télédétection des objets en mouvement.

**Les ondes radio.** Ce domaine s'étend des longueurs d'onde de l'ordre du mètre jusqu'à une centaine de kilomètres. Ce sont les ondes ayant la plus petite fréquence du spectre. Elles transportent peu d'énergie.

**Applications :** relativement faciles à émettre et à recevoir, les ondes radio sont utilisées pour la transmission de l'information (radio, télévision-VHF). La bande FM des postes de radio correspond à des longueurs d'onde de l'ordre du mètre.

### Remarque

1. Il faut noter que cette classification des domaines de fréquences est quelque peu indicative, et que les frontières entre les domaines de fréquence indiqués ne sont pas si strictes.
2. Le domaine du spectre électromagnétique incluant les trois régions suivantes : infrarouge, visible et ultraviolet, forment ce qu'on appelle le spectre optique (ou domaine optique). Au cours des trois dernières décennies, ce domaine est de loin celui qui a été le plus fertile en applications ayant une influence considérable dans la vie quotidienne, à tel point que l'optique est considérée à l'heure actuelle comme une discipline à part entière, au même titre que la mécanique ou l'astrophysique. Le développement de cette discipline s'est particulièrement accéléré depuis l'invention du laser et toutes les applications qui s'en sont suivies.

## 3 Polarisation en régime variable

---

### 3.1 Polarisation électronique et atomique dans des milieux LHI

L'action directe d'un champ électromagnétique au sein d'un matériau est la mise en mouvement des porteurs de charge. Nous nous intéressons ici à la conséquence directe de ces déplacements de charges liées, à savoir, l'apparition de moments dipolaires au niveau électronique, atomique ou moléculaire. Dans un premier temps, nous allons considérer le mouvement des électrons.

Tableau 5.1- Spectre électromagnétique.

| Fréquence en Hz | Dénomination                     | Longueur d'onde en m              |
|-----------------|----------------------------------|-----------------------------------|
|                 | ELF<br>(Extremely Low Frequency) | $10^8$                            |
| 10              | Fréquences industrielles         | $10^7$ 10 <sup>4</sup> km         |
| $10^2$          |                                  | SLF<br>(Super Low Frequency)      |
| $10^3$          |                                  | ULF<br>(Ultra Low Frequency)      |
| 1 KHz           | Ondes radio                      | $10^5$ 100 km                     |
| $10^4$          |                                  | VLF<br>(Very Low Frequency)       |
| $10^5$          |                                  | LF<br>(Low Frequency)             |
| $10^6$          |                                  | MF<br>(Medium Frequency)          |
| 1 MHz           | Micro ondes                      | $10^2$                            |
| $10^7$          |                                  | HF<br>(High Frequency)            |
| $10^8$          |                                  | VHF<br>(Very High Frequency)      |
| $10^9$          |                                  | UHF<br>(Ultra High Frequency)     |
| 1 GHz           | Infrarouge (IR)                  | $10^{-1}$                         |
| $10^{10}$       |                                  | SHF<br>(Super High Frequency)     |
| $10^{11}$       |                                  | EHF<br>(Extremely High Frequency) |
| 1 THz           | visible                          | $10^{-3}$                         |
| $10^{12}$       |                                  | $10^{-4}$                         |
| $10^{13}$       | Ultraviolet (UV)                 | $10^{-5}$                         |
| $10^{14}$       |                                  | $10^{-6}$ 1 $\mu$ m               |
| $10^{15}$       | Rayons X                         | $10^{-7}$                         |
| $10^{16}$       |                                  | $10^{-8}$                         |
| $10^{17}$       |                                  | $10^{-9}$ 1 nm                    |
| $10^{18}$       |                                  | $10^{-10}$ 1 Å                    |
| $10^{19}$       | Rayons $\gamma$                  | $10^{-11}$                        |
| $10^{20}$       |                                  | $10^{-12}$                        |
|                 |                                  | $10^{-13}$                        |

### Modèle de l'électron élastiquement lié

On peut décrire le mouvement des électrons de manière classique en utilisant le **modèle de Lorentz**, également appelé **modèle de l'électron élastiquement lié**. Ce modèle permet de rendre compte de la **susceptibilité électrique** pour de nombreux matériaux. Nous allons illustrer ce modèle sur un matériau constitué d'atomes ou de molécules apolaires (sans moment dipolaire permanent).

Dans le modèle de Lorentz, chaque électron lié est traité comme un oscillateur harmonique soumis à un champ électromagnétique local  $(\vec{E}_L, \vec{B}_L)$  supposé uniforme à l'échelle de la molécule. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_L + \vec{F}_r + \vec{F}_a, \quad (5.20)$$

où apparaissent les forces suivantes :

**Force de Lorentz.** L'électron est soumis à la force de Lorentz,

$\vec{F}_L = -e (\vec{E}_L + \vec{v} \wedge \vec{B}_L)$ . Mais, on peut négliger la force créée par le champ magnétique ( $\vec{F}_L \simeq -e\vec{E}_L$ ), en invoquant le fait que dans un milieu matériel, l'électron ne peut atteindre une vitesse de l'ordre de celle de la lumière ( $|\vec{v}| \ll c$ ) et que  $|\vec{B}_L| = |\vec{E}_L|/c$ .

**Force de rappel.** L'électron est soumis à différentes forces d'interaction de la part du noyau atomique et des autres électrons situés dans son voisinage immédiat, qui le maintiennent au voisinage de la position moyenne  $r_0$  qu'il occupe en l'absence de champ électrique. Le modèle de Lorentz assimile l'effet global de ces forces d'interaction à une force de rappel élastique qui peut s'exprimer de la manière suivante :

$$F_r = -k r(t),$$

où  $r(t)$  désigne le déplacement instantané de l'électron par rapport à  $r_0$ . Cette force de rappel peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$F_r = -m\Omega_0^2 r, \quad (5.21)$$

où  $m$  désigne la masse de l'électron, et  $\Omega_0 = \sqrt{k/m}$  la fréquence propre d'oscillation de l'électron en l'absence de tout champ électrique et de toute force de frottement. On l'appelle « **pulsation de résonance** » de l'électron.

**Force d'amortissement.** Lors de son déplacement, l'électron subit de nombreux chocs avec les autres particules du milieu. L'effet global de ces chocs est assimilable à une force de frottement, que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$F_a = -\Omega_0 \zeta \dot{r}, \quad (5.22)$$

où  $\zeta$  est une constante d'amortissement qui dépend de la densité du milieu et de l'environnement immédiat de l'électron. Dans ces conditions, l'équation du mouvement de

l'électron se met sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \Omega_0\zeta\frac{d\vec{r}}{dt} + \Omega_0^2\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}_L. \quad (5.23)$$

**Moment dipolaire.** Le déplacement  $\vec{r}$  de l'électron génère le **moment dipolaire**

$$\vec{p} = -e\vec{r}. \quad (5.24)$$

**Polarisation.** La somme des moments dipolaires élémentaires générés par unité de volume du matériau constitue la polarisation du milieu :

$$\vec{P} = -Ne\vec{r}, \quad (5.25)$$

où  $N$  est le nombre de dipôles élémentaires créés par unité de volume du matériau. Pour obtenir la susceptibilité électrique du milieu, il convient de faire intervenir le champ électrique macroscopique. À cette fin, on peut approximer le champ local par le champ de Lorentz,  $\vec{E}_L \simeq \vec{E} + \vec{P}/(3\epsilon_0)$ , et substituer  $\vec{r}$  par  $\vec{P}/(-Ne)$  dans la relation (5.23). On obtient alors :

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} + \Omega_0\zeta\frac{d\vec{P}}{dt} + \Omega_0^2\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\vec{E}_L = \frac{Ne^2}{m}\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} + \omega_0\xi\frac{d\vec{P}}{dt} + \omega_0^2\vec{P} = \frac{Ne^2}{m}\vec{E} \quad (5.26)$$

avec  $\omega_0^2 = \Omega_0^2 - Ne^2/(3m\epsilon_0)$ , et  $\omega_0\xi = \Omega_0\zeta$ . Suite à cette renormalisation de la constante d'amortissement ( $\zeta \rightarrow \xi$ ),  $\omega_0$  devient une fréquence de résonance du matériau, alors que  $\Omega_0$  est représentée la fréquence propre d'oscillation de l'électron.

En régime sinusoïdal forcé par un champ de la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$  la solution de l'équation (5.26) s'écrit :

$$\vec{P} = \Upsilon \vec{E}, \quad \text{avec} \quad \Upsilon = \frac{Ne^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{(1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\xi(\omega/\omega_0))} \quad (5.27)$$

**Susceptibilité électrique.** En écrivant  $\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E}$ , on déduit l'expression de la **susceptibilité électrique** du milieu :

$$\chi_e = \frac{\chi_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\xi(\omega/\omega_0)} = \chi' - i\chi'' \quad (5.28)$$

où  $\chi_0 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega_0^2}$  est la **susceptibilité statique** ( $\omega = 0$ ),

$$\chi' = \chi_0 \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + \xi^2(\omega/\omega_0)^2}, \quad \chi'' = \chi_0 \frac{\xi(\omega/\omega_0)}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + \xi^2(\omega/\omega_0)^2} \quad (5.29)$$

Les courbes de la figure 5.1 illustrent les variations des composantes réelle et imaginaire de la susceptibilité électrique,  $\chi' / \chi_0$  et  $\chi'' / \chi_0$ , en fonction de la fréquence normalisée  $\omega / \omega_0$ . On constate que  $\chi'$  et  $\chi''$  varient fortement dans une région située autour de la fréquence de résonance  $\omega_0$ , et que  $\chi''$  a l'allure d'un filtre passe bande, dont la largeur à mi hauteur (bande passante) est  $\Delta\omega \simeq \xi\omega_0 = \omega_0 / Q$ , où le paramètre  $Q = 1/\xi$  joue le rôle de **facteur de qualité** du filtre.

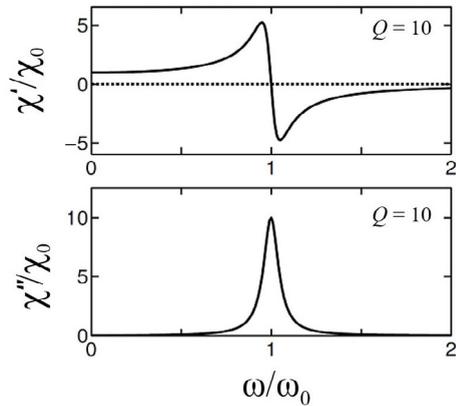


Figure 5.1– Variations de  $\chi$  au voisinage de la résonance  $\omega_0$ .

Les autres points marquants sont les suivants :

(i) Pour  $\omega \ll \omega_0$ , on a :  $\chi'' \simeq 0$  et  $\chi' \simeq \chi_0$ .

Ainsi, dans le domaine des fréquences angulaires suffisamment basses et éloignées de la fréquence de résonance  $\omega_0$  :

- la susceptibilité est réelle et tend vers sa valeur statique  $\chi_0$  ;
- la relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  est linéaire ;
- la polarisation suit instantanément les variations du champ électrique.

(ii)  $\omega \sim \omega_0$  on a  $\chi'' \neq 0$  et  $\chi(\omega) \neq \chi_0$ .

Autrement dit, lorsque la fréquence angulaire du champ électrique est du même ordre que  $\omega_0$  : la susceptibilité devient complexe ( $\chi'' \neq 0$ ).

En grandeurs réelles, la relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  n'est plus linéaire ; ce qui signifie que la polarisation ne suit plus instantanément les variations du champ électrique. Cela se traduit par un déphasage  $\varphi$  entre  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$ , donné par  $\tan \varphi = -\chi'' / \chi'$ . Ainsi, au voisinage de la fréquence de résonance, les effets d'inertie commencent à se manifester dans la dynamique de l'électron ; ce qui conduit à un retard à la polarisation. L'expérience montre qu'il faut des champs électriques oscillant à des fréquences optiques, soit  $\sim 10^{14}$  à  $10^{16}$  Hz, pour observer de tels effets d'inertie.

(iii) Pour  $\omega \gg \omega_0$ , on remarque que  $\chi' \rightarrow 0$  et  $\chi'' \rightarrow 0$ . Autrement dit, le **modèle de l'électron élastiquement lié** prévoit que la polarisation électronique s'annule à des fréquences suffisamment élevées. En d'autres termes, à très hautes fréquences, l'électron ne peut plus suivre les variations du champ électrique. Il reste alors inerte ( $\vec{P} \rightarrow 0$ ). Le milieu devient **transparent**. C'est effectivement ce que l'on constate à très hautes fréquences, de l'ordre de  $10^{17}$  à  $10^{20}$  Hz (domaines des rayons X). La plupart des milieux diélectriques sont ainsi transparents aux rayons X.

**Polarisation électronique et atomique.** De nombreux matériaux sont constitués de plusieurs types d'atomes. Les électrons ne sont donc pas liés de la même façon aux divers types d'atomes présents dans le milieu. Cette diversité de comportements se traduit par l'existence de plusieurs fréquences de résonances  $\omega_0$  et de coefficients d'amortissement  $\xi$  différents.

D'autre part, bien qu'étant plus lourds que les électrons, les atomes contribuent aussi à la polarisation globale du milieu, mais l'importance de cette contribution (polarisation atomique) varie fortement selon la fréquence du champ électromagnétique.

Dans un matériau diélectrique, on peut donc trouver plusieurs fréquences de résonance liées aussi bien aux vibrations des atomes (vers les basses fréquences) qu'aux mouvements des électrons (hautes fréquences). Les courbes de susceptibilité (associées aux polarisations électronique et atomique) sont alors constituées d'une suite de résonances similaires à celle de  $\omega_0$  étudiée précédemment. L'expression de la **susceptibilité électrique** du milieu se met alors sous la forme suivante :

$$\chi = \sum_j \frac{\chi_{0j}}{1 - (\omega/\omega_{0j})^2 + iQ_j^{-1}(\omega/\omega_{0j})} = \chi' - i\chi'' \quad (5.30)$$

où  $\omega_{0j}$  et  $Q_j^{-1} \equiv \xi_j$  sont la fréquence angulaire et le coefficient d'amortissement de la

j-ième résonance,  $\chi_{0j} = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega_{0j}^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega_{0j}^2}$ , avec  $\omega_p^2 \equiv \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ .

À titre d'exemple, notons que le matériau de base constituant les fibres optiques de télécom est le verre de silice amorphe, synthétisé à partir de molécules de dioxyde de silicium  $\text{SiO}_2$ . Les fréquences de résonance caractéristiques de ce matériau sont au nombre de trois. Les longueurs d'onde correspondantes sont respectivement :  $\lambda_{01} = 9,896 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_{02} = 0,116 \mu\text{m}$ , et  $\lambda_{03} = 0,0684 \mu\text{m}$ . Les longueurs d'onde utilisées pour les communications par fibre optique, situées autour de  $1,55 \mu\text{m}$ , sont suffisamment loin de ces longueurs d'onde de résonance de la silice, afin de minimiser l'absorption des signaux télécoms.

### 3.2 Polarisation d'orientation en régime variable

Nous avons vu précédemment que les molécules polaires ont tendance à orienter leur dipôle dans le sens du champ électrique local afin de minimiser leur énergie potentielle. Cependant la création d'une polarisation d'orientation ne se fait pas instantanément ; car elle exige un mouvement de rotation des molécules qui est inévitablement freiné par des collisions intermoléculaires. De même, si on supprime instantanément le champ local, la dépolarisation des molécules ne sera pas instantanée. Peter Debye a introduit une équation différentielle du premier ordre pour modéliser ces évolutions progressives (appelées **phénomène de relaxation** de la polarisation). Ainsi, pour  $\vec{E} = 0$ , on a :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = 0, \quad (5.31)$$

dont la solution s'écrit :  $\vec{P} = \vec{P}_0 \exp(-t/\tau)$ , où  $\tau$  est un temps de relaxation. Sa valeur typique est de l'ordre de  $10^{-7}$  s. En présence d'un champ  $\vec{E}$  l'équation devient :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}. \quad (5.32)$$

En présence d'un champ  $\vec{E}$  statique, et pour les temps longs, la polarisation tend vers la valeur statique  $\epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}$ . En admettant que cette équation reste valable pour un champ  $\vec{E}$  dépendant du temps, tel que  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$ , l'équation différentielle (5.32) en régime forcé, conduit à :

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_0 \chi_{or}(0)}{(1 + i\omega\tau)} \vec{E} \longrightarrow \chi(\omega) = \frac{\chi_{or}(0)}{(1 + i\omega\tau)} \quad (5.33)$$

avec  $\chi(\omega) = \frac{\chi_{or}(0)}{(1 + i\omega\tau)} = \chi'_{or}(\omega) - i\chi''_{or}(\omega)$ , où

$$\chi'_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{(1 + \omega^2\tau^2)}, \quad \chi''_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega\tau}{(1 + \omega^2\tau^2)}. \quad (5.34)$$

On voit que  $\chi'_{or}$  décroît avec la fréquence et tend vers zéro, en partant de la valeur statique  $\chi_{or}(0)$ , alors que  $\chi''_{or}$  part de 0 et passe par un maximum à  $\omega = \omega_{or} = \tau^{-1}$ , et tend ensuite vers 0.

Si  $\omega$  est suffisamment petit devant  $\tau^{-1}$  l'orientation des dipôles suit sans retard l'orientation du champ et la polarisabilité est proche de la valeur statique.

Si  $\omega$  devient comparable à  $\tau$  il apparaît un déphasage entre la polarisation et le champ électrique.

Enfin, si  $\omega$  est très grand devant  $\tau^{-1}$ , les oscillations du champ sont trop rapides, et les dipôles n'ont pas le temps de s'orienter, et la polarisabilité d'orientation tend vers zéro.

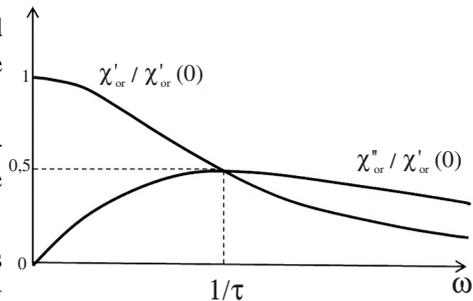


Figure 5.2 – Susceptibilité électrique d'orientation.

### 3.3 Polarisation totale

- Les pulsations caractéristiques de la polarisation électronique, disons  $\omega_{0e}$ , sont situées dans un domaine (de l'ordre de  $10^{14}$  à  $10^{16}$  Hz) qui va du visible à l'ultraviolet.
- Les atomes étant bien plus lourds que les électrons, les pulsations caractéristiques de la polarisation atomique (ou ionique),  $\omega_{0i}$ , se situent dans un domaine de fréquence bien plus bas que dans le cas électronique, à savoir le domaine infrarouge (l'ordre de  $10^{12}$  à  $10^{14}$  Hz).

• Les molécules étant plus lourdes que les atomes, les pulsations caractéristiques de la polarisation d'orientation, se situent dans un domaine de fréquence encore plus bas que celui de la polarisation ionique.

Les facteurs de qualité  $Q_j$  associés à ces résonances sont relativement élevés, de l'ordre de  $10^3$  à  $10^4$ , de sorte que l'on peut distinguer les zones correspondant aux polarisations électroniques et ioniques (figure 5.3).

**Sens physique de la partie imaginaire de  $\chi$ .** La polarisation résulte du mouvement des porteurs de charges sous l'effet du champ électrique. Son amplitude est proportionnelle à la susceptibilité électrique  $\chi$ . Nous allons montrer ci-après que la partie imaginaire de  $\chi$  (lorsqu'elle existe) reflète une dissipation de la puissance de l'onde électromagnétique.

Connaissant la polarisation totale  $\vec{P}$ , on peut déduire immédiatement la **densité de courants liés** :

$$\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = i\omega \vec{P} = i\omega \epsilon_0 \chi \vec{E} = \tilde{\gamma}_{\text{lié}} \vec{E}, \quad (5.35)$$

où

$$\gamma_{\text{lié}} = i\omega \epsilon_0 \chi = i\omega \epsilon_0 (\chi' - i\chi'') = \omega \epsilon_0 (\chi'' + i\chi') = \gamma_{1\text{lié}} + i\gamma_{2\text{lié}}, \quad (5.36)$$

avec

$$\gamma_{1\text{lié}} = \omega \epsilon_0 \chi'' \quad \text{et} \quad \gamma_{2\text{lié}} = \omega \epsilon_0 \chi' \quad (5.37)$$

Ainsi, par analogie avec l'expression qui relie la densité volumique de courant de conduction à la conductivité électrique dans un conducteur ohmique, l'expression de  $\vec{j}_{\text{lié}}$  en fonction de  $\vec{E}$  permet de définir une conductivité  $\gamma_{\text{lié}}$  pour des charges liées. D'autre part,  $\gamma_{\text{lié}}$  étant complexe, on peut poser :  $\cos \Phi = \gamma_{1\text{lié}}/\gamma_{0\text{lié}}$ ,  $\sin \Phi = \gamma_{2\text{lié}}/\gamma_{0\text{lié}}$ , avec  $\gamma_{0\text{lié}} = \sqrt{\gamma_{1\text{lié}}^2 + \gamma_{2\text{lié}}^2}$ , et écrire que

$$\gamma_{\text{lié}} = \gamma_{0\text{lié}} \exp(i\Phi) \quad \text{et} \quad \vec{j}_{\text{lié}} = \gamma_{\text{lié}} \vec{E} = \gamma_{0\text{lié}} \vec{E}_0 \exp[i(\omega + \Phi)]$$

D'autre part, en revenant à la notation réelle :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ , et  $\vec{j}_{\text{lié}} = \gamma_{0\text{lié}} \vec{E}_0 \cos(\omega t + \Phi)$ , on peut calculer la puissance dissipée par unité de volume du matériau :

$$\begin{aligned} P_{\text{lié}} &= \vec{j}_{\text{lié}} \cdot \vec{E} = \gamma_{0\text{lié}} E_0^2 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \Phi) \\ &= \gamma_{0\text{lié}} E_0^2 [\cos^2(\omega t) \cos \Phi - \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\Phi)] \\ \langle P_{\text{lié}} \rangle &= \gamma_{0\text{lié}} \cos \Phi E_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{\gamma_{1\text{lié}} E_0^2}{2} = \chi'' \omega \epsilon_0 E_0^2 / 2. \quad (5.38) \end{aligned}$$

Cette relation montre que le mouvement des charges liées provoquent une perte de puissance de l'onde électromagnétique (par effet Joule), et que cette puissance dissipée est proportionnelle à la partie imaginaire de la susceptibilité  $\chi''$ . Comme illustré dans la figure 5.3,  $\chi''$  ne prend des valeurs significatives qu'au voisinage des fréquences de résonance du milieu. En dehors de ces régions,  $\chi'' \rightarrow 0$ ; le milieu est alors très peu absorbant (on dit aussi qu'il est **transparent**).

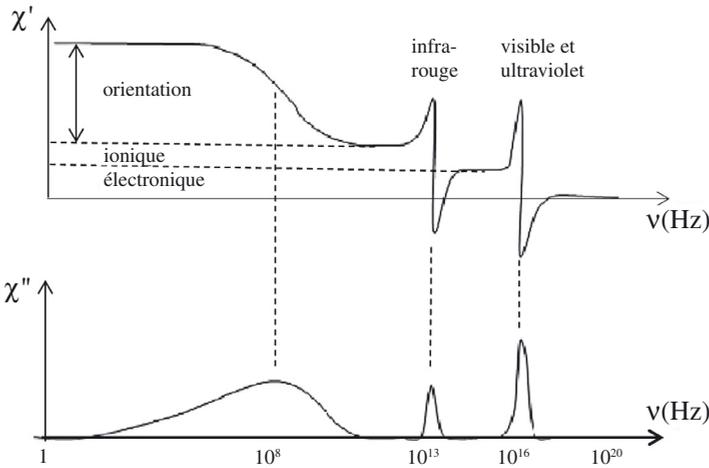


Figure 5.3 – Les différents types de susceptibilité électrique.

### 3.4 Indices de réfraction et d'extinction

**Indice de réfraction.** L'indice de réfraction est une des manifestations macroscopiques de la réponse de la matière soumise à une onde lumineuse, c'est à dire, une onde électromagnétique de très haute fréquence située dans le domaine optique. Il est défini par  $n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \chi}$ , où  $\epsilon_r$  et  $\chi$  représentent respectivement la constante diélectrique et la susceptibilité dans le domaine optique. Dans ce domaine de fréquence, les molécules polaires (responsables de la polarisation d'orientation) sont beaucoup trop lentes pour pouvoir suivre les oscillations rapides du champ électrique, et donc ne réagissent pas à la présence du champ électromagnétique aux fréquences optiques. Les atomes peuvent à peine suivre les variations du champ électrique, du fait de leur masse qui est d'environ mille fois plus grande que celle des électrons. Ce sont donc essentiellement les électrons qui contribuent à susceptibilité électrique d'un milieu. Le tableau 5.2 donne les valeurs des permittivités statiques  $\epsilon_r$  et des indices de réfraction  $n$ , pour différents matériaux polaires ( $p_0 \neq 0$ ) et non polaires ( $p_0 = 0$ ).

Tableau 5.2 – Permittivités statiques et indices de réfraction de quelques diélectriques.

| Matériau                                     | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $\epsilon_r$ | $n^2$ | $p_0$ (Debye) |
|--|-----------------------------|--------------|-------|---------------|
| hexane (C <sub>6</sub> H <sub>14</sub> )     | 655                         | 1,89         | 1,89  | 0             |
| heptane (C <sub>7</sub> H <sub>16</sub> )    | 684                         | 1,92         | 1,92  | 0             |
| benzène (C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> )     | 879                         | 2,28         | 2,25  | 0             |
| tétrachlorure de carbone (CCl <sub>4</sub> ) | 1600                        | 2,24         | 2,13  | 0             |
| eau (H <sub>2</sub> O)                       | 1000                        | 80,4         | 1,77  | 1,85          |
| méthanol (CH <sub>3</sub> OH)                | 791                         | 33,6         | 1,79  | 1,70          |
| chloroforme (CHCl <sub>3</sub> )             | 1483                        | 4,81         | 2,07  | 1,0           |

On constate la différence significative entre  $n^2$  (qui correspond à la permittivité aux fréquences optiques) et la permittivité statique pour les liquides polaires. On observe que dans ces molécules polaires, la polarisation d'orientation apporte une contribution substantielle à la permittivité statique ; d'où la différence entre  $n^2$  et  $\epsilon_r$  pour ces diélectriques.

**Indice complexe.** Dans le domaine optique, lorsqu'on est suffisamment loin des fréquences de résonance du matériau, dans de nombreux diélectriques la partie imaginaire de la susceptibilité  $\chi''$  est très faible mais pas rigoureusement nulle. La permittivité relative se met alors sous la forme suivante :

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \chi' - i\chi'' = \epsilon_1 - i\epsilon_2.$$

avec

$$\begin{cases} \epsilon_1 = 1 + \chi' \\ \epsilon_2 = \chi'' \end{cases} \quad (5.39)$$

$$(5.40)$$

On définit l'**indice complexe** du milieu par :

$$\tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r} = n - i\kappa \quad (5.41)$$

où les valeurs  $n$  et  $\kappa$  s'obtiennent comme indiqué ci-après :

$$\epsilon_r = \tilde{n}^2 \Leftrightarrow \epsilon_1 - i\epsilon_2 = (n - i\kappa)^2 \longrightarrow \epsilon_1 = n^2 - \kappa^2, \quad \epsilon_2 = 2n\kappa \text{ soit}$$

$$n = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + \epsilon_1\right) / 2} \quad \text{et} \quad \kappa = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} - \epsilon_1\right) / 2} \quad (5.42)$$

Ici,  $n$  est appelé **indice de réfraction**, et  $\kappa$  est l'**indice d'extinction**.

Ainsi, l'indice complexe permet d'obtenir facilement la relation de dispersion, qui s'écrit :

$$k = \tilde{n} \omega / c. \quad (5.43)$$

**Relation de Sellmeier.** Dans le domaine optique, pour des fréquences optiques suffisamment loin des fréquences de résonance du matériau  $\omega_{0j}$ , on a  $\omega_{0j}^2 - \omega^2 \gg Q_j^{-1} \omega$ . On peut alors négliger  $\chi''$ . L'indice de réfraction se déduit aisément de l'expression (5.31) de la susceptibilité, et prend approximativement la forme suivante :

$$n^2 = 1 + \chi \approx 1 + \sum_j \frac{A_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (5.44)$$

Cette relation est connue sous le nom de **relation de Sellmeier**.

### ⋮ Exemple

Pour la silice amorphe ( $\text{SiO}_2$ ) (utilisé pour la fabrication de nombreux guides d'ondes), la relation de **Sellmeier** s'écrit :

$$n^2 = 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \omega_{0j}^2}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \quad (5.45)$$

avec  $\lambda_{01} = 68,4 \text{ nm}$  ;  $\lambda_{02} = 116,24 \text{ nm}$  ; et  $\lambda_{03} = 9896 \text{ nm}$ .

$B_1 = 0,696$  ;  $B_2 = 0,408$  ;  $B_3 = 0,8974$ .

### 3.5 Propagation des ondes dans un diélectrique LHI

**Équation de propagation.** Dans un diélectrique LHI il n'y a ni charges ni courants libres. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{lib}} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lib}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{avec}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Les relations constitutives du milieu (supposé non magnétique :  $\mu \simeq \mu_0$ ), s'écrivent :  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  et  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , où  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ .

En appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{E}$ , et en tenant compte des relations qui précèdent, on a :

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[ \text{rot} \left( \vec{E} \right) \right] &= \overline{\text{grad}} \left[ \text{div} \left( \vec{E} \right) \right] - \Delta \vec{E} \text{ soit } -\Delta \vec{E} = \text{rot} \left[ -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{\partial \text{rot} \left( \vec{B} \right)}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ et donc} \\ \Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

En appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{B}$ , et tenant compte des relations qui précèdent, trouve :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.47)$$

Ainsi, le champ électromagnétique vérifie l'équation de d'Alembert, qui est similaire à l'équation de propagation dans le vide mais avec  $\epsilon$  au lieu de  $\epsilon_0$ .

**Relation de dispersion.** Pour  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire de direction constante dans le temps,  $\Delta E$  se réduit à  $\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -k^2 E$ , et l'équation de propagation conduit à la relation de dispersion :

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega^2 = \epsilon_r \omega^2 / c^2 = \tilde{n}^2 \omega^2 / c^2 \quad (5.48)$$

❶ Les diélectriques sont des milieux matériels qui ne contiennent quasiment pas de charges libres. Les charges qui y sont présentes sont des charges liées.

## ❷ Champ microscopique, champ macroscopique, et champ local

Au sein de la matière, les particules porteuses de charges créent des champs électriques et magnétiques, qualifiés de **champs microscopiques**, qui sont localement très intenses et varient rapidement (en module et en direction) sur des distances interatomiques. On peut donc niveler les champs étudiés en les débarrassant des fluctuations spatiales qui existent à l'échelle microscopique. Ce nivellement s'obtient en considérant une moyenne spatiale des champs sur un domaine très petit à l'échelle macroscopique, mais très grand devant les dimensions atomiques, appelé **échelle mésoscopique** (qui est de l'ordre de quelques nm). C'est ce champ moyen, appelé **champ macroscopique**, qui intervient dans les équations de Maxwell. Cependant, la procédure usuelle de l'électromagnétisme consiste à considérer qu'au sein du milieu matériel, une entité donnée telle qu'un électron ou un atome, n'est soumise ni au **champ microscopique**, ni au **champ macroscopique**, mais plutôt à un champ effectif appelé **champ local** ( $\vec{E}_L$ ,  $\vec{B}_L$ ), qui dépend principalement du champ externe, de l'environnement immédiat de l'atome, et des propriétés (électriques ou magnétiques) intrinsèques du milieu matériel.

Dans les milieux denses (tels que les solides), une approximation du champ local (connue sous le nom de **champ de Lorentz**) s'écrit :  $\vec{E}_L \simeq \vec{E} + \vec{P}/(3\epsilon_0)$ , où  $\vec{P}$  désigne la polarisation. Dans les milieux dilués, on a plutôt  $\vec{E}_L \simeq \vec{E}$ .

## ❸ Principaux mécanismes de polarisation

Plusieurs types de polarisation peuvent se manifester dans les milieux matériels, à savoir :

- la **polarisation électronique**, qui est due au déplacement et à la déformation du nuage électronique qui entoure chaque atome de la matière. Elle est présente dans un vaste domaine de fréquence (de champ électromagnétique) allant des radiofréquences jusqu'à l'ultraviolet.

- la **polarisation atomique** (ou **ionique**), résulte des déplacements des atomes ou des ions par rapport à leurs positions d'équilibre dans l'édifice auquel ils appartiennent. Elle est présente dans un domaine de fréquence

(moins vaste que celui de la polarisation électronique) qui va des radiofréquences jusqu'à l'infrarouge.

- la **polarisation d'orientation**, se manifeste dans les matériaux qui sont initialement déjà polarisés au niveau microscopique (i.e., dotés d'un moment dipolaire permanent). Sous l'action du champ électrique, le moment dipolaire tend à s'orienter dans la direction du champ électrique. Cette polarisation est présente dans un domaine de fréquence (moins vaste que celui de la polarisation atomique) qui va des radiofréquences jusqu'aux micro-ondes.

#### 4 Polarisabilité

Lorsque le champ local  $\vec{E}_L$  est relativement faible, la polarisation est caractérisée au niveau microscopique par une relation linéaire entre le moment dipolaire élémentaire  $\vec{p}$  et le champ local  $\vec{E}_L$  :  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_L$  où  $\alpha$ , est appelée **polarisabilité**. La valeur de  $\alpha$  dépend du mécanisme responsable de la polarisation. La polarisation est reliée aux moments dipolaires microscopiques par  $\vec{P} = N \vec{p}$ , où  $N$  est le nombre de moments dipolaires par unité de volume. Comme  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_L$ , on a  $\vec{P} = N \alpha \epsilon_0 \vec{E}_L$ .

#### 5 Susceptibilité

Dans certains milieux, les différents types de polarisation peuvent se cumuler. La polarisation totale s'écrit alors :  $\vec{P} = \epsilon_0 N (\alpha_e + \alpha_a + \alpha_{or}) \vec{E}_L$ , où  $\alpha_e$ ,  $\alpha_a$  et  $\alpha_{or}$  désignent respectivement les polarisabilités électronique, atomique, et d'orientation. À faible amplitude de champ, on peut toujours mettre la polarisation totale sous la forme suivante :  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , où la **susceptibilité électrique** du milieu se met dans la forme  $\chi_e(\omega) = \chi'(\omega) - i\chi''(\omega)$ .

#### 6 Indice de réfraction, indice d'extinction

Dans le domaine optique, lorsqu'on est suffisamment loin des fréquences de résonance du matériau, la permittivité relative s'écrit :

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + \chi' - i\chi'' = \epsilon_1 - i\epsilon_2 \text{ avec } \epsilon_1 = 1 + \chi', \quad \epsilon_2 = \chi''$$

**Indice complexe** du milieu :  $\tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r} = n - i\kappa$ .

**7 Relation de dispersion** :  $k = \tilde{n} \omega / c$ .

$n = n(\epsilon_1, \epsilon_2)$  = **indice de réfraction** ;  $\kappa = \kappa(\epsilon_1, \epsilon_2)$  = **indice extinction**.



- 5.1** Lorsqu'une onde électromagnétique pénètre dans un milieu diélectrique, elle met en mouvement les constituants élémentaires porteurs de charges, présents dans le milieu : électrons, atomes ionisés (ions), molécules polaires, etc. Cependant, comme ces constituants n'ont pas la même masse, ils manifestent plus ou moins d'inertie à suivre le mouvement oscillatoire imposé, selon la fréquence de l'onde.  
Lorsque la fréquence de l'onde est suffisamment basse, les électrons, ions, ou molécules polaires, peuvent osciller instantanément à la fréquence de l'onde :
- a. vrai                      b. faux
- 5.2** Lorsque, les électrons, ions, ou molécules polaires, peuvent tous exécuter instantanément le mouvement oscillatoire imposé par l'onde, alors le mouvement de chacun de ces constituants apporte une contribution à la susceptibilité électrique et à la polarisation :
- a. faux                      b. vrai
- 5.3** La polarisation créée par les molécules polaires est appelée :
- a. polarisation ionique                      b. polarisation atomique  
c. polarisation d'orientation                      d. polarisation électronique
- 5.4** La polarisation créée par les ions est appelée :
- a. polarisation ionique                      b. polarisation atomique  
c. polarisation d'orientation                      d. polarisation électronique
- 5.5** La polarisation créée par les électrons est appelée :
- a. polarisation ionique                      b. polarisation atomique  
c. polarisation d'orientation                      d. polarisation électronique
- 5.6** Lorsque la fréquence de l'onde est suffisamment élevée (visible, ultraviolet), certains constituants (du fait de leur inertie) ne peuvent plus exécuter les oscillations imposées par l'onde. Quelles sont elles ?
- a. molécules                      b. électrons                      c. ions
- 5.7** Dans le domaine des hautes fréquences (visible, ultraviolet), la polarisation au sein du milieu diélectrique est donc essentiellement une polarisation :
- a. ionique                      b. atomique                      c. d'orientation                      d. électronique
- 5.8** Dans le domaine optique (infrarouge, visible, ultraviolet), la polarisation au sein d'un milieu diélectrique inclut des contributions :
- a. ionique                      b. moléculaire                      c. d'orientation                      d. électronique
- 5.9** L'indice de réfraction est une caractéristique optique d'un milieu diélectrique. Il est donc lié à la permittivité à haute fréquence. Pour une molécule polaire, la permittivité statique (relative) est liée à l'indice de réfraction  $n$  par la relation  $\epsilon_r = n^2$  :
- a. vrai                      b. faux
- 5.10** Pour une molécule apolaire on a  $\epsilon_r \simeq n^2$  :
- a. vrai                      b. faux



# Entraînez-vous

## 5.1 Impact de la dispersion chromatique sur les débits de transmission des informations par fibre optique

L'une des applications les plus courantes des matériaux diélectriques est leur utilisation pour la fabrication de guides d'ondes. L'un des guides d'ondes les plus largement utilisés actuellement est la fibre optique à saut d'indice. Elle est constituée de deux matériaux diélectriques d'indices de réfraction respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , mais avec une différence d'indice très faible. Les deux diélectriques sont agencés sous la forme de deux cylindres concentriques, où le cœur est occupé par le diélectrique d'indice le plus élevé  $n_1$ . Ce cœur est entouré par le second diélectrique appelé gaine optique, d'indice  $n_2$ . Le matériau de base utilisé pour les deux diélectriques est la silice amorphe ( $\text{SiO}_2$ ) d'indice  $n$ . L'adjonction de très faibles quantités de dopants dans le cœur et la gaine permet d'accroître très légèrement l'indice du cœur  $n_1$  (par rapport à  $n$ ) et de baisser très légèrement l'indice de la gaine, mais en gardant  $n_1 \simeq n_2 \simeq n$ .

Dans le domaine des longueurs d'onde télécom  $0,85 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,55 \mu\text{m}$ , une bonne approximation de l'indice de réfraction de la silice est donnée par la relation de Sellmeier :

$$n^2 = 1 + \frac{0,6962 \lambda^2}{\lambda^2 - (0,0684)^2} + \frac{0,4079 \lambda^2}{\lambda^2 - (0,1162)^2} + \frac{0,8974 \lambda^2}{\lambda^2 - (9,8961)^2} \quad (5.49)$$

1. Calculer l'indice de réfraction  $n(\lambda)$  de la silice dans les trois fenêtres télécoms, à savoir,  $\lambda = \lambda_1 = 0,85 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_2 = 1,3 \mu\text{m}$ ,  $\lambda_3 = 1,55 \mu\text{m}$ . Que peut-on conclure sur l'évolution de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde ?

Pour transmettre une information par fibre optique, on doit préalablement inscrire cette information sur une onde électromagnétique située dans le domaine télécom. Cette opération consiste à faire varier un des paramètres de l'onde (amplitude, fréquence, constante de phase, ou polarisation) au rythme des variations temporelles du signal d'information. On utilise alors le terme « **porteuse** » pour désigner l'onde électromagnétique, et le terme « **modulation** » pour désigner le signal d'information. Dans ce qui suit, nous verrons qu'au cours de la propagation d'une onde porteuse d'information, le signal d'information se déplace à une vitesse différente de celle de la porteuse.

2. Montrer que la vitesse de phase  $V_\varphi$  d'une onde électromagnétique et sa vitesse de groupe  $V_g$  sont liées par la relation  $V_g = V_\varphi - \lambda \frac{dV_\varphi}{d\lambda}$  (formule de Rayleigh).

On considère une transmission avec un format de **modulation d'amplitude**, c'est-à-dire, on suppose qu'à l'émission, l'onde modulée a la forme suivante :

$$E = E_0 [1 + f(t)] \cos(\omega_0 t) \quad (5.50)$$

où  $f(t) = A \cos(\Omega t)$ , avec  $\Omega \ll \omega_0$ , représente le signal d'information, qui doit avoir une fréquence de variation  $\Omega$  suffisamment petite par rapport à la fréquence de la porteuse  $\omega_0$  afin d'éviter des instabilités de propagation.

3. Montrer que la modulation (information) se propage à la vitesse de groupe  $V_g$  tandis que la porteuse se propage à la vitesse de phase  $V_\varphi$ .

Si on désigne par  $L$  la longueur de la fibre considérée, le temps de transit de l'information par la fibre est alors donné par  $t_L = \frac{L}{V_g} = L \frac{dk}{d\omega}$ , où  $k$  désigne la constante de propagation dans la fibre, et  $V_g \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Compte tenu de la très faible différence entre les indices de cœur et de gaine de la fibre, on peut en première approximation considérer que la relation de dispersion de l'onde modulée est analogue à la celle d'une onde plane dans un diélectrique d'indice  $n$  (qui est ici celle de la silice amorphe).

4. Écrire cette relation de dispersion, en exprimant  $k$  en fonction de  $n$ ,  $\omega$  et  $c$ .
5. Donner l'expression de  $\omega$  en fonction de  $\lambda$ , et calculer la fréquence  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  correspondant à  $\lambda_0 = \lambda_3 = 1,55 \mu\text{m}$  (troisième fenêtre télécom).  
Soit  $\delta\omega$  une petite bande spectrale centrée en  $\omega_0$ . À cette bande  $\delta\omega$  on peut associer une bande  $\delta\lambda$ .
6. Donner l'expression de  $\omega/\delta\omega$  en fonction de  $\lambda/\delta\lambda$ .
7. À partir de l'expression de  $k = k(n, \omega)$  de la question 4., et sachant que  $n = n(\omega) \Leftrightarrow n(\lambda)$ , montrer que :

$$t_L = \frac{L}{c} \left( n - \lambda \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \quad (5.51)$$

L'expression (5.50) de l'onde modulée suggère que la porteuse non modulée est une onde monochromatique de pulsation  $\omega_0$ . En pratique, les sources lumineuses télécom (diode laser ou diode électroluminescente) ne sont pas strictement monochromatiques. La lumière est répartie sur une petite bande spectrale  $\delta\lambda$  (ou  $\delta\omega$ ) autour de  $\lambda_0$  (ou  $\omega_0$ ). En d'autres termes, en pratique une onde modulée est plutôt un paquet d'ondes, assimilable à un très grand nombre d'ondes planes de longueurs d'ondes  $\lambda_{0i}$  très proches les unes des autres, réparties sur la bande spectrale  $\delta\lambda$ . L'information est donc répartie sur toute la bande spectrale  $\delta\lambda$ . Comme chaque composante spectrale  $\lambda_{0i}$  de cette bande parcourt la fibre avec son propre temps de parcours  $t_L(\lambda = \lambda_{0i})$  donné par la relation (5.51), les différentes parties de l'information n'arrivent pas à destination en même temps. L'information arrive étalée dans le temps. Ce phénomène, qui est qualifié de **dispersion chromatique**, est une source de dégradation de la qualité des transmissions par fibre optique, car elle peut provoquer un chevauchement de deux informations émises à des instants rapprochés. On évalue son impact par un coefficient appelé **coefficient de dispersion**.

8. À partir de la relation (5.51), montrer que la variation de  $t_L$  avec la longueur d'onde peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial t_L}{\partial \lambda} = -LD \Leftrightarrow \Delta t_L \simeq LD\Delta\lambda \quad (5.52)$$

où  $D$  est appelé **coefficient de dispersion de la fibre optique**.

On considère les valeurs suivantes :  $D = 30 \text{ ps/nm/km}$  à  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ ,  $L = 30 \text{ kilomètres}$ .

9. Calculer l'écart  $\Delta t_L$  si on utilise une diode laser de largeur spectrale  $\delta\lambda = 3 \text{ nm}$ .

10. Calculer l'écart  $\Delta t_L$  dans le cas d'une diode électroluminescente (DEL) de largeur spectrale  $\delta\lambda = 60 \text{ nm}$ .

En transmission numérique, les informations sont codées sous forme binaire (sous la forme d'une série de « 0 » qui signifie « absence de lumière » et de « 1 » qui signifie « impulsion lumineuse »). Le débit de transmission  $B$  est défini comme le nombre d'impulsions que l'émetteur (incorporant une DEL ou une diode laser) peut générer en une seconde. Le temps nécessaire pour générer une impulsion est donné par  $T_b = 1/B$ , appelé « **temps bit** ». Nous avons vu que deux composantes spectrales (d'une information) séparées de  $\Delta\lambda$  ne mettent pas le même temps pour parcourir la fibre. Elles arrivent donc à destination avec un écart de temps  $\Delta t_L \simeq LD\Delta\lambda$ . Cela se traduit par un élargissement des impulsions dans le domaine temporel. Un critère couramment utilisé en télécom est qu'au cours de la transmission, l'élargissement temporel de l'impulsion n'excède pas le quart du temps bit  $\Delta t_L < T_b/4$ .

11. Quelle est selon vous la raison d'un tel critère ?

12. Calculer le débit maximum  $B_{\max}$  imposé par le phénomène de dispersion, avec les paramètres définis dans la question 5), dans le cas de la diode laser et dans le cas de la DEL. Que peut-on conclure ?

## 5.2 Relation de dispersion d'un plasma

On considère un plasma neutre formé d'ions de masse  $M$  et de charge  $+e$ , et d'électrons de masse  $m$  et de charge  $-e$ . Ces deux entités ont la même densité  $N$  (nombre d'ions ou d'électrons par  $\text{cm}^3$ ). En l'absence de champ appliqué, une particule quelconque du plasma, de charge  $q_i$  ( $+e$  ou  $-e$ ) est animée d'un mouvement  $\vec{R}_i(t)$  dû aux autres particules et la polarisation résultante est nulle :

$$\sum_i q_i \vec{R}_i(t) = 0$$

En présence d'un champ  $\vec{E}$ , le mouvement est décrit par :  $\overline{\text{OM}}_i = \vec{R}_i(t) + \vec{r}_i(t)$ , où  $\vec{r}_i(t)$  est le déplacement induit par le champ électrique.

1. Montrer qu'en présence de  $\vec{E}$ , la polarisation vérifie :  $\frac{d^2 \vec{P}}{dt^2} = \left( \sum_i \frac{q_i^2}{m_i} \right) \vec{E}$

$\vec{E}$  est maintenant une fonction sinusoïdale du temps avec la pulsation  $\omega$ .

2. Donner la relation entre les amplitudes complexes de  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$ .

3. Montrer que l'on peut introduire une permittivité  $\varepsilon(\omega)$ .

4. En déduire la relation de dispersion de ce milieu, et la condition de propagation des ondes dans le milieu.

Les électrons des molécules de l'air peuvent être assimilés à des oscillateurs harmoniques de pulsation propre située dans l'ultraviolet ( $\omega_0 \sim 3 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$ ).

5. On envoie sur un tel oscillateur une radiation monochromatique. Écrire l'équation de mouvement en posant :  $K = m\omega_0^2$  (constante de force),  $f = m\gamma$  (coefficient de frottement).

6. Déterminer le module  $\rho$  et l'argument  $\theta$  du coefficient d'amplification  $\vec{R} = \vec{r}_0 / (eE_0)$  reliant l'amplitude du mouvement de l'électron à celle de la force du champ électrique reçu.
7. Représenter graphiquement  $\rho/\rho_0$  en fonction de  $\omega/\omega_0$  dans l'intervalle :  $\omega/\omega_0 \in [0 - 3]$ , où  $\rho_0 = \rho(\omega = \omega_0)$ .  
On choisira les valeurs suivantes :  $m\gamma\omega_0 = 1$ ;  $\gamma = \omega_0/5$ .
8. Montrer que, tant que  $\omega < 0,3\omega_0$ , l'amplitude du mouvement de l'électron est sensiblement indépendante de  $\omega$ .
9. Le soleil envoie de la lumière blanche sur les molécules de l'air. Sachant que la puissance rayonnée par le dipôle est :  $P_m \propto \omega^4$ , interpréter la couleur bleu du ciel.

# Solutions



- 5.1** Réponse a ; **5.2** Réponse b ; **5.3** Réponse c ; **5.4** Réponses a, b ; **5.5** Réponse d ; **5.6** Réponses a, c ; **5.7** Réponse d ; **5.8** Réponses a, d ; **5.9** Réponse b ; **5.10** Réponse a.



## 5.1 Transport d'information par fibre optique

1. On constate que l'indice de réfraction diminue avec la longueur d'onde.

|     |                    |                   |                    |
|-----|--------------------|-------------------|--------------------|
| $l$ | $0,85 \mu\text{m}$ | $1,3 \mu\text{m}$ | $1,55 \mu\text{m}$ |
| $n$ | 1,4525             | 1,4469            | 1,4440             |

2. Par définition,  $V_g = \frac{d\omega}{dk}$  et  $V_\varphi = \frac{\omega}{k}$ .

$$\text{On a donc : } V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (kV_\varphi) = V_\varphi + k \frac{dV_\varphi}{dk}$$

$$\text{Comme } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ soit } \frac{dk}{k} = -\frac{d\lambda}{\lambda} \text{ et } dk = -\frac{k d\lambda}{\lambda} \text{ et donc } V_g = V_\varphi - \lambda \frac{dV_\varphi}{d\lambda}.$$

3. Montrons que la modulation se propage à la vitesse de groupe  $V_g$  tandis que la porteuse se propage à la vitesse de phase  $V_\varphi$ .

$$\text{Onde modulée à l'émission : } \vec{E} = \vec{E}_0 [1 + A \cos(\Omega t)] \cos(\omega t)$$

$$\text{En utilisant l'identité trigonométrique } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)],$$

$$\text{on peut écrire que } \vec{E}(t) = \vec{E}_0 \left[ \cos \omega t + \frac{A}{2} \cos [(\omega + \Omega)t] + \frac{A}{2} \cos [(\omega - \Omega)t] \right].$$

Pour que  $\vec{E}$  soit une onde il faut qu'il contienne un terme de propagation. Par exemple si cette onde se propage dans la direction des  $x$  positifs, le terme de propagation doit être proportionnel à :

$$\varphi = x - V_\varphi t = -V_\varphi \left( t - \frac{x}{V_\varphi} \right).$$

L'expression de l'onde s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \left[ \cos \left( \omega \left( t - \frac{x}{V_\varphi(\omega)} \right) \right) + \frac{A}{2} \cos \left( (\omega + \Omega) \left( t - \frac{x}{V_\varphi(\omega + \Omega)} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} \cos \left( (\omega - \Omega) \left( t - \frac{x}{V_\varphi(\omega - \Omega)} \right) \right) \right] \\ &= \vec{E}_0 \left[ \cos [\omega t - k(\omega)x] + \frac{A}{2} \cos [(\omega + \Omega)t - k(\omega + \Omega)x] \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} \cos [(\omega - \Omega)t - k(\omega - \Omega)x] \right] \\ &= \vec{E}_0 \left[ \cos [\omega t - k(\omega)x] + \frac{A}{2} \cos \left[ (\omega + \Omega)t - \left( k(\omega) + \Omega \frac{dk}{d\omega} \right) x \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{A}{2} \cos \left[ (\omega - \Omega)t - \left( k(\omega) - \Omega \frac{dk}{d\omega} \right) x \right] \right] \end{aligned}$$

En appliquant l'identité trigonométrique  $\cos a + \cos b = 2 \left[ \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) \right]$  aux derniers termes de cette expression, on obtient :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos [\omega t - k(\omega)x] + \vec{E}_0 A \cos [\omega t - k(\omega)x] \cos \left[ \Omega t - \Omega \frac{dk}{d\omega} x \right]$$

En mettant le premier terme en facteur, on obtient :

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{V_\phi} \right)}_{\text{porteuse}} \left[ 1 + \underbrace{A \cos \Omega \left( t - \frac{x}{V_g} \right)}_{\text{information}} \right]$$

Cette formule montre que la porteuse (de pulsation  $\omega$ ) se propage à la vitesse de phase  $V_\phi$  alors que l'information (de fréquence  $\Omega$ ) se propage à la vitesse de groupe  $V_g$ .

4.  $k = n(\omega) \omega / c$ .

5.  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi c / \lambda$ .

Pour  $\lambda_0 = \lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , on trouve :  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 193,5 \text{ THz}$ .

6.  $\omega = 2\pi c / \lambda \rightarrow \text{Log } \omega = \text{Log}(2\pi c) - \text{Log } \lambda \rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$ , où  $d\omega$ , et  $d\lambda$  sont des variations infinitésimales. Une bande spectrale  $\delta\omega$  n'est pas une grandeur infinitésimale, mais elle est suffisamment petite pour qu'on puisse écrire en valeur absolue que :

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \simeq \frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

7.

$$t_L = \frac{L}{V_g} = L \frac{dk}{d\omega} = L \frac{d(n\omega/c)}{d\omega} = L \left( \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} + \frac{n}{c} \right)$$

Comme  $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\lambda}{\lambda}$ , on a donc  $t_L = \frac{L}{c} \left( n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0}$

8. Au sein de la bande spectrale  $\delta\lambda$ , une variation infinitésimale de longueur d'onde  $d\lambda$  provoque une variation du temps de parcours  $dt_L$ , telle que :

$$\frac{\partial t_L}{\partial \lambda} = \frac{L}{c} \left( \frac{dn}{d\lambda} - \frac{dn}{d\lambda} - \lambda \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) = \frac{L}{c} \left( -\lambda \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) = -L D, \text{ avec } D = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2n}{d\lambda^2}$$

Soit  $\Delta t_L \simeq L D \Delta\lambda$ .

9. Pour  $\delta\lambda = 3 \text{ nm}$  (diode laser), on trouve :  $\Delta t_L = 2700 \text{ ps} = 2,7 \text{ ns}$ .

10. Pour  $\delta\lambda = 60 \text{ nm}$ , on trouve :  $\Delta t_L = 54 \text{ ns}$

11. Le critère  $\Delta t_L < T_b/4$  sert à limiter l'élargissement temporel de l'impulsion afin d'éviter le chevauchement d'impulsions adjacentes.

12.  $\Delta t_L < T_b/4 \rightarrow \Delta t_L < \frac{1}{4B} \rightarrow B < \frac{1}{4\Delta t_L} \rightarrow B_{\text{max}} = \frac{1}{4\Delta t_L}$ . Pour la diode laser avec  $\delta\lambda = 3 \text{ nm}$ , la dispersion impose un débit maximum :  $B_{\text{max}} = 92,6 \text{ Mb/s}$ . Pour la DEL le débit maximum est  $B_{\text{max}} = 4,6 \text{ Mb/s}$ .

On peut conclure que la diode laser permet d'accroître le débit de transmission de plus d'un ordre de grandeur en présence de la dispersion chromatique.

## 5.2 Relation de dispersion d'un plasma

1. En l'absence de champ, la polarisation s'écrit :  $\sum_i q_i \vec{R}_i(t) = 0 \Rightarrow \sum_i q_i \frac{d^2 \vec{R}_i}{dt^2} = \sum_i q_i \ddot{\vec{R}}_i = 0$ .

En présence de champ, la polarisation s'écrit :

$$\vec{P} = \sum_i q_i (\vec{R}_i + \vec{r}_i) = \sum_i q_i \vec{r}_i \Rightarrow \vec{P} = \sum_i q_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = q_i \vec{E} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_i = q_i \vec{E} / m_i$ , et

$$\text{donc } \vec{P} = \sum_i q_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{q_i^2}{m_i} \vec{E}_i$$

2.  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\vec{P} = \sum_i q_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \frac{q_i^2}{m_i} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \vec{P} = - \sum_i \frac{q_i^2}{\omega^2 m_i} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\text{avec } \chi = - \sum_i \frac{q_i^2}{m_i \epsilon_0 \omega^2}$$

3. En posant  $\chi = \epsilon_r - 1$ , nous obtenons finalement

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 - \sum_i \frac{q_i^2}{m_i \epsilon_0 \omega^2} \right)$$

A.N. :  $i = 1$  ,  $q_i = +e$  ,  $M_i = M$  (ions)

$i = 2$  ,  $q_i = -e$  ,  $M_i = m$  (électrons)

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{N e^2}{M \epsilon_0 \omega^2} - \frac{N e^2}{m \epsilon_0 \omega^2} \right) = \epsilon_0 \left( 1 - \frac{N e^2}{\mu \epsilon_0 \omega^2} \right)$$

avec  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  : masse réduite

4. Dans un milieu LHI de constantes  $\epsilon$  et  $\mu$  la relation de dispersion s'écrit  $k = \sqrt{\epsilon \mu} \omega$ .

Ici cette relation s'écrit :  $k = \sqrt{\epsilon \mu_0} \omega = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \left( 1 - \frac{N e^2}{\mu \epsilon_0 \omega^2} \right)^{1/2} \omega$ , soit

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{N e^2}{\mu \epsilon_0 \omega^2}}$$

Cette relation montre que la propagation est possible dans ce milieu si  $k$  est réel ; ce qui

est possible si :  $\omega > \sqrt{\frac{N e^2}{\mu \epsilon_0}} = \omega_p$ .

5. Équation du mouvement :  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e\vec{E}_0 e^{i\omega t} - m\gamma \dot{\vec{r}}$ .

Régime permanent :  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$  et  $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$ , soit

$$-m\omega^2 \vec{r}_0 = -m\omega_0^2 \vec{r}_0 - e\vec{E}_0 - i\omega m\gamma \vec{r}_0$$

$$\vec{r}_0 = \frac{-e\vec{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega m\gamma} = \frac{-e\vec{E}_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega]}$$

$$\vec{r} = \frac{-e}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega]} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

6. D'après l'expression de  $\vec{r}$  ci-dessus, on peut écrire que :  $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$  avec

$$\vec{r}_0 = \frac{-e}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega]} \vec{E}_0$$

Par ailleurs,

$$|\vec{R}| = \left| \frac{\vec{r}_0}{e\vec{E}_0} \right| = |\rho e^{i\theta}|$$

soit  $\rho = \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}$  et  $\theta = -\arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$

7. Pour  $\omega = 0 \rightarrow \rho = \frac{1}{m\omega_0^2} = 1/5$

$$\omega = \omega_0 \rightarrow \rho = \frac{1}{m\gamma\omega_0} = 1$$

$$\omega \gg \omega_0 \rightarrow \rho = \frac{1}{m\omega^2} = 1$$

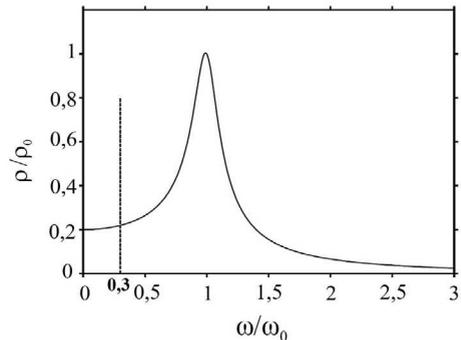


Figure 5.4

8. La figure 5.4 montre que pour  $\omega < 0,3\omega_0$ , l'amplitude du mouvement de l'électron est pratiquement indépendante de  $\omega$ .

Le spectre de la lumière visible s'étend du rouge au violet, soit approximativement  $2,9 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \leq \omega \leq 4,2 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \Leftrightarrow 0,1 \leq \omega/\omega_0 \leq 0,14$ . Dans cette plage, l'amplitude du mouvement de l'électron est pratiquement indépendante de  $\omega$ .

9. La lumière provenant du soleil est une lumière blanche. Mais la puissance rayonnée est proportionnelle à  $\omega^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}$ . Les fréquences les plus élevées de la lumière visible sont diffusées avec plus d'intensité. Ainsi le bleu est diffusé avec seize fois plus d'intensité que le rouge. Le ciel nous apparaît bleu.

# Les ondes dans les milieux conducteurs

## Introduction

Il est fréquent, lorsqu'on voyage en train et qu'on téléphone, d'avoir des coupures de communication lorsque le train passe dans un tunnel. Il est tout aussi fréquent que l'automobiliste constate la perte de son signal GPS dès qu'il entre dans un tunnel. Mais pourquoi cela capte-t-il mal dans les tunnels ? Et même dans certains parkings souterrains ? La principale raison est que les tunnels et les parkings sont des édifices très fortement armés de structures métalliques. Les métaux sont des milieux conducteurs. Ces milieux ont tendance à s'opposer à la propagation des ondes de basse fréquence (onde radio ou micro-onde), qui sont réfléchies ou rapidement absorbées lorsqu'elles pénètrent dans un conducteur.

## Objectifs

**Expliquer** les processus d'interaction entre une onde électromagnétique et les constituants élémentaires des milieux conducteurs.

**Identifier** les conséquences de cette interaction sur la propagation de l'onde.

**Connaître** la diversité des phénomènes de propagation qui se produisent selon la fréquence de l'onde électromagnétique.

**Appliquer** les lois fondamentales de l'électromagnétisme pour déterminer les conditions de propagation d'une onde arrivant sur un conducteur.

## Plan

- 1 Effet de peau
- 2 Conductivité et permittivité diélectrique des métaux
- 3 Permittivité diélectrique généralisée
- 4 Ondes de rayonnement et plasmons de volume
- 5 Plasmons de surface

Les conducteurs et les plasmas sont des milieux matériels dont le comportement varie très sensiblement selon la fréquence des champs électromagnétiques auxquels ils sont soumis. Par exemple, lorsqu'une onde de basse fréquence (onde radio ou micro-onde) pénètre dans un métal, son amplitude diminue exponentiellement avec la distance. Cette onde s'éteint d'autant plus rapidement que la conductivité du métal est élevée. On peut simplement dire que les milieux conducteurs ont tendance à s'opposer à la propagation

des ondes de basse fréquence au sein de leur volume (mais, sans interdire une propagation en surface). À l’opposé, les ondes de fréquence suffisamment élevée (à partir des fréquences optiques ou au-delà) peuvent se propager dans le volume de ces milieux. Par conséquent, à ces fréquences, on peut caractériser les milieux conducteurs par une permittivité, tandis qu’à basse fréquence les milieux conducteurs sont principalement caractérisés par leur conductivité. Dans ce chapitre nous examinons cette diversité de comportements, ainsi que les conditions de propagation des ondes électromagnétiques dans le volume et à la surface des milieux conducteurs et des plasmas.

## 1 Effet de peau

Dans un milieu matériel, l’équation de Maxwell-Ampère  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , peut s’exprimer de manière à faire apparaître explicitement la nature des sources de champ présentes dans le milieu, par :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_m + \vec{j}_{\text{vide}} \right) \quad (6.1)$$

Ici, rappelons que :

- $\vec{j}_{\text{libre}}$  est la **densité volumique de courants libres**. Elle est créée par les charges libres du milieu, et est définie par  $\vec{j}_{\text{libre}} = \rho_{\text{libre}} \vec{v}$ , où  $\rho_{\text{libre}}$  désigne la densité volumique des charges libres et  $\vec{v}$  leur vitesse. À basse fréquence, les milieux conducteurs sont caractérisés par une conductivité  $\sigma_0$  définie par  $\vec{j}_{\text{libre}} = \sigma_0 \vec{E}$ .
- $\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  est la **densité volumique de courant équivalent à la polarisation  $\vec{P}$**  du milieu. Comme elle résulte de la polarisation créée par les charges liées du milieu, elle est aussi appelée **densité volumique de courants liés**. Dans un milieu LHI,  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ , où  $\chi_e$  est la susceptibilité électrique du milieu.
- $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$  est la **densité volumique de courant équivalent à l’aimantation  $\vec{M}$**  du milieu. Notons que, bien que cette densité de courant soit aussi créée par des charges liées, nous préférons réserver l’appellation **densité volumique de courants liés** aux courants résultant de la polarisation.
- $\vec{j}_{\text{vide}} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est la **densité volumique de courant de déplacement**. C’est la seule source de champ électromagnétique qui est systématiquement présente dans tout milieu. Comme c’est le seul terme qui subsiste lorsqu’on est dans le vide, on peut considérer que c’est la contribution que le vide apporte à l’équation de Maxwell-Ampère.

Ici, nous considérons des milieux conducteurs n'ayant pas de propriétés magnétiques particulières (et qui donc n'ont qu'une très faible aimantation). Par conséquent, il n'est pas nécessaire de faire apparaître explicitement le terme  $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère. En posant  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$ , l'équation de Maxwell-Ampère se met sous la forme suivante :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_{\text{vide}} \quad (6.2)$$

Considérons un milieu conducteur LHI où une onde électromagnétique de basse fréquence se propage le long d'un axe Ox, avec un champ électrique donné par :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - k x)] \quad (6.3)$$

Au sein du milieu on a :

$$\vec{j}_{\text{total}} \equiv \vec{j}_{\text{vide}} + \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_{\text{libre}} = [i\omega\epsilon_0(1 + \chi_e) + \sigma_0] \vec{E} = [i\omega\epsilon_0\epsilon_r + \sigma_0] \vec{E} \quad (6.4)$$

### Remarque

Ici, il est important de noter la présence du terme  $\vec{j}_{\text{libre}}$ , qui est inexistant dans les milieux diélectriques. Notons que dans tout milieu matériel, le champ d'induction correspond à la totalité des courants présents dans le milieu (en quantité non négligeable), quelles que soient leurs natures.

D'autre part, on peut aussi écrire que :

$$\vec{j}_{\text{total}} \equiv \frac{\partial \vec{D}_{\text{total}}}{\partial t} = i\omega \vec{D}_{\text{total}} = i\omega\epsilon_0\epsilon_{r\_total} \vec{E} \quad (6.5)$$

Les relations (6.4) et (6.5) impliquent que :

$$\epsilon_{r\_total} = 1 + \chi_e - i \frac{\sigma}{\epsilon_0\omega} = \epsilon_1 - i \epsilon_2 \quad \text{avec} \quad \epsilon_1 = 1 + \chi_e \quad (6.6)$$

$$\text{et} \quad \epsilon_2 = \sigma/(\epsilon_0\omega) \quad (6.7)$$

On définit l'**indice complexe** du milieu par :

$$\tilde{n} = \sqrt{\epsilon_{r\_total}} = n - i \kappa \quad (6.8)$$

où

$$n = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} + \epsilon_1\right) / 2} \quad \text{et} \quad \kappa = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} - \epsilon_1\right) / 2} \quad (6.9)$$

Ici  $n$  est l'équivalent de l'**indice de réfraction**, et  $\kappa$  est l'**indice d'extinction**. L'indice complexe  $\tilde{n}$  permet d'obtenir la relation de dispersion complexe :

$$k = \tilde{n} \omega / c \quad (6.10)$$

Un autre point important à noter est que l'amplitude de chacun des courants suivants :  $\vec{j}_{\text{lié}}$  et  $\vec{j}_{\text{vide}}$ , est directement proportionnelle à la fréquence du champ électromagnétique.

En effet,  $|\vec{j}_{\text{lié}}| = \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right| = \omega\epsilon_0\chi_e |\vec{E}|$  et  $|\vec{j}_{\text{vide}}| = \left| \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \omega\epsilon_0 |\vec{E}|$ . Cela signifie

qu'à basse fréquence du champ électromagnétique l'amplitude des courants  $\vec{j}_{\text{lié}}$  et  $\vec{j}_{\text{vide}}$  est relativement faible. Comme les milieux conducteurs contiennent des électrons libres en très grand nombre, qui génèrent un courant  $\vec{j}_{\text{libre}}$ , il est clair qu'à des fréquences suffisamment basses,  $\vec{j}_{\text{libre}}$  devient dominant par rapport à  $\vec{j}_{\text{lié}}$  et  $\vec{j}_{\text{vide}}$ . En tenant compte de (6.7), cela se traduit par :

$$\sigma_0 \gg \varepsilon_0 \omega (1 + \chi_e) = \varepsilon_0 \omega \varepsilon_1 \text{ soit } \varepsilon_2 \gg \varepsilon_1. \quad (6.11)$$

La relation (6.9) conduit à :

$$n \simeq \kappa \simeq \sqrt{\varepsilon_2/2} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}} \quad (6.12)$$

La relation (6.8) conduit alors à :

$$\tilde{n} = n - i\kappa = (1 - i)\sqrt{\varepsilon_2/2} = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0\omega}} \quad (6.13)$$

$$\text{soit } k = \tilde{n} \frac{\omega}{c} = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma_0\omega}{2\varepsilon_0c^2}} = (1 - i)\sqrt{\frac{\sigma_0\mu_0\omega}{2}} = \frac{1 - i}{\delta} \quad (6.14)$$

$$\text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma_0\omega}} \quad (6.15)$$

Avec l'expression de  $k$  donnée par (6.14), le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{-i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)} = \vec{E}_0 e^{-\alpha x} e^{-i\left(\frac{x}{\delta} - \omega t\right)} \quad (6.16)$$

$$\text{avec } \alpha \equiv \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\sigma_0\omega}{2}} \quad (6.17)$$

- Le terme  $\vec{E}_0 e^{-x/\delta}$  traduit l'atténuation de l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation.
- $\delta$  est la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde a été divisée par  $e$  : on la désigne comme étant l'**épaisseur de peau** du conducteur.

### Exemple

Pour le cuivre, on a  $\sigma_0 \simeq 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ . Pour une fréquence de 100 MHz, on a  $\omega = 2\pi \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\delta \sim 6,5 \mu\text{m}$ , et pour 10 MHz on a  $\delta \sim 20 \mu\text{m}$ . Ce calcul indique que dans le domaine des ondes radio, l'épaisseur de peau des bons conducteurs tels que le cuivre, est de l'ordre de quelques dizaines de micromètres. Ces ondes s'atténuent de manière abrupte dès qu'elles pénètrent dans le volume du conducteur.

À basse fréquence, les conducteurs sont donc principalement caractérisés par une conductivité  $\sigma_0$  très élevée, et par un **coefficient d'atténuation**  $\alpha$  qui est aussi très élevé et qui provoque une atténuation abrupte de l'amplitude du champ électromagnétique.

Les ondes électromagnétiques restent alors localisées en surface, dans une fine épaisseur pelliculaire (considérée comme la **peau** du conducteur).

D'autre part, à mesure que la fréquence de l'onde augmente, les courants  $\vec{j}_{\text{lié}}$  et  $\vec{j}_{\text{vide}}$  apportent une contribution de plus en plus importante. Pour des fréquences suffisamment élevées, la relation (6.11) se met sous la forme suivante :

$$\sigma_0 \ll \varepsilon_0 \omega \varepsilon_1 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1. \quad (6.18)$$

$$\text{soit } n = \sqrt{\left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} + \varepsilon_1\right) / 2} \rightarrow \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \kappa = \sqrt{\left(\sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} - \varepsilon_1\right) / 2} \rightarrow 0 \quad (6.19)$$

Le milieu conducteur devient transparent, car l'indice d'extinction  $\kappa$  tend vers zéro. Cependant, la relation (6.18) fait une approximation très grossière, qui consiste à considérer que la conductivité à haute fréquence est la même qu'à basse fréquence ( $\sigma_0$ ). Pour obtenir un meilleur aperçu du comportement des milieux conducteurs à haute fréquence, il convient d'adopter une approche permettant une évaluation plus réaliste de la constante diélectrique. Dans ce qui suit, nous présentons le modèle de Drude.

## 2 Conductivité et permittivité diélectrique des métaux

### 2.1 Modèle de Drude classique

Nous présentons ici une description purement classique du mouvement des électrons, connu comme étant le **modèle de Drude** (du nom du physicien Paul Drude). Ce modèle permet de rendre compte de plusieurs propriétés dans de nombreux matériaux, telles que la conductivité thermique, l'effet Hall, ou la conductivité électrique. Dans le modèle de Drude, on assimile le matériau à un ensemble de porteurs de charges, constitué d'un réseau d'ions positifs fixes, où chaque ion est entouré d'un cortège électronique de manière à former un ensemble électriquement neutre. Ce cortège électronique est formé de deux types d'électrons, à savoir, les **électrons de cœur** (très fortement liés au noyau atomique) et les **électrons de valence** (plus faiblement liés au noyau). Sous l'effet thermique ou d'un champ électrique, certains électrons de valence peuvent se séparer de leur atome d'origine et se déplacer sur des distances supérieures aux distances interatomiques. Pour désigner de tels électrons on utilise indifféremment le terme **électrons libres** ou **électrons de conduction**. Le modèle de Drude néglige les interactions entre électrons, et suppose que chaque électron libre se déplace pendant un temps moyen avant d'entrer en collision avec un ion fixe du réseau. Dans la littérature, ce temps est indifféremment appelé : **temps de collision**, **temps de vol moyen**, ou **temps de relaxation**. Sa valeur précise dépend du matériau considéré. Le modèle suppose qu'entre deux collisions, chaque électron libre a un mouvement déterminé par le principe fondamental de la dynamique.

En l'absence de champ électrique extérieur, l'électron libre a un mouvement aléatoire, et donc, une vitesse moyenne nulle. En présence d'un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , l'électron est soumis aux forces suivantes.

a) Force de Lorentz

L'électron est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = -e(\vec{E}_L + \vec{v} \wedge \vec{B}_L)$ . Comme dans le **modèle de l'électron élastiquement lié**, ici aussi, on néglige l'action du champ magnétique devant celle du champ électrique, compte tenu du fait que la vitesse de l'électron est relativement faible ( $|\vec{v}| \ll c$ ) et que  $|\vec{B}_L| = |\vec{E}_L|/c$ . On a donc  $\vec{F}_L \simeq -e\vec{E}_L$ .

b) Force de frottement

Les collisions incessantes de l'électron sur les ions du réseau constituent un frein au mouvement de l'électron, qui est modélisé par une force de frottement qui peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\vec{F}_a = -m\vec{v}/\tau, \tag{6.20}$$

où  $\tau$  représente le **temps de vol moyen (temps de relaxation)**. Sous les conditions qui viennent d'être énoncées, l'équation du mouvement de l'électron libre se met sous la forme suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E} \tag{6.21}$$

Ici, on a substitué au champ local  $\vec{E}_L$ , le champ macroscopique  $\vec{E}$  ; ce qui implique nécessairement une re-normalisation du temps de relaxation  $\tau$  de manière à corriger les effets de cette substitution.

## 2.2 Modèle de Drude de la conductivité électrique

a) Cas d'un champ statique  $\vec{E}$

Pour un électron ayant initialement une vitesse nulle, la solution de cette équation est :  $\vec{v} = \vec{v}_\infty [1 - \exp(-t/\tau)]$ , où  $\vec{v}_\infty = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$  est une vitesse limite, qui est atteinte après un temps suffisamment long ( $t \gg \tau$ ). En régime permanent, la vitesse moyenne de l'électron est donc :

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_\infty \rangle = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}. \tag{6.22}$$

Si on désigne par  $n$  le nombre d'électrons libres par unité de volume du matériau ( $-ne$  étant alors la densité volumique de charges libres), la valeur moyenne de la densité volumique de courant créée par le mouvement d'ensemble des électrons libres sera :

$$\vec{J}_{\text{libre}} = -ne \times \langle \vec{v} \rangle = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma_0\vec{E} \tag{6.23}$$

où  $\sigma_0$  est la conductivité du matériau, donnée par :

$$\sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}. \quad (6.24)$$

Notons que  $\vec{j}_{\text{libre}}$  est indifféremment appelé « **densité de courants libres** » ou « **densité de courants de conduction** ».

b) Cas d'un champ électrique sinusoïdal  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$

On obtient ici la solution permanente qui suit :

$$\vec{v} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\tau^{-1} + i\omega} \vec{E}. \quad (6.25)$$

La densité volumique de courants libres s'écrit alors :

$$\vec{j}_{\text{libre}} = \frac{n e^2}{m} \frac{1}{\tau^{-1} + i\omega} \vec{E} = \gamma_{\text{libre}} \vec{E} \quad (6.26)$$

La conductivité est alors définie par :

$$\gamma_{\text{libre}} = \frac{n e^2}{m} \frac{1}{\tau^{-1} + i\omega} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}, \quad (6.27)$$

où  $\sigma_0$  est la conductivité en champ statique définie dans (6.24).

L'expression (6.26) montre qu'en régime variable la conductivité devient complexe ; ce qui indique que la densité de courant et le champ électrique ne sont plus en phase. On peut aussi souligner plusieurs points importants :

1. Si le champ électrique varie suffisamment lentement pour que sa période  $T = 2\pi/\omega$  soit très grande par rapport au temps de relaxation,  $T \gg \tau$ , alors le terme  $\omega\tau$  deviendra négligeable devant 1, et on aura  $\gamma_{\text{libre}} \simeq \sigma_0$ .
2. Si la période du champ électrique est de l'ordre du temps de relaxation,  $T \sim \tau$ , la densité de courant ne pourra plus suivre instantanément les variations du champ électrique, et un déphasage  $\phi$  apparaîtra entre  $\vec{E}$  et  $\vec{j}_{\text{libre}}$ . Pour obtenir  $\phi$ , on décompose  $\gamma_{\text{libre}}$  sous la forme  $\gamma_{\text{libre}} = \gamma_1 + i\gamma_2$ , où :

$$\gamma_1(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \gamma_2(\omega) = \frac{-\omega\tau\sigma_0}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (6.28)$$

En écrivant  $\cos \phi = \gamma_1/\gamma_0$ ,  $\sin \phi = \gamma_2/\gamma_0$ , avec  $\gamma_0 = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ , on peut écrire que  $\gamma_{\text{libre}} = \gamma_0 \exp(i\phi)$ , et :

$$\vec{j}_{\text{libre}} = \gamma_{\text{libre}} \vec{E} = \vec{j}_{\text{libre}} = \gamma_0 \vec{E}_0 \exp[i(\omega t + \phi)] \quad (6.29)$$

3. D'après le modèle de Drude,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tendent vers zéro, lorsque  $\omega\tau \gg 1$ . Autrement dit, si la fréquence d'oscillation du champ électromagnétique est suffisamment élevée, c'est-à-dire  $T \ll \tau$ , l'électron libre ne pourra plus suivre les variations du champ électrique, et restera inerte. La conductivité s'annulera.

