PHYSIQUE

TOUT-EN-UN POUR LA LICENCE

Cours, applications et exercices corrigés

Sous la direction de

Laurent Gautron

Maître de conférences à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

Christophe Balland
Maitre de conférences à l'université Paris Sud

Alain Angelié
Ingénieur physicien au CEA

Cyrille Sylvestre
PRAG à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

Jean-Luc Battaglia
Professeur à l'université Bordeaux 1

Jean Denape
Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes (ENIT)

Laurence Ferrand-Tanaka
PRAG à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

Laurent Cirio
Maître de conférences à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée

Yves Berthaud
Professeur à l'université Pierre et Marie Curie (UPMC)

Arnault Monavon
Maître de conférences à l'université Pierre et Marie Curie (UPMC)

Jean-Yves Paris
Maître de conférences à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes (ENIT)

DUNOD

Illustration de couverture :
© 2009 ESA-CNES-ARIANESPACE
Photo optique vidéo CSG
Décollage d'une fusée Ariane 5

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2010
ISBN 978-2-10-055558-1

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

TABLE DES MATIÈRES

La Physique pour comprendre la nature 1
1 La physique et les questions sur le monde 2
2 La physique science expérimentale 4
3 La physique ou la nature « modélisée » 7
4 La physique et la relativité 11
5 Vers une physique unifiée 16
6 Un Tout-en-un de physique 20

MÉCANIQUE

CHAPITRE 1 • **CINÉMATIQUE DU POINT** 25
1.1 Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps 25
1.2 La vitesse du point matériel *M* 32
1.3 L'accélération du point matériel *M* 37
Exercices 40

CHAPITRE 2 • **DYNAMIQUE DU POINT** 43
2.1 Principes de la Dynamique Newtonienne 43
2.2 Travail et énergie 51
Exercices 61

CHAPITRE 3 • **MÉCANIQUE TERRESTRE ET CÉLESTE** 65
3.1 Changement de référentiel 66
3.2 Dynamique en référentiel non galiléen 75
3.3 Théorème du moment cinétique 79
Exercices 86

CHAPITRE 4 • **MÉCANIQUE DES SOLIDES INDÉFORMABLES** 89
4.1 Cinématique du solide indéformable 89
4.2 Cinétique 94
4.3 Liaisons 99

4.4 Statique des solides 100
4.5 Dynamique 102
Exercices 111

CHAPITRE 5 • **FLUIDES PARFAITS** 115
5.1 Statique 116
5.2 Cinématique 119
5.3 Dynamique 123
5.4 Théorèmes de Bernoulli 125
5.5 Résultante des forces 128
Exercices 129

CHAPITRE 6 • **FROTTEMENT VISQUEUX** 133
6.1 Écoulements laminaires 133
6.2 Écoulement en conduit rectiligne 136
6.3 Écoulements turbulents 137
Exercices 140

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE 7 • **SYSTÈMES THERMODYNAMIQUES** 145
7.1 Notions de base 146
7.2 Température d'un corps 147
7.3 Pression dans un fluide 149
7.4 Les gaz parfaits 151
7.5 Énergie et transfert d'énergie 154
7.6 Validité des formules 159
Exercices 161

CHAPITRE 8 • **LES DEUX PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE** 165
8.1 Le premier principe de la thermodynamique 165
8.2 Le second principe de la thermodynamique 168
8.3 Application aux gaz parfaits 171
8.4 Les gaz réels 174
Exercices 180

CHAPITRE 9 • **LES MACHINES THERMIQUES** 183
9.1 Généralités sur les machines thermiques 184
9.2 Les machines thermiques dithermes 187
9.3 Moteur thermique ditherme 190
9.4 Machine frigorifique et pompe à chaleur ditherme 195
9.5 Machine ditherme fonctionnant au contact de sources de températures variables 199
Exercices 201

CHAPITRE 10 • **INITIATION AUX TRANSFERTS THERMIQUES** 203
Introduction 203
10.1 Le phénomène de conduction de la chaleur 203
10.2 Transfert de chaleur par convection 210
10.3 Convection naturelle 213
10.4 Le rayonnement thermique 214
Exercices 222

OPTIQUE

CHAPITRE 11 • **NATURE ET PROPAGATION DE LA LUMIÈRE** 225
11.1 Introduction 225
11.2 Nature de la lumière 226
11.3 Applications 237
Exercices 243

CHAPITRE 12 • **FORMATION DES IMAGES EN OPTIQUE** 245
12.1 Introduction 245
12.2 Approximations de gauss 246
12.3 Relations fondamentales des systèmes centrés – Cas des miroirs et dioptres 252
12.4 Lentilles minces 258
12.5 Notions de physiologie de l'œil 266
Exercices 269

CHAPITRE 13 • **OSCILLATIONS ET ONDES** 271
13.1 Oscillations 271
13.2 Propriétés des mouvements sinusoïdaux 272
13.3 Oscillateur harmonique 273

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

13.4 Oscillateur harmonique amorti 277
13.5 Oscillations entretenues 280
13.6 Ondes 283
Exercices 288

CHAPITRE 14 • **INTERFÉRENCES ET DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES** 291
14.1 Introduction 291
14.2 Interférences lumineuses à deux ondes 292
14.3 Diffraction des ondes lumineuses 298
Exercices 308

CHAPITRE 15 • **SPECTROSCOPIE OPTIQUE** 311
15.1 Introduction 311
15.2 Spectres des sources lumineuses 312
15.3 Spectroscope à prisme ou à réseau 315
15.4 Spectroscope interférentiel 320
Exercices 320

ÉLECTROSTATIQUE ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE 16 • **ÉLECTROSTATIQUE** 325
16.1 Charges électriques 325
16.2 Forces et champs électrostatiques créés par des charges ponctuelles 329
16.3 Champs électrostatiques créés par des distributions continues de charges 332
16.4 Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique 333
16.5 Calculs de potentiels électrostatiques 335
16.6 Calcul d'un champ électrostatique à partir du potentiel 337
16.7 Énergie potentielle électrostatique 337
16.8 Théorème de gauss 337
16.9 Calcul d'un champ électrostatique par application du théorème de Gauss 339
16.10 Discontinuité de la composante normale du champ électrique à la traversée d'une surface chargée 340
16.11 Analogie électrostatique – Gravitation 340
Exercices 343

CHAPITRE 17 • **MAGNÉTOSTATIQUE** 345
17.1 force de Lorentz 346

17.2 Champ magnétique créé par un circuit filiforme parcouru par un courant 347
17.3 Propriétés du champ magnétique 349
17.4 Force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant 352
17.5 Effet Hall 355
17.6 Comparaison des champs électrostatique et magnétique 356
Exercices 358

CHAPITRE 18 • **ÉLECTROMAGNÉTISME** 363
18.1 Induction électromagnétique 364
18.2 Auto-induction 368
18.3 Équations de Maxwell et propagation du champ électromagnétique 370
Exercices 376

ÉLECTRICITÉ

CHAPITRE 19 • **ÉLECTRICITÉ** 381
19.1 L'électricité : une brève introduction 381
19.2 Grandeurs électriques fondamentales 382
19.3 modélisation des circuits électriques 386
Exercices 395

CHAPITRE 20 • **CIRCUITS EN RÉGIME CONTINU** 397
20.1 Étude des circuits en régime continu établi 398
20.2 Établissement du régime continu 405
Exercices 412

CHAPITRE 21 • **CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL** 415
21.1 Étude des circuits en régime sinusoïdal établi 416
21.2 Puissances en régime sinusoïdal 421
21.3 Analyse harmonique 423
Exercices 429

CHAPITRE 22 • **DIODE À JONCTION** 431
22.1 Définition de la jonction 431
22.2 Jonction *pn* ou diode à jonction 432
22.3 Linéarisation de la caractéristique tension-courant — Modèles de la diode 434

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

22.4 Polarisation de la diode Point de fonctionnement statique 436
22.5 Fonctionnement en régime dynamique Notion de résistance dynamique de la diode . 437
22.6 Autres types de diodes 439
Exercices 442

CHAPITRE 23 • **LE TRANSISTOR BIPOLAIRE** 445
23.1 Introduction 445
23.2 Relations électriques fondamentales 446
23.3 Réseau de caractéristiques du transistor NPN — Régime statique 447
23.4 Polarisation du transistor, Point de fonctionnement statique, Droite de charge statique 449
23.5 Transistor en régime dynamique 450
Exercice 456

CHAPITRE 24 • **AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL** 459
24.1 Introduction 459
24.2 Caractéristiques d'un AOP 460
24.3 Notions sur la rétroaction 463
24.4 Grandeurs caractéristiques 465
Exercices 468

PHYSIQUE « MODERNE »

CHAPITRE 25 • **PHYSIQUE ATOMIQUE** 473
25.1 Introduction 473
25.2 Atome, électron et noyau 474
25.3 Onde électromagnétique et photon 475
25.4 Étude experimentale des éléments 478
25.5 Modèles classiques de l'atome 481
25.6 Modèles semi-quantiques de l'atome H 483
25.7 Ondes de matière 486
25.8 Mécanique quantique de Schrödinger 487
25.9 Atome d'hydrogène de Schrödinger 492
25.10 Moment magnétique orbital 495
25.11 Spin de l'électron et d'autres particules 496
25.12 Atome d'hydrogène avec spin 498
25.13 Atomes à plusieurs électrons 503

Exercices 509

CHAPITRE 26 • **PHYSIQUE NUCLÉAIRE** 511
26.1 Les nuclides et les particules associées 512
26.2 Dynamique relativiste 514
26.3 Masse et énergie de liaison nucléaires 519
26.4 Modèles du nuclide 521
26.5 Désintégrations et réactions nucléaires 524
26.6 Aspects probabilistes et cinétiques 533
26.7 Physique des particules 536
Exercices 538

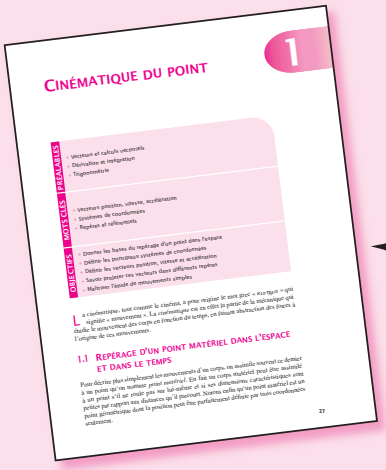
CHAPITRE 27 • **LA MATIÈRE** 541
27.1 États et structure de la matière 541
27.2 Liaison chimique et molécules 543
27.3 Potentiel intermoléculaire 550
27.4 Solides cristallins 551
Exercices 556

Problème Général : physique dans l'espace 557

Solution du problème général 573

Bibliographie 631

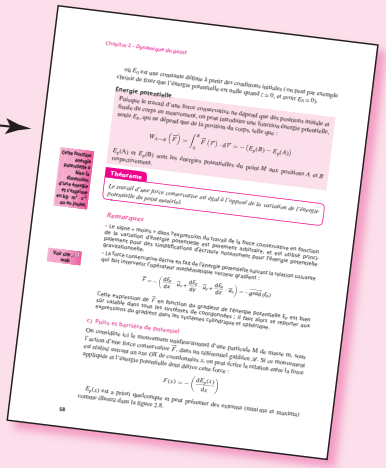
Mode d'emploi de

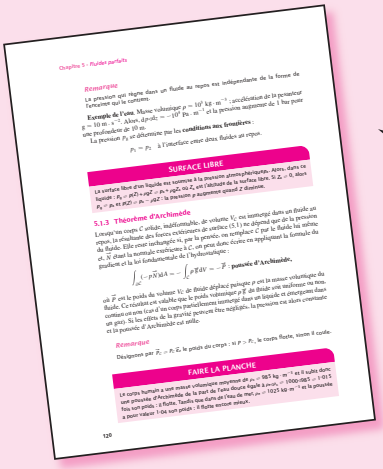


– Les **préalables**, c'est-à-dire les révisions nécessaires avant la lecture du chapitre.
– Les **mots clés** référencés.
– Les **objectifs** à atteindre : le chapitre est à relire, les exercices sont à refaire jusqu'à leur parfaite maîtrise

Les points importants et les définitions fondamentales du cours sont mis en évidence.

Les lois et théorèmes, à savoir par cœur, son parfaitement visualisés.

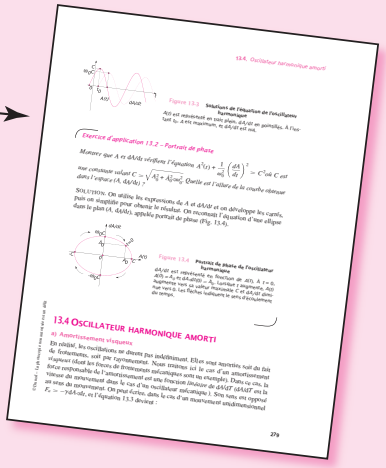




Les **Remarques** attirent l'attention sur une difficulté, donnent une méthode, précisent un point.

Des Encadrés éclaircissent une application ou fournissent des notes historiques qui complètent le cours.

Des **applications directes** du cours. La méthode de résolution est associée.

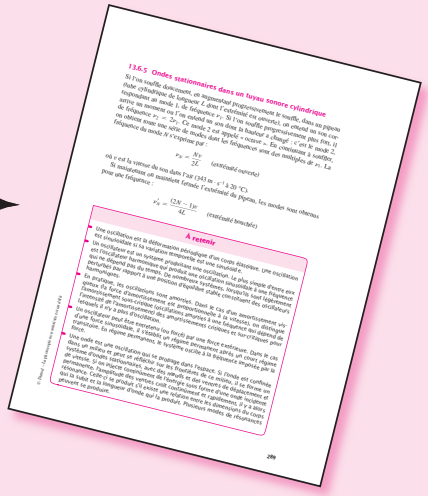


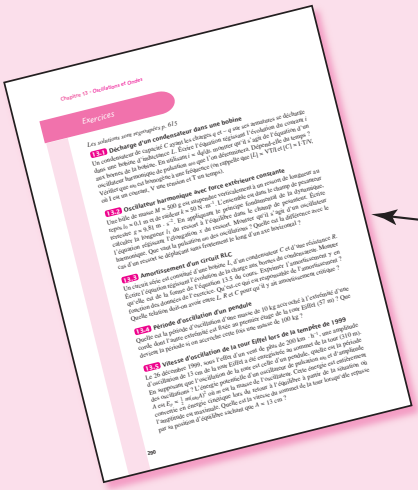


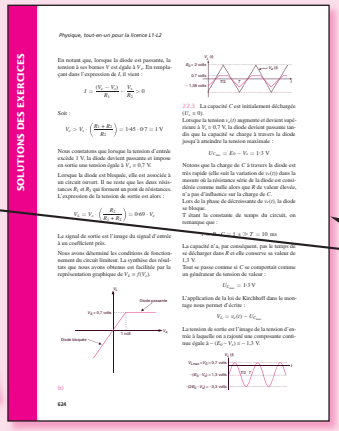
Dans les marges des renvois à des paragraphes, à des chapitres et aux bonus à télécharger sur le site web de Dunod.

cet ouvrage

À retenir regroupe les points fondamentaux. Il permet de vérifier ses connaissances avant de s'entraîner avec les exercices corrigés.

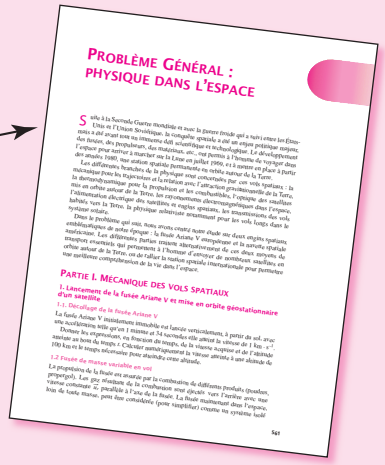




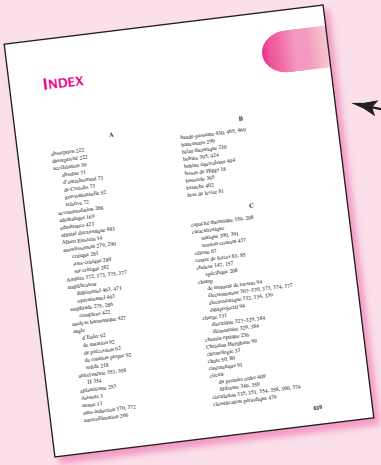


À la fin de chaque chapitre des **exercices d'entraînement**, tous corrigés. Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage, pages 591 à 630.

Un problème général regroupe tous les domaines de la physique étudiés dans l'ouvrage. Entièrement corrigé, il constitue la synthèse parfaite pour préparer les examens.



Une **bibliographie** regroupe la liste des ouvrages complémentaires et des sites internet pour en savoir plus.



L'**index** permet de retrouver facilement une notion précise.

Bonus Web

Retrouvez sur le site www.dunod.com/Tout-en-un/Physique :

– des compléments au cours ;

– des expériences, des démonstrations et des figures permettant de « visualiser » les notions abordées dans l'ouvrage ;

– deux chapitres complets : « Oscillations mécaniques » et « Mécanique des systèmes ».

La Physique pour comprendre la nature

PRÉALABLES

- Connaissances de base en physique (lycée)
- Notions d'histoire et d'histoire des sciences

MOTS CLÉS

- Phénomènes naturels
- Physique et technologie
- Science expérimentale

OBJECTIFS

- Comprendre le cheminement historique de la pensée en physique
- Décrire comment la physique permet de décrire la nature
- Donner le mode d'utilisation de cet ouvrage Tout-en-Un

La physique c'est quoi ? À quoi sert-elle ? Comment les idées scientifiques en physique sont-elles nées ? Comment ces idées ont évolué et où en sommes-nous aujourd'hui ? Quelle est la place de l'expérience en physique ? Autant de questions que nous proposons d'explorer et auxquelles nous tentons de donner une ou des réponses dans ce chapitre. L'objectif n'est pas ici de présenter un cours sur l'histoire de la physique, mais simplement de resituer dans une chronologie et une évolution, les différents thèmes abordés dans cet ouvrage. L'objectif est également de montrer l'importance de certains physiciens dans l'évolution des idées en physique. Comment de telles expériences, découvertes ou théories ont-elles pu germer dans l'esprit de ces scientifiques ? Voilà le genre de questions auxquelles il est impossible de répondre, tout comme pour les artistes et leurs créations par exemple. Ces idées scientifiques sont souvent le fruit de la combinaison complexe d'une très forte intuition, d'une très forte imagination et également d'une capacité à remettre en cause les principes et dogmes admis par tous. Cette question du génie scientifique a intrigué et intriguera toujours les hommes : le pathologiste D^{r} Thomas Harvey a ainsi étudié, dit-on, le cerveau d'Albert Einstein pour essayer en vain d'y déceler des signes de son génie...

1 La physique et les questions sur le monde

D'abord, l'étymologie permet de comprendre beaucoup de choses : le mot « physique » vient du grec φυσικος qui signifie « qui concerne la nature ou l'étude de la nature ». En effet, cette science a commencé par et à travers les observations de la nature, et par des questions que se sont posées les hommes face à la nature et aux phénomènes naturels. Donc la physique est la science qui permet de décrire, comprendre la nature ; c'est pour cette raison que, pendant longtemps, on parlait plutôt de *philosophie naturelle* quand on essayait d'expliquer l'origine de phénomènes naturels.

Les premiers questionnements des hommes se sont focalisés sur ce qu'ils observaient dans le ciel. Le mouvement des planètes, les étoiles, le Soleil, les éclipses, les arcs-en-ciel, la place de la Terre dans l'Univers, ses mouvements, le jour, la nuit, etc., étaient autant de manifestations « extraordinaires » de la nature. La physique a ainsi pris naissance du fait de la curiosité des hommes face aux phénomènes naturels. Les premiers « physiciens » ont en fait été de brillants astronomes, et comme leurs questions tournaient autour de l'Univers, de la Terre, de l'homme dans l'Univers, ils étaient aussi souvent de grands penseurs et de grands philosophes.

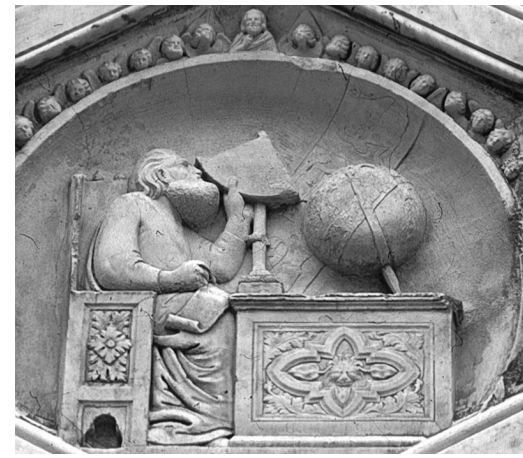


Figure 1 Astronome réalisant des mesures d'angles avec un gnomon (cadran solaire constitué d'une tige dont l'ombre se projette sur une surface plane)
Bas-relief du baptistère de Florence. Photographie de D. Decobecq.

Les Babyloniens ont observé le ciel pendant des millénaires mais ce sont les savants grecs qui ont commencé, autour de 500 av. J.-C., à élaborer des modèles permettant d'expliquer les phénomènes naturels observés. Ces savants, parmi lesquels on peut citer Thalès, Pythagore ou Euclide, ont été à l'origine de lois et de théorèmes toujours en vigueur aujourd'hui.

Les savants grecs, notamment au cours des périodes classique et hellénistique (V^{e} – I^{er} siècle av. J.-C.) se sont interrogés sur le monde les entourant : la nature de la matière, le mouvement des astres, la place de la Terre dans l'Univers. Ils se sont posé des grandes questions qui sont toujours d'actualité : l'origine des choses, la création, le fini et l'infini, le continu et le discontinu... S'appuyant sur les connaissances acquises notamment en Orient au cours des siècles précédents, ils ont réalisé de nombreux calculs et des premières mesures pour essayer de mieux « cerner » le monde dans lequel ils se

trouvaient. Les résultats se sont révélés relativement précis, notamment au regard des moyens mis en jeu à l'époque, et c'est une des raisons pour lesquelles leurs modèles ont été utilisés (tout en les améliorant et les affinant) au cours des siècles suivants, jusqu'à ce que les progrès techniques permettent de nouvelles mesures plus précises et plus fiables.

Les savants grecs ont très tôt tenté d'appliquer un modèle mécanique du monde, en considérant l'intervention divine seulement pour les causes premières des phénomènes. Ainsi Thalès (vers 625 av. J.-C. – vers 547 av. J.-C.) proposa que la Terre flottât sur l'eau, d'autres tels Anaximène (vers 585 av. J.-C. – vers 525 av. J.-C.) pensaient qu'elle flottait dans l'air. Les pythagoriciens voyant les bateaux disparaître à l'horizon furent les premiers à énoncer que la Terre était sphérique. Les savants grecs proposèrent également une théorie de la matière dans laquelle les manifestations que sont l'eau, le

ARISTOTE (384 AV. J.-C. – 322 AV. J.-C.)

Aristote (384 av. J.-C. – 322 av. J.-C.), est sans aucun doute un des grands hommes de la période antique, à la fois philosophe mais aussi scientifique. Né dans l'actuel Macédoine, Aristote reprit les idées et les concepts des savants grecs qui l'avaient précédé, pour proposer une vision du monde qui s'imposa aux hommes de l'Antiquité pendant les siècles qui suivirent.

Une de ses œuvres majeures s'appelle *La Physique* ; c'est la première fois que l'on nomme ainsi la science traitant de la nature, des phénomènes naturels et de leurs causes. La physique dite aristotélicienne fut admise jusqu'au XV^{e} siècle. Aristote expliquait notamment le mouvement des objets par une tendance à retourner vers leur lieu d'origine : il fait alors une différence entre deux éléments légers (air et feu) et deux éléments lourds (terre et eau), ces quatre éléments permettant de décrire tout ce qui existe. Se fondant sur le principe dictant que la Nature a horreur du vide, Aristote propose le terme d'*éther* pour désigner un cinquième élément constituant la sphère céleste. Cette notion continuera à être utilisée jusqu'au XIX^{e} siècle.

Selon son modèle, les éléments légers ont tendance à retourner vers leur place naturelle stable, c'est-à-dire le ciel ou plutôt l'extrémité de l'Univers, tandis que les éléments lourds tendent à se déplacer vers leur origine, le centre de la Terre considéré comme le centre de l'Univers. Aristote parle alors de mouvement naturel lorsqu'il évoque les mouvements de ces éléments ; il parle de mouvements forcés (ou violents) pour ceux résultant de l'action de forces extérieures (notamment dues à l'homme).

Aristote est un physicien de sens commun. Ses théories permettent d'expliquer de manière directe les phénomènes observés : une bille de plomb tombe plus vite qu'une bille de mousse car sa tendance à rejoindre sa place naturelle est plus forte (et la bille de mousse contient *a priori* plus d'élément « air » que la bille de plomb, ce qui la retient un peu plus vers le haut).

À l'époque, l'apport d'Aristote à la physique fut considérable : il a notamment montré que l'on pouvait expliquer les phénomènes observés par une suite d'arguments découlant les uns des autres, qu'on peut appeler des démonstrations. Cependant sa théorie se trouva limitée car elle reposait sur des postulats issus de l'observation directe, sans instruments.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

feu, l'air ou la terre, sont les fruits de combinaisons d'un nombre fini d'éléments. Le philosophe Anaximandre (vers 610 av. J.-C. – vers 547 av. J.-C.) proposa que l'infini fût une matière indéterminée contenant en lui-même les contraires (tels que le froid et le chaud, le sec et l'humide...) qui ne font que se séparer lorsqu'ils se manifestent.

Parmi les savants grecs importants de l'Antiquité, Claudius Ptolémée (90-168) est un astronome brillant dont l'œuvre a marqué cette discipline pendant près de treize siècles puisque ses modèles ont été admis et utilisés en Occident et en Orient pendant tout le Moyen Âge et jusqu'à la Renaissance.

PTOLÉMÉE (90-168)

Claudius Ptolemaeus communément appelé Ptolémée était un astronome grec qui vécut à Alexandrie (Égypte). Il fut l'auteur de plusieurs traités scientifiques qui furent des références pendant de nombreux siècles, jusqu'à ce que les progrès des instruments d'observation du ciel et des astres et les théories élaborées par Nicolas Copernic n'entraînent leur abandon. À noter que Ptolémée fut à l'origine de la loi de réfraction qui sera généralisée par Descartes au XVII^{e} siècle.

Pendant des siècles, son traité d'astronomie l'*Almageste* et ses *Tables manuelles* furent des références et des outils utilisés par les astronomes et les navigateurs, à la fois en Occident et en Orient, jusque dans le monde arabophone et en Inde.

Ptolémée reprend des modèles plus anciens élaborés par des savants grecs qui eux-mêmes s'étaient inspirés des observations et calculs réalisés et consignés par les Babyloniens au cours des siècles précédents. Ptolémée consacra en fait le modèle géocentrique de l'Univers : il reprit aussi l'idée d'un fluide parfait dans lequel nageaient les astres. Ses tables se sont révélées indispensables pour déterminer les positions des astres et pour commencer à expliquer leurs mouvements.

Le modèle de Ptolémée plaçant la Terre au centre de l'Univers ne fut abandonné par l'église que sous le pape Benoît XIV vers 1750, après plus d'un siècle de polémiques avec les partisans de l'héliocentrisme.

Ainsi les hommes de l'Antiquité ont fait de nombreuses observations dans le ciel et sur notre planète, ce qui leur a permis de proposer des explications à de nombreux phénomènes naturels. Cependant, à partir du XV^{e} siècle, l'analyse précise des phénomènes à l'aide d'instruments prouva que l'Homme pouvait avoir une perception erronée et que la seule observation est insuffisante pour expliquer la nature.

2 La physique science expérimentale

La renaissance de la physique commence au début du XV^{e} siècle, grâce notamment aux progrès techniques dans l'instrumentation qui permirent des avancées majeures dans notre connaissance du monde. Ainsi, Nicolas Copernic (1473-1543) est le premier (quelques savants grecs l'avaient suggéré) à proposer de placer le Soleil au centre de l'Univers (système **héliocentrique** ou système de Copernic), introduisant ainsi un



Figure 2 **Photographie, d'une durée cumulée de trois heures, du ciel observé depuis l'Observatoire de Haute Provence (OHP, près du village Saint-Michel l'Observatoire, département des Bouches-du-Rhône)**

À gauche sont dessinées en rouge les constellations de Cassiopée (en bas) et Céphée (en haut) ; au centre est représentée en rouge la constellation du Cygne. On distingue aussi les traînées de deux étoiles brillantes (Vega et Altair). On voit ici un exemple de perception erronée de la nature et des mouvements des corps célestes par la simple vue. Photographie prise par Alexandre Santerne.

modèle en contradiction avec celui admis par tous dans lequel les astres et les corps célestes tournent autour de la Terre (système **géocentrique**).

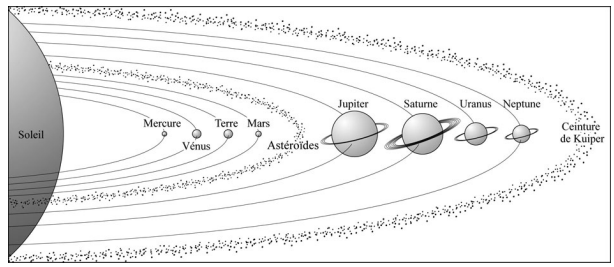


Figure 3 **Le système solaire avec le Soleil au centre de l'Univers comme proposé par Nicolas Copernic (système héliocentrique ou système de Copernic)**

Des progrès importants sont réalisés dans la conception des instruments d'observation du ciel. C'est ainsi que Galileo Galilei perfectionna la lunette astronomique et réalisa de nombreuses découvertes importantes sur notre système solaire.

GALILÉE (1564-1642)

Galileo Galilei Linco dit Galilée est un mathématicien et astronome italien. Il est considéré comme le père de la physique telle qu'on la conçoit de nos jours. En effet, Galilée considère que seules l'expérience et une réflexion soignée utilisant les mathématiques peuvent contribuer efficacement à une meilleure compréhension du monde. Pour lui, les

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

expériences permettent d'alimenter la réflexion sur les phénomènes naturels qu'on essaie d'expliquer. L'apport important de Galilée consista également à utiliser systématiquement un formalisme et un raisonnement mathématiques pour décrire les lois de la nature.



Figure 4 **Galilée présentant ses expériences des plans inclinés qui lui permirent de montrer que les distances parcourues sont proportionnelles au carré des temps**
Musée des Sciences de Florence. Photographie de D. Decobecq.

Deux œuvres majeures de Galilée ont particulièrement marqué l'histoire de la physique. En 1632, Galilée publie son *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* : dans cet ouvrage commandé par le pape, il imagine une discussion entre un partisan des idées de Copernic, un disciple des idées d'Aristote et un candide n'ayant pas d'opinion tranchée. Galilée montre qu'il partage les théories de Copernic, notamment l'héliocentrisme de l'Univers, c'est une des raisons pour lesquelles il fut poursuivi par l'inquisition et obligé d'abjurer ses thèses lors d'un procès célèbre en 1633. Galilée ne fut réhabilité par l'Église catholique qu'en 1992 après une dizaine d'années d'enquête.
En 1638, Galilée publie ses *Discours* ou plus précisément *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux nouvelles sciences touchant la mécanique et les mouvements locaux*. Dans cet ouvrage, Galilée établit les fondements de la mécanique en tant que science et marque ainsi la fin de la physique dite aristotélicienne. Pour lui, il faut désormais quantifier les phénomènes pour les comprendre et pour cela les mesures doivent être précises, effectuées avec des instruments fiables. Avant Galilée on était incapable de prévoir la durée d'une chute. Avec l'apparition du chronomètre, Galilée découvre un concept essentiel de la mécanique : l'accélération. Galilée établit la loi de chute des corps à partir d'expériences réalisées avec des plans inclinés et des billes rondes et lisses : il montre que les distances parcourues sont proportionnelles au carré du temps.
Galilée montra l'exemple aux nouveaux « philosophes de la nature » (appelés physiciens plus tard) : l'observation directe ne suffit pas, il faut effectuer des mesures avec des instruments, il faut quantifier les phénomènes pour les interpréter. La physique devient plus compliquée, plus mathématique, et requiert alors un apprentissage du langage, du raisonnement et des protocoles de mesure. Cette réflexion très profonde et moderne sur la méthode scientifique est brillamment exposée dans son ouvrage *Il Saggiatore* (L'Essayeur) publié en 1623.



Galilée a notamment énoncé le principe de relativité avec l'exemple du bateau : toutes les expériences de mécanique sont identiques dans un bateau qu'il soit au repos ou en translation uniforme, autrement dit aucune expérience réalisée à bord d'un navire ne permet de distinguer lorsque le navire est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme. Ainsi Galilée, contre les adversaires de Copernic qui affirmaient que « si la Terre bouge, on devrait s'en apercevoir », définit des observateurs équivalents en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres. Einstein les appellera « observateurs galiléens ». Il appellera « transformation de Galilée » la formule permettant de passer d'un référentiel ou observateur galiléen à un autre.

Galilée a donc adopté les idées de Copernic et a construit une nouvelle physique cohérente à partir de ces idées. Il a notamment montré que, contrairement au dogme d'Aristote, le Ciel comme la Terre (les deux lieux d'origine de tous les éléments selon Aristote) est altérable. De nombreuses observations réalisées au cours de la vie de Galilée ont permis de confirmer ce concept : le passage de comètes, l'apparition d'étoiles nouvelles, les phases de Venus, les taches solaires, etc., sont autant de manifestations de l'altération des lieux supposés stables par Aristote.

Galilée a profondément bouleversé les idées communément admises à son époque, sur la nature et les phénomènes naturels, sur la place de notre planète dans l'Univers, sur l'usage des mathématiques pour décrire le monde. Il a été un précurseur de génie en démontrant que l'expérience doit être à la base de toute explication des lois de la nature. On dit aussi que sans Galilée, il n'y aurait probablement pas eu Newton (à voir dans le paragraphe suivant). À noter aussi que Galilée, en plus de sa réflexion très poussée, a été aussi un très grand expérimentateur, concevant, réalisant des expériences originales et souvent capitales dans des domaines très variés (mécanique, magnétisme, optique, chaleur...).

3 La physique ou la nature « modélisée »

À partir de Galilée, les savants, profondément marqués par ses théories et ses méthodes, développent les instruments et réalisent des expériences de plus en plus fiables et précises qui permettent des avancées majeures dans notre connaissance du monde. Ils ont alors élaboré des théories pour décrire les phénomènes observés : ces modèles fondamentaux sont toujours enseignés de nos jours en physique.

L'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630), contemporain de Galilée, énonce en 1609 ses lois sur le mouvement des planètes. Le mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650) propose en 1629 sa loi de la réfraction applicable à un arc-en-ciel : résolument copernicien, il introduira la notion moderne de travail et de quantité de mouvement. On lui doit aussi la découverte de la géométrie analytique, et la simplification considérable des notations (quantités connues représentées par les lettres de l'alphabet, quantités inconnues représentées par x, y ou z). Christian Huygens (1629-1695), savant hollandais dont l'œuvre considérable a été un peu occultée par celles de Galilée et de Newton. On lui doit cependant la découverte de la conservation de la quantité de mouvement à travers l'étude des collisions élastiques. Il est aussi à l'origine de l'horloge à pendule, qui le conduira à établir l'existence de la force

centrifuge. Huygens a également publié des travaux importants en optique et en acoustique, montrant l'existence de la résonance et de la longueur d'onde. Cependant, Huygens n'a jamais adhéré au concept d'attraction à distance, et ne s'est pas résolu au calcul différentiel et intégral bien qu'ayant été lui-même précurseur du calcul infinitésimal.

Galilée meurt en janvier 1642, quelques mois avant la naissance en Angleterre d'un certain Isaac Newton, comme un passage de témoin entre deux personnages essentiels de l'histoire de la physique. Isaac Newton est considéré comme le plus grand scientifique de tous les temps, « titre » qu'il partage avec Albert Einstein qui sera évoqué dans le paragraphe suivant. L'œuvre de Newton est immense, avec des contributions essentielles en mathématiques et en fondant la mécanique classique dite « newtonienne » qui s'imposera pendant plus de deux siècles.

ISAAC NEWTON (1642-1727)

Isaac Newton naît le 25 décembre 1642 dans le hameau de Woolsthorpe dans le comté du Lincolnshire à environ 200 km de Londres. Il effectue ses études au Trinity College de Cambridge : il étudie notamment les éléments d'Euclide, la géométrie de Descartes, les Discours et Dialogues de Galilée, ainsi que les connaissances mathématiques de l'époque. Il devient bachelier ès arts à 23 ans. Doué d'une intuition hors du commun et d'une capacité à la réflexion permanente sur les sujets à traiter, Newton a permis des avancées décisives dans les domaines de la physique et des mathématiques. Il est, avec Gottfried Leibniz (1646-1716), le fondateur du calcul intégral et différentiel. Il trouve le développement en série de nombreuses fonctions.



Figure 5 **La légende veut qu'Isaac Newton ait trouvé la loi de gravitation universelle en regardant tomber des pommes dans un verger de son village natal**

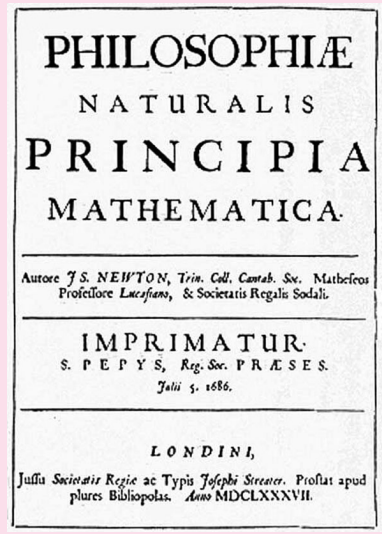
Photographie de D. Decobecq.

Newton a une grande maîtrise des mathématiques, ce qui lui permet d'élaborer les outils dont il a besoin pour ses recherches en physique. Les idées de Newton en mécanique « germent » lorsqu'il est encore étudiant à Cambridge, elles mûrissent pendant une vingtaine d'années et trouvent leur aboutissement lors de la rédaction de son œuvre

majeure, *Philosophiae naturalis principia mathematica* ou *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, publiée en 1687.

Cet ouvrage marque un tournant pour la physique : le principe d'inertie, le principe fondamental de la dynamique, le principe de l'action et de la réaction sont énoncés tels qu'ils sont encore enseignés de nos jours (voir chapitre 2 de cet ouvrage). Mais Newton définit aussi dans son ouvrage les lois des collisions, le mouvement des fluides et surtout la théorie de l'attraction universelle. La découverte de la force d'attraction gravitationnelle permet d'unifier mécanique terrestre et mécanique céleste, et avec les lois de Kepler (voir chapitre 3), il expliqua et démontra le mouvement des planètes sur leur orbite.

Newton aura une influence très importante sur de nombreux scientifiques dans des domaines variés : science, société, religion, philosophie. Cette influence s'est notamment exercée du fait de la simplicité et de l'efficacité de sa théorie de l'attraction universelle. Newton s'inscrit totalement dans la continuité de la méthode énoncée par Galilée : seules comptent les relations mathématiques découvertes par l'observation rigoureuse des phénomènes. Pour lui aussi, expériences et formalisme mathématique sont les bases de la physique.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J. S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Sc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Justu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Figure 6 Couverture de l'ouvrage majeur d'Isaac Newton qui est sans doute le livre le plus important de l'histoire de la physique

Cependant, la force de gravitation n'est pas seulement une force exercée par le Soleil sur les planètes, mais selon la loi de gravitation de Newton, tous les objets de l'Univers s'attirent mutuellement. Newton a réalisé que les planètes ne pouvaient pas passer deux fois sur la même orbite, et que les mouvements des objets célestes n'étaient pas constants : la voie était ainsi ouverte à la mécanique relativiste et à l'élaboration du principe de relativité par Albert Einstein.

Remarque

Il n'est pas possible de citer tous les scientifiques qui ont marqué l'histoire de la physique par leurs observations et leurs découvertes. L'objectif ici est de retracer les grandes lignes de la pensée humaine dans ce domaine essentiel qu'est la compréhension de la nature et du monde qui nous entoure.

À partir du XVI^{e} siècle, des avancées considérables sont réalisées par de nombreux scientifiques dans tous les domaines de la physique, du fait notamment des progrès techniques et des instruments d'observation. Ces outils ont permis la réalisation d'expériences essentielles pour la découverte des lois de la physique toujours enseignées de nos jours. Ces découvertes et ces scientifiques sont évoqués dans cet ouvrage, au fur et à mesure que sont décrits les différents domaines de la physique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cependant, il est important de citer quelques faits et découvertes remarquables, et les scientifiques qui leur sont associés : **Daniel Bernoulli** (1700-1782) et l'équation de l'hydrodynamique des fluides parfaits (voir chapitre 5) ; **Leonhard Euler** (1707-1783) et l'équation générale de l'hydrodynamique (voir chapitres 5 et 6) ; la mécanique analytique de **Joseph-Louis Lagrange** (1736-1813) ; la mécanique céleste de **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) (voir chapitre 3) ; **Charles Augustin Coulomb** (1736-1806) et la force électrostatique inversement proportionnelle au carré de la distance (voir chapitre 16) ; la notion de courant électrique (voir chapitre 19) et l'électrodynamique par **André-Marie Ampère** (1775-1836) ; **Michael Faraday** (1791-1867) et la notion de champ, l'électromagnétisme, l'induction, le comportement magnétique des matériaux (voir chapitres 16 à 18) : Faraday est considéré comme le plus grand expérimentateur de tous les temps du fait du nombre et de l'importance des expériences qu'il a réalisées ; **Georg Simon Ohm** (1789-1854) et sa loi ; **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) et son théorème ; **James Clerk Maxwell** (1831-1879) et ses équations (voir chapitre 18) ; **Heinrich Hertz** (1857-1894) et la naissance des transmissions hertziennes ; **Christian Huygens** (1629-1695) et son concept d'onde pour la lumière (voir chapitres 11 à 13) ; **Isaac Newton** (encore lui !) et sa théorie des couleurs ; la découverte des interférences par **Thomas Young** (1773-1829) (voir chapitre 14) ; le phénomène de diffraction et la polarisation de la lumière par **Augustin Fresnel** (1788-1827) (voir chapitre 14) ; les principes de l'hydrostatique et la notion de pression par **Blaise Pascal** (1623-1662) (voir chapitres 5 et 7) ; **Joseph Fourier** (1768-1830) et sa théorie analytique de la chaleur (voir chapitres 5 et 9) ; **Sadi Carnot** (1796-1832) et les deux principes de la thermodynamique (voir chapitre 8) ; **Ludwig Boltzmann** (1844-1906) et la thermodynamique statistique ; l'équation de **Johannes Diderick Van der Waals** (1837-1923) pour les fluides.

Le point commun de ces savants est leur capacité à concevoir des expériences nouvelles à partir desquelles ils imaginèrent des modèles ou des lois qui permettent de mieux comprendre le fonctionnement de la nature.



Figure 7 **Le Puy de Dôme est devenu un laboratoire extérieur où de nombreux scientifiques continuent de travailler. C'est là que Blaise Pascal a réalisé de nombreuses mesures qui lui permirent de mettre en évidence la notion de pression.**

Photographie de D. Decobecq.

4 La physique et la relativité

À la fin du XIX^{e} siècle, de nombreux scientifiques considèrent que l'essentiel de la physique est connu et que les développements à venir ne consisteront qu'à affiner les concepts et lois connus à l'époque, notamment la mécanique newtonienne. En effet du XV^{e} au XIX^{e} siècle, les progrès ont été considérables dans la description et l'interprétation des phénomènes naturels à l'échelle macroscopique (échelle du mètre). Les bases ont été établies en mécanique, en thermodynamique, en électricité et électromagnétisme (auxquels s'ajoute l'optique ondulatoire).

Cependant, jusqu'en 1895, on ne sait encore rien de la structure et de la composition des atomes. Les progrès techniques de la deuxième partie du XIX^{e} siècle permettent la réalisation d'expériences plus fiables et beaucoup plus précises : les portes s'ouvrent vers le monde de l'infiniment petit, à l'échelle microscopique (échelle du micromètre). Cette période de transition entre les deux siècles constitue un bouleversement pour la physique, avec notamment les découvertes majeures de l'électron, de l'atome, de la radioactivité et des rayons X. La physique atomique et nucléaire était née, amenant alors les révolutions de la relativité et des quanta.

L'aventure passionnante de cette physique dite « moderne » a commencé avec la découverte de l'électron (voir chapitre 25). Dès 1835, Michael Faraday observa des décharges électriques dans des gaz raréfiés, et ses successeurs démontrent que ces décharges pouvaient donner naissance à un rayonnement auquel ils ont donné le nom de rayons cathodiques. Mais c'est en 1895 que Jean Perrin (1870-1942) réalise une expérience où un faisceau de rayons cathodiques est recueilli par un cylindre de Faraday, ce qui lui permet de mettre en évidence la charge apportée par le faisceau. Joseph Jones Thomson (1856-1940) perfectionne cette expérience et démontre que les rayons cathodiques sont constitués de particules à grande vitesse et chargées négativement. Il montre l'existence du constituant universel de la nature, constituant qu'il n'appelle pas encore *électron* (le terme *électron* a été employé pour la première fois par Georges Stoney (1826-1911) qui, lui, travaillait sur le nombre d'Avogadro et la charge élémentaire dont il détermina la valeur en 1874).

La notion d'atome avait déjà été évoquée par Lucrèce (90-55 av. J.-C.). Elle réapparaît au XIX^{e} siècle dans les discussions et publications des chimistes : on peut citer Dimitri Mendeleïev (1834-1907) qui publie en 1869 sa classification périodique des éléments. Mais, à cette époque, beaucoup de scientifiques sont hostiles à cette notion d'atome. La découverte de l'atome doit beaucoup à Jean Perrin : en 1911 (pratiquement au même moment que Lord Ernest Rutherford (1871-1937)), il propose un modèle « planétaire » de l'atome décrit alors comme un « soleil », chargé positivement, autour duquel gravitent des « planètes », électrons chargés négativement (voir chapitre 25). Sur cette notion d'atome, il est important de mentionner le mouvement brownien : en 1827, le botaniste Robert Brown (1773-1858) découvre que des grains de pollen en suspension dans l'eau sont animés d'un mouvement dû aux grains eux-mêmes et non de courants ou de l'évaporation de l'eau. Il faudra attendre le début du XX^{e} siècle pour qu'Albert Einstein (par la théorie en 1905) et Jean Perrin (par l'expérience en 1912) fournissent

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

une explication correcte du mouvement brownien, à savoir les atomes et les molécules peuvent tirer leur énergie cinétique de la chaleur (ce qui constitue une entorse au principe d'entropie). Ces travaux fournissent ainsi des preuves théoriques et expérimentales de l'existence des atomes et des molécules.

Le 8 novembre 1895, Wilhem Conrad Röntgen (1845-1923) découvre l'existence d'une nouvelle radiation d'origine inconnue, qu'il appelle alors rayons X. Un peu plus d'un mois plus tard, il obtient la première image radiographique de la main de sa femme. Cette découverte étonnante (Röntgen reçut le premier prix Nobel de physique, en 1901) fera l'objet de nombreuses recherches, directement récompensées par six autres prix Nobel. Röntgen ne comprit pas la nature de ces rayons X qu'il voyait comme « des vibrations longitudinales de l'éther ». Ce n'est que 17 ans plus tard que Max Von Laue (1879-1960) établira la nature des rayons X : de la lumière mais de très courte longueur d'onde (Von Laue obtient le prix Nobel de physique pour l'utilisation des rayons X pour la caractérisation des cristaux par diffraction). Quelques mois après la découverte des rayons X, en 1896, Henri Becquerel met en évidence la radioactivité spontanée de certains corps (voir chapitre 26) : des substances phosphorescentes soumises aux rayons lumineux du soleil émettent ensuite des radiations traversant le papier et réduisant le sel d'argent de plaque photographique. Ces radiations sont similaires à celles découvertes par Röntgen. La découverte de Becquerel sera ensuite exploitée par un couple de physiciens : Pierre Curie (1859-1906) et Marie Curie (1867-1934) mettent en évidence la radioactivité naturelle de certains éléments tels que l'uranium ou le thorium, et ils découvrent l'existence de nouvelles substances radioactives telles que le polonium et le radium. À noter que c'est Lord Rutherford qui a donné leurs noms aux rayonnements alpha et bêta.

En parallèle de ces découvertes capitales, certaines expériences résistent encore à la physique newtonienne toujours admise et enseignée à cette époque. Ainsi, le concept d'*éther* imaginé par Aristote pour désigner un supposé cinquième élément (en plus de l'eau, de l'air, du feu et de la terre) composant la sphère céleste, a perduré jusqu'au XIX^{e} siècle : Augustin Fresnel (1788-1827) considérait l'éther comme un milieu immatériel invisible et immobile, répandu dans le vide, ne pesant rien et transportant la lumière. Plus généralement l'éther fut considéré comme un milieu troublé par le passage des ondes électromagnétiques et réémettant à son tour. De nombreuses questions se posaient alors sur le mouvement de la Terre dans un milieu tel que l'éther : des expériences furent alors réalisées pour mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther. C'est le cas de l'expérience célèbre réalisée en 1887 par Albert Abraham Michelson (1852-1931) et Edward Williams Morley (1838-1923). Michelson inventa un interféromètre (qui porte son nom) qui lui permit de réaliser, avec Morley, des mesures précises de la vitesse de la lumière.

Ils montrèrent que cette vitesse est identique quelle que soit la direction dans laquelle on la mesure par rapport au mouvement de la Terre. Ce résultat va à l'encontre du principe de relativité de Galilée, auquel correspond la loi de composition des vitesses (voir chapitre 3) : en effet, si un homme court dans un train dans le sens de la marche, sa vitesse par rapport à un observateur situé sur le bord de la voie, est égale à la somme

de la vitesse de course de l'homme et de la vitesse du train. Michelson démontra donc que cette loi ne s'applique pas à la lumière, et par extension aux objets de grande vitesse proche de celle de la lumière.

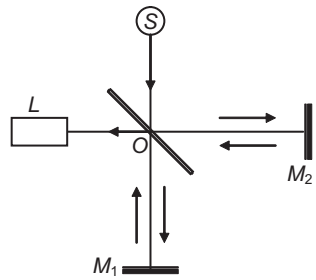


Figure 8 **Schéma de l'expérience de Michelson et Morley permettant de mesurer précisément la vitesse de la lumière**

S est une source monochromatique de lumière qui arrive sur un miroir O : une partie de la lumière est réfléchie vers un miroir M_2, l'autre traverse O pour atteindre un miroir M_1. Réfléchie en M_1 et M_2, la lumière repasse par O et atteint une lunette L. Deux faisceaux lumineux suivent donc deux chemins : SOM_1OL et SOM_2OL. Ces deux chemins ne sont pas forcément égaux (on peut faire varier la longueur des bras OM_1 et OM_2) : on observe alors des franges d'interférence au foyer de la lunette L. Michelson et Morley ont montré qu'il n'y a pas de déplacement des franges d'interférence lorsqu'on fait tourner l'appareil de 90° (*i.e.* le bras OM_1 prend la direction qu'avait le bras OM_2). Ainsi la vitesse de la lumière est la même quel que soit le chemin suivi et tout se passe comme si la Terre était immobile.

Avec cette expérience et avec d'autres, des théoriciens ont commencé à réfléchir sur des changements à apporter au principe de relativité de Galilée pour des corps ayant une vitesse proche de la vitesse *c* de la lumière. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) propose des transformations pour expliquer la spécificité de tels corps : il explique la constance de la vitesse de la lumière par une contraction des longueurs dans le sens du mouvement pour un corps en mouvement rectiligne uniforme (1892) ; cette contraction serait compensée par une dilatation des durées (1904). Il en vient donc à faire l'hypothèse d'une augmentation des masses en mouvement. Henri Poincaré (1854-1912) en déduit que ce type de transformations induit la construction d'une nouvelle mécanique dans laquelle « l'inertie augmenterait avec la vitesse, la vitesse de la lumière devenant alors une limite impossible à dépasser ». Ainsi les transformations de Lorentz expriment une loi de composition plus complexe, et Poincaré a fait une proposition capitale : « toutes les lois de la nature doivent être les mêmes pour tous les observateurs ».

Alors entre en scène Albert Einstein. Einstein, au contraire de Lorentz et Poincaré, n'a pas hésité à se tourner résolument vers une nouvelle mécanique. Il est parti de deux postulats pourtant contradictoires : le principe de relativité de Galilée et la constance de la vitesse de la lumière. Il propose dès 1905 sa théorie de la relativité restreinte aboutissant en 1916 à la relativité générale.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ALBERT EINSTEIN (1879-1955)

Albert Einstein naît le 14 mars 1879 à Ulm, en Allemagne. Ses études ne sont pas particulièrement brillantes, ayant des difficultés à prendre des notes, à apprendre les notions de façon scolaire et à se plier à la discipline de l'école. Il obtient cependant son diplôme du polytechnikum (ETH) de Zurich en 1900. À l'ETH, il se fait de nombreux amis dont certains lui seront précieux pour parfaire ses connaissances en mathématiques notamment. Il y rencontre également sa première femme d'origine serbe, Milena Maric, avec qui il aura trois enfants.

Commence alors une période de précarité pour les Einstein, ce qui conduit Albert à accepter un poste dans l'administration, à l'office fédéral des brevets de Berne, ce qui lui permet de poursuivre ses travaux de recherche.

L'année 1905 est faste pour Einstein : il publie de mars à juin trois articles qui seront des références. Le premier donne une interprétation quantique de l'effet photoélectrique, le second porte sur l'obtention du nombre d'Avogadro qui est un prélude à son mémoire publié en 1906 sur la théorie statistique du mouvement brownien. Enfin, le plus important, le troisième expose les bases de la relativité restreinte : il s'intitule « Électrodynamique des corps en mouvement ». Suite notamment à l'expérience de Michelson, Einstein propose de renoncer à la notion d'éther, d'abandonner la notion newtonienne de l'universalité du temps (*i.e.* définition possible d'une même chronologie dans tous les référentiels) et d'étendre à l'électromagnétisme le principe de relativité de Galilée. Une telle extension nécessite de revoir la mécanique newtonienne, il crée donc une nouvelle mécanique dite relativiste. En septembre 1905, il publie un autre article dans lequel il montre que si un corps libère une énergie E sous forme de lumière, sa masse doit diminuer d'une quantité égale au rapport de E par le carré de la vitesse c de la lumière. Il montre en 1907 une équivalence masse-énergie avec sa célèbre équation : $E = mc^2$ (où c est la vitesse de la lumière).

Dès 1906, Einstein cherche à étendre son principe de relativité à des référentiels non galiléens : en 1907, il propose alors un principe d'équivalence selon lequel un référentiel non galiléen est équivalent à un champ de gravitation, c'est-à-dire que le champ de forces produit par un mouvement accéléré (*i.e.* champ des forces d'inertie, voir chapitre 3) est équivalent à un champ de gravitation. On parle alors d'équivalence entre masse inerte (masse liée à l'accélération, *i.e.* celle qui va vers l'avant quand le véhicule freine brusquement) et masse pesante (masse liée à la gravitation, *i.e.* celle de notre poids sur la balance).

Puis Einstein s'attaque au problème de la généralisation de la loi de gravitation de Newton dans le cadre de la relativité restreinte : ce travail l'occupera entièrement jusqu'en 1916, année au cours de laquelle il publie sa théorie générale de la relativité. La relativité générale énonce que la gravitation n'est pas une force mais qu'elle est la manifestation de la courbure de l'espace (en fait de l'espace-temps), courbure elle-même produite par la distribution de la matière. Einstein a pu modéliser la courbure de l'espace-temps en utilisant notamment la géométrie différentielle. Ainsi, la relativité générale englobe la gravitation newtonienne toujours valable pour des astres pas trop massifs ou pour des corps célestes de vitesses relativement faibles, mais elle permet d'expliquer tous les mouvements dans l'Univers (notamment dans les cas des champs gravitationnels très

intenses et des corps ou particules de grande vitesse). De nombreuses vérifications expérimentales ont par la suite confirmé cette théorie.

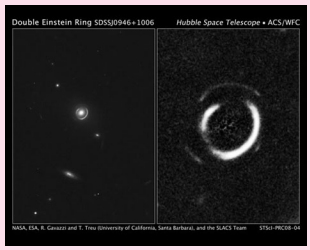


Figure 9 Observation d'une lentille gravitationnelle (zoom à droite) par le télescope Hubble

Ces lentilles sont des astres massifs (trous noirs, étoiles, galaxie) qui par le fort champ gravitationnel qu'elles génèrent, dévient les rayons lumineux. Ces lentilles avaient été prédites par la théorie de la relativité générale. Source : site web de Hubble

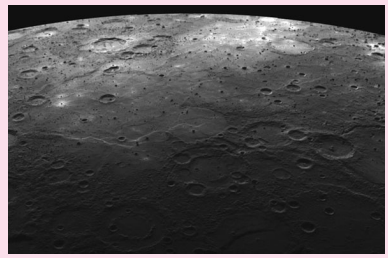


Figure 10 Photographie de la surface de Mercure

Le déplacement du périhélie de Mercure (point de la trajectoire de Mercure le plus proche du Soleil) a été expliqué par la théorie de la relativité générale. Source : site web de la NASA.

Einstein obtient le prix Nobel de physique en 1921 pour ses travaux sur l'effet photoélectrique. Einstein travaillera ensuite sur la physique des quanta et apportera une contribution importante à l'élaboration d'une mécanique quantique naissante.

Très médiatisé et mondialement reconnu, Albert Einstein, du fait de ses origines juives et de ses positions résolument pacifistes, devra fuir l'Allemagne en 1933 lors de l'arrivée au pouvoir de Hitler. Il se réfugiera aux États-Unis, à Princeton en particulier. En 1939, il écrira une lettre au président américain Roosevelt, ce qui contribuera à enclencher le projet Manhattan de mise en œuvre de la bombe atomique américaine. Il refusera la proposition de présidence de l'État d'Israël que lui fit Ben Gourion en 1952. Albert Einstein meurt à Princeton en 1955.

L'autre grande révolution de la physique à l'aube du XX^{e} siècle concerne le corps noir et les « quanta » (voir chapitre 25). Le grand homme dans ce domaine est sans nul doute Max Planck (1858-1947). Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887) introduit la notion de corps noir comme étant un corps absorbant la lumière quelle que soit la longueur d'onde et dont le rayonnement ne dépend que de la température. À la fin du XIX^{e} siècle, on a une bonne connaissance expérimentale du corps noir et la théorie permet d'expliquer le phénomène aux faibles fréquences (loi de Rayleigh) et aux fortes fréquences (loi de Wien). C'est Max Planck qui trouvera en 1900 la solution pour les fréquences intermédiaires sous la forme d'une équation générale qui permet de retrouver les lois de Rayleigh et de Wien. Pour établir cette équation, Planck a fait l'hypothèse que les parois d'un corps noir sont constituées d'oscillateurs de Hertz (oscillateurs produisant des ondes électromagnétiques et dont l'énergie ne dépend que de la température). Il a proposé que l'énergie de chacun de ces oscillateurs soit égale à un nombre entier de fois « un élément d'énergie » e proportionnel à la fréquence ν, avec une constante de

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

proportionnalité notée h (qui porte maintenant son nom). Planck donne à ce « grain d'énergie e » le nom de « quantum » : ainsi l'énergie d'un oscillateur ne peut avoir comme valeurs que celles correspondant à un nombre entier de quanta, chacun de ceux-ci valant $h\nu$. Ainsi Planck fait entrer la physique dans une nouvelle ère : l'ère quantique. À noter qu'Einstein donna le nom de photons aux quanta de lumière ou « paquets d'énergie » échangés lors de l'émission ou de l'absorption de lumière par la matière.

Dans les années 1920, la mécanique quantique naît grâce aux travaux de Niels Bohr (1885-1962), Werner Heisenberg (1901-1976) et Erwin Schrödinger (1887-1961). La mécanique ondulatoire prend véritablement naissance sous l'impulsion de Louis de Broglie (1892-1987) : il sera notamment à l'origine du principe de dualité onde-corpuscule. Ce principe stipule que tous les objets de l'univers microscopique présentent simultanément des propriétés d'ondes et de particules : Louis de Broglie associa ainsi la quantité de mouvement d'une particule à une longueur d'onde.

Remarques

- Toutes les découvertes réalisées dans les premières années du XX^{e} siècle ont permis de développer de nombreuses techniques qui sont actuellement utilisées dans des domaines aussi variés que la science des matériaux, la médecine, la recherche, la haute technologie... On peut citer les scanners, les microscopes électroniques, les synchrotrons...
- La mécanique newtonienne reste valable dans de nombreux cas que nous connaissons, notamment pour les corps se déplaçant à des vitesses relativement faibles, ou pour des champs gravitationnels peu importants. Ainsi, avec la mécanique de Newton, on peut expliquer la plupart des mouvements sur notre planète mais aussi autour de la Terre. En revanche, la mécanique newtonienne n'est plus valable pour les corps ou particules se déplaçant à très grande vitesse (se rapprochant de celle de la lumière), et pour des zones de l'Univers où le champ gravitationnel est très intense (les trous noirs, les astres ou planètes très importants en masse).

5 Vers une physique unifiée

L'ensemble des phénomènes naturels connus peut être interprété en faisant intervenir au plus quatre interactions fondamentales :

- **L'interaction électromagnétique**, c'est-à-dire les interactions entre particules porteuses de charge électrique (voir chapitres 16 à 18). Maxwell a réalisé la première unification de l'histoire de la physique en montrant que les phénomènes électriques et magnétiques étaient la manifestation de la même interaction. L'interaction électromagnétique est responsable de la majorité des phénomènes courants à notre échelle, à l'exception de la pesanteur : les liaisons chimiques entre les atomes, les interactions entre les constituants de la matière, ondes électromagnétiques et phénomènes optiques...
- **L'interaction gravitationnelle**, la plus universelle car touchant toutes les particules (voir chapitres 2 et 3). Mais il est clair que les interactions électrostatiques sont prépondérantes pour des particules chargées telles que les protons ou les électrons.

Pour de grands systèmes comme les astres, c'est l'interaction gravitationnelle qui prédomine. Selon la relativité générale énoncée par Einstein, l'interaction gravitationnelle apparaît comme une modification de la structure géométrique de l'espace-temps en présence de distribution de masse-énergie.

- **L'interaction forte** est l'interaction qui s'exerce de manière attractive entre toutes les particules constituant le noyau, indépendamment de leurs charges. Cette interaction ne concerne que la physique nucléaire (voir chapitre 26).
- **L'interaction faible** intervient dans de nombreux processus de désintégration, notamment dans celui du neutron et de la radioactivité bêta (voir chapitre 26). Son intensité et sa portée sont plus faibles que pour l'interaction forte.

De nombreux chercheurs ont tenté d'unifier ces interactions dans un modèle unique. Le modèle standard de la physique des particules (en abrégé « modèle standard ») est la théorie actuelle qui permet d'expliquer tous les phénomènes observables à l'échelle des particules. Ce modèle permet d'unifier les interactions électromagnétiques, fortes et faibles mais pas la gravitation qui est toujours expliquée dans le cadre de la relativité générale.

Le modèle standard est le fruit de près de 40 ans de recherche (1948-1983). L'aventure a commencé avec la théorie de l'électrodynamique quantique (en anglais QED pour *Quantum ElectroDynamic*) qui est la théorie quantique et relativiste de l'interaction électromagnétique : Richard Feynman (1918-1988) fut un des grands artisans de cette théorie, qui reçut le prix Nobel en 1965. En 1961, Sheldon Glashow (né en 1932) propose d'unifier les interactions électromagnétique et faible en une interaction qu'il appelle électrofaible. En 1967, Steven Weinberg (né en 1933) et Abdus Salam (1926-1996) modifient ce modèle en imaginant le boson de Higgs qui permet de donner une masse aux particules décrites par la théorie électrofaible de Glashow. Glashow, Weinberg et Salam reçoivent le prix Nobel en 1979. Au début des années 1970, des théoriciens mettent au point la théorie de la chromodynamique quantique (en anglais QCD pour *Quantum ChromoDynamic*) qui s'ajoute à la théorie électrofaible pour expliquer l'interaction forte. Murray Gell-Mann (né en 1929) fut un des grands contributeurs à l'élaboration de cette théorie. Le modèle standard est ainsi achevé et de nombreuses expériences (réalisées notamment avec les accélérateurs de particules qui se développèrent à partir des années 1960) confirmeront par la suite l'existence des particules prédites par ce modèle.

Dans le modèle standard, la **matière** se compose de particules appelées **fermions**, au nombre de 24 : 12 particules élémentaires les leptons et les quarks, et 12 antiparticules. Les antiparticules initialement prédites comme étant les symétriques des particules mais de charge opposée, ont été observées expérimentalement au fur et à mesure des progrès technologiques. Les leptons au nombre de 6 comprennent l'électron, le muon, le tauon avec pour chacun leur neutrino associé ; les quarks peuvent avoir 6 saveurs : up, down, strange, charm, bottom, top. En fait les quarks n'apparaissent jamais libres (par exemple, un proton correspond à 2 quarks up et 1 quark down tandis qu'un neutron correspond à 1 quark up et 2 quarks down). Gell-Mann donna des « charges de couleurs » aux quarks pour représenter leurs spécificités (d'où le nom de chromodynamique) : ces « couleurs » sont le rouge, le bleu et le vert. Les quarks peuvent former trois types de particules

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

composites nommées les hadrons : les mésons (1 quark + 1 anti-quark), les baryons (3 quarks), les anti-baryons (3 anti-quarks).

Dans ce modèle, les **interactions** sont au nombre de deux : l'interaction forte expliquée par la théorie QCD et l'interaction électrofaible (unification des interactions électromagnétique et faible, explication par les théories QED et électrofaible). Ces interactions correspondent à des échanges de particules appelées **bosons**. Ces bosons apparaissent subitement suivant le principe d'incertitude de Heisenberg puis disparaissent après avoir transmis leur force. Les bosons, au nombre de 12, se décomposent en plusieurs familles : 8 gluons qui transmettent l'interaction forte, les bosons W^+ et W^- qui transmettent l'interaction électrofaible par courant chargé, le boson Z^0 qui transmet l'interaction électrofaible par courant neutre, et le photon qui transmet l'interaction électromagnétique. L'**interaction forte** concerne essentiellement les quarks associés entre eux et les particules à base de quarks, et le vecteur d'échange est le gluon. L'interaction électromagnétique concerne les particules de matière chargées et le photon est le vecteur de cette interaction. L'**interaction faible** concerne toutes les particules de matière et les bosons W^+, W^- et Z^0 en sont les vecteurs.

Le tableau ci-dessous résume l'état actuel du modèle standard en regroupant les particules constituant la matière et les particules participant aux interactions fondamentales.

PARTICULES								
Fermions « Matière »				Bosons « Interaction »				
quarks	anti-quarks	leptons	anti-leptons	gluons	W^+	W^-	Z^0	photon

Deux particules sont prédites par la théorie mais non observées expérimentalement à ce jour. La gravitation est l'interaction qui échappe pour le moment au modèle standard. Cependant, une particule hypothétique, le **graviton**, a été imaginée pour transmettre la gravité dans la plupart des systèmes quantiques. Ce graviton serait le quantum de la force gravitationnelle. Il n'a pas été observé à ce jour. Le graviton serait également assimilable à une onde gravitationnelle qui pourrait être détectée par interférométrie.

Le modèle standard initial supposait que les particules décrites étaient toutes de masse nulle, ce qui est contraire à l'observation. Il a donc été imaginé une autre interaction entre les fermions de masse nulle et un boson dit de Higgs, permettant de conférer une masse à ces fermions. Ainsi une nouvelle interaction est prédite avec un nouveau vecteur, **le boson de Higgs** : à ce jour, cette interaction et ce boson n'ont pas été observés.

LARGE HADRON COLLIDER (LHC)

La communauté scientifique était en ébullition le 10 septembre 2008 avec le lancement des expériences réalisées avec le *Large Hadron Collider* (LHC) au Centre Européen de Recherche Nucléaire (CERN) en Suisse, près de Genève. Après de longues années de recherche, de mise en œuvre et de construction, le plus grand accélérateur de particules au monde était enfin opérationnel. Malheureusement, des problèmes techniques ont retardé le début des expériences : les premiers tests ont redémarré à l'automne 2009 et les premiers résultats pourraient arriver au cours de l'année 2010 !

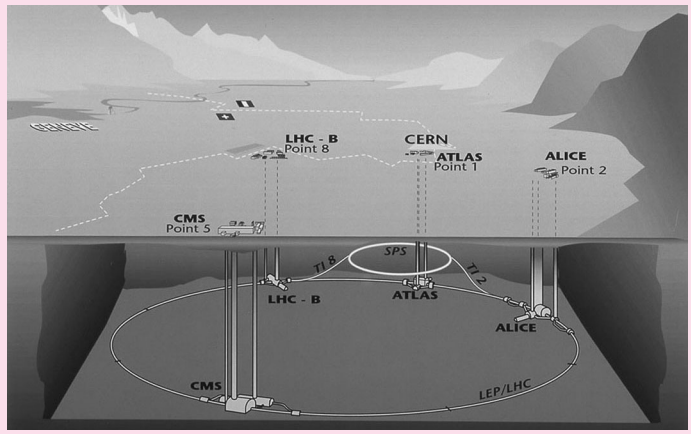


Figure 11 **Le Large Hadron Collider (LHC)**

C'est le nouvel accélérateur du CERN inauguré en 2008. Il est enfoui à une profondeur d'environ 100 mètres en moyenne et présente une circonférence de 27 km. Six expériences (dont ALICE, voir ci-dessous dans cet encart) sont programmées sur cet accélérateur. Source : site web du CERN.

Quel est l'objectif d'un tel instrument ? Réaliser des collisions entre protons allant à des vitesses proches de celles de la lumière dans un anneau de 27 km de longueur ! Au sein de ces collisions entre particules de très haute énergie, les scientifiques espèrent pouvoir détecter le fameux boson de Higgs qui serait à l'origine de la masse des particules, donc essentiel dans la formation de l'Univers car permettant d'expliquer pourquoi la matière a une masse.

Une autre expérience est prévue pour comprendre les premiers instants du Big Bang à l'origine de notre système solaire. Cette expérience nommée ALICE (pour *A Large Ion Collider Experiment*) consiste à réaliser des collisions entre des ions de l'élément plomb.

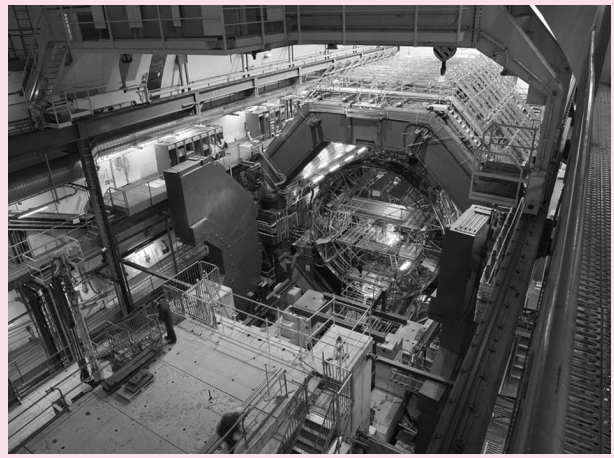


Figure 12 **Détecteur de l'expérience ALICE**

Ce détecteur (ouvert sur cette photo) est long de 26 m, sur 16 m en hauteur et en largeur. Il présente un tonneau central et un spectromètre à muons.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Ces collisions devraient générer des températures plus de 100 000 fois supérieures à celle de l'intérieur du Soleil, ce qui devrait correspondre aux conditions qui régnaient juste avant le Big Bang. Les physiciens espèrent ainsi « fondre » les protons et les neutrons et libérer les quarks de l'emprise des gluons. Ils s'attendent à découvrir une sorte de plasma de quarks et de gluons qui pourrait être l'état de la matière juste après le Big Bang.
Avec ce type d'instrument et les expériences programmées, on peut s'attendre à des découvertes sur les fondements et la genèse de l'Univers, d'où l'effervescence dans le monde scientifique et la médiatisation vers le grand public.

6 Un Tout-en-un de physique

6.1 Les branches de la physique

L'Homme a toujours voulu savoir comment se comporte la Nature. Au tout début, ses seules sources d'informations étaient ses sens. Ainsi, avec la vue, la lumière et après elle l'**optique** ont constitué un sujet d'étude. La chaleur puis la **thermodynamique** en ont formé un autre. L'**acoustique** reliée au son et à l'ouïe a suscité des expériences et des études. L'**électromagnétisme** non directement accessible aux sens n'a en fait pu se développer véritablement qu'au XIX^{e} siècle. Enfin, il est clair que le mouvement a été le premier phénomène perceptible à être étudié et pour lequel les hommes réussirent au cours des siècles à trouver des modèles permettant de bien le caractériser. Les chutes des corps et les mouvements des planètes ont été à l'origine des questionnements des hommes sur l'Univers et ont permis le développement de la **mécanique**.

La physique au XIX^{e} siècle apparaît comme compartimentée, avec des branches sans véritable lien entre elles, même si la mécanique a constitué le principe directeur de toutes les autres. L'apport de la physique moderne a été de projeter un éclairage nouveau sur cette discipline : les branches classiques ont des liens entre elles et il est envisageable de réunir les différents types d'interactions dans un modèle unique en physique. Ceci amène forcément à des réflexions quant à la présentation de la physique dans l'enseignement en général et dans l'enseignement supérieur en particulier.

6.2 Les choix du Tout-en-un

De nombreux ouvrages ont pris le parti de regrouper des branches, de partir d'exemples concrets pour retrouver des lois importantes, ou de placer au centre la physique moderne « unificatrice » des branches de la physique. Il nous est apparu que ce type de découpage était déroutant pour les étudiants de Licence. Les retours que nous avons recueillis vont en effet dans ce sens. La physique ne se conçoit plus maintenant comme un ensemble de boîtes séparées, elle forme un tout avec des interactions fondamentales qui peuvent être unifiées. Cette unification, assez difficile à saisir, peut s'envisager à partir de la troisième année de Licence, voire en début de Master. Des ouvrages généraux dans lesquels les notions de base ne sont ni claires ni faciles à retrouver, sont sans doute plus destinés à des enseignants qu'à des étudiants devant acquérir des connaissances de base.

Dans ce Tout-en-un de physique, nous avons fait d'autres choix. Cet ouvrage est destiné aux étudiants des deux premières années de Licence Sciences et Technologies, des parcours Sciences de la Matière, mais il s'adresse aussi à un public plus large, intéressé par la physique, ou désirant parfaire ses connaissances dans cette discipline. Nous avons décidé de suivre le découpage tel que les étudiants de Licence le rencontrent à l'université. Les branches sont ici clairement identifiées, et permettent à cet ouvrage d'être un bon support des cours suivis par ces étudiants, qui pourront ainsi très vite s'y retrouver. Cependant, des renvois vers d'autres parties de l'ouvrage sont placés dans de nombreux chapitres, montrant que la lecture et l'étude d'une branche de la physique sont intimement liées à d'autres branches. De plus, le présent chapitre d'introduction essaie de montrer l'unité qui se met petit à petit en place en physique et la manière dont les idées ont évolué dans cette discipline au cours des siècles.

Toutes les notions de base de la physique sont présentées, et les étudiants pourront aisément y accéder. Ils y trouveront ainsi six chapitres de mécanique (dont un consacré aux solides, deux aux fluides), quatre de thermodynamique, quatre d'optique, trois d'électrostatique-électromagnétisme et trois d'électricité. Figurent également d'autres notions qui ne sont pas toujours présentées, selon les universités, au cours des deux premières années de Licence. Ces notions nous semblent importantes, qu'elles soient fondamentales : c'est le cas des trois chapitres de physique dite moderne (atomique, nucléaire, matière), ou qu'elles constituent une ouverture vers la technologie : c'est le cas des trois chapitres d'électronique avec les composants principaux rencontrés dans le monde actuel, et du chapitre sur la spectroscopie optique.

6.3 Les auteurs

Les auteurs ont tous plusieurs années d'expérience de l'enseignement en Licence. Tous ont expérimenté devant les étudiants la manière de présenter leur discipline, et ce sont ces « recettes » d'enseignement qui sont présentées ici. En cours magistral ou en travaux dirigés, il est aisé de se rendre compte si une notion passe ou non. Dans le second cas, il faut imaginer d'autres manières de présenter les notions difficiles. On peut donc bien parler de recettes, recettes qui toutes furent testées en direct avec des étudiants semblables à ceux qui utiliseront cet ouvrage.

Les statuts et fonctions différentes des auteurs constituent une richesse pour l'approche pédagogique proposée. Tous sont spécialistes de l'enseignement qu'ils présentent. Certains sont enseignants-chercheurs (maître de conférences ou professeurs des universités), d'autres professeurs agrégés (PRAG), professeurs en école d'ingénieur, ou encore ingénieur au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA). Chacun a donc apporté sa vision de la physique tout en respectant le cadre général de l'ouvrage : un condensé des connaissances de base. Chaque auteur a pu agrémenter ses chapitres d'exemples ou situations concrètes qui permettent d'illustrer le cours et de mieux l'intégrer. Ainsi, les étudiants peuvent mieux réaliser que la physique permet de comprendre la plupart des phénomènes de notre vie quotidienne. De nombreuses figures, schémas et illustrations ont été créés par les auteurs, permettant ainsi de renouveler les documents présentés dans les cours de physique de Licence.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

6.4 Tout-en-un mode d'emploi

Nous avons souhaité proposer des chapitres courts, afin de faciliter la lecture sans lasser. On retrouve la même structure dans l'ensemble des chapitres : il n'y a pas, et c'est une volonté éditoriale, de texte monolithique. Les illustrations, les exemples jalonnent chaque chapitre, les aérant. La nature même de l'ouvrage, un condensé d'environ 600 pages, fait que dans chaque chapitre, l'essentiel est abordé sans détours qui nuiraient à la continuité du propos.

Nous avons délibérément choisi de ne pas alourdir le cours par un formalisme mathématique. Nous avons veillé à n'évoquer les outils mathématiques que lorsque nécessaires, et à ne les évoquer qu'en tant qu'outils essentiels à la compréhension des phénomènes. La physique a cependant besoin de mathématiques et il est bien sûr vivement recommandé d'avoir en parallèle un ou plusieurs ouvrages traitant de mathématiques pour physiciens. Nous recommandons donc au lecteur l'ouvrage *Cours de physique : mathématiques pour la physique* de Y. Noirot, J.-P. Parisot et N. Brouillet, paru aux éditions Dunod. Véritable compagnon du présent ouvrage, ce livre, destiné aux étudiants des deux premières années de Licence, présente les notions mathématiques essentielles constamment utilisées dans ce Tout-en-un.

Enfin, des points de « rendez-vous » sont proposés dans chaque chapitre. Ils permettent de mieux intégrer les notions énoncées. C'est ainsi que des encarts mettent en lumière des idées, des scientifiques, des exemples, ou des éclaircissements sur le cours. À chaque fin de chapitre, la rubrique « À retenir » résume les notions importantes. Des exercices d'application corrigés aident à assimiler le cours. Enfin, chaque chapitre se termine par une série d'exercices, tous corrigés, pour s'entraîner.

Un problème final mettant en jeu tous les domaines de la physique est présenté à la fin de l'ouvrage et permettra au lecteur de faire la synthèse des connaissances et des compétences acquises tout au long des deux premières années de Licence, et de s'entrainer efficacement en vue des examens.

Un site web est dédié à ce Tout-en-un, à l'adresse suivante :

www.dunod.com/Tout-en-un/Physique

Ce site web est un complément essentiel pour l'ouvrage : il sera régulièrement alimenté et réactualisé par les auteurs. Les lecteurs pourront y retrouver des compléments du cours : des parties de cours qui peuvent être consultées pour mieux comprendre certains chapitres ou certains liens entre chapitres. Les étudiants pourront y trouver des expériences, des démonstrations qui leur permettront de mieux « visualiser » les notions abordées dans l'ouvrage. Des exercices complémentaires sont également proposés.

Enfin, deux chapitres complets sont présents sur le web : l'un traite des oscillations mécaniques (harmoniques, amorties ou forcées), l'autre de la mécanique des systèmes de points qui permet de faire le lien entre la mécanique du point et la mécanique du solide présentées dans l'ouvrage.

À la fin de l'ouvrage, une bibliographie et une webgraphie renvoient vers des ouvrages ou sites complémentaires. Pour finir, un soin particulier a été apporté à l'index, afin que les étudiants puissent rapidement trouver une notion.

Partie I

Mécanique

Cinématique du point

1

PRÉALABLES

- Vecteurs et calculs vectoriels
- Dérivation et intégration
- Trigonométrie

MOTS CLÉS

- Vecteurs position, vitesse, accélération
- Systèmes de coordonnées
- Repères et référentiels

OBJECTIFS

- Donner les bases du repérage d'un point dans l'espace
- Définir les principaux systèmes de coordonnées
- Définir les vecteurs position, vitesse et accélération
- Savoir projeter ces vecteurs dans différents repères
- Maîtriser l'étude de mouvements simples

La *cinématique*, tout comme le cinéma, a pour origine le mot grec « $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$ » qui signifie « mouvement ». La *cinématique* est en effet la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps en fonction du temps, en faisant abstraction des forces à l'origine de ces mouvements.

1.1 Repérage d'un point matériel dans l'espace et dans le temps

Pour décrire plus simplement les mouvements d'un corps, on assimile souvent ce dernier à un point qu'on nomme *point matériel*. En fait un corps matériel peut être assimilé à un point s'il ne roule pas sur lui-même et si ses dimensions caractéristiques sont petites par rapport aux distances qu'il parcourt. Notons enfin qu'un point matériel est un point géométrique dont la position peut être parfaitement définie par trois coordonnées seulement.

1.1.1 Repérage d'un point dans l'espace

Pour décrire la position d'un objet dans l'espace, il est nécessaire de disposer d'une référence. Par exemple, un homme assis dans un train est immobile par rapport au wagon, mais en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi pour déterminer le mouvement d'un point, on se rapporte à un solide S supposé indéformable qui doit être défini clairement. Ce solide constitue le **référentiel** d'étude $\mathscr{R}$.

Ensuite, on repère les points de l'espace dans ce référentiel à l'aide d'un **repère orthonormé direct**, soit un point origine particulier au solide S (souvent on prend le centre de gravité de S) et 3 axes orthogonaux formant un trièdre direct. Plusieurs repères ou **systèmes de coordonnées** peuvent alors être choisis en fonction notamment de la géométrie du problème.

Un bon schéma est la clef de la résolution de tout problème de mécanique. Comme l'objectif est de décrire ici des mouvements dans l'espace, il est particulièrement important de savoir faire des dessins en perspective, et de savoir réaliser des projections adéquates selon des plans bien choisis. C'est ce qui sera détaillé dans la présentation des systèmes de coordonnées.

a) Le système de coordonnées cartésiennes

On considère un repère constitué de trois axes X, Y, Z rattachés à un point origine O caractéristique du solide de référence ($\mathscr{R}$) évoqué plus haut. À ce repère on associe une base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ sont alors les vecteurs unitaires des axes OX, OY et OZ respectivement.

Remarque

La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est orthonormée directe lorsque $\|\vec{u}_x\| = \|\vec{u}_y\| = \|\vec{u}_z\| = 1$, les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux, et $\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z$.

À un instant donné, on note la position du point M par le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ qui s'appelle le **vecteur position**. On note également les coordonnées cartésiennes x, y et z du point M qui sont définies par la relation suivante :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées x, y et z sont des grandeurs algébriques positives ou négatives.

DESSIN

Pour représenter ce système de coordonnées, on marque d'abord le point matériel M. Ensuite on projette ce point M sur l'axe OZ : on obtient alors le point H de coordonnée z sur l'axe OZ. On projette M orthogonalement dans le plan (OX, OY) en traçant une parallèle à l'axe OZ passant par M : on obtient alors le point m. On trace alors les droites passant par m et parallèles aux axes OX et OY : les intersections de ces droites avec les axes OX et OY donnent les coordonnées x et y du point M (Fig. 1.1).

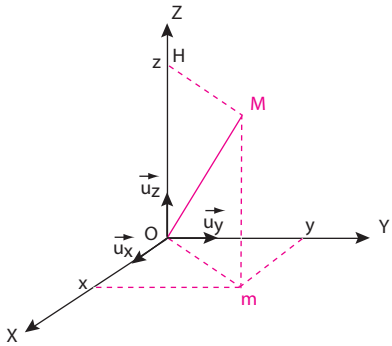


Figure 1.1 **Système de coordonnées cartésiennes**
Représentation du système de coordonnées cartésiennes dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$: cas du point M de coordonnées (x, y, z), et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

b) Le système de coordonnées cylindriques

La position du point M est ici définie dans un repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. On introduit ici la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ orthonormée directe, associée aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

DESSIN

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note H et m les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OY) respectivement. Le point H a pour cote z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ. On note $Om = \rho$ et l'angle entre l'axe OX et Om est appelé θ (Fig. 1.2).

Les vecteurs de cette base sont définis comme suit :

1. $\vec{u}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{Om}}{\rho}$ dans le plan (OX, OY) ; $\vec{u}_\rho$ est appelé vecteur radial.

2. $\vec{u}_\theta$ est obtenu par rotation de $+\pi/2$ dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre) à partir du vecteur $\vec{u}_\rho$, dans le plan (OX, OY). $\vec{u}_\theta$ est appelé vecteur orthoradial.

3. $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur de l'axe OZ, identique à celui du repère associé aux coordonnées cartésiennes.

À noter que ce repère n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel $\mathscr{R}$. Le repère cylindrique est associé au point M, c'est donc un repère local mobile. Dans ce repère, le vecteur position du point M s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$$

Les coordonnées cylindriques sont définies comme suit : ρ est une distance donc toujours positive ; la cote z est une valeur algébrique (positive ou négative) ; l'angle θ est orienté dans le sens (+) défini en imaginant une rotation de l'axe OX vers l'axe OY.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées cylindriques décrivent les intervalles suivants :

$$\rho \in [0, +\infty[\qquad \theta \in [0, 2\pi] \qquad z \in]-\infty, +\infty[$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

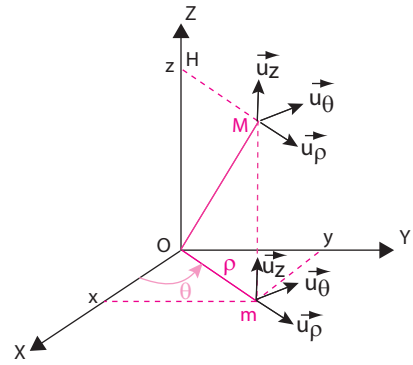


Figure 1.2 **Système de coordonnées cylindriques**
Représentation du système de coordonnées cylindriques dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$: cas du point M de coordonnées (ρ, θ, z), et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Remarques

• Si le mouvement a lieu dans le plan (OX, OY), il n'est pas nécessaire d'utiliser la cote z. On utilise alors les coordonnées polaires (ρ, angle polaire θ). Ainsi, les coordonnées cylindriques correspondent aux coordonnées polaires auxquelles on ajoute la cote z : on parle parfois de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires.

Voir site web

• Les relations entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes sont les suivantes : $x = \rho \cdot \cos\theta$, $y = \rho \cdot \sin\theta$, $z = z$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Lorsqu'on dérive un vecteur par rapport à son angle polaire, on obtient un vecteur directement perpendiculaire (formant un angle de + 90° dans le sens trigonométrique). Ainsi, dans les systèmes cylindrique et polaire, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} = \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u}_\rho$$

c) Le système de coordonnées sphériques

La position du point M est ici définie dans un repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$. On introduit ici la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ orthonormée directe, associée aux coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).

DESSIN

Comme dans le cas des coordonnées cartésiennes, on note H et m les projections orthogonales du point M sur l'axe OZ et le plan (OX, OY) respectivement. Le point H a pour cote z qui est la coordonnée de M suivant l'axe OZ (Fig 1.3).

• La distance entre O et M est notée r, soit $r = OM$.
• l'angle entre l'axe OZ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est noté θ et est appelé colatitude.
• l'angle entre l'axe OX et Om est noté ϕ et est appelé longitude.

Pour couvrir tout l'espace, il suffit que les coordonnées sphériques décrivent les intervalles suivants :

$$r \in [0, +\infty[\qquad \theta \in [0, \pi] \qquad \phi \in [0, 2\pi]$$

Les coordonnées sphériques et les vecteurs de la base sphérique sont représentés dans la figure ci-dessous. À noter que le repère sphérique n'est pas lié au point O, donc n'est pas lié au référentiel $\mathscr{R}$. Le repère sphérique est associé au point M, c'est donc un repère local mobile.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit dans la base sphérique : $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$

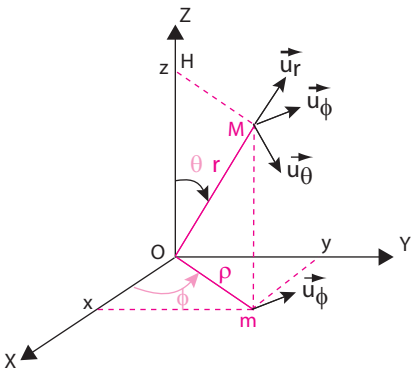


Figure 1.3 **Système de coordonnées sphériques**
Représentation du système de coordonnées sphériques dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$: cas du point M de coordonnées (r, θ, ϕ), et du vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Pour comprendre les orientations relatives des vecteurs de la base sphérique, il est important de faire des représentations dans des plans judicieusement choisis. Une représentation en vue aérienne dans le plan (OX, OY) permet de comprendre l'orientation du vecteur $\vec{u}_\phi$, notamment par rapport aux vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ (Fig. 1.4).

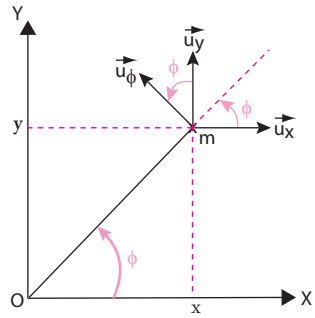


Figure 1.4 **Vue du plan (*OX*, *OY*)**

On peut également représenter une vue dans le plan (Om, OZ) pour comprendre l'orientation du vecteur $\vec{u}_\theta$ (Fig. 1.5). Le vecteur $\vec{u}_\phi$ est représenté avec une croix dans un cercle car il est perpendiculaire au plan de la figure, orienté comme « entrant dans le plan ».

Remarques

- Les relations entre les coordonnées sphériques et cartésiennes sont les suivantes : $x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi$, $y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$, $z = r \cdot \cos\theta$.

Voir site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

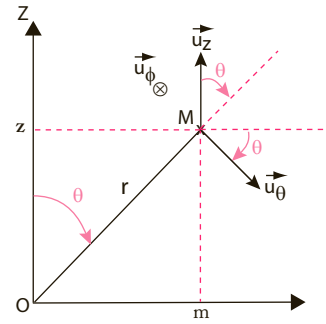


Figure 1.5 **Vue du plan (*Om*, *OZ*)**

• Les coordonnées sphériques se rapprochent des coordonnées géographiques utilisées pour représenter un point à la surface du globe terrestre ; la colatitude θ est en fait l'angle complémentaire de la latitude géographique (complément à 90°), la latitude étant définie dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, avec la latitude Nord définie dans le domaine $[0, \pi/2]$ et la latitude Sud dans le domaine $[-\pi/2, 0]$; la longitude géographique varie dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, avec la longitude Ouest dans le domaine $[-\pi, 0]$ et la longitude Est dans $[0, \pi]$.

d) Le repère local de Frenet

Un autre repère local appelé repère de Frenet, peut être utilisé pour décrire la position d'un point *M*. Il est représenté sur une courbe qui, par définition, correspond à l'ensemble des positions prises par le point *M* au cours d'une trajectoire quelconque.

Sur cette courbe on fixe une origine *A* et un sens pris en général positif dans le sens du mouvement. La position du point *M* sur la courbe est alors repérée par la donnée de son abscisse dite curviligne et notée $s(M)$: cette abscisse correspond en fait à la longueur de l'arc orienté *AM*.

On fait l'hypothèse que lorsque l'arc de cercle *AM* est infiniment petit, la courbe peut être considérée comme inscrite dans un plan appelé alors *plan osculateur*. Dans ce cas, on définit une repère local dit de Frenet avec une base orthonormée directe $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$, où $\vec{T}$ est le vecteur tangent à la courbe au point *M* (pour simplifier le formalisme, le sens de $\vec{T}$ est en général pris dans le sens du mouvement), le vecteur $\vec{N}$ est perpendiculaire à $\vec{T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe ($\vec{N}$ définit alors la normale principale à la courbe), et le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{N}$ et $\vec{T}$ et tel que le trièdre $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ soit direct ($\vec{B}$ définit alors la *binormale* à la courbe). À noter que $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont inscrits dans le plan osculateur de la courbe lorsque *M* est très proche de *A*. La base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est mobile et suit le mouvement de *M* sur la courbe.

Pour déterminer un rayon de courbure, on prend deux points *M* et *M'* proches sur une courbe, on trace les tangentes à la courbe en ces points, puis on trace les perpendiculaires à ces tangentes (aux points *M* et *M'*) vers la concavité de la courbe : l'intersection de ces droites donne le centre de courbure noté *C* et le rayon de courbure noté R_c est tel que $CM = R_c$.

Voir site web

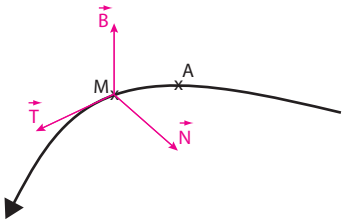


Figure 1.6 **Système de représentation de Frenet**
Représentation du repère local de Frenet avec la base $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ orthonormée directe associée. La position de M sur la courbe orientée est donnée par son abscisse curviligne $s(M)$ comptée à partir de l'origine A.

L'arc de cercle séparant les points M et M' a une longueur notée ds, et l'angle interceptant cet arc de cercle vaut dα. Géométriquement on peut retrouver les relations suivantes :

Voir site web

$$\mathrm{d}s = R_c \cdot \mathrm{d}\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \vec{N}$$

1.1.2 Repérage d'un point dans le temps

La géométrie dans l'espace ne suffit pas à décrire les mouvements en mécanique. Il est nécessaire d'introduire la notion d'**évènement** décrivant un phénomène instantané. On dit qu'on établit une **chronologie** lorsqu'on sait classer une succession d'évènements. Un phénomène physique se décrit donc par le lieu où il se produit mais aussi par l'instant où il se produit.

La mécanique classique repose sur une hypothèse essentielle : le temps est considéré comme **absolu** et **universel**. Ceci signifie que la notion de temps est indépendante du référentiel et du mouvement. Ainsi un intervalle de temps entre deux évènements est le même quel que soit l'observateur et quel que soit le mouvement de l'observateur. À noter que cette hypothèse a été remise en cause par les théories d'Einstein, notamment en ce qui concerne les mouvements se produisant à des vitesses proches de la vitesse de la lumière : ces théories ont ouvert la voie à une nouvelle forme de mécanique, la mécanique quantique. Celle-ci sera introduite et développée dans le dernier chapitre de cet ouvrage. D'autre part, le temps est aussi considéré comme **irréversible**, monotone et croissant : cette hypothèse implicite repose sur le principe de causalité qui postule qu'un effet ne peut être antérieur à sa cause.

Au fil des siècles, la notion de temps et sa mesure ont beaucoup évolué en fonction des avancées technologiques et des progrès scientifiques. Basée d'abord sur la période de rotation de la Terre, puis sur celle de la rotation de la Terre autour du soleil, la notion de temps repose maintenant sur des mesures réalisées avec des **horloges atomiques**.

LES UNITÉS DE MESURE DU MOUVEMENT D'UN POINT

L'unité de temps du Système International (S.I.) est la seconde. La définition actuellement en vigueur pour la seconde est reliée à la période de désintégration radioactive de l'atome de césium ; elle est définie comme suit :
La seconde correspond à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La définition de la seconde est aussi reliée au jour solaire moyen qui est actuellement défini par une durée de 86 400,003 secondes.
L'unité S.I. de longueur est le mètre, dont la définition a été rattachée à celle de la seconde. Ainsi :
Le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant une durée de (1/ 299 792 458) seconde.
Historiquement la notion de mètre a été établie à partir de la longueur du méridien terrestre. La mesure de la longueur de ce méridien a donné lieu pendant la révolution française, à des aventures et des évènements totalement romanesques ; on est arrivé à la définition actuelle suivante : le méridien terrestre a pour longueur 40 008 080 mètres.

Voir *La Méridienne* de Denis Guedj

Pour décrire le mouvement dans l'espace, on a défini un repère avec une origine : cette origine peut correspondre à un observateur fixe ou mobile, le repère étant considéré comme fixe ou local se déplaçant avec le point M respectivement. De même, pour décrire un mouvement dans le temps, il est nécessaire de définir une **origine des temps** : un temps t_0 ou $t = 0$ s, à partir duquel on pourra définir une chronologie d'évènements liés au mouvement du point M. On a indiqué plus haut que l'observateur à partir duquel on repère le mouvement du point matériel M, était considéré comme le référentiel $(\mathscr{R})$. Il faut noter que dans certains cas, il est d'usage de considérer ce référentiel d'étude du mouvement comme étant l'association du repère géométrique dans l'espace et du repère chronologique dans le temps. Ce type de définition « élargie » du référentiel sera utilisé dans la suite de ce cours de mécanique.

1.2 La vitesse du point matériel M

1.2.1 Définition de la vitesse

Dans le référentiel d'étude $(\mathscr{R})$, la position d'un point M est repérée à tout instant par son vecteur position : $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

À l'instant t_1, le vecteur position de M est noté r_1, à l'instant t_2 (postérieur à t_1), ce vecteur est noté r_2. On appelle le vecteur déplacement le vecteur $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Entre ces deux instants successifs t_1 et t_2, la **vitesse moyenne** (notée $\vec{v}_m$) est définie par le rapport de son vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ par l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t_2$.

Ainsi on écrit : $\vec{v}_m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_2)}{t_2 - t_1}$.

La vitesse instantanée de M à l'instant t correspond en fait à la limite de ce rapport lorsque Δt tend vers zéro : par définition, on peut dire que la vitesse instantanée correspond en fait à la dérivée du vecteur position par rapport au temps ; ainsi on écrit la vitesse instantanée $\vec{v}(t)$ du point matériel M :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une vitesse est un rapport d'une longueur par un temps, elle s'exprime donc en mètre par seconde ($\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$).

À noter qu'il est important de préciser par rapport à quel référentiel la vitesse est définie. On écrit alors par exemple :

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}$$

Le référentiel $\mathscr{R}$ est indiqué en indice : on a donc ici l'expression de la vitesse du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$. Dans ce référentiel, les axes liés à ce référentiel sont considérés comme fixes, donc ne dépendant pas du temps.

Remarques

- La définition d'un vecteur donne en fait trois informations en une : elle indique la direction, le sens et la norme du vecteur. À noter aussi que le vecteur vitesse d'un point M est toujours tangent (au point M) à la courbe décrite par le point M au cours de son mouvement.
- On utilise en cinématique la notation de Newton qui consiste à marquer toute dérivation d'un vecteur ou d'une grandeur par rapport au temps, avec un point au-dessus de ce vecteur ou grandeur. Ainsi, on note :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

1.2.2 Expressions de la vitesse instantanée

a) En coordonnées cartésiennes

On a vu plus haut que le vecteur position du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Lorsqu'on dérive ce vecteur par rapport au temps pour obtenir la vitesse instantanée, on rappelle une règle élémentaire de dérivation d'une somme de produits, en marquant les dérivées avec la notation « primée » :

$$(fg + hk)' = f' \cdot g + f \cdot g' + h' \cdot k + h \cdot k'$$

On applique cette même règle en dérivant le vecteur position OM par rapport au temps (avec la notation de Newton, « pointée ») :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + x \cdot \dot{\vec{u}}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + y \cdot \dot{\vec{u}}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Or les vecteurs dans le repère cartésien lié au référentiel $\mathscr{R}$ sont invariants avec le temps, donc $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$; on écrit alors :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les composantes de $\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$ sont donc $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

b) En coordonnées cylindriques

L'objectif ici est d'exprimer le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de la base du repère cylindrique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel $\mathscr{R}$ qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur position a été écrit précédemment : $\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$. On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur vitesse instantanée du point M dans $\mathscr{R}$ et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{z} \cdot \vec{u}_z + z \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Notons d'abord que dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$, le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ évoluent avec le temps. Ainsi on peut déjà écrire : $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$. On utilise la méthode mathématique suivante, basée sur le fait qu'on peut diviser et multiplier un rapport par la même quantité :

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Or, on a vu plus haut que lorsqu'on dérive un vecteur (ici $\vec{u}_\rho$) par son angle polaire (ici θ), on obtient un vecteur directement perpendiculaire (ici $\vec{u}_\theta$).

Ainsi on a : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} = \vec{u}_\theta$

On obtient alors l'expression de la vitesse instantanée du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

c) En coordonnées sphériques

On veut exprimer ici le vecteur vitesse du point M en fonction des vecteurs $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ de la base du repère sphérique (local, mobile, associé au point M) associé au référentiel $\mathscr{R}$ qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\phi$ se déplacent avec le point M, donc ils dépendent du temps, et donc les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps ne sont pas nulles.

Écrire la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps, revient à déterminer le mouvement du point M lorsque ses trois coordonnées r, θ et ϕ évoluent avec le temps. On peut simplifier la résolution de ce problème en décomposant ce mouvement en trois parties : *i)* un mouvement de M lorsque r varie (à θ et ϕ constants), *ii)* un mouvement de M lorsque θ varie (à r et ϕ constants), *iii)* un mouvement de M lorsque ϕ varie (à r et θ constants).

i) r varie de dr, à θ et ϕ constants

Le point M se déplace alors suivant la droite OM de vecteur directeur $\vec{u}_r$ (voir Fig 1.3). On peut alors écrire le vecteur déplacement sur cette droite : $\vec{A} = \mathrm{d}r \cdot \vec{u}_r$

La vitesse instantanée de M se déplaçant ainsi, peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur cette droite OM, le vecteur $\vec{u}_r$ est fixe) :

$$\vec{v}_1(M) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \dot{r} \cdot \vec{u}_r$$

ii) θ varie de dθ, à r et ϕ constants

Le point M se déplace alors sur un cercle de centre O, de rayon r et inscrit dans le plan (Om, OZ), comme représenté sur la figure 1.7.

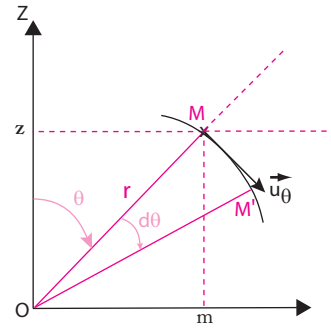


Figure 1.7 **Mouvement de M quand θ varie (à r et ϕ constants)**

Lorsque θ varie de dθ, le point M parcourt un arc de cercle de longueur $r \cdot \mathrm{d}\theta$. Si dθ est infiniment petit, alors M et M' sont très proches : on fait alors l'hypothèse que M et M' sont à la fois sur le cercle et sur la tangente au cercle au point M. Ainsi le vecteur déplacement $\vec{B}$ dans ce cas peut s'écrire : $\vec{B} = r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \vec{u}_\theta$. La vitesse instantanée de M se déplaçant sur ce cercle peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur la tangente au cercle au point M, r et $\vec{u}_\theta$ sont fixes) :

$$\vec{v}_2(M) = \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

iii) ϕ varie de dϕ, à r et θ constants

Le point M se déplace alors sur un cercle de centre H, projection orthogonale du point M sur l'axe OZ (voir Fig 1.3), de rayon $HM = r \cdot \sin\theta$ et inscrit dans un plan parallèle au plan (OX, OY), de cote $OH = r \cdot \cos\theta$. La figure 1.8 (en vue aérienne par rapport au plan (OX, OY)) permet de mieux visualiser ce mouvement.

Lorsque ϕ varie de dϕ, le point M parcourt un arc de cercle de longueur $r \cdot \sin\theta \cdot \mathrm{d}\phi$. Si d$\phi$ est infiniment petit, alors M et M' sont très proches : on fait alors l'hypothèse que M et M' sont à la fois sur le cercle et sur la tangente au cercle au point M. Ainsi le vecteur déplacement $\vec{C}$ dans ce cas peut s'écrire : $\vec{C} = r \cdot \sin\theta \cdot \mathrm{d}\phi \cdot \vec{u}_\phi$. La vitesse instantanée de M se déplaçant sur ce cercle peut donc s'écrire comme suit (sachant que sur la tangente au cercle au point M, le vecteur $\vec{u}_\phi$ est fixe et que sur le cercle, $r \cdot \sin\theta$ est constant également) :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

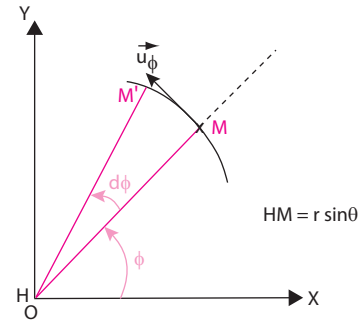


Figure 1.8 **Mouvement de *M* quand ϕ varie (à r et θ constants)**

$$\vec{v}_3(M) = \frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t} = (r \cdot \sin\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{u}_\phi$$

Donc, lorsque les trois coordonnées sphériques du point M varient de manière simultanée, on obtient alors la vitesse instantanée du point M comme suit :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \vec{v}_1(M) + \vec{v}_2(M) + \vec{v}_3(M)$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{r} \cdot \vec{u}_r + r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + (r \cdot \sin\theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{u}_\phi$$

d) Dans le repère de Frenet

Sur la figure 1.9 est représentée la courbe suivie par le point M. La distance entre les points M et M' sur la courbe est notée ds. Si M et M' sont infiniment proches, on peut alors faire l'hypothèse que M et M' sont à la fois sur la courbe et sur la tangente à la courbe au point M (tangente de vecteur directeur unitaire $\vec{T}$). Ainsi le vecteur déplacement peut s'écrire : $\overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}s \cdot \vec{T}$

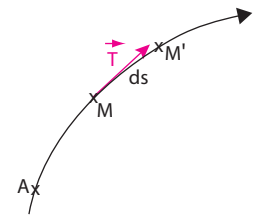


Figure 1.9 **Trajectoire curviligne suivie par un point *M***

La vitesse instantanée du point M peut donc s'écrire comme suit, en soulignant que sur la tangente à la courbe au point M le vecteur $\vec{T}$ est fixe :

$$\vec{v}(M) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{MM'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{T} = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

1.3 L'ACCÉLÉRATION DU POINT MATÉRIEL *M*

1.3.1 Définition de l'accélération

Dans la plupart des mouvements, la vitesse varie au cours du temps, soit en norme, soit en direction, soit en sens, soit les trois à la fois. On caractérise cette variation par l'accélération $\vec{a}$ du point.

On imagine un point M passant d'un point A (atteint à l'instant t_1, avec une vitesse $\vec{v}_1$) à un point B (atteint à l'instant t_2, avec une vitesse $\vec{v}_2$). On peut alors définir l'**accélération moyenne** (notée $\vec{a}_\text{m}$) du point M entre les positions A et B :

$$\vec{a}_\text{m} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_2)}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée de M à l'instant t correspond en fait à la limite de ce rapport lorsque $\Delta t = t_2 - t_1$ tend vers zéro : par définition, on peut dire que l'accélération instantanée correspond en fait à la dérivée première du vecteur vitesse par rapport au temps et donc à la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps ; on écrit la vitesse instantanée $\vec{a}(t)$ du point matériel M :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\overrightarrow{OM}}$$

Par analyse dimensionnelle, on trouve qu'une accélération est un rapport d'une vitesse par un temps, elle s'exprime donc en mètre par seconde au carré ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$).

Tout comme la vitesse, l'accélération est définie par rapport à un référentiel donné que l'on indique par une lettre en indice. L'accélération du point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ s'écrit donc : $\vec{a} = \vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}$

1.3.2 Expressions de l'accélération

a) En coordonnées cartésiennes

On a vu plus haut l'expression de la vitesse instantanée du point M dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ lié au référentiel $\mathscr{R}$:

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

En appliquant la règle de dérivation d'une somme de produits, on trouve l'expression de l'accélération instantanée du point M :

$$\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{x} \cdot \dot{\vec{u}}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{y} \cdot \dot{\vec{u}}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Or les vecteurs dans le repère cartésien lié au référentiel $\mathscr{R}$ sont invariants avec le temps, donc $\dot{\vec{u}}_x = \dot{\vec{u}}_y = \dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$; on écrit alors :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{x} \cdot \vec{u}_x + \ddot{y} \cdot \vec{u}_y + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

Les composantes de $\vec{a}_{\mathscr{R}}(M)$ sont donc $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$.

b) En coordonnées cylindriques

On exprime ici le vecteur accélération du point M en fonction des vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ de la base du repère cylindrique (local au point M) associé au référentiel $\mathscr{R}$ qui correspond à un observateur fixe situé au point origine O.

Le vecteur vitesse a été écrit précédemment :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\overrightarrow{OM}} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$$

On peut le dériver par rapport au temps pour obtenir le vecteur accélération instantanée du point M dans $\mathscr{R}$ et dans la base du repère cylindrique :

$$\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z + \dot{z} \cdot \dot{\vec{u}}_z$$

Dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$, le vecteur $\vec{u}_z$ est fixe alors que $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ évoluent avec le temps. Ainsi on peut déjà écrire que $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$. Pour exprimer $\dot{\vec{u}}_\rho$ et $\dot{\vec{u}}_\theta$ dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on utilise la même méthode que dans le cas de la vitesse en coordonnées cylindriques. On trouve donc que :

$$\dot{\vec{u}}_\rho = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho$$

En effet, lorsqu'on dérive $\vec{u}_\theta$ par rapport à θ, cela revient à dériver une seconde fois $\vec{u}_\rho$ par rapport à son angle polaire, donc à effectuer deux rotations successives de $+\pi/2$ dans le sens trigonométrique : on obtient alors $-\vec{u}_\rho$.

Voir le site web pour une présentation de l'accélération en coordonnées sphériques.

On obtient donc l'expression suivante de l'accélération instantanée du point M dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \ddot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \left(-\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho\right) + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

d'où : $$\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \ddot{\overrightarrow{OM}} = \left(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2\right) . \vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot \vec{u}_\theta + \ddot{z} \cdot \vec{u}_z$$

c) Dans le repère de Frenet

On a vu précédemment que la vitesse du point M dans la base mobile de Frenet a pour expression :

$$\vec{v}(M) = \dot{s} \cdot \vec{T}$$

On trouve l'accélération du point M dans cette même base en dérivant par rapport au temps la vitesse instantanée. On écrit donc :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \dot{s} \cdot \dot{\vec{T}}$$

On peut écrire la dérivée de $\vec{T}$ par rapport au temps, sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{T}} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Comme nous l'avons vu plus haut (voir présentation du repère local de Frenet p.30 et 31), nous connaissons les termes de ce produit :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{R_\mathrm{c}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \vec{N}$$

avec R_c le rayon de courbure et $\vec{N}$ le vecteur normal (tourné vers la concavité de la courbe).

Ainsi, on trouve :

$$\vec{a}(M) = \ddot{s} \cdot \vec{T} + \frac{\dot{s}^2}{R_\mathrm{c}} \cdot \vec{N}$$

Il y a donc deux composantes de l'accélération : une composante tangentielle (notée $a_\mathrm{T}(M)$) et une composante normale (notée $a_\mathrm{N}(M)$). Leurs expressions sont :

$$a_\mathrm{T}(M) = \ddot{s} \quad \text{et} \quad a_\mathrm{N}(M) = \frac{\dot{s}^2}{R_\mathrm{c}}$$

Remarque

On utilise parfois la notation suivante : $v = \dot{s}$, où v est une mesure algébrique : positive si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes croissantes, et négative si le point M se déplace dans le sens des abscisses curvilignes décroissantes. On écrit donc l'expression de l'accélération comme suit :

$$\vec{a}(M) = \dot{v} \cdot \vec{T} + \frac{v^2}{R_\mathrm{c}} \cdot \vec{N}$$

À retenir

Le mouvement d'un point M peut être décrit par les vecteurs position, vitesse et accélération. Ces vecteurs caractérisés par une direction, un sens et une norme, peuvent être exprimés dans différents systèmes de coordonnées, à choisir selon le type de mouvement. Les systèmes les plus utilisés sont les systèmes cartésien, cylindrique et sphérique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- La vitesse et l'accélération sont obtenues par dérivations successives du vecteur position par rapport au temps. Le vecteur position s'exprime comme suit dans les différents systèmes :

  Cartésien : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$

  Cylindrique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$

  Sphérique : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$
- Dériver le vecteur position par rapport au temps revient à dériver ses composantes par rapport au temps mais aussi les vecteurs de la base dans laquelle il est exprimé : dans ce dernier cas, il est souvent utile d'exprimer les vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la base cartésienne qui sont en général considérés comme invariants avec le temps.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 591.

1.1 Un point matériel M est animé d'un mouvement défini par les équations horaires suivantes (en coordonnées cartésiennes) :

$x = a \cdot \cos(\theta) \quad y = a \cdot \sin(\theta) \quad z = h \cdot \theta$

θ est fonction du temps, a et h sont des constantes positives, $h = 0{,}1$ m.

a) Montrer que la trajectoire du point M est une hélice. La dessiner.

Sachant que le pas de l'hélice correspond à la hauteur atteinte quand θ parcourt 2π, calculer le pas de cette hélice.

b) Dans le système cylindrique, déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en fonction de $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$. Dans quel cas le vecteur vitesse est-il constant ?

c) Montrer que le vecteur vitesse fait un angle constant avec le plan (Ox, Oy).

d) Dans le cas où $\theta = \omega t$, avec ω = constante, montrer que les vecteurs vitesse et accélération ont des normes constantes.

1.2 Un point M est en mouvement décrit par les équations horaires suivantes (dans le système polaire) :

$$\theta(t) = \omega \cdot t \qquad r(t) = \alpha \cdot t^2$$

ω et α sont des constantes positives.

a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires.

b) Déterminer l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires (c'est-à-dire r en fonction de θ).

1.3 Une voiture se déplace sur une route rectiligne assimilée à l'axe Ox d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Son équation horaire est la suivante : $x(t) = -t^3 + 3t^2 - 2t$.

a) Déterminer la grandeur algébrique $v(t) = \dot{x}(t)$ telle que $\vec{v} = v(t) \cdot \vec{i}$.

b) Déterminer la grandeur algébrique $a(t) = \ddot{x}(t)$ telle que $\vec{a} = a(t) \cdot \vec{i}$.

c) Déterminer les instants pour lesquels $v(t) = 0$ et $a(t) = 0$. Construire le tableau des variations de $v(t)$. Tracer la fonction $v(t)$. Tracer sur le même graphique le module de la vitesse de la voiture.

d) Déduire du graphe précédent les périodes où la voiture accélère et décélère.

1.4 Un cascadeur doit courir sur un toit puis en sauter pour se rétablir sur le toit d'un autre bâtiment plus bas de 4,5 mètres et distant de 6,2 mètres.

Avant sa première tentative, il vous demande si cette cascade est réalisable s'il arrive avec une vitesse de 16,2 km $\cdot$ h^{-1}. Quelle est votre réponse ?

Remarque : on néglige la résistance de l'air et l'accélération est celle de la pesanteur.

1.5 Un homme (représenté par le point H) est au milieu d'une échelle (de longueur $2a$) placée presque à la verticale le long d'un mur. Il repeint une gouttière mais malheureusement il a mal calé son échelle et celle-ci glisse sur le sol. L'homme au lieu de sauter reste immobile et s'accroche désespérément à l'échelle. À tout moment, vue de profil, l'échelle a un point de contact M avec le mur et un point de contact S avec le sol.

a) Quelle est la trajectoire de l'homme ?

b) En supposant la loi $x_H(t)$ connue (abscisse x_H de l'homme en fonction du temps), trouver la loi donnant la vitesse en fonction de $x_H(t)$.

c) Quelle est la trajectoire de l'homme s'il est placé aux deux tiers de l'échelle et non plus au milieu lors que l'échelle glisse sur le sol ?

1.6 Un point M suit une trajectoire circulaire de rayon R et de centre O, dans le sens trigonométrique, avec un angle θ qui varie en fonction du temps suivant la loi : $\theta = \omega \cdot t$.

a) Donner l'expression du vecteur vitesse dans le repère polaire.

b) Donner l'expression du vecteur vitesse en fonction du vecteur rotation.

c) Donner l'expression du vecteur accélération dans le repère polaire en fonction de $\dot{\theta}, \ddot{\theta}$.

d) Comment est l'accélération lorsque le mouvement de rotation est uniforme (c'est-à-dire à vitesse constante) ? Donner dans ce cas l'expression du vecteur accélération.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dynamique du point

2

PRÉALABLES

- Vecteurs et calculs vectoriels
- Équations différentielles
- Calcul différentiel

MOTS CLÉS

- Masse, force
- Référentiels galiléens
- Travail, énergie

OBJECTIFS

- Définir les principes de la dynamique newtonienne
- Comprendre la notion de référentiel galiléen
- Définir les principaux types de forces
- Décrire le travail d'une force
- Mettre en évidence les énergies en mécanique
- Savoir déterminer les équations de mouvements simples

La *dynamique* a pour origine le mot grec « $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ » qui signifie pouvoir, puissance, force. La *dynamique* est en effet la partie de la mécanique qui étudie les causes des mouvements des corps que la *cinématique* nous a permis de décrire.

La *dynamique* classique ou newtonienne du point matériel permet de mettre en évidence les origines possibles du mouvement d'objets macroscopiques se déplaçant à des vitesses suffisamment faibles par rapport à celle de la lumière. Pour les objets ou particules se déplaçant à très grande vitesse, l'explication des mouvements requiert l'utilisation d'une autre mécanique : la mécanique quantique ou mécanique relativiste.

2.1 Principes de la Dynamique Newtonienne

L'ensemble des principes de la mécanique a été formalisé en 1686 par Isaac Newton (1642-1727), dans son ouvrage intitulé *Philosophiae naturalis principia mathematica* qui est devenu l'un des ouvrages fondamentaux de la physique et a été à l'origine de la

mécanique classique dite newtonienne. En fait d'autres savants tels Descartes (1644) ou Galilée (1638) ont grandement contribué à la découverte de ces principes, mais c'est Newton qui a regroupé et formalisé ces principes dans son ouvrage majeur.

2.1.1 Corps isolé et référentiel galiléen

Première loi de Newton ou Principe d'Inertie

Tout corps isolé, qui n'est soumis à aucune interaction avec d'autres objets matériels, conserve l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme qu'il possédait auparavant.

Comme tout principe, ce principe d'inertie ne se démontre pas. L'énoncé de ce principe requiert cependant certaines explications et compléments. Tout d'abord, deux corps sont considérés en *interaction* lorsqu'ils exercent des actions réciproques l'un sur l'autre. Une des lois de la nature fait que cette interaction décroît lorsque la distance entre les deux corps augmente. On dit aussi qu'un corps est *isolé* lorsqu'il ne subit aucune interaction extérieure.

Le principe d'inertie suppose implicitement l'existence de référentiels privilégiés dans lesquels ce principe est vérifié : on les appelle référentiels d'inertie ou **référentiels galiléens**. Ainsi dans un référentiel galiléen, le mouvement d'un corps isolé est rectiligne et uniforme, et ne subit aucune accélération.

Voir chapitre 3

Nous verrons dans le chapitre consacré à la mécanique terrestre et céleste, que l'accélération d'un point matériel est la même dans tous les référentiels qui sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

Si un point matériel M est isolé dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, cela signifie qu'il ne subit aucune accélération et donc $\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \vec{0}$.

Si $\mathscr{R}'$ est un référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel $\mathscr{R}$, alors on peut écrire $\vec{a}_{\mathscr{R}'}(M) = \vec{0}$ car $\vec{a}_{\mathscr{R}'}(M) = \vec{a}_{\mathscr{R}}(M)$. Cela signifie donc que $\mathscr{R}'$ est aussi un référentiel galiléen puisque ce même point matériel M ne subit aucune accélération dans $\mathscr{R}'$ et est donc isolé. Le principe d'inertie est donc vérifié aussi dans $\mathscr{R}'$.

Théorème

Si $\mathscr{R}$ est un référentiel galiléen, tous les référentiels $\mathscr{R}'$ en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathscr{R}$, sont aussi galiléens.

LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS OU SUPPOSÉS GALILÉENS

Le meilleur référentiel galiléen que l'on peut définir est le référentiel de Copernic. D'autres référentiels usuels liés à la Terre (géocentrique, terrestre) sont en général supposés galiléens.

• ***Le référentiel de Copernic.*** Ce référentiel a pour origine le centre de masse du système solaire (qui peut être assimilé au centre du Soleil), et présente des axes pointant vers trois étoiles éloignées considérées comme fixes sans mouvement apparent. Ce référentiel porte le nom de l'astronome polonais Nicolas Copernic (1473-1543) qui plaça « le Soleil au centre du monde » plutôt que la Terre.

• ***Le référentiel géocentrique.*** Son origine correspond au centre de masse de la Terre, et ses axes sont parallèles aux axes du référentiel de Copernic. Étant lié à la Terre, ce référentiel est donc en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic. En toute rigueur, il n'est donc pas galiléen.
Cependant, lorsque les expériences sont réalisées sur des distances faibles devant la dimension de l'orbite terrestre (distance moyenne Terre-Soleil = environ 150 millions de kilomètres) et sur des durées faibles devant la période de révolution de la Terre (1 an), on peut alors considérer le référentiel comme galiléen.

• ***Le référentiel terrestre.*** Ce référentiel a son origine au centre de masse de la Terre, et ses axes sont liés à la Terre et sont donc en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique. En toute rigueur, le référentiel terrestre est non galiléen. Toutefois, sur des distances petites par rapport aux dimensions de la Terre (circonférence de la Terre = 40 000 km) et sur des durées très faibles par rapport à la période de rotation de la Terre (1 jour), on peut faire l'approximation qu'un référentiel terrestre (*i.e.* tout solide immobile par rapport à la Terre) est galiléen.

2.1.2 Force et masse

Dans le monde qui nous entoure, au cours des situations et expériences de la vie de tous les jours, on a l'intuition de la notion de force. Notre corps ressent les efforts produits pour pousser, soulever ou transporter un objet. La chute libre d'un corps montre qu'il s'exerce sur ce corps une action qui l'attire vers la surface de la Terre. Il existe donc de nombreux exemples concrets de « mise en mouvement » d'objets : ces objets subissent une accélération car ils sont soumis à une ou plusieurs interactions. Ces interactions sont à l'*origine des mouvements des corps*, et leur définition et description sont à la base de la dynamique newtonienne qui a pour objectif de prévoir le mouvement des corps dans un environnement donné.