**Remarque** Le domaine d'application du modèle de Drude qui vient d'être présenté, ne se limite pas aux métaux. Ce modèle peut s'appliquer à d'autres milieux contenant des charges susceptibles de se déplacer sans être contraintes à rester confinées dans une région particulière du matériau. Ce type de milieu inclut :

- **les conducteurs métalliques** : les charges libres sont des électrons. Citons par exemple le cuivre ;
- **les solutions ioniques** : les charges libres sont des ions mobiles de charges opposées, appelés cations (+) et anions (-). Citons par exemple les batteries d'accumulateurs qui contiennent des solutions ionisées ;
- **les gaz ionisés** : les charges libres sont des électrons. Citons par exemple les tubes au « néon » utilisés pour l'éclairage, les gaz de la haute atmosphère, etc.

La puissance dissipée par unité de volume du matériau s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \langle \vec{j}_{\text{libre}} \times \vec{E} \rangle = \langle \gamma_0 \vec{E}_0 \cos(\omega t + \phi) \times \vec{E}_0 \cos(\omega t) \rangle \\ &= \gamma_0 \cos(\phi) E_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{\gamma_1 E_0^2}{2} \end{aligned} \quad (6.30)$$

On remarque que c'est la composante réelle de la conductivité,  $\gamma_1$ , qui provoque la dissipation d'énergie dans le milieu conducteur.

## 2.3 Modèle de Drude de la permittivité diélectrique

### a) Polarisation

À partir de l'expression (6.25) de la vitesse de l'électron, on déduit le déplacement induit par le champ  $\vec{E}$  :  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = i\omega\vec{r}$  soit

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})} \vec{E} \quad (6.31)$$

Le moment dipolaire de l'électron libre s'écrit :  $\vec{p} = -e\vec{r}$ . On en déduit la polarisation :

$$\vec{P}_{\text{libre}} = n\vec{p} = -ne\vec{r} = -\frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})} \quad (6.32)$$

### b) Permittivité diélectrique

On a :  $\vec{D}_{\text{libre}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} = \epsilon_0 \vec{E} - \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})} = \epsilon_0 \epsilon_r^D \vec{E}$ , avec

$$\epsilon_r^D = 1 - \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})}$$

Le modèle de Drude de la permittivité diélectrique relative se met donc sous la forme suivante :

$$\epsilon_r^D = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{(\omega^2 \tau^2 - i\omega\tau)} \quad (6.33)$$

Il apparaît dans cette expression, une fréquence angulaire appelée **fréquence plasma** du métal massif ou **fréquence plasmon de volume**, dont l'expression est :

$$\omega_p^2 = ne^2 / (m\epsilon_0). \quad (6.34)$$

En posant  $\epsilon_r^D = \epsilon_1^D - i\epsilon_2^D$ , les parties réelle et imaginaire de cette permittivité diélectrique sont données respectivement par :

$$\epsilon_1^D = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (6.35a)$$

et

$$\epsilon_2^D = \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega\tau(1 + \omega^2 \tau^2)} \quad (6.35b)$$

Dans une bande spectrale allant de 180 nm (6,6 eV) à 1 900 nm (0,64 eV), qui correspond pratiquement à la bande optique, où on a typiquement  $\tau \sim 10^{-14}$  s pour la plupart des métaux, on a  $10 < \omega\tau < 100$ . Autrement, dans la bande optique,  $\omega^2 \tau^2 \gg 1$ . On peut alors approximer les expressions (6.35) par :

$$\epsilon_1^D \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_2^D \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} = \frac{1}{\omega\tau} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (6.36)$$

Les relations (b) montrent que les métaux affichent un comportement qui diffère sensiblement selon la valeur de  $\omega$  par rapport à  $\omega_p$  :

- Pour  $\omega \rightarrow 0$ , le terme  $\epsilon_2^D(\omega)$  est dominant et tend vers l'infini. L'indice d'extinction du métal,  $\kappa(\omega) = \sqrt{\left(\sqrt{(\epsilon_1^D)^2 + (\epsilon_2^D)^2} - \epsilon_1^D\right)}/2$ , tend alors vers l'infini : ce qui explique l'extinction rapide des ondes de basse fréquence dans les métaux.

- Pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_1^D \rightarrow 1$  et  $\epsilon_2^D \rightarrow 0$ .
- Pour  $\omega = \omega_p$ ,  $\epsilon_1^D(\omega_p) = 0$ , et  $\epsilon_2^D = \frac{1}{\omega_p \tau}$ .

Dans le domaine optique,  $10 < \omega_p \tau < 100$ , le terme  $\epsilon_2^D$ , qui traduit le caractère dissipatif du milieu, est donc très petit lorsque  $\omega = \omega_p$ . Le coefficient d'extinction

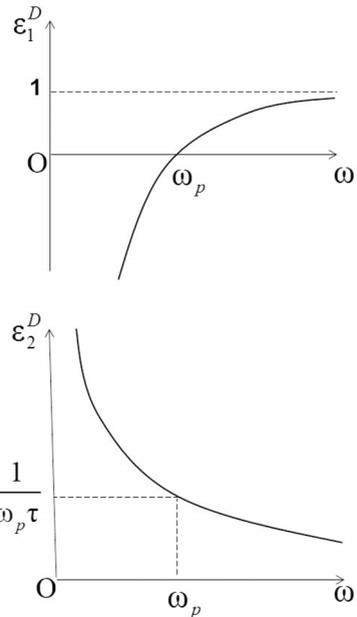


Figure 6.1

vaut alors  $\kappa(\omega_p) = \sqrt{\varepsilon_2^D/2} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p\tau}}$ , qui est aussi relativement petit. Le métal commence alors à devenir transparent.

- Pour des fréquences de plus en plus grandes (au-dessus de  $\omega_p$ ),  $\varepsilon_2^D$  tend de plus en plus vers zéro, et  $\kappa(\omega) \rightarrow 0$ . Le métal est de plus en plus transparent.

**La fréquence plasma apparaît comme la fréquence à partir de laquelle le métal commence à devenir transparent aux ondes électromagnétiques.**

Le résultat du modèle de Drude est en bon accord qualitatif avec l'expérience, car il montre que les métaux sont réfléchissants dans un vaste domaine allant des radiofréquences jusqu'au visible, et qu'ils deviennent transparents dans l'ultraviolet. Dans le cas des métaux alcalins il y a un bon accord quantitatif entre les valeurs théoriques et expérimentales des fréquences plasma (tableau 6.1).

**Tableau 6.1**– Fréquences (au facteur  $\hbar$  près) au-dessus desquelles le métal devient transparent. Les longueurs d'onde correspondantes sont indiquées en nanomètres.

| Milieu                         | Li   | Na   | K    | Rb   | Cs   |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|
| $\hbar\omega_p$ théorique [eV] | 8,26 | 6,20 | 4,43 | 4    | 3,54 |
| $\lambda_p$ [nm]               | 150  | 200  | 280  | 310  | 350  |
| $\hbar\omega_p$ observé [eV]   | 6,20 | 5,90 | 4    | 3,44 | 2,82 |
| $\lambda_p$ [nm]               | 200  | 210  | 310  | 360  | 440  |

### 3 Permittivité diélectrique généralisée

#### 3.1 Modèle de Drude modifié de la permittivité diélectrique

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, le modèle de Drude classique est approprié pour décrire la permittivité diélectrique d'un métal alcalin aux fréquences optiques. Cependant la réponse optique des **métaux nobles** massifs (Ag, Au, Cu) ne peut être entièrement décrite par le modèle de Drude classique, en raison de certains phénomènes microscopiques tels que les **transitions inter-bandes**. Pour en donner un aperçu il est nécessaire de faire un bref rappel sur la structure des bandes d'énergie dans les solides.

Dans un atome isolé, l'énergie d'un électron ne peut prendre que des valeurs discrètes bien définies. À l'opposé, un électron libre peut prendre n'importe quelle valeur d'énergie. Dans un solide, la situation est intermédiaire, car l'énergie d'un électron peut prendre n'importe quelle valeur mais à l'intérieur de certains intervalles bien définis. En effet, dans un solide cristallin tous les atomes subissent de la part de leurs voisins des actions qui modifient les niveaux d'énergies des atomes pris isolément. Ainsi, chaque niveau de l'atome isolé est remplacé par autant de niveaux d'énergie qu'il y a d'atomes en interaction. Ces niveaux, très proches les uns des autres, se groupent en **bandes d'énergie**. Le diagramme d'énergie d'un solide se compose d'une succession de **bandes**

**d'énergie permises** séparées entre elles par des **bandes interdites** (figure 6.2). Les bandes permises profondes, appelées **bandes de valence profondes**, sont complètement occupées par des électrons des couches internes des atomes. Ces électrons sont fortement liés au noyau atomique, et leur comportement est peu influencé par la présence des autres atomes du cristal. On peut donc considérer ces électrons comme inertes du point de vue électrique et thermique. En revanche, les bandes permises supérieures correspondent aux électrons des couches externes des atomes. La bande permise la plus haute est appelée **bande de conduction**. La bande permise située immédiatement en dessous de la bande de conduction est la seule bande de valence associée aux électrons des couches externes des atomes. On fait référence à cette bande comme étant simplement la **bande de valence**. La bande interdite séparant la bande de conduction et la bande de valence est appelée « gap ». L'écart d'énergie correspondant à ce gap est appelé **énergie de gap**.

On peut classer les solides en trois grandes catégories qui se distinguent selon le remplissage des bandes d'énergie et la valeur de l'énergie du gap.

a) Les isolants

Ce sont des milieux caractérisés par une bande de conduction vide et un gap relativement grand (~5 eV-10 eV). Les milieux de ce type ne contiennent pas d'électrons libres, et sont de ce fait qualifié d'« **isolants** ». Ce sont alors les électrons liés qui contribuent à la constante diélectrique (appelée aussi de **fonction diélectrique**).

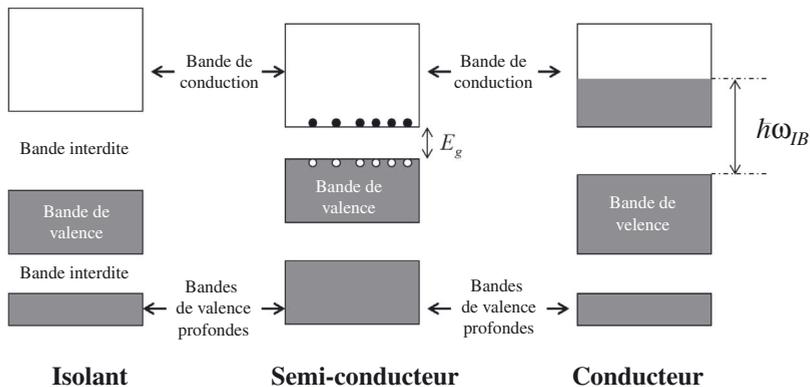


Figure 6.2 – Schéma des bandes d'énergie dans les solides.

b) Les semi-conducteurs

Dans cette deuxième catégorie de solide, la bande de conduction est totalement vide à très basse température, mais l'énergie de gap est plus faible que dans un isolant, c'est-à-dire, inférieure ou de l'ordre du  $kT$  (énergie d'agitation thermique), où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue. Ce type de matériaux est donc isolant à très

basse température. Mais, à la température ambiante un certain nombre d'électrons peuvent passer (par effet thermique) de la bande de valence à la bande de conduction. Le milieu possède alors des électrons libres, mais en nombre restreint : un tel milieu est dit **semi-conducteur**. Dans ce type de matériaux ce sont essentiellement les électrons liés qui contribuent à la fonction diélectrique. Cependant, lorsque la température augmente, l'énergie thermique s'accroît ; ce qui permet à un plus grand nombre d'électrons de passer de la bande de valence à la bande de conduction, et d'apporter une contribution non négligeable à la fonction diélectrique. Ce passage de la bande de valence à la bande de conduction est qualifié de « **transition inter-bande** ». Cette transition peut aussi être provoquée par des photons d'énergie supérieure ou égale à l'énergie de gap du matériau ( $E_g$ ).

Le tableau 6.2 indique les valeurs de  $E_g$  et la longueur d'onde correspondante  $\lambda_g$ , pour quelques matériaux semi-conducteurs couramment utilisés en optoélectronique. On peut clairement remarquer que pour ces matériaux,  $E_g \sim 1 \text{ eV} \Leftrightarrow \lambda_g \sim 1,24 \text{ }\mu\text{m}$  [ $E_g = hc/\lambda_g \rightarrow \lambda_g (\mu\text{m}) \times E_g (\text{eV}) = 1,24$ ], Autrement dit, c'est à partir du domaine infrarouge que les ondes peuvent provoquer des **transitions interbandes** dans les matériaux semi-conducteurs.

**Tableau 6.2**

| Matériau        |                                | $E_g$ à 300 K (en eV) | $\lambda_g$ (en $\mu\text{m}$ ) à 300 K |
|-----------------|--------------------------------|-----------------------|---|
| Semi-conducteur | Silicium ( $S_i$ )             | 1,12                  | 1,13                                    |
|                 | Germanium ( $G_e$ )            | 0,66                  | 1,85                                    |
|                 | GaAs                           | 1,43                  | 0,87                                    |
|                 | InGaAs                         | 0,75                  | 1,65                                    |
| Isolant         | C Diamant                      | 5,47                  | 0,22                                    |
|                 | Oxyde de silicium ( $S_iO_2$ ) | 9                     | 0,14                                    |

### c) Les conducteurs

Cette catégorie de solide est caractérisée par une bande de conduction partiellement remplie (figure 6.2). Autrement dit, dans cette bande les états d'énergie supérieure sont vides et immédiatement accessibles. L'accès à des niveaux d'énergie vides à l'intérieur de la même bande permise est qualifié de **transition intra-bande**. Ainsi, dans les conducteurs, les électrons des couches externes ne sont que très faiblement liés à leur atome d'origine, et peuvent de ce fait être facilement arrachés de l'atome. Par conséquent, à la température ambiante, l'énergie thermique suffit pour créer au sein du matériau des électrons libres en très grand nombre (même en l'absence de tout champ électromagnétique). Ce sont donc essentiellement les électrons libres du matériau qui contribuent à la fonction diélectrique via des transitions intra-bandes (comme le prévoit la théorie de Drude). C'est ce comportement qui est observé dans la plupart des conducteurs, à partir des basses fréquences (ondes radio) jusqu'au domaine du visible. À partir du visible et

aux fréquences plus élevées, l'énergie du photon devient suffisante pour provoquer au sein des métaux nobles des transitions inter-bandes (figure 6.3).

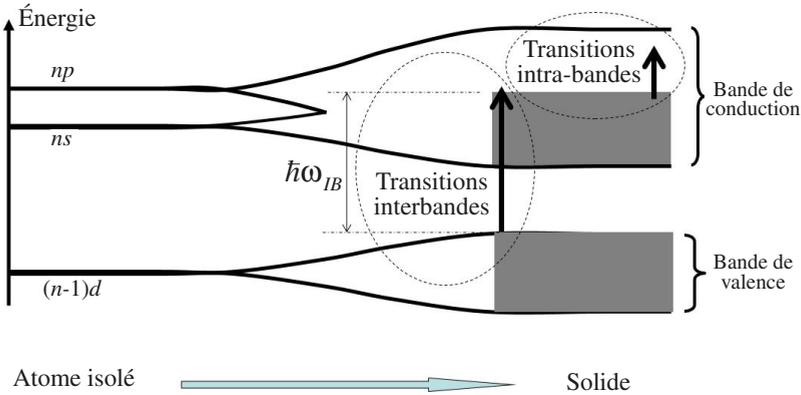


Figure 6.3 – Transitions intra-bande et inter-bande dans un conducteur.

Notons que les métaux nobles se distinguent des métaux alcalins par la présence d'une bande de valence peu éloignée de la bande de conduction, et sont de ce fait plus exposés aux transitions inter-bandes.

On peut donc exprimer la fonction diélectrique totale du métal massif  $\epsilon_r(\omega)$  en séparant la contribution des électrons libres de celle des électrons liés, comme suit :

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon^D(\omega) + \epsilon^{IB}(\omega) + \epsilon^\infty \quad (6.37)$$

- Le terme  $\epsilon^D(\omega)$  correspond à la composante intra-bande de la fonction diélectrique. Il est lié aux transitions optiques des **électrons libres** de la bande de conduction vers un niveau d'énergie plus élevé de cette même bande. C'est uniquement ce terme qui est pris en compte dans le modèle de Drude classique.
- Il ressort de l'expérience que la contribution des électrons liés à la fonction diélectrique est généralement constituée de deux termes, dont l'un dépend de la fréquence,  $\epsilon^{IB}(\omega)$ , et l'autre est un terme statique  $\epsilon^\infty$ . Le terme  $\epsilon^{IB}(\omega)$  correspond à la contribution des transitions inter-bandes. Il provient des transitions entre la bande de valence (essentiellement la bande  $d$  dans le cas des métaux nobles) et la bande de conduction  $s-p$ . En raison du principe d'exclusion de Pauli, un électron d'une bande de valence ne peut être promu que vers un niveau inoccupé de la bande de conduction. Il existe par conséquent un seuil d'énergie  $E^{IB} = \hbar\omega_{IB}$  pour les transitions inter-bandes. Notons que ce seuil est situé dans le **visible** pour l'or et le **proche UV** pour l'argent. D'autre part, des électrons liés apportent une contribution supplémentaire représentée par le terme statique  $\epsilon^\infty$ .

- En tenant compte de l'expression de  $\varepsilon^D$  dans la relation (6.37), la **permittivité diélectrique généralisée du métal** peut se mettre sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega^2 \tau^2 - i\omega\tau} + i \left( \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^3 \tau^3} \right) + \varepsilon^{IB}(\omega) + \varepsilon^\infty \quad (6.38)$$

L'expression (6.38) constitue le **modèle de Drude modifié** de la permittivité diélectrique des métaux. On peut la remettre sous la forme suivante :

$$\varepsilon_r(\omega) = \left( \varepsilon_{DC} - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) + i \left( \frac{\omega_p^2 \tau^2}{\omega\tau + \omega^3 \tau^3} \right) + \varepsilon^{IB}(\omega) \quad (6.39)$$

où

$$\varepsilon_{DC} = 1 + \varepsilon^\infty \quad (6.40)$$

représente la constante diélectrique en régime statique. Rappelons que dans le domaine optique, les fréquences sont telles que  $\omega\tau \gg 1$ , ce qui permet d'exprimer les parties réelle et imaginaire de la permittivité (6.39) de la manière suivante :

$$\varepsilon_1(\omega) \simeq \varepsilon_{DC} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \varepsilon_1^{IB}(\omega) \quad (6.41a)$$

$$\varepsilon_2(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \tau} + \varepsilon_2^{IB}(\omega) \quad (6.41b)$$

Une première correction de la fréquence plasma consiste à annuler le terme  $\varepsilon_1(\omega)$  en négligeant  $\varepsilon_1^{IB}(\omega)$  :  $\varepsilon_1(\omega) = 0$  soit  $\omega = \Omega_p = \omega_p / \sqrt{\varepsilon_{DC}}$ . La relation (6.41a) illustre ainsi l'un des effets des électrons liés, qui est d'atténuer la fréquence plasma dans le métal d'un facteur  $\sim \sqrt{\varepsilon_{DC}}$  par rapport à celle associée au modèle de Drude classique ( $\omega_p$ ). D'autre part, il est à noter que les grandeurs  $\varepsilon^{IB}$ ,  $\varepsilon_{DC}$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_{IB}$ , et  $\tau$ , dépendent du métal considéré. Le tableau 6.3 donne les valeurs de ces paramètres pour quelques métaux nobles.

**Tableau 6.3** – Paramètres du modèle de Drude modifié pour quelques métaux nobles.

| Métal       | $\hbar\omega_p$ (eV) | $\tau$ (fs) | $\varepsilon_{DC}$ | $\hbar\omega_{IB}$ (eV) |
|-------------|----------------------|-------------|--------------------|-------------------------|
| Ag (argent) | 9,10                 | 31          | 3,7                | 3,9                     |
| Au (or)     | 9,03                 | 9,3         | 9,8                | 2,3                     |
| Cu (cuivre) | 8,66                 | 6,9         | 1,0                | 2,1                     |

## 4 Ondes de rayonnement et plasmons de volume

### 4.1 Équations de Maxwell

Dans le modèle de Drude, la permittivité est obtenue à partir d'un champ de polarisation généré par les électrons libres du milieu que nous avons noté  $\vec{P}_{\text{libre}}$ . L'induction électrique correspondante,  $\vec{D}_{\text{libre}} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}}$ , n'est donc pas utilisable dans les expressions des équations de Maxwell utilisées dans le chapitre précédent pour les matériaux diélectriques, à savoir :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.42)$$

$$\text{où } \vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{j}_{\text{lié}} = \partial \vec{P} / \partial t, \quad -\operatorname{div} \vec{P} \equiv \rho_{\text{lié}} \quad (6.43)$$

En effet, dans les équations (6.42) et (6.43), la polarisation  $\vec{P}$  est celle générée par les charges liées du milieu. Pour pouvoir utiliser les vecteurs  $\vec{P}_{\text{libre}}$  et  $\vec{D}_{\text{libre}}$ , il est nécessaire de réécrire les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère de manière à y faire apparaître explicitement ces deux vecteurs. À cette fin, on peut remarquer dans l'équation (6.42) que les densités volumiques de charges et courants libres apparaissent explicitement comme sources de champs, alors que les densités de charges et courants liés sont **dissimulées** dans le vecteur  $\vec{D}$ . Aussi, pour faire apparaître explicitement les vecteurs  $\vec{P}_{\text{libre}}$  et  $\vec{D}_{\text{libre}}$ , il suffit de faire l'opération inverse, c'est-à-dire, réécrire les équations  $\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$  et  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  de manière à faire apparaître explicitement les densités de charges et courants liés ; ce qui **dissimulera** l'action des charges et courants libres dans les vecteurs  $\vec{D}$  et  $\vec{P}$ . L'équation de Maxwell-Gauss peut donc s'écrire :

$$\operatorname{div} \left( \vec{E} \right) = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{\text{lié}}}{\varepsilon_0} - \operatorname{div} \vec{P}_{\text{libre}} / \varepsilon_0 \quad (6.44)$$

où nous écrivons :

$$\operatorname{div} \vec{P}_{\text{libre}} \equiv -\rho_{\text{libre}} \quad (6.45)$$

La polarisation  $\vec{P}_{\text{libre}}$  n'est donc créée que par les charges libres. Les relations (6.44) et (6.45) conduisent à :

$$\operatorname{div} \left( \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} \right) = \rho_{\text{lié}}$$

En introduisant le vecteur **induction électrique**  $\vec{D}_{\text{libre}}$  défini par :

$$\vec{D}_{\text{libre}} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} \quad (6.46)$$

on peut réécrire l'équation de Maxwell-Gauss (6.44) de manière à faire apparaître explicitement la densité volumique de charges liées :

$$\operatorname{div} \vec{D}_{\text{libre}} \equiv \rho_{\text{lié}} \quad (6.47)$$

Le vecteur  $\vec{D}_{\text{libre}}$  ne fait intervenir que la polarisation  $\vec{P}_{\text{libre}}$  générée par les charges libres, et de ce fait, s'exprime en fonction de la constante diélectrique de Drude  $\varepsilon_r^D$  définie dans la relation (6.35) :

$$\vec{D}_{\text{libre}} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r^D \vec{E} \quad (6.48)$$

D'autre part, dans le chapitre précédent nous avons vu que dans le cas le plus général, la densité volumique totale des courants matériels s'écrit :  $\vec{j} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_m + \vec{j}_{\text{lié}}$ , où  $\vec{j}_m$  est la densité de courant d'aimantation, et  $\vec{j}_{\text{lié}}$  la densité de courants de équivalent à la polarisation (créée par les charges liées du matériau), définie par  $\vec{j}_{\text{lié}} = \partial \vec{P} / \partial t$ . De manière analogue à l'expression de  $\vec{j}_{\text{lié}}$  en fonction de  $\vec{P}$ , on peut exprimer  $\vec{j}_{\text{libre}}$  en fonction de  $\vec{P}_{\text{libre}}$  par :

$$\vec{j}_{\text{libre}} = \partial \vec{P}_{\text{libre}} / \partial t. \quad (6.49)$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_m \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{P}_{\text{libre}}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{lié}} + \text{rot} \vec{M} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \left( \frac{\partial \vec{P}_{\text{libre}}}{\partial t} + \vec{j}_{\text{lié}} \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{P}_{\text{libre}} + \varepsilon_0 \vec{E} \right) = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t}$$

$$\text{et donc } \text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t}$$

Comme  $\vec{H} = \vec{B} / \mu_0 - \vec{M}$ , on peut réécrire l'équation de Maxwell-Ampère sous la forme :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t} \quad (6.50)$$

D'après ce qui précède, les équations de Maxwell dans un milieu matériel peuvent se décliner sous deux formes selon la nature des charges qui créent le vecteur polarisation. Le tableau 6.4 récapitule ces deux déclinaisons.

Notons que la première forme de ces équations est plus adaptée à la description des matériaux diélectriques, tandis que dans les milieux conducteurs c'est la seconde forme qui est la plus adéquate (tant que les effets des électrons liés sont négligeables devant ceux des électrons libres).

D'autre part, en négligeant le courant d'aimantation dans les deux formes d'écriture, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{vide}},$$

où  $\vec{j}_{\text{vide}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  représente la contribution du **courant de déplacement**. On peut regrouper ces trois types de densité de courant dans un seul terme,  $\vec{j}_{\text{total}}$ , qui est relié à la

**Tableau 6.4** – Équations de Maxwell.

| Forme I   | Forme II  |
|---|---|
| $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}}$<br>$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ | $\text{div } \vec{D}_{\text{libre}} = \rho_{\text{lié}}$<br>$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t}$ |
| $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$<br>$\text{div } \vec{B} = 0$   |   |
| avec  |   |
| $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  | $\vec{D}_{\text{libre}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} = \epsilon_0 \epsilon_0^D \vec{E}$  |
| $\vec{j}_{\text{libre}} = \frac{\partial \vec{P}_{\text{libre}}}{\partial t}$   | $\vec{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  |
| $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$   |   |

(6.51)

constante diélectrique généralisée  $\epsilon_r(\omega)$  par :

$$\vec{j}_{\text{total}} = \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{vide}} = \frac{\partial \vec{D}_{\text{total}}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.52)$$

où  $\epsilon_r$  est définie dans l'expression (6.39).

Ainsi, dans un métal, l'équation de Maxwell-Ampère peut se mettre simplement sous la forme suivante :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{\text{total}} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.53)$$

## 4.2 Équations de propagation

On obtient l'équation de propagation du champ électrique en appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{E}$  :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}.$$

En appliquant les relations 6.51, nous obtenons :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = \text{grad}[\text{div } \vec{E}] - \Delta \vec{E}$$

En tenant compte de (6.53), nous obtenons l'équation de propagation qui suit :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad}(\text{div } \vec{E})} \quad (6.54)$$

Il est à noter ici que le champ  $\vec{H}$  a la même équation de propagation que celle de  $\vec{E}$ , mais avec  $\text{div } \vec{H} = 0$ , alors que  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r^D} \text{div } \vec{D} = \frac{\rho_{\text{lié}}}{\epsilon_0 \epsilon_r^D}$  n'est *a priori* pas nul.

Considérons un champ électrique monochromatique  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right]$ . On a :

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \vec{\nabla}(-i\vec{k} \cdot \vec{E}) = -i\vec{\nabla} [k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z] \quad (6.55) \\ &= -i \left[ k_x \vec{\nabla} E_x + k_y \vec{\nabla} E_y + k_z \vec{\nabla} E_z \right] \\ &= -i \left[ k_x (-i\vec{k} E_x) + k_y (-i\vec{k} E_y) + k_z (-i\vec{k} E_z) \right] \\ &= -\vec{k} [k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z] = -\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}). \end{aligned}$$

L'équation de propagation se met sous la forme suivante :

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \vec{E} = 0 \quad (6.56)$$

En posant  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ , où  $\vec{E}_{\parallel}$  et  $\vec{E}_{\perp}$  désignent respectivement les composantes longitudinale et transverse du champ électrique, la relation (6.56) devient :

$$\vec{k} \left[ \vec{k} \cdot (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) \right] - k^2 (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) = 0 \quad (6.57)$$

En séparant les termes longitudinaux des termes transverses, la relation (6.57) donne :

$$\left[ -k^2 + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \right] \vec{E}_{\perp} = 0 \quad (6.58a)$$

$$\mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \vec{E}_{\parallel} = 0 \quad (6.58b)$$

Examinons les conditions de propagation des deux composantes  $\vec{E}_{\parallel}$  et  $\vec{E}_{\perp}$ .

### a) Champ transverse ( $\vec{E}_{\perp}$ est perpendiculaire à $\vec{k}$ )

La relation (6.58a) montre que pour que  $\vec{E}_{\perp} \neq \vec{0}$ , il faut que

$$k^2 = \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega). \quad (6.59)$$

Cette relation de dispersion démontre qu'une onde transverse peut se propager dans le métal.

### b) Champ longitudinale ( $\vec{E}_{\parallel}$ est colinéaire à $\vec{k}$ )

La relation (6.58b) montre que pour que  $\vec{E}_{\parallel} \neq \vec{0}$ , il faut que

$$\varepsilon_r(\omega) = 0. \quad (6.60)$$

Cette relation montre que le champ longitudinal ne peut exister que s'il existe une fréquence  $\omega_p$  telle que  $\varepsilon_r(\omega_p) = 0$ . Autrement dit, la condition d'existence d'un champ longitudinal est :

$$\omega = \omega_p. \quad (6.61)$$

Cette condition ne correspond pas à une relation de dispersion (c'est-à-dire, une relation entre la fréquence et le nombre d'onde). Physiquement cette relation correspond plutôt à des **oscillations longitudinales de plasma**. En effet, les métaux se distinguent par la présence en leur sein d'un grand nombre d'électrons libres capables de se déplacer librement dans le matériau. Ces électrons constituent ce que l'on appelle un **plasma**, c'est-à-dire un **gaz d'électrons libres**. Nous verrons que le champ longitudinal correspond à des **oscillations collectives du plasma** d'électrons, auxquelles on fait référence comme étant des « **plasmons de volume** ».

c) Application au cas d'un gaz d'électrons libres

Considérons un métal assimilable à un gaz d'électrons libres, c'est-à-dire un gaz dont les caractéristiques sont les suivantes :

- temps de relaxation infini ( $\tau \rightarrow \infty$ );
- contribution nulle des électrons liés à la constante diélectrique ( $\epsilon^\infty = 0$ );
- pas de transitions interbandes ( $\epsilon^{IB} = 0$ ).

Dans ce cas, d'après la relation (6.38), la constante diélectrique s'écrit  $\epsilon_r(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , et la relation de dispersion du champ transverse se met sous la forme suivante :

$$k^2 = \mu_0 \epsilon_0 (\omega^2 - \omega_p^2) \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \tag{6.62}$$

La figure 6.4 illustre cette relation de dispersion. Il en résulte qu'une onde transverse peut se propager dans le volume d'un milieu conducteur, à condition que sa fréquence angulaire soit supérieure à  $\omega_p$ . Cette relation confirme que les milieux conducteurs sont réfléchissants à basse fréquence ( $\omega < \omega_p$ ).

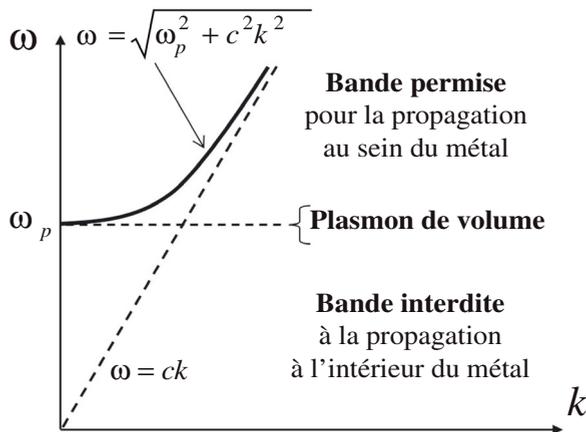


Figure 6.4 – Relation de dispersion des ondes de rayonnement au sein du métal.

### 4.3 Plasmons de volume

Pour illustrer ce phénomène, considérons une coupe au sein d'un métal dans lequel la densité d'électrons libres est identique à celle des ions, de sorte qu'à l'équilibre le matériau est électriquement neutre. Supposons que le matériau soit soumis brièvement à un champ électrique jusqu'à un instant  $t = 0$  où le champ appliqué est supprimé. Ce champ excitateur a comme effet de déplacer initialement (en bloc) le plasma d'électrons d'une certaine distance  $x_0$  par rapport au réseau des ions bien plus lourds et plus inertes que les électrons (figure 6.5).

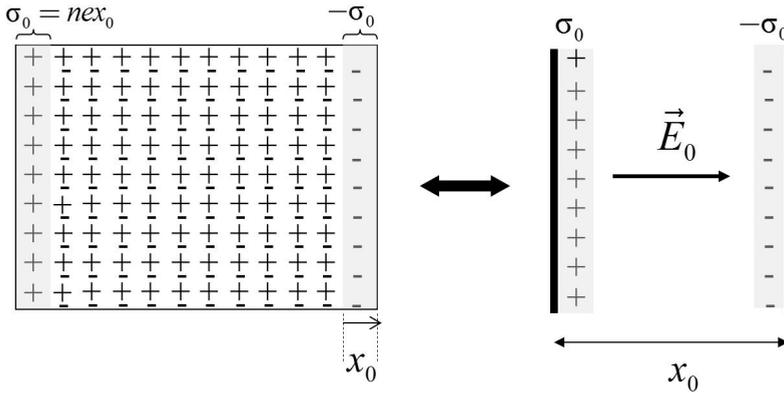


Figure 6.5 – Plasmons de volume.

Au cœur du matériau, chaque rangée d'électrons se déplace de  $x_0$  et occupe une place laissée vacante par la rangée qui la précède, de telle sorte que le cœur du matériau conserve une neutralité électrique. En revanche, la première rangée d'électrons s'accumule sur un des bords du matériau, ce qui génère une densité superficielle de charges  $-\sigma_0 = -nex_0$ , tandis que le bord opposé se dépeuple et acquiert une densité de charge  $\sigma_0$ . L'ensemble du système est donc assimilable à un condensateur dont les deux armatures portent respectivement les densités de charge  $+\sigma_0$  et  $-\sigma_0$ , et sont distantes de  $x_0$ . L'armature négative représente la totalité du plasma d'électrons libres, tandis que l'armature positive représente le reste du matériau constitué par le réseau d'ions supposés fixes. Dans ce modèle, les deux armatures sont séparées par le vide, et créent donc un champ d'amplitude  $E_0 = \sigma/\epsilon_0$  (à l'instant  $t = 0$  où le champ excitateur disparaît), accompagné d'une force de Coulomb qui va s'exercer dans un sens qui tend à ramener l'armature négative vers l'armature positive. Mais, à la différence d'un condensateur isolé où les deux armatures ne sont pas en contact et où les charges ne peuvent pas se déplacer d'une armature à l'autre, dans le métal, les **électrons libres**, qui sont justement libres de leur mouvement, vont se déplacer sous l'effet du champ. Soit  $x(t)$  la position du plasma à l'instant  $t$ , l'amplitude du champ électrique est alors  $E(t) = \sigma(t)/\epsilon_0 = nx(t)e/\epsilon_0$ , et la force de Coulomb correspondante est

$$F = -eE(t) = -nx(t)e^2/\epsilon_0.$$

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -n x(t) \frac{e^2}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{ne^2}{m\epsilon_0} x = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0. \quad (6.63)$$

Cette équation fait apparaître la pulsation  $\omega_p$  des oscillations du plasma d'électrons libres, qui s'écrit :

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (6.64)$$

La pulsation  $\omega_p$  est caractéristique du matériau. Elle correspond à une longueur d'onde  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$  qui se situe dans l'ultraviolet pour la plupart des métaux nobles. Le tableau 6.5 donne quelques exemples de  $\omega_p$ . Ainsi, dans un métal, les électrons libres peuvent osciller de manière collective, avec une fréquence propre  $\omega_p$ , et une énergie  $\hbar\omega_p$  qui est quantifiée d'une manière analogue à la quantification de l'énergie du champ électromagnétique. Cette oscillation collective est appelée « plasmon » par analogie avec le quantum d'énergie du photon. En pratique, pour exciter ces plasmons, une méthode consiste à bombarder un film mince avec des électrons fortement accélérés. Les électrons réfléchis ou transmis, sont ralentis en perdant une énergie égale à un multiple entier de l'énergie d'un plasmon  $\hbar\omega_p$ .

**Tableau 6.5** – Densité volumique d'électrons libres, pulsation plasma et longueur d'onde correspondante, pour plusieurs métaux.

| Métal | $n$<br>( $10^{22}/\text{cm}^3$ ) | $\omega_p$<br>( $10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ ) | $\lambda_p$<br>(nm) |
|-------|----------------------------------|--|---------------------|
| Ag    | 5,86                             | 13,66  | 138                 |
| Au    | 5,90                             | 13,70  | 138                 |
| Cu    | 8,47                             | 16,42  | 115                 |
| Pb    | 13,20                            | 20,50  | 92                  |
| Ga    | 15,40                            | 22,14  | 85                  |
| Fe    | 17,00                            | 23,26  | 81                  |

## 5 Plasmons de surface

Les équations de Maxwell ont permis de mettre en évidence une pulsation particulière dans le réseau cristallin des métaux, la pulsation plasmon. Nous avons vu qu'à cette pulsation, un mode longitudinal peut exister dans le métal : le plasmon de volume. Nous allons voir que l'oscillation des électrons est aussi possible à l'interface entre un métal et un milieu diélectrique. Ces oscillations localisées à l'interface sont appelées **plasmons de surface**.

### 5.1 Conditions d'existence des plasmons de surface

On examine la possibilité d'existence, à l'interface d'un métal et d'un diélectrique, d'une onde électromagnétique dont les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ont la forme suivante :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right] \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \exp \left[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]$$

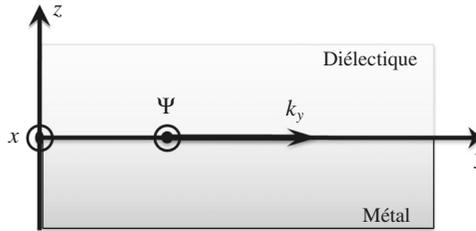


Figure 6.6 – Géométrie de l'interface métal/diélectrique.

Le plan d'incidence de l'onde étant ( $yOz$ ), le système étudié est invariant suivant  $x$ , et conséquemment, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ne dépendent pas de  $x$ . On doit donc chercher des solutions aux équations de Maxwell telles que les dérivées par rapport à  $x$  soient nulles. Les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday s'écrivent alors :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

et

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

L'ensemble de ces six équations peut être scindé en deux systèmes indépendants de trois équations chacun, comme nous le détaillons ci-après.

- Le premier est un système de trois équations à trois inconnues,  $(H_x, E_y, E_z)$ , qui constitue une **onde TM**, c'est-à-dire une onde dont le champ magnétique est

perpendiculaire au plan d'incidence :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = i\omega\mu_0 H_x \quad (6.65a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = -i\omega\varepsilon E_y \quad (6.65b)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = i\omega\varepsilon E_z \quad (6.65c)$$

- Le deuxième est un système de trois équations à trois inconnues,  $(E_x, H_y, H_z)$ , qui constituent une **onde TE**, c'est-à-dire une onde dont le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence :

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -i\omega\varepsilon E_x \quad (6.66a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = i\omega\mu_0 H_y \quad (6.66b)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = -i\omega\mu_0 H_z \quad (6.66c)$$

Les ondes TE et TM constituent donc une base d'états propres. Cela signifie que toute onde plane monochromatique peut être décomposée sur la base de ces deux états propres. On peut étudier séparément chacun de ces deux états de polarisation. Nous allons à présent examiner la possibilité d'existence d'une onde le long de l'interface avec un vecteur d'onde doté d'une composante axiale  $k_y$  et d'une composante transversale  $k_{zj}$ , avec  $j = \text{« } d \text{ »}$  ou  $\text{« } m \text{ »}$  selon qu'on se trouve dans le diélectrique ou dans le métal (considéré désormais comme n'ayant aucune propriété magnétique particulière :  $\mu = \mu_0$ ).

On examine une onde électromagnétique ayant dans le plan d'incidence l'expression :  
 $\{ E_x = E_{0j} \exp [i(yk_{yj} + zk_{zj} - \omega t)], \quad H_y, H_z \}$  pour l'onde TE  
 $\{ H_x = H_{0j} \exp [i(yk_{yj} + zk_{zj} - \omega t)], \quad E_y, E_z \}$  pour l'onde TM, avec  $j = d$  ou  $m$ .

## 5.2 Cas des ondes TE

Ici, le champ électrique ne comporte qu'une seule composante :  $E_x$ , et elle est perpendiculaire au vecteur d'onde.  $\vec{E} \perp \vec{k} \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ . Par conséquent, que l'on se trouve dans le métal ou dans le diélectrique, en tenant compte de l'équation (6.54), l'équation de propagation du champ électrique s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r E_x = 0 \quad (6.67)$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon_{rj}$  avec  $j = d$  ou  $m$ .

Les équations  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  imposent la continuité des composantes tangentielles de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  ( $E_x$  et  $H_y$ ), et l'équation  $\text{div}(\vec{B}) = 0$  impose la continuité de  $H_z$ , à l'interface entre le diélectrique et le métal. En tenant compte de (6.66b) et (6.66c), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xd}(z=0) = E_{xm}(z=0) \\ \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_{xd}}{\partial z}(z=0) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_{xm}}{\partial z}(z=0) \\ \frac{-1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_{xd}}{\partial y}(z=0) = \frac{-1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_{xm}}{\partial y}(z=0) \end{array} \right.$$

et donc  $\left\{ \begin{array}{l} E_{0d} \exp(iyk_{yd}) = E_{0m} \exp(iyk_{ym}) \\ k_{zd} E_{0d} \exp(iyk_{yd}) = k_{zm} E_{0m} \exp(iyk_{ym}) \\ k_{yd} E_{0d} \exp(iyk_{yd}) = k_{ym} E_{0m} \exp(iyk_{ym}) \end{array} \right. \quad (6.68)$

Pour que cette condition soit satisfaite il faut que  $k_{yd} = k_{ym}$  et  $k_{zd} = k_{zm}$ . La condition  $k_{zd} = k_{zm}$  est impossible à satisfaire, car les constantes de **propagation transversale** au sein des deux milieux,  $k_{zd}$  et  $k_{zm}$ , correspondent à des propagations non guidées dans une direction perpendiculaire à l'interface, au sein de matériaux qui diffèrent par leur constante diélectrique ( $k_{zd} \neq k_{zm}$ ). De ce fait, la condition (6.68) ne peut pas être satisfaite. Un mode TE guidé à l'interface du métal et du diélectrique est donc impossible.

### 5.3 Cas des ondes TM

Le champ magnétique ne comporte qu'une seule composante  $H_x$ , qui est perpendiculaire au vecteur d'onde car  $\text{div} \vec{B} = \mu_0 \vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ . L'équation de propagation du champ  $\vec{H}$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k_0^2 \varepsilon_r H_x = 0 \quad (6.69)$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c^2$ ,  $\varepsilon_r = \varepsilon_{rj}$  avec  $j = d$  ou  $m$ .

La condition de continuité des composantes tangentielles de  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$  ( $H_x$  et  $E_y$ ) à l'interface entre le diélectrique et le métal s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{xd}(z=0) = H_{xm}(z=0) \\ \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rd}} \frac{\partial H_{xd}}{\partial z}(z=0) = \frac{-1}{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rm}} \frac{\partial H_{xm}}{\partial z}(z=0) \end{array} \right.$$

$$\text{soit } \begin{cases} H_{0d} \exp(iyk_{yd}) = H_{0m} \exp(iyk_{ym}) \\ \frac{k_{zd}}{\epsilon_{rd}} H_{0d} \exp(iyk_{yd}) = \frac{k_{zm}}{\epsilon_{rm}} H_{0m} \exp(iyk_{ym}) \end{cases} \quad (6.70)$$

Pour que cette condition soit satisfaite il faut que :

$$k_{yd} = k_{ym} = k_y \quad (6.71)$$

et

$$\frac{k_{zd}}{\epsilon_{rd}} = \frac{k_{zm}}{\epsilon_{rm}}. \quad (6.72)$$

**Les ondes électromagnétiques guidées à l'interface de deux milieux ne peuvent exister que pour une polarisation TM.**

L'équation de Helmholtz pour  $H_x$ , (6.69), conduit alors à :

$$k_y^2 + k_{zd}^2 = k_0^2 \epsilon_{rd} \quad (6.73a)$$

$$k_y^2 + k_{zm}^2 = k_0^2 \epsilon_{rm} \quad (6.73b)$$

En soustrayant les équations (6.73a) et (6.73b) membre à membre, et en tenant compte de (6.72), on trouve

$$k_{zd}^2 = \epsilon_{rd}^2 k_0^2 / (\epsilon_{rm} + \epsilon_{rd}) \quad (6.74)$$

$$k_{zm}^2 = \epsilon_{rm}^2 k_0^2 / (\epsilon_{rm} + \epsilon_{rd}) \quad (6.75)$$

que l'on peut réinjecter dans (6.73) pour obtenir la relation de dispersion qui suit :

$$\boxed{k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{rd} \epsilon_{rm}}{\epsilon_{rd} + \epsilon_{rm}}}} \quad (6.76)$$

La relation (6.76) est la **relation de dispersion des plasmons de surface**, tandis que les relations (6.74) et (6.75) donnent les composantes transverses du vecteur d'onde.

### a) Propriétés fondamentales

En pratique, le plasmon de surface ne se propage pas à l'infini, en raison d'une perte d'énergie imposée principalement par le métal. En effet,  $\epsilon_{rm} = \epsilon'_{rm} + i\epsilon''_{rm}$  ; ce qui impose d'exprimer le vecteur d'onde s'écrit sous la forme :

$$k_y = k'_y + ik''_y \quad (6.77)$$

où  $k'_y$  et  $k''_y$  sont réels :

$$k'_y = \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\epsilon_{rd}}{(\epsilon'_{rm} + \epsilon_{rd})^2 + (\epsilon''_{rm})^2} \right]^{1/2} \left[ \frac{\hat{\epsilon}^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^4 + (\epsilon''_{rm} \epsilon_{rd})^2}}{2} \right]^{1/2} \quad (6.78)$$

$$k''_y = \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\epsilon_{rd}}{(\epsilon'_{rm} + \epsilon_{rd})^2 + (\epsilon''_{rm})^2} \right]^{1/2} \left[ \frac{(\epsilon''_{rm} \epsilon_{rd})^2}{2 \left( \hat{\epsilon}^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^4 + (\epsilon''_{rm} \epsilon_{rd})^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (6.79)$$

avec  $\hat{\epsilon}^2 = (\epsilon'_{rm})^2 + (\epsilon''_{rm})^2 + \epsilon_{rd} \epsilon'_{rm}$ .

Dans la plupart des métaux, pour des fréquences optiques suffisamment inférieures à la fréquence plasma, on a :  $\epsilon'_{rm} < 0$ ,  $|\epsilon'_{rm}| > \epsilon_{rd}$ ,  $|\epsilon'_{rm}| \gg \epsilon''_{rm}$  ; ce qui conduit à

$$k'_y \simeq \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\epsilon'_{rm} \epsilon_{rd}}{\epsilon'_{rm} + \epsilon_{rd}} \right]^{1/2} \quad (6.80)$$

$$k''_y \simeq \frac{\omega}{c} \left[ \frac{\epsilon'_{rm} \epsilon_{rd}}{\epsilon'_{rm} + \epsilon_{rd}} \right]^{3/2} \frac{\epsilon''_{rm}}{2 (\epsilon'_{rm})^2} \quad (6.81)$$

La partie réelle du vecteur d'onde,  $k'_y$ , traduit la propagation de l'onde à l'interface **diélectrique/métal**. La partie imaginaire,  $k''_y$ , traduit la perte d'énergie subie par l'onde. La distance sur laquelle cette onde conserve une énergie significative est appelée « **longueur de propagation du plasmon** » que nous noterons  $L_{PS}$ . Par convention, on la définit comme la distance après laquelle l'intensité du champ se propageant est divisée par  $e$  :

$$L_{PS} = \frac{1}{2k''_y} \quad (6.82)$$

Le comportement de l'onde dans la direction perpendiculaire à l'interface, est décrit par les relations (6.74) et (6.75), que l'on peut remettre sous la forme qui suit :

$$k_{zd} = k'_{zd} + ik''_{zd} = \pm \epsilon_{rd} k_0 / \sqrt{\epsilon_{rm} + \epsilon_{rd}} \quad (6.83a)$$

$$k_{zm} = k'_{zm} + ik''_{zm} = \pm \epsilon_{rm} k_0 / \sqrt{\epsilon_{rm} + \epsilon_{rd}} \quad (6.83b)$$

La partie imaginaire de  $k_{zj}$  ( $j = m, d$ ),  $k''_{zj}$ , traduit une atténuation de l'intensité de l'onde à mesure qu'on s'éloigne de l'interface. Tant que  $\omega$  n'est pas très proche de la fréquence plasma,  $|\epsilon'_{rm}| \gg |\epsilon''_{rm}|$  et donc  $\epsilon_{rm} \simeq \epsilon'_{rm}$  ; les relations (6.83a) et (6.83b) montrent alors que, pour que  $k_{zj}$  soit imaginaire pur (ce qui correspond à une onde évanescence dans les deux milieux) il faut que :

$$\epsilon_{rm}(\omega) + \epsilon_{rd} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{rm}(\omega) < -\epsilon_{rd}. \quad (6.84)$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'onde est alors spatialement localisée le long de l'interface. On fait référence à cet effet de localisation stricte d'énergie en disant que le plasmon est un **mode lié**. On peut définir la profondeur de pénétration de l'onde dans les deux milieux, à partir des coefficients d'atténuation définis par :

$$\alpha_d = |\text{Im}(k_{zd})| = |k''_{zd}| = \varepsilon_{rd} k_0 / \sqrt{|\varepsilon'_{rm} + \varepsilon_{rd}|} \quad (6.85a)$$

$$\alpha_m = |\text{Im}(k_{zm})| = |k''_{zm}| = |\varepsilon'_{rm}| k_0 / \sqrt{|\varepsilon'_{rm} + \varepsilon_{rd}|}. \quad (6.85b)$$

Les profondeurs de pénétration de l'onde dans le diélectrique et dans le métal sont donc respectivement :

$$L_d = \frac{1}{|k''_{zd}|} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{|\varepsilon'_{rm} + \varepsilon_{rd}|}}{\varepsilon_{rd}} \quad (6.86a)$$

$$L_m = \frac{1}{|k''_{zm}|} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\sqrt{|\varepsilon'_{rm} + \varepsilon_{rd}|}}{|\varepsilon'_{rm}|} \quad (6.86b)$$

Pour une interface Ag/air à  $\lambda = 600$  nm, ces profondeurs de pénétration sont approximativement de  $L_{Ag} = L_m = 39$  nm dans l'argent, et de  $L_{air} = L_d = 260$  nm dans l'air. Ces longueurs donnent les distances auxquelles les plasmons sont susceptibles d'interagir avec leur environnement. Par ailleurs, l'onde reste confinée dans une tranche d'épaisseur  $L_{air} + L_{Ag} \simeq 300$  nm, qui est très inférieure à la longueur d'onde. Le plasmon de surface permet ainsi de guider des ondes électromagnétiques en dessous de la limite de diffraction. Le confinement de l'onde est d'autant plus fort que sa longueur d'onde est courte, comme l'illustrent les relations (6.86).

## b) Cas d'un gaz d'électrons libres

Dans ce cas, d'après la relation (6.36), la constante diélectrique s'écrit  $\varepsilon_{rm}(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$  ; ce qui conduit à :

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{rd} \varepsilon_{rm}}{(\varepsilon_{rd} + \varepsilon_{rm})}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_p^2) \varepsilon_{rd}}{(1 + \varepsilon_{rd} \omega^2 - \omega_p^2)}} \quad (6.87)$$

Cette expression présente deux cas limites :

(i)  $\varepsilon_{rm}(\omega) + \varepsilon_{rd} = 0 \Leftrightarrow 1 - \omega_p^2/\omega^2 = -\varepsilon_{rd}, \Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_{rd}}} = \omega_{cps}$  Pour le diélectrique considéré, la condition d'existence d'un mode de propagation le long de l'interface est  $\varepsilon_{rm}(\omega) + \varepsilon_{rd} < 0$  ( $k_y > 0$ ). Cette condition s'écrit donc :

$$\omega < \omega_{cps} \equiv \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \varepsilon_{rd}}}$$

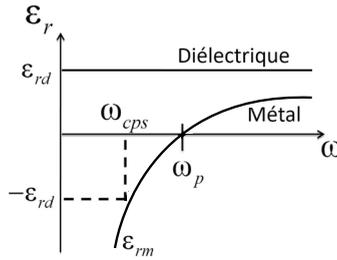


Figure 6.7

Lorsque  $\omega \rightarrow \omega_{cps}$  on a  $\epsilon_{rm}(\omega) + \epsilon_{rd} \rightarrow 0$  et donc  $k_y \rightarrow \infty$ .

(ii) L'expression (6.87) montre que lorsque  $\omega \rightarrow 0$  (soit  $|\epsilon_{rm}| \gg |\epsilon_{rd}|$ ) on a

$$k_y \rightarrow \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{rd}} = n_d \frac{\omega}{c}, \quad \text{avec } n_d = \sqrt{\epsilon_{rd}}$$

La figure 6.8 illustre la relation de dispersion d'un plasmon de surface avec la notation  $K \equiv k_y$ . La droite en pointillés est la relation de dispersion de la lumière dans le diélectrique massif de constante diélectrique  $\epsilon_{rd}$  en l'absence de l'interface,  $k_d = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{rd}}$ .

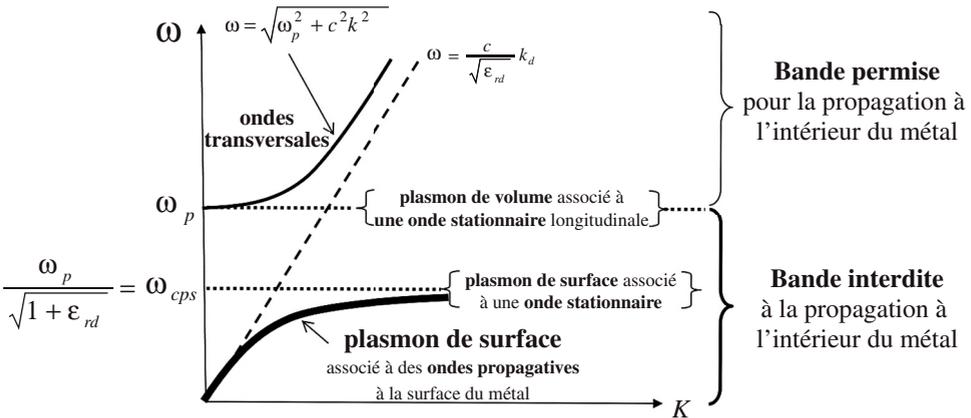


Figure 6.8 – Relation de dispersion dans un métal. La droite en pointillés correspond à la dispersion de la lumière dans le diélectrique, en l'absence du métal.

Aux petits vecteurs d'onde, la relation de dispersion du plasmon de surface se rapproche de celle que l'on aurait dans un diélectrique massif. Aux grands vecteurs d'onde, elle tend asymptotiquement vers la fréquence de coupure du plasmon de surface  $\omega_{cps}$ .

Ainsi, les équations de Maxwell montrent que des ondes électromagnétiques guidées peuvent exister à l'interface d'un métal et d'un diélectrique. La propagation de cette onde provoque une oscillation collective cohérente du plasma d'électrons libres à la surface du métal. En effet, la composante transverse du champ électrique,  $E_{z,2}$  attire les

électrons libres à l'interface entre le diélectrique et le métal. Au cours de la propagation le long de l'interface, la composante longitudinale,  $E_y$ , inverse sa direction deux fois sur une distance égale à la longueur d'onde. Les électrons libres sont donc forcés par la composante  $E_y$  à exécuter un déplacement dans la direction opposée à celle de  $E_y$ . La figure 6.9 présente une photographie de l'état du système, à un instant où le champ  $E_y$  vient d'inverser son orientation. Les symboles « - » représentent les zones à forte densité d'électrons à cet instant, tandis que les « + » indiquent les zones désertées par les électrons. Il y a ainsi coexistence d'une onde électromagnétique et une oscillation des électrons. Au sens strict, ce sont ces oscillations des électrons que l'on appelle **plasmons de surface**. L'onde responsable de ces oscillations est appelée **polariton de plasmon de surface**. Mais de manière générale, on utilise la terminologie **plasmons de surface** pour désigner indistinctement l'onde électromagnétique guidée par l'interface et le mouvement oscillatoire des électrons qui lui est associé.

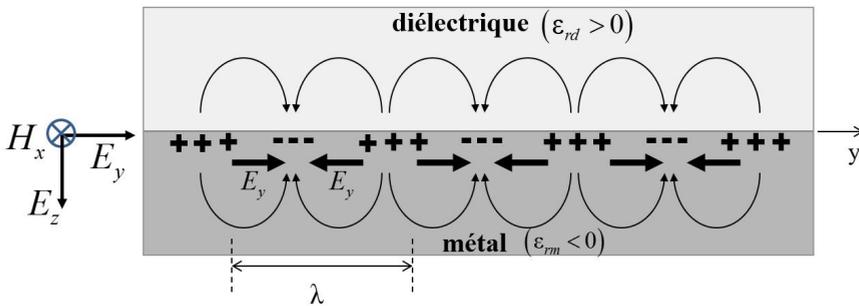
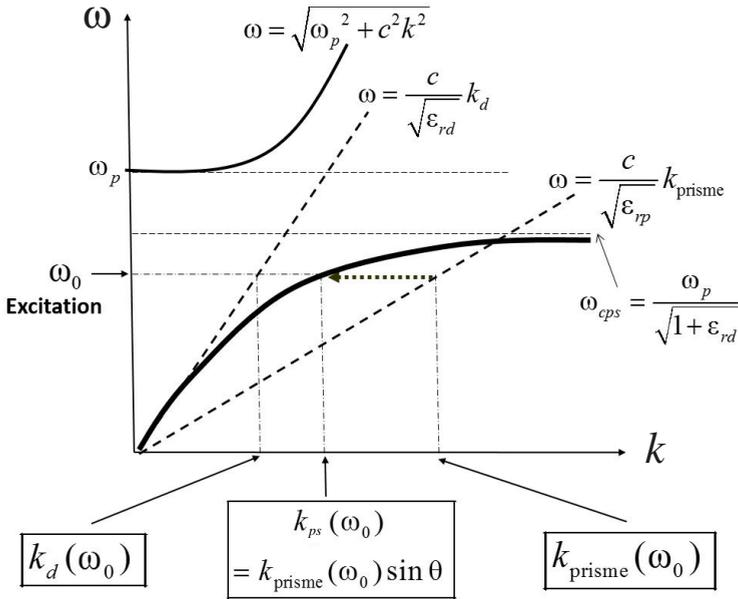


Figure 6.9 – Oscillations des plasmons de surface.

## 5.4 Excitation des plasmons de surface

La figure 6.10 représente un procédé classique d'excitation des plasmons de surface. On y distingue une courbe en filet épais, qui représente la relation de dispersion des plasmons de surface à l'interface métal/diélectrique. La ligne oblique tangente à cette courbe, indique que lorsque le métal est absent et que le milieu est entièrement occupé par le diélectrique, la lumière se propage avec la relation de dispersion  $\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{rd}}} k_d$ . On remarque alors qu'en présence du métal, pour toute pulsation  $\omega_0 < \omega_{cps}$ , la lumière ne pénètre pas dans le métal, mais peut se propager à l'interface métal/diélectrique (plasmons de surface) avec un vecteur d'onde  $k_{ps}(\omega_0)$  toujours supérieur à celui de la lumière dans le diélectrique massif  $k_d(\omega_0)$ . Pour exciter et/ou observer des plasmons de surface, on se sert de systèmes optiques à géométries particulières. Les plus utilisés sont des montages utilisant un prisme dont l'indice  $n_{\text{prisme}} = \sqrt{\epsilon_{rp}}$  est plus élevé que celui du diélectrique qui est au contact du métal :  $n_{\text{prisme}} > n_d = \sqrt{\epsilon_{rd}}$ . Le passage de la lumière incidente par ce prisme a pour but de placer le système dans la situation où la lumière arrive en incidence oblique sur l'interface métal/diélectrique avec



**Figure 6.10**– Illustration de l’excitation d’un plasmon de surface. La courbe en filet épais représente la relation de dispersion du plasmon de surface à l’interface métal/diélectrique. Les droites obliques représentent respectivement les relations de dispersion dans le diélectrique massif et dans le prisme.

un vecteur d’onde  $k_{\text{prisme}}(\omega_0)$  supérieure à celle du plasmon de surface. La projection du vecteur d’onde sur la surface peut alors parfaitement s’accorder à celle du plasmon de surface, en ajustant l’angle d’incidence de telle sorte que  $\sin(\theta) \times k_{\text{prisme}} = k_{\text{ps}}$ . Il existe deux configurations de couplage par prisme. La première a été décrite pour la première fois par Otto. La seconde a été développée par Kretschmann.

### a) Configuration Otto

Dans la configuration proposée par Otto (figure 6.11), un prisme d’indice  $n$  est approché par le dessus de l’interface métal/air, côté air, en laissant un gap d’air d’épaisseur de l’ordre de grandeur de la longueur d’onde d’excitation. Lorsqu’il y a réflexion dans le prisme, le champ évanescent dans le gap d’air permet l’excitation du plasmon de surface quand les vecteurs d’ondes le permettent et si la distance entre le prisme et le métal est suffisamment faible.

### b) Configuration Kretschmann

Le principe consiste à exciter le plasmon de surface à l’aide d’un prisme d’indice supérieur à celui du diélectrique de l’interface métal/diélectrique considérée. La base du prisme est accolée à une fine couche de métal. Cette épaisseur doit être faible, elle

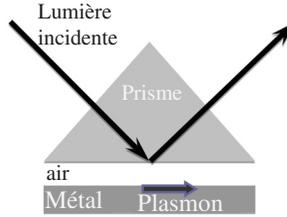


Figure 6.11 – Configuration de Otto.

est typiquement d’une cinquantaine de nanomètres. Pour les angles  $\theta$  supérieurs à celui de la réflexion totale, le champ évanescent à travers le métal peut coupler un plasmon de surface si la projection suivant l’interface du vecteur d’onde de l’onde lumineuse incidente est égale au vecteur d’onde du plasmon de surface  $k_{ps}$  (figure 6.12).

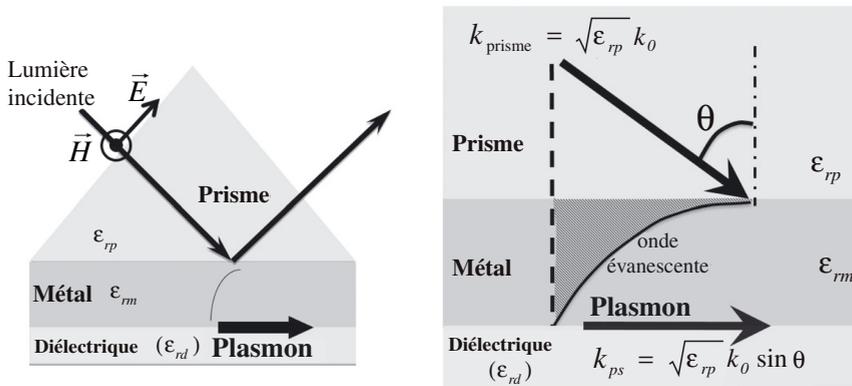


Figure 6.12 – Couplage des plasmons de surface par prisme dans la configuration de Kretschmann.

- 1 Les conducteurs et les plasmas sont des milieux matériels où l'on peut trouver, à la température ambiante, une quantité relativement importante d'électrons libres.
- 2 Leur comportement varie très sensiblement selon la fréquence des champs électromagnétiques auxquels ils sont soumis.
- 3 Les ondes de basse fréquence (ondes radio, micro-ondes) ne peuvent pénétrer en profondeur dans le volume des conducteurs, mais peuvent exister en surface, dans une très fine épaisseur de matière (à laquelle on fait référence comme étant la "peau" du conducteur). À basse fréquence, les milieux conducteurs et les plasmas sont donc réfléchissants.
- 4 À l'opposé, les ondes de fréquence suffisamment élevée peuvent pénétrer dans ces milieux, et se propager dans leur volume. On peut alors caractériser les milieux conducteurs par une permittivité.
- 5 **Modèle de Drude de la permittivité**

Le **modèle de Drude** assimile le métal à un **gaz d'électrons libres** évoluant dans un réseau d'ions fixes. Ce modèle néglige les interactions entre électrons, et suppose que chaque électron se déplace librement pendant un temps moyen  $\tau$  avant d'entrer en collision avec un ion fixe du réseau.  $\tau$  est appelé **temps de collision** ou **temps de relaxation**. En l'absence de champ électrique extérieur, l'électron libre a une vitesse moyenne nulle  $\langle v_0 \rangle = 0$ . En présence d'une onde électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ , l'électron libre est soumis aux forces suivantes :

- Force de Lorentz :  $\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq -e\vec{E}$ .

- Force de frottement (résultant des collisions sur les ions fixes du réseau) :  $\vec{F}_a = -m\vec{v}/\tau$ .

- **Équation du mouvement** :  $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$ .

Pour  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$  on a :  $\vec{v} = -\frac{e}{m} \frac{1}{\tau^{-1} + i\omega} \vec{E}$ .

Déplacement de l'électron libre :  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = i\omega\vec{r} \rightarrow \vec{r} = \frac{e}{m(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})} \vec{E}$ .

- **Moment dipolaire** de l'électron libre :  $\vec{p} = -e\vec{r}$ .

- **Polarisation du milieu** :  $\vec{P} = n\vec{p} = -ne\vec{r} = -\frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})}$ , où  $n$  désigne le nombre d'électrons libres par unité de volume du milieu.

- **Induction électrique** :  $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} - \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{(\omega^2 - i\omega\tau^{-1})} = \epsilon_0\epsilon_r^D\vec{E}$ .

- **Permittivité relative** :  $\epsilon_r^D = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{(\omega^2\tau^2 - i\omega\tau)}$ ,

où  $\omega_p = \sqrt{ne^2/(m\epsilon_0)}$  est appelée **fréquence plasma**.

On peut écrire que  $\epsilon_r^D = \epsilon_1^D - i\epsilon_2^D$ ,

avec  $\epsilon_1^D = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{(1 + \omega^2\tau^2)}$  et  $\epsilon_2^D = \frac{\omega_p^2\tau^2}{\omega\tau(1 + \omega^2\tau^2)}$ .

Dans le **domaine optique** [180nm (6.6eV) à 1900nm (0.64eV)], on a typiquement  $\tau \sim 10^{-14}$ s pour la plupart des métaux, ce qui conduit à :  $10 < \omega\tau < 100 \rightarrow \omega^2\tau^2 \gg 1$ , et donc :

$$\boxed{\epsilon_1^D \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\epsilon_2^D \simeq \frac{1}{\omega\tau} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Deux types de comportement émergent selon la valeur de  $\omega$  par rapport à  $\omega_p$  :

- Pour  $\omega < \omega_p$ , on a  $\epsilon_1^D < 0$ ; ce qui interdit la propagation au sein du volume du milieu.
- Pour  $\omega > \omega_p$ , on a  $\epsilon_1^D > 0$ . La propagation au sein du volume du milieu est donc possible pour des ondes de fréquence supérieure à la **fréquence plasma**.

## 6 Permittivité généralisée

Le modèle de Drude est en bon accord avec l'expérience, qui montre que la plupart des métaux sont réfléchissants à basse fréquence (dans un vaste domaine allant des radiofréquences jusqu'au visible) et deviennent transparents dans l'ultraviolet. Par ailleurs, ce modèle décrit de manière satisfaisante la permittivité des métaux alcalins (Li, Na, K, Rb,...) aux fréquences optiques. Cependant la réponse optique de certains matériaux tels que les **métaux nobles** massifs (Ag, Au, Cu) ne peut être complètement décrite par ce modèle.

De manière plus générale, lorsque la fréquence de l'onde est suffisamment élevée, les électrons liés entrent en jeu et apportent une contribution à la permittivité. Les parties réelle et imaginaire de la permittivité doivent alors être corrigées par des termes qui prennent en compte la contribution des électrons liés. On peut mettre la **permittivité généralisée** sous la forme suivante :

$$\varepsilon_1(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \varepsilon^\infty + \varepsilon_1^{IB}(\omega), \quad \varepsilon_2(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3\tau} + \varepsilon_2^{IB}(\omega).$$

## 7 Équations de Maxwell

- Dans un **gaz d'électrons libres**, les charges liées n'existent pas. Il peut alors redéfinir l'induction électrique et la densité de courant en fonction de la polarisation des charges libres  $\vec{P}_{\text{libre}}$ , comme ci-après :

$$\vec{D}_{\text{libre}} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r^D \vec{E}, \quad \text{div } \vec{D}_{\text{libre}} = \rho_{\text{lié}} = 0, \quad \vec{j}_{\text{libre}} = \partial \vec{P}_{\text{libre}} / \partial t.$$

Comme  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , l'équation de Maxwell-Ampère se met sous la forme

$$\overline{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}_{\text{libre}}}{\partial t}.$$

- Dans un **métal ordinaire**, les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère se mettent sous la forme suivante :

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{libre}}}, \quad \boxed{\overline{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}.$$

Dans ces équations, l'induction électrique,  $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , ne dépend que la polarisation  $\vec{P}$  créée par les charges liées du milieu et  $\vec{j}_{\text{lié}} = \partial \vec{P} / \partial t$ . On peut aussi écrire que :

$$\boxed{\overline{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_{\text{lié}} + \vec{j}_{\text{déplacement}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}, \quad \text{où } \varepsilon_r \text{ est la } \mathbf{permittivité} \\ \mathbf{généralisée}.$$

## 8 Équation de propagation - Relation de dispersion

Elle s'écrit :  $\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{E})$ .

Pour  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \rightarrow \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \vec{E} = 0$ .

Posons  $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$ , où  $\vec{E}_{\parallel} \equiv$  composante longitudinale, et  $\vec{E}_{\perp} \equiv$  composante transverse,

$$\rightarrow \vec{k} \left[ \vec{k} \cdot (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) \right] - k^2 (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}) = 0.$$

$$\rightarrow [-k^2 + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega)] \vec{E}_{\perp} = 0 \text{ et } \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \vec{E}_{\parallel} = 0$$

**Champ transverse :**  $[-k^2 + \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega)] \vec{E}_{\perp} = 0 \rightarrow \boxed{k^2 = \mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega)}$ .

Cette relation de dispersion démontre qu'une onde transverse peut se propager dans le métal.

**Champ longitudinal :**  $\mu \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_r(\omega) \vec{E}_{\parallel} = 0 \rightarrow \boxed{\varepsilon_r(\omega) = 0}$ .

Un champ longitudinal ne peut exister que s'il existe une fréquence  $\omega$  telle que  $\varepsilon_r(\omega) = 0$ . Autrement dit, la **condition d'existence d'un champ longitudinal** est :  $\boxed{\omega = \omega_p}$ .

Dans le cas d'un gaz d'électrons libres la fonction diélectrique s'écrit  $\varepsilon_r(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , et la relation de dispersion du champ transverse se met sous la forme suivante :

$$\boxed{k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 (\omega^2 - \omega_p^2) \Leftrightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2}$$



- 6.1** Un conducteur est un milieu où on trouve un grand nombre d'électrons libres à la température ambiante :
- a. vrai                      b. faux
- 6.2** Un conducteur ne contient pas de charges liées :
- a. vrai                      b. faux
- 6.3** Une onde électromagnétique de basse fréquence (radio et micro-onde) ne pénètre pas dans un conducteur parfait (conductivité infinie) :
- a. vrai                      b. faux
- 6.4** Une onde électromagnétique de basse fréquence (radio et micro-onde) arrivant sur un conducteur réel (conductivité finie) :
- a. ne peut pénétrer dans le volume du conducteur  
b. peut pénétrer dans le volume du conducteur, mais uniquement sur une très fine couche située en surface
- 6.5** En principe, l'équation de Maxwell-Gauss dans un conducteur réel s'écrit  $\text{div } \vec{D} = \rho_{\text{lib}}$ , où  $\vec{D}$  désigne le champ d'induction électrique, et  $\rho_{\text{lib}}$  la densité volumique de charges libres. Pourtant, dans un bon conducteur tel qu'un métal, on peut écrire  $\rho_{\text{lib}} = 0$ . Pourquoi ?
- a. la valeur de  $\rho_{\text{lib}}$  n'est pas suffisamment élevée pour produire un effet significatif  
b. une densité volumique de charge  $\rho_{\text{lib}}$  n'apparaît en tout point d'un bon conducteur que de manière très fugitive (**dissipation rapide des charges**), et n'a pas le temps de produire un effet significatif
- 6.6** Dans un bon conducteur, à basse fréquence, l'effet des charges liées est négligeable devant celui des charges libres :
- a. vrai                      b. faux
- 6.7** Dans un bon conducteur, à très haute fréquence (ultraviolet, rayon X), l'effet des charges liées est négligeable :
- a. vrai                      b. faux



# Entraînez-vous

## 6.1 Modèle de Drude de la permittivité diélectrique des métaux

Le modèle de Drude fait référence à une théorie basée sur les lois de la physique classique, dans laquelle les propriétés optiques des métaux sont décrites à partir du comportement des électrons libres du métal en présence d'un champ électrique. Dans ce modèle, tout **électron libre** du métal, soumis à un champ électrique sinusoïdal  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ , exécute un déplacement  $\vec{r}(t)$  par rapport à sa position moyenne en l'absence de champ. Le modèle suppose que l'effet de la force du champ magnétique associé à  $\vec{E}$  est négligeable.

**1.** Rappeler l'expression du moment dipolaire  $\vec{p}$  induit par le déplacement  $\vec{r}(t)$  d'un électron (charge  $-e$ ). En déduire l'expression du vecteur polarisation, en supposant que le métal contient  $n$  électrons libres par unité de volume. Ce vecteur sera noté  $\vec{P}_{\text{libre}}$ .

**2.** En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron libre, calculer l'amplitude complexe  $\vec{r}_0$  de son déplacement  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$ , en prenant en compte l'effet global des interactions et collisions de l'électron avec les autres porteurs de charge du métal, que l'on assimilera à une force de frottement de type  $\vec{F}_a = -m\vec{v}/\tau$ .

On rappelle que la définition conventionnelle de l'induction électrique s'écrit :  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ . Celle de la permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$  qui en résulte est donnée par :  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ . Le vecteur  $\vec{P}$  est créé par les charges liées ( $\vec{P} \equiv \vec{P}_{\text{lié}}$ ). Dans le cadre du modèle de Drude (qui ignore l'effet des charges liées), il convient d'utiliser les notations suivantes :  $\vec{D}_{\text{Drude}}$ ,  $\vec{P}_{\text{libre}}$  et  $\epsilon_{r\_Drude}$ , plutôt que  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$  et  $\epsilon_r$ .

**3.** Montrer que la permittivité diélectrique relative, d'après ce modèle, se met sous la forme suivante :

$$\epsilon_{r\_Drude} = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\omega\tau^{-1})}, \quad (6.88)$$

$$\text{où } \omega_p^2 = ne^2/(m\epsilon_0).$$

**4.** L'argent cristallise dans un système de type cubique face centrée de paramètre de maille  $a_0 = 4,12 \text{ \AA}$ , ce qui conduit une densité moyenne de quatre atomes par maille, et un nombre d'atomes par unité de volume donné par  $n = 4/a_0^3$ . Sachant que chaque atome d'argent libère un électron libre :

**a.** Déduire la valeur de la fréquence plasma  $\nu_p = \omega_p/(2\pi)$ .

**b.** Calculer l'énergie  $\hbar\omega_p$  en eV.

Expérimentalement, on trouve plutôt  $\hbar\Omega_p = 3,75 \text{ eV}$ . Le désaccord entre l'expérience et la théorie suggère que l'expression (6.88) n'est pas tout à fait correcte. En fait, il faut plutôt écrire :

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\omega\tau^{-1})}, \quad (6.89)$$

où  $\epsilon_\infty$  tient compte de la contribution des **électrons liés** à la permittivité, qui n'est pas incluse dans le modèle de Drude.

5. Sachant que  $\tau \simeq 3 \times 10^{-14}$  s, montrer que dans le domaine optique, pour des longueur d'onde de l'ordre de 180 nm à 1 900 nm, les expressions des constantes diélectriques données par (6.88) et (6.89) prennent des formes relativement simples.

6. Calculer la valeur de  $\epsilon_\infty$  qui permet d'obtenir la valeur expérimentale de la fréquence plasma  $\Omega_p$ . Calculer la longueur d'onde correspondante  $\Gamma_p$  en nm. Dans quelle région du spectre électromagnétique la fréquence plasma de ce métal se situe-t-elle ?

7. Représenter graphiquement  $\epsilon_r$  en fonction de  $\omega$ . Que pouvez-vous dire du comportement de l'onde lorsque  $\omega < \Omega_p$  et  $\omega > \Omega_p$  ?

## 6.2 Plasmons de surface

On nomme plasmons de surface une solution particulière des équations de Maxwell à l'interface entre deux diélectriques, l'un d'entre eux ayant une constante diélectrique négative (comme un métal par exemple).

On considère une onde transverse magnétique TM ( $H_x = H_z = 0$ ) à l'interface entre deux milieux 1 et 2. On rappelle que ce type d'onde est telle que  $\vec{k} \cdot \vec{E} \neq 0$ .

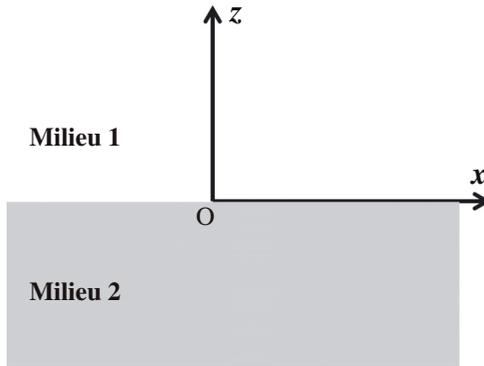


Figure 6.13

La structure du champ est la suivante :

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= B_{10} \exp [i(xk_{1x} + zk_{1z} - \omega t)] \vec{u}_y, \\ \vec{E}_1 &= (E_{10x} \vec{u}_x + E_{10z} \vec{u}_z) \exp [i(xk_{1x} + zk_{1z} - \omega t)] \\ \vec{B}_2 &= B_{20} \exp [i(xk_{2x} - zk_{2z} - \omega t)] \vec{u}_y, \\ \vec{E}_2 &= (E_{20x} \vec{u}_x + E_{20z} \vec{u}_z) \exp [i(xk_{2x} - zk_{2z} - \omega t)] \end{aligned}$$

Le milieu 1 est un diélectrique LHI de permittivité relative  $\epsilon_{r1}$  (et de constante magnétique  $\mu \simeq \mu_0$ ), et le milieu 2 un métal. Ici, le métal sera traité comme un gaz d'électrons libres (modèle de Drude).