Remarque

Il faut aussi noter que ce n'est pas parce qu'un corps est en mouvement rectiligne uniforme, qu'il est forcément isolé ; en effet un corps peut suivre un tel mouvement lorsqu'il est soumis à plusieurs interactions dont les effets se compensent.

Ces interactions, causes des mouvements des corps, peuvent être décrites par une *grandeur vectorielle* qu'on appelle **force**. À noter qu'avec la définition de ce vecteur force, on a trois informations en une : en effet, on a la direction, le sens et l'intensité (avec la norme du vecteur) de l'interaction s'exerçant sur un corps.

Newton a élaboré le principe fondamental de la dynamique à partir de la constatation suivante : lorsqu'une action est exercée sur un corps, le mouvement de ce corps est

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

modifié, c'est-à-dire son accélération est modifiée. Ses observations célèbres étaient basées sur la chute libre des objets et l'attraction de la Terre. L'idée d'origine de ce principe consiste à dire que la variation de vitesse d'un corps dans un référentiel galiléen est égale à la force exercée (ou à la somme des forces exercées) sur ce corps rapportée à la masse de ce corps. Comme la variation de vitesse avec le temps correspond à l'accélération définie dans le chapitre consacré à la Cinématique du Point, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique comme suit :

Deuxième loi de Newton (Principe Fondamental de la Dynamique)

Dans un référentiel galiléen, la force résultante $\vec{F}$ *exercée sur un point matériel, de masse* m *donnée, est égale au produit de la masse du point et de son accélération* $\vec{a}$ *:*

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

À noter que si plusieurs forces s'exercent sur le point, alors la force résultante $\vec{F}$ est la somme vectorielle de ces forces.

a) La notion de quantité de mouvement

Pour énoncer cette deuxième loi, Newton a en fait introduit une nouvelle notion : celle de la quantité de mouvement. On note donc la quantité de mouvement d'un point M dans le référentiel $\mathscr{R}$ comme étant le produit de sa masse et de sa vitesse : c'est donc une grandeur vectorielle et elle s'écrit comme suit :

$$\vec{p}_{\mathscr{R}}(M) = m \cdot \vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$$

Le principe fondamental de la dynamique revient à dire que la force exercée sur un corps correspond en fait à la variation de la quantité de mouvement de ce corps. En effet, comme $\vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\vec{v}}_{\mathscr{R}}(M)$, on peut donc écrire :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{\mathscr{R}}(M) = m \cdot \dot{\vec{v}}_{\mathscr{R}}(M) = \dot{\vec{p}}_{\mathscr{R}}(M)$$

b) La notion de masse

Le principe fondamental de la dynamique fait aussi intervenir une nouvelle grandeur physique fondamentale : la masse. Newton définit la masse comme la quantité de matière contenue dans un corps. Et Newton fait dériver la notion de masse de celle de la force : il énonce ainsi que deux corps de masses différentes m_1 et m_2 soumises à une même force $\vec{F}$, vont acquérir des accélérations différentes dans le rapport de leur masse.

Ainsi, on écrit les relations suivantes : $\vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}_1$ et $\vec{F} = m_2 \cdot \vec{a}_2$.

On a alors la relation suivante : $m_1 \cdot \|\vec{a}_1\| = m_2 \cdot \|\vec{a}_2\|$ et donc $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\|\vec{a}_1\|}{\|\vec{a}_2\|}$.

c) Les unités de la masse, de la force et de la quantité de mouvement

L'unité de la masse est le kilogramme (noté kg) qui est une des unités du Système International (unités S.I.). Le kilogramme (nom d'origine le *grave*) correspond en fait à

la masse d'un cylindre en platine iridié de 39 mm de diamètre et 39 mm de haut (étalon depuis 1889).

La force étant définie comme le produit de la masse par l'accélération, elle a pour unité S.I. le $kg \cdot m \cdot s^{-2}$. L'unité usuelle pour une force est le newton (noté N) avec $1\ N = 1\ kg \cdot m \cdot s^{-2}$. En unités S.I., une quantité de mouvement s'exprime en $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

2.1.3 Action et réaction

Dans son ouvrage fondamental *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Newton a établi une troisième loi dite de l'action et de la réaction. Elle s'énonce comme suit :

Troisième loi de Newton (Principe de l'action et de la réaction)

Quand deux corps interagissent, la force $\vec{F}_{12}$ exercée par le premier corps sur le second corps est égale en intensité et opposée en sens à la force $\vec{F}_{21}$ exercée par le second corps sur le premier corps. On écrit donc : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Remarque

Si on regarde l'interaction d'une pomme et de la planète Terre, on peut dire que la force exercée par la pomme sur la Terre est égale en intensité à la force exercée par la Terre sur la pomme ! Bien sûr si on considère l'effet de ces forces sur ces deux corps, on sait que l'accélération de la pomme sera bien supérieure à celle de la Terre puisque dans le rapport de leurs masses.

COLLISION ENTRE DEUX PARTICULES

Une collision se produit lorsque deux objets se rencontrent, et qu'il y a un choc. Une collision est un contact physique entre deux corps : ce contact est court et brutal, c'est-à-dire que les forces subies sont en général très intenses et causent des déformations locales qui peuvent être importantes.

Quand deux particules entrent en collision, il est important de bien définir le système d'étude : on prend en général le système des deux particules. Ainsi les interactions entre ces deux particules sont des forces intérieures au système et elles répondent au principe de l'action et de la réaction. De plus on se place dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, donc le système est isolé.

La quantité de mouvement du système des deux particules est égale à la somme des quantités de mouvement de chacune des particules ($\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$). D'après le principe fondamental de la dynamique on peut écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Donc lors d'un choc entre deux particules, dans un système isolé, il y a **conservation de la quantité de mouvement**.

Dans un certain nombre de cas, l'énergie cinétique totale du système peut être considérée comme constante, on dit alors que la collision est **élastique**. En fait il s'agit d'une

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

hypothèse car la collision peut entraîner pour les particules des changements de niveau énergétique. D'autres cas de collision se traduisent par une diminution de l'énergie cinétique totale : l'énergie cinétique se transforme en un autre type d'énergie (échauffement par exemple), on parle alors de collision **inélastique**.
Dans le cas d'une **collision supposée élastique**, on peut écrire la **conservation de l'énergie cinétique** pour les deux particules M_1 (énergies cinétiques E_{c_1} et E'_{c_1} avant et après le choc respectivement) et M_2 (énergies cinétiques E_{c_2} et E'_{c_2} avant et après le choc respectivement) :

$$E_{c_1} + E_{c_2} = E'_{c_1} + E'_{c_2}$$

2.1.4 Des forces au quotidien

Dans la nature, l'expérience nous révèle l'existence d'actions ou de forces importantes : la chute d'un corps vers la surface de la Terre, un objet immobile sur un sol rugueux incliné par rapport à l'horizontal, la tension d'une corde de part et d'autre d'une poulie. Comme toujours en physique, ce sont des constatations expérimentales qui ont permis de mettre en évidence ces forces qui font partie de notre quotidien.

a) Le poids et l'attraction gravitationnelle

ISAAC NEWTON ET LES POMMES !

Sur ces vieux jours, Isaac Newton évoqua l'anecdote de la chute d'une pomme dans son verger lorsqu'il était jeune : cette « expérience » aurait été à l'origine des lois de la gravitation universelle qu'il élabora par la suite.
Légende ou pas, cette pomme ou plus généralement la chute des corps sur la Terre le fit réfléchir sur la pesanteur et notamment sur le cas de la Lune par rapport à la Terre : pourquoi la Lune tout comme la pomme ne tombe-t-elle pas sur la Terre ? Quelle force est exercée sur la Lune pour la maintenir sur son orbite autour de la Terre ? Il établit alors que la force exercée sur la Lune était de même nature que celle exercée sur la pomme, et que la Lune tombait bien sur la Terre sinon elle serait emportée par sa vitesse. Il en conclut que la Lune était retenue sur son orbite grâce à une force d'interaction à distance exercée par la Terre : cette force fut appelée force de gravitation (ce mot vient de l'indo-européen *grever* qui signifie lourd, pesant).
Il admit également qu'une telle force devait aussi être exercée par le Soleil sur les planètes pour les maintenir sur leurs orbites : cette généralisation aboutit alors à la gravitation universelle (littéralement gravitation de l'univers). En comparant les périodes de révolution des planètes à leurs distances au Soleil, il établit que la force de gravitation était proportionnelle aux masses des corps en interaction et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant les deux corps.

On considère deux corps A et B de masse respectives m_A et m_B. On note $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire (*i.e.* $\|\vec{u}_{AB}\| = 1$) de la droite (AB) : il est noté ainsi car il est dans un sens allant du point A vers le point B. d est la distance entre les points A et B. Newton a montré que ces masses ont un pouvoir d'attraction l'une sur l'autre, et ce pouvoir se

manifeste par une force d'attraction dite force d'attraction gravitationnelle (ou force de gravitation). On note $\vec{F}_{AB}$ la force d'attraction exercée par le corps A sur le corps B : la première lettre A indique le corps à l'origine de l'attraction et la deuxième lettre B indique le corps qui est attiré (ainsi $\vec{F}_{AB}$ est appliquée au point B et a pour origine le point A).

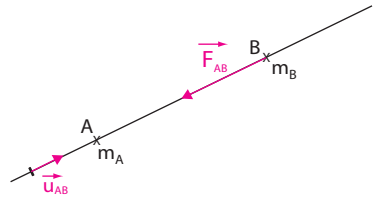


Figure 2.1 **Force d'attraction gravitationnelle**

D'après les observations et théories de Newton, la force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}_{AB}$ est donc proportionnelle aux deux masses m_A et m_B, et inversement proportionnelle au carré de la distance séparant m_A et m_B, soit d^2. La constante de proportionnalité est notée G : elle est appelée constante universelle de gravitation et vaut $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ N$\cdot$m$^2 \cdot$ kg^{-2}. Cette force a pour origine le point B et est dirigée vers le point A : elle est donc de sens opposé au vecteur unitaire $\vec{u}_{AB}$. Ainsi on peut écrire :

$$\vec{F}_{AB} = -G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{d^2} \cdot \vec{u}_{AB}$$

À la surface de la Terre, tout corps pesant subit une force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre. Cette force attire les corps vers la surface de la Terre. On l'appelle le **poids** $\vec{P}$. On considère un corps M (assimilable au point M) de masse m, situé à une distance d de la surface de la Terre telle que d est très petite devant le rayon de la Terre R_T (soit $d \ll R_T$).

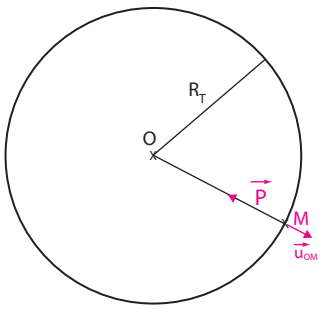


Figure 2.2 **Poids $\vec{P}$ d'un objet M de masse m attiré par la Terre assimilée à une sphère de rayon R_T, de centre de gravité O et de masse M_T.**

Le poids $\vec{P}$ est une force d'attraction gravitationnelle et peut donc s'écrire :

$$\vec{P} = -G \cdot \frac{m \cdot M_T}{R_T^2} \cdot \vec{u}_{OM}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans cette expression, on peut séparer les termes liés à la Terre et ceux liés au corps M. Ainsi on peut écrire :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = -\mathrm{G} \cdot \frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} \cdot \vec{u}_{OM}$$

$\vec{g}$ rend compte alors de l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Si on considère que le corps M est en chute libre vers la surface de la Terre, on écrit le principe fondamental de la dynamique appliqué au corps M : $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$ et donc on obtient : $\vec{g} = \vec{a}$.

Ainsi $\vec{g}$ correspond à l'accélération d'un corps en chute libre due à l'attraction gravitationnelle de la Terre ; on appelle aussi $\vec{g}$ **l'accélération gravitationnelle**.

L'ACCÉLÉRATION GRAVITATIONNELLE DE LA TERRE

Ordre de grandeur de l'accélération gravitationnelle $R_\mathrm{T} \approx 6\,000$ km ; $M_\mathrm{T} \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg; donc $\|\vec{g}\| \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (valeur souvent utilisée).
L'intensité de $\vec{g}$ est fonction du rayon de la Terre qui n'est pas tout à fait sphérique : donc $\|\vec{g}\|$ varie selon la latitude où on se situe. Ainsi à Paris on a $\|\vec{g}\| = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, tandis qu'aux pôles $\|\vec{g}\| = 9{,}83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et à l'équateur $\|\vec{g}\| = 9{,}78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

b) Réaction des supports et forces de frottement

Lorsqu'un solide se déplace sur une surface, ce solide appuie sur cette surface tant qu'il est en contact avec elle. Il exerce donc une force $\vec{F}$ sur la surface. D'après le principe de l'action et de la réaction, la surface exerce également une force $\vec{R}$ sur le solide, telle que $\vec{R} = -\vec{F}$. Cette force $\vec{R}$ est appelée **réaction du support**.

Lorsqu'on lance un corps solide sur un plan horizontal, on observe une diminution progressive de la vitesse de ce corps, qui finit par s'arrêter. Ce corps est donc freiné par une force dite de frottement qui s'oppose au mouvement.

Lorsqu'on considère les frottements, la réaction $\vec{R}$ du support est en fait la somme vectorielle de deux forces : une force $\vec{R}_\mathrm{N}$ normale à la surface, une force $\vec{R}_\mathrm{T}$ tangente à la surface ($\vec{R}_\mathrm{T}$ correspond à la force de frottement).

On peut alors considérer deux cas : le cas où le solide est immobile, on parle de frottement statique ; le cas où le solide est en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$, on parle de frottement dynamique.

Dans le cas statique (Fig. 2.3a), on introduit le coefficient de frottement statique noté μ_s qui correspond au rapport des composantes normale et tangentielle de la réaction du support :

$$\text{soit } \frac{\left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\|}{\left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|} = \tan\alpha = \mu_\mathrm{S}, \text{ ou encore } \left\|\vec{R}_\mathrm{T}\right\| = \mu_\mathrm{S} \cdot \left\|\vec{R}_\mathrm{N}\right\|.$$

Dans le cas dynamique (Fig. 2.3b), on introduit le coefficient de frottement dynamique noté μ_d qui s'écrit comme pour le coefficient statique :

$$\text{Soit } \frac{\left\|\vec{R}_T\right\|}{\left\|\vec{R}_N\right\|} = \tan\beta = \mu_d, \text{ ou encore } \left\|\vec{R}_T\right\| = \mu_d \cdot \left\|\vec{R}_N\right\|.$$

Dans tous les cas, on a toujours : $\mu_d < \mu_s$.

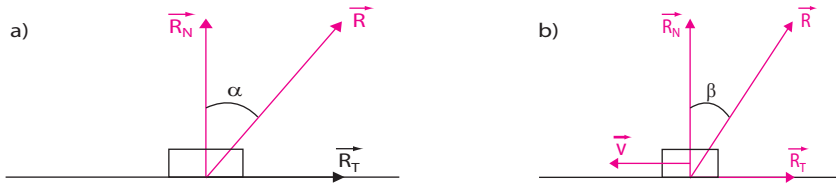


Figure 2.3 **a) Cas du frottement statique. b) Cas du frottement dynamique.**

On constate que le support ne présente pas les mêmes frottements selon que le corps solide est immobile ou en mouvement. La composante tangentielle de la réaction du support est plus importante dans le cas statique, et il faut exercer une force au moins égale en intensité et opposée en sens pour mettre le corps solide en mouvement. Dans le cas dynamique, μ_d est fonction de la nature et de l'état de la surface (rugosité, bosses, trous...).

c) Tension d'une corde

Soit un solide auquel on a attaché une corde. Lorsqu'on tire sur la corde, on dit que la corde est sous tension.



Figure 2.4 **Tension d'une corde**

La corde tire sur l'objet avec une force $\vec{T}$ parallèle à la corde au point d'attache A, dirigée de l'objet vers la corde. La corde relie deux solides, l'objet et la main. La corde tire donc sur les deux solides avec une force de même intensité. On peut écrire : $\vec{T}' = -\vec{T}$, où $\vec{T}'$est la force par laquelle la corde tire sur la main.

2.2 TRAVAIL ET ÉNERGIE

Dans cette partie sont présentées d'autres méthodes permettant d'étudier les mouvements d'un point matériel. Ces méthodes font appel à un principe différent de ceux évoqués dans la partie précédente : le principe de la conservation de grandeurs physiques, notamment l'énergie. Ces méthodes permettent la résolution des équations du mouvement dans des cas particuliers qui seront développés.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2.2.1 Travail d'une force

a) Définition

En 1686, Gottfried Leibniz a proposé de caractériser l'effet d'une force par une grandeur scalaire appelée travail de la force. Ainsi le travail d'une force $\vec{F}$ constante au cours d'un déplacement d'un point A vers un point B (distance $AB = d$) se définit comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\vec{d} = \left\|\vec{F}\right\|\cdot\left\|\vec{d}\right\|\cdot\cos\alpha$$

α correspond à l'angle entre les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$. Deux cas de figures se présentent alors : le travail est une grandeur algébrique qui peut être positive ou négative.

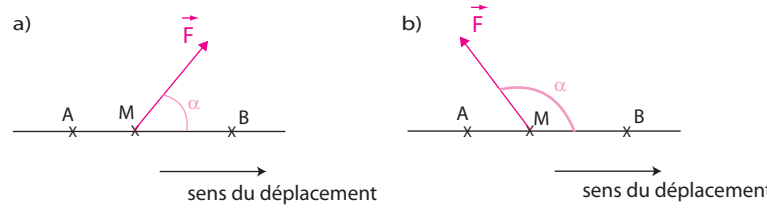


Figure 2.5 **a) Travail moteur de $\vec{F}$. b) Travail résistant de $\vec{F}$.**

Lorsque la force $\vec{F}$ est exercée dans le sens du mouvement (Fig. 2.5a), on dit que le travail de $\vec{F}$ est moteur car il contribue au déplacement du point M. Lorsque la force $\vec{F}$ est exercée dans le sens opposé au mouvement (Fig. 2.5b), on dit que le travail de $\vec{F}$ est résistant car il s'oppose au déplacement de M.

UNITÉS DU TRAVAIL D'UNE FORCE

comme l'intensité du travail est égale au produit d'une force par une distance, l'unité S.I. du travail est donc le $kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$. L'unité correspondante est le joule noté J tel que : $1\ J = 1\ kg\cdot m^2\cdot s^{-2}$.

Remarque

Du fait des propriétés du produit scalaire, lorsqu'une force s'exerce perpendiculairement au déplacement (i.e. $\vec{F}\perp\vec{d}$), on dit qu'une telle force « ne travaille pas », c'est-à-dire que son travail est nul. Deux exemples de forces importantes sont concernées par cette propriété : **1)** les forces de gravitation exercées sur un corps en rotation autour d'un point avec la force exercée toujours radiale et donc perpendiculaire au vecteur déplacement tangent à la trajectoire circulaire ; **2)** la réaction du support dans le cas où il n'y a pas de frottement, est toujours perpendiculaire au support et donc ne travaille pas.

b) Cas général

Traitons maintenant du cas plus général où le point M ne se déplace pas de façon rectiligne mais sur une courbe quelconque, avec une force $\vec{F}$ (exercée sur le point M) qui peut varier au cours du temps le long de la trajectoire. On peut décomposer le chemin suivi par le point M en petits déplacements élémentaires tels que $\Delta\vec{r}_i$ entre deux points M_i et M_{i+1} suffisamment proches pour considérer que la force $\vec{F}$ est constante sur $\Delta\vec{r}_i$ (voir Fig 2.6).

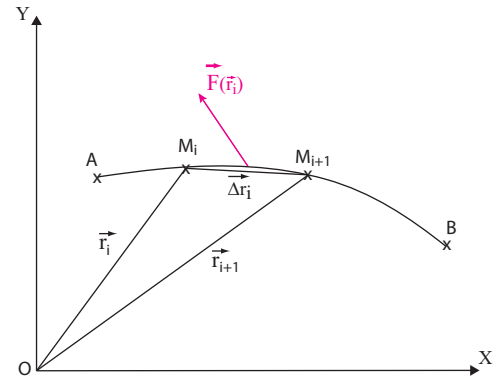


Figure 2.6 **Travail d'une force : cas général**

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ sur le déplacement M_iM_{i+1} peut être écrit ainsi :

$$\delta W_i = \vec{F}\left(\vec{r}_i\right) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Le travail total de $\vec{F}$ sur la trajectoire entre les points A et B correspond donc à la somme des travaux élémentaires, comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \sum_i \delta W_i = \sum_i \vec{F}\left(\vec{r}_i\right) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Si on prend des déplacements élémentaires très petits jusqu'à devenir des infinitésimaux notés $\mathrm{d}\vec{r}$, alors la somme discrète (Σ) peut être remplacée par une somme continue (sous forme d'intégrale), comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

2.2.2 Forces conservatives et énergie potentielle

Certaines forces possèdent une propriété caractéristique importante concernant le calcul de leur travail. C'est le cas de la force d'attraction gravitationnelle qui est présentée ici comme exemple de ces forces particulières.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Travail de la force d'attraction gravitationnelle

Calculons le travail du poids d'un corps (assimilé au point M) de masse m, qui suit une trajectoire quelconque, entre un point A (de cote ou altitude z_A) et un point B (de cote ou altitude z_B), comme représenté sur la figure 2.7.

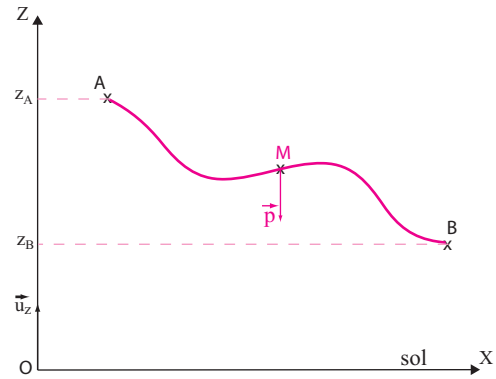


Figure 2.7 **Travail de la force d'attraction gravitationnelle**

Le poids $\vec{P}$ est orienté selon $-\vec{u}_z$, et s'écrit : $\vec{P} = -m \cdot \vec{g} = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z$.

Par définition, le travail de la force de gravitation exercée sur le point M entre les points A et B, peut s'écrire :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right) = \int_A^B \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

VECTEUR DÉPLACEMENT ÉLÉMENTAIRE EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES

On a vu dans le chapitre 1 que le vecteur position s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$$

Si on utilise quelques règles du calcul différentiel (par exemple $\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g)$) applicables sur des vecteurs, en rappelant que les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ sont invariants (donc $\mathrm{d}\vec{u}_x = \mathrm{d}\vec{u}_y = \mathrm{d}\vec{u}_z = \vec{0}$), on peut écrire le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{r}$ en coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x \cdot \vec{u}_x + \mathrm{d}y \cdot \vec{u}_y + \mathrm{d}z \cdot \vec{u}_z$$

On introduit $\mathrm{d}\vec{r}$ dans l'expression du travail énoncée plus haut, et comme les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ sont orthogonaux deux à deux, il ne reste que la composante selon $\vec{u}_z$ dans

le produit scalaire sous l'intégrale. Ainsi, on obtient :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right) = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \vec{u}_z \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot \mathrm{d}z = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot (z_B - z_A)$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- $z_A > z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$ est positif et donc moteur dans la chute de M.
- $z_A < z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$ est négatif, résistant et s'oppose au mouvement de chute de M.
- $z_A = z_B$, dans ce cas $W_{A\to B}\left(\vec{P}\right) = 0$, le poids ne « travaille » pas.

Mais dans tous les cas, on trouve une propriété importante de ce travail : il ne dépend que de la position de M au départ A et à l'arrivée B du mouvement. Ainsi ce travail ne dépend pas du chemin parcouru. On dit alors que la force d'attraction gravitationnelle est **conservative**.

Les forces conservatives

Une force est conservative si, lorsque le point d'application de la force se déplace d'une position A à une position B, le travail de cette force est indépendant de la trajectoire suivie par le point pour aller de A à B.

Remarque

Le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée est nul car les points de départ et d'arrivée sont identiques ; on écrit alors : $\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, avec $\oint$ symbole d'une intégrale sur un contour fermé.

b) Énergie potentielle gravitationnelle

Puisque le travail du poids ne dépend que des positions initiale et finale du mobile, on peut introduire une fonction qui ne dépend que de la position du mobile. Cette fonction est appelée énergie potentielle et se note E_p.

On peut donc écrire la relation suivante :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right) = -m \cdot \|\vec{g}\| \cdot (z_B - z_A) = -\left(E_\mathrm{p}(B) - E_\mathrm{p}(A)\right)$$

On voit ici que l'énergie potentielle est définie à travers sa variation entre deux positions données. L'énergie potentielle est donc définie à une constante près. On fixe cette constante en choisissant un point de référence (où l'énergie potentielle est nulle). On définit donc l'énergie potentielle gravitationnelle comme suit :

$$E_\mathrm{p}(z) = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot z + E_0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

où E_0 est une constante définie à partir des conditions initiales (on peut par exemple choisir de fixer que l'énergie potentielle est nulle quand $z = 0$, et avoir $E_0 = 0$).

Énergie potentielle

Puisque le travail d'une force conservative ne dépend que des positions initiale et finale du corps en mouvement, on peut introduire une fonction énergie potentielle, notée E_p, qui ne dépend que de la position du corps, telle que :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$$

E_p(A) et E_p(B) sont les énergies potentielles du point M aux positions A et B respectivement.

Cette fonction énergie potentielle a bien la dimension d'une énergie et s'exprime en kg · m^2 · s^{-2} ou en joules.

Théorème

Le travail d'une force conservative est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle du point matériel.

Remarques

- Le signe « moins » dans l'expression du travail de la force conservative en fonction de la variation d'énergie potentielle est purement arbitraire, et est utilisé principalement pour des simplifications d'écriture notamment pour l'énergie potentielle gravitationnelle.
- La force conservative dérive en fait de l'énergie potentielle suivant la relation suivante qui fait intervenir l'opérateur mathématique vecteur gradient :

Voir site web

$$\vec{F} = -\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\cdot\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}y}\cdot\vec{u}_y + \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z}\cdot\vec{u}_z\right) = -\overrightarrow{grad}\,(E_p)$$

Cette expression de $\vec{F}$ en fonction du gradient de l'énergie potentielle E_p est bien sûr valable dans tous les systèmes de coordonnées ; il faut alors se reporter aux expressions du gradient dans les systèmes cylindrique et sphérique.

c) Puits et barrière de potentiel

On considère ici le mouvement unidirectionnel d'une particule M de masse m, sous l'action d'une force conservative $\vec{F}$, dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. Si ce mouvement est réalisé suivant un axe OX de coordonnées x, on peut écrire la relation entre la force appliquée et l'énergie potentielle dont dérive cette force :

$$F(x) = -\left(\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}\right)$$

$E_p(x)$ est a priori quelconque et peut présenter des extrema (minima et maxima) comme illustré dans la figure 2.8.

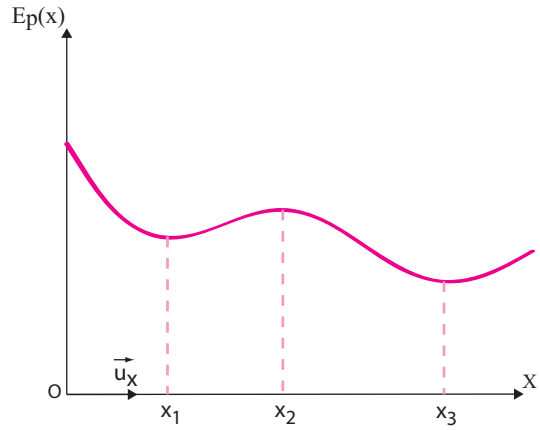


Figure 2.8 **Courbe d'une énergie potentielle en fonction d'un paramètre *x***

Par définition de la dérivée, $\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x}\right)$ donne la pente de la tangente à la courbe de $E_\mathrm{p}(x)$. Aux points extrêmes de cette courbe (minima et maxima), la pente de la tangente est nulle, donc $F(x) = 0$. En ces points, la force appliquée à la particule M est nulle ; donc si on libère la particule, elle reste en équilibre en ce point extremum. Ainsi les extrema d'énergie potentielle sont les **positions d'équilibre** de la particule.

Les régions de l'espace où l'énergie potentielle possède un minimum sont appelées des **puits de potentiel** (équilibre stable en x_1 et x_3 sur la figure 2.8). Les régions de l'espace où l'énergie potentielle possède un maximum sont appelées **barrières de potentiel** (équilibre instable en x_2 sur la figure 2.8). En équilibre stable, il existe une force qui « ramène » la particule vers sa position. En équilibre instable au contraire, la force éloigne la particule de sa position.

Voir site web

2.2.3 Théorème de l'énergie cinétique et énergie mécanique

a) Définition de l'énergie cinétique

Leibniz a montré que l'effet d'une force pouvait être caractérisé par le travail de cette force mais aussi par ce qu'il a appelé « la force vive » correspondant en fait au double d'une énergie dite cinétique. Il convient maintenant de rappeler comment on trouve l'expression de cette énergie cinétique, notamment à partir du cas de la chute libre d'un corps. On peut montrer qu'un corps en chute libre depuis une hauteur h atteint une vitesse au sol $\|\vec{v}_s\| = \sqrt{2 \cdot \|\vec{g}\| \cdot h}$, ce qui donne $\frac{1}{2}\|\vec{v}_s\|^2 = \|\vec{g}\| \cdot h$.

En multipliant par la masse, on obtient : $\frac{1}{2}m \cdot \|\vec{v}_s\|^2 = m \cdot \|\vec{g}\| \cdot h = \left\|\vec{P}\right\| \cdot h$. On voit alors que l'effet d'une force peut se mesurer par son travail, mais aussi par une énergie dite cinétique, exprimée en joules comme le travail.

Voir site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Comme la vitesse du point M est une grandeur définie dans un référentiel donné, l'énergie cinétique est aussi une quantité relative à ce référentiel donné.

b) Théorème de l'énergie cinétique

Étudions le mouvement d'un point M de masse m, mobile dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, sous l'action d'une force quelconque $\vec{F}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

De plus, par définition, on a : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}$, donc $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}t$

Le travail de la force $\vec{F}$ entre deux points A et B est donc :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B \left(m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\vec{v} \cdot \mathrm{d}t) = \int_A^B m \cdot (\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v})$$

- *Complément mathématique*

Il convient alors de faire un calcul différentiel simple pour avancer dans cette démonstration du théorème de l'énergie cinétique.

Ainsi on peut écrire la différentielle du produit scalaire du vecteur $\vec{v}$ par lui-même :

$$\mathrm{d}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = 2\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}$$

Or, $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$, donc :

$$m \cdot (\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2\right)$$

On peut donc écrire le travail de la force $\vec{F}$ comme suit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_B\|^2 - \frac{1}{2} m \|\vec{v}_A\|^2$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = E_c(B) - E_c(A).$$

Théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique entre deux positions est égale au travail de la force résultante appliquée entre ces deux positions.

Remarque

Quand plusieurs forces sont appliquées, on fait la somme vectorielle de ces forces ; et cette somme est la force résultante.

c) Cas des forces conservatives

On considère un point M mobile dans un référentiel galiléen et soumis à l'action d'une force résultante conservative $\vec{F}$. Alors le théorème de l'énergie cinétique implique :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or pour une force conservative, on peut écrire le travail comme suit :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right)$$

On peut donc écrire :

$$-\left(E_p(B) - E_p(A)\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

On arrive alors à la relation suivante :

$$E_p(A) + E_c(A) = E_p(B) + E_c(B)$$

On peut définir alors une nouvelle grandeur correspondant à la somme des énergies cinétique et potentielle : cette grandeur a la dimension d'une énergie, elle est appelée **énergie mécanique** et se note E_m.

Énergie mécanique

On appelle énergie mécanique du point M, la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives qui lui sont appliquées.

La relation établie plus haut peut donc s'écrire simplement en introduisant la notion d'énergie mécanique :

$$E_m(A) = E_m(B)$$

Théorème

Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un point soumis à des forces conservatives se conserve. L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante du mouvement.

Remarques

- On voit ici l'origine de l'expression « force conservative », qui vient du fait que l'énergie mécanique associée se conserve.
- La loi de conservation de l'énergie mécanique est aussi appelée intégrale première du mouvement car elle ne fait intervenir que des dérivées premières.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d) Cas des forces non conservatives

Lorsqu'il existe une force $\vec{F}_{NC}$ non conservative, en plus des forces conservatives de résultante $\vec{F}_C$, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right) + W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

Or, le travail des forces conservatives peut s'écrire comme la variation d'énergie potentielle ; on obtient donc la relation suivante :

$$W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right) - \left(E_p(B) - E_p(A)\right) = E_c(B) - E_c(A)$$

On obtient donc :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{A\to B}\left(\vec{F}_{NC}\right)$$

Théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.

Remarque

Les forces de frottement sont typiquement des forces non conservatives : en effet leur travail dépend fortement du chemin suivi. À noter aussi que ces forces exercent un travail résistant qui s'oppose au mouvement. Ainsi la présence de forces de frottement conduit à une diminution de l'énergie mécanique.

À retenir

Isaac Newton a énoncé **trois principes** importants qui permettent d'expliquer l'origine des mouvements des objets qui nous entourent.

Le premier permet de définir les référentiels galiléens dans lesquels le **principe d'inertie** est vérifié. Le deuxième est le **principe fondamental de la dynamique** qui montre que la somme vectorielle des forces appliquées à un point est égale au produit de la masse ponctuelle par son accélération. Le troisième montre la **notion d'action et de réaction**. De nouvelles notions ont été introduites : notamment la notion de force à l'origine du mouvement des objets.

Une autre approche de l'étude des mouvements est possible avec des lois de **conservation d'énergie**. Certaines forces sont dites conservatives, c'est-à-dire que leur travail ne dépend pas du chemin parcouru : ce travail étant égal à la variation d'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (théorème de l'énergie cinétique) peut, dans ce cas, aussi s'écrire sous forme d'une différence d'énergie potentielle (E_p). Pour des forces conservatives, on constate alors que l'énergie mécanique ($E_m = E_c + E_p$) se conserve lors du mouvement. Pour les forces non conservatives (frottements par exemple), leur travail est égal à la différence d'énergie mécanique.

Les solutions sont regroupées p. 592.

2.1 D'une plate-forme située à la hauteur $h = 30$ m, on lance un projectile avec la vitesse $v_0 = 20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, le vecteur initial $\vec{v}_0$ faisant un angle $\alpha = 60°$ avec l'horizontal. Le projectile tombe au sol. On néglige la résistance de l'air et on prend $\|\vec{g}\|$, l'accélération de la pesanteur, égale à $10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Déterminer la distance d horizontale entre le point de lancement et le point d'impact sur le sol horizontal.

b) Déterminer le temps que dure le mouvement de chute.

c) Déterminer la vitesse du projectile lorsqu'il touche le sol.

d) Déterminer l'équation de la trajectoire du projectile.

2.2 Un ressort de constante de raideur k et de masse négligeable, est accroché par une de ses extrémités en un point A d'un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. À l'autre extrémité, on accroche un objet M considéré comme ponctuel et de masse m.

a) Une fois l'objet M accroché et immobile, on parle de la position x_e comme étant la position d'équilibre de l'objet M (les positions x sont définies sur un axe parallèle au plan incliné). Déterminer l'expression de x_e.

b) À l'instant $t = 0$, on comprime le ressort : l'objet M est alors écarté de sa position d'équilibre d'une longueur x_0 dans le sens de la compression du ressort, et lâché sans vitesse initiale. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ du mouvement (en considérant qu'il n'y a pas de frottement de l'objet M sur le plan incliné).

2.3 Un parachutiste de 80 kg subit lors de sa descente verticale une accélération $a = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ quand son parachute de masse égale à 5 kg est déployé.

a) On considère le système constitué par l'ensemble du parachutiste et du parachute, qu'on assimile à un point matériel. Quelle est la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur le système ? On précisera sa direction, son sens et sa norme.

b) On considère maintenant le système constitué du parachutiste seul, assimilé à un point matériel. Quelle est l'intensité de la force de tension $\vec{T}$ exercée par le câble sur le parachutiste ? On suppose que le câble est inextensible et sans masse.

2.4 On étudie le mouvement d'un corps de masse 10 kg, considéré comme ponctuel, sur un plan incliné. Les coefficients de frottement statique μ_S et dynamique μ_D entre le corps et le plan incliné valent respectivement 0,30 et 0,25.

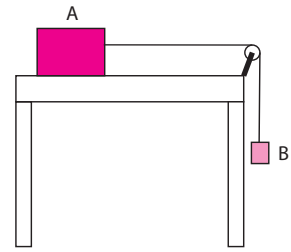
a) Le plan est incliné progressivement d'un angle α par rapport à l'horizontale. Pour quelle valeur de α le corps commence-t-il à glisser ?

b) L'angle α vaut 37°. Quelle est la plus petite force $\vec{f}$ parallèle à la ligne de plus grande pente qui empêche le corps de glisser ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) L'angle α vaut toujours 37°. À l'instant initial, le corps se déplace sur le plan incliné, vers le haut, à la vitesse v_0. Quelle est la force parallèle à la ligne de plus grande pente qui permet au corps de continuer à gravir la pente à vitesse v_0 constante ?

2.5 Une caisse A est posée sur une table. Une masse B est reliée à la caisse par l'intermédiaire d'une corde qui passe dans une poulie.



a) On pose une masse C sur la caisse A. Déterminer la masse minimale m_C de C qui permet l'équilibre statique.

b) On enlève la masse C. Déterminer l'accélération de la caisse A et la tension de la corde.

Application numérique : $m_A = 10$ kg ; $m_B = 5$ kg ; $\mu_S = 0{,}30$; $\mu_D = 0{,}10$.

2.6 On observe la chute dans l'air, d'une gouttelette sphérique de glycérine (assimilée à un point matériel A), de masse m et de rayon r. La force de frottement visqueux qui s'exerce sur la gouttelette A est donnée par la loi de Stokes :

$$\vec{F} = -6\pi \cdot \mu \cdot r \cdot \vec{V}$$

μ est le coefficient de viscosité de l'air, avec $\mu = 1{,}80 \cdot 10^{-5}$ S.I.

a) À l'aide du principe fondamental de la dynamique, calculer la vitesse $V(t)$ de A (condition à l'origine : $V = 0$ m $\cdot$ s^{-1} à $t = 0$ s).

b) Montrer que $V(t)$ tend vers une valeur limite V_0 dont on donnera l'expression en fonction de m, r, μ et $\|\vec{g}\| = g$.

2.7 Une particule M de masse m, pouvant se déplacer suivant un axe Ox (pour des valeurs de x positives) est soumise à une force conservative dérivant d'une énergie potentielle définie par :

$$E_p(x) = \frac{A \cdot a \cdot (x-a)^2}{x^3}$$

A et a sont des constantes positives.

a) Donner le tableau de variation de $E_p(x)$. Quelles sont les positions d'équilibre stables et instables ?

b) Identifier les régions du demi-axe défini par $x > 0$ où la force est attractive (vers l'origine) et celles où la force est répulsive.

c) On considère le cas où l'énergie de la particule M est $E = \frac{A}{9}$ et se trouve, à un certain instant, à la position $x = 1{,}5 \cdot a$. Quelle énergie faut-il apporter à la particule pour la « libérer » ? Quelle est alors la vitesse de la particule à l'infini ?

2.8 Un chariot de manège, glissant sans frottement sur des rails, arrive sur une boucle verticale circulaire de rayon R. De quelle hauteur doit-il être lâché, sans vitesse initiale, pour pouvoir faire le tour de la boucle ?

a) Envisager le cas où le chariot ne peut pas se décrocher des rails.

b) Envisager le cas où le chariot n'est pas retenu.

2.9 a) Trouver la valeur minimale de la vitesse d'un objet de masse m, nécessaire pour quitter la surface de la Terre sans y retourner (appelée vitesse de libération) ?

Données : $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg (masse de la Terre) ; $R_T = 6\,400$ km (rayon de la Terre) ; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ s$^{-2} \cdot$ kg^{-1} (constante de gravitation).

b) Quelle serait cette vitesse de libération sur la Lune ?

Données : $M_T \approx 81 \cdot M_L$ (M_L = masse de la Lune) ; $R_T \approx 3{,}7 \cdot R_L$ (R_L = rayon de la Lune).

c) Quelle vitesse doit-on communiquer à une fusée de masse m pour qu'elle parvienne sur la Lune ? On ne tient pas compte de la rotation relative des deux astres.

Donnée : $d_{TL} \approx 60 \cdot R_T$ (d_{TL} = distance Terre-Lune).

2.10 Dans un référentiel $\mathscr{R}$ galiléen de base cartésienne$(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, un pendule simple est constitué d'une masse ponctuelle m liée à une tige rigide de longueur L de masse négligeable, mobile autour de l'axe horizontal $\vec{u}_z$. On écarte le pendule d'un angle θ (dans le sens trigonométrique) par rapport à l'axe vertical $\vec{u}_x$ (quand le pendule est à l'équilibre à la verticale, $\theta = 0$). On lâche le pendule et on néglige les frottements avec l'air et les frottements de la tige sur son axe de rotation.

a) En utilisant le principe fondamental de la dynamique, trouver l'équation différentielle du mouvement.

b) En supposant une amplitude de mouvement faible (c'est-à-dire θ petit, donc $\sin\theta \approx \theta$), trouver la solution de cette équation différentielle, sous la forme $\theta(t)$. Préciser à quoi correspondent la pulsation et la période du mouvement.

c) Retrouver ces mêmes résultats en considérant la conservation de l'énergie mécanique.

2.11 Un ion He^+ (hélium) de masse m et de vitesse $\vec{v}_0$ entre en collision avec un atome d'hélium au repos. On suppose que les masses de l'ion et de l'atome sont identiques. Après la collision, l'ion a une vitesse $\vec{v}_1$ faisant un angle de 30° avec $\vec{v}_0$ et

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

l'atome une vitesse $\vec{v}_2$ faisant un angle de 45° avec $\vec{v}_0$. L'ion He^+ a une énergie cinétique initiale E_c = 100 eV.

a) Déterminer le rapport $\frac{\|\vec{v}_1\|}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{v_1}{v_2}$. Déterminer $\|\vec{v}_1\|$ et $\|\vec{v}_2\|$ en fonction de $\|\vec{v}_0\|$. Montrer que la collision est inélastique. Calculer l'énergie cinétique perdue ΔE_c (en eV) pendant la collision.

b) Dans le cas général, on appelle α et θ les angles que font les vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ respectivement avec $\vec{v}_0$. En éliminant θ et $\|\vec{v}_2\|$, établir la relation entre $\|\vec{v}_1\|$, α, $\|\vec{v}_0\|$ et $\gamma = \frac{\Delta E}{E_c}$ (avec E_c = énergie cinétique initiale).

3 Mécanique terrestre et céleste

PRÉALABLES

- Champ de vecteurs
- Dérivation vectorielle
- Produit vectoriel
- Calcul différentiel
- Formules de Binet

MOTS CLÉS

- Référentiels non galiléens
- Forces d'inertie
- Moment cinétique
- Champ de force centrale

OBJECTIFS

- Comprendre les changements de référentiels
- Définir les lois de composition des mouvements
- Définir les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen
- Décrire des phénomènes naturels dans le référentiel terrestre
- Savoir appliquer le théorème du moment cinétique
- Savoir déterminer les mouvements des planètes et satellites

Les deux premiers chapitres consacrés à la description des concepts de base de la mécanique newtonienne ont permis de prévoir et décrire les mouvements d'un point matériel. Des concepts importants ont été introduits : la force, le travail, les énergies mises en jeu lors du mouvement du point.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer et adapter ces concepts au cas de la planète Terre et à celui des planètes et satellites se déplaçant dans l'Univers. La mécanique terrestre et céleste s'intéresse aux phénomènes naturels se produisant sur notre planète et dans le ciel : ces phénomènes ont passionné les principaux philosophes et scientifiques de l'histoire de l'humanité ; ils ont essayé dans leurs recherches de comprendre les lois qui sont à l'origine de tous les mouvements observés dans l'univers.

Des phénomènes naturels et expériences concrètes de la vie de tous les jours peuvent ainsi être expliqués. Qui n'a pas manqué de tomber dans un train lorsque le conducteur

doit freiner brusquement en urgence ? Qui n'a pas été plaqué sur son siège lorsque sa voiture a accéléré ? Qui n'a pas eu la sensation d'être éjecté en tournant à grande vitesse dans un manège de fête foraine ? La cause de tout ceci ? Le fait que tout référentiel lié à la Terre n'est pas galiléen et cela engendre de nombreux phénomènes qui ne se produiraient pas dans un référentiel galiléen. C'est le cas de phénomènes naturels bien connus comme les marées, et d'autres moins connus comme les déviations systématiques des trajectoires des avions de ligne qu'ils doivent corriger en permanence pour parvenir à destination... L'objectif de ce chapitre est d'apporter des explications relativement simples à ces phénomènes en s'appuyant sur les bases de la mécanique newtonienne.

3.1 Changement de référentiel

Avant toute chose, revenons à la cinématique et intéressons-nous au problème des *changements de référentiels* : des référentiels peuvent être en mouvement les uns par rapport aux autres et il est important de pouvoir définir et représenter des grandeurs cinématiques (telles que vecteur position, vitesse et accélération) dans les différents référentiels considérés. Il faut avoir à l'esprit qu'un vecteur est avant tout défini par sa direction, son sens et sa norme, mais qu'il peut être représenté dans n'importe quel référentiel dans lequel il présentera des composantes spécifiques à ce référentiel.

Prenons un exemple concret : un passager à bord d'un train en mouvement. Le passager peut être immobile dans le train : sa vitesse par rapport au train est nulle mais sa vitesse par rapport à la Terre est importante. On voit que selon le référentiel d'étude (mobile dans le train, fixe sur Terre) la vitesse ne s'exprime pas de la même manière. Il convient donc de bien préciser par rapport à quel référentiel on exprime les vecteurs de base de la cinématique. Le référentiel considéré comme fixe (ici celui lié à la Terre) est appelé **référentiel absolu** (noté $\mathscr{R}_\mathrm{a}$) tandis que le référentiel en mouvement par rapport au référentiel fixe (ici le référentiel lié au train) est appelé **référentiel relatif** (noté $\mathscr{R}_\mathrm{r}$).

Le passager peut se déplacer vers le wagon restaurant du train : il est alors en mouvement par rapport au train qui lui-même est en mouvement par rapport à la Terre. Pour trouver les caractéristiques du mouvement du passager par rapport à la Terre, on voit qu'il faut combiner les caractéristiques du mouvement du passager dans le repère mobile lié au train avec celles du mouvement du train dans le repère fixe lié à la Terre. Le mouvement du passager est donc un mouvement composé, qui résulte de la composition de son mouvement dans le train et du mouvement du train par rapport à la Terre. On parle alors de **composition des mouvements**.

Le mouvement du passager dans le référentiel absolu s'appelle le *mouvement absolu*, celui du passager dans le référentiel relatif est appelé *mouvement relatif*. Le mouvement du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe est appelé *mouvement d'entraînement*.

3.1.1 Composition des vitesses

Soit le référentiel $\mathscr{R}_\mathrm{r}$ en mouvement par rapport au référentiel $\mathscr{R}_\mathrm{a}$ considéré comme fixe. On caractérise le référentiel $\mathscr{R}_\mathrm{a}$ par son repère cartésien de base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et

de coordonnées cartésiennes (x, y, z). On caractérise le référentiel mobile $\mathscr{R}_r$ par son repère cartésien de base $(O, \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$et de coordonnées (x', y', z').

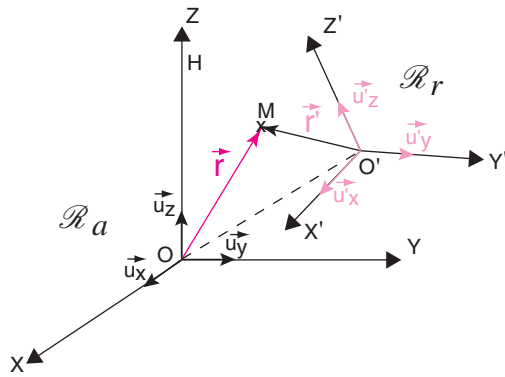


Figure 3.1 **Référentiel absolu (fixe) $\mathscr{R}_a$ et référentiel relatif (mobile) $\mathscr{R}_r$**

Le point matériel M se déplace dans l'espace. Sa position est repérée dans le référentiel fixe $\mathscr{R}_a$ par : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$

Sa position dans le référentiel mobile $\mathscr{R}_r$ est donnée par :

$$\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z$$

ASTUCE

Pour passer d'un référentiel à un autre, il est très utile d'utiliser la relation de Chasles pour décomposer le vecteur position de M dans $\mathscr{R}_a$ en passant par l'origine du référentiel $\mathscr{R}_r$. Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire la relation géométrique suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \quad \text{soit} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

La vitesse du point M dans le référentiel absolu est appelée vitesse absolue (notée $\vec{v}_a$). Elle s'écrit comme suit :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_{\mathscr{R}_a}(M) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a}$$

La vitesse du point M dans le référentiel relatif est appelée vitesse relative (notée $\vec{v}_r$). Elle s'écrit comme suit :

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{\mathscr{R}_r}(M) = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{\mathscr{R}_r} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_r}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Quand on écrit $\mathscr{R}_\mathrm{r}$ en indice, cela signifie que l'on considère les axes liés à $\mathscr{R}_\mathrm{r}$ comme fixes, donc ne dépendant pas du temps.

La vitesse absolue se calcule en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{r}$ (dans $\mathscr{R}_\mathrm{a}$) en considérant les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ de la base associée à $\mathscr{R}_\mathrm{a}$ comme fixes avec le temps. On obtient donc : $\vec{v}_\mathrm{a} = \dot{x} \cdot \vec{u}_x + \dot{y} \cdot \vec{u}_y + \dot{z} \cdot \vec{u}_z$

La vitesse relative se calcule en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{r}'$ (dans $\mathscr{R}_\mathrm{r}$) en considérant les vecteurs $\vec{u}'_x$, $\vec{u}'_y$, $\vec{u}'_z$ de la base associée à $\mathscr{R}_\mathrm{r}$ comme fixes avec le temps. On obtient donc : $\vec{v}_\mathrm{r} = \dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z$

Pour trouver la relation entre les vitesses absolue et relative, il faut partir de la relation énoncée plus haut entre les vecteurs position dans les deux référentiels :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$$

On dérive alors cette relation par rapport au temps, en se plaçant dans le référentiel absolu $\mathscr{R}_\mathrm{a}$.

Remarque

Quand on dérive un vecteur (exprimé dans une base vectorielle) dans un référentiel donné, on doit au préalable faire l'inventaire des vecteurs qui sont fixes et ceux qui sont mobiles dans ce référentiel. Ainsi les vecteurs de la base du référentiel mobile sont fixes dans le référentiel relatif mobile mais varient avec le temps dans le référentiel absolu fixe.

On écrit alors la relation suivante :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}}$$

Or, comme $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M} = x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z$, on doit écrire tous les termes de la dérivée par rapport au temps dans le référentiel absolu $\mathscr{R}_a$. On suit pour cela la règle de la dérivation d'une combinaison linéaire de vecteurs telle que :

si $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ alors $\dot{\vec{u}} = \dot{a} \cdot \vec{i} + a \cdot \dot{\vec{i}} + \dot{b} \cdot \vec{j} + b \cdot \dot{\vec{j}}$

On peut donc écrire : $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$

On peut alors regrouper les termes comme suit (notamment pour retrouver l'expression de $\vec{v}_\mathrm{r}$) :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \underbrace{\dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z}_{\vec{v}_r} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \vec{v}_\mathrm{r} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

On peut donc compléter la relation initiale :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \vec{v}_\mathrm{a} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + \vec{v}_\mathrm{r} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

$$\vec{v}_\mathrm{a} = \vec{v}_\mathrm{r} + \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

Imaginons maintenant que le point M est immobile dans $\mathscr{R}_\mathrm{r}$. Dans ce cas, $\vec{v}_\mathrm{r} = \vec{0}$. Dans l'expression de $\vec{v}_\mathrm{a}$, il reste donc les termes suivants :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

Le premier terme correspond à la vitesse du point O' (origine du référentiel relatif) dans le référentiel absolu, tandis que les trois autres termes décrivent les variations avec le temps des vecteurs $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ (vecteurs de la base du référentiel relatif), dans le référentiel absolu. L'ensemble des ces quatre termes décrivent donc le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu : ils définissent donc ce qu'on appelle la vitesse d'entraînement du point M, notée $\vec{v}_\mathrm{e}$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\vec{v}_\mathrm{e} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_\mathrm{a}} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

Loi de composition des vitesses

La vitesse absolue d'un point M *s'exprime en fonction de la vitesse relative du point* M *et de la vitesse d'entraînement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu, suivant la relation :*

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

3.1.2 Composition des accélérations

On cherche la relation entre l'accélération absolue $\vec{a}_\mathrm{a}$ et l'accélération relative $\vec{a}_\mathrm{r}$. Par le même raisonnement que pour les vitesses, on peut écrire les accélérations $\vec{a}_\mathrm{a}$ et $\vec{a}_\mathrm{r}$. L'accélération absolue se calcule en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse absolue $\vec{v}_\mathrm{a}$ (dans $\mathscr{R}_\mathrm{a}$) en considérant les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ de la base associée à $\mathscr{R}_\mathrm{a}$ comme fixes avec le temps. On obtient donc :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \ddot{x}\cdot\vec{u}_x + \ddot{y}\cdot\vec{u}_y + \ddot{z}\cdot\vec{u}_z$$

Pour l'accélération relative, on dérive par rapport au temps le vecteur vitesse relative $\vec{v}_{\mathrm{r}}$ (dans $\mathscr{R}_{\mathrm{r}}$) en considérant les vecteurs $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ de la base associée à $\mathscr{R}_{\mathrm{r}}$ comme fixes avec le temps. On obtient donc :

$$\vec{a}_{\mathrm{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{r}}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{r}}} = \ddot{x}'\cdot\vec{u}'_x + \ddot{y}'\cdot\vec{u}'_y + \ddot{z}'\cdot\vec{u}'_z$$

On dérive maintenant l'équation de la composition des vitesses dans le référentiel $\mathscr{R}_{\mathrm{a}}$, comme suit :

$$\vec{a}_{\mathrm{a}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{a}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}}$$

1) On développe d'abord le terme $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \ddot{x}'\cdot\vec{u}'_x + \dot{x}'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + \ddot{y}'\cdot\vec{u}'_y + \dot{y}'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + \ddot{z}'\cdot\vec{u}'_z + \dot{z}'\cdot\dot{\vec{u}}'_z$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \underbrace{\ddot{x}'\cdot\vec{u}'_x + \ddot{y}'\cdot\vec{u}'_y + \ddot{z}'\cdot\vec{u}'_z}_{\vec{a}_{\mathrm{r}}} + \dot{x}'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\cdot\dot{\vec{u}}'_z$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \vec{a}_{\mathrm{r}} + \dot{x}'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\cdot\dot{\vec{u}}'_z$$

2) On développe ensuite le terme $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} + x'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + y'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + z'\cdot\dot{\vec{u}}'_z\right)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} + \dot{x}'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + x'\cdot\ddot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + y'\cdot\ddot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\cdot\dot{\vec{u}}'_z + z'\cdot\ddot{\vec{u}}'_z$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathscr{R}_{\mathrm{a}}} + x'\cdot\ddot{\vec{u}}'_x + y'\cdot\ddot{\vec{u}}'_y + z'\cdot\ddot{\vec{u}}'_z + +\dot{x}'\cdot\dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}'\cdot\dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}'\cdot\dot{\vec{u}}'_z$$

3) On peut donc maintenant écrire la relation suivante :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}_a} + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z + 2\left(\dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z\right)$$

Tous les termes ajoutés à $\vec{a}_r$ peuvent être regroupés en deux termes comme suit :

$$\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}_a} + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z = \vec{a}_e$$

Ce terme est appelé accélération d'entraînement (notée $\vec{a}_e$): comme pour la vitesse d'entraînement, il rend compte du mouvement de O' dans $\mathscr{R}_a$ et du mouvement (dans $\mathscr{R}_a$) des trois axes $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$de la base associée à $\mathscr{R}_r$. Il décrit donc le mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

$$2\left(\dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z\right) = \vec{a}_c$$

Ce terme est le terme complémentaire obtenu lors de la dérivation. Il est appelé accélération de Coriolis (notée $\vec{a}_c$), du nom du physicien français Gaspard Coriolis (1792-1843) qui montra son existence en 1835.

Loi de composition des accélérations

L'accélération absolue d'un point M *s'exprime en fonction de l'accélération relative du point* M*, de l'accélération d'entraînement (du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu), et d'une accélération complémentaire dite accélération de Coriolis, suivant la relation :*

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

3.1.3 Référentiel en translation

Si le référentiel relatif $\mathscr{R}_r$ est en translation par rapport au référentiel absolu $\mathscr{R}_a$ alors les vecteurs $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ de la base associée à $\mathscr{R}_r$ sont fixes dans $\mathscr{R}_a$. Le mouvement d'entraînement de $\mathscr{R}_r$ par rapport à $\mathscr{R}_a$ est une translation.

Les vecteurs $\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z$ sont fixes dans $\mathscr{R}_a$, donc :

$$\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \left(\frac{d\vec{u}'_z}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \dot{\vec{u}}'_x = \dot{\vec{u}}'_y = \dot{\vec{u}}'_z = \vec{0}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Ainsi la vitesse d'entraînement se réduit à l'expression suivante :

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \vec{v}_{\mathscr{R}_a}(O')$$

Donc dans le cas de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre, la vitesse d'entraînement se réduit à la vitesse de l'origine du référentiel mobile dans le référentiel fixe.

La vitesse absolue dans le cas de deux référentiels en translation s'écrit donc :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{\mathscr{R}_a}(O')$$

Pour les accélérations, on note que les dérivées premières et secondes des vecteurs de la base du référentiel relatif sont nulles. Donc :

$$\dot{\vec{u}}'_x = \dot{\vec{u}}'_y = \dot{\vec{u}}'_z = \ddot{\vec{u}}'_x = \ddot{\vec{u}}'_y = \ddot{\vec{u}}'_z = \vec{0}$$

On obtient donc le résultat suivant pour les accélérations d'entraînement et de Coriolis : l'accélération de Coriolis est nulle et l'accélération d'entraînement se réduit à l'accélération dans $\mathscr{R}_a$ du point O' (origine du référentiel relatif).

$$\vec{a}_c = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{\mathscr{R}_a} = \vec{a}_{\mathscr{R}_a}(O')$$

On arrive alors à l'expression de l'accélération absolue dans le cas de deux référentiels en translation :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{\mathscr{R}_a}(O')$$

Cas particulier : référentiel en translation rectiligne uniforme

Dans ce cas, la vitesse du point O' dans $\mathscr{R}_a$ est constante, ce qui signifie que l'accélération du point O' dans $\mathscr{R}_a$ est nulle ($\vec{a}_{\mathscr{R}_a}(O') = \vec{0}$). Par conséquent, les lois de composition des vitesses et accélérations donnent les résultats suivants :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{\mathscr{R}_a}(O') \quad \text{et} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r$$

Donc : l'accélération d'un point matériel est la même (en direction, sens et norme) dans tous les référentiels qui sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

3.1.4 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

L'exemple que l'on prend ici est celui d'un manège : on imagine un référentiel relatif $\mathscr{R}_r$ lié au manège, en rotation uniforme par rapport à un référentiel fixe $\mathscr{R}_a$ lié au sol. Pour simplifier le formalisme, on imagine aussi qu'un axe (vertical) est fixe et identique dans les deux référentiels (à savoir axes OZ dans $\mathscr{R}_a$ et $O'Z'$ dans $\mathscr{R}_r$ confondus). Donc seuls les axes OX' et OY' de $\mathscr{R}_r$ subissent une rotation uniforme par rapport aux axes OX et OY fixes de $\mathscr{R}_a$.

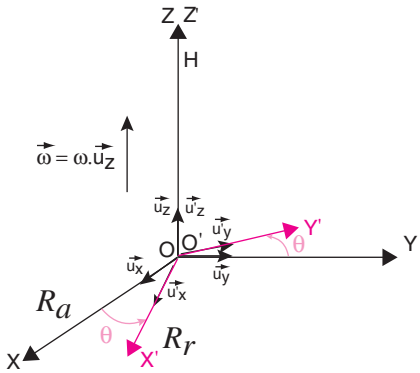


Figure 3.2 **Référentiel relatif $\mathscr{R}_r$ en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu $\mathscr{R}_a$**
Les axes OZ et O'Z' sont confondus.

La rotation de $\mathscr{R}_r$ par rapport à $\mathscr{R}_a$ est uniforme, c'est-à-dire que la vitesse angulaire est égale à une constante. On la définit comme suit : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Pour mener à bien la description du mouvement, il convient maintenant de définir un vecteur très important de ce type de cas : le vecteur rotation. Ce vecteur est porté par l'axe de rotation, son intensité donne la vitesse angulaire de rotation et son sens est donné par la règle du tire-bouchon (dans un plan, si rotation dans le sens trigonométrique, vecteur rotation perpendiculaire au plan et dirigé vers le haut).

Voir site web

Remarque

Dans le cas d'une rotation uniforme, dériver un vecteur par rapport au temps revient à calculer le produit vectoriel du vecteur rotation par ce vecteur. Ainsi, on a :

Voir site web

$$\frac{d\vec{u}'_x}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x$$

a) Composition des vitesses

Déterminons, dans le cas de cette rotation uniforme, le vecteur vitesse d'entraînement. On rappelle son expression générale :

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} + x' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \dot{\vec{u}}'_z$$

Les points O et O' sont confondus, donc : $\left(\dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{\mathscr{R}_a} = \vec{0}$.

On a vu qu'on peut écrire les dérivées de vecteurs sous forme de produits vectoriels, comme suit :

$$\dot{\vec{u}}'_x = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x \qquad \dot{\vec{u}}'_y = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_y \qquad \dot{\vec{u}}'_z = \vec{\omega} \wedge \vec{u}'_z = \vec{0}$$

Donc : $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \left(x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y\right)$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Or, $x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM}$; ainsi : $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Et la vitesse absolue vaut :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

b) Composition des accélérations

Déterminons les expressions des accélérations d'entraînement et de Coriolis dans le cas d'une rotation uniforme. On rappelle les expressions générales de ces accélérations :

$$\begin{cases} \vec{a}_e = \left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathscr{R}_a} + x' \cdot \ddot{\vec{u}}'_x + y' \cdot \ddot{\vec{u}}'_y + z' \cdot \ddot{\vec{u}}'_z \\ \vec{a}_c = 2\left(\dot{x}' \cdot \dot{\vec{u}}'_x + \dot{y}' \cdot \dot{\vec{u}}'_y + \dot{z}' \cdot \dot{\vec{u}}'_z \right) \end{cases}$$

O et O' sont confondus, donc $\left(\dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathscr{R}_a} = \vec{0}$.

En introduisant les produits vectoriels, on obtient l'accélération d'entraînement suivante :

$$\vec{a}_e = x' \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_x\right) + y' \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_y\right) + z' \cdot \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{u}'_z\right)$$

$$\vec{a}_e = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \left(x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z\right) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \left(x' \cdot \vec{u}'_x + y' \cdot \vec{u}'_y + z' \cdot \vec{u}'_z\right)$$

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \right) + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right)$$

Or le vecteur rotation est ici constant donc $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$

De même en introduisant le produit vectoriel, on obtient une relation simple pour l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \left(\dot{x}' \cdot \vec{u}'_x + \dot{y}' \cdot \vec{u}'_y + \dot{z}' \cdot \vec{u}'_z \right) = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Et l'accélération absolue vaut :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} \right) + 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

Remarque

Dans le cas général où le référentiel mobile est à la fois en translation et rotation non uniformes, il n'y a pas d'axe fixe et O et O' ne sont pas confondus. Les lois de

compositions des vitesses et des accélérations donnent alors les résultats suivants :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_{\mathscr{R}_a}(O') + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{\mathscr{R}_a}(O') + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

3.2 Dynamique en référentiel non galiléen

3.2.1 Le seau d'eau de Newton

On a vu au § 3.1 que l'accélération est la même dans tous les référentiels galiléens (en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres). D'après le principe fondamental de la dynamique, on a: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. On en déduit que les lois fondamentales de la dynamique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. Ainsi, il n'y a pas d'expérience de mécanique dans un référentiel galiléen qui permette à un observateur (lié à ce référentiel) de déterminer s'il est ou non en mouvement par rapport à d'autres référentiels galiléens. Ceci constitue un principe dit de **relativité galiléenne**.

Ce principe est restreint aux seuls référentiels galiléens. Pour les référentiels non galiléens en revanche, il existe une expérience assez simple permettant à un observateur (lié au référentiel mobile) de se rendre compte du mouvement du référentiel mobile : c'est l'expérience du seau d'eau de Newton.

Imaginons un seau rempli d'eau au repos dans le référentiel mobile $\mathscr{R}_r$. Un observateur lié à $\mathscr{R}_r$ est enfermé avec le seau dans une pièce sans fenêtre. Cet observateur peut-il se rendre compte du mouvement de $\mathscr{R}_r$? Deux cas se présentent alors :

1) $\mathscr{R}_r$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}_a$: dans ce cas, la surface de l'eau reste plane et l'observateur ne peut savoir si $\mathscr{R}_r$ est en mouvement.

2) $\mathscr{R}_r$ n'est pas galiléen : par exemple la pièce où se trouve le seau et l'observateur tourne à vitesse angulaire uniforme. Le seau est placé au centre ici. Cette fois-ci, la surface de l'eau s'incurve, et l'observateur réalise qu'il est en mouvement.

3.2.2 Forces d'inertie

On a vu précédemment que les lois de la mécanique sont modifiées lorsqu'on n'est pas dans un référentiel galiléen. Voici les conséquences du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

Soit $\mathscr{R}_r$ référentiel non galiléen, mobile par rapport à un référentiel $\mathscr{R}_a$ galiléen considéré comme fixe. Considérons un point M de masse m soumis à une force résultante $\vec{F}$. D'après le principe fondamental de la dynamique, on peut écrire :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{a}$ correspond à l'accélération dans le référentiel fixe (accélération absolue).

La loi de composition des accélérations donne : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}_r + m \cdot \vec{a}_e + m \cdot \vec{a}_c$$

On peut écrire cette relation en faisant ressortir l'accélération exprimée dans le référentiel mobile $\mathscr{R}_r$ (notée $\vec{a}_r$).

$$m \cdot \vec{a}_r = \vec{F} - m \cdot \vec{a}_e - m \cdot \vec{a}_c$$

Pour l'observateur lié au référentiel $\mathscr{R}_r$ en mouvement, on voit qu'on peut écrire le principe fondamental de la dynamique sous sa forme usuelle (force = produit de la masse par l'accélération), avec cependant deux nouveaux termes qui peuvent être assimilées à des forces. Ces forces existent parce que l'observateur est lié à un référentiel non galiléen : c'est pourquoi on les appelle parfois *forces fictives* ou *forces de référentiel*. Plus couramment, ces forces sont appelées **forces d'inertie**. Elles sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \cdot\ \vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e & \text{appelée force d'inertie d'entraînement ;} \\ \cdot\ \vec{f}_{ic} = -m \cdot \vec{a}_c & \text{appelée force d'inertie de Coriolis.} \end{cases}$$

Les forces d'inertie ne correspondent à aucune interaction entre l'objet et son environnement immédiat, et ne font pas partie des interactions fondamentales (dont font partie les interactions gravitationnelle et électrostatique). Cependant leurs effets donnent lieu à des phénomènes importants se produisant sur Terre. L'objectif ici est de donner quelques exemples des effets de ces forces d'inertie : la variation de l'accélération gravitationnelle avec la latitude et la déviation vers l'Est d'un corps en chute libre.

Remarque

La force de Coriolis dans le cas d'une rotation s'écrit: $\vec{f}_{ic} = -2m \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$ (voir l'expression de l'accélération de Coriolis dans le cas d'une rotation en 3.1.4). On voit donc que lorsque $\vec{v}_r = \vec{0}$, la force de Coriolis est nulle. Cette force n'a donc d'effet que sur des corps en mouvement dans le référentiel relatif mobile.

a) Variation de l'accélération gravitationnelle avec la latitude

Imaginons le cas d'un fil à plomb vertical et immobile. Deux forces s'exercent sur le plomb suspendu, son poids $\vec{P}_0 = m \cdot \vec{g}_0$ et la tension du fil $\vec{T}$. L'équilibre statique donne la relation suivante : $\vec{P}_0 + \vec{T} = \vec{0}$.

Si la Terre était immobile, le poids du plomb correspondrait à l'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur ce corps. Mais la Terre est en rotation sur elle-même et en rotation par rapport au soleil. Donc un observateur sur Terre mesure l'interaction gravitationnelle mais aussi les forces d'inertie. Comme le plomb est immobile, seule la force d'entraînement $\vec{f}_{ie}$ a un effet sur le plomb. L'équilibre statique dans le référentiel terrestre non galiléen donne donc :

$$\vec{P}_0 + \vec{f}_{ie} + \vec{T} = \vec{0}$$

Ainsi, dans le référentiel terrestre, une composante $\left(\vec{f}_{ie}\right)$ s'ajoute à la définition du poids du plomb. On peut écrire la relation suivante :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{f}_{ie}$$

Pour exprimer la force d'entraînement, il convient de représenter les vecteurs mis en jeu.

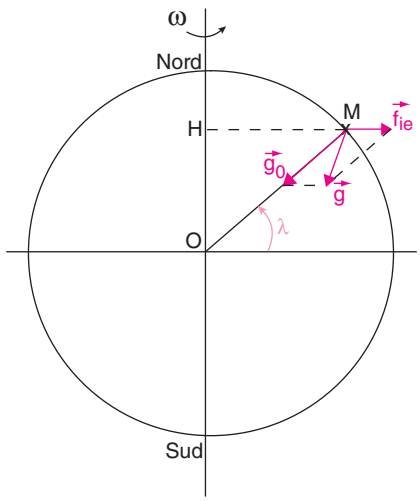


Figure 3.3 **Variation de l'accélération gravitationnelle avec la latitude λ**

Rappelons l'expression de l'accélération d'entraînement (vue au 3.1.4) :

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

Or on considère que la rotation de la Terre sur elle-même est uniforme, donc à vitesse angulaire constante : $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$.

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est orienté selon l'axe Nord-Sud (dans le sens Sud vers le Nord). On peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme suit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$. Avec les propriétés du produit vectoriel, on obtient alors :

$$\vec{a}_e = \left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right) = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

L'expression du poids $\vec{P}$ dans le référentiel terrestre non galiléen devient donc :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{g}_0 + m\omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

On obtient alors l'expression de l'accélération gravitationnelle :

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On constate donc que l'accélération gravitationnelle varie avec la latitude λ (car $\overrightarrow{HM}$ varie avec λ). Ainsi $\vec{g}$ n'est pas la même aux pôles et à l'équateur. D'autre part, dans l'expression de $\vec{g}$, on distingue deux termes : un terme gravitationnel $\vec{g}_0$ et un terme d'inertie $\omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$.

Remarque

La force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \cdot \overrightarrow{HM}$ est aussi appelée *force centrifuge*. Cette force centrifuge est responsable des différences de poids selon la latitude du lieu où on le mesure. Elle a eu un effet majeur sur la forme de la Terre : elle a entraîné un aplatissement de notre planète aux pôles, ce qui fait que la Terre n'est pas sphérique.

b) Déviation vers l'Est d'un corps en chute libre

Un corps de masse m en chute libre est animé d'une vitesse $\vec{v}_r$ dans le référentiel relatif (référentiel terrestre ici). Dans ce cas, la force d'inertie de Coriolis n'est pas nulle. Rappelons son expression : $\vec{f}_{ic} = -2m \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$

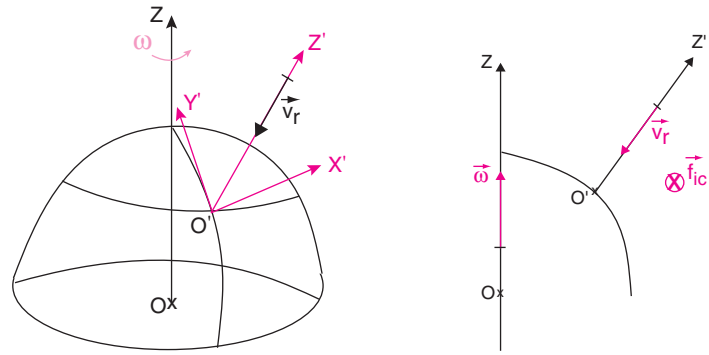


Figure 3.4 **Déviation vers l'Est d'un corps en chute libre sur Terre**

Représentation en trois dimensions à gauche, projection dans le plan (*OZ*, *O'Z'*) à droite.

La figure 3.4 représente les différents vecteurs mis en jeu lors de la chute libre du corps. On constate que la force d'inertie de Coriolis exercée sur le corps en chute libre est orientée selon l'axe *O'X'* et donc vers l'Est.

Remarque

La force de Coriolis par sa définition agit sur tout corps en mouvement dans le référentiel terrestre. Elle est donc particulièrement importante notamment pour tous les fluides se déplaçant sur notre planète : elle va agir directement sur les courants marins, sur les vents, les cyclones, etc. Elle devra aussi être prise en compte dans le calcul des trajectoires en avion par exemple car des déviations seront induites par cette force de Coriolis.

LE PHÉNOMÈNE DES MARÉES

Les marées sont dues à l'action conjuguée du Soleil et de la Lune sur les masses d'eau existant sur Terre. Cette action se manifeste au travers d'un terme différentiel marquant la différence d'interaction gravitationnelle entre ces astres (Soleil et Lune) et deux points distincts de la Terre : un point M à la surface et un point O au centre de la Terre. Pour des points M très proches de la Terre (relativement aux distances Terre-Lune et Terre-Soleil), ce terme différentiel est en général très faible mais suffisamment important pour engendrer le phénomène des marées du fait de l'énormité des masses d'eau mises en jeu.
Le phénomène des marées est aussi amplifié par des effets de résonance. À noter que la Lune et le Soleil jouent à peu près le même rôle sur les marées.
Donc les marées se produisant sur Terre sont essentiellement dues à une différence de force d'attraction gravitationnelle exercée par le Soleil et la Lune, sur le centre de la Terre et sur un point à la surface de la Terre.

3.3 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

3.3.1 Moment d'une force

On considère une barre mobile, articulée en un point fixe O : une force appliquée ne peut engendrer un mouvement de rotation que si elle ne passe pas par O. Le schéma de la figure 3.5 montre une force $\vec{F}'$ passant par O ne produisant pas de mouvement et une force $\vec{F}$ ne passant pas par O et produisant un mouvement de rotation de la barre. La distance OH caractérise ce qu'on appelle le *bras de levier* : l'efficacité de la force est d'autant plus grande que OH est grande.

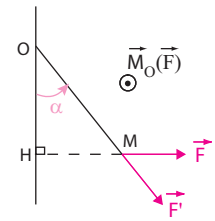


Figure 3.5 **Définition du moment d'une force**

Afin de caractériser à la fois l'efficacité de la force $\vec{F}$ et le plan dans lequel s'effectue la rotation due à $\vec{F}$, on définit le moment de la force $\vec{F}$ (exercée au point M) par rapport au point O comme suit :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le module (ou intensité) de ce moment peut être déterminé de la façon suivante :

$$\left\|\vec{M}_O(\vec{F})\right\| = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \left\|\vec{F}\right\| \cdot \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right| = \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \left\|\vec{F}\right\| \cdot |\cos\alpha| = \|\overrightarrow{OH}\| \cdot \left\|\vec{F}\right\|$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On constate qu'avec cette définition, le moment d'une force est d'autant plus grand que « le bras de levier » OH est grand. D'autre part, le moment de $\vec{F}$ par rapport à O est dirigé perpendiculairement au plan formé des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon : on peut imaginer qu'on « amène » le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vers le vecteur $\vec{F}$, et avec ce mouvement on détermine le sens du vecteur moment de la force $\vec{F}$ par rapport à O (moment de $\vec{F}$ perpendiculaire à la feuille, orienté comme « sortant de la feuille » ; voir Fig 3.5).

3.3.2 Moment cinétique d'un point

Pour les mouvements de translation, on utilise les notions de force et de quantité de mouvement, reliées entre elles par le *principe fondamental de la dynamique*. Pour les mouvements de rotation, on introduit le moment d'une force. Pour ce qui est de la quantité de mouvement, on introduit la notion de moment cinétique du point matériel M, en un point donné O, dans le référentiel $\mathscr{R}$. Il se note $\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)$ et s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{\mathscr{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$$

où $\vec{p}_{\mathscr{R}}(M)$et $\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$ sont respectivement la quantité de mouvement et la vitesse exprimées dans le référentiel $\mathscr{R}$.

$\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$et $\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$.

La norme de $\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)$ vaut : $\left\|\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)\right\| = m \cdot \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \cdot \|\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)\| \cdot |\sin\beta|$, où β est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$et $\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$.

3.3.3 Théorème du moment cinétique

$\mathscr{R}$ est un référentiel galiléen : on étudie le mouvement d'un point M de masse m, soumis à une force résultante $\vec{F}$. En dérivant le moment cinétique par rapport au temps, on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} \wedge m \cdot \vec{v}_{\mathscr{R}}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}}$$

Or, $\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \vec{v}_{\mathscr{R}}(M)$ et $\vec{v}_{\mathscr{R}}(M) \wedge \vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \vec{0}$.

De plus, d'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathscr{R}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \vec{F}$$

On peut donc écrire la relation suivante :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Théorème

La dérivée du moment cinétique d'un point matériel M *de masse* m*, par rapport à un point* O*, dans un référentiel* $\mathscr{R}$ *galiléen, est égale au moment de la force appliquée au point* M*, par rapport au point* O.

3.3.4 Mouvement dans un champ de forces centrales

Un champ de forces centrales est un champ de forces dont les supports passent toujours par un point fixe donné de l'espace (point appelé *centre de forces*) , et telles que leurs intensités ne dépendent que de la distance entre ce centre et les points d'application de ces forces.

Les forces d'attraction gravitationnelle sont des forces centrales et sont particulièrement importantes pour expliquer les mouvements des astres et des planètes. À partir du théorème du moment cinétique, on trouve alors des lois importantes pour de tels mouvements.

a) Théorème du moment cinétique

Considérons un référentiel galiléen $\mathscr{R}$, et un champ de forces centrales $\vec{F}(M)$, de centre O immobile dans $\mathscr{R}$. Comme $\overrightarrow{OM}$et $\vec{F}(M)$ sont parallèles, on obtient donc la relation suivante :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M) = \overrightarrow{\text{cste}} = \vec{L}_0$$

Moment cinétique et force centrale

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un point M est soumis à l'action d'une force centrale, le moment cinétique du point M, noté $\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M)$, calculé au centre de forces O, est un vecteur constant au cours du mouvement.

b) Planéité de la trajectoire

À chaque instant, le moment cinétique est constant. Cela signifie que :

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{L}_0 = \overrightarrow{\text{cste}}$$

$\vec{L}_0$ est déterminé par les conditions initiales, $\overrightarrow{OM}$et $\vec{v}$ à $t = 0$.

Donc, à chaque instant, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}_0$. O étant fixe, cela veut dire que le point M se déplace dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_0$ et qui contient le point O.

Trajectoire et force centrale

Dans un référentiel galiléen, la trajectoire d'un point M soumis à un champ de forces centrales, est plane : elle se situe dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_0$ et qui contient le centre de forces O.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Loi des aires

Puisque le mouvement est effectué dans un plan, deux coordonnées suffisent pour repérer la position du point M dans ce plan. Il est alors judicieux d'utiliser les coordonnées polaires (ρ, θ) et de placer le centre de forces à l'origine du référentiel.

On peut alors exprimer les différents vecteurs dans la base polaire $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta\right)$:

$$\vec{F}(M) = F(\rho) \cdot \vec{u}_\rho \qquad \overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho \qquad \vec{v}(M) = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

Le moment cinétique s'écrit donc :

$$\vec{\sigma}_{O/\mathscr{R}}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m \cdot \vec{v}_{\mathscr{R}}(M) = \left(\rho \cdot \vec{u}_\rho\right) \wedge m \left(\dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta\right) = m \cdot \rho^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$

Dans le cas d'un champ de forces centrales, on a vu que le moment cinétique reste constant avec le temps. On a donc :

$$m\rho^2 \cdot \dot{\theta} = L_0 \quad \text{avec} \quad L_0 \text{ tel que } \vec{L_0} = L_0 \cdot \vec{u}_z$$

On voit avec cette relation, que le produit de la vitesse angulaire par le carré de la distance entre centre de force et point d'application de la force, est égal à une constante, notée C, telle que $C = \dfrac{L_0}{m}$. Cette constante est appelée **constante des aires** du mouvement et est définie par la relation : $\rho^2 \cdot \dot{\theta} = \dfrac{L_0}{m} = C$.

On considère maintenant l'aire ΔS balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$, pendant un intervalle de temps Δt.

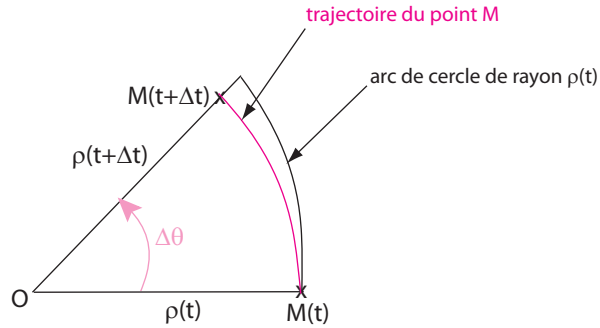


Figure 3.6 **Aire balayée par le rayon vecteur pendant un intervalle de temps Δt**

Sur un intervalle de temps suffisamment petit, on peut confondre l'arc de cercle de rayon $\rho(t)$ et la trajectoire réelle du point M (telle que ρ change avec le temps : sur la figure 3.6 le rayon $\rho(t + \Delta t)$ est plus petit que le rayon $\rho(t)$).

ΔS correspond en fait à une fraction de l'aire du disque de rayon $\rho(t)$ et de centre O, si Δt est petit. ΔS correspond à un angle polaire $\Delta\theta$. Par une simple « règle de trois », on peut écrire :

Surface	Angle polaire correspondant
surface d'un disque de rayon ρ(t) : $\pi \cdot [\rho(t)]^2 = \pi \cdot r^2$	2π
surface délimitée par les points O, $M(t)$ et $M(t + \Delta t)$ (Fig. 3.6) : ΔS	$\Delta\theta$

On peut alors écrire la relation suivante :

$$\frac{\Delta S}{\pi \cdot \rho^2} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

Si Δt est très petit, alors Δt tend vers l'infinitésimal dt. On peut alors écrire :

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \mathrm{d}\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

On retrouve l'expression de la constante des aires C:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \dot{\theta} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

$\frac{dS}{dt}$ s'appelle la **vitesse aréolaire** et correspond à la vitesse à laquelle la surface est balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Loi des aires

Dans un mouvement à forces centrales, le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

- *Conséquences*

On peut représenter deux aires balayées par le rayon vecteur à des moments différents mais sur des intervalles de temps égaux, comme dans la figure 3.7.

Pour une trajectoire non circulaire où la norme du rayon vecteur varie au cours du temps, la loi des aires indique que la vitesse angulaire varie aussi. Si le rayon ρ diminue, alors la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ augmente. On peut dire aussi que plus le point est proche du centre de forces, plus sa vitesse angulaire est grande.

d) Lois de Kepler

Dès l'antiquité, les hommes se sont interrogés sur le mouvement des planètes. Le mot grec « $\pi\lambda\alpha\nu\eta\tau\eta\sigma$ » signifie d'ailleurs errant, vagabond : cette définition illustre bien la complexité de ces mouvements déjà observée à cette époque ancienne.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

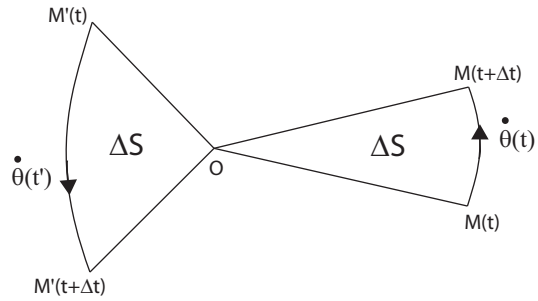


Figure 3.7 **Lois des aires**

L'astronome polonais Nicolas Copernic (1473-1543) avait déjà grandement contribué à la connaissance du mouvement des planètes en marquant le rôle central du Soleil. À partir de ses observations et de celles de son maître danois Tycho Brahe (1546-1601), l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) a été à l'origine de lois essentielles qui décrivent le mouvement des planètes (lois établies entre 1604 et 1618).

Les lois de Kepler (établies entre 1604 et 1618) reposent toutefois sur trois hypothèses fondamentales :

1) les interactions gravitationnelles ont lieu essentiellement entre le Soleil et les planètes : on néglige les perturbations dues aux autres planètes ;

2) les planètes et le Soleil sont considérés comme des points matériels, leur masse étant concentrée en leur centre ;

3) le Soleil est fixe et à l'origine du référentiel galiléen d'étude du mouvement des planètes.

Première loi de Kepler

Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Démonstration

En appliquant le principe fondamental de la dynamique avec la force d'attraction gravitationnelle et l'accélération en coordonnées polaires, on arrive à une équation du mouvement de type (m_0 = masse du Soleil) :

Voir site web

$$\text{Équation } \rho(\theta): \frac{1}{\rho} = \frac{G \cdot m_0}{C^2} + A \cdot \cos\theta.$$

On retrouve ici l'équation des coniques : $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\theta$ avec par analogie : paramètre $p = \frac{C^2}{G \cdot m_0}$ et excentricité $e = \frac{A \cdot C^2}{G \cdot m_0}$.

Remarque

Suivant la valeur de l'excentricité e, les trajectoires décrites par $\rho(\theta)$ sont soit des hyperboles ($e > 1$), des paraboles ($e = 1$) ou des ellipses ($0 \leqslant e < 1$). Dans le cas des planètes en interaction gravitationnelle avec le Soleil, les paramètres A et C de la conique sont tels que l'orbite des planètes correspond à des ellipses dont un des foyers est occupé par le Soleil.

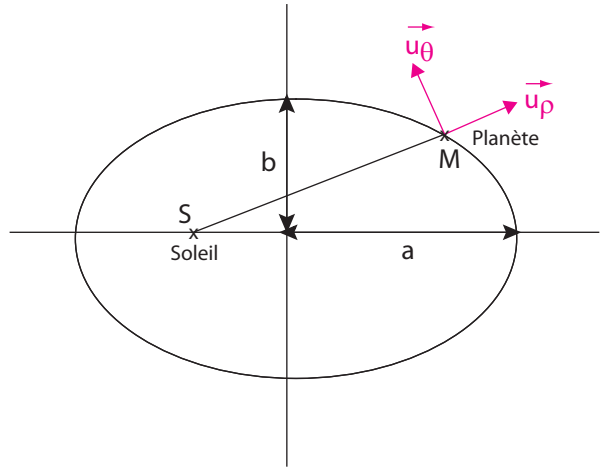


Figure 3.8 **Trajectoire elliptique d'une planète autour du Soleil**

À noter aussi que l'énergie mécanique peut aussi s'écrire en fonction du paramètre p et de l'excentricité e : $E_m = \dfrac{G \cdot m \cdot m_0}{2p}\left(e^2 - 1\right)$. On constate que E_m est du signe de $\left(e^2 - 1\right)$. Ainsi selon le signe de E_m, on a les différents types de trajectoires : hyperbole pour $E_m > 0$, parabole pour $E_m = 0$, ellipse pour $E_m < 0$.

Deuxième loi de Kepler (loi des aires)

Le rayon vecteur ayant le Soleil pour origine, balaie des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.

Pour la démonstration voir p.85

Troisième loi de Kepler

Le carré de la période de révolution T *d'une planète autour du soleil est proportionnel au cube du demi grand axe de son orbite.*

L'énoncé de la troisième loi de Kepler donne la relation suivante : $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{G \cdot M_S}{4\pi^2}$ où a est le demi grand axe de l'ellipse, T la période de révolution, M_S la masse du Soleil, G la constante de gravitation.

Voir site web pour la démonstration

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À retenir

Lorsque des référentiels sont en mouvement les uns par rapport aux autres, il y a alors composition des vitesses et des accélérations. Dans le référentiel $\mathscr{R}$ fixe (absolu), on parle de vitesse et accélération absolues ($\vec{v}_a$, $\vec{a}_a$). Dans le référentiel $\mathscr{R}$' mobile (relatif), on parle de vitesse et d'accélération relatives ($\vec{v}_r$, $\vec{a}_r$). On définit les relations suivantes :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \quad \text{et} \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$\vec{v}_e$ et $\vec{a}_e$ sont respectivement la vitesse et l'accélération d'entraînement : ces grandeurs définissent le mouvement du référentiel $\mathscr{R}$' par rapport au référentiel $\mathscr{R}$. $\vec{a}_c$ est une accélération complémentaire dite de Coriolis qui apparaît pour les corps déjà en mouvement dans le référentiel $\mathscr{R}$'. Dans un référentiel non galiléen apparaissent donc des forces dites d'inertie ou de référentiels : $\vec{f}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e$ (force d'inertie d'entraînement) et $\vec{f}_{ic} = -m \cdot \vec{a}_c$ (force d'inertie de Coriolis) ; ces forces sont à l'origine de nombreux phénomènes naturels se produisant sur Terre.

Le cas important des mouvements à force centrale concerne la force de gravitation (exercée par le Soleil) qui est à l'origine des mouvements des planètes. Les lois de Kepler permettent de décrire ces mouvements, en déterminant notamment leurs trajectoires (elliptiques) et leurs périodes de révolution.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 596.

3.1 Un manège d'enfant tourne à vitesse angulaire constante ω. Le propriétaire parcourt la plateforme pour ramasser les billets. On considère deux référentiels : le référentiel $\mathscr{R}$ lié à la Terre, de base $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, et le référentiel $\mathscr{R}$' lié au manège, de base $(O, \vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$: $\vec{u}_z$ confondu avec $\vec{u}'_z$. À $t = 0$, les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}'_x$ sont confondus. À l'instant t, $\vec{u}'_x$ fait un angle $\theta(t)$ avec $\vec{u}_x$. Le manège tourne dans un sens tel que $\theta(t)$ augmente avec le temps (dans le sens trigonométrique). On a donc la relation suivante : $\theta(t) = \omega t$.

a) Tout d'abord, le propriétaire partant du centre à $t = 0$, suit un rayon de la plateforme avec un mouvement uniforme de vitesse $v_{\mathscr{R}}$.

i. Établir l'équation de la trajectoire du propriétaire :

– dans le référentiel $\mathscr{R}$' lié au manège (trajectoire vue par les enfants sur le manège)

– dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à la Terre (trajectoire vue par les parents attendant les enfants)

ii. Retrouver la vitesse absolue du mouvement de l'homme (dans $\mathscr{R}$).

– à partir de la position

– en utilisant la loi de composition des vitesses. Interpréter physiquement les différents termes.

iii. Reprendre la question *ii* pour l'accélération absolue (dans $\mathscr{R}$).

b) Maintenant, le propriétaire parcourt sur le manège un cercle de rayon r_0 concentrique à la plateforme, à une vitesse linéaire constante $r_0\omega$'.

Reprendre les questions précédentes (*i*, *ii*, *iii*) pour ce cas présent.

3.2 Une goutte de pluie P tombe verticalement à la vitesse limite v. Un passant arrive en O, à la verticale de P, au moment où la goutte P est à la hauteur h au-dessus du sol.

a) Quelle est la trajectoire de la goutte de pluie par rapport au passant, si ce dernier marche horizontalement à la vitesse V ?

b) Même question si le passant marche sur une pente faisant un angle θ avec l'horizontale.

3.3 Un nageur plonge en A avec l'intention de traverser une rivière de largeur D, dont les eaux sont animées d'un courant de vitesse uniforme V.

a) Le nageur avance dans l'eau avec la vitesse v perpendiculairement aux rives. Quelle est sa trajectoire relativement aux deux rives ? Quel est son point d'abordage ? Quel est le temps de traversée ?

b) Le nageur désire en fait aborder au point B situé en face du point A. Que doit-il faire pour parcourir une trajectoire AB rectiligne en nageant à vitesse constante v ? Quel est le temps de traversée ? Est-ce toujours possible ?

3.4 Un plateau circulaire horizontal, initialement au repos, porte le long d'un rayon un tube attaché à son centre O et qui contient une bille de masse m. Le plateau tourne autour d'un axe vertical passant par O avec une vitesse angulaire uniforme ω. La bille initialement bloquée à la distance r_0 du centre O du plateau, est libérée sans vitesse initiale par rapport au tube.

En admettant qu'il n'y a pas de frottements, après avoir établi le bilan des forces et des forces d'inertie, décrire le mouvement de la bille :

a) dans un référentiel $\mathscr{R}$' lié au plateau ;

b) dans un référentiel $\mathscr{R}$ lié à la Terre.

3.5 Montrer qu'on peut mesurer l'accélération d'un ascenseur, dans les différentes phases de son mouvement (démarrage et arrêt, à la montée, à la descente) à l'aide d'un ressort de caractéristiques inconnues, d'un objet de masse inconnue et d'un double décimètre. On considère l'axe OZ de vecteur unitaire $\vec{u}_z$ dirigé vers le haut.

Indication : exprimer l'accélération en fonction de g (accélération gravitationnelle), L (longueur du ressort dans l'ascenseur accéléré, lorsqu'une masse M y est suspendue), L_0 (longueur du ressort non déformé) et L_R (longueur du ressort lorsque l'ascenseur est non accéléré avec la même masse M suspendue).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3.6 Par rapport à un référentiel terrestre considéré comme galiléen, un plateau tourne à vitesse constante de 1 tour $\cdot$ s^{-1}. On prend l'accélération de la pesanteur $g = 10$ m $\cdot$ s^{-2}. De la terre est disposée sur le plateau et on y fait pousser du blé.

a) Dans quelle direction pousse le blé ?

b) Comment varie l'angle α que forme le blé avec la verticale (direction de $\vec{g}$), suivant la position sur le plateau ?

Comparer le cas où le grain de blé est situé à la distance $r_1 = 10$ cm par rapport au centre du plateau, et celui où il est situé à la distance $r_2 = 100$ cm du centre.

3.7 Un conducteur a suspendu à son rétroviseur intérieur une balle de masse m au bout d'un fil. On considère le référentiel lié à la Terre comme galiléen.

a) Dans un premier temps, la voiture roule sur une route horizontale et rectiligne avec une vitesse v_0 constante. On suppose que la balle est en équilibre. Le fil forme-t-il un angle avec la verticale ? Pourquoi ?

b) Toujours en ligne droite, le conducteur imprime à sa voiture une accélération a_0 positive et constante. En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, déterminer l'expression de l'angle α que fait alors le fil avec la verticale.

c) Enfin, la voiture prend un virage sur une portion de route horizontale. Ce virage suit un cercle de rayon R. La vitesse de la voiture par rapport à la route est alors constante et vaut v_0. On note ω la vitesse angulaire de la voiture (ω est constante).

i. Déterminer les expressions des forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement.

ii. Déterminer l'angle γ que fait le fil avec la verticale.

3.8 Un satellite M de masse $m = 1\,000$ kg tourne autour de la Terre sur une orbite géostationnaire circulaire de rayon r_S (mesuré depuis le centre de la Terre). Un satellite géostationnaire est tel qu'il reste à la verticale d'un même point de la surface de la Terre. On désigne par R_T le rayon de la Terre ($R_T = 6\,400$ km), g_0 l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre ($g_0 = 10$ m $\cdot$ s^{-2}).

a) Montrer que l'orbite du satellite est nécessairement dans le plan équatorial de la Terre.

b) Déterminer le rayon r_S de l'orbite et la vitesse v_S du satellite.

c) Quelle énergie minimale faut-il fournir au satellite pour qu'il puisse échapper à l'attraction terrestre ?

4

MÉCANIQUE DES SOLIDES INDÉFORMABLES

PRÉALABLES

- Produits scalaire et vectoriel
- Gradient d'une fonction et de dérivée
- La lecture du chapitre de mécanique du point est conseillée

MOTS CLÉS

- Solide indéformable
- Liaisons
- Principe fondamental de la dynamique
- Théorème de l'énergie cinétique

OBJECTIFS

- Paramétrer la position d'un (ou de plusieurs) solide(s)
- Écrire le champ des vitesses et des accélérations d'un solide indéformable
- Composer les torseurs cinématiques et d'accélération
- Calculer un tenseur (ou une matrice) d'inertie
- Caractériser une liaison – parfaite – entre solides (quelques liaisons simples)
- Écrire les torseurs d'actions mécaniques, le principe fondamental de la statique, le principe fondamental de la dynamique en repère galiléen et non galiléen
- Se familiariser avec le Théorème de l'énergie cinétique et la notion d'intégrale première

4.1 CINÉMATIQUE DU SOLIDE INDÉFORMABLE

Dans un modèle mécanique, la première étape de la modélisation est la cinématique, c'est-à-dire la modélisation du mouvement. Si le milieu est assimilé à un ensemble de solides indéformables, le mouvement est discontinu au passage d'un solide à un autre solide. Plutôt que de chercher à modéliser les discontinuités du mouvement dans un seul espace $\mathcal{E}$, il a été choisi de représenter le mouvement à l'aide d'une collection d'espaces (un espace pour chaque solide) dans lesquels le mouvement est continu.

Un **solide** est dit **indéformable** lorsque - quels que soient les points A et B de ce solide — la distance AB reste constante au cours du mouvement. On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable. On peut imaginer que, dans l'exemple ci-dessous, les points A et B répondent bien à cette définition mais évidemment pas ceux qui se situent dans la zone du choc.

L'étude du mouvement du solide S_2 par rapport au solide S_1 est identique à l'étude du mouvement de l'espace $\mathcal{R}_2$ attaché au solide S_2 par rapport à l'espace $\mathcal{R}_1$ attaché au solide S_1.



http://www2.ac-lyon.fr

Positionner le solide S_2 par rapport au solide S_1 revient donc à positionner le repère $\mathcal{R}_2$ attaché au solide S_2, par rapport au repère $\mathcal{R}_1$. La position du repère $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ est complètement déterminée si l'on se fixe : (1) *l'orientation de la base* de $\mathcal{R}_2$ par rapport à celle de $\mathcal{R}_1$ et (2) *les coordonnées de l'origine* O_2 du repère $\mathcal{R}_2$ dans le repère $\mathcal{R}_1$. Quel que soit le système de coordonnées choisi, trois paramètres indépendants sont nécessaires pour positionner O_2 dans $\mathcal{R}_1$.

Dans un premier temps on cherche à définir l'orientation de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ du repère $\mathcal{R}_2(O_2, x, y, z)$ par rapport à la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ du repère $\mathcal{R}_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$. Cette orientation est toujours définie par trois paramètres. La méthode présentée est celle des angles d'Euler.

Les **angles d'Euler** correspondent à la composition de trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. La première rotation d'angle ψ, autour de l'axe (O, z_1) permet de passer à une première base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_1 = \vec{z})$. L'angle ψ est appelé « angle de précession ». Une deuxième rotation d'angle θ est alors appliquée autour de l'axe $(O, \vec{u})$, de la première base intermédiaire, ce qui permet de définir une deuxième base intermédiaire $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}_1)$. L'angle θ est appelé « angle de nutation ». Une dernière rotation d'angle ϕ est appliquée autour de l'axe $(O, \vec{z}_1)$ de la seconde base intermédiaire, ce qui permet de positionner la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. L'angle ϕ est appelé « angle de rotation propre ». La composition de rotations planes successives permet de dessiner des figures de projection qui sont souvent très utiles pour la résolution des problèmes.

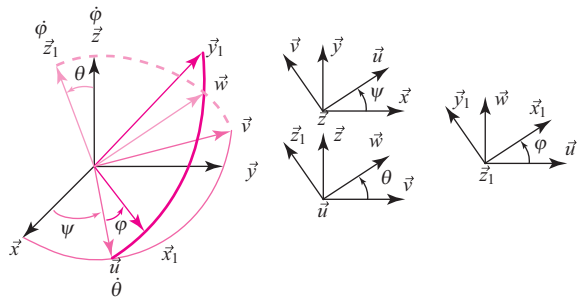
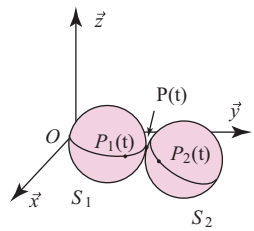


Figure 4.1 **Angles d'Euler**

4.1.1 Cinématique du solide



Soit un point P_1 d'un solide S_1 en mouvement par rapport au repère R. Les vecteurs vitesse et accélération du point P_1 par rapport au repère R sont alors notés : $\vec{V}(P_1 \in S_1/R)$ et $\vec{\Gamma}(P_1 \in S_1/\mathcal{R})$. Cette notation permet de préciser à quel solide appartient le point dont on suit le mouvement lorsque plusieurs espaces coïncident au même point. Cela permet aussi de distinguer la vitesse d'un point appartenant à un solide, de la vitesse d'un point de l'espace n'appartenant à aucun solide, comme le point de contact P entre les solides S_1 et S_2. La vitesse du point P sera alors notée : $\vec{V}(P/\mathcal{R})$.

Supposons un référentiel du mouvement $\mathcal{R}_1$ d'origine O_1 et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère $\mathcal{R}_2$ d'origine O_2. La base attachée à $\mathcal{R}_2$ a une vitesse de rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ par rapport à la base attachée à $\mathcal{R}_1$. Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2, alors on peut écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{AB},$$

dont on déduit la formule de changement de point pour le champ des vecteurs vitesses des points d'un solide :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \vec{V}(B \in S_2/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(A \in S_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{AB}.$$

Remarque

Il est important de comprendre que la notion de dérivée d'un vecteur doit s'accompagner de la donnée du repère par rapport auquel on dérive. On comprend aisément qu'un vecteur « attaché » à la Terre par exemple est vu comme fixe pour un observateur lui aussi fixe sur cette Terre mais le martien qui nous observe peut-être voit ce

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

vecteur se déplacer car son repère naturel est Mars. C'est le sens de la notation $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{*}}{\mathrm{d}t}\right|_R$ qui stipule que $\vec{*}$ est dérivé par rapport à $\mathcal{R}$.

La vitesse d'un point B quelconque du solide S_2 peut donc se calculer à partir de la vitesse d'un point A de S_2 et de la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel du mouvement. Le champ des vecteurs vitesses des points du solide S_2 par rapport à $\mathcal{R}_1$ peut être représenté par un torseur, dit torseur cinématique, noté $\{\mathcal{V}\}$ (V comme vitesse) dont la résultante est la vitesse de rotation de la base B_2 par rapport à la base B_1 et le moment en un point A, la vitesse du point A appartenant au solide S_2, par rapport au repère $\mathcal{R}_1$:

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/\mathcal{R}_1)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1)\\ \\ \vec{V}(A\in S_2/\mathcal{R}_1)\end{array}\right\}_A \tag{4.1}$$

Comme le champ des vecteurs vitesses d'un solide se représente par un torseur, c'est un champ **équiprojectif**. Ceci signifie que quels que soient deux points A et B d'un solide S_2 :

$$\forall A, \forall B \in S_2 \quad \overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(A\in S_2/\mathcal{R}_1) = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(A\in S_2/\mathcal{R}_1).$$

Cette propriété se déduit du champ de moment projeté (produit scalaire) sur $\overrightarrow{AB}$. Nous insistons sur la propriété importante d'équivalence entre champ équiprojectif et champ de moment de torseur.

D'après ce qui a été dit plus haut, la dérivée des vecteurs unitaires $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ de la base du repère $\mathcal{R}_2$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_1$, se calcule comme suit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)\wedge\vec{x}_2.$$

On en déduit alors, si l'on connaît les dérivées des vecteurs unitaires :

$$\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) = \vec{x}_2\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} + \vec{y}_2\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{y}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} + \vec{z}_2\wedge\left.\frac{\mathrm{d}\vec{z}_2}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1}.$$

4.1.2 Champ des vecteurs accélération des points d'un solide

Supposons un référentiel du mouvement $\mathcal{R}_1$ et un solide S_2 en mouvement par rapport à ce référentiel, auquel est attaché un repère $\mathcal{R}_2$. La base attachée à R_2 a une vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ par rapport à la base attachée à $\mathcal{R}_1$. Supposons deux points quelconques A et B du solide S_2, alors :

$$\forall A, B \in S_2 \quad \vec{V}(B\in S_2/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(A\in S_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1)\wedge\overrightarrow{AB}.$$

La relation entre les vecteurs accélération des points A et B du solide S_2 dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_1$, s'obtient en dérivant les deux membres de cette

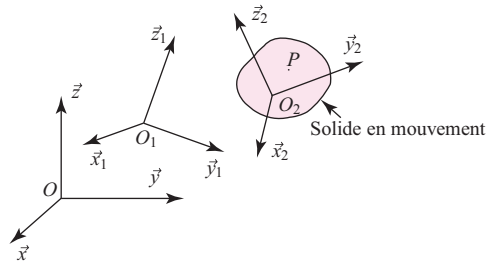
égalité par rapport à t dans le repère $\mathcal{R}_1$. On en déduit (après quelques calculs) la formule de changement de point du champ des vecteurs accélérations d'un solide :

$$\vec{\Gamma}(B \in S_2/\mathcal{R}_1) = \vec{\Gamma}(A \in S_2/\mathcal{R}_1) + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \left[\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{AB}\right].$$

Ainsi, *le champ des vecteurs accélérations des points d'un solide ne peut pas être représenté par un torseur, du fait de l'existence du dernier terme*. Ce point est très important et marque la différence entre champ des vitesses et des accélérations.

4.1.3 Composition des mouvements

Soit un point P, appartenant à un solide S_2, en mouvement à la fois par rapport à un repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On va chercher la relation entre les vecteurs vitesses $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ et $\vec{V}(P/\mathcal{R})$, ainsi que la relation entre les vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_1)$ et $\vec{\Gamma}(P/R)$. Ces relations, dites « de composition du mouvement », sont particulièrement utiles lorsqu'on étudie des mécanismes dans lesquels les mouvements relatifs mutuels des pièces sont connus, mais pas la cinématique d'ensemble du mécanisme.



a) Composition des vecteurs vitesse

On cherche à définir en premier lieu la relation entre $\vec{V}(P/\mathcal{R})$ et $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$. On a :

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}\right|_R \quad \text{et} \quad \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O_1P}}{\mathrm{d}t}\right|_{R_1}$$

On peut écrire : $\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_1P}$. Si maintenant on considère le point de R_1 qui coïncide avec P à l'instant t on peut écrire : $\vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}) = \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_1P}$. Donc :

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$$

Dans le mouvement du point P par rapport aux deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$, on appelle (par convention) : (1) vecteur vitesse absolue $\vec{V}(P/\mathcal{R})$, (2) vecteur vitesse relative $\vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$ et (3) vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}(P \in R_1/\mathcal{R})$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Composition des vecteurs accélération

Soit un point P, appartenant à un solide S_2, en mouvement à la fois par rapport à un repère $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et par rapport à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On va chercher maintenant la relation entre les vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_1)$ et $\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R})$. Il a été montré aux paragraphes précédents que : $\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ ce qui s'écrit aussi : $\vec{V}(P/\mathcal{R}) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(O_1 \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_1P}$. Par dérivation de chaque terme et quelques manipulations on arrive à la relation :

$$\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}) = \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R}) + 2\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$$

Dans le mouvement du point P par rapport aux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$, on appelle :
- vecteur accélération absolue : $\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R})$.
- Vecteur accélération relative : $\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_1)$.
- Vecteur accélération d'entraînement : $\vec{\Gamma}(P \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$.
- Vecteur accélération de Coriolis : $2\vec{\Omega}(S_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R}_1)$.

4.2 CINÉTIQUE

4.2.1 Torseur cinétique

Pour un point matériel M de masse élémentaire dm la quantité de mouvement associée au mouvement de ce point par rapport à un référentiel du mouvement $\mathcal{R}$ est : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R})\mathrm{d}m$. Considérons maintenant non plus un point matériel, mais un solide continu$S$, la **résultante cinétique** est alors définie comme suit, à l'instant t :

$$\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \int_{\forall M \in S} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m$$

L'énergie cinétique T d'un point matériel M de masse élémentaire dm en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$ est telle que : $2T(M/\mathcal{R}) = \vec{p}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R})$. Considérons maintenant, non plus un point matériel, mais un solide continu S, l'expression précédente se généralise au solide continu indéformable en introduisant la notion de **torseur cinétique** $\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\}$:

$$2T(M/\mathcal{R}) = \left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\} \cdot \left\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R})\right\}$$

où le torseur cinématique $\left\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R})\right\}$ représente le champ des vitesses des points M du solide S, et où les composantes du torseur cinétique $\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\}$ sont la résultante

cinétique $\vec{p}(S/\mathcal{R})$ et le **moment cinétique** $\vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R})$ en un point A :

$$\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{p}(S/\mathcal{R}) \\ \\ \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}) \end{array}\right\}_A$$

$\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\}$ est un torseur, appelé torseur cinétique de S par rapport à $\mathcal{R}$ et noté :

$$\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{p}(S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{\forall M\in S} \vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m \\ \\ \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{\forall M\in S} \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m \end{array}\right\}_A$$

Le tenseur d'inertie se représente par une matrice notée $[J(C, S)]_B$ dans une base B donnée et appelée la matrice d'inertie de S calculée au point C et exprimée dans la base B. Nous avons, dans cette base, la relation matricielle $[v] = [J(C, S)]_B[u]$. Nous ne développons pas cette partie technique que l'on peut trouver détaillée dans des ouvrages.

On distingue **deux cas particuliers courants et importants**.

Le point A est fixe dans $\mathcal{R}$.

$$\vec{V}(A \in S/\mathcal{R}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}(A, S/\mathcal{R}) = \underline{\underline{J}}(A, S)\cdot\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}).$$

On choisit de calculer le moment cinétique en C. $\overrightarrow{CC} = \vec{0}$ et :

$$\vec{\sigma}(C, S/\mathcal{R}) = \underline{\underline{J}}(C, S)\cdot\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}).$$

4.2.2 Exemple : calcul du torseur cinétique d'une barre

Considérons une barre d'épaisseur négligeable, de longueur l, homogène de masse m en liaison pivot d'axe z avec le bâti. Soit à calculer le torseur cinétique au centre de masse et au point O origine du repère.

$$\left\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{c} m\vec{V}(G/\mathcal{R}) \\ \\ \displaystyle\int_{\forall P\in S} \overrightarrow{CP}\wedge\vec{V}(G/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m \end{array}\right\}_C$$

Le vecteur position $\overrightarrow{OC}$ vaut $l/2\vec{x}_1$ ce qui donne : $\vec{V}(C/\mathcal{R}) = l/2\alpha\vec{y}_1$. Pour calculer le moment cinétique, il faut prendre un petit élément de longueur $\mathrm{d}x_1$ situé à une distance x_1 de C. L'élément de masse $\mathrm{d}m$ vaut $m/l\ \mathrm{d}x_1$; m/l représente la masse linéique de la tige. On a alors :

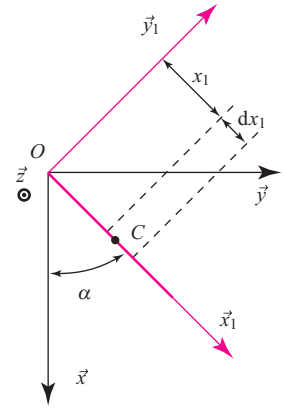
$$\int_{\forall P\in S} \overrightarrow{CP}\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m = \int_0^l (x_1 - l/2)\vec{x}_1\wedge l x_1\alpha\vec{y}_1\cdot \mathrm{d}m = \frac{ml^2}{12}\alpha\vec{z}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Donc le torseur cinétique au point C se résume à :

$$\left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{l} (ml/2)\alpha\,\vec{y}_1 \\ \\ (ml^2/12)\alpha\,\vec{z} \end{array}\right\}_C$$

On peut effectuer ce calcul en O et on obtient : $\dfrac{ml^2}{3}\alpha\,\vec{z}$ soit par intégration soit par utilisation de la relation de moment de torseur.



Nous venons de calculer le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque passant par un point O quelconque. On a :

$$I_{\Delta(O,\vec{u})} = \int_{M\in S} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u})^2 \cdot \mathrm{d}m = \int_{M\in S} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}) \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}) \cdot \mathrm{d}m$$

$$I_{\Delta(O,\vec{u})} = \vec{u} \int_{M\in S} ((\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}) \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot \mathrm{d}m = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

avec : $\vec{v} = \displaystyle\int_{M\in S} ((\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}) \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot \mathrm{d}m$. Nous retrouvons le résultat déjà mentionné relatif au tenseur d'inertie.

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$ est donc donné par : $I_{\Delta(O,\vec{u})} = \vec{u}.(\underline{\underline{J}}.\vec{u})$.

Quels sont les éléments de la matrice représentative du tenseur d'inertie dans une base donnée ? Soit $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère tel que $O \in \Delta_{(\vec{u},O)}$. On suppose que les composantes de $\vec{u}$ sont (α, β, γ). Soit un point $M(x, y, z)$ du système.

$$[J(O)]\left[\vec{u}\right] = \int_{M\in S} -\overrightarrow{OM}\wedge(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{u})\cdot \mathrm{d}m$$

$$= \begin{pmatrix} \int (z^2+y^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int xy\cdot \mathrm{d}m & -\int xz\cdot \mathrm{d}m \\ -\int xy\cdot \mathrm{d}m & \int (x^2+z^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int yz\cdot \mathrm{d}m \\ -\int xz\cdot \mathrm{d}m & -\int yz\cdot \mathrm{d}m & \int (x^2+y^2)\cdot \mathrm{d}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Comme l'intégration sur le système est indépendante du vecteur $\vec{u}$ on en déduit que la matrice se résume à

$$[J(O)] = \begin{pmatrix} I_{Ox} & I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Oy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Oz} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

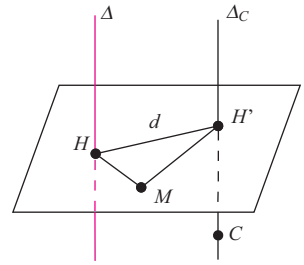
4.2.3 Théorème de Huyghens

Christian Huyghens était un scientifique hollandais (1629, 1695) né à La Haye et qui s'est intéressé aux chocs entre solides durs ou mous (à la suite de Descartes), à l'attraction entre corps et au mouvement des planètes (à la suite de Newton) et qui a rédigé des notes sur l'harmonie.

Théorème

Soit un système S de masse m de centre d'inertie C. Soit I_Δ. Considérons un axe Δ_C parallèle à Δ et passant par C. Soit d la distance entre ces deux axes.

$I_\Delta = I_{\Delta_C} + md^2$



Remarque

Sachant calculer le moment d'inertie par un axe passant par *C*, on saura le faire pour un axe quelconque parallèle. On constate que le moment d'inertie par rapport à un axe est minimal si cet axe passe par le centre d'inertie.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4.2.4 Énergie cinétique d'un solide

On a vu que l'énergie cinétique T d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est donnée par : $T(S/\mathcal{R}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\forall M\in S} \vec{V}^2(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m$. En supposant que le point A appartient au solide S on a : $\vec{V}(M\in S/\mathcal{R}) = \vec{V}(A\in S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$ et on aboutit à :

$$T(S/\mathcal{R}) = \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\\ \\ \vec{V}(A\in S/\mathcal{R})\end{array}\right\}_A \cdot \left\{\begin{array}{c}\vec{p}(S/\mathcal{R})\\ \\ \sigma(A\in S/\mathcal{R})\end{array}\right\}_A = \left\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R})\right\}_A \cdot \left\{\mathcal{C}(S/\mathcal{R})\right\}_A .$$

Théorème

L'énergie cinétique d'un solide est le comoment du torseur cinématique et du torseur cinétique (pris au même point).

4.2.5 Torseur dynamique

On construit également le torseur dynamique d'un solide$S$, de masse M_S et de centre de masse C, dans son mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ de la manière suivante :

$$\left\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{\forall M\in S}\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m\\ \\ \displaystyle\int_{\forall M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m\end{array}\right\}_A$$

La résultante du torseur cinétique s'écrit : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{\forall M\in S}\vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m = M_S\vec{V}(C/\mathcal{R})$. Pour un système à masse conservative, la **résultante du torseur dynamique** est la dérivée par rapport au temps de la résultante du torseur cinétique :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}(S/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_R = \int_{\forall M\in S}\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m = M_S\vec{\Gamma}(C/\mathcal{R}).$$

Le moment cinétique du solide S s'écrit : $\vec{\sigma}(A,S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{\forall M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m$. Pour un système à masse conservative, le **moment dynamique** $\displaystyle\int_{\forall M\in S}\overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})\cdot \mathrm{d}m$, noté $\vec{\delta}(A,S/\mathcal{R})$, peut donc s'exprimer de la manière suivante :

$$\vec{\delta}(A,S/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\sigma(A,S/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + M_S\vec{V}(A/\mathcal{R})\wedge\vec{V}(C/\mathcal{R}).$$

Comme pour les autres quantités dépendant de la masse, le torseur dynamique peut être écrit de manière condensée au centre de masse :

$$\left\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R})\right\} = \left\{\begin{array}{c} M_S\vec{\Gamma}(C/\mathcal{R}) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\left(\underline{\underline{J}}(C,S)\cdot\vec{\Omega}(S/\mathcal{R})\right)}{\mathrm{d}t}\right|_R \end{array}\right\}_A$$

4.3 LIAISONS

Un mécanisme est un ensemble de solides reliés entre eux par des liaisons en vue d'obtenir un mouvement déterminé. L'objectif de ce paragraphe est d'en décrire quelques une et de les décrire mécaniquement. À partir d'un ensemble de liaisons simples, tous les mouvements seront alors possibles et les actions mutuelles entre solides pourront être totalement caractérisées.

4.3.1 Définitions

Une **liaison** est **parfaite** si le jeu de fonctionnement est nul (pas fondamental comme hypothèse) et si le contact se fait sans frottement.

Une liaison est parfaite si et seulement si la **puissance dissipée** par la liaison est nulle. La puissance mécanique développée par les inter-efforts de liaison entre un solide S_1 et un solideS_2, par rapport à un repère $\mathcal{R}$, est égale au comoment du torseur cinématique de S_2 sur S_1 et du torseur des actions mécaniques de S_1 sur S_2 (on anticipe sur la suite mais utilisons ce résultat). Les torseurs cinématiques des liaisons, en un point de contact$P$, sont de la forme et les torseurs des actions mécaniques, ou torseurs statiques, définis en un point P :

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S_2/S_1)\\ \vec{V}(P\in S_2/S_1)\end{array}\right\}_P \qquad \left\{\mathcal{A}(S_1\to S_2)\right\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{\mathcal{R}}(S_1\to S_2)\\ \vec{M}(P,S_1\to S_2)\end{array}\right\}_P$$

La puissance $\mathcal{P}$ des actions mutuelles de liaison entre un solide S_1 et un solide S_2 en P se définit ainsi comme suit :

$$\mathcal{P}(S_1\leftrightarrow S_2) = \left\{\mathcal{A}(S_1\to S_2)\right\}_P \cdot \left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_P \tag{4.2}$$

où « . » représente le comoment entre les torseurs cinématique et statique. Une étude plus approfondie de la puissance des inter-efforts et des actions mutuelles est proposée plus loin.

S'il s'agit d'une liaison parfaite l'équation 4.2 s'annule, garantissant une dissipation nulle de l'énergie :

$$\mathcal{P}(S_1\leftrightarrow S_2) = \left\{\mathcal{A}(S_1\to S_2)\right\}_P \cdot \left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\}_P = 0, \forall P\in S_1\cap S_2$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En remplaçant les différents torseurs par leur expression ci-dessus définie, cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) &= \left\{ \begin{matrix} \vec{\mathcal{R}}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}(P, S_1 \rightarrow S_2) \end{matrix} \right\}_P \cdot \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) \end{matrix} \right\}_P \\ &= \vec{\mathcal{R}}(S_1 \rightarrow S_2).\vec{V}(P \in S_2/S_1) + \vec{M}(P, S_1 \rightarrow S_2).\vec{\Omega}(S_2/S_1) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

À partir de cette expression et de la connaissance du torseur statique de la liaison parfaite considérée, on peut exprimer une équation sur le torseur cinématique, et réciproquement pour le torseur statique si l'on connaît le torseur cinématique.

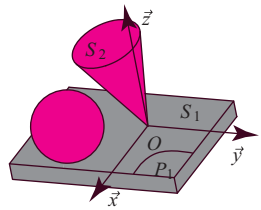


Figure 4.2 **Liaison ponctuelle représentée par le contact d'une sphère ou d'un cône sur un plan**

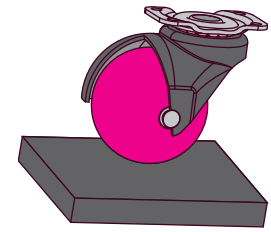


Figure 4.3 **Exemple de liaison ponctuelle : une roulette sphérique rigide sur le sol**

4.3.2 Liaison ponctuelle

La liaison ponctuelle entre deux solides S_1 et S_2 est représentée par un point. Elle suppose dans la pratique des solides indéformables du type cône sur un plan ou toute surface de forme quelconque en appui sur une autre surface en un point, comme une sphère en appui sur un plan. Le contact est supposé permanent en O, la vitesse ne peut donc pas avoir de composante selon l'axe $(O, \vec{z})$.

Le **torseur cinématique** de cette liaison s'écrit en fonction des mouvements possibles du solide S_2 par rapport à S_1 (terme de gauche). On en déduit donc la forme du **torseur statique** et on retrouve bien ce que nous donne l'intuition :

$$\left\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\right\} = \left\{ \begin{matrix} \Omega_x \vec{x} + \Omega_y \vec{y} + \Omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + 0\vec{z} \end{matrix} \right\}_O \qquad \left\{\mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\right\} = \left\{ \begin{matrix} 0\vec{x} + 0\vec{y} + Z\vec{z} \\ 0\vec{x} + 0\vec{y} + 0\vec{z} \end{matrix} \right\}_O$$

4.4 Statique des solides

4.4.1 Principe fondamental de la statique

Un solide ou un ensemble de solides est en **équilibre** par rapport à un référentiel du mouvement $\mathcal{R}$ si le vecteur position de chaque point du ou des solides est indépendant du temps dans ce référentiel $\mathcal{R}$ (a vitesse de chaque point est donc nulle).

a) Énoncé du principe

Il existe un référentiel du mouvement galiléen $\mathcal{R}_g$ tel que, pour tout sous système s (un solide S particulier, un ensemble de solides ou une partie quelconque de solide) de l'ensemble de solides S_i *en équilibre* par rapport à $\mathcal{R}_g$, le torseur des actions extérieures appliqué à ce sous système est nul :

$$\left\{\mathcal{A}(ext \rightarrow s)\right\} = \{O\} \quad \forall s \in S_i$$

avec $\{O\}$ le torseur nul. La notion de référentiel galiléen dépend de l'objet d'étude. Sur Terre, l'étude d'un mécanisme de petite dimension par rapport à la Terre se fait dans le référentiel terrestre qui pourra être considéré comme galiléen. Le référentiel terrestre correspond à un repère local attaché à la Terre. Par contre, pour l'étude d'une fusée, allant de la Terre à la Lune, le référentiel terrestre n'est pas galiléen (i.e. le principe fondamental de la statique ne s'applique pas). En revanche le référentiel de Copernic pourra être considéré comme galiléen. Le repère de Copernic est attaché au centre de masse du système solaire et son orientation est fixe par rapport aux étoiles.

b) Théorème de la résultante et théorème du moment résultant

Du principe fondamental de la statique, découlent deux théorèmes :

Théorème de la résultante

La résultante des actions mécaniques extérieures à tout sous système s de l'ensemble de solides S_i en équilibre par rapport à un repère galiléen est nulle :

$$\vec{F}(ext \rightarrow s) = \vec{0} \quad \forall s \in S_i.$$

Théorème du moment

Le moment des actions mécaniques extérieures à un sous système s de l'ensemble de solides S_i en équilibre par rapport à un repère galiléen est nul quel que soit le point A d'expression de ce moment :

$$\vec{M}(A, \vec{F}(ext \rightarrow s)) = \vec{0} \quad \forall s \in S_i \quad \forall A.$$

Considérons un système S, constitué de deux sous parties S_1 et S_2 en interaction, en équilibre par rapport à un repère galiléen. Le torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 est opposé au torseur des actions exercées par S_2 sur S_1 :

$$\left\{\mathcal{A}(S_1 \rightarrow S_2)\right\}_M = -\left\{\mathcal{A}(S_2 \rightarrow S_1)\right\}_M, \forall M.$$

C'est le **théorème des actions réciproques**.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4.5 DYNAMIQUE

4.5.1 Torseur dynamique

a) Définition

Torseur dynamique

Le torseur dynamique $\{\mathcal{D}\}$, ou torseur des quantités d'accélération d'un système matériel S en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$, est défini de la façon suivante, en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R})\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \displaystyle\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m \\ \\ \vec{\delta}(A \in S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m \end{array} \right\} \tag{4.4}$$

Dans le torseur dynamique :

le vecteur $\displaystyle\int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R})\mathrm{d}m$ représente la résultante des accélérations et s'obtient par sommation ou intégration sur le solide S du vecteur des quantités d'accélération élémentaires $\vec{\Gamma}(M \in S/\mathcal{R})\mathrm{d}m$. Unité : newton (N) ;

le moment dynamique par rapport au point A est la somme ou intégrale des moments, par rapport au point A, des quantités d'accélération de tous les points de S. Unité : newton mètre (N · m).

4.5.2 Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique

Les torseurs cinétique et dynamique sont construits selon le même principe, le torseur cinétique à partir des vitesses et le torseur dynamique à partir des accélérations. En conséquence, il paraît logique de rechercher des relations de dérivation entre ces deux torseurs. Lors de l'étude du torseur cinétique, nous avons défini la résultante cinétique par : $\vec{p}(S/\mathcal{R}) = m\vec{V}(\mathrm{C} \in S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{M\in S} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m$. En dérivant chaque membre de l'égalité précédente par rapport au temps dans le repère R, et en tenant compte de la propriété issue de la conservation de la masse on obtient :

Résultante dynamique

$$m\vec{\Gamma}(C \in S/\mathcal{R}) = \int_{M\in S} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m \tag{4.5}$$

La résultante dynamique apparaît ainsi comme la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique, ce qui conduit à l'expression suivante du torseur dynamique :

$$\left\{\mathcal{D}(s/\mathcal{R})\right\} = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{\Gamma}(C \in S/\mathcal{R}) \\ \vec{\delta}(A \in S/\mathcal{R}) = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m \end{array} \right\}_A \qquad (4.6)$$

Le moment cinétique s'écrit, en un point A quelconque :

$$\vec{\sigma}(A \in S/\mathcal{R}) = \int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m.$$

Par dérivation de cette égalité on aboutit à la relation :

$$\vec{\delta}(A \in S/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{\sigma}(A \in S/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_R + m \cdot \vec{V}(A \in \mathcal{R}) \wedge \vec{V}(\mathrm{C} \in S/\mathcal{R}) \qquad (4.7)$$

4.5.3 Principe fondamental de la dynamique

Nous rappelons que nous nous intéressons à des systèmes n'échangeant pas de matière avec l'extérieur. De tels systèmes sont dits **fermés**.

Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un repère $\mathcal{R}_g$ appelé repère galiléen et au moins une chronologie galiléenne tels que que pour tout sous-ensemble matériel s d'un ensemble S, le torseur des actions extérieures à s (noté $\{\mathcal{A}(\overline{s} \to s)\}$) est égal au torseur dynamique de s par rapport au repère $\mathcal{R}_g$ et ceci à tout instant t.

$$\{\mathcal{D}(s/\mathcal{R}_g)\}_A = \{\mathcal{A}(\overline{s} \to s)\} \quad \forall s \cup S.$$

On peut déduire du PFS les deux **théorèmes de la résultante dynamique** et du **moment dynamique** obtenus à partir des deux composantes des torseurs.

Pour deux systèmes fermés S_1 et S_2, nous avons dans le cas de la statique démontré que le torseur des actions exercées par S_2 sur S_1 est opposé au torseur des actions exercées par S_1 sur S_2. **Cette propriété reste vérifiée en dynamique**.

4.5.4 Principe fondamental en repère non galiléen

Dans la pratique lorsque nous devons nous intéresser au mouvement de mécanismes (mouvement de solides par rapport à d'autres solides), il est parfois plus avantageux de se placer dans un repère non galiléen. Considérons un repère quelconque $\mathcal{R}$, en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_g$. Le PFD appliqué à un système fermé s (qui peut être un solide unique ou un ensemble de solides), par rapport à $\mathcal{R}_g$, s'écrit : $\{\mathcal{D}(s/\mathcal{R}_g)\} = \{\mathcal{A}(\overline{s} \to s)\}$. L'accélération absolue $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_g)$ peut se décomposer, en faisant intervenir le repère relatif R, de la façon suivante :

$$\vec{\Gamma}(M \in s/\mathcal{R}_g) = \vec{\Gamma}(M \in s/\mathcal{R}) + \vec{\Gamma}(M \in \mathcal{R}/\mathcal{R}_g) + 2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(M \in s/\mathcal{R}).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les torseurs dynamiques d'inertie d'entraînement $\mathcal{D}_{ie}$ et de Coriolis $\mathcal{D}_{ic}$ peuvent donc être construits à partir des accélérations d'entraînement $\vec{\Gamma}(M \in s/\mathcal{R})$ et de Coriolis $2\vec{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_g) \wedge \vec{V}(M \in s/\mathcal{R})$, et le PFD (relation) est écrit en tenant compte des définitions précédentes. Ceci nous conduit à l'écriture du PFD en repère non galiléen.

Principe fondamental en repère non galiléen

Le torseur dynamique du système fermé s par rapport à $\mathcal{R}$ est égal à la somme du torseur des actions extérieures à s, du torseur dynamique d'entraînement D_{ie} et du torseur dynamique de Coriolis $\mathcal{D}_{ic}$:

$$\{\mathcal{D}(s/\mathcal{R})\} = \{\mathcal{A}(\overline{s} \to s)\} - \{\mathcal{D}_{ie}(\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)\} - \{\mathcal{D}_{ic}(s/\mathcal{R})\} \qquad (4.8)$$

Ainsi, le PFD peut être employé en repère non galiléen, mais il ne faut pas oublier d'ajouter au torseur des efforts extérieurs les torseurs qui proviennent des accélérations d'entraînement et de Coriolis. Toutefois, il faut bien comprendre que les « efforts » d'entraînement et de Coriolis ne correspondent pas à des efforts physiques extérieurs au système étudié, mais traduisent seulement le changement de référentiel. Pour compenser le passage d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen, il faut pour satisfaire au PFD (valable en toute rigueur dans un référentiel galiléen), tenir compte des effets d'inertie et d'entraînement de l'accélération.

4.5.5 Théorèmes énergétiques

a) Généralités

Puissance

La puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ du système de forces de résultante $\vec{F}$ associée à la densité $\vec{f}$ s'exerçant sur un système s (actions de contact d'un solide sur s, action de la gravité sur s) est donnée par :

$$\mathcal{P}(\overline{s} \to s/\mathcal{R}) = \int_{M \in s} \vec{V}(M/\mathcal{R}) \cdot \vec{f}(M) \cdot \mathrm{d}m \qquad (4.9)$$

Unité : dans le système SI (Système International), l'unité est le Watt (W). $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-3}$.

4.5.6 Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide

Reprenons l'expression (4.9) de la puissance $\mathcal{P}$ en introduisant pour $\vec{V}(M \in s/\mathcal{R})$ la relation de champ de torseur dans un solide rigide : $\mathcal{P}(s/\mathcal{R}) = \int_s \vec{f}(M) \cdot \vec{V}(M \in s/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m$. On obtient, en notant respectivement $\vec{F}$ et $\vec{M}$ la résultante et le moment des actions exercées par l'extérieur sur le solide s :

$$\mathcal{P}(s/\mathcal{R}) = \vec{V}(A \in \mathcal{R}) \cdot \vec{F} + \vec{\Omega}(s/\mathcal{R}) \cdot \vec{M}(A, \vec{F})$$

qui représente le co-moment du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques. D'après ce résultat, on peut énoncer le théorème suivant :

Puissance pour des solides

La puissance des actions mécaniques exercées sur un solide indéformable s en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$ est égale au co-moment du torseur cinématique et du torseur des actions mécaniques.

$$\mathcal{P}(\overline{s} \to s/\mathcal{R}) = \{\mathcal{V}(s/\mathcal{R})\} \cdot \{\mathcal{A}(\overline{s} \to s)\} \tag{4.10}$$

a) Puissance des actions mutuelles entre deux solides

Considérons deux solides S_1 et S_2 en interaction, et en mouvement l'un par rapport à l'autre (et par rapport à un repère $\mathcal{R}$). S_1 et S_2 sont soumis à des actions mécaniques caractérisées par un des torseurs de liaisons présentés précédemment. Compte tenu de la définition de la puissance des actions mécaniques nous pouvons écrire, pour le solide S_1 : $\mathcal{P}(S_2 \to S_1/\mathcal{R}) = \{\mathcal{V}(S_1/\mathcal{R})\} \cdot \{\mathcal{A}(S_2 \to S_1)\}$. Pour le solide S_2, en tenant compte également de la composition des torseurs cinématiques : $\mathcal{P}(S_1 \to S_2/\mathcal{R}) = \{\mathcal{V}(S_2/\mathcal{R})\} \cdot \{\mathcal{A}(S_1 \to S_2\} = \big(\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} + \{\mathcal{V}(S_1/\mathcal{R})\}\big) \cdot \{\mathcal{A}(S_1 \to S_2)\}$. Si nous ajoutons terme à terme les deux relations précédentes nous obtenons, en tenant compte du **théorème des actions réciproques** :

$$\mathcal{P}(S_1 \to S_2/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(S_2 \to S_1/\mathcal{R}) = \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} \cdot \{\mathcal{A}(S_1 \to S_2)\}$$

Nous venons de montrer le résultat suivant :

Puissance d'interaction entre solides

La somme de la puissance des actions développées par S_2 sur S_1 et par S_1 sur S_2, qui définit la puissance des actions mutuelles entre ces deux solides, est indépendante du repère choisi pour la calculer, et vaut :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} \cdot \{\mathcal{A}(S_1 \to S_2)\}$$

4.5.7 Travail

TRAVAIL

Le travail élémentaire δW s'obtient comme le produit de la puissance instantanée élémentaire $\mathcal{P}(t)$ par la durée élémentaire dt, il est noté $\delta W = \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$. Le travail s'obtient par intégration par rapport au temps. Il dépend a priori du référentiel dans lequel on le calcule ainsi que de la trajectoire de tous les points matériels du système. **Unité** : dans le système SI, l'unité du travail est le joule (J). $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Énergie potentielle et densité massique d'énergie potentielle

Dans de nombreux cas, la densité massique de forces $\vec{f}(M,t)$ peut s'exprimer sous la forme du gradient (dérivée spatiale) d'une fonction scalaire.

Énergie potentielle

Soit $\vec{f}(M,t)$ une densité massique de forces. S'il existe une fonction $e(M,t)$ telle que :

$$\vec{f}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, e(M,t) \tag{4.11}$$

on dit alors que $\vec{f}(M,t)$ dérive de la densité d'énergie potentielle $e(M,t)$.

Remarque

1. La variation élémentaire $de(M,t)$ de e entre les points M et M' (infiniment proches) à l'instant t est reliée au gradient par la relation : $de(M,t) = \overrightarrow{\text{grad}}\, e(M,t).d\overrightarrow{OM}$ où $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

2. Dans le cas général $\vec{f}$ et e dépendent du temps. Dans le cas contraire, le **champ de forces** est dit **stationnaire**.

Dans ce dernier cas d'un champ de forces stationnaire, on peut calculer le travail élémentaire δW associé aux forces $\vec{f}$:

$$\delta W = \left(\int_M \vec{f}(M)\cdot\vec{V}(M)\cdot \mathrm{d}m\right)\mathrm{d}t = -\left(\int (\overrightarrow{\text{grad}}\, e)\cdot\vec{V}(M)\cdot \mathrm{d}m\right)\mathrm{d}t$$

Sous réserve de pouvoir permuter les intégrations spatiale et temporelle, on obtient :

$$\begin{aligned}\delta W &= -\int \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, e(M)\cdot\vec{V}(M)\mathrm{d}t\right)\cdot \mathrm{d}m \\ &= -\int \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, e(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right)\cdot \mathrm{d}m = -\int \mathrm{d}e(M)\cdot \mathrm{d}m\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\delta W = -\int_M e(t+\mathrm{d}t)\cdot \mathrm{d}m + \int_M e(t)\cdot \mathrm{d}m = -\left(E_p(t+\mathrm{d}t) - E_p(t)\right) = -\mathrm{d}E_p.$$

Dans l'équation précédente, E_p désigne **l'énergie potentielle du système** associée aux forces de densité massique $\vec{f}$. E_p ne dépend pas explicitement du temps. Elle reste dépendante de la position moyenne du système, c'est-à-dire de la position de son centre de masse.

Remarque

On note δW pour signifier que dans le cas général il n'existe pas d'énergie potentielle. Si au contraire, il existe une telle énergie potentielle, alors δW est une différentielle

totale de la fonction $-E_p$, et W ne dépend pas de toute l'histoire du mouvement, mais seulement de l'état du système aux instants initial et final.

b) Exemple : énergie potentielle de la pesanteur

On considère le champ de pesanteur $\vec{g}$ (constant sur le domaine d'intégration) et un repère $\mathcal{R}$ centré à la surface de la Terre (pour lequel le vecteur unitaire $\vec{z}$ est vertical ascendant). On cherche à calculer l'énergie potentielle des actions de la pesanteur exercées sur un solide s dont le centre de masse est situé à l'altitude z_g. La puissance associée à la densité massique de forces $\vec{g}$ est donnée par :

$$\mathcal{P}(\vec{g} \to s/\mathcal{R}) = \int_{M \in s} \vec{g} \cdot \vec{V}(M \in s/\mathcal{R}) \cdot \mathrm{d}m.$$

En utilisant la définition du centre de masse et le fait que la pesanteur est constante pour l'intégration :

$$\mathcal{P}(\vec{g} \to s/\mathcal{R}) = \vec{g} \cdot m\vec{V}(\mathrm{C} \in s/\mathcal{R}) = -mg\vec{z} \cdot \vec{V}(\mathrm{C} \in S/\mathcal{R}).$$

Par définition du vecteur vitesse, et le vecteur $\vec{z}$ étant constant, on obtient :

$$\mathcal{P}(\vec{g} \to /\mathcal{R}) = -mg\vec{z} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}|_{\mathcal{R}} = -mg\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{OC} \cdot \vec{z})}{\mathrm{d}t}|_{\mathcal{R}} = -mg\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t}$$

mgz_g + cste représente l'énergie potentielle de la pesanteur $E_{p\,pes}$, qui est définie à une constante additive près C :

$$W(\vec{g} \to s/\mathcal{R}) = -E_{p\,\vec{g}} = -mgz_g + \mathrm{cste}.$$

4.5.8 Théorème de l'énergie cinétique

Ce théorème constitue l'interprétation énergétique du PFD.

a) Application à un solide

Rappelons que le PFD appliqué à un solide S de masse m dans son mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ s'écrit :

$$\{\mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g)\}_A = \{\mathcal{A}(\overline{S} \to S)\}_A \; \forall A.$$

Nous pouvons multiplier (co-moment) chaque membre de l'égalité précédente par le torseur cinématique $\{\mathcal{V}\}$ de S par rapport à $\mathcal{R}_g$.

$$\{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g)\}_A \cdot \{\mathcal{D}(S/\mathcal{R}_g)\}_A = \{\mathcal{V}(S/\mathcal{R}_g)\}_A \cdot \{\mathcal{A}(\overline{S} \to S)\}_A$$

Le membre de droite de l'équation ci-dessus représente la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S, notée $\mathcal{P}(\overline{S} \to S/\mathcal{R}_g)$.

Nous pouvons, après quelques calculs, montrer que nous obtenons une nouvelle expression pour le membre de gauche qui conduit à : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(S/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\overline{S} \to S/\mathcal{R}_g)$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Nous venons d'établir le Théorème de l'énergie cinétique, qui s'énonce de la façon suivante :

Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S dans son mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_g$, est égale à la puissance galiléenne des actions extérieures exercées sur S :

$$\frac{d}{dt}T(S/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\overline{S} \rightarrow S/\mathcal{R}_g)$$

b) Application à un ensemble de solides

Considérons un ensemble s de n solides S_i en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathcal{R}_g$. Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour chacun des solides $(i = 1, n)$: $\frac{d}{dt}T(S_i/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\overline{S_i} \rightarrow s_i/\mathcal{R}_g)$. On ajoute membre à membre les équations obtenues pour trouver : $\frac{d}{dt}T(s/\mathcal{R}_g) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}(\overline{S_i} \rightarrow S_i/\mathcal{R}_g)$. Le terme de gauche exprime l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble des solides S_i, tandis que le terme de droite exprime la somme des puissances galiléennes des efforts extérieurs appliqués à chaque solide. L'écriture détaillée du dernier terme montre qu'il se décompose en deux parties : la puissance galiléenne des efforts extérieurs à s appliqués sur s, et la puissance des inter-efforts entre solides. Ceci s'écrit :

$$\frac{d}{dt}T(s/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}(\overline{s} \rightarrow s/\mathcal{R}_g) + \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j)$$

et conduit à l'énoncé du théorème suivant :

Théorème de l'énergie cinétique pour *n* solides

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble s de solides S_i dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_g$ est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions extérieures exercées sur lui (notée $\mathcal{P}_{ext}$) et de la puissance des inter- efforts entre les solides S_i (notée $\mathcal{P}_{\text{int}}$) :

$$\frac{d}{dt}T(s/\mathcal{R}_g) = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

Remarques

1. À la différence du PFD, les actions intérieures interviennent ici par leur puissance.
2. Dans le cas de liaisons parfaites, la puissance des inter-efforts de liaison est nulle.

3. Le théorème de l'énergie cinétique ne fournit pas d'équation indépendante de celles obtenues par le PFD. Par contre il conduit souvent aux équations du mouvement de manière plus immédiate.

4.5.9 Intégrale première de l'énergie cinétique

a) Énergie mécanique d'un système de solides

Intégrale première

Supposons dans cette partie que certains des efforts extérieurs (tels que l'action de la gravité) dérivent d'un potentiel $E_{\mathrm{p}\,ext}$ et que les autres n'en dérivent pas. Ceci s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{ext}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\ ext}} + \mathcal{P}'_{\mathrm{ext}}.$$

Dans la relation ci-dessus, $E_{\mathrm{p\ ext}}$ représente l'énergie potentielle des efforts extérieurs, tandis que $\mathcal{P}'_{\mathrm{ext}}$ représente la puissance dissipée par les actions extérieures. Le théorème de l'énergie cinétique fait apparaître la puissance des efforts intérieurs $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}$ (qui dans le cas de solides indéformables, se limite à la puissance des inter-efforts). Supposons de la même manière la décomposition suivante pour $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}$:

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\,int}} + \mathcal{P}'_{\mathrm{int}}.$$

Remarque

Il convient de souligner que la notion d'énergie potentielle E_{p} est associée à une grandeur ne dépendant que des coordonnées d'espace mais pas explicitement du temps. S'il en était autrement, le travail sur une trajectoire fermée ne serait pas nul, puisque on ne peut revenir au même point au même instant.

Compte tenu des deux équations précédentes et de l'énoncé du théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(s/\mathcal{R}_{\mathrm{g}}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\ ext}} + \mathcal{P}'_{\mathrm{ext}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\,int}} + \mathcal{P}'_{\mathrm{int}}$$

soit encore :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(s/\mathcal{R}_{\mathrm{g}}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\ ext}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{\mathrm{p\,int}} = \mathcal{P}'_{\mathrm{ext}} + \mathcal{P}'_{\mathrm{int}}.$$

La quantité $T(s/\mathcal{R}_{\mathrm{g}}) + E_{\mathrm{p\ ext}} + E_{p\,\mathrm{int}}$ représente l'énergie mécanique E_{m} du système s.

Remarque

Dans le cas particulier de forces conservatives (dérivant d'un potentiel : liaisons parfaites, actions de la pesanteur), les termes $\mathcal{P}'_{\mathrm{ext}}$ et $\mathcal{P}'_{\mathrm{int}}$ sont nuls, et on peut donc écrire que l'énergie mécanique du système se conserve. Cette notion est à rapprocher de la notion d'énergie interne employée en thermodynamique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Intégrale première

Pour un système matériel dont la configuration est caractérisée par un certain nombre de paramètres$(q_1, q_2 ... q_n)$, on appelle **équation du mouvement** toute relation entre les paramètres de position et leurs dérivées par rapport au temps.

Remarque

L'équation de mouvement ne contient en particulier aucune inconnue de liaison, mais peut par contre faire intervenir l'expression de forces connues. Les forces connues désignent ici les forces dont on connaît l'expression en fonction des données du problème, des paramètres de position, de leurs dérivées par rapport au temps et du temps. C'est le cas par exemple de l'action de la pesanteur.

Si on note q_i la dérivée première par rapport au temps du paramètre de position q_i $(i = 1,2, ...n)$ et t le temps, on appelle **intégrale première du mouvement** d'un système matériel, une fonction des q_i, q_i et t qui reste constante au cours du mouvement. La relation obtenue est du type :

$$f(q_1, q_2, ..., q_n, q_1, q_2, ..., q_n, t) = \text{cste},$$

pour tout mouvement du système étudié.

À retenir

- Le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ est la dérivée dans le repère $\mathcal{R}$ du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R .$$

- **Champ des vitesses dans un solide.** Soient A et B deux points d'un solide S indéformable et $\vec{\Omega}(S/R)$ le vecteur vitesse de rotation. On a la relation :

$$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB} \quad \forall A, \forall B \in S.$$

- **Torseur cinématique** (ou des vitesses). On dit que le champ des vitesses d'un solide indéformable S dans son mouvement par rapport à un repère R est représenté par un torseur appelé torseur cinématique et noté ($\mathcal{V}$ comme vitesse) :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}_A .$$

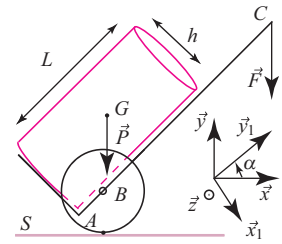
Le champ des accélérations n'est pas un champ de torseur.

- **Composition des accélérations.** L'expression de composition est plus complexe que pour les vitesses et fait apparaître un terme d'accélération dit de Coriolis lié à la vitesse relative du solide dans le repère entraîné.

Les solutions sont regroupées p. 598.

4.1 Diable

Le diable est un système qui permet le transport de charges ($\vec{P} = -Mg\vec{y}$) importantes et ceci à moindre effort $\vec{F}$ de la part du manutentionnaire. Un diable constitué d'un support de charge et d'une roue de rayon r est schématisé en vue de côté. Deux repères lui sont associés. Un premier repère $R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la base. Un second, $R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ lié au diable, repère son orientation par rapport à $\mathcal{R}$ tel que $\alpha = (\vec{x}, \vec{y}_1)$. On note $\overrightarrow{AB} = a\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BC} = b\vec{y}_1$. Dans la suite du problème, le poids du diable est négligé devant celui de la charge transportée.



a) Dans un repère que vous choisirez, calculez le torseur résultant des efforts extérieurs appliqués au diable.

b) Pourquoi met-on en pratique le pied pour bloquer les roues ?

c) Calculez l'effort $\vec{F}$ et la réaction au sol en fonction des données géométriques.

4.2 Centrifugeuse de laboratoire

On s'intéresse à une centrifugeuse de laboratoire présentée ci-dessous (Fig 4.4), composée d'un bâti S_0, d'un bras S_1 et d'une éprouvette S_2 contenant deux liquides de masses volumiques différentes. Sous l'effet centrifuge dû à la rotation du bras S_1 autour de l'axe $(O,\vec{x})$, l'éprouvette S_2 s'incline pour se mettre pratiquement dans l'axe du bras. De fait, le liquide dont la masse volumique est la plus grande est rejeté au fond de l'éprouvette.

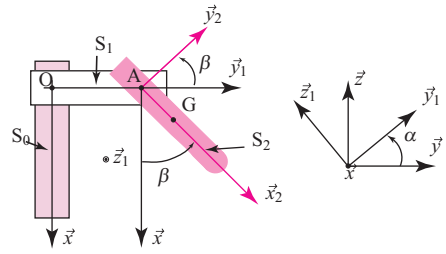


Figure 4.4 **Centrifugeuse de laboratoire**

Paramétrage du système : R $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié à S_0 ; S_1 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec S_0. Le repère R_1 (O, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1$) est un repère lié à S_1, on note $\alpha = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ l'angle mesuré autour de $\vec{x}$; S_2 est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_1)$ avec S_1 ; Le repère R_2 (A, $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$, $\vec{z}_2$) est un repère lié à S_2, on note $\beta = (\vec{x}, \vec{x}_2)$ l'angle

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

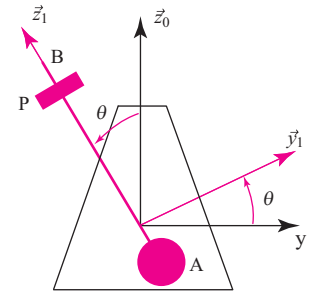
mesuré autour de $\vec{z}_1$. On donne $\overrightarrow{OA} = a\,\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{AG} = b\,\vec{x}_2$, où a et b sont des constantes positives exprimées en mètres.

a) Calculer la vitesse de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0 en O et en A.

b) Calculer la vitesse de S_2 dans son mouvement par rapport à S_0 en A et en G, puis dans son mouvement par rapport à S_1 en A et en G.

4.3 Métronome

D'après la schématisation proposée, le système est modélisé par :



Un socle S_0 auquel est attaché le repère orthonormé direct $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, supposé galiléen, l'axe $(O, \vec{z}_0)$ étant vertical ascendant.

Un solide S_1 auquel est attaché le repère orthonormé direct $R_1 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. On introduit l'angle $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$. Ce solide est constitué par :

- une tige (AB) de longueur L, de masse négligeable, en liaison pivot parfait d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le socle S_0 ;
- un disque D homogène, de rayon R, de masse M, de centre d'inertie A, fixé rigidement à la tige en A ;
- un curseur Cr schématisé par une plaque rectangulaire homogène, située dans le plan $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, de masse m, de centre d'inertie P, et lié à la tige pendant le fonctionnement du métronome.

On pose $\overrightarrow{AB} = L \cdot \vec{z}_1$, $\overrightarrow{OA} = -d \cdot \vec{z}_1$, $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{z}_1$. On admet que les matrices d'inertie du curseur Cr et du disque D, exprimées dans le repère R_1, s'écrivent respectivement :

$$[J(P, Cr)] = \begin{pmatrix} A_{Cr} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Cr} & 0 \\ 0 & 0 & B_{Cr} \end{pmatrix}$$

$$[J(A, D)] = \begin{pmatrix} A_D & 0 & 0 \\ 0 & C_D & 0 \\ 0 & 0 & C_D \end{pmatrix}$$

4.4 Analyses cinématique et cinétique

a) Déterminer le torseur cinématique en P de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0.

b) Déterminer le torseur cinématique A de S_1 dans son mouvement par rapport à S_0.

c) Écrire le torseur cinétique de Cr dans son mouvement par rapport à S_0 au point P.

d) Écrire le torseur cinétique du disque D dans son mouvement par rapport à S_0 en A.

4.5 Théorème de l'énergie cinétique

a) Déterminer l'énergie cinétique du solide S_1 dans son mouvement par rapport à S_0.

b) Déterminer la puissance des efforts extérieurs appliqués au solide S_1.

c) Par application du théorème de l'énergie cinétique au solide S_1 dans son mouvement par rapport à S_0, retrouver l'équation du mouvement.

FLUIDES PARFAITS

5

PRÉALABLES

- Fonctions vectorielles à arguments vectoriels. Dérivées partielles.
- Divergence, gradient, rotationnel et laplacien d'un champ scalaire et vectoriel.
- Intégrales de surface, de volume, flux d'un vecteur, formules du gradient et de la divergence.
- Pression, équation d'état d'un fluide.
- Principe fondamental de la dynamique.

MOTS CLÉS

- Statique, hydrostatique, forces de surface et de volume. Pression. Poussée d'Archimède.
- Cinématique, représentations du mouvement, trajectoires, lignes et fonction de courant, potentiel des vitesses. Dérivée particulaire, gradient de vitesse, accélération.
- Dynamique, masse, quantité de mouvement. Énergie cinétique, potentielle, mécanique. Fluide incompressible, barotrope. Euler, Bernoulli. Résultante des forces.

OBJECTIFS

- Identifier une force de volume et une force de surface.
- Établir les formes globale et locale de l'équation fondamentale de la statique des fluides.
- Introduire les représentations de Lagrange et d'Euler.
- Définir les fonctionnelles du champ de vitesse les plus courantes.
- Présenter l'opérateur de dérivation particulaire d'une fonction scalaire et d'une intégrale de volume.
- Formuler les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement.
- Définir l'énergie mécanique et présenter les théorèmes de Bernoulli.
- Appliquer le théorème des quantités de mouvement au calcul de la résultante globale des efforts exercés par un fluide sur un corps immergé.

Conseils

La mécanique des fluides est une discipline qui utilise de nombreux objets et théorèmes mathématiques. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Noirot, Parisot et Brouillet chez le même éditeur qui présente toutes les notions nécessaires. Dans ce qui suit, il y est fait référence par les initiales « NPB ».

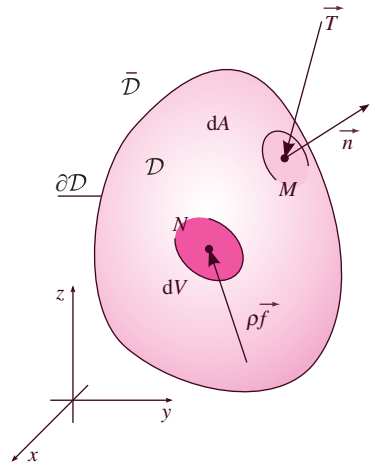
5.1 STATIQUE

Un fluide est en **équilibre statique** si, dans un repère absolu ou relatif, son champ de vitesse est uniformément nul et le reste.

5.1.1 Forces de volume et de surface

Isolons par la pensée un domaine fluide $\mathcal{D}$ (élément de volume $\mathrm{d}V$) limité par sa frontière $\partial\mathcal{D}$ (élément de surface $\mathrm{d}A$) qui peut être tracée au sein fluide ou suivre une paroi ou une interface (frontière entre deux fluides non miscibles). Ce domaine est soumis à deux types de forces :

$$\begin{aligned} &\text{Forces de volume :}\ \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{v} = \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V \ \Rightarrow\ \vec{F}_\mathrm{v} = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V. \\ &\text{Forces de surface :}\ \mathrm{d}\vec{F}_\mathrm{s} = -p\vec{n}\,\mathrm{d}A \Rightarrow\ \vec{F}_\mathrm{s} = \int_{\partial\mathcal{D}} (-p\vec{n})\mathrm{d}A. \end{aligned} \tag{5.1}$$



La quantité $\rho\vec{f}$ est une densité de force volumique alors que $\vec{f} = f_i\vec{e}_i$ est une densité de force massique (homogène à une accélération) ; dans le cas du champ de la pesanteur, $\vec{f}$ s'identifie à $\vec{\mathrm{g}}$ et $\vec{F}_\mathrm{v}$ au poids de $\mathcal{D}$. La quantité p est la pression statique du fluide, celle qui figure dans l'équation d'état thermodynamique (cf. chap *Systèmes thermodynamiques*, § 1.3) La quantité $(-p\vec{n})$ est une densité de force surfacique. Le vecteur $\vec{n}$ est la normale extérieure à $\partial\mathcal{D}$ (bord de $\mathcal{D}$) qui est une surface fermée.

5.1.2 Statique des fluides

Considérons un domaine fluide $\mathcal{S}$ en équilibre statique et isolons le sous-domaine $\mathcal{D}$ (Fig. 5.1). Quel que soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ est en équilibre et, en vertu du principe fondamental de la dynamique, la somme des forces extérieures qui agissent sur lui est nulle. Alors,

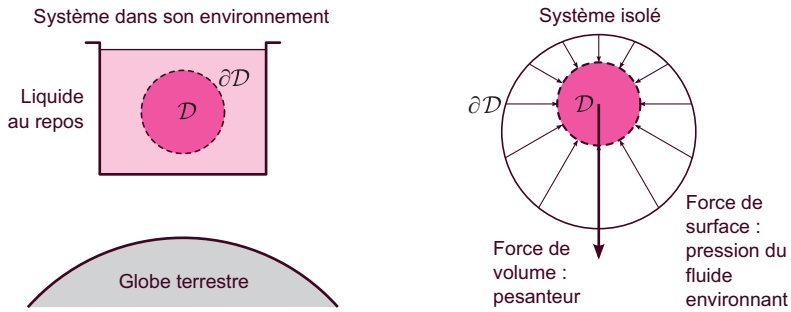


Figure 5.1 **Forces équivalentes à l'action du milieu extérieur sur un système isolé.**

en appliquant la formule du gradient et le lemme fondamental (*cf. infra*), il vient :

Voir NPB, § 5-6.2.4

$$\forall \mathcal{D} \subset \mathcal{S}, \quad \vec{F}_v + \vec{F}_s = \int_{\mathcal{D}} (\rho \vec{f} - \vec{\nabla} p) \mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p = 0, \qquad (5.2)$$

où la notation « $\vec{\nabla}$ » est un raccourci pour « $\overrightarrow{\text{grad}}$ ». Nous obtenons ainsi la **Loi fondamentale de la statique** :

Voir NPB, § 5-3

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{f} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i .$$

Lemme fondamental de la physique des milieux continus

Soit $f(M)$ une fonction définie et continue dans le domaine $\mathcal{S}$ uni, bi ou tridimensionnel. Si l'intégrale de f sur n'importe quel sous-domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ est nulle, la fonction f est identiquement nulle dans $\mathcal{S}$.

Dans le cas de la pesanteur : $\vec{f} = \vec{g} = -g\vec{e}_Z$ et l'expression (5.2) s'écrit en projection dans le repère cartésien $\{O, X, Y, Z\}$ où Z est la verticale ascendante :

$$\partial p/\partial X = 0, \quad \partial p/\partial Y = 0 \quad \text{et} \quad \partial p/\partial Z = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = p(Z). \qquad (5.3)$$

Les surfaces isobares sont donc des plans horizontaux. Si ρ et g sont uniformes, l'équation 5.3 s'intègre pour donner la **loi fondamentale de l'hydrostatique** :

$$p_g = p + \rho g Z = \text{cste}. \qquad (5.4)$$

Définition

La constante p_g se nomme pression réduite (regroupe deux termes) ou *pression piézométrique* (du grec *piezein,* presser) ou encore *pression motrice* (force motrice d'un écoulement en conduit).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

La pression qui règne dans un fluide au repos est indépendante de la forme de l'enceinte qui le contient.

Exemple de l'eau. Masse volumique $\rho = 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$; accélération de la pesanteur $\text{g} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Alors, $\text{d}p/\text{d}z = -10^4\ \text{Pa}\cdot\text{m}^{-1}$ et la pression augmente de 1 bar pour une profondeur de 10 m.

La pression p_g se détermine par les **conditions aux frontières** :

$$p_1 = p_2 \quad \text{à l'interface entre deux fluides au repos.}$$

SURFACE LIBRE

La surface libre d'un liquide est soumise à la pression atmosphérique p_a. Alors, dans ce liquide : $p_\text{g} = p(Z) + \rho\text{g}Z = p_\text{a} + \rho\text{g}Z_\text{a}$ où Z_a est l'altitude de la surface libre. Si $Z_\text{a} = 0$, alors $p_\text{g} = p_\text{a}$ et $p(Z) = p_\text{a} - \rho\text{g}Z$: la pression p augmente quand Z diminue.

5.1.3 Théorème d'Archimède

Lorsqu'un corps $\mathcal{C}$ solide, indéformable, de volume $V_\mathcal{C}$ est immergé dans un fluide au repos, la résultante des forces extérieures de surface (5.1) ne dépend que de la pression du fluide. Elle reste inchangée si, par la pensée, on remplace $\mathcal{C}$ par le fluide lui même et, $\vec{N}$ étant la normale extérieure à $\mathcal{C}$, on peut donc écrire en appliquant la formule du gradient et la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$\int_{\partial\mathcal{C}} (-p\vec{N})\text{d}A = -\int_\mathcal{C} \rho\,\vec{\text{g}}\,\text{d}V = -\vec{P} : \textbf{poussée d'Archimède,}$$

où $\vec{P}$ est le poids du volume $V_\mathcal{C}$ de fluide déplacé puisque ρ est la masse volumique du fluide. Ce résultat est valable que le poids volumique $\rho\,\vec{\text{g}}$ du fluide soit uniforme ou non, continu ou non (cas d'un corps partiellement immergé dans un liquide et émergeant dans un gaz). Si les effets de la gravité peuvent être négligés, la pression est alors constante et la poussée d'Archimède est nulle.

Remarque

Désignons par $\vec{P}_\mathcal{C} = P_\mathcal{C}\,\vec{e}_z$ le poids du corps : si $P > P_\mathcal{C}$, le corps flotte, sinon il coule.

FAIRE LA PLANCHE

Le corps humain a une masse volumique moyenne de $\rho_\text{c} = 985\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et il subit donc une poussée d'Archimède de la part de l'eau douce égale à $\rho_\text{e}/\rho_\text{c} = 1000/985 = 1{,}015$ fois son poids : il flotte. Tandis que dans de l'eau de mer, $\rho_\text{e} = 1025\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et la poussée a pour valeur 1,04 son poids : il flotte encore mieux.

5.2 CINÉMATIQUE

5.2.1 Représentations de Lagrange et d'Euler

La représentation de Lagrange consiste à se donner la position initiale $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ de tous les points d'un domaine matériel et les fonctions $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}_0, t)$ (équations horaires) qui déterminent leurs positions aux instants t ultérieurs. La représentation d'Euler s'appuie sur la donnée, à tout instant t, de la vitesse de chaque point du domaine $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Ces deux représentations du mouvement sont équivalentes :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}_0, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \text{avec} \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

La représentation de Lagrange ne dépend que d'une seule variable : le temps, alors que la représentation d'Euler dépend de quatre variables indépendantes : le temps et les trois coordonnées spatiales. Un champ de vitesse qui dépend du temps (respectivement qui n'en dépend pas) est dit *instationnaire* (respectivement. *stationnaire ou permanent*).

a) Trajectoire.

Lieu des points occupés par une particule pendant son mouvement (t est variable) ; son équation s'identifie à l'équation horaire $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}_0, t)$.

b) Ligne de courant

Ligne tracée dans le fluide à t fixé et tangente à la vitesse en tous points ; son équation est solution du système différentiel ($\vec{v} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y + w\,\vec{e}_z$) :

Voir NPB, § 5-2

$$\mathrm{d}x/u = \mathrm{d}y/v = \mathrm{d}z/w. \tag{5.5}$$

c) Tube de courant

Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé (typiquement, un conduit).

Voir NPB, § 5-2

d) Divergence du champ de vitesse

En coordonnées cartésiennes :

Voir NPB, § 5-6.1

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V). \tag{5.6}$$

C'est le taux de variation relatif d'un élément de volume δV suivi dans son mouvement. Si div $\vec{v} > 0$, le fluide se détend (le volume augmente), sinon il se comprime (le volume diminue).

Voir NPB, exo. 5.4

Cas de la sphère. Soit une sphère infinitésimale de rayon $r(t)$. Son volume s'écrit $\delta V = \frac{4}{3}\pi r^3$ et, par suite, $\mathrm{d}(\delta V)/\mathrm{d}t = 4\pi\dot{r}r^2$. D'autre part, par application de la formule de la divergence, on a aussi : div $\vec{v}\,\delta V = \dot{r}4\pi r^2$ et on retrouve ainsi l'expression 5.6.

Voir NPB, § 5-6.1.3

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Un champ de vitesse tel que div $\vec{v} = 0$ est incompressible puisque δV ne varie pas au cours du temps. Il en est ainsi dans la plupart des écoulements de liquides ; en revanche, les effets de la compressibilité sont beaucoup plus sensibles dans les gaz.

e) Fonction de courant

Dans le cas d'un écoulement plan, la relation div $\vec{v} = 0$ est automatiquement vérifiée par la fonction de courant $\psi(x, y, t)$ définie par :

$$\partial\psi/\partial y = u(x, y, t) \quad \text{et} \quad \partial\psi/\partial x = -v(x, y, t).$$

Méthode

La fonction de courant est constante sur une ligne de courant et une relation de la forme $\psi(x, y, t) = \psi_0$ est l'équation d'une ligne de courant. En régime permanent, trajectoires et lignes de courant sont confondues.

f) Rotationnel du champ de vitesse

Il suffit de connaître la première composante pour obtenir les suivantes par permutation circulaire.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 2\vec{\omega},$$

où $\vec{\omega}$ est le taux de rotation d'une particule fluide sur elle-même (vecteur *tourbillon*).

g) Potentiel des vitesses

Voir NPB, § 5-4.3

Un écoulement dont le champ de vitesse est tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0$ est irrotationnel. Dans ce cas, on sait que le vecteur $\vec{v}$ est le gradient de la fonction $\varphi(\vec{x}, t)$ nommée *potentiel des vitesses.*

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

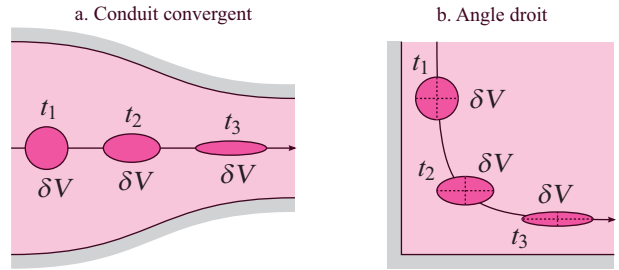


Figure 5.2 **Écoulements incompressible et irrotationnel**

Écoulement incompressible (fig. a) : div $\vec{v} = 0$. Le volume δV se déforme mais reste constant. *Écoulement irrotationnel* (fig. b) : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} = 0$. La croix tracée sur le fluide reste parallèle aux axes. Un écoulement peut disposer des deux propriétés simultanément.

5.2.2 Dérivées particulaires

Soit à calculer le taux de variation d'une **grandeur scalaire** $k(\vec{x},t)$ définie en *représentation eulérienne* mais attachée à une particule que l'on suit dans son mouvement $\vec{x} = \vec{x}(t,\vec{x}_0)$, *représentation lagrangienne* :

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{k(\vec{x}+\mathrm{d}\vec{x},t+\mathrm{d}t)-k(\vec{x},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial k}{\partial t} + \vec{\nabla}k\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial k}{\partial t} + \vec{\nabla}k\cdot\vec{v} \qquad (5.7)$$

Cas d'une fonction d'une seule variable d'espace

$$\mathrm{d}k(x,t) = (\partial k/\partial t)\mathrm{d}t + (\partial k/\partial x)(v\mathrm{d}t) = (\partial k/\partial t)\mathrm{d}t + (\partial k/\partial x)\mathrm{d}x.$$

Dérivée particulaire et différentielle totale de $k(x,t)$ se déduisent l'une de l'autre.

En raisonnant composante par composante, on calcule ainsi l'**accélération en représentation d'Euler** :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v} \quad\Leftrightarrow\quad \gamma_i = \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j \qquad (5.8)$$

Définitions

La dérivée partielle $(\partial\vec{v}/\partial t)$ est l'accélération locale tandis que le terme non linéaire $(\vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v})$ est l'accélération convective. Ces deux termes se mesurent en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.

Convention de l'indice muet ou convention d'Einstein

Lorsqu'un indice littéral est répété deux fois dans un monôme, celui-ci doit être remplacé par la somme de ses valeurs en donnant à cet indice les valeurs 1, 2 et 3 (ou 1 et 2, selon la dimension de l'espace).

Exemple

Produit scalaire (dans $\mathbb{R}^3$) : $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i = \sum_{i=1}^{i=3} a_i b_i$.

Produit matriciel (dans $\mathbb{R}^2$) : $(\overline{\overline{M}}\cdot\vec{V})\cdot\vec{e}_i = M_{ij}V_j = \sum_{j=1}^{j=2} M_{ij}Vj$.

Méthode

Le tenseur $\vec{\nabla}\vec{v}$ se représente comme une matrice carrée. En coordonnées cartésiennes et pour un écoulement plan, le produit contracté $\vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v}$ s'écrit :

$$\vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}\partial u/\partial x & \partial u/\partial y\\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y\\ u\partial v/\partial x + v\partial v/\partial y\end{pmatrix}$$

À l'instar d'un vecteur, un tenseur est un objet mathématique défini intrinsèquement, c'est-à-dire indépendamment du système de coordonnées utilisé pour le représenter.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le tenseur $\vec{\nabla}\vec{v}$ n'est pas symétrique et le produit contracté $(\vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v})$ n'est pas commutatif : il faut donc en respecter l'ordre.

Remarque

On montre que l'expression (5.8) de l'accélération peut être mise sous la forme :

$$\vec{\gamma} = \partial\vec{v}/\partial t + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\wedge\vec{v}, \tag{5.9}$$

formule utile lors de l'établissement des théorèmes de Bernoulli (section 5.4).

Évaluons maintenant le taux de variation de l'**intégrale volumique** de la fonction scalaire $k(\vec{x},t)$ sur un domaine matériel $\mathcal{D}(t)$ que l'on suit dans son mouvement :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{D}} k(\vec{x},t)\mathrm{d}V(\vec{x}) = \int_{\mathcal{D}}\left[\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}V)\right]\mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{\nabla}k\cdot\vec{v} + k\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

où on a fait usage de (5.6) et de (5.7). Par application de la formule de la divergence (NPB, § 5-6.1.3), on obtient la **dérivée particulaire d'une intégrale de volume** :

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial k}{\partial t} + \mathrm{div}(k\vec{v})\right]\mathrm{d}V = \int_{\mathcal{D}}\frac{\partial k}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{D}} k(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A. \tag{5.10}$$

Cette expression se généralise, composante par composante de $\vec{v}$, à la quantité de mouvement, ce qui conduit au

Théorème du transport de Reynolds.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{D}}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}V &= \int_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \mathrm{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\right]\mathrm{d}V \\ &= \int_{\mathcal{D}}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{D}}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{5.11}$$

Méthode

La quantité $\vec{v}\otimes\vec{v}$ est le produit tensoriel (symbole $\otimes$) du vecteur $\vec{v}$ par lui-même ; c'est un tenseur d'ordre 2, symétrique. En coordonnées cartésiennes, il se représente par une matrice qui s'écrit : $(\vec{v}\otimes\vec{v})_{ij} = v_i v_j$. Il provient de l'identité : $\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n}) = (\vec{v}\otimes\vec{v})\cdot\vec{n}$.

5.3 DYNAMIQUE

5.3.1 Conservation de la masse

La masse de tout ou partie d'un système matériel $\mathcal{S}$ que l'on suit dans son mouvement reste constante au cours du temps.

Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ce domaine et M sa masse. D'après $(5.10)_2$, nous obtenons la **conservation de la masse sous forme globale** :

$$\forall \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \ : \quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{D}} \rho \mathrm{d}V = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho(\vec{v}.\vec{n})\mathrm{d}A = 0$$

Mise sous forme d'une intégrale de volume au moyen de $(5.10)_1$, cette relation est vérifiée quel que soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ et c'est donc l'intégrande qui est nulle (lemme fondamental). Il vient ainsi la **conservation de la masse sous forme locale** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \tag{5.12}$$

Remarque

Lorsque ρ = cste, le fluide est dit *incompressible* ce qui implique $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$. Cette équation est souvent appelée : *équation de continuité*.

Voir NPB, § 5-6.1.4

5.3.2 Conservation de la quantité de mouvement

Il existe au moins un référentiel, dit galiléen ou absolu, et une chronologie, dite absolue, tels que, à chaque instant et pour toute partie $\mathcal{D}$ d'un système $\mathcal{S}$, le taux de variation de la quantité de mouvement de $\mathcal{D}$ est égal à la somme des forces extérieures s'exerçant sur $\mathcal{D}$.

Le taux de variation de la quantité de mouvement de $\mathcal{D}$ est donné par (5.11). On se limite au cas d'un écoulement dans le champ de la pesanteur ($\vec{f} = \vec{g}$). Par ailleurs, comme en statique (section 5.1.1), les forces extérieures se répartissent en forces de volume et forces de surface.

Définition

Dans les limites de l'approximation de fluide parfait, le mouvement et la déformation du fluide ne génèrent aucune force de surface autre que la force de pression.

La formulation de la conservation de la quantité de mouvement conduit à la **loi fondamentale de la dynamique sous forme globale** :

$$\forall \mathcal{D} \subset \mathcal{S} \ : \quad \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{D}} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A = \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{D}} (-p\vec{n})\mathrm{d}A \tag{5.13}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Cette expression est également connue sous le nom de théorème des quantités de mouvement ou théorème de la résultante globale ou encore théorème d'Euler.

En regroupant le taux de variation de la quantité de mouvement et l'intégrale des forces de pression sous une intégrale de volume (formule du gradient), puis en appliquant le lemme fondamental, nous obtenons la **loi fondamentale de la dynamique sous forme locale** ou **équation d'Euler** :

$$\begin{aligned} \rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{\nabla}\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})+\mathrm{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}) = \rho\vec{\mathrm{g}}-\vec{\nabla}p, \\ \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} &= \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho g_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Remarque

La deuxième forme s'obtient à partir de la première et de la conservation de la masse (5.12).

Dans le cas d'un **fluide barotrope**, c'est-à-dire compressible, $\rho = \rho(p)$, et on peut transformer le gradient de pression :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = \mathrm{d}\mathcal{H}(p) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (1/\rho)(\partial p/\partial t) = \partial\mathcal{H}/\partial t, \\ (1/\rho)\vec{\nabla}p = \vec{\nabla}\mathcal{H}, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{H} = \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}.$$

L'exemple le plus classique est celui du gaz parfait en écoulement isentropique qui vérifie l'équation $p/\rho^\gamma = \text{cste}$ et pour lequel on trouve (cf. chap. *Les deux principes de la thermodynamique*, § 2-3.2) :

$$\mathcal{H} = h = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}.$$

$\mathcal{H}$ s'identifie alors à l'enthalpie par unité de masse $h = u + p/\rho$ où u est l'énergie interne par unité de masse {voir également (5.17)}. En regroupant le cas général et celui du gaz parfait, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{g}}-\vec{\nabla}\mathcal{H} = \vec{\mathrm{g}}-\frac{\gamma}{\gamma-1}\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right). \tag{5.15}$$

Dans le cas d'un **fluide incompressible**, $\mathcal{H} = p/\rho$ et on peut faire apparaître la pression réduite $p_\mathrm{g} = p + \rho\mathrm{g}Z$, ce qui permet de simplifier l'équation d'Euler :

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\vec{\nabla}p_\mathrm{g} \quad\Leftrightarrow\quad \rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial p_\mathrm{g}}{\partial x_i}.$$

Pour constituer un système intégrable, les équations (5.12) et (5.14) doivent disposer de **conditions aux frontières**. Elles dépendent de la nature de la frontière (paroi solide,

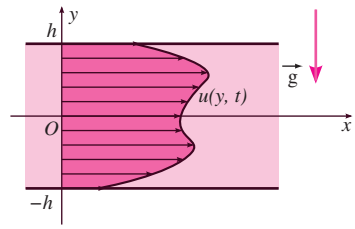
surface de courant, surface abstraite tracée dans le fluide) :

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad &: \text{sur une frontière et une interface imperméable et immobile.} \\ p_1 = p_2 \;&: \text{de part et d'autre d'une interface imperméable et immobile.} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Remarque

La première condition est connue sous le nom de condition de glissement ou encore de condition de non pénétration (de la paroi).

Écoulement à lignes de courant parallèles. On considère l'écoulement plan d'un fluide parfait incompressible, entre les deux parois parallèles d'un canal de largeur $2h$ (voir figure ci-dessous). Il est unidirectionnel, soit : $\vec{v} = u(x,y,t)\vec{e}_x$. Le fluide est pesant et la pesanteur parallèle à l'axe des y : $\vec{g} = -g\vec{e}_y$. L'équation de conservation de la masse (5.12) permet d'établir que la vitesse est indépendante de x :



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u(y,t).$$

Par suite, les équations d'Euler (5.14) se réduisent à :

$$\begin{cases} \rho\partial u/\partial t = -\partial p_g/\partial x, \\ 0 = -\partial p_g/\partial y \quad \Rightarrow \quad p_g = p_g(x,t). \end{cases}$$

Puisque $p_g = \text{cste}$ dans une section $x = \text{cste}$, la distribution de pression statique est hydrostatique, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de l'altitude y.

Lorsque dans un écoulement, les lignes de courant sont localement rectilignes, le gradient de pression réduite $\vec{\nabla} p_g$ est localement parallèle à la vitesse $\vec{v}$.

5.4 Théorèmes de Bernoulli

5.4.1 Formes locales

Les deux théorèmes de Bernoulli supposent que :

1) le fluide est parfait (forces de surface = forces de pression) ;
2) le fluide est barotrope : $\rho = \rho(p)$ et $\mathrm{d}p/\rho = \mathrm{d}\mathcal{H}$;
   a) si le fluide est incompressible : $\mathcal{H} = p/\rho$;
   b) si le fluide est un gaz parfait isentropique : $\mathcal{H} = h = [\gamma/(\gamma-1)](p/\rho)$.
3) le fluide est pesant : $\vec{f} = \vec{g}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Énergie mécanique par unité de masse

$$e_{\mathrm{m}} = \mathcal{H} + \mathrm{g}Z + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2} \tag{5.17}$$

où $\mathcal{H}$ est l'énergie de pression, $\mathrm{g}Z$ l'énergie potentielle de position et $\frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}$ l'énergie cinétique. La quantité $e_{\mathrm{m}}/\mathrm{g}$ est la charge du fluide ; elle exprime l'énergie mécanique comme une hauteur de fluide.

Premier théorème de Bernoulli

Dans un écoulement permanent de fluide parfait incompressible et pesant, l'énergie mécanique par unité de masse e_m se conserve sur chaque ligne de courant, mais peut varier d'une ligne de courant à l'autre.

DÉMONSTRATION

D'après la conservation de la masse $(5.12)_2$, nous avons $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$. En utilisant la formulation (5.9) de l'accélération dans l'équation d'Euler (5.15) et en la multipliant scalairement par $\vec{v}$, on observe que $(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$ et on a donc : $\vec{\nabla} e_{\mathrm{m}} \cdot \vec{v} = 0$. Alors, une variation élémentaire de e_{m} selon une ligne de courant s'écrit : $\mathrm{d}e_{\mathrm{m}} = \vec{\nabla} e_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \vec{\nabla} e_{\mathrm{m}} \cdot (\vec{v}\,\mathrm{d}t) = 0$, ce qui établit le théorème.

Second théorème de Bernoulli

Dans un écoulement irrotationnel de fluide parfait, barotrope et pesant, la quantité $\partial\varphi/\partial t + e_m$ ne dépend que du temps.

DÉMONSTRATION

Reprenons comme point de départ les hypothèses du début et ajoutons la suivante : l'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = 0$). Par suite, il existe un potentiel des vitesses $\varphi(\vec{x}, t)$ tel que $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$ et en faisant encore usage de la formulation (5.9) de l'accélération, l'équation d'Euler (5.15) s'écrit :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2} + \mathrm{g}Z + \mathcal{H}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2} + \mathrm{g}Z + \mathcal{H} = C(t),$$

ce qui établit le théorème.

5.4.2 Forme globale — Généralisation

À condition de sortir du cadre imposé par l'hypothèse de fluide parfait, on peut incorporer à la conservation de l'énergie cinétique deux termes rendant compte — globalement — de la puissance développée à l'intérieur du système.

Tableau 5.1 **Théorèmes de Bernoulli**

Théorème	Fluide incompressible	Gaz parfait	Domaine de validité
Premier	$p + \rho g Z + \frac{1}{2}\rho \vec{v}^{\,2} = \text{cste}$	$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \rho g Z + \frac{1}{2}\rho \vec{v}^{\,2} = \text{cste}$	sur une ligne de courant
Second	$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gZ + \frac{1}{2}\rho \vec{v}^{\,2} = C(t)$	$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2} = C(t)$	partout

– Puissance mécanique P_m, développée par les forces de pression sur d'éventuelles parois mobiles ; par exemple, les aubages (pales) d'une pompe ($P_m > 0$: elle apporte de l'énergie au fluide) ou d'une turbine ($P_m < 0$: elle soutire de l'énergie du fluide).
– Puissance des forces de frottement $P_f > 0$.

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, à tout instant t, et pour toute partie $\mathcal{D}$ du système, la dérivée particulaire de l'énergie cinétique est égale à la puissance de tous les efforts s'exerçant sur cette partie du système, tant intérieurs qu'extérieurs.

En se restreignant au cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide barotrope dans le champ de la pesanteur et en s'appuyant sur le théorème de l'énergie cinétique, on démontre le

Théorème de Bernoulli généralisé

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \rho e_m (\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot \mathrm{d}A = \int_{\partial\mathcal{D}} \rho \left(\mathcal{H} + gZ + \frac{1}{2}\vec{v}^{\,2}\right)(\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot \mathrm{d}A = P_m - P_f.$$

Remarque

la puissance des forces de frottement $P_f > 0$ fait toujours décroître l'énergie mécanique du fluide (d'où le signe « – »).

Turbomachine. Une turbomachine est alimentée par un conduit d'aspiration (indice « a ») et rejette le fluide dans un conduit de refoulement (indice « r »). En désignant par $\mathcal{U}$ la vitesse débitante et par S la section du conduit, la conservation de la masse s'écrit (en régime stationnaire) : $Q = \rho_a \mathcal{U}_a S_a = \rho_r \mathcal{U}_r S_r$. Par suite, la puissance nette, calculée à partir de la variation d'énergie du fluide a pour expression : $P_n = Q(e_{m|a} - e_{m|r})$. Mais seule la fraction P_m de cette puissance est transmise à l'arbre de la machine, la différence $P_n - P_m = P_f$ représentant les pertes. On en tire alors une définition du rendement global : $\eta = P_m / P_n$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

5.5 RÉSULTANTE DES FORCES

Le calcul des forces exercées par un fluide sur une paroi est souvent l'objectif de la résolution d'un problème de mécanique des fluides. La résultante $\vec{R}$ des forces exercées par un fluide parfait sur un corps $\mathcal{C}$ de frontière $\partial\mathcal{C}$ s'exprime formellement comme dans un problème de statique (section 5.1.1). Désignons par $\vec{N}$ la normale extérieure à $\mathcal{C}$:

$$\vec{R} = \int_{\partial\mathcal{C}} (-p\vec{N})\mathrm{d}A.$$

De façon à pouvoir exploiter le théorème des quantités de mouvement (5.13), la résultante $\vec{R}$ est cherchée à partir d'une expression intégrée sur le domaine fluide $\mathcal{D}$ dans lequel $\mathcal{C}$ est plongé ($\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$). Après avoir décomposé le bord de $\mathcal{D}$ en deux parties : $\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{C} \cup \mathcal{S}$ et observé que $\vec{N} + \vec{n} = 0$, on peut isoler la résultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{S}} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}A - \int_{\mathcal{D}} \rho\vec{g}\,\mathrm{d}V + \int_{\mathcal{S}} p\vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad (5.18)$$

Remarque

le flux de quantité de mouvement est nul sur $\partial\mathcal{C}$ en raison de la condition de glissement ($\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$).

À retenir

- Après avoir isolé le système, le milieu extérieur est remplacé par un ensemble de forces de surface et de volume.
- En statique, les forces d'inertie sont nulles et l'équilibre se fait entre les forces extérieures.
- La pression est continue à la traversée d'une interface entre deux fluides non miscibles.
- En statique, la résultante des forces de pression s'obtient par intégration explicite des pressions ou par application du théorème d'Archimède.
- En représentation de Lagrange, le temps est la seule variable alors qu'en représentation d'Euler, les variables sont le temps et les trois coordonnées spatiales.
- Une dérivée particulaire est un taux de variation évalué en se déplaçant avec le milieu.
- La vitesse est la dérivée particulaire de la position et l'accélération est la dérivée particulaire de la vitesse.
- Une ligne de courant est une ligne tangente en tous point au champ de vitesse.
- La dérivée particulaire de la masse d'un domaine fluide est nulle : la masse se conserve.
- La dérivée particulaire de la quantité de mouvement d'un domaine fluide est égale à la somme des forces extérieures.
- Le champ de vitesse d'un fluide parfait satisfait à la condition de glissement au contact d'une paroi imperméable et fixe.
- L'énergie mécanique d'un fluide est la somme d'une énergie cinétique, d'une énergie de pression (déformation) et d'une énergie potentielle de position (pesanteur).
- L'énergie mécanique d'un fluide parfait en écoulement stationnaire se conserve sur une ligne de courant (premier théorème de Bernoulli).
- L'énergie mécanique d'un fluide peut varier si le domaine est le siège de phénomènes dissipatifs (frottements) ou comporte des parois mobiles (turbine ou pompe).

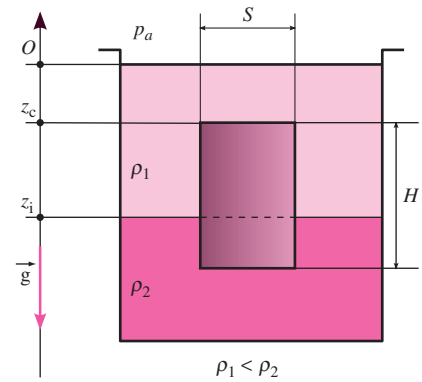
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 600.

5.1 Résultante des forces de pression agissant sur un cylindre

Un cylindre circulaire de hauteur H et de section S est plongé dans deux liquides non miscibles. On cherche la résultante des forces de pression par deux méthodes différentes. Les grandeurs utiles sont définies sur la figure ci-dessous.



a) Calculer la pression dans les deux liquides.

b) Calculer la résultante par intégration des forces de pression sur la paroi du cylindre.

c) Calculer cette résultante en appliquant le théorème d'Archimède et vérifier qu'on obtient le même résultat par les deux méthodes.

5.2 Écoulement instationnaire

On considère le champ de vitesse eulérien :

$$\vec{v} = u\,\vec{e}_x + v\,\vec{e}_y = (\omega x - at)\,\vec{e}_x - \omega y\,\vec{e}_y.$$

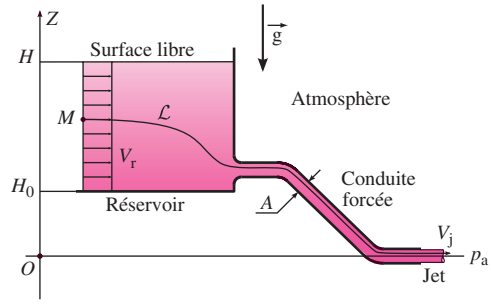
a) Déterminer l'équation des lignes de courant par intégration d'une forme différentielle. Quelle est la forme de ces lignes ?

b) Établir la représentation lagrangienne de ce mouvement. On désigne par x_0 et y_0 les coordonnées du point à l'instant initial $t = 0$.

c) Soit $e_c = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$ l'énergie cinétique volumique du fluide où ρ est sa masse volumique, constante et positive. Déterminer la dérivée particulaire de e_c.

d) Calculer l'accélération en représentation eulérienne et lagrangienne.

5.3 Retenue d'eau

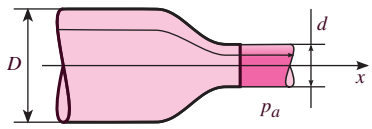


Un réservoir de grandes dimensions, situé en altitude, alimente une conduite forcée (installation hydroélectrique). Elle débouche en contrebas, dans l'atmosphère, où il se forme un jet horizontal dont les lignes de courant sont rectilignes. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible, de masse volumique $\rho = 10^3$ kg · m^{-3}, et l'écoulement est permanent. On désigne par $H = 100$ m le niveau de la surface libre compté par rapport à l'axe du jet, par $H - H_0 = 5$ m la profondeur d'eau, par $L = 10$ m la largeur du réservoir et par $A = \pi D^2/4 = 8$ cm^2 l'aire constante d'une section droite quelconque de la conduite forcée. Le réservoir

est alimenté par un écoulement uniforme de vitesse V_r tandis que dans le jet, l'eau est éjectée à la vitesse uniforme V_j. Hypothèses : Dans ce qui suit, on admet (i) que la pression atmosphérique $p_a = 10^5$ Pa est constante, (ii) que la pression statique dans le jet est uniformément égale à p_a et (iii) que les variations de pression d'origine hydrostatique dans le jet sont négligeables.

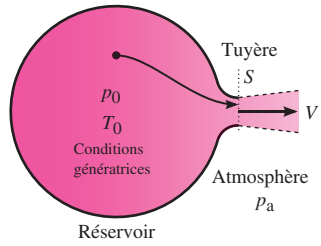
a) En effectuant les approximations justifiées par les données, déterminer la valeur de V_j en fonction de $g = 10\ m \cdot s^{-2}$ et de H. En déduire la valeur du débit-volume Q_v.

b) On ajuste un injecteur (tuyère convergente) de diamètre $d < D$ à l'extrémité de la conduite. La vitesse V_j a-t-elle changé ? Déterminer la nouvelle valeur du débit volumique q_v ; vérifier qu'elle est inférieure à Q_v.



5.4 Tuyère sonique

Un réservoir de grandes dimensions est raccordé à l'atmosphère à la pression constante p_a par une tuyère convergente de section de sortie S. Il contient un gaz parfait, au repos, aux conditions génératrices p_0 et T_0. Ce gaz s'échappe à la vitesse V, supposée uniforme et constante.



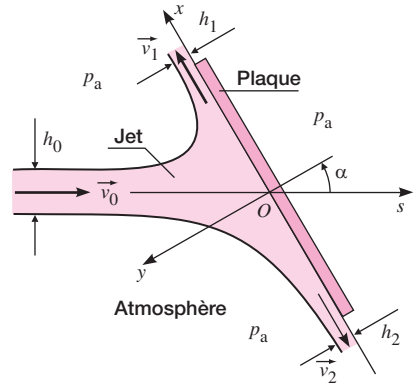
Définition. On appelle conditions génératrices la température et la pression du gaz dans une région de l'écoulement où la vitesse est nulle (ou négligeable). Tant que ses évolutions restent isentropiques, son état peut se déduire de ces conditions connaissant une seule variable d'état.

a) Par application du premier théorème de Bernoulli à une ligne de courant dont l'origine est dans le réservoir et l'extrémité dans la section de sortie, calculer la vitesse V en fonction des conditions génératrices (l'énergie potentielle de position est négligée).

b) Quel doit être le rapport de pression p_0/p_a pour que la tuyère soit « amorcée », c'est-à-dire tel que $V = c_S = \sqrt{\gamma p_a/\rho_S}$ où c_S est la vitesse du son en S. Application numérique : cas de l'air $\gamma = 1{,}4$.

5.5 Plaque inclinée

Une plaque plane, inclinée de l'angle α par rapport à la verticale, est frappée par un jet d'eau initialement rectiligne. L'eau est assimilée à un fluide parfait incompressible et l'écoulement est stationnaire et plan : il faut donc raisonner par unité de largeur (dimension perpendiculaire au plan de la figure). L'ensemble du dispositif est plongé dans l'atmosphère à la pression p_a = cste et la vitesse de l'eau est suffisamment élevée pour négliger les effets de la pesanteur.



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La section initiale a pour épaisseur h_0 et la vitesse y est uniforme, parallèle à l'axe Os : $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_s}$. Lors de l'impact, le jet se divise en deux nappes qui s'éloignent en deux sens opposés. Loin de l'origine, on peut admettre que l'écoulement est sensiblement parallèle à l'axe Ox et on définit deux sections de sortie d'épaisseurs respectives h_1 et h_2, où la vitesse est notée : $\vec{v_1} = v_1(y)\vec{e_x}$ et $\vec{v_2} = -v_2(y)\vec{e_x}$; v_1 et v_2 sont des fonctions positives de y.

a) Expliquer pourquoi on peut admettre que la pression statique est constante et égale à p_a dans les sections d'entrée et de sortie.

b) Par application du théorème de Bernoulli, établir que les trois vitesses v_0, v_1 et v_2 sont égales.

c) Déterminer la relation qui existe entre les trois épaisseurs h_0, h_1 et h_2, due à la conservation de la masse.

d) Exprimer la résultante des forces agissant sur la plaque en tirant son expression du théorème des quantités de mouvement.

e) Achever la résolution en tenant compte du fait que le fluide est parfait et ne peut exercer que des efforts normaux à la surface de la plaque.

FROTTEMENT VISQUEUX

6

PRÉALABLES

- Profil de vitesse, ligne de courant, débit, vitesse débitante
- Pression, fluide parfait, théorème des quantités de mouvement
- Diffusion moléculaire

MOTS CLÉS

- Écoulement laminaire, viscosité, frottement visqueux. Contrainte, cisaillement. Diffusion moléculaire. Loi de comportement. Fluide newtonien. Perte de charge. Nombre de Reynolds.
- Turbulence, instabilités, transition, dissipation

OBJECTIFS

- Définition expérimentale de la viscosité
- Présenter la forme la plus simple de la loi de comportement des fluides newtoniens
- Établir l'équation de diffusion unidimensionnelle
- Étudier l'écoulement de Poiseuille plan
- Présenter la notion de perte de charge et le nombre de Reynolds

6.1 ÉCOULEMENTS LAMINAIRES

Dans cette section, on s'intéresse à des écoulements laminaires, c'est-à-dire tels que les particules fluides suivent des trajectoires (ou lignes de courant) régulières. Cette propriété s'oppose à ce qui s'observe dans les écoulements turbulents (voir section 6.3).

6.1.1 Écoulement de Couette

Une expérience simple qui met en évidence les effets de la viscosité d'un fluide est l'écoulement cisaillé dans un viscosimètre de Couette (Fig. , gauche). Il est constitué de deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2 avec $e = R_2 - R_1 \ll R_1$. Le cylindre extérieur est fixe tandis que le cylindre intérieur tourne à la vitesse ω.

Le fluide est mis en mouvement de proche en proche, par entraînement de couches concentriques successives, du cylindre intérieur vers l'extérieur. Cet effet se propage

Introduction, p. 10

dans la direction orthogonale au mouvement et ne peut donc résulter de la vitesse macroscopique du fluide : il est dû à la diffusion moléculaire (mouvement brownien).

Si le fluide était parfait, les efforts se limiteraient à ceux exercés par la pression, c'est-à-dire orientés selon le rayon et il n'en résulterait aucun couple. Or l'expérience montre qu'il faut exercer un couple C sur l'axe du cylindre intérieur pour maintenir le mouvement de rotation. Cette force, tangente à la paroi du cylindre, est nommée force de frottement visqueux.

Le couple mesuré a pour expression $C = A\tau R_1$ où $A = 2\pi R_1 H$ et τ représente la contrainte de cisaillement due au frottement visqueux. Puisqu'il s'agit d'une force par unité de surface, elle a la même unité qu'une pression et se mesure donc en pascal.

Du fait que $e \ll R_1$, la courbure générale de l'écoulement peut être négligée ce qui équivaut à faire l'approximation du plan tangent (Fig. 6.1, droite). Sous cette condition, il s'avère que le profil de vitesse $u(y)$ est une fonction affine $u(y) = \omega R_1(1 - y/e)$ telle que :

Condition d'adhérence

La vitesse d'un fluide visqueux est égale à celle de la paroi avec laquelle il est en contact.

En outre, l'expérience montre également que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse par un coefficient nommé viscosité dynamique μ. Ainsi, τ représentant l'action du milieu extérieur sur le fluide, nous avons : $\tau_1 = \mu\omega R_1/e > 0$, le cylindre intérieur entraîne le fluide et $\tau_2 = -\tau_1$, le cylindre extérieur freine le fluide.

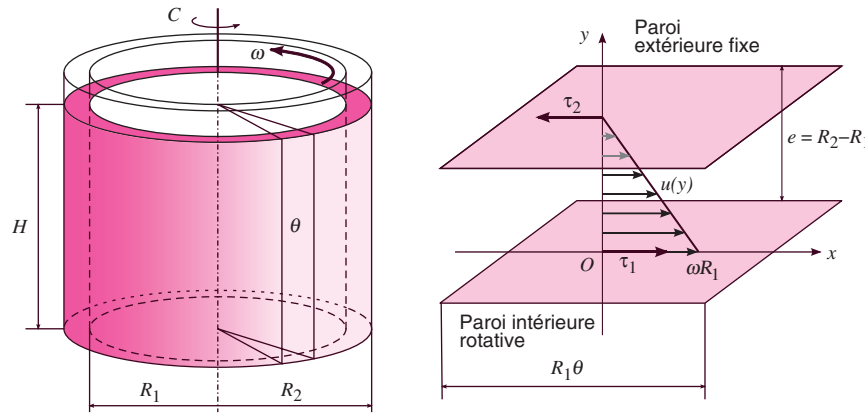


Figure 6.1 **Viscosimètre de Couette**

Il existe une unité spécifique assez peu usitée, le myriastokes : **1 maSt = 10^4 St = 1 $m^2 \cdot s^{-1}$**

Dans le système international, la viscosité dynamique se mesure en poiseuille, soit $1\ \text{Pl} = 1\ \text{Pa}\cdot\text{s} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$. On associe à la viscosité dynamique une autre viscosité nommée *viscosité cinématique* et définie par $\nu = \mu/\rho$ où ρ est la masse volumique. Dans système international, la viscosité cinématique se mesure en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

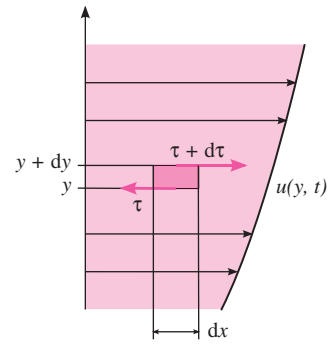
Tableau 6.1 **Paramètres physiques**

Fluide	Masse volumique ρ $[kg \cdot m^{-3}]$	Viscosité dynamique μ $[Pl]$
Eau	10^3	10^{-3}
Air (1 atm et 300 K)	1,29	$1{,}8.10^{-5}$
Métaux liquides	$2 \cdot 10^3 \sim 2 \cdot 10^4$	$10^{-4} \sim 10^{-3}$
Huiles de silicone	$\sim 10^3$	$10^{-2} \sim 10^3$

6.1.2 Équation de diffusion unidimensionnelle

Considérons l'écoulement plan, instationnaire, unidirectionnel d'un fluide incompressible et visqueux ; soit $\vec{v} = u(y,t)\vec{e}_x$ son champ de vitesse et admettons que le champ de pression soit uniforme.

Écrivons le principe fondamental pour le parallélépipède rectangle $dx \times dy$. Dans la direction $\vec{e}_x$, l'accélération convective $\vec{\nabla}\vec{v} \cdot \vec{v}$ est nulle et il faut tenir compte des forces de frottement lors de l'écriture de la loi de Newton :



$$\rho(\partial u/\partial t)dxdy = -\tau(y)dx + \tau(y+dy)dx,$$

ce qui donne après un développement limité : $\rho\partial u/\partial t = \partial\tau/\partial y$.

En généralisant le résultat observé pour l'écoulement cisaillé, ce qui revient à linéariser localement le profil de vitesse (autrement dit, à l'assimiler à sa tangente locale), nous sommes conduits à la :

Loi de comportement des fluides newtoniens

$$\tau = \mu\partial u/\partial y$$

Le bilan de quantité de mouvement prend donc la forme suivante :

Équation de diffusion unidimensionnelle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Cette équation est également connue sous le nom d'équation de la chaleur 1D. Mathématiquement, elle se différencie de l'équation d'Euler par le fait qu'elle est du second ordre et requiert donc des conditions aux frontières en nombre plus élevé.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Dans le cas de l'écoulement de Couette stationnaire entre deux plans (Fig. 6.1, droite), l'intégration de cette équation munie des deux conditions d'adhérence restitue bien le profil de vitesse affine.

6.2 ÉCOULEMENT EN CONDUIT RECTILIGNE

6.2.1 Écoulement de Poiseuille plan

Un fluide incompressible, visqueux et pesant s'écoule en régime permanent entre deux plans parallèles, horizontaux, distants de $2h$ et fixes. Le conduit est suffisamment long pour que les « effets de bouts » puissent être négligés et que l'écoulement soit unidirectionnel : $\vec{v} = u\,\vec{e}_x$.

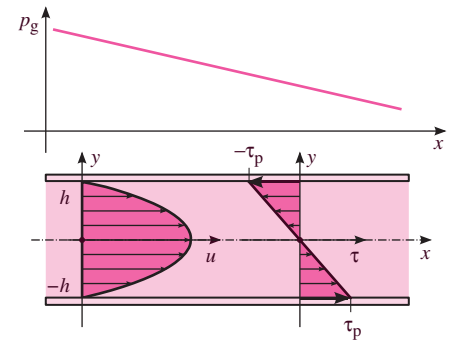
La conservation de la masse (5.12) permet d'établir que u est indépendant de x : $u = u(y)$.

Voir § 6.1.2

D'autre part, le bilan de quantité de mouvement doit être complété de façon à tenir compte de la pression et de la pesanteur :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{6.1}$$

Une première forme de la pression est obtenue par intégration de l'équation 6.1, soit : $p = p_1(x) - \rho g y$ où p_1 est une constante d'intégration. En reportant cette fonction dans l'équation 6.1_1 où u ne dépend pas de x, on constate que $\mathrm{d}p_1/\mathrm{d}x$ est nécessairement une constante notée $-K$. Par suite, $p_1 = p_0 - Kx$ où p_0 s'interprète comme la pression à l'origine du système d'axes. La constante $K > 0$ représente donc l'opposé du gradient de pression.



Il reste à intégrer l'équation $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}y^2 = -K/\mu$. Compte tenu des deux conditions d'adhérences : $u(-h) = u(h) = 0$, on obtient :

$$u(y) = \frac{Kh^2}{2\mu}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right).$$

Le profil de vitesse est parabolique, maximal au centre du canal et s'annule aux parois. On en déduit la contrainte $\tau(y)$ exercée par une couche de fluide sur sa voisine du dessous :

$$\tau(y) = \mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -Ky \quad \Rightarrow \quad \tau(h) = \tau_p = -Kh.$$

6.2.2 Perte de charge – Nombre de Reynolds

On nomme perte de charge la chute de pression réduite observée sur une longueur L de conduit et mesurée comme une hauteur de fluide : $\Delta H = \Delta p_g/(\rho g)$. Elle est présentée

comme une fonction du débit volumique Q_v :

$$Q_v = \int_{-h}^{h} u(y)\mathrm{d}y = \frac{2}{3} K h^3/\mu.$$

D'autre part, par définition de la pression réduite voir (5.4), $p_g = p + \rho g y = p_0 - K x$, si bien que $\Delta p_g = p_g(0) - p_g(L) = K L$ et la relation de perte de charge prend donc la forme :

$$\Delta p_g = \frac{3}{2}\mu \frac{L}{h}\frac{Q_v}{h^2}.$$

Puisque les deux membres de cette relation ont la dimension d'une pression, on exprime de préférence le second à l'aide de la vitesse moyenne ou vitesse débitante :

$$\mathcal{U} = Q_v/(2h),$$

et de la pression dynamique $\frac{1}{2}\rho\mathcal{U}^2$. Il vient :

$$\Delta p_g = \frac{24}{\mathcal{R}}\frac{L}{2h}\frac{1}{2}\rho\mathcal{U}^2 \quad \text{où} \quad \mathcal{R} = \frac{\rho\mathcal{U}2h}{\mu} \text{ : nombre de Reynolds.}$$

Le nombre $\Lambda = 24/\mathcal{R}$ est nommé coefficient de perte de charge.

6.3 ÉCOULEMENTS TURBULENTS

6.3.1 Caractéristiques générales

La plupart des écoulements sont instables, c'est-à-dire qu'au-delà d'un certain seuil, le champ de vitesse perd sa régularité et devient tourbillonnaire (Fig. 6.2) : il devient turbulent. Malgré une structure fine, la turbulence reste du domaine de la mécanique des milieux continus. Elle dispose de trois caractéristiques essentielles :

- la turbulence est rotationnelle, formée de multiples tourbillons instationnaires, dont les échelles de longueur et de temps s'étendent sur une gamme très large ;
- la turbulence est diffusive car cette agitation a pour effet de brasser le fluide, favorisant les transferts de masse, de quantité de mouvement et de chaleur ;
- la turbulence est dissipative car il se développe au sein des structures tourbillonnaires des forces de frottement qui augmentent le taux de conversion d'énergie mécanique en énergie interne (irréversibilités).

Il n'existe pas de théorie complète de la turbulence et elle constitue encore un des grands problèmes ouverts de la physique. L'étude de chaque écoulement turbulent, aussi loin puisse-t-elle aller sur le plan théorique, comporte toujours une dose d'empirisme.

Une expérience fondatrice dans l'étude de la turbulence est celle effectuée par O. Reynolds en 1883 (Fig. 6.2). Elle montre que la transition du régime laminaire au régime turbulent ne dépend que d'un groupement sans dimension nommé nombre de Reynolds qui joue un très grand rôle en mécanique des fluides. Les paramètres utilisés

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

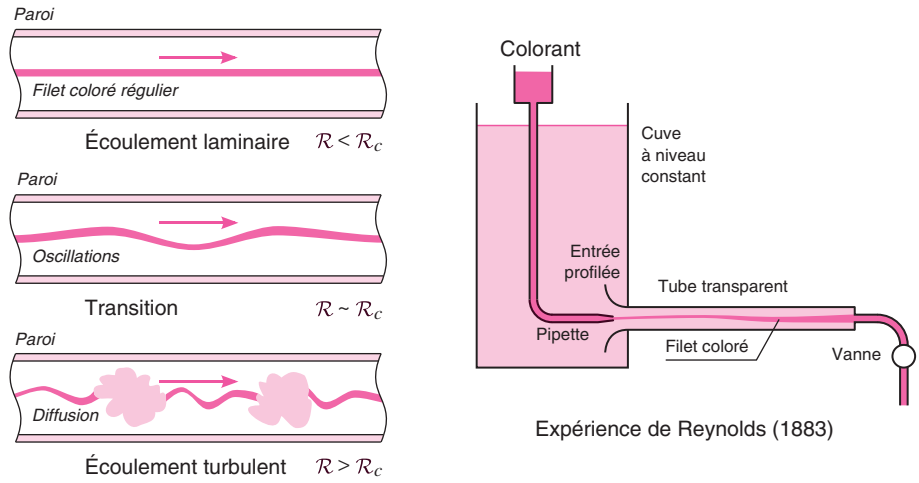


Figure 6.2 **Transition du régime laminaire au régime turbulent**

Un liquide s'écoule dans un conduit cylindrique, circulaire, transparent et de grande longueur. Le débit est réglé au moyen de la vanne situé en aval. Les schémas de gauche montrent l'aspect instantané d'un filet coloré pour des valeurs croissantes du débit. Les premières instabilités apparaissent pour le nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_c \simeq 2400$.

pour le constituer peuvent varier d'un problème à l'autre mais sa structure est toujours la même :

Nombre de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{\text{masse volumique . vitesse . longueur}}{\text{viscosité dynamique}} = \frac{\text{vitesse . longueur}}{\text{viscosité cinématique}}$$

Remarque

Le nombre de Reynolds ne prend tout son sens que pour des écoulements soumis à la fois à des forces de frottement et d'inertie. Il permet d'en comparer les ordres de grandeur :

$$\mathcal{R} = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de frottement}}.$$

Il peut prendre des valeurs allant de l'ordre de 10^{-6} pour la nage d'une bactérie jusqu'à 10^{7} pour un avion en vol.

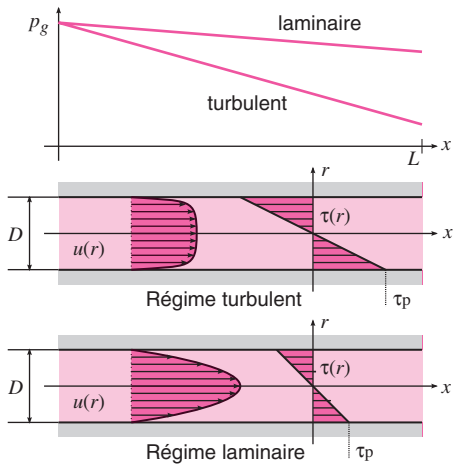
6.3.2 Écoulement en conduit

Considérons l'écoulement de Poiseuille de la figure 6.2 et examinons les points communs et les différences, selon le régime.

Points communs

- adhérence aux parois ;
- lignes de courant (moyennes pour le régime turbulent) parallèles aux parois ;

- symétrie de révolution par rapport l'axe du conduit ;
- invariance de la vitesse par translation dans le sens de l'écoulement ;
- perte de charge fonction affine de l'abscisse x ;
- contrainte de cisaillement fonction linéaire du rayon r.



Différences

- le profil de vitesse turbulent est beaucoup plus aplati que le profil laminaire en raison du brassage dû à la diffusion (mélange) ;
- la perte de charge observée dans un écoulement turbulent est plus intense (pente de la droite) qu'en régime laminaire en raison de la dissipation supplémentaire résultant la présence des tourbillons ;
- la contrainte de cisaillement est plus intense en régime turbulent qu'en régime laminaire.

Procédons à la **comparaison** des deux régimes. La transition laminaire – turbulent ayant pour origine des instabilités, rien ne nous interdit d'imaginer les deux régimes pour le même débit Q_v et dans le même conduit et de comparer les pertes de charge. Pour cela, considérons un écoulement dans un conduit cylindrique circulaire de longueur L et de diamètre D. Les lois de pertes de charge sont les suivantes :

$$\Delta p_g = \Lambda \frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho \mathcal{U}^2, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Lambda = 64/\mathcal{R} & \text{: régime laminaire,} \\ \Lambda = 0{,}316\mathcal{R}^{-1/4} & \text{: régime turbulent,} \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{R} = \rho \mathcal{U} D/\mu \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = Q_v/(\pi D^2/4).$$

De façon à observer les deux régimes, il convient de se placer au voisinage de la transition, c'est-à-dire pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2500. Alors : $\Lambda_{lam} = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ et $\Lambda_{tur} = 4{,}47 \cdot 10^{-2}$, soit presque un facteur deux, l'écart entre ces valeurs étant une fonction croissante de $\mathcal{R}$. Cette différence provient des tourbillons de la turbulence qui dissipent de l'énergie mécanique en chaleur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

la formule utilisée pour le régime laminaire est attribuée à Hagen-Poiseuille et celle du régime turbulent est due à Blasius.

À retenir

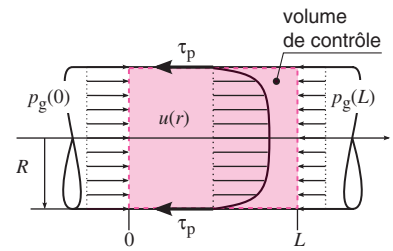
- Les frottements visqueux ont pour origine la diffusion moléculaire.
- Les frottements visqueux sont proportionnels au gradient de vitesse et à la viscosité dynamique (cas des fluides newtoniens).
- La prise en compte des effets visqueux exclut l'approximation de fluide parfait.
- Pour leurs effets prépondérants, les forces de frottement s'exercent tangentiellement aux surfaces de courant (surface fluide ou paroi solide).
- Un fluide visqueux adhère sur la paroi solide avec laquelle il est en contact.
- Contrairement à celles du fluide parfait, les équations qui gouvernent le mouvement des fluides visqueux sont du second ordre.
- Une relation de perte de charge établit un lien entre la chute linéique de pression et le débit.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 602.

6.1 Coefficient de frottement

Un tronçon de conduit cylindrique de diamètre $D = 2R$ et de longueur L est le siège d'un écoulement établi (laminaire ou turbulent). En appliquant le théorème des quantités de mouvement (5.18) au volume de contrôle indiqué sur la figure, établir la relation entre le coefficient de frottement $C_f = \tau_p/(\frac{1}{2}\rho\mathcal{U}^2)$ et le coefficient de perte de charge Λ.



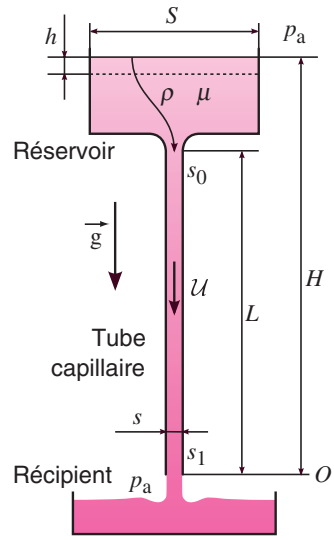
6.2 Viscosimètre de Poiseuille

Un réservoir de grandes dimensions ($S = 1$ dm^2) alimente un tube capillaire de longueur $L = 1$ m de section droite $s = 1$ mm^2 $\ll S$ par le débit q_v d'un liquide (masse volumique $\rho = 800$ kg $\cdot$ m^{-3}, viscosité dynamique μ) qui s'écoule sous l'effet de la gravité $\vec{g}$ ($g = 9{,}81$ m $\cdot$ s^{-2}). La hauteur totale du dispositif est $H = 1{,}1$ m.

a) On mesure une variation $h = 1$ cm du niveau de la surface libre pendant la durée $\tau = 5$ mn. En déduire la valeur du débit q_v et celle de la vitesse débitante $\mathcal{U} = q_v/s$.

b) L'essentiel de la perte de pression étant dû au tube capillaire, déterminer sa valeur Δp_g. Hypothèses : l'écoulement est supposé stationnaire ($h \ll H$) et on négligera les effets de bouts. Indications : évaluer la pression p_{g0} par application du théorème de Bernoulli entre S et s_0 et la pression p_{g1} directement.

c) Calculer successivement la valeur du coefficient de perte de charge Λ puis celle du nombre de Reynolds $\mathcal{R}$ au moyen de la loi de Hagen-Poiseuille. En déduire la viscosité μ du liquide.



Partie II

Thermodynamique

7

SYSTÈMES THERMODYNAMIQUES

PRÉALABLES

- Connaître les bases du calcul différentiel et intégral.
- Maîtriser les unités du système international.

MOTS CLÉS

- Système, équilibre thermodynamique, température, pression, transformation
- État physique d'un corps, changements d'état, fluide, gaz parfait
- Énergie interne, travail, chaleur, capacité thermique, réversibilité

OBJECTIFS

- Définir les notions fondamentales sur les états de la matière et de ses transformations.
- Décrire l'état d'un système, modèle du gaz parfait, équation d'état.
- Savoir distinguer énergie et transfert d'énergie.

La thermodynamique traite des échanges de matière et d'énergie entre un milieu matériel et son environnement. C'est une discipline relativement récente, née au début du XIX^{e} siècle avec les travaux de Carnot (1824), puis développée par Joule (1843), Kelvin (1851) et Clausius (1854). Cette discipline s'articule historiquement autour de la compréhension de quatre concepts fondamentaux : **température**, **chaleur**, **énergie** et **entropie**.

La thermodynamique a d'abord été la science des machines : machines à vapeur de Papin (1690), de Newcomen (1712), de Watt (1776) puis des moteurs à combustion interne d'Otto (1876), de Daimler (1887), de Diesel (1893)... Le champ de la thermodynamique englobe également l'étude statistique du comportement des constituants élémentaires de la matière (Boltzmann, 1872), des équilibres chimiques (Gibbs 1876) et plus récemment, des évolutions hors équilibre comme des écoulements turbulents, de forts gradients thermiques, des systèmes en cours de réaction chimique (Prigogine 1977).

7.1 Notions de base

La thermodynamique utilise des termes spécifiques ayant un sens bien précis pour décrire les différentes situations qu'elle étudie. La compréhension de ces termes est indispensable pour aborder sereinement un problème de thermodynamique.

7.1.1 Système

La notion de système est fondamentale en thermodynamique : le système représente l'objet de l'étude, la référence dans laquelle on se place. Toute résolution d'un problème de thermodynamique passe d'abord par la définition précise de ce terme.

Définition

Un **système** se définit comme un volume limité par des frontières matérielles (parois) ou fictives, fixes ou mobiles, contenant la matière qu'on étudie. Tout ce qui n'est pas le système constitue le **milieu extérieur**.

On rencontre trois types de système : un système **isolé** ne peut échanger ni matière ni énergie avec le milieu extérieur, un système **fermé** (vase clos) échange de l'énergie mais pas de matière avec le milieu extérieur, enfin un système **ouvert** échange à la fois de la matière et de l'énergie avec le milieu extérieur.

L'état d'un système est décrit par un nombre limité de grandeurs qu'on appelle variables d'état ou paramètres d'état. Les grandeurs proportionnelles à la quantité de matière du système sont qualifiées d'**extensives** (masse, volume, énergie...) alors que celles qui en sont indépendantes sont dites **intensives** (pression, température...).

On appelle équation d'état une relation liant plusieurs variables d'état permettant de décrire entièrement l'état d'un système.

L'équilibre d'un système est atteint lorsque tous les paramètres d'état sont uniformes et invariables avec le temps. Un système où toutes les forces entre lui et le milieu extérieur se compensent (équilibre mécanique), où tous les points sont à la même température (équilibre thermique) et qui n'a pas tendance à évoluer vers une structure interne différente (équilibre chimique) est en équilibre thermodynamique.

7.1.2 États physiques d'un corps pur

Tout corps pur (corps formés d'un seul constituant) présente trois domaines de stabilité où il n'existe que sous une seule **phase** : solide, liquide ou gazeuse. Ces domaines sont délimités par trois courbes où deux phases coexistent en équilibre : courbe de vaporisation (liquide + gaz), courbe de fusion (solide + liquide), courbe de sublimation (solide + gaz). Le point commun aux trois courbes (coexistence simultanée des trois phases) est appelé **point triple** (Y) et le point au-delà duquel il n'y a plus de distinction possible entre liquide et gaz est appelé **point critique** (C).

Le passage d'une phase à une autre est appelé **changement d'état**. Ils sont au nombre de six : la fusion (solide → liquide), la vaporisation (liquide → gaz), la sublimation

(solide → gaz), la solidification (liquide → solide), la liquéfaction (gaz → liquide) et la condensation (gaz → solide).

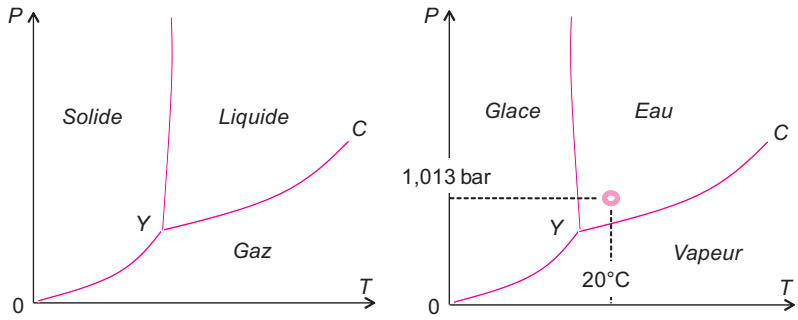


Figure 7.1 **Diagramme de phase de l'eau (échelle arbitraire)**

Contrairement aux autres corps, la masse volumique de la glace (état solide) est inférieure à celle de l'eau (état liquide). Cette particularité entraîne que la température de fusion de l'eau diminue légèrement quand la pression augmente.

Remarque

On appelle *vapeur* l'état gazeux d'un corps liquide ou solide dans les conditions usuelles de température et de pression (20 °C, 1013 hPa). La vapeur d'eau est un gaz invisible, comme l'oxygène et l'azote. Le brouillard ou les nuages sont formés de fines gouttelettes d'eau liquide. La transition vapeur → liquide est appelée *condensation* (au lieu de liquéfaction). Ainsi, la vapeur d'eau se condense et l'oxygène se liquéfie.

Les liquides et les gaz constituent les fluides. Un fluide se comporte comme un milieu déformable pouvant s'écouler. L'état gazeux est un état peu dense et compressible : un gaz n'a ni volume propre ni de forme propre (un gaz occupe tout l'espace donné). L'état liquide est un état dense et quasi incompressible : un liquide possède un volume propre mais pas de forme propre.

7.2 Température d'un corps

Deux corps en équilibre thermique ont la même température. Cette propriété fondamentale permet de définir la température de tout système, indépendamment de sa nature. On définit trois températures : la température mesurable, la température absolue et plus tard la température thermodynamique.

7.2.1 Température mesurable

On ne mesure jamais directement une température. Un thermomètre est un système dont on mesure une grandeur physique, elle-même fonction de la température. On associe alors une variation de température à la variation de la grandeur considérée.

On réalise une échelle de température en choisissant deux points de référence fixes auxquels on attribue deux valeurs particulières. On divise cet intervalle fondamental en

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

parties égales : chaque partie représente un *degré* de l'échelle considérée. L'échelle Celsius (1742) est une échelle linéaire centésimale dont les deux points fixes sont $\theta = 0$ pour la température de la glace fondante et $\theta = 100$ pour la température de l'eau bouillante. Cette échelle est devenue l'échelle légale de température à la Convention (1794).

Pratiquement, il existe autant d'échelles Celsius que de thermomètres. En effet, les échelles Celsius associées à des thermomètres s'appuyant sur des grandeurs physiques différentes, ne coïncident pas, car l'évolution des grandeurs thermométriques n'est, en général, pas linéaire. Il faut donc choisir un thermomètre particulier et étalonner les autres par rapport à lui : ce sera un thermomètre à hydrogène.

7.2.2 Température absolue

L'expérience montre que lorsque l'on comprime une quantité de matière donnée n d'un gaz en maintenant sa température θ constante, le produit de sa pression P par son volume V reste constant pour des pressions ne dépassant pas quelques bars. Plus précisément, pour une même température, le produit PV_m (volume molaire $V_m = V/n$) de tous les gaz tend vers une valeur identique lorsque la pression tend vers 0. Cette circonstance exceptionnelle permet de définir une échelle *absolue* de température, puisque la limite de ce produit PV_m à $P = 0$ dépend uniquement de la température θ et non de la nature chimique du gaz.

On définit alors la température absolue T comme étant proportionnelle à la limite de ce produit PV_m (θ). Ainsi, le quotient des limites PV_m (θ_1) et PV_m (θ_2) pour deux températures différentes θ_1 et θ_2 définies dans une échelle quelconque (Celsius par exemple) correspond à un quotient de températures absolues :

$$\frac{P\,V_m\,(\theta_1)}{P\,V_m\,(\theta_2)} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{avec expérimentalement} \quad \frac{P\,V_m\,(100\ ^\circ\text{C})}{P\,V_m\,(0\ ^\circ\text{C})} = 1{,}366\ 10$$

De façon à ajuster l'échelle absolue avec l'échelle légale Celsius, la température de la glace fondante a été choisie arbitrairement à 273,15. Cette valeur particulière donne une valeur de 373,15 pour l'eau bouillante, car $273{,}15 \times 1{,}36610 = 373{,}15$.

L'unité de température absolue est le **kelvin** (K). L'échelle Celsius est alors déduite de l'échelle absolue par une simple translation d'origine : $\theta\ (^\circ\text{C}) = T\ (\text{K}) - 273{,}15$.

En pratique, on se contente de l'approximation : $\theta\ (^\circ\text{C}) = T\ (\text{K}) - 273$.

Cette échelle absolue n'a besoin que d'un point fixe pour référence : le choix s'est porté sur le point triple de l'eau à 273,16 K (0,01 °C) correspondant à une pression de 612 Pa. Enfin la plus basse température que puisse théoriquement atteindre un corps est appelée **zéro absolu** : elle correspond à – 273,15 °C.

Remarque

Seule la température absolue permet de faire des calculs. La différence de deux températures dans l'échelle Celsius s'exprime en kelvins : $\theta_1 = 25\ ^\circ\text{C}$ et $\theta_2 = 18\ ^\circ\text{C}$ alors $\theta_1 - \theta_2 = 7$ K.

AGITATION THERMIQUE

La température d'un corps est la traduction macroscopique des mouvements incessants des molécules de ce corps. Comme ces mouvements sont d'autant plus importants que la température est élevée, on parle d'*agitation thermique*. Ainsi, la température d'un gaz à faible pression est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses molécules.

7.3 PRESSION DANS UN FLUIDE

7.3.1 Force pressante et pression

Un fluide exerce sur tout élément de surface d'un solide immergé dans un liquide ou un gaz, une force pressante :

$$\mathrm{d}\vec{F} = P\mathrm{d}S \cdot \vec{n}$$

La **pression** P correspond ainsi à la composante normale par unité d'aire de la force $\mathrm{d}\vec{F}$. Ainsi, la force pressante (unité en N) est une grandeur vectorielle alors que la pression (unité en Pa) est une grandeur scalaire. Pour un fluide au repos, $\mathrm{d}\vec{F}$ est perpendiculaire à la surface $\mathrm{d}S$ (donc colinéaire à $\vec{n}$), d'où :

$$\mathrm{d}F = P\ \mathrm{d}S$$

La pression P dépend de la position du point M (x,y,z) de la surface considérée. Lorsque cette pression est uniforme sur l'ensemble d'une surface S, on a :

$$P = \frac{F}{S}$$

Un solide (corps indéformable) transmet intégralement les forces qui lui sont appliquées : l'équilibre des forces ne dépend pas de la taille des sections d'appui. En revanche, un fluide (corps compressible) transmet les pressions : dans un gaz, la pression est la même sur toutes les faces du récipient qui le contient.

Remarque

L'unité de pression est le pascal dans le système international d'unités, mais on utilisera souvent le bar en tant qu'unité légale de pression (1 bar vaut exactement 10^5 Pa). De même pour les volumes, l'unité du système international est le mètre cube, mais on emploiera le plus souvent le litre (1 L = 10^{-3} m^3) qui est également une unité légale.

7.3.2 Loi fondamentale de la statique des fluides

Dans un champ de pesanteur vertical et uniforme caractérisé par une accélération de la pesanteur g, la pression évolue avec l'altitude z selon la relation :

$$\mathrm{d}P + \rho g\ \mathrm{d}z = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans le cas des gaz, l'intégration de cette relation nécessite la connaissance de la loi de variation de leur masse volumique ρ avec la pression P. Pour l'air (ρ = 1,22 kg·m^{-3} à 1013 hPa), on obtient une diminution exponentielle de la pression avec l'altitude (atmosphère isotherme à 15 °C). Cependant, sur une faible dénivellation ($\Delta z \approx 10$ m), on peut considérer ρ comme constante, car la différence de pression reste faible ($\Delta P \approx 120$ Pa soit une différence de l'ordre de 0,1 %). Ainsi, dans un réservoir, même de grande dimension, **on peut donc considérer la pression d'un gaz comme constante** en tout point du volume.

Pour les liquides, on ne constate qu'une très légère augmentation de la masse volumique ρ avec les très fortes pressions. Autrement dit pour l'eau, même sur de grandes profondeurs, on peut considérer ρ comme indépendante de la pression, c'est-à-dire incompressible.

Voir. chap 6

7.3.3 Hydrostatique

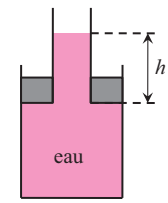
En adoptant une orientation descendante de l'axe z (selon la profondeur) pour les liquides, plus commode en pratique qu'une orientation ascendante (selon l'altitude), l'intégration de la loi fondamentale entre deux points A et B du liquide étudié donne une différence de pression de :

$$P_B - P_A = \rho\, g\, (z_B - z_A) = \rho\, g\, h$$

La principale conséquence de la loi fondamentale est que la pression en un point d'un liquide est indépendante de la forme du récipient : en particulier, la pression exercée par le liquide au fond d'un récipient n'est fonction que de la hauteur h du liquide dans le récipient. Une autre conséquence est que tous les points situés dans un plan horizontal d'un même liquide sont à la même pression : en particulier la surface libre d'un liquide est toujours un plan horizontal et sa pression est égale à la pression du gaz le surmontant.

Exercice d'application 7.1 – Piston ouvert

Un récipient ouvert contient de l'eau (ρ = 1,0 g · cm^{-3}). Un piston horizontal (sans frottement) de rayon R = 20 cm, traversé en son centre par un tube vertical ouvert de rayon r = 10 cm, vient fermer ce récipient. La masse de cet ensemble (tube + piston) est de m = 30 kg. Déterminez, à l'équilibre, la hauteur h à laquelle l'eau s'élève dans le tube. On donne la valeur de la pression atmosphérique P_0 = 1,013 bar et l'accélération de la pesanteur g = 9,8 m · s^{-2}.



SOLUTION. En un point quelconque A situé dans l'eau à la base du piston, on écrit l'expression de la pression due à la colonne d'eau de hauteur h au-dessus de lui puis celle de la pression s'exerçant sur la surface $S - s$ (section du piston diminuée de celle du tube) due au poids de l'ensemble tube et piston. Ces deux expressions sont égales et la pression atmosphérique, qui intervient dans les deux relations, se

simplifie, soit :

$$P_A = P_0 + \rho g h \quad \text{et} \quad P_A = P_0 + \frac{m\,g}{S - s} \quad \text{soit} \quad h = \frac{m}{\rho\,(S - s)} = 31{,}8 \text{ cm}$$

7.4 LES GAZ PARFAITS

7.4.1 Équation d'état des gaz parfaits

L'étude des isothermes des gaz aux faibles pressions, montre que le produit de la pression P par le volume molaire V_m tend vers une valeur identique lorsque la pression tend vers 0 pour chaque température. À chaque gaz réel, on va associer un *gaz parfait* de même masse molaire M, pour lequel le produit PV_m est proportionnel à la température absolue. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit donc :

$$PV_m = RT \quad \text{soit} \quad PV = nRT \quad \text{ou} \quad PV = \frac{m}{M}RT \quad \text{avec} \quad R = 8{,}31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

P est la pression du gaz (Pa), V son volume (m^3), n sa quantité de matière (mol) ou m sa masse (kg) et T sa température absolue exprimée **impérativement en kelvins**. Le coefficient de proportionnalité R est la constante des gaz parfaits.

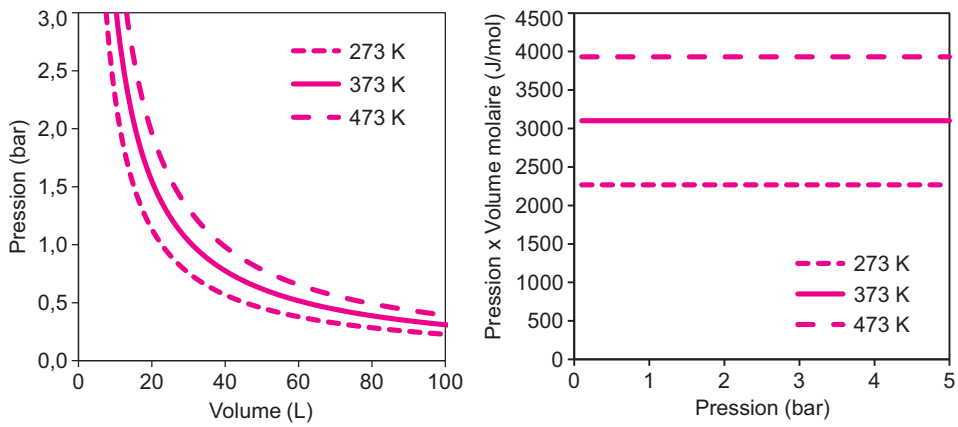


Figure 7.2 **Isothermes d'un gaz parfait**

Trois courbes (hyperboles) à température constante (273 K, 373 K et 473 K) d'un gaz parfait représentées dans un diagramme $P(V)$ et dans un diagramme PV_m (P).

Ce modèle, portant limité aux gaz aux faibles pressions ($P < 5$ à 10 bars), occupe une place centrale en thermodynamique par sa simplicité et son intérêt pratique. Ainsi, tous les gaz à la pression atmosphérique (c'est-à-dire proche de 1 bar) sont considérés comme des gaz parfaits avec une très bonne approximation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

PRESSION CINÉTIQUE

La pression exercée par un gaz résulte essentiellement des *chocs des molécules sur les parois* du récipient qui le contient. Comme la température, elle est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des molécules du gaz. Les molécules d'un gaz parfait sont assimilées à des masses ponctuelles, sans interactions entre les elles.

7.4.2 Transformations d'un gaz parfait en vase clos

L'équilibre d'un système est imposé par l'action d'une contrainte du milieu extérieur sur les limites du système (parois rigides, fixes ou isolantes...). Toute modification de cette contrainte (application d'une force, chauffage) entraîne une évolution du système qui va le conduire vers un nouvel état d'équilibre défini par de nouvelles valeurs d'une ou plusieurs variables d'état.

Définition

Une **transformation** se définit comme une évolution d'un système d'un état d'équilibre initial vers un état d'équilibre final sous l'effet d'une perturbation.

Pour un système fermé (vase clos), la masse de ce système est donc constante quels que soient les changements pouvant intervenir au cours du temps. Pour une transformation quelconque d'un gaz parfait entre deux états d'équilibre (P_1, V_1, T_1) et (P_2, V_2, T_2), la conservation de la masse de gaz donne :

$$\text{État initial : } P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{et} \quad \text{État final : } P_2V_2 = nRT_2 \quad \text{soit} \quad \frac{P_1\,V_1}{T_1} = \frac{P_2\,V_2}{T_2}$$

Cette relation permet de calculer une grandeur quelconque connaissant les cinq autres.

Trois transformations sont particulièrement utiles : la transformation **isotherme** (évolution à température constante), la transformation **isobare** (à pression constante) et la transformation **isochore** (à volume constant). Dans un diagramme $P(V)$, ces trois transformations sont représentées respectivement par une portion d'hyperbole, une droite horizontale et une droite verticale.

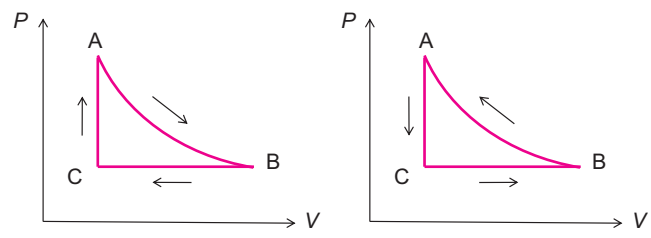


Figure 7.3 Représentation graphique de transformations particulières d'un gaz parfait
Détente isotherme (AB), refroidissement isobare (BC), chauffage isochore (CA) et compression isotherme (BA), chauffage isobare (CB) et refroidissement isochore (AC).

Exercice d'application 7.2 – Surgonflage

Un pneu a été gonflé l'hiver (– 10 °C) à une pression de 2 bars (cette pression a été mesurée par un manomètre classique qui indique « zéro » lorsqu'il est en communication avec l'atmosphère). Quelle pression indiquerait ce manomètre l'été à une température de + 30 °C ? Sachant qu'une différence de pression de 10 % peut avoir un effet néfaste sur la conduite, doit-on tenir compte du changement de saison pour le gonflage des pneus ?

SOLUTION. Dans cet exercice, les variables définissant le *système* (l'air que l'on considérera comme un gaz parfait, contenu dans le pneu) ne sont pas exprimées dans les unités physiques habituelles, mais dans des unités de la vie courante (celles des notices automobiles). Il s'agit donc, pour commencer, de traduire les données dans les bonnes unités en leur affectant un symbole de grandeur adéquat. Ainsi, l'air dans l'état initial (hiver) est représenté par une pression physique (vraie) d'air $P_1 = 3$ bars, soit $3 \cdot 10^5$ Pa, car il s'agit d'ajouter la pression atmosphérique ($P_0 = 1$ bar) à la pression mesurée au manomètre. De même sa température physique est $T_1 = 263$ K, car il est indispensable d'utiliser la température absolue dans tous les calculs. L'état final (été) de l'air est alors à une pression P_2 (à déterminer) et à une température $T_2 = 303$ K. En considérant la transformation comme *isochore* (faible dilatation du pneu, considéré comme rigide, entre l'hiver et l'été), on a :

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} \quad \text{soit} \quad P_2 = 3{,}46 \text{ bars}$$

Il s'agit enfin d'exprimer le résultat dans les mêmes termes que l'énoncé, c'est-à-dire en unités manométriques soit 2,46 bars. La différence de pression manométrique entre été et hiver est de 0,46 bar. L'augmentation de la pression se calcule en divisant cette différence de pression par la pression initiale de l'air, autrement dit 2 bars. On obtient une augmentation de 23 % bien supérieure au 10 % préconisé par le fabriquant : il faut donc faire la correction de pression.

7.4.3 Mélanges de gaz parfaits

Un mélange de deux gaz parfaits (quantités de matière respectivement n_1 et n_2) à la température T et à la pression P, se comporte comme un gaz parfait :

$$PV = nRT \quad \text{avec} \quad n = n_1 + n_2$$

Définition

La **pression partielle** d'un gaz parfait dans un mélange de gaz parfaits représente la pression que ce gaz exercerait s'il occupait **seul** la totalité du volume disponible.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les pressions partielles de chaque gaz composant le mélange sont :

$$p_1 V = n_1 RT \quad \text{et} \quad p_2 V = n_2 RT \quad \text{d'où} \quad (p_1 + p_2)V = (n_1 + n_2)RT$$

Ainsi, par identification avec l'équation d'état du mélange, on montre d'une part que la pression P d'un mélange de gaz parfaits est la somme des pressions partielles p_1 et p_2 de chaque gaz et d'autre part que les pressions partielles sont liées à la pression totale par les relations :

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{avec} \quad p_1 = \frac{n_1}{n} P \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{n_2}{n} P$$

Les rapports n_1/n et n_2/n désignent les **fractions molaires** de chaque constituant du mélange. Une fraction molaire représente la proportion volumique d'un gaz du mélange (souvent exprimée en %) :

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{V_2}{V} = \frac{n_2}{n} \quad \text{soit} \quad V = V_1 + V_2$$

Pour un mélange de k gaz parfaits, on généralise les relations précédentes :

$$P = \frac{R\,T}{V} \sum_{i=1}^{k} n_i \qquad P = \sum_{i=1}^{k} p_i \qquad p_i = \frac{n_i}{n} P$$

7.5 Énergie et transfert d'énergie

L'énergie est un concept, une idée abstraite qui permet de faire efficacement des calculs (prévisions) et des raisonnements. La **conservation de l'énergie** est un principe mathématique qui gouverne tous les phénomènes naturels connus à ce jour. Il n'a encore jamais été démenti par l'expérience : quelles que soient les transformations subies, **l'énergie d'un système isolé reste constante**.

7.5.1 État énergétique d'un système

L'énergie totale stockée d'un système à l'équilibre est la somme de deux types d'énergie : énergie mécanique E_m et énergie interne U :

$$E = E_m + U \quad \text{avec} \quad E_m = E_c\,(v) + E_p\,(z) \quad \text{et} \quad U = U\,(T,V)$$

L'énergie mécanique E_m est associée à l'état macroscopique du système. C'est également la somme de deux types d'énergie, dites cinétique E_c (dépendante de la vitesse v du système) et potentielle E_p (liée à la position z du système). L'énergie interne U est une grandeur macroscopique associée à l'organisation microscopique interne des molécules du système et dépend à la fois de la température T (agitation thermique) mais également du volume V.

Ces types d'énergie sont des fonctions d'état : lors d'une transformation, la variation d'énergie du système ne dépend que de son état initial et de son état final et pas de

la façon dont s'est déroulée la transformation. Pour calculer cette variation d'énergie, il suffit de connaître ses états extrêmes : le détail de la transformation n'intervient pas.

Remarque

En mathématique, la variation infinitésimale d'une telle fonction d'état est une *différentielle totale* notée dE. Lors d'une transformation entre deux instants t_1 et t_2, son intégration donnera une variation d'énergie, notée ΔE, telle que :

$$\Delta E = E_2 \text{ (finale)} - E_1 \text{ (initiale)}$$

Pour un système au repos, vitesse et position du système restent inchangées : l'énergie mécanique ne varie pas. La variation d'énergie du système se réduit à la seule variation de son énergie interne :

$$\Delta E_c = \Delta E_p = 0 \quad \text{d'où} \quad \Delta E = U_2 - U_1$$

7.5.2 Transferts d'énergie

L'énergie d'un système ne peut varier que s'il échange (transfert) de l'énergie avec le milieu extérieur. Ces échanges d'énergie ne peuvent s'effectuer que selon deux modalités : travail et chaleur.

Le **travail** W concerne un transfert d'énergie résultant du déplacement macroscopique du point d'application d'une force extérieure (travail mécanique) ou du parcours d'un courant électrique (travail électrique) :

$$W = \int_{l_1}^{l_2} F(l)\, \mathrm{d}l \qquad W = \int_{t_1}^{t_2} U(t)\, I\,(t)\, \mathrm{d}t$$

La **chaleur** Q est un transfert d'énergie ayant pour conséquence de modifier l'agitation microscopique des molécules du système, autrement dit son énergie interne (transfert thermique). Les mécanismes microscopiques réalisant ces échanges de chaleur sont classés en trois catégories : conduction, convection et rayonnement. L'apport de chaleur à un système a pour résultat, soit d'en faire varier la température, soit d'en changer l'état physique (changement d'état).

Voir ch. 10

Définition 7.4

Toute énergie reçue (absorbée, récupérée, gagnée) par le système est comptée positivement. De même, toute énergie cédée (libérée, évacuée, perdue) par le système est comptée négativement (convention de signe dite « du banquier »).

Travail et chaleur ont la dimension d'une énergie et s'expriment en joules (J). Cependant ils ne représentent pas des formes d'énergie stockées dans le système : un système ne contient ni travail, ni chaleur mais de la chaleur et/ou du travail apparaissent éventuellement à la frontière du système lors d'une transformation.

Travail et chaleur ne sont pas des fonctions d'état : ils dépendent de la manière dont s'est faite la transformation, autrement dit du « chemin suivi ».

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

En mathématique, ces fonctions ne sont pas des différentielles totales. Les physiciens notent ces différentielles respectivement δW et δQ. Leur intégration permet d'obtenir un travail W et une quantité de chaleur Q (et *non* une *variation* de travail ΔW ou de chaleur ΔQ).

7.5.3 Travaux des forces de pression

La compression d'un gaz maintenu dans un cylindre par un piston mobile de section S, sous l'action d'une force extérieure F_e engendre un travail élémentaire δW. Pour une transformation lente, la pression P du gaz est en équilibre avec la pression extérieure P_e soit :

$$\delta W = F_e \, \mathrm{d}l = P_e \, S \, \mathrm{d}l \quad \text{d'où} \quad \delta W = P \, \mathrm{d}V \quad \text{avec} \quad P = P_e \quad \text{et} \quad \mathrm{d}V = S \, \mathrm{d}l$$

Le respect de la convention de signe impose que lors d'une compression ($\mathrm{d}V < 0$), le gaz reçoit du travail ($\delta W > 0$). Par conséquent :

$$\delta W = -P \, \mathrm{d}V \quad \text{soit} \quad W = -\int_{V_1}^{V_2} P \, \mathrm{d}V$$

Le travail effectué à pression constante $P = P_0$ correspond ainsi à :

$$W = -P_0 \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V \quad \text{soit} \quad W = -P_0 \, (V_2 - V_1)$$

Lors d'une transformation à volume constant (isochore), il n'y a pas de variation de volume donc le travail de forces de pression est nul.

Exercice d'application 7.3 – Travail des forces de pression lors d'une transformation isotherme

De l'air, considéré comme un gaz parfait, initialement à une pression de 1 bar et occupant un volume de 5 L, est comprimé à température constante jusqu'à occuper un volume de 3 L. Calculez le travail des forces de pression lors de cette transformation. Ce travail est-il gagné ou perdu par l'air ?

SOLUTION. Pour une transformation isotherme à $T = T_0$, la pression P est fonction du volume V. Dans le cas d'un gaz parfait, on a donc :

$$\delta W = -P\mathrm{d}V \quad \text{avec} \quad P = n\frac{R \, T_0}{V} \quad \text{d'où} \quad W = -n \, R \, T_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

L'intégration et l'utilisation de l'équation d'état des gaz parfaits conduit à :

$$W = n\,R\,T_0\,\ln\frac{V_1}{V_2} \quad \text{et} \quad W = P_1\,V_1\,\ln\frac{P_2}{P_1} \quad \text{soit} \quad W = 255\ \text{J}$$

Le résultat étant positif, ce travail est reçu par l'air.

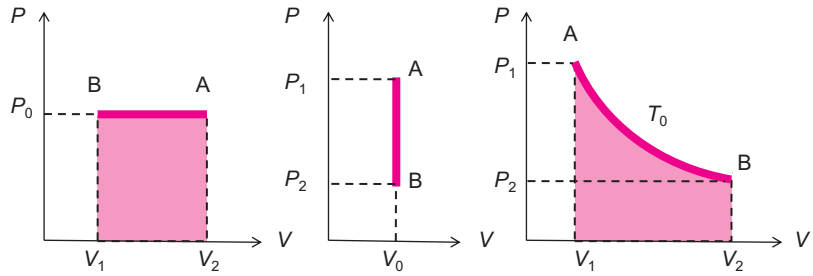


Figure 7.4 **Travail des forces de pression lors d'une transformation isobare, isochore et isotherme d'un gaz parfait**

Ces travaux correspondent à l'*aire sous la courbe* dans le diagramme $P(V)$.