1. Écrire la relation de dispersion dans le milieu 1 (sans tenir compte du métal).

2. On se place à présent dans le milieu 2. Montrer qu'en posant  $\rho_{\text{libre}} = -\text{div}(\vec{P}_{\text{libre}})$ , où  $\vec{P}_{\text{libre}}$  est le vecteur polarisation associé du gaz d'électrons libres, l'équation de Maxwell-Gauss,  $\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$ , conduit à :

$$\text{div}(\vec{D}_{\text{Drude}}) = 0 \quad (6.90)$$

où  $\vec{D}_{\text{Drude}}$  est l'induction électrique du milieu, définie par  $\vec{D}_{\text{Drude}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}}$ .

3. En posant  $\vec{j}_{\text{libre}} = \frac{\partial \vec{P}_{\text{libre}}}{\partial t}$ , montrer que l'expression usuelle de l'équation Maxwell-Ampère :  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}_{\text{Drude}}}{\partial t} \quad (6.91)$$

où  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{P}$  est la polarisation induite par les charges liées du milieu ( $\vec{P} = \vec{P}_{\text{lié}}$ ).

Les équations (6.90) et (6.91), forment avec les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-flux magnétique, les quatre équations de Maxwell dans le milieu 2.

4. Sachant que  $\vec{D}_{\text{Drude}} = \epsilon_0 \epsilon_{r\_Drude} \vec{E}$ , écrire l'équation de propagation du champ magnétique dans le milieu 2, qui sera noté  $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2$ .

5. En déduire la relation de dispersion dans ce milieu (sans tenir compte du diélectrique).

6. Écrire les relations de continuité des champs à l'interface entre les deux milieux (à savoir en  $z = 0$ ). Écrire les relations qui en découlent, et en particulier, déduire que  $k_{1x} = k_{2x} \equiv k_x$ .

7. En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère et les relations de continuité, montrer que  $k_{1z} \epsilon_{r1}^{-1} + k_{2z} \epsilon_{r2}^{-1} = 0$ . Ici, par souci de simplicité, on posera  $\epsilon_{r2} \equiv \epsilon_{r\_Drude}$ .

8. En déduire une expression de  $k_x$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$ ,  $\epsilon_{r1}$  et  $\epsilon_{r2}$ , puis en fonction de  $\omega$ ,  $c$  et  $\omega_p$ .

9. À quelle condition sur  $\omega$  a-t-on  $k_x$  réel dans la plage  $\omega < \omega_p$  ?

10. Tracer l'allure de la relation de dispersion  $\omega = f(k_x)$ . Elle correspond aux plasmons de surface.

11. Donner l'expression de  $k_{z1}$  et  $k_{z2}$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$ , et  $c$ . Pourquoi parle-t-on d'ondes de surface ?



- 6.1** Réponse a ; **6.2** Réponse b ; **6.3** Réponse a ; **6.4** Réponse b ; **6.5** Réponse b ; **6.6** Réponse a ; **6.7** Réponse b.



## 6.1 Modèle de Drude de la permittivité diélectrique des métaux

### 1. Moment dipolaire :

$$\vec{p} = -e\vec{r} \quad (6.92)$$

### Polarisation :

$$\vec{P}_{\text{libre}} = -ne\vec{r} \quad (6.93)$$

### 2. Le PFD appliqué à l'électron libre s'écrit :

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_L + \vec{F}_a,$$

où  $\vec{F}_L \simeq -e\vec{E}$  est la force de Lorentz (réduite ici à la force de Coulomb), et  $\vec{F}_a = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$  la force de frottement. L'équation du mouvement de l'électron libre se met sous la forme suivante :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E} \quad (6.94)$$

En posant  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \exp(-i\omega t)$ , on obtient :

$$\vec{r} = \frac{e}{m} \frac{1}{(\omega^2 + i\omega\tau^{-1})} \vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{r}_0 = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0}{(\omega^2 + i\omega\tau^{-1})} \quad (6.95)$$

### 3. D'après (6.93) et (6.95),

$$\vec{D}_{\text{Drude}} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}} = \epsilon_0 \vec{E} - ne\vec{r}(t) = \epsilon_0 \left[ 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m (\omega^2 + i\omega\tau^{-1})} \right] \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_{r\_Drude} \vec{E}$$

$$\text{où} \quad \epsilon_{r\_Drude} = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m (\omega^2 + i\omega\tau^{-1})} = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\omega\tau^{-1})} = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{(\tau\omega)^2 + i\omega\tau},$$

$$\text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \quad (6.96)$$

**4.** Comme chaque atome d'argent libère un électron libre, la densité d'électrons libres est égale à  $n = 4/a_0^3$ .

$$\text{a. } \omega_p^2 = ne^2 (m\epsilon_0) \Leftrightarrow \nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \times e^2}{m \times \epsilon_0 \times a_0^3}} = 2146 \text{ THz}$$

$$\Leftrightarrow \omega_p = 1,35 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$$

**b.** Énergie correspondante :  $h\nu_p = 8,88 \text{ eV}$ .

5. En séparant les parties réelle et imaginaire, les expressions des permittivités s'écrivent :

$$\varepsilon'_{\text{Drude}}(\omega) = \text{Re}(\varepsilon_{r\text{-Drude}}) = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et}$$

$$\varepsilon''_{\text{Drude}}(\omega) = \text{Im}(\varepsilon_{r\text{-Drude}}) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

$$\varepsilon'(\omega) = \text{Re}(\varepsilon_r) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \text{Im}(\varepsilon_r) = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

Notons que  $\lambda_1 = 180 \text{ nm}$  correspond à la fréquence  $\nu_1 = c/\lambda_1 = 1\,667 \text{ THz}$ .

$$\Rightarrow (\omega_1 \tau)^2 = (2\pi\nu_1 \tau)^2 \simeq 9\,870 \gg 1.$$

$\lambda_2 = 1900 \text{ nm}$  correspond à la fréquence  $\nu_2 = c/\lambda_2 = 158 \text{ THz}$

$$\Rightarrow (\omega_2 \tau)^2 = (2\pi\nu_2 \tau)^2 \simeq 886 \gg 1$$

Dans tout le domaine considéré on a donc  $\omega^2 \tau^2 \gg 1$

$$\varepsilon'_{\text{Drude}}(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon''_{\text{Drude}}(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega\tau} \quad (6.97)$$

$$\varepsilon'(\omega) \simeq \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon''(\omega) \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega\tau} \quad (6.98)$$

**Remarque** L'expression (6.98) illustre que la fréquence de plasma est la fréquence pour laquelle la partie réelle de la constante diélectrique s'annule.

6. En appliquant cette définition au modèle de Drude modifié donné par (6.98), la fréquence de plasma est donnée par  $\varepsilon'(\omega = \Omega_p) = 0$ , ce qui conduit à

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_\infty}} \quad (6.99)$$

$$\text{On en déduit : } \varepsilon_\infty = \left(\frac{\omega_p}{\Omega_p}\right)^2 = \left(\frac{\hbar\omega_p}{\hbar\Omega_p}\right)^2 = \left(\frac{8,88}{3,75}\right)^2 = 5,6.$$

Par ailleurs,  $\hbar\Omega_p = 3,75 \text{ eV} \rightarrow \Omega_p = 5,7 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \Leftrightarrow f_p = 906 \text{ THz}$

$\Leftrightarrow \Gamma_p = c/f_p = 331 \text{ nm}$ . La fréquence plasma de ce métal se situe dans l'ultra-violet.

7. Les relations (6.98) et (6.99) permettent d'écrire que :

$$\varepsilon'(\omega) \simeq \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{\Omega_p^2}{\omega^2}\right) \quad \text{et} \quad \varepsilon''(\omega) \simeq \varepsilon_\infty \frac{\Omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{\omega\tau}.$$

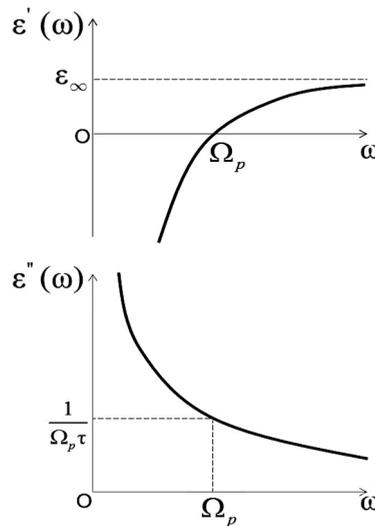
Les courbes sont représentées ci-après.

La partie imaginaire de  $\epsilon''$  influence directement l'atténuation de l'onde dans le milieu, qui est d'autant plus forte que  $\epsilon''$  est grand. La courbe montre que  $\epsilon''$  décroît exponentiellement à mesure que  $\omega$  augmente.

La possibilité pour l'onde de se propager est liée au signe de  $\epsilon'$ .

Pour  $\omega < \Omega_p$ , alors  $\epsilon'(\omega) < 0$  soit  $\bar{n} = \sqrt{\epsilon'(\omega)} = \pm i \cdot n$ , avec  $n = \sqrt{\epsilon_\infty(\Omega_p^2/\omega^2 - 1)}$ .

Le signe négatif de  $\epsilon'$  donne lieu à un indice de réfraction purement imaginaire, et donc à une atténuation de l'onde. Autrement dit, pour  $\epsilon'' \neq 0$  et  $\epsilon'(\omega) < 0$ , les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique agissent toutes dans le sens de l'atténuation de l'onde et s'opposent à la propagation. Le milieu est alors très absorbant.



Pour  $\omega > \Omega_p$ , alors  $\epsilon'$  devient positif; le milieu est toujours absorbant mais la partie réelle  $\epsilon'$  devient dominante vis-à-vis de la partie imaginaire  $\epsilon''$ . La propagation est alors possible dans le métal.

## 6.2 Plasmons de surface

1. L'équation de propagation dans le diélectrique (LHI) s'écrit  $\Delta \vec{E}_1 - \frac{\epsilon_{r1}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = 0$

En posant :  $\vec{E}_1 = (E_{10x} \vec{u}_x + E_{10z} \vec{u}_z) \exp [i(xk_{1x} + zk_{1z} - \omega t)]$ , on obtient la relation de dispersion :

$$k_{1x}^2 + k_{1z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r1}. \quad (6.100)$$

2. D'après l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0 = (\rho_{\text{lié}} + \rho_{\text{libre}})/\epsilon_0 = [\rho_{\text{lié}} - \operatorname{div}(\vec{P}_{\text{libre}})]/\epsilon_0$$

En multipliant les deux membres par  $\epsilon_0$ , on obtient  $\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}}) = \rho_{\text{lié}}$ . Le milieu étant considéré comme un gaz d'électrons libres,  $\rho_{\text{lié}} = 0$ ; ce qui conduit à :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}}) = \operatorname{div}(\vec{D}_{\text{Drude}}) = 0 \quad (6.101)$$

3. Dans un milieu LHI, l'expression usuelle de l'équation Maxwell-Ampère est :

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

où  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ,  $\vec{P}$  est la polarisation induite par les charges liées du milieu. L'action des charges libres est prise en compte dans le terme  $\vec{j}_{\text{libre}}$ . On peut écrire que :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}}\vec{H} &= \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} = \frac{\partial \vec{P}_{\text{libre}}}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{\text{libre}})}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j}_{\text{lié}} + \frac{\partial(\vec{D}_{\text{Drude}})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Le métal étant traité comme un gaz d'électrons libres,  $\vec{j}_{\text{lié}} = 0$ , et l'équation Maxwell-Ampère devient :

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}_{\text{Drude}}}{\partial t} \quad (6.102)$$

4. Aux équations (6.101) et (6.102) s'ajoutent les équations suivantes :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (6.103)$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.104)$$

et les relations constitutives :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (6.105)$$

$$\vec{D}_{\text{Drude}} = \epsilon_0 \epsilon_{r\_Drude} \vec{E}. \quad (6.106)$$

On obtient l'équation de propagation du champ magnétique en appliquant la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{B}$  :  $\mu_0 \vec{\text{rot}} \left[ \vec{\text{rot}}\vec{H} \right] = \text{grad} \left[ \text{div}\vec{B} \right] - \Delta \vec{B}$ . En appliquant les relations (6.102) et (6.103), nous obtenons :

$$\mu_0 \vec{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{D}_{\text{Drude}}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{B}$$

En tenant compte de (6.104) et (6.106), et en posant  $\vec{B} = \vec{B}_2$  nous obtenons :

$$\Delta \vec{B}_2 - \frac{\epsilon_{r\_Drude}}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_2}{\partial t^2} = 0$$

5. En posant  $\vec{B}_2 = B_{20} \exp [i(xk_{2x} - zk_{2z} - \omega t)] \vec{u}_y$ , cette relation de dispersion nous donne

$$k_{2x}^2 + k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r\_Drude}. \quad (6.107)$$

6. La relation (6.104) implique que la continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$  est :  $E_{1x}(z=0) = E_{2x}(z=0)$

soit  $E_{10x} \exp [i(xk_{1x} - \omega t)] = E_{20x} \exp [i(xk_{2x} - \omega t)]$ ,  $\forall x$  et  $\forall t$  et donc

$$E_{10x} = E_{20x} = E_{0x} \quad (6.108a)$$

$$k_{1x} = k_{2x} = k_x \quad (6.108b)$$

De façon similaire, la relation (6.102) implique que la continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{H}$  (ou  $\vec{B}$ ) est :  $B_{1y}(z=0) = B_{2y}(z=0)$  :

soit  $B_{10} \exp [i(xk_{1x} - \omega t)] = B_{20} \exp [i(xk_{2x} - \omega t)]$ ,  $\forall x$  et  $\forall t$  et donc

$$B_{10} = B_{20} = B_0 \quad (6.109)$$

De même, à l'équation  $\text{div} \vec{B} = 0$  qui impose la continuité de la composante normale de  $\vec{B}$  (lorsqu'elle existe), la relation (6.101),  $\text{div}(\vec{D}_{\text{Drude}}) = 0$  implique que la continuité de la composante normale de  $\vec{D}$  est :  $\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{1z}(z=0) = \varepsilon_0 \varepsilon_{r\_Drude} E_{2z}(z=0)$  :

$$\varepsilon_{r1} E_{10z} = \varepsilon_{r\_Drude} E_{20z} \quad (6.110)$$

7. On pose :  $\varepsilon_{r2} \equiv \varepsilon_{r\_Drude}$ ,  $\vec{D}_2 \equiv \vec{D}_{\text{Drude}}$  (dans le métal), et  $\vec{D}_1 \equiv \vec{D}$  (dans le diélectrique).

L'équation de Maxwell-Ampère dans le diélectrique s'écrit  $\text{rot} \vec{H}_1 = -i\omega \vec{D}_1$  soit

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 &= \begin{pmatrix} D_{1x} \\ 0 \\ D_{1z} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \begin{pmatrix} E_{1x} \\ 0 \\ E_{1z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot} \vec{B}_1 = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} -ik_{1z} B_{01} \\ 0 \\ ik_{1x} B_{01} \end{pmatrix} e^{i\varphi_1} \end{aligned}$$

avec  $\varphi_1 = xk_{1x} + zk_{1z} - \omega t$ .  $E_{nz} = 0$  on obtient :

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{10x} = \frac{k_{1z}}{\omega\mu_0} B_{01} \quad (6.111a)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{10z} = -\frac{k_{1x}}{\omega\mu_0} B_{01} \quad (6.111b)$$

La relation de Maxwell-Ampère dans le métal s'écrit  $\text{rot}\vec{H} = -i\omega\vec{D}_2$  soit

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 &= \begin{pmatrix} D_{2x} \\ 0 \\ D_{2z} \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \begin{pmatrix} E_{2x} \\ 0 \\ E_{2z} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot}\vec{B}_2 = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial B_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{2y}}{\partial z} \\ \frac{\partial B_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial B_{2z}}{\partial x} \\ \frac{\partial B_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{2x}}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_{2y}}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial B_{2y}}{\partial x} \end{pmatrix} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \begin{pmatrix} ik_{2z}B_{02} \\ 0 \\ ik_{2x}B_{02} \end{pmatrix} e^{i\varphi_2} \end{aligned}$$

où  $\varphi_2 = xk_{2x} - zk_{2z} - \omega t$ . Par ailleurs, comme  $\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \vec{E}_2$ , on en déduit :

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{20x} = -\frac{k_{2z}}{\omega\mu_0} B_{02} \quad (6.112a)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{20z} = -\frac{k_{2x}}{\omega\mu_0} B_{02} \quad (6.112b)$$

On peut remarquer que le rapport (6.111b)/(6.112b) conduit à (6.110). Le rapport (6.111a)/(6.112a) conduit à

$$k_{1z}\varepsilon_{r1}^{-1} + k_{2z}\varepsilon_{r2}^{-1} = 0 \quad (6.113)$$

Ici nous avons tenu compte des relations (6.108) et (6.109).

**8.** Les relations (6.100), (6.107) et (6.108b)  $\Rightarrow k_x^2 + k_{1z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r1}$  et  $k_x^2 + k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r2}$

$$\text{soit } k_{2z}^2 - k_{1z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}) \quad (6.114)$$

Les relations (6.113) et (6.114) forment un système de deux équations à deux inconnues. La solution est :

$$k_{1z} = -\frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_{r1}}{\sqrt{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r1}}} \quad (6.115)$$

$$k_{2z} = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon_{r2}}{\sqrt{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r1}}} \quad (6.116)$$

Comme  $k_x^2 + k_{1z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r1}$

On a :  $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r1}}} \quad (6.117)$

Le milieu 1 étant assimilable au vide,  $\epsilon_{r1} = 1$ .

Le milieu 2 étant assimilable à un gaz d'électrons libres, on a :

$\epsilon_{r2}(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ , où  $\omega_p$  est la fréquence plasma du métal. On obtient :

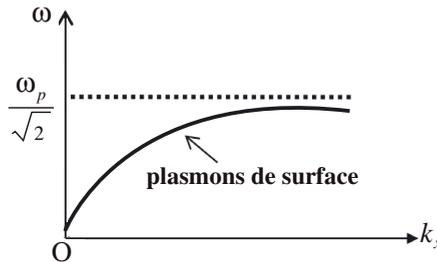
$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{2\omega^2 - \omega_p^2}} \quad (6.118)$$

9. Le tableau des signes des termes présents dans (6.118) est donné ci-après.

|                          | 0 | $\omega_p/\sqrt{2}$ | $\omega_p$ | $\infty$ |
|--------------------------|---|---------------------|------------|----------|
| $\omega^2 - \omega_p^2$  |   | -                   | -          | +        |
| $2\omega^2 - \omega_p^2$ |   | -                   | +          | +        |
| $k_x^2$                  |   | +                   | -          | ////     |
| $k_{1z}^2$               |   | -                   | +          | +        |
| $k_{2z}^2$               |   | -                   | +          | +        |

D'après ce tableau,  $k_x$  est réel si  $k_x^2$  est positif, ce qui est le cas pour  $0 < \omega < \omega_p/\sqrt{2}$ .

10.



11.

$$k_{1z} = -\frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2 - \omega_p^2/\omega^2}}$$

$$k_{2z} = \frac{\omega}{c} \frac{(1 - \omega_p^2/\omega^2)}{\sqrt{2 - \omega_p^2/\omega^2}}$$

Dans le tableau de la question 9), dans la plage  $0 < \omega < \omega_p/\sqrt{2}$ , on peut remarquer que  $k_{1z}^2$  et  $k_{2z}^2$  sont négatifs ; ce qui correspond à un champ évanescent dans la direction perpendiculaire à l'interface. L'onde se propage le long de l'interface métal/diélectrique avec un champ qui s'atténue rapidement à mesure qu'on s'éloigne de l'interface. La terminologie **onde de surface** fait justement référence à cette forte localisation du champ lumineux dans le voisinage immédiat de l'interface métal /diélectrique.

# Introduction aux guides d'ondes

## Introduction

Les ondes qui véhiculent les informations en espace libre (communications par satellite, par téléphone portable, par talkie walkie, etc.) peuvent être déviées ou détruites par des obstacles matériels ou des perturbations d'origine atmosphérique. Les faisceaux lasers utilisés dans le domaine médical pour détruire une tumeur cancéreuse, ou réparer une rétine peuvent endommager les organes sains. Dans certaines activités il est nécessaire de canaliser et sécuriser la propagation des ondes avec des guides d'ondes.

## Objectifs

**Définir** la notion de propagation guidée des ondes électromagnétiques.

**Appliquer** les lois fondamentales de l'électromagnétisme pour déterminer les conditions de propagation dans un guide d'ondes.

**Définir** la notion de modes de propagation.

## Plan

- 1 Équations générales des ondes guides
- 2 Choix du système de coordonnées et expression des champs
- 3 Classification des modes de propagation
- 4 Le guide d'onde rectangulaire
- 5 Modes TE
- 6 Modes TM

La propagation guidée consiste à canaliser une onde électromagnétique dans un espace délimité par des interfaces métalliques ou diélectriques, depuis un émetteur jusqu'à un récepteur. Comparée à la propagation en espace libre, la propagation guidée a comme principaux avantages la transmission de l'onde à l'abri de perturbations d'origine atmosphérique, avec une meilleure confidentialité, et parfois avec un faible taux d'atténuation. Le guidage des ondes est réalisé au moyen de dispositifs appelés guides d'ondes, dont la constitution varie suivant le domaine de fréquence des ondes. Ainsi :

- en ondes millimétriques et centimétriques (fréquence  $< 1$  THz), les dispositifs les plus utilisés sont des guides d'ondes creux à section rectangulaires ;
- à haute fréquence (fréquence  $> 1$  GHz), on utilise principalement des câbles coaxiaux ou des lignes bifilaires ;
- dans l'infrarouge et dans le visible ( $\sim 100$  THz), on utilise les fibres optiques.

Quel que soit son domaine d'utilisation, un guide d'ondes est généralement constitué d'un milieu vide ou d'un milieu diélectrique, délimité par des dioptries ou des parois métalliques de manière à canaliser la marche d'une onde depuis l'émetteur jusqu'au récepteur. Dans un tel milieu, les ondes ne peuvent exister que si elles obéissent aux **équations de Maxwell** et aux **conditions aux limites** sur les dioptries ou les parois métalliques.

Parmi les guides d'ondes les plus couramment utilisés dans la pratique quotidienne, figurent : les **câbles coaxiaux** et les **câbles RJ45**.

Un **câble coaxial** se présente sous la forme d'un conducteur central (à base de cuivre), entouré d'un isolant puis d'une gaine conductrice (tressée ou enroulée) qui fait office de blindage. Le tout est recouvert d'une enveloppe en PVC. Initialement développé dans les années 1970 pour les lignes numériques à longue distance, le câble coaxial a depuis été remplacé pour cette application par la fibre optique. Actuellement, on trouve principalement des câbles coaxiaux dans les applications suivantes :

- entre l'antenne TV et le poste de télévision ;
- dans le réseau câblé urbain ;
- dans certains câbles sous-marins et liaisons téléphoniques (ancienne génération).

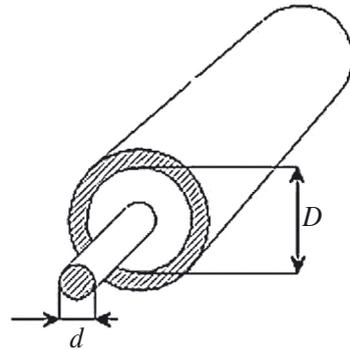


Figure 7.1– Câble coaxial.

Le câble coaxial est un support difficile à mettre en place et à raccorder (poids, rigidité, connectique délicate) mais très performant. Il offre un débit plus élevé et une moindre sensibilité aux perturbations électromagnétiques que la paire torsadée utilisée dans le câblage RJ45 (ethernet). On lui préfère cependant cette dernière dans les applications informatiques et les réseaux domestiques, pour des raisons de coût et de facilité de mise en œuvre.

**Les guides d'ondes métalliques.** Il s'agit de tuyaux métalliques à section circulaire ou rectangulaire, qui permettent de conduire les micro-ondes compatibles avec leur taille latérale de l'ordre de la longueur d'onde, dans la gamme de fréquence allant de 3 GHz à 90 GHz.

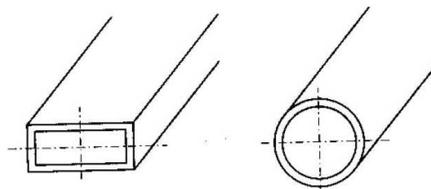


Figure 7.2 – Guides d'ondes métalliques.

**Les guides d'ondes diélectriques et les fibres optiques.** Un guide d'ondes diélectrique est un dispositif constitué d'une juxtaposition de plusieurs matériaux diélectriques d'indices différents, de telle sorte que le matériau d'indice de réfraction le plus élevé soit situé au cœur du guide. L'onde électromagnétique injectée dans le guide reste essentiellement confinée dans ce matériau à haut indice ( $n_g$ ), qualifié alors de « couche guidante ». Il existe une grande diversité de guides diélectriques, qui se distinguent tant par leurs dimensions (qui vont de l'échelle nanométrique à l'échelle kilométrique) que par leurs géométries, qui peuvent être de forme rectangulaire, cylindrique, planaire, ou d'une forme plus complexe, comme l'illustre la figure 7.3. Parmi les guides diélectriques les plus utilisés, figurent les guides planaires. Fabriqués à des dimensions nanométriques par des techniques de l'Optique intégré, ces guides planaires permettent de réaliser une multitude de fonctions optiques (couplage, modulation, multiplexage, amplification, etc.) au moyen de dispositifs très compacts. Le guide diélectrique le plus répandu est incontestablement la fibre optique, en raison de la diversité de ses domaines d'applications (Télécom, médecine, câblage et connectique, décoration, etc.).

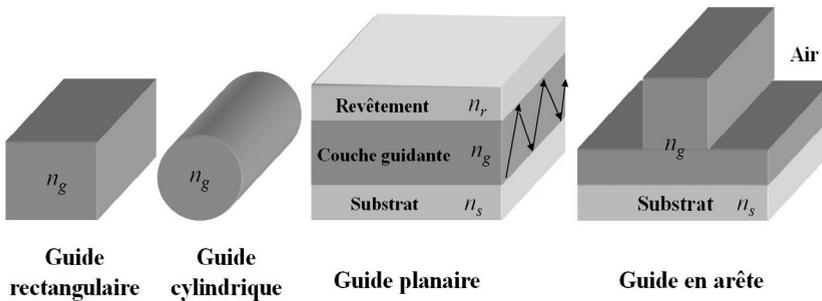


Figure 7.3 – Guides d'ondes diélectriques.

L'objectif de ce chapitre est de décrire le comportement d'une onde électromagnétique se propageant dans un matériau diélectrique occupant un espace restreint délimité pas des dioptrés ou des parois métalliques.

## 1 Équations générales des ondes guidées

Un guide d'ondes est un dispositif hétérogène, mais dans lequel un espace est spécialement conçu pour servir de support physique pour la propagation de l'onde électromagnétique. Comme ce support physique doit être le moins absorbant possible, il est

généralement constitué de l'air ambiant, ou d'un matériau diélectrique. Pour généraliser, nous supposons que ce support physique (que nous qualifierons de « **milieu de propagation** »), est un matériau diélectrique de constante électrique  $\epsilon$  et constante magnétique  $\mu$  (pouvant éventuellement être le vide, auquel cas  $\epsilon = \epsilon_0$  et  $\mu = \mu_0$ ). Nous supposons en outre que ce milieu est linéaire, homogène, et isotrope.

L'étude du comportement d'une onde électromagnétique dans un tel guide d'ondes s'effectue en principe en deux grandes étapes :

- premièrement, on met en place les équations de propagation dans le milieu de propagation ;
- ensuite, on applique les **conditions aux limites** aux endroits où se trouvent les dioptries ou parois métalliques qui délimitent le milieu de propagation.

## 1.1 Équations de Maxwell

Le milieu de propagation est un matériau diélectrique non conducteur, dépourvu de charges libres et de courants libres :  $\rho_{\text{libre}} = 0$  et  $\vec{J}_{\text{libre}} = 0$ . En tout point de ce milieu, les équations de Maxwell se mettent sous la forme suivante :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 \quad (7.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (7.2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (7.3)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (7.4)$$

## 1.2 Relations constitutives

Le milieu étant linéaire homogène et isotrope, les relations constitutives s'écrivent :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (7.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (7.6)$$

**Remarque** Ici, par souci de simplicité, nous avons considéré que le milieu de propagation est non conducteur en posant  $\vec{J}_{\text{libre}} = 0$ . Mais, lorsque ce milieu est non conducteur ( $\vec{J}_{\text{libre}} \neq 0$ ), là aussi, il n'est pas nécessaire de faire apparaître explicitement le terme  $\vec{J}_{\text{libre}}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère. Il suffit de transférer ce terme dans l'**induction électrique**, qui devient alors une **induction électrique généralisée**  $\vec{D}$ , reliée au champ

électrique par la permittivité diélectrique généralisée  $\tilde{\epsilon}$  (qui inclut la contribution du courant de déplacement, celle des charges liées, et celles des charges libres) :  $\vec{D} = \vec{E}$ .

### 1.3 Équation de propagation

Pour obtenir l'équation de propagation du champ électromagnétique, on applique la **formule du double rotationnel** ( $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$ ) aux champs électrique et magnétique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$(7.4) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \text{ compte tenu de (7.3).}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \text{ compte tenu de (7.1) et (7.5).}$$

On en déduit l'équation de propagation du champ électrique. La même procédure conduit à l'équation de propagation du champ magnétique dans le milieu. Les deux équations, appelées **équations d'Helmholtz**, s'écrivent :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7.7a)$$

$$\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (7.7b)$$

## 2 Choix du système de coordonnées et expression des champs

---

À ce stade, il faut choisir une expression analytique du champ électromagnétique qui puisse à la fois satisfaire les équations de propagation (7.7), et satisfaire les conditions aux limites du milieu de propagation. Ce choix est dicté par la géométrie du guide d'onde. Par exemple, dans le cas d'un câble coaxial, il convient de se placer dans des coordonnées cylindriques, tandis que dans le cas d'un guide d'onde rectangulaire, il est préférable de se placer dans des coordonnées cartésiennes. Dans les deux cas, le choix d'une propagation en ondes planes n'est pas envisageable à l'exception de certaines situations particulières, car une telle onde ne pourra satisfaire les multiples conditions aux limites portant sur son amplitude, qui est supposée constante. Les champs doivent être décomposés en champs longitudinaux ( $\vec{E}_z, \vec{H}_z$ ) (parallèles à l'axe de propagation choisi ici comme étant l'axe Oz), et en champs transverses ( $\vec{E}_\perp, \vec{H}_\perp$ ) (orthogonaux à l'axe Oz) :

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_z \quad \text{et} \quad \vec{H} = \vec{H}_\perp + \vec{H}_z \quad (7.8)$$

## 2.1 Expression des champs dans le système de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$

$$\vec{E}(r, \theta, z) = [E_z(r, \theta)\vec{e}_z + E_r(r, \theta)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.9a)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z) = [H_z(r, \theta)\vec{e}_z + H_r(r, \theta)\vec{e}_r + H_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta] e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.9b)$$

où  $\beta$  est la **constante de propagation**, c'est-à-dire, la composante sur l'axe Oz du vecteur d'onde. La résolution de l'équation de propagation (7.7) avec les champs (7.9) sera traitée en détail dans le prochain chapitre. Dans le présent chapitre, nous ne détaillerons la résolution de l'équation (7.7) que dans le cas où les champs s'expriment en coordonnées cartésiennes.

## 2.2 Expression des champs dans le système de coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$

$$\vec{E}(x, y, z) = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = [E_x^0(x, y)\vec{e}_x + E_y^0(x, y)\vec{e}_y + E_z^0(x, y)\vec{e}_z] F_0 \quad (7.10a)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = H_x\vec{e}_x + H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z = [H_x^0(x, y)\vec{e}_x + H_y^0(x, y)\vec{e}_y + H_z^0(x, y)\vec{e}_z] F_0 \quad (7.10b)$$

$$F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (7.10c)$$

## 2.3 Relations entre champs transverses et champs longitudinaux

Nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer toutes les composantes transverses des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  à l'aide des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ . En effet,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega\mu H_x \quad (7.11a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \quad (7.11b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \quad (7.11c)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_x \quad (7.12a)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon E_y \quad (7.12b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon E_z \quad (7.12c)$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega.$$

On peut facilement combiner les équations dans (7.11b) et (7.12a) de manière à éliminer  $H_y$  ; on obtient alors une expression de  $E_x$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . On peut aussi combiner (7.11b) et (7.12a) de manière à éliminer  $E_x$  ; ce qui conduit à une expression de  $H_y$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . Ainsi, (7.11b) et (7.12a) se combinent en :

$$E_x = -\frac{i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (7.13a)$$

$$H_y = -\frac{i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \varepsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (7.13b)$$

(7.11a) et (7.12b) donnent

$$E_y = -\frac{i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu\omega \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (7.13c)$$

$$H_x = -\frac{i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \varepsilon\omega \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (7.13d)$$

où

$$\xi^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \beta^2 \quad (7.13e)$$

Les équations (7.13a), (7.13b), (7.13c), et (7.13d), permettent de trouver toutes les composantes transversales dès que l'on connaît les deux composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ . On peut donc se contenter de résoudre l'équation de propagation uniquement pour les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ .

## 3 Classification des modes de propagation

### 3.1 Modes TEM (transverse électromagnétique)

Ce sont les modes caractérisés par  $E_z = H_z = 0$ . De tels modes, appelés aussi « modes transverses électrique-magnétique », ne peuvent exister que dans les guides d'ondes où

il est possible d'établir une différence de potentiel dans le plan transverse (comme dans le cas de la ligne coaxiale).

D'après (7.13a), pour qu'une onde TEM existe, il faut que :  $E_x \xi^2 = 0$  soit  $\xi^2 = 0$  si  $E_x \neq 0$ . La relation de dispersion des modes TEM est donc :

$$\beta^2 = 2\mu\omega^2 \tag{7.14}$$

L'équation d'Helmutz pour  $E_x$  et  $E_y$  conduit à :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{Bmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{Bmatrix} = 0 \tag{7.15}$$

**Remarque** Le fait que l'on ait pu obtenir la relation de dispersion sans avoir à appliquer les **conditions aux limites**, implique que, le champ électromagnétique ne doit comporter aucune composante sujette aux conditions de continuité. En d'autres termes, le mode TEM ne peut exister dans un guide d'ondes que si la structure géométrique du guide est telle que :

- le champ électrique  $\vec{E}$  est normal aux surfaces diélectriques ou métalliques situées aux frontières du guide. En effet la condition de continuité ne s'applique qu'à la composante tangentielle de  $\vec{E}$ .
- le champ magnétique  $\vec{B}$  doit être tangentiel aux surfaces diélectriques ou métalliques situées aux frontières du guide. En effet la condition de continuité ne s'applique qu'à la composante normale de  $\vec{B}$ .

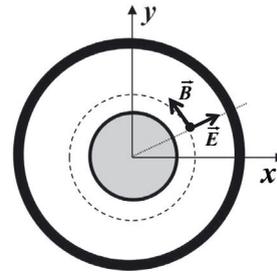


Figure 7.4 – Mode TEM dans la section transversale d'un câble coaxial.

Il en ressort que dans un mode TEM, les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation. La figure 7.4 illustre les lignes de champ d'un mode TEM au sein d'un câble coaxial.

Toutefois, il faut noter que la propagation des ondes TEM n'est pas possible dans tous les guides d'ondes. Dans de tels guides (par exemple le guide d'ondes rectangulaire), au moins l'un des deux champs ( $E_z$  ou  $H_z$ ) doit être non nul. On distingue principalement les modes TE ou TM selon que  $E_z = 0$  et  $H_z \neq 0$  ou  $E_z \neq 0$  et  $H_z = 0$ .

### 3.2 Conditions de continuité du champ électromagnétique

Pour tous les modes (excepté le mode TEM), l'obtention de la relation de dispersion dans un guide d'ondes passe obligatoirement par l'application des conditions aux limites du

guide, et plus particulièrement, les conditions de continuité de certaines composantes du champ électromagnétique.

**Continuité de la composante normale du champ magnétique  $\vec{B}$ .** Cette condition résulte du fait que la relation  $\text{div} \vec{B} = 0$  s'exprime de la même façon des deux cotés des surfaces frontalières du guide.

**Continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\vec{E}$ .** Cette condition résulte de la relation  $\text{rot} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , qui s'exprime de la même façon des deux cotés de ces surfaces frontalières.

Si ces deux conditions ne suffisent pas à obtenir la relation de dispersion, on peut leur adjoindre une équation de Maxwell supplémentaire, à condition que la relation en question s'exprime de la même façon des deux cotés des surfaces limitrophes du guide. Par exemple,  $\text{div} \vec{D} = 0$  implique une continuité de la composante normale du champ  $\vec{D}$ .

### 3.3 Modes TE (mode transverse électrique : $E_z = 0, H_z \neq 0$ )

Les expressions (7.13) conduisent à :

$$H_x^0 = -\frac{i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \quad (7.16a)$$

$$H_y^0 = -\frac{i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \quad (7.16b)$$

$$E_x^0 = -\frac{i\omega\mu}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \quad (7.16c)$$

$$E_y^0 = \frac{i\omega\mu}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \quad (7.16d)$$

Avec  $H_z^0$  donné par :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi^2 \right) H_z^0 = 0 \quad (7.17)$$

**Remarque** Des modes TE sont susceptibles de se propager dans de nombreux guides d'ondes.

### 3.4 Modes TM (mode transverse magnétique : $E_z \neq 0, H_z = 0$ )

$$H_x^0 = \frac{i\omega\varepsilon}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial y} \quad (7.18a)$$

$$H_y^0 = \frac{-i\omega\varepsilon}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \quad (7.18b)$$

$$E_x^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \quad (7.18c)$$

$$E_y^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial E_z^0}{\partial y} \quad (7.18d)$$

Avec  $E_z^0$  donné par :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi^2 \right) E_z^0 = 0 \quad (7.19)$$

## 4 Le guide d'ondes rectangulaire

On considère un guide d'ondes rectangulaire rempli d'un milieu diélectrique de constantes électrique et magnétique  $\varepsilon$  et  $\mu$ , dont les dimensions intérieures (dans sa section transverse) sont respectivement notées  $a$  et  $b$ . Par convention et sans restreindre la généralité de l'étude, nous prendrons  $a > b$ .

Le métal entourant le diélectrique est supposé parfait.

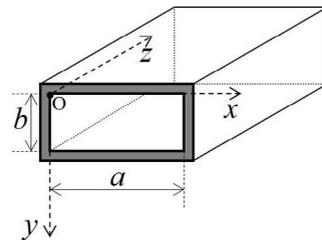


Figure 7.5 – Guide d'ondes rectangulaire.

## 5 Modes TE

### 5.1 Solutions de l'équation de propagation

Pour résoudre l'équation (7.17) on utilise la méthode de séparation des variables. On écrit :

$$H_z^0 = \psi_1(x)\psi_2(y) \quad (7.20)$$

• La substitution de (7.20) dans (7.17) conduit à :

$$\psi_2 \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \xi^2 \psi_1 \psi_2 = 0.$$

• En divisant par  $\psi_1\psi_2$ , on obtient :

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \xi^2 = 0,$$

que l'on peut remettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \xi^2 = -\frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{dy^2}. \quad (7.21)$$

On peut clairement remarquer que le premier membre de l'équation (7.21) ne dépend que de  $x$ , tandis que le second membre ne dépend que de  $y$ . On peut donc mettre cette équation sous la forme suivante :  $g(x) = f(y)$ ; ce qui n'est possible que si  $g(x) = f(y) = \text{constante} = \kappa$ . On a donc :

$$\frac{d^2\psi_2}{dy^2} + \kappa\psi_2 = 0 \quad (7.22)$$

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \xi^2 = \kappa \quad (7.23)$$

En écrivant :

$$\kappa = \nu^2 \quad (7.24)$$

la solution générale de l'équation (7.22) s'écrit :

$$\psi_2(y) = c_{01} \exp(i\nu y) + c_{02} \exp(-i\nu y) \quad (7.25)$$

où  $c_{01}$  et  $c_{02}$  sont des constantes.

En substituant  $\kappa = \nu^2$  dans l'équation (7.23), on obtient :

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = (\nu^2 - \xi^2) \psi_1, \quad \text{avec} \quad \xi^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \beta^2 \quad (7.26)$$

En écrivant :

$$\rho^2 = \xi^2 - \nu^2 \Leftrightarrow \rho^2 + \nu^2 = \xi^2 \quad (7.27)$$

la solution générale de l'équation (7.26) s'écrit :

$$\psi_1(x) = d_{01} \exp(i\rho x) + d_{02} \exp(-i\rho x) \quad (7.28)$$

où  $d_{01}$  et  $d_{02}$  sont des constantes.

En tenant compte des relations (7.16) et (7.20), les composantes transverses s'écrivent :

$$H_x^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \psi_2(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (7.29a)$$

$$H_y^0 = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \psi_1(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (7.29b)$$

$$E_x^0 = \frac{-i\omega\mu}{\xi^2} \psi_1(x) \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (7.29c)$$

$$E_y^0 = \frac{i\omega\mu}{\xi^2} \psi_2(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad (7.29d)$$

## 5.2 Application des conditions aux limites

Le métal étant supposé parfait, on peut considérer que le champ électromagnétique y est nul. De ce fait, les relations de continuité de la composante de  $\vec{E}$  tangentielle aux parois métalliques, et la composante de  $\vec{B}$  (ou  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ ) normale aux parois métalliques, imposent que ces composantes de champ s'annulent aux endroits où se situent ces parois.

- Continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y^0(x=0, y) = 0 \\ E_y^0(x=a, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0 \quad (7.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^0(x, y=0) = 0 \\ E_x^0(x, y=b) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \right|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0 \quad (7.31)$$

- Continuité de la composante normale de  $\vec{H}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y^0(x, y=0) = 0 \\ H_y^0(x, y=b) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \right|_{\substack{y=0 \\ y=b}} = 0 \quad (7.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x^0(x=0, y) = 0 \\ H_x^0(x=a, y) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0 \quad (7.33)$$

**Remarque** Dans les relations (7.30), (7.31), (7.32), et (7.33), nous avons tenu compte des expressions (7.16). D'autre part, ici, les conditions de continuité décrites par (7.31) et (7.32) aboutissent à la même relation, tandis que les conditions de continuité décrites

par (7.30) et (7.33) aboutissent à la même relation. Conséquentment, seules deux des quatre conditions de continuité suffisent pour traiter le problème.

Les relations (7.30), (7.29d) et (7.28) conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_1(0) = 0 \\ \psi'_1(a) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} d_{01} - d_{02} = 0 \\ d_{01} \exp(i\rho a) - d_{02} \exp(-i\rho a) = 0 \end{array} \right\} \text{ et } \sin(\rho a) = 0 \quad (7.34)$$

$$\rho = \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.35)$$

Les relations (7.31), (7.29c), et (7.25), conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_2(0) = 0 \\ \psi'_2(b) = 0 \end{array} \right\} \text{ soit } \left\{ \begin{array}{l} c_{01} - c_{02} = 0 \\ c_{01} \exp(i\nu b) - c_{02} \exp(-i\nu b) = 0 \end{array} \right\} \text{ et } \sin(\nu b) = 0 \quad (7.36)$$

$$\nu = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.37)$$

Les relations (7.34) et (7.36) permettent d'écrire que  $d_{01} = d_{02} = D_0$  et  $c_{01} = c_{02} = C_0$ , et de ré-exprimer les champs  $\psi_1$  et  $\psi_2$  définis dans (7.25) et (7.28), sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x) = D_0 \cos(\rho x) = D_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \\ \psi_2(y) = C_0 \cos(\nu y) = C_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{array} \right. \quad (7.38)$$

L'expression (7.20) de la composante longitudinale du champ se met alors sous la forme suivante :

$$H_z^0 = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7.39)$$

où  $H_0$  est une constante.

Les relations (7.29) fournissent la totalité des composantes transverses des champs :

$$\vec{H} = \left| \begin{array}{l} \frac{i\beta\pi m}{a\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{i\beta\pi n}{b\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{array} \right| H_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.40)$$

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} \frac{i\omega\mu\pi n}{b\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\omega\mu\pi m}{a\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ 0 \end{array} \right| H_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.41)$$

### 5.3 Relation de dispersion des modes TE

Les relations (7.26), (7.27), (7.35) et (7.37), conduisent à :  $(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 = \xi^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2$  soit

$$\beta = \beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)} \quad (7.42)$$

L'équation (7.42) est la relation de dispersion des modes TE dans le guide d'onde. On peut réécrire (7.42) sous la forme suivante :

$$\beta^2 = k_{\text{mat}}^2 - k_c^2 \quad (7.43)$$

où

- $k_{\text{mat}} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$  est le nombre d'onde que l'onde aurait dans un matériau massif ( $\varepsilon, \mu$ ) en l'absence de guidage de l'onde. Si ce matériau est de l'air, alors  $k_{\text{mat}} \simeq k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \omega/c$ .

- $k_c = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}$  est le nombre d'onde de coupure imposé par le guidage de l'onde.

### 5.4 Fréquence de coupure des modes

La relation de dispersion (7.42) n'est exploitable que si l'on se donne un couple d'entiers ( $m, n$ ). Autrement dit, tout couple d'entier ( $m, n$ ) définit un mode de propagation dont le nombre d'onde  $\beta_{mn}$  est donné par (7.42). Cette relation montre que le mode ( $m, n$ ) ne peut se propager que si  $\beta_{mn}^2 > 0$ ; ce qui n'est possible que si  $\omega > \omega_{cmn}$  où

$$\omega_{cmn} = 2\pi \nu_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \quad (7.44)$$

est la **pulsation de coupure** du mode ( $m, n$ ).

Un mode est dit évanescent, ou coupé, si  $\omega < \omega_{cmn}$ .

Le **guide d'onde rectangulaire** se comporte comme un **filtre passe-haut**.

On définit le **mode fondamental** (ou mode prépondérant) comme le mode ayant la plus petite fréquence de coupure.

Dans le guide considéré, où  $a > b$ , le mode fondamental est le mode TE<sub>10</sub>.

Plusieurs modes peuvent se propager dans un guide, mais les fréquences d'utilisation et les dimensions du guide peuvent être choisies de telle manière à ne faire propager que le **mode fondamental**.

**Exemple**

Soit un guide d'onde rectangulaire rempli d'air tel que :  $a = 2,286$  cm et  $b = 1,016$  cm. Les fréquences de coupure des modes  $TE_{mn}$  pour tous les couples d'indice  $(m,n)$  tels que,  $0 \leq m \leq 3$  et  $0 \leq n \leq 3$ , sont obtenues à partir de la relation (7.44) et sont consignées dans le tableau 7.1.

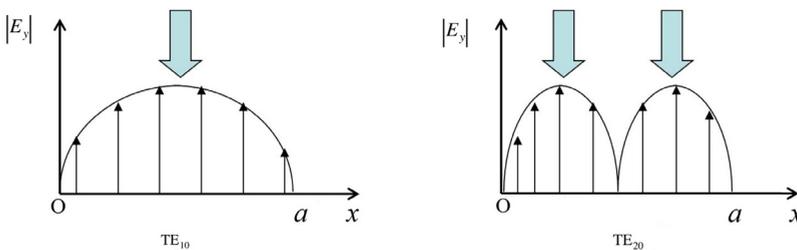
**Tableau 7.1** – Table des fréquences de coupure  $\nu_{mn}$  (en GHz) des modes  $TE_{mn}$ .

| $m \backslash n$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| 0                | –     | 14,76 | 29,53 | 44,29 |
| 1                | 6,56  | 16,15 | 30,2  | 44,77 |
| 2                | 13,12 | 19,75 | 32,31 | 46,19 |
| 3                | 19,68 | 24,60 | 35,49 | 48,47 |

Le mode ayant la plus petite fréquence de coupure (mode fondamental) est le mode  $TE_{10}$ . Sa fréquence de coupure est de 6,56 GHz. C'est lorsque la fréquence atteint 13,12 GHz que le mode  $TE_{20}$  est à son tour excité. La propagation devient alors multimodale. De manière générale, le nombre de modes augmentent à mesure que la fréquence augmente.

Les paramètres  $m$  et  $n$  caractérisent la périodicité du champ électrique suivant Ox et suivant Oy.

- $m = 0$  signifie qu'il n'y a pas d'extremum de champ  $E$  suivant Ox
- $n = 1$  signifie qu'il y a un extremum de champ  $E$  suivant Oy



**Figure 7.6** – Les modes  $TE_{10}$  et  $TE_{20}$ .

De manière générale, dans le mode  $TE_{mn}$ , on trouve  $m$  extrema de champ  $E$  dans la direction Ox et  $n$  extrema suivant Oy.

## 6 Modes TM

La méthodologie d'étude des modes TM est en tout point similaire à celle que nous avons adoptée pour les modes TE. Nous aboutissons à l'expression des composantes des champs qui suit :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{-i\beta\pi m}{a\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\beta\pi n}{b\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{pmatrix} E_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.45)$$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega\varepsilon\pi n}{b\xi^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\omega\varepsilon\pi m}{a\xi^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (7.46)$$

Par ailleurs, on aboutit à la même relation de dispersion que celle trouvée pour les modes TE.

- 1 Lorsqu'elles se propagent librement, les ondes électromagnétiques peuvent s'éparpiller, être déviées ou détruites par des obstacles matériels ou des perturbations d'origine atmosphérique.
- 2 Les guides d'ondes sont des dispositifs qui permettent de canaliser et de sécuriser la propagation des ondes. Ils sont constitués de parois métalliques ou de dioptrés (interface entre deux diélectriques), qui servent à confiner les ondes à l'intérieur du guide.
- 3 Les ondes ne peuvent se propager dans les guides d'ondes que si elles satisfont aux équations de Maxwell en tout point du guide, c'est-à-dire, à l'intérieur du guide et sur les parois métalliques ou diélectriques du guide.
- 4 Sur les parois (métalliques ou diélectriques) du guide d'onde, les équations de Maxwell conduisent aux conditions limites à satisfaire :
  - (i) Continuité de la composante tangentielle du champ électrique, si l'onde en est dotée.
  - (ii) Continuité de la composante normale du champ magnétique, si l'onde en est dotée. L'application de ces conditions limites est indispensable pour obtenir la relation de dispersion du guide d'ondes.
- 5 Dans le cas d'une paroi diélectrique, deux conditions limites supplémentaires s'appliquent, à savoir, la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique  $H$  (si l'onde en est dotée), et la continuité de la composante normale du champ d'induction électrique  $D$  (si l'onde en est dotée).
- 6 Pour se propager dans un guide d'ondes, la lumière adopte certaines formes particulières de répartition de l'intensité lumineuse de la section transverse du guide, qui dépendent de la fréquence du champ électromagnétique. On les appelle modes de propagation.
- 7 Chaque mode se propage à une vitesse et une longueur d'onde qui lui sont propres. À basse fréquence, un seul mode est (ou même aucun mode n'est) capable de se propager dans le guide d'ondes. À mesure que la fréquence augmente, le nombre de modes autorisés à se propager augmente.



- 7.1** Un guide d'onde sert à canaliser la marche d'une onde électromagnétique à l'aide de surfaces diélectriques ou métalliques. La détermination de la relation de dispersion passe par l'application des équations de Maxwell à l'intérieur du guide, et l'application des **conditions aux limites** sur les surfaces limitrophes du guide. Identifier ci après ces conditions :
- a. continuité de la composante normale du champ électrique
  - b. continuité de la composante normale du champ magnétique
  - c. continuité de la composante tangentielle du champ électrique
  - d. continuité de la composante tangentielle du champ magnétique
- 7.2** Préciser les conditions de continuité à l'interface entre deux diélectriques parfaits, non magnétiques :
- a. continuité de la composante normale du champ  $\vec{D}$
  - b. continuité de la composante normale du champ  $\vec{H}$
  - c. continuité de la composante tangentielle du champ  $\vec{D}$
  - d. continuité de la composante tangentielle du champ  $\vec{H}$
- 7.3** Dans un câble coaxial, on peut faire propager une onde électromagnétique dont le champ électrique est en tout point normal aux surfaces métalliques du guide, tandis que le champ magnétique est en tout point tangentiel à ces surfaces. Dans ce cas aussi, la détermination de la relation de dispersion nécessite d'appliquer des **conditions aux limites** sur les surfaces du guide :
- a. vrai
  - b. faux
- 7.4** Quelle que soit sa fréquence, une onde électromagnétique peut se propager dans un guide d'ondes :
- a. vrai
  - b. faux
- 7.5** Les ondes aptes à se propager dans une fibre sont appelées **modes de propagation**. On désigne par ce terme :
- a. des ondes qui se propagent à la même fréquence, avec des longueurs d'onde différentes
  - b. des ondes qui se propagent avec la même longueur d'onde, et des fréquences différentes



# Entraînez-vous

**7.1** On rappelle que la relation de dispersion des modes de type TE (transverse électrique) dans un guide d'onde rectangulaire rempli d'air, est donnée par :

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)},$$

où  $a$  et  $b$  désignent les dimensions intérieures du guide (dans sa section transverse),  $\beta$  est la constante de propagation,  $\omega$  est la pulsation de l'onde, ( $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ) sont les constantes électrique et magnétique de l'air (assimilable au vide). À tout couple d'indice  $(m, n)$  on peut alors associer un mode  $TE_{mn}$ , et une constante de propagation  $\beta_{mn}$ .

1. Sachant qu'un mode  $TE_{mn}$  ne peut se propager que si  $\beta_{mn}^2 > 0$ , donner l'expression de la pulsation minimale au-delà de laquelle on déclenche la propagation du mode  $TE_{mn}$ . Cette pulsation sera notée  $\omega_{c_{mn}}$ . La fréquence correspondante,  $\nu_{c_{mn}}$ , est la fréquence de coupure du mode  $TE_{mn}$ .

2. Dresser le tableau des fréquences de coupures pour un guide de dimensions :  $a = 0,284$  cm,  $b = 0,568$  cm, pour tous les couples d'indice  $(m, n)$  tels que,  $0 \leq m \leq 3$  et  $0 \leq n \leq 3$ .

3. Identifier le couple d'indice  $(n_0, m_0)$  correspondant au mode fondamental de propagation,  $TE_{m_0 n_0}$ . Quelle est sa fréquence de coupure ? Est-il possible de faire propager ce mode tout seul ? Si oui, dans quelle plage de fréquence ?

4. Est-il possible de faire propager le mode  $TE_{10}$  tout seul ?

**7.2** Un milieu diélectrique non conducteur, de constante électrique  $\epsilon$  et constante magnétique  $\mu$ , occupe un espace limité par deux plans parfaitement conducteurs, parallèles au plan  $yOz$ , en  $x = 0$  et  $x = d$ , comme illustré dans la figure 7.7. Une onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe  $Oz$ , dans le sens positif. On désigne par  $\beta$  la constante de propagation.

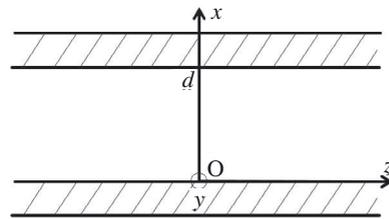


Figure 7.7 – Schéma du guide d'onde.

1. Établir l'équation de propagation de la composante longitudinale du champ d'excitation magnétique  $H_z$ .

2. Montrer que pour les modes transverse électrique (TE), les composantes transversales du champ électromagnétique s'expriment toutes en fonction des dérivées de la composante longitudinale du champ d'excitation magnétique  $H_z$ .

3. Donner l'expression de toutes les composantes du champ électromagnétique pour les modes transverse électrique (TE), et la relation de dispersion de ces modes.



**7.1** Réponses b, c ; **7.2** Réponses a, b, d ; **7.3** Réponse b ; **7.4** Réponse b ; **7.5** Réponse a.



**7.1** 1. La relation de dispersion montre que le mode  $TE_{mn}$  ne peut se propager que si  $\beta_{mn}^2 > 0$  ; ce qui n'est possible que si  $\omega > \omega_{cmn}$  où

$$\omega_{cmn} = 2\pi\nu_{cmn} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}}$$

2.

**Tableau 7.2** – Table des fréquences de coupure  $\nu_{cmn}$  (en GHz) des modes  $TE_{mn}$ .

| $m \backslash n$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
|------------------|-------|-------|-------|-------|
| 0                | –     | 26,40 | 52,82 | 79,22 |
| 1                | 52,82 | 59,05 | 74,69 | 95,22 |
| 2                | 105,6 | 108,9 | 118,1 | 132   |
| 3                | 158,4 | 160,6 | 167   | 177,1 |

3. Le mode fondamental de propagation est celui qui a la fréquence de coupure la plus basse. D'après le tableau des fréquences de coupure, il s'agit du mode  $TE_{01}$ . Sa fréquence de coupure est  $\nu_{c01} = 26,40$  GHz.

Donc pour  $\nu > \nu_{c01}$  le mode  $TE_{01}$  se propage. La fréquence de coupure la plus proche de 26,40 GHz est 52,82 GHz, qui correspond aux modes  $TE_{10}$  et  $TE_{02}$ .

Il est possible de faire propager le mode fondamental ( $TE_{01}$ ) tout seul, à condition de couper tous les autres modes ; ce qui automatiquement réalisé en coupant les modes  $TE_{10}$  et  $TE_{02}$ . Pour cela on doit choisir une fréquence  $\nu$  telle que  $26,40 \text{ GHz} < \nu < 52,82 \text{ GHz}$

4. Il n'est pas possible de faire propager le mode  $TE_{10}$  tout seul. En effet, dès que la fréquence excède 52,82 GHz, les modes  $TE_{01}$ ,  $TE_{10}$ , et  $TE_{02}$ , se propagent.

## 7.2 1. Équations de Maxwell

$$\begin{cases} \text{div} \vec{D} = 0 & (7.47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (7.48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{B}) = 0 & (7.49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{rot}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (7.50) \end{cases}$$

**Relations constitutives :**

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} & (7.51) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \mu \vec{H} & (7.52) \end{cases}$$

### Équation de propagation

On applique la **formule du double rotationnel** au champ  $\vec{H}$ , puis les équations (7.49), (7.52), (7.50), (7.51), et (7.48) :

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot}} \left[ \overline{\text{rot}} \left( \vec{H} \right) \right] &= \overline{\text{grad}} \left[ \text{div} \left( \vec{H} \right) \right] - \Delta \vec{H} \Rightarrow \\ -\Delta \vec{H} &= \overline{\text{rot}} \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \frac{\varepsilon \overline{\text{rot}} \left( \vec{E} \right)}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned}$$

La projection suivant l'axe Oz conduit à :  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H_z - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0$ .

- Comme l'onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe Oz, dans le sens positif, il possède nécessairement un terme de propagation de type  $F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}$  ; ce qui implique que :  $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$ .
- Les plans métalliques s'étendant indéfiniment dans la direction Oy, les composantes du champ électromagnétique ne dépendent pas de y :  $\frac{\partial}{\partial y} \leftrightarrow 0$ .

On a donc finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} &= -(\mu \varepsilon \omega^2 - \beta^2) H_z = -\xi^2 H_z = (i\xi)^2 H_z \\ \xi^2 &= \mu \varepsilon \omega^2 - \beta^2 \end{aligned} \quad (7.53)$$

où  $H_z$  est de la forme  $H_z = H_0(x)F_0 = H_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)}$ .

$$2. \overline{\text{rot}} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega \varepsilon E_x \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega \varepsilon E_y \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega \varepsilon E_z \quad (7.56)$$

$$\overline{\text{rot}} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \text{ soit } \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega \mu H_x \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega \mu H_y \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega \mu H_z \quad (7.59)$$

- Comme l'onde progressive sinusoïdale se propage suivant l'axe Oz, dans le sens positif, il possède nécessairement un terme de propagation de type  $F_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}$  ; ce qui implique que :  $\frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$ .

- L'onde considérée étant transverse électrique, on a  $E_z = 0$ .

En éliminant  $H_x$  dans (7.55) et (7.57) on obtient  $E_y = \frac{i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$

En éliminant  $E_y$  dans (7.55) et (7.57) on obtient  $H_x = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}$

En éliminant  $H_y$  dans (7.54) et (7.58) on obtient  $E_x = \frac{-i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$

En éliminant  $E_x$  dans (7.54) et (7.58) on obtient  $H_y = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}$

où  $\xi^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2$ .

3. En tenant compte de la question 2., on a :

$$E_x = \frac{-i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, H_y = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, H_x = \frac{-i\beta}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, E_y = \frac{i\mu\omega}{\xi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

La condition de continuité de la composante tangentielle du champ électrique,  $E_y$ , impose que le champ  $E_y$  s'annule sur les surfaces du conducteur en  $x = 0$  et  $x = d$ . Cela n'est possible que si l'amplitude des composantes du champ électromagnétique sont des fonctions sinusoïdales de  $x$ . En d'autres termes, il faut que la solution de l'équation (7.53) soit une oscillation sinusoïdale. Cela n'est possible que si  $\xi^2 > 0$ . On a alors :

$$H_0(x) = \alpha^+ \exp(i\xi x) + \alpha^- \exp(-i\xi x) \quad (7.60)$$

$$E_y = \frac{-i\mu\omega}{\xi} [\alpha^+ \exp(i\xi x) - \alpha^- \exp(-i\xi x)] \quad (7.61)$$

- Condition de continuité de  $E_y$  aux interfaces  $x = 0$  et  $x = d$ .

$$\begin{cases} E_y(0) = 0 \\ E_y(d) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha^+ = \alpha^- \\ \alpha^+ \exp(i\xi d) - \alpha^- \exp(-i\xi d) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \exp(2i\xi d) = 1 \rightarrow 2\xi d = 2m\pi$$

$$\xi = \frac{m\pi}{d} \quad (7.62)$$

On en déduit :

$$H_0(x) = A_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{d}\right), H_z = H_0(x)F_0 = H_0(x)e^{i(\omega t - \beta z)}$$

où  $A_0 = 2\alpha^+$ .

$$H_x = iA_0\beta \frac{d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}, E_y = -i\mu\omega A_0 \frac{d}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi x}{d}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}.$$

La relation de dispersion de ces modes est donnée par  $\xi^2 = \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 = \mu\varepsilon\omega^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$

$$\beta = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2}$$

# La fibre optique

## Introduction

La fibre optique est un fil de verre capable de guider la lumière sur de très grandes distances sans trop l'atténuer. Elle constitue actuellement le support physique d'Internet, le réseau mondial des télécoms. Son diamètre, à peine de la taille d'un cheveu, en fait un outil très apprécié dans des domaines aussi variés que le médical (pour l'observation de l'intérieur du corps humain et pour certains traitements), l'aéronautique (inspection des soudures dans des réacteurs d'avion), l'électronique et l'optoélectronique (câblage et connectique), les capteurs, etc.

## Objectifs

**Connaître** les lois qui gouvernent la propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice.

**Expliquer** le contenu physique de ces lois, en partant des équations de Maxwell jusqu'aux modes de propagation.

## Plan

- 1 Description physique de la fibre à saut d'indice
- 2 Équations de propagation
- 3 Expressions des champs en coordonnées cylindriques
- 4 Solutions de l'équation de propagation
- 5 Paramètre de fréquence normalisée  $V$
- 6 Relation de dispersion
- 7 Classification générale des modes de propagation
- 8 Modes de propagation dans les fibres à faible guidage

Une **fibre optique** est un fil en verre ou en plastique très fin, qui a la propriété d'être un excellent guide de la lumière. Inventée dans les années 1960, ce guide d'ondes a d'abord été exploité dans le domaine médical pour réaliser des diagnostics *in vivo* (dans le corps du malade), et pour le traitement de certaines pathologies par effet thermique, tels que : pulvériser un calcul rénal, découper une tumeur ou réparer une rétine. Au fil des ans, les applications de la fibre optique se sont rapidement développées, et se sont étendues à des domaines très divers, tels que les capteurs, le câblage et la connectique en électronique et optoélectronique, la décoration, ou le transport d'informations. À l'heure actuelle, le secteur d'activité où l'utilisation des fibres optiques est quantitativement la plus importante est de loin celui du transport de l'information. La fibre optique constitue

d'ailleurs l'un des éléments clés de la révolution des télécommunications, du fait de ses multiples avantages par rapport aux autres supports de communication, à savoir : sa très faible atténuation sur une grande plage de fréquence, son faible coût de fabrication, son faible encombrement, l'excellente stabilité de propagation qu'elle procure, son insensibilité aux perturbations électromagnétiques, et surtout, sa très grande bande passante ( $\sim 30$  THz). Elle peut transporter jusqu'à 100 000 fois plus d'informations qu'un câble de cuivre.

C'est une dizaine d'années après son invention que la fibre optique a commencé à servir comme support physique pour le transport de l'information. La fibre optique fut alors d'abord utilisée en téléphonie avant de révolutionner l'ensemble du domaine des communications, allant des réseaux LAN (réseaux d'équipements informatiques connectés entre eux et partageant des données et programmes communs, très utilisés dans les établissements scolaires, les bureaux, les sociétés, les usines, etc.) jusqu'au réseau Internet. En dépit de tous les progrès accomplis grâce à la technologie des fibres optiques, les besoins liés à ces nouveaux outils de communication, tant au niveau des débits de transmission qu'au niveau du déploiement de la fibre dans des territoires éloignés des centres urbains, restent immenses et encore très loin d'être assouvis. La technologie des fibres optiques, de même que son déploiement, continuent à se développer avec le soutien des pouvoirs publics et des organisations non gouvernementales telles que le **FTTH Council Europe** (FTTH : *Fibre To The Home*, qui signifie « fibre jusqu'au foyer ») qui œuvrent dans le but de favoriser l'accès d'un plus grand nombre d'usagers (particuliers ou entreprises) aux réseaux de communication à ultra-haut débit par fibre optique.

Ces dernières années, de nouveaux types de fibre optique ont été mis au point, telles que les fibres à cristaux photoniques, permettant des gains significatifs de performances dans le domaine du traitement optique de l'information par des techniques non linéaires, dans l'amplification optique ou encore dans la génération de sources lumineuses appelées super-continuum utilisables par exemple pour le diagnostic médical.

Ce chapitre examine les conditions de propagation de la lumière dans une fibre optique standard, c'est-à-dire, une fibre constituée de deux matériaux diélectriques agencés sous la forme de cylindres concentriques. Elle est composée, dans sa partie centrale, d'un premier diélectrique de forme cylindrique et de faible rayon (de l'ordre de quelques  $\mu\text{m}$ ), appelé **cœur** de la fibre. Ce cœur est entouré d'un second matériau diélectrique appelé **gaine optique**. L'ensemble est entouré d'une troisième couche de protection en plastique ou en polymère. Les deux matériaux diélectriques sont conçus de telle sorte que l'indice de réfraction du cœur ( $n_1$ ) soit supérieur à l'indice de la gaine ( $n_2$ ); ce qui permet de confiner et guider la lumière sur de grandes distances. La fibre optique standard est largement utilisée dans le domaine télécom, où elle se décline sous différentes versions selon la distance de communication à couvrir et le débit de transmission des informations qu'elle doit supporter.

La version la plus répandue est la **fibre à saut d'indice**, dans laquelle l'indice de réfraction reste constant dans le cœur et varie de manière abrupte lorsqu'on passe du cœur à la gaine.

Les fibres à saut d'indice se divisent elles-mêmes en deux catégories : les **fibres à saut d'indice multi-modes** (utilisées principalement pour des transmissions à courtes distances, de l'ordre de quelques mètres jusqu'à une centaine de kilomètres) et les **fibres à saut d'indice monomodes** (que l'on utilise pour les communications à longue distance, de l'ordre d'une centaine de kilomètres jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres). L'autre

version de fibre standard très répandue est la **fibre à gradient d'indice**, qui est une fibre dans laquelle l'indice décroît graduellement dans la direction transversale de la fibre, du centre du cœur vers la gaine, jusqu'à atteindre la valeur de l'indice de réfraction  $n_2$  de la gaine. Les fibres à gradient d'indice sont principalement utilisées pour des transmissions à moyenne portée, correspondant à une situation intermédiaire entre les domaines respectifs d'utilisation de la fibre à saut d'indice multi-mode et de la fibre à saut d'indice monomode. La figure 8.1 illustre ces différents types de fibre.

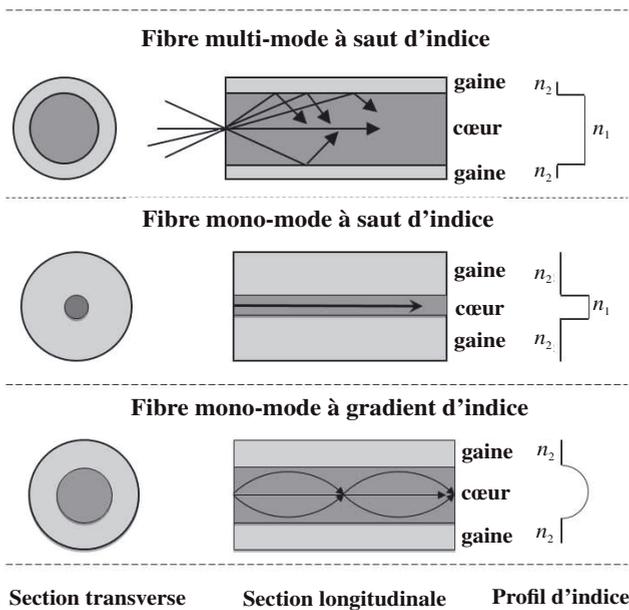


Figure 8.1– Schéma de fibres télécoms.

### Encart 8.1 Les communications par fibre optique

Le principe du transport de la lumière le long de fines fibres de verre remonte à la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle. Cependant, les dispositifs conçus à cette époque étaient plutôt rudimentaires. La première application très élaborée de la fibre optique fut le fibroscope flexible inventée au début des années 1950 par Abraham van Heel et Harold Hopkins. Cet appareil permettait la transmission d'une image le long

de fibres en verre. Il fut particulièrement utilisé en endoscopie, pour observer l'intérieur du corps humain et pour inspecter des soudures dans des réacteurs d'avion. Les premières fibres fabriquées présentaient alors un inconvénient majeur : un facteur d'atténuation très élevé limitant sévèrement les distances de propagation. Il fallut attendre l'invention du laser dans les années 1960 et l'amélioration des processus de fabrication permettant une baisse considérable du facteur d'atténuation, pour qu'émerge l'idée d'utiliser la fibre optique pour les communications à grande distance. Cette idée fut mise en pratique par l'ingénieur américano-britannique **Charles K. Kao**, qui réalisa en 1966 les premières expériences de transmissions par fibre optique (pour lesquelles il reçut le prix Nobel de physique en 2009). En France, le premier système de transmission par fibre optique fut installé en 1980, à Paris, entre les centraux téléphoniques des Tuileries et Philippe-Auguste. On estime que depuis 2005 plus de 80 % des communications à longue distance sont transportées le long de plus de 25 millions de kilomètres de câbles à fibre optique partout dans le monde. Ce sont ces câbles qui constituent actuellement le support physique d'Internet.

## 1 Description physique de la fibre à saut d'indice

Dans la suite de ce chapitre, nous nous focaliserons sur la fibre optique à saut d'indice à symétrie cylindrique, pouvant être monomode ou multi-mode (figure 8.2).

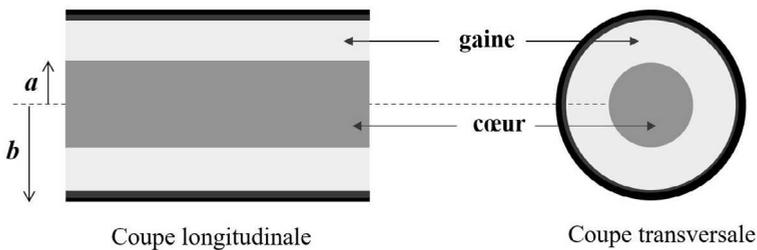


Figure 8.2 – Fibre à saut d'indice.

Le constituant de base des fibres à saut d'indice est la silice amorphe ( $\text{SiO}_2$ ). C'est lors de la fabrication de ces fibres que des dopants sont incorporés dans la silice afin de modifier l'indice de réfraction et pour sculpter le profil d'indice de la fibre. Le cœur de la fibre est constitué d'un matériau de silice amorphe légèrement dopé, d'indice  $n_1$ . Il est entouré d'une gaine optique en silice légèrement dopée de manière à ce que son indice  $n_2$  soit très légèrement inférieur à celui du cœur. Le germanium, l'aluminium ou le phosphore, sont généralement utilisés pour augmenter l'indice du cœur  $n_1$ . À l'inverse, le bore ou le fluor font diminuer l'indice de la gaine  $n_2$ . Ce type

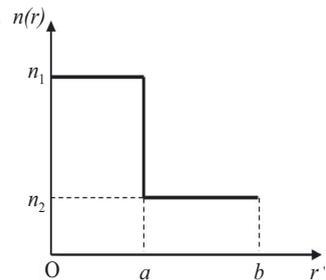


Figure 8.3 – Profil d'indice.

de fibre possède des dimensions de l'ordre de la centaine de micromètre. La différence d'indice entre le cœur et la gaine est relativement faible, de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$  ; ce qui conduit à une différence relative d'indice,  $\Delta$ , relativement très faible :

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \ll 1.$$

Le diamètre de la gaine,  $2b$ , est en général de  $125 \mu\text{m}$ , mais peut aussi être de  $140 \mu\text{m}$  (cas de certaines fibres multi-modes). Le rayon du cœur,  $a$ , se situe entre 1 et  $100 \mu\text{m}$ .

Tout point  $M$  à l'intérieur de la fibre est facilement repérable dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , comme représenté dans la figure 8.4. Le point  $O$ , origine du repère, est fixé à l'entrée de la fibre. On désigne par  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  les vecteurs unitaires du repère orthonormé associé à la fibre. Dans la suite de ce chapitre, on recherche les conditions de propagation d'une onde le long de l'axe  $Oz$ , qui est commun au cœur et à la gaine.

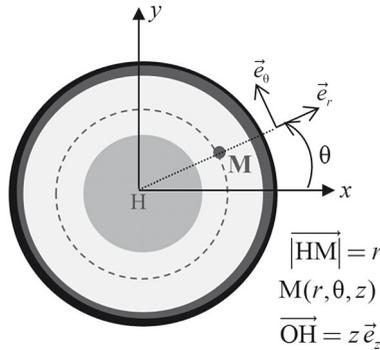


Figure 8.4 – Repère associé à la fibre.

## 2 Équations de propagation

### 2.1 Équations de Maxwell

La fibre est constituée de matériaux diélectriques (cœur et gaine) non conducteurs, dépourvus de charges libres et de courants libres :  $\rho_{\text{libre}} = 0$  et  $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$ . En tout point situé au sein de la fibre les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme suivante :

$$\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 \tag{8.1}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \tag{8.2}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{8.3}$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{8.4}$$

## 2.2 Relations constitutives

Lorsqu'elle est soumise à de faibles intensités lumineuses, une fibre se comporte comme un milieu linéaire homogène et isotrope. Les relations constitutives s'écrivent alors :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (8.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.6)$$

où  $\varepsilon$  est la permittivité diélectrique du milieu, qui vaut  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 n_1^2$  dans le cœur et  $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 n_2^2$  dans la gaine. Par ailleurs, les milieux constituant la fibre n'ont aucune propriété magnétique particulière. La perméabilité magnétique y est donc assimilable à celle du vide :  $\mu \simeq \mu_0$  aussi bien dans le cœur que dans la gaine.

## 2.3 Équations de propagation

Pour obtenir l'équation de propagation du champ électromagnétique, on applique la formule du double rotationnel ( $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$ ) aux champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{E} &= \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \\ (8.4) \Rightarrow \text{rot rot } \vec{E} &= -\mu_0 \text{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \text{ compte tenu de (8.3)} \\ &\text{et (8.5).} \end{aligned}$$

Par ailleurs  $\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ , compte tenu de (8.1) et (8.5).

On en déduit l'équation de propagation du champ électrique. La même procédure conduit à l'équation de propagation du champ magnétique. Les deux équations s'écrivent :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (8.7a)$$

$$\Delta \vec{H} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (8.7b)$$

Les équations (8.7a) et (8.7b) sont les **équations d'Helmholtz**.

## 3 Expressions des champs en coordonnées cylindriques

Compte tenu de la symétrie du milieu, il convient d'exprimer les champs dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E_z \vec{e}_z + E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \vec{E}_0(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.8a)$$

$$\vec{H}(r, \theta, z) = H_z \vec{e}_z + H_r \vec{e}_r + H_\theta \vec{e}_\theta = \vec{H}_0(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.8b)$$

où  $\beta$  est la **constante de propagation**, c'est-à-dire la composante vecteur d'onde sur l'axe Oz.

### 3.1 Relations entre champs transverses et champs longitudinaux

Nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer toutes les composantes transverses des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  à l'aide des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ . En coordonnées cylindriques, les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial z} = -i\omega\mu_0 H_r & (8.9a) \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i\omega\mu_0 H_\theta & (8.9b) \\ \frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = -i\omega\mu_0 H_z & (8.9c) \end{cases}$$

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} = i\omega\varepsilon E_r & (8.10a) \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = i\omega\varepsilon E_\theta & (8.10b) \\ \frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} = i\omega\varepsilon E_z & (8.10c) \end{cases}$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow -i\beta \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega.$$

Notons que, si on considère les composantes  $E_z$  et  $H_z$  comme des quantités connues, alors les équations (8.9a) et (8.10b) deviennent un système de deux équations à deux inconnues :  $E_\theta$  et  $H_r$ . On peut donc (par des opérations d'addition ou de soustraction membre à membre) exprimer facilement chacune de ces inconnues en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . De la même manière, on remarque que les équations (8.9b) et (8.10a) forment un système de deux équations à deux inconnues ( $E_r$  et  $H_\theta$ ), permettant d'exprimer  $E_r$  et  $H_\theta$  en fonction de  $E_z$  et  $H_z$ . On obtient facilement :

$$(8.9b) \text{ et } (8.10a) \Rightarrow E_r = \frac{-i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\mu_0 \omega}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \right) \quad (8.11a)$$

$$H_\theta = \frac{-i}{\xi^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} + \varepsilon \omega \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (8.11b)$$

$$(8.9a) \text{ et } (8.10b) \Rightarrow E_\theta = \frac{-i}{\xi^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (8.11c)$$

$$H_r = \frac{-i}{\xi^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\varepsilon \omega}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta} \right) \quad (8.11d)$$

où

$$\xi^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2, \quad k_0 = \omega/c. \quad (8.11e)$$

Les équations (8.11a), (8.11b), (8.11c), et (8.11d), permettent de trouver toutes les composantes transversales dès que l'on connaît les deux composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ . On peut donc se contenter de résoudre l'équation de propagation uniquement pour les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ .

## 4 Solutions de l'équation de propagation

Considérons la fonction scalaire  $\psi = \psi(r, \theta, z)$  qui représente indifféremment une des composantes  $E_z$  ou  $H_z$ . La projection de l'équation de propagation (8.7) dans la direction Oz donne :

$$\Delta\psi - \varepsilon\mu_0 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (8.12)$$

où l'expression du laplacien en coordonnées cylindrique est donnée par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Pour résoudre l'équation (8.12) on utilise la **méthode de séparation des variables**. On écrit :

$$\begin{cases} \psi = \varphi(r, \theta) e^{-i(\beta z - \omega t)} \\ \varphi \equiv \psi_1(r) \psi_2(\theta) \end{cases} \quad (8.13)$$

La substitution de (8.13) dans (8.12) conduit à :

$$\left[ \psi_2 \left( \frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} - \beta^2 \psi_1 \psi_2 + \varepsilon\mu_0 \omega^2 \psi_1 \psi_2 \right] e^{i\varphi} = 0.$$

En divisant par  $\psi_1 \psi_2$ , on obtient :

$$\frac{1}{\psi_1} \left( \frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} - \beta^2 + \varepsilon\mu_0 \omega^2 = 0$$

En multipliant par  $r^2$ , on obtient :

$$\frac{r^2}{\psi_1} \left( \frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + (\varepsilon\mu_0 \omega^2 - \beta^2) r^2 = -\frac{1}{\psi_2} \frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} \quad (8.14)$$

On peut clairement remarquer que le premier membre de l'équation (8.14) ne dépend que de  $r$ , tandis que le second membre ne dépend que de  $\theta$ . On peut donc mettre cette équation sous la forme suivante :  $g(r) = f(\theta)$  ; ce qui n'est possible que si les fonctions  $g$  et  $f$  sont égales à une même constante. En écrivant  $g(r) = f(\theta) = \text{constante} = \kappa$ , on

obtient :

$$\frac{d^2\psi_2}{d\theta^2} + \kappa\psi_2 = 0, \quad (8.15)$$

$$\frac{r^2}{\psi_1} \left( \frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} \right) + (\varepsilon\mu_0\omega^2 - \beta^2) r^2 = \kappa. \quad (8.16)$$

En écrivant  $\kappa = v^2$  avec  $v$  réel, la solution de l'équation (8.15) s'écrit :

$$\psi_2(\theta) = c_0 \exp(iv\theta) \quad (8.17)$$

où  $c_0$  est une constante. Compte tenu de la symétrie cylindrique de la fibre,  $\psi_2$  doit être périodique de période  $2\pi$

$$\psi_2(\theta + 2\pi) = \psi_2(\theta) \text{ soit } c_0 \exp [iv(\theta + 2\pi)] = c_0 \exp(iv\theta) \Rightarrow \exp(2i\pi v) = 1.$$

L'équation  $\exp(2i\pi v) = 1$  n'a de solution que si  $v$  est un nombre entier. Nous écrivons par la suite :

$$v = m, \quad \text{avec } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Pour chaque valeur de  $m > 0$ , l'expression (8.17) correspond à deux solutions réelles pour  $\psi_2$  ;

$$\psi_2(\theta) = \begin{cases} c_0 \cos(m\theta) \\ c_0 \sin(m\theta) \end{cases} \quad (8.18)$$

où le nombre entier  $m$  définit la périodicité azimutale du champ électromagnétique dans la fibre. Les deux solutions définies dans la relation (8.18) peuvent être stockées dans les parties réelle et imaginaire de la fonction complexe définie par :

$$\tilde{\psi}_2(\theta) = c_0 \exp(im\theta) \quad (8.19)$$

En substituant  $\kappa = v^2 = m^2$  dans l'équation (8.16), on obtient :

$$\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \left( \varepsilon\mu_0\omega^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1 = 0.$$

En posant :  $\varepsilon\mu_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2 = k_0^2n^2$ , où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$  est le nombre d'onde dans le vide et  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide, et sachant que l'indice de réfraction  $n$  diffère selon qu'on se trouve dans le cœur ou dans la gaine, l'équation radiale des champs s'écrit finalement :

$$\frac{d^2\psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + \left( k_0^2n_i^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1 = 0 \quad (8.20)$$

où  $n_i = n_1$  pour  $0 \leq r < a$  (dans cœur), et  $n_i = n_2$  pour  $a < r < b$  (dans la gaine).

Nous montrerons dans la prochaine section, que l'onde n'est guidée que si sa constante de propagation  $\beta$  est telle que :

$$k_0n_2 < \beta < k_0n_1 \quad (8.21)$$

En écrivant :

$$u = a(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (8.22a)$$

$$w = a(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2} \quad (8.22b)$$

l'équation radiale des champs se met sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} + \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1(r) = 0 \quad \text{pour } r < a \text{ (cœur)} \quad (8.23a)$$

$$\frac{d^2 \psi_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1(r)}{dr} - \left( \frac{w^2}{a^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \psi_1(r) = 0 \quad \text{pour } r > a \text{ (gaine)} \quad (8.23b)$$

Les équations (8.23) sont les **équations de Bessel**. Les solutions physiquement acceptables de cette équation s'expriment sous la forme de fonctions de Bessel :

$$\psi_1(r) = \begin{cases} J_m \left( \frac{u r}{a} \right) & \text{pour } r < a \\ K_m \left( \frac{w r}{a} \right) & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (8.24)$$

où  $J_m$  est la **fonction de Bessel** (de première espèce) d'ordre  $m$ .  $K_m$  est la **fonction de Bessel modifiée** (de deuxième espèce), appelée aussi **fonction de Hankel modifiée**.

Finalement, les formules (8.18) et (8.24) permettent d'exprimer l'amplitude des composantes longitudinales des champs  $\varphi(r, \theta) = \psi_1(r)\psi_2(\theta)$ , de la manière suivante :

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \begin{bmatrix} c_0^I \cos(m\theta) \\ c_0^I \sin(m\theta) \end{bmatrix} J_m \left( \frac{u r}{a} \right) & \text{pour } r < a \\ \begin{bmatrix} c_0^{II} \cos(m\theta) \\ c_0^{II} \sin(m\theta) \end{bmatrix} K_m \left( \frac{w r}{a} \right) & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (8.25)$$

Il est à noter dans les formules (8.25) qu'à chaque valeur de  $m$ , correspondent deux solutions dont l'une est proportionnelle à  $\cos(m\theta)$  et l'autre à  $\sin(m\theta)$ . Par souci de simplicité, on peut regrouper les deux solutions en les traitant respectivement comme les parties réelle et imaginaire de l'amplitude complexe du champ  $\tilde{\varphi}$  défini par :

$$\tilde{\varphi}(r, \theta) = e^{im\theta} \left\{ \begin{array}{l} c_0^I J_m(\eta r) \\ c_0^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \quad \text{pour } \begin{cases} r < a \\ r > a \end{cases} \quad (8.26)$$

avec

$$\eta = \frac{u}{a} = \sqrt{(k_0^2 n_1^2 - \beta^2)} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{w}{a} = \sqrt{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2)} \quad (8.27)$$

La figure 8.5 illustre les variations des fonctions de Bessel  $J_m(x)$  et  $K_m(x)$  en fonction de la variable  $x$ , pour  $m = 0, 1$ , et  $2$ . Dans l'expression (8.26) les paramètres  $\eta$  et  $\zeta$  déterminent la vitesse de variation de  $J_m(\eta r)$  et  $K_m(\zeta r)$  dans le cœur et dans la gaine, respectivement. Le champ  $J_m(\eta r)$  oscille d'autant plus rapidement (dans le cœur) que

$\eta$  est grand. La fonction  $K_m(\zeta r)$  exécute une décroissance d'autant plus rapide que  $\zeta$  est grand.

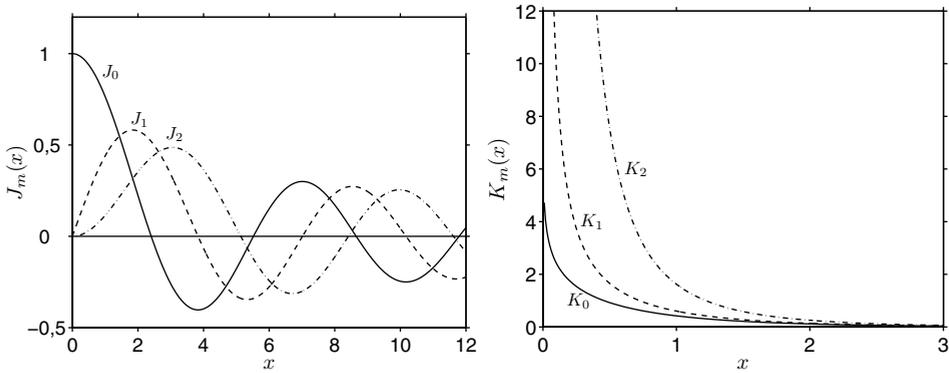


Figure 8.5– Fonctions de Bessel  $J_m(x)$  et  $K_m(x)$  pour  $m = 0, 1, 2$ .

## 5 Paramètre de fréquence normalisée $V$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'onde n'est guidée que si la constante de propagation  $\beta$  obéit à la relation (8.21); ce qui implique que  $k_0^2 n_1^2 - \beta^2 > 0$  et  $\beta^2 - k_0^2 n_2^2 > 0$ . On peut avoir un meilleur aperçu de la condition de guidage en examinant attentivement les paramètres  $u$  et  $w$  définis dans les relations (8.22), qui imposent à  $u$  et  $w$  d'être des grandeurs réelles positives. Il est important de noter que  $u$  et  $w$  dépendent chacun de la constante de propagation  $\beta$ , mais que la somme de leur carré est indépendante de  $\beta$ . On peut donc introduire, à partir des relations (8.22), une grandeur appelée **paramètre de fréquence normalisée**  $V$ , défini par :

$$V = (u^2 + w^2)^{1/2} = ak_0(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} = a \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ON} \tag{8.28a}$$

avec

$$\text{ON} = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}. \tag{8.28b}$$

Lorsqu'on les exprime en fonction des paramètres normalisés définis par (8.27), les relations (8.22) s'identifient à des relations de Pythagore reliant les longueurs des côtés dans un triangle rectangle,  $k_1^2 = \beta^2 + \eta^2$  et  $\beta^2 = k_2^2 + \zeta^2$  (figure 8.6) avec  $k_1 = k_0 n_1$  et  $k_2 = k_0 n_2$ . On voit alors que le vecteur  $\vec{\eta}$  est assimilable à la composante transversale du vecteur d'onde. Autrement dit, ce vecteur (dirigé vers la gaine) symbolise la pénétration du champ dans la gaine. Le champ pénètre d'autant plus loin dans la gaine que le module de  $\vec{\eta}$  est grand. La limite est atteinte lorsque  $u$  est à son maximum, qui se trouve être le paramètre  $V$  défini par relation (8.28). Pour  $u = V$  on a  $w = 0$  car  $u$  et  $w$  varient en sens inverse (relation (8.28a) et figure 8.6).

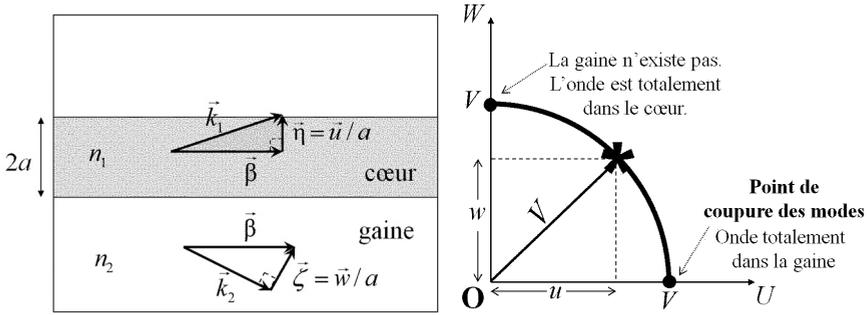


Figure 8.6 – Interprétation géométrique des paramètres  $u$ ,  $w$ , et  $V$ .

L'onde se retrouve alors totalement dans la gaine ; ce qui revient à dire que l'onde n'est plus guidée. On dit aussi que l'onde est coupée. La fréquence pour laquelle  $u = V$ , qui est équivalent à  $w = 0$ , est appelée **fréquence de coupure**. D'autre part, on peut remarquer dans la figure 8.6, qu'à l'inverse du vecteur  $\vec{\eta}$  qui symbolise la « fuite » du champ vers la gaine, le vecteur  $\vec{\zeta}$  (dirigé vers le cœur) symbolise le « confinement » du champ. Autrement dit, le champ est d'autant plus confiné dans le cœur que  $\zeta$  est grand (et donc que  $\eta$  petit). Cependant la limite où  $w = V$  (et donc  $u = 0$ ) est une situation anormale dans une fibre optique, car cette limite n'est atteinte que lorsque l'onde ne ressent plus la présence de la gaine. Les ondes guidées par une fibre optique doivent ressentir à la fois la présence du cœur et de la gaine. De ce fait, pour ces ondes, le paramètre  $u$  doit se situer dans l'intervalle suivant :

$$0 < u < V \tag{8.29}$$

La détermination de  $u$  passe par la relation de dispersion.

## 6 Relation de dispersion

Pour obtenir cette relation, il est nécessaire d'appliquer les conditions de continuité de certaines composantes du champ électromagnétique à l'interface entre le cœur et la gaine. À cette fin, il convient préalablement d'explicitier les composantes du champ électromagnétique. Ici, nous allons utiliser la notation simplifiée de la composante ortho-radiale,  $e^{im\theta}$ , définie dans l'expression  $\tilde{\varphi}$  donnée par (8.26). Autrement dit, nous utiliserons la notation des composantes de champ avec un « tilde » pour regrouper deux solutions, dont l'une est proportionnelle à  $\cos(m\theta)$  et l'autre à  $\sin(m\theta)$ .

### 6.1 Composantes longitudinales des champs

Les expressions des composantes longitudinales du champ électromagnétique se déduisent des expressions (8.13) et (8.26) :

$$\tilde{E}_z = \left\{ \begin{array}{l} A^I J_m(\eta r) \\ A^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F} \tag{8.30a}$$

$$\tilde{H}_z = \left\{ \begin{array}{l} B^I J_m(\eta r) \\ B^{II} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F} \quad (8.30b)$$

avec

$$\mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (8.31)$$

$A^I$  et  $B^I$  désignent respectivement les amplitudes des champs électrique et magnétique dans le cœur de la fibre, tandis que  $A^{II}$  et  $B^{II}$  désignent respectivement les amplitudes des champs dans la gaine. Rappelons que  $\eta$  et  $\zeta$  sont donnés par (8.27).

## 6.2 Composantes transversales des champs

Elles s'obtiennent à partir des expressions de  $\tilde{E}_z$  et  $\tilde{H}_z$  données par (8.30) et (8.31), et des expressions des champs transverses définies par les relations (8.11) où on doit poser  $\xi^2 = \eta^2$  lorsqu'on est dans le cœur, et  $\xi^2 = -\zeta^2$  dans la gaine. On obtient :

- Pour  $0 < r < a$  (cœur),  $\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$ , et

$$\tilde{E}_r = \left[ \frac{-i\beta}{\eta} A^I J'_m(\eta r) + \frac{\mu_0 \omega m}{\eta^2 r} B^I J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \left[ \frac{\beta m}{\eta^2 r} A^I J_m(\eta r) + \frac{i\mu_0 \omega}{\eta} B^I J'_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32b)$$

$$\tilde{H}_r = \left[ \frac{-\omega \varepsilon_1 m}{\eta^2 r} A^I J_m(\eta r) - \frac{i\beta}{\eta} B^I J'_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \left[ \frac{-i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J'_m(\eta r) + \frac{\beta m}{\eta^2 r} B^I J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.32d)$$

- Pour  $r > a$  (gaine),  $\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$  et on a :

$$\tilde{E}_r = \left[ \frac{i\beta}{\zeta} A^{II} K'_m(\zeta r) - \frac{\mu_0 \omega m}{\zeta^2 r} B^{II} K_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \left[ \frac{-\beta m}{\zeta^2 r} A^{II} K_m(\zeta r) - \frac{i\mu_0 \omega}{\zeta} B^{II} K'_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33b)$$

$$\tilde{H}_r = \left[ \frac{\omega \varepsilon_2 m}{\zeta^2 r} A^{II} K_m(\zeta r) + \frac{i\beta}{\zeta} B^{II} K'_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \left[ \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} A^{II} K'_m(\zeta r) - \frac{\beta m}{\zeta^2 r} B^{II} K_m(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.33d)$$

$$\text{Ici } J'_m = \frac{dJ_m(x)}{dx}, \text{ et } K'_m = \frac{dK_m(x)}{dx}.$$

## 6.3 Conditions de continuité des champs

Certaines composantes des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  doivent satisfaire les conditions de continuité à l'interface entre le cœur et la gaine, en  $r = a$ .

**Remarque** Ces conditions sont automatiquement satisfaites en  $r = b$ . En effet,  $b \gg a$  et  $K_m(\zeta r)$  décroît exponentiellement à mesure que  $r$  tend vers  $b$  :  $E_z(r = b) \rightarrow 0$  ; ce qui assure la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  (à l'extérieur de la gaine, où le champ est supposé nul).

**Relations de continuité en  $r = a$ .**

- Continuité de la composante de  $\vec{E}$  tangentielle à l'interface cœur/gaine ;

$$\tilde{E}_z(a^-) = \tilde{E}_z(a^+) \tag{8.34a}$$

- Continuité de la composante tangentielle de  $\vec{H}$  (car  $\vec{j}_{\text{libre}} = 0$ ) ;

$$H_z(a^-) = H_z(a^+) \tag{8.34b}$$

- Continuité de la composante normale de  $\vec{H}$  ( $\vec{B}_{\text{normal}} = \mu_0 \vec{H}_r$ ) ;

$$H_r(a^-) = H_r(a^+) \tag{8.34c}$$

- Continuité de la composante normale de  $\vec{D}$  (car  $\sigma_{\text{libre}} = 0$ ) ;

$$\varepsilon_0 n_1^2 E_r(a^-) = \varepsilon_0 n_2^2 E_r(a^+) \tag{8.34d}$$

Les conditions (8.34) conduisent à :

$$A^{II} = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \tag{8.35a}$$

$$B^{II} = B^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \tag{8.35b}$$

$$\frac{-\omega \varepsilon_0 n_1^2 m}{u^2} A^I J_m(u) - i \frac{1}{u} \beta B^I J_m'(u) = \frac{\omega \varepsilon_0 n_2^2 m}{w^2} A^{II} K_m(w) + \frac{i \beta}{w} B^{II} K_m'(w) \tag{8.35c}$$

$$\frac{-i n_1^2 \beta A^I}{u} J_m'(u) + \frac{\omega \mu_0 n_1^2 m}{u^2} B^I J_m(u) = \frac{i n_2^2 \beta}{w} A^{II} K_m'(w) - \frac{\omega n_2^2 \mu_0 m}{w^2} B^{II} K_m(w) \tag{8.35d}$$

En substituant les expressions de  $A^{II}$  et  $B^{II}$  données par (8.35a) et (8.35b), dans les relations (8.35c) et (8.35d), on obtient le système d'équations suivant :

$$\beta B^I \left( \frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)} \right) = i \omega \varepsilon_0 m A^I \left( \frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} \right) \tag{8.36a}$$

$$i \beta A^I \left( \frac{n_1^2 J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{n_2^2 K_m'(w)}{w K_m(w)} \right) = \omega \mu_0 m B^I \left( \frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} \right). \tag{8.36b}$$

À partir des relations (8.27), on montre facilement que  $\frac{n_1^2}{u^2} + \frac{n_2^2}{w^2} = \frac{\beta^2}{k^2} \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$ .

En substituant cette relation dans le second membre de (8.36a), et en multipliant les équations (8.36a) et (8.36b) membre à membre, on obtient la relation suivante :

$$\boxed{\left[ \frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] \left[ \frac{k_0^2 n_1^2 J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{k_0^2 n_2^2 K'_m(w)}{wK_m(w)} \right] = \beta^2 m^2 \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2} \quad (8.37)$$

C'est la **relation de dispersion** de la fibre à saut d'indice. Pour une fréquence donnée (c'est-à-dire  $k_0$  donné), et une valeur de  $m$  donnée, elle permet de déterminer la constante de propagation  $\beta$ . La relation (8.37) est aussi appelée « **équation caractéristique** » des modes de propagation. En effet, pour chaque valeur de  $m$ , cette équation admet un nombre fini de solutions satisfaisant à la condition de guidage (8.21) [qui équivaut aussi à (8.29)]. Cette multiplicité de solutions résulte du caractère oscillatoire des fonctions de Bessel  $J_m$ . Ainsi, on peut caractériser chaque solution de (8.37) par deux indices :  $(m, \nu)$ , où  $m$  caractérise la dépendance azimutale du champ électromagnétique et  $\nu$  correspond à la  $\nu$ -ième solution de (8.37) associée à la valeur  $m$ .

**Remarque** Le point le plus important à noter ici, est que pour une fibre donnée, le nombre total de modes susceptibles de se propager dépend de la fréquence de l'onde incidente dans la fibre. En règle générale, le nombre de modes augmente avec la fréquence. Ce point sera détaillé plus loin.

Notons enfin qu'on peut réécrire les relations (8.36a) et (8.35b) de la manière suivante :

$$B^I = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} P A^I \quad (8.38a)$$

$$B^{II} = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} P \frac{J_m(u)}{K_m(w)} A^I \quad (8.38b)$$

avec

$$P = \frac{m \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]}{\frac{J'_m(u)}{uJ_m(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_m(w)}{K_m(w)}} \quad (8.39)$$

Les relations (8.35a), (8.38a) et (8.38b), montrent que toutes les amplitudes des champs peuvent s'exprimer en fonction d'une seule amplitude  $A^I$  (ou  $B^I$ ).

## 7 Classification générale des modes de propagation

Le premier indice permettant de classer les modes guidés dans la fibre est l'indice  $m$  du paramètre de variation azimutale du champ. La valeur de  $m$  est une donnée du problème théorique, en ce sens qu'il est nécessaire de spécifier sa valeur afin de pouvoir résoudre l'équation caractéristique. À chaque valeur de  $m$ , correspondent plusieurs solutions de l'équation caractéristique, que l'on distingue par l'indice  $\nu$ . De manière générale, la solution générale de l'équation de Maxwell, donnée par (8.30), (8.32) et (8.33) est caractérisée par six composantes du champ électromagnétique, à l'exception du cas particulier  $m = 0$ , dont la solution est composée des modes transverses, avec  $E_z = 0$  (mode transverse électrique), ou  $H_z = 0$  (mode transverse magnétique).

### 7.1 Modes transverses ( $m = 0$ )

Lorsque le nombre azimutal  $m$  est égal à 0, la relation de dispersion (8.37) se scinde en deux :

$$\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (8.40a)$$

$$\frac{n_1^2 J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{n_2^2 K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0 \quad (8.40b)$$

Dans ce cas, les équations de continuité (8.35) deviennent :

$$A^I J_0(u) = A^{II} K_0(w) \quad (8.41a)$$

$$B^I J_0(u) = B^{II} K_0(w) \quad (8.41b)$$

$$\frac{-B^I J'_0(u)}{u} = B^{II} \frac{K'_0(w)}{w} \quad (8.41c)$$

$$-n_1^2 A^I \frac{J'_0(u)}{u} = n_2^2 A^{II} \frac{K'_0(w)}{w} \quad (8.41d)$$

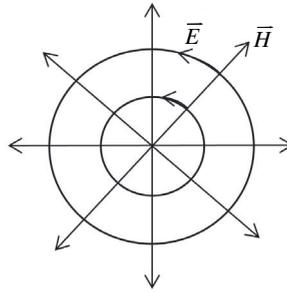
- Si  $A^I = A^{II} = 0$  (et donc  $E_z = 0$ ), alors il faut que  $B^I$  et  $B^{II}$  soient non nuls.

$$\frac{(8.41c)}{(8.41b)} \longrightarrow \frac{J'_0}{uJ_0} + \frac{K'_0}{wK_0} = 0 \text{ qui n'est rien d'autre que la relation (8.40a).}$$

C'est donc la relation de dispersion des modes transverses électriques, que l'on note  $TE_{0n}$ , où  $n$  désigne la  $n$ -ième racine de l'équation (8.40a). Pour ces modes on a :  $E_r = H_\theta = 0$ . Le tableau 8.1 récapitule les expressions des composantes du champ électromagnétique associé à ce mode.

**Tableau 8.1** – Modes transverses électriques TE<sub>0n</sub>.

| Relation de dispersion | $\frac{J'_0(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K'_0(w)}{wK_0(w)} = 0$   |  |
|------------------------|---|--|
|                        | $0 \leq r \leq a$<br>(cœur)   | $r > a$<br>(gaine)   |
| Champ électrique       | $E_z = 0$<br>$E_r = 0$<br>$E_\theta = i\omega \frac{\mu_0}{u} a B^I J'_0\left(\frac{ur}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$  | $E_z = 0$<br>$E_r = 0$<br>$E_\theta = -i\omega \mu_0 \frac{a}{w} \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I K'_0\left(\frac{rw}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$  |
| Champ magnétique       | $H_z = B^I J_0\left(\frac{ru}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$<br>$H_r = -i\beta \frac{B^I a}{u} J'_0\left(\frac{ur}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$<br>$H_\theta = 0$ | $H_z = \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I K_0\left(\frac{rw}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$<br>$H_r = i\beta \frac{J_0(u)}{K_0(w)} B^I \frac{a}{w} K'_0\left(\frac{wr}{a}\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$<br>$H_\theta = 0$ |



**Figure 8.7** – Lignes de champ du mode TE<sub>01</sub> dans une section transverse de la fibre.

- Si  $B^I = B^{II} = 0$  (et donc  $H_z = 0$ ), alors il faut que  $A^I$  et  $A^{II}$  soient non nuls

$$\frac{(8.41d)}{(8.41a)} \longrightarrow \frac{n_1^2 J'_0}{uJ_0} + \frac{n_2^2 K'_0}{wK_0} = 0 : \text{c'est la relation (8.40b).}$$

C'est donc la relation de dispersion des modes transverses magnétiques, que l'on note TM<sub>0n</sub>, où  $n$  désigne la  $n$ -ième racine de l'équation (8.40b). Pour ces modes, on a :  $E_\theta = H_r = 0$  (tableau 8.2).

## 7.2 Modes hybrides

Lorsque le paramètre azimutal est non nul ( $m \neq 0$ ), les constantes  $A^I, B^I, A^{II}$  et  $B^{II}$  sont non nulles. Le champ électromagnétique est dit **hybride** car il possède à la fois une composante axiale pour le champ  $\vec{E}$  et pour le champ  $\vec{H}$ . Les relations (8.30), (8.31), (8.32) et (8.33), donnent les expressions générales des composantes des champs, qu'il convient d'exprimer à nouveau en tenant compte des relations entre les constantes  $A^I, B^I, A^{II}$  et  $B^{II}$ , données par (8.35a), (8.38a) et (8.38b). Les champs longitudinaux se mettent alors sous la forme suivante :

$$\tilde{E}_z = A^I \left\{ \begin{array}{l} J_m(\eta r) \\ \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F}. \quad (8.42)$$

Tableau 8.2 – Modes transverses magnétiques  $TM_{0n}$ .

| Relation de dispersion | $\frac{n_1^2 J_0'(u)}{u J_0(u)} + \frac{n_2^2 K_0'(w)}{w K_0(w)} = 0$   |  |
|------------------------|---|--|
|                        | $0 \leq r \leq a$<br>(cœur)   | $r > a$<br>(gaine)   |
| Champ électrique       | $E_z = A^I J_0\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_r = -i\beta A^I \frac{a}{u} J_0'\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_\theta = 0$ | $E_z = A^I \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_r = i\beta \frac{J_0(u)}{K_0(w)} \frac{a}{w} A^I K_0'\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$ $E_\theta = 0$ |
| Champ magnétique       | $H_z = 0$ $H_r = 0$ $H_\theta = -i\omega \varepsilon_1 \frac{a}{u} A^I J_0'\left(\frac{r}{a}u\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$   | $H_z = 0$ $H_r = 0$ $H_\theta = i\omega \varepsilon_2 \frac{a}{w} A^I \frac{J_0(u)}{K_0(w)} K_0'\left(\frac{r}{a}w\right) e^{i(\omega t - \beta z)}$   |

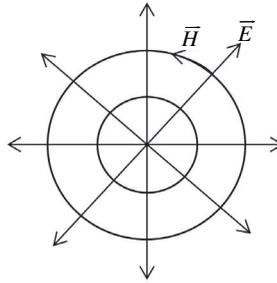


Figure 8.8 – Lignes de champ du mode  $TM_{01}$  dans une section transversale de la fibre.

$$\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} P A^I \left\{ \begin{array}{l} J_m(\eta r) \\ J_m(u) \\ \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \end{array} \right\} \mathcal{F}. \quad (8.43)$$

Les composantes transverses du champ électromagnétique données par (8.32) et (8.33), font intervenir des dérivées de fonctions de Bessel. Il est possible d'éliminer ces dérivées en utilisant les formules de récurrence des fonctions de Bessel :

$$J_m'(x) = \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m+1}(x) = -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x) \quad (8.44)$$

$$K_m'(x) = \frac{m}{x} K_m(x) - K_{m+1}(x) = -\frac{m}{x} K_m(x) - K_{m-1}(x) \quad (8.45)$$

D'autre part, d'après les relations (8.42) et (8.43), le rapport des amplitudes des composantes longitudinales du champ électromagnétique s'écrit

$$\frac{H_z}{E_z} = \frac{P\beta}{\mu_0 \omega} = P \frac{n_1}{Z_0} \frac{\beta}{k_1} = P \frac{n_2}{Z_0} \frac{\beta}{k_2}, \text{ avec } Z_0 = \mu_0 c.$$

Par convention, si  $H_z/E_z > 1$  le champ hybride est noté EH, alors que pour  $H_z/E_z < 1$  le champ hybride est noté HE. Cependant, les composantes transverses

des modes EH et HE ont exactement la même expression analytique donnée par les relations (8.32) et (8.33), tant que  $P$  n'est pas quantitativement connu. Mais, par commodité et pour des raisons qui deviendront évidentes lorsque nous construirons les **modes linéairement polarisés**, nous allons d'abord exprimer ces deux groupes de modes sous des formes qui sont (en apparence) différentes.

• **Modes**  $\text{EH}_{m\nu}$

Sachant que  $J'_m(\eta r) = \frac{m}{\eta r} J_m(\eta r) - J_{m+1}(\eta r)$  et  $K'_m(\zeta r) = \frac{m}{\zeta r} K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r)$ , nous pouvons exprimer les champs pour les modes hybrides  $\text{EH}_{m\nu}$  comme suit :

Dans le **cœur** ( $\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$ ) on a :

$$\tilde{E}_r = \frac{i\beta}{\eta} A^I \left[ J_{m+1}(\eta r) - \frac{m}{\eta r} (1 - P) J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} (1 - P) J_m(\eta r) + P J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46b)$$

$$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} \left( 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \frac{-i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} \left( 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - J_{m+1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.46d)$$

Dans la **gaine** ( $\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$ ) on a :

$$\tilde{E}_r = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \frac{i\beta}{\zeta} \left[ \frac{m}{\zeta r} (1 - P) K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47a)$$

$$\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} (1 - P) K_m(\zeta r) + P K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47b)$$

$$\tilde{H}_r = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \left[ \frac{m}{\zeta r} \left( 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47c)$$

$$\tilde{H}_\theta = A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} \left( 1 - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) - K_{m+1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.47d)$$

• **Modes**  $\text{HE}_{m\nu}$

En posant  $J'_m(\eta r) = -\frac{m}{\eta r} J_m(\eta r) + J_{m-1}(\eta r)$  et  $K'_m(\zeta r) = -\frac{m}{\zeta r} K_m(\zeta r) - K_{m-1}(\zeta r)$ ,

nous pouvons exprimer les expressions des champs pour les modes hybrides  $\text{HE}_{m\nu}$  comme suit :

Dans le **cœur** ( $\varepsilon = \varepsilon_0 n_1^2$ ) on a :

$$\tilde{E}_r = \frac{-i\beta}{\eta} A^I \left[ J_{m-1}(\eta r) - \frac{m}{\eta r} (1+P) J_m(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48a)$$

$$\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} (1+P) J_m(\eta r) - P J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48b)$$

$$\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} \left( 1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48c)$$

$$\tilde{H}_\theta = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I \left[ \frac{m}{\eta r} \left( 1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_1^2} P \right) J_m(\eta r) - J_{m-1}(\eta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.48d)$$

Dans la **gaine** ( $\varepsilon = \varepsilon_0 n_2^2$ ) on a :

$$\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} (1+P) K_m(\zeta r) + K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49a)$$

$$\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} (1+P) K_m(\zeta r) + P K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49b)$$

$$\tilde{H}_r = A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} \left( 1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49c)$$

$$\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} \left[ \frac{m}{\zeta r} \left( 1 + \frac{\beta^2}{k_0^2 n_2^2} P \right) K_m(\zeta r) + K_{m-1}(\zeta r) \right] \mathcal{F} \quad (8.49d)$$

## 8 Modes de propagation dans les fibres à faible guidage

### 8.1 Relation de dispersion

En pratique, l'écart d'indice entre le cœur et la gaine est très faible, de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$  ; ce qui conduit à poser, en première approximation, que :

$$n_1 \simeq n_2 \Rightarrow \beta \simeq k_0 n_1 \simeq k_0 n_2, \quad (8.50)$$

compte tenu de la condition de guidage,  $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$ . Sous cette approximation, la

relation de dispersion (8.37) s'écrit :  $\left( \frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} \right)^2 = m^2 \left[ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right]^2$ , que

l'on peut scinder en deux relations :

$$\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} = m \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (8.51a)$$

$$\frac{J'_m(u)}{u J_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{w K_m(w)} = -m \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (8.51b)$$

Ces deux relations de dispersion correspondent respectivement aux modes EH et HE.

Dans l'approximation du faible guidage, si on tient compte de (8.51a) et de (8.51b), l'expression de  $P$  donnée par (8.39) conduit à :

$$P = \pm 1 \quad (8.52)$$

En éliminant les fonctions dérivées  $J'_m$  et  $K'_m$  de la relation (8.51a), en utilisant les premier et second membres des relations (8.44) et (8.45), on obtient :

$$\frac{uJ'_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{wK'_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0 \quad (8.53a)$$

L'expression (8.53a) est l'équation caractéristique des modes hybrides  $\text{EH}_{m\nu}$ . Rappelons que l'indice  $\nu$  désigne la  $\nu$ -ième racine de l'équation (8.53a), et que cette équation est associée à  $P = 1$ .

De manière similaire, on peut éliminer les fonctions dérivées  $J'_m$  et  $K'_m$  de la relation (8.51b) en utilisant les premier et troisième membres des relations (8.44) et (8.45). La relation (8.51b) devient alors :

$$\frac{uJ'_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{wK'_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \quad (8.53b)$$

La relation (8.53b) est l'expression la plus commode pour l'équation caractéristique des modes hybrides  $\text{HE}_{m\nu}$ , et cette équation est associée à  $P = -1$ .

## 8.2 Dégénérescence des modes

Les deuxième et troisième membres des relations (8.44) et (8.45) permettent de récrire les relations de récurrence des fonctions de Bessel sous la forme suivante :

$$J_{m+1}(u) + J_{m-1}(u) = \frac{2m}{u} J_m(u) \quad (8.54a)$$

$$K_{m+1}(w) - K_{m-1}(w) = \frac{2m}{w} K_m(w) \quad (8.54b)$$

La relation de dispersion des modes  $\text{HE}_{m+1\nu}$ , qui se déduit directement de (8.53b), s'écrit :

$$\frac{uJ_{m+1}(u)}{J_m(u)} - \frac{wK_{m+1}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad (8.55)$$

En substituant dans cette relation les expressions de  $J_{m+1}(u)$  et  $K_{m+1}(u)$  données par (8.54), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u}{J_m(u)} \left( -J_{m-1}(u) + \frac{2m}{u} J_m(u) \right) - \frac{w}{K_m(w)} \left( K_{m-1}(w) + \frac{2m}{w} K_m(w) \right) &= 0 \\ \longrightarrow \frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} + \frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} &= 0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Cette dernière relation est exactement la même que (8.53a) des modes EH, mais avec l'indice «  $m - 1$  » en lieu et place de «  $m$  ». En d'autres termes, la relation de dispersion des modes  $HE_{m+1\nu}$  est identique à celle des modes  $EH_{m-1\nu}$ . Cela signifie que ces deux groupes de modes ont exactement la même constante de propagation  $\beta$ . On dit qu'il y a dégénérescence des modes  $HE_{m+1\nu}$  et  $EH_{m-1\nu}$ . On remarque donc qu'en augmentant de deux la valeur de l'indice de variation azimutale d'un mode EH, on obtient l'indice du mode HE dégénéré associé à ce mode EH. On peut alors regrouper les équations de tous les groupes de modes hybrides dans une seule relation de dispersion sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{uJ_{l-1}(u)}{J_l(u)} + \frac{wK_{l-1}(w)}{K_l(w)} = 0} \quad (8.57)$$

En effet,

- pour  $l = m + 1$ , on retrouve directement l'équation (8.53a) des modes  $EH_{m\nu}$ .
- pour  $l = m - 1$ , on retrouve les modes  $HE_{m\nu}$  car l'équation (8.57) s'écrit :

$$\frac{uJ_{m-2}(u)}{J_{m-1}(u)} + \frac{wK_{m-2}(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \text{ (EH}_{m-2\nu}\text{)} \Leftrightarrow \frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{wK_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0 \Leftrightarrow (8.53b)$$

Ici, nous avons retrouvé le mode  $HE_{m\nu}$  sans aucun calcul, en remarquant simplement que le passage du mode  $EH_{m-1\nu}$  [relation (8.56)] au mode  $HE_{m+1\nu}$  [relation (8.55)] s'effectue en incrémentant de deux unités l'indice des fonctions «  $J$  » et «  $K$  » au numérateur de la relation (8.56) et en inversant le signe de «  $w$  ».

**Remarque** Les modes  $EH_{m-1\nu}$  et  $HE_{m+1\nu}$  ont la même constante de propagation  $\beta$ , mais chacun de ces deux groupes de mode est caractérisé par sa propre dépendance azimutale définie par les indices «  $m - 1$  » (pour  $EH_{m-1\nu}$ ) et «  $m + 1$  » (pour  $HE_{m+1\nu}$ ).

## 8.3 Expression des composantes des champs

### a) Expression des champs dans le système de coordonnées cylindriques

Dans les fibres à faible guidage, on peut appliquer l'approximation définie par (8.50) et (8.52). Les expressions des champs (8.46), (8.47), (8.48) et (8.49), se mettent alors sous la forme donnée par les tableaux 8.3 et 8.4.

**Tableau 8.3** – Modes hybrides EH<sub>mν</sub>.

| $r < a$ (cœur)   | $r > a$ (gaine)  |
|--|--|
| $\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$  | $\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$   |
| $\tilde{E}_r = \frac{i\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$                                      | $\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$                     |
| $\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$                                  | $\tilde{E}_\theta = -A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$                 |
| $\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$                                  | $\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$                   |
| $\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$                       | $\tilde{H}_r = A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$        |
| $\tilde{H}_\theta = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m+1}(\eta r) \mathcal{F}$                  | $\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) \mathcal{F}$ |
| $\eta = u/a, \quad \mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad P = 1, \quad \zeta = w/a$ |  |
| <b>Relation de dispersion :</b> $\frac{uJ_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{wK_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0$            |  |

**Tableau 8.4** – Modes hybrides HE<sub>mν</sub>.

| $r < a$ (cœur)  | $r > a$ (gaine)  |
|---|--|
| $\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) \mathcal{F}$   | $\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$   |
| $\tilde{E}_r = \frac{-i\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$                                      | $\tilde{E}_r = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$                     |
| $\tilde{E}_\theta = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$                                   | $\tilde{E}_\theta = A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$                  |
| $\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r)$  | $\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) \mathcal{F}$                  |
| $\tilde{H}_r = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$                        | $\tilde{H}_r = -A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$       |
| $\tilde{H}_\theta = -\frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) \mathcal{F}$                  | $\tilde{H}_\theta = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) \mathcal{F}$ |
| $\eta = u/a, \quad \mathcal{F} = e^{im\theta} e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad P = -1, \quad \zeta = w/a$ |  |
| <b>Relation de dispersion :</b> $\frac{uJ_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{wK_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0$             |  |

b) Expression des champs dans le système de coordonnées cartésiennes

La projection des champs sur les axes du repère cartésien (défini dans la figure 8.4) s'écrit :

$$\begin{cases} E_x = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta = \frac{1}{2} E_r (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - \frac{1}{2i} E_\theta (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta = \frac{1}{2i} E_r (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{1}{2} E_\theta (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{2} (E_r + iE_\theta) e^{i\theta} + \frac{1}{2} (E_r - iE_\theta) e^{-i\theta} \\ E_y = \frac{1}{2} (E_\theta - iE_r) e^{i\theta} + \frac{1}{2} (E_\theta + iE_r) e^{-i\theta} \end{cases} \quad (8.58)$$

On a une relation analogue à (8.58) pour les composantes du champ  $\vec{H}$ . On obtient donc les expressions données dans les tableaux 8.5 et 8.6.

**Tableau 8.5** – Modes hybrides  $\text{EH}_{m\nu}$  en coordonnées cartésiennes.

| $r < a$ (cœur)  | $r > a$ (gaine)  |
|---|--|
| $\tilde{E}_z = A^l J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$  | $\tilde{E}_z = A^l \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$  |
| $\tilde{E}_x = \frac{i\beta}{\eta} A^l J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$                | $\tilde{E}_x = -A^l \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$                |
| $\tilde{E}_y = \frac{\beta}{\eta} A^l J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$                 | $\tilde{E}_y = -A^l \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$                 |
| $\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^l J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$                | $\tilde{H}_z = \frac{i\beta}{\mu_0 \omega} A^l \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$                  |
| $\tilde{H}_x = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^l J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$ | $\tilde{H}_x = A^l \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$   |
| $\tilde{H}_y = \frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^l J_{m+1}(\eta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$ | $\tilde{H}_y = -A^l \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \mathcal{F}_0$ |
| $\eta = u/a, \quad \mathcal{F}_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad \zeta = w/a$                      |  |
| <b>Relation de dispersion :</b> $\frac{u J_m(u)}{J_{m+1}(u)} + \frac{w K_m(w)}{K_{m+1}(w)} = 0$       |  |

**Remarque** Il est très important de noter que lorsque deux (ou plusieurs) modes sont dégénérés, il est impossible de faire propager de manière sélective un seul de ces modes. En d'autres termes, les deux modes se propagent en même temps et à la même vitesse. Ils interfèrent entre eux de sorte qu'en sortie de fibre, la lumière qu'on observe résulte de la superposition des amplitudes de tous les modes dégénérés ayant la même constante de propagation. Ainsi, la lumière en sortie de fibre est obtenue par une construction basée sur la superposition des amplitudes des modes dégénérés. Lorsqu'on fait cette

**Tableau 8.6** – Modes hybrides HE<sub>mν</sub> en coordonnées cartésiennes.

| $r < a$ (cœur)   | $r > a$ (gaine)  |
|--|--|
| $\tilde{E}_z = A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$   | $\tilde{E}_z = A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$  |
| $\tilde{E}_x = \frac{-i\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$                | $\tilde{E}_x = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$                |
| $\tilde{E}_y = \frac{\beta}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$                  | $\tilde{E}_y = A^I \frac{\beta}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$                  |
| $\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I J_m(\eta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$                | $\tilde{H}_z = \frac{-i\beta}{\mu_0 \omega} A^I \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$                 |
| $\tilde{H}_x = \frac{-\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$  | $\tilde{H}_x = -A^I \frac{\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$  |
| $\tilde{H}_y = -\frac{i\omega \varepsilon_1}{\eta} A^I J_{m-1}(\eta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$ | $\tilde{H}_y = -A^I \frac{i\omega \varepsilon_2}{\zeta} \frac{J_m(u)}{K_m(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} \mathcal{F}_0$ |
| $\eta = u/a, \quad \mathcal{F}_0 = e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad \zeta = w/a$                       |  |
| <b>Relation de dispersion :</b> $\frac{u J_m(u)}{J_{m-1}(u)} - \frac{w K_m(w)}{K_{m-1}(w)} = 0$        |  |

construction, on aboutit à des modes linéairement polarisés dans le repère cartésien, comme nous le verrons dans ce qui suit. Il est aussi important de noter que dans une fibre à faible guidage, les champs sont quasi-transverses, car l'amplitude des composantes longitudinales est très faible comparée à celles des composantes transverses. Autrement dit, la lumière obtenue en sortie de ces fibres provient essentiellement des composantes transverses des champs.

### 8.4 Construction des modes linéairement polarisés (LP<sub>mn</sub>)

#### a) Expression des champs des modes LP<sub>mn</sub> en notation $\tilde{E}$ et $\tilde{H}$

Les expressions des champs présentées dans la section précédente montrent que dans les conditions de faible guidage, la projection des composantes transverses des modes EH<sub>m-1ν</sub> et HE<sub>m+1ν</sub> sur les axes du repère Oxy ne change pas la dépendance radiale des champs. Comme ces deux groupes de modes sont dégénérés (même constante de propagation) et ont la même distribution radiale, un mode guidé peut être représenté par une superposition d'un mode EH<sub>m-1ν</sub> et d'un mode HE<sub>m+1ν</sub>, où chacun des deux modes est caractérisé individuellement par sa propre dépendance azimutale, d'indices  $m - 1$  (pour le mode EH) et  $m + 1$  (pour le mode HE). On peut considérer que la superposition de ces deux modes dans le repère cartésien se traduit par une dépendance azimutale définie par le facteur  $m$ . Dans ce qui suit, nous allons voir que l'addition de l'amplitude de ces modes conduit à un **mode linéairement polarisé** selon l'axe Ox ou Oy, qui est noté LP<sub>mn</sub>.  $E_{x,y,z}(\text{EH}_{m-1\nu}) + E_{x,y,z}(\text{HE}_{m+1\nu})$  conduit aux expressions ci-après.

Dans le cœur, le champ électrique du mode  $LP_{mn}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (2\beta/\eta)J_m(\eta r)e^{im\theta} \\ J_{m-1}(\eta r)e^{i(m-1)\theta} + J_{m+1}(\eta r)e^{i(m+1)\theta} \end{bmatrix} A^I \mathcal{F}_0. \quad (8.59)$$

Dans la gaine

$$\tilde{E}_x = -A^I \frac{i\beta}{\zeta} K_m(\zeta r) \left[ \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} + \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \right] e^{im\theta} \mathcal{F}_0$$

$$\tilde{E}_y = A^I \frac{\beta}{\zeta} \left[ \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} - \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} \right] K_m(\zeta r) e^{im\theta} \mathcal{F}_0$$

$$\tilde{E}_z = \left[ \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta} + \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} \right] A^I \mathcal{F}_0$$

**Remarque** On démontre (à partir des relations caractéristiques des fonctions de Bessel) que la relation de dispersion des modes  $EH_{m\nu}$  (8.53a) est équivalente à :

$$\frac{J_{m+2}(u)}{J_m(u)} + \frac{K_{m+2}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} = -\frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} (\text{EH}_{m-1\nu}) \quad (8.60a)$$

De la même manière, on démontre que la relation (8.53b) des modes  $HE_{m\nu}$  est équivalente à :

$$\frac{J_{m-2}(u)}{J_m(u)} + \frac{K_{m-2}(w)}{K_m(w)} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{J_{m-1}(u)}{K_{m-1}(w)} = -\frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} (\text{HE}_{m+1\nu}) \quad (8.60b)$$

En tenant compte des relations (8.60), dans la gaine, le champ électrique du mode  $LP_{mn}$  s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\beta/\zeta)K_m(\zeta r)e^{im\theta} \\ K_{m+1}(\zeta r)e^{i(m+1)\theta} - K_{m-1}(\zeta r)e^{i(m-1)\theta} \end{bmatrix} A^I \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \mathcal{F}_0. \quad (8.61)$$

La construction du champ magnétique s'effectue de manière similaire.

$$H_{x,y,z}(\text{EH}_{m-1\nu}) + H_{x,y,z}(\text{HE}_{m+1\nu})$$

Dans le cœur

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2\omega\varepsilon_1/\eta)J_m(\eta r)e^{im\theta} \\ 0 \\ (i\beta/\mu_0\omega) [J_{m-1}(\eta r)e^{i(m-1)\theta} - J_{m+1}(\eta r)e^{i(m+1)\theta}] \end{bmatrix} A^I \mathcal{F}_0 \quad (8.62)$$

Dans la gaine

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_y \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\frac{\omega\varepsilon_2}{\zeta} K_m(\zeta r) e^{im\theta} \\ 0 \\ -\frac{i\beta}{\mu_0\omega} [K_{m+1}(\zeta r) e^{i(m+1)\theta} + K_{m-1}(\zeta r) e^{i(m-1)\theta}] \end{bmatrix} A^I \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \mathcal{F}_0. \quad (8.63)$$

Ainsi, l'addition des modes :  $(EH_{m-1\nu}) + (HE_{m+1\nu})$ , conduit à un mode linéairement polarisé  $LP_{mn}$  selon l'axe  $Oy$ , décrit par les relations (8.59), (8.61), (8.62), et (8.63), c'est-à-dire où  $E_x = 0$ .

**Remarque** Lorsqu'on fait la soustraction,  $(EH_{m-1\nu}) - (HE_{m+1\nu})$  on aboutit à un mode linéaire polarisé selon l'axe  $Ox$  (où  $E_y = 0$ ). En fait les modes  $(EH_{m-1\nu}) + (HE_{m+1\nu})$  et  $(EH_{m-1\nu}) - (HE_{m+1\nu})$  sont identiques dans le sens où le passage de l'un à l'autre s'effectue en interchangeant simplement les rôles des axes  $Ox$  et  $Oy$ .

### b) Expression des champs des modes $LP_{mn}$ en notation réelle

La notation avec un tilde ( $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$ ) a été utilisée tout au long de ce chapitre pour stocker les deux composantes dégénérées de chaque mode, sachant que le retour à l'expression des champs en notation réelle s'effectue simplement en prenant l'une des ses composantes, c'est-à-dire, la partie réelle ou la partie imaginaire des  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$ , sans tenir compte du terme de propagation  $\mathcal{F}_0$  commun à  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$ . D'autre part, dans ce qui suit, nous donnerons l'expression de l'amplitude des champs sans faire figurer explicitement le terme  $\mathcal{F}_0$ , mais où l'unique constante  $A^I$  présente dans les expressions (8.59), (8.61), (8.62) et (8.63), sera renommée simplement  $A$ . Ainsi, la récupération des parties réelles de  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  nous donne les expressions suivantes :

#### Amplitude du champ électrique des modes $LP_{mn}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ (2\beta/\eta)J_m(\eta r) \cos(m\theta) \\ J_{m+1}(\eta r) \cos[(m+1)\theta] + J_{m-1}(\eta r) \cos[(m-1)\theta] \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.64)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \begin{bmatrix} 0 \\ 2(\beta/\zeta)K_m(\zeta r) \cos(m\theta) \\ K_{m+1}(\zeta r) \cos[(m+1)\theta] - K_{m-1}(\zeta r) \cos[(m-1)\theta] \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.65)$$

#### Amplitude du champ magnétique des modes $LP_{mn}$ .

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -(2\omega\varepsilon_0 n_1^2/\eta)J_m(\eta r) \cos(m\theta) \\ 0 \\ \frac{\beta}{\mu_0\omega} \{J_{m+1}(\eta r) \sin[(m+1)\theta] - J_{m-1}(\eta r) \sin[(m-1)\theta]\} \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.66)$$

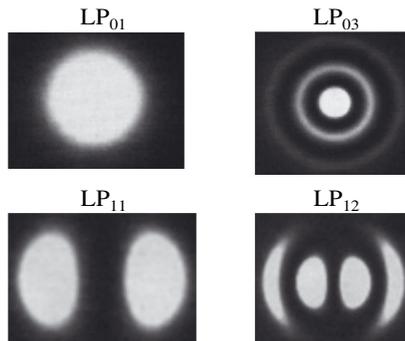
$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_{m+1}(u)}{K_{m+1}(w)} \begin{bmatrix} -2(\omega\varepsilon_0 n_2^2/\zeta)K_m(\zeta r) \cos(m\theta) \\ 0 \\ \frac{\beta}{\mu_0\omega} \{K_{m+1}(\zeta r) \sin[(m+1)\theta] + K_{m-1}(\zeta r) \sin[(m-1)\theta]\} \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.67)$$

Rappelons que  $\eta = u/a$  et  $\zeta = w/a$ .

**Relation de dispersion des modes LP<sub>mn</sub>.**

$$\frac{uJ_{m-1}(u)}{J_m(u)} + \frac{wK_{m-1}(w)}{K_m(w)} = 0 \tag{8.68}$$

Les expressions (8.64), (8.65), (8.66) et (8.67), indiquent que la distribution d'intensité dans le plan transverse est proportionnelle à  $[J_m(\eta r) \cos(m\theta)]^2$  dans le cœur, et  $[K_m(\zeta r) \cos(m\theta)]^2$  dans la gaine. Si nous avons pris les parties imaginaires des champs  $\tilde{E}$  et  $\tilde{H}$  nous aurions eu une distribution d'intensité proportionnelle à  $[J_m(\eta r) \sin(m\theta)]^2$  dans le cœur et  $[K_m(\zeta r) \sin(m\theta)]^2$  dans la gaine. Dans les deux cas, on aboutit à une dépendance azimutale périodique de l'intensité lumineuse, de période  $\pi/m$ . Autrement dit, pour un mode LP<sub>mn</sub>, si on fait une rotation de  $\pi$  à rayon constant dans un plan transverse, on passera obligatoirement par  $m$  points (ou zones) d'extinction de lumière (en partant d'un point de départ éclairé). Ces zones d'obscurité sont aussi appelées « nœuds de champs ». Elles résultent de l'interférence de ces modes dégénérés. Le cas  $m = 0$  correspond aux modes où l'intensité lumineuse ne subit aucune variation lors d'une rotation à rayon constant. D'autre part, le comportement oscillatoire de la fonction de Bessel  $J_m(\eta r)$  dans le cœur de la fibre provoque aussi des extinctions de lumière lors d'un déplacement radial (à  $\theta$  constant), de sorte que l'indice «  $n$  » dans la notation LP<sub>mn</sub> renseigne sur le nombre de nœuds de champ que l'on trouve lors d'un déplacement radial. Par conséquent,  $n$  est forcément au moins égal à 1, car il est certain que la lumière finit par s'éteindre lorsqu'on va du cœur vers la gaine. Avec cette description, le mode LP<sub>01</sub> correspond à une mode où la lumière ne varie pas lorsqu'on tourne à rayon constant et décroît de manière monotone pour s'éteindre dans la gaine. C'est le mode fondamental de propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice.



**Figure 8.9** – Répartition de l'intensité lumineuse dans le plan transverse pour quelques modes LP<sub>mn</sub>.

c) Expression des champs dans le mode LP<sub>01</sub>

Le concept de superposition des champs tel qu'il a été décrit de manière générale pour les modes LP<sub>mn</sub> ne peut s'appliquer au cas où  $m = 0$ . En effet le mode HE<sub>1v</sub> ne peut s'associer au mode EH<sub>-1v</sub>, avec un indice négatif qui n'a aucun sens physique. En effet, la dépendance azimutale du champ dans le plan transverse est indépendante du sens de rotation autour de l'axe Oz. Les composantes du mode LP<sub>01</sub> s'obtiennent directement à partir de celles du mode HE<sub>11</sub> (où il faut veiller à bien revenir en notation réelle, avant de poser  $m = 1$ ), qui est en fait déjà linéairement polarisé :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta/\eta)J_0(\eta r) \\ J_1(\eta r) \cos \theta \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.69)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \\ \mathcal{E}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \begin{bmatrix} 0 \\ (\beta/\zeta)K_0(\zeta r) \\ K_1(\zeta r) \cos \theta \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.70)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -(\omega \varepsilon_0 n_1^2 / \eta) J_0(\eta r) \\ 0 \\ (\beta / \mu_0 \omega) J_1(\eta r) \sin \theta \end{bmatrix}_{r < a} \quad (8.71)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}_x \\ \mathcal{H}_y \\ \mathcal{H}_z \end{bmatrix} = A \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \begin{bmatrix} -(\omega \varepsilon_0 n_2^2 / \zeta) K_0(\zeta r) \\ 0 \\ (\beta / \mu_0 \omega) K_1(\zeta r) \sin \theta \end{bmatrix}_{r \geq a} \quad (8.72)$$

Sa relation de dispersion est celle du groupe des modes LP<sub>0n</sub>

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} - \frac{wK_1(w)}{K_0(w)} = 0 \quad (8.73)$$

d) Fréquences de coupure des modes et régime de propagation monomode

Nous avons vu que pour que la propagation soit guidée il faut que  $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$ , et que les champs pénètrent d'autant plus loin dans la gaine que  $w$  est petit. Dans la limite où  $w = 0$ , il n'y a plus de guidage. Pour un mode LP<sub>mn</sub> la fréquence pour laquelle  $w = w_{mn} = 0$  ( $u = u_{mn} = V$ ) est la fréquence de coupure du mode.

À titre d'exemple, considérons l'équation caractéristique du groupe de modes LP<sub>0n</sub> donnée par (8.73). Elle peut être résolue graphiquement en déterminant les points d'intersection des fonctions suivantes :

$$f(u) = \frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} \quad \text{et} \quad g(u, V) = \frac{wK_1(w)}{K_0(w)}, \quad \text{avec} \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2}$$

La figure 8.10 donne cette résolution graphique pour  $V = 10$ . Pour tracer la courbe  $f(u)$  on commence par tracer ses asymptotes, qui sont données par les zéros de la fonction  $J_0(u)$  et qui sont représentées par les droites verticales en pointillés de la figure 8.10. Ensuite, on trace les branches de  $f(u)$  entre les asymptotes. La fonction  $g(u, V)$  est constituée d'une seule branche située dans la partie positive du quadrant de l'axe des ordonnées, qui décroît de façon monotone et s'annule pour  $u = V$ . Une des branches de  $f(u)$  ne peut intercepter la fonction  $g(u, V)$  que si, sur la plage  $0 < u < V$ , cette branche se trouve dans la partie positive du quadrant. On peut clairement remarquer que la première branche de  $f(u)$  est entièrement située dans le quadrant positif. Elle intercepte donc la fonction  $g$  quelle que soit la valeur de  $V$  non nulle. La valeur de  $u$  au point d'interception (que nous noterons  $u_{01}$ ) correspond au seul mode de propagation qui est toujours présent quel que soit le paramètre  $V$  (non nul). Comme sa fréquence de coupure est nulle (c'est-à-dire, la plus petite de toutes les fréquences de coupure), ce mode  $LP_{01}$  est le **mode fondamental de propagation** dans une fibre à saut d'indice. D'après le graphique,  $u_{01} \simeq 2,18$ . D'autre part, on peut remarquer que la deuxième branche de  $f(u)$  ne peut intercepter la fonction  $g(u, V)$  que si la fréquence normalisée  $V$  est située au-delà du point d'interception de cette branche avec l'axe des abscisses, notée  $u_{02c}$ ; autrement dit, si  $V > u_{02c}$ . La valeur de  $u_{02c}$  correspond donc à la fréquence de coupure du mode  $LP_{02}$ , c'est-à-dire, la fréquence en dessous de laquelle on coupe le mode  $LP_{02}$ . De manière générale, les points d'intersection de  $f(u)$  avec l'axe des abscisses,  $u_{0nc}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , correspondent respectivement aux fréquences de coupure des modes  $LP_{0n}$ . Leurs valeurs sont données par les zéros de la fonction  $J_1(u)$ , en plus de la valeur  $u_{01c} = 0$ . D'après le graphique, sur la plage  $0 < u < V = 10$ , on trouve au total trois zéros de  $f(u)$  :  $u_{01c} = 0$ ,  $u_{02c} = 3,83$ , et  $u_{03c} = 7,01$ . Conséquemment, les modes de type  $LP_{0n}$  qui peuvent se propager pour  $V = 10$  sont au nombre de trois :  $LP_{01}$ ,

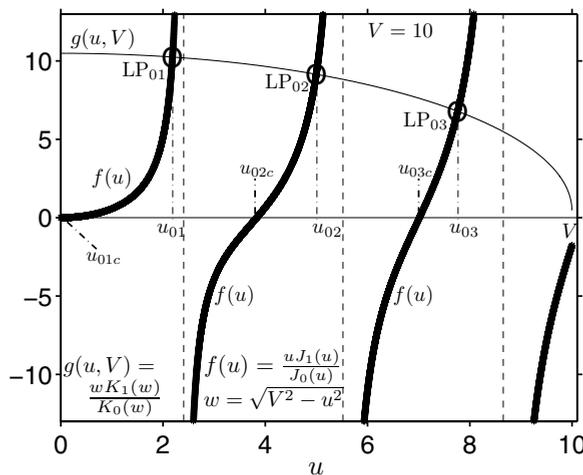


Figure 8.10 – Résolution graphique de l'équation caractéristique du groupe de modes  $LP_{0n}$  pour  $V = 10$ .

LP<sub>02</sub>, et LP<sub>03</sub>. Les valeurs correspondantes de  $u$  sont situées aux points d'intersection des trois premières branches de  $f(u)$  avec  $g(u, V)$ , et sont données respectivement par  $u_{01} \simeq 2,18$ ,  $u_{02} \simeq 5,00$ , et  $u_{03} = 7,76$ . Les constantes de propagation de ces modes se déduisent aisément de ces valeurs de  $u_{0n}$ .

Une étude graphique des conditions de propagation des modes de type LP<sub>1n</sub> peut être faite de manière analogue à celle des LP<sub>0n</sub>. Sa relation de dispersion s'obtient à partir de l'expression (8.68) en posant  $m = 1$  :

$$\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)} + \frac{wK_0(w)}{K_1(w)} = 0$$

Pour la résolution graphique, on peut prendre  $f(u) = \frac{uJ_0(u)}{J_1(u)}$ , et  $g(u, V) = -\frac{wK_0(w)}{K_1(w)}$ . Le résultat est visible dans la figure 8.11, où on peut remarquer qu'ici aussi, les fréquences de coupure des modes LP<sub>1n</sub> sont les zéros de  $f(u)$ . Ici, elles coïncident avec les zéros de  $J_0(u)$  et sont au nombre de trois sur la plage  $0 < u < V = 10$  :  $u_{11c} = 2,40$ ,  $u_{12c} = 5,52$ , et  $u_{13c} = 8,65$ . De ce fait, les modes de type LP<sub>1n</sub> qui peuvent se propager pour  $V = 10$  sont au nombre de trois : LP<sub>11</sub>, LP<sub>12</sub>, et LP<sub>13</sub>. Ici, les points d'intersection des branches de  $f(u)$  avec  $g(u, V)$  se situent dans la partie négative de l'axe des ordonnées. Les valeurs correspondantes de  $u$  sont données respectivement par  $u_{11} \simeq 3,48$ ,  $u_{12} \simeq 6,33$  et  $u_{13} = 9,05$ .

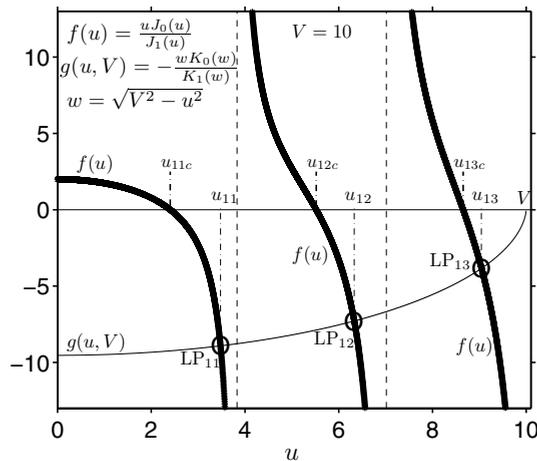


Figure 8.11 – Résolution graphique de l'équation caractéristique du groupe de modes LP<sub>1n</sub> pour  $V = 10$ .

De manière plus générale, l'équation pour tous les groupes de modes LP<sub>mn</sub> est donnée par (8.68), que nous pouvons remettre sous la forme suivante :

$$f(u) = g(u, V) \tag{8.74a}$$

$$f(u) = \frac{uJ_{l-1}(u)}{J_l(u)}, \quad g(u, V) = -\frac{wK_{l-1}(w)}{K_l(w)}, \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2} \tag{8.74b}$$

La fonction  $f(u)$  étant indépendante de  $V$ , les valeurs des fréquences de coupure des modes  $LP_{mn}$ ,  $u_{mnc}$ , sont indépendantes de  $V$ . La fonction  $g(u, V)$  dépend  $V$  et s'étend de plus en plus du côté positif de l'axe des  $u$  à mesure que  $V$  augmente. Un mode  $LP_{mn}$  est guidé si son paramètre  $u_{mn}$  est solution de l'équation (8.74) avec

$$u_{mn} < V. \tag{8.75}$$

On peut déterminer rapidement le nombre de modes susceptibles de se propager, sans résoudre l'équation caractéristique (8.74), en remarquant (comme illustré dans les figures 8.10 et 8.11) que ce nombre coïncide avec le nombre de zéros de la fonction  $f(u)$  dans l'intervalle  $0 < u < V$ , c'est-à-dire, le nombre de racines non nulles de  $J_{l-1}(u) = 0$ ,  $u_{mnc}$ , telles que  $u_{mnc} < V$ , à laquelle s'ajoute la racine  $u_{01c} = 0$  (associée au mode fondamental  $LP_{01}$ ).

La racine  $u_{mnc}$  correspond à la valeur  $V_{cmn}$  du paramètre  $V$  qui permet de couper le mode  $LP_{mn}$ . Ces racines sont listées dans le tableau 8.7 des zéros des fonctions  $J_m$  jusqu'à  $m = 5$ .

**Tableau 8.7** – Racines non nulles des fonctions de Bessel  $J_m$ .

| zéro | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $J_2(x)$ | $J_3(x)$ | $J_4(x)$ | $J_5(x)$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | 2,4048   | 3,8317   | 5,1356   | 6,3802   | 7,5883   | 8,7715   |
| 2    | 5,5201   | 7,0156   | 8,4172   | 9,7610   | 11,0647  | 12,3386  |
| 3    | 8,6537   | 10,1735  | 11,6198  | 13,0152  | 14,3725  | 15,7002  |
| 4    | 11,7915  | 13,3237  | 14,7960  | 16,2235  | 17,6160  | 18,9801  |
| 5    | 14,9309  | 16,4706  | 17,9598  | 19,4094  | 20,8269  | 22,2178  |

Le tableau 8.8 récapitule les valeurs des paramètres  $V_{cmn}$  de coupure des modes pour les groupes de modes  $LP_{01}$  et  $LP_{11}$  pour  $V = 10$ . On remarque que la plus petite fréquence de coupure non nulle est  $V_{cmn} = u_{11c} = 2,405$ , et qu'elle correspond au mode  $LP_{11}$ . Cela

**Tableau 8.8** – Fréquences de coupure  $V_{cmn}$  pour quelques modes  $LP_{mn}$ .

| $V_{cmn}$ | $m$ | $n$ | Notation $LP_{mn}$ | Composantes dégénérées      |
|-----------|-----|-----|--------------------|-----------------------------|
| 0         | 0   | 1   | $LP_{01}$          | $HE_{11}$                   |
| 2,405     | 1   | 1   | $LP_{11}$          | $TE_{01}, TM_{01}, HE_{21}$ |
| 3,832     | 2   | 1   | $LP_{21}$          | $EH_{11}, HE_{31}$          |
| 3,832     | 0   | 2   | $LP_{02}$          | $HE_{12}$                   |
| 5,136     | 3   | 1   | $LP_{31}$          | $EH_{21}, HE_{41}$          |
| 5,520     | 1   | 2   | $LP_{12}$          | $TE_{02}, TM_{02}, HE_{22}$ |
| 6,380     | 4   | 1   | $LP_{41}$          | $EH_{31}, HE_{51}$          |
| 7,016     | 2   | 2   | $LP_{22}$          | $EH_{31}, HE_{52}$          |
| 7,016     | 0   | 3   | $LP_{03}$          | $HE_{13}$                   |

signifie que dès que le paramètre  $V$  d'une fibre à saut d'indice est supérieur à 2,405 la fibre devient multi-mode. Inversement, le régime de propagation monomode est obtenu en se plaçant dans les conditions telles que :

$$V = k_0 a \text{ON} = \frac{2\pi}{\lambda} a \text{ON} < V_{c11} = \frac{2\pi}{\lambda_{c11}} a \text{ON} = 2,405 \quad (8.76)$$

Dans ce cas, seul le mode  $LP_{01}$  peut se propager dans la fibre. C'est ce mode qui est utilisé dans les télécoms pour le transport des informations à ultra-haut débit sur de très grandes distances. Les fibres utilisées ont alors un rayon de cœur  $a$  suffisamment petit pour que  $V < 2,405$  à la longueur d'onde de transmission  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$  (qualifiée de « troisième fenêtre télécom »). La figure 8.12 illustre l'évolution de la constante de propagation normalisée en fonction du paramètre  $V$  ( $V \leq 6$ ), qui est définie par :

$$b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} = 1 - \frac{u^2}{V^2} = \frac{w^2}{V^2} \quad (8.77)$$

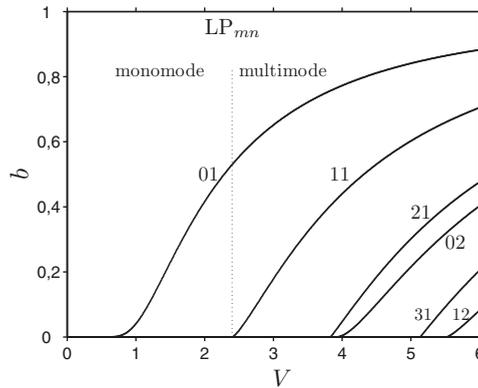


Figure 8.12 – Courbes de dispersion des modes  $LP_{mn}$  pour  $V \leq 6$ .

### e) Approximation gaussienne du mode $LP_{01}$

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, la distribution radiale des modes est décrite rigoureusement par des fonctions de Bessel. Cependant les opérations algébriques sur ces fonctions ne sont pas toujours très confortables. Marcuse a démontré qu'on peut approcher de façon satisfaisante la distribution radiale du mode  $LP_{01}$  par une fonction gaussienne comme suit :

$$\psi(r) = \psi_0 \exp \left[ - \left( \frac{r}{W_0} \right)^2 \right] \quad (8.78)$$

où la valeur de  $W_0$  caractérise la dimension du mode. La formule empirique de Marcuse donne l'expression analytique du paramètre  $W_0$  de la distribution gaussienne qui approche le mieux le champ réel, en fonction du rayon  $a$  du cœur de la fibre et du paramètre

de fréquence normalisée  $V$  :

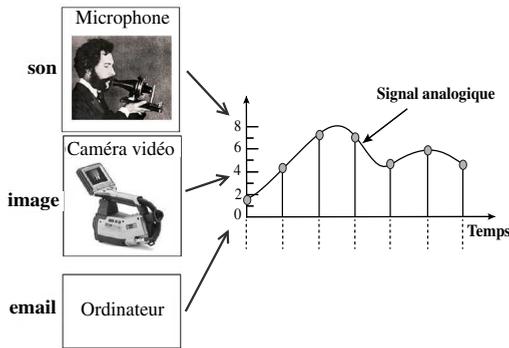
$$\frac{2W_0}{2a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \quad (8.79)$$

Cette expression donne une valeur de  $W_0$  précise à mieux que 1 % près dans la gamme

$$0,8 < V < 2,5.$$

### Encart 8.2 Principe des communications optiques

Tout système de transmission d'information est constitué de trois éléments : un émetteur, un canal de transmission et un récepteur. Pour une communication optique, le canal de transmission est une fibre optique (ou une concaténation de fibres).



L'information à transmettre peut être un son, une image, les mots d'un texte ou des données. Pour être véhiculées à distance, les informations doivent être mises sous une forme adéquate, c'est-à-dire qu'elles doivent préalablement être codées. Faisons l'analogie avec un automobiliste sur la route.

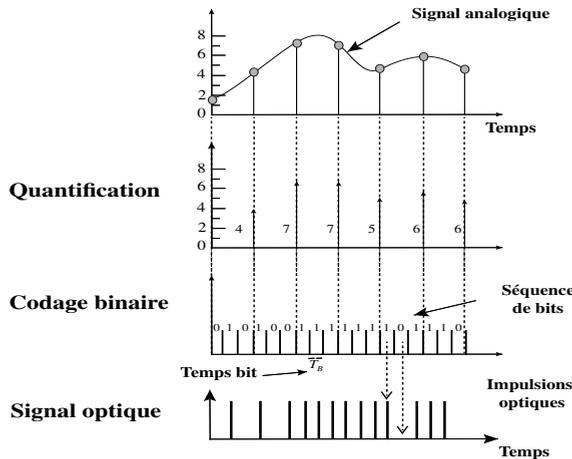


Figure 8.13 – Codage d'une information analogique sous forme numérique puis optique.

Le fait d'actionner son clignotant droit lui permet de transmettre un message précis aux autres automobilistes sans avoir besoin de baisser sa vitre et transmettre cette information de vive voix. Les autres automobilistes connaissent le code de la route et savent interpréter correctement les messages transmis de cette manière.

Les communications par fibres optiques utilisent aussi la transmission par codes. L'information est donc fabriquée à destination par le poste radio (s'il s'agit d'un message audio), le poste de télévision (messages audio et vidéo) ou l'ordinateur (s'il le message est un email), à l'aide des codes reçus. De ce fait, le codage de l'information constitue une opération majeure dans un processus de transmission d'information, et fait aujourd'hui encore l'objet de nombreuses recherches.

Le **codage analogique** consiste à transformer l'information en un **signal analogique** (tension ou courant électrique) dont les variations dans le temps sont proportionnelles aux variations de la grandeur physique associée à l'information. Par exemple une caméra vidéo transforme point par point et ligne par ligne les variations d'intensité lumineuse d'une image en un signal électrique analogique ; ce dernier est par exemple nul pour les points noirs et maximum pour les points blancs et il prend toutes les valeurs intermédiaires pour les points gris. De manière générale, dans un système de communication, l'émetteur est doté d'un appareil spécifique qui transforme l'information (à transmettre) en un signal électrique analogique.

Le signal analogique doit ensuite être converti sous forme numérique. Le processus de conversion commence par un échantillonnage du signal analogique à intervalle de temps régulier. À chaque instant, on enregistre un nombre correspondant à l'amplitude du signal analogique. Ce nombre est ensuite traduit sous forme binaire, c'est-à-dire sous forme d'une suite constituée uniquement de 1 et de 0.

Une fois l'information codée sous forme numérique, il faut l'inscrire sur une onde électromagnétique, à laquelle on fait référence comme étant la **porteuse**. L'émetteur est donc doté d'un générateur d'ondes électromagnétiques (qui est soit une diode laser ou une diode électroluminescente). Le champ électrique de l'onde peut se mettre sous la forme générale qui suit :  $\vec{y}(t) = A \sin(\omega t + \phi) \vec{u}$ , où  $A$  est l'**amplitude** de l'onde,  $\omega/2\pi$  est sa **fréquence**,  $\phi$  est sa **constante de phase** et  $\vec{u}$  un vecteur unitaire indiquant sa direction de **polarisation**.

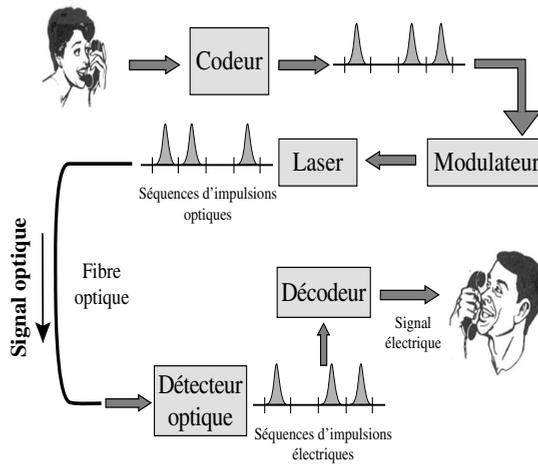


Figure 8.14 – Principe des télécommunications par fibres optiques.

Dans une **porteuse non modulée** les quatre paramètres ( $A$ ,  $\omega/2\pi$ ,  $\phi$ ,  $\vec{u}$ ) sont constants au cours du temps. La modulation de la porteuse consiste à faire varier l'un (ou plusieurs) de ces paramètres au rythme de variation du signal d'information. Cette opération génère au sein de l'émetteur une **porteuse modulée** (c'est-à-dire une onde porteuse d'information), qui est ensuite injectée dans la fibre optique. Le procédé de modulation le plus simple est la **modulation d'amplitude**, qui fait varier l'amplitude  $A$  en maintenant tous les autres paramètres constants. Cela revient à faire varier l'intensité lumineuse en fonction de l'alternance de série de 1 et de 0 qui forment le message codé. Lorsque le symbole « 1 » se présente, le modulateur s'ouvre et injecte dans la fibre un signal très bref (appelé impulsion lumineuse). Lorsque le symbole « 0 » se présente, le modulateur reste fermé (aucune impulsion n'est émise).

Chaque 1 ou 0 est appelé bit d'information, l'intervalle de temps séparant deux bits consécutifs correspond au temps bit. Le débit d'information est alors défini par le nombre de bits par seconde. Il s'exprime en général en  $\text{Gbit.s}^{-1}$  ou en  $\text{Tbit.s}^{-1}$  ( $1 \text{ Gbit.s}^{-1} = 1$  milliard de bits par seconde,  $1 \text{ Tbit.s}^{-1} = 1000$  milliards de bits par seconde). En pratique, un bit 1 correspond à la présence d'une impulsion lumineuse durant un temps bit, alors qu'un bit 0 correspond à l'absence de lumière durant un temps bit.

Après une longue propagation dans la fibre optique, la séquence d'impulsions optiques est finalement reconvertie en séquence d'impulsions électriques à l'aide d'un détecteur et d'un décodeur. À la sortie de la ligne de transmission optique, le détecteur est relié à un système qui compare le signal transmis au signal initial et mesure ainsi le nombre d'erreurs (une erreur revient à détecter un 1 au lieu d'un 0 ou réciproquement). Divers phénomènes de propagation déforment fortement les impulsions et peuvent entraîner un chevauchement des impulsions voisines et par conséquent quelques erreurs de détection voire un brouillage total de l'information. En pratique, les opérateurs tolèrent une seule erreur de bit pour un milliard de bits transmis.