7.5.4 Transferts thermiques

Lors d'une transformation infinitésimale (sans changement d'état du système), le transfert thermique δQ entre le système et le milieu extérieur est proportionnel à la variation de température $\mathrm{d}T$ de ce système. Le coefficient de proportionnalité est appelé **capacité thermique.** Comme ces capacités sont proportionnelles à la masse (ou à la quantité de matière) contenu dans le système, on préfère souvent utiliser des capacités thermiques massiques c ($\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$) ou des capacités thermiques molaires C ($\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$), soit :

Voir ch. 10

$$\delta Q = m\,c\,\mathrm{d}T \quad \text{ou} \quad \delta Q = n\,C\,\mathrm{d}T$$

Les capacités thermiques sont généralement constantes sur des intervalles limités de température $\Delta T = T_2 - T_1$, d'où :

$$Q = m\,c\,\Delta T \quad \text{ou} \quad Q = n\,C\,\Delta T$$

Les capacités thermiques des solides et des liquides (états condensés) varient très peu avec le type de transformation. En revanche, les capacités thermiques des gaz (états dilués) dépendent fortement de la transformation considérée, il existe donc une infinité de capacités thermiques envisageables. Deux d'entre elles sont particulièrement utiles : la capacité thermique à volume constant (massique c_V ou molaire C_V) et la capacité thermique à pression constante (massique c_P ou molaire C_P).

$$M\,c_V = n\,C_V \quad \text{et} \quad m\,c_P = n\,C_P$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Ainsi, lors d'une transformation isochore ou isobare d'un gaz parfait**,** les transferts thermiques sont respectivement :

$$Q_V = m\, c_V\, \Delta T \quad \text{ou} \quad Q_P = m\, c_P\, \Delta T$$

Une transformation isotherme est également le siège de transferts thermiques avec le milieu extérieur (pour que le système puisse rester à la même température). Le calcul direct de la chaleur échangée ne sera abordé qu'au chapitre 8.

Remarque

La valeur particulièrement élevée de la capacité thermique massique de l'eau liquide (c = 4 186 J · kg^{-1} · K^{-1}) fait de ce liquide un très bon *fluide caloporteur***.**

7.5.5 Travail et chaleur échangés lors d'un changement d'état

Le passage du corps d'un état physique à un autre, s'accompagne d'une variation de masse volumique du corps et d'un transfert thermique.

Le travail des forces de pression lors du changement d'état, à pression constante, est directement lié à la variation de volume du corps avant et après le changement d'état. Cependant, lors d'une fusion ou une solidification, la variation de volume est faible (états condensés) et le travail des forces de pression est proche de 0.

La chaleur nécessaire à un corps pur de masse m pour changer d'état, à pression constante, ne dépend que de la température T :

$$Q_P = m\, L\,(T)$$

La quantité L (J · kg^{-1}) est appelée **enthalpie massique de changement d'état**. On distingue l'enthalpie massique de vaporisation L_v, l'enthalpie massique de fusion L_f et l'enthalpie massique de sublimation L_s. De même, on définit une **enthalpie molaire** de changement d'état L_m (J · mol^{-1}) comme :

$$L_m\,(T) = M\, L\,(T) \quad \text{d'où} \quad Q_P = n\, L_m\,(T)$$

La fusion, la vaporisation et la sublimation d'un corps absorbent de la chaleur : $L\,(T) > 0$. Les corps dégagent la même quantité de chaleur lors des transitions inverses, autrement dit une liquéfaction se caractérise par une enthalpie de changement d'état de $-\,L_v$, une solidification par $-\,L_f$ et une condensation par $-\,L_s$.

Exercice d'application 7.4 – Transferts thermiques avec changements d'état

Quelle quantité de chaleur faut-il fournir, à pression atmosphérique, à 100 g de glace, initialement à – 5 °C pour la transformer en vapeur d'eau à 110 °C ?
On donne les capacités thermiques massiques de la glace c_1 = 2,09 J · g^{-1} · K^{-1}, de l'eau liquide c_2 = 4,18 J · g^{-1} · K^{-1}, de la vapeur c_3 = 1,87 J · g^{-1} · K^{-1} et les enthalpies massiques de fusion de la glace L_f = 335 kJ · kg^{-1} et de vaporisation de la vapeur d'eau L_v = 2 257 kJ · kg^{-1}.

SOLUTION. Il faut successivement :
1. chauffer la glace de $T_1 = -5\ °C$ à $T_2 = 0\ °C$: $Q_1 = m\ c_1\ (T_2 - T_1)$ soit $Q_1 = 1\ 045$ J,
2. la faire fondre à $T_2 = 0\ °C$: $Q_2 = mL_f$ soit $Q_2 = 33\ 500$ J,
3. chauffer l'eau de $T_2 = 0\ °C$ à $T_3 = 100\ °C$: $Q_3 = m\ c_2\,(T_3 - T_2)$ soit $Q_1 = 41\ 800$ J,
4. la vaporiser à $T_3 = 100\ °C$: $Q_2 = mL_v$ soit $Q_4 = 225\ 700$ J,
5. chauffer la vapeur de $T_3 = 100\ °C$ à $T_4 = 110\ °C$: $Q_5 = m\ c_3\,(T_4 - T_3)$ soit $Q_5 = 1\ 870$ J.

La quantité totale de chaleur à fournir est $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 303\ 700$ J.
On remarque que 75 % de cette énergie est fournie uniquement lors de la vaporisation.

7.6 VALIDITÉ DES FORMULES

7.6.1 Conditions de réversibilité

Les calculs thermodynamiques ne sont rigoureusement exacts que pour des transformations définies par une suite d'états d'équilibre infiniment proches où les paramètres d'état (pression, température) sont parfaitement connus à tout instant : ces transformations idéales sont appelées **réversibles**.

En pratique, aucune évolution physique n'est strictement réversible car au cours d'une transformation, le système ne peut pas toujours être en équilibre puisque les grandeurs qui le définissent varient obligatoirement d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre. Cependant, pour des transformations où l'on maîtrise l'évolution du système en modifiant progressivement la contrainte extérieure, les paramètres auront le temps de s'uniformiser et le système peut alors passer par une succession d'états d'équilibre très proches les uns des autres : ces transformations sont dites **quasi statiques** car obligatoirement lentes.

La **réversibilité mécanique** exige que les pressions interne et externe au système restent (quasi) égales à tout moment de la transformation. La transformation est réversible si sa durée est grande devant un temps de relaxation τ défini comme le rapport d'une longueur L sur la vitesse du son c dans le corps. Ainsi, la compression d'air ($c = 340\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) dans un cylindre de longueur $L = 0{,}1$ m, donne $\tau \approx 3 \cdot 10^{-4}$ s : la condition de réversibilité mécanique est donc peu sévère.

La **réversibilité thermique** exige que les températures interne et externe au système restent (quasi) égales à tout moment de la transformation. Le temps de relaxation est ici le temps nécessaire à l'égalisation des températures. Le temps de relaxation τ est le rapport du carré d'une longueur L sur la diffusivité thermique a du corps (transfert thermique par diffusion). Pour $L = 0{,}1$ m et $a = 2{\cdot}10^{-5}\ \text{m}^2{\cdot}\text{s}^{-1}$ (air), on obtient $\tau \approx 500$ s. Les phénomènes thermiques (plus généralement, les phénomènes diffusifs) ont des temps de relaxation bien plus longs que les phénomènes mécaniques (phénomènes

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

propagatifs). La réversibilité d'une transformation est donc en général contrôlée par les transferts thermiques.

7.6.2 Résoudre un problème de thermodynamique

Face à un problème de thermodynamique, un peu de méthode permet d'aborder plus efficacement la tâche. La démarche proposée est définie en huit étapes :

1. **Système** : quelles sont la nature et les limites du système (éventuellement des sous-systèmes) ? Est-il est fermé (vase clos) ou isolé. Quelle est sa masse ?

2. **Modèle** : choisir le modèle à appliquer au comportement de la substance étudiée : solide rigide (équilibre des forces), liquide incompressible (relation fondamentale de l'hydrostatique), gaz parfait (équation d'état)...

3. **Évolution** : quel est le type de transformation (isotherme, isochore, isobare) ?

4. **État initial** : quelles sont les variables connues pour l'état initial ?

5. **État final** : que sait-on de l'état final ?

6. **Diagramme** : visualiser les données du problème dans un diagramme adapté.

7. **Analyse** : repérer tous les échanges d'énergie possible à travers les limites du système (perte ou apport de chaleur, travail reçu ou cédé...).

8. **Résolution** : comment procéder pour trouver la solution du problème ? (étapes du calcul, combinaison de formules...).

Remarque

Cette démarche est très souvent abrégée dans le cas de problèmes simples. Cependant, en face d'un problème nouveau, il est intéressant de répondre précisément à chaque question successivement, soit par écrit, soit simplement par la pensée.

À retenir

Système *:* l'objet de l'étude

Température *:* légale et absolue avec θ (°C) = T (K) − 273

Pression *:* force pressante : $\mathrm{d}F = P\,\mathrm{d}S$; hydrostatique : $P_B - P_A = \rho g\,(z_B - z_A)$

Gaz parfaits : équation d'état $PV = nRT$ avec $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

Transformations particulières d'un gaz parfait en vase clos *:*

indice 1 : état initial – indice 2 : état final

Isotherme T_0 = constante	**Isobare** P_0 = constante	**Isochore** V_0 = constante
$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)$	$V_2 = V_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)$	$P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Transferts d'énergie lors de transformations d'un gaz parfait en vase clos :

c_P : capacité thermique massique à pression constante ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)

c_V : capacité thermique massique à volume constant ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)

Transformation	Travail	Chaleur
Élémentaire réversible	$\delta W = - P \, dV$	$\delta Q = m \, c \, dT$
Isobare Isochore	$W = - P_0 \, (V_2 - V_1)$ $W = 0$	$Q = m \, c_P \, (T_2 - T_1)$ $Q = m \, c_V \, (T_2 - T_1)$
Isotherme (gaz parfait)	$W = n \, R \, T_0 \ln \frac{V_1}{V_2}$	$Q \neq 0$

Transferts d'énergie lors de changements d'état :

indices des volumes V : g pour gaz, l pour liquide, s pour solide

indices des enthalpies de changement d'état L : f pour fusion, v pour vaporisation, s pour solidification.

Transformation	Travail	Chaleur
Fusion Vaporisation Sublimation	$W \approx 0$ $W = - P \, (V_g - V_l)$ $W = - P \, (V_g - V_s)$	$Q = m \, L_f$ $Q = m \, L_v$ $Q = m \, L_s$
Solidification Liquéfaction Condensation	$W \approx 0$ $W = P \, (V_g - V_l)$ $W = P \, (V_g - V_s)$	$Q = - m \, L_f$ $Q = - m \, L_v$ $Q = - m \, L_s$

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 603.

7.1 Presse hydraulique

Un récipient en forme de U contenant de l'huile est fermé à ses deux extrémités par deux pistons coulissants A et B situés dans un même plan horizontal. On exerce sur le piston A de section $s = 10$ cm^2, une force $f = 10$ N. Quelle est la force F transmise à l'autre piston B de section $S = 1\,000$ cm^2 ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

7.2 Injection de deux gaz parfaits dans un réservoir

Du dioxygène contenu dans une bouteille de volume $V_1 = 1$ L à $T_1 = 20$ °C sous $P_1 = 3$ bars et du dioxyde de carbone contenu dans une autre bouteille de volume $V_2 = 3$ L à $T_2 = 50$ °C sous $P_2 = 2$ bars, sont introduits en totalité dans un réservoir de volume $V = 5$ L initialement vide. La température après mélange est $T = 40$ °C. Calculez la pression finale P dans le réservoir et les pressions partielles p_1 et p_2 du dioxygène et de dioxyde de carbone.

7.3 Chaleur échangée lors du refroidissement isobare d'un gaz

On refroidit 20 g d'air que l'on supposera parfait, de 150 °C à 20 °C à pression constante. Calculez le transfert thermique avec le milieu extérieur. Dans quel sens ce transfert thermique s'effectue-t-il ?

On donne les capacités thermiques de l'air : $C_V = 20{,}8$ J·mol^{-1}·K^{-1}, $c_V = 720$ J·kg^{-1}·K^{-1}, $C_P = 29{,}1$ J · mol^{-1} · K^{-1}, $c_P = 1\,005$ J · kg^{-1} · K^{-1}.

7.4 Transformations successives d'un gaz parfait

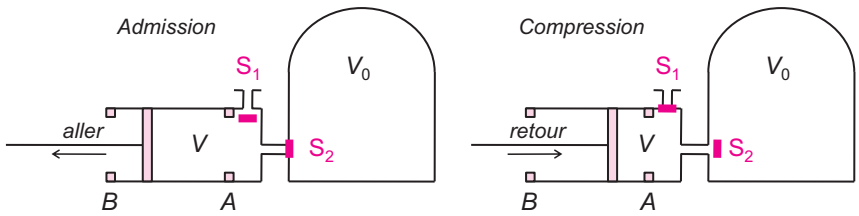
On considère un récipient fermé par un piston contenant de la vapeur d'eau considérée comme un gaz parfait (masse molaire $M = 18$ g · mol^{-1} et $R = 8{,}31$ J · mol^{-1} · K^{-1}). Au départ (état initial A_1), la vapeur d'eau est à une pression $P_1 = 4$ bars, une température $\theta_1 = 150$ °C et occupe un volume $V_1 = 2$ L. Elle subit les trois transformations successives suivantes : un chauffage (A_1A_2) à pression constante (4 bars) portant sa température à $\theta_2 = 900$ °C, suivi d'une compression (A_2A_3) à température constante (900 °C) portant sa pression à $P_3 = 25$ bars et enfin un refroidissement (A_3A_4) à volume constant ramenant sa pression à $P_4 = 10$ bars. Déterminez successivement :

a) La masse m de vapeur d'eau dans le récipient,
b) Le volume V_2 occupé par la vapeur d'eau à la fin du chauffage A_1A_2,
c) Le volume V_3 occupé par la vapeur d'eau à la fin de la compression A_2A_3,
d) La température T_4 de la vapeur d'eau à la fin du refroidissement A_3A_4.
e) Représentez l'allure de ces transformations dans un diagramme $P(V)$.

7.5 Compresseur volumétrique

On comprime l'air d'un réservoir de volume V_0 à l'aide d'une pompe constituée d'un cylindre (corps de pompe), d'un piston mobile et de deux soupapes S_1 et S_2. La soupape S_1 s'ouvre dès que la pression dans le cylindre est inférieure ou égale à celle de l'atmosphère et reste fermée dans le cas contraire. La soupape S_2 s'ouvre dès que la pression dans le cylindre est supérieure ou égale à celle du réservoir et reste fermée dans le cas contraire.

En position enfoncée (A), le volume dans le cylindre est v (volume « mort ») ; en position tirée (B), le volume du cylindre est V (comprenant le volume mort). La pression initiale dans le réservoir est égale à la pression atmosphérique P_0. L'air est considéré comme un gaz parfait et les transformations sont supposées isothermes. On prendra $P_0 = 1$ bar, $V_0 = 100$ L, $V = 10$ L et $v = 1$ L.



a) Exprimez la pression P_1 dans le réservoir V_0 après le premier cycle aller-retour du piston en fonction de P_0 et des différents volumes V_0, V et v.

b) Exprimez les pressions P_2 et P_3 dans le réservoir V_0 après le deuxième et le troisième cycle aller-retour du piston.

c) Les pressions successives dans le réservoir tendent vers une limite P_L. Expliquez la raison technique de cette pression limite puis calculer la valeur de P_L.

7.6 Comparaison d'évolutions entre deux états

Un récipient de volume $V_A = 10$ L, fermé par un piston, contient 2 moles d'air (gaz parfait) initialement à la température de 20 °C. On porte de façon quasi statique le volume d'air à une valeur $V_B = 25$ L et à une température de 150 °C. Le passage de l'état A à l'état B s'effectue de deux manières différentes. Le trajet 1 suit d'abord un chauffage isochore puis un refroidissement isobare de V_A à V_B et le trajet 2 suit d'abord un refroidissement isobare de V_A à V_B, puis un chauffage isochore.

On donne $R = 8{,}31$ J·mol^{-1}·K^{-1} et les capacités thermiques de l'air : $C_V = 20{,}8$ J.mol^{-1}.K^{-1}, $c_V = 720$ J · kg^{-1} · K^{-1}, $C_P = 29{,}1$ J · mol^{-1} · K^{-1}, $c_P = 1\,005$ J · kg^{-1} · K^{-1}.

a) Représentez les deux évolutions précédentes dans un diagramme P (V).

b) Déterminez les pressions P_A et P_B et les températures intermédiaires T_1 et T_2 respectivement en fin de chauffage isochore dans le trajet 1 et en fin de refroidissement isobare dans le trajet 2.

c) Exprimez et calculez les travaux W_1 et W_2 et les chaleurs échangées Q_1 et Q_2 correspondant respectivement aux trajets 1 et 2. Que constatez-vous lorsque vous comparez la somme des énergies échangées $W_1 + Q_1$ et $W_2 + Q_2$?

8

LES DEUX PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

PRÉALABLES

- Modèle du gaz parfait, transformations isobares, isothermes et isochores
- Travail et chaleur échangés avec le milieu extérieur
- Bases sur les changements d'état d'un corps pur

MOTS CLÉS

- Bilan énergétique, transformation adiabatique
- Irréversibilité, entropie, source thermique
- Gaz réels, diagramme des corps purs, pression de vapeur saturante

OBJECTIFS

- Établir un bilan énergétique entre deux états d'équilibre.
- Introduire un critère d'évolution.
- Savoir utiliser des tables thermodynamiques.

La thermodynamique repose sur deux propositions fondamentales : la première proposition, appelée premier principe, s'appuie sur le concept d'énergie et exprime une propriété de conservation ; la seconde proposition appelée deuxième principe, introduit le concept plus subtil d'entropie et exprime une propriété d'évolution.

8.1 LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Le premier principe de la thermodynamique généralise la notion de conservation de l'énergie. Il établit le bilan d'énergie entre deux états d'équilibre connus.

Énoncé du premier principe

Lors d'une transformation entre deux états d'équilibre, la variation d'énergie ΔE *du système est la somme algébrique des énergies thermique* Q *et non thermique* W *(les*

travaux des forces extérieures) échangées par le système avec le milieu extérieur.

$$\Delta E = \Delta E_m + \Delta U = W + Q$$

Pour un système au repos, énergie cinétique et énergie potentielle ne varient pas, la variation d'énergie du système se réduit alors à sa variation d'énergie interne :

$$\Delta U = W + Q$$

Pour des états d'équilibre infiniment proches, le premier principe peut s'écrire sous forme différentielle :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Exercice d'application 8.1 – Convention de signe

Au cours d'une transformation d'un système fermé, l'énergie interne augmente de 60 kJ. Le système fournit au milieu extérieur un travail de 100 kJ. Calculez la chaleur échangée par le système avec le milieu extérieur. Dans quel sens le transfert thermique s'effectue-t-il ?

SOLUTION. Le premier principe dit $\Delta U = W + Q$ d'où $Q = \Delta U - W$ avec $\Delta U = 60$ kJ et $W = -100$ kJ (négatif car cédé par le système) soit $Q = 160$ kJ. Le système a reçu cette chaleur ($Q > 0$).

8.1.1 Énergie interne et enthalpie

L'énergie interne d'un corps dépend principalement de sa température mais aussi de son volume : $U = U(T,V)$. Cependant, lors d'une **transformation à volume constant** d'un système gazeux en vase clos, le travail de forces de pression est nul. Le premier principe implique que la chaleur échangée Q_V est égale à la variation d'énergie interne du système :

$$W_V = 0 \quad \text{d'où} \quad Q_V = \Delta U_V \quad \text{soit} \quad \Delta U_V = n\, C_V\, \Delta T$$

Par ailleurs, lors d'une **transformation à pression constante,** la chaleur échangée est égale à :

$$Q_P = \Delta U_P - W \quad \text{avec} \quad W = -P_0\, \Delta V \quad \text{soit} \quad Q_P = \Delta U_P + P_0\, \Delta V$$

$$Q_P = (U_2 - U_1) + P_0\,(V_2 - V_1) = (U_2 + P_2V_2) - (U_1 + P_1V_1) = \Delta\,(U + PV)$$

Comme $P_0 = P_1 = P_2$, la chaleur échangée lors d'une transformation isobare représente la variation d'une quantité $U + PV$ appelée **enthalpie** du système **:**

$$Q_P = \Delta H_P \quad \text{avec} \quad H = U + PV \quad \text{d'où} \quad \Delta H_P = n\, C_P\, \Delta T$$

Pour une transformation quelconque, l'enthalpie d'un corps dépend à la fois de sa température et de sa pression : $H = H\,(T,P)$. Comme l'énergie interne, l'enthalpie est une fonction d'état ayant la dimension d'une énergie (J).

Les transferts thermiques lors de transformations isochores permettent d'évaluer expérimentalement les variations d'énergie interne d'un système, alors que celles mesurées lors de transformations isobares donnent accès aux variations d'enthalpie du système : U et H ne sont donc définies qu'à une constante additive près.

Remarque

Pour les solides ou les liquides, le travail des forces de pression peut souvent être négligé (états condensés peu compressibles : $\Delta V = 0$), alors $C_V = C_P$ d'où $\Delta U = \Delta H = n\,C\,\Delta T$.

8.1.2 Transformation adiabatique

Définition

Une transformation est dite **adiabatique** s'il n'y a aucun transfert thermique entre le système et le milieu extérieur (le système est thermiquement isolé ou calorifugé).

Dans ces conditions $Q = 0$, le premier principe se réduit à $\Delta U = W$.

Remarque

Bien faire la distinction entre *transformation adiabatique* (pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur) et *transformation isotherme* (pas de variation de température du système). Une transformation adiabatique implique que la température du système varie (souvent très fortement) alors qu'une transformation isotherme n'est possible que si elle échange de la chaleur avec le milieu extérieur afin de maintenir sa température toujours constante.

8.1.3 Transformation cyclique

Une évolution cyclique se caractérise par un état final identique à l'état initial. La variation d'énergie interne entre ces deux états est donc toujours nulle :

$$\Delta U = U_1 - U_1 = 0 \quad \text{donc} \quad Q = -W$$

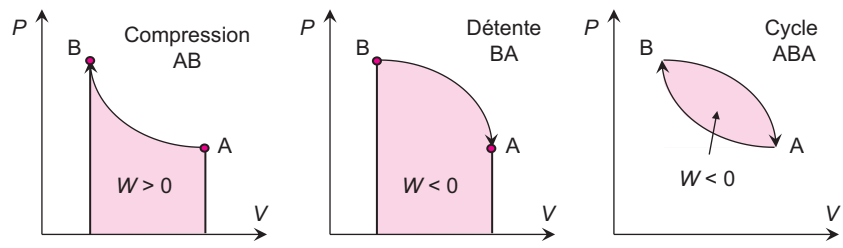


Figure 8.1 **Travail des forces de pression lors d'un cycle**

Le travail est représenté par l'aire du cycle dans un diagramme $P\,(V)$: un *cycle récepteur* ($W > 0$) correspond à un cycle décrit dans le *sens trigonométrique*, un *cycle moteur* ($W < 0$) correspond au *sens horaire*. Le cycle arbitraire ABA dessiné ci-dessus est moteur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.2 Le second principe de la thermodynamique

Certaines transformations satisfaisant le premier principe (équivalentes en termes énergétiques) ne se réalisent pas en réalité. Ainsi, la chaleur passe toujours spontanément (évolution naturelle pas obligatoirement brutale ou rapide, sans intervention extérieure, en particulier sans apport d'énergie) d'un corps chaud vers un corps froid, jamais l'inverse. De même, si l'on met en communication une bouteille remplie de gaz et une autre bouteille vide, le gaz occupe très vite la totalité du volume offert, jamais l'inverse. Enfin, lors du freinage d'un véhicule, la température des freins s'élève. En revanche, il n'est pas possible de faire avancer le véhicule en chauffant les freins...

En d'autres termes, le premier principe ne tient pas compte de l'irréversibilité du temps et il est nécessaire d'introduire un second principe pour permettre la prévision de l'état d'équilibre final d'un système évoluant librement.

8.2.1 Transformations irréversibles

Considérons une enveloppe isolée constituée de deux compartiments séparés par une cloison. Chaque compartiment contient un système simple dont les conditions initiales sont connues. La cloison représente une *contrainte* qui empêche tout échange entre les deux systèmes. La suppression de la contrainte va autoriser chaque système à évoluer librement vers un nouvel état d'équilibre si bien que l'on ne peut pas connaître les états d'équilibre intermédiaires (par exemple : mélange de liquides miscibles, détente d'un gaz dans le vide, réactions chimiques en général...).

Définition

Les transformations, où seuls les états initial et final sont connus, sont dites **irréversibles** car elles ne peuvent pas revenir à l'état initial en repassant par les mêmes états intermédiaires.

8.2.2 Entropie d'un système

Pour un système mécanique, les états d'équilibre stable correspondent aux minimums de la fonction « énergie potentielle ». La construction d'une telle fonction en thermodynamique a abouti à la notion d'entropie où les états d'équilibres thermodynamiques correspondent aux maximums de la fonction « entropie ».

Définition

À tout système est associée une fonction appelée **entropie**, notée S, dont la variation ne dépend que des transferts thermiques avec le milieu extérieur.

Pour une **transformation réversible**, elle s'exprime par : $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$

Pour une **transformation irréversible**, on a : $\mathrm{d}S > \dfrac{\delta Q_{\text{irrév}}}{T}$

La température T est la température (absolue) à l'interface de contact entre le système et le milieu extérieur. Tout transfert non thermique est sans effet sur l'entropie du système.

Remarque

Un système en équilibre (qui n'évolue plus) a nécessairement une *entropie maximale* : il ne peut pas évoluer *spontanément* car sa variation d'entropie serait alors négative.

L'entropie n'est pas une forme d'énergie : elle s'exprime en $\mathrm{J \cdot K^{-1}}$. C'est une fonction d'état : lors d'une transformation, la variation d'entropie du système ne dépend que de son état d'équilibre initial et de son état d'équilibre final et pas de la façon dont s'est déroulée la transformation :

$$\Delta S = S_2 \text{ (final)} - S_1 \text{ (initial)}$$

L'entropie est une grandeur additive : l'entropie d'un système (Σ) est la somme des différentes entropies des sous-systèmes (Σ_1) et (Σ_2) constituant le système :

$$S\,(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = S\,(\Sigma_1) + S\,(\Sigma_2)$$

Remarque

Seule une variation d'entropie est physiquement mesurable. L'entropie d'un système (comme l'énergie interne et l'enthalpie) ne peut être définie qu'à une constante additive près. Le troisième principe de la thermodynamique permet de fixer arbitrairement cette constante : l'entropie de tous les corps purs est nulle à la température du zéro absolu (0 K).

Énoncé du second principe

Lors d'une transformation spontanée, la variation d'entropie du système $\Delta \mathrm{S}$ *est la somme d'une entropie d'échange* S_e *et d'une production entropie* S_p*. L'entropie produite est nulle pour une transformation réversible, elle est strictement positive pour une transformation irréversible.*

$$\Delta \mathrm{S} = \mathrm{S}_e + \mathrm{S}_p \quad \textit{avec} \quad \mathrm{S}_p\,\textit{(rév)} = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{S}_p\,\textit{(irrév)} > 0$$

En effet, l'expression de l'entropie peut être réécrite comme :

$$\mathrm{d}S \geqslant \frac{\delta Q}{T} \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_\mathrm{p} \quad \text{avec} \quad \delta S_\mathrm{p} \geqslant 0$$

Le terme $\delta Q/T$ est assimilé à une entropie d'échange, notée δS_e, résultant du transfert thermique avec le milieu extérieur à travers les frontières du système.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Selon, le caractère réversible ou irréversible de la transformation, la variation d'entropie du système est respectivement :

$$\Delta S\,(\text{syst}) = \int_{\text{rév}} \frac{\delta Q\,(\text{syst})}{T} \quad \text{ou} \quad \Delta S\,(\text{syst}) = \int_{\text{irrév}} \frac{\delta Q\,(\text{syst})}{T} + S_p$$

Un système hors équilibre va évoluer naturellement (spontanément) dans le sens d'une création d'entropie. Le terme S_p constitue donc bien le critère de prévision de l'évolution du système.

Remarque

La valeur numérique de S_p mesure le *degré d'irréversibilité* de la transformation. En revanche, si un calcul donne $S_p < 0$, alors la transformation est impossible *spontanément*.

INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE L'ENTROPIE

Voir chapitre 9

En thermodynamique statistique, le concept d'entropie s'interprète comme une mesure du *désordre* interne du système : plus l'entropie est grande, plus le système est désordonné. Ainsi, un système évoluant spontanément évolue dans le sens d'une augmentation d'entropie donc de désordre.

En thermodynamique classique, la production d'entropie se faisant au détriment de la production d'énergie mécanique, la notion d'entropie est donc à la base des calculs du *rendement* des machines thermiques.

8.2.3 Étude de l'irréversibilité

Seules les transformations réversibles permettent de faire des calculs. Contrairement à ΔS, les termes S_e et S_p ne sont pas des fonctions d'état et dépendent donc du type de transformation : ils ne sont pas calculables directement. Cependant, l'additivité de l'entropie appliquée à l'univers (système + milieu extérieur) associé au second principe appliqué au système permet d'écrire :

$$\Delta S\,(\text{univ}) = \Delta S\,(\text{syst}) + \Delta S\,(\text{ext}) \quad \text{et} \quad \Delta S\,(\text{syst}) = S_e + S_p$$

Par identification de ces deux expressions, on pose que :

$$S_p = \Delta S\,(\text{univ}) \quad \text{et} \quad S_e = -\,\Delta S\,(\text{ext})$$

En particulier, en tant que fonction d'état, ΔS (ext) peut être calculée sur n'importe quelle transformation réversible respectant les mêmes états d'équilibre initial et final que la transformation réelle. L'entropie d'échange et la production d'entropie S_e et S_p s'écrivent alors :

$$S_e = -\int_{\text{rév}} \frac{\delta Q\,(\text{ext})}{T_{\text{ext}}} \quad \text{et} \quad S_p = \Delta S\,(\text{syst}) - S_e$$

L'étude des transformations irréversibles est ainsi possible en utilisant n'importe quelle transformation réversible (en général fictive) faisant passer le système du même état initial au même état final.

8.2.4 Notion de source de chaleur (ou source thermique)

Définition

Une source de chaleur est un système qui n'échange de l'énergie que par transfert thermique.

Lorsqu'une source de chaleur est un milieu de grande dimension (lac, atmosphère...) devant celle du système, la température de ce milieu n'est alors quasiment plus affectée par les échanges thermiques. La température d'une telle source de chaleur reste uniforme (on parle alors de thermostat), les évolutions y sont alors considérées comme réversibles. Sa variation d'entropie s'exprime simplement :

$$\Delta S \text{ (source)} = \frac{Q \text{ (source)}}{T_{\text{source}}}$$

De plus, en raison de la conservation de l'énergie (premier principe), on a : Q (source) = – Q (système). L'entropie d'échange d'un système en contact avec une source de chaleur à température constante est donc :

$$S_e = \frac{Q \text{ (syst)}}{T_{\text{source}}}$$

Remarque

Comme la variation d'entropie du système dépend du sens des transferts thermiques, on a ΔS (syst) > 0 si $Q > 0$ et ΔS (syst) < 0 si $Q < 0$.

8.3 Application aux gaz parfaits

8.3.1 Capacités thermiques des gaz parfaits

L'énergie interne et l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépendent que de la température (ces deux propriétés sont connues sous le nom de « lois de Joule »). Les expressions de la variation d'énergie interne à volume constant et de la variation d'enthalpie à pression constante se généralisent pour toutes les transformations :

$$\Delta U = n\, C_V\, \Delta T \quad \text{et} \quad \Delta H = n\, C_P\, \Delta T$$

En dérivant l'expression de l'enthalpie par rapport à la température, on a :

$$H = U + PV = U + nRT \quad \text{soit} \quad \frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR$$

$$\text{Or} \quad dH = n\, C_P\, dT \quad \text{et} \quad dU = n\, C_V\, dT \quad \text{d'où} \quad C_P - C_V = R$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En introduisant le rapport des capacités thermiques γ, on obtient :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \quad \text{d'où} \quad C_P = \frac{\gamma\, R}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Pour un gaz parfait monoatomique (constitué d'un seul atome), on a :

$$\gamma = 5/3 = 1{,}67 \quad \text{soit} \quad C_P = 20{,}8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad C_V = 12{,}5 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Pour un gaz parfait diatomique (deux atomes) :

$$\gamma = 7/5 = 1{,}40 \quad \text{soit} \quad C_P = 29{,}1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad \text{et} \quad C_V = 20{,}8 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Pour des gaz d'atomicité supérieure à 3, la valeur de γ est plus complexe.

ÉNERGIE CINÉTIQUE INTERNE

L'énergie interne d'un gaz parfait représente l'énergie cinétique moyenne de ses molécules. Pour les gaz monoatomiques, il s'agit d'une énergie de translation répartie équitablement dans les trois directions de l'espace.
Pour les gaz diatomiques, il s'y ajoute une énergie de rotation dans deux directions de l'espace (perpendiculaires à l'axe de symétrie de la molécule). Enfin, aux hautes températures intervient également une énergie de vibration qui élève encore l'énergie interne du gaz.

Exercice d'application 8.2 – Transformation isotherme d'un gaz parfait

Deux moles d'air considérées comme un gaz parfait ($R = 8{,}31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$) subissent une compression réversible de 0,5 à 5 bars à température constante de 50 °C. Quelle est la chaleur échangée par l'air avec l'extérieur ?

SOLUTION. Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait, son énergie interne ne varie pas car elle ne dépend que de la température $U = U(T)$. La chaleur échangée est alors l'opposé du travail isotherme d'un gaz parfait :

$$\Delta U = 0 \quad \text{d'où} \quad Q = -W \quad \text{avec} \quad W = n\, R\, T_0 \ln \frac{V_1}{V_2} = n\, R\, T_0 \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{soit} \quad Q = -12\,360 \text{ J}$$

8.3.2 Transformations adiabatiques d'un gaz parfait

Considérons une transformation adiabatique faisant passer un gaz parfait de l'état (P, V, T) à l'état infiniment voisin ($P + \mathrm{d}P$, $V + \mathrm{d}V$, $T + \mathrm{d}T$) de façon réversible. On peut écrire les relations :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}U = n\, C_V\, \mathrm{d}T, \quad \delta W = -P\, \mathrm{d}V \quad \text{et} \quad \delta Q = 0 \quad \text{soit} \quad n\, C_V\, \mathrm{d}T = -P\, \mathrm{d}V$$

En introduisant la différentielle de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$PV = nRT \quad \text{soit} \quad P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = nR\,\mathrm{d}T$$

En notant que $C_P - C_V = R$ et en posant $\gamma = C_P/C_V$, on obtient finalement :

$$C_P\,P\,\mathrm{d}V + C_V\,V\,\mathrm{d}P = 0 \quad \text{soit} \quad \gamma P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}P}{P} + \frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

Par intégration, on a : $\ln P + \gamma \ln V = \ln P + \ln V^\gamma = \ln (PV^\gamma) =$ constante soit :

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad \text{d'où} \quad P_1\,V_1^\gamma = P_2\,V_2^\gamma \quad \text{ou} \quad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$$

On obtient d'autres expressions équivalentes en utilisant l'équation d'état :

$$P^{1-\gamma}\,T^\gamma = \text{constante} \quad \text{ou} \quad T\,V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Remarque

Ces trois expressions (relations de Laplace) ne sont valables que pour les conditions dans lesquelles elles ont été établies : *adiabatique*, *réversible* et *gaz parfait*.

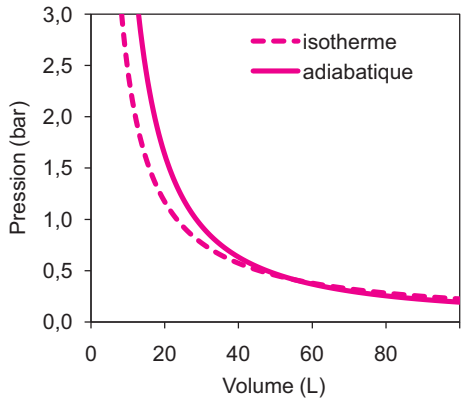


Figure 8.2 Comparaison des pentes d'une adiabatique et d'une isotherme (gaz diatomique)

Comme $\gamma > 1$, la pente associée à une transformation adiabatique en un point quelconque d'un diagramme $P(V)$ est *toujours supérieure* à celle d'une transformation isotherme.

Le travail échangé au cours d'une telle transformation adiabatique est :

$$\delta W = -P\,\mathrm{d}V = -P\,V^\gamma\,\frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma}$$

$$\text{soit} \quad W = -P\,V^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma} = \frac{P\,V^\gamma}{\gamma - 1}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right)$$

$$P\,V^\gamma = P_1\,V_1^\gamma = P_2\,V_2^\gamma = \text{constante}$$

$$\text{d'où} \quad W = \frac{P_2\,V_2 - P_1\,V_1}{\gamma - 1} \quad \text{ou} \quad W = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_2 - T_1)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.3.3 Entropie des gaz parfaits

Lors d'une transformation **isotherme**, la variation d'entropie du système est :

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{rév}}}{T_0} \quad \text{or} \quad Q_{\text{rév}} = -W = nR\,T_0 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad \text{soit} \quad \Delta S = nR\,\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Lors une transformation **isobare**, on a :

$$\delta Q_{\text{rév}} = n\,C_P\,\mathrm{d}T \quad \text{d'où} \quad \Delta S = n\,C_P\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T} \quad \text{soit} \quad \Delta S = n\,C_P\ln\frac{T_2}{T_1}$$

Lors une transformation **isochore**, on aboutit de même à : $\Delta S = n\,C_V\ln\dfrac{T_2}{T_1}$

Lors d'une transformation **adiabatique**, le système n'échangeant pas de chaleur avec le milieu extérieur ($Q_{\text{rév}} = 0$), l'entropie du système reste constante et sa variation est nulle. Une transformation adiabatique réversible est appelée **isentropique** :

$$S_2 = S_1 \quad \text{d'où} \quad \Delta S = 0$$

Lors d'une évolution **cyclique** (état final identique à l'état initial), la variation d'entropie est également nulle.

8.4 Les gaz réels

Dès que l'on quitte le domaine des faibles pressions, on observe des écarts importants à la loi des gaz parfaits. Par ailleurs, contrairement aux gaz parfaits, un gaz réel peut se liquéfier. On se reporte alors à des tables thermodynamiques ou à des diagrammes spécifiques.

8.4.1 Tables thermodynamiques des vapeurs surchauffées

Les tables thermodynamiques des vapeurs surchauffées fournissent, pour certaines conditions de pression P (bars) et de température θ (°C), les valeurs du volume massique v ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$), de l'énergie interne massique u ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$), de l'enthalpie massique h ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$) et de l'entropie massique s ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

8.4.2 Détente isotherme d'un liquide comprimé

Considérons un réservoir fermé par un piston contenant uniquement de l'eau liquide. La température étant maintenue constante, on soulève progressivement le piston. On observe d'abord la détente du liquide (AB) : la pression diminue très rapidement, mais le volume du liquide ne varie que très faiblement. La première bulle de vapeur apparaît en B : la proportion de liquide et de vapeur se modifie ensuite en fonction du volume offert à la vapeur. Le volume augmente considérablement, mais **la pression reste constante tant que liquide et vapeur coexistent**. La dernière goutte de liquide disparaît en D. On assiste enfin à la détente de la vapeur (DE) : le volume augmente et la pression diminue dans le réservoir (portion d'hyperbole).

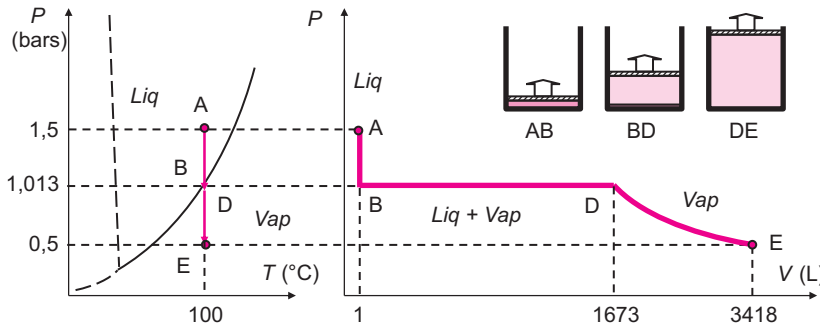


Figure 8.3 **Détente isotherme à partir d'eau comprimée dans un diagramme *P*(*T*) et *P*(*V*)**
La température étant fixée à 100 °C, l'étape de vaporisation s'effectue à la pression constante de 1,013 bar et le volume passe de 1 L à 1 673 L. La chaleur absorbée par 1 kg d'eau pour entièrement se vaporiser à 100 °C est de 2 257 kJ.

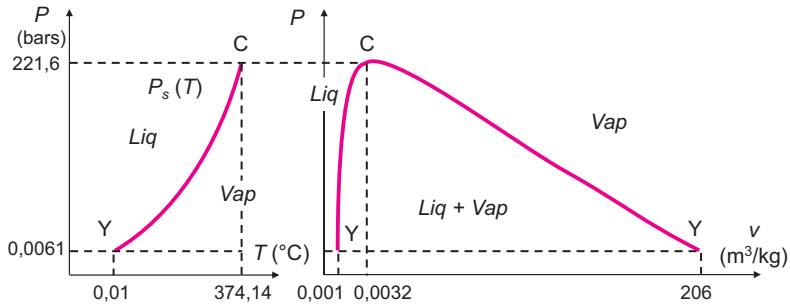


Figure 8.4 **Courbe de vaporisation et courbe de saturation de l'eau**
La *courbe de vaporisation* représente l'évolution de la pression de vapeur saturante avec la température. La *courbe de saturation* représente la courbe limite des *paliers de vaporisation* (points B et D) des isothermes. Les valeurs de la pression et de la température sont comprises entre celles du point triple Y et du point critique C.

Définition

La **saturation** désigne l'état d'équilibre où coexistent le liquide et la vapeur d'un corps pur (même si l'une des phases est en quantité infime). La phase liquide est alors appelée liquide saturant et la phase vapeur est appelée vapeur saturante. La pression d'équilibre de la vapeur est appelée pression de vapeur saturante.

La pression de vapeur saturante P_s est la pression maximale que peut atteindre un gaz (vapeur) sans se liquéfier (condenser). La pression P_s croît avec la température.

8.4.3 Chauffage isochore d'un mélange liquide-vapeur

Considérons un récipient fermé rempli d'un mélange liquide-vapeur d'un même corps pur. Le volume étant constant, la transformation AB est représentée par une verticale sur un diagramme $P(V)$. Pression et température ne sont pas constantes : elles évoluent le long de la courbe de vaporisation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Pour un mélange riche en vapeur ($v > v_c$), la masse de vapeur et la pression augmentent avec l'élévation de la température dans le tube en suivant la courbe de vaporisation du diagramme $P(T)$. On aboutit à la disparition du liquide en B.

Le chauffage d'un mélange initial riche en liquide ($v < v_c$) conduit, contrairement au cas précédent, à une augmentation de la masse du liquide et provoque une surpression qui condense la vapeur. On a disparition de la vapeur en B : le liquide envahit tout le tube.

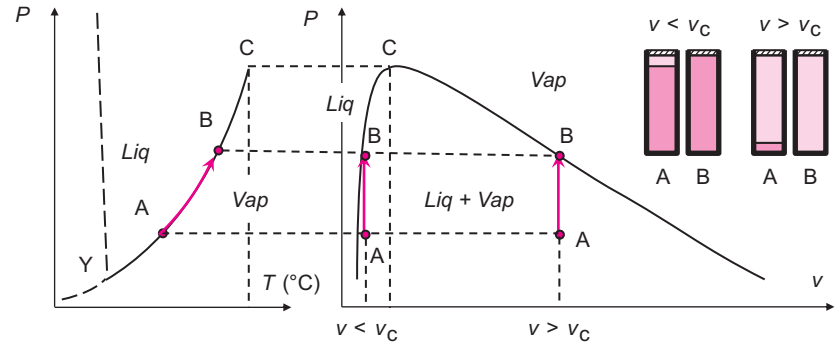


Figure 8.5 **Chauffage isochore d'un mélange d'eau liquide et de vapeur d'eau**

Selon la richesse du mélange en vapeur, on aboutit soit à la disparition de la vapeur ($v < v_c$), soit à la disparition du liquide ($v > v_c$). Dans les proportions du mélange critique aboutissant au point C, la vaporisation du liquide est exactement compensée par la condensation de la vapeur par compression.

STOCKAGE DES FLUIDES

Dans le cas où la température de stockage est inférieure à la température critique du fluide, il est possible de conserver ces fluides en vase clos sous deux phases distinctes (butane, propane). Dans ce cas contraire (He, N_2, O_2, CH_4...), deux possibilités s'offrent alors : soit on fait un stockage à pression élevée dans des tubes en acier fermés (on a alors qu'une seule phase), soit on conserve le liquide en vase calorifugé mais ouvert à l'air libre (la vaporisation d'une partie du liquide au niveau de l'ouverture absorbe de la chaleur et permet de maintenir le liquide restant à la température normale de vaporisation).

8.4.4 Tables thermodynamiques des équilibres liquide-vapeur

Les tables thermodynamiques renseignent également sur la pression de vapeur saturante P_s (bars) et la température correspondante θ (°C) ainsi que sur les volumes massiques ($m^3 \cdot kg^{-1}$), les énergies internes massiques ($kJ \cdot kg^{-1}$), les enthalpies massiques ($kJ \cdot kg^{-1}$) et les entropies massique ($kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$) du liquide saturant v_l, u_l, h_l et s_l et de la vapeur saturante v_v, u_v, h_v et s_v.

Ainsi, un mélange liquide-vapeur est caractérisé par une pression $P = P_s$ et un volume massique v tel que $v_l < v < v_v$, alors qu'une vapeur surchauffée présente toujours une pression $P < P_s$ et un volume massique $v > v_v$.

Les fonctions d'état énergie interne, enthalpie et entropie d'un système diphasé de masse totale $m = m_l + m_v$ peuvent s'exprimer soit en fonction des masses respectives de liquide et de vapeur, soit en fonction du **titre en vapeur** défini comme le rapport de la masse de vapeur sur la masse totale du mélange $x = m_v/m$:

$$U = m_l u_l + m_v u_v \quad \text{soit} \quad U = mu \quad \text{avec} \quad u = (1 - x)\, u_l + x\, u_v$$

$$H = m_l h_l + m_v h_v \quad \text{soit} \quad H = mh \quad \text{avec} \quad h = (1 - x)\, h_l + x\, h_v$$

$$S = m_l s_l + m_v s_v \quad \text{soit} \quad S = ms \quad \text{avec} \quad s = (1 - x)\, s_l + x\, s_v$$

Le titre en vapeur se calcule connaissant les volumes massiques v du mélange, v_l du liquide saturant et v_v de la vapeur saturante :

$$V = V_l + V_v \quad \text{soit} \quad mv = m_l v_l + m_v v_v \quad \text{d'où} \quad v = (1 - x)\, v_l + x v_v \quad \text{soit} \quad x = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$$

Les énergies échangées lors d'une **vaporisation isotherme** correspondent à :

$$Q = m(h_v - h_l) \quad \text{et} \quad W = -mP_s v_v$$

La différence entre l'enthalpie massique du liquide saturant h_l et celle de la vapeur saturante h_v à une température donnée correspond à l'enthalpie massique de vaporisation à pression constante $L_v\,(\theta)$ soit $L_v\,(\theta) = h_v - h_l$.

Remarque

Contrairement à la pression de vapeur saturante, l'enthalpie massique de vaporisation diminue avec la température et s'annule au point critique.

Les énergies échangées lors d'une **vaporisation isochore** correspondent à :

$$Q = m[u_v\,(\theta_2) - u\,(\theta_1)] \quad \text{et} \quad W = 0$$

$u\,(\theta_1)$ est l'énergie interne massique du mélange liquide-vapeur à la température initiale θ_1 et $u_v\,(\theta_2)$ est l'énergie interne massique de la vapeur saturante à la température θ_2 de fin de vaporisation.

RETARDS AUX CHANGEMENTS D'ÉTAT

Exceptionnellement dans une atmosphère débarrassée de poussières, on peut observer un gaz à une pression supérieure à sa pression de vapeur saturante (retard à la liquéfaction) : on parle de *vapeur sursaturée*. De même, dans le cas de liquides très purs et parfaitement dégazés, il est possible d'observer un liquide à une température supérieure à sa température de vaporisation ou d'ébullition (retard à la vaporisation) : on parle de *liquide surchauffé*. On peut également rencontrer des retards à la solidification (liquide en *surfusion*). Ces états sont fortement instables.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.4.5 Vaporisation spontanée à la surface libre d'un liquide

Si l'on introduit de l'eau dans un **récipient fermé** rempli d'air sec à la pression P_0, l'eau se vaporise spontanément jusqu'à ce que la pression partielle de la vapeur d'eau atteigne la pression de vapeur saturante. La présence d'air au-dessus du liquide ne modifie en rien la pression d'équilibre eau – vapeur d'eau.

En revanche, en **milieu ouvert**, la pression partielle de la vapeur ne parvient jamais à atteindre la pression de vapeur saturante (volume illimité). La vaporisation se poursuit jusqu'à disparition totale du liquide quelle que soit la température : on parle alors d'évaporation. Un liquide est d'autant plus volatil que sa pression de vapeur saturante est élevée.

Définition

L'humidité relative *HR* ou le **degré hygrométrique** correspond au rapport (en %) de la pression partielle de la vapeur sur celle de sa vapeur saturante dans les mêmes conditions de température :

$$HR = \frac{p_{\text{vap}}(T)}{P_{\text{s}}(T)}$$

Enfin, l'ébullition est un dégagement tumultueux de bulles de vapeur saturante dans le volume du liquide à une température où la pression de vapeur saturante est égale à la pression extérieure. Ainsi, l'ébullition de l'eau ne se produit qu'à la température de 100 °C (pour laquelle la pression de vapeur saturante de la vapeur d'eau atteint 1 013 hPa). L'ébullition de l'eau dépend ainsi de la pression atmosphérique donc de l'altitude : 100 °C au niveau de la mer, elle n'est que de 85 °C au sommet du Mont Blanc à 4 800 m d'altitude et de 20 °C à une pression de $2{,}3 \cdot 10^{-2}$ bar. En revanche, l'ébullition n'intervient jamais en vase clos, car la pression de vapeur saturante reste toujours inférieure à la pression totale du système (cas d'un auto cuiseur).

À retenir

- **Premier principe** : $\Delta U = W + Q$ (système au repos)

  La variation d'énergie interne ΔU ne dépend pas de la transformation (fonction d'état) alors que le travail W et la chaleur Q échangés en dépendent.

  Système isolé : $\Delta U = 0$

- **Entropie** : $\Delta S = S_{\text{e}} + S_{\text{p}}$

  La variation d'entropie ΔS d'un système ne dépend pas de la transformation (fonction d'état). Pour une transformation irréversible, elle se calcule sur n'importe quelle transformation réversible (en général fictive) ayant les mêmes états initial et final :

$$\Delta S\,(\text{syst}) = \int_{\text{rév}} \frac{\delta Q\,(\text{syst})}{T} \quad \text{où } T \text{ est la température d'échange}$$

L'entropie d'échange S_e et l'entropie produite S_p dépendent de la transformation.
Système en contact avec une source thermique à température constante T_{source} :

$$S_e = -\frac{Q\,(\text{syst})}{T_{source}}$$

Système isolé : $S_e = 0$

Second principe : $S_p = \Delta S\,(\text{syst}) - S_e$

$S_p = 0$: la transformation est réversible

$S_p > 0$: la transformation est irréversible

$S_p < 0$: la transformation est impossible spontanément

Gaz parfaits : U et H ne dépendant que de la température

Isobare P_0 = constante	**Isochore** V_0 = constante	**Isotherme** T_0 = constante	**Isentropique** S_0 = constante
$\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$	$\frac{T_1}{P_1} = \frac{T_2}{P_2}$	$P_1 V_1 = P_2 V_2$	$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$
$\Delta U = mc_V(T_2 - T_1)$ $\Delta H = mc_P(T_2 - T_1)$	$\Delta U = mc_V(T_2 - T_1)$ $\Delta H = mc_P(T_2 - T_1)$	$\Delta U = 0$ $\Delta H = 0$	$\Delta U = mc_V(T_2 - T_1)$ $\Delta H = mc_P(T_2 - T_1)$
$W = -P_0(V_2 - V_1)$	$W = 0$	$W = n\,R\,T_0 \ln\frac{V_1}{V_2}$	$W = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$
$Q = \Delta H$	$Q = \Delta U$	$Q = T_0\,\Delta S$	$Q = 0$
$\Delta S = n\,C_P \ln\frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = n\,C_V \ln\frac{T_2}{T_1}$	$\Delta S = n\,R \ln\frac{V_2}{V_1}$	$\Delta S = 0$

Gaz réels : Tables donnant les valeurs massiques v, u, h et s

Isobare P_0 = constante	**Isochore** V_0 = constante	**Isotherme** T_0 = constante	**Isentropique** S_0 = constante
$\Delta U = m(u_2 - u_1)$ $\Delta H = m(h_2 - h_1)$ $W = -mP_0(v_2 - v_1)$ $Q = m(h_2 - h_1)$	$\Delta U = m(u_2 - u_1)$ $\Delta H = m(h_2 - h_1)$ $W = 0$ $Q = m(u_2 - u_1)$	$\Delta U = m(u_2 - u_1)$ $\Delta H = m(h_2 - h_1)$ $W = \Delta U - Q$ $Q = mT_0(s_2 - s_1)$	$\Delta U = m(u_2 - u_1)$ $\Delta H = m(h_2 - h_1)$ $W = m(u_2 - u_1)$ $Q = 0$

Équilibre liquide-vapeur : $P = P_s$ (pression de vapeur saturante)

Titre en vapeur : $x = \frac{v - v_l}{v_v - v_l}$ avec $v_l < v < v_v$

Fonctions d'état : $u = (1 - x)u_l + xu_v$; $h = (1 - x)h_l + xh_v$; $s = (1 - x)s_l + xs_v$

Vaporisation isotherme : $Q = m(h_v - h_l)$ et $W = -mP_s v_v$

Vaporisation isochore : $Q = m[u_v(\theta_2) - u(\theta_1)]$ et $W = 0$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 604.

8.1 Objet de fer jeté dans un lac

Une masse de fer (m = 1 kg, c = 460 J · kg^{-1} · K^{-1}) à une température T_1 = 100 °C est plongée dans une grande quantité d'eau à la température T_2 = 20 °C. Déterminez la variation d'entropie du fer, l'entropie d'échange et la création d'entropie. En déduire que cette transformation est bien irréversible.

8.2 Compression adiabatique d'un gaz parfait

Un récipient, fermé par un piston mobile, renferme m = 2 g d'hélium (gaz parfait monoatomique avec γ = 1,66, de masse atomique M = 4 g · mol^{-1} et de capacité thermique molaire à volume constant C_V = 12,5 J · mol^{-1} · K^{-1}) dans les conditions (P_1, V_1, T_1). On opère une compression adiabatique réversible qui amène le gaz dans les conditions (P_2, V_2, T_2). Sachant que P_1 = 1 bar, V_1 = 10 L et P_2 = 3 bars, déterminez successivement le volume final du gaz, le travail reçu par le gaz et la variation d'énergie interne du gaz. En déduire l'élévation de température du gaz.

8.3 Vaporisation complète d'un mélange d'eau liquide et de vapeur d'eau

Un récipient de 10 L contient un mélange d'eau liquide et de vapeur d'eau de masse totale de 100 g. La pression est de 10 bars. Déterminez le titre en vapeur ainsi que la masse de vapeur dans ce récipient. On chauffe ce récipient à pression constante. Quels sont la température et le volume du récipient lorsque disparaît la dernière goutte de liquide ? Quelle chaleur a-t-on fourni au système ? Quel travail a été échangé avec le milieu extérieur ? On donne :

P_s (bars)	θ (°C)	v_l (m^3 · kg^{-1})	v_v (m^3 · kg^{-1})	h_l (kJ · kg^{-1})	h_v (kJ · kg^{-1})
10	179,9	0,001127	0,19444	762,81	2 778,1

8.4 Comparaison gaz réel – gaz parfait

Un réservoir fermé par une paroi mobile contient de la vapeur d'eau dans les conditions suivantes : P_1 = 2 bars, θ_1 = 500 °C et V_1 = 100 L. Cette vapeur subit alors une compression isotherme jusqu'à une pression P_2 = 200 bars. Déterminez grâce à la table de la vapeur d'eau surchauffée, la masse m de vapeur contenue dans le réservoir, le volume V_2 en fin de compression, le travail W et la chaleur Q échangés. On donne :

P (bars)	θ (°C)	v (m^3 · kg^{-1})	u (kJ · kg^{-1})	h (kJ · kg^{-1})	s (kJ · kg^{-1} · K^{-1})
2	500	1,7814	3 130,8	3 487,1	8,5133
200	500	0,014768	2 942,9	3 238,2	6,1401

Mêmes questions en considérant ensuite la vapeur d'eau comme un gaz parfait (M = 18 g · mol^{-1}, R = 8,31 J · mol^{-1} · K^{-1}).

8.5 Cycle de Lenoir

Une mole de gaz, considéré comme parfait ($R = 8,31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), occupe un volume de 14 L sous une pression de $2 \cdot 10^5$ Pa. On fait subir à ce gaz la succession de transformations réversibles suivante : une détente isobare qui double son volume, une compression isotherme qui le ramène à son volume initial, et enfin un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial.

a) Déterminez la température à laquelle s'effectue la compression isotherme. En déduire la pression maximale atteinte.

b) Représenter le cycle de transformation dans le diagramme $P(V)$. Donnez une représentation graphique du travail échangé au cours de ce cycle et précisez en le justifiant si le système reçoit ou fournit ce travail.

c) Calculez le travail et la chaleur échangés par le système au cours du cycle.

8.6 Compresseur adiabatique ou compresseur isotherme

Un compresseur prélève une mole d'air dans l'atmosphère à la pression $P_1 = 1$ bar et à la température $T_1 = 300$ K (état A), la comprime à la pression $P_2 = 10$ bars (état B) puis la refoule à pression constante P_2 dans un ballon gonflable (état C). On suppose que l'air est un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$ et $R = 8,31\ \text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), les diverses transformations sont réversibles et le piston peut coulisser sans frottement.

a) Considérons d'abord un *compresseur adiabatique* où l'étape de compression est effectuée de façon adiabatique. L'étape de refoulement isobare s'accompagne alors d'un refroidissement jusqu'à la température T_1. Représentez dans un diagramme $P(V)$, le parcours ABC que subit cette mole d'air au cours de cette opération. Calculez la température T_2 en fin de compression et déterminez le travail total reçu par l'air au cours de cette double opération.

b) Considérons maintenant un *compresseur isotherme* où l'étape de compression est effectuée cette fois de manière isotherme. Représentez de nouveau, dans un diagramme $P(V)$, le parcours ABC que subit cette mole d'air. Déterminez le travail total reçu par l'air au cours de cette opération.

c) En comparant les résultats obtenus entre les deux compresseurs, pour le même état initial et état final, en déduire quel type de compresseur est industriellement le plus intéressant.

8.7 Histoires d'eau

Un cylindre muni d'un piston contient une masse $m = 280$ g d'eau à la température $\theta_A = 150$ °C. Le volume initial du cylindre est $V_A = 25$ L. Cette eau effectue des transformations considérées comme réversibles.

a) Montrez, grâce aux tables, qu'il s'agit au départ (état A) d'un équilibre liquide vapeur et calculez le titre en vapeur x_A du mélange.

b) On augmente lentement le volume du récipient jusqu'à vaporisation complète de l'eau (détente isotherme AB). Déterminez le volume V_B, le travail W_1 et la chaleur Q_1 échangés avec l'extérieur pendant cette transformation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) On comprime ensuite rapidement la vapeur jusqu'à une pression $P_C = 12$ bars et une température $\theta_C = 250$ °C (compression adiabatique BC). Montrez que l'on a à faire à une vapeur seule et déterminer le volume V_C, et le travail W_2 échangé.

d) On refroidit ensuite le cylindre à pression constante jusqu'à apparition de la première goutte de liquide (compression isobare CD). Déterminez la température θ_D, le volume V_D, le travail W_3 et la chaleur Q_3 échangés.

On donne les extraits de la table des équilibres eau liquide-vapeur d'eau saturée :

θ (°C)	P_s (bar)	v_l ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	v_v ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	u_v ($kJ \cdot kg^{-1}$)	h_l ($kJ \cdot kg^{-1}$)	h_v ($kJ \cdot kg^{-1}$)
150	4,758	0,001091	0,3928	2 559,5	632,2	2 746,5
188	12	0,001139	0,1633	2 588,8	798,6	2 784,8
250	39,73	0,001251	0,05013	2 602,4	1 085,4	2 801,5

Ainsi que de la table des vapeurs d'eau surchauffés :

θ (°C)	P (bar)	v ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	u ($kJ \cdot kg^{-1}$)	h ($kJ \cdot kg^{-1}$)	s ($kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$)
250	12	0,19234	2 704,2	2 935,0	6,8294

LES MACHINES THERMIQUES

9

PRÉALABLES

- Connaître les premier et deuxième principes de la thermodynamique.
- Savoir distinguer un cycle moteur d'un cycle récepteur.
- Connaître la notion de source de chaleur.

MOTS CLÉS

- Machine à vapeur, machine frigorifique, pompe à chaleur
- Inégalité de Clausius, cycle de Carnot
- Efficacité (rendement, coefficient de performance)

OBJECTIFS

- Connaître le fonctionnement des machines thermiques dithermes.
- Savoir calculer l'efficacité des machines thermiques motrice et réceptrice.

Une machine est un système qui réalise une conversion d'énergie. Ainsi, le plan incliné, le levier, la poulie, ont constitué les premières machines. Purement mécaniques, ces machines permettent, dès l'antiquité, de soulever un objet, et de convertir en énergie potentielle l'énergie fournie par un homme ou un animal ; plus élaboré, le moulin produit du travail à partir de l'énergie cinétique du vent ou de l'eau.

Cependant, il faut attendre la fin du XVII^{e} siècle et la machine à vapeur de Papin (1690) pour que soit apportée une première réponse à la problématique de production d'énergie mécanique à partir d'énergie thermique. En effet, si la dégradation d'énergie mécanique par les frottements est spontanée et intégrale (il y a transfert par chaleur aux différentes parties en contact et à l'environnement), l'opération inverse, c'est-à-dire la conversion d'une énergie transférée thermiquement en énergie ou travail mécanique n'est jamais intégrale, comme l'a observé et énoncé Thomson (futur Lord Kelvin), et, de fait, nécessite l'utilisation de machines élaborées : les *machines thermiques*.

9.1 Généralités sur les machines thermiques

9.1.1 Caractéristiques d'une machine thermique

Cf. chapitre 8, § 8.24

Une machine thermique constitue un **convertisseur d'énergie** mettant en jeu des transferts thermiques avec une ou plusieurs sources de chaleur.
Une machine thermique est un dispositif dans lequel un fluide décrit un **cycle de transformations** permettant des échanges d'énergie entre la machine et le milieu extérieur.

Suivant les applications, le fluide, appelé fluide moteur ou fluide frigorigène, peut être de l'air, de l'eau, du fréon...

9.1.2 Classification des machines thermiques

a) Les machines motrices

Une machine thermique est un **moteur** si elle fournit effectivement du travail au cours du cycle de fonctionnement : le **travail total** échangé par la machine avec le milieu extérieur au cours de ce cycle est **négatif**.

Parmi les machines thermiques motrices, on distingue :

- *les machines à vapeur à combustion externe* : l'énergie thermique dégagée par la combustion d'un combustible, par exemple, sert à produire de la vapeur d'eau qui actionne un organe mécanique (un piston dans une machine à vapeur à piston ou une turbine dans une turbine à vapeur) ;
- *les moteurs à combustion interne* : l'énergie thermique produite par une réaction de combustion permet l'entraînement direct d'un organe mécanique. Deux technologies très différentes ont été développées : les cycles à fonctionnement séquentiel (moteurs à pistons) et les cycles à fonctionnement continu (turbines à gaz). Dans ce dernier cas, la puissance mécanique délivrée par une turbine à gaz peut être disponible sur un arbre tournant accouplé à un alternateur (production d'électricité) ou à une hélice (turbopropulseurs), ou sous la forme de gaz d'échappement de quantité de mouvement élevée (turboréacteur).

b) Les machines réceptrices

Une machine thermique est un **récepteur** si elle reçoit effectivement du travail au cours du cycle de fonctionnement : le **travail total** échangé par la machine avec le milieu extérieur au cours de ce cycle est **positif**.

Ces machines sont représentées par les *machines frigorifiques* et les *pompes à chaleur* dont l'objet est de réaliser un transfert thermique d'un milieu à basse température vers un milieu à température plus élevée.

9.1.3 Bilan énergétique et bilan entropique

Considérons une machine thermique qui, au cours d'un cycle, échange un travail W avec le milieu extérieur et les quantités de chaleur Q_i avec des sources de chaleur de température constante T_i (thermostats). Le fluide circulant dans la machine constitue un système fermé.

Remarque

Le cas des machines thermiques fonctionnant au contact de sources de températures variables sera abordé au paragraphe 9.5.

a) Bilan énergétique

Pour un cycle de la machine, l'application du premier principe donne :

$$\Delta E_{\text{cycle}} = \Delta(U + E_c + E_p)_{\text{cycle}} = W + \sum_i Q_i$$

et comme E est une fonction d'état, $\Delta E_{\text{cycle}} = 0$.

Le bilan énergétique pour un cycle de machine thermique est :

$$W + \sum_i Q_i = 0$$

b) Bilan entropique

Pour un cycle de la machine, appliquons le deuxième principe à l'ensemble [machine, milieu extérieur] :

Cf. chapitre 8, § 8.2

$$\Delta S_{\text{cycle}} = S_e + S_p \quad \text{avec} \quad S_p \geqslant 0$$

et comme S est une fonction d'état, $\Delta S_{\text{cycle}} = 0$.

L'entropie échangée par le fluide au cours d'un cycle est donnée par la somme des entropies échangées avec chacune des sources de chaleur de température constante. En conséquence :

$$S_e = \sum_i S_{e,i} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

Soit :

$$S_p = -S_e = -\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \geqslant 0$$

Le bilan entropique pour un cycle de machine thermique est :

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leqslant 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cette relation du bilan entropique est aussi connue sous le nom d'« inégalité de Clausius » ou principe de Carnot – Clausius.

9.1.4 Efficacité d'une machine thermique

L'efficacité d'une machine thermique, notée e, est le rapport (en valeur absolue) du transfert d'énergie utile au transfert d'énergie dépensé pour le fonctionnement.

L'efficacité est une grandeur positive, qui dépend de la nature de la machine thermique. On pourra également utiliser les termes de **rendement**, dans le cas des machines thermiques motrices, et de **coefficient de performance**, dans celui des machines thermiques réceptrices.

9.1.5 Cas des machines monothermes

Un cycle monotherme est une évolution cyclique au cours de laquelle le système n'échange de la chaleur qu'avec une seule source de chaleur ou un ensemble de sources de chaleur de même température. Une machine thermique fonctionnant sur ce principe est appelée machine monotherme.

a) Réalité des machines monothermes motrices et réceptrices

Considérons une machine monotherme qui, à chaque cycle, échange un travail W et une quantité de chaleur Q avec un thermostat à la température T_0. Nous obtenons :

- Bilan énergétique : $W + Q = 0$ d'où $Q = -W$
- Bilan entropique : $\dfrac{Q}{T_0} \leqslant 0$

La température T_0 étant une grandeur positive, la condition de réalisation d'un cycle monotherme impose que Q soit négatif. En conséquence, W ne peut être que positif.

Une machine thermique en contact avec une seule source de chaleur ne peut, au cours d'un cycle, que recevoir du travail et fournir de la chaleur.

Un radiateur électrique est un exemple de machine réceptrice monotherme. Il reçoit du travail sous forme électrique et le restitue par transfert thermique à la pièce qu'il doit chauffer.

b) Énoncé de Thomson (Lord Kelvin)

Énoncé historique du deuxième principe

« Il est impossible de construire une machine qui, fonctionnant suivant un cycle, fournirait du travail en prenant de la chaleur à une seule source » ; autrement dit : « il n'est pas de moteur qui puisse produire du travail à partir d'une seule source de chaleur ».

Remarque

Si une machine motrice monotherme était réalisable, il serait alors possible de produire du travail en puisant simplement de l'énergie thermique dans le milieu ambiant (donc gratuitement car cette énergie ne coûte rien). Il serait possible, par exemple, d'imaginer un navire qui prenne de l'énergie thermique dans l'eau qui l'entoure, la transforme en énergie mécanique et laisse derrière lui un sillage d'eau froide.

9.2 LES MACHINES THERMIQUES DITHERMES

9.2.1 Caractéristiques

Un cycle ditherme est une évolution cyclique au cours de laquelle le système échange de la chaleur avec deux sources de chaleur (ou thermostat) ; une machine thermique fonctionnant sur ce principe est appelée machine ditherme.

Les deux sources, appelées **source froide** et **source chaude**, sont aux températures respectives T_f et T_c, telles que $T_f < T_c$. Le fluide décrivant le cycle réalise les transferts thermiques Q_f et Q_c respectivement avec les sources froide et chaude, et échange dans le même temps un travail W avec le milieu extérieur (Fig. 9.1).

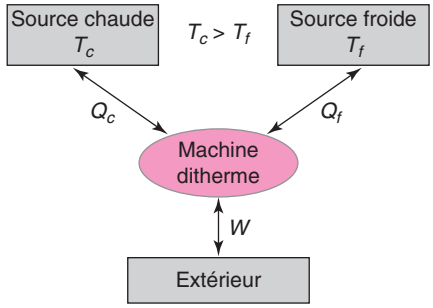


Figure 9.1 Machine thermique ditherme
Représentation symbolique d'une machine ditherme et des échanges thermiques et mécaniques, respectivement avec les sources chaude et froide, et avec l'extérieur.

Ainsi, dans le cas où les sources de chaleur sont des thermostats, les échanges d'énergies sont tels que :

– Bilan énergétique (premier principe) :

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

– Bilan entropique (inégalité de Clausius) :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leqslant 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Si le cycle est décrit de manière réversible :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0.$$

9.2.2 Différentes classes de machines dithermes

Avec deux sources de chaleur, diverses combinaisons d'échanges thermiques et mécaniques peuvent être envisagées, donnant lieu à différents types de machines thermiques que l'on peut classer selon plusieurs critères : moteurs et récepteurs, possibles et impossibles, utiles et inutiles. Au-delà des considérations techniques, le critère de possibilité impose que les machines dithermes fonctionnelles satisfassent les principes de la thermodynamique.

Le diagramme de Raveau, représentant dans le plan de coordonnées (Q_f, Q_c) l'ensemble des machines dithermes, permet de déterminer graphiquement les différentes situations compatibles ou non avec le deuxième principe (Fig. 9.2).

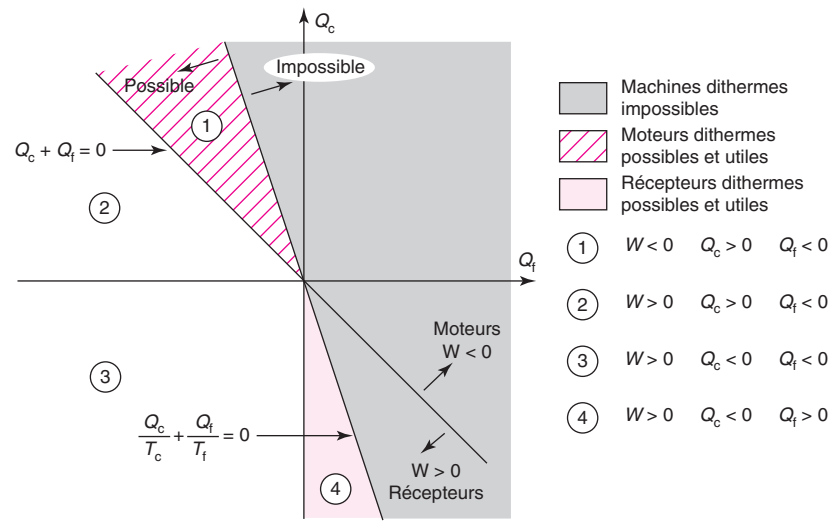


Figure 9.2 **Diagramme de Raveau**

Le secteur (1) correspond aux machines dithermes motrices ; le secteur (4) regroupe les machines dithermes réceptrices qui ont un intérêt pratique : il s'agit des machines frigorifiques et des pompes à chaleur.

L'inégalité de Clausius impose $Q_c \leqslant -\frac{T_c}{T_f} \cdot Q_f$, avec $T_c > T_f$, c'est-à-dire que toute la région située au-dessus de la droite de pente $-T_c / T_f < 0$ (zone grisée) est interdite par le deuxième principe. Les machines dithermes possibles sont donc situées sous la droite.

La frontière entre les machines motrices (W < 0) et les machines réceptrices ($W > 0$) correspond à la droite $W = -Q_f - Q_c = 0$ (d'après le bilan énergétique), c'est-à-dire à la

deuxième bissectrice $Q_f + Q_c = 0$. Les machines **motrices** sont donc représentées par les points situés au-dessus de cette droite (elles doivent satisfaire $Q_c > -Q_f$).

Nous constatons que le secteur (1) est le seul qui convienne pour une machine ditherme motrice qui fonctionne donc en recevant de la chaleur de la source chaude et en cédant de la chaleur à la source froide, avec $Q_c > |Q_f|$.

Parmi les machines dithermes **réceptrices** (secteurs 2, 3 et 4), seules sont utiles celles qui permettent d'inverser le sens spontané des échanges thermiques. Ce sont les machines frigorifiques et les pompes à chaleur, qui correspondent au secteur (4) : la source chaude reçoit de la chaleur et la source froide en fournit à la machine.

9.2.3 Le cycle de Carnot

a) Définition et représentation graphique

Le cycle de Carnot est un **cycle réversible** décrit par une machine ditherme en contact avec **deux thermostats**. Il comporte :

- deux évolutions **isothermes**, aux températures T_f et T_c ;
- deux évolutions adiabatiques qui correspondent en fait à deux **isentropiques** puisque le cycle est réversible.

Les représentations de ce cycle dans le diagramme de Clapeyron $P(V)$ et dans le diagramme entropique $T(S)$ permettent de représenter respectivement les énergies mécanique (W) et thermique (Q) transférées globalement au cours du cycle (Fig. 9.3).

Pour ces deux représentations, un **cycle moteur** ($W < 0$) est décrit dans le **sens horaire** (ABCDA) alors qu'un **cycle récepteur** est décrit dans le **sens trigonométrique** (ou anti-horaire, ADCBA).

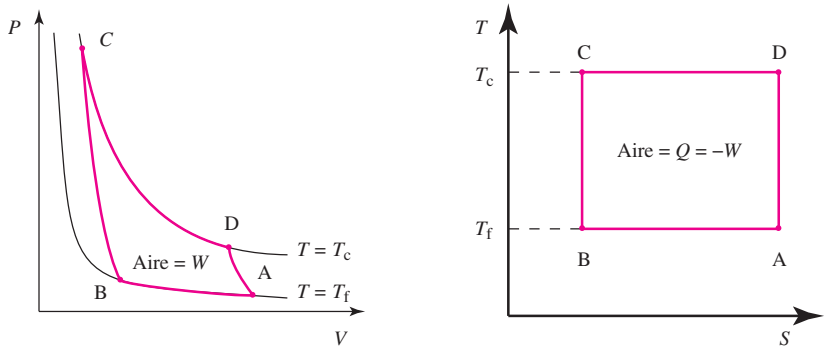


Figure 9.3 **Représentation graphique du cycle de Carnot**

En coordonnées de Clapeyron (P, V) pour un gaz parfait ; b) en coordonnées entropiques (T, S).

Remarque

Les transferts thermiques isothermes sont très difficiles à réaliser avec un gaz, mais ils deviennent envisageables lorsqu'ils sont associés à un changement d'état physique du fluide.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Rendement d'un cycle de Carnot

Théorème de Carnot

• *« Toutes les machines thermiques non réversibles fonctionnant selon un cycle ditherme non réversible entre deux sources données ont une efficacité (rendement ou coefficient de performance) inférieure à celle d'une machine fonctionnant de manière réversible entre les mêmes sources » :*

$$e_{irréversible} < e_{réversible}$$

• *« Toutes les machines réversibles fonctionnant selon un cycle ditherme réversible ont la même efficacité lorsqu'elles fonctionnent avec les mêmes sources ».*

Par conséquent, l'efficacité d'un cycle de Carnot est indépendante de la substance motrice : **elle ne dépend que de la température des thermostats** :

$$\boldsymbol{e = f\,(T_f, T_c).}$$

Par ailleurs, le cycle de Carnot étant un cycle ditherme réversible, le bilan entropique donne :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\boldsymbol{Q_f}}{\boldsymbol{Q_c}} = -\frac{\boldsymbol{T_f}}{\boldsymbol{T_c}}.$$

Dans le cas d'un cycle ditherme réversible (cycle de Carnot), le rapport des quantités de chaleur échangées avec les deux thermostats est égal en valeur absolue au rapport des températures des thermostats.

9.3 Moteur thermique ditherme

9.3.1 Caractéristiques et efficacité thermodynamique

a) Caractéristiques

L'analyse du diagramme de Raveau a permis d'identifier un seul secteur correspondant à un fonctionnement moteur.

Un moteur thermique ditherme est une machine thermique qui (Fig. 9.4) :
. fournit effectivement un travail ($W < 0$) ;
. reçoit effectivement un transfert thermique d'une source chaude ($Q_c > 0$) ;
. fournit effectivement un transfert thermique à une source froide ($Q_f < 0$).

b) Efficacité thermodynamique

Dans le cas d'une machine motrice, l'énergie utile est le travail alors que l'énergie dépensée pour le fonctionnement est la quantité de chaleur reçue de la part de la source

chaude. En conséquence, l'efficacité (ou rendement) d'un moteur ditherme s'écrit sous la forme :

$$e = \frac{-W}{Q_c}$$

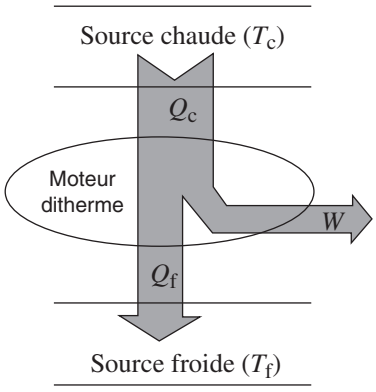


Figure 9.4 **Représentation symbolique d'un moteur ditherme, et des échanges thermiques avec les sources chaude et froide.**

À partir du premier principe, on déduit : $W = -Q_c - Q_f$ d'où l'expression de l'efficacité :

$$e = \frac{-W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

On notera que seule une partie de l'énergie Q_c prise à la source chaude est convertie en travail. L'autre partie est rejetée à la source froide.

Ainsi, si l'énergie mécanique peut être convertie en totalité en énergie thermique (c'est l'expérience courante), la conversion inverse, d'énergie thermique en énergie mécanique, ne peut jamais être totale. D'où : $e < 1$.

Par ailleurs, dans le cas d'un cycle réversible ou cycle de Carnot, nous avons :

$$e_{\text{irréversible}} < e_{\text{réversible}} \quad \text{et} \quad \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

Soit :

$$e_C = \left(1 + \frac{Q_f}{Qc}\right)_{\text{réversible}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Théorème de Carnot relatif au moteur ditherme

L'efficacité d'un moteur ditherme est maximale lorsque le cycle est décrit de façon réversible. Sa valeur, e_C*, ne dépend que des températures* T_c *et* T_f *des thermostats :*

$$e_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Donc, même dans le cas d'un moteur ditherme fonctionnant de manière idéale, l'efficacité du moteur ne peut atteindre 1 ; elle est limitée théoriquement par les valeurs respectives des températures des sources chaudes et froides utilisées.

Exercice d'application 9.1 – Moteur ditherme

Au cours d'un cycle, une machine motrice fournit un travail de 120 J et cède une quantité de chaleur de 300 J à une source froide à 17 °C. La source chaude est à une température de 200 °C.
a) Calculez l'efficacité de ce moteur.
b) Déterminez si son fonctionnement est réversible ou irréversible.

SOLUTION.
a) Au cours du cycle de fonctionnement : $W = -120$ J, $Q_f = -300$ J et $Q_c > 0$.
L'efficacité d'un moteur ditherme est donnée par la relation : $e = \dfrac{-W}{Q_c}$
D'après le 1er principe : $Q_c = -W - Q_f = -120 - (-300) = 420$ J
D'où : $e = 120 / 420 = 0{,}286$

b) Pour statuer sur le type de fonctionnement, il faut faire le bilan entropique :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = \frac{420}{273+200} + \frac{-300}{273+17} = -0{,}146 < 0,$$

donc le cycle est irréversible.
Autre solution : on peut comparer l'efficacité de Carnot (cycle réversible) à l'efficacité de la machine.
$e_C = 1 - \dfrac{T_f}{T_c} = 1 - \dfrac{273+17}{273+200} = 0{,}386 > e$ donc cycle irréversible

9.3.2 Les machines à vapeur à combustion externe

a) Introduction

Les cycles moteurs à vapeur sont utilisés pour la propulsion des sous-marins et des navires de gros tonnage, ainsi que pour la production de l'essentiel de l'électricité, la turbine étant alors accouplée à un alternateur. L'apport d'énergie est réalisé par la combustion de fuel, de gaz naturel ou de charbon (centrales classiques), par la fission de matière radioactive (centrales nucléaires), ou encore à partir d'un gisement de vapeur ou d'eau chaude (centrales géothermiques), du rayonnement solaire (centrales solaires), ou des gaz d'échappement d'une turbine à gaz (cycles combinés).

L'encombrement d'un cycle à vapeur (il fait intervenir le changement de phase

liquide-vapeur de l'eau) est, à puissance égale, plus important que celui d'un cycle à gaz (le fluide reste à l'état gazeux pendant toute la durée du cycle), mais le rendement est meilleur, et les puissances installées peuvent être bien supérieures, jusqu'à 1 500 MW.

b) Principe de fonctionnement d'une turbine à vapeur

Les figures 9.5 et 9.6a présentent respectivement le schéma d'une centrale thermique élémentaire utilisant un cycle à vapeur et les transferts d'énergie mis en jeu. Elles illustrent le fonctionnement d'une turbine à vapeur dont l'expression désigne plus brièvement l'ensemble de l'installation de production d'énergie mécanique, composée essentiellement d'une chaudière (ou générateur de vapeur), de la turbine proprement dite, d'un condenseur et d'une pompe.

• *Le circuit vapeur*

Dans la chaudière, la quantité de chaleur Q_c est transmise par un corps chaud (comme les produits de la combustion) à l'eau contenue dans le circuit de la machine. Ce transfert thermique produit de la vapeur d'eau à haute température ($\theta \approx 565$ °C) et haute pression ($P \approx 165$ bars). Cette vapeur d'eau circule entre la zone de haute pression où elle est produite et la zone de basse pression et basse température créée au niveau du condenseur.

Au contact du circuit de refroidissement, la vapeur d'eau se condense en cédant la quantité de chaleur Q_f à l'eau de refroidissement (corps froid ou source froide) du condenseur (les deux circuits sont indépendants).

• *Obtention de travail*

Sur le trajet de la vapeur d'eau, entre la chaudière et le condenseur, est placé une turbine à vapeur. La vapeur d'eau issue de la chaudière vient frapper violemment les pales de cette turbine : elle fournit à la turbine un travail ($W_t < 0$).

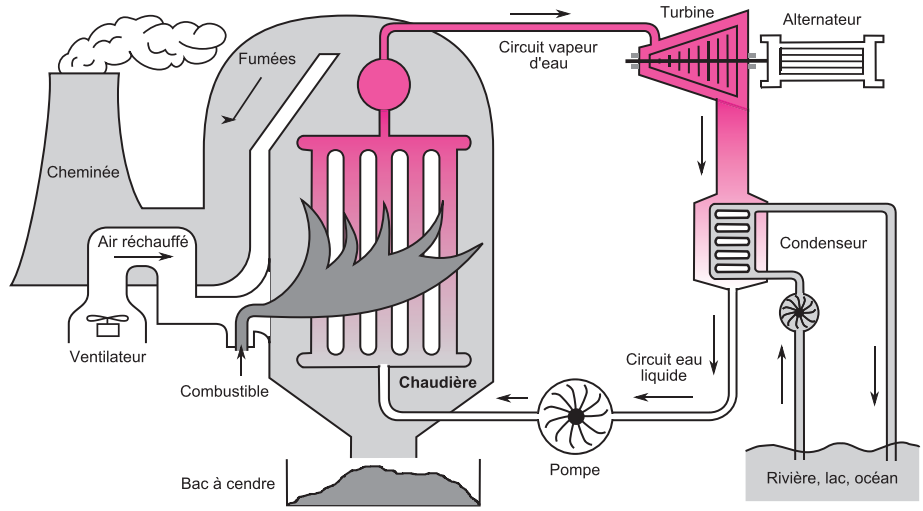


Figure 9.5 **Schéma de principe d'une centrale thermique élémentaire**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans le même temps, cette vapeur va subir une détente : la température et la pression de la vapeur diminuant, son volume augmente. Ainsi, la forme de la turbine (Fig. 9.6b) doit être adaptée à cette augmentation de volume : l'espace entre les aubes est de plus en plus grand au fur et à mesure que la vapeur circule, d'où l'augmentation du rayon des roues.

Après passage dans le condenseur qui transforme la vapeur en liquide, une pompe ($W_p > 0$) redistribue l'eau à forte pression et faible température dans la chaudière, et le cycle recommence.

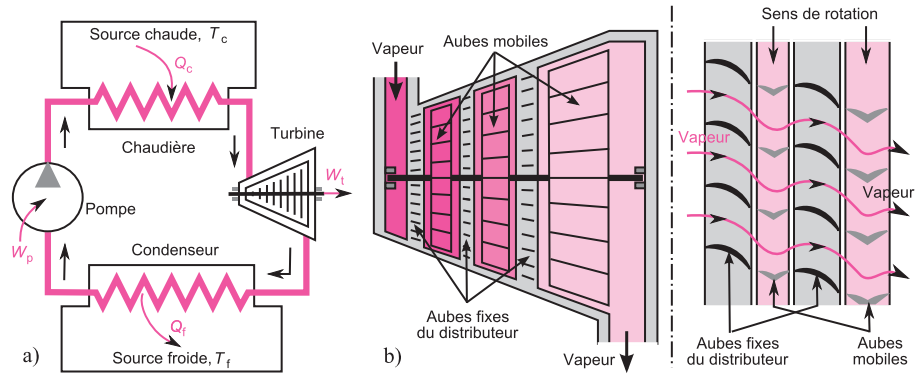


Figure 9.6

a) Modélisation d'une machine motrice à vapeur et bilan des transferts d'énergie mis en jeu ; **b)** Schéma de principe d'une turbine à vapeur, guidée par les aubes fixes du distributeur, la vapeur vient frapper les aubes mobiles de la turbine dont la forme permet, en déviant l'écoulement, d'entretenir la rotation.

Remarque

Du travail est échangé au niveau de la turbine et de la pompe. W représente le travail effectivement fourni par le moteur ditherme au milieu extérieur :

$$W = W_t + W_p$$

c) Représentation du cycle idéal de fonctionnement d'une installation motrice à vapeur

Le cycle moteur de Carnot (Fig. 9.7a) est celui qui permet d'obtenir, entre deux températures données (températures des sources chaude et froide), l'efficacité thermodynamique maximale. Toutefois, un tel cycle n'est pas réalisable : la pompe et la turbine sont parcourues par un mélange liquide – vapeur, préjudiciable à leur efficacité et à leur durée de vie (problèmes de corrosion et de lubrification). Néanmoins, ce cycle peut être aménagé. Ainsi, le cycle idéal correspondant à une centrale thermique élémentaire à vapeur d'eau est plutôt représenté par le cycle de Rankine (Fig. 9.7b). Dans cette installation motrice à vapeur, l'eau décrit le cycle suivant :

- détente isentropique de la pression P_2 à la pression P_1, dans une turbine $(3 - 4)$;

- condensation dans le condenseur à la pression P_1 et à la température T_1 constantes, jusqu'à l'état liquide saturant $(4-1)$;
- compression isentropique de l'eau liquide de P_1 à P_2 dans une pompe $(1-2)$;
- chauffage à pression constante P_2 $(2-2')$, puis vaporisation à cette même pression dans la chaudière $(2'-2'')$ et enfin chauffage toujours à P_2 constante jusqu'à T_3 $(2''-3)$.

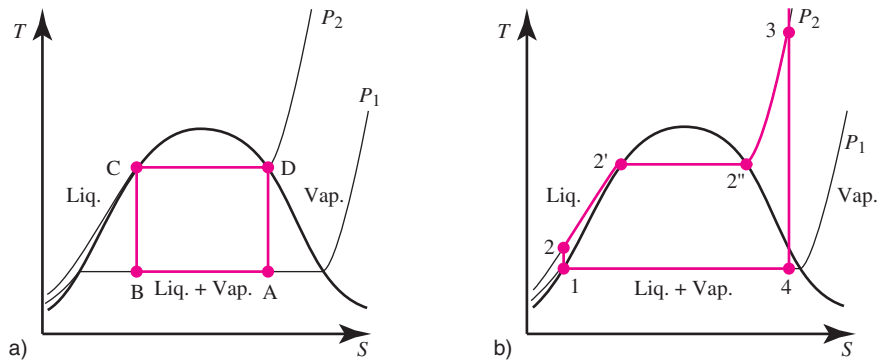


Figure 9.7 **Représentation du cycle idéal d'une installation motrice à vapeur (turbine à vapeur)**

a) Cycle de Carnot ; b) Cycle de Rankine

9.4 Machine frigorifique et pompe à chaleur ditherme

9.4.1 Introduction

Une application majeure de la thermodynamique est constituée par les machines dont le but est de réaliser un transfert thermique d'un milieu à basse température vers un milieu à température plus élevée.

a) Énoncé de Clausius

D'après le principe de l'entropie maximale, un tel transfert ne peut s'effectuer naturellement, et requiert donc un dispositif particulier. Clausius avait énoncé cette impossibilité ainsi :

Autre énoncé historique du deuxième principe

« La chaleur ne passe pas spontanément d'un corps froid à un corps chaud ».

Autrement dit : « Il est impossible de construire une machine qui fonctionnerait en cycle, en ayant d'autre effet que de transférer de la chaleur du corps froid vers le corps chaud ».

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Différentes classes de machines

Selon que l'effet recherché est le refroidissement du milieu froid (conservation ou congélation des aliments, climatisation de l'habitat, patinoire, etc.), ou le réchauffement du milieu chaud (production d'eau chaude sanitaire, chauffage de locaux, de piscines, etc.), ces machines sont respectivement appelées machines frigorifiques ou pompes à chaleur.

9.4.2 Principe de fonctionnement et efficacité thermodynamique

Une machine frigorifique et une pompe à chaleur sont des machines dithermes qui (Fig 9.8a) :

- reçoivent effectivement un travail ($W > 0$) ;
- fournissent effectivement un transfert thermique à une source chaude ($Q_c < 0$) ;
- reçoivent effectivement un transfert thermique d'une source froide ($Q_f > 0$).

Le fluide frigorigène, circulant dans la machine, peut être un gaz (de l'air par exemple), mais dans la plupart des cas, on cherche à mettre en jeu l'effet thermique important lié à la transition de phase liquide – vapeur. Le cycle de base est alors constitué des étapes suivantes (Fig. 9.8b). La vapeur du fluide frigorigène est comprimée dans un compresseur dont elle sort à une température supérieure à celle du milieu chaud de température T_c. Cette vapeur passe alors dans un échangeur thermique, le condenseur, où elle se condense en cédant par transfert thermique Q_c à ce milieu chaud (eau ou air, en général). Le liquide, qui se trouve toujours à une pression élevée, subit ensuite une détente dans un détendeur, où il se refroidit à une température plus basse que celle du milieu froid de température T_f. Ce fluide traverse un deuxième échangeur, l'évaporateur, où il se vaporise en recevant par transfert thermique l'énergie Q_f de ce milieu froid (eau, air, ou saumure). La vapeur froide est enfin renvoyée dans le compresseur et le cycle est alors fermé.

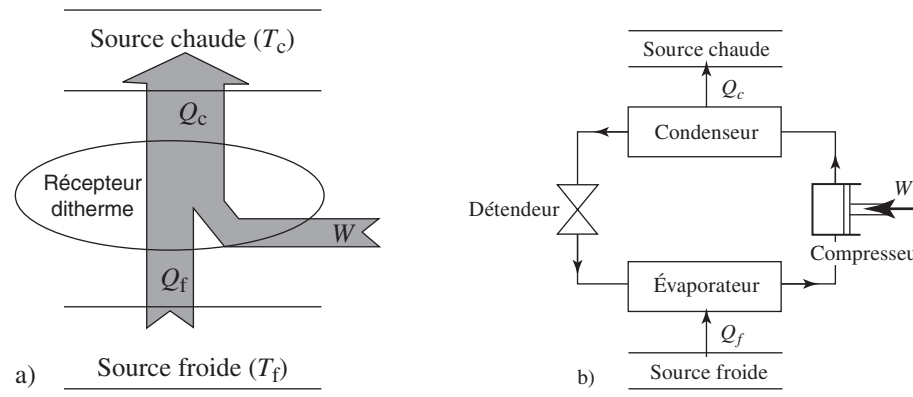


Figure 9.8 **Récepteur ditherme**

a) Représentation symbolique d'un récepteur ditherme, et des échanges thermiques avec les sources chaude et froide ;
b) Schéma du principe de fonctionnement d'une machine frigorifique et d'une pompe à chaleur.

a) Efficacité des machines frigorifiques

Dans le cas des machines frigorifiques, l'évaporateur est installé dans la chambre froide, dont la capacité thermique est finie. L'énergie thermique reçue par le fluide frigorigène abaisse donc la température de la chambre froide, puis compense les flux thermiques traversant ces parois. Le condenseur est installé dans un milieu qui peut être considéré comme une source thermique de température constante (air ambiant, rivière, puits, etc.).

Dans ce cas, l'énergie utile est la quantité de chaleur reçue de la source froide et l'énergie dépensée pour le fonctionnement est W. D'où, l'expression de l'efficacité d'une machine frigorifique :

$$e_{MF} = \frac{Q_f}{\mathrm{W}}$$

Compte tenu des échanges énergétiques, ce coefficient peut être supérieur à 1. De plus, l'application du premier principe, $W = -Q_c - Q_f$ conduit à :

$$e_{MF} = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-(Q_c + Q_f)}$$

Par ailleurs, dans le cas d'un cycle réversible ou cycle de Carnot, nous avons :

$$e_{\text{irréversible}} < e_{\text{réversible}} \quad \text{et} \quad \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

Soit :

$$e_C = \left(\frac{Q_f}{-Q_c - Q_f}\right)_{\text{réversible}} = \frac{1}{-1 - \dfrac{Q_c}{Q_f}} = \frac{1}{-1 + \dfrac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Théorème de Carnot relatif à la machine frigorifique

L'efficacité d'une machine frigorifique est maximale lorsque le cycle est décrit de façon réversible. Sa valeur, e_C*, ne dépend que des températures* T_c *et* T_f *des thermostats :*

$$e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

L'efficacité d'une machine frigorifique peut être supérieure à 1. Elle est d'autant plus grande (et la machine frigorifique d'autant moins utile) que les températures des sources sont proches.

b) Efficacité des pompes à chaleur

Dans le cas des pompes à chaleur (PAC), le condenseur est installé dans le milieu dont on veut élever la température, alors que l'évaporateur est mis au contact d'une source thermique de température constante (air ambiant, rivière, etc.).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'énergie utile est la quantité de chaleur fournie à la source chaude et l'énergie dépensée pour le fonctionnement est W. D'où, l'expression de l'efficacité d'une pompe à chaleur :

$$e_{PAC} = \frac{-Q_c}{W}$$

Compte tenu des échanges énergétiques, ce coefficient est toujours supérieur à 1 dans le cas d'une PAC. De plus, l'application du premier principe, $W = -Q_c - Q_f$ conduit à :

$$e_{PAC} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f}$$

Par ailleurs, dans le cas d'un cycle réversible ou cycle de Carnot, nous avons :

$$e_{irréversible} < e_{réversible} \quad \text{et} \quad \frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}$$

Soit :

$$e_C = \left(\frac{Q_c}{Q_c + Q_f}\right)_{réversible} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

Théorème de Carnot relatif à une pompe à chaleur

L'efficacité d'une pompe à chaleur est maximale lorsque le cycle est décrit de façon réversible. Sa valeur, e_C*, ne dépend que des températures* T_c *et* T_f *des thermostats :*

$$e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

L'efficacité d'une pompe à chaleur est d'autant plus grande (et la PAC d'autant moins utile) que les températures des sources sont proches.

LES FLUIDES FRIGORIGÈNES

Le fréon (marque commerciale) est le nom d'une famille de gaz hydrochlorofluorocarbonés (HCFC) ou chlorofluorocarbonés (CFC) fabriqués par la société DuPont de Nemours. Les différentes variétés de fréon sont parfois désignées sous le nom de R11, R502, R22 (R signifiant réfrigérant). Ce gaz frigorigène est toxique, non conducteur et ininflammable. Le fréon a été utilisé à partir de 1930 comme réfrigérant. Fortement suspectés de détruire l'ozone O_3 stratosphérique, les CFC sont interdits dans la Communauté Européenne depuis le 31 décembre 1994. Ils sont remplacés par d'autres dérivés du méthane et de l'éthane, où le brome remplace le chlore.

Exercice d'application 9.2 – Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur réversible assure le chauffage d'un local d'habitation en prélevant de la chaleur dans l'atmosphère extérieure. Elle maintient une température de 20 °C dans le local, alors que la température extérieure est de 7 °C. Pour cela, elle délivre une puissance thermique de 12 kW.
Calculez la puissance mécanique reçue par cette pompe à chaleur.

SOLUTION. Au cours de son fonctionnement, la PAC fournie une puissance thermique de 12 kW à la source chaude qui représente l'intérieur du local. Donc : $P_c = -12$ kW.
Soit :
- P_m = puissance mécanique fournie à la PAC. P_m est donc positive.
- P_f = puissance thermique cédée par la source froide à la PAC. P_f est donc positive.

La PAC étant réversible :

$$e_C = \frac{-P_c}{P_m} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{273 + 20}{20 - 7} = 22{,}54$$

Donc : $P_m = \dfrac{-P_c}{e_C} = \dfrac{-(-12000)}{22{,}54} = 532{,}4$ W.

9.5 MACHINE DITHERME FONCTIONNANT AU CONTACT DE SOURCES DE TEMPÉRATURES VARIABLES

Si la température d'une ou de deux sources peut varier au cours du fonctionnement de la machine, il faut alors raisonner sur un cycle élémentaire :

$$\mathrm{d}U = 0 = \delta W + \delta Q_c + \delta Q_f \text{ et } \mathrm{d}S = 0$$

En appliquant le deuxième principe de la thermodynamique, on obtient :

$$\frac{\delta Q_f}{T_f} + \frac{\delta Q_c}{T_c} \leqslant 0$$

Où T_c et T_f sont les températures respectives des sources chaudes et froides au cours du fonctionnement de la machine. Pour l'ensemble du fonctionnement, la relation de Clausius s'écrit :

$$\int_{T_{f,\text{initial}}}^{T_{f,\text{final}}} \frac{\delta Q_f}{T_f} + \int_{T_{c,\text{initial}}}^{T_{c,\text{final}}} \frac{\delta Q_c}{T_c} \leqslant 0$$

L'égalité correspond à une succession de cycles réversibles élémentaires.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À retenir

Caractéristiques d'une machine thermique

- Une *machine thermique* constitue un *convertisseur d'énergie* mettant en jeu des *transferts thermiques* avec une ou plusieurs sources de chaleur.
- Une machine thermique est un *moteur* si elle fournit effectivement du travail.
- Une machine thermique est un *récepteur* si elle reçoit effectivement du travail.
- Le bilan énergétique pour un cycle de machine thermique est :

$$W + \sum_i Q_i = 0.$$

- Le bilan entropique pour un cycle de machine thermique est :

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leqslant 0.$$

- Une machine thermique en contact avec une seule source de chaleur ne peut, au cours d'un cycle, que recevoir du travail et fournir de la chaleur.

Cycle et efficacité de Carnot

- Le cycle de Carnot est un cycle réversible décrit par une machine ditherme en contact avec deux thermostats. Il comporte : deux évolutions isothermes, aux températures T_f et T_c, et deux évolutions isentropiques.
- L'efficacité d'un cycle de Carnot ne dépend que de la température des thermostats.

Classification et efficacité des machines thermiques dithermes

Machine ditherme	W	Q_c	Q_f	Efficacité	Efficacité de Carnot
Moteur	< 0	> 0	< 0	$e = \frac{-W}{Q_c}$	$e_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$
Réfrigérateur	> 0	< 0	> 0	$e_{MF} = \frac{Q_f}{W}$	$e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$
Pompe à chaleur	> 0	< 0	> 0	$e_{PAC} = \frac{-Q_c}{W}$	$e_C = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

- Le bilan énergétique pour un cycle de machine ditherme est :

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

- Le bilan entropique pour un cycle de machine ditherme est :

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leqslant 0$$

Les solutions sont regroupées p. 607.

9.1 Cycle ditherme réalisable ?

Un inventeur décrit le fonctionnement cyclique d'une machine au cours duquel le fluide reçoit une quantité de chaleur Q_f de la source froide et fournit une quantité de chaleur Q_c à la source chaude ainsi qu'une quantité de travail W au milieu extérieur. Une telle machine peut-elle fonctionner ?

9.2 Machine frigorifique

Un réfrigérateur, fonctionnant de manière réversible, est placé dans une pièce dont la température est maintenue à 22 °C.

a) Sachant que l'efficacité de ce réfrigérateur est égale à 15, calculez la température que l'on peut maintenir à l'intérieur du réfrigérateur.

b) Si l'on maintient cette température dans le réfrigérateur tout en abaissant la température de la pièce, dans laquelle il est placé, à une valeur de 10 °C, quelle nouvelle valeur obtient-on pour l'efficacité ? Concluez.

9.3 Chauffage d'une piscine

On utilise une pompe à chaleur réversible pour chauffer l'eau d'une piscine de volume 100 m^3, initialement à 15 °C. La source froide est constituée par l'atmosphère, dont la température est de 15 °C également. On porte la température de l'eau de la piscine à 27 °C.

a) Calculez la quantité de chaleur, Q_c, fournie par le fluide thermique de la pompe à chaleur, pour porter la température de l'eau de la piscine à 27 °C.

b) Déterminez la quantité de chaleur Q_f échangée entre le fluide de la pompe à chaleur et l'atmosphère. Donnée : $T_f = 288$ K.

c) Calculez le coefficient de performance de cette pompe à chaleur.

Données : masse volumique de l'eau, $\rho = 1\,000\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$; capacité thermique massique de l'eau, $c_e = 4\,185\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

10 Initiation aux transferts thermiques

PRÉALABLES

- Premier et deuxième principe de Thermodynamique
- Bilans énergétiques sur les machines thermiques

MOTS CLÉS

- Conduction de la chaleur
- Convection-transport de la chaleur
- Rayonnement thermique des solides

OBJECTIFS

- Comprendre les phénomènes physiques relatifs au transfert de la chaleur dans les matériaux.
- Modéliser les transferts de manière appropriée.
- Résoudre des problèmes.

Introduction

Comme nous l'avons vu dans les chapitres 7, 8 et 9, la thermodynamique s'intéresse aux bilans d'énergie dans les systèmes sous forme de chaleur et de travail. Néanmoins, si elle renseigne sur la quantité de chaleur (en Joules) mise en jeu dans une transformation, elle ne donne aucune information sur la façon dont cette chaleur a été transmise dans le système. C'est le rôle de la thermique.

10.1 Le phénomène de conduction de la chaleur

Nous restreindrons l'étude de la conduction de la chaleur aux seuls cas des matériaux solides. Néanmoins, cette étude s'applique aussi aux fluides au repos.

Comme nous le verrons par la suite, il suffit pour cela que le phénomène de convection naturelle soit négligeable devant la conduction.

10.1.1 Équilibre thermique et température dans les solides

Dans les solides cristallins, la matière solide est constituée d'ions qui s'organisent sous la forme de réseaux périodiques de configuration géométrique très diverses. Cet arrangement conditionne les propriétés mécaniques, électriques et thermiques finales du matériau. Des électrons libres sont d'autre part présents dans le cas des métaux et dans une moindre mesure des semiconducteurs. On considère qu'un matériau est à l'équilibre thermique si l'état d'excitation des particules qui le compose est le même pour toutes. Cet état d'excitation est mesuré par l'énergie cinétique des particules. En considérant un nombre suffisant de particules, on définit une grandeur mesurable : la température. Cette grandeur conserve les mêmes propriétés statistiques dans les solides que dans les gaz. En d'autres termes, elle mesure une moyenne de l'énergie cinétique des particules dans un domaine en contenant un nombre suffisamment grand.

Les solides amorphes, tels que les verres, sont aussi concernés par cette étude mais leur complexité structurelle rend la compréhension des phénomènes plus ardue, c'est pourquoi nous nous sommes restreints à l'examen des structures cristallines.

10.1.2 Modélisation de la conduction

a) Loi de Fourier

La relation de Fourier est phénoménologique, c'est-à-dire issue de résultats expérimentaux. Considérons un barreau cylindrique parfaitement isolé sur sa périphérie tel que celui représenté sur la figure 10.1. On note S la section du cylindre. Supposons qu'à l'instant initial, on dispose une source de chaleur à proximité d'une extrémité du barreau. La température du barreau proche de la source de chaleur va alors augmenter et la chaleur va diffuser de cette zone chaude vers la zone plus froide située à l'autre extrémité. Supposons d'autre part que nous avons disposé deux thermomètres en deux points de l'axe du barreau afin de mesurer l'évolution de la température en ces points au cours du temps. On note T_1 et T_2 les températures des deux thermomètres et l la distance entre eux. Un flux de chaleur (énergie transportée par unité de temps) apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures (pour respecter le 2e principe de la thermodynamique). On appelle isotherme le lieu des points de même température. On note $\vec{x}$ le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube. Donc, en conséquence, $\vec{x}$ correspond à l'axe du cylindre. Dans cette configuration, les isothermes sont donc les sections du cylindre pour toutes les valeurs de x.

J. Fourier obtient expérimentalement qu'il existe une relation liant le flux à l'écart de température sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{l} \vec{x}$$

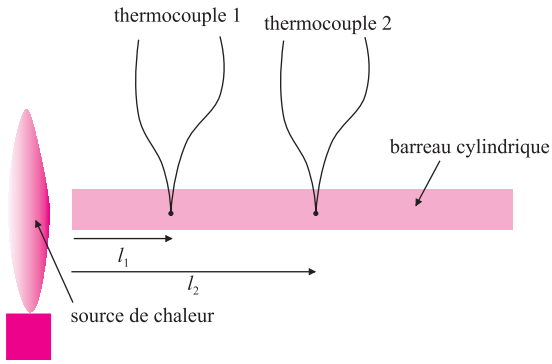


Figure 10.1 **Un barreau cylindrique, isolé sur sa circonférence, est chauffé à une de ses extrémités. Deux thermomètres permettent de mesurer l'évolution de la température en deux points de l'axe du barreau au cours du temps.**

Lorsque l'on fait tendre la longueur l vers 0, on trouve l'expression du flux de conduction sous la forme différentielle :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \vec{x}$$

En généralisant la relation à une configuration tridimensionnelle, on obtient :

$$\vec{\phi} = -\lambda S \vec{\nabla} T \qquad (10.1)$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ désigne le vecteur gradient. On définit la densité de flux comme le rapport du flux à la section de passage de ce flux :

$$\vec{\varphi} = \frac{\vec{\phi}}{S} = -\lambda \vec{\nabla} T \qquad (10.2)$$

La relation 10.2 montre que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes.

b) Conductivité thermique

La grandeur λ intervenant dans la relation 10.2 est la conductivité thermique. Ce paramètre intrinsèque au matériau caractérise la propension de celui-ci à conduire la chaleur et il s'exprime en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Lorsqu'un matériau laisse facilement diffuser la chaleur on dit qu'il est conducteur. C'est le cas notamment des métaux dont la conductivité thermique est élevée (de l'ordre de 400 $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour le cuivre). À l'inverse, un matériau tel que de l'air au repos s'oppose au transfert de chaleur et il est donc appelé isolant. Dans ce cas la conductivité thermique est faible (de l'ordre de 0,03 $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ pour l'air). La conductivité thermique des matériaux varie très significativement en fonction de la température comme on peut le voir sur la figure 10.2 pour certains métaux. Aux très basses températures (de 1 à 10 K) la conductivité est très grande, elle varie sur 3 ordres de grandeurs. La conductivité diminue lorsque la température augmente (de 10 à 100 K) et devient à peu près constante pour les hautes températures (> 100 K). Néanmoins, notons que ce comportement est propre aux structures cristallines ; pour les matériaux amorphes la conductivité reste faible mais à très basse température.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

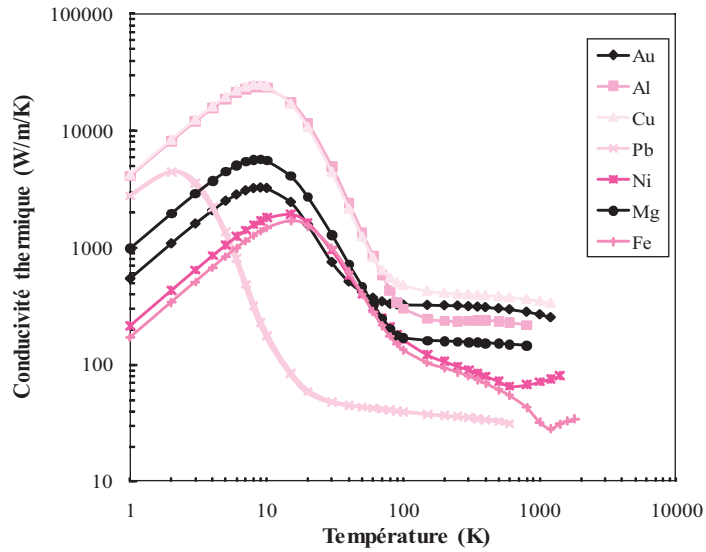


Figure 10.2 **Variation de la conductivité thermique de certains métaux en fonction de la température**

La conductivité thermique suit globalement la conductivité électrique. Pour simplifier, un matériau qui est isolant du point de vue électrique l'est aussi généralement du point de vue thermique et inversement. Ainsi pour les métaux, la loi de Wiedmann–Franz lie la conductivité électrique σ (en ohm^{-1}) à la conductivité thermique λ sous la forme :

$$\frac{\lambda}{\sigma T} = L_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot \Omega \cdot \mathrm{K}^{-2}$$

L_0 désigne le nombre de Lorentz.

c) La diffusivité thermique

La diffusivité thermique du matériau est définie comme le rapport de sa conductivité thermique [W · m^{-1} · K^{-1}] à sa capacité thermique [J · m^{-3} · K^{-1}] (produit de la masse volumique et de la chaleur spécifique) :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho\, C_p}\ [\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}]$$

Rappelons que la chaleur spécifique C_p caractérise la quantité de chaleur (en J) à apporter à 1 kilo de matériau pour élever sa température de 1 K. La diffusivité thermique caractérise donc la vitesse de diffusion de la chaleur dans le matériau. Notons que la chaleur peut diffuser aussi vite dans un matériau isolant, tel qu'un plastique (λ et ρ petites), que dans un matériau conducteur, tel qu'un acier (λ et ρ grandes). On peut donc avoir des diffusivités proches avec pourtant des conductivités éloignées.

10.1.3 Notion de régime permanent et transitoire

Une notion très importante en transfert thermique est celle de régime permanent et transitoire. Pour expliquer cette notion, reprenons la configuration expérimentale de la figure 10.1.

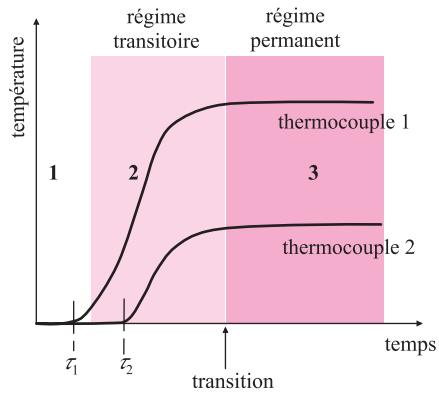


Figure 10.3 **Évolution de la température aux deux thermomètres au cours du temps**

L'acquisition des températures depuis l'instant initial, pour les deux thermomètres, sur une durée assez longue va conduire à la représentation de la figure 10.3. On devine alors trois domaines temporels bien distincts. Sur le domaine 1, la température n'évolue pas et reste identique à la température initiale du barreau. Cela correspond au temps que met la chaleur pour diffuser de la source chaude jusqu'au thermocouple. Ce temps est plus important pour le thermocouple 2, qui est situé plus loin de la source de chaleur, que pour le thermocouple 1. On peut estimer les temps de retard τ_1 et τ_2 si on connaît la diffusivité thermique α du matériau. En effet nous savons, d'après l'équation aux dimensions de la diffusivité, qu'elle correspond au rapport entre le carré d'une distance et d'un temps. On aura donc en première approximation :

$$\tau_1 \sim \frac{l_1^2}{\alpha} \text{ et } \tau_2 \sim \frac{l_2^2}{\alpha}$$

Le domaine temporel 2 correspond à une élévation de la température au cours du temps. Il définit donc le régime transitoire car les températures dépendent du temps. Enfin, on observe sur le domaine 3 une valeur constante de la température mesurée par les deux thermocouples. Cette valeur n'est pas la même étant donné que le thermocouple 2 est localisé plus loin de la source de chaleur que le thermocouple 1 et donc que la température sera plus faible. Ce domaine correspond au régime permanent car les températures ne dépendent plus du temps mais seulement de l'espace. On doit absolument noter que la transition entre régime transitoire et régime permanent est la même pour tous les points du matériau.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.1.4 Équation de diffusion de la chaleur

a) Bilan thermique

Il est maintenant possible d'établir l'équation de la chaleur, c'est-à-dire l'équation traduisant mathématiquement l'évolution de la température en tout point du matériau et à chaque instant. Nous l'établissons en effectuant un bilan sur un volume élémentaire du matériau.

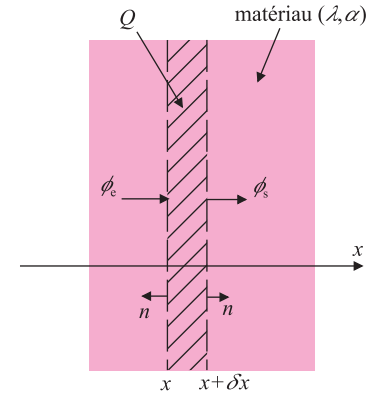


Figure 10.4 **Bilan thermique sur un volume élémentaire de la largeur δx pour un transfert 1D par conduction selon x**

Considérons pour simplifier le transfert de chaleur unidirectionnel par conduction selon x dans un matériau comme cela est représenté sur la figure 10.4. Nous supposons que les propriétés thermiques du matériau ne dépendent pas de la température. Isolons un élément de largeur δx et effectuons un bilan des flux entrant et sortant de cet élément. On désigne par S la section de passage du flux et par V le volume compris entre x et $x + \delta x$. D'après la relation 10.1 le flux entrant s'écrit :

$$\phi_e = -\lambda\, S\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{10.3}$$

De la même façon le flux sortant s'écrit :

$$\phi_s = -\lambda\, S\, \frac{\partial T(x+\delta x,t)}{\partial x} \tag{10.4}$$

Le bilan thermique consiste donc à écrire que la somme des flux, comptés positivement dans le sens de la normale intérieure au volume élémentaire, est égale au terme d'accumulation de chaleur. Si on considère la présence éventuelle d'une source de chaleur Q (en W) dans le volume élémentaire, ce bilan s'écrit :

$$\phi_e - \phi_s + Q = m\, C_p\, \frac{\partial T}{\partial t} = \rho\, C_p\, V\, \frac{\partial T}{\partial t}$$

En remplaçant les flux par leur expression (relations 10.3 et 10.4) on trouve alors :

$$-\lambda\, S\, \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \lambda\, S\, \frac{\partial T(x+\delta x,t)}{\partial x} + Q = \rho\, V\, C_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \tag{10.5}$$

La relation 10.5 s'écrit :

Sachant que, par définition, la dérivée d'une fonction f est :

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

quand $\delta x \to 0$

$$\lambda\, S\, \delta x\, \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + Q = \rho\, V\, C_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Et comme $V = S\,\delta x$, on trouve finalement ($\dot{Q} = Q/V$ désigne maintenant une source de chaleur volumique en $\mathrm{W \cdot m^{-3}}$) :

$$\lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \dot{Q} = \rho\, C_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Cette relation aux dérivées partielles, en temps et en espace, se généralise dans l'espace à trois dimensions sous la forme :

$$\lambda\, \Delta T + \dot{Q} = \rho\, C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} \qquad (10.6)$$

Cette relation traduit le transfert linéaire de chaleur par diffusion dans le matériau.

b) Conditions initiales et conditions aux limites

L'équation de la chaleur, décrite par la relation 10.6, est une équation aux dérivées partielles. Elle possède en théorie une infinité de solutions si on ne fixe pas de condition initiale en temps et de conditions aux limites aux frontières du domaine étudié.

Si on considère un matériau donc le domaine d'extension est noté Ω et la frontière est notée Γ, la condition initiale s'écrit sous la forme :

$$T(M,t) = T_0(M), \quad \text{à } t = 0 \text{ pour } M \in (\Omega \cup \Gamma)$$

On distingue trois types de conditions aux limites thermiques.

Condition de température imposée (ou condition de Dirichlet) :

$$T(M,t) = T_{\mathrm{i}}(M,t), \quad \text{à } t > 0 \quad \text{pour } M \in \Gamma$$

Cette condition peut être utilisée lorsque l'on fait circuler un fluide dont la température est maintenue constante et égale à T_{i} à la surface Γ du domaine solide, ou bien lorsque l'on met la surface en contact parfait avec un matériau massif et capacitif à température homogène T_{i}. Cette deuxième configuration ne peut bien sûr avoir un sens que pour des durées d'application limitées.

Condition de flux imposé (ou condition de Neumann) :

$$\phi(M,t) = \phi_0(M,t), \quad \text{à } t > 0 \text{ pour } M \in \Gamma$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

C'est une condition que l'on retrouve lorsque l'on chauffe la surface du matériau avec une source résistive ou radiative ont la puissance estϕ_0.

Condition mixte (ou condition de Newton) :

Cette dernière condition est plus complexe. Elle s'applique généralement à l'interface entre une paroi solide à la température T_s et un fluide de température T_∞ et elle s'écrit :

$$-\lambda\, S\, \vec{\nabla} T . \vec{n} = h\, S\, (T_s - T_\infty) \tag{10.7}$$

On voit que quand $h \to \infty$, on retrouve la condition de température imposée $T_s = T_\infty$.

Dans cette relation h est appelé le coefficient d'échange par convection.

10.2 TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

10.2.1 Définitions

Le terme « convection » est utilisé pour décrire le transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide en mouvement par rapport à cette surface. Pour ce transfert, le transport d'énergie par conduction a toujours lieu, néanmoins le mode dominant est celui dû aux **mouvements des particules fluides.** Parmi les problèmes de convection on distingue :

- la convection forcée, quand le mouvement du fluide est crée par une différence de pression (pompe, soufflerie...).
- la convection naturelle (ou libre), provoquée par les forces massiques dans le fluide dues aux différences de température et donc de masse volumique du fluide (élévation de chaleur au-dessus d'un feu...).

10.2.2 Modélisation du transfert de chaleur par convection

Considérons l'écoulement présenté à la figure 10.5. Un fluide possédant une vitesse u_{inf} et une température T_{inf} passe sur la surface d'une plaque plane de surface A_s. La surface du milieu est à une température uniforme T_s et les deux températures T_{inf} et T_s sont différentes. Cette différence provoque le transfert de la chaleur entre le solide et le fluide. **La densité de flux local échangé** s'exprime sous la forme (voir relation 10.7) :

$$\varphi' = h\, (T_s - T_{\text{inf}})$$

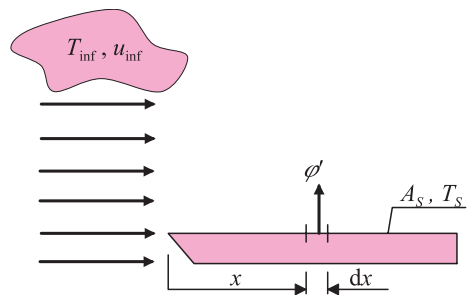


Figure 10.5 **Transfert de chaleur par convection sur une surface plane**

Dans cette expression h représente **le coefficient local d'échange convectif**. Parce que les conditions d'écoulement peuvent varier d'un point à l'autre, le coefficient et le flux échangés peuvent aussi varier. Le flux total échangé sera alors obtenu par intégration du flux local sur toute la surface entre le fluide et le solide :

$$\varphi = \int_{A_s} \varphi' \mathrm{d}A_s = (T_s - T_{\inf}) \int_{A_s} h \mathrm{d}A_s$$

Nous définissons **le coefficient d'échange convectif moyen** pour toute la surface, qui permet d'exprimer le flux total échangé, sous la forme :

$$\phi = \overline{h}\, A_s\, (T_s - T_{\inf})$$

Cette expression est appelée la loi de Newton.

10.2.3 Convection forcée

Le cas de la convection forcée est rencontré très souvent en pratique dans les échangeurs de chaleur de tous genres. Ainsi, par exemple pour le refroidissement de centrales nucléaires, la récupération de chaleur dans les collecteurs solaires, la circulation des liquides cryogéniques dans les systèmes de refroidissement de machines thermiques. Ces systèmes impliquent deux types d'écoulements :

- Externe : l'écoulement du fluide n'est pas confiné dans un domaine ;
- Interne : le fluide s'écoule dans un domaine confiné (tube, conduite, etc.).