- 1 La fibre optique standard est un fil de verre très fin de forme cylindrique, constitué d'une région centrale, le cœur, d'environ 10 microns de diamètre, entouré d'une gaine d'environ 125 microns de diamètre. Le cœur et la gaine sont constitués d'un même verre de silice, mais où des dopants sont incorporés de telle sorte que l'indice de réfraction du cœur soit légèrement supérieur à celui de la gaine. Le tout est finalement protégé par une gaine protectrice en matière plastique.
- 2 La fibre optique est un guide d'onde qui a comme principal avantage, vis-à-vis des autres guides d'ondes, de n'atténuer que très faiblement les ondes électromagnétiques. C'est pour cette raison qu'actuellement, elle est systématiquement utilisée pour transmettre des informations sur de très longues distances.
- 3 Le second avantage majeur de la fibre optique est la très large bande passante : elle peut transmettre simultanément une plus grande quantité d'informations que tout autre système de transmission existant (câble coaxial, ligne bifilaire, etc.).
- 4 Pour se propager dans une fibre optique, la lumière adopte certaines formes particulières de répartition de l'intensité lumineuse de la section transverse de la fibre, qui dépendent de la fréquence du champ électromagnétique. On les appelle modes de propagation.
- 5 À basse fréquence le seul mode qui peut se propager est un mode dont l'intensité lumineuse est maximum au centre du cœur de la fibre et décroît régulièrement jusqu'à s'annuler dans la gaine. C'est le mode fondamental de propagation.
- 6 À partir d'une certaine fréquence, d'autres modes (d'ordre supérieur) peuvent se propager en même temps que le mode fondamental. Dans le cas des modes d'ordre supérieur, la lumière s'éteint et se rallume au moins une fois lorsqu'on se déplace du cœur vers la gaine, ou lorsqu'on tourne autour de l'axe de la fibre.



- 8.1** Quelle que soit sa fréquence, une onde électromagnétique peut se propager dans une fibre optique :
- a. vrai                      b. faux
- 8.2** Les ondes qui se propagent dans une fibre sont des **modes de propagation**. La **fréquence de coupure** d'un mode est la fréquence :
- a. au-dessus de laquelle le mode commence à se propager  
b. en dessous de laquelle le mode commence à se propager
- 8.3** On désigne par **mode fondamental** le mode qui a :
- a. la fréquence de coupure la plus grande  
b. la fréquence de coupure la plus petite
- 8.4** Dans une fibre optique à saut d'indice, la fréquence de coupure du **mode fondamental** est nulle :
- a. vrai                      b. faux
- 8.5** Dans une fibre optique à saut d'indice, on trouve des **modes dégénérés**. On dit que deux modes sont dégénérés lorsqu'ils se propagent avec :
- a. la même fréquence et des vitesses différentes  
b. la même fréquence et la même vitesse  
c. la même fréquence et la même longueur d'onde



# Entraînez-vous

## 8.1 Impact de la dispersion intermodale dans une ligne télécom

Cet exercice utilise l'approche de l'optique géométrique (approche des rayons lumineux) pour évaluer l'impact de la dispersion intermodale d'une fibre télécom.

On considère une fibre à saut d'indice constituée d'un cœur d'indice  $n_1$  entouré d'une gaine d'indice  $n_2$ . La figure suivante représente le trajet d'un rayon lumineux quelconque qui arrive sur cette fibre avec un angle d'incidence  $\theta_0$ , en provenance d'un milieu d'indice  $n_0$ .

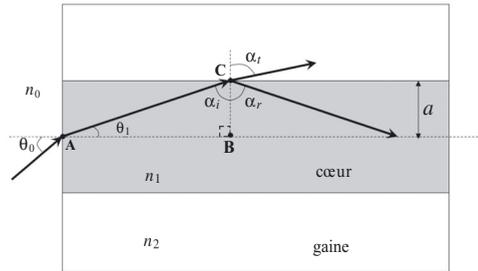


Figure 8.15

1. Écrire la loi de Descartes reliant les angles  $\theta_0$  et  $\theta_1$  au point d'impact A.  
Le rayon réfracté dans le cœur tombe sur le dioptré cœur-gaine au point C avec un angle d'incidence  $\alpha_i$ , et donne lieu à un rayon réfléchi avec un angle  $\alpha_r = \alpha_i$ , et un rayon réfracté avec un angle  $\alpha_t$ .
2. Écrire la loi de Descartes reliant les angles  $\alpha_i$  et  $\alpha_t$  au point d'impact C.
3. Le rayon réfracté dans la gaine (au point C) constitue-t-il un inconvénient dans le cadre des transmissions à grande distance par fibre optique ?
4. Au point C, il existe un angle limite  $\alpha_i = \alpha_{il}$  au-delà duquel le rayon réfracté n'existe pas. Donner l'expression de cet angle limite en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .
5. On cherche à déterminer l'angle  $\theta_0 = \theta_{0l}$  pour lequel  $\alpha_i = \alpha_{il}$ . À partir de la relation entre les angles du triangle ABC, donner l'expression de  $\theta_1$  en fonction de  $\alpha_{il}$ .
6. En tenant compte des questions précédentes, donner l'expression de  $\sin \theta_{0l}$  en fonction de  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_0$ . Comment appelle-t-on  $\sin \theta_{0l}$ ? Par la suite, on utilisera la notation ON pour désigner  $\sin \theta_{0l}$ . La fibre considérée est une fibre à faible guidage ( $\Delta n = n_1 - n_2 \ll 1$ ,  $n = n_1 \simeq n_2$ ), qui reçoit une lumière provenant de l'air.
7. Montrer que dans ce cas,  $ON \simeq \sqrt{2n\Delta n}$ .
8. Calculer la valeur du saut d'indice  $\Delta n$  pour  $ON = 0,13$  et  $n = 1,45$ .
9. Calculer l'angle que fait le rayon guidé le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre (angle  $\theta_{0l}$ ).
10. Le diamètre de cœur valant  $2a = 50$  microns calculer le nombre de réflexions totales effectuées par ce rayon guidé le plus incliné, sur une longueur de fibre de 1 km.

11. Calculer l'écart entre les temps de parcours respectifs de cette fibre par le rayon parallèle à l'axe de la fibre, et le rayon le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre.

Le fait que des rayons différents mettent des temps différents à parcourir la fibre, est qualifié de **dispersion intermodale**. En effet, chaque information est transportée en « pièces détachées » réparties sur plusieurs rayons (ou modes). Ces différentes pièces arrivent à destination à des instants différents (en rang dispersé), d'où le qualificatif de **dispersion intermodale**.

12. En quoi cette dispersion constitue-t-elle un effet pénalisant pour les systèmes de transmission ultra-longue distance par fibre optique ? Par quel moyen peut-on supprimer cet effet dans ces systèmes ?

### 8.2 Calcul des paramètres d'une fibre monomode

La formule empirique de Marcuse donne l'expression analytique du rayon de mode,  $w$ , de la distribution gaussienne qui approche le mieux le champ réel dans une fibre monomode, en fonction du paramètre  $V$  :

$$\frac{2w}{2a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6},$$

où  $a$  désigne le rayon de cœur de la fibre. Cette expression donne une valeur de  $w$  précise à mieux que 1 % près dans la plage  $0,8 < V < 2,5$ . On considère une fibre optique télécom monomode à saut d'indice, en verre de silice (d'indice  $n \simeq 1,447$ ), possédant une ouverture numérique de 0,13, un diamètre de gaine de 125  $\mu\text{m}$ , et une longueur d'onde de coupure à 1,2  $\mu\text{m}$ .

1. Calculer le saut d'indice de cette fibre.
2. Calculer le rayon de cœur de la fibre.
3. Calculer le rayon de mode à la longueur d'onde de 1,55  $\mu\text{m}$ .
4. Calculer le facteur de confinement (fraction de la puissance optique se propageant à l'intérieur du cœur de la fibre).

### 8.3 Détermination graphique des modes LP d'une fibre à saut d'indice

On considère une fibre de silice à saut d'indice ayant les caractéristiques suivantes : indice de cœur  $n_1 = 1,454$ , indice de gaine  $n_2 = 1,450$ , rayon de cœur  $a = 4,46 \mu\text{m}$ . On injecte dans cette fibre un faisceau laser de longueur d'onde  $\lambda = 630 \text{ nm}$ .

1. Calculer l'ouverture numérique de cette fibre.
2. Préciser la couleur du laser injecté dans cette fibre.
3. Calculer le paramètre  $V$  pour ce laser.
4. • Déterminer le nombre total de modes  $\text{LP}_{ln}$  ( $n = 1, \dots, M$ ) susceptibles de se propager, dans les cas  $l = 0$  et  $l = 1$ .
- Déterminer graphiquement les paramètres  $u$  pour les modes  $\text{LP}_{01}$  et en déduire les

constantes de propagation normalisées  $b = \frac{\frac{\beta^2}{k_0^2} - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$ .

# Solutions



8.1 Réponse a ; 8.2 Réponse a ; 8.3 Réponse b ; 8.4 Réponse a ; 8.5 Réponses b, c.



## 8.1 Impact de la dispersion intermodale dans une ligne télécom

$$1. \quad n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 \quad (8.80)$$

$$2. \quad n_1 \sin \alpha_i = n_2 \sin \alpha_t \quad (8.81)$$

3. Le rayon réfracté au point C est une perte d'énergie, qui va se répéter périodiquement, et entraîner rapidement l'extinction totale de la lumière. C'est donc un inconvénient majeur pour les transmissions à grande distance par fibre optique.

4. Il est possible d'éviter la réfraction dans la gaine, en éclairant la fibre avec un angle d'incidence  $\theta_0$  suffisamment petit pour que  $\alpha_i$  soit supérieur à l'angle limite  $\alpha_{il}$ . En effet, la relation (8.81) indique que  $\alpha_i < \alpha_t$ , puisque  $n_1 > n_2$ . Il existe donc un angle  $\alpha_i = \alpha_{il}$  tel que  $\alpha_t = \pi/2$ . Pour cet angle limite, la relation (8.81) s'écrit

$$\sin \alpha_{il} = n_2/n_1 \quad (8.82)$$

5. La somme des angles du triangle ABC étant égal à  $\pi$ , on a :

$$\theta_1 + \alpha_{il} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_{il} \quad (8.83)$$

6. Pour  $\theta_0 = \theta_{0l}$  on a  $\alpha_i = \alpha_{il}$ , et  $\theta_1$  est donné par la relation (8.83). La relation (8.80), devient

$$n_0 \sin \theta_{0l} = n_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha_{il} \right) = n_1 \cos \alpha_{il} = n_1 \sqrt{\cos^2 \alpha_{il}} = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{il}}.$$

En tenant compte de la relation (8.82), on obtient :  $\sin \theta_{0l} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ .

On définit l'**ouverture numérique** (ON) d'une fibre optique comme étant le sinus de l'angle maximal des rayons guidés ; autrement dit, l'angle maximal que doivent avoir les rayons incidents pour pouvoir se propager dans la fibre par réflexion totale à l'interface cœur-gaine :

$$\text{ON} = \sin \theta_{0l} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (8.84)$$

7. Le rayon incident provient de l'air, alors  $n_0 \simeq 1$ , et si on tient compte du fait que  $\Delta n = n_1 - n_2 \ll 1$  et  $n = n_1 \simeq n_2$ , alors la relation (8.84) se met sous la forme suivante :

$$\text{ON} = \sin \theta_{0l} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{2n\Delta n} \quad (8.85)$$

$$8. \quad \Delta n = \frac{\text{ON}^2}{2n} \quad (8.86)$$

Pour  $ON = 0,13$  et  $n = 1,45$ , on a  $\Delta n \simeq 6 \times 10^{-3}$ .

9. Le rayon guidé le plus incliné par rapport à l'axe de la fibre correspond à  $\theta_{0l}$ .

$$ON = \sin \theta_{0l} = 0,13 \text{ soit } \theta_{0l} \simeq 0,13 \text{ rad} = 7,45^\circ$$

10. La première réflexion s'effectue au bout du trajet AC, dont la projection sur l'axe est  $AB = AC \cos \theta_1$ . Ensuite, les réflexions s'effectuent systématiquement après chaque distance effective  $2AC$ , dont la projection sur l'axe est  $2AB$ . L'extrémité de la fibre est atteinte au bout de  $N$  réflexions, telles que  $N \times 2AB = L$ . On a donc

$$N = \frac{L}{2AB} = \frac{L}{2AC \cos \theta_1}$$

Or

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{AC} \Rightarrow N = \frac{L \sin \theta_1}{2a \cos \theta_1}$$

D'après (8.80),  $\sin \theta_{0l} = n_1 \sin \theta_1 = ON \Rightarrow \sin \theta_1 = ON/n_1 \simeq ON/n$ .

Comme  $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \sqrt{1 - (ON/n)^2}$ , on a :

$$N = \frac{L \times ON}{2an\sqrt{1 - (ON/n)^2}}$$

Avec  $L = 1 \text{ km}$ ,  $a = 25 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $n = 1,45$ ,  $ON = 0,13$ , on trouve  $N \simeq 1,8 \times 10^6$ .

11. Le rayon parallèle à l'axe parcourt exactement la distance  $L$ . Supposons que  $L = m \times AB$ , où  $m$  est un entier. Alors la distance parcourue par le rayon le plus incliné est  $L_{\max} = m \times AC$ . Les deux rayons se propagent dans le même milieu d'indice  $n_1 \simeq n$ , à la vitesse  $v = c/n$ . L'écart des temps de parcours est donc

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta L}{v} = \frac{n(L_{\max} - L)}{c} = \frac{nL}{c} \left( \frac{L_{\max}}{L} - 1 \right) = \frac{nL}{c} \left( \frac{AC}{AB} - 1 \right) \\ &= \frac{nL}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta_1} - 1 \right) \rightarrow \Delta t = \frac{nL}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{ON}{n}\right)^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{AN : } \Delta t = 1,95 \times 10^{-8} \text{ s} = 19,5 \text{ ns}$$

12. Cette fibre provoque une dispersion intermodale de  $19,5 \text{ ns.km}^{-1}$ . L'information télécom étant répartie sur plusieurs modes (ou rayons), comme ces rayons n'ont pas le même temps de parcours, les différents constituants de chaque information n'arrivent pas à destination en même temps. L'information arrive étalée dans le temps, avec le risque de chevauchement de deux informations émises à des instants rapprochés. En télécom, lorsque la dispersion intermodale devient très pénalisante, on utilise les fibres monomodes, qui sont caractérisés dans un rayon de cœur suffisamment petit pour que seul le rayon parallèle à l'axe optique puisse se propager.

## 8.2 Calcul des paramètres d'une fibre monomode

1. On a vu dans l'exercice 8.1 que l'ouverture numérique d'une fibre à faible guidage s'écrit  $ON \simeq \sqrt{2n \Delta n}$ ; ce qui conduit à :  $\Delta n = \frac{ON^2}{2n}$ .

Pour  $ON = 0,13$  et  $n = 1,4475$ , on trouve :  $\Delta n \simeq 6 \times 10^{-3}$

2. D'après la formule (8.76) du cours,

$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON \Rightarrow V_c = a \frac{2\pi}{\lambda_c} ON \simeq 2,4 \Rightarrow a = \frac{2,4\lambda_c}{2\pi ON}$$

Pour  $\lambda_c = 1,2 \mu\text{m}$  et  $ON = 0,13$ , on trouve :  $a = 3,52 \mu\text{m}$ .

3. Calculons d'abord le paramètre  $V$  à  $1,55 \mu\text{m}$

$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON = 1,85$$

$$w \approx a \left( 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6} \right) \text{ soit } w = 4,79 \mu\text{m}$$

4. Dans l'approximation de Marcuse, la distribution radiale du champ est donnée par :

$$\psi(r) = \psi_0 \exp \left[ - \left( \frac{r}{w} \right)^2 \right].$$

L'intensité correspondante est  $I(r) = |\psi(r)|^2 = I_0 \exp \left[ - \frac{2r^2}{w^2} \right]$ .

La fraction de puissance dans le cœur est donnée par

$$F = \frac{\int_0^a I(r) ds}{\int_0^b I(r) ds}, \quad (8.87)$$

où  $ds = 2\pi r dr$  est la surface élémentaire d'une couronne circulaire de rayon  $r$  et épaisseur  $dr$ . En faisant le changement de variable  $x = r^2 \Rightarrow dx = 2r dr$ , on obtient :

$$F = \frac{\int_0^a r \exp \left( - \frac{2r^2}{w^2} \right) dr}{\int_0^b r \exp \left( - \frac{2r^2}{w^2} \right) dr} = \frac{\int_0^{a^2} \exp \left( - \frac{2x}{w^2} \right) dx}{\int_0^{b^2} \exp \left( - \frac{2x}{w^2} \right) dx} = \frac{\left[ \exp \left( - \frac{2x}{w^2} \right) \right]_0^{a^2}}{\left[ \exp \left( - \frac{2x}{w^2} \right) \right]_0^{b^2}}.$$

$$\text{Finalement } F = \frac{\exp \left( - \frac{2a^2}{w^2} \right) - 1}{\exp \left( - \frac{2b^2}{w^2} \right) - 1}.$$

Avec  $a = 3,52 \mu\text{m}$ ,  $b = 62,5 \mu\text{m}$  ( $125 \mu\text{m}/2$ ),  $w = 4,79 \mu\text{m}$ , on trouve  $F = 66 \%$ .

### 8.3 Détermination graphique des modes LP d'une fibre à saut d'indice

1. 
$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,108$$

2. Ce laser est de couleur rouge.

3. 
$$V = ak_0 ON = a \frac{2\pi}{\lambda} ON = 4,794$$

4) Déterminons le nombre total de modes  $LP_{0n}$  et  $LP_{1n}$

• **Modes  $LP_{0n}$**

Ils sont décrits par la relation générale (8.74) avec  $l = 0$  :  $\frac{uJ_{-1}(u)}{J_0(u)} + \frac{wK_{-1}(w)}{K_0(w)} = 0$ .

En appliquant les relations de récurrence  $J_{-1}(u) = -J_1(u)$  et  $K_{-1}(w) = K_1(w)$ , cette relation devient :

$$\frac{uJ_1(u)}{J_0(u)} - \frac{wK_1(w)}{K_0(w)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = g(u, V)$$

$$\text{avec } f(u) = \frac{uJ_1(u)}{J_0(u)}, \quad g(u, V) = \frac{wK_1(w)}{K_0(w)}, \quad w = (V^2 - u^2)^{1/2}.$$

Dans l'intervalle  $0 < u < V = 4,794$ , les racines de cette équation sont les points d'intersection des fonctions  $f(u)$  et  $g(u, V)$ . La fonction  $f$  intercepte  $g$  autant de fois qu'il coupe/touche l'axe des abscisses. Les racines de  $f$  comprises entre 0 et  $V$  incluent la racine  $u_{01c} = 0$ , et les racines non nulles de  $J_1(u)$ .

D'après le tableau 8.7, on trouve :  $u_{02c} = 3,8317$ .

Il y a donc au total deux solutions pour l'équation caractéristiques des modes  $LP_{0n}$  sur l'intervalle  $0 < u < V$ , La résolution graphique donne  $u_{01} \simeq 1,98$  ( $b_{01} \simeq 0,83$ ) et  $u_{02} \simeq 4,37$  ( $b_{02} \simeq 0,17$ ).

• **Modes  $LP_{1n}$**

Ils sont décrits par la relation générale (8.74) avec  $l = 1$  :

$$\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)} + \frac{wK_0(w)}{K_1(w)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(u) = g(u, V)$$

$$\text{avec } f(u) = -\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)}, \quad g(u, V) = \frac{wK_0(w)}{K_1(w)}.$$

Ici aussi, la fonction  $f$  intercepte  $g$  autant de fois qu'il coupe l'axe des abscisses. Les racines de  $f$  comprises entre 0 et  $V$  incluent la racine nulle (déjà associée au mode  $LP_{01}$ ), et les racines de  $J_0(u)$ . D'après le tableau 8.7, on ne trouve que :  $u_{11c} = 2,4048$ .

Il n'y a donc qu'une seule solution pour l'équation caractéristiques du groupe de modes  $LP_{1n}$  sur l'intervalle  $0 < u < V$ . La résolution graphique donne  $u_{11} \simeq 3,12$  ( $b_{02} \simeq 0,57$ ).

# Les états de polarisation de la lumière

## Introduction

Pour visualiser un film en trois dimensions, les lunettes utilisées comportent des filtres polariseurs. Sur l'écran, deux images sont projetées : l'une polarisée rectilignement à  $+45^\circ$ , l'autre à  $-45^\circ$ . On cache la première image à l'œil gauche, la seconde à l'œil droit (ou vice versa) à l'aide des lunettes. Chaque œil perçoit ainsi deux images différentes. En photographie, on atténue les reflets venant de surfaces telles que l'eau en plaçant un filtre polariseur correctement orienté devant l'objectif de l'appareil.

## Objectifs

- Définir** les états de polarisation d'une onde électromagnétique plane.
- Décrire** des états de polarisation.
- Présenter** des lames à retard utiles pour manipuler la polarisation.

## Plan

- 1 Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses
- 2 États de polarisation des ondes électromagnétiques planes
- 3 Propagation des états de polarisation dans les dispositifs optiques : formalisme des matrices de Jones

La polarisation de la lumière a été observée pour la première fois par Huygens en 1690 sur les rayons de lumière ayant traversé un cristal de spath d'Islande. Il s'agissait d'un rhomboèdre cristallin de calcite ( $\text{CaCO}_3$ ), matériau uniaxe biréfringent, éclairé sous incidence normale par de la lumière naturelle. Deux faisceaux spatialement séparés sont transmis : un rayon non dévié dit ordinaire car il suit les lois attendues de la réfraction et un rayon dit extraordinaire qui est dévié. Ces deux rayons ont la même intensité lumineuse, ils sont polarisés rectilignement et perpendiculairement l'un par rapport à l'autre. Dans les chapitres dédiés aux milieux anisotropes, nous présenterons le phénomène de double réfraction qui est à la base de cette observation.

En 1890, Malus observe la polarisation par réflexion en recevant sur deux miroirs successifs de la lumière.

L'interprétation des observations précédentes est que la vibration lumineuse ne peut pas être une grandeur scalaire ni un vecteur longitudinal, car il serait impossible de réaliser l'extinction entre un polariseur et un analyseur croisés.

Parmi les applications liées à la polarisation de la lumière, nous pouvons citer l'élaboration des traitements multicouches anti reflets, des polariseurs anisotropes, des cristaux utilisés en optique non-linéaire, des cristaux liquides...

## 1 Transversalité et nature vectorielle des vibrations lumineuses

---

Rappelons que, dans un milieu isotrope, le vecteur représentatif de la vibration lumineuse est le champ électrique de l'onde électromagnétique, il est perpendiculaire au rayon lumineux et situé dans le plan d'onde : l'onde est dite **transverse**. De plus, les phénomènes lumineux sont correctement expliqués en utilisant la notion de champ électromagnétique qui par définition est vectoriel. Parmi les différentes raisons qui imposent d'utiliser la nature vectorielle de la lumière, citons :

- la présence de discontinuités dans les propriétés optiques des milieux c'est-à-dire l'existence de dioptries. En effet, les coefficients de réflexion et de transmission (en amplitude et en intensité) sous incidence oblique sont fonctions de la polarisation, même si les milieux sont isotropes : ce sont les lois de Fresnel ;
- le champ électromagnétique est de nature vectorielle (voir les équations de Maxwell) ;
- l'existence des milieux biréfringents dans lesquels la propagation des ondes s'analyse correctement en tenant compte de la polarisation.

### DÉFINITION 9.1

Une onde transversale, caractérisée en chaque point M du milieu dans lequel elle se propage par une grandeur  $\vec{s}(M, t)$  normale à la direction de propagation est dite polarisée si l'extrémité A du vecteur  $\overline{MA} = \vec{s}$  décrit au cours du temps une courbe bien déterminée.

## 2 États de polarisation des ondes électromagnétiques planes

---

On s'intéresse par la suite au champ induction électrique  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  car c'est le champ le plus significatif en optique des milieux matériels puisqu'il est transverse même dans un diélectrique anisotrope. Dans les milieux isotropes,  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  étant colinéaires, leur direction est identique, ils sont tous deux dans le plan d'onde. Nous verrons au chapitre suivant que la situation diffère pour les milieux anisotropes : le champ électrique n'appartient plus au plan d'onde (sauf cas particuliers), seul  $\vec{D}$  est transverse.

## 2.1 États de polarisation

Dans les milieux infinis, en l'absence de charges libres et pour des ondes planes progressives homogènes, l'équation de Maxwell-Gauss  $\text{div} \vec{D} = 0$  conduit à  $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$  où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde. Les vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{D}$  sont donc orthogonaux :  $\vec{D}$  appartient au plan d'onde. Choisissons Oz comme axe de propagation. Alors l'expression en notation complexe de  $\vec{D}$  est :

$$\vec{D}(z, t) = \vec{D}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

où  $\omega$  est la pulsation,  $\vec{D}_0$  est l'amplitude complexe de  $\vec{D}$ .

Le milieu dans lequel s'effectue la propagation est supposé être un diélectrique linéaire homogène isotrope, d'indice  $n$  : la relation de dispersion est donc  $k = n \frac{\omega}{c}$  où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

Le vecteur  $\vec{D}_0$  étant transverse, il appartient au plan (Oxy) et il peut s'écrire selon :  $\vec{D}_0 = A_x e^{i\varphi_x} \vec{u}_x + A_y e^{i\varphi_y} \vec{u}_y$  où  $A_x$  et  $A_y$  sont des amplitudes réelles (positives) et  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  sont des phases définies à  $2\pi$  près.

À l'aide de ces quantités, dans un plan d'onde quelconque, le champ  $\vec{D}(z, t)$  s'exprime en notation réelle selon :

$$\vec{D}(z, t) \left( \begin{array}{l} D_x(z, t) = A_x \cos(\omega t - kz - \varphi_x) \\ D_y(z, t) = A_y \cos(\omega t - kz - \varphi_y) \end{array} \right). \quad (9.1)$$

Examinons les caractéristiques de l'état de polarisation dans un plan d'onde simple, le plan  $z = 0$ . Posons  $X(t) = D_x(0, t)$  et  $Y(t) = D_y(0, t)$ . Trouver l'état de polarisation de l'onde revient à répondre à la question : quel est l'ensemble des points décrits par l'extrémité de  $\vec{D}(0, t)$  c'est-à-dire par le couple  $(X(t), Y(t))$  ?

D'après l'équation (9.1),

$$\begin{cases} X(t) = A_x \cos(\omega t - \varphi_x) \\ Y(t) = A_y \cos(\omega t - \varphi_y) \end{cases} \quad (9.2)$$

En changeant l'origine des temps et en introduisant  $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$  :

$$\begin{cases} X(t) = A_x \cos(\omega t) \\ Y(t) = A_y \cos(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (9.3)$$

Ces expressions indiquent que la courbe recherchée est inscrite dans un rectangle de côtés  $2A_x$  selon Ox et  $2A_y$  selon Oy. Nous pouvons également affirmer qu'il s'agit d'une courbe fermée vu que  $X(t)$  et  $Y(t)$  possèdent la même période.

Le couple  $(X(t), Y(t))$  constitue les équations paramétriques de la courbe recherchée. Pour en déduire l'équation cartésienne, il est nécessaire d'éliminer le paramètre temps. Pour cela, nous utilisons la relation

$$\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1. \quad (9.4)$$

D'autre part, le système (9.3) donne :

$$\begin{cases} \cos \omega t = \frac{X}{A_x} \\ \sin \omega t = \frac{Y - X \frac{A_y}{A_x} \cos \varphi}{A_y \sin \varphi} \end{cases}$$

qui reporté dans la relation (9.4) permet de trouver l'équation cartésienne de la courbe :

$$\frac{X^2}{A_x^2} + \frac{Y^2}{A_y^2} - 2 \frac{XY}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$$

Il s'agit donc d'une ellipse : on dit que l'état de polarisation le plus général d'une onde plane progressive monochromatique est un état de polarisation elliptique.

Le terme croisé  $XY$  dans l'équation indique que, de manière générale, les axes  $Ox'$  et  $Oy'$  de l'ellipse sont différents de  $Ox$  et  $Oy$  (figure 9.1).

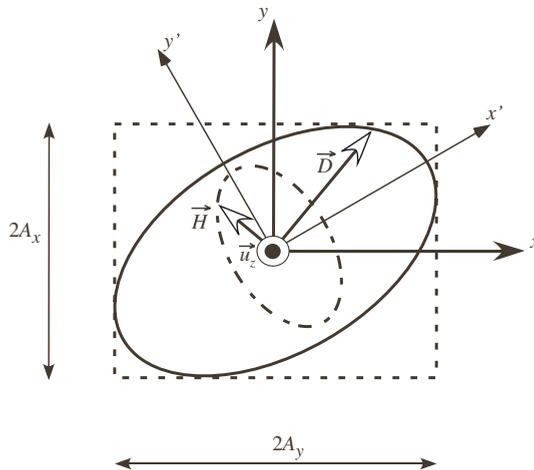


Figure 9.1– Ellipses décrites par les extrémités de  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$ .

Le sens de parcours de l'ellipse se détermine en calculant le vecteur tangent en tout point de l'ellipse :

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -A_x \omega \sin \omega t \\ \frac{dY}{dt} = -A_y \omega \sin(\omega t - \varphi) \end{array} \right).$$

Ce sens de parcours ne changeant pas au cours du temps (l'onde est censée se propager sans rencontrer d'obstacle, ni de dioptré), nous choisissons un instant simple pour déterminer le sens du parcours :  $t = 0$ . À cet instant, le vecteur tangent est :

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = 0 \\ \frac{dY}{dt} = A_y \omega \sin \varphi \end{array} \right).$$

Le sens de parcours dépend donc de  $\varphi$ .

La convention de sens utilisée par les opticiens est relative à la direction d'observation c'est-à-dire à l'observateur vers lequel se propage l'onde.

- Si  $0 < \varphi < \pi$ , alors  $\sin \varphi > 0$  soit  $\frac{dY}{dt} > 0$  : le sens de parcours est le sens direct (sens trigonométrique). L'onde est dite polarisée elliptiquement à gauche, son hélicité est positive.
- Si  $-\pi < \varphi < 0$ , alors  $\sin \varphi < 0$  soit  $\frac{dY}{dt} < 0$  : le sens de parcours est le sens rétrograde. L'onde est dite polarisée elliptiquement à droite, son hélicité est négative.
- Si  $\varphi = 0$  ou  $\pi$ , les équations paramétriques donnent immédiatement  $\frac{Y}{X} = \pm \frac{A_y}{A_x}$ . L'équation est celle d'une droite, l'onde est dite polarisée rectilignement.
- Si  $A_x = A_y$  et  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , l'équation cartésienne est  $\frac{X^2}{A_x^2} + \frac{Y^2}{A_y^2} = 1$ . L'équation est celle d'un cercle, l'onde est dite polarisée circulairement, à droite si  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , à gauche si  $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ .

Les résultats précédents peuvent se représenter selon la figure 9.2.

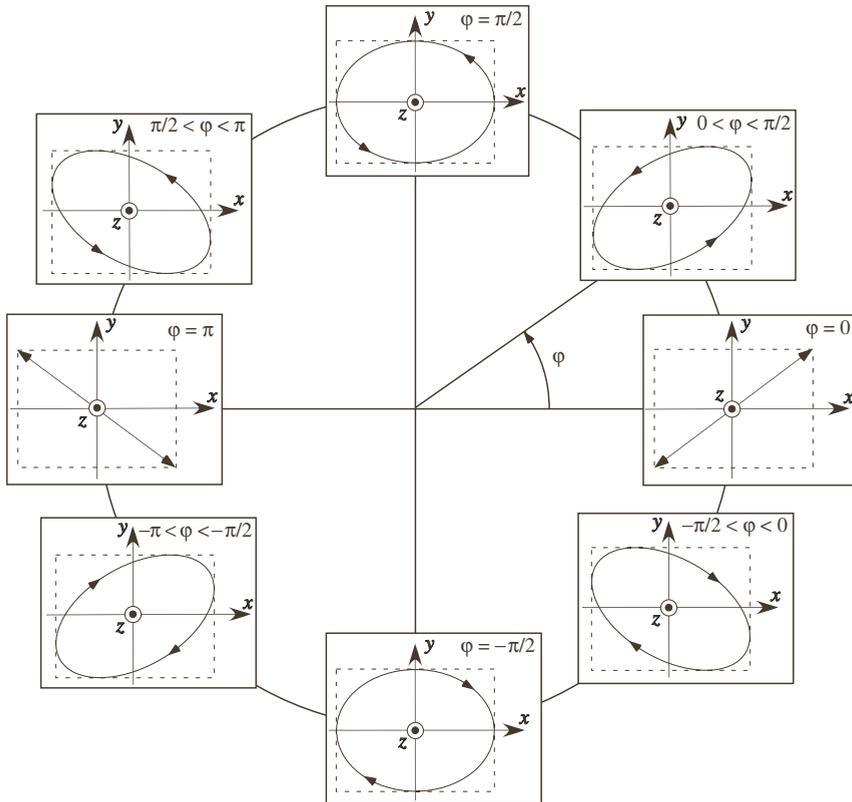


Figure 9.2 – Les différents états de polarisation d'une onde plane progressive monochromatique selon les valeurs du déphasage  $\varphi$ .

En conclusion, nous venons d'établir qu'une onde plane progressive monochromatique est nécessairement polarisée et que son état de polarisation le plus général est elliptique. Lors de la traversée de cette onde dans des milieux, les composantes  $D_x$  et  $D_y$  vont subir des retards différents ce qui va se traduire par une modification de l'état de polarisation tout au long de la propagation.

**Remarque** Si nous effectuons les calculs avec un champ induction de la forme  $\vec{D}(z, t) = \vec{D}_0 e^{+i(\omega t - kz)}$  c'est-à-dire conjugué de celui utilisé, les conclusions sur le sens du parcours sont inversées par rapport à celles obtenues (il faut changer  $i$  en  $-i$ ).

## 2.2 Manipulation d'un état de polarisation avec une lame à retard

Une lame à retard est une lame à faces parallèles taillée dans un cristal anisotrope uni-axe. Elle est éclairée sous incidence normale, la propagation s'effectue selon un axe dit principal. Il y a deux autres axes principaux qui sont perpendiculaires entre eux et à l'axe de propagation, l'un est appelé axe lent, l'autre axe rapide. De tels milieux sont étudiés plus en détails dans le chapitre suivant. Nous montrerons en particulier qu'à la sortie d'un tel dispositif, les composantes du champ induction électrique sont :

$$\begin{pmatrix} D_x = D_0 \cos \omega t \\ D_y = D_1 \cos (\omega t - \varphi - \varphi_{\text{lame}}) \end{pmatrix}.$$

où  $\varphi_{\text{lame}} = \frac{2\pi\ell}{\lambda}(n_y - n_x)$  est le déphasage introduit par la lame d'épaisseur  $\ell$ . On a  $\varphi_{\text{lame}} > 0$  si  $n_y > n_x$  c'est-à-dire si  $v_y < v_x$ , où  $v_x$  et  $v_y$  sont les vitesses de phase associées.

- Si  $\varphi_{\text{lame}} = \pi$ , la lame est demi-onde, elle transforme un état de polarisation en un état de polarisation symétrique par rapport aux axes neutres.
- Si  $\varphi_{\text{lame}} = \pi/2$ , la lame est quart d'onde, elle transforme un état de polarisation rectiligne en un état de polarisation elliptique dont les axes correspondent aux axes neutres de la lame. Réciproquement, elle transforme une polarisation elliptique dont les axes sont confondus avec les axes neutres de la lame en une polarisation rectiligne.

À travers une telle lame, toute polarisation circulaire est transformée en une polarisation rectiligne. On peut résumer ces actions par les figures 9.3 et 9.4.

## 2.3 Cas particulier de la lumière naturelle

Une source lumineuse ordinaire est formée d'un très grand nombre d'atomes qui du fait des collisions émettent de façon indépendante et aléatoire de la lumière qui peut être considérée en première approximation comme une superposition d'un grand nombre d'états de polarisation. On représente la lumière naturelle par des vibrations elliptiques incohérentes dont la forme, l'orientation et la phase changent aléatoirement plusieurs milliards de fois par seconde. En réalité, le caractère aléatoire n'est pas total car la réflexion ou la réfraction de la lumière naturelle provoquent une dissymétrie et donc

une polarisation partielle. C'est ainsi que la lumière naturelle présente un faible degré de polarisation.

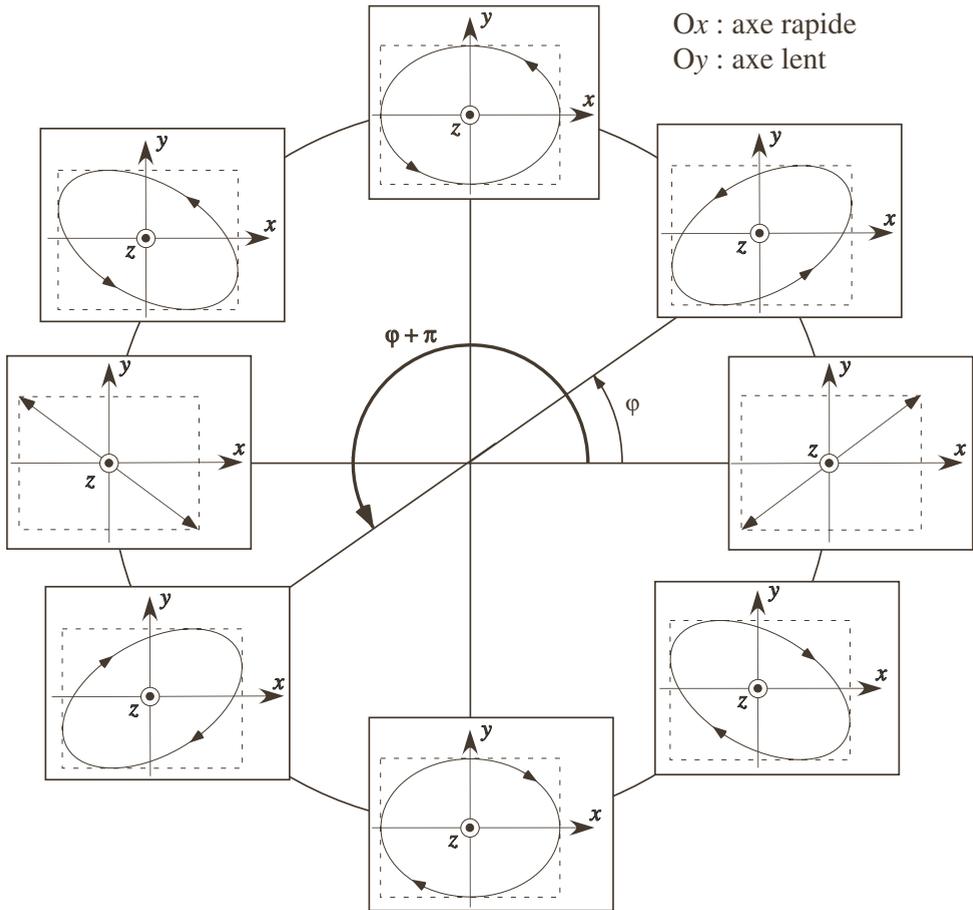


Figure 9.3 – Action d'une lame demi-onde sur un état de polarisation.

Encart 9.1

## Cartographier les contraintes et déformations d'un corps

La photo-élasticimétrie est une technique qui sert à mesurer les contraintes mécaniques induites par photo-élasticité (effets sur la lumière des contraintes et déformations appliquées à un corps). En effet, une contrainte à l'intérieur d'un corps entraîne un déplacement des molécules, des ions ou des atomes ce qui modifie la transmission de la lumière. En analysant l'état de polarisation de la lumière transmise ou réfléchi, on déduit le champ de contraintes auquel est soumis le matériau. Il existe deux procédés de photo-élasticimétrie :

- la photo-élasticimétrie par transmission pour laquelle l'objet contraint est placé entre des polariseurs et observé par transparence.
- la photo-élasticimétrie par réflexion pour laquelle la surface d'un objet non transparent est rendue réfléchissante par application d'une mince couche de produit photo-élastique. La lumière réfléchi par l'objet traverse alors deux fois le revêtement photo-élastique. Les polariseurs sont placés l'un à côté de l'autre.

La polarisation de la lumière incidente est soit rectiligne, soit circulaire. L'analyse des images obtenues se fait par traitement informatique afin de quantifier les répartitions et variations des contraintes et déformations.

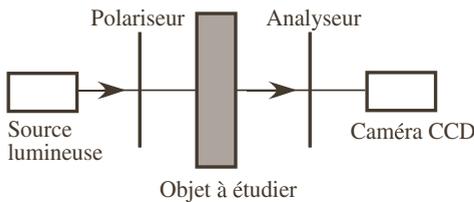


Photo-élasticimétrie par transmission

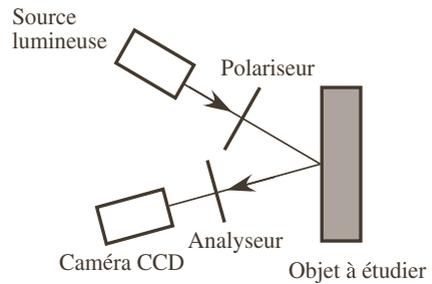
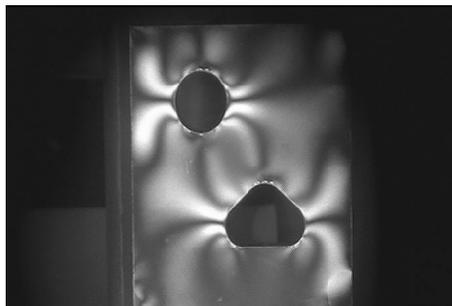


Photo-élasticimétrie par réflexion



Exemple d'image obtenue par photo-élasticimétrie.

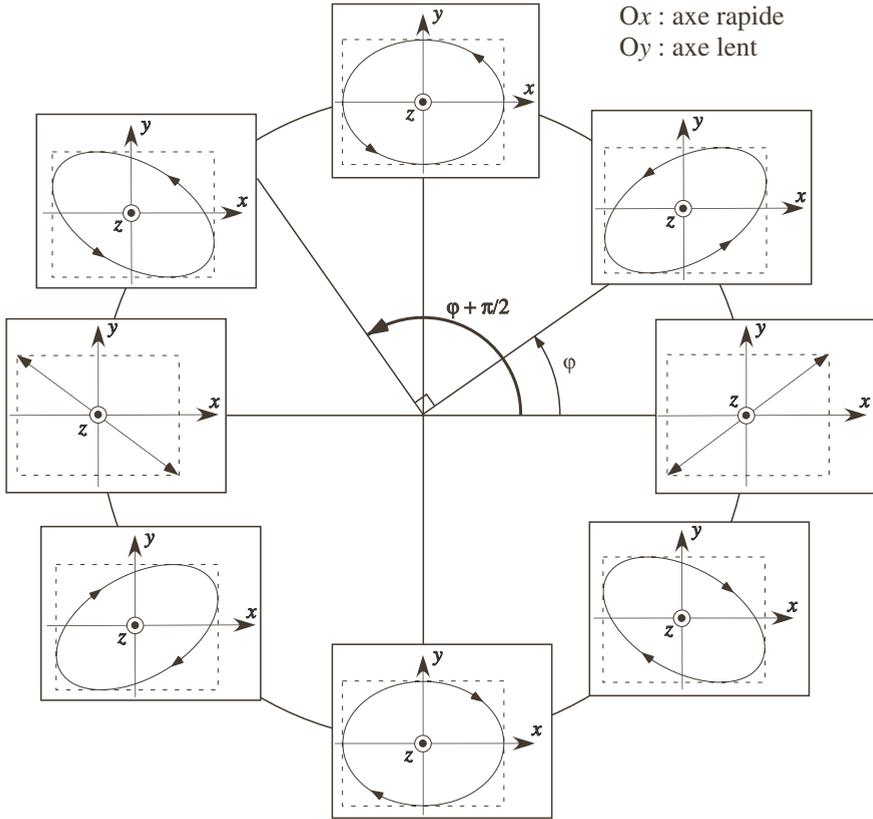


Figure 9.4 – Action d’une lame quart d’onde sur un état de polarisation.

## 2.4 Représentations des états de polarisation

Il résulte du paragraphe précédent qu’une onde plane polarisée est caractérisée par trois paramètres indépendants : les amplitudes  $A_x$ ,  $A_y$  et le déphasage  $\varphi$ . D’autres représentations existent, toutes utilisent trois paramètres indépendants. Dans ce qui suit, les caractéristiques de deux représentations sont présentées. Notons que d’autres représentations existent comme la représentation complexe, la représentation avec la sphère de Poincaré.

### a) Représentation de Jones

Elle a été élaborée par R.C. Jones en 1941. L’onde polarisée y est représentée par un vecteur  $\vec{V}$ , appelé vecteur de Jones, dont les composantes sont proportionnelles aux amplitudes complexes de  $\vec{D}$  :

$$\vec{V} \begin{pmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{V} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Sans modifier l'état de polarisation, on peut utiliser le vecteur de Jones normé

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \\ \frac{A_y e^{i\varphi}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \end{pmatrix}$$

Précisons les vecteurs de Jones normés pour quelques états de polarisation :

### États de polarisation rectiligne.

- $\hat{V} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$  où  $\theta$  est l'angle que fait  $\vec{D}$  avec Ox.
- rectiligne selon Ox :  $\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
- rectiligne selon Oy :  $\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On a  $\langle \hat{X} | \hat{Y} \rangle = 0$  : les deux états sont orthogonaux.

### États de polarisation circulaire.

- gauche ( $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ ) :  $\hat{G} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$
- droit ( $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ) :  $\hat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Les deux états circulaires  $\hat{G}$  et  $\hat{D}$  sont orthogonaux puisque  $\langle \hat{G} | \hat{D} \rangle = \langle \hat{D} | \hat{G} \rangle = 0$ .

De plus on vérifie facilement que  $\hat{G} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{Y})$  et  $\hat{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{Y})$ . Ces deux expressions montrent que les états circulaires  $\hat{G}$  et  $\hat{D}$  se décomposent sur la base des états rectilignes.

Réciproquement,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{G} + \hat{D}) \text{ et } \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{G} - \hat{D}) : \text{ les états rectilignes sont}$$

la somme ou la différence d'états de polarisations circulaires orthogonaux. Nous voyons sur cet exemple que la représentation de Jones est très commode quand il s'agit de connaître l'état de polarisation d'une onde qui est la somme d'ondes polarisées.

### États de polarisation elliptique.

C'est le cas le plus général. Le vecteur de Jones normé est

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \\ \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \text{ En écrivant } \cos \chi = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \text{ d'où } \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} = \sin \chi e^{i\varphi}$$

ceci conduit à une expression équivalente du vecteur de Jones pour un état elliptique :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi e^{i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Une forme symétrique peut également être utilisée :  $\hat{J} = \begin{pmatrix} \cos \chi e^{-i\varphi/2} \\ \sin \chi e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$ .

L'état orthogonal est  $\hat{J}'(\chi, \varphi) = \hat{J}(\chi + \frac{\pi}{2}, \varphi)$ .

### b) Représentation de Stokes

Les paramètres de Stokes sont liés aux intensités qui sont des grandeurs directement mesurables. Cette représentation est bien adaptée pour traiter l'évolution de la lumière naturelle ou partiellement polarisée dans un système optique. Les quantités  $P_0, P_1, P_2, P_3$

appelés paramètres de Stokes sont définies par :

$$\begin{cases} P_0 = A_x^2 + A_y^2 \\ P_1 = A_x^2 - A_y^2 \\ P_2 = 2A_x A_y \cos \varphi \\ P_3 = 2A_x A_y \sin \varphi \end{cases}$$

$P_0$  est donc proportionnel à l'intensité totale de l'onde,  $P_1$  est la différence des intensités des composantes selon  $O_x$  et  $O_y$ . Ces paramètres ne sont pas indépendants puisqu'ils dépendent de  $\varphi, A_x, A_y$ . On peut vérifier la relation  $P_0^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ . Les vecteurs de Stokes sont souvent normés en imposant  $P_0 = 1$ .

## 3 Propagation des états de polarisation dans les dispositifs optiques : formalisme des matrices de Jones

Nous allons voir les outils utiles à l'étude de la propagation d'un état de polarisation dans un dispositif optique qui modifie les états de polarisation. Selon cette approche, un élément optique est caractérisé par une matrice carrée de dimension 2. Ce formalisme a été conçu par Robert Clark Jones (1916-2004).

### 3.1 Propriétés des matrices de Jones

Soit  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$  représentant un dispositif optique modifiant l'état de polarisation. Il s'agit d'un opérateur linéaire possédant deux vecteurs propres orthogonaux associés à deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , ces quantités pouvant être complexes. La détermination de la matrice de Jones d'un élément optique suppose donc la connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres.

On montre alors les propriétés suivantes :

- $\det M = \lambda_1 \lambda_2$ .
- si  $|\lambda_1| = 1$  et  $|\lambda_2| = 1$ ,  $|\det M| = 1$  :  $M$  est unitaire c'est-à-dire  $M^\perp M = M M^\perp = Id$  où  $M^\perp = ({}^t M)^*$  est la conjuguée hermitique (ou adjoint) de  $M$ . Ceci induit les relations :

$$\begin{cases} A = D^* \\ B = -C^* \\ |A|^2 + |C|^2 = 1 \end{cases}$$

•  $M$  étant unitaire, il y a conservation de la norme ce qui se traduit par le fait que l'intensité de l'état de polarisation émergent est égale à l'intensité de l'état de polarisation incident. Il y a également conservation de l'orthogonalité des vecteurs. Autrement dit, après traversée de l'élément optique, des états orthogonaux restent orthogonaux.

- Symétries de la matrice de Jones :
  - si les états propres sont rectilignes,  $M$  est symétrique ;
  - si les valeurs propres sont égales ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ),  $M$  est symétrique et diagonale. L'élément optique est isotrope absorbant ou non ;
  - si les états propres sont circulaires,  $M$  est antisymétrique.

### 3.2 Matrices de Jones des polariseurs rectilignes

Par définition, un polariseur rectiligne est un dispositif optique, biréfringent ou non, qui ne transmet qu'un état de polarisation rectiligne orienté suivant une direction fixe appelée direction de passage du polariseur ou azimut de transmission.

Un analyseur rectiligne est identique à un polariseur rectiligne, il se place en général à la sortie d'un système optique, il permet l'analyse de l'état de polarisation émergent.

La matrice de Jones pour un polariseur de direction de passage  $O_x$  est

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Jones pour un polariseur de direction de passage  $O_y$  est

$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On ne tient pas compte dans les expressions précédentes du facteur de phase associé à la traversée de la lumière dans le dispositif.

Énonçons quelques propriétés :

- les valeurs propres de  $P_x$  et  $P_y$  sont 0 et 1.
- $P_x$  et  $P_y$  sont des projecteurs car  $P_x^2 = P_x$ ,  $P_y^2 = P_y$ .
- $\det P_x = 0$ ,  $\det P_y = 0$  : les matrices de Jones des polariseurs rectilignes ne sont pas associées à des transformations unitaires, l'intensité transmise est inférieure ou égale à l'intensité incidente.

### 3.3 Matrices de Jones d'éléments optiques

Le tableau 9.1 donne une liste non exhaustive des matrices de Jones de divers composants optiques.

**Tableau 9.1** – Matrices de Jones de polariseurs et lames optiques.

| Élément optique   | Matrice de Jones   |
|---|--|
| Polariseur rectiligne, axe de transmission $O_x$                          | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$                           |
| Polariseur rectiligne, axe de transmission $O_y$                          | $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                           |
| Polariseur rectiligne, axe de transmission à $45^\circ$ de $O_x$ et $O_y$ | $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$               |
| Lame isotrope introduisant un déphasage $\varphi$                         | $\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$     |
| Lame biréfringente  | $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$ |
| Lame quart d'onde, axe rapide selon $O_x$                                 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$                          |
| Lame quart d'onde, axe rapide selon $O_y$                                 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$                           |

### 3.4 Association de matrices de Jones

La motivation de l'emploi du formalisme de Jones provient du fait que l'état de polarisation transmis par une association d'éléments optiques se trouve en calculant  $M\hat{V}$  où  $\hat{V}$  est l'état de polarisation incident et  $M$  la matrice résultant du produit des matrices de chacun des éléments, produit effectué dans le même repère  $Oxy$ . Les différentes matrices doivent être exprimées dans le même repère  $Oxy$ . Le produit des matrices s'effectue dans l'ordre inverse de celui rencontré par la lumière.

- 1 Une onde plane progressive monochromatique (OPPM) est nécessairement polarisée.
- 2 Son état de polarisation le plus général est elliptique.
- 3 Les autres états de polarisation possibles sont soit rectilignes, soit circulaires.
- 4 Un état de polarisation peut être contrôlé à l'aide d'une lame à retard.



## Testez-vous

- 9.1** Une onde électromagnétique polarisée circulaire à droite possède :
- a. un champ électrique de module constant et est un vecteur tournant
  - b. un champ électrique dont le module oscille et est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique
  - c. un champ électrique d'amplitude sinusoïdale et qui tourne dans le sens contraire du sens trigonométrique
  - d. un champ électrique d'amplitude constante et qui oscille dans un plan fixe
- 9.2** Un faisceau de lumière naturelle d'intensité  $100 \text{ W.m}^{-2}$  éclaire deux polariseurs rectilignes placés l'un derrière l'autre. Les axes de transmission (c'est-à-dire les azimuts de transmission) des polariseurs sont parallèles. L'intensité de la lumière transmise est :
- a.  $100 \text{ W.m}^{-2}$
  - b.  $50 \text{ W.m}^{-2}$
  - c.  $25 \text{ W.m}^{-2}$
  - d.  $200 \text{ W.m}^{-2}$



- 9.1** Soit une onde lumineuse polarisée rectilignement dans un plan vertical et d'intensité  $2\,000\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Elle éclaire sous incidence normale un polariseur linéaire dont l'axe de transmission est horizontal. Donner l'intensité transmise.
- 9.2** On utilise deux polariseurs linéaires idéaux dont les axes de transmission sont séparés d'un angle égal à  $30^\circ$ . Le premier polariseur est illuminé par de la lumière naturelle dont l'intensité est  $500\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ . Quelle intensité émerge de ces deux polariseurs ?
- 9.3** Soit une onde plane progressive monochromatique dont l'état de polarisation est linéaire, le champ électrique faisant un angle de  $40^\circ$  avec la verticale. Cette onde est incidente sur un polariseur dont l'azimut de transmission fait un angle de  $10^\circ$  avec la verticale. Quelle est l'intensité transmise ?
- 9.4** On place quatre polariseurs rectilignes parfaits à la suite l'un de l'autre. L'azimut de transmission du premier polariseur est vertical, celui du second forme un angle de  $30^\circ$  avec la verticale, celui du troisième un angle de  $60^\circ$  avec la verticale, celui du quatrième un angle de  $90^\circ$  avec la verticale. La lumière incidente est non polarisée. Quelle est l'intensité émergente ?

## 9.5 États de polarisation

Donner l'état de polarisation des ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont les champs induction électrique ont les expressions suivantes :

$$\vec{D}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t + kx) \\ D_0 \sin(\omega t + kx) \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ -D_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_5 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}) \\ D_0 \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_6 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ 2D_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_7 \begin{pmatrix} D_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -D_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 2D_0 \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \\ D_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \quad \vec{D}_9 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t + kx + \frac{2\pi}{3}) \\ 2D_0 \sin(\omega t + kx - \frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

### 9.6 Interférences en lumière polarisée, expérience de Fresnel-Arago

Deux fentes d'Young  $F_1$  et  $F_2$  sont éclairées par de la lumière monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , rectilignement polarisée (polariseur P) issue de la source F. Les fentes d'Young sont équidistantes de F et espacées de  $a$ . Elles sont à une distance  $D$  de l'écran  $E$ .

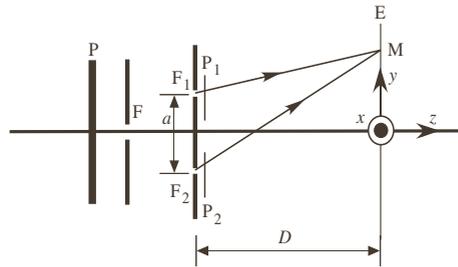


Figure 9.5

Deux types de réponse sont possibles pour cet exercice : une analyse qualitative ou bien une analyse quantitative.

1. Deux polariseurs rectilignes idéaux identiques  $P_1$  et  $P_2$  sont placés à la sortie des fentes  $F_1$  et  $F_2$ .

Décrire l'aspect de l'écran et indiquer l'état de polarisation de la lumière :

- a) si les azimuts de  $P_1$  et  $P_2$  sont parallèles entre eux et à  $45^\circ$  de l'axe de P.
- b) si les azimuts de  $P_1$  et  $P_2$  sont perpendiculaires l'un par rapport à l'autre et à  $45^\circ$  de l'axe de P.

2. Dans cette question, les azimuts des polariseurs  $P_1$  et  $P_2$  sont orientés comme à la question 1.b. et on observe l'écran E à travers un analyseur A.

Décrire l'aspect de l'écran et déterminer l'état de polarisation de la lumière dans cette nouvelle situation :

- a) lorsque l'azimut de A est parallèle à celui de  $P_1$  ou de  $P_2$ .
- b) lorsque l'azimut de A est orienté suivant l'une des bissectrices des azimuts de  $P_1$  et  $P_2$ .
- c) lorsque l'azimut de A est orienté suivant l'autre bissectrice.
- d) lorsque l'orientation de l'azimut de A est quelconque.

### 9.7 Polariseur à réflexion vitreuse

On considère une onde plane progressive monochromatique arrivant sous une incidence  $i_1$  sur un dioptré plan séparant deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes d'indices respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . On note  $i_2$  l'angle de réfraction.

1. Rappeler les expressions des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de ce dioptré. Montrer que seul un des coefficients de réflexion s'annule pour une certaine incidence  $i_B$  que l'on précisera. Quelle est la polarisation de l'onde réfléchie correspondante ?

2. Application numérique : on prend  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,5$ . Donner  $i_B$ . Quelle est la valeur correspondante du coefficient de réflexion en intensité ? Commenter le résultat. Conclure.



**9.1 a.** Le champ électrique de l'onde, dans le plan d'onde  $z = 0$ , est  $\vec{E} \begin{pmatrix} E_0 \cos \omega t \\ -E_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$

et  $|\vec{E}| = E_0 = \text{constante}$ .

**9.2 b.** Après le premier polariseur, la lumière est polarisée rectilignement, son intensité est  $50 \text{ W.m}^{-2}$ . En effet, la lumière illuminant le polariseur étant naturelle, nous pouvons la considérer (en première approximation) comme un ensemble de polarisations rectilignes dont les directions  $\theta(t)$  varient rapidement et aléatoirement au cours du temps. Ainsi, l'induction électrique transmise par le premier polariseur peut s'écrire  $\vec{D} = D_0 \cos \theta(t) \vec{u}_p$  où  $\vec{u}_p$  est un vecteur unitaire porté par l'axe de transmission du polariseur. L'intensité lumineuse transmise est proportionnelle à  $\langle |\vec{D}|^2 \rangle = \langle |D_0 \cos \theta(t)|^2 \rangle = \frac{D_0^2}{2}$  : la moitié de l'intensité incidente d'une lumière naturelle est transmise à travers un polariseur rectiligne.

Le calcul précédent peut être repris en représentant la lumière naturelle par des vibrations elliptiques dont la forme, l'orientation et la phase changent aléatoirement plusieurs milliards de fois par seconde. Les équations temporelles de l'ellipse dans le repère de ses axes sont (le plan d'onde est choisi en  $z = 0$ ) :

$$\begin{cases} D_X(z = 0, t) = D_1 \cos \omega t \\ D_Y(z = 0, t) = D_2 \sin \omega t \end{cases}$$

L'intensité est  $I = \langle |D_X|^2 \rangle + \langle |D_Y|^2 \rangle = \frac{D_1^2}{2} + \frac{D_2^2}{2} = \text{constante} = I_0$ .

À la sortie du polariseur, l'induction électrique est :

$$\vec{D}_p = (D_1 \cos \omega t \cos \theta(t) - D_2 \sin \omega t \sin \theta(t)) \vec{u}_p$$

où  $\vec{u}_p$  est un vecteur unitaire porté par l'axe de transmission du polariseur,  $\theta(t)$  est une fonction aléatoire du temps.

L'intensité transmise par le polariseur est :

$$\begin{aligned} I_p &= \langle |\vec{D}_p|^2 \rangle \\ &= \langle D_1^2 \cos^2 \omega t \cos^2 \theta(t) + D_2^2 \sin^2 \omega t \sin^2 \theta(t) - 2D_1 D_2 \cos \omega t \sin \omega t \cos \theta(t) \sin \theta(t) \rangle \\ &= D_1^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle \langle \cos^2 \theta(t) \rangle + D_2^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle \langle \sin^2 \theta(t) \rangle - 2D_1 D_2 \frac{\langle \sin 2\omega t \rangle}{2} \frac{\langle \sin 2\theta(t) \rangle}{2} \\ &= \frac{D_1^2}{4} + \frac{D_2^2}{4} = \frac{I_0}{2} \end{aligned}$$

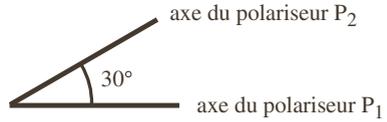
Après le second polariseur dont l'azimut est parallèle à celui du premier polariseur, l'intensité reste égale à  $50 \text{ W.m}^{-2}$ .



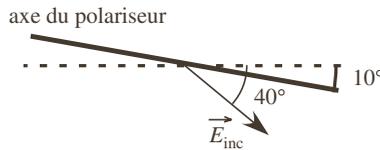
**9.1** L'intensité transmise suit une loi  $I = I_0 \cos^2 \alpha$  où  $I_0 = 2000 \text{ W.m}^{-2}$  et  $\alpha$  est l'angle entre la direction de la polarisation et l'axe du polariseur



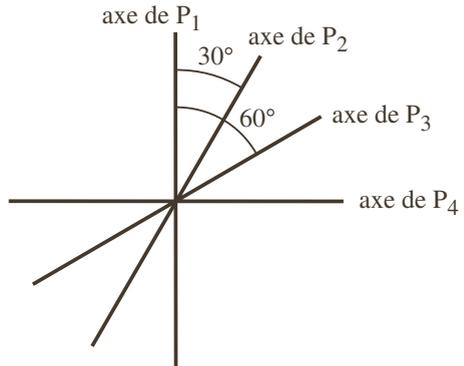
**9.2** Après le premier polariseur  $P_1$ , comme il est éclairé par de la lumière naturelle, l'intensité transmise est d'intensité  $I_1 = \frac{I_{inc}}{2} = 250 \text{ W.m}^{-2}$ . Après le second polariseur  $P_2$ , comme son axe de transmission fait un angle de  $30^\circ$  avec celui de  $P_1$ , l'intensité en sortie sera  $I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = 187,5 \text{ W.m}^{-2}$



**9.3** L'intensité transmise est  $I_t = I_{inc} \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} I_{inc}$ .



**9.4** Après  $P_1$ , l'intensité est  $I_1 = \frac{I_{inc}}{2}$ .  
 Après  $P_2$ ,  $I_2 = I_1 \cos^2 30^\circ = \frac{I_{inc}}{2} \cdot \frac{3}{4}$ .  
 Après  $P_3$ ,  $I_3 = I_2 \cos^2 30^\circ = \frac{I_{inc}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2$ .  
 Après  $P_4$ ,  $I_4 = I_3 \cos^2 30^\circ = \frac{I_{inc}}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^3$ .



**9.5** La démarche utilisée est celle employée dans le cours : travailler en notation réelle et se situer dans un plan d'onde particulier qui amène des expressions simples. Si l'état de polarisation est elliptique ou circulaire, pour la détermination du sens de parcours, calculer le vecteur tangent à la courbe à un instant simple, le porter sur une figure.

$$\vec{D}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_1$  sont  $\vec{D}_1 \begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = D_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$  soit  $\frac{Y}{Z} = 1$  : la polarisation est **rectiligne à  $45^\circ$  de  $Oy$** .

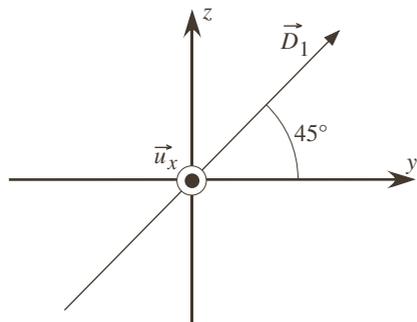


Figure 9.6

•  $\vec{D}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ D_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$  L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde

$x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_2$  sont  $\begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = D_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$

soit  $\frac{Y^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{D_0^2} = 1$  : la polarisation est circulaire.

Dans le plan d'onde  $x = 0$ , le vecteur tangent est  $\begin{pmatrix} dY/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = \omega D_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$ . À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\begin{pmatrix} 0 \\ \omega D_0 > 0 \end{pmatrix}$  et à ce même instant,  $\begin{pmatrix} Y(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = 0 \end{pmatrix}$ .

La polarisation est donc **circulaire gauche**.

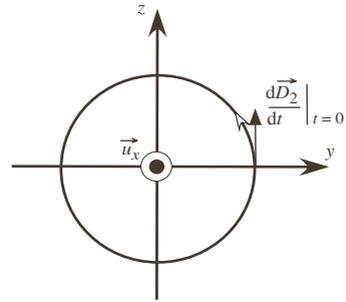


Figure 9.7

•  $\vec{D}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t + kx) \\ D_0 \sin(\omega t + kx) \end{pmatrix}$

L'onde se propage selon les  $x < 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_3$  sont  $\begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = D_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$  soit

$\frac{Y^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{D_0^2} = 1$  : la polarisation est circulaire.

Dans le plan d'onde  $x = 0$ , le vecteur tangent est  $\begin{pmatrix} dY/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = \omega D_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$ . À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\begin{pmatrix} 0 \\ \omega D_0 > 0 \end{pmatrix}$  et à ce même instant,  $\begin{pmatrix} Y(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = 0 \end{pmatrix}$ .

La polarisation est donc **circulaire droite**.

•  $\vec{D}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ -D_0 \sin(\omega t - kx) \end{pmatrix}$

L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_4$  sont  $\begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = -D_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$  soit  $\frac{Y^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{D_0^2} = 1$  : la polarisation est circulaire. Dans le plan d'onde  $x = 0$ , le vecteur tangent est

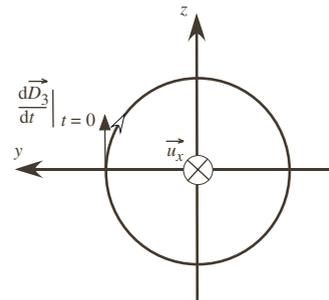


Figure 9.8

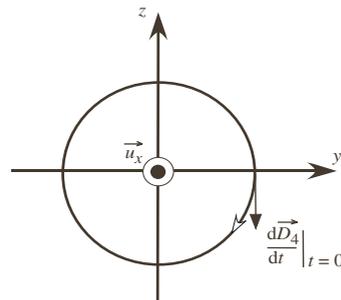


Figure 9.9

$\left( \begin{array}{l} dY/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = -\omega D_0 \cos \omega t \end{array} \right)$ . À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\left( \begin{array}{l} 0 \\ -\omega D_0 < 0 \end{array} \right)$  et à ce même instant,  $\left( \begin{array}{l} Y(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = 0 \end{array} \right)$ .

La polarisation est donc **circulaire droite**.

$$\bullet \vec{D}_5 \left( \begin{array}{l} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}) \\ D_0 \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \end{array} \right)$$

L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_5$  sont

$$\left( \begin{array}{l} Y(t) = D_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \\ Z(t) = D_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \end{array} \right)$$

Changeons l'origine des phases de façon à ce que  $Y(t)$  soit à l'origine :

$$\left( \begin{array}{l} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = D_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = D_0 \sin \omega t \end{array} \right)$$

soit  $\frac{Y^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{D_0^2} = 1$  :

la polarisation est **circulaire gauche** (voir la démonstration pour  $\vec{D}_2$ ).

$$\bullet \vec{D}_6 \left( \begin{array}{l} 0 \\ D_0 \cos(\omega t - kx) \\ 2D_0 \sin(\omega t - kx) \end{array} \right)$$

L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_6$  sont

$$\left( \begin{array}{l} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = 2D_0 \sin \omega t \end{array} \right)$$

soit  $\frac{Y^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{4D_0^2} = 1$  : la polarisation est elliptique, les axes de l'ellipse sont confondus avec  $Ox$  et  $Oy$ .

Dans le plan d'onde  $x = 0$ , le vecteur tangent est

$$\left( \begin{array}{l} dY/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = 2\omega D_0 \cos \omega t \end{array} \right)$$

À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\left( \begin{array}{l} 0 \\ 2\omega D_0 > 0 \end{array} \right)$  et à ce même

instant,  $\left( \begin{array}{l} Y(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = 0 \end{array} \right)$ .

La polarisation est donc **elliptique gauche**.

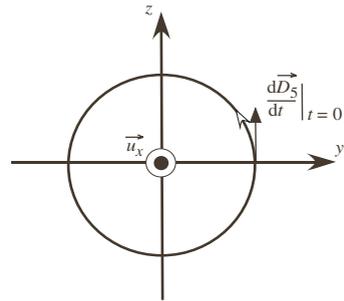


Figure 9.10

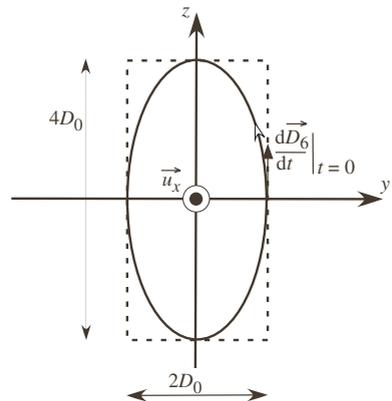


Figure 9.11

$$\vec{D}_7 \begin{pmatrix} D_0 \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ -D_0 \sin(\omega t - ky) \end{pmatrix}$$

L'onde se propage selon les  $y > 0$ . Dans le plan d'onde  $y = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_7$  sont  $\begin{pmatrix} X(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = -D_0 \sin \omega t \end{pmatrix}$  soit  $\frac{X^2}{D_0^2} + \frac{Z^2}{D_0^2} = 1$  : la polarisation est circulaire. Dans

le plan d'onde  $y = 0$ , le vecteur tangent est  $\begin{pmatrix} dX/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = -\omega D_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$ . À l'instant  $t = 0$ ,

ce vecteur est  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega D_0 < 0 \end{pmatrix}$  et à ce même instant,

$$\begin{pmatrix} X(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = 0 \end{pmatrix}.$$

La polarisation est donc **circulaire gauche**.

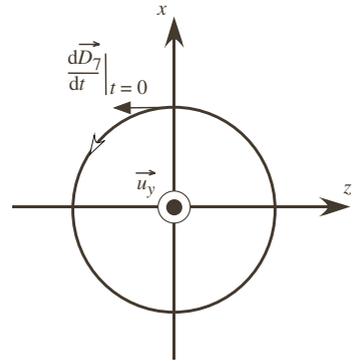


Figure 9.12

$$\vec{D}_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 2D_0 \cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4}) \\ D_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

L'onde se propage selon les  $x > 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_8$

$$\text{sont } \begin{pmatrix} Y(t) = 2D_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \\ Z(t) = D_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}.$$

En changeant l'origine des phases :

$$\begin{pmatrix} Y(t) = 2D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = D_0 \cos(\omega t + \frac{7\pi}{12}) \end{pmatrix} : \text{la polarisation est elliptique.}$$

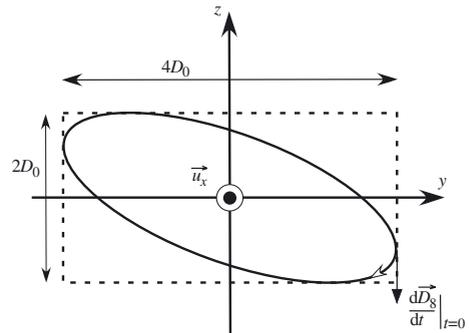


Figure 9.13

Dans le plan d'onde  $x = 0$ , le vecteur tangent est  $\begin{pmatrix} dY/dt = -2\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = -\omega D_0 \sin(\omega t + \frac{7\pi}{12}) \end{pmatrix}$ .

À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\begin{pmatrix} 0 \\ -\omega D_0 \sin \frac{7\pi}{12} < 0 \end{pmatrix}$  et à ce même instant,

$$\begin{pmatrix} Y(t=0) = 2D_0 \\ Z(t=0) = D_0 \cos \frac{7\pi}{12} < 0 \end{pmatrix}.$$

La polarisation est donc **elliptique droite**.

$$\vec{D}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos(\omega t + kx + \frac{2\pi}{3}) \\ 2D_0 \sin(\omega t + kx - \frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

L'onde se propage selon les  $x < 0$ . Dans le plan d'onde  $x = 0$ , les composantes de  $\vec{D}_0$

$$\text{sont } \begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \\ Z(t) = 2D_0 \sin(\omega t - \frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix}.$$

En changeant l'origine des phases :

$$\begin{pmatrix} Y(t) = D_0 \cos \omega t \\ Z(t) = 2D_0 \sin(\omega t - \frac{17\pi}{12}) \end{pmatrix} : \text{ la polarisation est elliptique. Dans le plan d'onde } x = 0, \text{ le vecteur tangent est}$$

$$\begin{pmatrix} dY/dt = -\omega D_0 \sin \omega t \\ dZ/dt = 2\omega D_0 \cos(\omega t - \frac{17\pi}{12}) \end{pmatrix}.$$

À l'instant  $t = 0$ , ce vecteur est  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega D_0 \cos \frac{17\pi}{12} < 0 \end{pmatrix}$  et à ce même instant,

$$\begin{pmatrix} Y(t=0) = D_0 \\ Z(t=0) = -2D_0 \sin \frac{17\pi}{12} > 0 \end{pmatrix}.$$

La polarisation est donc **elliptique gauche**.

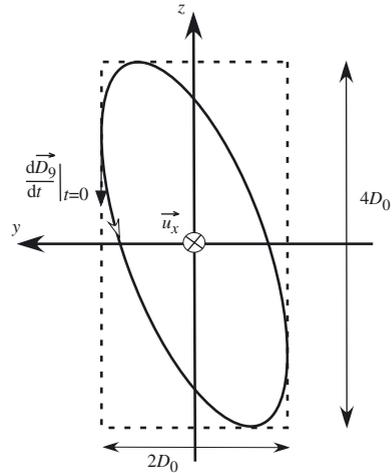


Figure 9.14

- 9.6** Pour cet exercice, deux types de réponse sont possibles : d'une part, la simple considération des polarisations des ondes illuminant l'écran permet de décrire la figure observée sur l'écran E et de préciser l'état de polarisation, d'autre part une analyse à l'aide d'ondes planes conduit aux expressions du champ induction électrique et de l'intensité.

**1. a)** La disposition relative des axes de transmission des polariseurs est indiquée sur la figure 9.15.

La distance de F à  $F_1$  étant identique à celle de F à  $F_2$ , les ondes issues de F arrivent en phase sur  $F_1$  et  $F_2$ , polarisées rectilignement selon une direction commune imposée par l'axe de transmission de P.

L'onde issue de  $F_1$  (respectivement  $F_2$ ) traverse  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ) : elle est polarisée rectilignement selon l'azimut de  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ). Les azimuts de transmission de  $P_1$  et  $P_2$  étant orientés selon la même direction, les polarisations

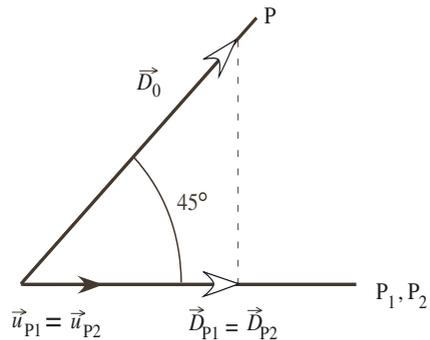


Figure 9.15

des deux ondes sont identiques : sur l'écran, l'état de polarisation est rectiligne orienté selon la direction commune des azimuts de transmission des polariseurs  $P_1$  et  $P_2$ . En un point M de l'écran, ces ondes arrivent déphasées, le déphasage est  $\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi \frac{P_2 M - P_1 M}{\lambda} \approx \frac{2\pi ay}{\lambda D}$ . Ce déphasage varie donc d'un point à l'autre de l'écran puisqu'il dépend de la variable  $y$ . On compose donc sur l'écran deux vibrations de polarisations identiques (rectilignes) et déphasées : elles interfèrent. La figure d'interférence est constituée de franges rectilignes parallèles à Ox alternativement sombres et brillantes. La frange centrale est brillante puisque pour le point O,  $y = 0$  et donc  $\varphi = 0$  : les ondes y arrivent synchrones, l'état d'interférence est constructif.

### Analyse quantitative.

À la sortie de  $P_1$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_1}$  ;

À la sortie de  $P_2$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_2}$ , où  $\vec{u}_{P_1}$  et  $\vec{u}_{P_2}$  sont des vecteurs unitaires selon les axes de transmission de  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ),  $D_0$  est l'amplitude de l'induction électrique issue du polariseur P.

En un point M quelconque de l'écran E, le déphasage des deux vibrations issues respectivement de  $P_1$  et  $P_2$  étant  $\varphi$ , l'amplitude de l'induction totale est :

$$\begin{aligned} \vec{D}(M) &= \vec{D}_{P_1} + \vec{D}_{P_2} e^{i\varphi} \\ &= \frac{D_0}{\sqrt{2}} (1 + e^{i\varphi}) \vec{u}_{P_1} \end{aligned}$$

L'état de polarisation au niveau de l'écran est donc rectiligne selon la direction commune des azimuts de transmission des polariseurs  $P_1$  et  $P_2$ .

L'intensité lumineuse étant proportionnelle à la moyenne temporelle du module au carré de l'induction :

$$I(M) \propto \left\langle |\vec{D}(M)|^2 \right\rangle = D_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = D_0^2 \cos^2 \frac{\pi ay}{\lambda D}$$

L'intensité dépend donc de  $y$ . Une frange d'interférence étant le lieu des points où l'intensité est constante, son expression est donnée par :

$$I(M) = \text{constante} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \text{constante} \Leftrightarrow \varphi = \text{constante} \Leftrightarrow y = \text{constante}$$

Il s'agit donc de droites parallèles à Ox (tant que l'approximation paraxiale reste vraie).

**1. b)** La disposition relative des axes de transmission des polariseurs est indiquée sur la figure 9.16

Les deux vibrations issues de  $P_1$  et  $P_2$  et qui arrivent sur l'écran sont maintenant polarisées rectilignement selon des directions perpendiculaires : elles n'interfèrent pas sur l'écran, l'éclairement de l'écran est par conséquent uniforme.

Ces deux vibrations arrivant déphasées sur l'écran (l'expression du déphasage  $\varphi(y)$  est la même que précédemment), l'état de polarisation varie selon la variable  $y$  : il y a des points de l'écran pour lesquels la polarisation est elliptique, d'autres pour lesquels elle est circulaire et d'autres pour lesquels elle est rectiligne.

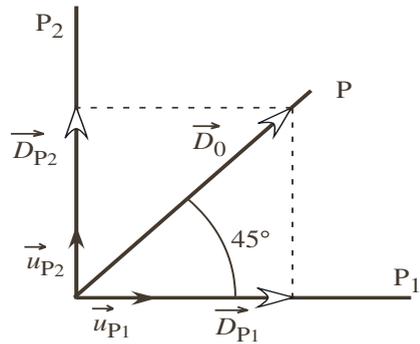


Figure 9.16

**Analyse quantitative.**

À la sortie de  $P_1$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P1}$  ;

À la sortie de  $P_2$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P2}$ , où  $\vec{u}_{P1}$  et  $\vec{u}_{P2}$  sont des vecteurs unitaires selon les axes de transmission de  $P_1$  (respectivement  $P_2$ ),  $D_0$  est l'amplitude de l'induction électrique issue du polariseur P.

$D_0$  est l'amplitude de l'induction électrique issue du polariseur P.

En un point M quelconque de l'écran E, le déphasage des deux vibrations issues respectivement de  $P_1$  et  $P_2$  étant  $\varphi$ , l'amplitude de l'induction électrique totale est :

$$\begin{aligned} \vec{D}(M) &= \vec{D}_{P1} + \vec{D}_{P2} e^{i\varphi} \\ &= \frac{D_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_{P1} + e^{i\varphi} \vec{u}_{P2}) \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse est :

$$I(M) \propto \left\langle |\vec{D}(M)|^2 \right\rangle = \frac{D_0^2}{2}$$

Cette intensité est donc constante, l'éclairement est uniforme.

Cherchons l'état de polarisation en tout point de l'écran. En notation réelle, dans un plan d'onde simple,  $\vec{D}(M)$  a pour composantes :

$$\vec{D}(M) \begin{pmatrix} X(t) = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \\ Y(t) = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \omega t = \frac{\sqrt{2}}{D_0} X(t) \\ \sin \omega t = \frac{X(t) \cos \varphi - Y(t)}{\frac{D_0}{\sqrt{2}} \sin \varphi} \end{cases}$$

$$\text{soit } \frac{2}{D_0^2 \sin^2 \varphi} X^2 + \frac{2}{D_0^2 \sin^2 \varphi} Y^2 - \frac{4 \cos \varphi}{D_0^2 \sin^2 \varphi} XY = 1$$

Ceci est l'équation d'une ellipse, l'état de polarisation est donc elliptique.

**2. a)** La disposition relative des axes de transmission des polariseurs et de l'analyseur est dessinée sur la figure 9.17. L'observation s'effectuant à travers l'analyseur A, seules

sont transmises par A les projections des vibrations selon l'axe de A. L'axe de transmission de A étant perpendiculaire à  $\vec{D}_{P_2}$ , cette induction électrique n'est pas transmise par A. La vibration  $\vec{D}_{P_1}$  étant parallèle à A, elle est intégralement transmise.

En sortie de A, seule  $\vec{D}_{P_1}$  est transmise : il n'y a aucune interférence, l'éclairement de l'écran est donc uniforme, la polarisation de cet éclairement est identique à celle de  $\vec{D}_{P_1}$ , elle est rectiligne orientée selon l'axe de  $P_1$ . Tout se passe comme si la fente  $F_2$  était fermée.

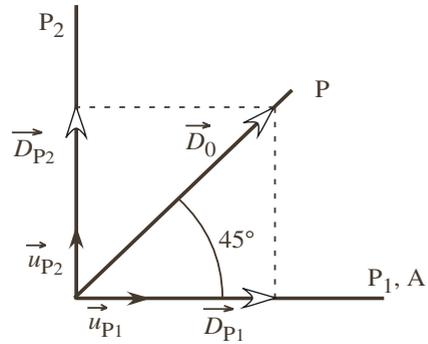


Figure 9.17

### Analyse quantitative.

À la sortie de  $P_1$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_1}$  ;

À la sortie de  $P_2$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_2}$ .

À la sortie de l'analyseur :  $\vec{D}_A = \vec{D}_{P_1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_1}$

L'intensité lumineuse est :

$$I(M) \propto \left\langle |\vec{D}(M)|^2 \right\rangle = \frac{D_0^2}{4}$$

L'intensité est donc constante, l'éclairement est uniforme.

Cherchons l'état de polarisation en tout point de l'écran. En notation réelle, dans un plan d'onde simple,  $\vec{D}(t) = \vec{D}_A(t) = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \vec{u}_{P_1}$  : la direction de  $\vec{D}(t)$  est constante au cours du temps, confondue avec  $\vec{u}_{P_1}$ , la polarisation est donc rectiligne selon cette direction.

**2. b)** La figure 9.18 illustre la disposition relative des axes de transmission des polariseurs et de l'analyseur.

L'observation s'effectuant à travers l'analyseur A, seules sont transmises par A les projections des vibrations selon l'axe de A : la projection de la vibration  $\vec{D}_{P_1}$  selon l'axe de A est transmise de même que la projection de la vibration  $\vec{D}_{P_2}$ .

Ces deux projections sont parallèles et dirigées selon l'axe de A : elles interfèrent et arrivent sur l'écran E en étant déphasées de  $\varphi$ . L'éclairement de l'écran est donc variable, il est constitué de franges d'interférence rectilignes, semblables à celles du cas **1.a.**, mais moins lumineuses du fait du passage supplémentaire à travers l'analyseur qui impose des projections à  $45^\circ$ .

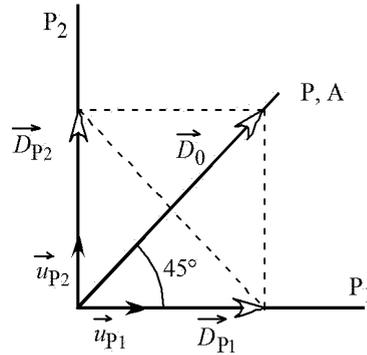


Figure 9.18

La polarisation de cet éclairement est imposée par l'analyseur A, elle est rectiligne orientée selon l'axe de A.

**Analyse quantitative.**

À la sortie de  $P_1$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_1}$  ;

À la sortie de  $P_2$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_2}$ .

À la sortie de l'analyseur :

$$\begin{aligned} \vec{D}_A &= D_{P_1} \cos 45^\circ \vec{u}_A + D_{P_2} \cos 45^\circ e^{i\varphi} \vec{u}_A \\ &= \frac{D_0}{2} (1 + e^{i\varphi}) \vec{u}_A \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse est :

$$I(M) \propto \left\langle \left| \vec{D}(M) \right|^2 \right\rangle = \frac{D_0^2}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

La figure d'interférence est similaire à celle du cas **1.a.**

Comme  $\vec{D}_A$  est orientée selon  $\vec{u}_A$ , la polarisation est rectiligne selon cette direction.

**2. c)** Les axes de transmission des polariseurs et de l'analyseur sont disposés comme l'indique la figure 9.19.

L'observation s'effectuant à travers l'analyseur A, seules sont transmises par A les projections des vibrations selon l'axe de A : la projection de la vibration  $\vec{D}_{P_1}$  selon l'axe de A est transmise de même que la projection de la vibration  $\vec{D}_{P_2}$ .

Ces deux projections sont parallèles et dirigées selon l'axe de A : elles interfèrent et elles arrivent sur l'écran E en étant déphasées de  $\varphi$ . L'éclairement de l'écran est donc variable, il est constitué de franges d'interférence rectilignes, semblables à celles du cas **1.a.**, mais moins lumineuses du fait du passage supplémentaire à travers l'analyseur qui impose des projections à  $45^\circ$ . Du fait que les projections sur l'axe de A sont opposées, le système de franges est le complémentaire du système précédent.

La polarisation de cet éclairement est imposée par l'analyseur A, elle est rectiligne orientée selon l'axe de A.

À la sortie de  $P_1$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_1}$  ;

À la sortie de  $P_2$ , l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P_2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P_2}$ .

À la sortie de l'analyseur :

$$\begin{aligned} \vec{D}_A &= D_{P_1} \cos 45^\circ \vec{u}_A - D_{P_2} \sin 45^\circ e^{i\varphi} \vec{u}_A \\ &= \frac{D_0}{2} (1 - e^{i\varphi}) \vec{u}_A \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse est :  $I(M) \propto \left\langle \left| \vec{D}(M) \right|^2 \right\rangle = \frac{D_0^2}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

La figure d'interférence est similaire à celle du cas **1.a** et complémentaire du cas **2.a**.

Comme  $\vec{D}_A$  est orientée selon  $\vec{u}_A$ , la polarisation est rectiligne selon cette direction.

**2.d** Il s'agit de la généralisation des cas précédents. On obtiendra donc généralement des interférences sauf si  $\alpha = 0, \pi/2, \pi, \dots$ , dont le contraste sera variable selon la valeur de  $\alpha$ .

La polarisation de la lumière sur l'écran est rectiligne orientée selon l'axe de l'analyseur.

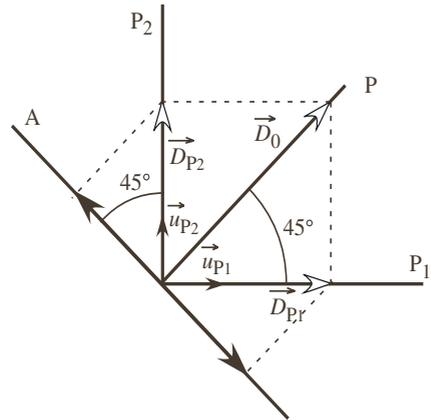


Figure 9.19

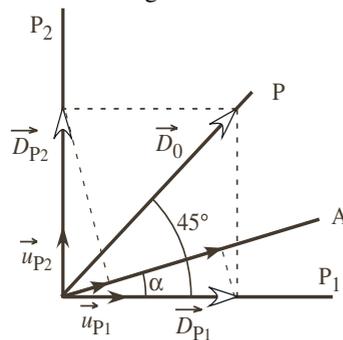


Figure 9.20

**Analyse quantitative.**

À la sortie de P<sub>1</sub>, l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P1} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P1}$  ;

À la sortie de P<sub>2</sub>, l'amplitude de l'induction électrique est :  $\vec{D}_{P2} = \frac{D_0}{\sqrt{2}} \vec{u}_{P2}$ .

À la sortie de l'analyseur :

$$\begin{aligned} \vec{D}_A &= D_{P1} \cos \alpha \vec{u}_A + D_{P2} e^{i\varphi} \sin \alpha \vec{u}_A \\ &= \frac{D_0}{\sqrt{2}} (\cos \alpha + e^{i\varphi} \sin \alpha) \vec{u}_A \end{aligned}$$

L'intensité lumineuse est :

$$I(M) \propto \left\langle |\vec{D}(M)|^2 \right\rangle = \frac{D_0^2}{2} (1 + \sin 2\alpha \cos \varphi).$$

**9.7 Polariseur à réflexion vitreuse**

1. Les expressions des coefficients de réflexion et de transmission sont données par les formules de Fresnel. Ces expressions dépendent en particulier de l'état de polarisation de l'onde plane incidente dont l'état est supposé rectiligne. Il convient de distinguer l'état de polarisation parallèle au plan d'incidence (notation : // ou π ou p) de l'état de polarisation perpendiculaire au plan d'incidence (notation : ⊥ ou σ ou s).

Les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface séparant deux diélectriques sans perte et isotropes s'établissent en appliquant les conditions de passage à travers le dioptre.

Leurs expressions sont :

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} & t_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \\ r_{//} &= \frac{n_1 \cos i_2 - n_2 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} & t_{//} &= \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_2 + n_2 \cos i_1} \end{aligned}$$

Réolvons :

$$\begin{aligned} r_{\perp} = 0 &\Leftrightarrow n_1 \cos i_1 = n_2 \cos i_2 \\ &\Leftrightarrow n_1 \cos i_1 = n_1 \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \cos i_2 \\ &\Leftrightarrow \tan i_1 = \tan i_2 \\ &\Rightarrow i_1 = i_2 \quad \text{ou} \quad i_1 = \pi + i_2 \end{aligned}$$

ce qui est impossible physiquement. Le coefficient  $r_{\perp}$  ne peut donc pas s'annuler.

Réolvons :

$$\begin{aligned} r_{//} = 0 &\Leftrightarrow n_1 \cos i_2 = n_2 \cos i_1 \\ &\Leftrightarrow n_1 \cos i_2 = n_1 \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \cos i_1 \\ &\Leftrightarrow \cos i_2 \sin i_2 = \cos i_1 \sin i_1 \\ &\Leftrightarrow \sin 2i_2 = \sin 2i_1 \\ &\Leftrightarrow 2i_2 = 2i_1 \quad \text{ou} \quad 2i_1 = \pi - 2i_2 \Leftrightarrow i_1 + i_2 = \pi/2 \end{aligned}$$

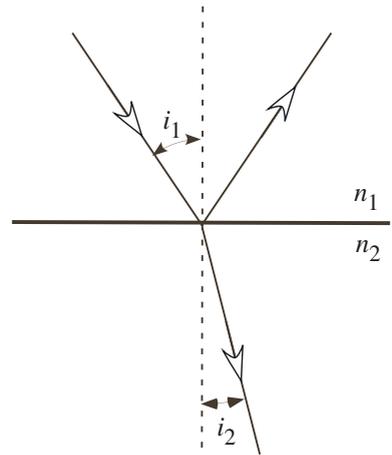


Figure 9.21

La première solution est physiquement impossible, la deuxième est acceptable :  $r_{//}$  peut s'annuler.

Précisons maintenant la valeur particulière  $i_B$  de  $i_1$  qui annule  $r_{//}$ . La loi de Descartes  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  donne, avec  $i_2 = \pi/2 - i_1$ ,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \cos i_1 \Leftrightarrow \tan i_1 = \frac{n_2}{n_1} = \tan i_B$ . Cette incidence particulière s'appelle l'incidence de Brewster.

Sous l'incidence de Brewster, l'onde réfléchie est polarisée rectilignement et perpendiculairement au plan d'incidence. Pour cette valeur particulière  $i_B$  de l'angle d'incidence, les rayons réfléchis et réfractés sont perpendiculaires puisque  $i_1 + i_2 = \pi/2$ .

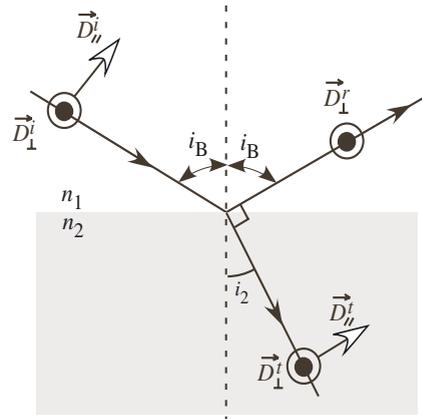


Figure 9.22

2. Application numérique :  $n_1 = 1$   $n_2 = 1,5 \Rightarrow i_B \approx 56^\circ$ .

En reportant dans  $r_{\perp}$  l'expression  $i_2 = \pi/2 - i_B$  :  $r_{\perp}|_{i_1=i_B} = \frac{n_1 - n_2 \tan i_B}{n_1 + n_2 \tan i_B}$ . Alors

$R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 \approx 0,15$ . Cette valeur est faible. De plus le faisceau réfléchi n'est pas aligné avec le faisceau incident ce qui est peu pratique.

# Propagation selon un axe principal d'un milieu diélectrique anisotrope

## Introduction

La transmission de l'information s'effectue par modulation soit de l'amplitude, de la phase, de la direction ou de la fréquence de la lumière. Pour cela, les propriétés optiques du matériau dans lequel se propage la lumière sont modifiées par exemple en appliquant un champ électrique : une anisotropie optique est ainsi induite (effet Pockels). Dans ce type de modulateur, l'onde se propage dans la direction d'un axe principal du matériau avec des vitesses différentes selon son état de polarisation.

## Objectifs

**Définir** les notions générales relatives à la propagation des ondes planes dans des milieux diélectriques linéaires homogènes et anisotropes.

**Connaître** la configuration fondamentale pour laquelle la lumière se propage selon un axe principal du milieu.

**Expliquer** la façon dont cette configuration est exploitée pour mettre au point des lames optiques permettant de modifier ou contrôler l'état de polarisation de la lumière.

## Plan

- 1 Tenseur diélectrique, ellipsoïde des indices
- 2 Les différents types de milieux anisotropes
- 3 Propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal
- 4 Application : les lames optiques
- 5 Interférences en lumière polarisée

Il existe des milieux dans lesquels la propagation de la lumière ne s'effectue pas de la même façon selon la direction, ces milieux sont appelés **milieux anisotropes**. Dans de tels milieux, la vitesse de propagation de la lumière dépend de la direction de propagation et de la polarisation de l'onde. C'est le cas de nombreux cristaux pour lesquels l'ordonnement des atomes crée un environnement différent selon la direction considérée. Ce phénomène est aussi présent dans les milieux amorphes soumis à un paramètre extérieur (contrainte mécanique, champ électrique, champ magnétique) dirigé suivant

une direction qui tend à orienter les molécules initialement disposées au hasard. Cette propriété de dépendance de la propagation de la lumière est liée à l'anisotropie du milieu et elle est utilisée par de nombreuses applications : elle permet de modifier l'état de polarisation d'une onde (polariseur, lame demi ou quart d'onde, prisme de Wollaston...), d'analyser son état de polarisation, de moduler l'intensité d'une onde (cellule de Pockels), de mettre en œuvre des isolateurs optiques (effet Faraday) utilisés dans les lasers ou de concevoir des écrans à cristaux liquides.

Dans un diélectrique linéaire, la polarisation (c'est-à-dire la densité volumique de moments dipolaires) du milieu  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  en tout point  $\vec{r}$  et à chaque instant  $t$  est proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  au même point et au même instant :  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$ . La quantité  $\chi$  s'appelle la susceptibilité électrique, c'est une grandeur sans dimension, réelle positive tant que les fréquences des ondes appartiennent aux domaines de transparence du milieu considéré.

Le champ électrique de l'onde lumineuse induit donc une polarisation macroscopique au sein du matériau. La répartition des charges internes à chaque atome est alors modifiée : sous l'effet du champ électrique, les barycentres des charges positives (du noyau) et des charges négatives (le nuage électronique) ne sont plus confondus, il en résulte un moment dipolaire électrique induit. Cette justification concerne la polarisation électronique qui est prépondérante dans les diélectriques.

D'autres causes de polarisation peuvent intervenir :

- la polarisation atomique ou ionique due aux déplacements des atomes ou des ions dans le milieu ;
- la polarisation d'orientation, pour les matériaux qui sont initialement polarisés à l'échelle microscopique mais dans des directions différentes.

Remarquons que la relation  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$  traduit la façon dont répond la matière à l'excitation  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , et que nous supposons une réponse instantanée (il s'agit du même instant  $t$  dans  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  comme dans  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ).

Le milieu étant homogène, la susceptibilité  $\chi$  est indépendante de  $\vec{r}$ , elle dépend de la fréquence si le milieu est dispersif. Si le milieu est **isotrope**,  $\chi$  est un scalaire si bien que  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  sont parallèles. De ce fait, dans un tel milieu, dit LHI (linéaire homogène isotrope), la propagation d'ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques est possible : elles sont solutions de l'équation de propagation déduite des équations de Maxwell. Pour ces ondes, le champ électrique s'écrit :

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - n\vec{k}_0 \cdot \vec{r})}$  où  $\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ ,  $\vec{u}$  étant un vecteur unitaire selon la direction de propagation,  $\omega$  la pulsation,  $n = \sqrt{1 + \chi}$  l'indice de réfraction du milieu et  $\vec{E}_0$  l'amplitude complexe du champ électrique.

Si le milieu est linéaire homogène **anisotrope**, la relation entre  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  s'écrit :  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\chi] \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j(\vec{r}, t)$ , où les indices 1 à 3 font référence aux composantes selon les axes  $x, y, z$  d'un repère cartésien.

La matrice  $[\chi]$  s'appelle le tenseur susceptibilité diélectrique, il s'agit d'une matrice  $3 \times 3$ .

Ainsi, chaque composante de la polarisation est une combinaison linéaire des composantes du champ électrique. La conséquence est que dans le cas général,  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ne sont pas parallèles.

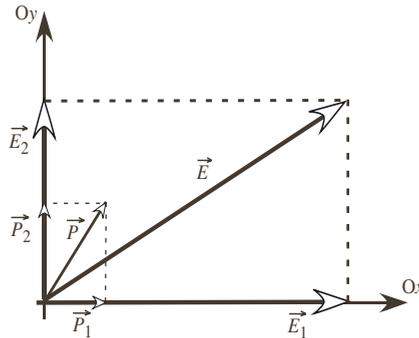


Figure 10.1– Illustration, dans un plan  $(Oxy)$ , des dispositions du champ électrique et de la polarisation dans un diélectrique anisotrope.

## 1 Tenseur diélectrique, ellipsoïde des indices

Dans un diélectrique linéaire homogène anisotrope, la relation constitutive liant  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 [\chi] \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 (Id + [\chi]) \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}(\vec{r}, t)$$

où  $[\epsilon_r] = Id + [\chi]$  est le tenseur de permittivité diélectrique relative ou tenseur diélectrique. Dans un repère cartésien, il est représenté par une matrice  $3 \times 3$  :

$$[\epsilon_r] = \begin{pmatrix} \epsilon_{r11} & \epsilon_{r12} & \epsilon_{r13} \\ \epsilon_{r21} & \epsilon_{r22} & \epsilon_{r23} \\ \epsilon_{r31} & \epsilon_{r32} & \epsilon_{r33} \end{pmatrix}$$

Dans une zone de transparence du milieu, les coefficients  $\epsilon_{r,ij}$  sont réels et donc les indices  $n_1, n_2, n_3$  définis ci-dessous sont également réels car on se situe au-dessous de la fréquence de résonance des dipôles (ou des transitions électroniques) et la polarisation suit instantanément le champ électrique. Lorsque le milieu devient absorbant, c'est-à-dire dans des régions où la fréquence de l'onde se rapproche des fréquences de

résonances électroniques du milieu, les coefficients  $\epsilon_{rij}$  deviennent complexes : il y a déphasage et amortissement au cours de la propagation dans le milieu. Nous admettrons que le tenseur  $[\epsilon_r]$  est symétrique :  $\epsilon_{rij} = \epsilon_{rji}$  (la démonstration s'appuie sur des considérations énergétiques). Il existe donc un repère cartésien  $x, y, z$  dans lequel  $[\epsilon_r]$  est diagonalisable. Les axes de ce repère sont les axes principaux du milieu. Dans ce repère, parfois appelé repère propre, le tenseur  $[\epsilon_r]$  s'écrit :

$$[\epsilon_r] = \begin{pmatrix} \epsilon_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r3} \end{pmatrix}$$

Les constantes  $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3}$  sont les constantes diélectriques principales.

On en déduit que dans le repère des axes principaux, les relations entre les composantes de  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  sont :

$$\begin{cases} D_1(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_1(\vec{r}, t) \\ D_2(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_2(\vec{r}, t) \\ D_3(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_{r3} E_3(\vec{r}, t) \end{cases} .$$

Ceci permet de définir les indices de réfraction principaux du milieu :  $n_i = \sqrt{\epsilon_{ri}}$  pour  $i$  de 1 à 3 et d'écrire, dans le repère principal,  $[\epsilon_r]$  à l'aide des trois nombres réels  $n_i$  :

$$[\epsilon_r] = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} .$$

Les axes principaux sont les seules directions du milieu selon lesquelles  $\vec{D}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  sont parallèles. Dans le repère principal, le tenseur diélectrique est diagonal, les calculs y seront plus aisés, en particulier pour étudier la propagation de la lumière.

Une représentation géométrique du tenseur diélectrique est l'ellipsoïde des indices également appelée indicatrice optique, dont les axes sont confondus avec les axes principaux du tenseur diélectrique. Dans le repère principal, l'ellipsoïde a pour équation :

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 .$$

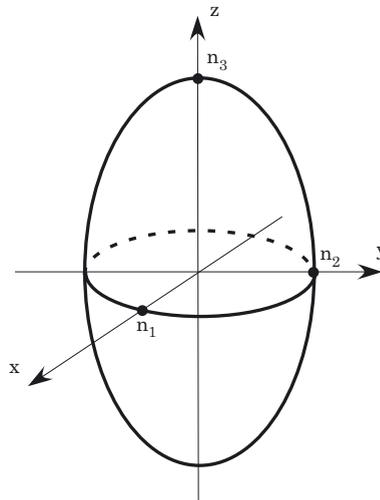


Figure 10.2 – Ellipsoïde des indices.

## 2 Les différents types de milieux anisotropes

Selon la forme du tenseur  $[\varepsilon_r]$  dans le repère principal, les différents types de milieux optiques se classent de la façon suivante.

- Dans un **milieu isotrope**, les indices de réfraction principaux sont tous égaux entre eux :  $n_1 = n_2 = n_3 = n$ . Le tenseur diélectrique s'écrit :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{pmatrix} = n^2 Id$$

C'est le cas des milieux gazeux, des liquides, des solides amorphes et des solides cristallins du système cubique.

- Dans un **milieu uniaxe**, deux des indices principaux sont égaux : par exemple  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . Ainsi l'axe principal 3 (axe Oz) s'appelle l'axe optique. Il est symbolisé par une double flèche et l'indice de réfraction qui lui est associé est l'indice de réfraction principal extraordinaire noté  $n_e$ . La valeur commune des deux autres indices de réfraction est l'indice de réfraction principal ordinaire noté  $n_o$ .

Le tenseur diélectrique d'un milieu uniaxe d'axe optique Oz s'écrit, dans le repère principal :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}.$$

Le milieu est dit **positif** si  $n_e > n_o$ , **néglatif** si  $n_e < n_o$ .

Les solides cristallins appartenant aux systèmes tétragonal, trigonal ou hexagonal sont uniaxes ainsi que certaines phases des cristaux liquides .

- Dans un **milieu biaxe**,  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ , le tenseur  $[\varepsilon_r]$  dans le repère principal est le plus général :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}.$$

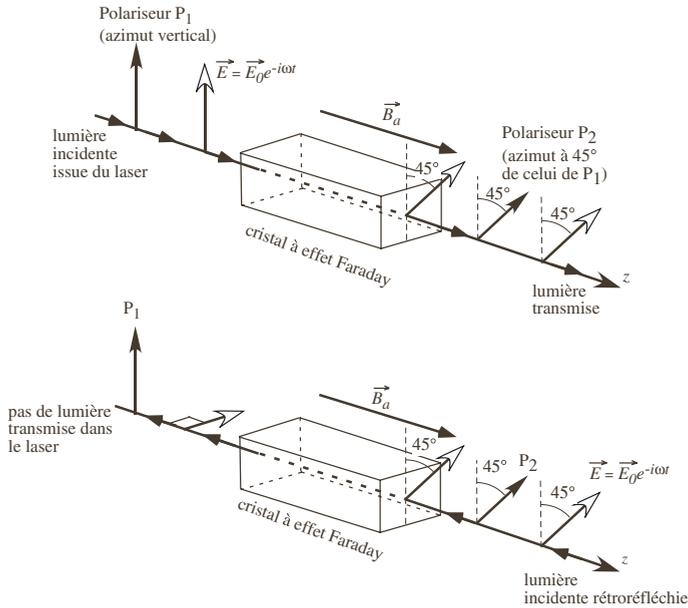
Les cristaux des systèmes orthorhombique, monoclinique et triclinique sont biaxes.

### Encart 10.1 Un système de protection : l'isolateur de Faraday

Les isolateurs de Faraday sont des composants optiques placés à la sortie des sources laser afin d'éviter la réjection dans la cavité laser de la lumière réfléchie par les éléments optiques placés sur le trajet de sortie du faisceau. Ceci permet d'éviter la déstabilisation de la source laser. Les matériaux employés dans les isolateurs de Faraday sont des cristaux anisotropes pour lesquels l'anisotropie est créée par un champ magnétique statique. À l'heure actuelle, de nombreuses recherches

### 3 Propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal

portent sur l'élaboration de cristaux à fort effet Faraday utilisés dans l'infrarouge, aux longueurs d'ondes des télécommunications.



Principe de fonctionnement d'un isolateur de Faraday.

### 3 Propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal

Nous examinons à présent la possibilité de propagation d'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) selon un axe principal. Nous choisissons l'axe  $Oz$  comme axe de propagation. Ce choix est arbitraire. Le champ électrique de l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

avec  $k$  le module du vecteur d'onde et  $\vec{E}_0$  l'amplitude complexe.

Le milieu est un diélectrique parfait c'est-à-dire un isolant ce qui signifie qu'il n'y a pas de charges libres ni de courants libres. Les équations de Maxwell dans ce milieu s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div} \vec{D} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 & \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

À ces équations, il convient d'ajouter les relations constitutives du milieu :  $\vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

En employant les expressions équivalentes des opérateurs divergence et rotationnel pour une onde plane de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de la forme  $\vec{X}(z, t) = \vec{X}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ , les équations précédentes se réécrivent :

$$k\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (10.1) \qquad k\vec{u}_z \cdot \vec{D}_0 = 0 \quad (10.2)$$

$$k\vec{u}_z \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (10.3) \qquad k\vec{u}_z \wedge \vec{B}_0 = -\mu_0 \omega \vec{D}_0 \quad (10.4)$$

$$\vec{D}_0 = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}_0 \text{ et } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0.$$

L'équation (10.2) implique  $D_{0z} = 0$  c'est-à-dire  $E_{0z} = 0$  car Oz est axe principal. Le champ électrique de l'onde est donc transverse. De même, l'équation (10.3) montre que le champ magnétique est transverse. L'onde se propageant selon un axe principal est donc TEM (transverse électromagnétique).

De plus, l'équation (10.1) donne  $\vec{B}_0 = \frac{k}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{E}_0$ , qui reportée dans l'équation (10.4) amène, en développant le double produit vectoriel et en tenant compte de la transversalité du champ électrique :

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{\omega} \vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{E}_0) &= -\mu_0 \omega \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}_0 \\ \text{soit } [\varepsilon_r] \vec{E}_0 &= \frac{k^2}{k_0^2} \vec{E}_0 \end{aligned}$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c}$  est le vecteur d'onde dans le vide.

L'équation précédente est une équation aux valeurs propres, l'opérateur  $[\varepsilon_r]$  est linéaire,  $\vec{E}_0$  étant vecteur propre et  $\frac{k^2}{k_0^2}$  valeur propre associée. La signification physique de l'équation aux valeurs propres est la suivante : le champ électrique de l'onde se propageant dans le milieu, celui-ci agit sur son amplitude (action de  $[\varepsilon_r]$  sur  $\vec{E}_0$ ) de façon linéaire (linéarité du milieu qui implique la linéarité de l'opérateur  $[\varepsilon_r]$ ). Ceci a pour conséquence que tout au long de sa propagation, l'amplitude de l'onde est, au facteur multiplicatif près  $k^2/k_0^2$ , égale à l'amplitude incidente  $\vec{E}_0$  de l'onde. À ce stade, nous pouvons affirmer que le problème admet une ou des solutions sous forme d'ondes planes progressives monochromatiques, ces ondes se propagent sans déformation (leur structure d'OPPM est conservée) dans le milieu puisqu'elles sont solutions du problème aux valeurs propres. Nous allons maintenant caractériser ces solutions.

Dans le repère des axes principaux, le système précédent se résout facilement :

$$\begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k^2}{k_0^2} \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1^2 E_{0x} = \frac{k^2}{k_0^2} E_{0x} \\ n_2^2 E_{0y} = \frac{k^2}{k_0^2} E_{0y} \end{cases}$$

Il existe donc deux valeurs propres et deux vecteurs propres associés :  $k_\alpha = n_1 k_0$  associée au vecteur propre  $\vec{E}_{0\alpha} = E_0 \vec{u}_x$ , et  $k_\beta = n_2 k_0$  associée au vecteur propre  $\vec{E}_{0\beta} = E_0 \vec{u}_y$ . Ceci définit les deux modes propres de propagation.

Donc, si la propagation s'effectue selon l'axe principal Oz du milieu anisotrope, deux ondes planes progressives monochromatiques polarisées rectilignement le long des deux autres axes principaux se propagent sans déformation dans le milieu, les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  sont associés à chacun des modes. Le milieu présente donc une biréfringence linéaire. Les axes Ox et Oy sont appelés les axes neutres.

**Remarque** Les modes propres de propagation c'est-à-dire les indices propres et les directions des états de polarisation peuvent se trouver à l'aide de la construction géométrique suivante s'appuyant sur l'ellipsoïde des indices. Par exemple, si Oz est la direction de propagation, le plan d'onde passant par O est perpendiculaire à Oz : il s'agit du plan Oxy. Ce plan coupe l'ellipsoïde des indices selon une ellipse dont les demi-axes ont pour longueurs  $n_1$  et  $n_2$  qui sont les indices propres vus par l'onde. Les axes de l'ellipse sont les directions propres des modes. Cette construction géométrique sera généralisée et justifiée à une direction de propagation quelconque au chapitre 11.

Dans le cas d'un milieu uniaxe, la construction décrite permet de retrouver rapidement les résultats du présent chapitre. En particulier, si le milieu est uniaxe tel que  $n_1 = n_2 = n_o$ ,  $n_3 = n_e$ , alors si la direction de propagation est Oz, le milieu apparaît comme isotrope d'indice  $n_o$ , si la direction de propagation est Ox ou Oy, le milieu apparaît comme anisotrope d'indices  $n_o$  et  $n_e$ .

## 4 Application : les lames optiques

Soit une lame à faces parallèles d'épaisseur  $\ell$  taillée dans un cristal anisotrope. Nous supposons que l'axe principal Oz est orthogonal aux faces de la lame. Les réflexions sur les faces de la lame sont négligées.

Une onde plane incidente éclaire sous incidence normale cette lame. Le champ électrique de cette onde s'écrit  $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)}$ , pour  $z < 0$ , avec  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y$ , c'est-à-dire un état de polarisation quelconque. Cette onde n'est donc pas un mode propre de propagation.

On cherche par la suite le champ électrique de l'onde transmise dans la lame puis après la lame. Pour mener à bien la résolution du problème, nous pouvons appliquer le théorème de superposition car les équations de Maxwell et les relations constitutives sont linéaires.

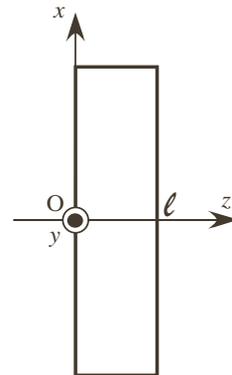


Figure 10.3 – Schéma d'une lame optique.

La composante selon l'axe Ox de l'onde incidente est un mode propre (indice associé  $n_1$ ), elle contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $E_{0x}e^{-in_1k_0z}\vec{u}_x$ . De façon analogue, la composante selon l'axe Oy de l'onde incidente est un mode propre (indice  $n_2$ ), elle contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $E_{0y}e^{-in_2k_0z}\vec{u}_y$ . On en déduit que dans la lame, le champ électrique de l'onde possède l'amplitude :

$$E_{0x}e^{-in_1k_0z}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-in_2k_0z}\vec{u}_y$$

si bien que le champ électrique dans la lame s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= (E_{0x}e^{-in_1k_0z}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-in_2k_0z}\vec{u}_y)e^{i\omega t} \\ &= e^{-in_1k_0z}(E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-i(n_2-n_1)k_0z}\vec{u}_y)e^{i\omega t} \text{ pour } 0 < z < \ell \end{aligned}$$

L'expression précédente indique que le déphasage entre la composante selon Ox et celle selon Oy varie tout au long de la propagation : l'état de polarisation change continûment dans la lame.

Après la lame, le champ est :

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0x}e^{-in_1k_0\ell}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-in_2k_0\ell}\vec{u}_y)e^{i\omega t}e^{-ik_0(z-\ell)} \text{ pour } z > \ell$$

L'état de polarisation après la lame dépend donc de la différence de phase  $\Delta\varphi = k_0\ell\Delta n$  où  $\Delta n = n_2 - n_1$  est la biréfringence de la lame. Si  $\Delta n > 0$ , alors  $\Delta\varphi > 0$ ,  $\frac{c}{n_2} < \frac{c}{n_1}$  : Oy est axe lent, Ox est axe rapide.

#### 4.1 Première application : lame demi-onde

Nous supposons que la lame est taillée à une épaisseur  $\ell$  telle qu'elle crée un déphasage  $\Delta\varphi = (n_2 - n_1)k_0\ell = \pi + 2m\pi$  où  $m$  est un entier, la longueur d'onde étant fixée. Ce déphasage correspond à une différence de marche  $\delta = \ell\Delta n = \frac{\lambda_0}{2} + m\lambda_0$  : il s'agit donc d'une lame demi-onde (pour la longueur d'onde  $\lambda_0$ ).

Étudions l'action d'une telle lame sur une OPPM polarisée rectilignement et dont la direction de polarisation forme un angle  $\theta$  avec l'un des axes principaux que nous prenons arbitrairement comme étant Ox. La démarche utilisée est analogue à celle employée précédemment.

L'onde plane incidente éclaire sous incidence normale la lame. Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0e^{i(\omega t - k_0z)} \text{ pour } z < 0$$

avec maintenant  $\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y = E_0 \cos\theta\vec{u}_x + E_0 \sin\theta\vec{u}_y$ , puisque l'état de polarisation incident est rectiligne.

Cette onde n'est pas un mode propre de propagation. Cependant, sa composante selon l'axe Ox est un mode propre (indice associé  $n_1$ ), elle contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $E_0 \cos\theta e^{-in_1k_0z}\vec{u}_x$ . De même, la composante selon l'axe Oy

de l'onde incidente est un mode propre (indice associé  $n_2$ ), qui contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $E_0 \sin \theta e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y$ . Ainsi dans la lame, le champ électrique de l'onde a l'amplitude :

$$E_0 \cos \theta e^{-in_1 k_0 z} \vec{u}_x + E_0 \sin \theta e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y$$

si bien que le champ électrique dans la lame est :

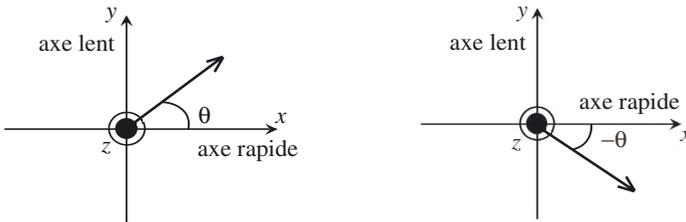
$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= (E_0 \cos \theta e^{-in_1 k_0 z} \vec{u}_x + E_0 \sin \theta e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y) e^{i\omega t} \\ &= e^{-in_1 k_0 z} (E_0 \cos \theta \vec{u}_x + E_0 \sin \theta e^{-i(n_2 - n_1) k_0 z} \vec{u}_y) e^{i\omega t} \quad \text{pour } 0 < z < \ell \end{aligned}$$

Après la lame c'est-à-dire pour  $z > \ell$ , le champ est :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= e^{-in_1 k_0 \ell} (E_0 \cos \theta \vec{u}_x + E_0 \sin \theta e^{-i(n_2 - n_1) k_0 \ell} \vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \\ &= e^{-in_1 k_0 \ell} (E_0 \cos \theta \vec{u}_x + E_0 \sin \theta e^{-i\Delta\varphi} \vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \\ &= e^{-in_1 k_0 \ell} (E_0 \cos \theta \vec{u}_x - E_0 \sin \theta \vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \end{aligned}$$

car  $\Delta\varphi = \pi + 2m\pi$  et  $e^{-i(\pi + 2m\pi)} = -1$ .

L'état de polarisation après la lame est donc rectiligne et la direction de la polarisation avec Ox est  $-\theta$  c'est-à-dire symétrique de la polarisation incidente par rapport à cet axe. Globalement, la polarisation a tourné de  $-2\theta$  par rapport à la polarisation incidente. Avec une telle lame, il est donc possible d'ajuster la direction de la polarisation transmise. Les figures 10.4 illustrent l'action d'une lame demi-onde sur un état de polarisation rectiligne.



Polarisation incidente sur la lame    Polarisation émergente de la lame

Figure 10.4

## 4.2 Deuxième application : lame quart d'onde

Envisageons une lame taillée à une épaisseur  $\ell$  telle qu'elle crée un déphasage  $\Delta\varphi = (n_2 - n_1)k_0 \ell = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$  où  $m$  est un entier, la longueur d'onde étant fixée. Ce déphasage correspond à une différence de marche  $\delta = \ell \Delta n = \frac{\lambda_0}{4} + m\lambda_0$  : il s'agit donc d'une lame quart d'onde (pour la longueur d'onde  $\lambda_0$ ).

Étudions l'action d'une telle lame sur une OPPM polarisée rectilignement et dont la direction de polarisation fait un angle  $\theta = \frac{\pi}{4}$  avec l'un des axes principaux que nous prenons arbitrairement comme étant Ox.

L'onde plane incidente éclaire sous incidence normale la lame. Le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} \quad \text{pour } z < 0$$

avec maintenant  $\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} (\vec{u}_x + \vec{u}_y)$  puisque l'état de polarisation incident est rectiligne incliné à 45° de Ox.

Cette onde n'est pas un mode propre de propagation. Cependant, sa composante selon l'axe Ox est un mode propre (indice associé  $n_1$ ), elle contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $\frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 z} \vec{u}_x$ . De même, la composante selon l'axe Oy de l'onde incidente est un mode propre (indice associé  $n_2$ ), qui contribue au champ électrique dans la lame par une amplitude  $\frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y$ . Ainsi dans la lame, le champ électrique de l'onde a l'amplitude :

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 z} \vec{u}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y$$

si bien que le champ électrique dans la lame est pour  $0 < z < \ell$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \left( \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 z} \vec{u}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_2 k_0 z} \vec{u}_y \right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 z} (\vec{u}_x + e^{-i(n_2 - n_1) k_0 z} \vec{u}_y) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

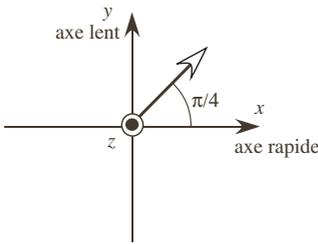
Après la lame c'est-à-dire pour  $z > \ell$ , le champ est :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 \ell} (\vec{u}_x + e^{-i(n_2 - n_1) k_0 \ell} \vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 \ell} (\vec{u}_x + e^{-i\Delta\varphi} \vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{-in_1 k_0 \ell} (\vec{u}_x - i\vec{u}_y) e^{i\omega t} e^{-ik_0(z - \ell)} \end{aligned}$$

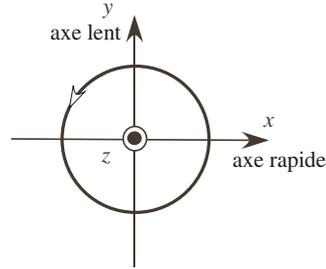
car  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$  et  $e^{-i(\frac{\pi}{2} + 2m\pi)} = -i$

L'état de polarisation après la lame est donc **circulaire gauche**.

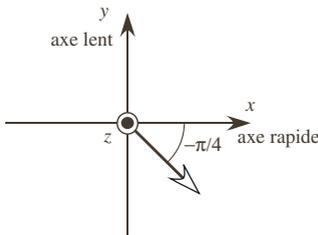
Un calcul analogue à celui qui vient d'être mené montre que si la polarisation incidente est inclinée de  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  par rapport à l'axe Ox, le faisceau transmis est polarisé circulaire droit. Ainsi, une lame quart d'onde permet d'obtenir un faisceau polarisé circulairement à partir d'un faisceau polarisé rectilignement à  $\pm 45^\circ$  d'un axe principal d'une lame anisotrope.



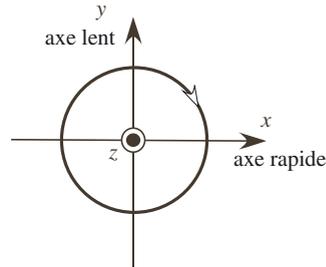
Polarisation incidente sur la lame



Polarisation émergente de la lame



Polarisation incidente sur la lame



Polarisation émergente de la lame

**Figure 10.5** – Action d’une lame quart d’onde sur un état de polarisation rectiligne.

Réciproquement, une lame quart d’onde transforme une polarisation circulaire gauche (respectivement droite) en une polarisation rectiligne à  $-45^\circ$  (respectivement à  $+45^\circ$ ).

**Remarque** Les lames précédentes ne fonctionnent correctement que pour une longueur donnée  $\lambda_0$ . Le compensateur de Babinet réalise pour toute longueur d’onde n’importe quel déphasage entre les deux modes propres orthogonaux à l’axe de propagation. Un tel dispositif est composé de deux cristaux uniaxes, de mêmes orientations, taillés en prismes et qui coulissent l’un sur l’autre.

**Utilisation d’une lame optique.** La première étape dans l’utilisation d’une lame optique consiste à repérer les axes propres. Pour ce faire, on place la lame entre un polariseur et un analyseur croisés. Comme la lame modifie l’état de polarisation issue du polariseur, une certaine quantité de lumière est transmise à la sortie. On tourne alors la lame dans son plan de façon à rétablir l’extinction : dans cette situation, les axes propres de la lame coïncident avec l’axe de transmission du polariseur pour l’un, l’axe de l’analyseur pour l’autre. On peut alors ôter l’analyseur et ajuster l’état de la polarisation émergente en tournant la lame optique de l’angle adéquat.

### 4.3 Troisième application : compensateur de Babinet

Il s’agit d’un dispositif grâce auquel il est possible de compenser la différence de marche introduite par une lame mince anisotrope à faces parallèles et ainsi de mesurer une biréfringence.

Il est constitué de deux lames prismatiques taillées dans le même matériau anisotrope, généralement uniaxe. Les axes optiques des deux prismes sont orthogonaux l'un par rapport à l'autre. L'angle des prismes est faible. Les prismes peuvent coulisser l'un sur l'autre selon leur hypoténuse : l'ensemble forme une lame optique à faces parallèles d'épaisseur variable. Le compensateur est placé entre polariseur et analyseur croisés et dont les axes de transmission sont à 45° des axes optiques des prismes.

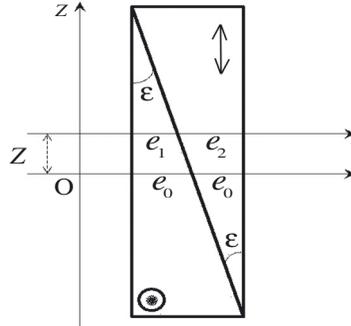


Figure 10.6 – Compensateur de Babinet.

## 5 Interférences en lumière polarisée

Il a été établi précédemment qu'à la sortie de la lame anisotrope, le champ est :

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0x}e^{-in_1k_0\ell}\vec{u}_x + E_{0y}e^{-in_2k_0\ell}\vec{u}_y)e^{i\omega t}e^{-ik_0(z-\ell)}$$

Le champ électrique possède donc deux composantes orthogonales, l'intensité de la lumière en sortie est par conséquent uniforme comme le montre le calcul de  $\langle |\vec{E}|^2 \rangle$ .

Pour mettre en évidence les effets du déphasage  $\varphi$  entre les deux composantes du champ, il faut additionner ces deux composantes : c'est le rôle d'un analyseur placé en sortie de la lame, les deux vibrations vont ainsi se composer selon une direction commune définie par l'azimut de l'analyseur. On dit aussi que les vibrations se recombinent sur l'analyseur.

En notant toujours  $\Delta\varphi = (n_2 - n_1)k_0\ell$ , on peut montrer que l'intensité en sortie de l'ensemble est :  $I = J(\alpha, \beta) [1 + V(\alpha, \beta) \cos \Delta\varphi]$

$$\text{avec } \begin{cases} J(\alpha, \beta) = \frac{I_0}{2} (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ I_0 = E_0^2 \\ V(\alpha, \beta) = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \end{cases}$$

$V(\alpha, \beta)$  est la visibilité. Elle dépend des orientations du polariseur et de l'analyseur,  $|V(\alpha, \beta)| \leq 1$ . Les directions des azimuts de transmission  $\alpha$  et  $\beta$  du polariseur et de

l'analyseur sont repérées par rapport aux lignes neutres de la lame.  $\Delta\varphi$  est rendu variable en faisant varier la longueur d'onde : on fait ainsi défiler des franges.

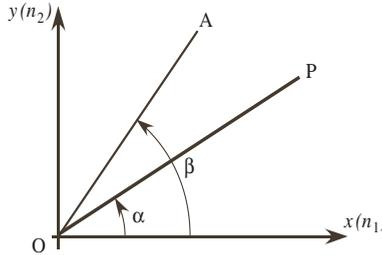


Figure 10.7 – Dispositions relatives des axes de la lame, du polariseur et de l'analyseur.

L'expression de l'intensité indique en particulier que :

- si l'axe de l'analyseur ou du polariseur est selon l'un des axes principaux c'est-à-dire  $\alpha = 0$  ou  $\beta = 0$  ou  $\alpha = \pi/2$  ou  $\beta = \pi/2$  alors  $V(\alpha, \beta) = 0$  : l'éclairement est uniforme.
- la visibilité est égale à l'unité si  $\alpha + \beta = \pi/2[\pi]$ . L'expression de l'intensité est alors :

$$I = \frac{I_0}{2} \frac{\sin^2 2\alpha}{2} (1 + \cos \Delta\varphi) = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

$I$  est donc maximale si  $\alpha = \pi/4 = \beta$ .

Donc si les axes du polariseur et de l'analyseur sont parallèles et à  $45^\circ$  des axes propres de la lame, la visibilité est maximale et égale à l'unité, l'intensité est également maximale et vaut  $I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ .

- la visibilité est égale à  $-1$  si  $\alpha - \beta = \pi/2[\pi]$ . L'intensité devient :

$$I = \frac{I_0}{2} \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}. \text{ Elle est maximale pour } \alpha = \pi/4 \Rightarrow \beta = 3\pi/4.$$

Donc si les axes du polariseur et de l'analyseur sont perpendiculaires et à  $45^\circ$  des axes propres de la lame, la visibilité est égale à  $-1$ , l'intensité est maximale et vaut  $I = \frac{I_0}{2} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ .

Par la suite, deux types de lames sont envisagés : les lames minces puis les lames épaisses.

## 5.1 Lames minces, teintes de Newton

Pour des raisons évidentes de confort d'observation, la lame est placée dans une des dispositions offrant la meilleure visibilité : nous choisissons celle où polariseur et analyseur sont croisés avec leurs axes à  $45^\circ$  des axes propres de la lame. Alors l'intensité en sortie de l'ensemble est  $I = \frac{I_0}{2} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ . Les longueurs d'onde éteintes sont celles pour lesquelles  $I = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 2m\pi \Leftrightarrow (n_2 - n_1)k_0\ell = 2m\pi$  où  $m$  est un entier.

La lame est équivalente à un filtre spectral qui élimine certaines longueurs d'onde.

Dans un intervalle donné de longueurs d'ondes, par exemple le domaine visible, le nombre de solutions dépend de l'épaisseur  $\ell$ . Si la lame est suffisamment mince, il n'existe qu'une seule radiation éteinte. Par exemple, l'extinction du vert va donner en sortie une teinte se situant entre le rouge et le pourpre appelée teinte sensible.

L'ensemble des teintes sensibles forme l'échelle des teintes de Newton.

## 5.2 Lames épaisses, spectre cannelé

Dans le cas d'une lame épaisse, plusieurs longueurs d'ondes sont éteintes simultanément. L'aspect de la lumière en sortie est d'un blanc grisâtre appelé blanc d'ordre supérieur. On obtient un spectre cannelé. L'enregistrement de ce spectre avec un monochromateur permet de mesurer la biréfringence dans l'intervalle spectral considéré.

- ❶ Pour un diélectrique anisotrope, la relation entre la polarisation du milieu et le champ électrique est tensorielle.
- ❷ Un tel milieu est caractérisé par son tenseur permittivité diélectrique relative qui est une matrice symétrique de dimension 3.
- ❸ Le tenseur diélectrique est diagonal dans le repère propre dont les axes dits principaux sont orthogonaux.
- ❹ Il existe deux types de milieux anisotropes : les milieux uniaxes et les milieux biaxes.
- ❺ Dans un milieu uniaxe, il existe un indice principal de réfraction ordinaire et un indice principal de réfraction extraordinaire.
- ❻ Dans un milieu biaxe, il existe trois indices principaux de réfraction.
- ❼ Le problème de la propagation d'une onde plane progressive monochromatique le long d'un axe principal admet des solutions appelées modes propres. Dans le milieu, ces modes sont polarisés rectilignement selon les deux autres axes du repère principal. À la sortie du milieu, ces modes se recomposent pour donner une onde plane dont l'état de polarisation dépend de la longueur traversée et des valeurs des indices principaux. Le fonctionnement des lames optiques quart d'onde et demi-onde repose sur le principe précédent.



# Testez-vous

- 10.1** Dans un milieu optiquement anisotrope :
- a. les propriétés optiques dépendent de la direction
  - b. les propriétés optiques varient d'un point à un autre
  - c. les propriétés optiques sont partout identiques
  - d. la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  est tensorielle
- 10.2** Dans le repère propre d'un milieu uniaxe :
- a. toutes les permittivités diélectriques sont égales
  - b. deux des permittivités diélectriques sont égales entre elles, différentes de la troisième
  - c. toutes les permittivités diélectriques sont nulles
- 10.3** Dans un milieu linéaire homogène anisotrope non absorbant, le tenseur diélectrique est :
- a. symétrique
  - b. hermitien
  - c. auto-adjoint
  - d. diagonalisable
- 10.4** Dans un milieu optiquement anisotrope :
- a. le repère propre est toujours confondu avec le repère cristallographique
  - b. qui est biaxe, il y a dans le repère propre trois permittivités diélectriques différentes
  - c. qui est uniaxe, il y a dans le repère propre deux permittivités diélectriques égales et différentes de la troisième
  - d. le repère propre a des axes orientés aléatoirement
  - e. les axes du repère propre forment un repère orthonormé
- 10.5** Dans un milieu uniaxe :
- a. si l'indice ordinaire est inférieur à l'indice extraordinaire, l'axe lent est l'axe extraordinaire
  - b. la vitesse de propagation d'une onde plane progressive monochromatique est indépendante de l'indice ordinaire et de l'indice extraordinaire
  - c. les vitesses de propagation des modes ordinaire et extraordinaire sont égales



## 10.1 Propagation dans les milieux anisotropes

Dans cet exercice et dans ceux qui suivent, nous nous intéressons à la propagation d'une onde plane monochromatique polarisée rectilignement dans des milieux diélectriques parfaitement isolants, transparents, linéaires, homogènes, non magnétiques mais électriquement anisotropes.

### Introduction du tenseur diélectrique

1. Définir le terme milieu optiquement "anisotrope". Qu'est-ce que le phénomène de biréfringence ?

2. Quelle est la relation générale liant le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  dans ce milieu ? Comment s'exprime cette relation dans la base principale notée  $(O, X, Y, Z)$  ?

On notera  $\epsilon_{rX}$ ,  $\epsilon_{rY}$  et  $\epsilon_{rZ}$  les permittivités diélectriques relatives principales. Qu'appelle-t-on milieu uniaxe ?

### Structure de l'onde dans un milieu anisotrope

Une onde plane monochromatique polarisée rectilignement se propage dans un tel milieu. Le champ électrique complexe associé est de la forme :

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la direction de propagation de l'onde dans le milieu ( $k$  est réel).

3. Réécrire les équations de Maxwell en utilisant la notation complexe. En déduire la structure de l'onde dans le milieu. On précisera sur un schéma les positions relatives des différents vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ . Auquel des deux vecteurs  $\vec{E}$  ou  $\vec{D}$  doit-on identifier la vibration lumineuse pour conserver la transversalité du champ électromagnétique par rapport à la direction de propagation  $\vec{u}$  ?

4. Définir sur le schéma précédent le plan d'onde et le plan de polarisation et représenter le vecteur de Poynting  $\vec{R}$ . Commenter en comparant avec le cas des milieux isotropes.

5. Montrer que les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  et  $\vec{k}$  vérifient la relation suivante :

$$k^2 \vec{E} - \mu_0 \omega^2 \vec{D} = (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k}$$

Que représente la quantité  $\omega/k$  ?

N.B. On rappelle la formule :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

6. On considère à présent le cas particulier d'une propagation le long de la direction  $OX$  qui correspond à une des directions principales du milieu :  $\vec{u} = \vec{e}_X$ .

i. Montrer que  $\vec{E}$  devient également transverse.

ii. Dans le cas où  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement suivant  $OY$ , donner la vitesse  $v_Y$  de propagation de cette onde en fonction de  $c$  et  $n_Y = \sqrt{\epsilon_{rY}}$ . Reprendre la question si  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement selon  $OZ$ , en introduisant la vitesse de propagation  $v_Z$  et  $n_Z = \sqrt{\epsilon_{rZ}}$ . Commenter.

## 10.2 Lames cristallines uniaxes taillées parallèlement à leur axe optique

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux milieux uniaxes pour lesquels deux des permittivités diélectriques relatives sont égales :  $\varepsilon_{rX} = \varepsilon_{rY}$ . On appelle alors indice ordinaire  $n_o = \sqrt{\varepsilon_{rX}} = \sqrt{\varepsilon_{rY}}$  et indice extraordinaire  $n_E = \sqrt{\varepsilon_{rZ}}$ .

Les lames cristallines à retard sont des lames minces taillées dans des milieux uniaxes parallèlement à leur axe optique OZ.

On envoie sur une telle lame une onde plane monochromatique en incidence normale : on se trouve donc dans la configuration où la direction de propagation  $\vec{u}$  est orthogonale à l'axe optique OZ. On prendra  $\vec{u} = \vec{e}_X$ .

1. Qu'appelle-t-on lignes neutres de la lame biréfringente ? Quelles sont leurs propriétés ? Donner leur direction dans la base principale précédemment définie, ainsi que les indices les caractérisant.

2. Présenter le principe d'une expérience simple permettant de déterminer expérimentalement la direction des lignes neutres d'une lame cristalline.

3. On se place dans le cas où  $n_o < n_E$ . Quel est alors l'axe lent ? L'axe rapide ?

4. On envoie sur cette lame, sous incidence normale, une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, polarisée rectilignement dans une direction formant l'angle  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) avec l'axe rapide. L'épaisseur de la lame est notée  $e$ . Dans quelles conditions l'onde émergente est-elle polarisée rectilignement ? Préciser alors les directions de polarisation possibles. Quel type de polarisation obtiendrait-on en général ?

5. Quel est l'effet d'une telle lame sur une lumière non polarisée ?

6. Qu'appelle-t-on lame demi-onde ? Lame quart d'onde ?

**Application numérique :** calculer l'épaisseur minimale d'une lame demi-onde de quartz, pour la radiation jaune du sodium ( $\lambda = 589$  nm). On donne pour cette radiation  $\Delta n = n_E - n_o = 0,0091$ .

7. Proposer un montage simple permettant de réaliser un « polariseur circulaire », puis un « analyseur circulaire ».

8. Proposer un montage, utilisant un polariseur et une lame bien choisie, faisant anti-reflet pour une onde plane monochromatique arrivant sous incidence normale sur un miroir. On ne demande pas une démonstration détaillée des propriétés du montage.

9. On éclaire en lumière blanche et en incidence normale une lame biréfringente placée entre un analyseur et un polariseur croisés. Pour un même cristal, quand l'épaisseur de la lame augmente, on observe, sur un écran placé après la lame, d'abord une tache colorée, (dont la teinte varie avec l'épaisseur), puis une tache blanc grisâtre. Expliquer simplement le phénomène. Obtient-on, pour une lame mince, la même couleur si l'analyseur et le polariseur, plutôt que d'être croisés, sont parallèles ?

### 10.3 Détermination expérimentale d'une biréfringence

On s'intéresse ici aux techniques expérimentales permettant de déterminer la valeur de la biréfringence  $|n_E - n_o|$  pour une lame biréfringente donnée, taillée parallèlement à son axe optique.

1. Méthode du spectre cannelé pour une lame épaisse.

a. Rappeler le montage expérimental permettant d'obtenir un spectre cannelé avec un contraste maximum à partir d'une lame biréfringente épaisse (on utilisera un polariseur et un analyseur croisés).

b. Montrer comment l'analyse du spectre cannelé obtenu permet de remonter à la détermination de la biréfringence  $|n_E - n_o|$  de la lame.

c. Le spectre de la figure 10.8 représente l'intensité lumineuse en fonction de la longueur d'onde pour une lame biréfringente de nature inconnue placée entre polariseur et analyseur croisés. Exploiter ce graphe pour déterminer la biréfringence de la lame utilisée sachant que  $e = 4,0$  mm.

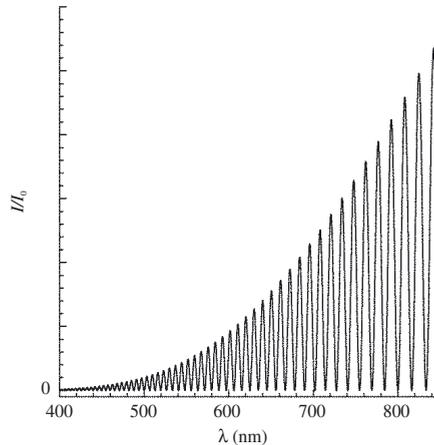


Figure 10.8

2. Connaissez-vous une autre méthode de détermination de la biréfringence d'une lame ?

3. Peut-on rendre certains matériaux isotropes biréfringents ? Si oui, comment ? Ces effets sont-ils utilisés dans la pratique ? Précisez.

4. Citer des exemples de milieux biréfringents non cristallins.

# ● Solutions



- 10.1** Réponses a et d ; **10.2** Réponse b ; **10.3** Réponses a, b, c et d ;  
**10.4** Réponses b, c et e ; **10.4** Réponse a.



## 10.1 Propagation dans les milieux anisotropes

1. Pour un milieu optiquement anisotrope, les propriétés optiques sont différentes selon la direction de propagation d'une onde. La polarisation macroscopique d'un tel milieu, c'est-à-dire sa réponse vis-à-vis du champ électrique de l'onde, dépend de la direction de ce champ : la relation qui lie la polarisation au champ électrique est tensorielle.

La direction de propagation de l'onde étant fixée, on recherche la possibilité et les conditions de propagation d'une onde plane progressive monochromatique dans un tel milieu. Le milieu étant linéaire et non dispersif, le module du vecteur d'onde est de la forme  $k = n \frac{\omega}{c}$  où  $n$  est l'indice et  $\omega$  la pulsation. On montre alors qu'il existe deux valeurs de l'indice qui satisfont à l'équation de propagation de l'onde, elles sont solutions d'un problème aux valeurs propres (qui conduit à la notion de modes propres). C'est pour cette raison qu'il est d'usage de dire que le milieu est biréfringent.

2. La relation entre le vecteur  $\vec{D}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  est tensorielle, elle s'écrit sous forme matricielle :  $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$  où  $[\varepsilon_r]$  est le tenseur diélectrique. Il s'agit d'une matrice  $3 \times 3$  qui a la propriété d'être symétrique : il existe donc une base appelée base principale (on parle également de repère principal ou de repère des axes principaux) dans laquelle cette matrice est diagonale.

$$\text{Dans cette base : } [\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rX} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{rY} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rZ} \end{pmatrix}.$$

La relation  $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$  s'exprime alors simplement dans la base principale :

$$\begin{cases} D_X = \varepsilon_0 \varepsilon_{rX} E_X \\ D_Y = \varepsilon_0 \varepsilon_{rY} E_Y \\ D_Z = \varepsilon_0 \varepsilon_{rZ} E_Z \end{cases}.$$

Un milieu uniaxe est un milieu pour lequel deux des permittivités relatives principales sont égales entre elles et différentes de la troisième. Par exemple,  $\varepsilon_{rX} = \varepsilon_{rY} \neq \varepsilon_{rZ}$ .

3. Les équations de Maxwell dans un milieu diélectrique parfait s'écrivent (puisque'il s'agit d'un diélectrique parfait, il n'y a ni densité volumique de charges libres, ni densité volumique de courants libres) :

$$\text{div} \vec{D} = 0; \quad \overline{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div} \vec{B} = 0; \quad \overline{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

À ces équations s'ajoutent les relations constitutives du milieu :  $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

L'onde recherchée a la structure d'une onde plane progressive monochromatique, l'expression du champ électrique associé est :  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , avec  $\vec{k} = k\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la direction de propagation de l'onde dans le milieu,  $k$  est réel. Par conséquent, tout le champ électromagnétique de cette onde a cette structure car les équations de Maxwell montrent que tous les champs  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$  sont couplés. Chacun de ces champs s'écrira selon :  $\vec{X}(\vec{r}, t) = \vec{X}_0 \exp [i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ . De plus, nous savons que pour ce type de champ, nous avons les équivalences suivantes pour les opérateurs :  $\text{div} \vec{X} \leftrightarrow i\vec{k} \cdot \vec{X}$ ,  $\text{rot} \vec{X} \leftrightarrow i\vec{k} \wedge \vec{X}$ ,  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega \vec{X}$ . Ce qui permet de réécrire les équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \\ i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ i\vec{k} \wedge \vec{H} = -i\omega \vec{D} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{k} \perp \vec{D} \quad (1) \\ \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{B} \perp \vec{E} \quad (2) \\ \vec{D} \perp \vec{k} \quad (3) \\ \vec{D} = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}}{\mu_0 \omega} \Leftrightarrow \vec{D} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{D} \perp \vec{B} \quad (4) \end{array} \right.$$

Les équations (1), (3), (4) montrent que  $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$  est un trièdre direct. Cependant, du fait de l'anisotropie diélectrique,  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas parallèles :  $\vec{E}$  n'est pas transverse sauf cas particulier. En revanche, comme  $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$  est un trièdre direct,  $\vec{D}$  est transverse. Ainsi pour conserver la transversalité du champ électromagnétique, on identifie la vibration lumineuse à  $\vec{D}$ .

4. Par définition, un plan d'onde est perpendiculaire au vecteur d'onde : c'est donc un plan contenant  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$ . Un plan de polarisation est un plan contenant le vecteur d'onde  $\vec{k}$  et  $\vec{D}$ .

L'expression générale du vecteur de Poynting étant  $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ , on a donc  $\vec{R} \perp \vec{E}$  et  $\vec{R} \perp \vec{H}$ , il appartient au plan de polarisation. Dans les milieux isotropes, le vecteur de Poynting est dirigé selon le vecteur d'onde  $\vec{k}$  ce qui n'est plus vrai pour les milieux anisotropes, sauf cas particulier d'une propagation selon un axe principal. Rappelons que le vecteur de Poynting donne la direction selon laquelle s'écoule l'énergie électromagnétique. Ainsi, dans un milieu optiquement anisotrope, l'énergie lumineuse n'est pas transportée dans la direction de propagation de l'onde, a priori le rayon lumineux n'est plus colinéaire au vecteur d'onde.

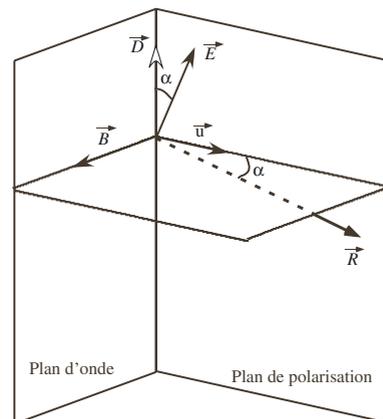


Figure 10.9 – Dispositions du plan d'onde et du plan de polarisation.

5. En reportant l'équation (2) dans l'équation (4), il vient :

$$\begin{aligned}\mu_0\omega\vec{D} &= -\vec{k} \wedge \vec{B} \\ &= -\vec{k} \wedge \left( \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) \\ &= -\left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} + \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{\omega} \right) \vec{E} \\ &= -\left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}}{\omega} \right) \vec{k} + \left( \frac{k^2}{\omega} \right) \vec{E}\end{aligned}$$

$$\text{soit } k^2\vec{E} - \mu_0\omega^2\vec{D} = (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k}$$

Cette dernière relation montre que le champ électrique  $\vec{E}$  appartient au plan  $(\vec{k}, \vec{D})$ .

La quantité  $\omega/k$  représente la vitesse de phase.

6. Le cas particulier proposé correspond à une propagation selon la direction de l'axe principal OX et donc  $\vec{k} = k\vec{u}_X$ .

i. Étant donné que  $\vec{D}$  est transverse et que la propagation s'effectue selon OX, les deux seules composantes éventuellement non nulles de  $\vec{D}$  sont  $D_Y$  et  $D_Z$  donc  $\vec{D}(0, D_Y, D_Z)$ . La relation tensorielle, dans le repère des axes propres va s'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ D_Y \\ D_Z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{rX} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{rY} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \varepsilon_0 \varepsilon_{rX} E_X \\ D_Y = \varepsilon_0 \varepsilon_{rY} E_Y \\ D_Z = \varepsilon_0 \varepsilon_{rZ} E_Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_X = 0 \\ D_Y = \varepsilon_0 \varepsilon_{rY} E_Y \\ D_Z = \varepsilon_0 \varepsilon_{rZ} E_Z \end{cases}\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, le champ électrique est donc transverse ( $E_X = 0$ ).

ii. Si l'état de polarisation de  $\vec{E}$  est rectiligne selon OY,  $\vec{E} = E\vec{u}_Y$  car le champ électrique est transverse d'après la question précédente. Par conséquent, la seule composante non nulle du champ électrique est  $E_Y$ ,  $\vec{E}(0, E_Y, 0)$ . Alors, la dernière équation du système précédent entraîne la nullité de  $D_Z$ , si bien que  $\vec{D}(0, D_Y, 0)$  :  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires. La vitesse  $v_Y$  est la vitesse de phase, elle se déduit de

$$\begin{aligned}k^2\vec{E} - \mu_0\omega^2\vec{D} &= (\vec{k} \cdot \vec{E})\vec{k} \\ \text{soit } k^2 E - \mu_0\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{rY} E &= (k\vec{u}_X \cdot E\vec{u}_Y)k = 0 \\ \text{et donc } \frac{\omega}{k} &= \pm \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{rY}}} = \pm \frac{c}{n_Y}\end{aligned}$$

Le signe  $\pm$  signifie que deux ondes peuvent se propager, l'une dans le sens des  $X$  positifs, l'autre dans le sens des  $X$  négatifs. La vitesse de phase est  $v_Y = c/n_Y$ .

Si le champ  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement selon OZ, par une démarche analogue à celle qui vient d'être menée, on montre que  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires,  $\vec{D}(0, 0, D_Z)$  et que la vitesse de phase est  $v_Z = c/n_Z$ .

On remarque que  $v_Y \neq v_Z$  : les deux ondes ne se propagent donc pas à la même vitesse, c'est une conséquence de l'anisotropie.

## 10.2 Lames cristallines uniaxes taillées parallèlement à leur axe optique

La direction de propagation est l'axe  $OX$ ,  $\vec{k} = k\vec{u}_X$ , l'axe optique est  $OZ$ .

1. Les lignes neutres de la lame sont les directions de polarisation des ondes planes qui se propagent sans déformation dans un cristal anisotrope (la structure d'onde plane est ainsi conservée). Ces lignes neutres sont orthogonales entre elles, elles sont également appelées axes propres ou axes principaux. Les indices associés sont les indices principaux. Ici, la direction de propagation étant  $OX$ , les lignes neutres sont  $OY$  et  $OZ$  avec les indices associés  $n_o$  et  $n_E$  respectivement.

2. On place la lame cristalline entre le polariseur et l'analyseur croisés. En la faisant tourner dans son plan, on rétablit l'extinction : les directions des lignes neutres correspondent alors aux azimuts du polariseur et de l'analyseur.

3. Comme  $n_o < n_E$ , les vitesses de phase sont telles que  $v_o > v_E \Leftrightarrow v_Y > v_Z$  : l'axe  $OZ$  est axe lent, l'axe  $OY$  est l'axe rapide.

4. Le champ incident sur la lame a pour expression, dans le repère des axes propres :

$$\vec{D}_{\text{inc}} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kx) \\ D_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} \forall x < 0$$

où  $k = \omega/c$  est le module du vecteur d'onde dans le vide.

Dans la lame, c'est-à-dire pour  $0 < x < e$ , le champ incident se décompose selon les axes propres de la lame puisque c'est selon ces directions que le champ se propage sans déformation (décomposition dans la base des modes propres de propagation).

Sachant que les lignes neutres sont  $OY$  et  $OZ$  avec les indices associés  $n_o$  et  $n_E$  respectivement :

$$\vec{D}_{\text{lame}} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kn_o x) \\ D_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kn_E x) \end{pmatrix}.$$

Le champ de l'onde émergente s'écrit (toujours dans le repère principal) :

$$\vec{D}_{\text{trans}} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \cos \alpha \cos(\omega t - kn_o e - k(x - e)) \\ D_0 \sin \alpha \cos(\omega t - kn_E e - k(x - e)) \end{pmatrix} \forall x > e.$$

La lame anisotrope introduit donc un déphasage entre la composante suivant l'axe lent et celle selon l'axe rapide :  $\varphi = k(n_E - n_o)e$ .

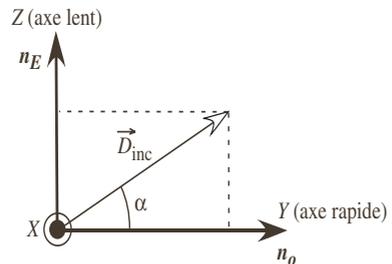


Figure 10.10 – Dispositions relatives des axes de la lame.

Dans le cas le plus général, la valeur de  $\varphi$  est quelconque : l'état de polarisation en sortie de la lame est elliptique.

Si  $\varphi = 2m\pi$ , la vibration émergente est polarisée rectilignement, parallèlement au champ incident.

Si  $\varphi = (2m + 1)\pi$ , la vibration émergente est polarisée rectilignement selon une direction qui est la symétrique de celle du champ incident par rapport à une ligne neutre.

**5.** Une lame est conçue pour fonctionner avec une lumière incidente polarisée : elle n'a pas d'effet sur une lumière non polarisée.

**6.** Une lame demi-onde est taillée à une épaisseur  $e$  pour que la différence de marche introduite soit égale à une demie longueur d'onde (à un multiple entier de longueur d'onde près) :

$$\delta = \frac{\lambda}{2} + m\lambda \Leftrightarrow \varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow (n_E - n_o)e = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Une lame quart d'onde est taillée à une épaisseur  $e$  pour que la différence de marche introduite soit égale à un quart de longueur d'onde (à un multiple entier de longueur d'onde près) :

$$\delta = \frac{\lambda}{4} + m\lambda \Leftrightarrow \varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \Leftrightarrow (n_E - n_o)e = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda$$

Application numérique : l'épaisseur minimale est obtenue pour  $m = 0$  :

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{2(n_E - n_o)} \approx 32,4 \mu\text{m}$$

**7.** Pour obtenir une lumière polarisée circulairement, on éclaire sous incidence normale avec une lumière polarisée rectilignement une lame quart d'onde dont les axes propres forment un angle de  $45^\circ$  avec la direction de polarisation de la lumière incidente.

Pour réaliser un analyseur circulaire, on éclaire sous incidence normale une lame quart d'onde avec une lumière dont l'état de polarisation est inconnu. À la suite de la lame quart d'onde, on place un analyseur rectiligne. Si la lumière incidente est polarisée circulairement, en tournant l'azimut de cet analyseur, on peut obtenir l'extinction.

**8.** On place entre la source et le miroir un polariseur rectiligne suivi d'une lame quart d'onde dont les axes propres sont à  $45^\circ$  de l'azimut du polariseur. À l'aller, la lumière issue de la lame quart d'onde est polarisée circulairement selon un certain sens (droit ou gauche). En se réfléchissant sur le miroir, l'état de polarisation reste circulaire mais de sens inversé par rapport au sens incident. Traversant dans le sens retour la lame quart d'onde, cette polarisation circulaire est transformée en polarisation rectiligne qui sera éteinte par le polariseur : le dispositif est anti-reflet.

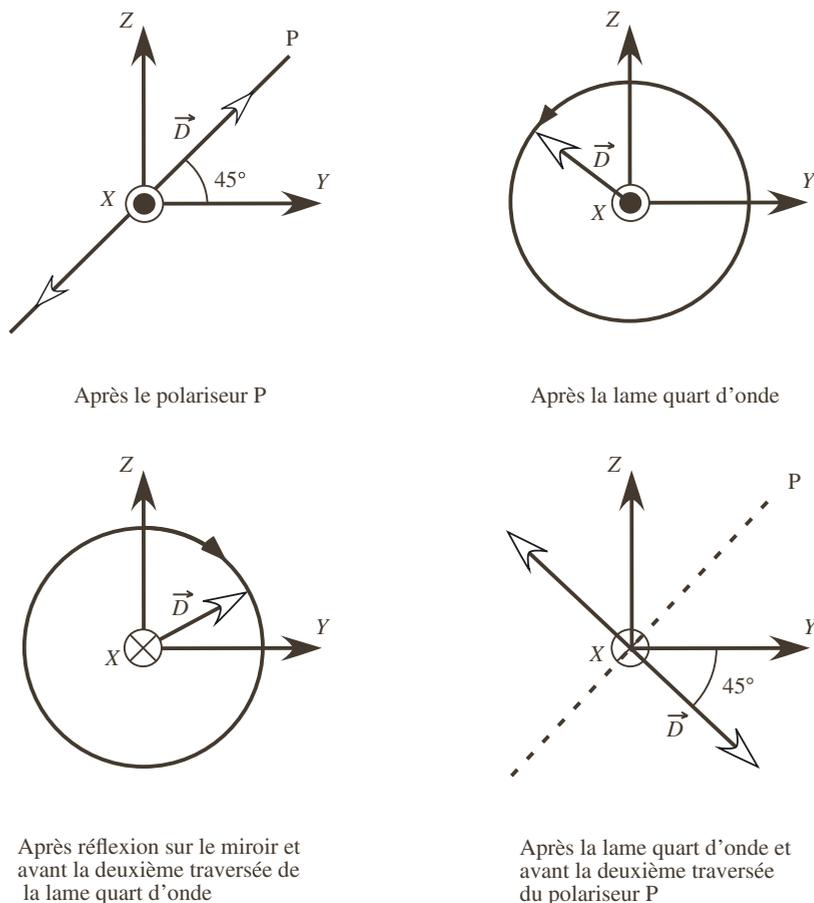


Figure 10.11

9. La lame étant placée entre le polariseur et l'analyseur croisés, les longueurs d'onde éteintes sont telles que  $\varphi = 2m\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_E - n_o)e \Leftrightarrow \lambda_m = \frac{(n_E - n_o)e}{m}$ . Le nombre de cannelures augmente donc avec l'épaisseur  $e$ . Si l'épaisseur  $e$  est faible, seulement quelques longueurs d'onde du domaine du visible ( $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$ ) seront éteintes : la teinte résultante est colorée, elle correspond à la lumière blanche privée de quelques radiations. En effet, lorsque le nombre de cannelures dans le visible n'est pas trop élevé, l'œil parvient à distinguer une teinte. Lorsqu'il y a plus de cinq ou six cannelures dans le visible, l'œil voit du blanc comme s'il n'y avait pas d'interférences. Ce blanc cannelé est appelé blanc d'ordre supérieur.