La loi physique représentative des échanges convectifs forcés entre le fluide en circulation dans un domaine confiné et la paroi interne du domaine est de la forme :

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Pr}, \mathrm{Re})$$

Nu, Pr et Re sont respectivement les nombres de Nusselt, Prandtl et Reynolds qui s'expriment à partir des caractéristiques du fluide (masse volumique ρ, viscosité dynamique μ, conductivité thermique λ_f, chaleur spécifique C_p) et de l'écoulement (dimension caractéristique D, vitesse moyenne u).

SIGNIFICATION PHYSIQUE DES NOMBRES SANS DIMENSIONS

- Le **nombre de Reynolds**, $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho\, u\, D}{\mu}$, compare les forces d'inertie et les forces visqueuses dans l'écoulement du fluide.
- Le **nombre de Prandtl**, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu\, C_p}{\lambda_f}$, compare la diffusion de masse devant la diffusion thermique.
- Le **nombre de Nusselt**, $\mathrm{Nu} = \dfrac{h\, D}{\lambda_f}$, compare le transfert par convection devant le transfert par conduction dans le fluide. Il est proportionnel au coefficient d'échange et il est d'autant plus élevé que le transfert par convection est important.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les propriétés du fluide (ρ, μ, λ_f, C_p) seront prises pour la température moyenne T_f :

$$T_f = \frac{T_\infty + T_s}{2}$$

a) Écoulement externe : écoulement sur une plaque plane

La plaque peut être horizontale ou verticale. Le fluide en écoulement a une vitesse moyenne u_m et x désigne la longueur considérée. Si pour une longueur donnée x, le nombre de Reynolds ne dépasse pas 5×10^5 le régime d'écoulement est laminaire.

Régime laminaire

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\ \mathrm{Re}_x^{0,5}\ \mathrm{Pr}^{0,33}, \text{ pour } \mathrm{Pr} \geqslant 0{,}6.$$

Le coefficient moyen pour cette configuration est :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}664\ \mathrm{Re}_L^{0,5}\ \mathrm{Pr}^{0,33}, \text{ pour } \mathrm{Pr} \geqslant 0{,}6 \text{ et } L \text{ la longueur considérée.}$$

Pour les valeurs de nombres de Reynolds supérieures à 5×10^5, le régime d'écoulement est turbulent :

Régime turbulent

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}0296\ \mathrm{Re}_x^{0,8}\ \mathrm{Pr}^{0,33}, \text{ pour } 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60$$

b) Écoulement interne, écoulement dans un tube cylindrique

Régime turbulent

Pour le nombre de Reynolds supérieur à 10^4 le régime d'écoulement est turbulent. On applique alors la corrélation suivante :

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}023\ \mathrm{Re}_D^{0,8}\ \mathrm{Pr}^{0,33}$$

Cette corrélation est valable pour $0{,}7 < \mathrm{Pr} < 100$ et seulement quand le régime turbulent est établi, ce qui n'est garanti que si $x/D > 60$.

Régime laminaire

Pour le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} < 2100$ la littérature recommande la relation :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 1{,}86 \left(\frac{\mathrm{Re}_D \mathrm{Pr}\ D}{L} \right)^{0,33} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,14} \text{ avec } \begin{bmatrix} T_s = \text{constant} \\ 0{,}48 < \mathrm{Pr} < 16700 \\ 0{,}0044 < \left(\dfrac{\mu}{\mu_s} \right) < 9{,}75 \end{bmatrix}$$

μ et Pr sont évalués à la moyenne des températures du fluide entre l'entrée et la sortie du tube. Cependant μ_s est viscosité du fluide déterminée pour la température de paroi du tube T_s.

10.3 CONVECTION NATURELLE

La convection naturelle est la forme d'échange convectif la plus souvent observée. Les transferts par convection naturelle résultent simplement du mouvement du fluide provoqué par les différences de densité dues aux variations spatiales de température. En convection naturelle les échanges sont nettement moins intenses qu'en convection forcée. Un coefficient thermophysique supplémentaire intervient dans le cas de convection naturelle : le coefficient de dilatation thermique à pression constante défini par :

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\right)$$

$\Delta\rho$ est la variation de masse volumique ρ provoquée par la variation de température ΔT. Le fluide est initialement au repos et en équilibre thermique avec la paroi à la température T_0. La masse volumique du fluide est ρ_0. Quand on augmente la température de la paroi, le fluide s'échauffe de $\Delta T = T_p - T_0$. Il se dilate et donc sa masse volumique varie aussi comme : $\Delta\rho = \rho - \rho_0 < 0$. Il sera alors soumis à une force ascensionnelle (poussée d'Archimède) d'intensité $\Delta\rho\ \vec{g}$ (par unité de volume). L'écoulement spontané résultant va conduire aux courants de convection naturelle. On peut admettre à priori que le coefficient d'échange convectif h entre la paroi et le fluide en question dépend :

- des caractéristiques du fluide : $\lambda_f,\ \rho,\ \mu,\ C_v,\ \beta\ g\ \Delta T$;
- du gradient de température dans la couche limite ΔT ;
- des caractéristiques géométriques de la paroi : longueur L.

Les échanges en convection naturelle peuvent être décrits par des corrélations du type :

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr})$$

Ici Gr est appelé le nombre de Grashof.

SIGNIFICATION PHYSIQUE DU NOMBRE DE GRASHOF

$\mathrm{Gr} = \dfrac{\beta\ g\ \Delta T\ L^3}{\nu^2}$, le nombre de Grashof compare les forces visqueuses devant les forces de pesanteur. Il caractérise les mouvements occasionnés dans le fluide par les gradients thermiques. Ce nombre joue en conséquence un rôle comparable à celui tenu par le nombre de Reynolds en convection forcée.

Dans les corrélations expérimentales pour la convection naturelle nous allons souvent rencontrer le produit des nombres de Grashof et de Prandtl. Ce produit est appelé le nombre de Rayleigh :

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Pr}\ \mathrm{Gr}$$

Les corrélations expérimentales les plus usuelles en convection naturelle sont généralement de la forme :

$$\mathrm{Nu}_L = C\ \mathrm{Ra}_L^n$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Avec :

$$\mathrm{Ra}_L = \mathrm{Gr}_L \mathrm{Pr} = \frac{\beta\, g\, \Delta T\, L^3}{\nu\, \alpha}$$

L'exposant n prend les valeurs :

- $n = 1/4$ en convection laminaire ;
- $n = 1/3$ en convection turbulente.

Les propriétés du fluide en écoulement pour les nombre de Rayleigh sont déterminées pour la valeur moyenne de température $T_f = (T_\infty + T_s)/2$. Quelques valeurs de la constante C en différentes configurations sont reportées dans le tableau 10.1.

Tableau 10.1 Constantes *C* de l'expression de nombre de Nusselt en convection naturelle

Géométrie, orientation	Dimension caractéristique *L*	*C* en convection laminaire	*C* en convection turbulente
Plaque verticale	Hauteur	0,59 $\mathrm{Ra}_L \leqslant 10^9$	0,10 $\mathrm{Ra}_L > 10^9$
Plaque horizontale chauffant vers le bas	Largeur	0,27 $10^5 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{10}$	0,54 $10^{10} < \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{13}$
Plaque horizontale chauffant vers le haut	Largeur	0,54 $10^4 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^7$	0,15 $10^7 < \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{11}$
Cylindre horizontal	Diamètre extérieur	$C = 1{,}02$ et $n = 0{,}15$ pour $10^{-2} \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^2$; 0,54 pour $5 \times 10^2 \leqslant \mathrm{Ra}_L \leqslant 2 \times 10^7$	0,135 $2 \times 10^7 < \mathrm{Ra}_L \leqslant 10^{13}$

10.4 Le rayonnement thermique

10.4.1 Démonstration de son existence à partir d'une expérience

Considérons l'expérience représentée sur la figure 10.6. La surface interne d'une enceinte parfaitement isolée du milieu ambiant extérieur est à la température initiale T_{en}. On effectue un vide poussé à l'intérieur de l'enceinte. À un certain moment, on introduit, sans modifier les conditions de vide, un corps à la température $T_{cp} \neq T_{en}$.

Au bout d'un certain temps, on mesure la température de la surface interne de l'enceinte et celle du corps. On trouve que ces deux températures sont égales à la même température T_{eq}. Il y a eu donc transfert d'énergie sous forme de chaleur entre les deux corps. Etant donné qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre l'enceinte et le milieu ambiant et que la chaleur ne peut pas voir été échangée par conduction et convection entre le corps et la surface de l'enceinte du fait du vide, on en déduit que ce transfert n'a

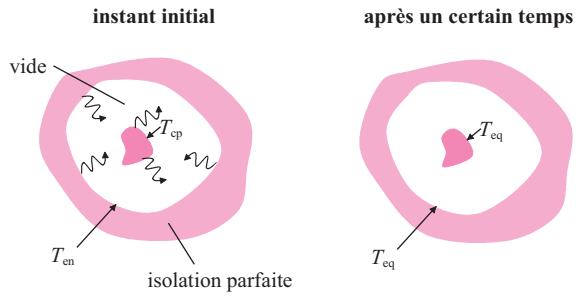


Figure 10.6 **Mise en évidence du processus de transfert de chaleur par rayonnement sur une expérience**

pu s'effectuer que par le biais d'un troisième mode : c'est le rayonnement thermique. Ce transfert thermique repose sur le transport de la chaleur à l'aide d'ondes électromagnétiques. L'exemple le plus évident et le plus important à notre échelle est celui du soleil. Les photons émis par les soleil sont susceptibles d'être absorbés par les atomes constitutifs d'un matériau (solide, liquide ou gaz) sur Terre. Cette absorption conduit à élever leur énergie interne et donc par voie de conséquence à accroître la température du matériau dans la région où les photons ont été absorbés.

10.4.2 Le spectre électromagnétique

Si le soleil émet préférentiellement dans le domaine visible (VIS) des longueurs d'onde, il n'en reste pas moins qu'il couvre aussi le domaine de ultraviolets (UV) et des infrarouges (IR). Ceci étant, c'est bien à la longueur d'onde de 0,5 μm que l'on trouve le plus de photons. Nous verrons plus loin que les corps dont la température est petite émettent dans l'IR. Ce que l'on doit garder à l'esprit c'est que le rayonnement thermique couvre un domaine de longueur d'onde s'étalant de 0,1 μm (UV) à 100 μm (IR lointain). Comme on peut le voir sur la figure 10.7, ce domaine reste très petit en regard du domaine de longueur d'onde rencontré dans la nature : de 10^{-5} μm pour les rayons gamma à 10^{4} μm pour les micro-ondes.

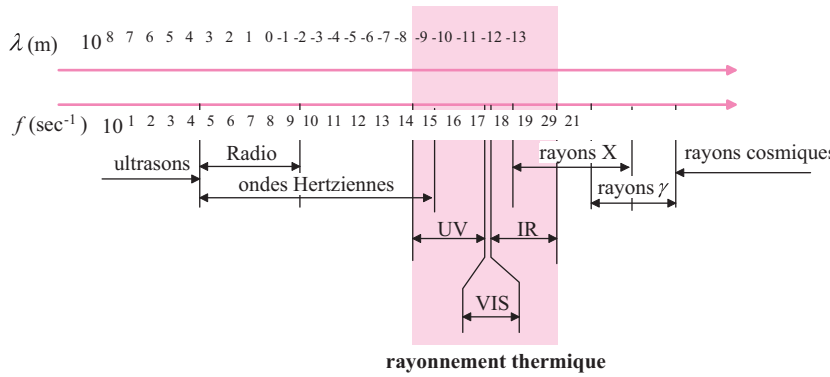


Figure 10.7 **Spectre électromagnétique complet et localisation de la partie contribuant eu transfert de chaleur**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

10.4.3 Les notions géométriques essentielles

En dehors du cas très particuliers des lasers, le rayonnement thermique est généralement hémisphérique dans le sens où les photons émis par une source le sont dans toutes les directions de l'espace entourant la source. D'autre part, en fonction de l'état de surface de la source, on trouve que le rayonnement n'est pas isotrope, c'est-à-dire que le nombre de photons émis n'est pas le même dans toutes les directions.

Lorsque le rayonnement est le même dans toutes les directions de l'espace on dit qu'il est isotrope. Lorsque la répartition spatiale du rayonnement est indépendante de la longueur d'onde on dit qu'il est homogène.

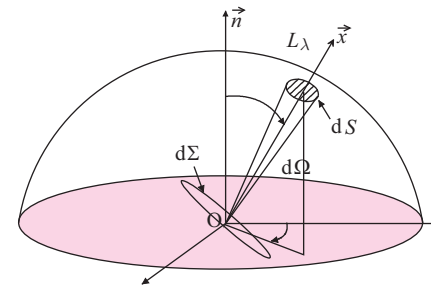


Figure 10.8 **Rayonnement hémisphérique**
La luminance $L_\lambda(\theta, \psi)$ est le flux de chaleur contenu dans l'angle solide dΩ orienté dans la direction $\vec{x}$ et par unité de surface dΣ perpendiculaire à la direction d'émission.

On voit donc que l'étude du rayonnement thermique nécessite l'utilisation d'outils géométriques spécifiques. En particulier, il semble important de définir quelle sera la quantité de chaleur transportée par les photons dans un cône entourant une direction d'émission. Nous appelons ce cône l'angle solide. C'est une généralisation de l'angle plan à la configuration sphérique. L'angle solide s'exprime en stéradians (sr) et la sphère mesure 4π sr. Considérons un élément de surface dΣ qui émet un rayonnement thermique dans tout l'espace qui l'englobe. Nous appelons $\vec{x}$ la direction d'émission. Nous construisons alors l'angle solide dΩ qui entoure la direction d'émission et qui coupe l'hémisphère de rayon r en formant la surface dS. Nous savons alors que dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, ψ) :

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{10.8}$$

Par analogie avec la définition de l'arc solide dans un plan, nous définissons l'angle solide :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} \tag{10.9}$$

En utilisant la relation 10.8 dans la relation 10.9 ceci conduit à la définition de l'angle solide :

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{10.10}$$

10.4.4 Grandeurs physiques

a) Grandeurs liées à l'émission

Nous appelons luminance le flux de chaleur émis par un corps par unité de surface de ce corps perpendiculaire à la direction d'émission et par unité d'angle solide :

$$L(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma \cos\theta \, \mathrm{d}\Omega} \tag{10.11}$$

La luminance est définie à la longueur d'onde λ.

La quantité $\mathrm{d}\Sigma \cos\theta$ représente la projection de la surface émettrice dans la direction perpendiculaire à la direction d'émission $\vec{x}$.

En introduisant l'expression de l'angle solide 10.10 dans la relation 10.11, on trouve l'expression de la luminance sous la forme :

$$L(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi} \tag{10.12}$$

L'émittance est le flux émit par unité de surface émettrice :

$$M(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma}$$

L'émittance est définie à la longueur d'onde λ.

En utilisant la relation 10.12, on voit que l'émittance et la luminance sont liés par la relation :

$$M(\lambda, \theta, \psi) = L(\lambda, \theta, \psi) \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi$$

Pour toutes les quantités physiques liées au rayonnement, on désigne par hémisphérique l'intégrale sur tout le domaine spatiale. La grandeur est dite totale si elle est intégrée sur tout le domaine spectral, c'est-à-dire toutes les longueurs d'onde.

L'émittance hémisphérique désigne l'intégrale de l'émittance sur tout l'hémisphère entourant l'émetteur :

$$M_\lambda = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L(\lambda, \theta, \psi) \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{10.13}$$

Elle ne dépend que de la longueur d'onde. L'émittance hémisphérique totale est l'intégrale sur tout le domaine de longueur d'onde de l'émittance hémisphérique :

$$M = \int_0^\infty M_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{10.14}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Si le rayonnement est isotrope, la luminance ne dépend plus des paramètres d'angle θ et ψ. Dans ce cas, l'émittance hémisphérique devient :

$$M_\lambda = L_\lambda \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi = \pi \, L_\lambda$$

De la même façon pour l'émittance hémisphérique totale, on obtient la relation de Lambert :

$$M = \pi \, L$$

b) Grandeurs liées au récepteur

L'éclairement désigne le flux incident reçu par unité de surface de récepteur perpendiculairement à la direction d'incidence :

$$E(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma \, \cos\theta}$$

Le flux incident peut toujours s'exprimer à partir de la luminance au travers de la relation 10.12 et donc l'éclairement peut lui aussi s'exprimer à partir de la luminance :

$$E(\lambda, \theta, \psi) = L(\lambda, \theta, \psi) \, \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi$$

Si l'éclairement est isotrope, il ne dépend plus des paramètres d'angle θ et ψ. Dans ce cas on obtient les relations suivantes pour l'éclairement hémisphérique et hémisphérique total respectivement (en utilisant les même définitions 10.13 et 10.14 que pour l'émittance) :

$$E_\lambda = \pi \, L_\lambda \text{ et } E = \pi \, L$$

10.4.5 Rayonnement des corps noirs

a) Loi de Planck

Un corps noir est une surface idéale (qui n'existe donc pas dans la nature) possédant les propriétés suivantes :

Il absorbe tout éclairement indépendamment de la longueur d'onde et de la direction de cet éclairement.

A une température de surface équivalente, le rayonnement d'un corps noir est plus grand que celui de toute autre surface.

Le rayonnement d'un corps noir est isotrope.

La loi de Planck exprime la luminance d'un corps noir à la température T :

$$L_\lambda^0 = \frac{2 \, h \, c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{h \, c_0}{\lambda \, k_B \, T}} - 1 \right)} \quad \left[\mathrm{W.m^{-2}.m^{-1}.sr^{-1}}\right]$$

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ J · s est la constante de Planck, $c_0 = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1} la vitesse de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J · K^{-1} la constante de Boltzmann et T la température en Kelvin.

L'indice 0 est souvent utilisé pour les grandeurs physiques associées à un corps noir. Nous avons représenté la fonction de Planck sur la figure 10.9. On constate que plus la température du corps est grande, plus la luminance est grande et plus le maximum de luminance se déplace vers les petites longueurs d'onde.

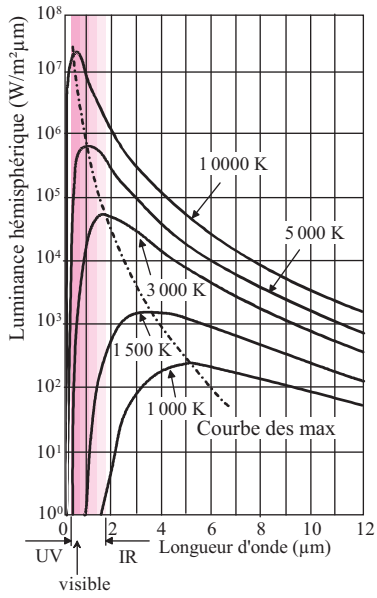


Figure 10.9 **Luminance du corps noir en fonction de la longueur d'onde et de la température du corps en Kelvin**
On notera la courbe des max de luminance donnée par la relation de Wien.

b) Lois de Wien

En dérivant la loi de Planck par rapport à λ, on trouve la longueur d'onde λ_{max} correspondant à la luminance maximale $L^0_{\lambda_{max}}$ en fonction de la température du matériau :

$$\lambda_{max}\, T = 2\,897 \ [\mu m \cdot K]$$

Cette valeur correspond à une luminance maximale :

$$L^0_{\lambda_{max}} = 4{,}096\ 10^{-12}\, T^5$$

Ces deux relations constituent les lois de Wien.

c) Loi de Stefan - Boltzmann

La loi de Lambert conduit à exprimer la relation de Planck sous la forme d'une fonction de l'émittance du corps noir en fonction de la température :

$$M^0_\lambda = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \qquad (10.15)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Avec : $C_1 = 3{,}742 \times 10^8\ \mathrm{W \cdot \mu m^4 \cdot m^{-2}}$ et $C_2 = 1{,}439 \times 10^4\ \mu\mathrm{m \cdot K}$.

En remplaçant la relation 10.15 dans la définition de l'émittance totale, relation 10.14, on obtient la relation de Stefan–Boltzmann :

$$M^0 = \sigma_s\, T^4$$

$\sigma_s = 5{,}670 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ est la constante de Stefan–Boltzmann.

10.4.6 Rayonnement des corps réels

a) Émissivité des corps réels

L'émissivité des matériaux réels est par définition plus faible que celle des corps noirs qui est maximale pour la même température de surface. Afin de caractériser cette émissivité on définit le coefficient d'émission.

Le coefficient d'émission d'un matériau est définit comme le rapport entre la luminance du corps réel avec la luminance du corps noir équivalent :

$$\varepsilon(\lambda, \theta, \psi, T) = \frac{L(\lambda, \theta, \psi, T)}{L^0_\lambda(T)}$$

Il est fonction de la direction d'émission, de la longueur d'onde du rayonnement émit ainsi que de la température.

b) Absorption, réflexion et transmission des corps réels

Lorsqu'un rayonnement est incident à un corps noir nous savons qu'il est complètement absorbé. S'il s'agit d'un corps réel, ce rayonnement incident sera en partie absorbé, réfléchit et transmis.

L'absorptivité est le rapport entre le flux absorbé et l'éclairement :

$$\alpha(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_a(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

La réflectivité est le rapport entre le flux réfléchit et l'éclairement :

$$\rho(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_r(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

La transmissivité est le rapport entre le flux transmis et l'éclairement :

$$\tau(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_t(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)}$$

Quelle que soit la quantité étudiée (spectrale, hémisphérique ou totale hémisphérique), on doit toujours avoir :

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

10.4.7 La loi de Kirchhoff

Pour tout corps, la loi de Kirchhoff traduit que l'émissivité totale hémisphérique est égale à l'absorptivité totale hémisphérique :

$$\alpha = \varepsilon$$

Si on considère l'aspect spectral, la relation précédente reste vraie et il suffit pour cela que le rayonnement du corps soit isotrope. On a alors :

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$$

Si on considère en plus l'aspect directionnel, l'égalité est vraie et ne nécessite même plus la condition de rayonnement corps noir :

$$\alpha(\lambda, \theta, \psi) = \varepsilon(\lambda, \theta, \psi)$$

À retenir

- La conduction de la chaleur dans les matériau est modélisée par la **loi de Fourier** : $\vec{\phi} = -\lambda S \vec{\nabla} T$, où $\vec{\phi}$ désigne le flux de chaleur, S est la section de passage du flux, λ est la conductivité thermique du matériau et $\vec{\nabla} T$ est le gradient de température.
- L'équation de diffusion de la chaleur est :

$$\lambda \Delta T + \dot{Q} = \rho C_p \frac{\partial T(M,t)}{\partial t}$$

  Elle permet de déterminer la valeur de la température en tout point du matériau et à chaque instant à partir de la capacité thermique du matériau ρC_p, de sa conductivité thermique l et de la présence d'un éventuel terme source volumique $\dot{Q}$. Il est nécessaire de définir des conditions aux limites et une condition initiale pour résoudre cette équation aux dérivées partielles.
- Le transfert de chaleur par **convection** met en jeu un coefficient d'échange entre fluide en mouvement et paroi fixe. Ce coefficient peut être déterminé au travers de corrélations du type :

  $\mathrm{Nu} = C\ \mathrm{Re}^{\alpha}\ \mathrm{Pr}^{\beta}$, en convection forcée

  $\mathrm{Nu} = C\ \mathrm{Ra}^{n}$, en convection naturelle

  Les quantités Nu, Re, Pr et Ra sont des nombres sans dimensions qui ne dépendent que des propriétés thermophysiques du fluide et du solide, de la vitesse du fluide et de la géométrie d'écoulement.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- Le transfert de chaleur par **rayonnement** est un phénomène quantique et ondulatoire.
- La **loi de Planck** :

$$L_\lambda^0 = \frac{2\,h\,c_0^2}{\lambda^5 \left(e^{\frac{h\,c_0}{\lambda\,k_B\,T}} - 1 \right)},$$

permet de relier le flux émis par un corps noir par unité de surface et d'angle solide à la température de ce corps.

- Les corps réels sont caractérisés par leur **coefficient d'émission**, rapport entre le flux émis par ce corps et celui qui serait émis par un corps noir à la même température.
- La **loi de Kirchhoff** établit l'égalité entre l'absorption et l'émission des corps.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 608.

10.1 Épaisseur optimale d'une gaine cylindrique

On considère un câble cylindrique constitué par un conducteur électrique en cuivre entouré d'une gaine de caoutchouc (rayon extérieur $R1$ et rayon intérieur $R2$). On se fixe les conditions de service suivantes :

- la température du cuivre, supposée uniforme, ne doit pas dépasser $T_2 = 100$ °C ;
- la surface extérieure de la gaine est, en régime permanent, à la température $T_1 = 20$ °C,
- l'air ambiant est à la température $T_0 = 15$ °C.

Déterminer l'intensité maximale du courant pouvant traverser le conducteur.

A.N. : $R_2 = 5$ mm, $R_1 = 10$ mm, λ caoutchouc $= 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ W · cm^{-1} · K^{-1}, résistivité électrique du cuivre $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ Ω · cm.

10.2 Fil parcouru par un courant dans un jet d'air en convection forcée

Un fil électrique en aluminium à section circulaire (diamètre $d = 1{,}5$ mm) et de résistivité électrique $\rho e = 0{,}035$ Ω · mm^2 · m^{-1} est refroidi dans un jet d'air sec perpendiculaire à son axe de révolution. La vitesse d'air loin de la surface de fil est égale $u = 1{,}2$ m · s^{-1}. La température de l'air est $T_{air} = 25$ °C.

Les paramètres thermophysiques de l'air à 50 °C sont :

- conductivité thermique de l'air : $\lambda_{air} = 0{,}0283$ W · m^{-1} · K^{-1}
- viscosité cinématique de l'air : $\nu_{air} = 17{,}95 \cdot 10^{-6}$ m^2 · s^{-1}
- nombre de Prandtl : $\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}698$

Déterminer le coefficient d'échange convectif à la surface du fil.

Partie III

Optique

11

NATURE ET PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

PRÉALABLES

- Notions de base en géométrie

MOTS CLÉS

- Milieu homogène
- Dioptre, rayon lumineux
- Réflexion, réflexion totale, réfraction, lois de Snell-Descartes
- Prisme, réfractomètre, fibre optique

OBJECTIFS

- Décrire la propagation de la lumière sous forme de rayons (cadre de l'approximation de l'optique géométrique).
- Étudier le phénomène de réflexion totale à l'interface de deux milieux transparents dont le second est moins réfringent.
- Découvrir les applications du quotidien basées sur le principe de la réfraction et la réflexion totale.

11.1 INTRODUCTION

L'optique (du grec *optikos*, relatif à la vue) est le domaine de la physique qui traite des propriétés de la lumière et des phénomènes de la vision. L'optique a aujourd'hui de nombreuses applications industrielles, allant de la fabrication de verres correcteurs de la vision aux développements les plus modernes de l'optoélectronique.

L'origine des technologies optiques remonte à la lointaine antiquité. Les premières dynasties égyptiennes utilisaient déjà des miroirs en bronze, 2 000 ans avant Jésus-Christ. Des théories sur le mécanisme de la vision et la nature de la lumière sont développées par les savants grecs, puis reprises et modifiées par les savants arabes (Al Hazen au XI^{e} siècle) et européens (Kepler au XVII^{e} siècle).

Les propriétés de la réflexion de la lumière sont énoncées par Euclide en 300 avant J.-C. Vers 130 après J.-C., Claude Ptolémée d'Alexandrie réalise des

Voir § 11.3.1

mesures assez précises de la réfraction de la lumière dans différents milieux transparents. Il en déduit que l'angle de réfraction et l'angle d'incidence sont proportionnels lorsque les angles sont petits. Snell en Hollande et Descartes en France découvrent qu'en réalité, ce sont les sinus de ces angles qui sont proportionnels. Cette loi, dite de la réfraction, est démontrée expérimentalement, mais non expliquée.

11.2 Nature de la lumière

11.2.1 Onde ou corpuscule ?

C'est en se penchant sur la nature de la lumière que l'origine de la loi de la réfraction pourra être comprise. À partir du XVII^{e} siècle, deux visions s'affrontent :

- La théorie corpusculaire selon laquelle la lumière est constituée de corpuscules matériels soumis à la gravitation universelle ;
- La théorie ondulatoire selon laquelle la lumière se propage comme une onde mécanique (comme, par exemple, le son dans l'air).

Dans la théorie corpusculaire, soutenue par Descartes puis Newton à la fin de sa vie, la réfraction est due à l'attraction de la matière. Lors du passage dans un milieu dense, la lumière serait « attirée », donc accélérée, et irait donc plus vite dans ce milieu que dans l'air. Dans la théorie ondulatoire, soutenue entre autre par le savant hollandais Christian Huygens (contemporain de Newton), chaque point de l'espace atteint par la lumière est la source d'une onde se propageant dans l'espace dans toutes les directions sous forme sphérique. Selon sa théorie, la lumière irait moins vite dans un milieu dense que dans l'air. À partir de ce principe, Huygens explique la loi de la réfraction (et aussi celle de la réflexion).

Voir § 11.2.2

En 1862, Léon Foucault montre que la vitesse de la lumière est plus faible dans l'eau que dans l'air : la théorie corpusculaire soutenue par Newton est réfutée. En 1864, Maxwell, théoricien anglais de génie, synthétise les lois de l'électricité et du magnétisme à travers quatre équations fondamentales. En combinant ces équations, il montre que le champ électrique et le champ magnétique peuvent se combiner pour former une perturbation de l'espace qui se propage à la vitesse... de la lumière mesurée par Foucault. Ainsi, la lumière peut être décrite comme une onde électromagnétique (Fig. 11.1), c'est-à-dire l'oscillation périodique d'un champ électrique et d'un champ magnétique dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Le développement de la mécanique quantique permettra au début du XX^{e} siècle d'unifier les visions ondulatoire et corpusculaire.

11.2.2 Propriétés de la lumière dans le modèle ondulatoire

a) Propagation de la lumière dans un milieu transparent homogène

Par analogie avec les ondes mécaniques, on pense alors que la lumière se propage dans un milieu matériel appelé Éther. Albert Einstein en 1905 réfute cette idée et énonce le *principe de relativité* :

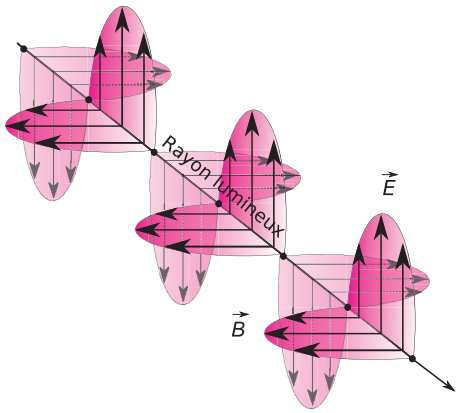


Figure 11.1

Dans le modèle ondulatoire, la lumière dans un milieu homogène et isotrope est la combinaison d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ oscillants perpendiculairement l'un à l'autre dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde lumineuse.

Principe de relativité d'Einstein

La lumière se propage dans le vide sans support matériel. Sa vitesse dans le vide, notée c *(pour célérité), est la même quelle que soit la fréquence de l'onde lumineuse et quel que soit le référentiel galiléen.*

Vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 299\,792{,}458\ km \cdot s^{-1}$ *Dans un milieu transparent, la lumière se propage avec une vitesse* $v \leqslant c$. *Contrairement au vide,* v *peut dépendre de la fréquence de l'onde lumineuse.*

UN PEU DE MÉTROLOGIE

La valeur de la vitesse de la lumière dans le vide a été fixée par décret en 1983 comme « valeur exacte ». Elle sert depuis à définir le mètre dans le système international d'unités : le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde. La seconde est définie par ailleurs à partir de transitions électroniques de l'atome de Césium 133.

b) Rayons et surfaces d'onde – Onde sphérique, onde plane

Dans le modèle ondulatoire, l'onde lumineuse se propage dans tout l'espace à trois dimensions.

Surface d'onde

On appelle surface d'onde l'ensemble des points de l'espace atteints par l'onde à un instant donné. Dans le vide, les surfaces d'onde se déplacent à la vitesse de la lumière v dans le milieu considéré.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Fréquence d'une onde périodique

Si les surfaces d'onde sont créées périodiquement avec une période T, l'onde est caractérisée par sa fréquence f :

$$f = \frac{1}{T}.$$

f est exprimée en s^{-1} ou, de façon équivalente, en Hz.

Longueur d'onde d'une onde périodique

La distance entre deux surfaces d'onde est appelée longueur d'onde et notée λ. Elle représente la distance parcourue par la lumière pendant une période T. On a alors :

$$\lambda = v.T = \frac{v}{f}.$$

λ s'exprime en mètre. Dans le vide, on a $v = c$ et $\lambda_0 = c/f$ où λ_0 est la longueur d'onde *dans le vide*.

Remarques

- La fréquence d'une onde ne dépend pas du milieu dans lequel elle se propage. Sa longueur d'onde, elle, en dépend car la vitesse de propagation de l'onde dépend du milieu. En toute rigueur, c'est la fréquence qui caractérise l'onde de manière non ambiguë. Si on utilise la longueur d'onde, il faut préciser dans quel milieu se trouve l'onde.
- Pour la lumière visible, on a $\lambda_0 \in [400 ; 800]$ nm. La fréquence de la lumière visible est de l'ordre de 10^{15} Hz.
- Une onde lumineuse ne possédant qu'une fréquence est dite *monochromatique*.

La forme des surfaces d'onde dépend du milieu dans lequel la lumière se propage. Dans le vide, l'onde émise par une source ponctuelle à distance finie a des surfaces d'onde sphériques. Les rayons de ces sphères indiquent des directions de propagation de la lumière (Fig. 11.2a). Si la source ponctuelle est très éloignée, les rayons arrivant à l'observateur sont quasiment parallèles entre eux. À la limite où la source est à l'infini, les rayons deviennent parallèles entre eux et les surfaces d'onde sont des plans. On parle d'onde plane (Fig. 11.2b). Dans la pratique, il est possible de construire expérimentalement des ondes planes en rendant les rayons d'un faisceau lumineux parallèles.

Onde plane – onde sphérique

Un faisceau cylindrique de rayons lumineux parallèles correspond à une onde plane dans le modèle ondulatoire. Il correspond à une source « à l'infini ». Un faisceau conique de rayons lumineux correspond à une onde sphérique dans le modèle ondulatoire. Il correspond à une source à distance finie de l'observateur.

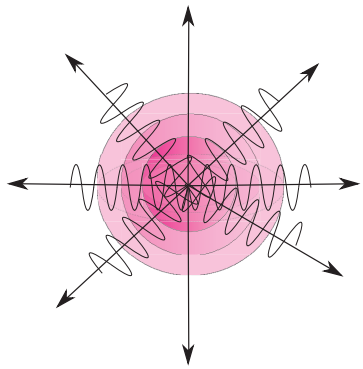


Figure 11.2a **Onde sphérique**

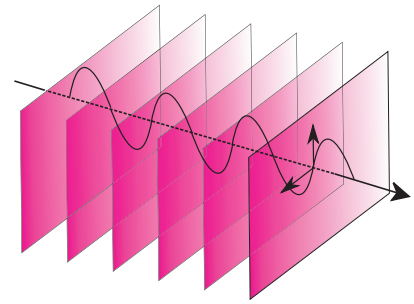


Figure 11.2b **Onde plane**

Représentation des surfaces d'onde (en rose) et des rayons lumineux associés (en noir) pour une source à distance finie de l'observateur (onde sphérique, figure de gauche) et pour une source à distance « infinie » (onde plane, figure de droite).

11.2.3 Notion de rayon lumineux – Optique géométrique

Dans l'approximation de l'optique géométrique, la lumière se propage par lignes lumineuses indépendantes appelées "rayons lumineux" et il n'est pas nécessaire de faire appel à la description ondulatoire de la lumière pour en comprendre la propagation. Par contre, les phénomènes de diffraction et d'interférence, liés à la nature ondulatoire de la lumière, ne peuvent pas s'expliquer dans le cadre de cette approximation.

Ils feront l'objet du chapitre 14.

Dans un milieu homogène, les rayons sont des droites. Lorsqu'un rayon rencontre la surface de séparation de deux milieux transparents (qu'on appelle *dioptre*) , il change de direction : une partie reste dans le premier milieu (milieu d'incidence) : il y a *réflexion* ; une autre partie est transmise dans le second milieu avec changement de direction : il y a *réfraction*.

La figure 11.3 définit les angles que font les rayons incident, réfléchi et réfracté par rapport à la normale au dioptre au point d'incidence.

Les lois relatives au parcours d'un rayon peuvent s'exprimer de deux façons différentes équivalentes : les lois de Snell-Descartes et le principe de Fermat.

11.2.4 Lois de Snell-Descartes

Loi du plan d'incidence (1re loi de Snell-Descartes)

Les rayons incident, réfléchi, réfracté et la normale au point d'incidence sont dans un même plan, le plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence (Fig. 11.3).

Loi de la réflexion (2e loi de Snell-Descartes)

L'angle d'incidence et l'angle réfléchi sont égaux et opposés.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

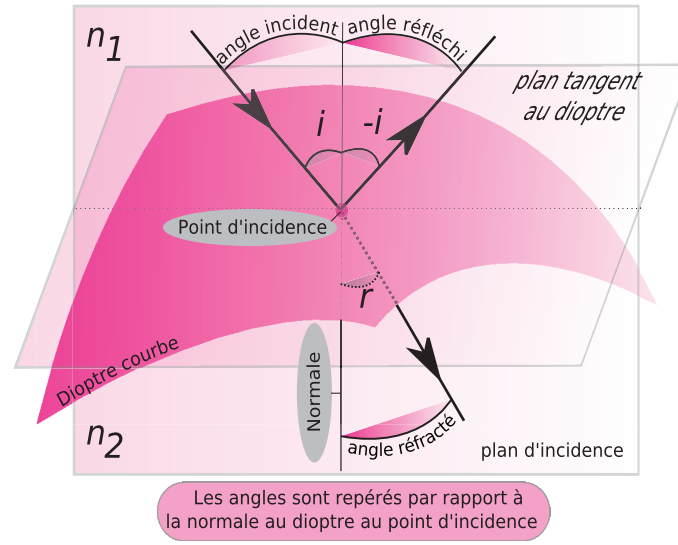


Figure 11.3 Rayons lumineux à l'interface entre deux milieux transparents
Définition des rayons incident, réfléchi et réfracté à l'interface de deux milieux transparents, et des angles correspondants. Le plan d'incidence, défini par le rayon incident et la normale au dioptre au point d'incidence, et le plan tangent au dioptre sont également représentés.

Loi de la réfraction (3e loi de Snell-Descartes)

Les angles incident et réfracté i *et* r *sont reliés par la relation :*

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

dans laquelle n_1 et n_2 sont des constantes caractéristiques des milieux considérés et de la lumière employée. On les nomme indices de réfraction *de ces milieux pour cette lumière.*

Réfringence

On dit d'un milieu transparent qu'il est plus réfringent qu'un autre milieu transparent lorsque son indice de réfraction est plus élevé que celui de l'autre milieu. La réfringence est la capacité d'un milieu à réfracter la lumière. L'indice de réfraction est une mesure de la réfringence d'un milieu pour une lumière de fréquence donnée.

Remarque

Les lois de Snell-Descartes son valables aussi bien pour des dioptres plans que courbes. Dans ce dernier cas, elles s'appliquent localement en chaque point d'incidence.

Principe du retour inverse de la lumière

De la symétrie des lois de Snell-Descartes résulte le corollaire suivant :
Si la lumière suit un certain chemin dans un certain sens, elle peut suivre le même chemin en sens inverse. Les lois de la propagation des rayons lumineux sont indépendantes du sens de parcours de la lumière.

11.2.5 Constructions géométriques

Les figures 11.4a et 11.4b décrivent les constructions géométriques permettant de tracer les rayons réfléchi et réfracté au passage d'un dioptre plan. On trace d'abord le rayon incident et son prolongement dans le second milieu (en pointillés Fig. 11.4a et 11.4.b). Par le point d'incidence I, on mène le plan tangent au dioptre et la normale, et du point d'incidence pris comme centre, on trace les cercles de rayons n_1 et n_2. Le prolongement du rayon incident coupe le cercle de rayon n_1 en un point J. Le projeté orthogonal de J sur le dioptre est noté C. La droite JC coupe alors le cercle de rayon n_2 en un point K du second milieu par lequel passe le rayon réfracté et en un point K' du premier milieu par lequel passe le rayon réfléchi. On constate sur les figures 11.4a et 11.4.b que le segment IC a bien pour longueur $n_1 \sin i = n_2 \sin r$.

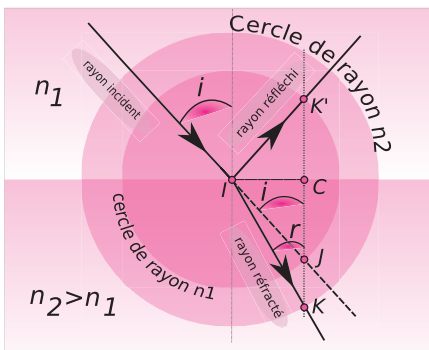


Figure 11.4a **Construction géométrique $n_1 < n_2$**

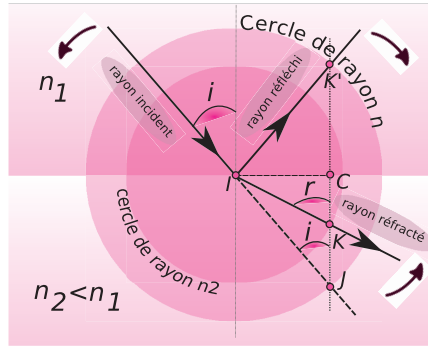


Figure 11.4b **Construction géométrique $n_1 > n_2$**

Le principe de la construction des rayons réfléchis et réfractés au passage d'un dioptre repose sur la loi des sinus. La longueur IC est égale à $n_1 \sin i$ par projection orthogonale sur le dioptre de l'intersection du prolongement dans le deuxième milieu du rayon incident avec le cercle de rayon n_1. Les flèches arrondies Fig. 11.4b indiquent comment évoluent les rayons réfléchi et réfracté lorsque l'on augmente l'angle d'incidence i.

Remarque

On remarque que dans le cas où $n_1 < n_2$ (Fig. 11.4a), le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre au point d'incidence et que dans le cas contraire (Fig. 11.4b), il s'en éloigne.

11.2.6 Conséquences des lois de Snell-Descartes

a) Réfraction dans le cas $n_1 < n_2$

La situation est représentée figures 11.5a et 11.5b. D'après la loi de la réfraction :

$$n_1 < n_2 \Leftrightarrow \sin r < \sin i \Leftrightarrow |\, r \,| < |\, i \,|.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

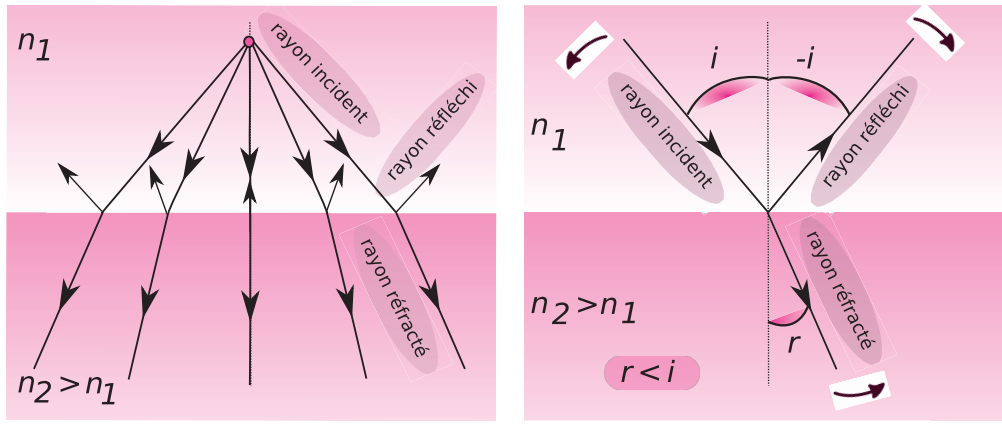


Figure 11.5

Cas $n_1 < n_2$

Pour tout angle d'incidence i, *il existe toujours un rayon réfracté et ce dernier se rapproche de la normale au dioptre au point d'incidence. En incidence rasante, on a sin* i = *1 et l'angle réfracté est tel que :*

$$\sin r = \frac{n_1}{n_2} < 1.$$

Remarque

D'après la loi de la réflexion, il existe toujours un rayon réfléchi.

b) Réfraction dans le cas $n_1 > n_2$

La situation est représentée sur les figures 11.6a et 11.6b. D'après la loi de la réfraction,

$$n_1 > n_2 \Leftrightarrow \sin r > \sin i \Leftrightarrow |\, r \,| > |\, i \,|.$$

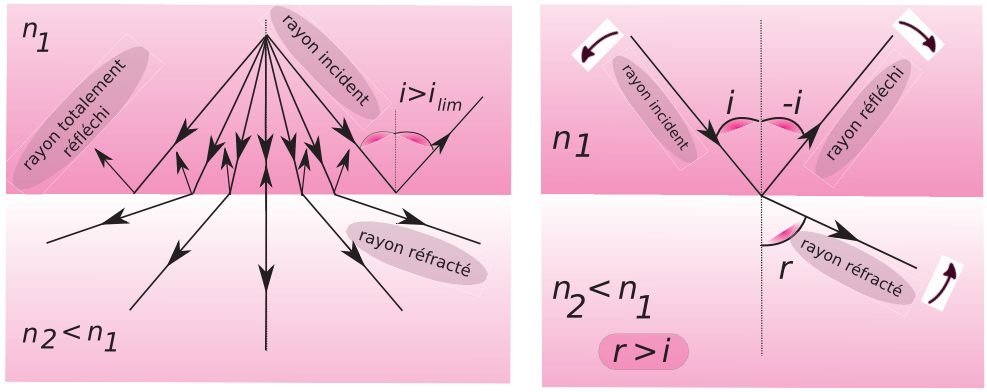
Cas $n_1 > n_2$

Les rayons réfractés dans le second milieu s'éloignent de la normale au dioptre au point d'incidence. Il n'existe un rayon réfracté que tant que sin r $\leqslant$ *1.*

c) Réflexion totale

Pour $n_1 > n_2$ la condition sin $r \leqslant 1$ pour laquelle il existe un rayon réfracté implique que $n_2 \sin r \leqslant n_2$, donc que, d'après la loi de la réfraction :

$$\sin i \leqslant \frac{n_2}{n_1}.$$



a) b)

Figure 11.6

Réflexion totale

La limite sin $i = n_2/n_1$ *définit un angle limite* $i_{lim} = arcsin\ (n_2/n_1)$ *au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté. Toute la lumière est alors réfléchie dans le premier milieu. Il y a réflexion totale pour* $i > i_{lim}$ *(Fig. 11.7).*

À la limite de réflexion totale, le rayon réfracté est le long du dioptre. La figure 11.7 illustre ce cas.

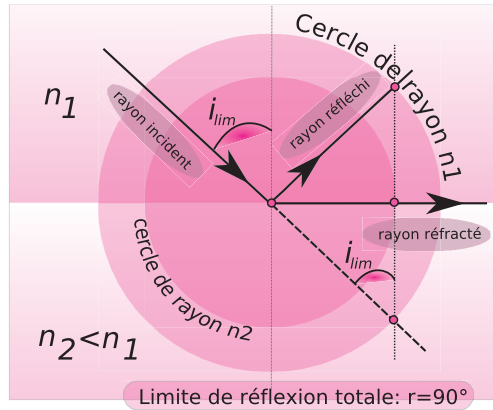


Figure 11.7 **Construction des rayons réfracté et réfléchi à la limite de réflexion totale.**

Remarque

Une interprétation de la réfraction dans le modèle ondulatoire est donnée sur le site web.

Site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

11.2.7 Retour sur l'approximation de l'optique géométrique

Les lois de Snell-Descartes ne peuvent pas être vérifiées directement par des expériences rigoureuses. En effet, il faudrait pouvoir isoler un rayon lumineux, or si on cherche à le faire par filtration de la lumière à travers des écrans percés, on constate que si l'ouverture pratiquée dans l'écran devient très petite, la lumière s'épanouit dans toutes les directions au-delà de l'écran percé par diffraction. Il en résulte que le rayon lumineux est une abstraction et n'a pas d'existence réelle[1]. La description en termes de rayons de l'optique géométrique est légitime à condition d'utiliser des systèmes dont la taille est grande par rapport à la longueur d'onde de l'onde électromagnétique (si elle est de l'ordre de la longueur d'onde, on est dans le domaine de l'optique ondulatoire). Dans ce cas, les lois de Snell-Descartes sont satisfaites et on doit les considérer comme vérifiées *a posteriori* par l'exactitude de leurs conséquences.

Voir chapitre 14

11.2.8 Principe de Fermat

a) Énoncé du principe de Fermat

Soit l_1, l_2, ..., l_N les longueurs des parcours d'un rayon lumineux dans différents milieux transparents homogènes et isotropes, et v_1, v_2, ..., v_N les vitesses de la lumière dans ces milieux (Fig. 11.8).

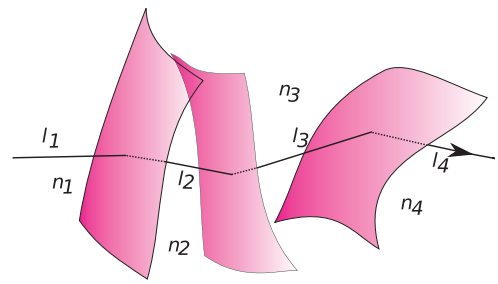


Figure 11.8 **Rayon lumineux dans des milieux transparents homogènes d'indice différent**

La durée totale du parcours du rayon est :

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} \frac{l_i}{v_i}.$$

Chemin optique

On appelle chemin optique l_0 d'un rayon la longueur qui serait parcourue dans le vide en un temps égal à la durée du trajet réel.

1. Un faisceau laser est une bonne approximation d'un rayon lumineux pour les besoins des expériences courantes.

On a donc $l_0/c = \sum_{i=1}^{N} l_i/v_i$ soit $l_0 = \sum_{i=1}^{N} c/v_i \times l_i$. Posons $n_i = c/v_i$.

Indice optique

On appelle indice optique du milieu i la grandeur $n_i = c/v_i$. Cet indice est équivalent à celui intervenant dans la 3e loi de Snell-Descartes (loi de la réfraction).

On obtient que le chemin optique est la somme des produits des longueurs de chaque parcours par l'indice optique du milieu correspondant :

$$l_0 = \sum_{i=1}^{N} n_i l_i .$$

Principe de Fermat

Pour aller d'un point A *à un point* B*, la lumière suit le chemin optique le plus court possible ou le plus long possible (chemin optique extrémal). Si* S *est la longueur du trajet de* A *vers* B*, on a* d$S = 0$*, où* dS *est la différentielle de* S.

Remarques

Cet énoncé est équivalent à dire que la lumière suit, pour aller d'un point A à un point B, le trajet dont la durée est minimale ou maximale.

Cet énoncé ne se limite pas au cas de milieux homogènes. Dans le cas d'un milieu non homogène, l'indice optique $n(s)$ varie avec l'abscisse curviligne s du point de la trajectoire lumineuse considéré. Le chemin optique s'écrit alors $l_0 = \int_A^B n(s)\mathrm{d}l$, où d$l$ est un élément d'abscisse curviligne le long du rayon (Fig. 11.9).

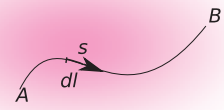


Figure 11.9 Rayon dans un milieu inhomogène
La propagation de la lumière dans un milieu inhomogène donne lieu au phénomène de mirage.

Site web

b) Conséquences du Principe du Fermat

La lumière se propage en ligne droite

Dans un milieu homogène et isotrope, la vitesse de la lumière est la même en tout point, dans toutes les directions. L'indice optique est donc constant le long du trajet lumineux. Dans ce cas, le chemin optique est proportionnel à la longueur parcourue dans le milieu entre deux points A *et* B*. La longueur la plus courte est celle joignant* A *et* B *en ligne droite.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Le fait que la lumière se propage en ligne droite se manifeste dans la vie quotidienne par le phénomène des ombres.

Exercice d'application 11.1 Expérience – Ombre d'une pointe de crayon sur la rétine de l'œil

Dans une feuille de papier aluminium, percer un petit trou à l'aide d'une aiguille. Regarder une source lumineuse (une ampoule) à travers le trou. Interposer la pointe d'un crayon à papier entre la feuille d'aluminium et votre œil : on voit le crayon et l'ombre de celui-ci sur la rétine. Constater que l'ombre est inversée par rapport au crayon. Déplacer le crayon et constater que l'ombre se décale.

Théorème

Le chemin optique extrémal satisfait aux lois de Snell-Descartes

DÉMONSTRATION

Soient deux trajets lumineux allant de A vers B infinitésimalement voisins, l'un avec incidence en I et l'autre en J. L'indice du premier milieu est n, celui du second milieu n'. On suppose les deux trajets dans le plan d'incidence. Par hypothèse, on a $nAI + n'IB$ extrémal. Si le point d'incidence varie légèrement, le chemin optique ne change pas : $nAI + n'IB = nAJ + n'JB$, d'où l'on tire que $n(\mathrm{AJ} - \mathrm{AI}) = n'(BI - BJ)$. Soit H le projeté de I sur (AJ) et K le projeté de J sur (BI). On a $HIJ = i$ et $KJI = \mathrm{r}$. Or $HJ = AJ - AH \approx AJ - AI$ car les chemins sont voisins. De même, $KI = BI - BK \approx BI - BJ$. D'où $nHJ = n'KI$. Or $HJ = IJ \sin i$ et $KI = IJ \sin r$, d'où $n \sin i = n' \sin r$.

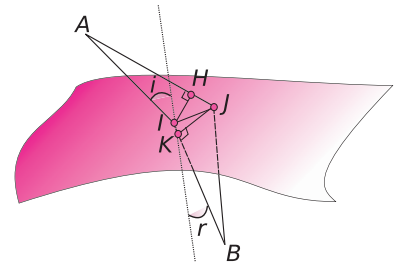


Figure 11.10 **Équivalence du principe de Fermat avec les lois de Snell-Descartes**

Remarque

Une démonstration analogue peut être faite pour la loi de la réflexion.

c) Propriétés des indices optiques

Nous avons défini plus haut l'indice optique comme le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide à celle dans le milieu transparent homogène et isotrope considéré. De ce fait, l'indice optique du vide vaut 1. Pour un milieu transparent, on a nécessairement que l'indice est toujours supérieur ou égal à 1. On a les propriétés suivantes :

- $n_{\text{vide}} = 1$;
- $n \geqslant 1$;
- en général, la vitesse de la lumière dans un milieu dépend de la fréquence : dans le verre par exemple, les radiations rouges se déplacent plus rapidement que les radiations bleues. On appelle indice moyen l'indice correspondant aux radiations jaunes. On appelle dispersion la différence entre les indices extrêmes. La dispersion par l'eau de pluie est à la base du phénomène de l'arc-en-ciel ;
- l'indice moyen de l'air est $n_{\text{air}} = 1{,}0002926$. Il varie très peu avec la fréquence des autres radiations de la lumière blanche ;
- pour tous les gaz autres que l'air, on a trois zéros avant le premier chiffre significatif, d'où il résulte qu'on peut considérer l'indice des gaz comme égal à 1 (pour des conditions normales de température et de pression) ;
- pour les solides et les liquides usuels, l'indice est compris entre 1 et 2. On retiendra que $n_{\text{verre}} = 1{,}5$ et $n_{\text{eau}} = 1{,}33$.

Site web

Remarque

En optique, on utilise des verres en silicates de potassium et calcium (Crown) et de potassium et plomb (Flint). Les Flint sont plus dispersifs et réfringents que les Crown.

11.3 Applications

11.3.1 Mesure des indices optiques

a) Intérêt

La mesure des indices optiques d'un solide ou d'un liquide est une opération courante. Elle intervient aussi bien dans l'industrie agroalimentaire que pharmaceutique ou pétrochimique. En effet, la mesure de l'indice optique d'un liquide est un moyen de contrôler la concentration d'une substance donnée. Par exemple, on peut contrôler la concentration d'antigel dans le liquide de refroidissement des moteurs, ou celle de savon dans les liquides de nettoyage. Ou encore contrôler la pureté d'émulsions ou de solutions utilisées dans la fabrication de médicaments, ou déterminer si une huile de tournesol vendue dans le commerce a été mélangée avec des huiles bon marché. Citons enfin l'utilisation de ce procédé par les viticulteurs afin de tester la concentration en sucre du raisin pour déterminer le moment optimal pour la vendange. Toutes ces mesures d'indice sont réalisées à l'aide d'un *réfractomètre*. Pour les solides et les liquides, les deux réfractomètres les plus utilisés sont le réfractomètre d'Abbe et le réfractomètre de Pulfrich. Une précision sur la quatrième décimale de l'indice de réfraction est aisément

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

obtenue avec ces réfractomètres. Pour les gaz, les indices étant tous très voisin de 1, on utilise des méthodes interférométriques pour une plus grande précision.

b) Réfractomètres d'Abbe et de Pulfrich

Les réfractomètres d'Abbe et de Pulfrich reposent tous les deux sur le même principe. On dépose sur un prisme d'indice très élevé ($N \geqslant 1{,}7$) et d'angle au sommet A un extrait de la substance dont on cherche à mesurer l'indice n, supposé inférieur à N. Cette substance est illuminée de façon uniforme et la lumière qui la traverse est réfractée dans le prisme d'indice N (Fig. 11.11).

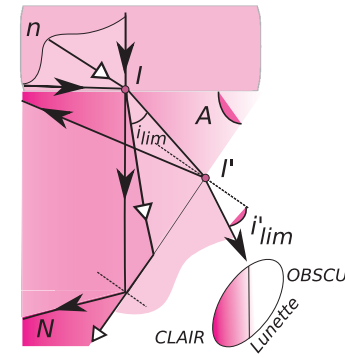


Figure 11.11 **Principe des réfractomètres d'Abbe et de Pulfrich**

Les rayons incidents en I sur le dioptre substance-prisme entre 0° et 90° sont réfractés dans le prisme entre 0° et i_{lim}. En sortie du prisme, on dispose une lunette collectrice. Le rayon extrême dans le prisme est réfracté en I' sur le dioptre prisme-air et émerge en faisant l'angle i'_{lim}. Au-delà de cet angle, aucun rayon n'est réfracté dans l'air (réflexion totale). Le champ observé dans la lunette présente donc deux plages, l'une sombre (aucun rayon), l'autre claire (zone illuminée). L'application des lois de Snell-Descartes conduit à la relation suivante :

$$n = N \cdot \sin\left(A - \arcsin\left(\sin\left(i'_{\text{lim}}\right)/N\right)\right).$$

Pour le réfractomètre d'Abbe, $A = 60°$. Pour le réfractomètre de Pulfrich, $A = 90°$. Ainsi, connaissant l'indice de réfraction N du prisme, et l'angle au sommet A de celui-ci, on peut en déduire l'indice de réfraction n de la substance S en effectuant une détermination expérimentale de l'angle i'_{lim} entre la normale à la face de sortie du prisme et le rayon extrême émergeant du prisme. Il suffit pour cela de repérer la limite entre la zone sombre et la zone claire observée à travers la lunette lorsqu'on éclaire le système étudié sous une incidence rasante d'un faisceau lumineux monochromatique.

11.3.2 Guidage de la lumière – Fibre optique

Le phénomène de réflexion totale permet d'utiliser des substances transparentes solides ou liquides pour guider la lumière. À condition que cette substance forme un conduit d'indice supérieur à celui du milieu environnant, tout rayon entrant dans le conduit se propagera par réflexions totales successives à l'interface conduit-milieu extérieur. Ce

principe est mis à profit dans les fibres optiques qui sont au centre des télécommunications modernes.

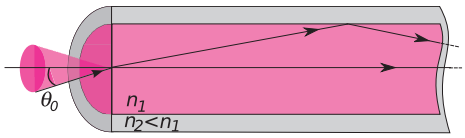


Figure 11.12 Fibre optique à saut d'indice
Section de fibre optique multimode à saut d'indice. Le cœur d'indice n_1 est un cylindre de verre entouré de la gaine d'indice $n_2 < n_1$. Les rayons ayant une incidence $\theta \leqslant \theta_0$ peuvent se propager par réflexions totales successives à l'interface cœur-gaine.

Une fibre optique *à saut d'indice* est un guide d'onde formé de deux cylindres concentriques transparents : le cœur, et la gaine entourant ce dernier (Fig. 11.12). Le cœur a un indice plus élevé que celui de la gaine : un rayon se propageant dans le cœur et arrivant à l'interface cœur-gaine avec un angle suffisamment élevé sera réfléchi totalement et poursuivra son trajet dans la fibre. La lumière étant totalement réfléchie, il n'y a pas de perte d'énergie lumineuse au niveau des réflexions.

Seuls les rayons arrivant sur la section de la fibre avec un angle $\theta \leqslant \theta_0$ tel que $\sin\theta_0 = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, où n_1 et n_2 sont les indices du cœur et de la gaine respectivement, pourront se propager dans la fibre. $\sin\theta_0$ est appelé *ouverture numérique* de la fibre. Avec par exemple $n_1 = 1{,}5$ et $n_2 = 1{,}49$, on a $\theta_0 \approx 10°$. Un rayon avec $\theta > \theta_0$ arrive sur l'interface cœur-gaine avec un angle trop faible pour qu'il y ait réflexion totale : une partie du rayon est alors réfractée dans la gaine et après quelques impacts sur la gaine, il n'y a plus de rayon dans le cœur : ce type de rayon ne se propage pas.

Inversement, à chaque valeur $\theta \leqslant \theta_0$ correspond un rayon susceptible de se propager dans la fibre avec un trajet déterminé. Chaque trajet est, en optique géométrique, appelé *mode*. Ainsi, une fibre permettant la propagation de tels rayons est appelée *fibre multimode.* Le trajet le plus court est suivi par le rayon entrant dans la fibre sous incidence nulle, le trajet le plus long par le rayon entrant dans la fibre sous l'incidence θ_0. Les temps de propagation correspondants dans une fibre de longueur L sont respectivement $\tau_{\min} = Ln_1/c$ et $\tau_{\max} = \tau_{\min}\,(n_1/n_2)$, soit environ 0,35 µs pour une fibre de 10 km. Ainsi, l'information véhiculée n'arrive pas au même moment en sortie de la fibre : on parle de *dispersion inter-modale.* Cette dispersion inter-modale est proportionnelle à la longueur de la fibre et est un inconvénient pour les télécommunications car elle ralentit le débit d'information (il faut attendre que tous les modes soient transmis avant d'envoyer l'information suivante). Ainsi, les fibres multimodes ne sont utilisées que pour des courtes distances et à de faibles débits. Ce problème est atténué dans les fibres à *gradient d'indice.* Dans ces fibres, l'indice diminue continûment du centre vers le bord de la fibre ; elles permettent d'atteindre des débits importants sur de courtes distances.

Pour les télécommunications à grande distance (dont celles intercontinentales), on utilise des *fibres monomodes*. Ces fibres, dont la section de cœur est très petite (quelques microns), permettent de ne sélectionner que le mode de propagation le plus direct (celui qui se propagerait le long de l'axe de la fibre si celle-ci était parfaitement déroulée). Ce type de fibre ne présente pas le problème de dispersion intermodale. Elles sont en

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

revanche affectées d'un problème de *dispersion intra-modale* : l'impulsion lumineuse se propageant n'est pas parfaitement monochromatique et, comme la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde, l'impulsion se retrouve étalée dans le temps en sortie de la fibre (on dit qu'elle est élargie).

Aujourd'hui, les fibres optiques sont utilisées dans de nombreux domaines, allant des télécommunications aux réseaux informatiques, en passant par des applications médicales ou domotiques (éclairage intérieur à fibres optiques).

11.3.3 Prisme

Prisme

Un prisme est un milieu transparent homogène d'indice n limité par deux dioptres plans non parallèles entre eux formant un angle au sommet A (Fig. 11.13a). Un rayon arrive par la face d'entrée, traverse le prisme et ressort par la face de sortie. La face opposée est appelée base du prisme.

Un prisme est utile pour ses propriétés de *déviation* et de *dispersion* des rayons lumineux. Dans cette section, nous allons étudier les propriétés de la déviation en fonction de l'angle d'incidence du rayon incident.

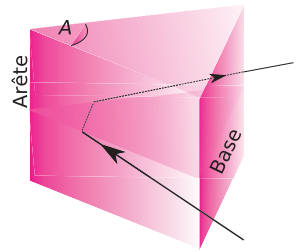


Figure 11.13a **Représentation à trois dimensions d'un prisme à base rectangulaire**

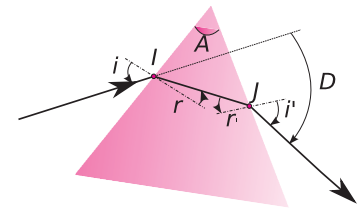


Figure 11.13b **Définition des angles utilisés pour l'étude de la déviation.**

Un rayon incident pénètre dans le prisme par la face d'entrée en I sous l'angle d'incidence i. Le rayon réfracté fait un angle r avec la normale à la face d'entrée en I. Le rayon traverse le prisme et arrive sous l'incidence r' au point J de la face de sortie. Il est réfracté avec un angle i' dans le milieu d'origine (ici, on considère le prisme plongé dans l'air).

Déviation

La déviation D est l'angle entre le prolongement du rayon incident et le rayon en sortie du prisme.

a) Conventions

On considère les conventions de signe suivantes :

- les angles i et i' sont positifs quand les rayons sont du côté de la base du prisme par rapport aux normales aux faces d'entrée et de sortie aux points I et J ;

- i et r sont de même signe, i' et r' sont de même signe ;
- D est compté positivement vers la base du prisme.

b) Formules du prisme

L'application de la loi de la réfraction en I puis en J donne les relations suivantes :

$$\sin i = n \sin r$$

$$n \sin r' = \sin i'$$

Dans le triangle IAJ, la somme des angles est égale à π ce qui implique :

$$A = r + r'$$

La déviation s'exprime par $D = i - r + i' - r' = i + i' - r - r' = i + i' - A$.

L'ensemble des quatre relations précédentes constitue les formules du prisme et décrit entièrement les propriétés de déviation d'un prisme.

c) Étude de la déviation

Les formules du prisme forment un ensemble de quatre équations de sept variables. Il y a donc trois variables indépendantes choisies comme étant n, A et i :

$$D = f(n, A, i).$$

Théorème 11.13

D *est fonction croissante de l'indice* n.

DÉMONSTRATION

$D = i + i' - A$. Pour i fixé, si n croît, r décroît, donc r' croît, donc i' croît, donc D croît.

Théorème 11.14

D *est fonction croissante de* A.

DÉMONSTRATION

Pour i et n fixés, quand A croît, r' et i' croissent. On calcule la dérivée de D par rapport à A :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}A} = \frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}A} - 1 = \frac{n \cos r'}{\cos i'} - 1.$$

Or $i' \geqslant r'$ donc $\cos r' \geqslant \cos i'$ et $\mathrm{d}D/\mathrm{d}A \geqslant 0$.

Théorème 11.15

D *passe par un minimum quand* i *varie.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

DÉMONSTRATION

La symétrie des formules du prisme montre que D prend la même valeur pour deux valeurs i et i' de l'angle d'incidence. En effet, le principe du retour inverse de la lumière impose que si l'angle d'incidence est i', alors le rayon sortant fait un angle i avec la normale à la face de sortie. Ainsi, si on trace la courbe $D = f(i)$, toute parallèle à l'axe des abscisses coupe la courbe deux fois. Il en résulte que cette courbe présente un extremum. Montrons qu'il s'agit d'un minimum. En additionnant les deux premières formules du prisme, on a :

$$\sin i + \sin i' = n(\sin r + \sin r') \Leftrightarrow \sin\left(\frac{i+i'}{2}\right)\cos\left(\frac{i-i'}{2}\right) = n\sin\left(\frac{r+r'}{2}\right)\cos\left(\frac{r-r'}{2}\right)$$

Or $(i + i')/2 = (A + D)/2$ et $(r + r')/2 = A/2$ d'où :

$$\frac{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)}{n\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{r-r'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i-i'}{2}\right)} \geqslant 1.$$

La dernière inégalité résulte de ce qu'on a $i' - r' > i - r$. On voit que le membre de gauche devient égal à 1 pour $i = i'$ et $r = r'$. On a donc bien un minimum de la déviation. Au minimum de déviation, on obtient :

$$n = \sin\left(\frac{A+D}{2}\right) / \sin\left(\frac{A}{2}\right).$$

Remarque

Une étude de la fonction dD/di permet d'obtenir les mêmes conclusions.

Expérimentalement, il est aisé d'identifier le minimum de déviation : en faisant varier l'angle d'incidence, le faisceau émergent se rapproche puis s'éloigne de la direction d'incidence. Connaissant l'angle au sommet A (ou en le mesurant), la mesure de D permet de déterminer l'indice n sans avoir à mesurer l'angle d'incidence du rayon entrant dans le prisme.

À RETENIR

- Le terme lumière désigne la gamme de fréquences des ondes électromagnétiques pour lesquelles l'œil est sensible. La valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est $c = 299\,792{,}458$ km · s^{-1}, soit environ 300 000 km · s^{-1}.
- À toute onde lumineuse, on peut associer une longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = c/f$, où f est la fréquence de l'onde. Celle-ci est indépendante du milieu, seule la longueur d'onde varie avec le milieu.
- Le milieu est caractérisé par son indice optique $n = c/v$ où v est la vitesse de l'onde dans le milieu.
- Les lois de propagation de la lumière dans un milieu homogène et isotrope sont décrites par les trois lois de Snell-Descartes (loi du plan d'incidence, loi de la réflexion, loi réfraction). La loi de la réfraction au passage d'un milieu transparent d'indice n_1 à un milieu d'indice n_2 s'énonce :

  $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ où i et r sont les angles d'incidence et de réfraction. Tous les angles sont mesurés par rapport à la normale au dioptre.
- Lors du passage d'un milieu réfringent à un milieu moins réfringent, il y a réflexion totale du rayon incident si l'angle d'incidence est supérieur à un angle limite tel que $\sin i_{\text{lim}} = n_2/n_1$. Les applications de la réflexion totale sont nombreuses : elle permet par exemple de guider la lumière à l'intérieur des fibres optiques.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 609.

11.1 Construction géométrique pour i > i_{lim}

Reprendre la construction de la figure 11.7 ($n_1 > n_2$) dans le cas où $i > i_{\text{lim.}}$. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de tracer le rayon réfracté dans ce cas.

11.2 Mesure de l'indice d'un prisme

Un étudiant mesure l'angle de déviation minimum d'un prisme d'angle au sommet $A = 60°$ (supposé parfaitement connu) et trouve $D = 38 \pm 1°$. Que vaut l'indice n du prisme ? Que vaut l'incertitude δn sur cette mesure ?

11.3 Déviation d'un prisme aux petits angles

Montrer qu'aux petits angles, la déviation D du rayon incident sur un prisme d'indice n et d'angle au sommet A est $D \approx (n - 1)A$.

11.4 Longueur d'onde dans l'eau

Un poisson rouge réfléchit dans l'air une longueur d'onde $\lambda_0 = 700$ nm.

a) Quelle relation relie la longueur d'onde λ dans un matériau d'indice n à la longueur d'onde dans le vide λ_0 ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Que vaut l'indice de l'air ? Justifier le fait que la longueur d'onde dans l'air est assimilée à la longueur d'onde dans le vide.

c) Que vaut l'indice de l'eau ? Calculer la longueur d'onde λ dans l'eau ? Pourquoi le poisson apparaît-il rouge dans l'eau comme dans l'air ?

11.5 Principe d'un réfractomètre

Le principe d'un réfractomètre est illustré sur la figure 11.14. Un échantillon de liquide à étudier (indice n inconnu) est disposé entre deux blocs de verre : un bloc illuminateur servant à éclairer le liquide, et un bloc réfractant. Ce dernier possède un fort indice de réfraction ($N = 1{,}75$).

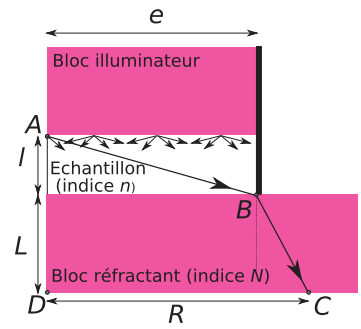


Figure 11.14 **Principe d'un réfractomètre**

Une source de lumière monochromatique éclaire le bloc illuminateur par sa surface haute. Sa surface basse est rugueuse (dépolie) si bien que chaque point de cette surface recevant la lumière de la source réémet des rayons lumineux dans toutes les directions par diffusion. Grâce à ce phénomène, l'échantillon de liquide est éclairé sur toute sa surface haute par des rayons lumineux dans toutes les directions. Un rayon allant de A vers B possède le plus grand angle d'incidence possible sur le bloc réfractant situé au-dessous de l'échantillon de liquide.

On appelle i_0 cet angle. Ce rayon est réfracté dans le bloc réfractant en faisant un angle r_0 avec la normale au dioptre en B.

a) Calculer $\sin i_0$ en fonction de e et l (dimensions de l'échantillon définies figure 11.14). Faire l'application numérique pour $l = 2$ cm et $e = 10$ cm. Par quelle relation i_0 et r_0 sont-ils reliés ?

b) On appelle C le point où ce rayon émerge du bloc réfractant. De quel côté de C émergent tous les autres rayons en provenance du liquide et réfractés dans le bloc réfractant ?

c) On dispose un détecteur de lumière sous le bloc réfractant. Ce détecteur capte tout rayon émergeant du bloc réfractant par sa surface basse. Décrire l'éclairement observé. Comment en déduire une mesure de l'indice n de l'échantillon ?

11.6 Mesure d'un indice avec un réfractomètre

À l'aide du réfractomètre étudié à l'exercice 11.5, on mesure la longueur $R = DC$.

a) Montrer que R s'exprime par : $R = e + L\alpha \,/\, (1 - \alpha^2)^{1/2}$ avec $\alpha = (n/N) \sin i_0$.

b) On donne $e = 10$ cm, $L = 4$ cm et $l = 2$ cm. On mesure $R = 145 \pm 1$ mm. Calculer α, puis n. Commentez cette valeur.

c) Exprimer l'incertitude δn en fonction de N, i_0 et $\delta\alpha$, incertitude sur α.

d) Montrer que l'incertitude sur R s'exprime par $R = L/(1 - \alpha^2)^{3/2}\delta\alpha$. Calculer $\delta\alpha$. En déduire δn pour cette mesure.

12

Formation des images en optique

PRÉALABLES

- Notion de rayon lumineux
- Lois de Descartes (cadre de l'optique géométrique)

MOTS CLÉS

- Système centré
- Stigmatisme et aplanétisme
- Objet et image
- Relations de conjugaison
- Lentilles minces convergentes et divergentes

OBJECTIFS

- Décrire les conditions de formation d'une image par un système centré.
- Étudier les principaux systèmes optiques simples (miroirs, dioptres).
- Étudier la formation d'image par les lentilles minces convergentes et divergentes.
- Aborder le fonctionnement de l'œil humain et ses principaux défauts.

12.1 Introduction

À l'aube du XXI^{e} siècle, l'image a pris une place considérable dans notre quotidien. Les images sont l'un des principaux vecteurs d'information du monde moderne. Créer, fixer, enregistrer, transmettre ou diffuser des images sont des activités banales. Nous allons dans ce chapitre étudier sous quelles conditions on peut former une image à l'aide d'un système optique.

Remarque

La notion d'image au quotidien est plus vaste que la notion d'image au sens de l'optique géométrique. On parle couramment d'image *floue*. En optique, une image floue n'existe pas. Il y a formation d'une image (par définition *nette*) ou non.

12.2 Approximations de Gauss

12.2.1 Définitions

Système optique centré

Un système centré est une association de dioptres et/ou de miroirs dont les centres de courbures sont tous sur une même droite appelée *axe optique* du système.

Système stigmatique – Image d'un point lumineux *P*

Un système centré est stigmatique pour un point P lorsqu'il transforme un faisceau conique de rayons de sommet P en un autre faisceau également conique de sommet P' (Fig. 12.1a). P' est appelé *image de P par le système optique*.

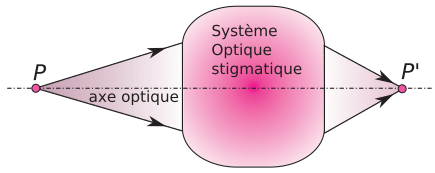


Figure 12.1a **Système optique stigmatique**
Un système stigmatique donne d'un point objet un unique point P' appelé image de P.

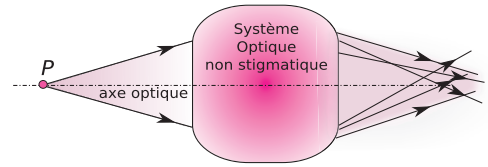


Figure 12.1b **Système optique non stigmatique**
Si le système n'est pas stigmatique, les rayons en sortie ne se coupent pas en un unique point. Il n'y a pas d'image du point P par ce système.

Points conjugués

D'après le principe du retour inverse, si on place une source en P', P est son image. On exprime cette réciprocité en appelant P et P' *points conjugués* par le système.

Image réelle – Image virtuelle

Un point lumineux est *réel* lorsque les rayons s'y coupent réellement et *virtuel* quand les rayons ne s'y rencontrent que par leurs prolongements. Par conséquence, l'image d'un objet par un système optique est réelle si on peut la projeter sur un écran, et virtuelle dans le cas contraire. Les figures 12.2a et 12.2b illustrent ce point.

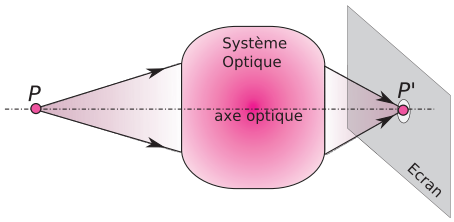


Figure 12.2a **Image réelle**
Image réelle d'un point *P* par un système optique stigmatique. L'image *P'* peut être projetée sur un écran.

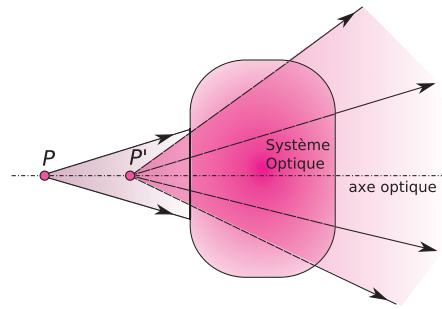


Figure 12.2b **Image virtuelle**
Image virtuelle d'un point *P* par un système optique stigmatique. L'image se situe à la rencontre des prolongements arrières des rayons.

Objet réel – Objet virtuel

Un objet est dit réel s'il est situé en amont d'un système optique[1]. Soit un système S_1 formant une image *P'* d'un objet réel *P*. Cette image est un objet réel pour un deuxième système S_2 situé après *P'*. Si le système S_2 est intercalé entre S_1 et *P'*, alors *P'* est un objet virtuel pour S_2. Cette situation est illustrée Fig. 12.2c.

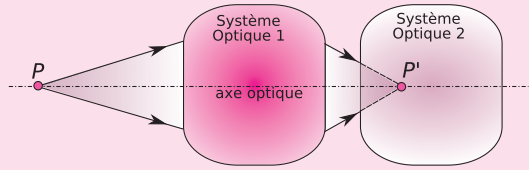


Figure 12.2c **Objet virtuel**
P' est une image réelle pour le système 1 et un objet virtuel pour le système 2. On retiendra que si l'objet est situé en aval de la face d'entrée d'un système optique, il est virtuel.

Remarque

Les objets et images virtuels sont conventionnellement représentés en pointillés. Il en va de même pour les prolongements des rayons.

Système aplanétique

On dit qu'un système optique est aplanétique quand l'image d'un petit objet plan perpendiculaire à l'axe du système est également plane et perpendiculaire à l'axe.

1. L'amont ou l'aval d'un système s'entend par rapport au sens de la lumière en sortie du système optique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

D'après le principe du retour inverse de la lumière, les plans de l'objet et de l'image sont des plans conjugués.

12.2.2 Formation des images – Conditions de Gauss

Théorème fondamental : Stigmatisme rigoureux

Il y a stigmatisme et aplanétisme quelle que soit la distance de l'objet pour les miroirs plans *sans restriction. On parle de* stigmatisme rigoureux *pour ces systèmes.*

DÉMONSTRATION

Pour qu'il y ait stigmatisme pour un point objet P, il faut que tous les rayons émergents du système (ou leurs prolongements) se rencontrent en un point unique P', image de P. Il faut donc que la position de P' soit liée à celle de P par une relation indépendante du point d'incidence I d'un rayon quelconque issu de P sur le système. Soit un miroir plan M et un point objet P (Fig. 12.3). Les distances sont algébriques et orientées positivement de la gauche vers la droite et du bas vers le haut. Les angles sont positifs dans le sens trigonométrique. Dans les triangles IPS et $IP'S$, on a $\tan i = \dfrac{\overline{SI}}{\overline{PS}}$ et $\tan i' = \dfrac{\overline{SI}}{\overline{P'S}}$. Or d'après la loi de la réflexion, $i' = -i$, d'où l'on déduit la relation suivante pour le miroir plan :

$$\frac{1}{\overline{SP}} + \frac{1}{\overline{SP'}} = 0.$$

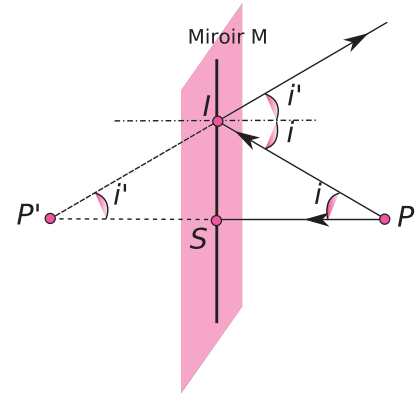


Figure 12.3 **Stigmatisme du miroir plan**

Cette relation est indépendante du point d'incidence I et est donc valable pour tout rayon issu de P et se réfléchissant sur le miroir. Il y a donc bien stigmatisme rigoureux pour tout point P par le miroir plan. La condition d'aplanétisme est obtenue immédiatement à partir de la relation précédente en choisissant un deuxième point objet Q à la verticale de P.

Remarque

L'image P' de P par le miroir plan se trouve à l'intersection des prolongements arrières des rayons réfléchis par le miroir : l'image P' de P est virtuelle. Cela correspond à notre

intuition : l'image est située derrière le plan du miroir, et l'on sait bien que derrière le miroir se trouve le mur sur lequel il est posé. Il n'y a pas réellement rencontre de rayons à cet endroit.

Théorème fondamental : Stigmatisme approché

Il y a stigmatisme et aplanétisme quelle que soit la distance de l'objet pour les miroirs sphériques, les dioptres plans et les dioptres sphériques dans le cas où les rayons sont proches de l'axe et peu inclinés sur l'axe, c'est-à-dire lorsque les angles d'incidence et de réfraction sont tous assez petits pour qu'on ait le droit de les confondre avec leur sinus ou tangente. On dit qu'il y a stigmatisme approché *pour ces systèmes.*

Remarque

Les approximations permettant d'avoir stigmatisme et aplanétisme approchés sont appelées ***conditions de Gauss***.

DÉMONSTRATION : CAS DU DIOPTRE PLAN

Soit un dioptre plan séparant deux milieux d'indice n et n' (Fig. 12.4). On a $\tan i = \dfrac{\overline{SI}}{\overline{SP}}$ et $\tan i' = \dfrac{\overline{SI}}{\overline{SP'}}$. D'après la loi de la réfraction, on a de plus $n \sin i = n' \sin i'$. En éliminant i et i', on a pour la position de P' : $\overline{SP'} = f(\overline{SP},\ n,\ n',\ \overline{SI})$. Cette fois-ci, la position de P' dépend explicitement du point d'incidence I à travers la relation des sinus. Il n'y a pas stigmatisme rigoureux pour le dioptre plan.

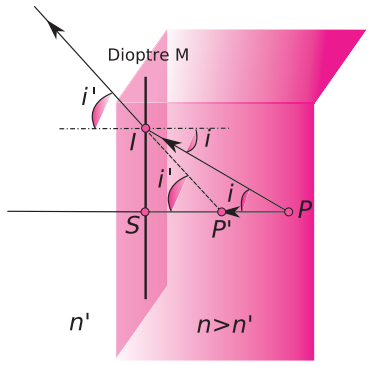


Figure 12.4 **Stigmatisme du dioptre plan**

Dans les conditions de Gauss (petits angles), on confond les sinus et tangentes avec leur argument et l'on obtient : $\overline{SI} = \overline{SP} \times i$ et $\overline{SI} = \overline{SP'} \times i'$. De plus, $ni = ni'$. On en déduit la relation suivante :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{n'}{\overline{SP'}} = 0.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cette relation est vraie aux petits angles pour tout rayon issu de *P*. Il y a stigmatisme au sens approché. Une image se forme ainsi à travers un dioptre plan sur la rétine de l'œil de l'observateur car sa pupille sélectionne un faisceau de rayons à peu près parallèles : les conditions de Gauss sont alors satisfaites.

DÉMONSTRATION : CAS DU MIROIR ET DU DIOPTRE SPHÉRIQUE

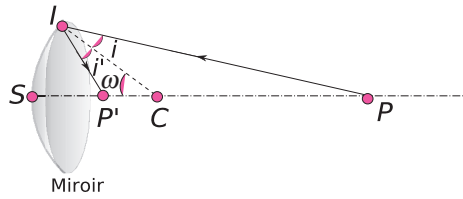


Figure 12.5a **Stigmatisme du miroir sphérique**

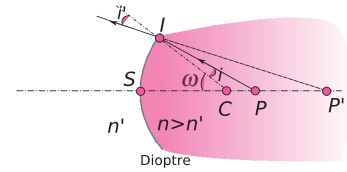


Figure 12.5b **Stigmatisme du dioptre sphérique**

Sur les figures 12.5a et 12.5b, *C* désigne le centre de courbure du miroir ou du dioptre sphérique, *S* leur sommet. $\overline{SC}$ est le rayon de courbure algébrique du système sphérique. Avec les notations des figures 12.5a et 12.5b, on a, dans le triangle *CIP*, la relation suivante entre les sinus des angles (en utilisant le fait que $\overline{IC} = \overline{SC}$) :

$$\frac{\overline{SC}}{\sin(\omega - i)} = \frac{\overline{CP}}{\sin i} = \frac{\overline{IP}}{\sin \omega}.$$

Cette expression dépend du point d'incidence *I* : il n'y a pas stigmatisme rigoureux pour le miroir ou le dioptre sphérique. Ce résultat est illustré sur la figure 12.6, photo obtenue en inclinant fortement l'axe d'un miroir sphérique sur le trajet de rayons parallèles incidents. On constate qu'après réflexion sur le miroir, les rayons émergents ne se coupent pas en un unique point (Fig. 12.1b).

Dans les conditions de Gauss, on a que le point *I* tend vers le sommet *S* (rayons proches de l'axe) et que les sinus peuvent être approximés par leur argument (cas des petits angles), et on obtient :

$$\frac{\overline{SC}}{\omega - i} = \frac{\overline{CP}}{i} = \frac{\overline{SP}}{\omega}.$$

De la même façon, dans le triangle *CIP'*, on obtient :

$$\frac{\overline{SC}}{\omega - i'} = \frac{\overline{CP'}}{i'} = \frac{\overline{SP'}}{\omega}.$$

D'où l'on a $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{SP}} = \dfrac{i}{\omega}$ et $\dfrac{\overline{CP'}}{\overline{SP'}} = \dfrac{i'}{\omega}$. Pour le miroir, on a $i = -i'$, et on obtient la relation suivante, indépendante cette fois du point d'incidence *I* :

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{SP}} + \frac{\overline{CP'}}{\overline{SP'}} = 0$$

Il y a donc stigmatisme au sens du stigmatisme approché pour le miroir sphérique.

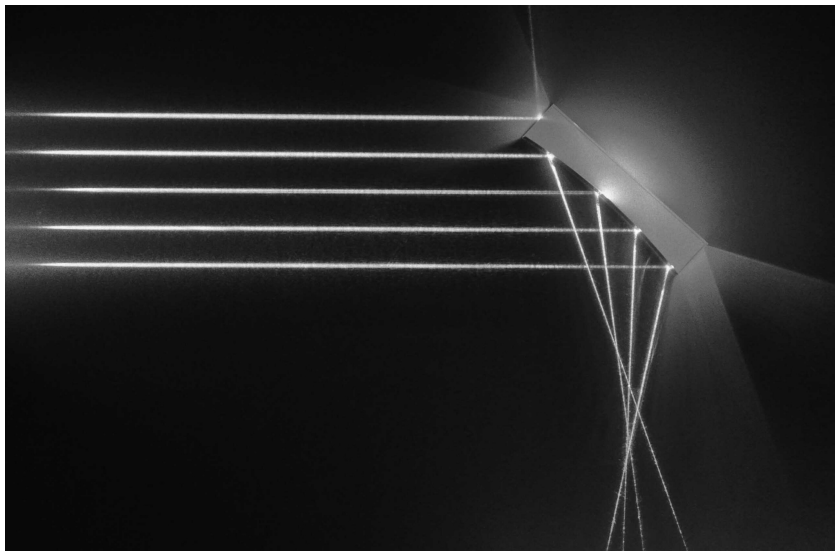


Figure 12.6 **Miroir sphérique concave utilisé hors des conditions de Gauss**
L'axe optique fait un angle important avec la direction des rayons incidents. Après réflexion, les rayons ne se rencontrent pas en un même point. Le miroir sphérique n'est donc pas un système rigoureusement stigmatique (photo © Ch. Balland).

Pour le dioptre sphérique, on obtient dans les conditions de Gauss ($ni = ni'$) :

$$n\frac{\overline{CP}}{\overline{SP}} = n'\frac{\overline{CP'}}{\overline{SP'}}$$

Il y a donc aussi stigmatisme approché pour le dioptre sphérique dans les conditions de Gauss.

Remarque 1

Si l'on considère, du point de vue mathématique, la réflexion comme un cas particulier de la réfraction avec $n = -n'$, la relation obtenue pour le dioptre sphérique se réduit à celle du miroir sphérique.

Remarque 2

La propriété d'aplanétisme, que nous ne démontrons pas ici pour le miroir et le dioptre sphérique, est aussi une conséquence des approximations de Gauss.

Généralisation au cas d'un système centré quelconque

Les résultats précédents s'étendent à un système centré quelconque (constitué de plusieurs systèmes, dioptres et/ou miroirs).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

DÉMONSTRATION

La première surface du système donne de l'objet PQ plan perpendiculaire à l'axe une image P_1Q_1 plane et perpendiculaire à l'axe. P_1Q_1 fonctionne ensuite comme objet par rapport à la deuxième surface du système, qui donne une nouvelle image P_2Q_2 plane et perpendiculaire à l'axe et ainsi de suite. On obtient finalement une image $P'Q'$ plane et perpendiculaire à l'axe.

12.3 Relations fondamentales des systèmes centrés – Cas des miroirs et dioptres

12.3.1 Définitions – Éléments cardinaux des systèmes centrés

Relation de conjugaison

C'est la relation algébrique qui relie la position d'un point objet P sur l'axe optique d'un système centré à son image sur l'axe P' formée par ce système.

Grandissement linéaire

On appelle grandissement linéaire le rapport γ des dimensions transversales de l'image $P'Q'$ et de l'objet PQ : $\gamma = \overline{P'Q'}/\overline{PQ}$.

Si $|\gamma| < 1$, l'image est plus petite que l'objet, plus grande sinon.

Si $\gamma < 0$, l'image est renversée par rapport à l'objet. Elle est droite sinon.

Foyers et plan focaux

On appelle foyer et plan focal tout point ou plan dont le conjugué est à l'infini.

Foyer objet : c'est la position du point objet F de l'axe dont l'image est à l'infini.

Foyer image : c'est la position du point image F' de l'axe quand le point objet est à l'infini.

Les foyers objet F et image F' ne sont en aucun cas conjugués l'un de l'autre par le système optique.

Remarque 1

Un rayon incident parallèle à l'axe peut être considéré comme provenant d'un point à l'infini sur l'axe. Il découle des définitions précédentes qu'après traversée du système, le rayon passera par le foyer image F'.

Remarque 2

Inversement, un rayon incident passant par le foyer objet F ressortira du système parallèlement à l'axe.

Plans principaux

Dans tout système centré possédant des foyers, il existe deux plans fixes qui possèdent les propriétés suivantes :

- ils sont conjugués avec un grandissement de 1 ;
- ils sont le lieu des intersections de tout rayon passant par un foyer et de son conjugué (parallèle à l'axe par définition). On a un plan principal objet et un plan principal image.

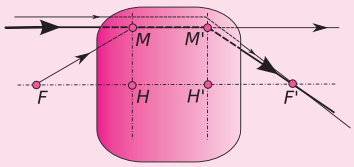


Figure 12.7 **Définition des plans principaux objet *(MH)* et image *(M'H')***

Distances focales

On appelle distance focale objet (respectivement image) d'un système centré la distance algébrique $f = \overline{HF}$ (respectivement $f' = \overline{H'F'}$). f et f' peuvent être positifs ou négatifs.

Systèmes optiques minces

Ce sont des systèmes centrés pour lesquels l'épaisseur au niveau de l'axe est petite devant les rayons de courbure des dioptres ou miroirs qui les constituent. Un dioptre sphérique, un miroir sphérique sont des exemples de systèmes minces.

Plans principaux d'un système mince

Pour un système mince, les plans principaux sont confondus.

DÉMONSTRATION

Dans les conditions de Gauss (petits angles et rayons proches de l'axe), on confond la surface avec son plan tangent (Fig. 12.8). Ce plan tangent est à la fois le plan principal objet et le plan principal image.

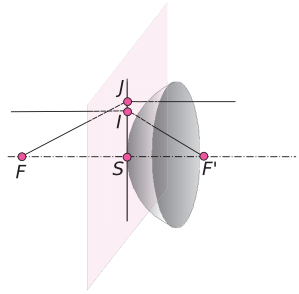


Figure 12.8 **Plans principaux pour un système mince**
Pour un système mince, les plans principaux sont confondus

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

12.3.2 Relations pour les dioptres et miroirs sphériques

a) Relation de conjugaison

En repartant de la relation obtenue au paragraphe précédent pour le dioptre sphérique, on fait apparaître le sommet dans $\overline{CP}$ et $\overline{CP'}$: $\overline{CP} = \overline{CS} + \overline{SP}$ et $\overline{CP'} = \overline{CS} + \overline{SP'}$. On obtient la relation suivante :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{n'}{\overline{SP'}} = \frac{n - n'}{\overline{SC}} \qquad \text{dioptre sphérique}$$

Cette expression est la relation de conjugaison des dioptres sphériques. Pour obtenir la relation de conjugaison des miroirs sphériques, on prend $n = -n'$ dans la relation précédente pour obtenir :

$$\frac{1}{\overline{SP}} + \frac{1}{\overline{SP'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \qquad \text{miroir sphérique}$$

b) Grandissement

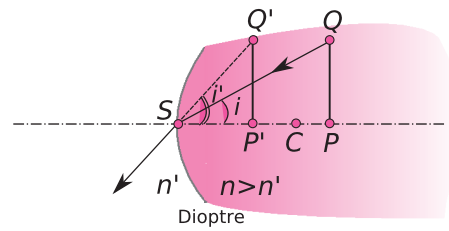


Figure 12.9 **Définition du grandissement pour un dioptre sphérique**

On a $\tan i = \overline{PQ}/\overline{SP}$ et $\tan i' = \overline{P'Q'}/\overline{SP'}$, et $n \sin i = n' \sin i'$. Dans les conditions de Gauss, cette dernière égalité conduit à :

$$n\frac{\overline{PQ}}{\overline{SP}} = n'\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{SP'}}.$$

On en déduit la valeur du grandissement γ :

$$\gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} \qquad \text{dioptre sphérique}$$

Pour le miroir sphérique, on prend $n = -n'$ ce qui donne :

$$\gamma = -\frac{\overline{SP'}}{\overline{SP}} \qquad \text{miroir sphérique}$$

Remarque

Le signe – dans l'expression du grandissement du miroir sphérique traduit la réflexion de la lumière sur les miroirs (inversion du sens de propagation).

c) Foyers et plans focaux

Les plans principaux étant confondus pour un système mince, on a H et H' confondus avec le sommet S du dioptre ou du miroir sphérique, donc $f' = \overline{SF'}$ et $f = \overline{SF}$.

Lorsque $\overline{SP} \to -\infty$, alors $\overline{SP}' \to \overline{SF'}$. On en déduit, pour le dioptre sphérique :

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n}\overline{SC} \quad \text{dioptre sphérique (foyer image)}$$

Lorsque $\overline{SP} \to \overline{SF}$, alors $\overline{SP}' \to \infty$. On en déduit, pour le dioptre sphérique :

$$f = \overline{SF} = \frac{n}{n - n'}\overline{SC} \quad \text{dioptre sphérique (foyer objet)}$$

Remarque 1

Les foyers objet et image ne sont pas symétriques par rapport au sommet S du dioptre.

Remarque 2

On a $f' / f = - n' / n$.

Dans le cas des miroirs sphériques, on a, en prenant $n = - n'$:

$$f' = f = \frac{\overline{SC}}{2} \quad \text{miroir sphérique}$$

Pour un miroir sphérique, les deux foyers F et F' sont confondus et situés à mi-distance entre S et C.

12.3.3 Relation de conjugaison pour les dioptres et miroirs plans

On obtient la formule de conjugaison pour les miroirs et les dioptres plans en faisant tendre vers l'infini le rayon de courbure $\overline{SC}$. On obtient, en simplifiant les formules pour les miroirs et dioptres sphériques, les relations suivantes :

$$\frac{n}{\overline{SP}} - \frac{n'}{\overline{SP'}} = 0 \quad \text{dioptre plan}$$

$$\frac{1}{\overline{SP}} + \frac{1}{\overline{SP'}} = 0 \quad \text{miroir plan}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

12.3.4 Constructions géométriques des miroirs et dioptres sphériques

a) Symbole des miroirs sphériques

On distingue les miroirs concaves (en creux pour la lumière incidente) des miroirs convexes (en bosse pour la lumière incidente).

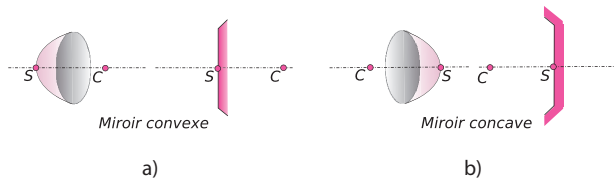


Figure 12.10 **Miroirs sphériques convexe et concave (à gauche) et leur symbole (à droite)**
Le rayon de courbure d'un miroir concave est négatif. Il est positif pour un miroir convexe.

b) Constructions géométriques de l'image d'un objet par un miroir sphérique

Principe général des constructions géométriques de l'image d'un objet

À l'aide du tracé de quelques rayons particuliers, il est possible de trouver graphiquement l'image $P'Q'$ d'un objet plan PQ perpendiculaire à l'axe optique. Dans les conditions de Gauss, l'image $P'Q'$ sera également plane et perpendiculaire à l'axe optique. Il suffit donc de chercher Q' l'image de Q à l'intersection de rayons particuliers. Une fois trouvée Q', l'image P' de P sera à la verticale de Q' sur l'axe.

Rayons particuliers pour un miroir sphérique

- Tout rayon passant par le centre de courbure C du miroir se réfléchit sur lui-même sans être dévié ;
- Tout rayon incident parallèle à l'axe optique passe par le foyer image F' après réflexion sur le miroir ;
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F ressort parallèlement à l'axe optique après réflexion sur le miroir.

Ces trois rayons particuliers sont illustrés sur la Fig. 12.11 dans le cas d'un miroir concave.

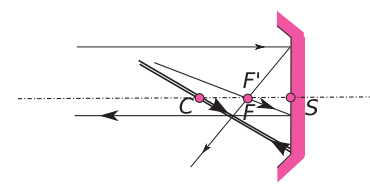
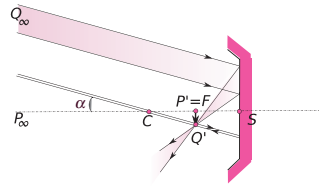
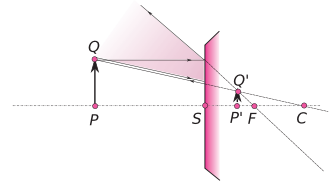
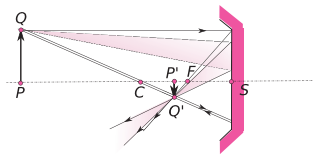
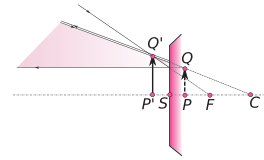
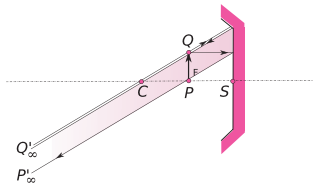
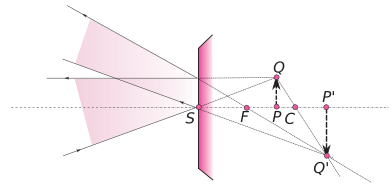
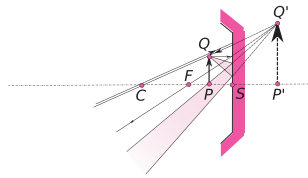
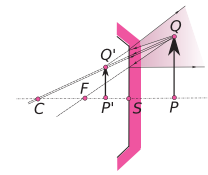


Figure 12.11 **Rayons particuliers illustrés dans le cas d'un miroir concave.**

On utilise ces rayons particuliers pour tracer l'image $P'Q'$ de PQ dans les cas résumés dans le tableau suivant pour un miroir concave et un miroir convexe.

Cas d'un miroir concave	Cas d'un miroir convexe
1. Objet réel à l'infini  L'image est réelle, renversée, plus petite que l'objet, située dans le plan focal image. Application : télescope.	*1. Objet réel*  L'image est virtuelle, droite, plus petite que l'objet.
2. Objet réel à distance finie au-delà de F  L'image est réelle, renversée, plus petite que l'objet. Application : télescope visant à distance finie.	*2. Objet virtuel entre S et F*  L'image est réelle, droite, plus grande que l'objet.
3. Objet réel dans le plan focal  L'image est réelle, renversée, son diamètre apparent est le même que celui de l'objet vu du centre.	*3. Objet virtuel au-delà de F*  L'image est virtuelle, renversée, plus grande que l'objet.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Miroir concave	
4. Objet réel entre F et S	*5. Objet virtuel entre F et S*
	
L'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet. Application : miroir de maquillage.	L'image est réelle, droite et plus petite que l'objet.

Voir site web

Voir site web pour les symboles des dioptres sphériques et les constructions géométriques associés.

12.4 Lentilles minces

12.4.1 Lentilles optiques

Les lentilles sont les instruments les plus utilisés pour la formation des images optiques et la correction des défauts de la vision. On sait depuis l'antiquité que regarder à travers un morceau de verre permet dans certains cas d'améliorer la vision, mais on situe leur invention à proprement parler au moyen-âge, dans les ateliers de verriers vénitiens. On étudie dans cette section leurs propriétés et leur capacité à former des images au sens du stigmatisme approché.

12.4.2 Définitions

Lentille

C'est un système optique centré, transparent, homogène, d'indice n limité par deux dioptres dont l'un au moins n'est pas plan. La figure 12.12 donne quelques exemples de lentilles. Il existe des lentilles divergentes et convergentes.

Les lentilles agissent sur un rayon incident comme le fait un prisme : elles dévient le rayon vers la partie épaisse (base). Ainsi, les lentilles à bords épais font diverger les rayons tandis que les lentilles à bords minces les font converger.

Lentille mince

C'est une lentille dont on peut négliger l'épaisseur devant sa distance focale.

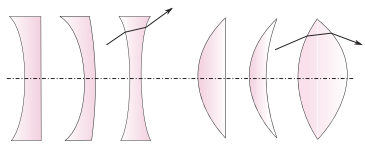


Figure 12.12 **Types de lentilles**
À gauche : lentille à bords épais (plan-concave, ménisque divergent, biconcave) ; à droite : lentilles à bords minces (plan-convexe, ménisque convergent, biconvexe). Les lentilles convexes sont convergentes, les lentilles concaves sont divergentes.

LENTILLE GRAVITATIONNELLE

L'Univers fournit un exemple de lentille naturelle appelée « lentille gravitationnelle ». Ces « lentilles » sont en fait des concentrations de matière énormes (galaxies ou amas de galaxies) qui dévient la lumière sous l'effet de leur champ gravitationnel. Lorsque l'on pointe un télescope dans la direction d'une telle « lentille » on observe une ou plusieurs images déformées des galaxies d'arrière-plan. L'étude de la déflexion des rayons lumineux permet de remonter à la masse de l'objet « lentille ». On a même étendu cette étude aux déflexions de la lumière engendrées la matière sombre remplissant l'univers et pu ainsi étudier sa distribution dans l'espace.

12.4.3 Formule de conjugaison avec origine au sommet

On établit la relation de conjugaison des lentilles minces à partir des propriétés des dioptres dans l'approximation de Gauss. Soit P" le conjugué de P par le premier dioptre de sommet S_1 et de centre C_1 (Fig. 12.13). On a, d'après la relation pour un dioptre sphérique :

$$\frac{n}{\overline{S_1P''}} - \frac{1}{\overline{S_1P}} = \frac{n-1}{\overline{S_1C_1}}.$$

Soit *P'* le conjugué de *P"* par le deuxième dioptre, de sommet S_2 et centre C_2. On a :

$$\frac{1}{\overline{S_2P'}} - \frac{n}{\overline{S_2P''}} = \frac{1-n}{\overline{S_2C_2}}.$$

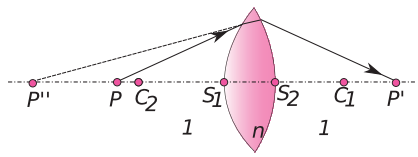


Figure 12.13 **Relation de conjugaison d'une lentille mince (exemple d'une lentille biconvexe)**

On considère que la lentille est mince. Les plans principaux sont confondus et on confond S_1 et S_2 que l'on nomme O. En additionnant les deux relations précédentes, on obtient :

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Cette relation est vraie quel que soit le type de lentille, dans les conditions de Gauss. Si l'un des deux dioptres est plan, son rayon de courbure tend vers l'infini.

12.4.4 Détermination des foyers et plans focaux

a) Foyer image *F'*

C'est l'image d'un point lumineux à l'infini sur l'axe. Si $\overline{OP} \to \infty$, $\overline{OP'} \to \overline{OF'}$ et la relation de conjugaison donne :

$$\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right) = \frac{1}{f'}$$

Remarque

Dans l'exemple présent, $\overline{OC_1} > 0$ et $\overline{OC_2} < 0$, donc $f' > 0$. *F'* est à droite pour une lentille à bords minces (convergente). Il est à gauche pour une lentille à bords épais (divergente).

b) Foyer objet *F*

F est le conjugué d'un point image à l'infini sur l'axe. Si $\overline{OP} \to \overline{OF}$, $\overline{OP'} \to \infty$ et la relation de conjugaison donne :

$$\frac{-1}{\overline{OF}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{OC_1}} - \frac{1}{\overline{OC_2}}\right) = \frac{1}{f'}$$

Remarque

On a pour la distance focale objet : $f = \overline{OF} = -f' < 0$. *F* est à gauche pour une lentille à bords minces (convergente). Il est à droite pour une lentille à bords épais (divergente).

On peut récrire simplement la relation de conjugaison d'une lentille mince en introduisant la distance focale image *f'* :

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'} \qquad \text{lentille mince}$$

Remarque

Pour une lentille mince, on a $f' = -f$: *F* et *F'* sont symétriques par rapport au centre optique O de la lentille mince.

c) Plans focaux

Plans focaux

Les plans perpendiculaires à l'axe optique en F et F' sont appelés respectivement plan focal objet et plan focal image.

- Un objet situé dans le plan focal objet émet des rayons parallèles entre eux en sortie de la lentille ;
- Un objet à l'infini aura son image dans le plan focal image.

12.4.5 Constructions géométriques pour les lentilles minces

a) Symboles des lentilles convergentes et divergentes

On montre Fig. 12.14 les symboles associés aux lentilles à bords épais et à bords minces quand celles-ci sont considérées comme des lentilles minces. On utilisera ces symboles dans les constructions géométriques des lentilles.

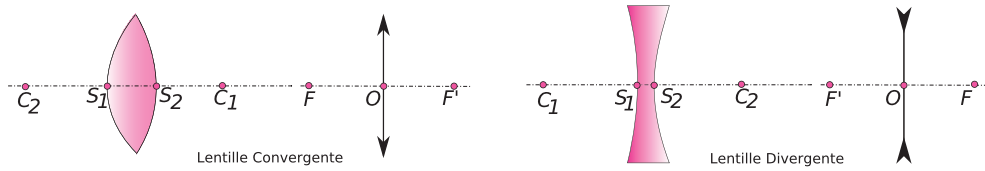


Figure 12.14 **Lentille convergente (gauche) et divergente (droite) et leur symbole (lentilles minces)**

La figure 12.15 met en évidence les foyers objet et image pour les lentilles convergentes et divergentes.

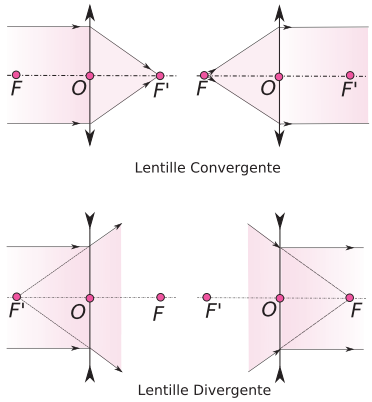


Figure 12.15 **Mise en évidence des foyers**
Noter les positions inversées des foyers objets et images pour les lentilles convergentes et divergentes.

b) Constructions géométriques

Comme pour les miroirs et les dioptres, on cherche l'image Q' d'un point Q à l'intersection de deux rayons particuliers (cela résulte des conditions de Gauss).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Rayons particuliers pour les lentilles

- Tout rayon passant par le centre O d'une lentille mince n'est pas dévié ;
- Tout rayon incident parallèle à l'axe optique passe par le foyer image F' après la lentille ;
- Tout rayon incident passant par le foyer objet F ressort parallèlement à l'axe optique de la lentille.

Ces trois rayons particuliers sont illustrés sur la Fig. 12.16 pour une lentille convergente.

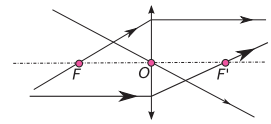
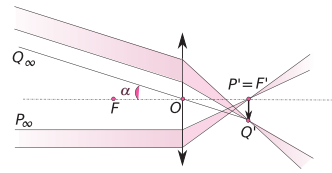
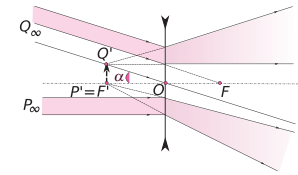
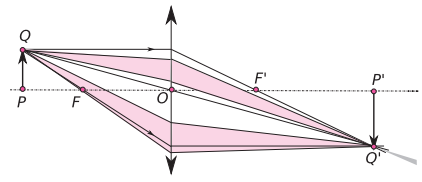
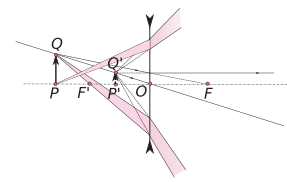
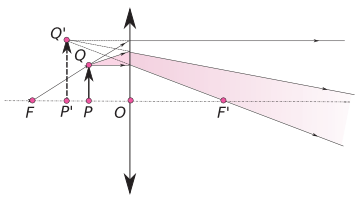
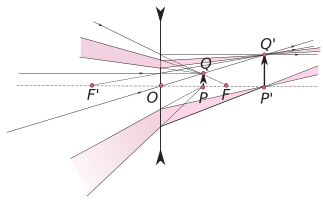
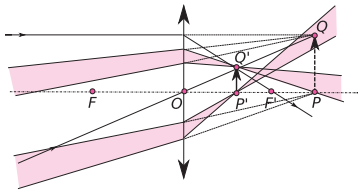
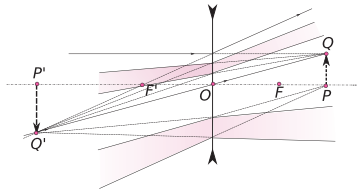


Figure 12.16 **Rayons particuliers pour une lentille mince convergente**

Lentille Convergente	Lentille Divergente
1. Objet réel à l'infini  L'image est réelle, renversée, plus petite que l'objet. Elle se forme dans le plan focal image de la lentille. Application : photographie à l'infini.	*1. Objet réel à l'infini*  L'image est virtuelle, droite, plus petite que l'objet. Elle se forme dans le plan focal image de la lentille. Application : verre pour myopes regardant à l'infini.
2. Objet réel à distance finie et au-delà de F  L'image est réelle, renversée. Elle est plus petite que l'objet si $\overline{OP} < 2f$. Application : photographie, cinéma, microscope.	*2. Objet réel à distance finie et au-delà de F*  L'image est virtuelle, droite, plus petite que l'objet. Application : verre pour myopes regardant à distance finie.

Lentille Convergente	Lentille Divergente
3. Objet réel entre F et O  L'image est virtuelle, droite et plus grande que l'objet. Application : loupe.	*3. Objet virtuel entre O et F*  L'image est réelle, droite, plus grande que l'objet. Application : téléobjectif.
4. Objet virtuel (à droite de la lentille)  L'image est virtuelle, droite, plus grande que l'objet. Application : oculaire de Huygens.	*4. Objet virtuel au-delà de F*  L'image est virtuelle, renversée, plus grande que l'objet. Application : oculaire de Galilée.

12.4.6 Relation de conjugaison avec origine aux foyers

On applique le théorème de Thalès dans les triangles semblables représentés figure 12.17.

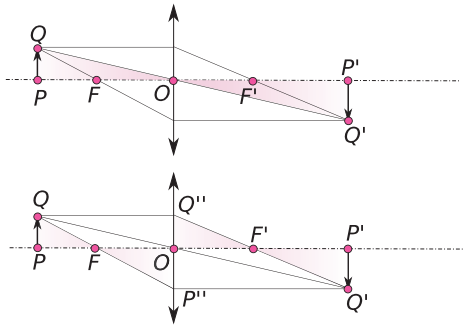


Figure 12.17 Construction géométrique de l'image d'un objet par une lentille
Ces figures mettent en évidence les triangles semblables utilisés dans la détermination des relations de conjugaison avec origine au sommet ou aux foyers.

Dans les triangles semblables FPQ et FOP'' : $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{OP''}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FP}}$.

Dans les triangles semblables $F'P'Q'$ et $F'OQ''$: $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{OQ''}} = \dfrac{\overline{F'P'}}{\overline{F'O}}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En combinant ces deux expressions, on obtient :

$$\overline{FP} \times \overline{F'P'} = -\overline{FO} \times \overline{F'O} = -f'^2 \quad \text{Formule de Newton}$$

12.4.7 Mesure des distances focales (focométrie)

On indique dans cette section des méthodes simples et très utilisées de mesure de distances focales. Les méthodes classiques (mais peu usitées aujourd'hui) de Silbermann et Bessel ne sont pas traitées ici.

a) Lentilles convergentes

Méthode rapide et approximative : on forme, à l'aide d'une lentille convergente, l'image d'une source lumineuse éloignée sur un écran. On prend par exemple une lampe au plafond dont on fait l'image à l'aplomb sur le sol. On mesure la distance entre le sol et la lentille. Cette distance est une mesure approximative de la distance focale de la lentille (d'autant meilleure que le rapport de la distance focale à la distance à la lampe est faible).

Autocollimation : on utilise un objet PQ, la lentille convergente dont on veut déterminer la focale et un miroir plan. On déplace la lentille et le miroir jusqu'à ce que l'image $P'Q'$ de l'objet se forme dans le plan de l'objet (nette et de même taille que l'objet, renversée). La distance lentille-objet est alors la distance focale (Fig. 12.18).

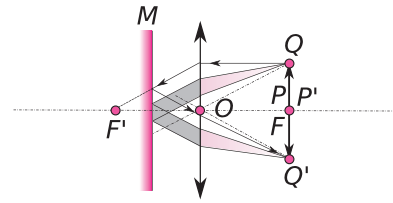


Figure 12.18 **Méthode par autocollimation**

En effet, tout faisceau issu d'un point du plan focal objet deviendra un faisceau parallèle en sortie de la lentille. La réflexion sur le miroir conservant les angles, le faisceau réfléchi sur le miroir est également parallèle. Il sera transformé par le deuxième passage par la lentille en un faisceau convergent en un point ... du plan focal image, qui est ici confondu avec le plan focal objet (principe du retour inverse de la lumière).

Remarque

Cette méthode est aussi très utilisée pour fabriquer un faisceau parallèle : une fois l'image d'un point source obtenue, il suffit d'ôter le miroir pour avoir un faisceau bien parallèle en sortie de la lentille.

b) Lentilles divergentes

Les méthodes précédentes ne peuvent s'appliquer à une lentille divergente puisqu'elles reposent sur la formation d'une image sur un écran (image réelle). Les méthodes utilisées ici sont nécessairement un peu plus sophistiquées.

Méthode rapide : On accole la lentille divergente dont on veut déterminer la focale f'_2 à une lentille convergente de focale f'_1 connue (voir exercice 12.4).

Vergence

On appelle vergence d'une lentille la quantité $V=1/f'$ où f' est la distance focale image de la lentille.

Vergence d'un ensemble de lentilles accolées

Soit un ensemble de N lentilles minces accolées, de vergence V_i. La vergence V de la lentille équivalente est la somme des vergences des lentilles individuelles accolées :

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i.$$

Méthode de Badal : On forme un faisceau parallèle à l'axe optique en plaçant une source ponctuelle P au foyer objet F_1 d'une lentille convergente. On place une seconde lentille convergente de focale f'_2 à une distance de la première lentille supérieure à f'_2. L'image de P se forme alors sur un écran situé à la distance f'_2 de la deuxième lentille. On intercale la lentille divergente dont on veut mesurer la focale f' en la plaçant au foyer objet F_2 de la deuxième lentille. On déplace l'écran d'une distance D pour obtenir à nouveau une image nette par la deuxième lentille (Fig. 12.19).

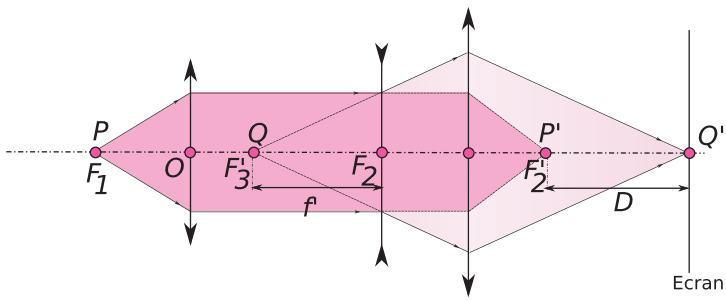


Figure 12.19 **Méthode de Badal**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

D'après la formule de Newton, on a :

$$\overline{F_2Q} \times \overline{F_2'Q'} = \overline{F_2F_3'} \times \overline{F_2'Q} = f' \times D = -f_2'^2.$$

On en déduit : $f' = -f_2'^2/D < 0$.

12.5 Notions de physiologie de l'œil

L'œil humain est un système centré de distance focale variable. On peut le modéliser par un dioptre sphérique mince (ou par une lentille mince baignée par des milieux différents). Le dioptre sépare l'air d'un milieu aqueux d'indice environ 1,35. Le sommet du dioptre est à une distance d'environ 22 mm de la rétine, surface du fond de l'œil sur laquelle se forment les images du monde extérieur. Dans cette modélisation, tout se passe comme si le rayon de courbure du dioptre pouvait varier légèrement (c'est en fait la courbure du cristallin qui varie sous l'action des muscles ciliaires). Les faisceaux lumineux pénétrant dans l'œil sont limités par la pupille, que l'on modélise par un écran percé d'une ouverture dont le diamètre peut varier entre 2 et 5 mm environ.

a) Accommodation – cercle de diffusion – structure de la rétine

Le phénomène d'accommodation (variation de la courbure de l'œil, et donc de sa focale) permet de maintenir sur la rétine l'image nette d'un point P dont la distance à l'œil a varié. Pour qu'un point P soit vu nettement, il n'est pas nécessaire que son image se forme exactement sur la rétine. Supposons que l'image se forme dans l'œil en P'. Le faisceau réfracté dans l'œil aboutissant en P' forme, sur la rétine, un cercle appelé cercle de diffusion. Si ce cercle est assez petit, l'image P' paraît nette. En effet, la rétine n'est pas une surface continue : elle est tapissée de cellules photosensibles reliées au cerveau par les fibres du nerf optique.

Exercice d'application 12.1 – Mise en évidence du nerf optique

Fermer l'œil gauche et fixer avec l'œil droit la croix située à gauche de la figure 12.20. Le disque noir apparaît dans le champ latéral de la vision. Éloigner progressivement la page de votre œil tout en fixant la croix. À une certaine distance, la vision du disque disparaît. Expliquer pourquoi (indice : il n'y a pas de terminaison sensible sur la section du nerf optique arrivant sur la rétine).



Figure 12.20 **Mise en évidence de la tache aveugle de l'œil**

Si le cercle de diffusion est assez petit pour ne couvrir qu'un seul élément sensible, on a la sensation de voir un point lumineux net. Pour un œil dont le foyer image est sur la rétine, on pourra donc voir nettement sans modifier sa distance focale un objet situé

entre l'infini et une certaine distance correspondant au cercle de diffusion maximum toléré.

Si l'objet se rapproche d'avantage, l'œil doit modifier sa distance focale pour maintenir une vision nette : c'est l'accommodation. Celle-ci est limitée. Par suite, pour être vu nettement, un point lumineux devra se situer entre deux positions extrêmes appelées *punctum remotum* pour la plus lointaine, et *punctum proximum* pour la plus proche. Le tableau 12.1 donne l'ordre de grandeur du *punctum proximum* en fonction de l'âge.

Punctum remotum

C'est le point le plus éloigné que l'œil peut voir sans accommoder.

Punctum proximum

C'est la distance δ au point le plus proche que l'œil peut voir en accommodant.

Tableau 12.-3 ***Punctum Proximum*** **aux différents âges de la vie**

Age (ans)	< 10	30	40	60
δ **(cm)**	7-8	15	25	> 100

b) Œil normal ou emmétrope

On appelle ainsi un œil font le foyer image se trouve sur la rétine quand il n'y a pas accommodation. Pour un tel œil, le *punctum remotum* est l'infini. Le *punctum proximum* varie entre 10 et 15 cm. Lorsqu'un objet est placé à cette distance de l'œil, sa vision entraîne une fatigue rapide des muscles du cristallin : l'accommodation cesse rapidement d'être possible. Un objet placé à 25 cm pourra être vu par un œil normal adulte sans fatigue excessive.

c) Œil myope

C'est un œil trop profond, c'est-à-dire trop convergent. Quand les muscles du cristallin sont au repos, le foyer est en avant de la rétine. Par suite, le *punctum remotum* est à une distance finie. Pour corriger la myopie, on place devant l'œil une lentille divergente de façon à ce que son foyer soit le conjugué de la rétine à travers l'œil.

d) Œil hypermétrope

C'est un œil pas assez profond, c'est-à-dire pas assez convergent, de telle sorte que le foyer image de l'œil est derrière la rétine. Pour un tel œil, l'objet qui donne une image sur la rétine est un objet virtuel : l'œil hypermétrope voit les objets virtuels sans accommoder. Pour corriger l'hypermétropie, on place devant l'œil une lentille convergente de façon à ce que son foyer soit le conjugué de la rétine à travers l'œil.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

e) Presbytie

Un œil est presbyte lorsqu'il n'accommode plus (fatigue des muscles ciliaires avec l'âge). Pour corriger la presbytie, il faut autant de verres correcteurs qu'il y a de distances d'observation. C'est pourquoi on a développé des verres de lunettes à double foyer : l'un pour voir de loin, l'autre pour voir de près. Aujourd'hui, on fabrique des verres à foyers progressifs qui procurent un confort de vision aux personnes presbytes à toutes les distances.

f) Acuité visuelle ou pouvoir séparateur de l'œil

Pouvoir séparateur

C'est la capacité de l'œil à séparer deux points P et Q voisins. La taille angulaire minimale que l'œil peut discerner est $\alpha = PQ/\delta \approx 3 \times 10^{-4}$ radian.

Nous reviendrons sur cet effet au chapitre 14.

Pour que l'œil discerne deux points P et Q vus à la distance d, il faut que la taille angulaire $PQ/d > 3 \times 10^{-4}$. Cette limite de l'œil est liée à plusieurs facteurs. Pour que les deux points P et Q ne soient pas vus confondus, il faut que leurs images se forment sur des terminaisons nerveuses différentes. D'autre part, en raison de la nature ondulatoire de la lumière, il y a diffraction sur la pupille de l'œil : l'image d'un point objet P est en fait une tache.

g) Oculaire

Pour distinguer des détails encore plus petits, on utilise un système appelé oculaire. C'est un système centré qui forme une image virtuelle $P'Q'$ de PQ vue sous un diamètre apparent β plus grand que le diamètre apparent de l'objet vu à l'œil nu :

$$\beta > \frac{PQ}{\delta}.$$

On suppose que $PQ/\delta < 3 \cdot 10^{-4}$ de telle sorte que les points P et Q ne sont pas séparés à l'œil nu. L'oculaire substitue à la vision de PQ la vision de l'image $P'Q'$ telle que $\beta = \dfrac{P'Q'}{\delta}$ avec $P'Q' > PQ$. À la limite de séparation, $\beta = 3 \cdot 10^{-4}$ et l'on pourra distinguer deux points P et Q non discernables à l'œil nu.

À retenir

- Une image optique par un système optique est la reproduction homothétique d'un objet. Un système optique forme une image géométrique d'un objet au sens du stigmatisme rigoureux (miroir plan) ou approché (dioptre plan ou sphérique, miroir sphérique, lentilles). Le stigmatisme approché est obtenu dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire pour des rayons proches de l'axe et peu inclinés sur l'axe. Dans les conditions de Gauss, le système est également aplanétique.
- Un objet situé en amont du système est réel pour ce système. Un objet situé en aval est virtuel pour ce système. Il se trouve à l'intersection des prolongements de rayons arrivant sur le système optique.
- Si une image se forme en aval du système optique, elle est réelle. Si elle se forme en amont, elle est virtuelle. Elle se trouve à l'intersection des prolongements arrières des rayons.
- Les lentilles optiques sont constituées de deux dioptres dont l'un au moins est sphérique. Les lentilles à bords épais sont divergentes, les lentilles à bords minces sont convergentes. Lorsque l'épaisseur est petite devant les rayons de courbure des dioptres, la lentille est mince : les plans principaux sont confondus et les sommets des dioptres aussi. Elle est caractérisée par sa distance focale f'. Utilisée dans les conditions de Gauss, une lentille mince forme une image P' d'un point objet P sur l'axe. La position de P' par rapport au centre de la lentille est donnée par la relation de conjugaison : $\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'}$.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 610.

12.1 Télescope

Le demi-diamètre apparent α du soleil est égal à 16 minutes d'angle. On considère un télescope avec un miroir de focale $f' = 60$ cm. Où se forme l'image du soleil ? Quel est le rayon de cette image ?

12.2 Mesure simple de la focale d'une lentille convergente

On considère une lentille convergente de distance focale $f' = 10$ cm. On utilise une lampe située à la distance $h = 2{,}60$ m du sol pour mesurer sa focale. Que vaut la distance $\overline{OP'}$ de la lentille au sol lorsqu'on y forme l'image de la lampe ? Quelle est l'incertitude relative sur la mesure de f' ?

12.3 Focale d'un doublet de lentilles accolées

Montrer que la distance focale f' d'une lentille mince équivalente formée par deux lentilles minces de focales f'_1 et f'_2 accolées vérifie $1/f' = 1/f'_1 + 1/f'_2$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

12.4 Mesure de la focale d'une lentille divergente

On accole une lentille convergente (focale f'_1 connue) à une lentille divergente (focale f'_2 à déterminer). On forme sur un écran l'image d'un objet par la lentille équivalente. Quelle condition doit-on avoir sur la focale f' de la lentille équivalente pour pouvoir former l'image de l'objet ? À quelle condition sur les focales f'_1 et f'_2 cela correspond-il ?

12.5 Formation d'une image par un dioptre plan

Un poisson est vu dans l'eau d'une rivière (indice $n = 1{,}33$) par un pêcheur situé sur la rive. On cherche à comprendre la formation de l'image du poisson par le dioptre eau-air.

a) Calculer les angles β réfractés dans l'air pour les angles d'incidence sur l'interface eau-air $\alpha = 0°, 10°, 25°, 30°, 40°$ et $45°$.

b) Tracer les rayons issus d'un point P du poisson et leurs prolongements dans l'air. Tracer les prolongements arrières des rayons situés dans l'air. Ceux-ci se croisent-ils en un point unique ? Y a-t-il image géométrique du point P ? Le dioptre plan est-il rigoureusement stigmatique ?

c) Reprendre la construction en se limitant aux rayons pouvant atteindre l'œil du pêcheur. Y a-t-il image géométrique du point P ? De quelle nature est-elle ?

d) Le pêcheur se place à la verticale du poisson. Son œil intercepte un petit pinceau de rayons proches de la verticale. À quelle profondeur apparente lui apparaît-il ? Application numérique.

Oscillations et Ondes

13

PRÉALABLES

- Notion de fonction périodique
- Fonction sinusoïdale
- Représentation complexe d'une onde.

MOTS CLÉS

- Oscillation, vibration, onde
- Oscillateur à un degré de liberté, oscillateur harmonique
- Ondes stationnaires, résonance

OBJECTIFS

- Décrire une onde sinusoïdale, ses propriétés et sa propagation.
- Décrire les phénomènes d'ondes stationnaires et de résonance.

13.1 Oscillations

Une « oscillation » (appelée aussi parfois « vibration ») est la déformation périodique d'un corps élastique ou d'un champ autour d'une position d'équilibre. Un oscillateur est un corps ou un champ présentant un mouvement d'oscillation. Il en existe de très nombreux exemples en physique (oscillateurs mécaniques, électriques, optiques) mais aussi en biologie, en chimie, en astrophysique (les étoiles à neutrons ou « pulsars » en sont un exemple). En principe, tout milieu, à l'exception du vide, peut constituer un oscillateur. En pratique, certains milieux sont peu appropriés : c'est le cas des corps mous (cire, beurre...). Par contre, les corps tels que l'air, l'eau ou encore l'acier se comportent élastiquement et peuvent former d'excellents oscillateurs. Ces corps ont la propriété de retourner exactement à leur position d'équilibre macroscopique après déformation comme si la déformation n'avait jamais existé.

Oscillation périodique

Un corps soumis à une force de faible intensité se comporte élastiquement. Il se déforme et si la force cesse, il revient à sa position d'équilibre d'origine et l'atteint avec une certaine vitesse, la dépasse, puis revient vers elle dans un mouvement à allure périodique. Si rien ne vient empêcher ce mouvement, il se poursuit indéfiniment. On parle *d'oscillation périodique*.

En pratique, un mouvement d'oscillation périodique s'amortit progressivement sous l'action de divers frottements et du fait de la transmission du mouvement au milieu ambiant (rayonnement) : son allure n'est plus périodique mais *quasi-périodique.*

Oscillations amorties

Après un certain temps, le corps retrouve sa position d'équilibre après avoir effectué une série d'oscillations d'amplitude de moins en moins importante : on parle d'oscillations amorties.

Si par un procédé quelconque on restitue à l'oscillateur l'énergie perdue par frottements ou rayonnement, alors le mouvement d'oscillation peut continuer aussi longtemps que l'on fournit cette énergie (cas d'une horloge à balancier par exemple).

Oscillation entretenue (ou forcée)

Une oscillation est dite forcée (ou entretenue) lorsqu'on fournit à l'oscillateur l'énergie perdue par frottements et rayonnement.

La plus simple des oscillations engendrées par un oscillateur est l'oscillation sinusoïdale. En pratique, les mouvements oscillants réels sont plus compliqués et résultent de la superposition de mouvements de fréquence et d'amplitude différents. Dans de nombreux cas cependant, il est possible de décrire un oscillateur dans le cadre des oscillations sinusoïdales.

Voir § 13.2

13.2 Propriétés des mouvements sinusoïdaux

Propriété

Un mouvement sinusoïdal est une fonction périodique dans le temps.

Si T est la période temporelle du mouvement sinusoïdal et $A(t)$ l'amplitude de la grandeur oscillant (par exemple, l'élongation x d'un ressort) à tout instant t, alors on a :

$$A(t + T) = A(t).$$

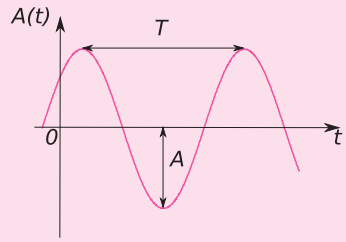
On peut écrire pour un mouvement sinusoïdal $A(t)$ sous la forme :

Amplitude de la grandeur oscillant sinusoïdalement

$$A(t) = A \cos \Phi(t) \qquad (13.1)$$

Amplitude maximale du mouvement

Dans l'expression précédente, A est appelé *amplitude maximale* du mouvement sinusoïdal. Elle représente la valeur maximale de la grandeur oscillant.



Phase du mouvement

Dans l'expression précédente, $\Phi(t)$ est appelée *phase* du mouvement à l'instant t. Elle s'exprime en fonction du temps par la relation $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, où t est le temps, ω est la pulsation du mouvement et φ la *phase à l'origine* du mouvement. La phase $\Phi(t)$ est périodique de période 2π et est un nombre (sans unité).

Fréquence du mouvement

On définit la *fréquence* f du mouvement sinusoïdal par la relation $f = 1/T$. La fréquence s'exprime en hertz dans le système international d'unités.

Pulsation du mouvement

On définit la *pulsation* ω du mouvement sinusoïdal par la relation $\omega = 2\pi/f$. La pulsation s'exprime en radians par seconde (rad · s^{-1}).

Remarque

Un mouvement sinusoïdal est caractérisé par une fréquence (ou pulsation) unique.

13.3 Oscillateur harmonique

13.3.1 Exemples mécaniques

En mécanique, l'équation du mouvement d'une particule de masse m s'obtient à partir du principe fondamental de la dynamique qui relie la dérivée seconde de la position $\vec{x}$ de la particule à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées. Dans le

Voir chapitre 2

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

cas d'un mouvement unidimensionnel d'une particule placée en présence d'une force extérieure $F(x)$, on a l'équation :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x) \tag{13.2}$$

a) Force de rappel d'un ressort – Loi de Hooke

La force de rappel appliquée à une bille de masse m liée à un ressort de raideur k et pouvant se déplacer sans frottement sur un axe est donnée par la loi de Hooke :

$$F(l) = -k(l - l_0),$$

où l_0 est la longueur du ressort au repos et l sa longueur à l'instant t après qu'on a écarté la bille d'une quantité $x = l - l_0$ de la position au repos (Fig. 13.1).

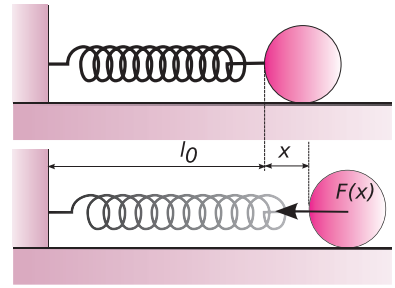


Figure 13.1 **Élongation d'un ressort**
La figure du haut montre la bille liée au ressort au repos. La figure du bas montre le ressort lorsque la bille est écartée d'une quantité x de sa position d'équilibre. La bille est alors soumise à la force de rappel $F(x)$ donnée par la loi de Hooke.

L'équation 13.2 devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second degré, *linéaire* en x (c'est-à-dire que la dérivée seconde de x ne dépend que de x, et pas d'autres puissances de x).

Exercice d'application 13.1 – Analyse dimensionnelle de la quantité k/m

Montrer que la quantité $\sqrt{k/m}$ a la dimension de l'inverse d'un temps.

SOLUTION. kx est une force, donc $[kx] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$, donc $[k] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-2}$, donc $[k/m] = \mathrm{T}^{-2}$.

La quantité $\sqrt{m/k}$ définit un temps caractéristique d'évolution de l'oscillateur. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, quantité jouant le rôle d'une pulsation (exprimée en rad · s^{-1}). Cette pulsation ne dépend pas du temps ou de l'amplitude des oscillations.

b) Pendule pesant

Un pendule pesant constitué d'un fil de longueur l et d'une bille de masse m est écarté d'un angle α de sa position d'équilibre stable (en pointillés sur la figure 13.2). Le pendule est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$.

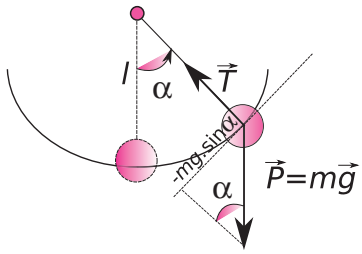


Figure 13.2 **Pendule**

Le pendule est écarté de sa position d'équilibre stable (en pointillés) d'une quantité α. Le pendule est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{T}$. L'angle $\alpha(t)$ est compté positivement dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Projetée, à l'instant t, sur un axe perpendiculaire à la position du fil et orienté positivement vers la droite, l'équation 13.2 donne l'évolution temporelle de l'angle α :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0.$$

On a, comme précédemment, une équation différentielle du second degré, qui n'est pas cette fois linéaire en α. Cependant, dans le cas de *petites oscillations autour de la position d'équilibre*, on peut « linéariser » l'équation en approximant le sinus de l'angle par l'angle lui-même. Dans ces conditions, l'équation du mouvement du pendule devient :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha \approx 0$$

Il s'agit formellement de la même équation que dans le cas du ressort. On vérifie que la quantité $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ est bien homogène à l'inverse d'un temps. Elle représente la pulsation d'oscillation du pendule.

Remarque

Noter que la pulsation (et donc la fréquence) d'oscillation du pendule ne dépend pas de sa masse m !

13.3.2 Généralisation

a) Équation de l'oscillateur harmonique

De nombreux systèmes physiques, lorsqu'on les écarte *d'une petite quantité* de leur position d'équilibre (stable), ont un mouvement gouverné par une équation comme celle

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

du ressort ou du pendule (dans le cas des petits angles). Si $A(t)$ est la valeur à l'instant t de la grandeur oscillant, et si la force appliquée intervenant dans l'équation 13.2 est de la forme $F(A) = -\omega_0{}^2 A$, alors le mouvement est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 A(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 A(t) = 0 \qquad \text{Oscillateur harmonique} \tag{13.3}$$

C'est là l'équation d'un *oscillateur harmonique*. Ses solutions sont de la forme donnée par l'équation 13.1, c'est-à-dire sinusoïdales, d'où le terme « harmonique ».

b) Solutions générales

Pour résoudre l'équation 13.3, nous utilisons la représentation complexe. On remplace pour cela la grandeur réelle A par une fonction complexe $\widetilde{A}$ et on cherche à résoudre l'équation $\mathrm{d}^2\widetilde{A}/\mathrm{d}t^2 + \omega_0^2\widetilde{A} = 0$. La solution générale s'écrit alors :

$$\widetilde{A}(t) = A_1 \exp(i\omega_0 t) + A_2 \exp(-i\omega_0 t) \tag{13.4}$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes complexes que l'on peut fixer à partir des conditions initiales. La dérivée de l'équation 13.4 donne :

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{A}}{\mathrm{d}t} = i\omega_0 A_1 \exp(i\omega_0 t) - i\omega_0 A_2 \exp(-i\omega_0 t).$$

Avec les conditions initiales $A(0) = A_0$ et $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t(0) = \dot{A}_0$, on trouve en repassant aux notations réelles :

$$A(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{A}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{A}_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t)$$

c) Propriétés des solutions générales

On peut écrire, de façon équivalente, la solution pour $A(t)$ sous la forme $A(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$, où C et φ sont des constantes. En développant le cosinus et en identifiant à l'expression précédente de $A(t)$, on trouve $C = \sqrt{A_0^2 + \dot{A}_0^2/\omega_0^2}$ et $\tan\varphi = -\dfrac{\dot{A}_0}{A_0\omega_0}$. $A(t)$ est maximum et vaut C lorsque $t = t_0 = -\varphi/\omega_0$. Au même instant t_0, on a $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t\ (t_0) = 0$. Inversement, quand $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ atteint sa valeur maximale $\omega_0 C$, $A(t)$ vaut zéro. A et dA/dt sont donc deux sinusoïdes évoluant en *opposition de phase*. La figure 13.3 représente les variations de A et $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ en fonction du temps.

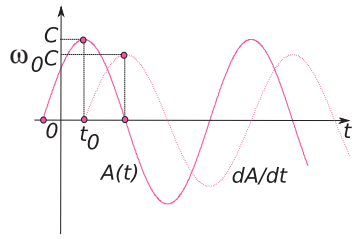


Figure 13.3 **Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique**
$A(t)$ est représenté en trait plein, dA/dt en pointillés. À l'instant t_0, A est maximum, et dA/dt est nul.

Exercice d'application 13.2 – Portrait de phase

Montrer que A *et* dA/dt *vérifient l'équation* $A^2(t) + \dfrac{1}{\omega_0^2}\left(\dfrac{dA}{dt}\right)^2 = C^2$ *où* C *est une constante valant* $C = \sqrt{A_0^2 + \dot{A}_0^2/\omega_0^2}$. *Quelle est l'allure de la courbe obtenue dans l'espace* (A, dA/dt) *?*

SOLUTION. On utilise les expressions de A et dA/dt et on développe les carrés, puis on simplifie pour obtenir le résultat. On reconnaît l'équation d'une ellipse dans le plan (A, dA/dt), appelée portrait de phase (Fig. 13.4).

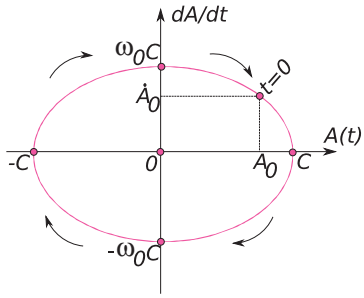


Figure 13.4 **Portrait de phase de l'oscillateur harmonique**
dA/dt est représenté en fonction de $A(t)$. À $t = 0$, $A(0) = A_0$ et dA/d$t(0) = \dot{A}_0$. Lorsque t augmente, $A(t)$ augmente vers sa valeur maximale C et dA/dt diminue vers 0. Les flèches indiquent le sens d'écoulement du temps.

13.4 OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

a) Amortissement visqueux

En réalité, les oscillations ne durent pas indéfiniment. Elles sont amorties soit du fait de frottements, soit par rayonnement. Nous traitons ici le cas d'un amortissement *visqueux* (dont les forces de frottements mécaniques sont un exemple). Dans ce cas, la force responsable de l'amortissement est une fonction *linéaire* de dA/dT (dA/dT est la vitesse du mouvement dans le cas d'un oscillateur mécanique). Son sens est opposé au sens du mouvement. On peut écrire, dans le cas d'un mouvement unidimensionnel $F_a = -\gamma \mathrm{d}A/\mathrm{d}t$, et l'équation 13.3 devient :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \gamma\frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0 \qquad \text{oscillateur amorti} \tag{13.5}$$

Le terme au centre du membre de gauche est appelé *terme d'amortissement*. Le paramètre γ est une constante décrivant l'amortissement. Par exemple, pour des frottements, on a la force $F = -fv$ où v est la vitesse du mouvement et f l'intensité des frottements.

b) Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique amorti

On cherche les solutions à l'équation $\frac{d^2\widetilde{A}}{dt^2} + \gamma\frac{d\widetilde{A}}{dt} + \omega_0^2\widetilde{A} = 0$ sous la forme d'exponentielles complexes : $\widetilde{A}(t) = \widetilde{A}\exp(-rt)$ où $\widetilde{A}$ et r sont des constantes complexes. On a $d\widetilde{A}/dt = -r\widetilde{A}\exp(-rt)$ et $d^2\widetilde{A}/dt^2 = r^2\widetilde{A}\exp(-rt)$. En remplaçant dans l'équation complexe, on obtient l'*équation caractéristique* :

$$r^2 - \gamma r + \omega_0^2 = 0 \tag{13.6}$$

Cette équation du second degré possède les deux solutions r_1 et r_2 suivantes :

$$r_{1,2} = \frac{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{\gamma}{2} \pm \Theta,$$

avec $\Theta = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}$.

Les solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique amorti sont donc :

$$\widetilde{A}(t) = \exp(-\gamma t/2)\left[A_1\exp(\Theta t) + A_2\exp(-\Theta t)\right] \tag{13.7}$$

et, pour la dérivée de $\widetilde{A}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\widetilde{A}}{dt}(t) = \exp(-\gamma t/2)\left[A_1\left(-\frac{\gamma}{2} + \Theta\right)\exp(\Theta t) + A_2\left(-\frac{\gamma}{2} - \Theta\right)\exp(-\Theta t)\right]$$

où, comme précédemment, A_1 et A_2 sont deux constantes complexes.

c) Propriétés des solutions de l'oscillateur harmonique amorti

On distingue trois cas : amortissement sous-critique, critique et sur-critique.

- *Amortissement sous-critique* $\Theta < 0$

Θ est complexe, et peut s'écrire $\Theta = i\omega_1$, avec :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4.$$

En notations réelles ($A(t) = \mathrm{Re}(\widetilde{A}(t))$, où $\mathrm{Re}(z)$ est la partie réelle de z), on a :

$$A(t) = \exp(-\gamma t/2)\left[a\cos(\omega_1 t) + b\sin(\omega_1 t)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \exp(-\gamma t/2)\left[\left(b\omega_1 - \frac{a\gamma}{2}\right)\cos(\omega_1 t) - \left(a\omega_1 + \frac{b\gamma}{2}\right)\sin(\omega_1 t)\right]$$

Avec comme conditions initiales $A(0) = A_0$ et $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t(0) = \dot{A}_0$, il vient $a = A_0$ et $b = \left(\dot{A}_0 + \gamma A_0/2\right)/\omega_1$, soit

$$A(t) = \exp(-\gamma t/2)\left[A_0\cos(\omega_1 t) + \left(\dot{A}_0 + \gamma A_0/2\right)\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}\right] \tag{13.8}$$

On trouve donc que l'oscillateur oscille avec une nouvelle pulsation ω_1 qui dépend de ω_0 et de l'amortissement γ. Cette oscillation a une amplitude décroissante au cours du temps : l'oscillation se produit entre deux enveloppes exponentielles décroissantes comme on le voit sur la figure 13.5.

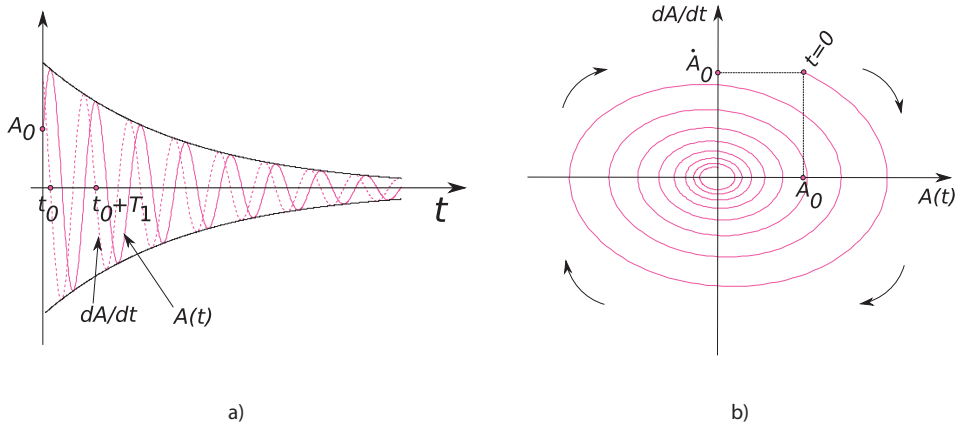


Figure 13.5 **Solutions de l'équation de l'oscillateur harmonique amorti (régime sous-critique)**

À gauche : $A(t)$ est représenté en trait plein, $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ en pointillés. À l'instant t_0, A est maximum. T_1 est la période d'oscillation, qui dépend de l'amortissement γ. **À droite :** portrait de phase pour l'oscillateur harmonique amorti. Du fait de l'amortissement, ce n'est plus une ellipse mais une spirale. Les flèches indiquent le sens du temps.

Remarque

Si $\gamma = 0$, on retrouve le cas d'un oscillateur harmonique non amorti et $\omega_1 = \omega_0$.

- *Amortissement critique* $\Theta = 0$

On a $\omega_1 = 0$. Pour trouver les solutions dans ce cas, on fait tendre ω_1 vers 0 dans l'équation 13.8 en prenant garde que $\lim_{\omega_1 \to 0} \dfrac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} = t$. On obtient

$$A(t) = \exp(-\gamma t/2)\left[A_0 + \left(\dot{A}_0 + A_0\frac{\gamma}{2}\right)t\right]$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Il n'y a plus de terme oscillant.

- *Amortissement sur-critique* $\Theta > 0$

Cette fois, Θ est réel, et la solution donnée par l'équation 13.7 est la combinaison linéaire de deux fonctions exponentielles réelles, toutes deux décroissantes : le mouvement est rapidement amorti et sans oscillations. La figure 13.6 présente la solution de l'amortissement critique ainsi qu'un exemple de solution en régime sur-critique.

Remarque

Les portes battantes des établissements publics sont équipées de systèmes d'amortissement hydraulique pour éviter que la porte ne se referme brutalement dans le dos de la personne qui les franchit. Ces portes sont un exemple d'oscillateurs en amortissement sur-critique.

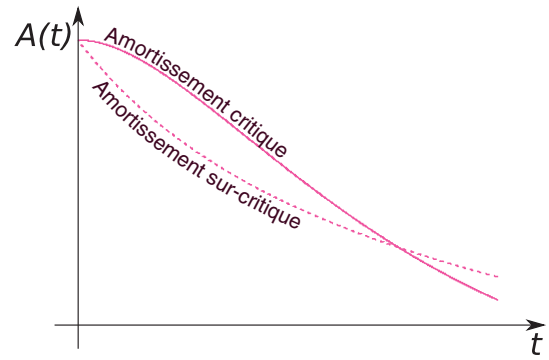


Figure 13.6 **Amortissements critique et sur-critique**

La solution de l'oscillateur harmonique amorti en régime critique est présentée en trait plein. En pointillé, on montre un exemple de solution en régime sur-critique. Dans les deux cas, il n'y a pas d'oscillation.

13.5 Oscillations entretenues

13.5.1 Oscillations entretenues par une force harmonique

Sous l'effet de l'amortissement, l'oscillateur tend à retourner plus ou moins rapidement à sa position d'équilibre et il arrive un instant où les oscillations disparaissent. Il est cependant possible de prolonger les oscillations en fournissant au système de l'énergie venant compenser celle perdue par frottements ou rayonnement. Pour cela, on applique à l'oscillateur une force. On dit que l'oscillateur est entretenu ou forcé. Nous considérons ici le cas où la force est harmonique. L'équation de l'oscillateur amorti et entretenu s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 A = A_F\cos(\omega t)$$

où A_F est l'amplitude maximale de la force harmonique et ω sa pulsation.

13.5.2 Solution de l'équation de l'oscillateur entretenu

a) Solution particulière

La solution de cette équation du second degré avec second membre est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de la même équation sans second membre. Dans le cas d'une force harmonique, il est relativement aisé de trouver une solution particulière. On considère le complexe $\widetilde{A}$ dont la partie réelle est A. On cherche la solution particulière de l'équation complexe $\mathrm{d}^2\widetilde{A}/\mathrm{d}t^2 + \gamma \mathrm{d}\widetilde{A}/\mathrm{d}t + \omega_0^2\widetilde{A} = A_F \exp(i\omega t)$ sous la forme $\widetilde{A}(t) = \widetilde{a}\exp(i\omega t)$, c'est-à-dire que l'on cherche une solution oscillant à la pulsation de la force harmonique, non pas à celle de l'oscillateur libre et non amorti. On remplace $\widetilde{A}(t)$ et ses dérivées première et seconde par rapport au temps dans l'équation précédente pour obtenir la solution :

Comme au § 13.4

$$\widetilde{a} = \frac{A_F}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

En multipliant dénominateur et numérateur par le complexe conjugué du dénominateur on obtient :

$$\widetilde{a} = \frac{A_F\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} = x + iy.$$

$\widetilde{a}$ est donc un nombre complexe que l'on peut aussi écrire sous la forme $\widetilde{a} = |\widetilde{a}|(\cos\psi + i\sin\psi)$, avec $|\widetilde{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ le module de $\widetilde{a}$ et ψ la phase telle que $\tan\psi = y/x$. Par identification, on trouve :

$$|\widetilde{a}| = \frac{A_F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \text{ et } \tan\psi = \frac{-\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

On peut donc écrire la solution particulière réelle sous la forme :

$$A(t) = \mathrm{Re}\left(\widetilde{A}(t)\right) = \frac{A_F}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}}\cos(\omega t + \psi) \qquad (13.9)$$

b) Propriétés de la solution particulière — Résonance

On voit d'après l'équation 13.9 qu'on a bien une solution oscillante de pulsation égale à la pulsation de la force harmonique mais déphasée d'une quantité ψ par rapport à cette dernière. Il est donc possible d'entretenir les oscillations. L'étude du dénominateur de l'équation 13.9 permet de décrire leur amplitude en fonction de la valeur de ω. Quand $\omega \to 0$, $A(t) \to A_F/\omega_0^2$. Quand $\omega \to \infty$, $A(t) \to 0$. Quand $\omega \to \omega_0$, $A(t) \to A_F/\omega_0\gamma$. Soit $d(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2$ la fonction apparaissant au dénominateur de l'équation 13.9. Sa dérivée vaut $d'(\omega) = -4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2\omega\gamma^2$. Celle-ci s'annule pour :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2}$$

Pour $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$, la fonction $d(\omega)$ est alors extrémale (on vérifie qu'il s'agit d'un minimum). L'amplitude $A(t)$ présente un maximum d'autant plus prononcé que γ est faible. On dit qu'il y a ***résonance***. À la limite où $\gamma \to 0$ (plus d'amortissement), l'amplitude devient infinie pour $\omega = \omega_R$: en pratique, l'oscillateur est détruit. Cela se comprend du fait que l'énergie apportée par la force extérieure ne sert plus à compenser les pertes dues à l'amortissement. Elle est intégralement transférée à l'oscillateur qui l'emmagasine sous forme d'oscillations d'amplitudes de plus en plus élevées.

La figure 13.7 présente les graphes de $|\widetilde{a}|\,/A_F$ et $\psi = \arctan\left(-\omega\gamma/|\omega_0^2 - \omega^2|\right)$ en fonction de ω.

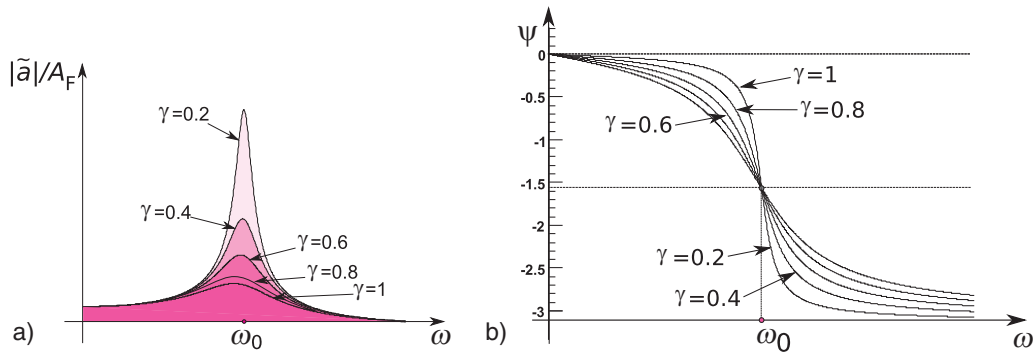


Figure 13.7 **Propriétés des oscillations entretenues par une force harmonique**
Module (à gauche) et phase (à droite) de l'amplitude complexe solution particulière de l'équation de l'oscillateur harmonique amorti en fonction de la pulsation ω de la force harmonique appliquée. ω_0 est la pulsation de l'oscillateur en l'absence d'amortissement.

c) Solution générale de l'oscillateur harmonique amorti et forcé

La solution générale est obtenue en sommant la solution particulière et la solution générale de l'équation sans second membre déterminée au § 13.4 :

$$\widetilde{A}(t) = \widetilde{a}\exp(i\,\omega t) + \exp(-\gamma t/2)\left[A_1\exp(\Theta t) + A_2\exp(-\Theta t)\right].$$

Si $\gamma \neq 0$, c'est-à-dire s'il y a amortissement, alors le second terme devient négligeable au bout d'un certain temps, devant le premier (du fait du terme $\exp(-\gamma t/2)$. Lorsque la force harmonique est appliquée à l'oscillateur, il s'établit d'abord un *régime transitoire* durant lequel les deux termes contribuent à l'amplitude de l'oscillation. Puis, lorsque le second terme de l'amplitude devient négligeable, une oscillation forcée s'installe à la fréquence ω et perdure tant que la force est appliquée. Elle correspond au *régime permanent* (Fig. 13.8).

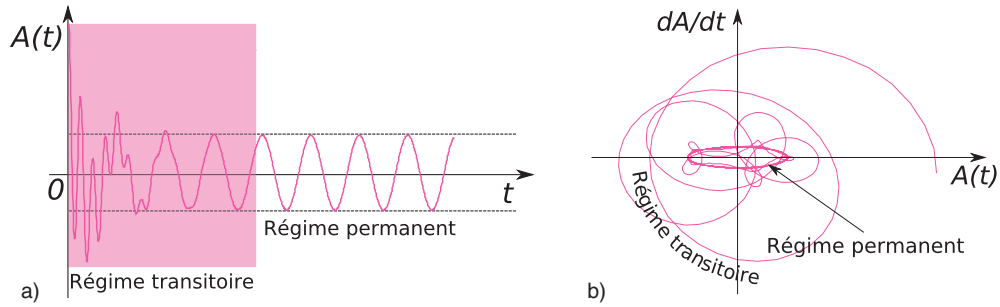


Figure 13.8 **Oscillations forcées**

À gauche : amplitude. **À droite :** portrait de phase. Le régime transitoire fait place au régime permanent entretenu (ellipse centrale de la figure de droite).

13.6 Ondes

Onde

Une onde est la propagation dans le temps d'une oscillation.

Le mécanisme de propagation d'une onde est illustré dans le cas d'une chaîne de masselottes reliées par des ressorts (Fig. 13.9).

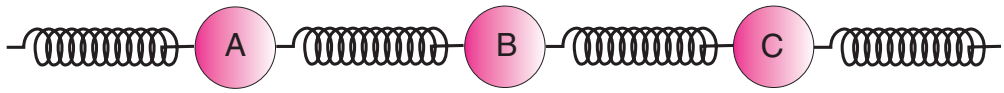


Figure 13.9 **Système de masselottes reliées par des ressorts**

Du fait de l'élasticité des ressorts, si on écarte la masselotte A de sa position d'équilibre en l'éloignant de B puis en la lâchant, B est attirée vers A avec un certain retard, puis c'est au tour de C : ainsi, la perturbation exercée sur A s'est propagée, de proche en proche, avec un certain retard à la masselotte C.

Onde sinusoïdale

On dit d'une onde qu'elle est sinusoïdale lorsque l'oscillateur qui l'engendre possède, en fonction du temps, un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre qui suit une sinusoïde.

Les ondes sinusoïdales jouent un rôle fondamental en physique. Les sons musicaux, la lumière, une onde se propageant à la surface de l'eau en sont quelques exemples.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

13.6.1 Propriétés des ondes sinusoïdales

Propriété 1

Une onde sinusoïdale est une fonction périodique dans le temps (période T*) :* $A(t+T) = A(t)$. *On peut définir sa fréquence* $f = 1/T$ *et sa pulsation* $\omega = 2\pi/f$, *comme dans le cas d'une onde lumineuse.*

Voir chapitre 11

Onde fondamentale et harmonique

La fréquence d'une onde donnée est dite *fréquence fondamentale.* Une onde dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale est appelée *onde harmonique*.

Propriété 2

Si une onde sinusoïdale se propage dans un milieu avec la vitesse v, *la distance parcourue par cette onde pendant une période est égale à* $\lambda = vT$.

Longueur d'onde

Voir chapitre 11

λ est la période spatiale de l'onde, elle est appelée *longueur d'onde* de l'onde sinusoïdale, comme dans le cas d'une onde lumineuse. Elle s'exprime en mètres (m).

Propriété 3

Une onde sinusoïdale est une fonction périodique dans l'espace : $A(x+\lambda) = A(x)$.

Module du vecteur d'onde

On définit *k, module du vecteur d'onde* de l'onde sinusoïdale par la relation $k = 2\pi/\lambda$. Il s'exprime en radians par mètre (rad · m^{-1}).

Amplitude de l'onde sinusoïdale

On a, pour une onde sinusoïdale se propageant selon la direction x : $A(t,x) = A\cos\Phi(x,t)$ avec $\Phi(x,t) = \omega t - kx + \varphi$ la phase de l'onde. φ est la *phase à l'origine* de l'onde.

13.6.2 Ondes stationnaires

Ondes stationnaires

Lorsqu'une onde arrive à la frontière du milieu dans lequel elle se propage (mur rigide par exemple), elle se réfléchit. L'onde réfléchie a même fréquence et même longueur d'onde λ que l'onde incidente. L'onde réfléchie et l'onde incidente se

superposent. Si l'onde incidente est entretenue, le milieu se remplit rapidement d'ondes incidentes et réfléchies, qui, par superposition, forment un système d'ondes stationnaires.

Remarque

Les ondes stationnaires sont très courantes dans la vie de tous les jours. On les rencontre par exemple dans les instruments de musique (corde de violon, instrument à vent, voix...). Paradoxalement, elles ne se déplacent pas, contrairement à une onde simple.

Nœud et ventre d'amplitude

Lorsque la superposition des ondes incidentes et réfléchies se fait de façon à s'additionner, on a un ventre d'amplitude. Lorsque la résultante est nulle, on a un nœud d'amplitude.

Soit une onde sinusoïdale se propageant dans l'air et se réfléchissant sur un mur. Les particules d'air ne peuvent pas se déplacer au voisinage du mur rigide, ce qui impose que l'on ait une vitesse et un déplacement d'air nuls à cet endroit : au niveau du mur, l'onde incidente et l'onde réfléchie s'additionnent pour donner une résultante nulle (un nœud). Il en est de même pour tous les points situés à une distance multiple de $\lambda/2$ du mur. En ces points (nœuds) les particules d'air sont immobiles. Au contraire, à une distance multiple impaire de $\lambda/4$ du mur, la résultante est maximale et les particules se déplacent avec une vitesse maximale (ventres). Les particules aux points intermédiaires se déplacent avec une vitesse intermédiaire. Si on injecte continuellement une onde sinusoïdale entre deux murs, celle-ci va se réfléchir alternativement sur chacun des murs et chaque tranche d'air va être soumise à un nombre d'ondes qui croît dans le temps. La figure 13.10 présente un tel système d'ondes stationnaires.

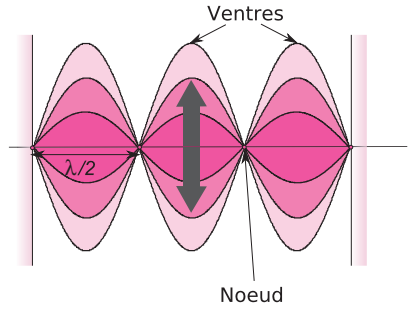


Figure 13.10 **Système d'ondes stationnaires**

Système d'ondes stationnaires entre deux murs. L'air est immobile aux nœuds.

13.6.3 Résonance

Si la distance entre les deux murs est $d = \lambda/2$, on a un nœud de vitesse sur chaque mur et un ventre au milieu. Comme on injecte continuellement de l'énergie (de l'air),

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

la vitesse de la tranche d'air centrale croît très rapidement. Si la distance entre les murs est un multiple de $\lambda/2$, la vitesse croît mais d'autant plus lentement que d est grand et contient plusieurs demi longueurs d'onde (l'énergie se répartit également entre les différents ventres). Si d est égal à $\lambda/4$ ou un multiple impair de $\lambda/4$, au contraire, chaque réflexion détruit l'effet de la précédente et l'amplitude résultante reste faible. Enfin, si d est quelconque, on obtient des périodes de croissance et de décroissance se succédant régulièrement. On voit donc qu'il n'y a accroissement rapide et continu de l'amplitude que si d est un multiple de $\lambda/2$. On dit qu'il y a *résonance* pour la longueur d'onde λ. Le phénomène de résonance est extrêmement général : il peut être obtenu s'il existe une relation bien précise entre les dimensions du corps qui la subit et la longueur d'onde qui la produit. Un corps entre en résonance pour une série de fréquences, appelées *fréquences propres.* Dans les cas simples, ces fréquences sont les *fréquences harmoniques* $\nu = c/\lambda$, 2ν, 3ν, ..., $N\nu$. Chaque fréquence correspond à un *mode de résonance*. Le mode $N = 1$ est appelé *mode fondamental*. Sur la figure 13.10, le mode $N = 3$ est représenté.

13.6.4 Ondes stationnaires sur une corde vibrante

On considère une corde fixée à ces deux extrémités. Si on l'écarte de sa position d'équilibre, elle se met à osciller et un système d'ondes stationnaires se crée. En lumière stroboscopique, on observe un fuseau (Fig. 13.11). La formule de Taylor donne la fréquence du mode $N = 1$:

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

où T est la tension de la corde (en Newton), ρ sa masse linéique (masse de 1 m de corde) et L sa longueur.

Si on pince la corde en son milieu, le fuseau se scinde en deux et on obtient le mode $N = 2$ dont la fréquence est $\nu_2 = 2\nu_1$. De même, en immobilisant la corde aux points situés à 1/3 et aux 2/3 de la corde, on obtient le mode $N = 3$.

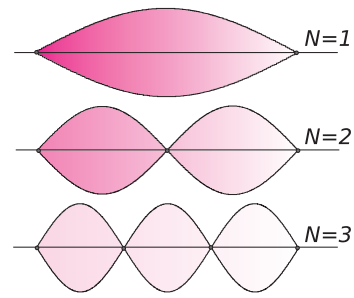


Figure 13.11 **Trois premiers modes d'une corde vibrante**

13.6.5 Ondes stationnaires dans un tuyau sonore cylindrique

Si l'on souffle doucement, en augmentant progressivement le souffle, dans un pipeau (tube cylindrique de longueur L dont l'extrémité est ouverte), on entend un son correspondant au mode 1, de fréquence ν_1. Si l'on souffle progressivement plus fort, il arrive un moment ou l'on entend un son dont la hauteur a changé : c'est le mode 2, de fréquence $\nu_2 = 2\nu_1$. Ce mode 2 est appelé « octave ». En continuant à souffler, on obtient toute une série de modes dont les fréquences sont des multiples de ν_1. La fréquence du mode N s'exprime par :

$$\nu_N = \frac{Nv}{2L} \qquad \text{(extrémité ouverte)}$$

où v est la vitesse du son dans l'air (343 m · s^{-1} à 20 °C).

Si maintenant on maintient fermée l'extrémité du pipeau, les modes sont obtenus pour une fréquence :

$$\nu'_N = \frac{(2N-1)v}{4L} \qquad \text{(extrémité bouchée)}$$

À retenir

- Une oscillation est la déformation périodique d'un corps élastique. Une oscillation est sinusoïdale si sa variation temporelle est une sinusoïde.
- Un oscillateur est un système produisant une oscillation. Le plus simple d'entre eux est l'oscillateur harmonique qui produit une oscillation sinusoïdale à une fréquence qui ne dépend pas du temps. De nombreux systèmes, lorsqu'ils sont légèrement perturbés par rapport à une position d'équilibre stable constituent des oscillateurs harmoniques.
- En pratique, les oscillations sont amorties. Dans le cas d'un amortissement visqueux (la force d'amortissement est proportionnelle à la vitesse), on distingue l'amortissement sous-critique (oscillations amorties à une fréquence qui dépend de l'intensité de l'amortissement) des amortissements critiques et sur-critiques pour lesquels il n'y a plus d'oscillation.
- Un oscillateur peut être entretenu (ou forcé) par une force extérieure. Dans le cas d'une force sinusoïdale, il s'établit un régime permanent après un court régime transitoire. En régime permanent, le système oscille à la fréquence imposée par la force.
- Une onde est une oscillation qui se propage dans l'espace. Si l'onde est confinée dans un milieu et peut se réfléchir sur les frontières de ce milieu, il se forme un système d'ondes stationnaires, avec des nœuds et des ventres de déplacement et de vitesse. Si on injecte continûment de l'énergie sous forme d'une onde incidente permanente, l'amplitude des ventres croît continûment et rapidement, il y a alors résonance. Celle-ci se produit s'il existe une relation entre les dimensions du corps qui la subit et la longueur d'onde qui la produit. Plusieurs modes de résonances peuvent se produire.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 611.

13.1 Décharge d'un condensateur dans une bobine

Un condensateur de capacité C ayant les charges q et $-q$ sur ses armatures se décharge dans une bobine d'inductance L. Écrire l'équation régissant l'évolution du courant i aux bornes de la bobine. En utilisant $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, montrer qu'il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 que l'on déterminera. Dépend-elle du temps ? Vérifier que ω_0 est homogène à une fréquence (on rappelle que $[L] = \mathrm{VT/I}$ et $[C] = \mathrm{I \cdot T/V}$, où I est un courant, V une tension et T un temps).

13.2 Oscillateur harmonique avec force extérieure constante

Une bille de masse $M = 500$ g est suspendue verticalement à un ressort de longueur au repos $l_0 = 0{,}1$ m et de raideur $k = 50\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. L'ensemble est dans le champ de pesanteur terrestre $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer la longueur l_1 du ressort à l'équilibre dans le champ de pesanteur. Écrire l'équation régissant l'élongation x du ressort. Montrer qu'il s'agit d'un oscillateur harmonique. Que vaut la pulsation ω_0 des oscillations ? Quelle est la différence avec le cas d'un ressort se déplaçant sans frottement le long d'un axe horizontal ?

13.3 Amortissement d'un circuit RLC

Un circuit série est constitué d'une bobine L, d'un condensateur C et d'une résistance R. Écrire l'équation régissant l'évolution de la charge aux bornes du condensateur. Montrer qu'elle est de la forme de l'équation 13.5 du cours. Exprimer l'amortissement γ en fonction des données de l'exercice. Qu'est-ce qui est responsable de l'amortissement ? Quelle relation doit-on avoir entre L, R et C pour qu'il y ait amortissement critique ?

13.4 Période d'oscillation d'un pendule

Quelle est la période d'oscillation d'une masse de 10 kg accroché à l'extrémité d'une corde dont l'autre extrémité est fixée au premier étage de la tour Eiffel (57 m) ? Que devient la période si on accroche cette fois une masse de 100 kg ?

13.5 Vitesse d'oscillation de la tour Eiffel lors de la tempête de 1999

Le 26 décembre 1999, sous l'effet d'un vent de plus de $200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, une amplitude d'oscillation de 13 cm de la tour Eiffel a été enregistrée au sommet de la tour (310 m). En supposant que l'oscillation de la tour est celle d'un pendule, quelle est la période des oscillations ? L'énergie potentielle d'un oscillateur de pulsation ω_0 et d'amplitude A est $E_p = \frac{1}{2}\, m(\omega_0 A)^2$ où m est la masse de l'oscillateur. Cette énergie est entièrement convertie en énergie cinétique lors du retour à l'équilibre à partir de la situation où l'amplitude est maximale. Quelle est la vitesse du sommet de la tour lorsqu'elle repasse par sa position d'équilibre sachant que $A = 13$ cm ?

13.6 Corde de piano

Un piano est accordé de façon à produire un la à 440 Hz lorsque l'on enfonce une certaine touche. Quelle est alors la tension de la corde correspondante ? La longueur de la corde est 1 m, sa masse linéique est 0,4 $g \cdot m^{-1}$.

13.7 Résonance de l'oreille

Le conduit auditif forme une cavité que l'on suppose cylindrique, fermée à l'une de ses extrémités par une membrane, le tympan. Il peut s'y former un système d'onde stationnaire. La longueur du conduit étant d'environ 3 cm, quelle est la fréquence du mode de résonance fondamental (mode 1) qui peut exister à 20 °C ?

14

INTERFÉRENCES ET DIFFRACTION DES ONDES LUMINEUSES

PRÉALABLES

- Nature ondulatoire de la lumière

MOTS CLÉS

- Amplitude et intensité d'une onde monochromatique
- Interférences lumineuses, franges d'interférence, visibilité des interférences
- Diffraction de la lumière
- Obstacles diffractant

OBJECTIFS

- Comprendre les phénomènes d'interférence et de diffraction de la lumière.
- Étudier les conditions d'obtention de franges d'interférences.
- Étudier les effets de la diffraction sur la formation des images.

14.1 INTRODUCTION

Nous abordons dans ce chapitre les phénomènes d'interférences et de diffraction de la lumière, phénomènes qui ne peuvent s'expliquer que dans le cadre de la description ondulatoire de la lumière. Ces phénomènes ne se limitent pas aux ondes lumineuses, et on les retrouve pour les autres types d'ondes : ondes mécaniques à la surface de l'eau, ondes acoustiques, ondes centimétriques. Nous verrons que le phénomène de diffraction est de même nature que le phénomène d'interférences. C'est pourquoi il est un peu arbitraire d'étudier l'un de ces phénomènes indépendamment de l'autre, mais par souci de clarté, nous débutons par l'étude du phénomène d'interférences.

14.2 Interférences lumineuses à deux ondes

14.2.1 Expérience d'Young

Le début du XIX^{e} siècle connaît une véritable révolution du point de vue des idées en optique. L'anglais Thomas Young, au cours de ses études de médecine, s'intéresse au mécanisme de la vision et à la nature de la lumière. En étudiant les irisations produites par une lame mince d'épaisseur variable, déjà décrites par Newton, il a l'intuition que la lumière réfléchie sur le premier dioptre de la lame et celle réfléchie sur le second peuvent s'additionner de telle manière que leurs effets se détruisent en certains endroits, et, au contraire, se renforcent en d'autres. La théorie avancée par Newton pour expliquer ces irisations ne pouvait en aucun cas expliquer la présence de zones sombres. Young fit passer la lumière issue d'une source ponctuelle à travers deux petits trous voisins percés dans un écran opaque (*expérience d'Young*). Les deux trous agissent alors comme deux sources ponctuelles émettant de la lumière dans deux cônes divergents par diffraction. Là où ces cônes se superposent, il apparaît une alternance de traits sombres et clairs, appelés « franges d'interférences », à l'intérieur d'anneaux de diffraction (Fig. 14.1).

Voir § 14.3

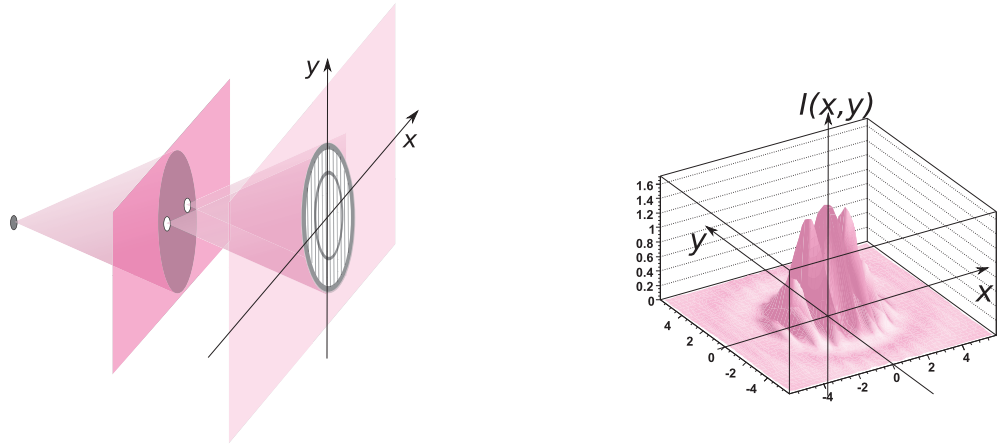


Figure 14.1 **Expérience d'Young**
La superposition des cônes de lumière diffractés par les trous donne des franges d'interférence rectilignes à l'intérieur d'un système d'anneaux de diffraction concentriques.

Young a formulé une « loi d'interférences » qui rend compte de cette observation :

Loi d'interférences de Young

« Lorsque deux portions de la même lumière arrivent à l'œil par des voies différentes (...), la lumière est au maximum d'intensité lorsque la différence des chemins parcourus est un multiple d'une certaine longueur, et au minimum d'intensité pour l'état intermédiaire des portions interférentes »

Th. Young, in *Philosophical Transactions* (1802), cité par V. Ronchi dans *Histoire de la Lumière* (1956), Ed. J. Gabay.

Cette « certaine longueur » dont parle Young est en fait la longueur d'onde de la lumière. La figure 14.2 montre un exemple de franges d'interférences à deux ondes :

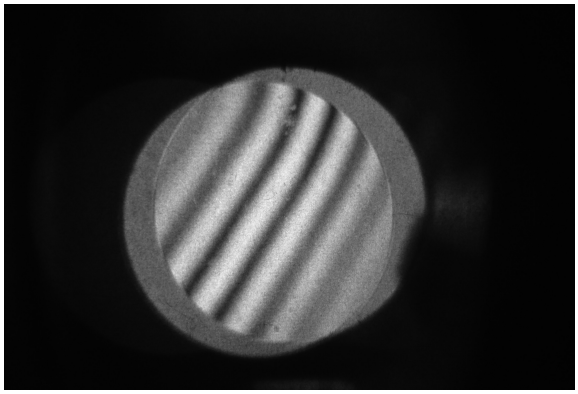


Figure 14.2 **Exemple de franges d'interférences à deux ondes**
Franges de coin d'air d'un interféromètre de Michelson. (Photo © Ch. Balland)

Voir site web

14.2.2 Interférences à deux ondes obtenues avec une source ponctuelle monochromatique

a) Calcul de l'intensité

Voir chapitre 13
Voir chapitre 11

Considérons deux vibrations sinusoïdales d'amplitude s_1 et s_2 issues d'une même vibration s émise par une source ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde λ. Les deux vibrations parcourent des chemins optiques différents à travers deux parties d'un dispositif optique, appelé *interféromètre* (par exemple, celui de l'expérience d'Young) et se superposent dans l'œil de l'observateur ou au point M d'un écran à un instant t. On a la somme des deux vibrations en M à l'instant t :

$$s_1(M,t) + s_2(M,t) = A\cos(\omega t) + A\cos(\omega t + \varphi(M)).$$

L'amplitude A des deux vibrations est la même car elles sont issues d'un même rayonnement émis par une source unique (on suppose que les atténuations éventuelles subies par les deux ondes lors de leur parcours sont les mêmes). La phase $\varphi(M)$ traduit la différence de phase (déphasage) introduite entre les deux vibrations par la différence de chemins parcourus dans le dispositif. Celle-ci s'exprime comme :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M).$$

Différence de marche $\delta(M)$

La différence de marche $\delta(M)$ est la différence de chemin optique parcouru par chacune des ondes dans les parties 1 et 2 du dispositif et qui se superposent au point M : $\delta(M) = [SM]_2 - [SM]_1$.

La somme des deux vibrations en M peut se simplifier en :

$$s_1(M,t) + s_2(M,t) = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right).$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

L'intensité lumineuse s'écrit alors, par définition :

$$I(M,t) = < (s_1(M,t) + s_2(M,t))^2 > /\mu_0 c = 4\frac{A^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) < \cos^2\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) >,$$

où $< f(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de la fonction $f(t)$ sur le temps T, qui représente ici le temps de réponse caractéristique du détecteur d'intensité. Comme $< \cos^2(\omega t + \varphi/2) >= 1/2$, on en déduit l'intensité $I(M, t)$:

$$I(M,t) = I_0\,[1 + \cos(\varphi(M))] = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right] \qquad (14.1)$$

avec $I_0 = A^2/\mu_0 c$, où μ_0 est la perméabilité du vide et c la vitesse de la lumière dans le vide.

L'intensité $I(M, t)$ est représentée en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ sur la figure 14.3 ci-dessous :

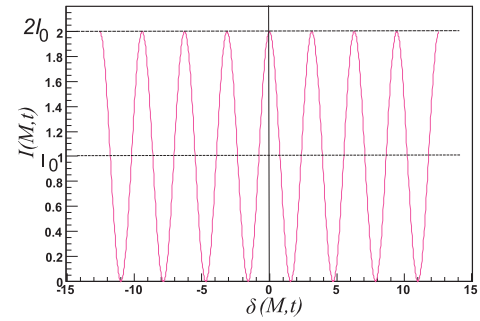


Figure 14.3 **Intensité fonction de la différence de marche (cas où les amplitudes sont les mêmes)**

Remarque 1

L'intensité de chaque vibration s_i est $< s_i^2(t) >= A^2/2\mu_0 c = I_0/2$. Le premier terme de l'intensité ci-dessus est donc la somme I_0 des intensités de chacune des deux vibrations. Le deuxième terme (cosinus) est appelé « terme d'interférence ». C'est lui qui rend compte de l'alternance de franges sombres et brillantes observées par Young.

Remarque 2

La période d'alternance des franges sombres et brillantes correspond, en différence de marche, à la longueur d'onde λ (période du terme d'interférence).

Remarque 3

Si les intensités des vibrations interférant ne sont pas les mêmes, l'expression de l'intensité devient $I(M,t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi)$, où I_1 et I_2 sont les intensités de chaque vibration.

b) Détermination des franges brillantes et sombres

À travers le terme d'interférence, on voit que l'intensité sur l'écran d'observation dépend du point M considéré. Le terme d'interférence est maximum — égal à I_0 — lorsque $\cos(2\pi\delta/\lambda) = 1$, c'est-à-dire pour les points M de l'écran tels que $\delta(M) = p\lambda$ avec $p \in Z$.

Condition d'interférence constructive

Tout point M *de l'écran pour lequel la différence de marche entre les deux ondes interférant est un multiple de la longueur d'onde de la lumière correspond à un état d'interférence constructive : l'intensité en ces points est maximale.*

Remarque 1

En ces points, l'intensité vaut $I(M, t) = 2I_0$, c'est-à-dire deux fois l'intensité de la source ! Cette apparente violation du principe de conservation de l'énergie est en fait compensée par l'existence des franges sombres.

Lorsque $\delta(M) = \left(p + \dfrac{1}{2}\right)\lambda$ avec $p \in Z$, on a $\cos(2\pi\delta/\lambda) = -1$ et $I(M,t) = 0$.

Condition d'interférence destructive

Tout point M *de l'écran pour lequel la différence de marche entre les deux ondes interférant est un nombre demi-entier de fois la longueur d'onde de la lumière correspond à un état d'interférence destructive : l'intensité en ces points est minimale.*

Visibilité des franges d'interférences

On appelle *visibilité des franges d'interférence* la quantité $V = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ où I_{max} est l'intensité maximale et I_{min} l'intensité minimale. L'intensité maximale est obtenue pour les interférences constructives, l'intensité minimale pour les interférences destructives.

Remarque 1

D'après la forme de l'intensité (14.1), on a $I_{max} = 2I_0$ et $I_{min} = 0$ dans le cas où les intensités associées aux ondes interférant sont les mêmes. On a donc $V = 1$ dans ce cas.

c) Forme des franges d'interférences

La forme des franges d'interférence obtenues sur l'écran dépend du dispositif expérimental et de la position de l'écran. Pour les trous d'Young, on observe des franges d'interférences rectilignes. Un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air donne des franges circulaires appelées anneaux d'interférences.

Voir site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

14.2.3 Élargissement spectral de la source

La source reste ponctuelle mais n'est plus monochromatique. Nous allons étudier ici comment l'élargissement spectral de la source modifie les propriétés de la figure d'interférence.

a) Cas de deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 voisines (doublet)

Chaque longueur d'onde du rayonnement issu de la source va produire un système d'interférences semblable à celui étudié au paragraphe précédent. Ces deux systèmes d'interférences lumineuses ne peuvent pas interférer entre elles, car elles sont produites par deux rayonnements de longueurs d'onde différentes. Si I_0 est l'intensité de la source ($I_0/2$ pour chaque longueur d'onde), l'intensité résultante est alors la somme des intensités $I_1(M,t)$ et $I_2(M,t)$ associées à chaque longueur d'onde :

$$I(M,t) = I_1(M,t) + I_2(M,t) = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right) + 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta\right)\right].$$

La somme des deux cosinus se simplifie en un produit de deux cosinus :

$$I(M,t) = \frac{I_0}{2}\left[2 + 2\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\right].$$

En introduisant $\overline{\lambda} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ la valeur moyenne des deux longueurs d'onde et $\Delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)$ la différence des deux longueurs d'onde, et en supposant les deux longueurs d'onde voisines ($\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \overline{\lambda}$), on obtient :

$$I(M,t) = I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\overline{\lambda}}{\lambda_1\lambda_2}\delta\right) \times \cos\left(\pi\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2}\delta\right)\right] \approx$$
$$I_0\left[1 + \cos\left(\pi\frac{\Delta\lambda}{\overline{\lambda}^2}\delta\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{\overline{\lambda}}\delta\right)\right]$$

Comme dans le cas d'une raie monochromatique, on retrouve que l'intensité se décompose en deux : un terme somme des intensités et un terme d'interférence. Ce dernier fait apparaître deux périodes d'oscillations caractéristiques (correspondant aux deux cosinus) : une oscillation haute fréquence de période $\overline{\lambda}$ est modulée par une oscillation basse fréquence de période $2\overline{\lambda}^2/\Delta\lambda$.

Remarque

La forme de l'intensité est analogue à celle obtenue pour une source ponctuelle monochromatique avec les deux changements suivants : 1) la période d'interférence (λ dans le cas d'une source monochromatique) est remplacée par la moyenne $\overline{\lambda}$ des deux longueurs d'onde du doublet considéré ici ; et 2) le terme de période $\overline{\lambda}$ est modulé par un terme en cosinus dont la période dépend de la largeur $\Delta\lambda$ du doublet.

La figure 14.4 représente l'intensité $I(M, t)$ obtenue au point M d'un écran en fonction de la différence de marche $\delta(M)$ entre les deux ondes interférant. Une telle courbe est appelée « courbe de battements ».

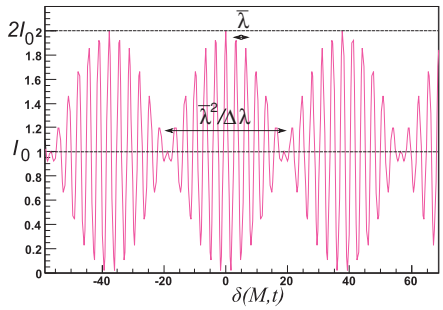


Figure 14.4 Courbe de battements d'un doublet de longueurs d'onde

Intensité d'interférence en fonction de la différence de marche entre les deux ondes interférant pour une source ponctuelle contenant deux longueurs d'onde voisines

BATTEMENTS EN ACOUSTIQUE

Le phénomène de battement est lié à l'interférence de deux ondes de fréquence voisine. Il n'est donc pas limité au cas des ondes lumineuses. On le retrouve dans d'autres domaines de la physique. Citons ici l'exemple des battements sonores (modulation de l'intensité sonore) obtenus lorsque deux fréquences sonores voisines sont produites simultanément. Ce phénomène est mis à profit dans l'accord des pianos : l'accordeur frappe simultanément un diapason produisant un « la » à 440 Hz et la touche correspondante sur le piano. Si les deux fréquences sont identiques, l'intensité sonore produite est constante. Dans le cas contraire, l'intensité sonore est modulée et l'accordeur doit agir sur la corde du piano.

Remarque

L'étude de la figure d'interférence permet de remonter à deux caractéristiques fondamentales de la source : sa longueur d'onde moyenne $\overline{\lambda}$ et sa largeur spectrale $\Delta\lambda$ (ici, l'écart entre les deux longueurs d'onde du doublet). Le nombre de franges contenu à l'intérieur d'un battement est $N = \left(\overline{\lambda}^2/\Delta\lambda\right)/\overline{\lambda} = \overline{\lambda}/\Delta\lambda$ (voir Fig. 14.4). La mesure de l'interfrange permet de déterminer $\overline{\lambda}$, et le décompte du nombre de frange dans un battement donne alors accès à $\Delta\lambda$.

b) Cas d'un continuum de longueurs d'onde

Les résultats du paragraphe précédent se généralisent lorsque la source ponctuelle contient un ensemble continu de longueurs d'onde. Chaque longueur d'onde contribue à l'intensité sur l'écran en donnant une intensité d'interférence $I(M, \lambda)$. L'intensité résultante au point M de l'écran est la somme des intensités produites par chaque longueur d'onde :

$$I(M,t) = \int I(M,\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La forme de l'intensité obtenue dans le cas de deux longueurs d'onde se généralise, et on obtient, dans le cas où l'intensité associée à chaque onde interférant est la même :

$$I(M,t) = I_0 \left[1 + V(\delta) \times \cos\left(\frac{2\pi}{\overline{\lambda}}\delta\right)\right]$$

où $\overline{\lambda}$ est la longueur moyenne du rayonnement. On retrouve les deux termes « somme des intensités » et « terme d'interférences ». Le cosinus est modulé par une fonction $V(\delta)$ dont la forme dépend du contenu en longueurs d'onde de la source. Cette fonction modulante est, par définition, la visibilité des franges d'interférences. Son étude permet de remonter à la longueur d'onde moyenne du rayonnement ainsi qu'à sa largeur spectrale (Fig. 14.5).

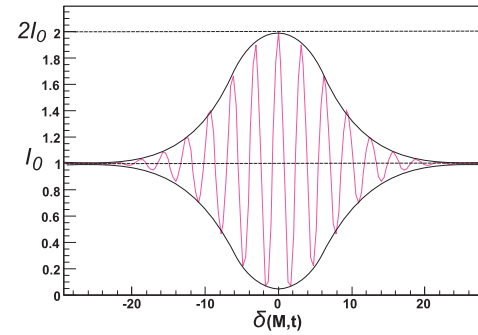


Figure 14.5 **Interférences pour une source possédant un continuum de longueurs d'ondes**

L'enveloppe $V(\delta)$ a été représentée. Elle module le cosinus d'interférence de période $\overline{\lambda}$. Sa largeur est reliée à la largeur du contenu en longueurs d'onde de la source.

14.2.4 Élargissement spatial de la source – Franges localisées

On considère cette fois une source monochromatique mais non ponctuelle (source élargie). Deux atomes voisins de la source émettent des rayonnements qui produisent chacun un système d'interférences à travers un dispositif interférentiel. Les intensités associées à différents atomes de la source s'additionnent sans interférer (on dit que ces atomes sont incohérents entre eux). Dans le cas général, on a une superposition sur l'écran de systèmes de franges décalés en fonction de la position dans la source des atomes qui les produisent. Cela conduit à un mélange qui brouille l'intensité, et les franges disparaissent. Il existe cependant des surfaces particulières où les franges restent observables malgré l'extension spatiale de la source : on parle alors de franges localisées.

14.3 Diffraction des ondes lumineuses

14.3.1 Principe de Huygens-Fresnel

Reprenons l'expérience d'Young présentée au § 14.2.1 (Fig. 14.1). La lumière provenant de la source ponctuelle est réémise dans deux cônes dont les sommets sont les trous percés dans la plaque opaque. (C'est la superposition de la lumière issue de ces deux

cônes sur un écran qui donne le phénomène d'interférence étudié plus haut.) La lumière au passage des trous a donc changé de direction : chacun des trous semble être une source ponctuelle de lumière émettant dans toutes les directions.

Diffraction d'une onde par un obstacle

Au passage d'un obstacle de petite dimension, une onde est déviée et se propage au-delà de l'obstacle dans des directions différentes. On parle de la diffraction d'une onde par un obstacle.

Remarque

Les phénomènes de diffraction sont caractéristiques de l'interaction d'une onde avec *un objet de taille comparable à sa longueur d'onde*. Toutes les ondes peuvent diffracter, et la vie quotidienne nous offre de nombreuses illustrations de ce phénomène (diffraction du son dans un hygiaphone, diffraction des ondes hertziennes par les montagnes, diffraction des ondes de surface sur l'eau au passage d'un obstacle). Nous considérons ici la diffraction des ondes lumineuses.

La diffraction limite la validité des lois de la formation des images telles que nous les avons étudiées au chapitre 12. Un système optique, même rigoureusement stigmatique, ne donne pas d'un objet ponctuel une image ponctuelle du fait de la diffraction.

Principe de Huygens-Fresnel

C'est le principe sur lequel repose la détermination de l'intensité lumineuse diffractée par une ouverture. Soit dS un élément de surface autour d'un point P d'une ouverture diffractante Σ. Le principe de Huygens-Fresnel postule que dS émet par diffraction dans toutes les directions une onde :

de même fréquence que l'onde incidente ;

d'amplitude proportionnelle à dS ;

de phase égale à celle de l'onde incidente en P.

L'amplitude $A(M)$ de la vibration lumineuse au point M d'un écran situé au-delà de l'obstacle est égale à la somme des amplitudes des vibrations émises par tous les éléments de surface dS dans la direction du point M.

Remarque

Le principe de Huygens-Fresnel consiste donc à additionner au point M les amplitudes émises par tous les points de l'obstacle dans la direction du point M. On voit donc que les phénomènes de diffraction et d'interférence sont de même nature (sommation des amplitudes des ondes en un point d'un écran d'observation).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Diffraction à l'infini (diffraction de Fraunhofer)

C'est le cas particulier où l'obstacle diffractant Σ *est éclairé par une onde plane (dont la source est située à l'infini) et où le point d'observation M est lui aussi à l'infini (en pratique, il est situé dans le plan focal image d'une lentille convergente). L'amplitude diffractée en M s'écrit, d'après le principe de Huygens-Fresnel, comme suit :*

$$A(M) = C \iint_{\Sigma} A(P)\exp\left(-i\,\vec{k}\cdot\overrightarrow{OP}\right)\mathrm{d}S.$$

Dans cette expression, A(P) est l'amplitude au point P de l'obstacle, $\mathrm{d}S$ *un élément de surface centré sur P, C une constante homogène à l'inverse d'une distance au carré (ainsi A(M) a bien la dimension d'une amplitude),* $\vec{k}$ *le vecteur d'onde de l'onde incidente, O est l'origine d'un repère dans le plan de l'obstacle. La figure 14.6 illustre le principe de Huygens-Fresnel dans le cas de la diffraction à l'infini.*

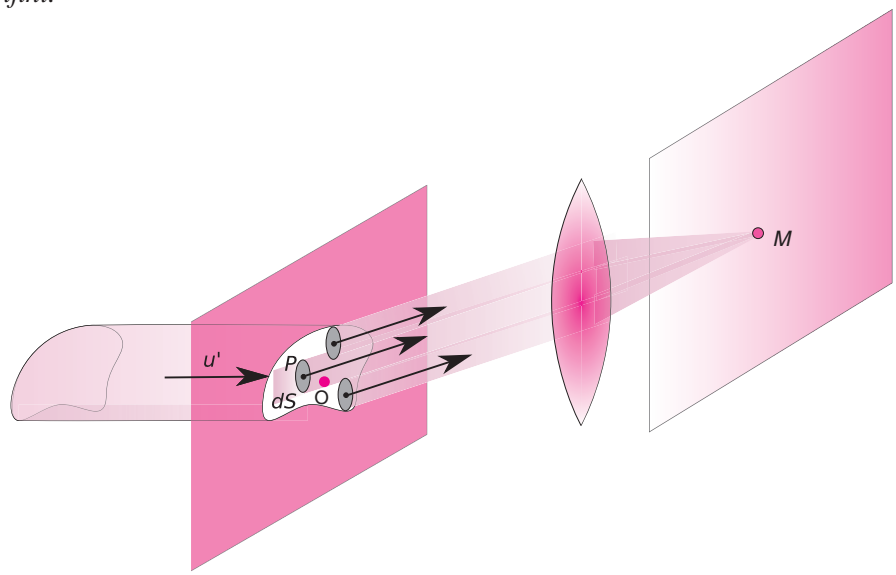


Figure 14.6 **Diffraction à l'infini d'une onde lumineuse par une ouverture diffractante**

Remarque importante

Dans cet ouvrage, nous ne traiterons que le cas de la diffraction à l'infini. Dans tous les exemples qui suivent, la source est supposée ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde λ, et située à l'infini sur l'axe optique d'une lentille convergente située après l'obstacle diffractant. On observe l'intensité diffractée en un point $M(x, y)$ d'un écran situé dans le plan focal image de la lentille. Les points de l'écran sont repérés par leurs coordonnées cartésiennes x et y elles-mêmes repérées par rapport au foyer image F' de la lentille.

14.3.2 Diffraction par une ouverture circulaire

L'application du principe de Huygens-Fresnel au cas fréquent d'une ouverture circulaire conduit à la répartition de l'intensité lumineuse de la figure 14.7. L'intensité présente une tache centrale qui concentre la majorité de l'énergie, entourée d'anneaux peu lumineux. Le diamètre ϕ de la tache centrale est relié au diamètre D de l'ouverture circulaire diffractante par la relation :

$$\phi = 1{,}22\frac{\lambda f}{D}.$$

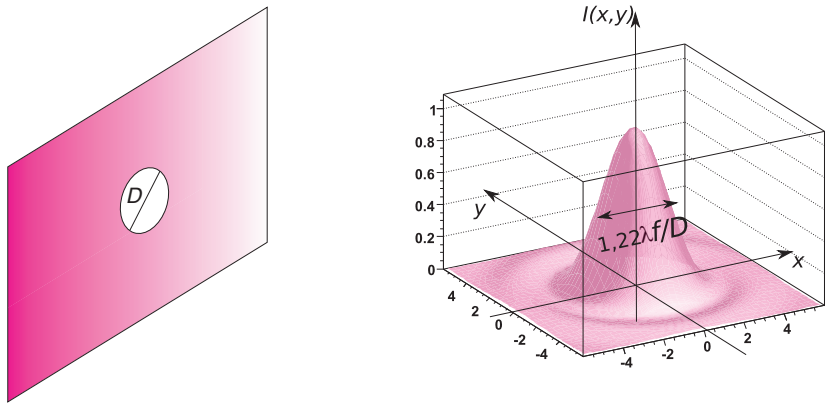


Figure 14.7 **Diffraction par une ouverture circulaire**
À gauche : plan de l'obstacle. À droite : plan de l'écran.

La monture circulaire d'une lentille mince est un exemple d'obstacle circulaire sur lequel la lumière diffracte. Ainsi, l'image d'une source ponctuelle à l'infini n'est pas ponctuelle comme le prédit l'optique géométrique, mais est une tache de diamètre ϕ.

14.3.3 Diffraction par une ouverture rectangulaire

Nous considérons maintenant le cas d'une ouverture diffractante rectangulaire d'aire $a \times b$. La source étant à l'infini sur l'axe, l'application du principe de Huygens-Fresnel conduit à l'expression suivante pour l'intensité diffractée en M :

$$I(x, y) = I_0 a^2 b^2 \,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{ax}{\lambda f}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{by}{\lambda f}\right)$$

où la fonction sinc $(u) = \sin(u)/u$ est appelée « fonction sinus cardinal de u ». On a sinc $(0) = 1$.

Maxima d'intensité suivant *F'x*

On a un maximum pour $x = 0$. Les autres maxima d'intensité suivant l'axe $F'x$ de l'écran sont obtenus pour $\sin^2(\pi ax/\lambda f) = 1$, c'est-à-dire $\pi ax/\lambda f = (2p + 1) \cdot \pi/2$,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

soit $x = (2p + 1) \cdot \lambda f / 2a$ avec p entier. Les maxima d'intensité suivant $F'x$ sont espacés de $\lambda f/a$.

Maxima d'intensité suivant *F'y*

On a un maximum pour $y = 0$. Les autres maxima d'intensité suivant l'axe $F'y$ de l'écran sont obtenus pour $\sin^2(\pi by/\lambda f) = 1$, c'est-à-dire $\pi by/\lambda f = (2p + 1) \cdot \pi/2$, soit $y = (2p + 1) \cdot \lambda f/2b$ avec p entier. Les maxima d'intensité suivant $F'y$ sont espacés de $\lambda f/b$.

Sur l'écran, on retrouve les deux dimensions caractéristiques a et b de l'obstacle. Elles apparaissent comme deux dimensions caractéristiques inverses : $1/a$ et $1/b$.

La figure 14.8 présente la géométrie de l'obstacle et l'intensité diffractée dans le plan focal image de la lentille. La majeure partie de l'intensité est concentrée dans le pic central.

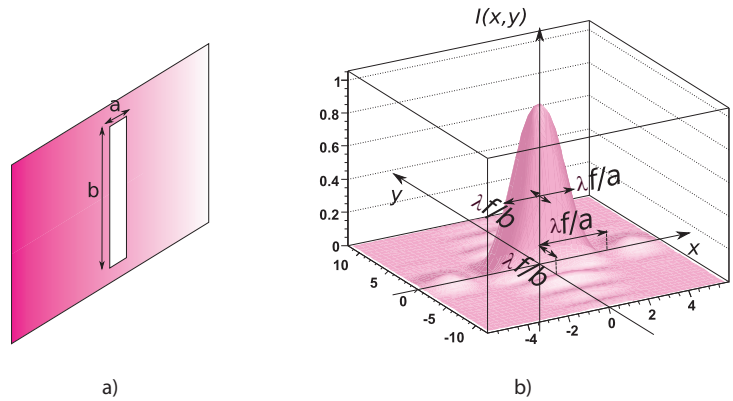


Figure 14.8 **Diffraction par une ouverture rectangulaire de côtés *axb***
À gauche : plan de l'obstacle. À droite : plan de l'écran.

Largeur à mi-hauteur du pic central de diffraction suivant *F'x*

On calcule la largeur du pic central à mi-hauteur suivant $F'x$, c'est-à-dire que l'on cherche $x_{1/2}$, valeur de x pour laquelle l'intensité centrale est divisée par deux. La largeur du pic à mi-hauteur est alors égale $\Delta x = 2x_{1/2}$. Suivant $F'x$, cela revient à résoudre l'équation $I(x_{1/2}, 0) = I(0,0)/2$. Une valeur approximative de Δx est donnée par la distance entre le centre et la première annulation du sinus cardinal fonction de x. Soit, $\sin(\pi a \Delta x/\lambda f) = 0$, donc $\pi a \Delta x/\lambda f = \pi$, donc $\Delta x = \lambda f/a$.

Largeur du pic central de diffraction suivant *F'y*

De même, on a $\Delta y = \lambda f/b$.

Cas d'une source hors de l'axe

Si la source n'est plus sur l'axe, le faisceau parallèle incident a pour direction celle portée par le vecteur unitaire $\vec{u_0}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \approx 1$ si les rayons incidents sont peu inclinés sur l'axe (conditions de Gauss). L'image géométrique de la source est alors $S'(\alpha f, \beta f, f)$. L'intensité diffractée est alors :

$$I(x, y) = I_0 a^2 b^2 \,\mathrm{sinc}^2\left(\pi \frac{a(x - \alpha f)}{\lambda f}\right) \mathrm{sinc}^2\left(\pi \frac{b(y - \beta f)}{\lambda f}\right).$$

Le centre de la figure de diffraction est maintenant situé sur S'. Ainsi, une translation de la source implique une translation correspondante de la figure de diffraction. Celle-ci reste centrée sur l'image géométrique de la source.

14.3.4 Diffraction par une fente mince

Nous traitons ici le cas particulier d'une fente mince ($a \ll b$). Si b devient grand devant a, alors la distance entre les maxima d'intensité suivant $F'y$ tend vers 0. Il en est de même pour la largeur du pic central suivant $F'y$. Dans la limite où b est infini, on n'a plus qu'une ligne de lumière suivant $F'x$, d'intensité :

$$I(x, 0) = I_0 a^2 \,\mathrm{sinc}^2\left(\pi \frac{ax}{\lambda f}\right).$$

Pour tout y non nul, $I(x, y) = 0$. L'intensité diffractée ne dépend pas de y (Fig. 14.9)

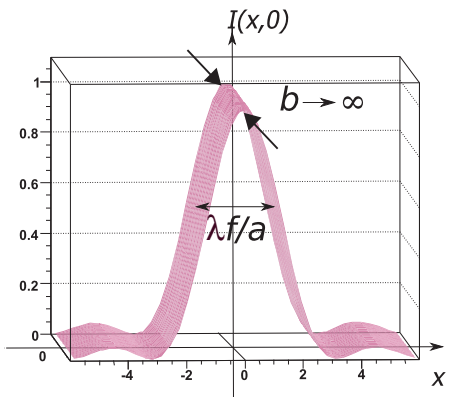


Figure 14.9 Diffraction par une fente fine
Quand la longueur b de la fente tend vers l'infini, la largeur de la figure de diffraction suivant (Oy) tend vers zéro. La largeur à mi-hauteur suivant (Ox) est $\lambda f/a$.

14.3.5 Diffraction par deux fentes minces

On considère un écran opaque percé de deux fentes minces, infinies suivant Oy, de même largeur a, parallèles entre elles, et parallèles à Oy. Les centres de ces fentes sont espacés de d. Nous avons vu que l'intensité diffractée par chacune des fentes donne sur l'écran une ligne mince selon $F'x$. Les amplitudes diffractées par chacune des fentes se superposent donc sur l'axe $F'x$ de l'écran : l'intensité est nulle pour tout y différent de 0. Nous raisonnerons donc en considérant les rayons diffractés comme étant dans le plan

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de la figure 14.10. Soient deux rayons diffractés dans la direction $\vec{u}$ par les fentes 1 et 2. On suppose que l'angle fait par ces rayons avec l'axe optique est petit (conditions de Gauss). On peut montrer que la différence de chemin optique $\delta = [F_2M] - [F_1M]$ entre ces deux rayons est $\delta = d \sin\theta \approx d \times \theta = dx/f$ dans l'approximation des petits angles (on a approximé le sinus par son argument).

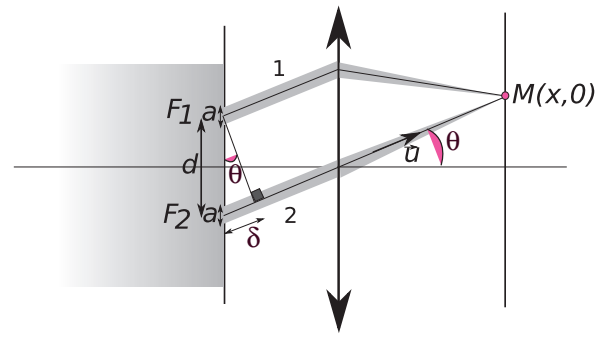


Figure 14.10 Dispositif des fentes d'Young
Deux fentes minces de largeur a et distantes de d sont découpées dans un écran opaque éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. La différence de chemin optique entre deux rayons interférant au point M de l'écran est $\delta \approx dx/f$.

Si $A_1(x)$ est l'amplitude du rayon 1 en M, alors l'amplitude du rayon 2 en M est :

$$A_2(M) = A_1(M)\exp(-ik\delta(M)).$$

L'amplitude en M est la somme des amplitudes des deux ondes en M, soit :

$$A(M) = A_1(M) + A_2(M) = A_1(M)[1 + \exp(-ik\delta)] = A(x)[1 + \exp(-ik\delta)]$$

Voir § 14.3.4

où $A(x)$ est l'amplitude diffractée en M par la fente F_1. L'intensité est alors :

$$I(M) = A(M)A^*(M) = I(x) \times 2\,[1 + \cos(k\delta(M))],$$

où $I(x)$ est l'intensité diffractée par une fente. On obtient finalement :

$$I(M) = 2I_0a^2 \,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{ax}{\lambda f}\right)\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{xd}{\lambda f}\right)\right]$$

L'intensité diffractée par deux fentes fait apparaître deux termes :
un terme de diffraction : c'est l'intensité diffractée par une seule fente ;
un terme d'interférence : c'est l'intensité obtenue lors d'interférences à deux ondes ; le terme de diffraction module le cosinus d'interférence.

La figure 14.11 présente l'intensité obtenue au point M de l'écran en fonction de la différence de marche.

Remarque

L'expérience d'Young a été présentée au début de ce chapitre avec deux trous et non pas deux fentes. Dans ce cas, le terme de diffraction est différent de celui présenté dans ce paragraphe : il correspond à la diffraction par un obstacle circulaire.

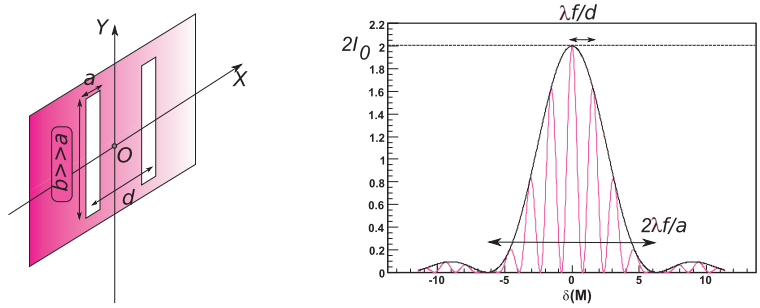


Figure 14.11 **Intensité diffractée par deux fentes minces parallèles, de largeur *a*, distantes de *d***

14.3.6 Généralisation à un grand nombre de fentes – Réseau

a) Réseau à fentes

Les résultats précédents se généralisent à un grand nombre de fentes de largeur a suivant (Ox) et régulièrement espacées d'une distance d. On suppose $a \ll d$. Un tel système constitue un *réseau de diffraction*. Si le support est transparent, le réseau est en transmission (cas considéré ici). Considérons deux fentes successives. Le déphasage entre les deux ondes diffractées par ces fentes et interférant en M est δ, calculé au paragraphe précédent. Le déphasage entre une fente et non pas sa voisine mais la fente suivante est 2δ, et ainsi de suite. Si on a N fentes, le déphasage entre la première fente et la dernière est $(N-1)\delta$. L'amplitude résultante au point M de l'écran est, d'après le principe d'interférences :

$$A(M) = A(x) \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-nk\delta),$$

avec toujours $A(x)$ l'amplitude diffractée en M par une fente. On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison exp $(-ik\delta)$. L'amplitude s'écrit :

$$A(M) = A(x) \frac{1 - \exp(-iNk\delta)}{1 - \exp(-ik\delta)}.$$

On en déduit l'intensité en M :

$$I(M) = I(x) \frac{\sin^2\left(\frac{Nk\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)},$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

avec $I(x)$ l'intensité diffractée par une fente unique. On a à nouveau un terme d'interférence modulé par un terme de diffraction. Notons que l'on réalise ici l'interférence d'un grand nombre d'ondes, et le terme d'interférence a une forme différente de celui obtenu lorsqu'on ne considérait que deux ondes. Ce terme est une fonction commune à tous les réseaux, tandis que le terme de diffraction dépend de la géométrie du motif diffractant.

Étude du terme d'interférence

Le terme d'interférence est périodique de période $x = \lambda f/d$. Il suffit donc de mener l'étude dans l'intervalle $[0, \lambda f/d]$. Le numérateur s'annule pour $x_p = p\lambda f / Nd$ avec p entier non nul. Pour de faibles valeurs de x on a l'approximation : $I(M) = I(x)N^2 \times \sin c^2(Nk\delta) = N^2 I(x) \sin c^2\left(\pi N \frac{x\mathrm{d}}{\lambda f}\right)$. La forme de la courbe sur l'intervalle $[0, \lambda f/d]$ est donc celle d'un sinus cardinal.

Ordre de diffraction

Chaque pic du terme d'interférence est appelé *ordre de diffraction*. Le pic d'ordre 0 sépare les ordres négatifs des ordres positifs.

Étude du terme de diffraction

C'est le terme de diffraction par une fente mince. C'est un sinus cardinal dont la première annulation est obtenue pour $x = \lambda f/a$, où a est la largeur d'une fente. Comme on a supposé $a \ll$ d, la modulation du terme d'interférences par le terme de diffraction apparaît à grande échelle (Fig. 14.12).

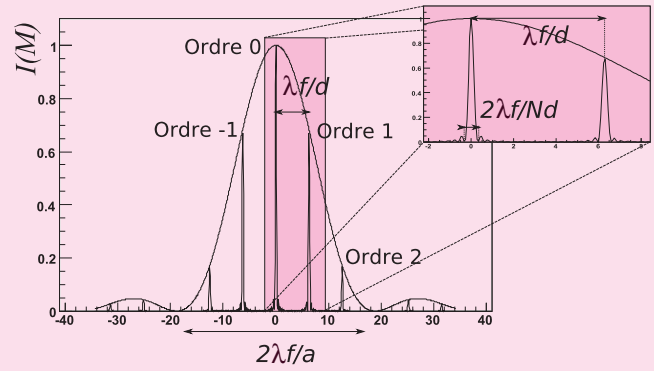


Figure 14.12 **Intensité dans le cas d'un réseau de *N* fentes**

Le terme d'interférence présente des maxima d'intensité pour $x=\lambda f/d$. Ces maxima sont des sinus cardinaux de largeur à mi-hauteur $\Delta x=\lambda f/Nd$. Le terme d'intensité est modulé par un terme de diffraction dont la forme dépend de la géométrie du motif diffractant. Ici, c'est un sinus cardinal de largeur à mi-hauteur $\lambda f/a$. L'insert en haut à droite présente un agrandissement de 2 maxima d'intensité.

b) Formule des réseaux

L'angle i_p dans lequel la lumière est diffractée dans l'ordre p est donné par la condition d'interférence constructive $\delta = p\lambda$, avec $\delta = d(\sin i_p - \sin i_0)$ où i_0 est l'angle d'incidence du faisceau incident sur le réseau (Fig. 14.13). On obtient la *formule des réseaux :*

$$\sin i_p - \sin i_0 = \frac{p\lambda}{\mathrm{d}}$$

Dans cette formule, les angles sont repérés par rapport à la normale au plan du réseau et comptés positivement dans le sens trigonométrique.

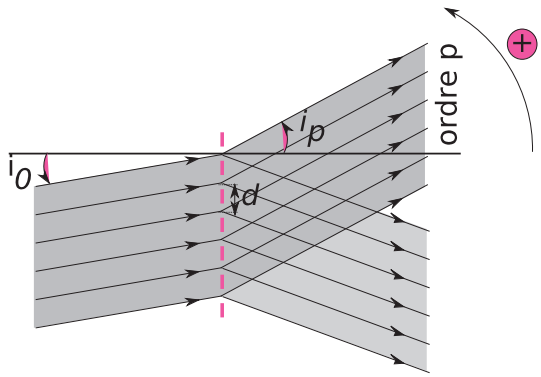


Figure 14.13 **Formule des réseaux**
L'angle du faisceau incident avec la normale au plan du réseau de pas d est i_0. L'angle du faisceau diffracté dans l'ordre p est i_p. Ces angles sont reliés par la formule des réseaux.

Remarque

La déviation (angle entre le prolongement du rayon incident et le réseau dévié) par un réseau présente, comme pour le prisme, un minimum en fonction de l'angle d'incidence i_0.

c) Réseau blazé

Lorsque le motif diffractant est un prisme réfléchissant d'indice n, de largeur d (on a alors le pas du réseau d égal à la largeur a d'un motif diffractant) et d'angle au sommet α (« réseau à échelette »), il est possible de choisir les paramètres du réseau de façon à faire coïncider le maximum du terme de diffraction avec un pic du terme d'interférence. On a alors, pour α petit, la relation, dite de Blaze, valable lorsque l'incidence du faisceau sur le réseau est normale :

$$(n-1)\alpha = p\frac{\lambda}{d}\text{ , avec } p \text{ entier.}$$

Les minima nuls du terme de diffraction coïncident alors avec tous les autres pics du terme d'interférence : toute la lumière est alors concentrée en un seul pic (celui d'ordre p), et n'est plus répartie dans un grand nombre d'ordres. On dit que le réseau est « blazé » dans l'ordre p. La relation de Blaze n'étant valable que pour une longueur d'onde donnée, on blaze les réseaux en général dans un ordre bas (p = 1 ou – 1) : dans ce cas, la condition de Blaze est approximativement satisfaite pour un domaine de longueurs d'onde le plus grand possible.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À retenir

- Lorsque de la lumière est superposée à de la lumière, il est possible, dans certaines conditions, d'obtenir sur un écran des zones d'intensité élevée et d'autres d'intensité faible ou nulle : on parle d'interférence constructive ou destructive respectivement.
- Lorsque l'on fait interférer entre elles deux ondes lumineuses monochromatiques, la modulation de l'intensité sur un écran suit une fonction cosinus au carré. Lorsque la lumière est composée de deux longueurs d'onde voisine, on obtient un phénomène de battements optiques. Lorsque la source est spectralement large, le terme en cosinus carré est modulé par une enveloppe d'autant plus étroite que le spectre est large. L'étude des franges d'interférence et de l'enveloppe permet de déduire les propriétés spectrales de la source.
- Le phénomène de diffraction optique se produit lorsque de la lumière passe par un obstacle dont les dimensions ne sont pas trop grandes par rapport à sa longueur d'onde. Le principe de Huygens-Fresnel permet de déterminer les propriétés de la répartition de la lumière au-delà de l'obstacle. Les directions dans lesquelles se répartit la lumière dépendent de sa longueur d'onde. Ce principe est mis à profit dans les réseaux de diffraction.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 611.

14.1 Visibilité d'interférence pour deux ondes d'intensité différente

Montrer que si les intensités des deux ondes interférant sont différentes, égales à I_1 et I_2 respectivement, on a alors $V = 2\sqrt{I_1 I_2}/(I_1 + I_2)$.

14.2 Mesure du doublet jaune du Mercure

Un étudiant enregistre la courbe de battements obtenue à partir d'une lampe à vapeur de Mercure filtrée pour ne laisser passer que le jaune. Il compte $N = 274 \pm 1$ franges dans un battement. Connaissant la longueur d'onde moyenne du doublet $\overline{\lambda} = 578{,}02$ nm (supposée connue parfaitement), en déduire l'écart $\Delta\lambda$ du doublet. Quelle est la précision obtenue sur cette mesure ?

14.3 Diamètre de la tache de diffraction d'une lentille mince

Une lentille mince montée sur un support circulaire de diamètre $D = 4$ cm et de focale $f' = 30$ cm, est éclairée par une source de lumière ponctuelle située à l'infini sur l'axe optique. Sa longueur d'onde est $\lambda = 500$ nm. Où se forme l'image de la source ? Quel est le diamètre de la tache image ?

14.4 Limite de résolution de l'œil

La pupille de l'œil a un diamètre $d = 2$ mm. Quel est le diamètre ϕ de la tache de diffraction d'un point source à très grande distance sur la rétine de l'œil (distance cornée-rétine $d_{\text{oeil}} = 22$ mm) ? Un observateur regarde deux étoiles voisines dans le ciel. Quelle distance minimale entre les images de ces étoiles sur la rétine doit-il exister pour que le cerveau perçoive bien deux étoiles distinctes ? (On considérera que les deux étoiles sont vues distinctement si la distance entre les deux taches de diffractions correspondantes sur la rétine est supérieure ou égale au diamètre d'une tache.) Sous quel angle minimal les deux étoiles sont-elles vues quand l'œil est à la limite de les distinguer l'une de l'autre ?

14.5 Mesure de l'épaisseur d'un cheveu

On réalise la figure de diffraction d'un cheveu. La source est un rayon laser hélium-néon ($\lambda = 632{,}8$ nm) dont les rayons arrivent en incidence normale, la figure de diffraction est projetée sur un écran situé dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale $f' = 20$ cm. Un étudiant mesure la distance de la tache centrale de diffraction (entre deux minima d'intensité) et trouve $d = 2{,}5 \pm 0{,}5$ mm. Quelle est l'épaisseur a du cheveu et son incertitude δa ? On supposera que la figure de diffraction du cheveu est la même que celle produite par une fente de largeur a.

SPECTROSCOPIE OPTIQUE

15

PRÉALABLES

- Interférences et diffraction des ondes lumineuses
- Propriétés de déviation d'un prisme
- Principe d'un réseau de diffraction

MOTS CLÉS

- Sources à incandescence
- Sources spectrales
- Spectroscopes à prisme, à réseau, interférentiels
- Résolution spectrale

OBJECTIFS

- Caractériser les propriétés de divers spectroscopes utilisés dans l'étude des sources lumineuses.

15.1 INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude du contenu spectral des sources lumineuses dans le domaine visible. Pour une telle étude, le physicien dispose d'instruments appelés spectroscopes. Le domaine de la physique consacré à cette étude s'appelle « spectroscopie optique ». La spectroscopie – l'étude des spectres – a des applications dans bien d'autres domaines que la physique : astrophysique, chimie, médecine ou biologie. Nous décrirons la constitution et les propriétés des spectroscopes dans les sections suivantes. Auparavant, nous étudions le principe de l'émission de différentes sources lumineuses et décrivons les spectres qu'elles produisent.

15.2 Spectres des sources lumineuses

On distingue deux grandes catégories de sources lumineuses en fonction de la nature de leur émission : les sources thermiques (lampes à incandescence, lampes halogènes) et les sources luminescentes (diodes électroluminescentes, lampes spectrales, néons, ampoules basse consommation). Ces sources ont des spectres de nature et d'allure très différentes.

Spectre et spectroscopie

Un spectre est la répartition d'énergie rayonnée en fonction de la fréquence (ou de la longueur d'onde). L'étude des spectres lumineux renseigne sur les propriétés chimiques des corps. La spectroscopie, c'est-à-dire l'étude des spectres, est utilisée dans différents domaines du spectre électromagnétique et dans de nombreux domaines de la physique ou de la médecine.

15.2.1 Sources thermiques – Modèle du corps noir

Un corps chauffé rayonne de la lumière. La couleur du corps chauffé dépend de sa température. On parle de source thermique.

Source thermique

Il s'agit d'une source lumineuse émettant de la lumière par chauffage d'un corps (ex : filament d'une ampoule dans les lampes à incandescence).

Le spectre d'une source thermique est un spectre continu.

Spectre continu

C'est un spectre contenant toutes les longueurs d'onde. Dans le visible, c'est un spectre comportant toutes les couleurs de l'arc-en-ciel. Une lampe à incandescence produit un tel spectre.

La distribution spectrale d'une source thermique est celle d'un « corps noir ». Un corps noir est le cas idéal d'un corps en équilibre constant avec son propre rayonnement, si bien que sa température est constante. Pour assurer cet équilibre, il absorbe à toutes les longueurs d'onde la lumière qu'il produit et la réémet. Sa distribution d'énergie a été calculée par Planck en 1900. La nature fournit de nombreux exemples de sources dont le rayonnement est approximativement un rayonnement de corps noir (four, lampe à incandescence, soleil, corps animal ou humain, et même l'Univers).

Corps noir

Un corps solide porté à incandescence émet un rayonnement possédant toutes les longueurs d'onde dont l'énergie se répartit suivant une courbe de Planck (Fig. 15.1)

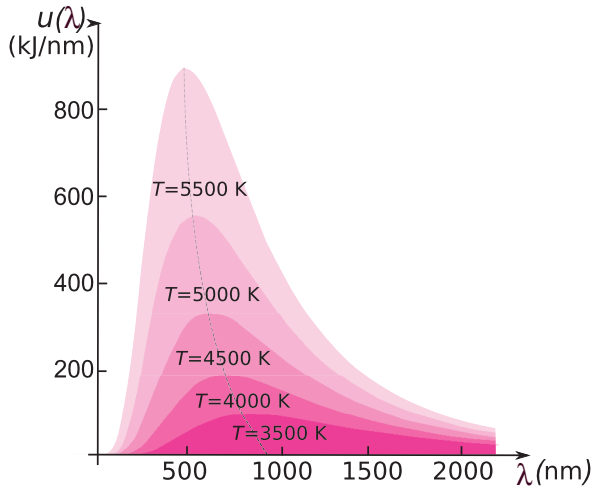


Figure 15.1 Émission du corps noir
L'émission d'un corps chauffé suit la courbe de Planck présentée ici pour différentes températures. Plus la température est élevée, plus la longueur d'onde au maximum de l'émission est courte.

Loi de Wien

La température T du corps est reliée à la longueur d'onde λ_{max} *au maximum de la courbe de Planck par la loi :*

$$\lambda_{max} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{T}\ m$$

où T *est exprimée en Kelvins (K).*

Remarque

On dit qu'un corps est chauffé à blanc ou au rouge. Ces expressions se réfèrent implicitement à la longueur d'onde correspondante à la température via la loi de Wien.

15.2.2 Sources luminescentes – Modèle quantique de l'atome

La nature du rayonnement émis par une source luminescente est de toute autre nature que celle du corps noir. Parmi les sources luminescentes, nous étudions le principe des lampes spectrales.

Lampe spectrale

Ce sont des lampes formées d'une ampoule contenant un gaz dont l'excitation des atomes par collisions conduit à la production d'une lumière caractéristique de ce gaz.

Le spectre produit par une lampe spectrale n'est pas continu mais discret.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Spectre de raies (ou spectre discret)

C'est un spectre qui ne présente de l'énergie que dans des bandes étroites de longueur d'onde appelées « raies spectrales ». Les longueurs d'onde associées à ces raies sont caractéristiques des atomes qui les produisent. Les lampes spectrales produisent ce type de spectres.

Pour comprendre l'émission de telles sources, il faut faire appel à la description de l'atome par la mécanique quantique et à la notion de photon. Nous en rappelons ici brièvement le principe.

Voir chapitre 25

État d'énergie

Les niveaux d'énergie dans lesquels un électron d'un atome peut se trouver sont quantifiés, ils ont une énergie bien déterminée.

Excitation d'un atome

C'est le passage d'un électron d'un état d'énergie basse E_1 à un état d'énergie haute E_2. Il se fait lorsqu'un photon fournit son énergie à l'électron (Fig. 15.2).

Désexcitation d'un atome

Un atome excité n'est pas stable. Un électron au niveau E_2 retombe tout seul sur son niveau de départ E_1. L'électron perd une énergie $\Delta E = E_2 - E_1$ qui est émise sous la forme d'un photon de fréquence ν telle que $h\nu = E_2 - E_1$, où h est la constante de Planck. L'énergie du photon est donc directement reliée à la structure atomique de l'atome qui l'émet (Fig. 15.2).

Voir chapitre 25

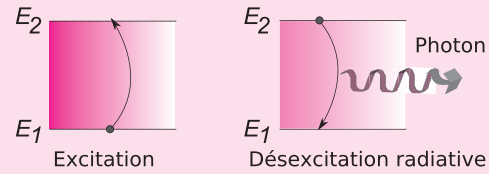


Figure 15.2 **Modèle quantique de l'atome**

À gauche : excitation d'un atome ; à droite : désexcitation par émission d'un photon. Le point représente un électron sur un état d'énergie de l'atome.

Spectre en émission

C'est le spectre de raies émis par désexcitation des atomes suivant le mécanisme décrit plus haut.

Spectre en absorption

Un électron sur l'état d'énergie basse E_1 peut absorber des photons de longueur d'onde égale à celle que l'atome peut émettre par désexcitation. Un spectre en absorption est produit par des atomes absorbant un rayonnement dans des bandes

de longueur d'onde très étroites. Le spectre présente alors des raies d'absorption noires sur un spectre continu.

Remarque

Un cas important des sources luminescentes est le laser (Light Amplification by Stimulated Emission Radiation). Son rayonnement est dû à l'émission stimulée de photons. Un photon arrivant sur un atome excité provoque sa désexcitation par l'émission d'un photon ayant exactement les mêmes propriétés (énergie, direction...). Le deuxième photon provoque l'émission d'un nouveau photon ayant lui aussi des propriétés identiques : le rayonnement est ainsi amplifié par cette émission stimulée.

15.3 Spectroscope à prisme ou à réseau

L'étude des spectres, qu'ils soient continus ou discrets, nécessite l'emploi d'un élément dispersif (c'est-à-dire qui décompose le rayonnement en ces longueurs d'onde constitutives). Au chapitre 11, nous avons étudié le prisme pour ces propriétés de déviation. Le fait que l'indice de réfraction dépende de la longueur d'onde, fait qu'un prisme, non seulement dévie la lumière, mais aussi la disperse. C'est ce phénomène qui explique la formation des arcs-en-ciel, les gouttes d'eau en suspension dans l'atmosphère jouant le rôle d'éléments dispersifs. Les réseaux de diffraction sont aussi des éléments dispersifs (la direction de la lumière diffractée dépend de la longueur d'onde). Ils sont majoritairement utilisés en spectroscopie de nos jours.

Voir chapitre 11

Voir site web

15.3.1 Principe d'un spectroscope à prisme ou à réseau

Les spectroscopes à prisme ou à réseau sont constitués de trois éléments : le système dispersif bien évidemment, mais aussi d'un système source et d'un système récepteur.

a) Système source : fente et collimateur

La source éclaire une fente fine, parallèle à l'arête du prisme ou aux fentes du réseau. La fente-source est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1, de distance focale f_1' appelée collimateur. Le faisceau émergeant du collimateur est cylindrique, les rayons sont parallèles entre eux.

Voir chapitre 13

b) Système dispersif

C'est soit un prisme, soit un réseau. Dans les deux cas, on envoie un faisceau parallèle et on se place au minimum de déviation. C'est dans cette configuration que l'on a le maximum de lumière et de netteté sur l'écran.

Voir § 15.3.1.a

c) Système récepteur : lunette

Dans la direction de déviation du prisme, ou de diffraction d'un ordre du réseau, qui dépend de la longueur d'onde, on récupère un faisceau parallèle sur une lentille convergente L_2, de distance focale f_2' appelée lunette. Une image de la fente-source à une longueur d'onde donnée se forme alors dans le plan focal image de L_2. On place un

Voir chapitres 11 et 14

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

écran dans ce plan (ou un oculaire derrière lequel se trouve l'œil de l'observateur). Dans le cas d'un rayonnement polychromatique, on observe sur l'écran une succession d'images de la fente, appelées « raies », à des positions qui dépendent de la longueur d'onde correspondante : on a un spectre de raies en émission.

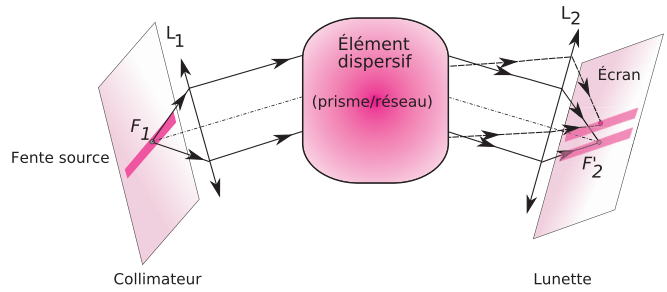


Figure 15.3 **Principe d'un spectroscope à prisme ou à réseau**

15.3.2 Dispersion

L'efficacité du prisme ou du réseau à disperser les longueurs d'onde est évaluée par la quantité $\dfrac{\partial i'}{\partial \lambda}$, appelée dispersion. L'angle i' est l'angle en sortie du prisme ou du réseau. L'écart angulaire $\Delta i'$ en sortie de l'élément dispersif entre deux rayons de longueur d'onde respective λ et $\lambda + \Delta\lambda$ est ainsi :

$$\Delta i' = \frac{\partial i'}{\partial \lambda}\Delta\lambda$$

Sur l'écran, l'écart entre les centres des deux images de la fente est $\Delta x = f_2'\Delta i'$, pour un écart angulaire faible.

15.3.3 Largeur de la fente source et de son image sur l'écran

Ne serait-ce que pour avoir une luminosité suffisante du spectre sur l'écran la fente-source a une certaine largeur l. Le grandissement du système est f'_2 / f'_1 et la largeur l' de l'image de la fente sur l'écran est donc : $l' = (f'_2 / f'_1)l$.

15.3.4 Limite de résolution et pouvoir de résolution

a) Définitions

Limite de résolution (ou séparation)

C'est le plus petit écart en longueur d'onde $\Delta\lambda_{\text{min}}$ que l'on peut mettre en évidence avec le spectroscope. Celui-ci n'est donc pas capable de donner sur l'écran deux images suffisamment séparées associées à deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 telles que :

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 < \Delta\lambda_{\text{min}}$$

Pouvoir de résolution

On définit le pouvoir de résolution R du spectroscope par la relation :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}}$$

où λ est la valeur moyenne des deux longueurs d'onde que l'on veut séparer. C'est un nombre sans dimension, d'autant plus grand que la limite de résolution est petite.

Remarque

Si la fente source est infiniment fine et les effets de diffraction sont négligeables dans la formation de l'image de la fente, alors la limite de résolution est infiniment petite et le pouvoir de résolution infiniment grand. En pratique, la largeur finie de la fente source et la diffraction limitent la résolution.

b) Influence de la fente source

Si Δx est la distance entre le centre des deux images de la fente source dues à deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 voisines, les deux raies seront séparées (on dit aussi résolues) lorsque $\Delta x > l'$, où l' est la largeur de l'image de la fente source. D'après les résultats précédents, cette inégalité impose :

§ 15.3.2 et § 15.3.3

$$\Delta\lambda > \Delta\lambda_1 = \frac{l}{f_1'(\partial i'/\partial\lambda)}.$$

$\Delta\lambda_1$ est la limite de résolution imposée par la largeur de la fente source.

c) Influence de la diffraction

Si la fente est infiniment fine, c'est la diffraction qui va limiter la résolution du spectroscope. On suppose que la diffraction sur les montures des lentilles est négligeable. Les effets de diffraction dont nous parlons ici sont dus, soit à la largeur finie des fentes constituant le réseau, soit à la largeur finie du prisme. Dans les deux cas, l'image de la fente dans le plan focal de L_2 n'est pas infiniment fine (même dans l'hypothèse où la fente source l'est), et possède une certaine largeur.

Quand peut-on dire que deux images de la fente associées à deux longueurs d'onde voisines sont effectivement séparées sur l'écran ? Il y a une certaine subjectivité. On choisit un critère de séparation des raies, appelé critère de Rayleigh.

Critère de Rayleigh

Si Δx est la distance séparant les centres de deux raies sur l'écran, et si δx est la largeur à mi-hauteur d'une raie, alors il y a séparation au sens du critère de Rayleigh si $\Delta x \geqslant \delta x$. Les raies sont séparées par une zone sombre et apparaissent distinctement. À la limite de résolution, $\Delta x = \delta x$: les intensité des raie se croisent à mi-hauteur. La figure 15.4 illustre le critère de Rayleigh dans le cas où les intensités diffractées ont l'allure de sinus cardinaux.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

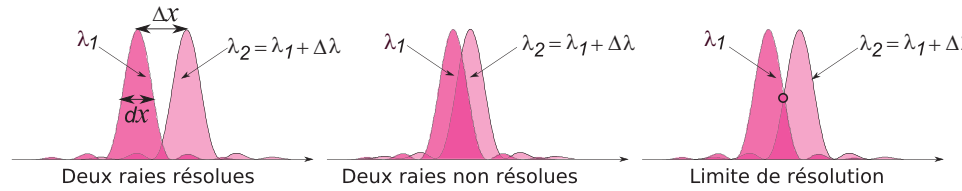


Figure 15.4 **Le critère de Rayleigh**

L'application du critère de Rayleigh impose la condition suivante pour qu'il y ait résolution :

$$\Delta\lambda > \Delta\lambda_2 = \frac{\delta x}{f_2'(\partial i'/\partial\lambda)}.$$

$\Delta\lambda_2$ est la limite de résolution imposée par la diffraction. En pratique, le pouvoir de résolution est limité par la plus grande des deux valeurs $\Delta\lambda_1$ ou $\Delta\lambda_2$.

15.3.5 Spectroscope à prisme

Au minimum de déviation pour le prisme, on trouve, en différentiant les formules données au chapitre 11 :

$$\Delta\lambda_1 = \frac{l}{f_1'}\frac{a}{b}\frac{1}{(\partial n/\partial\lambda)},$$

où a est la largeur de la section du faisceau en sortie du prisme, b est la longueur de sa base, et $\partial n/\partial\lambda$ est la dérivée de l'indice optique par rapport à la longueur d'onde (dans le visible, l'indice suit la loi de Cauchy : $n(\lambda) = c_1 + c_2/\lambda^2$, où c_1 et c_2 sont des constantes réelles ; voir exercice 15.2).

De même, en supposant que la diffraction de la lumière à la traversée du prisme est équivalente à celle que produirait une fente de largeur a perpendiculaire au faisceau émergeant et infiniment longue suivant l'arête du prisme, on a $\delta x = \lambda f_2'/a$ et :

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\lambda}{b(\partial n/\partial\lambda)}.$$

On compare $\Delta\lambda_1$ à $\Delta\lambda_2$:

$$\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\lambda_2} = l\frac{a}{\lambda f_1'}.$$

Si $l > \lambda f_1'/a$, la résolution est limitée par la fente source et le pouvoir de résolution du spectroscope est :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_1} = \frac{\lambda f_1'}{a}\frac{b}{l}\left(\frac{\partial n}{\partial\lambda}\right) \qquad \text{(prisme, fente source limitante)}$$

Si $l < \lambda f_1'/a$, la résolution est limitée par la diffraction et le pouvoir de résolution du spectroscope est :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_2} = b\left(\frac{\partial n}{\partial \lambda}\right) \qquad \text{(prisme, diffraction limitante)}$$

Dans les deux cas, on utilise des prismes en verre le plus dispersif possible ($\partial n/\partial\lambda$ grand) et de base la plus large possible (b grand).

Remarque

Pour a = 3 cm (section du faisceau), f'_1 = 50 cm et λ = 0,5 µm, on trouve $l \approx 8$ µm. Il faut une largeur de fente très faible si on veut être limité par des effets de diffraction. En pratique, la largeur de la fente source est le facteur limitant la résolution du spectroscope.

15.3.6 Spectroscope à réseau

En utilisant la formule des réseaux au minimum de déviation, on obtient pour un réseau :

Voir chapitre 14

$$\Delta\lambda_1 = \frac{l}{f_1'}\frac{d}{p}\cos i_p,$$

où d est le pas du réseau (distance entre deux fentes du réseau), p est l'ordre de diffraction et i_p l'angle du faisceau diffracté dans l'ordre p. En pratique, on observe pour $i_p \approx 0$, et on considérera $\cos i_p \approx 1$.

Les pics de diffraction sur l'écran ont pour largeur à mi-hauteur $\delta x = \lambda f_2'/Nd$ et on trouve pour $\Delta\lambda_2$:

Voir chapitre 14

$$\Delta\lambda_2 = \frac{\lambda \cos i_p}{Np} \approx \frac{\lambda}{Np},$$

où N est le nombre de fentes constituant le réseau.

Si $l > \lambda f_1'/Nd$, la résolution est limitée par la fente source et le pouvoir de résolution du spectroscope est :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_1} = \frac{\lambda f_1'}{d}\frac{p}{l} \qquad \text{(réseau, fente source limitante)}$$

Si $l < \lambda f_1'/Nd$, la résolution est limitée par la diffraction et le pouvoir de résolution du spectroscope est :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_2} = pN \qquad \text{(réseau, diffraction limitante)}$$

On voit que l'on a intérêt à utiliser un réseau avec beaucoup de fentes (les pics de diffraction sont d'autant plus fins) et observer dans les ordres élevés (la dispersion est d'autant plus élevée). En pratique, on est limité par le phénomène de recouvrement des ordres : la dispersion devient importante lorsque l'on va aux ordres élevés et les

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

raies dues aux longueurs d'onde dispersées dans l'ordre $p + 1$ viennent s'intercaler sur l'écran aux raies de l'ordre p. Il en résulte un mélange des raies qui rend difficile, voire impossible, une détermination non ambiguë des longueurs d'onde de la source. C'est pourquoi on se limite en pratique à l'ordre 1 ou 2.

Remarque

Pour $Nd = 2$ cm (largeur éclairée du réseau), $f'_1 = 50$ cm et $\lambda = 0{,}5$ µm, on trouve $l \approx 12{,}5$ µm. Là encore, la fente est le facteur limitant principalement la résolution du spectroscope.

15.4 Spectroscope interférentiel

Il est possible d'utiliser un interféromètre pour faire de la spectroscopie fine d'une source. En pratique, on utilise un interféromètre de Michelson ou de Fabry-Pérot.

Voir site web pour une présentation de l'interféromètre de Michelson.

À retenir

- Il existe deux grandes catégories de sources lumineuses optiques : les sources thermiques, dont le rayonnement suit la loi du corps noir énoncée par Planck (exemple : une lampe à incandescence) et les sources luminescentes, dont le rayonnement se fait dans des intervalles bien déterminés de longueur d'onde, appelés raies (exemple : lampe spectrale).
- La spectroscopie optique est l'étude des spectres des sources lumineuses du domaine visible, c'est-à-dire de la répartition de l'énergie en fonction de la longueur d'onde (ou fréquence) de leur rayonnement.
- La spectroscopie joue un rôle fondamental dans de nombreux domaines de la physique, de la biologie, de la médecine, de la chimie. Elle se fait à l'aide de spectroscopes à prisme, à réseau ou interférentiel. Les principales propriétés caractérisant un spectroscope sont son pouvoir de dispersion et son pouvoir de résolution, c'est-à-dire sa capacité à séparer deux raies voisines d'un spectre.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 612.

15.1 Rayonnement de corps noir du corps humain

La température du corps d'un homme en bonne santé est 37 °C. En supposant que l'on peut décrire l'émission du corps humain par le modèle de corps noir, quelle est la longueur d'onde à laquelle se produit le maximum du rayonnement ?

15.2 Dispersion par un prisme

Un prisme disperse la lumière du soleil. En utilisant la formule donnant l'indice de réfraction du prisme au minimum de déviation en fonction de l'angle de déviation D, montrer qualitativement que le bleu est plus dévié que le rouge (on supposera que l'indice n dépend de la longueur d'onde λ suivant la loi de Cauchy : $n(\lambda) = a + b/\lambda^2$ où a et b sont deux constantes réelles).

15.3 Résolution du doublet jaune du sodium par un réseau

On envoie sur un réseau possédant $n = 300$ traits par millimètre la lumière issue d'une lampe à vapeur de sodium contenant un doublet jaune de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm. Le diamètre du faisceau incident sur le réseau est $\phi = 2$ cm. Calculer le pouvoir de résolution théorique de ce réseau dans les ordres 1 et 2. Le doublet est-il résolu (séparé) selon le critère de Rayleigh dans l'ordre 1 ? Dans l'ordre 2 ? (On prendra pour les calculs la longueur d'onde moyenne du doublet jaune du sodium. On suppose qu'on est limité par diffraction.)

15.4 Étude du rayonnement d'une étoile

On observe le rayonnement d'une étoile à travers un télescope couplé à un réseau de diffraction possédant $n = 500$ traits par millimètre. L'onde arrive en incidence normale sur le réseau. Chaque composante du rayonnement diffracté par le réseau est ensuite enregistrée sur une pellicule. On trouve une raie bleue dans l'ordre 1 à un angle de 14,07° de la lumière diffractée dans l'ordre 0. Quelle est la longueur d'onde de cette lumière bleue ?

Partie IV

Électrostatique Électromagnétisme

ÉLECTROSTATIQUE

16

PRÉALABLES

- Intégrales simples, doubles et triples
- Notion de gradient d'un champ vectoriel
- Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

MOTS CLÉS

- Distributions continues de charges électriques
- Loi de Coulomb
- Principe de superposition
- Notions de champ et de potentiel électrostatiques
- Lignes de champ, surfaces équipotentielles
- Notion de flux d'un champ vectoriel
- Théorème de Gauss

OBJECTIFS

- Savoir décrire une distribution continue de charges et en calculer la charge totale.
- Déterminer le champ et le potentiel électrostatique créés par une ou plusieurs charges ponctuelles, par une distribution continue de charges.
- Connaître et savoir utiliser les relations entre le potentiel et le champ électrostatiques.
- Notions de lignes de champ vectoriel et de surfaces équipotentielles.
- Utilisation des propriétés de symétrie et d'invariance d'une distribution continue de charges et du théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution continue de charge.

16.1 CHARGES ÉLECTRIQUES

16.1.1 Charge électrique – Phénomènes d'électrisation

a) Électrisation par frottement – Objet « chargé »

Certains phénomènes d'électrisation, notamment l'électrisation par frottement, ont été observés depuis longtemps, dès l'époque de la Grèce antique (VII^{e} siècle av. J.-C.).

Lorsque l'on approche un bâton de verre frotté avec un morceau de soie d'un pendule électrostatique (boule de sureau recouverte de papier d'aluminium accrochée par un fil à un support isolant), il attire la petite boule recouverte d'un conducteur. Lors du

frottement du verre par la soie, un transfert de particules chargées, même en très petite quantité, a pu avoir lieu et le bâton est chargé.

En réalité, dire que le bâton est « chargé » signifie non pas seulement qu'il contient des particules chargées, mais qu'il présente un excès de particules chargées positives ou négatives (nous reviendrons dans le paragraphe suivant sur cette notion de signe), car tous les objets qui nous entourent sont constitués d'un nombre immense de particules élémentaires chargées.

Lorsqu'il y a équilibre entre la quantité de charges positives et celle de charges négatives présentes, l'objet est dit « électriquement neutre ».

Lorsqu'il existe un déséquilibre entre ces deux types de charges, on parlera « d'objet chargé ».