Donc, si l'épaisseur  $e$  augmente, de plus en plus de longueurs d'ondes du domaine du visible seront éteintes mais il restera suffisamment de composantes spectrales au voisinage des trois couleurs fondamentales pour que l'aspect soit proche du blanc : on parle de blanc d'ordre supérieur, blanc grisâtre.

Si le polariseur et l'analyseur sont parallèles, on observe la couleur complémentaire de la précédente.

### 10.3 Détermination expérimentale d'une biréfringence

1. Méthode du spectre cannelé pour une lame épaisse.

a. La lame est placée entre le polariseur et l'analyseur croisés, les axes neutres de la lame doivent être à  $45^\circ$  des azimuts de transmission de l'analyseur et du polariseur. Le tout étant éclairé en lumière blanche. La lumière transmise est recueillie par un spectromètre. On obtient un spectre cannelé. Auparavant, il est nécessaire de placer une fente à la sortie de la source et de l'imager sur la fente d'entrée du spectromètre.

b. Si le polariseur est croisé avec l'analyseur, les cannelures noires sont telles que  $\lambda_m = \frac{(n_E - n_o)e}{m}$ . À partir de l'enregistrement du spectre, on pointe deux cannelures sombres :  $\lambda_{m_1} = \frac{(n_E - n_o)e}{m_1}$  et  $\lambda_{m_2} = \frac{(n_E - n_o)e}{m_2}$  avec  $m_2 = m_1 + m$ .

On obtient donc :

$$m_1 = \frac{(n_E - n_o)e}{\lambda_{m_1}} \text{ et } m_1 + m = \frac{(n_E - n_o)e}{\lambda_{m_1+m}} \text{ d'où } m = (n_E - n_o)e \left( \frac{1}{\lambda_{m_1+m}} - \frac{1}{\lambda_{m_1}} \right)$$

soit  $(n_E - n_o)e = m \frac{\lambda_{m_1+m} \lambda_{m_1}}{\lambda_{m_1} - \lambda_{m_1+m}}$ ,  $m$  est le nombre de cannelures brillantes entre les deux cannelures sombres considérées.

c. Il y a une cannelure sombre pour  $\lambda_{m_1} = 425 \text{ nm}$  et une autre pour  $\lambda_{m_2} = 800 \text{ nm}$ , séparées de  $m = 45$  cannelures brillantes. On en déduit  $n_E - n_o \approx 10^{-2}$ .

2. On peut utiliser un compensateur de Babinet tel que décrit dans le cours.

3. On peut provoquer la biréfringence dans certains matériaux par exemple en appliquant un champ électrique statique, il s'agit de l'effet Pockels ou effet électrooptique linéaire. On peut aussi appliquer des contraintes mécaniques (effet photo-élastique). Une autre possibilité est d'appliquer un champ magnétique (effet Faraday).

Ces effets sont utilisés dans la pratique. Par exemple :

- **l'effet électrooptique** est à la base des cellules à effet Pockels destinées à moduler à haute fréquence (en amplitude ou en phase) la lumière. Leur emploi concerne la transmission des informations.
- **l'effet Faraday** sert à caractériser des verres employés comme dispositifs anti retour dans les sources laser ou à mesurer des champs magnétiques à distance (astronomie);
- **l'effet photo-élastique** est utilisé pour visualiser et analyser les contraintes dans les pièces mécaniques.

4. Les cristaux liquides, les verres, les films étirés sont des matériaux biréfringents non cristallins.

# Propagation dans un diélectrique linéaire homogène anisotrope

## Introduction

Les cristaux liquides en phase nématique sont composés de molécules organiques allongées qui peuvent s'orienter lorsqu'un champ électrique est appliqué : le milieu est optiquement anisotrope. La lumière traversant un tel milieu possède un état de polarisation bien défini. Les écrans ainsi constitués présentent l'avantage de consommer peu d'électricité, ils peuvent afficher des couleurs et sont disponibles dans des dimensions dépassant le mètre en diagonal.

## Objectifs

- Analyser** la propagation des ondes planes dans une direction quelconque.
- Définir** les modes de propagation.
- Montrer** l'existence de la biréfringence.

## Plan

- 1 Définitions
- 2 Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices

Les matériaux cristallins employés en optique non linéaire sont anisotropes et sont souvent utilisés dans des configurations où les ondes lumineuses se propagent dans des directions particulières ne coïncidant pas nécessairement avec un axe principal et pour lesquelles l'efficacité des phénomènes non linéaires impliqués est optimale (les polarisations sont également à ajuster pour obtenir les effets non linéaires les plus forts possibles). Citons, à titre d'exemples, la génération d'harmoniques pour laquelle les conditions dites d'accord de phase varient de façon critique selon les directions de polarisation et de propagation des ondes en interaction, les interactions non linéaires impliquées dans les oscillateurs paramétriques optiques, dans les amplificateurs paramétriques optiques, dans les dispositifs de mélanges à quatre ondes et dans la conjugaison de phase et l'amplification optique de faisceaux dans les cristaux photoréfractifs.

Le chapitre 10 consacré aux milieux diélectriques linéaires homogènes anisotropes a analysé la propagation d'ondes planes progressives monochromatiques selon une

direction confondue avec un axe principal. Il s'agit dans le présent chapitre de mener une telle analyse dans une direction quelconque par rapport aux axes principaux.

Ce chapitre dédié aux milieux anisotropes conduira au chapitre 12 qui s'attachera à décrire les trajets des rayons lumineux dans les milieux anisotropes, la double réfraction et à expliquer le fonctionnement des dispositifs séparateurs de polarisation.

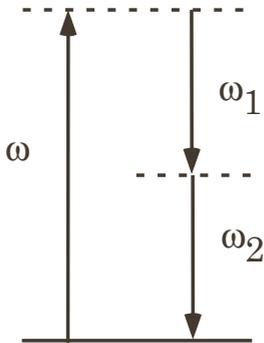
**Encart 11.1**

**Production de photons intriqués dans des cristaux anisotropes par processus non linéaire**

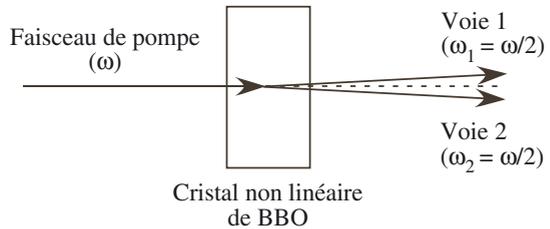
L'intrication quantique est un phénomène dans lequel l'état quantique de deux objets doit être décrit globalement bien que ces objets puissent être spatialement séparés.

Des paires de photons intriqués en polarisation peuvent être générées par un processus non linéaire au sein d'un cristal anisotrope de BBO (bêta borate de baryum,  $\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$ ). Sous l'action d'un photon incident, le cristal produit deux photons dans des directions différentes, l'un à polarisation verticale, l'autre à polarisation horizontale, chacun des photons ayant une chance sur deux de présenter l'une ou l'autre de ces polarisations. Les deux photons sont également intriqués via leurs états de polarisation qui sont orthogonaux. Lorsque l'on mesure la polarisation de l'un des photons en bout de chaîne, l'autre présente systématiquement la polarisation orthogonale.

L'intrication quantique possède un grand potentiel d'applications dans les domaines de l'information quantique, de la cryptographie quantique et de l'ordinateur quantique. D'intenses recherches sont menées actuellement sur ces thèmes.



**Processus non linéaire de génération de photons intriqués**



**Génération de photons intriqués avec un cristal de BBO**

# 1 Définitions

Rappelons que dans un milieu linéaire homogène anisotrope la relation constitutive liant  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  s'écrit :

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}(\vec{r}, t)$$

où  $[\varepsilon_r]$  est le tenseur diélectrique.

L'**impermeabilité électrique**  $[\eta]$  est par définition le tenseur inverse du tenseur diélectrique :

$$[\eta] = [\varepsilon_r]^{-1}, \text{ si bien que } \vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}(\vec{r}, t) \Leftrightarrow \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) = [\eta] \vec{D}(\vec{r}, t)$$

Remarquons que comme  $[\varepsilon_r]$  est symétrique, il en est de même pour  $[\eta]$ .

Dans le repère des axes principaux de  $[\varepsilon_r]$ , le tenseur  $[\eta]$  est également diagonal, il s'écrit :

$$[\eta] = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_3^2 \end{pmatrix}$$

où  $n_1, n_2,$  et  $n_3$  sont les indices propres du milieu. L'écriture des tenseurs étant particulièrement simple dans le repère principal, on conçoit bien que les calculs y seront plus aisés, c'est donc ce repère qui sera privilégié pour y mener la théorie.

# 2 Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices

Nous cherchons si des ondes planes peuvent se propager dans une direction quelconque portée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Pour une direction de propagation  $\vec{u}$  donnée, la problématique porte sur les points suivants :

- trouver les directions propres possibles du vecteur  $\vec{D}$  (il en existe une infinité pour un milieu isotrope) et les valeurs de l'indice correspondant ;
- examiner la possibilité de propagation d'une onde polarisée ;
- déterminer les états de polarisation autorisés.

Dans un premier temps, nous admettons l'existence d'ondes planes se propageant dans le milieu anisotrope et nous allons examiner la structure de ces ondes.

## 2.1 Structure du champ électromagnétique

Pour une onde harmonique plane, les champs  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  sont de la forme  $\vec{X}(\vec{r}, t) = \vec{X}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$  avec  $\vec{k} = n k_0 \vec{u}$ ,  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $n$  est l'indice de réfraction propre (indice « vu » par l'onde),  $\omega$  la pulsation.

L'analyse de la structure des ondes s'appuie sur les équations de Maxwell dans le milieu. Elles sont identiques à celles écrites dans le chapitre précédent. À ces équations, s'ajoutent les relations constitutives du milieu :  $\vec{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}$  et  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ .

Les ondes étant planes, les opérateurs divergence et rotationnel s'expriment respectivement de façon équivalente à l'aide du produit scalaire ou vectoriel par le vecteur d'onde. Ainsi, les équations de Maxwell s'expriment selon les quatre points suivants et les dispositions relatives des champs et du vecteur d'onde en découlent :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{D}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{H}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -i\vec{k} \wedge \vec{H} = i\omega \vec{D} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} \perp \vec{H} \quad \text{et} \quad \vec{D} \perp \vec{k}$$

Il résulte de ces trois équations que  $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{H})$  et  $(\vec{k}, \vec{D}, \vec{B})$  forment des trièdres directs, trirectangles. On identifie alors la vibration lumineuse au vecteur  $\vec{D}$  pour conserver la transversalité ( $\vec{E}$  n'est pas nécessairement transverse pour les mêmes raisons que celles évoquées au chapitre précédent).

Il en découle qu'un plan d'onde est défini par  $(\vec{D}, \vec{B})$ , le plan de polarisation par  $(\vec{k}, \vec{D})$ . De plus,

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H} \Rightarrow \vec{H} \perp \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{H} \perp \vec{k}$$

On peut ainsi affirmer que le trièdre  $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H})$  est trirectangle direct ( $\vec{\pi}$  est le vecteur de Poynting).

De plus, les deux dernières équations donnent :

$$\begin{cases} \vec{D} = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{H}}{\omega} \\ \vec{H} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\mu_0 \omega} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \vec{D} = -\frac{\vec{k}}{\mu_0 \omega^2} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) \quad \text{et donc} \quad \vec{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u})$$

qui montre que le champ  $\vec{D}$  appartient au plan  $(\vec{u}, \vec{E})$ .

## 2.2 Modes propres de propagation, équation de Fresnel

Le champ  $\vec{D}$  étant transverse, c'est le plus significatif, la vibration lumineuse lui est identifiée. La détermination des modes propres se mène donc avec le champ  $\vec{D}$ .

En reportant  $\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\eta] \vec{D}$  dans l'équation  $\vec{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u})$ , nous aboutissons à :  $[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0)\vec{u} = \frac{\vec{D}_0}{n^2}$ .

2 Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices

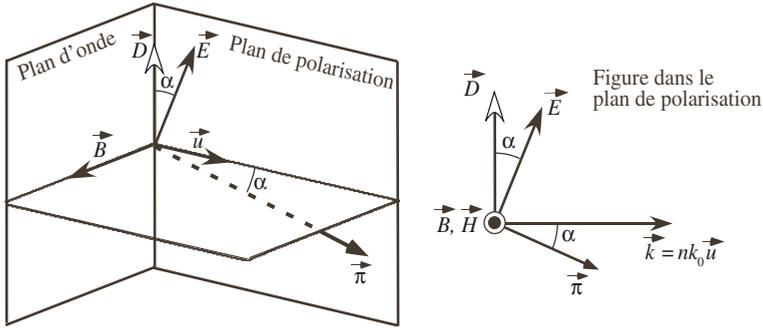


Figure 11.1– Disposition relative des vecteurs du champ électromagnétique dans un milieu anisotrope.

Soient dans le repère propre,  $\vec{D}_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  avec  $|\vec{u}| = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

$$\text{Alors, dans ce repère, } [\eta] \vec{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{X}{n_1^2} \\ \frac{Y}{n_2^2} \\ \frac{Z}{n_3^2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0 = \alpha \frac{X}{n_1^2} + \beta \frac{Y}{n_2^2} + \gamma \frac{Z}{n_3^2}.$$

Ceci permet d'expliciter les projections de l'équation aux valeurs propres  $[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \vec{u} = \frac{\vec{D}_0}{n^2}$  selon les axes du repère principal :

$$\begin{cases} \frac{(1 - \alpha^2)}{n_1^2} X - \frac{\alpha\beta}{n_2^2} Y - \frac{\alpha\gamma}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} X \\ -\frac{\alpha\beta}{n_1^2} X + \frac{(1 - \beta^2)}{n_2^2} Y - \frac{\beta\gamma}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} Y \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_1^2} X - \frac{\gamma\beta}{n_2^2} Y + \frac{(1 - \gamma^2)}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(1 - \alpha^2)}{n_1^2} & -\frac{\alpha\beta}{n_2^2} & -\frac{\alpha\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\beta}{n_1^2} & \frac{(1 - \beta^2)}{n_2^2} & -\frac{\beta\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_1^2} & -\frac{\gamma\beta}{n_2^2} & \frac{(1 - \gamma^2)}{n_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X}{n^2} \\ \frac{Y}{n^2} \\ \frac{Z}{n^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [M] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0$$

Ceci est une équation aux valeurs propres, les valeurs propres étant  $1/n^2$ .

Les valeurs propres  $1/n^2$  de la matrice  $[M]$  sont les racines du polynôme caractéristique  $\det\left([M] - \frac{1}{n^2}Id\right)$ . Le développement de ce déterminant et son annulation amènent à une équation bicarrée en  $n$  appelée équation de Fresnel, dont deux expressions équivalentes sont :

$$\frac{n_1^2 \alpha^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 \beta^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 \gamma^2}{n^2 - n_3^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow n_1^2 \alpha^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + n_2^2 \beta^2 (n^2 - n_3^2)(n^2 - n_1^2) + n_3^2 \gamma^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0$$

Le calcul du discriminant de l'équation permet de montrer :

- que les solutions sont réelles quels que soient  $\alpha, \beta, \gamma$ , c'est-à-dire quelle que soit la direction de propagation  $\vec{u}$ .
- qu'il y a quatre solutions, deux sont positives ( $n'$  et  $n''$ ), deux sont négatives ( $n'''$  et  $n''''$ ).
- Les solutions de l'équation de Fresnel fournissent, pour une direction de propagation  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  dans le repère principal, les indices de réfraction. Il existe donc des solutions sous forme d'ondes planes progressives homogènes au problème de la propagation de la lumière dans les milieux diélectriques linéaires homogènes anisotropes.
- Les solutions positives  $n'$  et  $n''$  correspondent à une propagation selon un sens sur la direction caractérisée par  $\vec{u}$ , les solutions négatives  $n'''$  et  $n''''$  correspondent à une propagation selon le sens opposé. Pour simplifier, nous considérons dans la suite les solutions positives sans perte de généralité.
- C'est l'existence de ces deux valeurs de l'indice qui indique qu'il y a **biréfringence** : le milieu est dit **biréfringent**. À chacune de ces valeurs de l'indice est attachée une onde plane caractérisée par son vecteur  $\vec{D}$  (vecteur propre associé) et sa vitesse de phase  $v_\varphi$ . Ainsi, pour une direction  $\vec{u}$  de propagation donnée, il existe deux ondes planes caractérisées par les vecteurs  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$  orthogonaux à  $\vec{u}$ , les vecteurs  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$  sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $n'$  et  $n''$ . Ces ondes se propagent à des vitesses différentes :  $v'_\varphi = c/n'$ ,  $v''_\varphi = c/n''$ . Pour ces deux solutions,  $\vec{D}$  conserve sa direction initiale.

## 2.3 États de polarisation

Nous allons maintenant déterminer l'état de polarisation des ondes attachées aux indices normaux  $n'$  et  $n''$ .

Dans le repère des axes principaux,  $D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_1 E_1$ ,  $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2 = \varepsilon_2 E_2$ ,  $D_3 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r3} E_3 = \varepsilon_3 E_3$ .

② Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices

En projetant l'équation  $\vec{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u})$  selon les axes principaux et en factorisant, les trois équations suivantes sont obtenues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 E_1 = -\frac{\alpha n^2 \varepsilon_1}{n_1^2 - n^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \\ \varepsilon_2 E_2 = -\frac{\beta n^2 \varepsilon_2}{n_2^2 - n^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \\ \varepsilon_3 E_3 = -\frac{\gamma n^2 \varepsilon_3}{n_3^2 - n^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \end{array} \right.$$

Alors, si on effectue les rapports :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D_2}{D_1} = \frac{\varepsilon_2 \beta (n_1^2 - n^2)}{\varepsilon_1 \alpha (n_2^2 - n^2)} \\ \frac{D_3}{D_1} = \frac{\varepsilon_3 \gamma (n_1^2 - n^2)}{\varepsilon_1 \alpha (n_3^2 - n^2)} \end{array} \right.$$

il apparaît que ce sont des quantités réelles : les états de polarisation des ondes planes qui se propagent sans déformation dans un milieu anisotrope linéaire sont rectilignes. Il reste à déterminer leur direction.

Reprenons l'équation  $\vec{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u})$  qui projetée dans le repère propre donne également :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} \frac{D_1}{\varepsilon_1} - \frac{n^2 \alpha}{\mu_0 c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \\ D_2 = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} \frac{D_2}{\varepsilon_2} - \frac{n^2 \beta}{\mu_0 c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \\ D_3 = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} \frac{D_3}{\varepsilon_3} - \frac{n^2 \gamma}{\mu_0 c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \end{array} \right.$$

Multiplions la première des équations précédentes par  $D_1$ , la deuxième par  $D_2$ , la troisième par  $D_3$  et additionnons ces produits :

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} \left( \frac{D_1^2}{\varepsilon_1} + \frac{D_2^2}{\varepsilon_2} + \frac{D_3^2}{\varepsilon_3} \right) - \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{u} \cdot \vec{E}) \underbrace{(\alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3)}_{\vec{u} \cdot \vec{D} = 0 \text{ (}\vec{D} \text{ est transverse)}}$$

$$\text{soit } |\vec{D}|^2 = \frac{D_1^2 n^2}{n_1^2} + \frac{D_2^2 n^2}{n_2^2} + \frac{D_3^2 n^2}{n_3^2}.$$

Si, dans le repère des axes principaux, on porte  $OM = n$  dans la direction de  $\vec{D}$ , alors  $\overline{OM} (x = nD_1/D, y = nD_2/D, z = nD_3/D)$ , et l'équation précédente se réécrit :

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1$$

Le lieu des points M est donc un ellipsoïde qui possède les mêmes axes principaux que ceux de  $[\epsilon_r]$  : on retrouve l'ellipsoïde des indices, l'extrémité des vecteurs propres  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$  se situent sur cet ellipsoïde.

Nous admettrons alors les propriétés suivantes :

- Le plan d'onde coupe l'ellipsoïde selon une ellipse dont les deux axes portent les vecteurs propres recherchés  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$ , ces deux vecteurs sont par conséquent orthogonaux, et les longueurs des demi axes de l'ellipse sont égales à  $n'$  et  $n''$ .
- Les champs  $\vec{E}'$  et  $\vec{E}''$  ont la direction de la normale à l'ellipsoïde en M et M'.
- L'ellipsoïde possède deux plans de section cycliques (éventuellement confondus). Les directions de  $\vec{u}$  correspondantes s'appellent les axes optiques du milieu. Dans ces plans, toutes les directions de  $\vec{D}$  sont possibles et il leur correspond le même indice qui est le rayon du cercle.

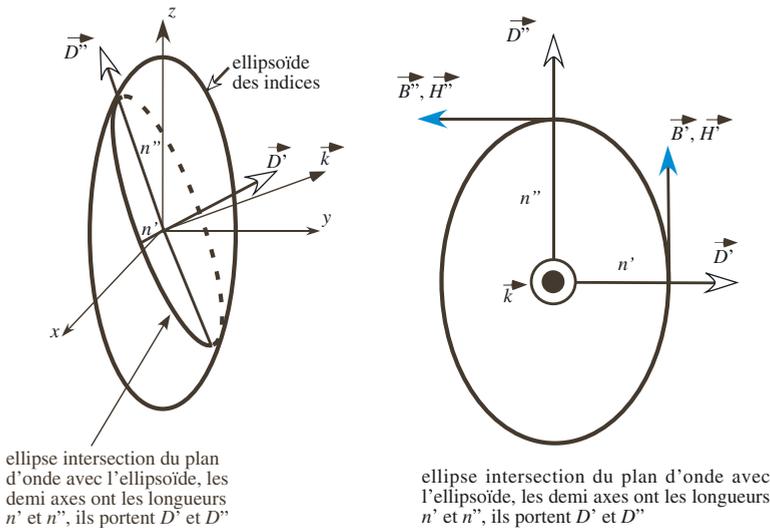


Figure 11.2– États de polarisations propres dans un milieu anisotrope.

## 2.4 Surface des indices

La résolution de l'équation de Fresnel montre que  $n'$  et  $n''$  dépendent de  $\alpha, \beta, \gamma$  c'est-à-dire des cosinus directeurs de la direction de propagation et des constantes optiques  $n_1, n_2, n_3$  du milieu. Pour visualiser les solutions de l'équation de Fresnel et leur dépendance vis-à-vis de ces paramètres, il est utile d'introduire une surface indicatrice lieu

② Modes propres de propagation, équation aux indices de Fresnel, surface des indices

des points M tels que  $\overline{OM} = n\vec{u}$ . On porte donc selon la direction de  $\vec{u}$ , une longueur égale à  $n$ . Et comme l'équation de Fresnel admet deux solutions  $n'$  et  $n''$ , on portera sur la direction de  $\vec{u}$  les deux longueurs correspondantes, on construira ainsi deux points  $M'$  et  $M''$  pour chaque direction  $\vec{u}$ .

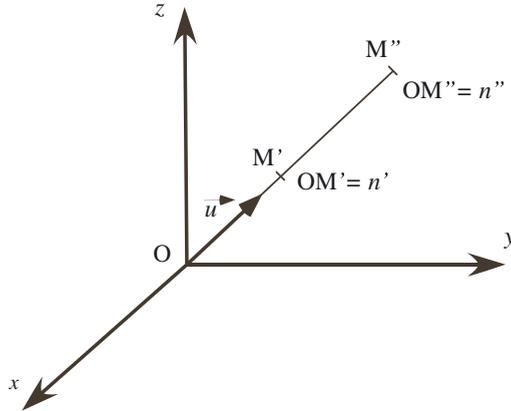


Figure 11.3 – Principe de construction de la surface des indices.

Dans le repère principal, les coordonnées de M sont  $M(x = n\alpha, y = n\beta, z = n\gamma)$  et elles satisfont l'équation de Fresnel :

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 + n_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\
 &\quad - [n_1^2 x^2 (n_2^2 + n_3^2) + n_2^2 y^2 (n_1^2 + n_3^2) + n_3^2 z^2 (n_1^2 + n_2^2)] \\
 &\quad + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0
 \end{aligned}$$

La surface d'équation  $f(x, y, z) = 0$  est appelée surface des indices. Comme l'équation de Fresnel admet deux solutions, il s'agit d'une surface à deux nappes. Elle est symétrique par rapport à l'origine puisque  $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$  : l'étude et la représentation de cette surface se limiteront donc au premier octant. Pour simplifier l'analyse de cette surface et se faire une idée de son allure, on peut chercher ses sections par les plans de coordonnées. Par exemple, son intersection avec le plan  $Oxy$  est constituée d'un cercle de rayon  $n_3$  et d'une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{n_2^2} + \frac{y^2}{n_1^2} = 1$ . Les résultats sont analogues pour les intersections avec les autres plans de coordonnées.

Les deux nappes possèdent en général quatre points communs notés  $I, I', J, J'$  sur les figures et qui définissent deux axes  $\Delta$  et  $\Delta'$  : ce sont les axes optiques du milieu. La particularité de ces axes est évidente : si une onde se propage selon l'un d'eux, la configuration est telle que l'équation de Fresnel admet une solution double  $n' = n''$  et le milieu apparaît pour cette onde comme un milieu isotrope. On comprend ainsi la

dénomination de milieu biaxe pour le cas le plus général. L'angle  $\theta$  que fait un axe

optique avec l'axe Oz est tel que  $\sin \theta = \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}}$  (en supposant  $n_1 > n_2 > n_3$ ).

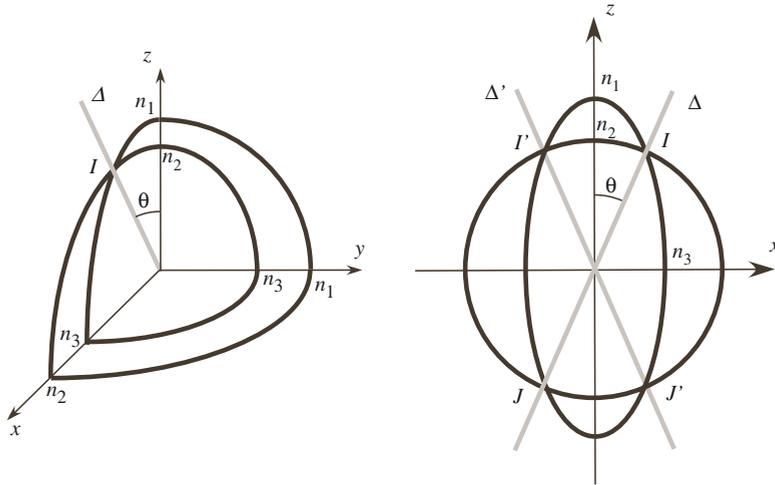


Figure 11.4– Surface des indices et sa section par le plan de coordonnées  $(Oxz)$ , en supposant  $n_1 > n_2 > n_3$ .

- 1 Une onde plane progressive monochromatique se propageant dans une direction quelconque d'un diélectrique anisotrope se décompose en deux modes propres polarisés rectilignement et orthogonaux l'un par rapport à l'autre.
- 2 Le champ électrique de chacun des modes n'est plus transverse. Le champ induction électrique, le champ magnétique et l'excitation magnétique sont transverses.
- 3 Le vecteur de Poynting n'est plus confondu avec le vecteur d'onde.
- 4 Les indices vus par chacun des modes sont solutions de l'équation de Fresnel.
- 5 Les modes propres se propagent à des vitesses différentes.
- 6 Il existe deux directions particulières, appelées axes optiques, selon lesquelles les deux modes se propagent à la même vitesse : le milieu apparaît alors comme isotrope.



# Testez-vous

- 11.1** Le terme biréfringent signifie :
- a. qu'il existe deux indices, un ordinaire et un extraordinaire
  - b. que le milieu est biaxe
  - c. qu'il existe deux indices différents « vus » par une onde plane se propageant sans déformation dans le milieu
- 11.2** Les lignes neutres d'une lame biréfringente sont :
- a. les axes du repère cristallographique
  - b. les axes du repère propre
  - c. les directions selon lesquelles sont dirigés les vecteurs induction électrique des modes se propageant sans déformation dans le milieu
- 11.3** Les lignes neutres ont la propriété d'être :
- a. perpendiculaires l'une par rapport à l'autre
  - b. confondues
  - c. dirigées aléatoirement
- 11.4** L'ellipsoïde des indices est :
- a. une surface à deux nappes
  - b. une surface possédant des axes portés par les axes du repère propre
  - c. une sphère
  - d. utile pour trouver les indices de chaque mode propre de propagation et les directions des polarisations des ondes planes dans un milieu anisotrope
- 11.5** Dans un milieu uniaxe, l'ellipsoïde des indices est :
- a. une sphère
  - b. de révolution autour de l'axe optique
  - c. une surface plane
- 11.6** Dans milieu optiquement uniaxe, la surface des indices est :
- a. une surface plane
  - b. une surface à deux nappes
  - c. constituée de l'union d'une sphère et d'un ellipsoïde
  - d. de révolution autour de l'axe optique
  - e. l'union d'un hyperboloïde et d'une sphère
  - f. constituée de deux nappes dont la disposition relative est quelconque



## 11.1 Méthode géométrique pour la détermination des modes propres de propagation dans un milieu diélectrique linéaire anisotrope

Cet exercice présente la généralisation de la remarque mentionnée au chapitre 10 au sujet de l'intersection de l'ellipsoïde des indices par un plan d'onde.

On rappelle que l'équation aux valeurs propres utile pour la détermination des modes propres de propagation d'une OPPM dans un diélectrique linéaire homogène anisotrope est :

$$[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \vec{u} = \frac{\vec{D}_0}{n^2}$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé selon la direction de propagation de l'onde,  $\vec{D}_0$  est l'amplitude du vecteur  $\vec{D}$ ,  $[\eta]$  est le tenseur d'imperméabilité,  $n$  est l'indice vu par l'onde.

1. Rappeler l'intérêt d'exprimer les calculs dans le repère des axes principaux. C'est dans ce repère que seront effectués tous les calculs de cet exercice.

2. Dans le repère propre, les composantes des vecteurs  $\vec{D}_0$  et  $\vec{u}$  étant  $\vec{D}_0(X, Y, Z)$  et  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , projeter l'équation aux valeurs propres selon les axes du repère principal. Exprimer le système obtenu sous la forme matricielle  $[M] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0$ .

3. Montrer que  $[M] = [P][\eta]$  où  $[P]$  est un projecteur dont on donnera les caractéristiques.

4. En déduire une méthode géométrique pour la détermination des modes propres de propagation dans le milieu considéré.

## 11.2 Analyse de l'équation de Fresnel, directions des axes optiques, cas particulier d'un milieu uniaxe

On considère un milieu diélectrique linéaire anisotrope caractérisé par ses indices propres  $n_1, n_2, n_3$  supposés être ordonnés selon  $n_1 > n_2 > n_3$ . On envisage la propagation d'une OPPM dans un tel milieu selon une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$  dans le repère des axes principaux. La recherche des modes de propagation implique la résolution de l'équation de Fresnel qui est une équation bicarrée :

$$n_1^2 \alpha^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + n_2^2 \beta^2 (n^2 - n_3^2)(n^2 - n_1^2) + n_3^2 \gamma^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0$$

où  $n$  est l'indice défini par  $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}$ ,  $\vec{k}$  étant le vecteur d'onde.

1. Soit  $N = n^2$ . Développer et ordonner l'équation de Fresnel selon les puissances décroissantes de  $N$ .

2. Récrire l'équation en fonction des deux paramètres  $\alpha, \beta$  et de  $n_1, n_2$ , et  $n_3$ .

3. Montrer que le discriminant de l'équation est positif. Que peut-on dire du signe des solutions notées  $N'$  et  $N''$  ?

4. Rappeler la caractéristique des axes optiques. Dédurre de ce qui précède qu'il existe deux axes optiques dont on déterminera les vecteurs directeurs  $\vec{u}_{\pm}$ .
5. Soit  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{u}_{+}$  avec l'axe principal Oz. Montrer que

$$\sin \theta = \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}}.$$

6. Dans le cas particulier d'un milieu uniaxe tel que  $n_1 = n_2$ , montrer que l'axe principal Oz est l'unique axe optique.

### 11.3 Surface des indices, cas particulier d'un milieu uniaxe

On considère la propagation d'une OPPM dans un milieu diélectrique linéaire anisotrope caractérisé par ses indices propres  $n_1, n_2, n_3$  supposés être ordonnés selon  $n_1 > n_2 > n_3$ . La direction de propagation de l'onde dans le repère propre est selon une direction donnée par le vecteur unitaire  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

On rappelle l'équation de Fresnel donnant les indices propres  $n$  « vus » par l'onde :

$$n_1^2 \alpha^2 (n^2 - n_2^2)(n^2 - n_3^2) + n_2^2 \beta^2 (n^2 - n_3^2)(n^2 - n_1^2) + n_3^2 \gamma^2 (n^2 - n_1^2)(n^2 - n_2^2) = 0$$

où  $n$  est l'indice défini par  $\vec{k} = n \frac{\omega}{c} \vec{u}$ ,  $\vec{k}$  étant le vecteur d'onde.

1. Rappeler le principe de construction de la surface des indices. Calculer son équation cartésienne dans le repère principal.
2. Déterminer les intersections de la surface des indices avec les plans de coordonnées.
3. Dans le cas particulier d'un milieu uniaxe dont l'axe optique est confondu avec l'axe propre Oz, montrer que la surface des indices correspond à l'union d'une sphère et d'un ellipsoïde dont on déterminera les caractéristiques.



**11.1** Réponse c ; **11.2** Réponse c ; **11.3** Réponse a ; **11.4** Réponses b et d ; **11.5** Réponse b ; **11.6** Réponses b, c et d.



## 11.1 Méthode géométrique pour la détermination des modes propres de propagation dans un milieu diélectrique linéaire anisotrope

1. L'intérêt de mener les calculs dans le repère des axes principaux vient du fait que c'est dans ce repère que le tenseur permittivité diélectrique est diagonal et par conséquent son inverse, le tenseur imperméabilité, également.

2. Dans le repère propre,  $[\eta] \vec{D}_0 \left( \frac{X}{n_1^2}, \frac{Y}{n_2^2}, \frac{Z}{n_3^2} \right)$  et  $\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0 = \frac{\alpha X}{n_1^2} + \frac{\beta Y}{n_2^2} + \frac{\gamma Z}{n_3^2}$

L'équation  $[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \vec{u} = \frac{\vec{D}_0}{n^2}$  se projette alors selon les axes propres :

$$\begin{cases} \frac{(1-\alpha^2)}{n_1^2} X - \frac{\alpha\beta}{n_2^2} Y - \frac{\alpha\gamma}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} X \\ -\frac{\alpha\beta}{n_1^2} X + \frac{(1-\beta^2)}{n_2^2} Y - \frac{\beta\gamma}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} Y \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_1^2} X - \frac{\gamma\beta}{n_2^2} Y + \frac{(1-\gamma^2)}{n_3^2} Z = \frac{1}{n^2} Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha^2)}{n_1^2} & -\frac{\alpha\beta}{n_2^2} & -\frac{\alpha\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\beta}{n_1^2} & \frac{(1-\beta^2)}{n_2^2} & -\frac{\beta\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_1^2} & -\frac{\gamma\beta}{n_2^2} & \frac{(1-\gamma^2)}{n_3^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X}{n^2} \\ \frac{Y}{n^2} \\ \frac{Z}{n^2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [M] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0$$

C'est une équation aux valeurs propres pour l'opérateur  $[M]$ .

3. Explicitons l'opérateur  $[M]$  dans le repère propre :

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha^2)}{n_1^2} & -\frac{\alpha\beta}{n_2^2} & -\frac{\alpha\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\beta}{n_1^2} & \frac{(1-\beta^2)}{n_2^2} & -\frac{\beta\gamma}{n_3^2} \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_1^2} & -\frac{\gamma\beta}{n_2^2} & \frac{(1-\gamma^2)}{n_3^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1-\beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\gamma\beta & 1-\gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3^2} \end{pmatrix} = [P] [\eta]$$

On vérifie alors que  $[P]^2 = [P]$  : l'opérateur  $[P]$  est donc un projecteur.

Cherchons le noyau de  $[P]$  défini par :  $Ker [P] = \{ \vec{v} \mid [P] \vec{v} = \vec{0} \}$ .

Soit  $\vec{v}(x, y, z) \in Ker [P] \Leftrightarrow [P] \vec{v} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - \alpha^2)x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z = 0 \\ -\alpha\beta x + (1 - \beta^2)y - \beta\gamma z = 0 \\ -\alpha\gamma x - \gamma\beta y + (1 - \gamma^2)z = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est nul : il se réduit à deux équations (non liées) :

$$\begin{cases} (1 - \alpha^2)x - \alpha\beta y - \alpha\gamma z = 0 \\ -\alpha\beta x + (1 - \beta^2)y - \beta\gamma z = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\gamma} z \\ y = \frac{\beta}{\gamma} z \end{cases}$$

d'où  $Ker [P] = \left\{ \vec{v} \left( \frac{\alpha}{\gamma} z, \frac{\beta}{\gamma} z, z \right) \right\}$ ,  $z$  étant quelconque. Prenons  $z = \gamma$   
 $\Rightarrow \vec{v}(\alpha, \beta, \gamma) = \vec{u}$  :  $[P]$  est donc une projection sur le plan perpendiculaire à  $\vec{u}$

**Remarque** On pourrait également montrer que l'ensemble des vecteurs invariants  $[P] \vec{v} = \vec{v}$  est le plan d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  c'est-à-dire le plan orthogonal à  $\vec{u}$ .

4. Comme  $[M] = [P][\eta]$ , l'opérateur  $[M]$  est la composition du projecteur  $[P]$  et de l'imperméabilité  $[\eta]$  : dans l'équation aux valeurs propres  $[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \vec{u} = \frac{\vec{D}_0}{n^2}$ , le terme  $[\eta] \vec{D}_0 - (\vec{u} \cdot [\eta] \vec{D}_0) \vec{u} = [P][\eta] \vec{D}_0$  est donc la projection de  $[\eta] \vec{D}_0$  sur un plan orthogonal à  $\vec{u}$ . L'équation aux valeurs propres se réécrit  $[P][\eta] \vec{D}_0 = \frac{1}{n^2} \vec{D}_0$ .

Rappelons maintenant que diagonaliser un opérateur auquel est associée une forme quadratique définie positive revient à trouver les axes propres et les valeurs propres de cet opérateur. Dans l'espace cartésien tridimensionnel, ceci revient à trouver les axes propres et les dimensions des axes de l'ellipsoïde associé à l'opérateur.

Dans notre exercice, l'opérateur étant  $[P][\eta]$ , le problème aux valeurs propres concerne la restriction de  $[\eta]$  à l'hyperplan perpendiculaire à  $\vec{u}$  (composition de  $[P]$  par  $[\eta]$ ). La résolution du problème aux valeurs propres consiste donc géométriquement à couper l'ellipsoïde des indices par un plan perpendiculaire à  $\vec{u}$  : la courbe obtenue est une ellipse dont les axes portent les directions des polarisations propres  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$  (et donc  $\vec{D}' \perp \vec{D}''$ ), les dimensions principales de l'ellipse sont les indices de réfraction propres  $n'$  et  $n''$ .

## 11.2 Analyse de l'équation de Fresnel. Directions des axes optiques. Cas particulier d'un milieu uniaxe

1. En développant et en ordonnant le polynôme associé à l'équation :

$$\begin{aligned} & (n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2) N^2 \\ & - [(n_2^2 + n_3^2) n_1^2 \alpha^2 + (n_1^2 + n_3^2) n_2^2 \beta^2 + (n_1^2 + n_2^2) n_3^2 \gamma^2] N + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow f(N) = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels. La nature des solutions est déterminée par le signe du discriminant associé.

2. Comme le vecteur  $\vec{u}$  est unitaire, les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont liés par  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  soit  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$ . En reportant cette relation dans  $f(N) = 0$  :

$$\begin{aligned} & [(n_1^2 - n_3^2) \alpha^2 + (n_2^2 - n_3^2) \beta^2 + n_3^2] N^2 \\ & - [\alpha^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2) + \beta^2 n_1^2 (n_2^2 - n_3^2) + n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)] N + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \end{aligned}$$

3. Le discriminant  $\delta$  de l'équation est

$$\begin{aligned} \delta &= [\alpha^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2) + \beta^2 n_1^2 (n_2^2 - n_3^2) + n_3^2 (n_1^2 + n_2^2)]^2 \\ & - 4 [(n_1^2 - n_3^2) \alpha^2 + (n_2^2 - n_3^2) \beta^2 + n_3^2] n_1^2 n_2^2 n_3^2 \end{aligned}$$

Il se développe selon :

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha^4 n_2^4 (n_1^2 - n_3^2)^2 + \beta^4 n_1^4 (n_2^2 - n_3^2)^2 + n_3^4 (n_1^2 + n_2^2)^2 \\ & + 2\alpha^2 \beta^2 n_1^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_3^2) + 2\alpha^2 n_2^2 n_3^2 (n_1^2 - n_3^2)(n_1^2 + n_2^2) \\ & + 2\beta^2 n_1^2 n_3^2 (n_2^2 - n_3^2)(n_1^2 + n_2^2) - 4n_1^2 n_2^2 n_3^2 (n_1^2 - n_3^2) \alpha^2 \\ & - 4n_1^2 n_2^2 n_3^2 (n_2^2 - n_3^2) \beta^2 - 4n_1^2 n_2^2 n_3^4 \end{aligned}$$

En factorisant d'une part les termes en  $\alpha^2$ , ceux en  $\beta^2$  d'autre part :

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha^4 n_2^4 (n_1^2 - n_3^2)^2 + \beta^4 n_1^4 (n_2^2 - n_3^2)^2 + n_3^4 (n_1^2 - n_2^2)^2 \\ & + 2\alpha^2 \beta^2 n_1^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_3^2) - 2\alpha^2 n_2^2 n_3^2 (n_1^2 - n_3^2)(n_1^2 - n_2^2) \\ & + 2\beta^2 n_1^2 n_3^2 (n_2^2 - n_3^2)(n_1^2 - n_2^2) \\ & = [\alpha^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2) + \beta^2 n_1^2 (n_2^2 - n_3^2) - n_3^2 (n_1^2 - n_2^2)]^2 + 4\beta^2 n_1^2 n_3^2 (n_2^2 - n_3^2)(n_1^2 - n_2^2) \end{aligned}$$

Comme  $n_1 > n_2 > n_3$ , le discriminant est positif strict. Les solutions  $N'$  et  $N''$  sont donc réelles (les coefficients du polynôme sont réels). De plus, la simple lecture de l'équation nous indique que  $N' + N'' > 0$  et  $N' \cdot N'' > 0$  : les solutions  $N'$  et  $N''$  sont positives.

Les graphes suivants représentent les deux fonctions  $f(N)$  et  $f(n)$ .

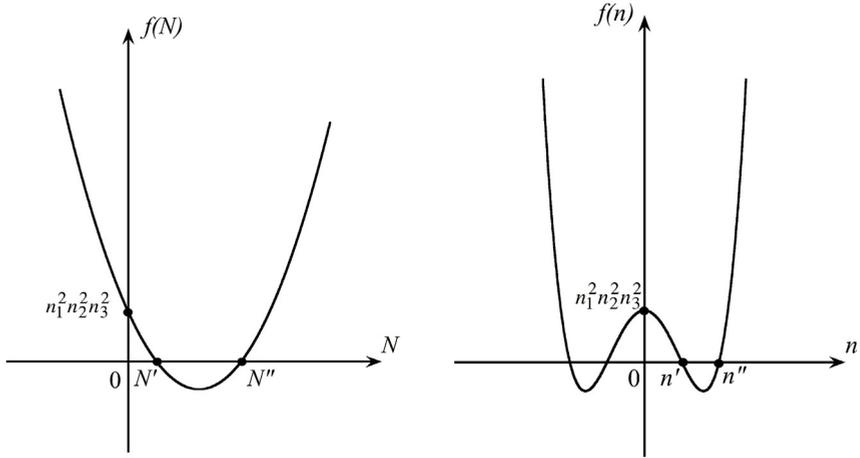


Figure 11.5

4. Les axes optiques du milieu sont les directions de propagation pour lesquelles le milieu apparaît pour l'onde comme un milieu isotrope. Dans cette situation, l'équation de Fresnel admet une solution double :  $\delta = 0$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha^2 n_2^2 (n_1^2 - n_3^2) + \beta^2 n_1^2 (n_2^2 - n_3^2) - n_3^2 (n_1^2 - n_2^2) = 0 \\ \beta^2 n_1^2 n_3^2 (n_2^2 - n_3^2) (n_1^2 - n_2^2) = 0 \end{cases} \quad \forall n_1, n_2, n_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha^2 = \frac{n_3^2 (n_1^2 - n_2^2)}{n_2^2 (n_1^2 - n_3^2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}} \\ \beta = 0 \\ \gamma = \pm \sqrt{1 - \alpha^2} = \mp \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2}} \end{cases}$$

Il existe donc deux axes optiques  $\Delta$  et  $\Delta'$  définis par les vecteurs  $\vec{u}_{\pm}$  dont les expressions sont :

$$\vec{u}_{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}} \\ 0 \\ \mp \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2}} \end{pmatrix}$$

5.  $\theta$  étant l'angle de  $\vec{u}_+$  avec l'axe principal Oz dont  $\vec{u}_z$  est vecteur directeur :

$$\sin \theta = \frac{|\vec{u}_+ \wedge \vec{u}_z|}{|\vec{u}_+| |\vec{u}_z|} = \frac{n_3}{n_2} \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_3^2}}$$

Il est évident que  $\vec{u}_-$  forme avec l'axe principal Oz l'angle  $-\theta$

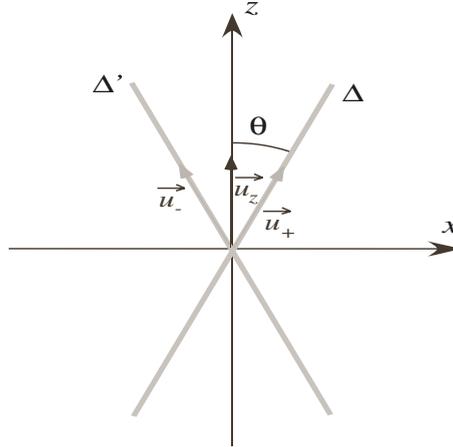


Figure 11.6

6. Pour un milieu uniaxe tel que  $n_1 = n_2$ , l'expression précédente donne  $\sin \theta = 0$  : les deux axes optiques  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont confondus avec l'axe principal Oz qui est donc le seul axe optique.

Ce résultat est prévisible puisque le milieu est tel  $n_1 = n_2$ . Ainsi, pour une onde se propageant selon Oz, le milieu apparaît comme étant isotrope d'indice  $n_1 = n_2$ , et il y a une infinité de modes propres.

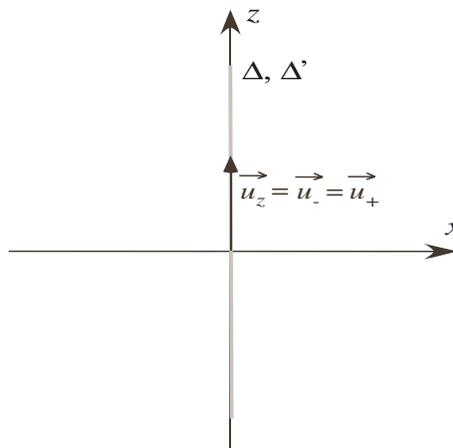


Figure 11.7

### 11.3 Surface des indices. Cas particulier d'un milieu uniaxe.

1. Les solutions de l'équation de Fresnel dépendent des cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  de la direction de propagation et des constantes optiques du milieu. Pour visualiser la dépendance de ces solutions vis-à-vis de ces paramètres, il est judicieux d'introduire une surface indicatrice appelée surface des indices qui est le lieu des points M tels que  $\overline{OM} = n\vec{u}$ . On porte donc selon la direction de  $\vec{u}$ , une longueur égale à  $n$ . Et comme l'équation de Fresnel admet deux solutions positives  $n'$  et  $n''$ , on portera sur la direction de  $\vec{u}$  les deux longueurs correspondantes, on construira ainsi deux points  $M'$  et  $M''$ , ceci pour toutes les directions de  $\vec{u}$ .

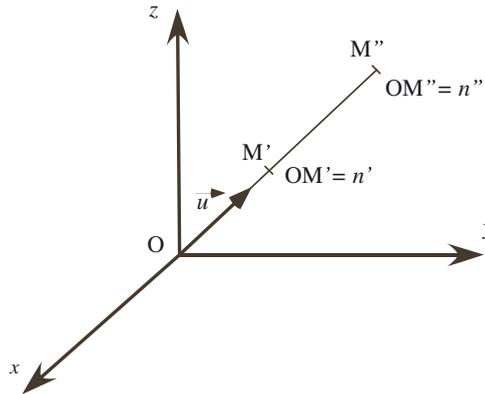


Figure 11.8 – Principe de construction de la surface des indices.

En développant et en ordonnant le polynôme associé à l'équation rappelée dans l'énoncé :

$$(n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2) n^4 - [(n_2^2 + n_3^2) n_1^2 \alpha^2 + (n_1^2 + n_3^2) n_2^2 \beta^2 + (n_1^2 + n_2^2) n_3^2 \gamma^2] n^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0$$

Dans le repère principal, les coordonnées de M sont  $M(x = n\alpha, y = n\beta, z = n\gamma)$  et elles satisfont l'équation de Fresnel c'est-à-dire l'équation précédente que nous réécrivons selon :

$$\begin{aligned} & (n_1^2 \alpha^2 n^2 + n_2^2 \beta^2 n^2 + n_3^2 \gamma^2 n^2) n^2 \\ & - [(n_2^2 + n_3^2) n_1^2 \alpha^2 n^2 + (n_1^2 + n_3^2) n_2^2 \beta^2 n^2 + (n_1^2 + n_2^2) n_3^2 \gamma^2 n^2] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 + n_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & - [(n_2^2 + n_3^2) n_1^2 x^2 + (n_1^2 + n_3^2) n_2^2 y^2 + (n_1^2 + n_2^2) n_3^2 z^2] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & f(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

L'équation  $f(x, y, z) = 0$  est l'équation cartésienne de la surface des indices dans le repère propre.

2. Nous cherchons les intersections de la surface des indices avec les plans  $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ .

**Intersection avec le plan (Oxy).** Le plan considéré ayant pour équation  $z = 0$ , le système d'équations à résoudre pour trouver l'intersection de la surface des indices avec ce plan est :

$$\begin{cases} (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 + n_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [(n_2^2 + n_3^2)n_1^2 x^2 + (n_1^2 + n_3^2)n_2^2 y^2 + (n_1^2 + n_2^2)n_3^2 z^2] \\ \quad + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{soit } (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2)(x^2 + y^2) - [(n_2^2 + n_3^2)n_1^2 x^2 + (n_1^2 + n_3^2)n_2^2 y^2] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ & \Rightarrow (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2)(x^2 + y^2) - n_1^2 n_2^2 x^2 - n_1^2 n_3^2 x^2 - n_1^2 n_2^2 y^2 - n_2^2 n_3^2 y^2 + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ & \Rightarrow (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2)(x^2 + y^2) - n_1^2 n_2^2 (x^2 + y^2) - n_3^2 (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2) + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0 \\ & \Rightarrow (n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2)(x^2 + y^2 - n_3^2) - n_1^2 n_2^2 (x^2 + y^2 - n_3^2) = 0 \\ & \Rightarrow (x^2 + y^2 - n_3^2)(n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 - n_1^2 n_2^2) = 0 \\ & \Rightarrow x^2 + y^2 = n_3^2 \quad \text{ou} \quad n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 = n_1^2 n_2^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{n_2^2} + \frac{y^2}{n_1^2} = 1 \end{aligned}$$

L'ensemble des points recherchés est donc constitué d'un cercle de rayon  $n_3$ , de centre O et d'une ellipse de centre O, dont les axes coïncident avec Ox et Oy.

**Intersection avec le plan (Oyz).** Les calculs sont analogues aux précédents. Les équations des courbes qui coupent le plan (Oyz) sont :

$$y^2 + z^2 = n_1^2 \quad \text{ou} \quad n_2^2 y^2 + n_3^2 z^2 = n_2^2 n_3^2 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_2^2} = 1$$

L'ensemble recherché est donc constitué d'un cercle de rayon  $n_1$ , de centre O et d'une ellipse de centre O, dont les axes coïncident avec Oy et Oz.

**Intersection avec le plan (Oxz).** De même, les équations des courbes intersection sont :

$$\text{soit } x^2 + z^2 = n_2^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_1^2} = 1$$

L'ensemble recherché est donc constitué d'un cercle de rayon  $n_2$ , de centre O et d'une ellipse de centre O, dont les axes coïncident avec Ox et Oz.

La figure 11.9 regroupe les résultats, elle suppose que les trois indices s'ordonnent selon  $n_1 > n_2 > n_3$ .

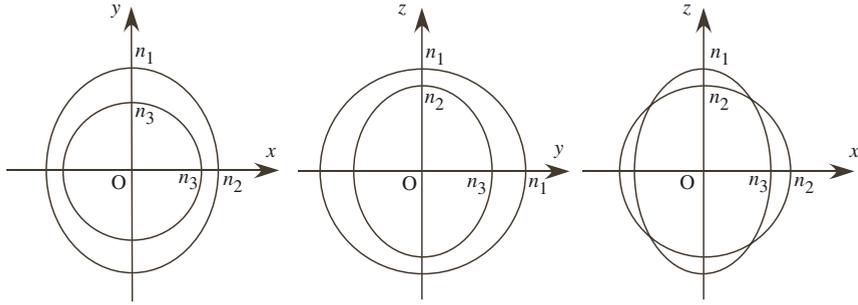


Figure 11.9

**Remarque** On peut se dispenser des calculs précédents au sujet des intersections avec les deux derniers plans en remarquant que les résultats se déduisent du premier par permutations circulaires sur  $x, y, z$  et  $n_1, n_2, n_3$ .

3. Si le milieu est uniaxe avec l'axe optique selon  $Oz$ ,  $n_1 = n_2 \neq n_3$  et l'équation de la surface des indices

$$(n_1^2 x^2 + n_2^2 y^2 + n_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [(n_2^2 + n_3^2)n_1^2 x^2 + (n_1^2 + n_3^2)n_2^2 y^2 + (n_1^2 + n_2^2)n_3^2 z^2] + n_1^2 n_2^2 n_3^2 = 0$$

devient :

$$\begin{aligned} & (n_1^2(x^2 + y^2) + n_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [n_1^2(n_1^2 + n_3^2)(x^2 + y^2) + 2n_1^2 n_3^2 z^2] \\ & \quad + n_1^4 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & n_1^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad + n_3^2 z^2(x^2 + y^2 + z^2) - n_1^2(n_1^2 + n_3^2)(x^2 + y^2) - 2n_1^2 n_3^2 z^2 + n_1^4 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & n_1^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad + n_3^2 z^2(x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2) - n_1^2(n_1^2 + n_3^2)(x^2 + y^2) - n_1^2 n_3^2 z^2 + n_1^4 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & n_1^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2 - n_3^2) + n_3^2 z^2(x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2) - n_1^2 n_3^2 z^2 \\ & \quad + n_1^4 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2)(n_1^2(x^2 + y^2) + n_3^2 z^2) - n_1^2 n_3^2(x^2 + y^2) - n_1^2 n_3^2 z^2 \\ & \quad + n_1^4 n_3^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2)(n_1^2(x^2 + y^2) + n_3^2 z^2) - n_1^2 n_3^2(x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2)(n_1^2(x^2 + y^2) + n_3^2 z^2 - n_1^2 n_3^2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 = n_1^2 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{n_3^2} + \frac{z^2}{n_1^2} = 1 \end{aligned}$$

La surface des indices est donc constituée de l'union d'une sphère centrée en O, de rayon  $n_1$  et d'un ellipsoïde centré en O, dont les axes coïncident avec ceux du repère propre et d'axe de révolution Oz c'est-à-dire l'axe optique du milieu.

Les deux surfaces sont en contact aux points  $(0, 0, \pm n_1)$  de l'axe optique (figure 11.10).

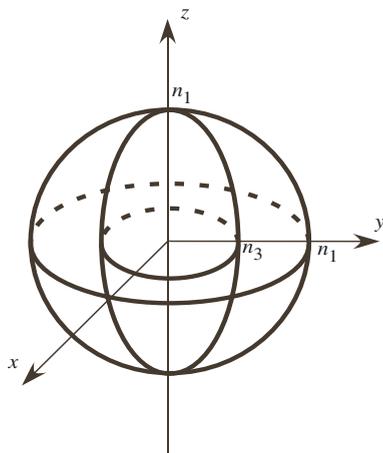
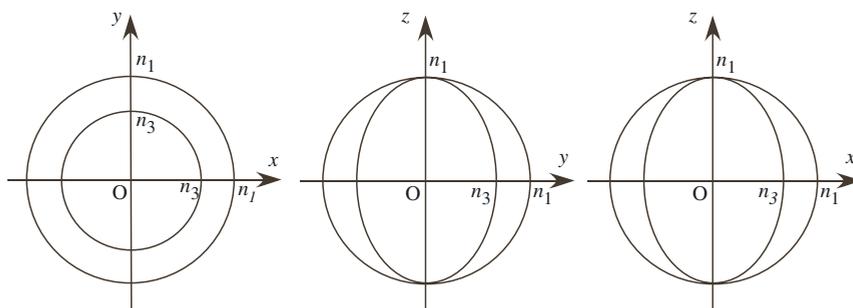


Figure 11.10

Les figures suivantes présentent les intersections de ces surfaces par les plans de coordonnées, elles supposent que les indices s'ordonnent selon  $n_1 = n_2 > n_3$ .



# Faisceaux lumineux dans les diélectriques anisotropes, double réfraction

## Introduction

En 1669, un cristal d'un genre nouveau (la calcite) montra un comportement inattendu : deux images d'un objet observé par transmission furent mises en évidence. De plus, ces images présentaient des polarisations rectilignes et orthogonales l'une par rapport à l'autre. Ce type d'observation est possible avec d'autres cristaux tels que le quartz : un morceau épais placé sur un texte provoque un dédoublement du texte. Le cristal fournit ainsi deux rayons à partir d'un seul rayon incident.

## Objectifs

- Étudier** la propagation des faisceaux lumineux dans un diélectrique anisotrope.
- Présenter** les méthodes de construction des trajets des rayons.
- Donner** des applications des dispositifs optiques employant des cristaux anisotropes uniaxes.

## Plan

- 1 Introduction
- 2 Direction des faisceaux lumineux
- 3 Surface des vitesses radiales
- 4 Cas des milieux uniaxes
- 5 Double réfraction
- 6 Applications
- 7 Construction des rayons réfléchis

Dans le chapitre 11 nous avons souligné une particularité des milieux diélectriques anisotropes : la direction du vecteur de Poynting ne coïncide pas avec la direction de propagation de l'onde. Ce chapitre 12 a pour but de préciser les lois de propagation des faisceaux lumineux dans ces milieux et d'énoncer les règles de construction des rayons et des vecteurs d'onde réfractés. Les effets de double réfraction seront ainsi abordés et les applications principales évoquées en ce qui concerne les dispositifs destinés à modifier l'état de polarisation d'une onde.

# 1 Direction des faisceaux lumineux

Rappelons que dans un diélectrique, l'énergie électromagnétique est transportée le long de la direction du vecteur de Poynting  $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  qui est donc perpendiculaire à  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ . Comme le champ électrique n'est généralement pas transverse, le vecteur de Poynting n'est pas dirigé selon le vecteur d'onde dans un milieu anisotrope : l'énergie lumineuse ne s'écoule pas dans la direction de propagation de l'onde.

Nous avons établi au chapitre 11 la relation  $\vec{D} = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u})$  montrant ainsi que le champ  $\vec{D}$  appartient au plan  $(\vec{u}, \vec{E})$ .

De façon analogue, à partir d'une des équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$$

qui reportée dans  $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$  donne :

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0 \omega} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{k}{\mu_0 \omega} (E^2 \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{E})$$

On montre ainsi que le vecteur de Poynting  $\vec{\pi}$  appartient au plan  $(\vec{u}, \vec{E})$ .

Rappelons le schéma des dispositions relatives des champs et du vecteur de Poynting (figure 12.1).

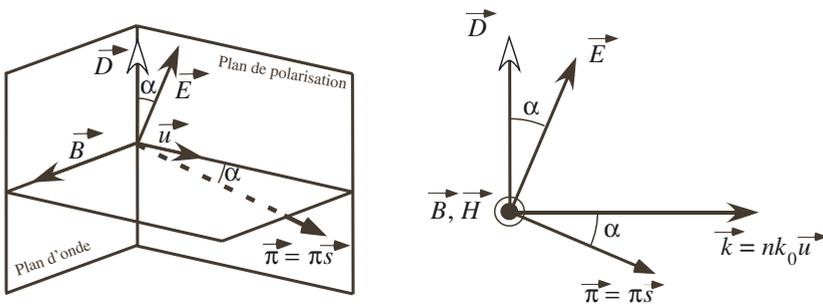


Figure 12.1– Dispositions des champs et du vecteur de Poynting dans un diélectrique anisotrope.

De plus, nous admettrons que le vecteur de Poynting est normal au plan tangent à la surface des indices. On retrouve ainsi que  $\vec{\pi}$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$  sont parallèles dans un milieu isotrope car la surface des indices est une sphère.

## 2 Surface des vitesses radiales

Reprenons la relation vue au chapitre 11 entre le champ électrique et l'induction électrique :

$$\vec{D} = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}] = \frac{n^2}{\mu_0 c^2} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}] = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}]$$

où  $v_\varphi$  est la vitesse de phase.

Nous cherchons dans un premier temps la relation inverse de l'expression ci-dessus.

On voit sur la figure 12.2 que la composante orthogonale de  $\vec{D}$  est  $\vec{D}_\perp = \vec{D} - (\vec{s} \cdot \vec{D})\vec{s}$  avec  $\vec{s}$  un vecteur unitaire dirigé selon  $\vec{\pi}$ . Le vecteur  $\vec{D}_\perp$  est aligné avec  $\vec{E}$ ,  $D_\perp = D \cos \alpha$ .

Nous avons également  $\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} \vec{E}_\perp$  avec

$$E_\perp = E \cos \alpha.$$

On en déduit que :

$$D = \frac{E}{\mu_0 v_r^2 \cos \alpha} \text{ soit } D_\perp = \frac{E}{\mu_0 v_r^2}$$

$$\text{et donc } \vec{E} = \mu_0 v_r^2 [\vec{D} - (\vec{s} \cdot \vec{D})\vec{s}]$$

où  $v_r = \frac{v_\varphi}{\cos \alpha}$  est appelée vitesse radiale, c'est la vitesse de propagation de l'énergie le long du rayon lumineux.

La figure 12.3 illustre que :

$$v_\varphi = \frac{OO'}{\Delta t}, v_r = \frac{OM}{\Delta t}, OO' = OM \cos \alpha \Rightarrow v_\varphi = v_r \cos \alpha$$

En comparant la relation  $\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}]$  avec son inverse

$\vec{E} = \mu_0 v_r^2 [\vec{D} - (\vec{s} \cdot \vec{D})\vec{s}]$ , on remarque que le passage de l'une à l'autre s'effectue par les substitutions :  $\vec{E} \leftrightarrow \mu_0 \vec{D}$  ;  $\vec{u} \leftrightarrow \vec{s}$  ;  $v_\varphi \leftrightarrow 1/v_r$ .

On peut donc définir une surface des vitesses radiales (également appelée surface d'onde) à partir de l'équation de Fresnel. Dans le repère principal, les composantes de  $\vec{s}$  étant notées  $\vec{s}(\alpha', \beta', \gamma')$  et les vitesses radiales principales (analogues des indices principaux) étant  $v_{1,2,3} = \frac{c}{n_{1,2,3}}$ , l'équation analogue à l'équation de Fresnel pour les vitesses radiales s'écrit :

$$\frac{v_1^2 \alpha'^2}{v_r^2 - v_1^2} + \frac{v_2^2 \beta'^2}{v_r^2 - v_2^2} + \frac{v_3^2 \gamma'^2}{v_r^2 - v_3^2} = 0$$

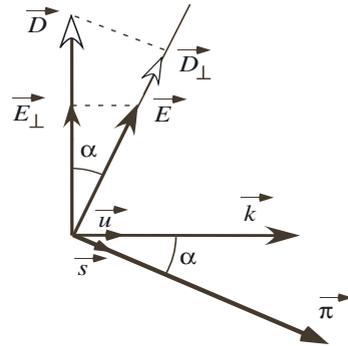


Figure 12.2 – Projections des vecteurs induction et champ électrique.

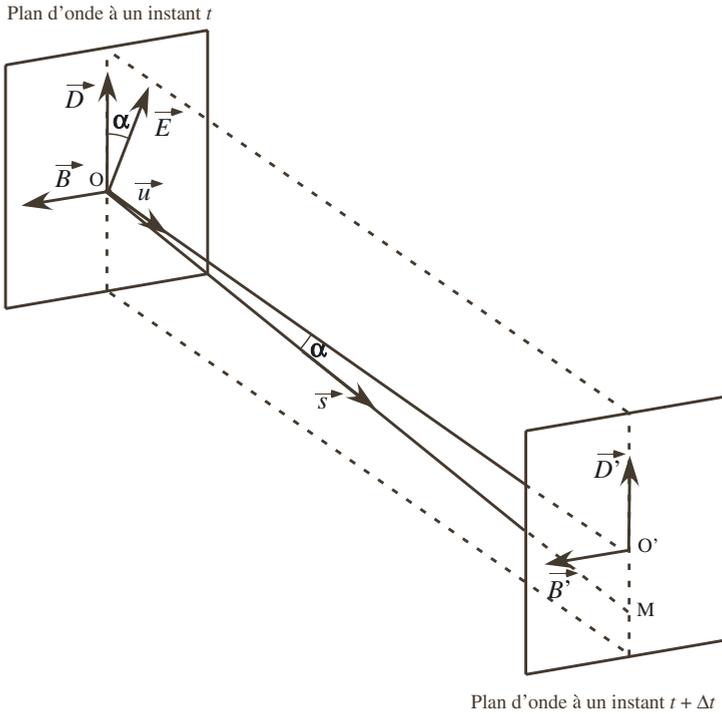


Figure 12.3 – Illustration de la relation entre la vitesse de phase et la vitesse radiale.

Cette équation permet de trouver la vitesse radiale  $v_r$  avec laquelle se propage le rayon lumineux en fonction des cosinus directeur ( $\alpha', \beta', \gamma'$ ) des rayons. On a donc deux solutions réelles pour  $v_r$ .

L'équation de la surface des vitesses radiales s'obtient en construisant le lieu des points  $M(x, y, z)$  tels que  $\overline{OM} = v_r \vec{s} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v_r \alpha' \\ y = v_r \beta' \\ z = v_r \gamma' \end{cases}$ .

Cette équation est analogue à l'équation de la surface des indices, elle a pour expression :

$$g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (v_1^2 x^2 + v_2^2 y^2 + v_3^2 z^2)(x^2 + y^2 + z^2) - [v_1^2 x^2 (v_2^2 + v_3^2) + v_2^2 y^2 (v_1^2 + v_3^2) + v_3^2 z^2 (v_1^2 + v_2^2)] + v_1^2 v_2^2 v_3^2 = 0$$

Comme c'est le cas de la surface des indices, il s'agit d'une surface à deux nappes dont les sections par les plans de coordonnées sont composées d'un cercle et d'une ellipse. Toute l'étude faite pour la surface des indices peut être reprise. On voit apparaître clairement la notion de biréfringence avec deux solutions  $v'$  et  $v''$  pour la vitesse radiale, ceci pour chaque direction de  $\vec{s}$ . Les deux nappes se coupent en quatre points définissant deux directions : celles des axes optiques.

La figure 12.4 donne l'allure de la surface des vitesses radiales en supposant que les vitesses principales s'ordonnent selon  $v_1 < v_2 < v_3$  afin d'être consistant avec les représentations du chapitre précédent qui supposaient  $n_1 > n_2 > n_3$ .

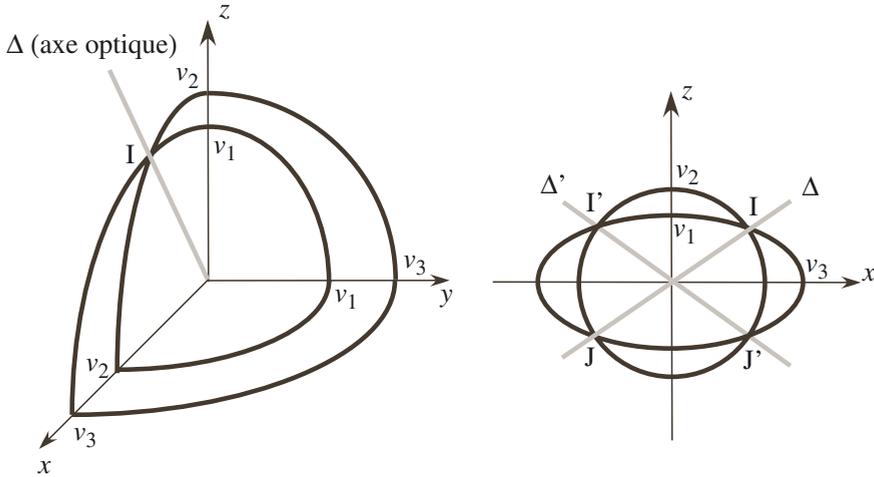


Figure 12.4 – Surface des vitesses radiales et sa section par le plan de coordonnées  $(Oxz)$ .

Un rayon se propageant selon un axe optique possède une seule vitesse de propagation ( $v' = v''$ ).

Cette approche en termes de surface des vitesses radiales est utile pour le tracé des rayons.

Nous admettons les relations suivantes entre surface des indices et surface des vitesses radiales :

- Le rayon lumineux est perpendiculaire à la surface des indices. Autrement dit,  $\vec{\pi}$  est normal au plan tangent à la surface des indices en  $\vec{k}$ ,
- La normale à l'onde est perpendiculaire à la surface des vitesses radiales.

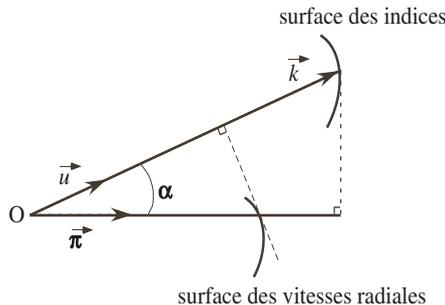


Figure 12.5 – Relation entre surface des indices et surface des vitesses radiales.

### 3 Cas des milieux uniaxes

Rappelons qu'un milieu uniaxe est caractérisé par deux indices principaux de réfraction égaux, différents du troisième : nous choisissons  $n_1 = n_2 \neq n_3$ . L'axe principal 3 (axe  $z$ ) s'appelle l'axe optique, l'indice de réfraction associé est l'indice de réfraction principal extraordinaire noté  $n_e$ . La valeur commune des deux autres indices de réfraction est l'indice de réfraction principal ordinaire noté  $n_o$ .

Le tenseur diélectrique d'un milieu uniaxe d'axe optique  $Oz$  s'écrit, dans le repère principal :

$$[\epsilon_r] = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$$

La représentation géométrique du tenseur diélectrique est un ellipsoïde d'axe de révolution confondu avec l'axe optique.

Les modes de propagation se déterminent en coupant l'ellipsoïde des indices par un plan orthogonal à la direction de propagation  $\vec{u}$  et passant par l'origine  $O$  (figure 12.6).

On trouve ainsi :

- un **mode propre ordinaire** associé à l'indice principal ordinaire  $n_o$ , le vecteur d'onde est  $\vec{k}_{(o)} = n_o k_0 \vec{u} = n_o \frac{\omega}{c} \vec{u}$ . Le

champ  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$  de ce mode est aligné selon un des axes de l'ellipse, il est perpendiculaire au plan de la figure 12.6, dans le plan  $(Oxy)$  perpendiculaire au plan formé par  $\vec{k}_{(o)}$  et l'axe optique.

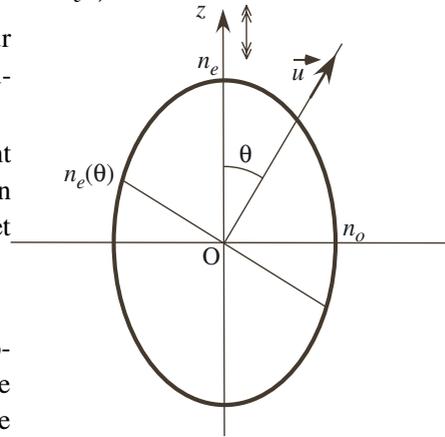


Figure 12.6 – Intersection de l'ellipsoïde des indices par un plan normal à la direction de propagation de l'onde.

Le champ électrique  $\vec{E}_{(o)}(\vec{r}, t)$  est dans ce cas aligné avec  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$  :

$$\begin{aligned} \vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}_{(o)}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{(o)x} \\ E_{(o)y} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 E_{(o)x} \\ n_o^2 E_{(o)y} \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 n_o^2 \vec{E}_{(o)}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

- un **mode propre extraordinaire** associé à l'indice de réfraction propre extraordinaire  $n_e(\theta)$ , à ne pas confondre avec l'indice de réfraction principal extraordinaire, et

dont l'expression est :

$$\frac{1}{(n_e(\theta))^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}.$$

Le vecteur d'onde est  $\vec{k}_{(e)} = n_e(\theta)k_0\vec{u}$ . Le champ  $\vec{D}_{(e)}(\vec{r}, t)$  de ce mode est perpendiculaire à  $\vec{k}_{(e)}$  et à  $\vec{D}_{(o)}(\vec{r}, t)$ , il est dans le plan formé par  $\vec{k}_{(e)}$  et l'axe optique. On construira toujours la direction de  $\vec{D}_{(e)}(\vec{r}, t)$  comme étant la projection de l'axe optique sur un plan d'onde extraordinaire.

Le champ électrique  $\vec{E}_{(e)}(\vec{r}, t)$  s'obtient à partir de  $\vec{D}_{(e)}(\vec{r}, t)$  avec  $\varepsilon_0\vec{E}_{(e)}(\vec{r}, t) = [\eta]\vec{D}_{(e)}(\vec{r}, t)$ .

Ces résultats sont reportés sur la figure 12.7 illustrant les dispositions relatives de l'axe optique, des champs et des vecteurs d'onde.

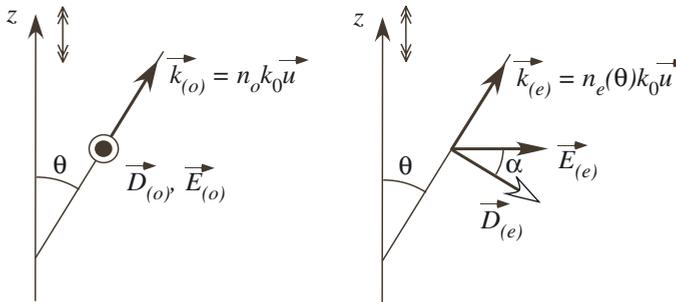


Figure 12.7 – Champs électrique et induction du mode ordinaire et du mode extraordinaire.

La surface des indices d'un milieu uniaxe est l'union (voir exercice 11.3) :

- d'une **sphère** de rayon  $n_o$  (**nappe ordinaire**),
- et d'un **ellipsoïde** de révolution (**nappe extraordinaire**) autour de l'axe optique. Les dimensions des axes de cet ellipsoïde sont  $n_e$  perpendiculairement à l'axe optique et  $n_o$  selon cet axe. Les deux nappes sont tangentes l'une à l'autre selon l'axe optique.

De façon analogue, la surface des vitesses radiales d'un milieu uniaxe est une surface à deux nappes constituée d'une sphère de rayon  $v_o = c/n_o$  et d'un ellipsoïde d'axe de révolution confondu avec l'axe optique et dont les dimensions des axes sont  $v_o = c/n_o$  et  $v_e = c/n_e$ . Les dispositions relatives des deux nappes dépendent du signe de  $n_o - n_e$  (distinction milieu positif, milieu négatif) ainsi que l'illustre la figure 12.8.

Le trajet d'un rayon lumineux s'obtient à l'aide du résultat admis à la fin du paragraphe précédent au sujet de la surface des indices et illustré par la figure 12.5.

La **nappe ordinaire** de la surface des indices étant une sphère, le rayon ordinaire dirigé selon le vecteur de Poynting  $\vec{\pi}_{(o)}$ , est parallèle à  $\vec{k}_{(o)} = n_o k_0 \vec{u}$  : l'énergie s'écoule dans la direction de propagation de l'onde comme dans un milieu isotrope (figure 12.9).

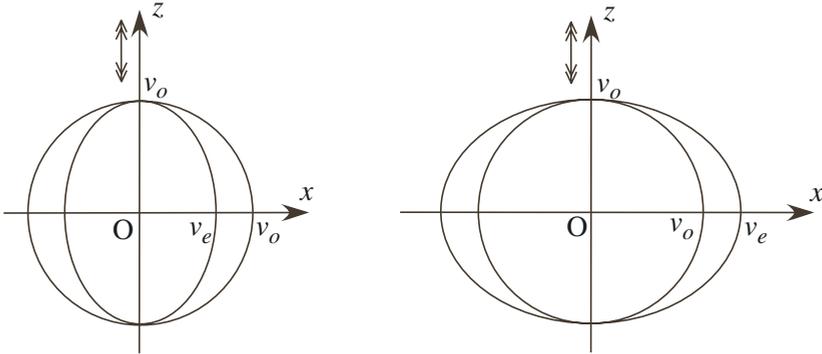


Figure 12.8 – Coupe de la surface des vitesses radiales d’un milieu uniaxe par un plan contenant l’axe optique (à droite milieu positif, à gauche milieu négatif).

La **nappe extraordinaire** de la surface des indices étant un ellipsoïde, le rayon extraordinaire dirigé selon le vecteur de Poynting  $\vec{\pi}_{(e)}$ , n’est pas parallèle à  $\vec{k}_{(e)}$  : l’énergie s’écoule dans une direction qui n’est pas celle de propagation de l’onde (figure 12.9).