Par exemple, un objet présentant un excès de charges positives (ou un déficit de charges négatives) sera présenté comme chargé positivement (et réciproquement).

b) Charges positives et charges négatives

Aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, l'observation des forces qui s'exercent entre différents objets chargés, forces répulsives ou forces attractives selon les cas, conduisent peu à peu à l'idée de deux types de charges électriques ; d'abord nommées « vitrée » et « résineuse » par Charles Du Fay qui étudia l'électrisation par frottement, elles seront finalement appelées « positives » et « négatives » par Benjamin Franklin. Les différentes observations conduisent alors à la règle suivante :

Deux charges électriques de même signe se repoussent, alors que deux charges électriques de signe contraire s'attirent.

Ces phénomènes d'attraction et de répulsion entre des particules chargées sont à l'origine de phénomènes courants (adhérence électrostatique des cheveux au contact de peignes ou de brosses en plastique...) mais aussi de nombreuses applications pratiques (photocopie, impression au jet d'encre...).

c) Conducteurs et isolants

Tous les matériaux ne « conduisent » pas le courant électrique de la même manière, c'est-à-dire que selon les matériaux, les charges électriques se déplacent plus ou moins facilement. Dans les conducteurs (tels que les métaux, mais aussi certaines solutions, le corps humain...), les charges électriques se déplacent assez librement alors que dans les isolants (le plastique, le bois, l'eau pure, le verre...), ce déplacement est assez difficile.

Il existe des substances intermédiaires telles que le silicium et le germanium, appelées semi-conducteurs, très utilisées en électronique ; enfin, certains matériaux, dans certaines conditions (notamment de température), laissent circuler les charges électriques sans résistance et sont alors appelés supraconducteurs.

Voir les chapitres 22, 23 et 24

d) Électrisation par contact

Il n'y a pas toujours besoin d'exercer un frottement pour électriser un objet ; souvent, le contact suffit. Un appareil simple tel un électroscope (Fig. 16.1) permet de le mettre en évidence.

Un électroscope comporte une lame fixe et une lame mobile. Si l'on touche le plateau conducteur avec le bâton de verre frotté avec un morceau de soie (ou avec un bâton d'ébonite frotté avec de la fourrure), la lame mobile s'écartera de la lame fixe et la déviation sera proportionnelle à la charge électrique apportée.

En effet, les charges électriques en excès dans le bâton lorsqu'il est chargé (qu'elles soient positives ou négatives) chercheront à s'éloigner au maximum les unes des autres et se répartiront donc dans le plateau conducteur et dans les deux lames ; celles-ci, contenant des charges de même signe, se repousseront.

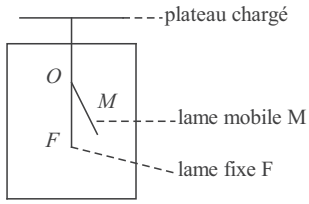


Figure 16.1 **Schéma d'un électroscope à lame mobile**

16.1.2 Principe de conservation de la charge

Conservation de la charge électrique

La charge électrique totale (algébrique) d'un système isolé reste constante.

Ce principe est général et s'applique à l'ensemble de la physique et de la chimie (électro-neutralité des équations-bilans des réactions chimiques, désintégrations radioactives des noyaux, réactions entre particules élémentaires...).

16.1.3 Invariance de la charge

Invariance de la charge

Lors d'un changement de référentiel, la charge électrique est invariante.

16.1.4 Quantification de la charge

Les charges électriques rencontrées (en dehors de celles de certaines particules élémentaires tels les quarks qui constituent les protons et les neutrons) sont toutes des multiples entiers d'une même quantité, appelée charge élémentaire et notée généralement e. Un proton porte une charge + e alors qu'un électron porte une charge – e.

La charge électrique est quantifiée et la charge élémentaire vaut $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$C.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

L'unité de charge électrique dans le système international est appelée le coulomb et s'exprime en fonction de l'unité d'intensité électrique, l'ampère :

$$1 \text{ ampère} = 1 \text{ coulomb} \cdot \text{s}^{-1}$$

La première détermination directe de la charge élémentaire a été réalisée par Millikan en 1910. En observant la chute de gouttelettes d'huile différemment chargées, en présence ou non d'un champ électrique, Millikan parvint à mesurer différentes charges électriques, toutes multiples d'une même quantité, la charge élémentaire (voir figure 16.2).

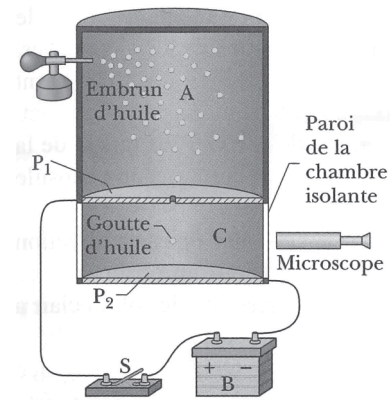


Figure 16.2 **Expérience de Millikan**

16.1.5 Distributions continues de charges

À l'échelle macroscopique, lorsque l'on observe un objet, même très petit, il contient un très grand nombre de particules chargées. Par conséquent, bien que la charge électrique soit quantifiée, lorsque l'on ne peut pas distinguer les particules chargées les unes des autres car trop petites, la répartition de la charge apparaît comme continue. On utilisera alors la notion de densité de charge en un point M de la distribution.

a) Densité volumique de charge

On considère un volume élémentaire $\mathrm{d}\tau$ autour d'un point P du volume chargé ; cet élément de volume contient une charge élémentaire $\mathrm{d}q$.

La densité volumique de charge au point P est définie par $\mu(P) = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$.

On peut obtenir la charge totale Q contenue dans le volume V en sommant l'ensemble des charges élémentaires :

$$Q = \iiint_v \mathrm{d}q = \iiint_v \mu(P) \cdot \mathrm{d}\tau$$

b) Densité superficielle (ou surfacique) de charge

Si les charges sont réparties sur une surface (ce que l'on observe par exemple pour une sphère conductrice), on utilisera une densité superficielle de charge au point P notée $\sigma(P)$, à partir d'une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ autour de P contenant une charge élémentaire $\mathrm{d}q$. La charge totale contenue dans la surface totale S est obtenue par la relation :

$$Q = \iint_S \mathrm{d}q = \iint_S \sigma(P) \cdot \mathrm{d}S$$

c) Densité linéique de charge

Si l'on étudie un conducteur filiforme très long pour lequel sa section est négligeable devant sa longueur, on utilisera pour la description et l'étude de ce système une répartition linéaire des charges ; ceci conduit à introduire, sur le même modèle que précédemment, une densité linéique de charge au point P, $\lambda(P)$, définie à partir d'une longueur élémentaire $\mathrm{d}l$ prise sur le fil autour du point P :

$$\lambda(P) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \text{ et } Q = \int_L \mathrm{d}q = \int_L \lambda(P).\mathrm{d}l$$

16.2 Forces et champs électrostatiques créés par des charges ponctuelles

16.2.1 Loi de Coulomb

Interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles

L'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles q et q' placées respectivement aux points O et M de l'espace (assimilable au vide pour ses propriétés électriques) a été formalisée au XVIII^e siècle par Charles Augustin de Coulomb. La force exercée par la particule chargée q sur la particule chargée q' s'écrit :

$$\vec{F}(q \to q') = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

où $r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$, *q et q' algébriques et* $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

Remarques

- Il est primordial pour la suite du cours de retenir cette formule en sachant précisément comment est défini chacun de ses termes (en particulier le vecteur unitaire $\vec{u}$).
- Si les charges q et q' sont de même signe, le produit qq' est positif, et la force $\vec{F}(q \to q')$ est dirigée de O vers M, ce qui correspond bien à une interaction répulsive.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Si les charges q et q' sont de signe opposé, le produit qq' est négatif, et la force $\vec{F}(q \to q')$ est dirigée de M vers O, ce qui correspond bien à une interaction attractive. Il n'y a donc pas besoin d'ajouter un signe négatif dans la définition de la force.

L'expression algébrique de la force électrique $\vec{F}(q \to q')$ ci-dessus reste valable quels que soient les signes des particules chargées qui interagissent.

La constante ε_0 est appelée la permittivité électrique du vide ; c'est une constante physique qui n'est pas sans dimension ; numériquement, il est plus aisé de retenir que $\dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ en unités S.I. (en $\mathrm{A \cdot s \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}}$).

Si les charges sont placées dans un milieu différent du vide (par exemple dans un condensateur où l'on utilise des matériaux tels que certaines céramiques, des feuilles de mica...), la constante qui intervient alors est la permittivité électrique absolue ε du milieu. Cependant, on utilise fréquemment la permittivité électrique relative ε_r du milieu par rapport au vide :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

La valeur de ε_r peut être très grande (de l'ordre de 1 000 dans certaines céramiques).

16.2.2 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

La présence de la particule chargée q au point O modifie les propriétés électriques en tout point M de l'espace (M différent de O) et ce, même en l'absence de particule chargée au point M. On peut ainsi définir le champ électrostatique créé au point M par la charge q placée au point O à partir de la loi de Coulomb :

Champ créé en *M* par une charge *q* placée en *O*

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r} \text{ où } r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|, \; q \text{ algébrique, et } \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

Si l'on amène une charge Q au point M où règne un champ électrique $\vec{E}(M)$, la force électrique $\vec{F}$ subie par la particule chargée de charge Q s'écrit :

Force subie par une charge *Q* placée dans un champ $\vec{E}(M)$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}(M)$$

Dans le cas où le champ électrique $\vec{E}(M)$ est celui créé par une charge ponctuelle q placée en O, on retrouve la force d'interaction électrostatique donnée par la loi de Coulomb mais cette formule reste vraie pour une charge ponctuelle Q placée dans un champ électrique extérieur $\vec{E}(M)$.

16.2.3 Lignes de champ

Ligne de champ

Une ligne de champ est une courbe orientée à laquelle le champ $\vec{E}(M)$ est tangent en chacun des points M de la courbe.

Les lignes de champ électrique pour une distribution donnée de charges dessinent en quelque sorte une « carte » donnant visuellement la direction et le sens du champ électrique dans l'espace autour de cette distribution de charge.

Autour d'une charge ponctuelle q, les lignes de champ sont radiales (voir la figure 16.3), orientées vers l'extérieur (dites souvent « divergentes ») si la charge $q \geqslant 0$, et orientées vers la charge (dites « convergentes ») si $q \leqslant 0$.

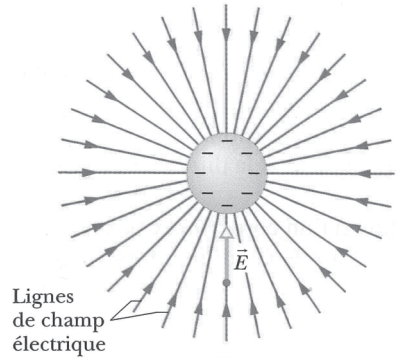


Figure 16.3 **Lignes de champ autour d'une charge ponctuelle négative**

Lorsque l'on considère deux charges ponctuelles de même valeur absolue, les lignes de champ sont très différentes selon que les deux charges sont de signe opposé, comme sur la figure 16.4 (a), ou de même signe, sur la figure 16.4b.

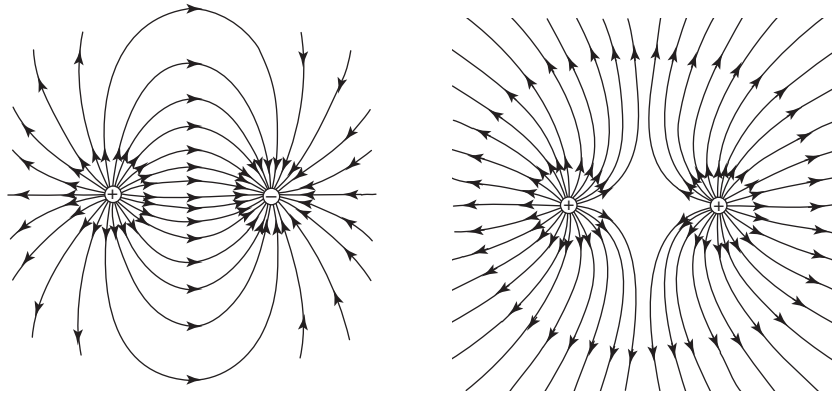


Figure 16.4 **Lignes de champ (a) pour 2 charges opposées (b) pour 2 charges identiques**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

16.2.4 Principe de superposition

Principe de superposition

Le champ électrostatique total créé en un point M par deux charges ponctuelles q et q' est la somme vectorielle des champs électrostatiques créés en M par chacune des charges.

Ce principe provient de la somme vectorielle des forces contenue dans le principe fondamental de la dynamique.

16.2.5 Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

On déduit du principe de superposition que le champ électrostatique créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles est la somme vectorielle des champs électrostatiques créés au point M par chacune des charges prise individuellement.

$$\vec{E}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M)$$

16.3 Champs électrostatiques créés par des distributions continues de charges

L'idée de ce type de calcul est de « découper » la distribution de charges en parties élémentaires (longueur, surface, volume selon le cas étudié) assimilables à des charges ponctuelles et d'exprimer le champ électrostatique élémentaire créé au point M par cette charge « ponctuelle » dq placée en un point P de la distribution de charge.

Le principe de superposition permet alors de sommer (au moyen d'une intégrale simple, double, ou triple) les contributions élémentaires du champ pour obtenir le champ total créé au point M par l'ensemble de la distribution de charges.

On peut résumer ainsi les différentes étapes de ce raisonnement:

- schéma de la distribution de charges et du point M où on cherche $\vec{E}$;
- expression et représentation du champ élémentaire $\mathrm{d}\vec{E}$ créé par une charge élémentaire placée en un point P quelconque de la distribution ;
- choix des axes et projection de $\mathrm{d}\vec{E}$ sur ces axes ;
- éventuelles considérations de symétries permettant de connaître la direction du champ total $\vec{E}$;
- choix des variables d'intégration (une si la distribution est linéique, deux si la distribution est surfacique et trois si la distribution est volumique) ;
- expressions des angles de projection et de la distance PM en fonction de ces variables ;
- intégration sur chaque axe, en faisant attention au domaine d'intégration.

Par exemple, on peut ainsi calculer le champ électrostatique créé en un point M (situé à une distance x du fil) par un fil rectiligne uniformément chargé, avec une densité linéique de charge λ, et dont la section est négligeable devant sa longueur (fil pouvant être considéré « de longueur infinie ») : $\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$.

Pour d'autres exemples, voir les exercices 16.2 et 16.3.

16.4 Circulation du champ électrostatique et potentiel électrostatique

16.4.1 Définition du potentiel électrostatique

On peut démontrer que la circulation du champ électrostatique (qu'il soit créé par une charge ponctuelle, un ensemble de plusieurs charges ponctuelles, ou une distribution continue de charges) entre deux points A et B ne dépend pas du parcours effectivement suivi entre A et B, mais seulement des états A et B :

Le champ électrostatique $\vec{E}$ est un champ conservatif ou encore à circulation conservative.

On sait alors que l'on peut écrire cette intégrale comme la différence d'une fonction, appelée potentiel électrostatique V, entre les points A et B :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(A) - V(B)$$

Cette relation définit, à une constante près, le potentiel électrostatique en un point M : V(M).

Il faudra donc préciser à chaque fois l'origine choisie (qui donne la valeur de la constante d'intégration).

Remarque

On peut relier les notions de champ conservatif et de potentiel présentées ici à celles de force conservative et d'énergie potentielle énoncées dans le chapitre 2 de cet ouvrage.

16.4.2 Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques

Cette définition du potentiel électrostatique peut aussi s'écrire d'une autre manière. En effet,

$$\int_A^B \mathrm{d}V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

Ceci étant vrai quels que soient les points A et B, on peut en déduire que :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\mathrm{d}V(M) = -\vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,(M)$$

Ce qui est aussi équivalent à

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V(M)$$

16.4.3 Surfaces équipotentielles

Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points tels que le potentiel est constant sur cette surface.

Par exemple, pour un fil rectiligne « infiniment long » (dont la section est négligeable devant sa longueur), chargé uniformément, le potentiel électrostatique en un point M ne dépend que de la distance du point M à l'axe du fil : les surfaces équipotentielles seront les surfaces latérales de cylindres d'axe confondu avec le fil et de différents rayons (à chaque rayon, correspondra une valeur du potentiel).

16.4.4 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Propriété 1

Les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles.

DÉMONSTRATION

Soit M un point de la surface équipotentielle $V = V_0$. On considère un point M' de la même surface équipotentielle et infiniment proche de M.

On a $\mathrm{d}V = -\vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{MM'}$ (relation générale entre le champ et le potentiel électrostatiques) et $\mathrm{d}V = 0$ puisque le potentiel V est constant : $V(M) = V(M') = V_0$.

On en déduit que $\vec{E}$ (auquel la ligne de champ est tangente) et $\overrightarrow{MM'}$ (qui appartient à la surface équipotentielle $V = V_0$) sont normaux ; les lignes de champ sont donc normales aux surfaces équipotentielles.

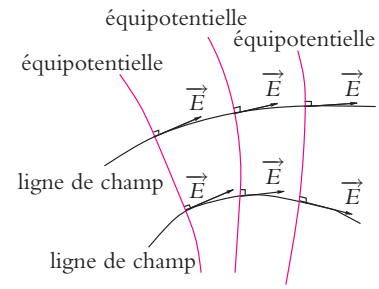


Figure 16.5 **Lignes de champ normales aux équipotentielles**

Propriété 2

Le potentiel V(M) décroît lorsque le point M se déplace le long d'une ligne de champ en suivant l'orientation de celle-ci.

Conséquence

Une ligne de champ électrique ne peut pas être une courbe fermée.

Remarque

Il y a là une différence importante avec les lignes de champ magnétique.

Voir chapitre 17

16.5 Calculs de potentiels électrostatiques

16.5.1 Potentiel créé par une charge ponctuelle

Nous avons vu que le champ électrostatique créé en un point M de l'espace par une charge ponctuelle q placée en un point O s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} \quad \text{où} \quad r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|, \quad q \text{ algébrique}, \quad \text{et} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$

On a $\mathrm{d}V(M) = -\vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l}\,(M)$, ce qui donne ici :

$$\mathrm{d}V(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

d'où l'on obtient, par intégration :

$$V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{constante}$$

Potentiel créé en *M* par une charge *q* placée en *O*

$$\boldsymbol{V(M) = V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{constante, où } r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|}$$

Remarque

En général, s'il n'y a pas de charge à l'infini, on choisit l'origine des potentiels à l'infini (c'est-à-dire $V(r) = 0$ quand $r \to +\infty$), ce qui conduit à prendre une constante nulle dans l'équation précédente.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

16.5.2 Potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles

De même que pour le champ électrostatique, le principe de superposition s'applique pour le potentiel électrostatique.

Par conséquent, le potentiel électrostatique créé en un point M par un ensemble de charges ponctuelles q_i placées aux points O_i peut s'écrire :

$$V(M) = \sum V_i(M) \qquad \text{si on peut choisir une origine des potentiels commune.}$$

16.5.3 Calcul direct du potentiel créé par une distribution continue de charges

Le principe du calcul est identique à celui utilisé pour la détermination du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges (voir § 16.3).

Après avoir réalisé un schéma de la distribution de charges et du point M où on cherche V, on écrit l'expression du potentiel élémentaire $\mathrm{d}V$ créé au point M par une charge élémentaire $\mathrm{d}q$ placée en un point P quelconque de la distribution et considérée comme suffisamment petite pour être assimilée à une charge ponctuelle.

Il convient ici de choisir l'origine des potentiels (en général à l'infini quand il n'y a pas de charges à l'infini).

$$\mathrm{d}V(M) = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 PM} + \text{constante}$$

Selon le type de distribution de charges étudiée, on aura un des trois cas suivants:

$$\mathrm{d}q = \lambda(P) \cdot \mathrm{d}l \text{ (répartition de charge linéique)}$$

$$\mathrm{d}q = \sigma(P) \cdot \mathrm{d}S \text{ (répartition de charge surfacique)}$$

$$\mathrm{d}q = \mu(P) \cdot \mathrm{d}r \text{ (répartition de charge volumique)}$$

À partir de l'expression du potentiel élémentaire $\mathrm{d}V$, on choisit des variables d'intégration (une si la distribution est linéique, deux si la distribution est surfacique et trois si la distribution est volumique).

On détermine les expressions de $\mathrm{d}l$, $\mathrm{d}S$, ou $\mathrm{d}\tau$, et de la distance PM, en fonction de ces variables.

En utilisant le principe de superposition, on somme alors les contributions élémentaires $\mathrm{d}V$ issues de ces charges élémentaires $\mathrm{d}q$ par une intégrale (simple, double ou triple selon que la distribution de charges est linéique, superficielle ou volumique) sur la distribution chargée, en faisant attention au domaine d'intégration (voir l'exercice 16.4).

16.5.4 Calcul du potentiel créé par une distribution continue de charges à partir du champ

Soit une distribution de charges pour laquelle on connaît déjà l'expression du champ électrostatique qu'elle crée en un point M d'une certaine région de l'espace. On choisira

alors un système de coordonnées adapté à la géométrie de la distribution de charge et à l'expression de $\vec{E}(M)$.

Il faudra ensuite exprimer le vecteur « déplacement élémentaire » $\vec{\mathrm{d}l}(M)$ dans ce système de coordonnées afin de pouvoir calculer le produit scalaire $\vec{E}(M) \cdot \vec{\mathrm{d}l}(M)$.

On intègre alors l'expression de dV, sans oublier de préciser l'origine choisie (voir l'exercice 16.6).

16.6 Calcul d'un champ électrostatique à partir du potentiel

Si l'on connaît le potentiel électrostatique $V(M)$ créé dans une certaine région de l'espace par une distribution continue de charge, on peut en déduire le champ électrostatique correspondant.

En effet, le potentiel et le champ électrostatiques créés en un point M par une distribution de charges vérifient la relation : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V(M))$

Il convient alors de choisir un système de coordonnées en cohérence avec les variables qui interviennent dans l'expression de $V(M)$ et de calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V(M))$ dans ce système de coordonnées (voir l'exercice 16.5).

16.7 Énergie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle électrostatique $E_\mathrm{p}(M)$ d'une particule chargée q' placée en un point M où le potentiel électrostatique est $V(M)$ s'écrit : $E_\mathrm{p}(M) = q' \cdot V(M)$.

Dans le système international, on mesure l'énergie potentielle électrostatique, comme toute énergie, en joules.

Dans le domaine atomique et subatomique cependant, une autre unité est souvent utilisée, l'électron-volt (eV) : 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

On utilise aussi des multiples de cette unité : 1 keV = 10^3 eV, 1 MeV = 10^6 eV, 1 GeV = 10^9 eV, 1 TeV = 10^{12} eV...

À titre d'exemple, les faisceaux de particules (des hadrons, entre autres des protons) produits au LHC (Large Hadron Collider) du CERN, près de Genève, ont une énergie de l'ordre de 7 TeV.

Voir chapitre introduction

16.8 Théorème de Gauss

16.8.1 Flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au flux du champ électrostatique mais le calcul du flux est très général en physique et peut être défini pour tout champ vectoriel.

Il faut pour cela définir le vecteur-surface et nous nous limitons ici au cas d'une surface fermée, c'est-à-dire d'une surface délimitant un certain volume ; une sphère, un

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

cylindre fermé sont des surfaces fermées alors qu'un disque par exemple est une surface ouverte.

Pour une surface fermée, le vecteur normal en un point M de la surface est un vecteur :
– unitaire ;
– normal à la surface au point M ;
– orienté de l'intérieur vers l'extérieur.

Pour une surface infinitésimale dS autour du point M, on définit le vecteur surface infinitésimal : $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$.

Le flux du champ électrostatique à travers une surface infinitésimale s'écrit alors, par définition : $\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Le flux de ce champ à travers une surface S fermée est : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

16.8.2 Flux à travers une sphère du champ créé par une charge ponctuelle placée en son centre

On considère une sphère de centre O, de rayon R ; une particule chargée portant une charge q est placée au point O.

D'après ce que nous avons vu au § 16.2.2, le champ électrostatique créé par cette charge q en tout point M situé à une distance $r = OM$ du centre peut s'écrire :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Prenons un point M à la surface de la sphère et une surface élémentaire dS autour du point M. Le flux élémentaire du champ électrostatique à travers cette surface dS s'écrit :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

soit $\mathrm{d}\Phi = E(M) \cdot \mathrm{d}S$ (ici, $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

Le champ électrostatique ne dépendant que de r, son intensité est la même en tout point M de la surface de la sphère (ensemble des points caractérisé par r = R) et le flux à travers l'ensemble de la sphère vaut :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \oiint_S E.\mathrm{d}S = E(R).\oiint_S \mathrm{d}S = E(R) \cdot 4\pi \cdot R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

16.8.3 Théorème de Gauss

On admettra que l'on peut généraliser ce résultat :

- lorsque l'on s'intéresse au champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles ou par une distribution continue de charges

- lorsque l'on calcule le flux de ce champ électrique à travers une surface fermée quelconque.

Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique créé par une distribution de charges à travers une surface fermée quelconque est proportionnel à la charge totale contenue dans le volume délimité par cette surface fermée.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Remarques

- Il est remarquable de noter ici qu'il s'agit du champ électrostatique total créé par la distribution de charge à laquelle on s'intéresse alors même que, le plus souvent, le calcul du flux s'effectue à travers une surface fermée différente de celle constituée par la distribution de charges : les charges intérieures qui interviennent donc dans le membre de droite de l'égalité précédente ne sont donc pas, le plus souvent, l'ensemble des charges responsables du champ.
- On peut démontrer ce théorème en introduisant la notion d'angle solide dans l'espace ; à partir du résultat obtenu au § 16.8.2, on peut alors exprimer le flux du champ créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée quelconque, en distinguant deux cas, selon que la charge responsable du champ se trouve à l'intérieur ou non de la surface fermée S à travers laquelle on calcule le flux.
- Même lorsque la distribution de charges est considérée comme infinie (par exemple un cylindre chargé dont le rayon est négligeable devant sa hauteur), la surface à travers laquelle on calcule le flux, souvent appelée « surface de Gauss », doit être une surface fermée (dans cet exemple, on prendra un cylindre de rayon ρ et de hauteur h finie : h est arbitraire et n'apparaît pas dans le résultat final ; en effet, elle n'a pas de signification physique par rapport à la distribution de charges).

16.9 Calcul d'un champ électrostatique par application du théorème de Gauss

16.9.1 Méthode

La première chose à faire est sans aucun doute un schéma de la distribution de charges et du point M où l'on cherche $\vec{E}$. Il faut ensuite, par des considérations géométriques sur la distribution de charges (voir le paragraphe suivant), déterminer les lignes de champ (pour connaître la direction du champ) et les coordonnées du point M qui interviendront ou non dans la norme du champ $\vec{E}$.

Une fois les lignes de champ connues, on peut en déduire les surfaces équipotentielles (qui sont normales aux lignes de champ) et ainsi choisir la « surface de Gauss » : surface fermée S comportant l'équipotentielle passant par le point M. On peut alors calculer le flux de $\vec{E}$ à travers S, en fonction de E et de données géométriques.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En calculant la charge intérieure à S et en utilisant le théorème de Gauss, on peut alors en déduire une expression vectorielle de $\vec{E}$ (voir les exercices 16.7 et 16.8).

16.9.2 Propriétés de symétries et d'invariance du champ électrique

Si la distribution de charges est invariante par translation parallèlement à Oz, alors le champ et le potentiel électriques créés au point M par cette distribution sont indépendants de l'abscisse z de M et les lignes de champ sont perpendiculaires à l'axe Oz.

Si la distribution de charges est invariante par rotation d'un angle θ autour d'un axe Oz, alors le champ et le potentiel électriques créés au point M par cette distribution sont indépendants de θ et les lignes de champ sont perpendiculaires au vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$.

Si la distribution de charges est symétrique par rapport à un plan (Π) contenant le point M, le champ électrique en M est contenu dans le plan (Π).

16.10 Discontinuité de la composante normale du champ électrique à la traversée d'une surface chargée

Soit une surface chargée avec une densité superficielle de charge σ, séparant deux régions de l'espace appelées 1 et 2.

On peut montrer, en utilisant comme surface de Gauss un cylindre de hauteur négligeable dont les bases sont situées de part et d'autre de la surface chargée, que :

$$\vec{E_2} \cdot \vec{n} - \vec{E_1} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire, normal à la surface, orienté de 1 vers 2.

Voir chapitre 18

Ce résultat est remarquable car il concerne toute surface chargée, quelle que soit sa forme, et peut aussi être retrouvé en utilisant les équations de Maxwell qui sont les quatre équations fondamentales de l'électromagnétisme.

16.11 Analogie électrostatique – Gravitation

Voir en particulier le chapitre 2

À l'issue de ce chapitre et des premiers de cet ouvrage, le lecteur pourra aisément repérer l'analogie entre la force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles (dite loi de « Coulomb », fin XVIII^{e} siècle) et la force de gravitation universelle entre deux particules de masse m et m' (dite « loi de Newton », fin XVII^{e} siècle). Deux remarques essentielles s'imposent :

- ces deux forces ont pour direction la droite qui relie les positions des deux particules ; leurs intensités sont également toutes les deux inversement proportionnelles au carré de la distance entre les deux particules ;

- cependant, une distinction importante est à retenir : alors que la force d'interaction électrostatique peut être attractive ou répulsive, selon les signes des deux charges, la force d'interaction gravitationnelle est, elle, toujours attractive.

Électrostatique	Gravitation
charge q	masse m
densité volumique de charge μ	masse volumique
force $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot qq' \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$	force $\vec{F} = -\mathrm{G} \cdot mm' \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$
champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$	champ $\vec{G} = -\mathrm{G} \cdot m \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$
constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	constante – G

À retenir

Les particules chargées électriquement, positives et négatives, sont présentes dans tous les objets ; elles interagissent ensemble (loi de Coulomb), de manière attractive ou répulsive selon leur signe.

On peut décrire une distribution continue de charges par une densité de charge : volumique $\mu(M)$, superficielle ou surfacique $\sigma(M)$, ou linéique $\lambda(M)$, selon le cas.

Les caractéristiques électriques de l'espace autour d'une charge ponctuelle ou d'un ensemble de charges peuvent être décrites par un champ vectoriel électrostatique et un potentiel électrostatique (pour des charges supposées immobiles).

La charge élémentaire, correspondant à la charge électrique d'un proton, est approximativement de $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles :

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

Champ électrostatique créé au point *M* par une charge ponctuelle *q* placée en *O* :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$$

où $r = \|\vec{r}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et $\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé de O vers M.

Potentiel électrostatique créé au point *M* par une charge ponctuelle *q* placée en *O* :

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{constante}$$

Relation entre le champ et le potentiel électrostatiques :

$$\mathrm{d}V = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \quad \text{ou} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

Théorème de Gauss : il faut impérativement utiliser une surface fermée pour calculer le flux afin de pouvoir déterminer les charges contenues dans le volume délimité par cette surface fermée ; de plus, il faut que la distribution de charges comporte suffisamment de propriétés de symétrie et d'invariance si l'on veut déterminer le champ électrique créé par cette distribution de charges à l'aide de ce théorème ; lorsque cela est possible, le calcul est alors beaucoup plus rapide et plus simple que par un calcul « direct » à partir de charges élémentaires.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Les solutions sont regroupées p. 612.

16.1 Force électrostatique et force de gravitation

Comparer les forces électrostatique et gravitationnelle s'exerçant entre un électron et un proton, considérés comme ponctuels, et espacés du rayon de Bohr $a_0 \approx 53$ pm.

Comment le rapport des deux forces dépend-il de la distance ?

16.2 Champ électrostatique au centre d'un demi-cercle uniformément chargé

La charge électrique Q est uniformément répartie sur un demi-cercle de centre C et rayon R.

Déterminer l'expression du champ électrostatique créé en C par cette distribution.

16.3 Champ créé sur ses axes de symétrie par un segment chargé

Un segment FF', de longueur $2D$, porte la charge linéique uniforme λ.

L'origine O étant prise au milieu de FF', on prendra l'axe des x selon FF' et l'axe des y perpendiculaire à Ox. On considère le point A sur Ox et le point B sur Oy tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, avec $a >$ D. Déterminer :

a) le champ produit au point A par le segment chargé.

b) le champ produit au point B par le segment chargé.

16.4 Potentiel au centre d'un disque chargé uniformément ou pas

Un disque, de centre O et de rayon R, porte la charge surfacique σ.

a) Calculer le potentiel électrique V en O, lorsque la distribution est uniforme : $\sigma = \sigma_0$.

La charge surfacique σ est maintenant donnée par : $\sigma(\rho) = A/(R^2 - \rho^2)^{1/2}$ où A est une constante et ρ la distance à O.

b) Calculer le potentiel électrique V en O, et l'exprimer en fonction de R et de $\sigma_C = \sigma(O)$.

Aide : pour le calcul de l'intégrale, on pourra faire un changement de variable, en introduisant α défini par $\sin \alpha = \rho/R$.

c) Exprimer la charge Q du disque en fonction de V et de R

16.5 Calcul du champ produit par un quadrupôle axial à partir du potentiel

Un quadrupole axial comporte trois charges ponctuelles q, $-2q$ et q, placées respectivement aux points (0, 0, – d), (0, 0, 0) et (0, 0, d).

On admet que le potentiel qu'il produit en un point M éloigné est, en coordonnées sphériques, $V(r, \theta, \phi) = \dfrac{\left(3\cos^2\theta - 1\right) \cdot qd^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$.

Chercher l'expression du champ électrostatique correspondant.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

16.6 Calcul, à partir du champ électrostatique, du potentiel créé sur son axe, par un cercle chargé

a) Rappeler l'expression du champ électrostatique sur l'axe d'un cercle uniformément chargé.

b) Déterminer l'expression des potentiels électrostatiques qui peuvent être déduits de ce champ. En quels points ce résultat est-il valable ?

16.7 Détermination, par le théorème de Gauss, du champ produit par une distribution de charges (cylindre et droite)

Une droite portant la densité linéique de charge $\lambda \approx -3\ \mu C \cdot m^{-1}$ est disposée suivant l'axe d'un cylindre « infini » de rayon $R \approx 20$ cm et portant la densité surfacique de charge $\sigma = 1{,}5/(4\pi)\ \mu C \cdot m^{-2}$.

Calculer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point de l'espace vide.

Que se passe-t-il à la traversée de la surface du cylindre ?

16.8 Détermination, par le théorème de Gauss, du champ produit par une boule chargée avec symétrie sphérique

À l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon R, une charge Q est supposée dispersée en volume, avec en chaque point M une densité $\mu(r)$ proportionnelle à la distance $r = OM$.

a) Donner une expression de $\mu(r)$, en fonction de Q, r et R.

b) À l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

MAGNÉTOSTATIQUE

17

PRÉALABLES

- Vecteurs et calculs vectoriels
- Intégrales simples, doubles et triples
- Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques
- Produit vectoriel
- Circulation d'un champ vectoriel

MOTS CLÉS

- Champ magnétique
- Loi de Biot et Savart
- Théorème d'Ampère
- Force de Lorentz, force de Laplace
- Effet Hall

OBJECTIFS

- Connaître et savoir utiliser la loi de Biot et Savart et le théorème d'Ampère
- Déterminer le champ magnétique créé par un circuit filiforme de géométrie simple
- Savoir utiliser les propriétés de symétrie et d'invariance d'un circuit filiforme pour déterminer la direction du champ magnétique créé par ce circuit parcouru par un courant
- Connaître quelques effets mécaniques d'un champ magnétique : force de Lorentz, force de Laplace, effet Hall

Dans tout ce chapitre, nous allons nous intéresser au cas de champs magnétiques créés par des circuits filiformes, de géométrie simple, fixes, et parcourus par des courants permanents (charges électriques en mouvement mais l'intensité du courant électrique ne dépend pas du temps) ; les champs ainsi créés ne dépendent pas du temps et on qualifie généralement ce domaine de la physique de magnétostatique (par analogie avec l'électrostatique qui s'intéresse aux champs électriques, dits électrostatiques, créés par des charges ponctuelles supposées immobiles) ; cependant, par simplification de langage, on n'emploie que très peu le terme de champ magnétostatique au profit de celui de champ magnétique, ce que nous ferons également ici.

17.1 FORCE DE LORENTZ

17.1.1 Définition du champ magnétique

Le champ magnétique est défini à partir de son action sur une particule chargée, de charge q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel.

Force de Lorentz

Une particule, de charge q, *se déplaçant à la vitesse* $\vec{v}$ *dans un référentiel où règne un champ magnétique* $\vec{B}$, *est soumise à la force* $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$.

Remarques

- Si la vitesse $\vec{v}$ a la même direction que le champ magnétique, la particule ne subit pas de force.
- Dans les autres cas de figures, la force subie par la particule est perpendiculaire à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$.
- L'intensité de la force est proportionnelle à la charge q, à la norme v de sa vitesse et à l'intensité B du champ magnétique et au sinus de l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{B}$.
- L'unité compatible avec le système international pour mesurer l'intensité des champs magnétiques est le tesla (T). On utilise cependant couramment un sous-multiple, le gauss (G) : 1 G = 10^{-4} T. Pour avoir quelques ordres de grandeur, la composante horizontale du champ magnétique terrestre en France est de l'ordre de 0,2 G, le champ dans l'entrefer d'un électroaimant de 0,1 à 2 T, le champ dans une bobine supraconductrice de 5 à 50 T.

17.1.2 Travail de la force de Lorentz

Le travail infinitésimal d'une force $\vec{F}$ pendant un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}$ s'écrit :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

La force de Lorentz étant par définition, à tout instant t, perpendiculaire à la vitesse $\vec{v}$ de la particule (propriété du produit vectoriel), elle est aussi perpendiculaire, à tout instant t, au vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{v} \cdot \mathrm{d}t$, ce qui entraîne $\delta W = 0$ quel que soit le déplacement élémentaire.

La force de Lorentz ne travaille pas et ne peut donc pas être utilisée seule pour accélérer une particule chargée (pas de variation d'énergie cinétique).

17.1.3 Trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique

a) Trajectoire circulaire

La trajectoire sera plane et circulaire si la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique (voir l'exercice 17.1).

Le sens de la trajectoire dépend du signe de la charge (figure 17.1).

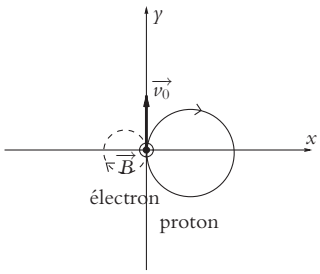


Figure 17.1 **Trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétique**

b) Trajectoire hélicoïdale

Dans le cas général, au mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire au champ $\vec{B}$, se superpose un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèlement à la direction du champ magnétique ; la trajectoire est alors hélicoïdale.

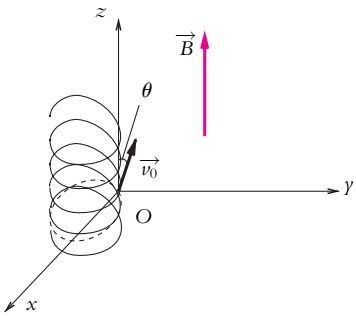


Figure 17.2 **Trajectoire hélicoïdale d'une particule chargée dans un champ magnétique**

17.2 CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN CIRCUIT FILIFORME PARCOURU PAR UN COURANT

17.2.1 Loi de Biot et Savart

Loi de Biot et Savart

Soit C un circuit filiforme fermé parcouru par un courant d'intensité I. Le champ magnétique créé par C au point M est :

$\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \dfrac{I \cdot \vec{\mathrm{d}l}(P) \wedge \vec{u}}{r^2}$ *où* $\vec{\mathrm{d}l}(P)$ *est un vecteur tangent à C en un point P quelconque du circuit, orienté dans le sens du courant,* $r = \left\| \overrightarrow{PM} \right\|$ *et* $\vec{u}$ *est un vecteur unitaire selon la direction PM, orienté de P vers M.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarques

Il est primordial pour la suite du cours de retenir cette formule en sachant précisément comment est défini chacun de ses termes (en particulier le vecteur unitaire $\vec{u}$).

La constante μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ; c'est une constante physique qui n'est pas sans dimension ; numériquement, on retiendra que $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ en unités S.I. La formule précédente est donc valable lorsque l'on est dans le vide ou dans l'air assimilable au vide. Dans un autre milieu, il faut introduire la perméabilité absolue μ du milieu ou la perméabilité relative du milieu par rapport au vide μ_r : $\mu = \mu_0\ \mu_r$.

Il y a une analogie formelle entre la loi de Coulomb et la loi de Biot et Savart, ainsi que dans la méthode qui en découle (intégration à partir d'un petit élément de la distribution de charge ou du circuit) ; il faut tout de même noter qu'ici, isoler un élément de longueur dl du circuit signifie isoler par la pensée un élément de longueur dl afin de poser le calcul car en pratique, il n'est pas possible d'avoir un courant créé à partir de rien et s'annulant un peu plus loin sans faire partie d'un circuit électrique complet (c'est la circulation du courant dans un circuit fermé qui crée un champ magnétique).

17.2.2 Application à des calculs de champs magnétiques

On pourra se référer aux exercices 17.3 à 17.6.

Il est souvent très utile de commencer par réaliser un schéma du circuit filiforme et du point M où l'on cherche $\vec{B}$, afin de bien repérer la géométrie du dispositif. En utilisant la loi de Biot et Savart, on peut exprimer (et représenter sur le schéma) la contribution au champ magnétique $\mathrm{d}\overrightarrow{B_P}(M)$ d'un élément de longueur dl du circuit situé autour d'un point P quelconque (attention à bien prendre ce point P quelconque afin de ne pas introduire sur le schéma des propriétés particulières qui ne seraient pas vraies en tout point du circuit).

Toutes les considérations de symétries permettant éventuellement de connaître la direction du champ total $\vec{B}$ doivent être étudiées afin, le cas échéant, de simplifier le calcul. On peut alors faire le choix d'un ou des axes et projeter $\mathrm{d}\overrightarrow{B}$ sur ces axes.

En analysant les différentes considérations géométriques et les grandeurs qui interviennent dans l'expression de $\mathrm{d}\overrightarrow{B}$, on peut choisir la variable d'intégration et exprimer les angles de projection, l'élément différentiel dl et la distance PM en fonction de cette variable, puis faire l'intégration sur chaque axe, en faisant attention au domaine d'intégration. Enfin, on peut vérifier la cohérence du résultat (homogénéité, conformité avec des résultats connus, respect de la géométrie...).

On peut ainsi déterminer le champ magnétique créé par un fil rectiligne « infini » parcouru par un courant continu d'intensité I ; en réalité, on calcule le champ magnétique en un point M situé à une distance ρ du fil, champ créé par une portion de fil de longueur L telle que $\rho \ll L$: depuis le point M, le fil peut être vu comme étant de longueur « infinie ». La distribution de courant étant alors invariante par translation le long de l'axe (Oz) du fil et par rotation d'angle φ autour de cet axe, le champ $\vec{B}(M)$ est indépendant de z et de φ et ne dépend que de ρ.

À partir de la loi de Biot et Savart, on obtient le champ magnétique en M :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{\rho}\vec{u_\phi}$$

où $\vec{u_\phi}$ est le vecteur unitaire associé aux coordonnées cylindriques

17.3 Propriétés du champ magnétique

17.3.1 Flux du champ magnétique

On admettra ici le résultat suivant :

Flux conservatif

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul :

$$\oiint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

17.3.2 Circulation du champ magnétique (Théorème d'Ampère)

De même qu'en électrostatique, le théorème de Gauss permet de relier le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée à la somme des charges intérieures à cette surface, le théorème d'Ampère permet de relier la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé à l'intensité totale des courants électriques qui traversent une surface quelconque s'appuyant sur ce contour :

Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée et orientée Γ *est égale au produit de* μ_0 *par l'intensité électrique totale qui traverse une surface* S *s'appuyant sur le contour fermé* Γ.

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{l}(M) = \mu_0 \sum I$$

L'intensité I *est comptée positivement si elle est dans le sens d'orientation de la normale à* S *(l'orientation de cette normale se déduisant de l'orientation du contour* Γ*).*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

ORIENTATION D'UNE SURFACE

Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la définition de l'orientation de la normale à une surface ; dans la pratique, l'orientation de la normale à une surface S s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$ se déduit de l'orientation de ce contour par des méthodes résumées sur la figure 17.3.

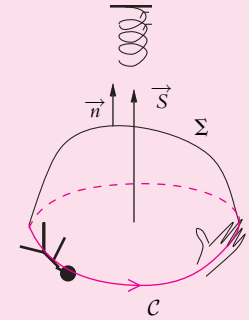


Figure 17.3 **Orientation d'une surface S s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$ à partir de l'orientation du contour**

Règles équivalentes entre-elles

– *Règle dite du tire-bouchon* : un tire-bouchon dont on fait tourner le manche dans le sens positif du contour se déplace dans le sens du vecteur normal.

– *Règle dite du « bonhomme d'Ampère »* : un bonhomme qui se couche sur la courbe en la regardant, avec le sens positif du contour des pieds vers la tête, a le bras gauche tendu dans le sens du vecteur normal.

– *Autre méthode* : en plaçant sa main droite le long du contour, les doigts orientés dans le sens positif du contour, le pouce donne le sens du vecteur normal.

Plus simplement, pour les cas de contours simples, on peut retenir le schéma de la figure 17.4 : le contour, placé horizontalement, et étant orienté dans le sens trigonométrique direct, le vecteur normal à la surface pointe vers le haut.

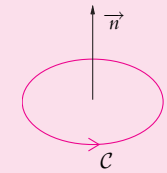


Figure 17.4 **Orientation d'une surface simple**

ORIENTATION DU CONTOUR ET SIGNE DES COURANTS POUR L'UTILISATION DU THÉORÈME D'AMPÈRE

L'intensité d'un courant traversant une surface S s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$ est comptée positivement lors de l'application du théorème d'Ampère si elle circule suivant l'orientation de la normale (comme définie précédemment) à la surface S.

Sur l'exemple de la figure 17.5, l'intensité algébrique totale vaut :

$$I = i_1 + i_2 - i_3 + i_4 - i_4 = i_1 + i_2 - i_3$$

Voir également l'exercice 17.7.

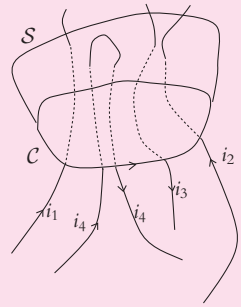


Figure 17.5 **Signe de l'intensité d'un courant dans l'utilisation du théorème d'Ampère**

Remarques

• Pour appliquer le théorème d'Ampère, il faut déterminer par des propriétés de symétries ou d'antisymétries la direction du champ $\vec{B}$ (voir le § 17.3.3), ainsi que les variables dont il dépend grâce à l'étude des invariances de la distribution de courants (voir également le § 17.3.3) : cela permet de choisir le contour d'Ampère sur lequel on calcule la circulation du champ $\vec{B}$.

A contrario, il n'est pas strictement nécessaire de connaître le sens du champ magnétique : on peut le prendre *a priori* orienté dans le sens de parcours du contour et si, en réalité, il est de sens opposé, on trouvera une composante négative de $\vec{B}$ selon le vecteur tangent au contour (d'où l'importance des signes pour les intensités des courants dans le membre de droite du théorème d'Ampère).

• Dans la loi de Biot et Savart comme dans le théorème d'Ampère, intervient une intégrale curviligne avec un élément différentiel $\mathrm{d}\vec{l}$. Cependant, il ne s'agit pas de la même intégrale curviligne et *l'élément différentiel* $\mathrm{d}\vec{l}$ *ne représente donc pas la même chose* :

– dans la loi de Biot et Savart, on intègre une expression élémentaire du champ magnétique sur l'ensemble de la distribution de courant et le vecteur $\mathrm{d}\vec{l}$ représente un élément de longueur élémentaire du circuit, orienté dans le sens du courant ; il est donc choisi le long de la distribution de courants.

– au contraire, dans le théorème d'Ampère, l'intégration se fait sur un contour fermé Γ choisi généralement le long d'une ligne de champ mais qui n'est en aucun cas confondu avec la distribution de courants : le vecteur $\mathrm{d}\vec{l}$ représente un déplacement élémentaire le long de ce contour fermé Γ et n'est donc pas tangent à la distribution de courants.

17.3.3 Symétries, antisymétries, invariances

Si le circuit est invariant par translation parallèlement à Oz, alors le champ magnétique créé au point M est indépendant de l'abscisse z de M.

Si le circuit est invariant par rotation d'un angle θ autour d'un axe Oz, alors le champ magnétique créé au point M est indépendant de θ.

Si le circuit est symétrique par rapport à un plan (Π) contenant le point M, le champ magnétique en M est perpendiculaire au plan (Π).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Si le circuit présente un plan d'antisymétrie (Π') contenant le point M, le champ magnétique créé en M est contenu dans le plan (Π').

17.3.4 Calcul de champ magnétique en utilisant le théorème d'Ampère

On peut résumer ainsi la méthode à employer (voir les exercices 17.8 et 17.9) :

- schéma du circuit et du point M où on cherche $\vec{B}$;
- détermination des lignes de champ par des considérations géométriques sur le circuit ;
- choix du contour fermé Γ comportant une portion de ligne de champ passant par le point M ;
- calcul de la circulation de $\vec{B}$ le long de Γ, en fonction de B (encore inconnue) et de données géométriques ;
- calcul des courants qui traversent une surface S s'appuyant sur Γ ;
- écriture du théorème d'Ampère, expression littérale de B qui s'en déduit, puis de $\vec{B}$.

CHAMP MAGNÉTIQUE CRÉÉ PAR UN SOLÉNOÏDE « INFINI »

L'utilisation du théorème d'Ampère est particulièrement utile lorsque le calcul par la loi de Biot et Savart s'avère long et difficile, comme par exemple pour déterminer le champ magnétique créé par un solénoïde considéré comme infini (sa longueur étant très grande devant son rayon). Si le solénoïde est constitué de n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant permanent d'intensité I, on peut ainsi montrer que :
– le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde ;
– le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde ;
– sa direction est celle de l'axe du solénoïde et son sens dépend du sens du courant dans les spires du solénoïde ;
– son intensité à l'intérieur du solénoïde vaut :

$$B = \mu_0 nI$$

17.4 Force de Laplace sur un conducteur parcouru par un courant

17.4.1 Vecteur densité de courant et intensité d'un courant

Soit un conducteur comportant des charges libres identiques, de charge q, et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$. Le vecteur densité de courant est : $\vec{j} = nq \cdot \vec{v}$ où n est le nombre de charges libres par unité de volume.

Soit μ_m la densité volumique de charges mobiles (en $C \cdot m^{-3}$) : $\mu_m = nq$.

Le vecteur densité de courant peut alors s'écrire : $\vec{j} = \mu_m \cdot \vec{v}$; j s'exprime en $A \cdot m^{-2}$.

Soit dQ la charge traversant une section S du conducteur parcouru par le courant d'intensité I pendant le temps dt.

Par définition $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ (en A : 1 A = 1 C · s^{-1}) et $I = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

17.4.2 Caractéristiques de la force de Laplace

Nous avons vu au début de ce chapitre (§ 17.1) qu'une particule chargée, de charge q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel où règne un champ magnétique $\vec{B}$, est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Un élément de circuit de longueur dL parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, contient des charges mobiles de densité volumique μ_m.

Un volume élémentaire dτ autour d'un point M du conducteur contient une charge : $\mathrm{d}q = \mu_m.\mathrm{d}\tau$ avec $\mathrm{d}\tau = S \cdot \mathrm{d}L$ où S est la section du conducteur et dL un élément de longueur de ce conducteur.

Chacune de ces charges élémentaires dq subit une force :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = \mu_m \cdot \mathrm{d}\tau \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}\tau \cdot \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} \cdot S \cdot \mathrm{d}L \wedge \vec{B} = I \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}L} \wedge \vec{B}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$ est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant.

La force subie par un élément de circuit de longueur dL parcouru par un courant permanent d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, appelée force de Laplace, s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = I \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}L} \wedge \vec{B}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}L}$ est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant.

17.4.3 Translation d'un conducteur dans un champ magnétique

a) Expérience des rails de Laplace (voir exercice 17.10)

On considère un circuit AB constitué de deux tiges rigides conductrices (« rails ») et d'une tige conductrice mobile pouvant glisser sur ces deux « rails ».



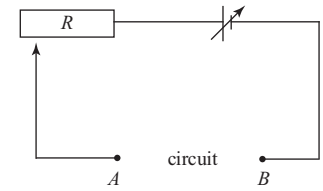
Ce circuit est placé dans l'entrefer d'un aimant en U et alimenté par un courant continu.

L'aimant en U est placé verticalement, et crée un champ magnétique vertical ; la tige mobile est horizontale.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À partir d'une certaine valeur de l'intensité du courant dans le circuit, la tige mobile se met à glisser sur les deux rails sous l'effet de la force de Laplace.

On peut observer que le sens de la force de Laplace dépend du sens du champ magnétique (en retournant l'aimant) et du sens du courant dans le circuit.



b) Exemple d'application : pompe électromagnétique

La force de Laplace agit sur un liquide conducteur parcouru par un courant, et provoque le déplacement du liquide dans le tuyau (vers la droite sur la figure 17.6) ; lorsqu'il s'agit d'un liquide très corrosif, ceci évite l'usure des pièces dans une pompe mécanique (par exemple pour le transport du sodium liquide dans les surrégénérateurs).

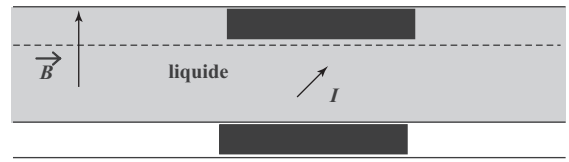


Figure 17.6 **Principe de fonctionnement d'une pompe magnétique**

17.4.4 Forces entre conducteurs parcourus par un courant

La force F qui s'exerce entre deux conducteurs rectilignes, parallèles, de même longueur L, séparés d'une distance D et parcourus respectivement par des courants électriques d'intensité I et I' peut s'écrire :

$$F = \mu_0 \cdot \frac{L \cdot I \cdot I'}{2\pi \cdot D}$$

Selon les sens respectifs des courants, les conducteurs s'attirent ou se repoussent (voir la figure 17.7).

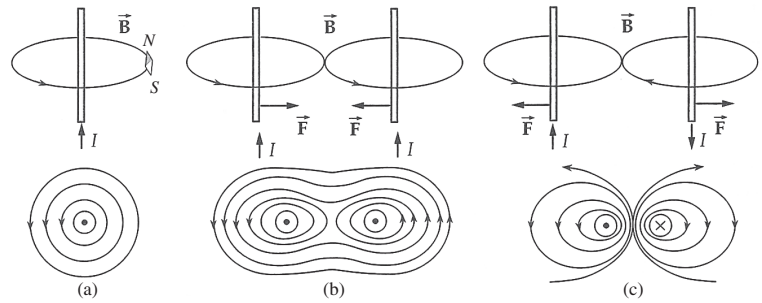
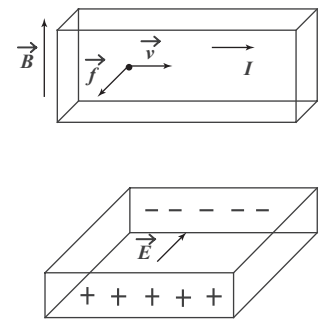


Figure 17.7 **Forces et lignes de champs magnétiques pour des conducteurs rectilignes parcourus par un courant**

DÉFINITION LÉGALE DE L'AMPÈRE

1 ampère est l'intensité du courant circulant dans deux fils rectilignes « infinis » parallèles, distants de 1 m, créant une force d'interaction de $2 \cdot 10^{-7}$ N sur une longueur de fil de 1 m.

17.5 Effet Hall



Soit un conducteur rectiligne de section droite rectangulaire parcouru par un courant d'intensité I, placé dans un champ magnétique uniforme.

Considérons une charge mobile q.

Comme elle est en mouvement (dans le sens de I si $q > 0$), elle est soumise à la force magnétique de Lorentz : des charges positives s'accumulent sur un bord du conducteur, et il apparaît un défaut de charges positives (donc des charges négatives) sur l'autre bord. Cette accumulation de charges crée un champ électrostatique.

La force électrostatique $\vec{f}' = q \cdot \vec{E}$ s'oppose à la force magnétique précédente $\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$.

En régime permanent, ces deux forces se compensent : une charge mobile n'est plus déviée.

Dans ces conditions, le champ électrostatique est appelé champ de Hall :

$$\vec{E}_{\mathrm{H}} = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\mu_{\mathrm{m}}}$$

où μ_{m} est la densité volumique de charges mobiles. Ce champ est uniforme à l'intérieur du conducteur.

Soient A et C deux points en regard sur les bords du conducteur. La différence de potentiel électrostatique entre les deux points A et C est donnée par la circulation du champ de Hall entre ces deux points :

$$V_A - V_C = \int_A^C \vec{E}_{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{jB}{\mu_{\mathrm{m}}} a = \frac{IB}{\mu_{\mathrm{m}} b} = \mathrm{R_H} \frac{IB}{b}$$

où a désigne la largeur du conducteur (perpendiculairement à I et au champ magnétique), b la hauteur du conducteur (dans la direction du champ magnétique) et $\mathrm{R_H}$ est appelée la constante de Hall.

Ce phénomène est utilisé par exemple dans les sondes à effet Hall qui permettent de mesurer un champ magnétique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

17.6 Comparaison des champs électrostatique et magnétique

On peut établir certaines analogies entre une distribution de charges électriques, immobiles ou se déplaçant très lentement, sources d'un champ électrostatique, et un circuit filiforme fixe parcouru par un courant permanent qui créé un champ magnétique (tableau 17.1).

Tableau 17.1 Comparaison champ électrostatique – champ magnétique

Champ électrique $\vec{E}$	Champ magnétique $\vec{B}$
Sources du champ : charges électriques. Densité volumique de charge $\mu(M)$.	Sources du champ : courants électriques. Densité volumique de courant $\vec{j} = \mu \cdot \vec{v}$.
Le champ $\vec{E}(M)$ appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge passant par *M*.	Le champ $\vec{B}(M)$est perpendiculaire à un plan de symétrie de la distribution de courant passant par *M*.
Le champ $\vec{E}(M)$ est perpendiculaire à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge passant par *M*.	Le champ $\vec{B}(M)$ appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant passant par *M*.
Force électrique : $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.	Force magnétique : $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$.
La force électrique peut accélérer et dévier une particule chargée.	La force magnétique peut dévier une particule chargée.
Théorème de Gauss $\iint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}$	*Théorème d'Ampère* $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum I_{\text{embrassées par le contour}}$
Circulation conservative $\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$	*Flux conservatif* $\iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$

Cependant, deux différences importantes sont à relever :

- Alors que les lignes de champ électrostatique autour d'une charge ponctuelle sont radiales, (convergentes si la charge est négative, divergentes si la charge est positive), les lignes de champ magnétique sont des courbes fermées qui « s'enroulent » autour des sources qui créent le champ (il n'y a pas de « monopôle » magnétique qui serait l'équivalent d'une charge électrique ponctuelle). Ceci est illustré sur la figure 17.8.
- La direction des champs électrostatique et magnétique par rapport aux plans de symétrie et d'antisymétrie0 de leurs sources (distribution de charges ou courants) n'est pas la même : ceci est dû au fait que le champ magnétique est défini par un produit vectoriel (une base directe est transformée en une base indirecte par symétrie par rapport à un plan). La figure 17.9 permet d'illustrer ce point.

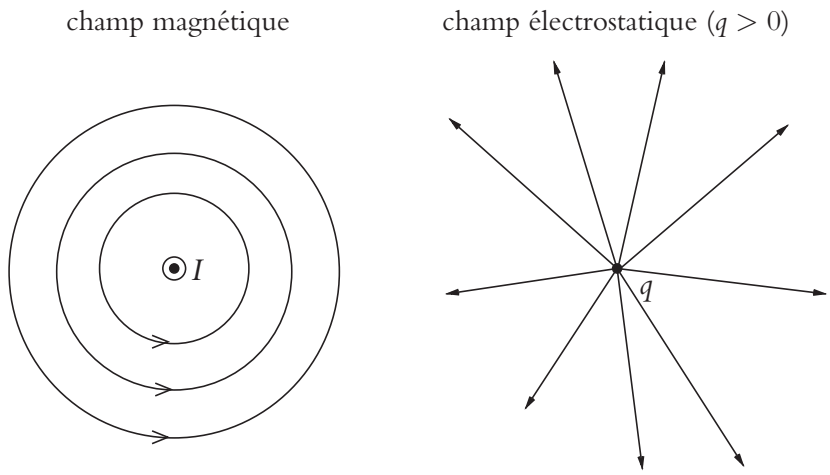


Figure 17.8 **Allures des lignes de champ au voisinage de la source**

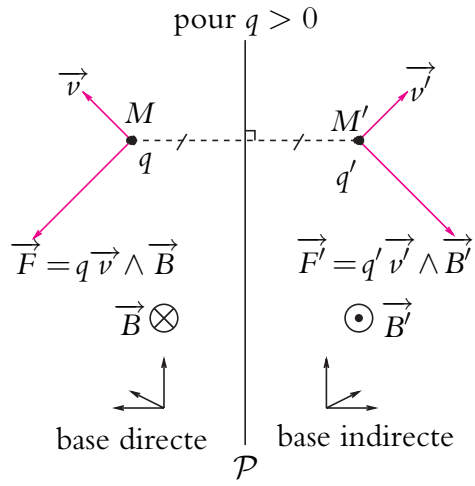


Figure 17.9 **Allures des lignes de champ au voisinage de la source**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À retenir

Un circuit filiforme parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique qui peut être déterminé à l'aide de la **loi de Biot et Savart** :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I \cdot \vec{\mathrm{d}l}(P) \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où $\vec{\mathrm{d}l}(P)$ est un vecteur tangent à C en un point P quelconque du circuit, orienté dans le sens du courant, $r = PM$ et $\vec{u}$ est un vecteur unitaire selon la direction PM, orienté de P vers M.

Le champ magnétique est à **flux conservatif** : $\iint \vec{B} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 0$.

Théorème d'Ampère : La circulation du champ magnétique est telle que : $\oint_\Gamma \vec{B}(M) \cdot \vec{\mathrm{d}l}(M) = \mu_0 \sum I$, l'intensité I étant comptée positivement si elle est dans le sens d'orientation de la normale à une surface S quelconque s'appuyant sur le contour Γ, une fois le sens de parcours choisi sur le contour.

Le champ magnétique créé par un solénoïde « infini » constitué de n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I vaut : $B_{ext} = 0$ et $B_{int} = B = \mu_0 . n . I$.

La force de Lorentz subie par une particule de charge q, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel où règne un champ magnétique $\vec{B}$, s'écrit $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$. Son travail et sa puissance sont nuls quel que soit le déplacement considéré.

La force de Laplace subie par un élément de circuit de longueur $\mathrm{d}L$, parcouru par un courant permanent d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, s'écrit : $\vec{\mathrm{d}F} = I \cdot \vec{\mathrm{d}L} \wedge \vec{B}$ où $\vec{\mathrm{d}L}$ est parallèle à l'élément de circuit et dans le sens du courant.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 613.

17.1 Cyclotron à protons

On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne (non relativiste) ; le référentiel du laboratoire est considéré comme galiléen.

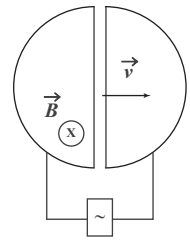
I. *Questions préliminaires*

a) Montrer qu'un champ magnétique seul ne peut pas augmenter la vitesse d'une particule.

b) Un proton, de charge e et de masse m, est placé dans un champ électrique uniforme dérivant d'un potentiel V. Il se déplace entre les points A et B. Exprimer la vitesse v_B du proton en B en fonction de la tension U_{AB} entre les points A et B et de sa vitesse v_A en A.

c) Soit $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ la base orthonormée directe d'un repère lié au référentiel du laboratoire. Montrer que la trajectoire d'un proton ayant une vitesse initiale $\vec{v_0} = v_0 \cdot \vec{i}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \cdot \vec{k}$ est un cercle, dont on exprimera le rayon.

II. Un *cyclotron* comporte deux demi-boîtes cylindriques creuses, ou « D », séparées par un petit espace, entre lesquelles on établit une tension u sinusoïdale de fréquence convenable f.



Les D sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui crée un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ parallèle aux génératrices des D.

On injecte au centre O du dispositif des protons dans une direction perpendiculaire à $\vec{B}$, avec une vitesse initiale v_0 négligeable. On donne B = 1,5 T.

a) Quelle est la durée τ mise par un proton pour effectuer un demi-tour dans un des D ? En déduire la fréquence f de la tension u pour que le proton soit accéléré (pendant un temps très court) à chaque passage entre les D.

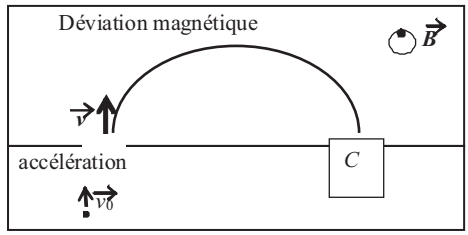
b) La tension a pour amplitude : U_{max} = 200 kV, et on admet que le proton est accéléré par cette valeur à chaque passage entre les D.

Exprimer la vitesse du proton au bout de n passages entre les D, puis le rayon du demi-cercle correspondant. Calculer le rayon au bout de N = 10 tours.

c) Juste avant de bombarder une cible, le proton a une trajectoire de rayon R = 35 cm. Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc, le nombre de tours effectués par le proton après sa première accélération et sa durée de séjour dans le cyclotron.

17.2 Spectromètre de masse de Dempster

Une source ponctuelle S émet des ions positifs de charge q, de masse m, avec une vitesse initiale v_0 négligeable. Ils sont accélérés sous une ddp U, puis déviés par un champ magnétique (voir figure ci-contre). Ils décrivent un demi-cercle et atteignent un collecteur C.



a) Calculer, en fonction de q, m, U et B, la distance x entre la fente d'entrée dans l'enceinte de déviation magnétique et le collecteur.

b) On veut séparer deux isotopes du mercure, de masses atomiques m_1 = 200 u et m_2 = 202 u. Les ions portent tous la même charge $q = Ze$ = 80e.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

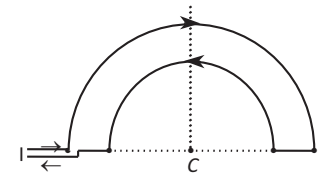
c) Calculer la largeur maximale a du collecteur qui permet de séparer ces deux isotopes lorsque la tension accélératrice vaut $U = 12$ kV et le champ magnétique B = 0,2 T. On donne 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

17.3 Champ produit par une spire circulaire en son centre

Quel rayon R faut-il donner à une spire circulaire pour obtenir en son centre un champ magnétique $B = 5$ μT, lorsqu'elle est parcourue par un courant $I = 2$ A ?

17.4 Champ produit par une boucle en demi-cercles

Une boucle de courant a la forme de deux demi-cercles concentriques de rayons respectifs $R_1 = 5$ cm et $R_2 = 8$ cm, et est parcourue par un courant constant $I = 2$ A (figure). Calculer le champ magnétique au centre C.



17.5 Champ produit par un fil rectiligne infini

Un fil rectiligne infini transporte un courant $I \approx 5$ A. Déterminer à quelle distance D de ce fil la norme du champ magnétique vaut $B \approx 30$ μT.

17.6 Champ magnétique au centre d'une spire carrée

Calculer le champ magnétique au centre d'une spire carrée de côté $a \approx 10$ cm parcourue par un courant d'intensité $I \approx 1$ A.

17.7 Circulation le long d'un contour carré traversé par des courants

On se place dans un repère orthonormé direct.

Le plan xOy est traversé, aux points $P_1 = (a/2, a/2, 0)$, $P_2 = (-a/2, a/2, 0)$, $P_3 = (-a/2, -a/2, 0)$, $P_4 = (a/2, -a/2, 0)$, respectivement par les courants algébriques I, $-2I$, $3I$ et $-4I$, le sens positif étant celui de l'axe Oz.

On considère le carré $ABCD$ défini par les points $A = (a, a, 0)$, B = $(a, -a, 0)$, C = $(-a, -a, 0)$ et D = $(-a, a, 0)$.

a) Chercher la circulation du champ magnétique le long du contour $ABCDA$, le contour étant orienté dans l'ordre des lettres.

b) Cette circulation est-elle plus grande ou plus petite que la circulation du champ magnétique le long du cercle dans lequel est inscrit le carré $ABCD$?

17.8 Champ magnétique produit par un courant rectiligne infini

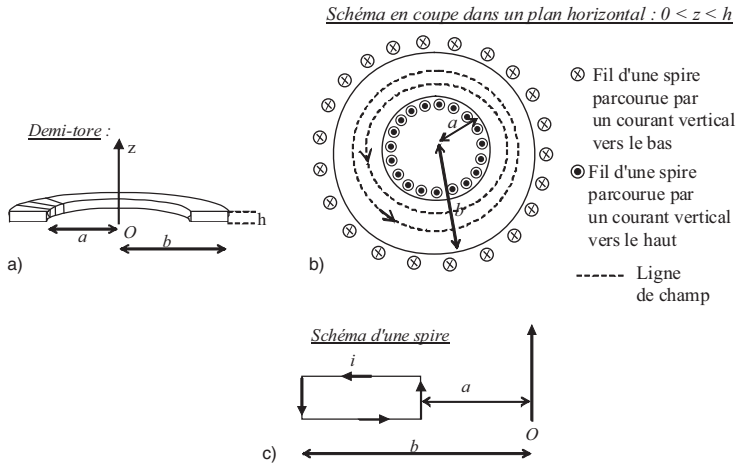
Déterminer la direction, le sens, et la norme du champ magnétique $\vec{B}$ que produit, à une distance $d = 1$ m, un courant $I = 0{,}1$ A rectiligne, infini.

17.9 Bobine toroïdale de section rectangulaire

Une bobine est formée d'un fil enroulé de façon régulière sur un tore de section rectangulaire dont les dimensions sont définies par son rayon intérieur a, son rayon extérieur b et sa hauteur h.

Il y au total N spires parcourues par un courant d'intensité i. Les spires sont jointives (ce qui n'est pas respecté sur les figures, pour des raisons de clarté du dessin).

On constate que les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe Δ du tore, dans des plans perpendiculaires à cet axe, et sont orientées dans le sens trigonométrique direct (voir les figures).



On repère un point M quelconque de l'espace par ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z).

a) Indiquer, en justifiant votre réponse, les coordonnées dont dépend la norme du champ magnétique créé par la bobine torique au point M.

b) Dans la base locale au point M associée aux coordonnées cylindriques, comment s'exprime le vecteur champ magnétique en M ? Pourquoi ?

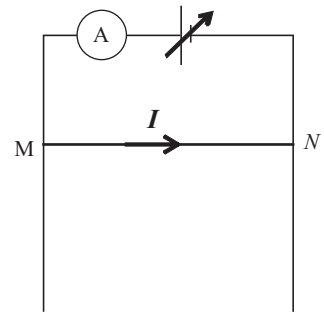
c) En déduire un contour d'Ampère bien adapté au problème.

d) En détaillant toutes les étapes d'utilisation du théorème d'Ampère, déterminer l'expression de la norme B du champ magnétique créé par la bobine torique en un point M à l'intérieur du tore ($a < \rho < b$ et $0 < z < h$), en fonction de N, i et ρ.

e) Déterminer le flux Φ du vecteur champ magnétique à travers la surface d'une spire rectangulaire de la bobine.

17.10 Force de Laplace

Un petit barreau métallique MN, de masse m et de longueur L, est assujetti à glisser sans frottement le long de deux rails conducteurs verticaux, en restant lui-même horizontal comme sur le schéma ci-contre. Il est parcouru par un courant d'intensité I, que l'on peut régler grâce au générateur variable.



On néglige l'action du champ magnétique terrestre devant le poids du barreau.

En l'absence d'autre champ magnétique, le barreau tombe.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Lorsqu'on place le dispositif dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ horizontal, le barreau ne tombe plus à condition d'ajuster avec précision l'intensité I du courant qui le traverse à une valeur I_0. Expliquer.

Donner la direction et le sens de $\vec{B}$ par rapport au schéma.

Exprimer la relation entre la valeur du champ magnétique B, la valeur I_o, m, L et l'intensité g de la pesanteur.

Application numérique : calculer B pour $m = 1{,}0$ g ; $L = 10$ cm ; $I_0 = 5{,}0$ A ; $g \approx 10$ N·kg^{-1}.

17.11 Effet Hall dans un métal simple

On fait une mesure du champ de Hall sur un barreau parallélépipédique de cristal d'argent.

On se place dans un repère cartésien (Ox, Oy, Oz) dont les axes sont parallèles aux côtés du parallélépipède.

Pour un vecteur densité de courant $\vec{j}$ orienté selon la direction et le sens de Ox, et pour un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dirigé selon la direction et le sens de Oz, on mesure un champ de Hall $\vec{E}_H$.

a) Sachant que, lors de l'effet Hall, naît un champ électrique $\vec{E}_H$ dont les conséquences sont de compenser la force de Lorentz, expliciter l'effet Hall en précisant la direction de $\vec{E}_H$.

b) Calculer le nombre n d'électrons « libres » par unité de volume, en fonction de E_H, B et j respectivement normes de $\vec{E}_H$, $\vec{B}$ et $\vec{j}$.

c) Calculer le nombre n_a d'atomes d'argent par unité de volume, en fonction du nombre d'Avogadro N_A, de la masse molaire atomique M de l'argent et de la masse volumique ρ de l'argent.

Que peut-on déduire de la comparaison de n et n_a ?

A.N. : $E_H = 0{,}33$ mV · m^{-1} ; $j = 1{,}5 \cdot 10^7$ A · m^{-2} ; $B = 0{,}25$ T ; M = 108 g · mol^{-1} ; $\rho = 10{,}5$ g · cm^{-3}.

ÉLECTROMAGNÉTISME

18

PRÉALABLES

- Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques
- Produit vectoriel
- Circulation et flux d'un champ vectoriel
- Opérateurs vectoriels : gradient, divergence, rotationnel, laplacien
- Théorème de Stokes, théorème d'Ostrogradsky

MOTS CLÉS

- Induction, auto-induction, inductance
- Loi de Lenz, loi de Faraday
- Champ électromoteur
- Champ électromagnétique
- Equations de Maxwell

OBJECTIFS

- Comprendre les phénomènes d'induction et d'auto-induction.
- Connaître la loi de Lenz et savoir l'utiliser pour déterminer le sens du courant induit.
- Connaître la loi de Faraday et savoir l'utiliser pour déterminer la force électromotrice d'induction.
- Savoir calculer l'inductance d'un circuit simple.
- Connaître les équations de Maxwell.

Dans les chapitres 16 et 17, nous avons vu :

- que la présence de charges électriques immobiles crée un champ électrique dit électrostatique ;
- qu'un courant électrique circulant dans un conducteur crée un champ magnétique (expériences d'Oersted montrant que l'aiguille aimantée d'une boussole dévie au voisinage d'un fil conducteur parcouru par un courant) ;
- qu'un champ magnétique exerce une force sur une particule chargée en mouvement (force de Lorentz) et donc sur un courant circulant dans un conducteur (force de Laplace).

Au début du XIX^{e} siècle (1830-31), le physicien américain Joseph Henry et le physicien anglais Michael Faraday ont chacun mené des expériences parallèles qui ont montré

que, dans certaines conditions, un champ magnétique pouvait aussi générer des courants électriques. Ce sont ces phénomènes que l'on regroupe sous le terme d'induction électromagnétique.

Ces études ont montré aussi que l'on ne pouvait pas dissocier champ électrique et champ magnétique et ont conduit au concept de champ électromagnétique, formalisé par James Maxwell dans les années 1860.

18.1 Induction électromagnétique

18.1.1 Loi de Lenz

Soit un circuit fermé C, placé dans un champ magnétique.

Il y a apparition d'un courant « induit » dans C **lorsque le flux magnétique dans le circuit varie au cours du temps** ; rappelons la relation permettant de calculer le flux du champ magnétique à travers une surface S :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

On peut obtenir un flux magnétique variable dans les deux cas suivants :

- cas de Neumann : le champ magnétique varie au cours du temps (figures 18.1 et 18.2)
- cas de Lorentz : le circuit C se déplace dans le champ $\vec{B}$ constant et c'est la surface S qui varie.

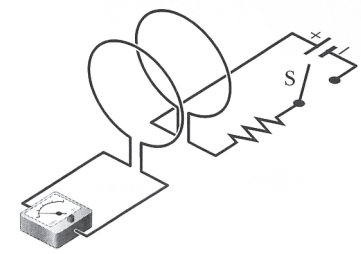


Figure 18.1 **Apparition d'un courant induit**
La variation du champ magnétique est due à la variation de l'intensité du courant électrique dans le circuit (l'établissement ou la coupure du courant respectivement en fermant ou en ouvrant l'interrupteur)

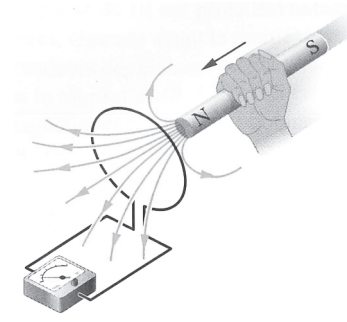


Figure 18.2 **Apparition d'un courant induit**
La variation du champ magnétique est due à son intensité plus ou moins élevée au niveau de la boucle selon la distance entre l'aimant et la boucle.

Loi de Lenz

La création d'un courant induit est toujours liée à une variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit.

La loi de Lenz indique que le sens du courant induit est tel qu'il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Ainsi le champ magnétique « induit » (créé par le courant induit) tend à s'opposer à la variation de flux magnétique qui a créé le courant induit.

18.1.2 Loi de Faraday

Loi de Faraday

La force électromotrice (f.é.m.) induite dans un circuit est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique « à travers le circuit ».

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad avec \quad \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

La f.é.m est mesurée en volts, le flux magnétique Φ en weber (Wb).

Elle tend à s'opposer à la variation de flux magnétique (d'où le signe négatif dans cette relation).

18.1.3 Champ électromoteur

La variation de flux magnétique créant un courant induit dans le circuit, un champ électrique doit aussi être présent dans le circuit ; ce champ électrique est en effet nécessaire pour qu'il y ait courant électrique, c'est-à-dire déplacement des électrons.

Si ce champ électrique induit exerce, tout comme un champ électrostatique, une force sur des particules chargées $\left(\vec{F} = q \cdot \vec{E}\right)$, une différence essentielle est que les lignes de champ de ce champ électrique induit forment des boucles fermées (voir figure 18.3), ce qui n'est pas le cas des lignes de champ des champs électrostatiques (voir § 16.4.1) ; autrement dit, la circulation du champ électrostatique est conservative (ce qui permet de définir la différence de potentiel électrostatique), et par conséquent cette circulation est nulle sur une courbe fermée . De manière différente, la circulation du champ électrique induit n'est pas nulle le long d'une courbe fermée et correspond à la force électromotrice d'induction :

Le champ électromoteur $\vec{E}_\mathrm{m}$ est défini par la relation : $e = \oint_C \vec{E}_\mathrm{m} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ où e est la f.é.m induite dans le circuit C par la variation de flux magnétique.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

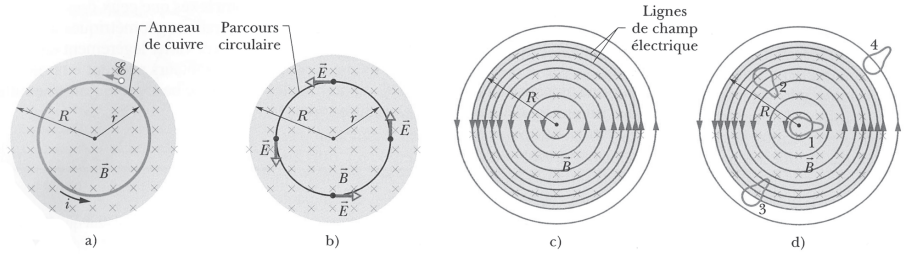


Figure 18.3 **Champ électrique induit par un champ magnétique variable**
a) Si la grandeur d'un champ magnétique augmente à taux constant, un courant induit constant apparaît, comme c'est illustré, dans l'anneau de cuivre de rayon *r*. b) Un champ électrique induit existe même si on retire l'anneau ; le champ électrique est indiqué en quatre points différents. c) L'image complète du champ électrique induit, prenant la forme des lignes de champ. d) Quatre parcours fermés similaires ayant des aires identiques. Des f.é.m. égales sont induites dans les parcours 1 et 2, qui sont entièrement situés dans la région du champ magnétique variable. Une f.é.m. plus faible est induite dans le parcours 3, qui est en partie situé dans cette région. Aucune f.é.m. n'est induite dans le parcours 4, qui est entièrement situé à l'extérieur du champ magnétique.

a) Cas d'un circuit fixe placé dans un champ magnétique variable

• *Premier exemple*

Le champ magnétique est créé par un solénoïde « infini » d'axe Oz, parcouru par un courant variable $i(t)$.

Le solénoïde, de rayon R_1, est entouré par une spire de rayon R_2 ($R_2 > R_1$).

À l'intérieur du solénoïde, le champ vaut : $\vec{B} = \mu_0 n i \cdot \vec{u}_z$ où n est le nombre de spires par mètre pour le solénoïde et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Il est nul à l'extérieur.

Le flux magnétique à travers la spire est :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 n i \cdot \pi R_1^2$$

La f.é.m. induite dans la spire est :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 n \cdot \pi R_1^2 \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Or $e = \oint_{\text{spire}} \vec{E}_\text{m} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$; les charges se déplaçant dans la spire, le champ électromoteur doit être tangent à la spire, donc colinéaire au vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$, et donc au vecteur $\vec{u}_\theta$.

Le champ électromoteur est donc :

$$\vec{E}_\text{m} = -\mu_0 . \frac{n R_1^2}{2 R_2} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}_\theta$$

• *Deuxième exemple*

Une boucle de cuivre de rayon R est placée dans un champ magnétique variable (orthogonal au plan de l'anneau) ; la variation du champ magnétique est obtenue par le déplacement d'un aimant perpendiculairement au plan de la boucle (figure 18.4).

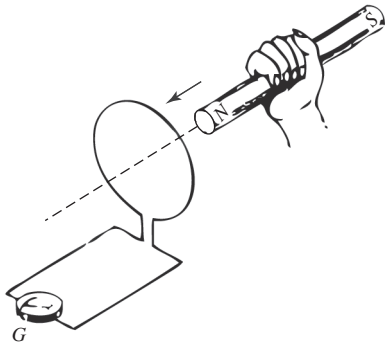


Figure 18.4

Lorsque l'on déplace l'aimant par rapport à la boucle, le galvanomètre G dévie, montrant la présence d'un courant induit.

Seul le mouvement relatif de l'aimant par rapport à la boucle importe.

Le flux magnétique à travers la boucle s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = B \cdot \pi R^2$$

D'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite dans la boucle est :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad e = \oint_{\text{Boucle}} \vec{E}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}$$

Le champ électromoteur est donc :

$$\vec{E}_{\mathrm{m}} = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u}_\theta$$

b) Cas d'un circuit mobile dans un champ magnétique permanent

Une portion de conducteur AC se déplace sur des rails conducteurs à la vitesse $\vec{v}$, dans un champ magnétique permanent $\vec{B}$ perpendiculaire au plan contenant les rails et AC (voir la figure 18.5)

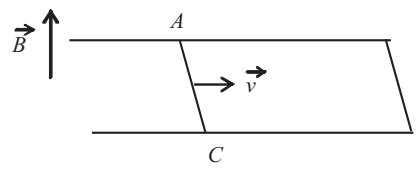


Figure 18.5 **Champ électromoteur dans un circuit mobile**

Un porteur de charge q du conducteur est donc soumis à la force $\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Il se déplace ainsi à l'intérieur du conducteur : il y a création d'un courant dans le sens de A vers C.

Tout se passe comme s'il régnait un champ électrique agissant sur le porteur de charge. C'est le champ électromoteur :

$$\vec{E}_{\text{m}} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

18.1.4 Un exemple d'application des phénomènes d'induction : les transformateurs

Un transformateur est constitué de deux enroulements solénoïdaux ou toroïdaux couplés : le « primaire » comportant n_1 spires et le « secondaire » avec n_2 spires.

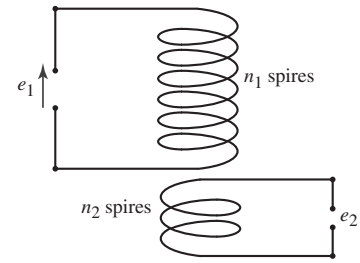


Figure 18.6 **Schéma illustrant le principe de fonctionnement d'un transformateur**

Pour canaliser les lignes de champ, on enroule primaire et secondaire sur un même noyau de fer : le flux magnétique à travers chaque spire φ est alors partout le même.

On impose aux bornes du primaire une tension sinusoïdale :

$$e_1 = R_1 i_1 + \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t} = n_1 \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \text{ pour } R_1 \text{ négligeable.}$$

Une f.é.m. induite est créée aux bornes du secondaire :

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = -n_2 \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \text{ soit le rapport de transformation : } \frac{e_2}{e_1} = -\frac{n_2}{n_1}.$$

On peut ainsi augmenter ou diminuer l'amplitude d'une tension sinusoïdale en jouant sur les nombres de spires.

18.2 AUTO-INDUCTION

On parle de phénomène d'auto-induction lorsque le circuit induit est confondu avec le circuit inducteur : le champ magnétique est créé par le circuit C à travers lequel on calcule le flux magnétique.

Il y a auto-induction quand le champ magnétique varie au cours du temps, donc quand le courant qui circule dans le circuit est variable au cours du temps.

18.2.1 Coefficient d'auto-induction

a) Définition

Soient Φ_P le flux magnétique propre à travers le circuit et I le courant circulant dans le circuit.

Le coefficient d'auto-induction (ou inductance propre ou *self-induction*) est $L = \dfrac{\Phi_p}{I}$

L se mesure en Henry (1 H = 1 Wb · A^{-1}) et ne dépend que des caractéristiques géométriques du circuit.

b) Exemple de calcul

On considère un solénoïde d'axe (Oz), de longueur D, comportant N spires jointives de rayon R, avec $D \gg$ R (de sorte que le solénoïde est assimilable, pour le calcul du champ magnétique qu'il crée, à un solénoïde « infini »). Le nombre de spires par unité de longueur est $n = \dfrac{N}{D}$ et le champ magnétique créé à l'intérieur du solénoïde vaut $\vec{B} = \mu_0 ni \cdot \vec{u}_z$.

Le flux magnétique à travers une spire est :

$$\varphi_1 = \iint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \cdot \frac{N}{D} i \cdot \pi R^2$$

Le flux à travers le solénoïde est :

$$\Phi_P = N \cdot \varphi_1$$

Soit :

$$\Phi_p = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{D} i \cdot \pi R^2 \quad \text{d'où} \quad L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{D} \cdot \pi R^2$$

Remarque

Le coefficient d'auto-induction ne dépend pas de l'intensité du courant mais uniquement des caractéristiques géométriques du circuit.

18.2.2 F.é.m. d'auto-induction

La f.é.m auto-induite s'oppose toujours à la variation du flux magnétique et donc à la variation du champ magnétique qui lui a donné naissance ; elle crée un courant induit qui s'oppose au courant inducteur et interdit toute discontinuité de I.

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}t} = -L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Les phénomènes d'induction et d'auto-induction électromagnétiques interviennent dans une grande partie des phénomènes électriques, et leurs applications pratiques sont considérables : transformateurs, certains types de générateurs électriques (alternateurs, dynamos), guitares électriques...

Quand le conducteur qui est en mouvement dans un champ magnétique n'est pas filiforme mais volumique, les courants induits circulent dans la masse du conducteur : on parle alors de « courants de Foucault » ; ces courants s'opposant à la cause qui leur a donné naissance (loi de Lenz), ils s'opposent au mouvement et peuvent être utilisés dans des dispositifs de freinage par induction (ralentisseurs des camions...) ; de plus, de l'énergie est alors dissipée par effet Joule dans le conducteur et peut être utilisée (dispositifs de chauffage par induction).

18.3 Équations de Maxwell et propagation du champ électromagnétique

Nous utiliserons à plusieurs reprises deux théorèmes :

Théorème de Stokes

Soient C *un contour quelconque fermé et* S *une surface s'appuyant sur* C.

$$\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\vec{rot}\ \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Théorème d'Ostrogradsky

Soient V *un volume quelconque et* S *la surface fermée qui l'entoure.*

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (div\ \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\tau$$

18.3.1 Équations de Maxwell

Au milieu du XIX^{e} siècle, un ensemble important de phénomènes expérimentaux liés à l'électricité et au magnétisme sont connus et plus ou moins formalisés :

- les effets magnétiques d'un courant (expériences de Christian Oersted en 1820) ;
- le *Mémoire sur la théorie des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduits de l'expérience* écrit en 1827 par André-Marie Ampère (par ailleurs inventeur du galvanomètre et, avec François Arago, de l'électroaimant) ;
- les lois de l'électricité (Ohm en 1826-27, Pouillet en 1834, Joule en 1841) ;
- les phénomènes d'induction et les courants induits (Michael Faraday, 1831) ;
- les effets d'auto-induction (Joseph Henry, 1832).

Inspiré en particulier par les travaux de Michael Faraday, James Clerk Maxwell entreprit en 1855 l'étude mathématique du champ magnétique créé par des courants ; rappelons que les phénomènes d'induction électromagnétique sont liés à la variation du flux magnétique dans un circuit et qu'un champ magnétique variable créé un courant induit dans le circuit, c'est-à-dire également un champ électrique induit (champ électromoteur, voir le § 18.1.3).

En 1862, il émit l'hypothèse qu'un champ électrique variable induit à son tour un champ magnétique et introduisit le concept de courant de déplacement dans les milieux soumis à un champ électrique variable (voir l'équation de Maxwell-Ampère ci-dessous); en 1864, il énonça une théorie générale du champ électromagnétique. Cette théorie permet la description de tous les phénomènes électriques et magnétiques macroscopiques.

Équations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ dans le vide, en un point M caractérisé par une densité volumique de charge $\mu\,(M)$ et un vecteur densité de courant $\vec{j}\,(M)$ sont :

Équation du flux magnétique : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_0}$

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Remarques

- Ces équations sont des équations dites « locales », c'est-à-dire qu'une équation est valable en un point M et que les différentes grandeurs qui interviennent dans cette équation doivent être calculées en ce point M (voir les exercices 18.4 à 18.7).
- Les deux premières de ces équations expriment les propriétés intrinsèques du champ électromagnétique ; les deux secondes expriment le lien entre le champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ et les sources $\left(\mu, \vec{j}\right)$ responsables de ce champ.
- Dans l'équation de Maxwell-Ampère, le terme $\vec{j}$ représente le vecteur densité de courant, tel qu'il a été défini au § 17.4.1 ; le second terme montre qu'un champ électrique variable dans le temps est également une source de champ magnétique et on appelle ce terme « courant de déplacement ».
- Attention à ne pas confondre la densité volumique de particules chargées $\mu(M)$ et la perméabilité magnétique du vide μ_0.

Un champ électrique variable dans le temps est une source de champ magnétique.

On appelle « courant de déplacement » le terme $\vec{j}_{\mathrm{d}} = \varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À partir de ces quatre équations mathématiques reliant le champ électrique $\vec{E}(M)$, le champ magnétique $\vec{B}(M)$, la densité volumique de charges $\mu(M)$ et le vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ ainsi que de l'expression décrivant la force subie par une particule chargée (de charge q, animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel galiléen) placée dans ce champ électromagnétique : $\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$, on peut calculer le champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ à partir de ses sources $\left(\mu, \vec{j}\right)$. Ces équations constituent donc les postulats fondamentaux de l'électromagnétisme.

L'ensemble de ces équations forme une base à partir de laquelle on peut retrouver les relations importantes de l'électrostatique et de la magnétostatique que nous avons étudiées dans les deux chapitres précédents. Nous allons montrer ici rapidement le lien « dans l'autre sens », à partir des relations vues aux chapitres 16 et 17.

a) Équation de Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est la forme locale du théorème de Gauss :

Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\ \vec{E} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_0}$

Théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

On calcule les charges intérieures à la surface de Gauss par intégration de la densité volumique de charges :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \mu \cdot \mathrm{d}\tau$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \left(\text{div}\ \vec{E}\right) \cdot \mathrm{d}\tau$$

On obtient :

$$\text{div}\ \vec{E} = \frac{\mu}{\varepsilon_0}$$

b) Équation de Maxwell-Faraday

Nous avons vu au § 16.4.1 que la circulation du champ électrostatique est conservative, ce qui peut s'écrire :

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

D'autre part, la circulation du champ électromoteur (§ 18.1.3) vérifie la relation :

$$e = \oint \vec{E_{\text{m}}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\right)$$

En utilisant le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

c) Équation du flux magnétique

Dans les propriétés du champ magnétique énoncées au § 17.3.1, nous avons vu que le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif : $\oiint \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$.

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on en déduit que la forme locale équivalente s'écrit :

$$\text{div}\ \vec{B} = 0$$

d) Équation de Maxwell-Ampère

Cette dernière équation, pour sa partie magnétostatique (champs indépendants du temps) est la forme locale du théorème d'Ampère (voir le § 17.3.2). On a :

$$\oint_\Gamma \vec{B}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}(M) = \mu_0 \sum I = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

En utilisant le théorème de Stokes, on obtient l'équation de Maxwell-Ampère en magnétostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$$

Une des contributions essentielles de Maxwell fut d'émettre l'hypothèse d'un courant de déplacement lié à la variation temporelle du champ électrique ; les expériences confirmant les idées de Maxwell vinrent plus tard (voir paragraphe suivant).

18.3.2 Propagation du champ électromagnétique dans le vide

À partir des équations de Maxwell, on peut établir les équations de propagation du champ électromagnétique dans un espace vide de charge et de courant.

a) Propagation du champ électrique

À partir des équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Puisque ici $\vec{j} = \vec{0}$ (espace vide de courants), on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} \right) = -\frac{\partial \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} \right)}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Or, en utilisant les propriétés des opérateurs vectoriels, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div}\ \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

car div $\vec{E} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_0} = 0$ ici (espace vide de charges).

Finalement, l'équation de propagation est :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

b) Propagation du champ magnétique

De la même façon :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}\right) = \mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E}\right)}{\partial t} = -\mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B} \quad \text{car} \quad \text{div}\,\vec{B} = 0.$$

Finalement, l'équation de propagation est : $\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

c) Propagation du champ électromagnétique

Le caractère local des équations de Maxwell permet de rendre compte de ce phénomène de propagation du champ électromagnétique ; une perturbation locale de l'état d'une distribution de charges ou de courants fait sentir ses effets de proche en proche en modifiant le champ électromagnétique, qui à son tour, modifie l'état des charges ou des courants...

Chaque composante s du champ électromagnétique vérifie une équation du type :

$$\mu_0\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \Delta s \quad \text{soit} \quad \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \Delta s$$

En effet, le produit $\mu_0\varepsilon_0$ est positif et une analyse dimensionnelle montre que $[\mu_0\varepsilon_0] = L^{-2} \cdot T^2$. Cette équation est analogue à l'équation générale de propagation d'une onde (équation de d'Alembert), se propageant à la vitesse v (cette vitesse dépendant du milieu matériel dans lequel elle se propage).

La vitesse de propagation du champ électromagnétique v dans le vide est donc telle que :

$$v^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}.$$

Cette vitesse correspond à la valeur de la vitesse de la lumière mesurée par Foucault en 1862. Ainsi, la vitesse de propagation du champ électromagnétique dans le vide c est telle que $\mu_0\varepsilon_0 \cdot c^2 = 1$ et la lumière peut être décrite comme une onde électromagnétique se propageant dans le vide à la vitesse c (voir le § 11.2).

La théorie de Maxwell conduit aussi à penser que des charges ou des courants oscillants engendrent des ondes électromagnétiques ; en 1887–88, Heinrich Hertz réussit à émettre des ondes électromagnétiques à partir de charges électriques accélérées.

En 1890, Guglielmo Marconi s'intéressa à la télégraphie sans fil ; il envoya le premier télégramme en 1899 et en 1901, il réussit à transmettre des signaux au-dessus de l'Atlantique (liaison Cornouailles–Terre-Neuve). Depuis, les retombées technologiques sont innombrables...

À retenir

La création d'un courant induit dans un circuit est toujours liée à une variation dans le temps du flux magnétique à travers le circuit.

Loi de Lenz : le sens du courant induit est tel qu'il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

Loi de Faraday : La f.e.m induite e dans un circuit vérifie la relation : $e = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ où φ est le flux du champ magnétique à travers le circuit : $\varphi = \iint_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$.

Champ électromoteur : Le champ électromoteur $\vec{E_m}$ dans un circuit C est défini à partir de la f.é.m e par la relation $e = \oint_C \vec{E_m} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$.

Équations de Maxwell : Les quatre équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ dans le vide, en un point M caractérisé par une densité volumique de charge $\mu(M)$ et un vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ sont :

Équation de Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\ \vec{E} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_0}$

Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Équation du flux magnétique : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Courant de déplacement : un champ électrique variable dans le temps est une source de champ magnétique. On appelle « courant de déplacement » le terme :

$$\vec{j_d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Équations de propagation du champ électromagnétique dans le vide ;

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

La vitesse de propagation c du champ électromagnétique dans le vide est telle que $\mu_0 \varepsilon_0 \cdot c^2 = 1$.

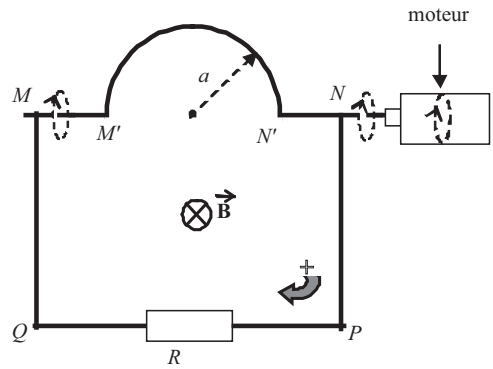
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 615.

18.1 Mesure du champ magnétique terrestre par induction

Un circuit est formé d'une partie rectangulaire *MNPQ* complétée par une portion semi-circulaire *M'N'* de rayon *a*. Cette portion *M'N'* peut tourner autour de son diamètre, comme indiqué sur la figure.



L'ensemble est orienté de manière à ce que le plan contenant *MNPQ* soit perpendiculaire à la direction du champ magnétique terrestre $\vec{B}$, supposé uniforme à l'échelle du circuit.

Le sens positif du circuit est choisi de façon à ce que la normale à *MNPQ* et le champ $\vec{B}$ soient de même sens (voir la figure).

On communique à la portion semi-circulaire un mouvement de rotation de fréquence $f = \omega/(2\pi)$.

Soit θ l'angle, à l'instant t, entre le plan contenant *MNPQ* et le plan contenant la partie semi-circulaire. On prendra $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$, la situation étant alors celle de la figure.

On note *S* l'aire de la partie rectangulaire.

a) Exprimer le flux Φ de $\vec{B}$ à travers le circuit lorsque l'angle vaut θ. En déduire $\Phi(t)$.

b) Donner l'expression de la f.é.m. induite $e(t)$ dans le circuit.

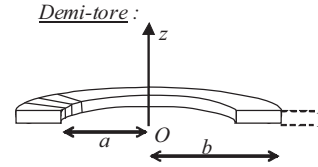
On branche un oscilloscope aux bornes de la résistance *R*, et on observe que l'amplitude de la tension mesurée sur l'écran est de 3,2 mV pour une fréquence de rotation de 50 Hz.

On néglige la résistance du reste du circuit.

En déduire la valeur du champ magnétique terrestre. A.N. : $a = 45$ cm.

18.2 Principe de la pince ampérométrique

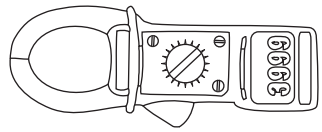
Un fil électrique parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ est disposé suivant l'axe (Oz) orienté vers le haut. Le sens positif choisi pour cette intensité est le sens de (Oz).



Le champ magnétique créé par ce fil à une distance *r* du fil est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} \cdot \vec{u}_\theta.$$

Ce fil vertical forme l'axe d'une bobine torique, comportant N spires de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, de hauteur h et de section rectangulaire.



a) Calculer le flux magnétique au travers du rectangle délimité par une spire de la bobine. En déduire le flux magnétique total à travers la bobine.

b) Le courant dans le fil vertical est sinusoïdal : $i = I_0 \cos(\omega t)$.

Calculer l'intensité i_b du courant induit dans la bobine, en fonction de I_0, ω, N, a, b et de la résistance R de cette bobine.

c) La photo ci-contre représente une pince ampérométrique : elle permet de mesurer l'intensité d'un courant dans un fil en le plaçant dans l'anneau de la pince. Expliquer son fonctionnement. Comment précisément faut-il positionner le fil ? Cette pince fonctionne-t-elle avec du courant continu ?

18.3 Induction à travers une bobine plate

Un très long solénoïde, de rayon a, est constitué de n spires par unité de longueur.

Il est entouré d'une bobine plate de résistance R, formée de N spires circulaires de rayon b ($b > a$) et de même axe que le solénoïde.

a) Le solénoïde est parcouru par un courant variable dans le temps $i(t)$. Déterminer l'expression de la f.é.m. induite aux bornes de la bobine plate.

b) Le solénoïde est parcouru par un courant continu d'intensité I qui est ensuite annulé. Déterminer la quantité d'électricité induite qui traverse la bobine plate pendant cette annulation.

18.4 Équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday

On considère une sphère, de centre O et de rayon R, chargée avec une densité volumique de charge donnée par :

$$\mu(M) = Ar, \text{ où } A \text{ est une constante et } r = OM < R.$$

Le champ électrique créé en M a pour expression, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \cdot \vec{u}_r$$

a) Montrer que ce champ vérifie les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday.

b) Déterminer une expression du potentiel scalaire V dont il dérive.

18.5 Équations de Maxwell-Ampère et du flux magnétique

a) Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant permanent d'intensité I. Le champ magnétique créé par ce fil en un point M, situé à la distance r du fil, est donné, en coordonnées cylindriques par : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \cdot \vec{u}_\theta$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Montrer que ce champ vérifie l'équation de Maxwell-Ampère et celle du flux magnétique.

b) Mêmes questions pour le champ magnétique créé par un solénoïde « infini », d'axe Oz, de rayon R, comprenant n spires par mètre, parcouru par un courant permanent d'intensité I.

On rappelle que ce champ est nul à l'extérieur du solénoïde et uniforme à l'intérieur du solénoïde. Son expression est : $\vec{B} = \mu_0 n I \cdot \vec{u}_z$.

18.6 Champ magnétique dans un condensateur en régime variable

On considère un condensateur dont les armatures sont deux disques circulaires de rayon R d'axe de symétrie $z'z$.

Ce condensateur est placé dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i = i_0 \sin(\omega t)$.

En négligeant les effets de bord, on montre que le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures du condensateur a pour expression : $\vec{E} = -\dfrac{i_0}{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2 \cdot \omega} \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_z$.

a) Écrire l'équation de Maxwell-Ampère en un point M entre les armatures du condensateur.

b) Justifier le fait que le champ magnétique $\vec{B}$ entre les armatures vérifie

$$\vec{B} = B(r,t) \cdot \vec{u}_\theta.$$

Pour cela, montrer que les variations du champ électrique sont équivalentes à un courant, appelé courant de déplacement, dont le vecteur densité de courant a pour expression :

$$\vec{j}_d = \frac{i_0}{\pi R^2} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_z.$$

Préciser quelles sont les coordonnées qui laissent ce courant, donc le champ magnétique, invariant. Indiquer un plan de symétrie pour ces courants, et justifier la direction du champ magnétique.

c) Trouver l'expression du champ magnétique en utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques.

18.7 Champ électrique dans un solénoïde en régime variable

On considère un solénoïde d'axe $z'z$, comportant n spires par mètre et parcouru par un courant variable d'intensité $i = i_0 \cos(\omega t)$.

En négligeant les effets de bords, on montre que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde a pour expression : $\vec{B} = \mu_0 n i_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{u}_z$.

Écrire l'équation de Maxwell-Faraday en un point M à l'intérieur du solénoïde.

Comparer avec l'équation trouvée à la question (a) de l'exercice 18.6.

Par analogie avec l'exercice 18.6, déterminer l'expression du champ électrique au point M.

Partie V

Électricité

ÉLECTRICITÉ

19

PRÉALABLES

- Structure de la matière
- Principe de conservation de l'énergie

MOTS CLÉS

- Charges, courant, tension
- Dipôles
- Sources idéales et réelles
- Résistance, condensateur, bobine

OBJECTIFS

- Définir les grandeurs caractéristiques en électricité.
- Connaître les caractéristiques des principaux dipôles linéaires.

19.1 L'ÉLECTRICITÉ : UNE BRÈVE INTRODUCTION

19.1.1 Place et origine

L'électricité est un phénomène naturel qui se manifeste aussi bien dans notre propre corps en participant à l'influx nerveux que dans la nature par des phénomènes spectaculaires comme la foudre. L'électricité est invisible et ne se manifeste que par les effets qu'elle provoque : chaleur ou force.

Observée et étudiée dès l'antiquité par les Grecs, ce n'est réellement qu'à partir du XIX^{e} siècle, notamment après l'invention de la pile par Volta, que l'on comprit la nature de l'électricité et que furent établies les principales lois, notamment le lien avec les phénomènes magnétiques qui se traduisit par la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell.

Le début du XX^{e} siècle verra l'électricité sortir des salons de curiosité et des laboratoires pour s'inviter dans les foyers. Elle sera aussi un élément moteur de la seconde révolution industrielle.

C'est désormais une source d'énergie familière à tous et quasiment indispensable, au cœur du développement de nos sociétés et qui constitue une des solutions d'avenir aux problèmes environnementaux (pollution et épuisement des énergies fossiles) dont l'intérêt croissant pour les voitures électriques, les éoliennes ou autres panneaux solaires est la preuve. De la même manière, le développement de l'électronique et de l'informatique promet un bel avenir au secteur de l'électricité.

Il n'existe pas de source naturelle d'électricité. Pour obtenir de l'énergie électrique, il est nécessaire de convertir une autre forme d'énergie au moyen d'un convertisseur. Ainsi un générateur d'énergie électrique ne crée pas d'énergie mais effectue la conversion d'une forme d'énergie sous forme électrique. Par exemple :

- la pile à combustible convertit de l'énergie chimique ;
- l'alternateur convertit de l'énergie mécanique ;
- la cellule photovoltaïque convertit de l'énergie rayonnante.

19.1.2 Applications

L'électricité présente de nombreux avantages qui l'ont rendue prépondérante dans toutes les technologies modernes. Parmi ces avantages, citons :

- son faible coût de production ;
- la facilité avec laquelle elle se transporte sur de longues distances ;
- la facilité avec laquelle on peut la moduler au moyen de composants électroniques notamment.

On peut distinguer deux grands types d'applications : celles pour laquelle l'électricité est un vecteur d'énergie (force motrice, chauffage, éclairage...) où la forme des signaux électriques a peu d'importance et celles pour laquelle l'électricité est un vecteur d'information (communication électronique...) où la forme d'onde des signaux est primordiale car elle porte l'information.

Dans tout les cas, l'électricité n'est qu'un support, destinée à être convertie par un objet technologique pour être utile : l'ampoule électrique nous éclaire, la télévision affiche les images qu'elle réceptionne sur son câble d'antenne.

19.2 Grandeurs électriques fondamentales

19.2.1 La charge électrique

Les charges électriques sont à l'origine des phénomènes électriques (courant, tension, force). La charge électrique notée q a pour unité le coulomb (C).

L'expérience a mis en évidence l'existence d'une charge élémentaire indivisible qui a pour valeur $e \approx 1{,}6 \times 10^{-19}$C (il n'a pas encore été observé de charge plus petite). Toute charge q, positive ou négative, est donc un multiple de cette charge élémentaire. Les charges de signe opposé s'attirent alors que celles de même signe se repoussent.

Les atomes sont neutres car ils possèdent autant d'électrons (charge négative $q = -e$) que de protons (charges positives $q = +e$). Suivant la force qui unit les électrons à leur noyau, on distingue trois catégories de matériaux :

- Les conducteurs à l'intérieur desquels les charges peuvent se déplacer facilement.
- Les isolants à l'intérieur desquels les charges ne peuvent pas se déplacer.
- Les semi-conducteurs qui sont plutôt isolant mais deviennent conducteur si la température augmente où s'ils contiennent des impuretés (on dit alors qu'ils sont dopés).

Remarque

En fait, le déplacement des charges dans un isolant n'est pas impossible mais très difficile. À titre d'exemple une charge se déplacera environ $5 \cdot 10^{24}$ fois plus facilement dans du cuivre que dans du verre. C'est la résistivité du matériau qui définit la facilité avec laquelle les charges se déplacent, plus elle est faible, plus facilement se déplaceront les charges.

a) Les différents types de porteurs de charge

L'électron est le porteur de charge à l'origine du courant dans les matériaux conducteurs (le cuivre et l'aluminium sont les matériaux usuels pour réaliser les connexions, l'or pour les contacts). Ces matériaux sont caractérisés par un grand nombre d'électrons libres, c'est-à-dire qu'à température ambiante, les électrons des couches supérieures de l'atome ont suffisamment d'énergie pour se soustraire à l'attraction du noyau, ils sont alors libres de se déplacer sous l'influence de forces électriques extérieures à l'atome.

L'ion est un atome qui a perdu (ion positif) ou gagné (ion négatif) un ou plusieurs électrons, c'est le porteur de charge à l'origine du courant dans les liquides (électrolyte) ou dans les gaz (plasma).

La paire électrons-trous (un trou correspond à l'absence d'électron et est assimilable à une charge positive) est à l'origine du courant dans les semi-conducteurs (dont le silicium).

b) Loi de conservation de la charge

La charge électrique q est une grandeur conservative : la charge totale d'un système fermé est constante (c'est-à-dire qu'aucune charge q ne peut être ni détruite, ni produite).

Ainsi, les générateurs d'électricité ne créent pas de charge mais les mettent en mouvement, ils sont donc à l'origine du courant électrique.

Les objets sont naturellement neutres, c'est-à-dire que leur charge totale, somme algébrique de ses charges positives et négatives, est nulle.

Pour un système isolé, c'est-à-dire ne pouvant pas échanger de matière avec l'extérieur, la charge totale est constante. Néanmoins, les charges sont susceptibles de se déplacer au sein du système.

Pour un système non isolé, il est possible de le charger en rompant l'équilibre entre ses charges positives et négatives. Ainsi, un apport de charges négatives le chargera

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

négativement, alors qu'un déficit de charges négatives le chargera positivement. Cet apport ou ce déficit de charge se fera au moyen d'un courant électrique.

19.2.2 Le courant électrique

Le courant électrique i traduit le déplacement ordonné d'un ensemble de charges dans un matériau conducteur. L'intensité du courant a pour unité l'ampère (A).

Le courant électrique traduit un débit de charge électrique à travers une section de conducteur.

Il est définit par la relation :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

où $\mathrm{d}q$ représente la quantité algébrique de charge (en coulombs) traversant la section S du conducteur pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ (en secondes).

Par convention, le sens positif du courant est indiqué par une flèche. Ce sens correspond au sens de déplacement des charges positives. Si ce sont les électrons qui conduisent le courant, alors ils se déplacent dans le sens opposé au courant. Dans la définition précédente, la quantité de charge $\mathrm{d}q$ doit donc prendre en compte le signe de la charge ainsi que son sens de déplacement.

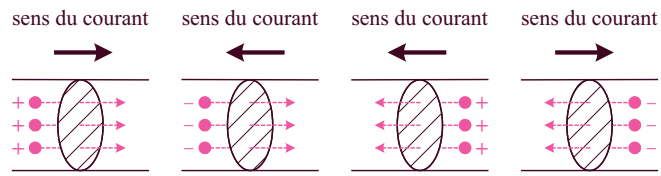


Figure 19.1 **Sens de déplacement des charges et sens du courant engendré**

Remarque

Lorsque la conduction est assurée par différents types de charge (comme c'est le cas dans les semi-conducteurs par exemple), le courant résultant est la somme algébrique des courants engendrés par chaque type de charge.

Voir chapitre 23

On distingue deux types de courant selon l'origine du mouvement des charges.

- Le courant de conduction où le mouvement des charges est provoqué par l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ (les charges sont soumises à une force $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$). C'est le type de conduction rencontré dans les conducteurs ohmiques.
- Le courant de diffusion où le mouvement des charges est provoqué par une densité de charge non uniforme, les charges se déplaçant des zones de plus forte densité vers les zones de plus faible densité. Ce phénomène est exploité dans les diodes et les transistors bipolaires par exemple.

Remarque

La vitesse moyenne de déplacement des charges associée au courant est faible (de l'ordre de 10^{-4} m · s^{-1}) bien que chaque charge élémentaire soit individuellement animée d'un mouvement très rapide dû à l'agitation thermique (de l'ordre du 10^5 m · s^{-1}), ce mouvement désordonné n'engendrant pas de courant à l'échelle macroscopique.

19.2.3 La tension (ou différence de potentiel)

On admettra qu'une charge q, placée en un point où le potentiel est v possède une énergie potentielle électrique $w = q \cdot v$. L'unité du potentiel électrique est le volt (V). Comme tous les potentiels en physique, le potentiel électrique est défini à une constante près. On peut donc définir un point comme référence de potentiel, tel que son potentiel soit nul, ce point est symbolisé par une masse.

La tension u entre deux points A et B d'un circuit est la différence de potentiel entre ces deux points, soit $u = v_A - v_B$.

Par convention, la tension $u = v_A - v_B$ sera indiquée par une flèche orientée de B vers A (figure 19.2b).

On peut additionner les tensions en tenant compte de leur orientation, ainsi, sur l'exemple de la figure 19.2c, on obtient :

$$u = v_A - v_C = (v_A - v_B) + (v_B - v_C) = u_1 - u_2$$

La différence de potentiel est à l'origine du déplacement des charges, donc du courant électrique.

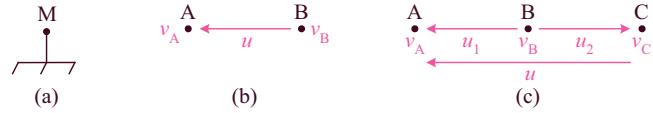


Figure 19.2 **(a) Symbole de la masse, le point M a un potentiel nul (b) Définition de la tension (c) Additivité des tensions**

19.2.4 L'énergie et la puissance électrique

Au cours d'un intervalle de temps dt une charge dq se déplace dans un élément entre deux points A et B présentant une différence de potentiel $u = v_A - v_B$. Elle voit son énergie potentielle varier de la quantité $dw = dq \cdot (v_A - v_B) = dq \cdot u$, or $dq = i \cdot dt$, donc la variation d'énergie électrique de la charge s'exprimera par :

$$dw = ui \cdot dt \text{ en joules (J)}$$

Si la charge perd de l'énergie électrique, c'est l'élément qui lui a prélevé et l'a convertie sous une autre forme : en chaleur (résistance), en énergie mécanique (moteur),

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

chimique (accumulateur)... ou stockée sous forme électromagnétique. On dit alors que l'élément est récepteur.

Si la charge gagne de l'énergie électrique, c'est l'élément qui lui a fourni par le biais d'une conversion d'énergie. On dit alors que l'élément est générateur.

L'énergie échangée au cours d'un intervalle de temps T se calcule par la formule :

$$W = \int_0^T u \cdot i \cdot \mathrm{d}t$$

On définit la puissance comme le taux de transfert de l'énergie (ou débit d'énergie) :

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = u \cdot i \text{ en Watt (W)}$$

Remarque

Si les grandeurs u et i sont constantes dans le temps, alors la puissance l'est aussi et s'obtient en faisant le produit algébrique du courant avec la tension. Lorsque le courant ou la tension sont variables, la puissance l'est aussi, on calcule alors sa valeur moyenne sur un intervalle de temps donné T par la formule

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \cdot \mathrm{d}t$$

19.3 MODÉLISATION DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

19.3.1 Approximation des régimes quasi stationnaires

Étudions un circuit élémentaire et familier de tout le monde. Il s'agit d'une ampoule connectée à une batterie par l'intermédiaire d'un interrupteur et de fils électriques.

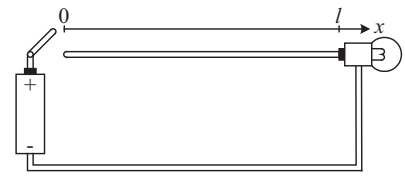


Figure 19.3 **Circuit électrique élémentaire**

Lorsque l'on ferme l'interrupteur, on ferme le circuit électrique et un courant constant s'établit, circulant entre la batterie et l'ampoule par l'intermédiaire des fils. Ce courant provoque un échauffement du filament de l'ampoule qui rayonne et éclaire.

Si l'on analyse plus en détail les phénomènes mis en jeu au moment de la fermeture, la pile va créer un champ électrique dans le fil conducteur. Sous l'effet de ce champ, les électrons libres du fils vont se mettre en mouvement et engendrer un courant.

Pourquoi l'ampoule s'allume-t-elle « instantanément » ? Il n'est pas nécessaire d'attendre que les électrons situés initialement au niveau de l'interrupteur atteignent l'ampoule pour que celle-ci s'allume. C'est la circulation du courant qui provoque l'éclairement. Le champ électrique se propage dans les fils conducteurs à une vitesse proche de celle de la lumière ($c \approx 300\,000$ km $\cdot$ s^{-1}). Ce champ porte l'information qui donne « l'ordre » aux électrons de se mettre en mouvement. Ainsi, si l'on mesure le courant en $x = 0$ (désigné i (0, t)) et en $x = l$ (désigné i (l, t)), on observe les allures représentées sur la figure 19.4.

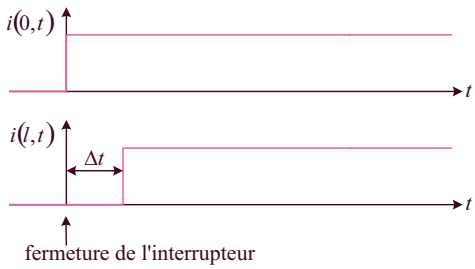


Figure 19.4

Le courant au niveau de l'ampoule i (1, t) apparaît avec un retard $\Delta t = l/c$ par rapport à l'instant de fermeture. Ce retard correspond au temps de propagation du champ électrique de l'interrupteur vers l'ampoule. Si la longueur l est petite, ce retard est très faible (10 ns pour une longueur de 3 m) et on peut considérer qu'à chaque instant, le courant est partout le même dans le fil, soit i (0, t) = i (l, t).

Supposons maintenant que l'on ouvre et que l'on ferme l'interrupteur périodiquement, le courant va alors s'établir et s'éteindre périodiquement selon l'allure représentée sur la figure 19.5.

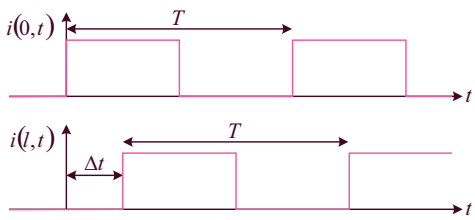


Figure 19.5

Si cette action est suffisamment rapide, alors on ne pourra plus considérer qu'à chaque instant le courant dans le fil est partout le même. Un critère de décision peut être lorsque le retard est équivalent à une période T = 1/f, donc lorsque $f = c/l$ (soit une fréquence de 100 MHz dans notre exemple).

Dans tout le reste de ce cours, on supposera que les effets de propagation peuvent être négligés ($f \ll c/l$), c'est l'approximation des régimes quasi stationnaires. Dans ce contexte, on peut donner une description des éléments constituant le circuit sous forme de dipôles localisés ponctuellement dans le circuit, reliés entre eux par des connexions équipotentielles n'engendrant aucun retard.

19.3.2 Le dipôle électrique

Le dipôle électrique est un élément possédant deux pôles, par exemple un fil, une pile, une diode, une ampoule, un radiateur, un moteur électrique... Tous les appareils domestiques que nous connectons au réseau sont aussi des dipôles puisqu'ils sont raccordés par les deux fiches de la prise de courant.

Le courant entrant dans le dipôle est le même que celui qui en sort. Le dipôle est entièrement caractérisé par le courant qui le traverse et la tension à ses bornes. Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dipôles connectés ensemble.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Certains éléments possèdent plus de deux pôles (transistor...), on les représente alors à l'aide de quadripôles (possédant quatre pôles, définit par deux tensions et deux courants) et on fait appel au formalisme des matrices pour établir les relations entre ces quatre grandeurs.

a) Convention d'un dipôle

Suivant l'orientation du courant et de la tension aux bornes du dipôle, il est possible de définir deux conventions.



Figure 19.6 **(a) Convention récepteur (b) Convention générateur**

Remarque

Il est important de différencier le sens réel du courant ou de la tension, qui n'est pas toujours connu *a priori*, de son sens conventionnel qui est arbitraire.

Il ne s'agit que d'une convention d'écriture, le caractère « physiquement » récepteur ou générateur d'un dipôle dépend du signe de sa puissance et de la convention adoptée.

En convention récepteur :

- Si u et i sont de même signe, alors $p > 0$, le dipôle absorbe de l'énergie.
- Si u et i sont de signe opposé, alors $p < 0$, le dipôle fournit de l'énergie.

En convention générateur :

- Si u et i sont de même signe, alors $p > 0$, le dipôle fournit de l'énergie.
- Si u et i sont de signe opposé, alors $p < 0$, le dipôle absorbe de l'énergie.

b) Caractérisation des dipôles électriques.

Les dipôles sont caractérisés par une relation mathématique $u = f(i)$ ou $i = g(u)$ et/ou par leur caractéristique statique (représentation graphique dans le plan (u, i) lorsque ces grandeurs sont constantes).

• *Dipôle linéaire et non linéaire*

Un dipôle est linéaire si la relation liant u à i est linéaire telle que :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y).$$

Quatre opérateurs obéissent à cette définition : proportionnalité, dérivation, intégration et retard temporel.

Par extension, on appelle dipôle linéaire un dipôle dont la caractéristique statique est une droite.

Un circuit est linéaire s'il n'est constitué que de dipôles linéaires.

• *Dipôle actif et dipôle passif*

Un dipôle actif peut fournir de l'énergie au circuit extérieur pendant une durée « indéfinie », sa caractéristique statique ne passe pas par l'origine. Les générateurs sont des dipôles actifs.

Un dipôle ne répondant pas à la définition précédente est passif (sa caractéristique statique passe par l'origine). Ainsi, dans un circuit passif, constitué uniquement de dipôles passifs, aucun courant ne peut circuler de manière permanente.

Parmi les dipôles passifs, on peut distinguer ceux purement dissipatifs, pour lesquels u et i sont toujours de même signe (en convention récepteur), par exemple la résistance, la diode... et ceux réactifs (inductance et condensateur) qui peuvent emmagasiner et restituer de l'énergie.