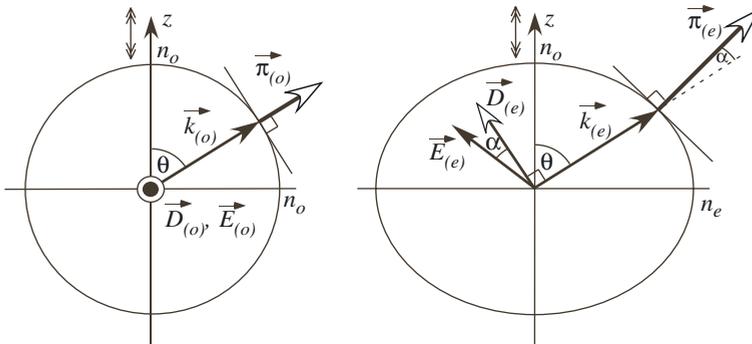


Figure 12.9 – Vecteurs de Poynting ordinaire et extraordinaire dans un milieu uniaxe.

## 4 Double réfraction

Soit un faisceau lumineux incident sur un dioptré plan qui délimite le milieu d’incidence supposé isotrope d’un milieu anisotrope. De façon générale, ce sont les conditions aux limites appliquées (au niveau d’un dioptré) au champ électromagnétique qui permettent de trouver les lois de la réflexion et de la réfraction. En particulier, il y a conservation de la composante tangentielle des vecteurs d’onde. Cette condition permet d’établir la relation de Snell-Descartes à la traversée d’un dioptré séparant deux milieux isotropes et dans ce cas les rayons sont confondus avec les vecteurs d’onde. Comme ce n’est plus le cas dans les milieux anisotropes, les lois de Snell-Descartes de la réfraction et de la réflexion ne sont en général plus valables pour les faisceaux lumineux.

Deux méthodes sont utiles pour résoudre le problème :

- la **construction de Descartes** qui fait appel à la surface des indices. Elle tient compte des vecteurs d'onde et permet d'en déduire les rayons lumineux à l'aide du lien mentionné à la fin du deuxième paragraphe de ce chapitre et illustré par la figure 12.5 ;
- la **construction d'Huygens** qui consiste à construire les plans d'onde à partir de la surface des vitesses radiales.

Généralement, pour les milieux uniaxes ou biaxes, les rayons lumineux sortent du plan d'incidence. Pour cette raison, nous nous limiterons par la suite aux milieux uniaxes et à deux configurations particulières pour lesquelles les rayons restent dans le plan d'incidence : lorsque l'axe optique est dans le plan d'incidence ou lorsque l'axe optique est perpendiculaire au plan d'incidence.

#### 4.1 Construction des vecteurs d'onde réfractés : méthode de Descartes

Le tracé des vecteurs d'onde réfractés est utile lorsque le déphasage entre les ondes réfractées est recherché.

La méthode s'appuie sur la surface des indices et la conservation de la composante tangentielle du vecteur d'onde. Comme le milieu anisotrope admet deux modes propres de propagation, on trouve deux ondes réfractées selon des directions distinctes : c'est la double réfraction.

Soient  $\vec{k}_i$  le vecteur d'onde incident,  $\vec{k}'$  et  $\vec{k}''$  les vecteurs d'onde des deux modes dans le milieu anisotrope,  $i$  l'angle d'incidence et  $\theta$  celui de réfraction. La conservation de la composante tangentielle  $k_i^T$  et  $k_t^T$  des vecteurs d'onde incident et réfractés se traduit par :

$k_i^T = k_t^T \Leftrightarrow k_0 \sin i = k(\theta) \sin \theta \Leftrightarrow n_0 \sin i = n(\theta) \sin \theta$  où  $n_0$  est l'indice du milieu incident.

Il existe deux solutions possibles  $n'$  et  $n''$  pour  $n(\theta)$  puisque deux modes de propagation sont possibles dans le milieu anisotrope.

Pour résoudre l'équation  $n_0 \sin i = n(\theta) \sin \theta$ , il faut tracer l'intersection de la surface des indices avec le plan d'incidence et déterminer l'angle  $\theta$  vérifiant cette relation. On trouve ainsi deux points  $M'$  et  $M''$  intersections avec les nappes de la surface des indices, ces points correspondent aux deux solutions  $n'$  et  $n''$  associées aux deux modes propres de propagation. À ces ondes correspondent deux rayons réfractés qui s'obtiennent en traçant respectivement chaque plan perpendiculaire à  $\vec{k}'$  et  $\vec{k}''$ . L'exemple qui suit illustre la méthode.

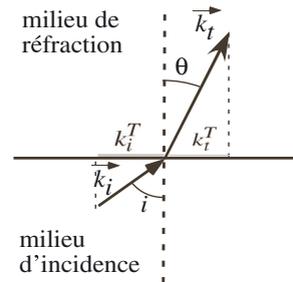


Figure 12.10 – Continuité de la composante tangentielle du vecteur d'onde lors de la réfraction d'une onde.

**Exemple**

Le milieu est supposé uniaxe positif d'axe optique contenu dans le plan d'incidence.

La surface des indices du milieu d'incidence (isotrope) est une sphère de rayon  $n_0$ , sa section par le plan d'incidence est un cercle de même rayon.

La surface des indices du milieu anisotrope uniaxe est constituée d'une sphère de rayon égal à l'indice ordinaire  $n_o$  et d'un ellipsoïde dont l'axe de révolution est l'axe optique, les deux nappes sont en contact au niveau de l'axe optique. Nous supposons que les indices sont ordonnés selon  $n_0 < n_o < n_e$ .

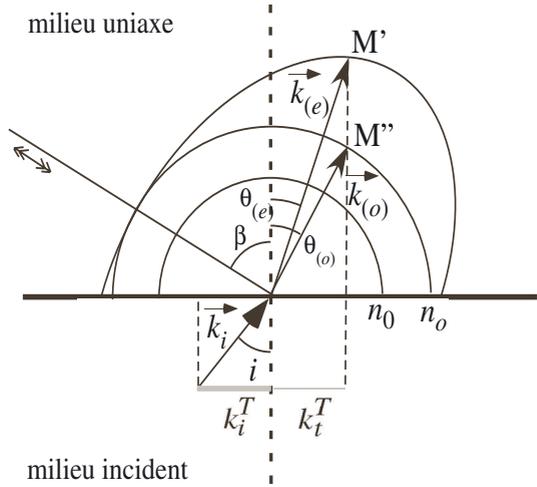
Les deux ondes réfractées obéissent à la conservation de la composante tangentielle des vecteurs d'onde :  $k_i^T = k_t^T \Leftrightarrow k_0 \sin i = k(\theta) \sin \theta$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} n_0 \sin i = n_o \sin \theta_{(o)} \\ n_0 \sin i = n(\theta_{(e)} + \beta) \sin \theta_{(e)} \end{cases}$

Avec la construction géométrique, on trouve les deux points  $M'$  et  $M''$  correspondants.

Il y a donc deux **ondes réfractées** :

- une **onde ordinaire** polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, qui se réfracte selon la direction  $\theta_{(o)}$  donnée par  $n_0 \sin i = n_o \sin \theta_{(o)}$ ,
- une **onde extraordinaire** polarisée dans le plan d'incidence ( $\vec{D}_{(e)}$  est porté par la projection de l'axe optique sur un plan d'onde extraordinaire), qui se réfracte selon la direction  $\theta_{(e)}$  donnée par  $n_0 \sin i = n(\theta_{(e)} + \beta) \sin \theta_{(e)}$ .

Les expressions précédentes indiquent que les directions des vecteurs d'onde obéissent à la loi de Snell-Descartes.



**Figure 12.11** – Réfraction d'une onde au passage d'un milieu isotrope vers un milieu uniaxe.

Dans cet exemple, l'onde incidente est supposée non polarisée ce qui permet de la décomposer selon deux modes propres orthogonaux. Si ce n'est pas le cas, il se peut que des ondes et donc des rayons réfractés n'existent pas.

Les directions des rayons lumineux se déduisent de la construction de la figure 12.11 en utilisant le fait que  $\vec{\pi}$  est normal au plan tangent à la surface des indices en  $\vec{k}$ , elles ne vérifient pas la loi de Snell-Descartes. Illustrons ceci par un exemple (figure 12.12).

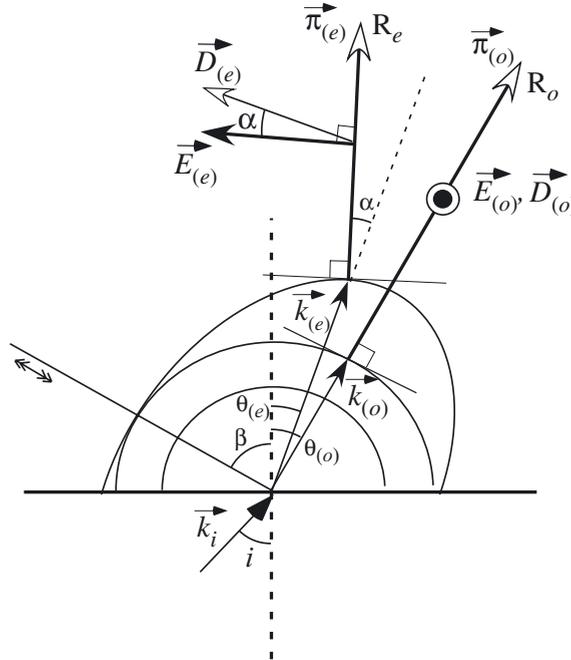


Figure 12.12 – Réfraction d'une onde au passage d'un milieu isotrope vers un milieu uniaxe.

### Exemple

Le vecteur de Poynting de l'onde ordinaire est dirigé selon le vecteur d'onde ordinaire, celui de l'onde extraordinaire forme un angle  $\alpha$  avec le vecteur d'onde extraordinaire. Les champs électriques et induction sont également représentés. Le champ  $\vec{E}_{(e)}$  est dans un plan orthogonal à  $\vec{\pi}_{(e)}$  et porté par la projection de l'axe optique sur ce plan. Le champ  $\vec{D}_{(e)}$  est dans le plan d'incidence et forme avec  $\vec{E}_{(e)}$  un angle  $\alpha$ . Les champs  $\vec{E}_{(o)}$  et  $\vec{D}_{(o)}$  sont orthogonaux aux champs précédents et à  $\vec{\pi}_{(o)}$  : ils sont perpendiculaires au plan d'incidence.

## 4.2 Construction des rayons réfractés : méthode de Huygens

La construction de Huygens est employée lorsque seul le tracé des rayons lumineux est demandé. Cette méthode consiste à construire les plans d'onde tangents aux surfaces

d'onde émises par des sources secondaires. C'est une généralisation de la construction, des rayons réfractés par un dioptre séparant deux milieux isotropes.

Pour énoncer le principe de la construction prenons l'exemple de la figure 12.13.

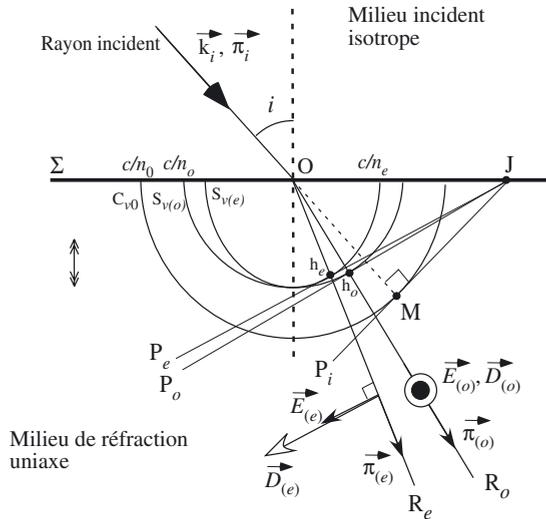


Figure 12.13 – Méthode de Huygens pour la construction des rayons réfractés.

Le rayon incident est prolongé en pointillés jusqu'à son intersection M avec la surface des vitesses radiales du milieu d'incidence  $S_{v0}$  c'est-à-dire jusqu'au cercle  $C_{v0}$  de rayon  $c/n_0$ . On détermine le point J en prenant la tangente  $P_i$  en M au cercle  $C_{v0}$  ( $P_i$  correspond à la trace du plan d'onde incident). Depuis le point J, on mène respectivement les tangentes  $P_e$  et  $P_o$  aux nappes extraordinaire  $S_{v(e)}$  et ordinaire  $S_{v(o)}$  de la surface des vitesses radiales du milieu de réfraction : on obtient deux points  $h_e$  et  $h_o$ . Il reste à joindre d'une part, les points O et  $h_e$  pour obtenir le rayon extraordinaire réfracté  $R_e$  et d'autre part, les points O et  $h_o$  pour obtenir le rayon ordinaire réfracté  $R_o$ .

Le champ électrique extraordinaire  $\vec{E}_{(e)}$  est dans un plan orthogonal à  $\vec{\pi}_{(e)}$  et porté par la projection de l'axe optique sur ce plan. Le champ  $\vec{D}_{(e)}$  est dans le plan d'incidence et fait avec  $\vec{E}_{(e)}$  un angle  $\alpha$ . Les champs  $\vec{E}_{(o)}$  et  $\vec{D}_{(o)}$  sont orthogonaux aux champs précédents et à  $\vec{\pi}_{(o)}$  : ils sont perpendiculaires au plan d'incidence.

## 5 Applications

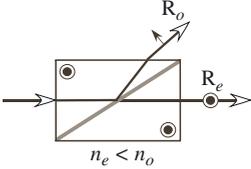
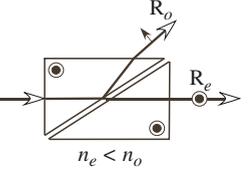
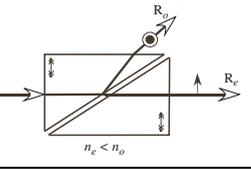
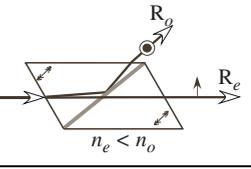
Une application importante des milieux diélectriques cristallins anisotropes consiste en la réalisation de dispositifs séparateurs d'états de polarisation. Le tableau 12.1 en regroupe les principaux types en précisant leurs caractéristiques et propriétés essentielles. Les trajets des rayons lumineux dans ces dispositifs s'obtiennent par la méthode décrite

au paragraphe 4. Certains d'entre eux seront détaillés dans les exercices à la fin de ce chapitre.

**Tableau 12.1** – Séparateurs d'états de polarisation.

| Types                              | Dénomination représentatif | Schéma                           | Caractéristiques  | Propriétés  |
|------------------------------------|----------------------------|----------------------------------|---|---|
| Déplaceur polarisant               |                            | <p><math>n_e &gt; n_o</math></p> | Milieu uniaxe avec l'axe optique dans le plan d'incidence, incliné.   | Faisceau arrivant sous incidence normale, faisceaux émergents parallèles.<br>Un seul faisceau transmis si l'incident est polarisé rectilignement ordinairement ou extraordinairement. |
|                                    |                            | <p><math>n_e &lt; n_o</math></p> |   |   |
| Séparateur d'états de polarisation | Prisme de Rochon           | <p><math>n_e &lt; n_o</math></p> | Deux prismes taillés dans le même matériau, axes optiques croisés, le premier orthogonal à la face d'incidence. | Pas de déviation dans le premier prisme. La face de sortie du deuxième prisme augmente la déviation du rayon extraordinaire.  |
|                                    | Prisme de Wollaston        | <p><math>n_e &gt; n_o</math></p> |   |   |

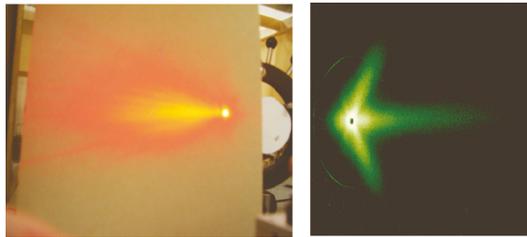
Tableau 12.1 – Suite.

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| <p><b>Polariseurs à réflexion totale</b></p> | <p>Prisme de Glan-Thompson ou de Glazebrook</p>  | <p>Polariseur à réflexion totale, composé de deux prismes d'axes optiques orthogonaux au plan d'incidence. Un milieu isotrope sépare les deux prismes. Le rayon ordinaire dans le premier prisme est totalement réfléchi par le milieu isotrope</p> | <p>Utilisé comme polariseur, le rayon polarisé orthogonalement à l'axe optique étant alors occulté. Problème à haute intensité du fait de l'absorption par le milieu isotrope. Faisceau polarisé transmis dans l'alignement de l'incident.</p>       |
|  | <p>Prisme de Glan-Foucault</p>                   | <p>Mêmes caractéristiques que pour le prisme de Glan Thompson, le milieu isotrope est remplacé par l'air.</p>   | <p>Angle au sommet des prismes plus petit que pour le prisme de Glan Thompson (voir la condition de réflexion totale) : dispositif moins volumineux. Faisceau polarisé transmis dans l'alignement de l'incident. Utilisé en tant que polariseur.</p> |
|  | <p>Prisme de Glan-Taylor</p>                    | <p>Deux prismes uniaxes séparés par une couche d'air. Les axes optiques sont dans le plan d'incidence et parallèles aux faces d'entrée et de sortie.</p>  | <p>Adapté aux fortes intensités.</p>   |
|  | <p>Prisme de Nicol</p>                         | <p>Axes optiques à 45° des bases des prismes. Réflexion totale du rayon ordinaire sur le milieu isotrope.</p>   | <p>Faisceau polarisé transmis légèrement décalé par rapport à l'incident. Utilisé en tant que polariseur.</p>  |

Encart 12.1

### Diffraction anisotrope dans des cristaux de $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{S}_6$ et de $\text{BaTiO}_3$

La lumière se propageant dans les cristaux anisotropes de  $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{S}_6$  (hypothio-diphosphate d'étain) et de  $\text{BaTiO}_3$  (titanate de baryum) est diffusée par les défauts microscopiques présents en surface et en volume. La lumière diffusée se couple avec le faisceau incident transmis pour inscrire au sein du matériau une multitude de réseaux de diffraction. La lumière diffractée sur ces réseaux est amplifiée par un effet appelé effet photoréfractif qui couple entre eux les faisceaux et les amplifie de façon sélective (du fait de l'anisotropie) selon leur direction et leur polarisation. On observe alors en sortie du cristal une répartition de lumière en forme d'éventail.



Répartition de la lumière transmise par un cristal de  $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{S}_6$  (à gauche) et un cristal de  $\text{BaTiO}_3$  (à droite).

## 6 Construction des rayons réfléchis

La méthode utilisée est celle de Huygens en réflexion. Elle est analogue à celle employée pour construire un rayon réfléchi sur un milieu isotrope : nous rappelons d'abord le principe de la construction dans ce cas. Le rayon incident est prolongé jusqu'à la surface des vitesses radiales du milieu d'incidence, il coupe celle-ci au point M à partir duquel est menée la tangente qui intersecte le dioptre en J (figure 12.14).

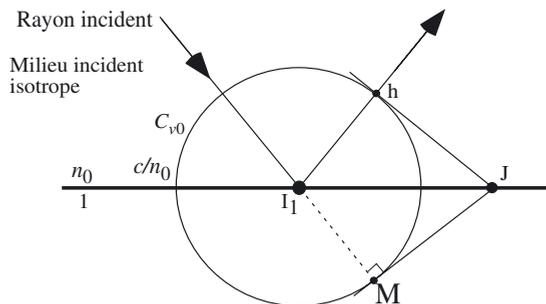


Figure 12.14 – Construction des rayons réfléchis par un dioptre séparant deux milieux isotropes.

À partir de ce point, on construit la tangente à la surface des vitesses radiales pour obtenir le point  $h$ . Le rayon réfléchi est obtenu en joignant  $I_1$  à  $h$ .

La construction de la figure 12.15 utilise la méthode qui vient d'être décrite pour le tracé de la réflexion d'un rayon extraordinaire issu d'un milieu uniaxe supposé positif. Remarquons que dans le cas envisagé, il n'y a pas de rayon transmis : nous sommes en présence d'une réflexion totale. La construction indique également que  $r_e = i_e$  : la loi de la réflexion est vraie dans ce cas particulier, ce qui vient du fait que l'axe optique est normal au dioptre.

Pour s'en convaincre, il suffit d'envisager la réflexion d'un rayon extraordinaire issu d'un milieu uniaxe dont l'axe optique est incliné par rapport au dioptre : le rayon réfléchi n'obéit plus à la loi de la réflexion :  $r_e \neq i_e$  (figure 12.16).

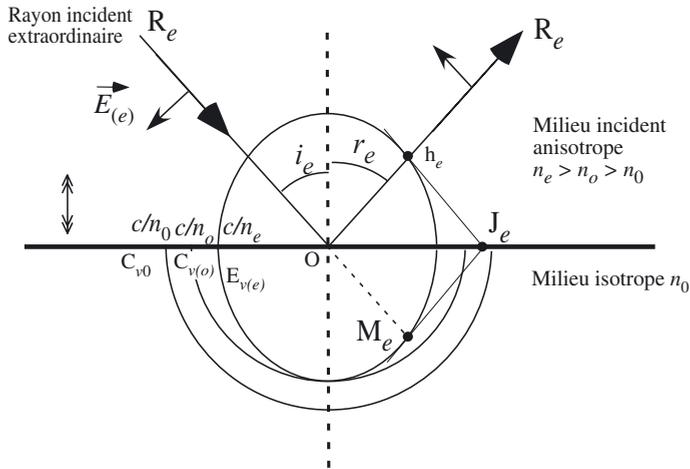


Figure 12.15 – Construction des rayons réfléchis par un dioptre séparant un milieu isotrope et un milieu anisotrope.

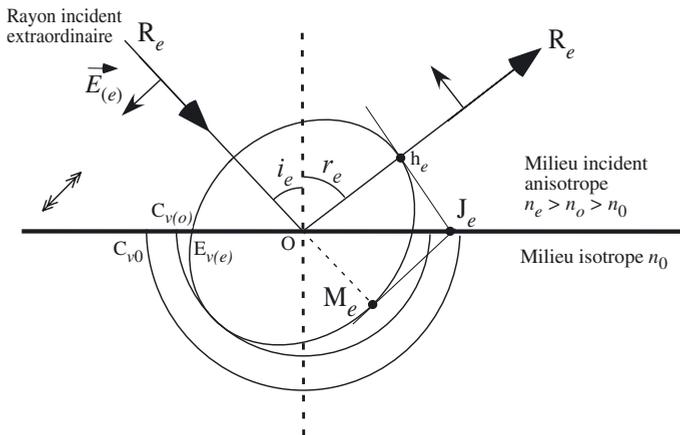


Figure 12.16 – Construction des rayons réfléchis par un dioptre séparant un milieu isotrope et un milieu anisotrope dont l'axe optique est incliné.

## ● L'essentiel

- 1 Pour construire les trajets des faisceaux lumineux dans un diélectrique anisotrope on utilise la méthode d'Huygens ou la méthode de Snell-Descartes.
- 2 La méthode d'Huygens est employée lorsque seul le tracé des rayons est recherché. Elle s'appuie sur la surface des vitesses radiales.
- 3 La méthode de Snell-Descartes est utilisée lorsque le déphasage entre les ondes réfractées est à déterminer. Elle emploie la surface des indices.



- 12.1** Dans milieu optiquement uniaxe, la surface des vitesses radiales est :
- a. une surface plane
  - b. une surface à deux nappes
  - c. constituée de l'union d'une sphère et d'un ellipsoïde
  - d. de révolution autour de l'axe optique
  - e. l'union d'un hyperboloïde et d'une sphère
  - f. constituée de deux nappes dont la disposition relative est quelconque
- 12.2** Dans un milieu uniaxe, les rayons lumineux :
- a. sortent toujours du plan d'incidence
  - b. restent dans le plan d'incidence si l'axe optique du milieu appartient au plan d'incidence
  - c. restent dans le plan d'incidence si l'axe optique du milieu est perpendiculaire au plan d'incidence
  - d. sont confondus
- 12.3** Dans un milieu optiquement uniaxe, la coupe de la surface ordinaire par un plan est :
- a. une ellipse dont les caractéristiques dépendent de l'incidence du rayon et de l'orientation de l'axe optique
  - b. une hyperbole
  - c. un cercle
- 12.4** Dans un milieu optiquement uniaxe, la coupe de la surface extraordinaire par un plan est :
- a. une ellipse dont les caractéristiques dépendent de l'incidence du rayon et de l'orientation de l'axe optique
  - b. une hyperbole
  - c. un cercle



# Entraînez-vous

## 12.1 Rayons lumineux dans des lames uniaxes à faces parallèles

On s'intéresse aux trajets de rayons lumineux dans des lames diélectriques uniaxes à faces parallèles, éclairées en lumière naturelle sous incidence normale ou sous incidence quelconque. Ce faisceau de lumière est constitué de rayons parallèles. L'axe optique de la lame est soit contenu dans le plan d'incidence, soit perpendiculaire à celui-ci : les rayons lumineux restent dans le plan d'incidence c'est-à-dire le plan des figures. L'épaisseur de la lame est  $\ell$ , elle est taillée dans du quartz cristallin qui est un matériau uniaxe positif ( $n_e > n_o$ ). On suppose que la biréfringence du quartz est indépendante de la longueur d'onde  $\lambda$ , de l'ordre de  $n_e - n_o = 0,01$ . Le milieu incident est isotrope, son indice de réfraction est  $n_0$ .

**1.** La lame est taillée de manière à ce que son axe optique soit perpendiculaire à sa face d'entrée. Le rayon lumineux incident est parallèle à la direction de l'axe optique du cristal.

Tracer les trajets des rayons lumineux dans la lame et ceux transmis par la lame. Indiquer la polarisation des rayons dans tous les milieux.

**2.** L'axe optique est maintenant parallèle à la face d'entrée de la lame dans le plan d'incidence et le rayon lumineux est incident perpendiculairement à la direction de l'axe optique. Construire géométriquement les faisceaux réfractés et transmis par lame. Indiquer leur état de polarisation.

**3.** L'axe optique est dans le plan de la lame, il possède une orientation quelconque (il fait l'angle  $\theta$  avec la normale), l'éclairage s'effectue sous incidence normale.

**a.** Calculer la distance  $\Delta$  entre les rayons ordinaire et extraordinaire à la sortie de la lame.

**b.** Indiquer la valeur de  $\theta$  pour avoir une séparation nulle puis celle pour avoir une séparation maximale. À quelle autre condition obtient on  $\Delta = 0$  ?

**c.** En prenant  $n_e = 1,55$  ;  $n_o = 1,54$  ;  $\ell = 3$  cm, tracer la courbe représentative  $\Delta(\theta)$ .

**d.** L'incidence de la lumière étant quelconque, construire les trajets des rayons lumineux réfractés puis transmis par la lame. Préciser les états de polarisation. En déduire une construction de l'image d'un point objet A à travers cette lame.

**4.** La lame est taillée de façon à ce que son axe optique soit perpendiculaire au plan d'incidence (plan de la figure). Elle est placée entre un polariseur et un analyseur croisés, ses lignes neutres sont situées à  $45^\circ$  de la vibration issue du polariseur.

**a.** Dans un premier temps, la lame est éclairée sous incidence normale. Dans le domaine du visible, calculer la longueur d'onde des cannelures noires de la lumière transmise. On prendra  $\ell = 1$  mm.

**b.** La lame est inclinée d'un angle  $\theta$  autour d'un axe parallèle à l'axe optique.

Calculer le déphasage entre les deux états propres de propagation après traversée de la lame. Commenter le résultat. Donner une relation approchée si  $\theta$  est faible. En déduire le sens de déplacement des cannelures.

c. La lame est éclairée sous incidence normale. Tracer les trajets des rayons lumineux dans tous les milieux. Déterminer les états de polarisation. Reprendre la question si l'incidence est quelconque.

### 12.2 Réfraction dans des prismes de calcite

On considère un prisme à angle droit, d'angle  $\theta$  éclairé sous incidence normale sur la face AB par un faisceau de lumière monochromatique non polarisée. Le prisme est taillé dans de la calcite, matériau uniaxe négatif c'est-à-dire  $n_e - n_o < 0$  où  $n_e$  et  $n_o$  sont respectivement les indices principaux extraordinaire et ordinaire.

Construire les faisceaux réfractés par le prisme et indiquer l'état de polarisation des rayons émergents dans les cas suivants :

1. L'axe optique est parallèle à l'arête A (figure 12.17 (a)).
2. L'axe optique est parallèle à la face AB et perpendiculaire à l'arête du prisme (figure 12.17 (b)).
3. L'axe optique est perpendiculaire à la face d'entrée (figure 12.17 (c)).

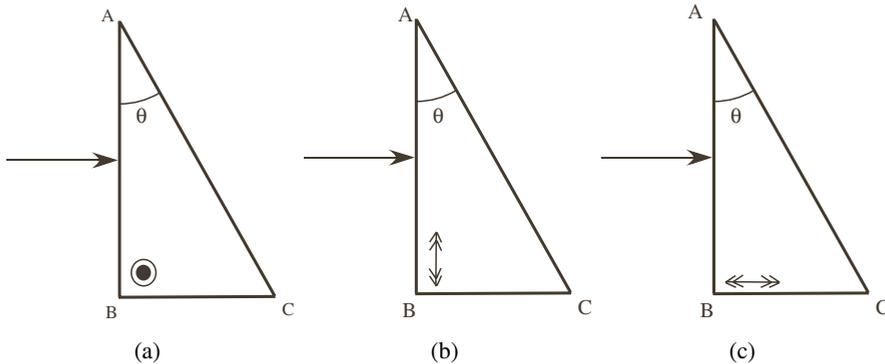


Figure 12.17

### 12.3 Prisme de Rochon

Un prisme de Rochon est formé de deux prismes accolés selon leur hypoténuse et taillés dans le même milieu uniaxe, ici il s'agit de calcite (milieu uniaxe négatif). Les angles au sommet sont égaux à  $\theta$ . Le système est éclairé normalement à la face CD par une lumière monochromatique non polarisée.

1. À l'aide de la construction d'Huygens en O, montrer que le rayon incident n'est pas dévié dans le second prisme.
2. Appliquer en O' la construction d'Huygens pour construire les trajets des rayons lumineux dans le second prisme. Donner les directions de chaque rayon dans le second prisme. En déduire l'angle d'incidence de chaque rayon sur la face de sortie AB

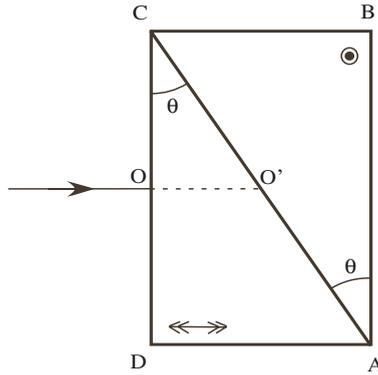


Figure 12.18

du second prisme. Indiquer les directions des vecteurs d'onde et des polarisations associées.

3. Appliquer la construction d'Huygens pour chaque rayon sur l'interface de sortie avec l'air. Calculer l'angle  $D$  que forment les deux rayons émergents en supposant les déviations faibles.

A.N. :  $\theta = 30^\circ$  ;  $n_o = 1,658$  ;  $n_e = 1,486$ .



**12.1** Réponses b, c et d ; **12.2** Réponses b et c ; **12.3** Réponse c ; **12.4** Réponse a.



## 12.1 Rayons lumineux dans des lames uniaxes à faces parallèles

1. Le tracé des rayons s'effectue en utilisant la construction d'Huygens (figure 12.19). Les sections de la surface des vitesses radiales par le plan d'incidence, centrées au point d'incidence  $I_1$  sont :

- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$  représentatif du milieu incident isotrope. Il s'obtient en prenant l'intersection de la surface des vitesses radiales du milieu incident (une sphère de rayon  $c/n_o$ ) avec le plan de la figure ;
- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$  et une ellipse  $E_{v(e)}$  représentatifs du milieu uniaxe de réfraction. Ces courbes correspondent aux intersections respectives avec le plan de figure de la surface à deux nappes des vitesses radiales du milieu uniaxe dont l'axe optique est indiqué sur la figure. Rappelons que cette surface à deux nappes est composée d'une sphère de rayon  $c/n_o$  et d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique, ces deux nappes sont tangentes l'une à l'autre sur l'axe optique.

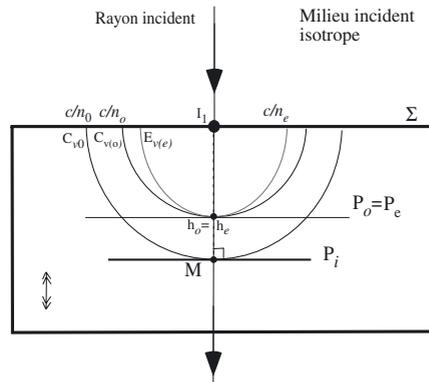


Figure 12.19

Le prolongement du rayon incident jusqu'à  $C_{v(o)}$  donne le point M. Le plan tangent en ce point est  $P_i$  : il est parallèle au dioptré d'entrée  $\Sigma$ . Le point d'intersection de  $P_i$  avec  $\Sigma$  est donc rejeté à l'infini ce qui a pour conséquence que les plans  $P_o$  et  $P_e$  sont parallèles à  $P_i$ . Ces plans, par construction, sont tangents respectivement à  $C_{v(o)}$  et  $E_{v(e)}$  au niveau des points  $h_o$  et  $h_e$  : la disposition de cette question est telle que ces points sont confondus de même que  $P_o$  et  $P_e$ . L'onde voit donc un milieu d'indice  $n_o$ . On trouve à nouveau le résultat que pour une onde se propageant selon l'axe optique d'un milieu uniaxe, tout se passe comme si elle se propageait dans un milieu isotrope d'indice égal à l'indice ordinaire, il existe donc une infinité de modes de propagation autrement dit pas de directions privilégiées pour le champ induction électrique. Par conséquent, un seul rayon se propage dans le milieu et en ressort, il s'agit d'un rayon ordinaire.

Dans le milieu anisotrope, comme à sa sortie, la polarisation est identique à la polarisation de la lumière incidente. Remarquons que les rayons sont confondus avec les normales à l'onde c'est-à-dire avec les vecteurs d'onde.

Les lois de Descartes s'appliquent dans ce cas puisque tous les milieux sont isotropes ou équivalent à un milieu isotrope.

2. De la même façon que précédemment, les sections de la surface des vitesses radiales par le plan d'incidence, centrées au point d'incidence  $I_1$  (figure 12.20) sont :

- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$  représentatif du milieu incident isotrope ;
- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$  et une ellipse  $E_{v(e)}$  représentatifs du milieu uniaxe de réfraction. Seule l'orientation de ces deux courbes a changé par rapport à la première question, puisque l'axe optique est orienté différemment.

Le prolongement du rayon incident jusqu'à  $C_{v(o)}$  donne le point M, le plan tangent  $P_i$  en ce point est parallèle au dioptre d'entrée  $\Sigma$ . Le point d'intersection de  $P_i$  avec  $\Sigma$  est rejeté à l'infini : les plans  $P_o$  et  $P_e$  sont parallèles à  $P_i$ . Ces plans, par construction, sont tangents respectivement à  $C_{v(o)}$  et  $E_{v(e)}$  au niveau des points  $h_o$  et  $h_e$  qui cette fois-ci sont distincts. Il y a donc deux rayons : l'un ordinaire  $R_o$ , l'autre extraordinaire  $R_e$  obtenus en joignant  $I_1$  respectivement à  $h_o$  et  $h_e$ . Ces rayons se superposent mais ils se propagent à des vitesses différentes.

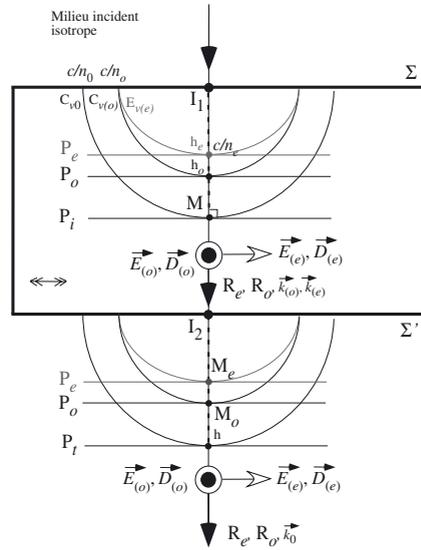


Figure 12.20

La propagation des ondes s'effectuant selon la direction d'un des axes propres, les modes propres correspondent aux deux autres directions principales : les champs électriques et induction sont parallèles. Le champ extraordinaire est polarisé rectilignement selon l'axe optique, le champ ordinaire lui est orthogonal.

Remarquons que pour l'incidence et la direction de l'axe optique correspondant à cette question, les rayons sont confondus avec les normales à l'onde (donc avec les vecteurs d'onde).

Pour obtenir les **rayons transmis**, la construction d'Huygens est à nouveau utilisée au niveau du dioptre de sortie  $\Sigma'$ , les sections des surfaces des vitesses radiales par le plan d'incidence étant centrées au point d'émergence  $I_2$ . Il s'agit de construire successivement le rayon ordinaire puis le rayon extraordinaire. Au niveau de  $\Sigma'$ , le milieu d'incidence correspond au milieu uniaxe, le milieu de réfraction au milieu isotrope d'indice  $n_o$ . Pour obtenir le rayon ordinaire transmis, le rayon ordinaire incident  $I_1 I_2$  est prolongé jusqu'à  $C_{v(o)}$  pour donner le point d'intersection  $M_o$ . En ce point, le plan tangent à  $C_{v(o)}$  est  $P_o$  qui est parallèle au dioptre  $\Sigma'$  considéré : le point d'intersection de  $P_o$  avec  $\Sigma'$  est donc rejeté à l'infini. Ce qui induit que le plan  $P_i$  est également parallèle à  $\Sigma'$ . Il est tangent à  $C_{v(o)}$  au point  $h$ . Le rayon ordinaire transmis s'obtient en joignant  $I_2$  et  $h$ . La construction du rayon extraordinaire se mène de façon analogue.

Il existe donc en sortie de la lame deux rayons superposés dont les états de polarisation sont identiques à ceux des rayons respectifs dans le milieu uniaxe. Les rayons sont ici confondus avec les normales à l'onde. Le milieu anisotrope a décomposé l'onde plane

incidente en deux ondes polarisées rectilignement et perpendiculairement l'une par rapport à l'autre, cohérentes et déphasées. En sortie, ces ondes se propagent selon une direction commune, à la même vitesse.

C'est ce type de lame qui est employée pour constituer des lames quart d'onde ou demi-onde.

3. Le cas présent correspond à une généralisation du précédent. La démarche est analogue pour la construction d'Huygens. Les rayons réfractés dans la lame sont spatialement séparés. À noter que désormais, seule la direction du rayon ordinaire est confondue avec la normale à l'onde ordinaire. Le rayon extraordinaire ne suit pas la loi de Descartes.

Dans la lame, les polarisations sont rectilignes (figure 12.21). La direction de la vibration  $\vec{D}_{(e)}$  est obtenue en projetant l'axe optique sur un plan d'onde extraordinaire  $P_e$  : elle n'est donc pas orthogonale au rayon, on peut seulement affirmer qu'elle se situe dans le plan de la figure.

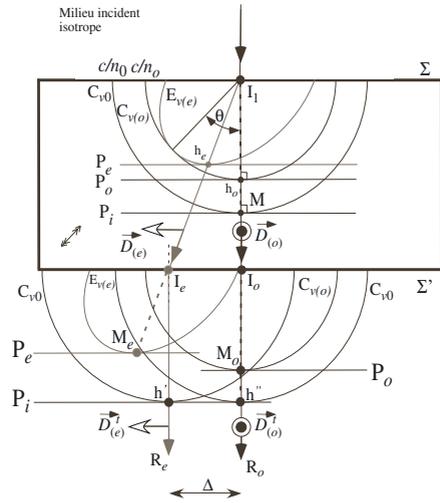


Figure 12.21

La direction de  $\vec{D}_{(o)}$  est perpendiculaire à l'axe optique et à  $\vec{D}_{(e)}$  : elle est donc perpendiculaire au plan d'incidence et donc au rayon ordinaire. Les deux rayons émergent de la lame parallèlement au rayon incident, ils sont rectilignement polarisés. Dans le milieu de sortie isotrope, les rayons sont confondus avec les normales aux ondes : les vibrations lumineuses associées  $\vec{D}_{(e)}^t$  et  $\vec{D}_{(o)}^t$  sont perpendiculaires aux rayons.

a. Calcul de la distance  $\Delta$  entre les rayons réfractés

L'équation de l'ellipse  $E_{\nu(e)}$  dans le repère de ses axes est

$$n_o^2 x^2 + n_e^2 y^2 = c^2$$

Le rayon extraordinaire  $I_1 I_e$  fait un angle  $\beta$  avec l'axe optique, il coupe l'ellipse au point  $h_e(X, Y)$  (figure 12.22). L'angle  $\beta$  s'obtient en exprimant que  $P_e$ , qui est la tangente à l'ellipse en  $h_e$ , est perpendiculaire au rayon ordinaire  $I_1 I_o$ . La pente de  $P_e$  est donc  $-\cos\theta$ .

De plus, en différentiant l'équation de l'ellipse :

$$n_o^2 x^2 + n_e^2 y^2 = c^2$$

$$\text{soit } 2n_o^2 x dx + 2n_e^2 y dy = 0$$

$$\text{et } \left( \frac{dy}{dx} \right)_{h_e} = -\frac{n_o^2 X}{n_e^2 Y} = -\frac{n_o^2}{n_e^2} \cos \beta$$

$$= -\cot \theta \Rightarrow \tan \beta = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \theta$$

Avec la figure :

$$\Delta = I_e I_o = \ell \tan(\theta - \beta)$$

$$= \ell \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} = \ell \frac{(n_e^2 - n_o^2) \tan \theta}{n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{\ell}{2} \frac{n_e^2 - n_o^2}{(n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)} \sin 2\theta$$

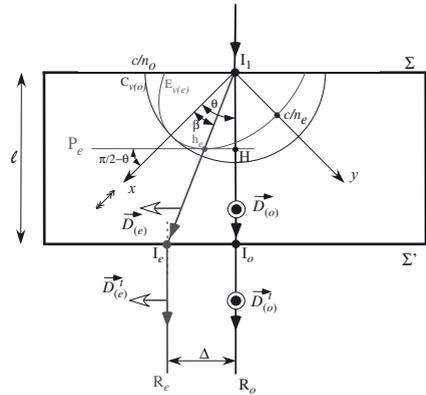


Figure 12.22

**b.** La séparation est nulle si  $\sin 2\theta = 0$  c'est-à-dire si  $\theta = 0$  (la lame est taillée perpendiculairement à l'axe optique) ou si  $\theta = \pi/2$  (la lame est taillée parallèlement à l'axe optique). Une autre situation annule la séparation :  $n_e = n_o$ , c'est le cas d'une lame isotrope.

**c.** La valeur de  $\theta$  donnant une séparation maximale est obtenue en résolvant  $\frac{d\Delta}{d\theta} = 0$ .

$$\frac{d\Delta}{d\theta} = \ell (n_e^2 - n_o^2) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\tan \theta}{n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \theta} \right)$$

$$= \ell (n_e^2 - n_o^2) \frac{(\tan^2 \theta + 1)(n_e^2 - n_o^2 \tan^2 \theta)}{(n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \theta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Delta}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{n_e}{n_o} \approx 1 \Rightarrow \theta \approx \pi/4$$

$$\text{et } \Delta(\arctan(n_e/n_o)) = \frac{\ell (n_e^2 - n_o^2)}{2n_e n_o}$$

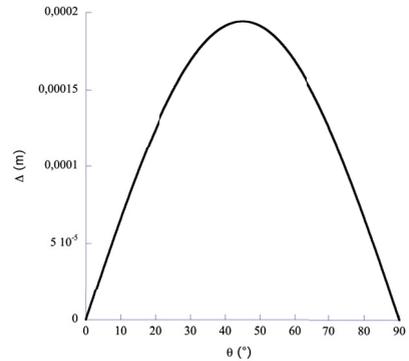


Figure 12.23

**d.** La figure 12.24 présente le tracé des rayons lorsque l'incidence est quelconque. Le rayon ordinaire sort de la lame avec une polarisation rectiligne qui reste orthogonale au plan de la figure. Le rayon extraordinaire subit une réfraction qui en sortie le rend parallèle à la direction du rayon incident. Les deux rayons ressortent donc de la lame parallèles entre eux et dans la même direction que la lumière incidente. Dans la lame, la normale à l'onde extraordinaire n'est pas confondue avec le rayon extraordinaire.

Nous avons représenté pour illustrer ceci le vecteur d'onde extraordinaire  $\vec{k}_{(e)}$  dont la direction est distincte de  $R_e$ . Dans le milieu de sortie isotrope, le champ  $\vec{D}_{(e)}^t$  est perpendiculaire au rayon extraordinaire, sa direction est celle de la projection de l'axe optique sur le nouveau plan d'onde.

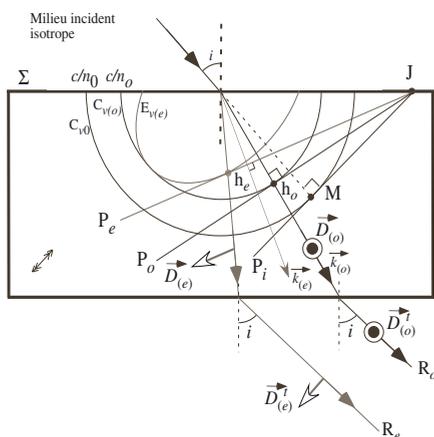


Figure 12.24

Des tracés précédents des rayons, il ressort que :

- Pour un faisceau non polarisé arrivant sous incidence normale, deux rayons  $R_o$  (dit ordinaire) et  $R_e$  (dit extraordinaire) émergent de la lame. Le rayon  $R_o$  est dans le prolongement de l'incident,  $R_e$  se réfracte et ressort parallèle à  $R_o$  ;
- Pour un faisceau non polarisé arrivant sous incidence quelconque (non nulle), deux rayons distincts  $R_o$  et  $R_e$  se réfractent dans la lame et ressortent parallèlement l'un par rapport à l'autre.

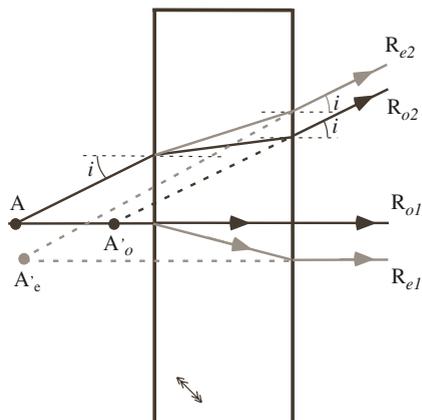


Figure 12.25

Ainsi, pour construire l'image d'un point A à travers la lame, nous considérons successivement des rayons  $R_o$  et  $R_e$  issus de ce point, incidents sur la lame sous incidence normale puis sous incidence quelconque (figure 12.25). Le rayon  $R_{o1}$  issu de A qui arrive normalement sur la lame est transmis sans déviation. Le rayon  $R_{o2}$  incident sous l'angle  $i$  en ressort selon la même inclinaison. Ces deux rayons permettent de tracer l'image ordinaire  $A'_o$  de A.

De la même façon, on construit l'image extraordinaire  $A'_e$  de A en utilisant deux rayons extraordinaires  $R_{e1}$  et  $R_{e2}$ .

4. a. Cette situation a été rencontrée et détaillée dans le chapitre 10. Il a été établi que l'intensité transmise a pour expression (voir la section 5 du chapitre 10, paragraphe Interférences en lumière polarisée) :

$$I = I_0 \sin^2 \left( \frac{\Phi}{2} \right) = I_0 \sin^2 \left( \frac{\pi(n_e - n_o)\ell}{\lambda} \right)$$

où  $\phi$  est le déphasage introduit par la lame.

Il y a extinction c'est-à-dire que la cannelure est sombre pour :

$$\frac{\pi(n_e - n_o)\ell}{\lambda} = m\pi$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{(n_e - n_o)\ell}{m}$$

où  $m$  est un entier.

Dans le domaine du visible ( $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$ ), les solutions sont obtenues pour  $13 \leq m \leq 25$  :

|                      |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $m$                  | 13  | 14  | 15  | 16  | 17  | 18  | 19  | 20  | 21  | 22  | 23  | 24  | 25  |
| $\lambda(\text{nm})$ | 769 | 714 | 667 | 625 | 588 | 555 | 526 | 500 | 476 | 454 | 435 | 417 | 400 |

b. Le calcul du déphasage dû à la rotation de la lame s'appuie sur la surface des indices car cette dernière est bien adaptée à ce type de problème.

Les sections de la surface des indices par le plan d'incidence, centrées au point d'incidence  $I_1$  sont :

- un cercle  $C_{n_0}$  de rayon  $n_0$  représentatif du milieu incident isotrope ;
- un cercle  $C_{n_{(o)}}$  de rayon  $n_o$  et un cercle  $C_{n_{(e)}}$  de rayon  $n_e$  représentatifs du milieu uniaxe de réfraction.

La construction de Snell-Descartes basée sur la conservation des composantes tangentielles des vecteurs d'onde incident et réfractés mène à la détermination des points  $h_o$  et  $h_e$  de la figure, puis aux vecteurs d'onde réfractés  $\vec{k}_{(o)}$  et  $\vec{k}_{(e)}$  des ondes ordinaire et extraordinaire.

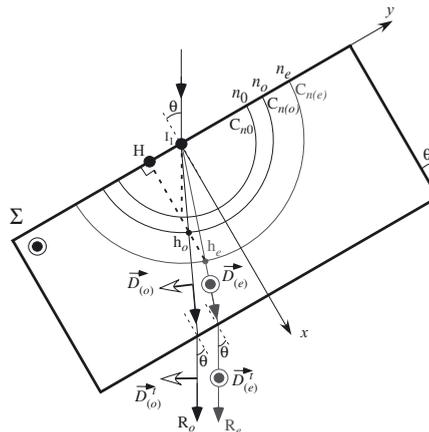


Figure 12.26

Soit  $\phi'$  le nouveau déphasage entre les deux ondes ordinaire et extraordinaire dû à la rotation de la lame. En désignant par l'indice  $T$  (respectivement  $N$ ) les composantes tangentielles (respectivement normales) des vecteurs :

$$\begin{aligned}\phi' &= \vec{k}_{(e)} \cdot \vec{r} - \vec{k}_{(o)} \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{k}_{(e)}^T + \vec{k}_{(e)}^N) \cdot \vec{r} - (\vec{k}_{(o)}^T + \vec{k}_{(o)}^N) \cdot \vec{r} \\ &= (\vec{k}_{(e)}^N - \vec{k}_{(o)}^N) \cdot \vec{r} \quad \text{car il y a conservation de la composante tangentielle} \\ &= (\vec{k}_{(e)}^N - \vec{k}_{(o)}^N) \cdot \vec{r}^N\end{aligned}$$

De plus, les coordonnées des points  $h_e$  et  $h_o$  étant  $h_e \left( H_{(e)}^x, H_{(e)}^y \right)$  et  $h_o \left( H_{(o)}^x, H_{(o)}^y \right)$ ,

$$\vec{k}_{(e)}^N = k_{(e)} \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} H_{(e)}^x \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} \vec{u}_x$$

et

$$\vec{k}_{(o)}^N = k_{(o)} \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} H_{(o)}^x \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_o^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} \vec{u}_x$$

car

$$\left\{ \begin{array}{l} |I_1 h_e|^2 = n_e^2 \\ |I_1 h_o|^2 = n_o^2 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} (H_{(e)}^x)^2 + (H_{(e)}^y)^2 = n_e^2 \\ (H_{(o)}^x)^2 + (H_{(o)}^y)^2 = n_o^2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} (H_{(e)}^x)^2 + n_o^2 \sin^2 \theta = n_e^2 \\ (H_{(o)}^x)^2 + n_o^2 \sin^2 \theta = n_o^2 \end{array} \right.$$

En sortie de la lame :

$$\begin{aligned}\phi' &= (\vec{k}_{(e)}^N - \vec{k}_{(o)}^N) \cdot \ell \vec{u}_x \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} - \sqrt{n_o^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} \right] \cdot \ell \vec{u}_x \\ &= \frac{2\pi \ell}{\lambda} \left[ \sqrt{n_e^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} - \sqrt{n_o^2 - n_o^2 \sin^2 \theta} \right] \\ &= \frac{2\pi \ell}{\lambda} \left[ n_e \sqrt{1 - \frac{n_o^2}{n_e^2} \sin^2 \theta} - n_o \sqrt{1 - \frac{n_o^2}{n_o^2} \sin^2 \theta} \right] \\ &\approx \frac{2\pi \ell}{\lambda} \left[ n_e \left( 1 - \frac{n_o^2}{2n_e^2} \theta^2 \right) - n_o \left( 1 - \frac{n_o^2}{2n_o^2} \theta^2 \right) \right] \\ &= \frac{2\pi \ell (n_e - n_o)}{\lambda} \left[ 1 + \frac{n_o^2}{2n_e n_o} \theta^2 \right]\end{aligned}$$

On a  $\phi' > \phi$  : le déphasage a donc augmenté, la cannelure d'ordre  $m$  dont la longueur d'onde était donnée par  $\lambda = \delta/m$  va se déplacer vers les grandes longueurs d'onde.

c. Quelle que soit l'incidence considérée, l'axe optique étant perpendiculaire au plan de la figure, la section par ce plan de la surface des vitesses radiales du milieu uniaxe donne :

- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$  ;
- un cercle  $C_{v(e)}$  de rayon  $c/n_e$ .

La section de la surface des vitesses radiales du milieu incident isotrope est un cercle de rayon  $c/n_0$ .

La direction des rayons réfractés se détermine en appliquant la construction d'Huygens. Dans le cas présent, quelle que soit l'incidence, le rayon extraordinaire et le rayon ordinaire sont confondus avec les vecteurs d'onde respectifs.

Les directions des rayons émergents se déterminent en appliquant à nouveau la construction d'Huygens. Ces rayons sortent parallèlement l'un par rapport à l'autre en formant le même angle  $\theta$  égal à l'angle d'incidence.

Les rayons sont polarisés rectilignement dans la lame et dans le milieu de sortie. La vibration  $\vec{D}_{(e)}$  est polarisée selon l'axe optique, la vibration ordinaire  $\vec{D}_{(o)}$  lui est perpendiculaire.

Lame sous incidence normale

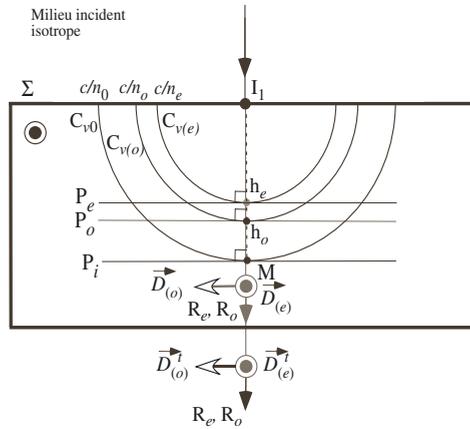


Figure 12.27

Lame sous incidence quelconque

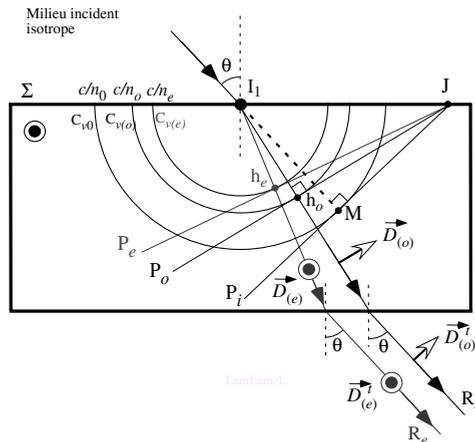


Figure 12.28

## 12.2 Réfraction dans des prismes de calcite

Concernant le franchissement du premier dioptré (face AB), les trois situations proposées dans cet exercice ont été rencontrées dans l'exercice 12.1. Nous invitons donc le lecteur à s'y référer pour plus de détails. Pour la réfraction à travers la face AC, le tracé des rayons s'obtient en employant la méthode d'Huygens, le milieu d'incidence est le prisme anisotrope, le milieu de sortie est isotrope.

1. Rappelons que la réfraction au niveau de la face d'entrée s'effectue sans déviation : dans le prisme, le rayon ordinaire est confondu avec le rayon extraordinaire, ils sont rectilignement polarisés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre.

Pour obtenir les rayons transmis par la face AC, il faut construire successivement le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire. La réfraction sur la face de sortie s'accompagne d'une séparation angulaire des rayons précédents. Le rayon extraordinaire est polarisé parallèlement à l'axe optique. Le rayon ordinaire est polarisé dans le plan de figure.

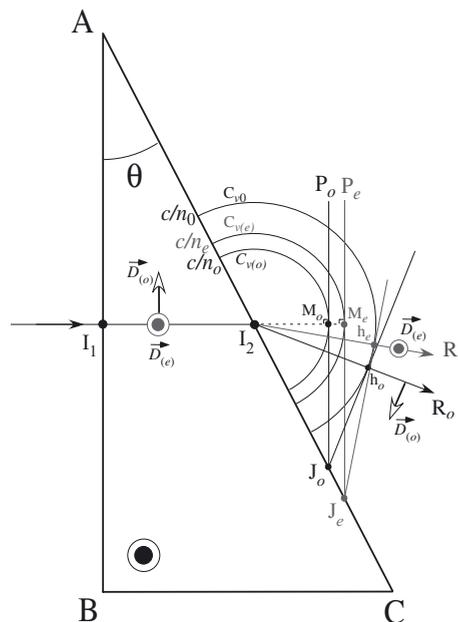


Figure 12.29

Notons que dans tous les milieux, les directions des rayons correspondent à celles des vecteurs d'onde.

2. La réfraction sur la face AB est encore sans déviation pour les deux rayons qui sont donc à nouveau confondus dans le prisme.

Réfraction sur AC : le prolongement en pointillés du rayon  $I_1I_2$  coupe les nappes ordinaire et extraordinaire respectivement en  $M_o$  et  $M_e$ . Les plans tangents en ces points aux nappes  $C_{v(o)}$  et  $C_{v(e)}$  intersectent le dioptre de sortie AC en  $J_o$  et  $J_e$ . Enfin, les plans tangents menés depuis  $J_o$  et  $J_e$  au cercle  $C_{v0}$  donnent les points  $h_o$  et  $h_e$ . Les rayons ordinaire et extraordinaire s'obtiennent en joignant  $I_2$  à  $h_o$  d'une part,  $I_2$  à  $h_e$  d'autre part.

Le rayon extraordinaire est polarisé dans le plan de la figure selon la direction de la projection de l'axe optique sur un plan d'onde extraordinaire, le faisceau ordinaire est polarisé orthogonalement au plan du dessin.

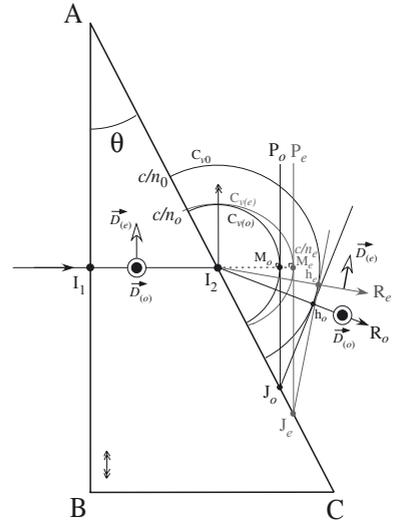


Figure 12.30

3. La lumière incidente voit le prisme comme un milieu isotrope d'indice ordinaire  $n_o$  : la réfraction sur AB se fait sans déviation, la polarisation de la lumière dans le prisme est identique à celle de la lumière incidente, il n'y a qu'un rayon dans le prisme, il s'agit d'un rayon ordinaire. Pour déterminer la réfraction sur AC, la méthode est analogue à celle employée à la question précédente. Les points  $M_o$  et  $M_e$  sont confondus, de même que  $J_o$  et  $J_e$ ,  $h_o$  et  $h_e$  : en sortie, le rayon ordinaire est confondu avec le rayon extraordinaire.

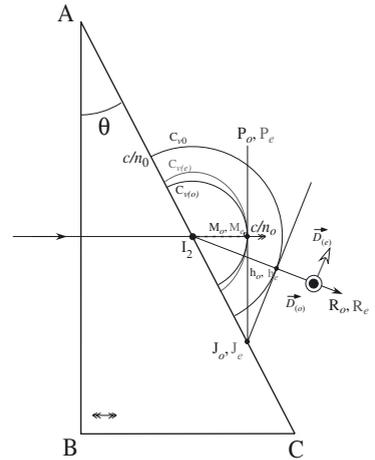


Figure 12.31

À l'unique rayon émergent correspondent deux ondes, l'une polarisée extraordinairement (selon la projection de l'axe optique sur un plan d'onde c'est-à-dire dans le plan de figure), l'autre polarisée ordinairement (perpendiculairement à la précédente).

### 12.3 Prisme de Rochon

1. Les trajets des rayons dans le prisme ACD sont identiques à ceux du cas c de l'exercice 12.2, les explications afférentes sont détaillées dans une situation analogue traitée dans l'exercice 12.1 (question 1). Rappelons que l'orientation de

l'axe optique du premier prisme et l'incidence sous laquelle il est éclairé induisent que pour la lumière, le prisme est équivalent à un milieu isotrope d'indice ordinaire  $n_o$ . Il n'existe qu'un seul rayon dans ACD, le rayon incident n'est pas dévié au passage par la face CD, la polarisation du rayon dans le premier prisme est identique à celle de la lumière incidente.

**2.** Pour déterminer les trajets dans le second prisme, nous appliquons à nouveau la construction d'Huygens au niveau du dioptre AC. Notons que cette situation est nouvelle par rapport à celles rencontrées dans les exercices précédents : le dioptre AC sépare deux milieux anisotropes uniaxes.

Dans un premier temps, nous traçons les courbes obtenues par intersection du plan d'incidence (plan de la figure) avec les nappes de la surface des vitesses radiales centrées en O' (point d'incidence sur AC) relatives d'une part au milieu d'incidence (prisme ACD) et d'autre part au milieu de réfraction (prisme ABC). Ces deux milieux sont uniaxes, leurs axes optiques sont croisés l'un par rapport à l'autre.

Pour le prisme ACD, d'axe optique contenu dans le plan d'incidence et perpendiculaire à CD, ces courbes intersections sont :

- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$ ,
- une ellipse  $E_{v(e)}$  tangente au cercle précédent sur l'axe optique du prisme ACD.

Ces deux courbes figurent en trait continu.

Pour le prisme ABC dont l'axe optique est perpendiculaire au plan d'incidence, les courbes sont :

- un cercle  $C_{v(o)}$  de rayon  $c/n_o$ , il s'agit du même cercle que celui précédemment tracé car les deux prismes sont taillés dans le même matériau,
- un cercle  $C_{v(e)}$  de rayon  $c/n_e$ .

Ces deux dernières courbes sont tracées en pointillés.

La direction de l'axe optique du prisme ABC est telle que la lumière « verra » dans celui-ci l'anisotropie de la calcite : il convient donc de distinguer le rayon ordinaire et le rayon extraordinaire. Il existe deux modes de propagation dans le prisme ABC, ils sont polarisés rectilignement et perpendiculairement l'un par rapport à l'autre.

Pour obtenir le rayon extraordinaire réfracté : OO' est prolongé jusqu'à  $C_{v(o)}$  pour obtenir le point M. Le plan tangent en ce point à  $C_{v(o)}$  coupe AC en  $J_o$ . Depuis  $J_o$ , la tangente à  $C_{v(e)}$  est menée. Le point de tangence est  $h_e$  : O'h<sub>e</sub> est le rayon extraordinaire réfracté. Sa polarisation est parallèle à l'axe optique du second prisme. La direction du vecteur d'onde extraordinaire est celle du rayon extraordinaire car  $C_{v(e)}$  est un cercle.

Pour obtenir le rayon ordinaire réfracté : OO' est prolongé jusqu'à  $E_{v(e)}$  pour obtenir à nouveau le point M à partir duquel est construit le plan tangent à  $E_{v(e)}$

qui coupe AC en  $J_o$ . Depuis  $J_o$ , la tangente à  $C_{v(o)}$  est menée, ce qui donne  $h_o$  (confondu avec M) :  $O'h_o$  est le rayon ordinaire réfracté. Sa polarisation est perpendiculaire au rayon ordinaire et à la polarisation extraordinaire. À nouveau, la direction du vecteur d'onde ordinaire est celle du rayon ordinaire car la normale à l'onde est confondue avec le rayon ( $C_{v(o)}$  est un cercle).

Le premier prisme ne sépare donc pas les rayons, c'est la réfraction sur l'hypothénuse qui effectue la séparation.

L'angle d'incidence du rayon ordinaire sur AB est  $r_o = 0$ , celui du rayon extraordinaire est  $r_e = \theta_e - \theta$ .

Au niveau de AC, on peut appliquer la loi de Descartes pour les rayons car ceux-ci sont confondus avec les normales aux ondes :

$$\underbrace{n_o \sin \theta}_{\text{dans ACD}} = \underbrace{n_e \sin \theta_e}_{\text{dans ABC}}$$

$$\text{soit } n_o \sin \theta = n_e \sin (r_e + \theta)$$

3. L'axe optique de ABC étant perpendiculaire au plan d'incidence et considérant l'ellipsoïde des indices, dans le prisme ABC, l'indice associé au rayon ordinaire (respectivement extraordinaire) est  $n_o$  (respectivement  $n_e$ ). De plus, les rayons étant confondus avec les normales aux ondes, les lois de Descartes s'appliquent pour chacun des rayons au passage par l'interface AB. Ainsi, le rayon ordinaire traverse AB sans être dévié. Le rayon extraordinaire émerge du deuxième prisme en faisant un angle  $i_e$  tel que

$$n_e \sin r_e = \sin i_e = \sin D$$

Pour les déviations faibles :

$$n_e r_e \approx D$$

La relation de la question précédente devient :

$$\begin{aligned} n_o \sin \theta &= n_e \sin (r_e + \theta) \\ &= n_e (\sin r_e \cos \theta + \sin \theta \cos r_e) \\ &\approx n_e (r_e \cos \theta + \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\text{soit } D \cos \theta + n_e \sin \theta = n_o \sin \theta$$

$$\text{et donc } D = (n_o - n_e) \tan \theta$$

A.N :  $D \approx 5^\circ 7'$ . On vérifie a posteriori que les déviations sont faibles.

**Remarque** Si le prisme de Rochon est utilisé en tant que polariseur, le faisceau émergent  $R_o$  demeure aligné avec le faisceau incident quand le dispositif tourne autour du rayon incident.



# Bibliographie

- [1] E. Amzallag, J. Cipriani, et N. Piccioli. *Ondes électromagnétiques et milieux*. Dunod, 2005.
- [2] A. Angot. *Complément mathématique à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Édition de la revue d'optique, Masson, 1965.
- [3] M. Bertin. *Électromagnétisme 4 - Milieux diélectriques et milieux aimantés*, Bordas, 1984.
- [4] M. Bertin, J.-P. Faroux, et J. Renault. *Cours de physique : électromagnétisme*. Tomes 1 et 3. Dunod, 1992.
- [5] D. Cordier. *Cours de physique : électromagnétisme*. vol. 1. Dunod, 2004.
- [6] D. Cordier. *Cours de Physique pour la Licence - Électromagnétisme Tome 2 : phénomènes d'induction et ondes électromagnétiques*. Dunod, 2007.
- [7] J.P. Dubarry-Barbe et A. Frey. *Électromagnétisme optique*. Ellipses, 1999.
- [8] M. Dubois, *Matériaux isolants*, IGEE-403 Matériaux de l'électrotechnique, 2006.
- [9] G. Dubost. *Propagation libre et guidée des ondes électromagnétiques*. Masson, 1995.
- [10] J.A. Edminister et C. Lepoittevin-Castelin. *Électromagnétisme*. Ediscience, 1980.
- [11] J. Faget et L. Martin. *Exercices et problèmes d'optique physique à l'usage des étudiants de licence, de maîtrise et d'agrégation et des candidats aux grandes écoles*. Vuibert, 1977.
- [12] R. Feynman. *Le cours de physique de Feynman - Électromagnétisme 2*. Dunod, 2013.
- [13] R. Feynman. *Le cours de physique de Feynman - Électromagnétisme 1*. Dunod, 2015.
- [14] C. Garing. *Électromagnétisme dans la matière : exercices et problèmes corrigés et commentés posés à l'écrit et à l'oral des concours et examens de l'enseignement supérieur*. Ellipses, 1995.
- [15] C. Garing. *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs : Ondes 2, 52 exercices et problèmes corrigés et commentés posés à l'écrit et à l'oral des concours et examens de l'enseignement supérieur*. vol. 2. Ellipses, 1998.
- [16] H. Gie et J.P. Sarmant. *Électromagnétisme*. Bailliere, 1982.
- [17] D. Halliday, R. Resnick, et A. Lebel. *Électricité et magnétisme*. Annales de la faculté des sciences de l'université de Clermont : Physique. Éditions du renouveau pédagogique, 1979.

- [18] M. Henry et A. Kassiba. *Mini manuel d'électromagnétisme : électrostatique, magnétostatique*. Dunod, 2013.
- [19] M.C. Herpin. *Électromagnétisme : MP MP\*, PT PT\*, PC PC\*, PSI PSI\**. Classe prépa : 2<sup>e</sup> année. Nathan, 2008.
- [20] S. Huard. *Polarisation de la lumière*. Masson, 1994.
- [21] M. Hulin et J.P. Maury. *Les bases de l'électromagnétisme : cours et problèmes résolus*. Dunod, 1999.
- [22] A.K. Jonscher, *Dielectric Relaxation in Solids*, Chelsea Dielectrics Press, 1984.
- [23] H. Lumbroso. *Magnétostatique : Problèmes résolus*. Ediscience, 1996.
- [24] G. Millot, J. Fatome, S. Pitois, et P. Tchofo Dinda. *Communications ultra-rapides à longue distance*. uB Sciences-Université de Bourgogne, 2003.
- [25] F. Ndagijimana et F. Gaudaire. *Au cœur des ondes : les champs électromagnétiques en question*. Dunod, 2013.
- [26] M. Nicolas. *Ondes et électromagnétisme*. Dunod, 2009.
- [27] R. Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*. Masson, 1989.
- [28] J.P. Pérez, R. Carles, et R. Fleckinger. *Électromagnétisme : fondements et applications*. Dunod, 2002.
- [29] G.G. Raju, *Dielectrics in Electric Fields*, Marcel Dekker Inc., 2003.
- [30] R. Taillet. *Les bases de l'électromagnétisme*. De boeck supérieur, 2013.
- [31] P. Tchofo Dinda, A. Labruyere, A. B. Moubissi, K. Nakkeeran, J. Fatome, S. Pitois, et G. Millot, *Analyse des procédés de conception des systèmes de transmission par fibre à haute densité de gestion de la dispersion pour des communications ultra-rapides* Ann. Télécommun. vol **58**, pp. 1785–1808, 2003.
- [32] A. Zenina, J. C. Dupré, et A. Lagarde. Separation of isochromatics and isoclinics patterns of a slice optically isolated in a 3d photoelastic medium. *European Journal of Mechanics*, 18:633–640, 1999.

# Index

## A

aimantation, 68  
amplification optique, 313  
angle solide, 8  
axes neutres, 293  
axes principaux, 289

## B

bande de conduction, 154  
bandes d'énergie, 153  
bandes d'énergie permises, 154  
BaTiO<sub>3</sub> (titanate de baryum), 350  
BBO (bêta borate de baryum,  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub>), 314  
biréfringence, 318, 339  
boucle de courant, 80

## C

champ électrique, 25  
champ électrostatique, 25  
champ d'induction magnétique, 27  
champ de Lorentz, 117  
champ électrique local, 117  
champ induction, 257  
champ magnétostatique, 28  
charges liées, 76  
charges libres, 76  
chauffage par induction  
    électromagnétique, 38  
circulation d'un champ de vecteur, 4  
coefficient d'atténuation, 147  
compensateur de Babinet, 297  
conditions aux limites, 86  
conditions d'existence des plasmons  
    de surface, 165  
conductivité, 94  
configuration Kretschmann, 173  
configuration Otto, 173  
conjugaison de phase, 313  
constantes diélectriques  
    des milieux dilué, 120  
constantes diélectriques principales, 289  
construction d'Huygens, 344  
construction de Descartes, 344  
coulomb, 24  
courant de conduction, 76  
courant de déplacement, 31  
courant de polarisation, 79  
courants libres, 76  
courants liés, 76

cristaux photoréfractifs, 313

## D

dégénérescence des modes, 232  
densité de charges mobiles, 29  
densités de courants équivalentes  
    à l'aimantation, 82  
densités de courant de polarisation, 79  
densité volumique d'énergie  
    électromagnétique, 47  
densité volumique de charges, 29  
déplaceur polarisant, 348  
diagramme de rayonnement du dipôle, 57  
dipôle électrique, 53  
dipôle magnétique, 67, 80  
divergence d'un vecteur, 4  
double réfraction, 343

## E

effet de peau, 103  
effet Joule, 95  
électrostatique, 24  
électrons de cœur, 148  
électrons de valence, 148  
ellipsoïde des indices, 298  
énergie de gap, 154  
énergie électromagnétique, 47  
équation caractéristique, 229  
équations de Bessel, 224  
équation de Fresnel, 316  
équation de Maxwell, 33  
équation de Maxwell-Ampère, 31  
équation de Maxwell-Gauss, 33

## F

fibre à gradient d'indice, 214  
fibre à saut d'indice, 214  
    monomode, 214  
    multi-mode, 214  
fibre optique, 215  
flux d'un champ vectoriel, 2  
fonction de Bessel, 221  
fonction de Bessel modifiée, 221  
fonction de Hankel modifiée, 221  
fonction diélectrique, 154  
fréquence de coupure des modes, 203  
fréquence de coupure du plasmon  
    de surface, 171  
fréquence plasma, 152

fréquence plasmon de volume, 152

## G

gaz d'électrons libres, 162

gradient d'une fonction, 6

guide d'onde rectangulaire, 199

## H

hélicité, 260

## I

imperméabilité électrique, 315

indice complexe, 131

indice d'extinction, 131

induction électrique, 79

induction électromagnétique, 31

indices de réfraction principaux, 289

infrarouge, 121

intrication quantique, 314

isolant, 154

isolateur de Faraday, 290

## J

jauge de Coulomb, 36

jauge de Lorentz, 36

## L

lame à retard, 261

lame demi-onde, 294

lame quart d'onde, 295

laplacien scalaire, 7

laplacien vectoriel, 7

loi d'Ampère, 28

loi d'Ohm locale, 94

loi de Biot-Savart, 27

loi de conservation de la charge, 29

loi de Coulomb, 24

loi de Faraday, 31

loi de Gauss, 26

loi de Joule, 94

loi de Lenz, 31

lois fondamentales de l'électrostatique, 24

lumière naturelle, 261

## M

matrices de Jones, 266

mélange à quatre ondes, 313

méthode de Descartes, 344

micro-ondes, 122

milieu anisotrope, 286

milieu biaxe, 290

milieu homogène, 91

milieu isotrope, 91

milieu linéaire, 91

milieu uniaxe, 290

mode EH, 233

mode fondamental, 203

mode hybride, 228

mode propre de propagation, 293

mode propre extraordinaire, 341

mode propre ordinaire, 341

mode TE, 199

mode  $TE_{mn}$ , 204

mode TEM  
(transverse électromagnétique), 196

mode TM

(mode transverse magnétique), 199

modèle de Drude, 148

modèle de Drude de la permittivité  
diélectrique, 151

modèle de Drude modifié, 153

moment dipolaire induit, 74

moment magnétique, 81

## N

nappe, 321

extraordinaire, 342

ordinaire, 342

## O

onde plane, 38

onde radio, 122

onde sphérique, 42

opérateur nabla, 7

optique non linéaire, 313

## P

perméabilité du milieu, 93

perméabilité du vide, 27

perméabilité magnétique relative, 93

permittivité diélectrique généralisée, 153

permittivité diélectrique relative, 91

permittivité du milieu, 91

photo-élasticimétrie, 22

plan d'onde, 258

polarisabilité, 118

atomique, 118

d'orientation, 118

électronique, 118

polarisation, 68

d'orientation, 76

électronique, 76  
 ionique, 76  
 polariseur à réflexion totale, 349  
 polariton de plasmon de surface, 172  
 potentiel électrique, 25  
 potentiel électrostatique, 26  
 potentiel retardé, 36  
 potentiel vecteur, 27  
 prisme de Glan-Foucault, 349  
 prisme de Glan-Thompson  
   ou de Glazebrook, 349  
 prisme de Glan-Taylor, 349  
 prisme de Nicol, 349  
 prisme de Rochon, 348  
 prisme de Wollaston, 348  
 pulsation de coupure, 203

**R**

rayon gamma, 121  
 rayon X, 121  
 rayonnement dipolaire électrique, 53  
 régime de propagation monomode, 240  
 règle du « bonhomme d'Ampère », 80  
 relation de Clausius-Mossotti, 119  
 relation de dispersion, 38  
 relation de dispersion des modes TE, 203  
 relation de Langevin-Debye, 120  
 relation de Sellmeier, 131  
 relations constitutives  
   pour les milieux LHI, 90  
 relations de continuité, 88  
 relations de discontinuité, 88  
 relations de passage, 86  
 relations de passage aux interfaces, 89  
 repère propre, 289  
 réponse macroscopique  
   du milieu matériel, 68  
 réponse optique des métaux nobles, 153  
 représentation de Jones, 263  
 représentation de Stokes, 266  
 réseaux de communication, 213  
 résolution graphique de l'équation  
   caractéristique, 241  
 rotationnel d'un vecteur, 6

**S**

semi-conducteur, 154  
 séparateurs d'états de polarisation, 347, 348  
 $\text{Sn}_2\text{P}_2\text{S}_6$  (hypothio-diphosphate d'étain), 350  
 spectre cannelé, 300  
 spectre électromagnétique, 121  
 surface à deux nappes, 321  
 surface des indices, 320  
 surface des vitesses radiales, 338  
 susceptibilité des milieux denses, 119  
 susceptibilité électrique, 91, 93, 287  
 susceptibilité magnétique, 93  
 système apolaire, 72  
 système polaire, 72

**T**

teinte de Newton, 299  
 tenseur de permittivité diélectrique  
   relative, 288  
 tenseur de susceptibilité diélectrique, 288  
 tenseur de susceptibilité électrique, 91  
 tenseur diélectrique, 288  
 théorème de Green-Ostrogradsky, 11  
 théorème de la divergence, 4  
 théorème de superposition, 293  
 théorème de Stokes, 6  
 théorème du Rotationnel, 6  
 transition inter-bande, 153  
 transition intra-bande, 155  
 transverse, 257

**U**

ultra-haut débit, 213  
 ultraviolets, 121

**V**

vecteur aimantation, 82  
 vecteur de Poynting, 49  
 vecteur de Poynting complexe, 96  
 vecteur densité de courant, 29  
 vecteur polarisation, 75  
 vitesse radiale, 338