Voir chapitres 20 et 21

c) Point de fonctionnement

Lorsque l'on relie deux dipôles entre eux, l'un des deux dipôles est en convention récepteur alors que l'autre est en convention générateur. Les deux dipôles partagent alors la même tension et le même courant et ils échangent de l'énergie. Pour déterminer les valeurs du couple de grandeurs $\{u_0\,;\,i_0\}$, il faut déterminer le point de fonctionnement qui est le (ou les) point(s) d'intersection de leurs caractéristiques statiques (celles-ci sont tracées en accord avec la convention du dipôle).

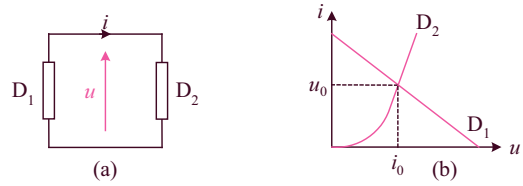


Figure 19.7 **Exemple de point de fonctionnement de deux dipôles connectés ensemble**

19.3.3 Principaux dipôles linéaires

L'étude d'un circuit électrique passe par la modélisation des dipôles qui le composent. Ainsi, il est commode de disposer d'un certain nombre de dipôles élémentaires simples qui, une fois connectés ensemble, représenteront le plus fidèlement possible le circuit électrique réel.

a) L'interrupteur idéal

L'interrupteur idéal possède deux états : ouvert ou fermé.



Figure 19.8 **(a) Interrupteur ouvert (b) Interrupteur fermé**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Lorsque l'interrupteur est ouvert, il impose que le courant i le traversant soit nul, quelle que soit la tension u à ses bornes qui est alors imposée par le circuit extérieur (on dit que l'interrupteur constitue un circuit ouvert).

Lorsque l'interrupteur est fermé, il impose que la tension u à ses bornes soit nulle, quel que soit le courant i qui le traverse qui est alors imposé par le circuit extérieur (on dit que l'interrupteur constitue un court-circuit).

Remarque

En dehors de l'interrupteur lui-même, l'interrupteur idéal est utilisé pour modéliser simplement d'autres dipôles, par exemple la diode, le condensateur en courant continu...

Voir chapitre 22

b) La résistance

Certains éléments, appelés conducteur Ohmique, présentent une tension à leurs bornes proportionnelle au courant les traversant. Cette propriété est exprimée par la loi d'Ohm. Ils sont modélisés par une résistance R dont l'unité est l'ohm (Ω).

$$u = \mathrm{R} \cdot i$$



Figure 19.9 **(a) Symbole de la résistance (b) Caractéristique statique de la résistance**

Les matériaux conducteurs constituant les fils de connexion, les lignes de transport de l'électricité ou les pistes des circuits imprimés sont des conducteurs ohmiques, ils présentent donc une résistance que l'on cherche la plus faible possible. On peut, suivant le niveau d'approximation, les considérer comme des conducteurs parfaits sans résistance, ou comme des conducteurs réels avec résistance.

Énergie dans une résistance

La circulation d'un courant dans un milieu conducteur provoque un dégagement de chaleur (l'énergie électrique est convertie en énergie thermique), engendrant un accroissement de la température du milieu. Ce phénomène est appelé effet Joule.

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance est égale à :

$$p = \mathrm{R} \cdot i^2$$

Ce phénomène s'apparente à un frottement mécanique des porteurs de charge avec les atomes du milieu où ils circulent. On interprète alors la notion de résistance électrique

d'un conducteur par la résistance mécanique s'opposant au déplacement des porteurs de charge, donc au courant.

Expression de la résistance d'un conducteur

La résistance d'un milieu conducteur s'exprime par la formule $R = \rho \cdot \dfrac{L}{S}$

ρ : résistivité du milieu, elle dépend essentiellement de sa nature et de la température.

L : longueur du trajet parcouru par le courant dans le milieu.

S : section de passage du courant dans le milieu (en la supposant constante).

c) La source de tension idéale

Une source de tension idéale impose la tension à ses bornes, quel que soit le courant la traversant, ce dernier étant imposé à la source par le circuit extérieur.

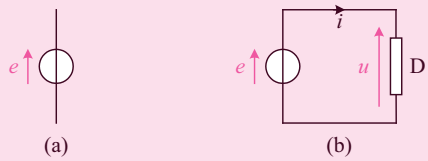


Figure 19.10 **(a) Symbole de la source de tension idéale (b) Source de tension idéale connectée à un dipôle quelconque**
$u = e$ quel que soit le courant i qui dépend alors de la nature du dipôle D.

d) La source:de courant idéale

Une source de courant idéale impose le courant la traversant, quelle que soit la tension à ses bornes, cette dernière étant imposée à la source par le circuit extérieur.

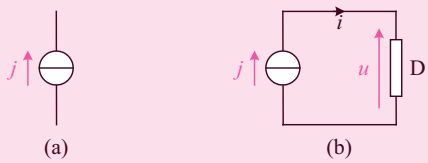


Figure 19.11 **(a) Symbole de la source de courant idéale (b) Source de courant idéale connectée à un dipôle quelconque**
$i = j$ quelle que soit la tension u qui dépend alors de la nature du dipôle D.

Remarque

Un dipôle ne peut être assimilé à une source de courant que dans la mesure où un courant peut effectivement circuler dans cette source. Si la branche comportant la source de courant idéale est ouverte, aucun courant ne peut circuler et il est nécessaire de modifier le modèle du dipôle.

Source indépendante et source liée

Une **source indépendante** est une source dont la grandeur caractéristique (courant j ou tension e) ne dépend que de la source elle-même.

Une **source liée** est une source dont la grandeur caractéristique (courant j ou tension e) dépend d'une grandeur extérieure à la source (courant ou tension).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

e) Les sources réelles

En général, les sources d'énergie ne présentent pas une tension et un courant indépendant l'un de l'autre et leur caractéristique statique n'est pas forcement linéaire. À titre d'exemple, on a représenté figure 19.12a la caractéristique statique d'une cellule photovoltaïque.

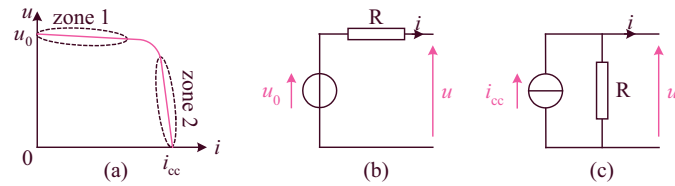


Figure 19.12 **(a) Caractéristique statique d'une cellule photovoltaïque (b) Source de tension réelle (c) Source de courant réelle**

Cette caractéristique n'est globalement pas linéaire. Toutefois, si le point de fonctionnement se situe dans la zone 1, il est possible de linéariser la caractéristique au voisinage du point de fonctionnement. La tension dépendant peu du courant dans cette zone, la cellule a plutôt un caractère de source de tension, on écrira $u = u_0 - \mathrm{R} \cdot i$ où u_0 représente la tension à vide du générateur (lorsque $i = 0$) et R sa résistance interne (de faible valeur étant donné la faible pente de la caractéristique $u(i)$). Cette équation conduit au schéma de la figure 19.12b.

Si le point de fonctionnement se situe dans la zone 2, c'est le courant qui dépend peu de la tension, la cellule a plutôt un caractère de source de courant, on écrira $i = i_{cc} - u/\mathrm{R}$ où i_{cc} représente le courant de court-circuit du générateur (lorsque $u = 0$) et R sa résistance interne (de forte valeur étant donné la forte pente de la caractéristique $u(i)$). Cette équation conduit au schéma de la figure 19.12c.

Remarque

Un générateur peut donc admettre un modèle sous la forme d'une source de tension réelle ou d'une source de courant réelle. La source de tension est plus adaptée au générateur à faible résistance interne (si R est nulle, la source devient idéale) alors que la source de courant est plus adaptée au générateur à forte résistance interne (si R est infinie, la source devient idéale).

f) Le condensateur

Un condensateur présente deux armatures conductrices (électrodes), séparées entre elles par un isolant. La présence d'une charge + q sur l'une de ses armatures entraîne l'apparition d'une charge opposée – q sur l'autre armature. Cet effet est dû à l'influence électrostatique des charges entre elles, les charges de signe opposé s'attirant, elles tendent à se neutraliser en se rejoignant. L'isolant les en empêchant, les charges se condensent alors sur les armatures. La présence d'une distribution de charge entraîne l'existence d'un champ électrique dans l'isolant entre les armatures, il en résulte une différence de potentiel u aux bornes du condensateur.

Le condensateur est caractérisé par sa capacité C, en farads (F), définit comme suit :

$$q = \mathrm{C} \cdot u \qquad i = \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \quad \text{(si C est une constante)}$$

La capacité dépend de la géométrie (armature et isolant) et du matériau constituant l'isolant.

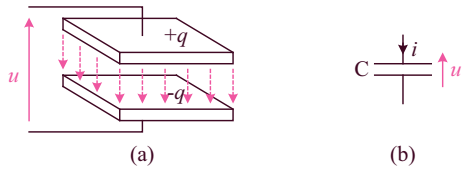


Figure 19.13 **(a) Schéma d'un condensateur (b) Symbole du condensateur**

Remarque

Lorsque la tension aux bornes du condensateur est constante, le courant le traversant est nul, le condensateur est donc assimilable à un circuit ouvert.

Énergie d'un condensateur

La puissance absorbée par un condensateur s'écrit :

$$p = u \cdot i = c \cdot u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{C} \cdot u^2\right)$$

Un condensateur emmagasine une énergie sous forme électromagnétique :

$$w = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{C} \cdot u^2$$

L'existence d'une énergie emmagasinée par le condensateur implique que la tension à ses bornes ne peut pas être discontinue. En effet, une discontinuité de tension entraînerait une discontinuité d'énergie, ce qui nécessiterait une puissance infinie.

Remarque

Dans un circuit, les condensateurs peuvent être des composants localisés, dimensionnés pour une application donnée. Mais les circuits électriques eux-mêmes, par leur agencement géométrique, peuvent constituer des condensateurs (que l'on dira parasite). Par exemple, une ligne aérienne haute tension présente une capacité par rapport au sol.

g) La bobine

Une bobine est généralement constituée d'un conducteur enroulé sur lui même. L'existence d'un courant dans le conducteur entraîne l'apparition d'un champ magnétique

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Voir chapitre 18

dans l'espace l'entourant. Ce champ magnétique engendre un flux magnétique ϕ au travers de la bobine. La variation de ce flux magnétique induit, en vertu de la loi de Faraday, une force électromotrice dans la bobine. La bobine est caractérisée par son inductance L, en henry, définie comme suit :

$$\phi = \mathrm{L} \cdot i \qquad u = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \qquad u = \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{(si L est une constante)}$$

L'inductance dépend de la géométrie de la bobine et des matériaux constituant l'environnement proche de la bobine.



Figure 19.14 **(a) Schéma d'une bobine (b) Symbole de la bobine**

Remarque

Lorsque le courant traversant une bobine est constant, la tension à ses bornes est nulle, la bobine est donc assimilable à un court-circuit.

Énergie d'une bobine

La puissance absorbée par une bobine s'écrit

$$p = u \cdot i = \mathrm{L} \cdot i \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{L} \cdot i^2\right)$$

Une bobine emmagasine une énergie sous forme électromagnétique :

$$w = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{L} \cdot i^2$$

L'existence d'une énergie emmagasinée par la bobine implique que le courant la traversant ne peut pas être discontinu. En effet, une discontinuité de courant entraînerait une discontinuité d'énergie, ce qui nécessiterait une puissance infinie.

Remarque

Dans un circuit, les bobines peuvent être des composants localisés, dimensionnés pour une application donnée. Mais les circuits électriques eux-mêmes, par leur agencement géométrique, peuvent constituer des bobines (que l'on dira parasite). Par exemple, une ligne aérienne haute tension présente une inductance proportionnelle à sa longueur.

À retenir

- Le **déplacement des charges électriques** est à l'origine du courant électrique.
- La **tension** est la différence de potentiel entre deux points.
- La **puissance** d'un dipôle s'exprime par le produit du courant avec la tension à ses bornes.
- On peut modéliser les éléments constituant un circuit par des **dipôles**, ceux-ci sont caractérisés par leur relation tension-courant.
- Les **générateurs** délivrent l'énergie électrique soit en imposant la tension, soit le courant.
- La **résistance** dissipe de l'énergie par effet Joule alors que la bobine et le condensateur emmagasine de l'énergie.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 616.

19.1 Courant électrique et vitesse des charges

Un conducteur en cuivre de section $S = 25\ \text{mm}^2$ est traversé par un courant constant $i = 10\ \text{A}$. Dans le cuivre, la densité volumique de charge (électrons libres) est

$$n = 82{,}5 \cdot 10^{27}\ \text{m}^{-3}.$$

a) Déterminer la vitesse moyenne de dérive des électrons libres.
b) Déterminer le nombre d'électrons traversant la section du conducteur au cours d'une seconde.

19.2 Énergie potentielle

Un électron traverse, dans le sens des potentiels décroissants, un dipôle ayant une tension de 5 V à ses bornes.

a) Quelle quantité d'énergie a été échangée entre l'électron et le dipôle ?
b) L'électron a-t-il acquis ou cédé cette énergie ?
c) Faire le lien entre les signes du courant, de la tension et de la puissance.

19.3 Puissance et énergie

a) Quelle est l'énergie consommée par une ampoule de 60 W fonctionnant pendant deux heures (exprimée en W · h puis en J) ?

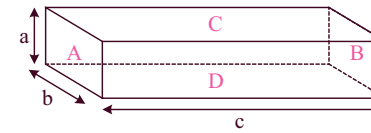
Une batterie automobile de 12 V possède une capacité de 60 A · h (ampère-heure).

b) Quelle est la quantité d'énergie stockée dans cette batterie (en W · h puis J) ?
c) Quelle est sa puissance si elle débite un courant de 30 A et pendant combien de temps pourra-t-elle débiter cette puissance ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

19.4 Résistance d'un barreau conducteur

Un pavé de cuivre, de résistivité $\rho = 17 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$ a pour dimension $a = 1$ cm, $b = 2$ cm, $c = 5$ cm.



a) Si le courant circule entre les faces A et B, calculer la résistance du barreau.

b) Si le courant circule entre les faces C et D, calculer la résistance du barreau.

c) Conclure sur la notion de résistance d'un élément conducteur.

19.5 Source de tension et de courant

On connecte aux bornes d'une source de tension constante e = 10 V une résistance de charge valant successivement R = 1 kΩ et R = 500 Ω.

a) Pour les deux valeurs de R, calculer le courant circulant dans la résistance, la puissance fournit par la source et celle dissipée par effet Joule dans la résistance. Représenter la caractéristique statique et le point de fonctionnement.

On connecte aux bornes d'une source de courant constant $j = 10$ mA une résistance valant successivement R = 1 kΩ et R = 500 Ω.

b) Pour les deux valeurs de R, calculer la tension aux bornes de la résistance, la puissance fournie par la source et celle dissipée par effet Joule dans la résistance. Représenter la caractéristique statique et le point de fonctionnement.

c) Reprendre la question a) si la source n'est plus idéale et comporte une résistance interne de 50 Ω. Calculer la tension aux bornes de la résistance de charge.

19.6 Condensateur

a) Un condensateur de capacité C = 10 μF a une tension de 10 V à ses bornes.

Quelle est la charge accumulée sur ses armatures ? Quelle est l'énergie emmagasinée par le condensateur ?

b) On connecte le condensateur précédent à une source de courant constant d'intensité $i = 5$ mA. Le condensateur est initialement déchargé.

Quelle sera la tension à ses bornes après 10 ms ?

Si on connecte une source d'intensité $i = -20$ mA, combien de temps faudra-t-il pour décharger le condensateur ?

Représenter l'allure de la tension aux bornes du condensateur.

19.7 Bobine

a) Quelle est l'énergie emmagasinée dans une bobine de 10 mH traversée par un courant de 2 A ?

b) Si on applique une tension constante de 10 V pendant 20 ms à la bobine précédente, quelle sera la variation du courant ? Quelle sera la tension à appliquer à la bobine pendant 5 ms pour ramener le courant à sa valeur initiale ?

CIRCUITS EN RÉGIME CONTINU

20

PRÉALABLES

- Charge, courant, tension
- Dipôles linéaires (sources, résistance, condensateur, bobine)
- Énergie et puissance
- Résolution des équations différentielles du premier et du second ordre

MOTS CLÉS

- Loi des mailles et loi des noeuds
- Association de dipôles et dipôle équivalent
- Théorèmes de superposition, de Thévenin et de Norton
- Régime transitoire des circuits du premier et second ordre

OBJECTIFS

- Maîtriser les outils d'analyse des circuits en régime continu.
- Caractériser l'évolution des grandeurs électriques en régime transitoire.

Lorsqu'un circuit électrique est alimenté par des sources continues (constantes dans le temps), alors toutes les grandeurs, courants et tensions, sont continues. C'est le cas des circuits alimentés par des sources continues (piles, batteries, cellules photovoltaïques...).

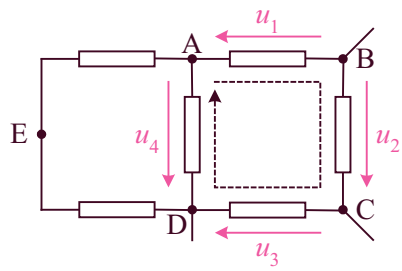
Nous montrerons qu'en présence de dipôles réactifs, les grandeurs ne s'établissent pas instantanément mais passent par un régime transitoire, dont la durée dépend des éléments constituant le circuit. Au cours de ce régime transitoire, les grandeurs sont donc variables mais elles tendent toutes vers des valeurs constantes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudierons les lois auxquelles obéissent les courants et tensions lorsque ces grandeurs sont parfaitement constantes. Ces lois permettront alors de déterminer la répartition des courants et des tensions dans le circuit. Dans la seconde partie, nous étudierons de quelle manière s'établissent ces grandeurs constantes dans des circuits simples.

20.1 ÉTUDE DES CIRCUITS EN RÉGIME CONTINU ÉTABLI

20.1.1 Les lois de Kirchhoff

a) Terminologie relative aux circuits électriques



AB, BC, CD, AD sont des branches

ABCDA est une maille

A, B, C, D sont des nœuds

E n'est pas un nœud

Figure 20.1 **Exemple d'une portion de circuit électrique**

- *Branche*

Une branche est constituée d'un ensemble de dipôles connectés ensemble et traversés par le même courant.

- *Nœud*

Un nœud est un point du circuit où sont connectés plus de deux conducteurs ou dipôles ; le courant peut s'y diviser. Il constitue l'extrémité d'une branche.

- *Maille*

Une maille est constituée d'un ensemble de branches formant un circuit fermé et ne passant qu'une fois par un nœud donné.

b) Les lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

La somme algébrique des courants arrivant à un nœud est nulle.

On oriente arbitrairement les courants dans les branches, on applique la loi des nœuds en comptant positivement les courants rentrant dans le nœud et négativement ceux en sortant. Pour l'exemple de la figure 20.2, la loi des nœuds au nœud N permet d'écrire $i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$.

En écrivant cette égalité sous la forme $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$, on peut donner une seconde formulation à la loi des nœuds.

La somme des courants rentrant dans le nœud est égale à la somme des courants sortant du nœud.

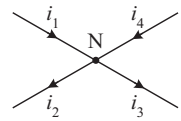


Figure 20.2

Cette loi s'explique par le fait qu'il ne peut pas y avoir d'accumulation de charge au nœud (toutes les grandeurs étant constantes dans le temps), l'arrivée d'une charge au nœud (courant entrant) doit être compensée par le départ de la même quantité de charge (courant sortant).

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle.

On oriente arbitrairement les tensions aux bornes des dipôles. On choisit un sens de parcours de la maille et on applique la loi en comptant positivement les tensions dans le sens de la maille et négativement celles en sens opposé. Pour l'exemple de la figure 20.1, on obtient l'égalité $-u_1 + u_2 + u_3 - u_4 = 0$.

Cette loi s'explique par le fait que le potentiel ne dépend que du point considéré et pas du trajet pour y arriver ; comme la maille est fermée, les points de départ et d'arrivée sont confondus, donc la différence de potentiel entre le point de départ et d'arrivée est nulle.

20.1.2 Quelques conséquences des lois de Kirchhoff

a) Résistance équivalente

Un circuit linéaire passif, constitué uniquement de résistances, vu entre deux points A et B, est équivalent à une résistance unique appelée résistance équivalente entre les points A et B.

Cela signifie que si dans le circuit réel, où il existe une tension u entre les points A et B et un courant i circulant entre ces deux points, on remplace le circuit réel par sa résistance équivalente, on ne modifiera ni le courant ni la tension.

Cette notion est indispensable lors de l'application du théorème de Thévenin ou de Norton.

La détermination de cette résistance s'appuie sur l'identification des deux configurations élémentaires : résistances en série et résistances en parallèle.

Association de deux résistances en série

On dit que deux dipôles sont en série lorsqu'ils ont une borne commune et qu'ils sont traversés par le même courant, aucune dérivation de courant ne pouvant se produire à leur point de connexion.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

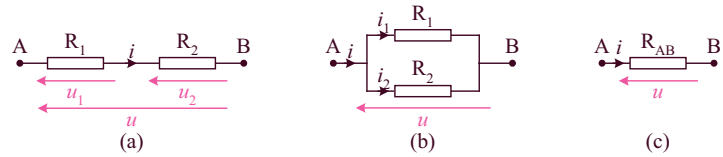


Figure 20.3 **(a) Association en série de deux résistances**
(b) Association en parallèle de deux résistances
(c) Résistance équivalente entre les points A et B

Deux résistances en série peuvent être remplacées par une résistance unique de valeur égale à la somme des deux résistances.

DÉMONSTRATION

On peut écrire $u = u_1 + u_2$, or en vertu de la loi d'Ohm $u_1 = R_1 \cdot i$ et $u_2 = R_2 \cdot i$, soit $u = (R_1 + R_2) \cdot i = R_{AB} \cdot i$ avec $R_{AB} = R_1 + R_2$.

Association de deux résistances en parallèle

On dit que deux dipôles sont en parallèle lorsque leurs bornes sont connectées aux deux mêmes points, ils ont alors la même tension à leurs bornes.

Deux résistances en parallèle peuvent être remplacées par une résistance unique dont l'inverse de la valeur est égal à la somme des inverses des deux résistances.

DÉMONSTRATION

On peut écrire $i = i_1 + i_2$, or en vertu de la loi d'Ohm $i_1 = u/R_1$ et $i_2 = u/R_2$, soit $i = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot u = \frac{u}{R_{AB}}$ avec $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Remarque

Pour les deux associations précédentes, les résistances R_1 et R_2 peuvent elles-mêmes être des résistances équivalentes, ce qui permet de généraliser la notion de résistances équivalentes aux cas où il y a plus de deux résistances.

En pratique, on peut mesurer la résistance équivalente entre deux point A et B d'un circuit passif en injectant dans ce circuit (par A ou B) un courant et en mesurant la tension résultante entre les deux points A et B. La résistance équivalente s'obtient en faisant le rapport $R_{AB} = u/i$. C'est sur ce principe que fonctionnent les appareils de mesure de résistance appelés « ohmmètres ».

b) Bobine équivalente

En procédant de la même manière que pour les résistances, on démontre que :

$$L_{AB} = L_1 + L_2 \text{ (série)} \qquad \frac{1}{L_{AB}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \text{ (parallèle)}$$

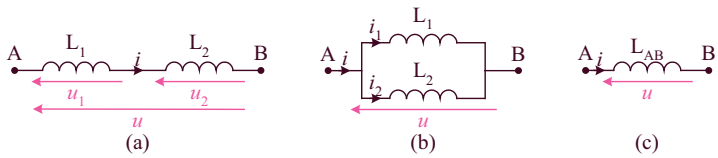


Figure 20.4 **(a) Association en série de deux bobines**
(b) Association en parallèle de deux bobines
(c) Bobine équivalente entre les points A et B

c) Condensateur équivalent

En procédant de la même manière que pour les résistances, on démontre que :

$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ (série)} \qquad C_{AB} = C_1 + C_2 \text{ (parallèle)}$$

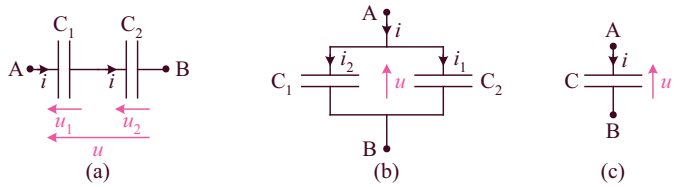


Figure 20.5 **(a) Association en série de deux condensateurs**
(b) Association en parallèle de deux condensateurs
(c) Condensateur équivalent entre les points A et B

d) Association de deux sources idéales

On peut remplacer deux sources de tension idéales en série par une source unique de valeur égale à la somme algébrique des deux tensions.

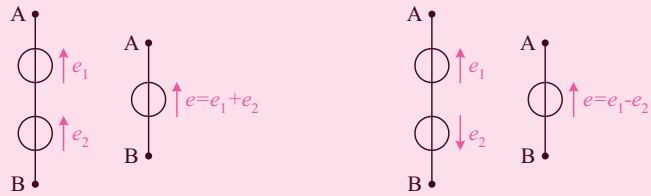


Figure 20.6 **Association en série de deux sources de tensions idéales**

On peut remplacer deux sources de courant idéales en parallèle par une source unique de valeur égale à la somme algébrique des deux courants.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

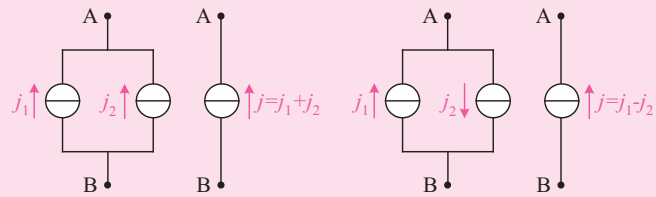


Figure 20.7 **Association en parallèle de deux sources de courant idéales**

Remarque

L'association en parallèle de sources de tension idéales est interdite car elles imposent toutes la tension à leurs bornes, il y a donc un conflit si ces tensions sont différentes. De même, l'association en série de sources de courant idéales est interdite car elles imposent toutes le courant dans la branche, il y a donc un conflit si ces courants sont différents.

e) Diviseur de tension

Lorsqu'une tension u est appliquée aux bornes de deux résistances (R_1 et R_2) en série (circuit (a) de la figure 20.3), les tensions aux bornes de chacune des résistances s'expriment par les relations suivantes :

$$u_1 = u \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad u_2 = u \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

DÉMONSTRATION

$u = u_1 + u_2$, or en vertu de la loi d'Ohm $u_1 = R_1 \cdot i$ et $u_2 = R_2 \cdot i$, soit $u = (R_1 + R_2) \cdot i$, donc $i = \dfrac{u}{R_1 + R_2}$; en remplaçant l'expression de i dans la loi d'Ohm, on démontre les égalités précédentes.

Remarque

La tension la plus élevée sera celle aux bornes de la résistance de plus forte valeur. Si les deux résistances sont identiques, alors la tension u se divise en deux moitiés égales.

f) Diviseur de courant

Lorsqu'un courant i se divise dans deux résistances (R_1 et R_2) en parallèle (circuit (b) de la figure 20.3), les courants traversant chacune des deux résistances s'expriment par les relations suivantes :

$$i_1 = i \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \qquad i_2 = i \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

DÉMONSTRATION

$i = i_1 + i_2$, or en vertu de la loi d'Ohm $i_1 = u/R_1$ et $i_2 = u/R_2$, soit $u = R_{AB} \cdot i = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot i$; en remplaçant l'expression de u dans la loi d'Ohm, on démontre les égalités précédentes.

Remarque

Le courant le plus élevé circulera dans la résistance de plus faible valeur, on en conclut que le courant emprunte le trajet le moins résistant. Si les deux résistances sont identiques, alors le courant i se divise en deux moitiés égales.

20.1.3 Théorèmes

Théorème de superposition

Dans un circuit linéaire, l'effet d'une somme de sources indépendantes est égal à la somme des effets provoqués par chaque source indépendante lorsqu'elle agit seule (par « effets » on entend le courant dans une branche ou la tension à ses bornes).

Remarques

Ce théorème est applicable lorsque, dans un circuit, plusieurs sources agissent simultanément. On étudiera alors l'effet provoqué par chaque source lorsqu'elle agit seule, toutes les autres étant éteintes. On peut aussi l'appliquer lorsque le circuit ne comporte qu'une seule source mais que la tension ou le courant de cette source peut se décomposer comme une somme de signaux. On fera alors correspondre à chacun de ces signaux une source virtuelle dont on pourra étudier l'effet séparément (voir les associations de sources idéales).

Comment éteindre une source ?

Éteindre une source de tension idéale revient à la remplacer par un court-circuit.

Éteindre une source de courant idéale revient à la remplacer par un circuit ouvert.

Théorème de Thévenin

Un circuit linéaire actif, vu entre deux points A et B, peut être remplacé par une source de tension E_{Th} égale à la tension à vide entre les points A et B, en série avec une résistance R_{Th} égale à la résistance équivalente entre les points A et B lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes.

DÉMONSTRATION

La démonstration du théorème de Thévenin est une application des différentes notions développées jusqu'ici. Étudions le circuit (a) représenté figure 20.8 constitué d'un circuit linéaire actif (donc incluant des sources) situé à gauche des points A et B, auquel est connectée une résistance R. La tension entre les points A et B a pour valeur u et le courant circulant entre A et B vaut i.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Sur le circuit (b) de la figure 20.8, la source de tension E_{Th} est telle que le courant i_0 est nul. L'écriture de la loi des mailles induit $u_0 - E_{Th} - R \cdot i_0 = 0$, d'où $E_{Th} = u_0$ puisque $i_0 = 0$ (u_0 est appelée « tension à vide » puisque correspondant à un courant nul ; c'est la tension que l'on obtient entre les bornes A et B si le circuit entre A et B est ouvert).

Sur le circuit (c) de la figure 20.8, le circuit linéaire est rendu passif en éteignant toutes ses sources indépendantes, il est alors possible de le remplacer par sa résistance équivalente R_{AB} entre les points A et B. La présence de la source de tension E_{Th} engendre le courant $i_1 = \dfrac{E_{Th}}{R_{Th} + R}$. La tension entre les point A et B vaut alors $u_1 = -R_{AB} \cdot i_1$.

Si l'on superpose les circuits (b) et (c), on obtient le circuit initial (a), pour lequel $i = i_0 + i_1 = i_1$ et $u = u_0 + u_1 = u_0 - R_{AB} \cdot i$. L'équation de la tension montre que l'on peut remplacer l'ensemble du circuit linéaire, à gauche des points A et B par une source de tension de valeur u_0 en série avec une résistance R_{AB} comme sur le circuit équivalent (d) de la figure 20.8.

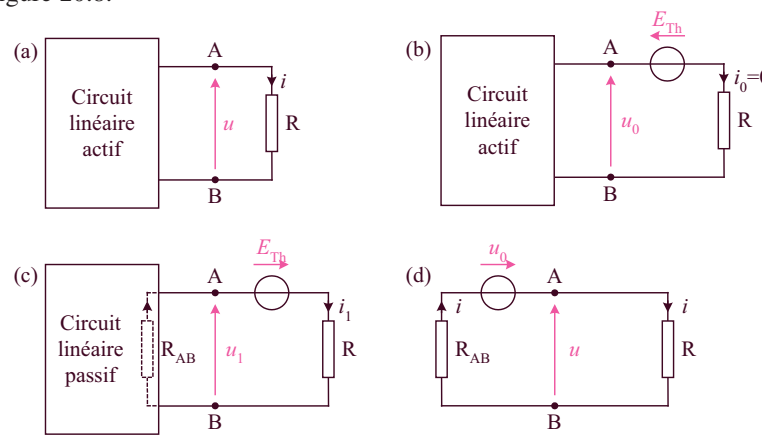


Figure 20.8

Théorème de Norton

Un circuit linéaire actif, vu entre deux points A et B, peut être remplacé par une source de courant I_N égale au courant de court-circuit circulant entre les points A et B, en parallèle avec une résistance R_N égale à la résistance équivalente entre les points A et B lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes.

Équivalence entre modèle de Thévenin et de Norton

Un modèle de Thévenin est équivalent à un modèle de Norton si :

$$E_{Th} = R_N \cdot I_N \quad et \quad R_{Th} = R_N$$

On peut donc remplacer l'un par l'autre (si cela permet d'associer des résistances ou des sources entre elles par exemple).

20.2 ÉTABLISSEMENT DU RÉGIME CONTINU

Lors de l'application de sources continues à un circuit passif, l'établissement des courants et des tensions continues n'est pas instantané. En effet, à cause de la présence de dipôles réactifs, l'énergie dans le circuit ne peut varier instantanément, donc les tensions et courants non plus. Ces grandeurs évoluent alors de leurs valeurs initiales vers leurs valeurs finales (dépendantes des sources), c'est ce que l'on appelle le régime transitoire.

Nous étudierons l'évolution des tensions et des courants dans les circuits ne comportant qu'un ou deux dipôles réactifs, des résistances et des sources continues.

20.2.1 Étude des circuits du premier ordre

Ces circuits ne comportent qu'un dipôle réactif, une résistance et une source continue. Les théorèmes de Thévenin et de Norton ont montré que l'on peut réduire tout circuit à une source associée à une résistance, donc ce circuit revêt un caractère général.

Remarque

Le dipôle réactif peut éventuellement être le dipôle équivalent à une association en série ou parallèle de plusieurs dipôles réactifs de même nature (soit uniquement des condensateurs, soit uniquement des bobines).

a) Étude d'un exemple : circuit RC avec une source de tension

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on connecte une source de tension constante E à un circuit constitué d'une résistance en série avec un condensateur.

$$u + \mathrm{R} \cdot i = \mathrm{E} \qquad i = \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On obtient l'équation de la tension puis celle du courant en dérivant l'équation de la tension :

$$u + R \cdot C \cdot \frac{du}{dt} = E$$

$$i + R \cdot C \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

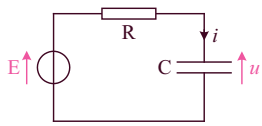


Figure 20.9 **Circuit RC série connecté à une source de tension**

b) Méthode générale de résolution des équations différentielles linéaires

Dans l'exemple précédent, pour le courant et la tension, on trouve une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant de forme générale :

$$x + \tau \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y \qquad \tau : \text{constante de temps}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La solution générale de ce type d'équation différentielle s'écrit comme la somme de deux termes $x(t) = x_l(t) + x_f(t)$.

- $x_l(t)$ est la solution à l'équation sans second membre ($y = 0$), appelée équation homogène. On l'appelle « régime libre » car il correspond à un circuit sans source où $x(t)$ évolue librement à partir d'une valeur initiale. Ce régime est caractéristique du circuit lui-même et ne dépend pas des sources du circuit.
- $x_f(t)$ est la solution particulière à l'équation avec second membre. On l'appelle « régime forcé ». En effet, le second membre contient l'action des sources du circuit qui forcent $x(t)$ à être du même type qu'elles.

Remarque

Si le circuit comporte des éléments dissipatifs (résistance), alors après une durée suffisante le régime libre s'éteint ($x_l(t)$ tend vers 0) et ne persiste que le régime forcé.

c) Solution générale de l'équation avec second membre constant et caractéristiques de cette solution

Dans notre cas, avec un second membre $y(t) = \mathrm{Y}$ constant, les solutions sont :

$$x_l(t) = \mathrm{K} \cdot e^{-t/\tau} \qquad x_f(t) = \mathrm{Y}$$

La détermination de la constante d'intégration K se fait par la connaissance de la condition initiale $x(0)$.

On peut alors donner une écriture générale de la solution sous la forme :

$$x(t) = (x(0) - \mathrm{Y}) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{Y}$$

Le problème ne consiste plus qu'à écrire l'équation différentielle sous sa forme générale, identifier la constante de temps τ du circuit et déterminer la valeur initiale (on s'appuie alors sur la propriété de non-discontinuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou du courant dans une bobine).

Remarque

$\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = \mathrm{Y}$, toutefois l'évolution du circuit peut-être telle que x n'atteint pas sa valeur finale Y.

- *Caractéristiques principales de la réponse temporelle*

La tangente à l'origine de $x(t)$ a pour équation $x(t) = (\mathrm{Y} - x(0)) \cdot \dfrac{t}{\tau} + x(0)$.

À l'instant $t = \tau$, la tangente a pour valeur Y.

En définissant la variation maximale de $x(t)$ par $\Delta x = \mathrm{Y} - x(0)$, on peut écrire :

$$x(t) - x(0) = \Delta x \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Cette formule nous permet d'exprimer quelques valeurs remarquables :

$$x(\tau) - x(0) \approx 0{,}63 \cdot \Delta x$$

Après une durée τ, $x(t)$ a évolué de 63 % de sa variation maximale.

$$x(3 \cdot \tau) - x(0) \approx 0{,}95 \cdot \Delta x$$

Après une durée $3 \cdot \tau$, $x(t)$ a évolué de 95 % de sa variation maximale.

$$x(4{,}6 \cdot \tau) - x(0) \approx 0{,}99 \cdot \Delta x$$

Après une durée $4{,}6 \cdot \tau \approx 5\tau$, $x(t)$ a évolué de 99 % de sa variation maximale.

d) Circuit RC avec une source de tension

L'application de la méthode précédente au circuit RC, conduit aux résultats suivants :

$$u(t) = (u(0) - \mathrm{E}) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{E} \qquad i(t) = \frac{\mathrm{E} - u(0)}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \tau = \mathrm{R} \cdot \mathrm{C}$$

Remarque

Comme $i = \mathrm{C} \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, on peut obtenir l'expression du courant par dérivation et multiplication par C de l'expression de la tension.

Dans le cas où le condensateur est initialement déchargé ($u(0) = 0$), on obtient :

$$u(t) = \mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \qquad i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Afin de donner un représentation générale de ces grandeurs, on représente la tension normalisée u/E et le courant normalisé $\mathrm{R} \cdot i/E$ en fonction du temps normalisé t/τ.

La tension u augmente et tend vers la tension E après une durée d'environ $5 \times \mathrm{R} \cdot \mathrm{C}$, la charge finale est alors égale à $q = \mathrm{C} \cdot \mathrm{E}$, le courant tend vers zéro car il n'y a plus de charges à apporter sur les armatures. À partir de la loi des mailles $\mathrm{E} = u + \mathrm{R} \cdot i$, on établit le bilan énergétique du circuit :

$$\mathrm{E} \cdot i = u \cdot i + \mathrm{R} \cdot i^2 \qquad \int_0^\infty \mathrm{E} \cdot i \cdot dt = \int_0^\infty u \cdot i \cdot dt + \int_0^\infty \mathrm{R} \cdot i^2 \cdot dt \qquad \int_0^\infty i \cdot dt = q = \mathrm{C} \cdot \mathrm{E}$$

Le terme à gauche de l'égalité correspond à la puissance fournie par la source, il est égal à $\mathrm{C} \cdot \mathrm{E}^2$. Le premier terme à droite de l'égalité correspond à l'énergie emmagasiné par le condensateur, il est égal à $\dfrac{1}{2} \cdot \mathrm{C} \cdot \mathrm{E}^2$. Le second terme à droite de l'égalité correspond à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance, égale dans notre cas à l'énergie emmagasinée par le condensateur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

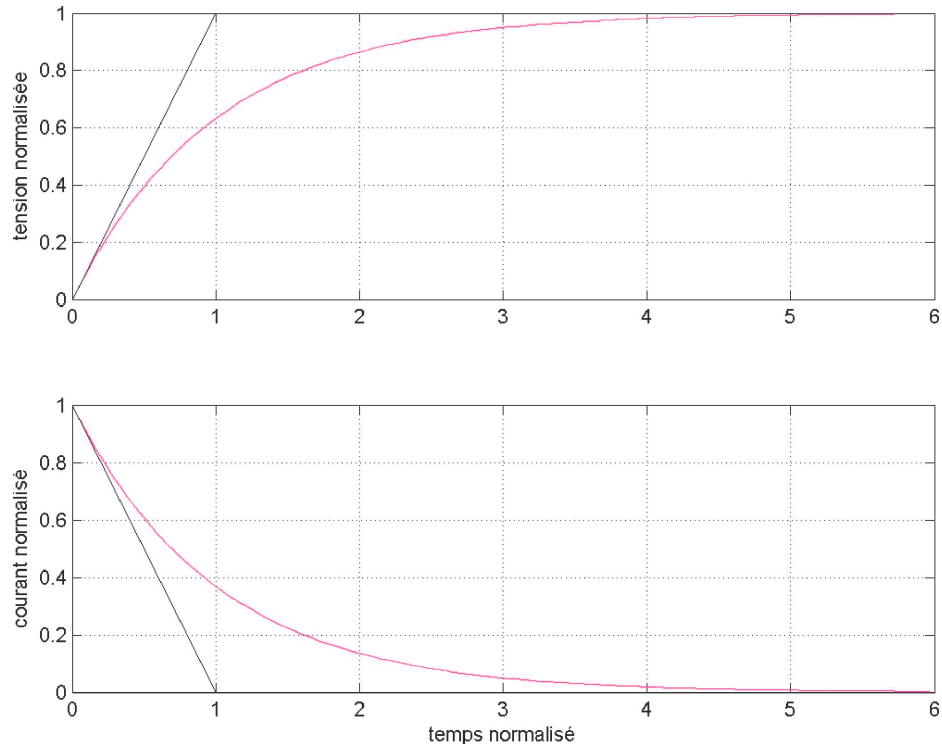


Figure 20.10 **Charge d'un condensateur initialement déchargé**

e) Circuit RC sans source

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on connecte aux bornes d'un condensateur chargé une résistance.

$$u + \mathrm{R} \cdot i = 0 \qquad i = \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On obtient l'équation de la tension puis celle du courant en dérivant l'équation de la tension :

$$u + \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$i + \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

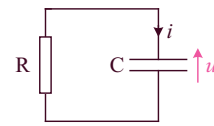


Figure 20.11 **Circuit RC série sans source**

Les solutions à ces équations sont égales à :

$$u(t) = u(0) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad i(t) = -\frac{u(0)}{\mathrm{R}} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \tau = \mathrm{R} \cdot \mathrm{C}$$

La tension u décroît depuis sa valeur initiale $u(0)$ et tend vers 0, le condensateur se décharge à travers la résistance. Le courant est négatif car les charges quittent les armatures. Le bilan d'énergie s'écrit $\int_0^\infty u \cdot i \cdot dt = -\int_0^\infty \mathrm{R} \cdot i^2 \cdot dt$. Toute l'énergie initialement emmagasinée dans le condensateur $\frac{1}{2}\mathrm{C} \cdot u^2(0)$ se dissipe par effet Joule dans la résistance.

20.2.2 Étude des circuits du second ordre

Ces circuits comportent deux dipôles réactifs, une résistance et une source continue.

a) Exemple : circuit RLC série avec une source de tension

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on connecte une source de tension constante E à un circuit constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur.

$$u + \mathrm{R} \cdot i + \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E \qquad i = \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On obtient l'équation de la tension puis celle du courant en dérivant l'équation de la tension :

$$u + \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathrm{L} \cdot \mathrm{C}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = E$$

$$i + \mathrm{R} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{L} \cdot \mathrm{C}\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

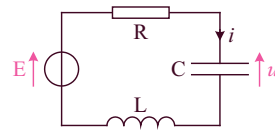


Figure 20.12 **Circuit RLC série connecté à une source de tension**

b) Solution générale de l'équation avec second membre constant et caractéristiques de cette solution

Dans l'exemple précédent, pour le courant et la tension, on trouve une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants de forme générale :

$$x + \frac{2\mathrm{m}}{\omega_0} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = y \quad \text{ou} \quad \omega_0^2 \cdot x + 2\mathrm{m}\omega_0 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \omega_0^2 \cdot y$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cette équation du second ordre est entièrement caractérisée par son facteur d'amortissement m et sa pulsation propre ω_0.

Dans le circuit RLC série de l'exemple $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{L}\cdot\mathrm{C}}}$ et $\mathrm{m} = \dfrac{\mathrm{R}}{2}\sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$.

Le facteur d'amortissement est généralement une grandeur positive, il dépend de la valeur des éléments dissipatifs (la résistance dans notre exemple).

En fonction de sa valeur, il existera différents types de régime libre. La résolution de cette équation passera systématiquement par la résolution de l'équation homogène $\omega_0^2 \cdot x + 2\mathrm{m}\omega_0 \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

La recherche de solutions de la forme $x_l(t) = \mathrm{e}^{rt}$ nous conduit à la recherche des racines du polynôme caractéristique $r^2 + 2\mathrm{m}\omega_0 \cdot r + \omega_0^2 = 0$. Selon le signe du discriminant, les racines seront de nature différente.

L'allure des grandeurs électriques en régime transitoire dépend essentiellement de la valeur du facteur d'amortissement (quatre cas seront envisagés). Quel que soit m, le régime forcé sera le même ($x_f(t) = \mathrm{Y}$ si y est constant), seul le régime libre sera différent.

- ***m > 1*** *: régime apériode (ou sur-amorti)*

$$x_l(t) = \mathrm{K}_1 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_1} + \mathrm{K}_2 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_2}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0\left(\mathrm{m} - \sqrt{\mathrm{m}^2 - 1}\right)} \qquad \tau_2 = \frac{1}{\omega_0\left(\mathrm{m} + \sqrt{\mathrm{m}^2 - 1}\right)}$$

- ***m = 1*** *: régime critique*

$$x_l(t) = (\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 \cdot t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{1}{\omega_0 \cdot \mathrm{m}}$$

- ***0 < m < 1*** *: régime pseudo-période (ou sous-amorti)*

$$x_l(t) = (\mathrm{K}_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \mathrm{K}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad x_l(t) = \mathrm{K} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_0 \cdot \mathrm{m}} \qquad \omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \mathrm{m}^2} \text{ (pseudo pulsation)}$$

$$\mathrm{K} = \sqrt{\mathrm{K}_1^2 + \mathrm{K}_2^2} \qquad \tan\psi = \mathrm{K}_1/\mathrm{K}_2$$

- ***m = 0*** *: régime périodique (ou oscillant)*

$$x_l(t) = \mathrm{K}_1 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \mathrm{K}_2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \qquad x_l(t) = \mathrm{K} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi)$$

Remarques

Pour m $\geqslant$ 1, $x_1(t)$ ne présente pas d'oscillations.

Pour 0 < m < 1, $x_1(t)$ présente des d'oscillations amorties, leur amplitude décroît avec le temps, c'est pour cela que l'on parle de régime pseudo-périodique.

La détermination des constantes d'intégration K_1 et K_2 s'appuie sur la connaissance des valeurs initiales de $x(t)$ et de $\dfrac{dx}{dt}$ (soit dans notre exemple la tension aux bornes du condensateur et le courant dans la bobine, ces deux grandeurs ne pouvant pas subir de discontinuité, leurs valeurs initiales sont faciles à déterminer).

On représente figure 20.13, pour le circuit RLC série avec source de tension, la tension normalisée u/E et le courant normalisé $R \cdot i/E$ en fonction du temps normalisé $\omega_0 \cdot t$ dans le cas où $u(0) = i(0) = 0$.

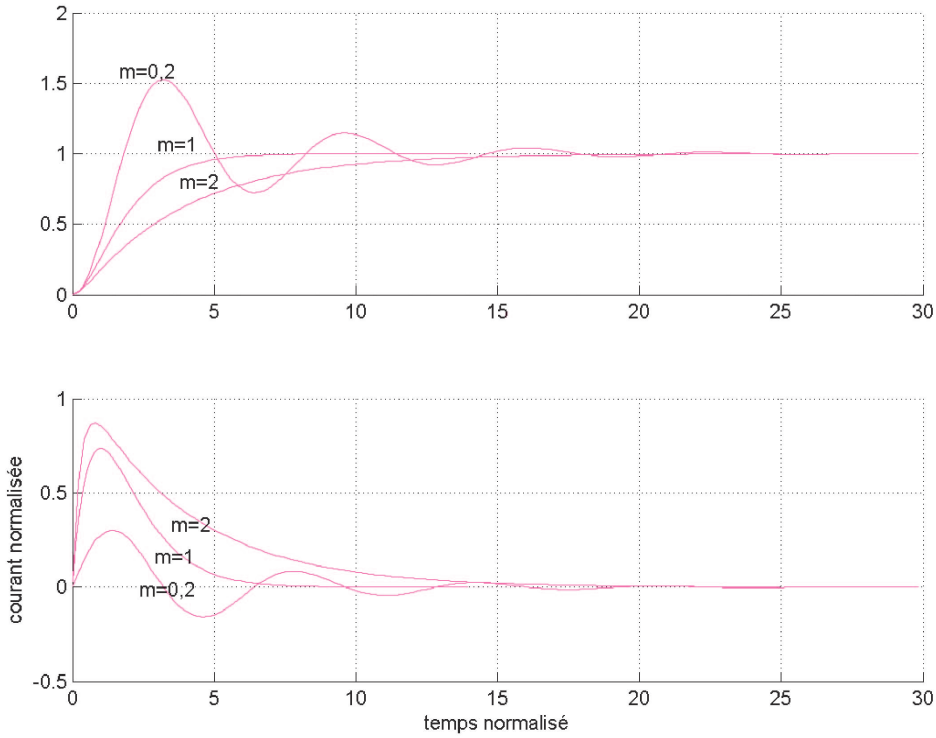


Figure 20.13 **Tension et courant dans un circuit RLC série ($u(0) = 0$)**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

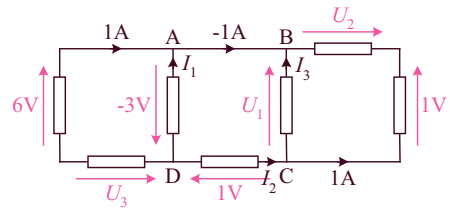
À retenir

Les lois des mailles et des nœuds sont à la base de la théorie des circuits en régime continu. Elles permettent de déterminer la répartition des tensions et courants dans un circuit. Il est possible de remplacer un circuit linéaire complexe (actif ou passif) par un circuit équivalent très simple (théorème de Thévenin et de Norton, résistance équivalente). En présence de dipôles réactifs, les grandeurs électriques ne s'établissent pas instantanément, elles passent par un régime transitoire dont les caractéristiques (durée...) dépendent des dipôles composant le circuit.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 617.

20.1 Loi des nœuds et loi de mailles



Déterminer les courants et tensions inconnus.

20.2 Dipôle équivalent et diviseur

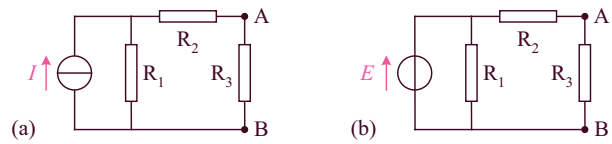
Une batterie de tension à vide 12 V et de résistance interne R = 0,1 Ω alimente un circuit électrique comportant deux ampoules L_1 (10 V – 200 W) et L_2 (10 V – 100 W).

a) Calculer la résistance de chacune des deux lampes.

b) Calculer le courant dans la lampe L_1 et la tension à ses bornes lorsqu'elle est branchée seule aux bornes de la batterie.

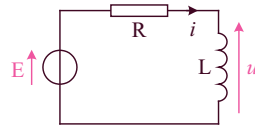
c) Calculer le courant dans chaque lampe et la tension à leurs bornes lorsque L_1 et L_2 sont branchées en parallèle sur la batterie.

20.3 Théorème de Thévenin



Déterminer le modèle équivalent de Thévenin entre les points A et B des deux circuits.

20.4 Circuit du premier ordre RL

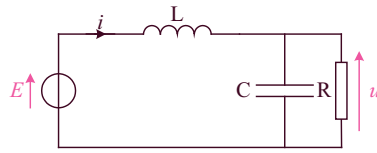


Déterminer l'équation différentielle et résoudre cette équation pour déterminer l'évolution du courant i et de la tension u si la valeur initiale du courant est nulle.

20.5 Circuit du second ordre RLC

Déterminer l'équation différentielle de la tension u. Calculer sa pulsation propre et son facteur d'amortissement si R = 50 Ω, L = 1 mH, C = 1 μF.

Exprimer la solution de la tension si les valeurs initiales de u et i sont nulles et E = 10 V.



21

CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL

PRÉALABLES

- Nombres complexes
- Dipôles linéaires (sources, résistance, condensateur, bobine)
- Énergie et puissance

MOTS CLÉS

- Représentation complexe
- Impédance et admittance
- Puissance active, réactive
- Principe de conservation des puissances
- Transmittance
- Diagramme de Bode, analyse harmonique

OBJECTIFS

- Maîtriser les outils d'analyse des circuits en régime sinusoïdal.
- Calculer les puissances dans les circuits en régime sinusoïdal.
- Analyser le comportement d'un circuit en fonction de la fréquence.

Lorsqu'un circuit électrique composé uniquement de dipôles linéaires est alimenté par des sources sinusoïdales, alors toutes les grandeurs, courants et tensions, sont sinusoïdales une fois le régime transitoire disparu (sous réserve de stabilité du circuit). Les grandeurs sinusoïdales sont très courantes principalement pour deux raisons :

- dans les réseaux d'énergie, la tension est sinusoïdale ;
- l'analyse de Fourier indique qu'une grandeur quelconque peut se décomposer comme la somme d'une infinité de sinusoïdes de fréquences différentes.

21.1 ÉTUDE DES CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL ÉTABLI

21.1.1 Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale

a) Définition d'une grandeur sinusoïdale

Une grandeur $x(t)$ évoluant sinusoïdalement en fonction du temps s'écrit de manière générale :

$$x(t) = X_m \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

X_m : amplitude maximale de $x(t)$, de la même unité que la grandeur $x(t)$
ω : pulsation, en rad $\cdot$ s^{-1}
ψ : phase à l'origine ($t = 0$), en rad

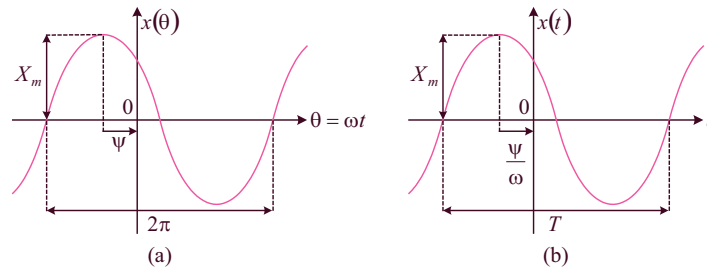


Figure 21.1 **Représentation d'une grandeur sinusoïdale en fonction de l'angle (a) et du temps (b)**

C'est une grandeur périodique car elle se répète dans le temps au bout d'une durée T appelée « période » ($x(t + T) = x(t)$). La fréquence représente le nombre de répétitions par seconde. Elle est constituée d'une alternance positive et d'une alternance négative de sorte que sa valeur moyenne sur une période est nulle $\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = 0\right)$.

Les relations liant la pulsation à la fréquence f et à la période T sont :

$$\omega = 2\pi \cdot f \; ; \; \omega \cdot T = 2\pi \; ; \; T = 1/f \text{ (en secondes)} \; ; f \text{ en hertz (Hz)}$$

b) Valeur efficace

La valeur efficace X est définit par l'intégrale suivante :

$$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\mathrm{d}t}$$

C'est une grandeur toujours positive. Pour une grandeur continue, elle est égale à l'amplitude. Pour une grandeur sinusoïdale, on montre que la valeur efficace vaut :

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

Nous pouvons donc donner une nouvelle écriture à $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = X \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \psi)$$

L'utilisation de la valeur efficace pour caractériser une grandeur trouve plusieurs justifications :

- elle simplifie l'expression des puissances ;
- c'est la grandeur mesurée par un voltmètre ou un ampèremètre ;
- c'est une des grandeurs caractérisant les réseaux d'énergie.

Remarque

En anglais, la valeur efficace est désignée par l'acronyme RMS (*Root Mean Square*) qui nous rappelle bien la définition de cette grandeur.

Exercice d'application 21.1

On mesure avec un voltmètre la tension du réseau domestique sinusoïdal 50 Hz. L'appareil indique 230 V. Que valent la période et la tension maximale ?

SOLUTION. La période est égale à $T = 1/f = 1/50 = 20$ ms, la tension maximale vaut $U_m = 230 \times \sqrt{2} \approx 325$ V.

21.1.2 Notation complexe

a) Rappel sur les nombres complexes

Les nombres complexes seront soulignés afin de les distinguer des nombres réels. On note j le nombre tel que $j^2 = -1$.

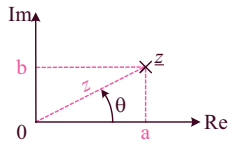


Figure 21.2

Forme Cartésienne	$\underline{z} = a + jb$
Forme polaire	$\underline{z} = z \cdot \mathrm{e}^{j\theta}$
Partie réelle	$a = z\cos(\theta)$
Partie imaginaire	$b = z\sin(\theta)$
Module	$\lvert\underline{z}\rvert = z = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(\underline{z}) = \theta = \tan^{-1}(b/a)$
Conjugué	$\underline{z}^* = z \cdot \mathrm{e}^{-j\theta} = a - jb$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Inversion $\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{1}{z} \cdot \mathrm{e}^{-j\theta} = \dfrac{1}{a+jb} = \dfrac{a-jb}{a^2+b^2} = \dfrac{a-jb}{z^2}$

Soient deux nombres complexes, $\underline{z}_1 = a_1 + jb_1 = z_1 \cdot \mathrm{e}^{j\theta_1}$ et $\underline{z}_2 = a_2 + jb_2 = z_2 \cdot \mathrm{e}^{j\theta_2}$:

Somme $\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$

Produit $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \mathrm{e}^{j(\theta_1+\theta_2)}$

Rapport $\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \mathrm{e}^{j(\theta_1-\theta_2)}$

b) Représentation complexe

Afin de simplifier l'étude des circuits (notamment la somme ou le rapport de grandeurs sinusoïdales), on utilise la représentation complexe.

On suppose que la tension et le courant s'écrivent :

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \psi_u) \qquad i = I_m \cdot \cos(\omega t + \psi_i)$$

Aux deux grandeurs réelles nous faisons correspondre deux grandeurs complexes.

$$\begin{cases} \underline{u} = U_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\psi_u)} = U_m \cdot \cos(\omega t + \psi_u) + j \cdot U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_u) \\ \underline{i} = I_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\psi_i)} = I_m \cdot \cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \mathrm{Re}\{\underline{u}\} \\ i = \mathrm{Re}\{\underline{i}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u} = U_m \cdot \mathrm{e}^{j\psi_u} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t)} = \underline{U}_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t)} \\ \underline{i} = I_m \cdot \mathrm{e}^{j\psi_i} \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t)} = \underline{I}_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t)} \end{cases}$$

Les grandeurs $\underline{U}_m = U_m \cdot \mathrm{e}^{j\psi_u}$ et $\underline{I}_m = I_m \cdot \mathrm{e}^{j\psi_i}$ sont appelées amplitudes complexes. Elles portent toutes les informations utiles (amplitude et phase). Si l'on doit additionner deux grandeurs sinusoïdales, ce sont leurs amplitudes complexes qu'il faut additionner.

On peut représenter $\underline{u}$ et $\underline{i}$ dans le plan complexe par des vecteurs tournant à la vitesse angulaire ω.

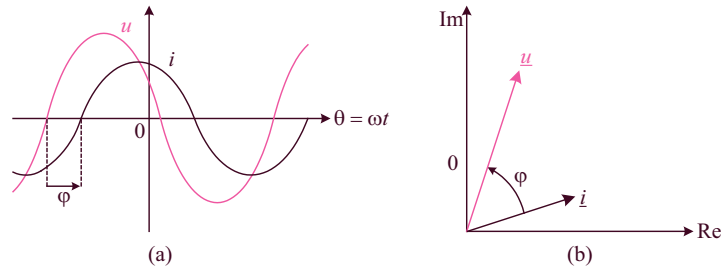


Figure 21.3 **(a) Représentation temporelle de *u* et *i* (b) Représentation vectorielle de *u* et *i***

On désigne par φ le déphasage de u par rapport à i , $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Propriétés : dérivation et intégration.

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(X_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\psi)}\right) = j \cdot \omega \cdot X_m \cdot \mathrm{e}^{j(\omega t+\psi)} = j \cdot \omega \cdot \underline{x}$$

La dérivée temporelle se traduit par une multiplication par $j \cdot \omega$ de la grandeur complexe, soit une rotation du vecteur de 90° et une multiplication par ω de son module. On démontre facilement que l'intégration revient à diviser par $j \cdot \omega$.

21.1.3 Loi d'Ohm généralisée, impédance et admittance

Pour un circuit linéaire passif, on généralise la loi d'Ohm en définissant l'impédance $\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}}$ (en convention récepteur). En remplaçant $\underline{u}$ et $\underline{i}$ par leurs expressions, l'impédance s'écrit alors :

$$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} = Z \cdot \mathrm{e}^{j\varphi} \quad \underline{Z} = \mathrm{R} + j \cdot \mathrm{X}$$

La partie réelle de $\underline{Z}$ est appelée la résistance ($\mathrm{R} = Z \cdot \cos\varphi$), sa partie imaginaire la réactance ($\mathrm{X} = Z \cdot \sin\varphi$). Le module de l'impédance $Z = \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2}$ est aussi le rapport des amplitudes $Z = \dfrac{U_m}{I_m}$ et son argument $\arg(\underline{Z}) = \varphi = \tan^{-1}(X/R)$ constitue le déphasage entre u et i.

L'admittance $\underline{Y} = \dfrac{\underline{i}}{\underline{u}}$ est l'inverse de l'impédance, elle s'écrit de manière générale :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi} \quad \underline{Y} = \mathrm{G} + j \cdot \mathrm{B}$$

a) Impédance d'une résistance

L'impédance d'une résistance de valeur R a pour valeur :

$$\underline{Z} = \mathrm{R}$$



Figure 21.4 **(a) Symbole et convention de la résistance**
(b) Représentation vectorielle de $\underline{u}$ et $\underline{i}$

Le module de l'impédance est constant, son argument est nul donc courant et tension sont en phase.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Impédance d'une bobine

L'impédance d'une bobine d'inductance L a pour valeur :

$$\underline{Z} = j \cdot \mathrm{L} \cdot \omega \qquad X = \mathrm{L} \cdot \omega \text{ (réactance de la bobine)}$$



Figure 21.5 **(a) Symbole et convention de la bobine (b) Représentation vectorielle de $\underline{u}$ et $\underline{i}$**

Le module de l'impédance est proportionnel à la fréquence. Son argument est indépendant de la fréquence et égal à $\varphi = 90°$, donc le courant est en retard de 90° (un quart de période) par rapport à la tension, on dit qu'il est en quadrature arrière sur la tension.

Remarque

Lorsque la pulsation est très petite, la bobine est assimilable à un court-circuit alors que lorsqu'elle est très grande, la bobine est assimilable à un circuit ouvert.

c) Impédance d'un condensateur

L'impédance d'un condensateur de capacité C a pour valeur :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j \cdot \mathrm{C} \cdot \omega} = \frac{-j}{\mathrm{C} \cdot \omega} \qquad X = \frac{-1}{\mathrm{C} \cdot \omega} \text{ (réactance du condensateur)}$$

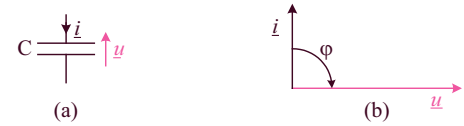


Figure 21.6 **(a) Symbole et convention du condensateur**
(b) Représentation vectorielle de $\underline{u}$ et $\underline{i}$

Le module de l'impédance est inversement proportionnel à la fréquence. Son argument est indépendant de la fréquence et égal à $\varphi = -90°$, donc le courant est en avance de 90° (un quart de période) par rapport à la tension, on dit qu'il est en quadrature avant sur la tension.

Remarque

Lorsque la pulsation est très petite, le condensateur est assimilable à un circuit ouvert alors que lorsqu'elle est très grande, le condensateur est assimilable à un court-circuit.

21.1.4 Extension des lois du continu

Si l'on suppose que l'approximation des régimes quasi stationnaires est vérifiée, alors les lois et théorèmes énoncés en régime continu restent vrais. Il suffit de remplacer la notion de résistance par celle d'impédance et les amplitudes par les amplitudes complexes (on est donc souvent ramené à des sommes de complexes).

21.2 PUISSANCES EN RÉGIME SINUSOÏDAL

21.2.1 Expression de la puissance

Un circuit en convention récepteur soumis à une tension u absorbe un courant i :

$$\begin{cases} u = U_m \cdot \cos(\omega t) = U \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t) \\ i = I_m \cdot \cos(\omega t - \varphi) = I \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

U et I désignent respectivement les valeurs efficaces de la tension et du courant.

$$p = u \cdot i = 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

La puissance n'est pas constante dans le temps, on dit qu'elle est fluctuante. Toutefois, elle est périodique de pulsation égale au double de la pulsation de u et i.

$$\begin{aligned} p &= U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t) \\ &= P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Écrite sous cette forme, la puissance est la somme de deux termes :

- le premier terme est proportionnel à P, de valeur moyenne non nulle et correspond à une énergie absorbée ou produite au cours d'une période ;
- le second terme est proportionnel à Q, de valeur moyenne nulle, il n'engendre pas d'absorption ou de production d'énergie sur une période.

a) Puissance active

La puissance active P est égale à la valeur moyenne de p sur une période, elle correspond à l'énergie consommée (convertie) ou produite par le circuit, cette puissance correspond à l'énergie facturée par le distributeur.

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \text{ en W}$$

b) La puissance réactive

La puissance réactive correspond à l'énergie échangée entre le circuit et l'extérieur. Cela implique que le circuit puisse emmagasiner de l'énergie pendant une moitié de période pour la restituer intégralement pendant la seconde moitié ; si le circuit est passif, il doit alors comporter des dipôles réactifs.

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \text{ en V.A.R (Volt Ampère Réactif)}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

La puissance réactive ne transporte pas d'énergie utile, toutefois elle nécessite un courant pour assurer les échanges d'énergie entre le circuit et l'extérieur, cette puissance engendre donc un courant plus élevé que nécessaire et un surdimensionnement de la source d'alimentation. La source est caractérisée par sa puissance apparente $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (en V · A, volts ampère). On caractérise la qualité de l'échange d'énergie par le facteur de puissance $F = \dfrac{P}{S} = \cos(\varphi)$, le meilleur des cas étant $F = 1$.

21.2.2 Puissances dans les dipôles passifs

a) Puissances absorbées par les dipôles élémentaires

À partir des résultats précédents, on peut exprimer les puissances pour les trois dipôles élémentaires.

	Résistance	Bobine	Condensateur
P	$\mathrm{R} \cdot I^2$ ou $\dfrac{U^2}{\mathrm{R}}$	0	0
Q	0	$\mathrm{L} \cdot \omega \cdot I^2$ ou $\dfrac{U^2}{\mathrm{L} \cdot \omega}$	$\dfrac{-I^2}{\mathrm{C} \cdot \omega}$ ou $-\mathrm{C} \cdot \omega \cdot U^2$

Remarques

On dit que la bobine absorbe de la puissance réactive et que le condensateur fournit de la puissance réactive. Les deux dipôles ont un effet antagoniste. La puissance dissipée par une résistance est proportionnelle au carré de la valeur efficace du courant, une résistance parcourue par 1 A continu ou 1 A efficace dissipe la même puissance.

b) Puissances absorbées par un circuit passif

Un circuit passif d'impédance $\underline{Z} = \mathrm{R} + j \cdot \mathrm{X}$ absorbe une puissance active égale au produit de la résistance avec le carré de l'intensité efficace et une puissance réactive égale au produit de la réactance avec le carré de l'intensité efficace.

$$P = \mathrm{R} \cdot I^2 = G \cdot U^2$$

$$Q = \mathrm{X} \cdot I^2 = -B \cdot U^2$$

21.2.3 Principe de conservation des puissances

Dans un circuit composé de dipôles linéaires et alimenté par des sources sinusoïdales, la puissance active totale est égale à la somme algébrique des puissances actives absorbées par chacun des dipôles et la puissance réactive totale est égale à la somme algébrique des puissances réactives absorbées par chacun des dipôles

Remarque

Ce principe n'est autre que la traduction du principe de conservation de l'énergie puisque P et Q sont toutes les deux liées à de l'énergie (convertie pour P, échangée pour Q).

21.2.4 Étude du circuit RLC série

On considère le circuit constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine sinusoïdale et d'un condensateur, alimentée par une source de tension sinusoïdale d'amplitude E_m. On détermine le courant par $\underline{i} = \dfrac{\underline{e}}{\underline{Z}}$, où $\underline{Z}$ est l'impédance équivalente

$\underline{Z} = \mathrm{R} + j\mathrm{L}\cdot\omega - j\dfrac{1}{\mathrm{C}\cdot\omega} = \mathrm{R} + j\left(\mathrm{L}\cdot\omega - \dfrac{1}{\mathrm{C}\cdot\omega}\right)$, que l'on écrit sous la forme :

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{L}\cdot\mathrm{C}}}$ (pulsation de résonance), $Q = \dfrac{\mathrm{L}\cdot\omega_0}{\mathrm{R}} = \dfrac{1}{\mathrm{R}\cdot\mathrm{C}\cdot\omega_0}$ (facteur de qualité).

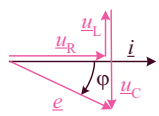
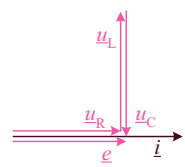
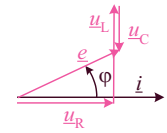
$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
		
$\varphi < 0,\ P > 0,\ Q < 0$	$\varphi = 0,\ P > 0,\ Q = 0$	$\varphi > 0,\ P > 0,\ Q > 0$
Circuit capacitif	**Circuit résistif**	**Circuit inductif**

Figure 21.7 **Diagramme vectoriel des tensions et puissance pour un circuit RLC série**

À la pulsation $\omega = \omega_0$, Z admet un minimum ($\underline{Z} = \mathrm{R}$) et le courant admet un maximum d'amplitude égale à E_m/R, on dit qu'il y a résonance dans le circuit. Les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine sont aussi maximales et ont pour valeur $Q \cdot E_m$. La puissance active est aussi maximale et la puissance réactive est nulle (la bobine et le condensateur échangent de l'énergie entre eux).

21.3 Analyse harmonique

L'objectif de l'analyse harmonique est de caractériser le comportement d'un circuit linéaire lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale, cette caractérisation se fait sur une large bande de fréquences et indépendamment de l'amplitude de l'excitation.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

21.3.1 Transmittance

On s'intéresse à l'évolution d'une grandeur électrique (courant ou tension, désignée « sortie s » du système) en fonction d'une autre grandeur (courant ou tension, désignée « entrée e » du système). On représente symboliquement le système sous forme d'un schéma-bloc (figure 21.8 (a)).

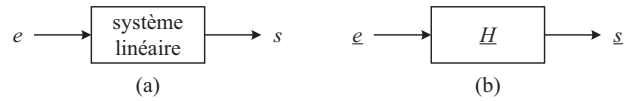


Figure 21.8 **(a) Représentation d'un système sous forme de schéma bloc (b) Transmittance**

Remarque

Les termes entrée et sortie indiquent bien le caractère unidirectionnel du système, ainsi si l'on permute l'entrée et la sortie, $\frac{\underline{e}}{\underline{s}} \neq \frac{1}{\underline{H}}$ la plupart du temps.

L'équation liant la sortie à l'entrée est une équation différentielle linéaire du type :

$$\sum_n a_n \cdot \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = \sum_m b_m \cdot \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m} \text{ où } a_n \text{ et } b_n \text{ sont des coefficients constants}$$

Le système étant linéaire, si l'entrée est sinusoïdale, alors la sortie sera aussi sinusoïdale de même fréquence, seules sa phase et son amplitude seront différentes de celles de l'entrée. Nous avons montré que la dérivation correspondait à une multiplication par $j \cdot \omega$, donc si on représente les grandeurs réelles par leurs grandeurs complexes associées, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{cases} e = E_m \cdot \cos(\omega t + \psi_e) \\ s = S_m \cdot \cos(\omega t + \psi_s) \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{e} = E_m \cdot \mathrm{e}^{\,j(\omega t + \psi_e)} \\ \underline{s} = S_m \cdot \mathrm{e}^{\,j(\omega t + \psi_s)} \end{cases}$$

$$\left(\sum_n a_n \cdot (j \cdot \omega)^n \right) \cdot \underline{s} = \left(\sum_m b_m \cdot (j \cdot \omega)^m \right) \cdot \underline{e}$$

On appelle transmittance du système la fonction :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_m}{E_m} \cdot \mathrm{e}^{\,j\phi}$$

$$\arg \underline{H}(\omega) = \varphi = \psi_s - \psi_e, \qquad \text{argument = déphasage de } s \text{ par rapport à } e$$

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{S_m}{E_m}, \qquad \text{module = rapport des amplitudes}$$

En écrivant $\underline{s} = \underline{H}(\omega) \cdot \underline{e}$, la transmittance nous indique de quelle manière l'entrée est « transmise » en sortie. L'amplitude de la sortie est obtenue en multipliant l'amplitude de l'entrée par le module de $\underline{H}(\omega)$ à la pulsation de l'entrée. La phase de la sortie est obtenue en ajoutant à la phase de l'entrée l'argument de $\underline{H}(\omega)$ à la pulsation de l'entrée.

21.3.2 Représentation fréquentielle — diagramme de Bode

Le diagramme de Bode représente, en fonction de la pulsation, le module en décibels (appelé aussi gain) et l'argument de la transmittance. On adopte une échelle logarithmique pour la pulsation afin de représenter une large plage de pulsations.

Le module en décibels (dB) est défini par :

$$|\underline{H}(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log |\underline{H}(\omega)|$$

RAPPEL SUR LE LOGARITHME DÉCIMAL

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$$

$$\log\left(x^n\right) = n \cdot \log(x)$$

$$\log(10) = 1$$

$$\log(1) = 0$$

Si la transmittance $\underline{H}$ s'écrit comme le produit de deux transmittances $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$, alors le gain en décibels $|\underline{H}|_{\text{dB}}$ est la somme des gains $|\underline{H}_1|_{\text{dB}}$ et $|\underline{H}_2|_{\text{dB}}$.

21.3.3 Exemple d'une transmittance du premier ordre

Un système du premier ordre sera caractérisé par une équation différentielle du premier ordre $s + \tau \cdot \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e$ à laquelle correspond l'égalité complexe $\underline{e} = (1 + j \cdot \tau \cdot \omega) \cdot \underline{s}$. Si l'on pose $\omega_0 = 1/\tau$, la transmittance d'un système du premier ordre s'écrit sous la forme générale (avec $x = \omega/\omega_0$ pulsation réduite) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \omega/\omega_0} \qquad \underline{H}(x) = \frac{1}{1 + j \cdot x}$$

a) Étude de la transmittance

$$|\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \arg \underline{H}(x) = -\tan^{-1}(x)$$

$$\lim_{x \to 0} |\underline{H}(x)| = 1 \qquad \lim_{x \to 0} |\underline{H}(x)|_{\text{dB}} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \arg \underline{H}(x) = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\lim_{x\to+\infty} |\underline{H}(x)| = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} |\underline{H}(x)|_{\text{dB}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \arg\underline{H}(x) = -90°$$

$$|\underline{H}(1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |\underline{H}(1)|_{\text{dB}} = -3\text{dB} \qquad \arg\underline{H}(1) = -45°$$

Le module admet deux asymptotes qui se croisent en $x = 1$ ($\omega = \omega_0$) :

- lorsque $\omega << \omega_0$, asymptote horizontale $|\underline{H}(x)|_{\text{dB}} \approx 0$ dB ;
- lorsque $\omega >> \omega_0$, asymptote d'équation $|\underline{H}(x)|_{\text{dB}} \approx -20\cdot\log(x)$. C'est une droite de pente -20 dB/décade (une décade représente un facteur 10 entre deux fréquences).

b) Diagramme de Bode

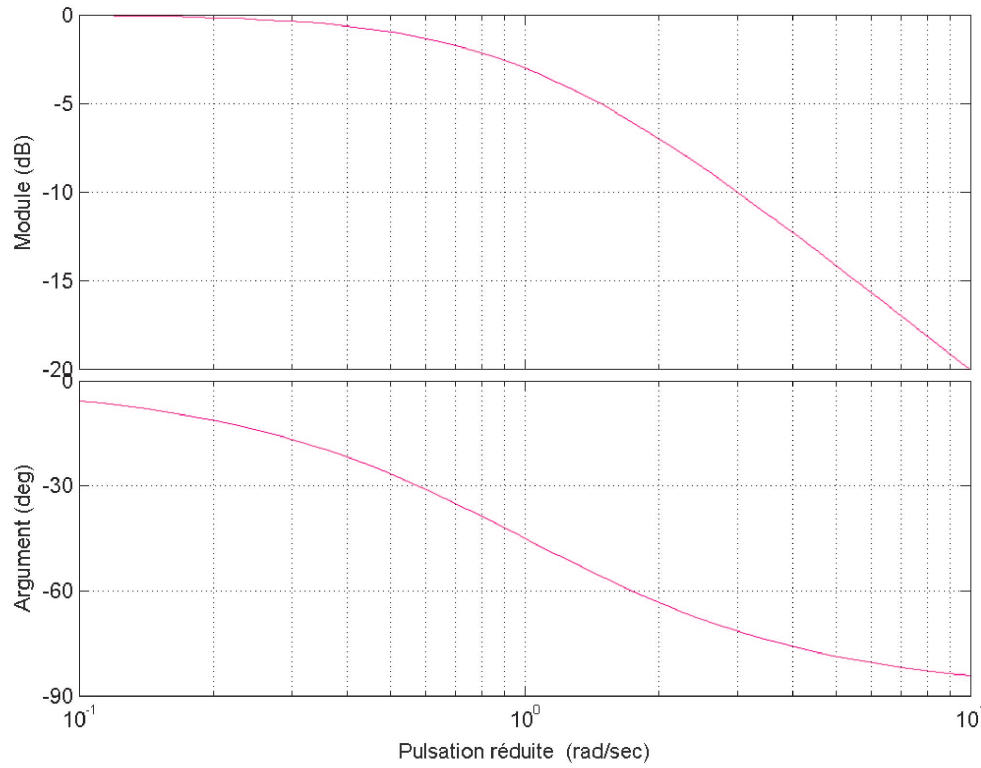


Figure 21.9 **Diagramme de bode en fonction la pulsation réduite *x***

La fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le module de la transmittance est inférieur de 3 dB au module maximal (une atténuation de 3 dB correspond à une division par deux de la puissance). La bande-passante est la différence entre les fréquences de coupure haute et basse.

Dans notre cas la bande-passante est égale à la fréquence de coupure $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Ce type de comportement fréquentiel est du type passe-bas : les fréquences inférieures à la fréquence de coupure sont peu atténuées alors que les fréquences supérieures à la fréquence de coupure sont atténuées, le système ne « laisse passer » que les basses fréquences. La fréquence de coupure f_0 est d'autant plus faible que le système présente une forte constante de temps τ (donc un système lent).

21.3.4 Étude d'une transmittance du second ordre

Un système du second ordre sera caractérisé par une équation différentielle du second ordre :

$$s + \frac{2\mathrm{m}}{\omega_0} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = e,$$

à laquelle correspond l'égalité complexe :

$$\underline{e} = \left(1 + 2\mathrm{m} \cdot \left(j \cdot \omega/\omega_0\right) + \left(j \cdot \omega/\omega_0\right)^2\right) \cdot \underline{s}$$

La transmittance d'un système du second ordre s'écrit sous la forme générale (avec $x = \omega/\omega_0$ pulsation réduite) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{2\mathrm{m}}{\omega_0}(j\omega) + \dfrac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2}$$

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + 2 \cdot \mathrm{m} \cdot (j \cdot x) + (j \cdot x)^2}$$

Un système du second ordre est entièrement caractérisé par son facteur d'amortissement m et sa pulsation propre ω_0.

a) Étude de la transmittance

$$|\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + (2 \cdot \mathrm{m} \cdot x)^2}} \qquad \arg \underline{H}(x) = -\tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot \mathrm{m} \cdot x}{1 - x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0} |\underline{H}(x)| = 1 \qquad \lim_{x \to 0} |\underline{H}(x)|_{\mathrm{dB}} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \arg \underline{H}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} |\underline{H}(x)| = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} |\underline{H}(x)|_{\mathrm{dB}} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \arg \underline{H}(x) = -180°$$

$$|\underline{H}(1)| = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{m}} \qquad \arg \underline{H}(1) = -90°$$

Le module admet deux asymptotes qui se croisent en $x = 1$ ($\omega = \omega_0$) :

- lorsque $\omega << \omega_0$, asymptote horizontale $|\underline{H}(x)|_{\mathrm{dB}} \approx 0\mathrm{dB}$;
- lorsque $\omega >> \omega_0$, asymptote d'équation $|\underline{H}(x)|_{\mathrm{dB}} \approx -40 \cdot \log(x)$. C'est une droite de pente -40 dB/décade.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Le module admet un maximum si $0 < m < \sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$; ce maximum se produit pour la pulsation réduite, l'expression de x_M est

$$x_M = \sqrt{1 - 2m^2},$$

le module a alors pour valeur :

$$|\underline{H}(x_M)| = \frac{1}{2m \cdot \sqrt{1\text{-}m^2}} > 1.$$

Le comportement fréquentiel est de type passe-bas si $m > 0{,}38$. En revanche, si $m < 0{,}38$, le comportement est du type passe-bande car le système va amplifier les fréquences comprises dans la bande-passante de largeur $2m \cdot f_0$ centrée autour de

$$f_M = \sqrt{1 - 2m^2} \cdot f_0.$$

b) Diagramme de Bode

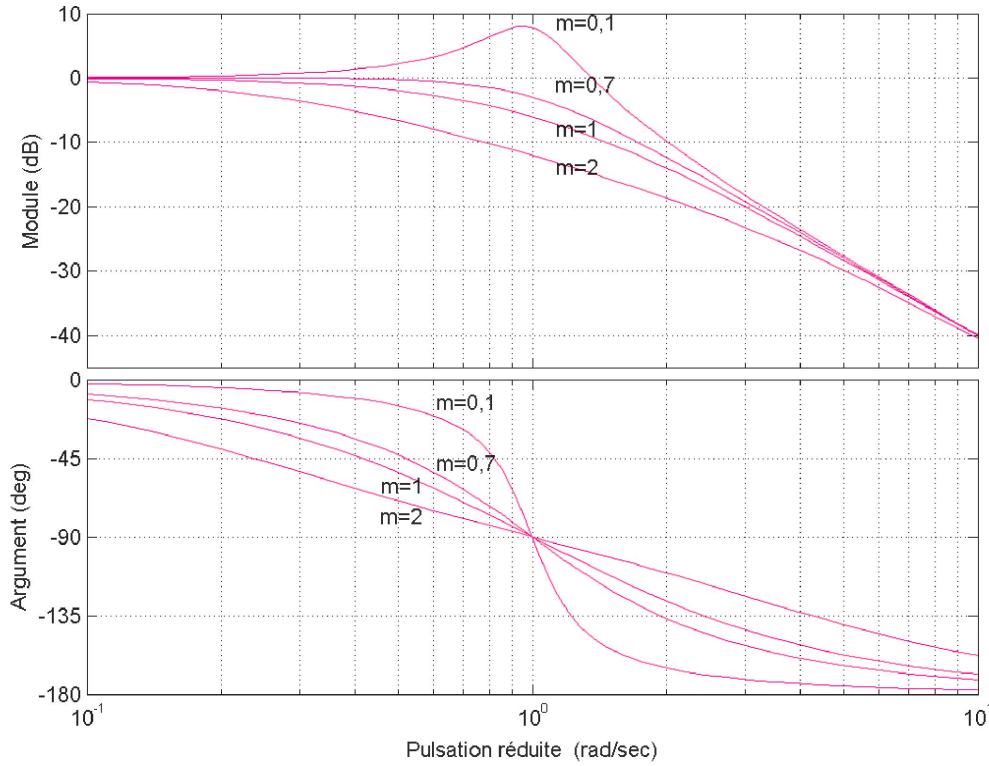


Figure 21.10 **Représentation du module et de l'argument en fonction de la pulsation réduite**

À retenir

Les lois du régime continu établi peuvent s'appliquer en régime sinusoïdal en remplaçant la notion de résistance par celle d'impédance et l'amplitude par l'amplitude complexe. La puissance n'est plus constante, sa valeur moyenne s'exprime par le produit de la tension et du courant efficace multiplié par le cosinus de l'angle entre *u* et *i*. Les variations périodiques du courant et de la tension induisent une variation de l'énergie des dipôles réactifs, la puissance réactive quantifie cette variation d'énergie. L'impédance permet de calculer les puissances, elle dépend de la fréquence et peut entraîner des phénomènes de résonance. La transmittance caractérise la réponse en fréquence d'un circuit linéaire. On distingue deux grands types de transmittance, du premier et du second ordre. Dans les deux cas, le module admet des asymptotes et une fréquence de coupure. Le module de la transmittance du second ordre peut comporter un extremum alors que celui de la transmitance du premier ordre est monotone.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 618.

21.1 Représentation complexe et somme de sinusoïdes

Soient trois courants sinusoïdaux $i_1 = 10.\cos(\omega t + \pi/3)$, $i_2 = 5.\cos(\omega t - 2\pi/3)$ et $i_3 = 5.\sin(\omega t + 2\pi/3)$.Utiliser la représentation complexe pour calculer $i_1 + i_2$ puis $i_1 + i_3$.

21.2 Impédance

Déterminer sous forme cartésienne l'impédance équivalente de l'association en série d'une résistance R avec une bobine L, puis avec un condensateur C. Déterminer sous forme cartésienne l'impédance équivalente de l'association en parallèle d'une résistance R avec une bobine L, puis avec un condensateur C.

21.3 Puissances

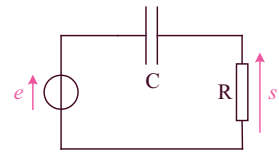
Calculer le courant ainsi que les puissances active et réactive absorbées par une résistance R = 10 Ω en série avec une bobine d'inductance L = 66 mH alimentée par un réseau 230 V – 50 Hz.

Quelle doit être la valeur de la capacité C du condensateur à raccorder en parallèle du circuit RL afin que le courant absorbé par le réseau soit minimal ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

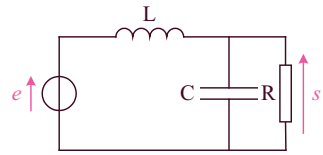
21.4 Transmittance du premier ordre, filtre passe-haut

Déterminer la transmittance du circuit. Étudier en fonction de la pulsation son module et son argument. Exprimer sa pulsation de coupure et justifier son nom de filtre passe-haut.



21.5 Transmittance du second ordre

Déterminer la transmittance du circuit. Calculer la valeur de L et C si l'on souhaite une fréquence propre de 3 500 Hz et un facteur d'amortissement de 0,7 avec R = 4 Ω.



DIODE À JONCTION

22

PRÉALABLES

- Connaître les lois fondamentales de l'électricité
- Maîtriser les unités du système international

MOTS CLÉS

- Jonction PN
- Diode idéale, diode réelle, grandeurs caractéristiques, polarisation, point de fonctionnement, schémas équivalents, régime dynamique
- Circuits à diodes

OBJECTIFS

- Représenter la caractéristique d'une diode réelle et y associer les schémas équivalents linéaires.
- Déterminer le point de fonctionnement statique.
- Déterminer la résistance dynamique de la diode.
- Donner les principales applications de la diode.

22.1 DÉFINITION DE LA JONCTION

Une jonction est une région de faible épaisseur d'un monocristal de semi-conducteur dans laquelle le semi-conducteur passe plus ou moins graduellement du type p au type n.

Les semi-conducteurs sont des corps dont la résistivité ρ est intermédiaire entre celles des métaux et des isolants. Elle varie en fonction de la température mais également en sens inverse de celle des métaux.

Ordre de grandeur :

- isolant : $10^{9} < \rho < 10^{17}\ \Omega \cdot \text{cm}$;
- conducteur : $10^{-2} < \rho < 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$;
- semi-conducteur : $10^{-5} < \rho < 10^{4}\ \Omega \cdot \text{cm}$;

Les deux semi-conducteurs les plus couramment utilisés sont le germanium (Ge) et le silicium (Si). Ce dernier est très abondant et ses propriétés (gamme de température plus étendue, facilité de traitement) font qu'il est aujourd'hui le semi-conducteur le plus utilisé.

Un semi-conducteur intrinsèque est un semi-conducteur le plus pur possible. Pour contrôler les propriétés et surtout la conductivité σ (ou résistivité $\rho = \sigma^{-1}$) de celui-ci, on ajoute des impuretés dans le semi-conducteur. On réalise en fait un dopage. On parle alors de semi-conducteur extrinsèque.

Après dopage, un semi-conducteur peut présenter un excès d'électrons libres ou de trous. On distingue alors deux types de semi-conducteurs :

- les semi-conducteurs de type p (p comme positif) dans lesquels la conduction est presque exclusivement assurée par les trous. Ici, la concentration des trous est alors bien supérieure à celle des électrons. Ces derniers seront appelés porteurs minoritaires et les trous, porteurs majoritaires,
- les semi-conducteurs de type n (n comme négatif) dans lesquels la conduction est presque exclusivement assurée par les électrons libres. Dans ce cas, la concentration des électrons est très supérieure à la concentration des trous. Les électrons sont dits porteurs majoritaires et les trous, porteurs minoritaires.

22.2 JONCTION *PN* OU DIODE À JONCTION

22.2.1 Jonction à l'équilibre

Lorsqu'on place en contact deux zones (l'une dopée p et l'autre dopée n), on forme un dipôle appelé diode à jonction. On constate alors plusieurs phénomènes (Fig. 22.1).

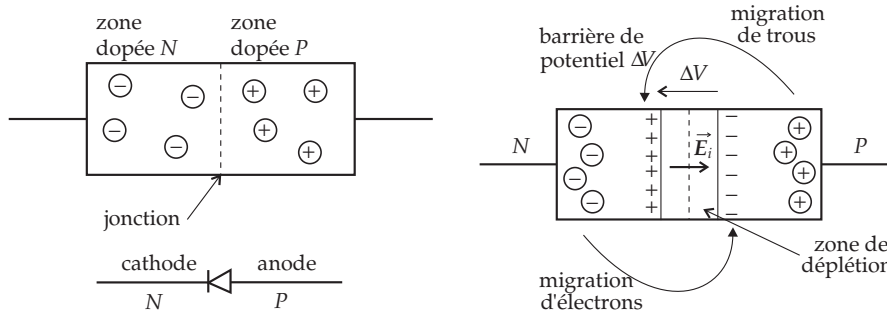


Figure 22.1 **La jonction *pn***

Les deux régions étant en contact et en l'absence de tension de polarisation, on constate qu'il y a diffusion des trous de la région p vers la région n et diffusion des électrons de la région n vers la région p. Les électrons minoritaires dans la région n se recombinent rapidement avec un trou et il en va de même pour les trous minoritaires qui ont migré vers la région p. Ceci crée un courant de diffusion I_d dû au déplacement des porteurs majoritaires entre les deux régions.

Le phénomène de recombinaison se limite aux abords de la jonction, créant ainsi une zone de charge d'espace appauvrie en porteurs majoritaires. On appelle cette zone la couche d'appauvrissement ou couche de déplétion, ou encore la zone désertée. Entre

les extrémités de cette couche apparaît une différence de potentiel (ou barrière de potentiel) ΔV qui va s'opposer à la circulation des porteurs majoritaires (et par conséquent au courant de diffusion I_d) mais qui favorise la traversée des porteurs minoritaires entre les deux régions (cette traversée donne lieu à un courant dénommé courant de saturation I_s).

À l'équilibre (en l'absence de tension de polarisation) les courants I_d et I_s sont égaux et le courant résultant est par conséquent nul.

22.2.2 Jonction soumise à une tension de polarisation continue

L'application d'une différence de potentiel V de part et d'autre du cristal modifie l'épaisseur de la barrière de potentiel. Si le pôle + est relié à la région p, la jonction est polarisée en directe. L'épaisseur de la barrière de potentiel diminue favorisant ainsi la circulation d'un courant de porteurs majoritaires I_d. Ce courant a pour expression :

$$I_d = I_s \cdot e^{\frac{qV}{\eta kT}}$$

I_s étant le courant de saturation ou courant de porteurs minoritaires, q la charge de l'électron ($1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), k la constante de Boltzmann ($1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J $\cdot$ K^{-1}). η est un coefficient d'ajustement qui dépend du cristal utilisé. Il est proche de 2 pour le silicium et de 1 pour le germanium.

Si le pôle + de V est relié à la région n, la jonction est alors polarisée en inverse. Le courant de diffusion I_d diminue très rapidement. Il ne reste que le courant de saturation I_s qui est indépendant de la barrière de potentiel.

Le courant total qui circule dans la diode résulte de la superposition des deux courants soit :

$$I = I_d + I_s = I_s \cdot \left(e^{\frac{qV}{\eta kT}} - 1 \right)$$

22.2.3 Caractéristique tension-courant d'une diode à jonction

La caractéristique principale d'une diode à jonction vient du fait que le courant ne peut circuler que dans un seul sens (de l'anode vers la cathode pour la diode ou du pôle + vers le pôle – du générateur). On constate que dans le cas passant, le courant direct augmente brutalement lorsque la tension V approche 0,7 V pour une diode au silicium (de l'ordre de 0,3 V pour le germanium). Le courant augmentant, la tension aux bornes de la diode s'écarte peu de cette valeur. Il s'agit d'une certaine façon d'une tension de déblocage mais on parlera plus couramment de tension de seuil de la diode que l'on notera V_{seuil}. Cette tension sera particulièrement mise en évidence lorsque l'on introduira les schémas équivalents linéaires dans le prochain paragraphe.

Cependant, on remarque qu'il ne s'agit pas d'un composant idéal dans la mesure où il existe un très faible courant inverse lorsque la diode est polarisée en inverse.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

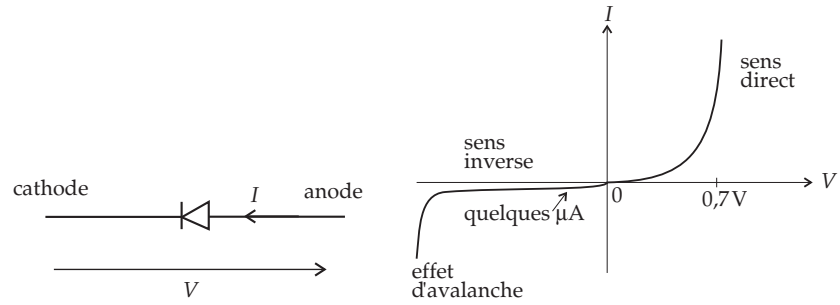


Figure 22.2 **Symbole physique et caractéristique tension-courant d'une diode à jonction**

On remarque également sur la figure 22.2 qu'au-delà d'une valeur maximale, la tension inverse V_R (R comme *reverse*) provoque un phénomène qui se traduit par une augmentation rapide du courant inverse (courant opposé au courant direct). Il s'agit du phénomène d'avalanche qui a pour effet le claquage de la diode et donc sa destruction. Hormis pour certains composants particuliers, ce phénomène est irréversible.

Remarque

Bien que non représenté ici, il existe un courant maximal direct à ne pas dépasser car il provoque un échauffement excessif du composant et par conséquent, sa destruction. Il est souvent noté I_{FM}, I_{Fmax} (F comme *forward*) ou I_0.

22.3 Linéarisation de la caractéristique tension-courant — Modèles de la diode

On constate sur la figure 22.2 que la caractéristique courant-tension n'est pas linéaire. La diode à jonction *pn* est par conséquent un composant à caractéristique non linéaire et il en sera de même pour la plupart des composants électroniques à semi-conducteur. Cette propriété ne facilite pas les calculs analytiques et bien souvent, une approximation par segments de droites sera utilisée car la solution exacte n'est pas nécessaire. Nous allons passer en revue les trois modèles les plus utilisés en y associant à chaque fois les schémas électriques correspondants.

22.3.1 Diode idéale — Première approximation

La façon la plus simple de représenter la diode par segments est celle de la figure 22.3. Dans ce cas, on constate que la diode devient passante (ou conductrice) lorsque la tension à ses bornes V devient positive ou plus généralement lorsque le courant I qui la traverse est positif. Il n'y a donc pas de notion de tension de seuil dans ce cas (d'une certaine façon, elle est nulle). Dans le cas inverse, la diode est bloquée.

Son schéma électrique est équivalent à un simple interrupteur à deux positions.

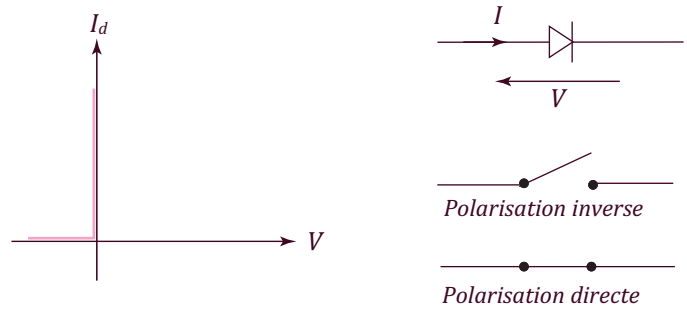


Figure 22.3 **Caractéristique et schéma électrique équivalent d'une diode idéale**

22.3.2 Deuxième approximation

La seconde approximation consiste à tenir compte de la tension de seuil V_s de la diode de façon à améliorer la précision des calculs. La caractéristique et le schéma électrique associé sont représentés figure 22.4.

Dans le cas passant, on associe à l'interrupteur fermé un générateur de force contre-électromotrice de façon à tenir compte de la barrière de potentiel. On notera, il s'agit là d'une notion importante, le sens de ce générateur opposé par rapport à celui du courant circulant dans la diode dans la mesure où la barrière de potentiel s'oppose au courant de diffusion I_d dû aux porteurs majoritaires soit donc au courant direct.

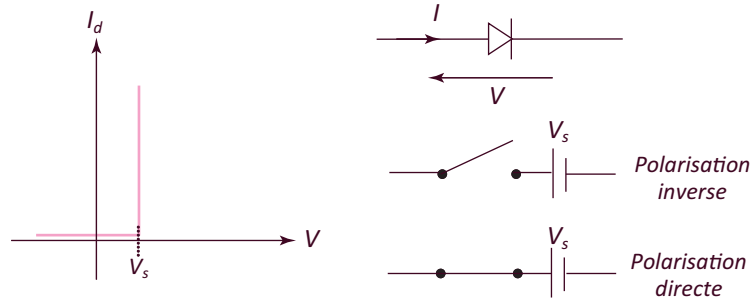


Figure 22.4 **Caractéristique et schéma électrique équivalent de la diode en considérant la seconde approximation**

22.3.3 Troisième approximation

Il s'agit de l'approximation la plus fine et la plus proche de la caractéristique réelle. On tient compte là aussi de la tension de seuil mais également de la résistance série R_s de la diode dans la mesure où l'on remarque sur la figure 22.2 que la pente de la caractéristique $I(V)$ n'est pas infinie lorsque la diode est passante.

Cette résistance série, fixe et de faible valeur (quelques ohms), pourra, dans certains cas, être négligée (on retrouve alors la seconde approximation). Sa détermination est

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

obtenue à partir de la pente de la caractéristique $I(V)$ obtenue pour les valeurs élevées du courant lorsque la caractéristique se rapproche d'une droite.

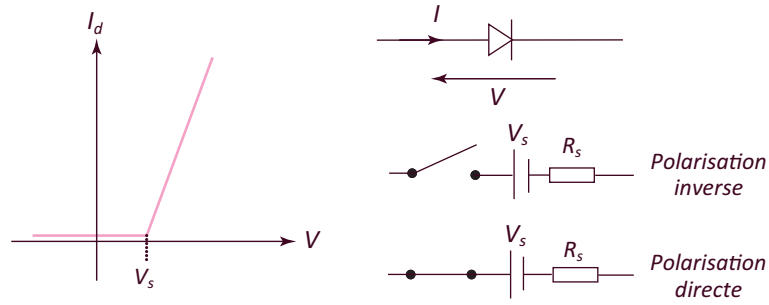


Figure 22.5 **Caractéristique et schéma électrique équivalent de la diode en considérant la troisième approximation**

On constate dans cette approximation que la tension aux bornes de la diode dépend du courant direct qui la traverse contrairement à l'approximation précédente où sa tension était toujours égale à V_s. En effet, en polarisation directe, nous pouvons écrire :

$$V = V_s + R_s \cdot I$$

Remarques

- Bien souvent, la seconde approximation sera retenue compte tenu de la valeur faible de la résistance série.
- On constate que l'approximation par segments de droite introduit nécessairement une erreur dans la résolution des circuits dans la mesure où la caractéristique réelle de la diode n'est pas linéaire. Cette erreur sera d'autant plus grande que le courant dans la diode est faible. En effet, on se situe dans ce cas dans le coude (figure 22.2) de la caractéristique réelle alors que la caractéristique approximée s'en écarte sensiblement.
- La linéarisation comme nous venons de la voir est associée ici à un fonctionnement statique de la diode, c'est-à-dire lorsque les grandeurs (tensions et courants) n'évoluent pas en fonction du temps. Nous verrons plus loin une autre approche de la linéarisation de la caractéristique $I(V)$ lorsque les grandeurs varient en fonction du temps. Nous parlerons dans ce cas de fonctionnement dynamique.

22.4 Polarisation de la diode Point de fonctionnement statique

La polarisation consiste à placer la diode dans un état de repos (ou de conduction) bien défini. Cet état est caractérisé par un point sur la caractéristique $I(V)$ de la diode. Ce point est fixe dans la mesure où les tensions et courants ne varient pas en fonction du temps. On parle d'ailleurs de point de fonctionnement statique. La notion de point de fonctionnement est fondamentale avec le transistor que nous verrons dans le prochain

chapitre. Pour simplifier les calculs, il est possible d'utiliser l'un des trois modèles de diode. Nous allons ici déterminer graphiquement ce point de fonctionnement en considérant la caractéristique réelle de la diode. De ce fait, il s'agira du point de fonctionnement statique exact du circuit sans approximation.

Le montage est représenté sur la figure 22.6. La résistance R est utilisée pour limiter le courant dans la diode placée en série. L'ensemble étant alimenté à l'aide d'un générateur de tension continue E.

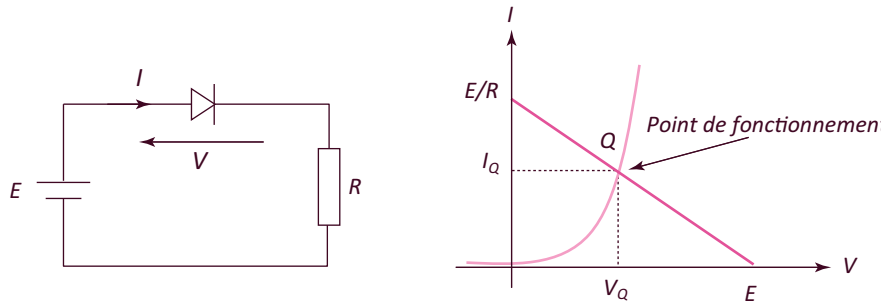


Figure 22.6 **Circuit à diode pour la détermination de la droite de charge**

La méthode graphique consiste à représenter sur un même graphe la caractéristique de la diode et la caractéristique du circuit, soit les deux expressions suivantes :

$$I = I_s \cdot \left(e^{\frac{qV}{\eta kT}} - 1\right) \text{ qui est la caractéristique réelle de la diode}$$

$$I = \frac{E - V}{R} \text{ qui est la relation qui caractérise le circuit}$$

Cette dernière relation est appelée droite de charge statique du circuit. L'intersection entre ces deux courbes donne le point de fonctionnement Q (ou point de repos ou encore point de polarisation du circuit). Ce point est représenté sur la figure 22.6.

Remarquons que la modification du point de fonctionnement peut être obtenue en ajustant la résistance R ou en modifiant la valeur de la tension délivrée par le générateur E.

22.5 Fonctionnement en régime dynamique Notion de résistance dynamique de la diode

Conservons le schéma de la figure 22.6 et associons maintenant un générateur de tension sinusoïdale $e(t)$ en série avec le générateur de tension continu E. Il y a donc superposition au sein du même circuit de deux grandeurs de natures différentes : une dynamique (ou sinusoïdale) et une statique.

On se propose de déterminer la variation de tension (ou de courant) aux bornes de la diode qui découle de la tension variable $e(t)$ appliquée au circuit.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Cette variation de tension est déterminée en remplaçant la diode par sa résistance dynamique (ou résistance différentielle) r_d calculée à partir de la conductance g_d de la façon suivante :

$$g_d = \frac{1}{r_d} = \left.\frac{dI}{dV}\right|_Q$$

r_d représente en fait l'inverse de la pente de la tangente calculée au point de fonctionnement Q (Fig. 22.7).

D'où, après quelques lignes de calculs, l'expression de la résistance r_d :

$$r_d = \frac{\eta kT}{qI} \text{ avec } \frac{kT}{q} = 26 \text{ mV à la température ambiante (300 K).}$$

La résistance dynamique est donc inversement proportionnelle au courant statique I qui traverse la diode. Plus I augmente, plus la résistance r_d diminue et inversement. La diode peut être considérée comme une résistance variable r_d dont la valeur est contrôlée par le courant statique qui la traverse.

L'application d'une tension alternative au circuit revient par conséquent à superposer une tension sinusoïdale autour du point de fonctionnement Q. Il s'agit là du principe même utilisé pour l'amplification que nous reverrons avec le transistor.

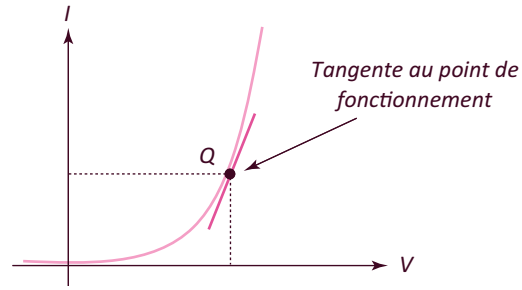


Figure 22.7 **Détermination de la résistance dynamique autour du point de fonctionnement statique *Q***

Remarques

- En régime dynamique (ou sinusoïdal), nous avons là encore linéarisé la caractéristique de la diode en la remplaçant par une résistance dynamique r_d dont la valeur dépend du courant statique I. Remarquons cependant que cette approximation restera valable si et seulement si l'amplitude de la composante sinusoïdale reste de faible niveau. En effet, dans le cas contraire, et on le constate sur la figure 22.7, l'approximation par la tangente au point de fonctionnement n'est plus valide et la non-linéarité de la caractéristique $I(V)$ provoquera l'apparition de composantes sinusoïdales de fréquences multiples entières de la fréquence du signal sinusoïdal original.
- On parle souvent d'électronique linéaire mais cet état résulte seulement d'une approximation valable uniquement dans le cas de signaux sinusoïdaux de faibles amplitudes, d'où l'expression souvent utilisée d'électronique petit signal.

• On remarque sur la figure 22.7 que lorsque le courant dans la diode augmente (déplacement vers la zone linéaire de la caractéristique $I(V)$), la résistance dynamique r_d tend à se confondre avec la résistance statique série R_s issue de la troisième approximation. Dans ce cas, le modèle linéaire de la diode peut suffire, que l'on soit dans le cas d'une étude statique ou dynamique.

22.6 Autres types de diodes

22.6.1 La diode Zéner

La diode Zéner est une diode conçue pour fonctionner dans la zone de claquage contrairement aux diodes petit signal et de redressement qui sont utilisées pour transformer une tension alternative (le secteur EDF 50 Hz par exemple) en une tension continue. La tension inverse est alors notée V_z et elle est particulièrement exploitée pour la régulation de tension. La tension de seuil demeure autour de 0,7 V. La figure 22.8 représente sa caractéristique et les symboles couramment utilisés.

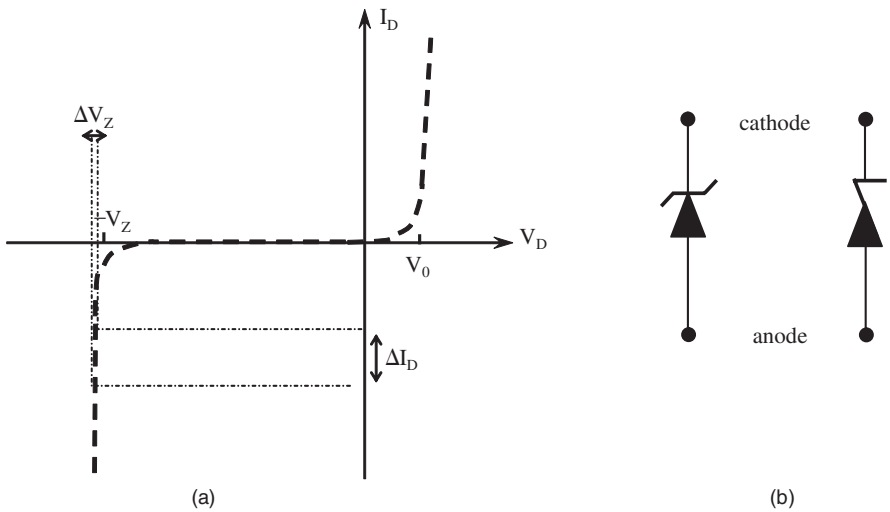


Figure 22.8 **Caractéristique $I(V)$ et symboles physiques d'une diode Zéner**

22.6.2 La diode Schottky

La diode Schottky est utilisée lorsque la fréquence augmente. En effet, les diodes de redressement peinent à se bloquer rapidement compte tenu du temps de déplacement de charges. On parle de temps de recouvrement inverse t_{RR}.

La diode Schottky est quant à elle constituée d'une zone métallique et d'une zone dopée *n*. Cette structure élimine les charges stockées à la jonction et favorise ainsi le blocage rapide de la diode. On notera également que la barrière de potentiel est de seulement 0,25 V au lieu du 0,7 V habituel en deuxième approximation. Ceci constitue

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

un avantage supplémentaire dans le cas du redressement ou de la détection de signaux de faibles amplitudes.

22.6.3 La diode à capacité variable

Cette diode, également appelée diode varicap, exploite l'effet capacitif qui existe entre les zones *p* et *n* de la jonction. La zone désertée de porteurs étant assimilée à l'isolant. En ajustant la tension inverse aux bornes de la jonction, on élargit ou l'on réduit la zone désertée (ou zone de transition) ce qui revient à faire varier la capacité équivalente de la jonction. Si la tension inverse augmente, la capacité équivalente diminue et inversement. Compte tenu de son origine, cette capacité est appelée capacité de transition.

Les varicaps, utilisées en polarisation inverse, sont très utilisées en électronique (récepteurs radios ou TV) et ont avantageusement remplacé les capacités variables.

22.6.4 La diode électroluminescente (DEL ou LED)

Il s'agit d'un composant optoélectronique qui utilise les propriétés de l'optique et de l'électronique.

Dans une jonction *pn* polarisée en direct, les électrons qui traversent la jonction et se recombinent avec les trous, perdent de l'énergie et provoquent l'émission d'un photon. Cette énergie radiative est exploitée pour émettre une onde lumineuse dont la couleur sera fonction du matériau qui constitue la jonction.

On trouve aujourd'hui la plupart des couleurs et les récents progrès dans ce domaine ont ouvert un large champ d'application des DEL. Elles sont notamment utilisées pour remplacer avantageusement, en termes de durée de vie et de consommation, les lampes à incandescence dont la disparition est aujourd'hui effective.

À retenir

- Expression du courant qui traverse la diode :

$$I = I_d + I_s = I_s \cdot \left(e^{\frac{qV}{\eta kT}} - 1 \right)$$

où I_d représente le courant de diffusion (courant de porteurs majoritaires), I_s le courant de saturation (courant de porteurs minoritaires) et V la tension aux bornes de la diode.

- Il existe trois modèles linéaires de la diode :

1. La diode idéale assimilée à un interrupteur (première approximation)

Si la diode est polarisée en directe ($I > 0$), le schéma équivalent est un interrupteur fermé.

En inverse, la diode est représentée par un interrupteur ouvert.

2. Deuxième approximation

Si la diode est polarisée en directe ($I > 0$), son schéma équivalent est un interrupteur fermé associé à un générateur de force contre-électromotrice V_s (tension de seuil de la diode).

En inverse, le schéma est un interrupteur ouvert.

3. Troisième approximation

En polarisation directe ($I > 0$), on associe au générateur de fcem V_s une résistance série R_s qui modélise la pente de la caractéristique linéarisée $I(V)$.

En inverse, le schéma est un interrupteur ouvert.

- En régime dynamique, la diode est assimilée à une résistance dynamique r_d dont la valeur dépend du courant statique I qui la traverse. Elle s'exprime de la façon suivante :

$$r_d = \frac{\eta kT}{qI}$$

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 618.

22.1 Circuit redresseur

On se propose ici d'étudier le comportement d'un circuit redresseur lorsqu'on associe à la diode chacun de ses trois modèles linéaires. Le schéma du circuit est représenté figure 22.9. Celui-ci est constitué d'une diode, d'une résistance $R = 33\ \Omega$ et d'un générateur de tension sinusoïdale $v_e(t)$ d'amplitude maximale $E_0 = 10$ V et de période T.

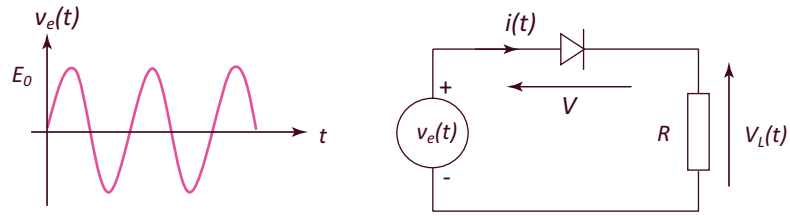


Figure 22.9 **Circuit redresseur à une diode**

On demande pour ce circuit de déterminer (et représenter) la tension aux bornes de la charge $v_L(t)$ lorsque l'on remplace la diode par son modèle :

a) diode idéale,

b) seconde approximation ($V_s = 0{,}7$ V),

c) troisième approximation ($V_s = 0{,}7$ V, $R_s = 5\ \Omega$).

22.2 Circuit limiteur

Il s'agit de montages dont la principale fonction est de protéger les circuits électriques ou électroniques. On les appelle aussi circuits écrêteurs. Nous allons étudier un des multiples montages qui réalisent cette fonction de façon à bien comprendre le fonctionnement et la démarche qui permet de résoudre l'exercice. Le schéma d'un écrêteur parallèle est représenté figure 22.10. Nous utiliserons la seconde approximation pour représenter la diode avec $V_s = 0{,}7$ V. On donne $R_1 = 1\ \text{k}\Omega$ et $R_2 = 2{,}2\ \text{k}\Omega$.

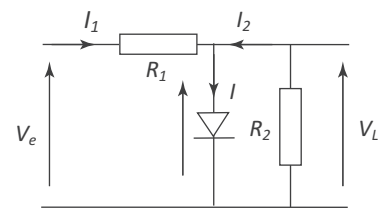


Figure 22.10 **Circuit limiteur parallèle**

a) On demande de déterminer la fonction de transfert du circuit soit $\frac{V_L}{V_e}$.

b) Le signal appliqué à l'entrée $v_e(t)$ est un signal triangulaire de période T et d'amplitude maximale $E_0 = 2$ V. Représenter le signal de sortie.

22.3 Circuit de restitution de niveau

Appelé aussi circuit de *clamping*, ce sont des circuits qui permettent de régénérer une composante continue (positive ou négative) au signal alternatif appliqué à l'entrée. Très largement utilisés en télécommunications, on les trouve par exemple dans les récepteurs de télévision et dans certaines classes d'amplificateur de puissance. Ils évitent ainsi l'application d'une tension positive continue superposée au signal alternatif sinusoïdal.

Le schéma d'un circuit de restitution de niveau négative est représenté figure 22.11.

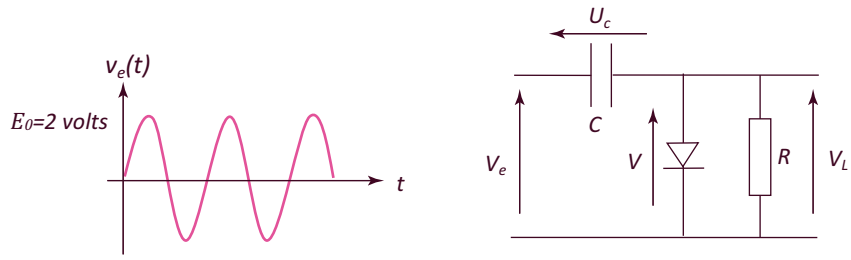


Figure 22.11 **Circuit de restitution de niveau négatif**

La fréquence du signal d'entrée sinusoïdal est de 100 Hz, $C = 1$ µF et $R = 1$ MΩ. On choisit la seconde approximation pour représenter la diode.

Quelle est l'allure du signal de sortie aux bornes de la résistance R ?

LE TRANSISTOR BIPOLAIRE

23

PRÉALABLES

- Connaître les lois fondamentales de l'électricité.
- Maîtriser les unités du système international.

MOTS CLÉS

- Transistors *NPN*, *PNP*.
- Relations fondamentales, réseau de caractéristique, polarisation du transistor, régime dynamique, amplification.
- Montages fondamentaux.

OBJECTIFS

- Caractériser le composant par son réseau de caractéristique.
- Déterminer le point de fonctionnement statique.
- Donner le schéma équivalent en régime dynamique.
- En déduire les principales caractéristiques dynamiques : gain, impédance d'entrée et de sortie.

23.1 INTRODUCTION

Le transistor bipolaire est un composant élaboré en 1948 par Bardeen, Brattain et Schockley.

Il s'agit d'un composant constitué par la juxtaposition de deux jonctions *PN* soit trois électrodes. Suivant la configuration de ces jonctions, on trouve les transistors *NPN* ou *PNP*. Pour autant, son comportement ne peut être assimilé aussi simplement au fonctionnement de deux diodes à jonctions *PN* montées en tête-bêche.

À titre d'exemple, le transistor *NPN* est constitué d'une zone *P* très mince (appelée communément la base) entourée de deux zones *N* larges (le collecteur et l'émetteur). Le collecteur est moins dopé que la base qui est elle-même moins dopée que l'émetteur (Fig. 23.1).

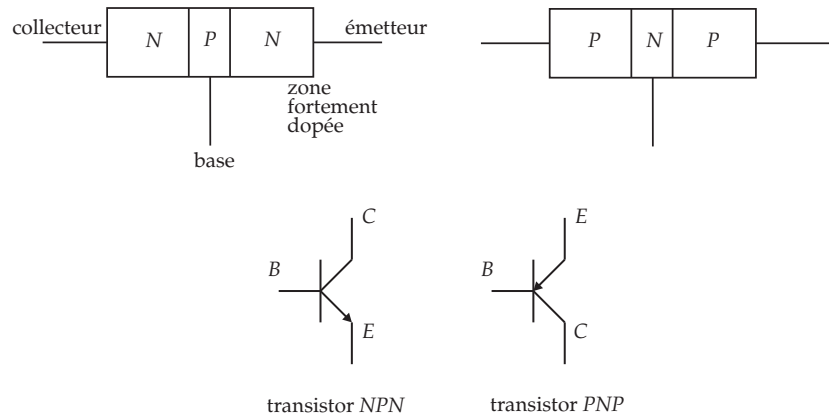


Figure 23.1 **Structures simplifiées d'un transistor *NPN* et *PNP* et symboles usuels associés**

Sans rentrer dans la physique du composant, le principe de fonctionnement du transistor *NPN* consiste à contrôler le flux d'électrons de l'émetteur vers le collecteur à partir du flux d'électrons qui circulent de l'émetteur vers la base. Dans le cas du transistor *NPN*, le flux d'électrons du collecteur vers l'émetteur sera contrôlé par celui entrant dans la base.

Le transistor bipolaire peut être vu comme une source de courant contrôlée par un autre courant. On parle volontiers de source de courant liée.

On notera que la flèche indique le sens réel du courant statique (ou continu) lorsque la jonction *PN* entre la base et l'émetteur est polarisée en direct (au même titre que la diode).

23.2 Relations électriques fondamentales

Nous écrirons ces relations dans le cas du transistor *NPN* (Fig. 23.2).

Six grandeurs sont associées au fonctionnement du transistor. Elles s'écrivent et sont liées entre elles de la façon suivante :

- $I_E = I_C + I_B$
- $V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$.

On appelle I_E le courant d'émetteur, I_C le courant de collecteur, I_B le courant base et les trois tensions V_{CB}, V_{CE} et V_{BE} entre les bornes du transistor.

On notera que bien souvent, $I_B \ll I_C$, ce qui permet de considérer en première approximation que $I_E = I_C$.

Il existe une relation fondamentale qui lie les courants collecteur et émetteur ; elle s'écrit de la façon suivante :

$$I_C = \beta\, I_B$$

Dans cette expression, β représente le gain en courant statique du transistor.

Remarques

On notera que dans bien des cas, les valeurs de β oscillent entre 100 et 300. En effet, pour un même composant, il existe une forte dispersion du gain en courant β. De plus, celui-ci dépend du courant collecteur I_C.

La relation $I_C = \beta\ I_B$ n'est cependant valable que lorsque le transistor fonctionne en mode actif direct ou dans la zone active. Nous reparlerons un peu plus loin des différents modes de fonctionnement du transistor bipolaire.

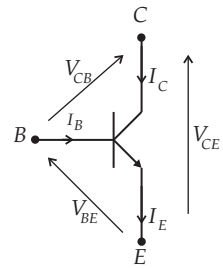


Figure 23.2 **Grandeurs électriques associées au transistor bipolaire *NPN*.**

23.3 Réseau de caractéristiques du transistor NPN — Régime statique

Le fonctionnement intrinsèque du transistor est obtenu à partir des six grandeurs précédemment citées (I_B, I_C, I_E, V_{CE}, V_{BE} et V_{CB}). Seules quatre de ces grandeurs sont indépendantes (I_B, I_C, V_{CE} et V_{BE}). On représente alors l'évolution de ces quatre grandeurs dans un graphe communément appelé réseau quatre quadrants (Fig. 23.3). On parlera ici de régime statique dans la mesure où l'évolution de ces grandeurs est obtenue à partir de sources continues.

Ce graphe nous conduit à faire les remarques suivantes:

- la caractéristique $I_B = f(V_{BE})$ est en tout point semblable à la caractéristique d'une diode à jonction. On retrouve ainsi la tension de seuil qui représentait la tension de déblocage de la jonction *PN* (approximativement 0,7 V pour le silicium et 0,3 V pour le germanium).
- la pente de la caractéristique $I_C = f(I_B)$ indique le gain en courant statique β du transistor. Notons que cette caractéristique est obtenue pour une valeur de V_{CE} constante.
- le réseau de caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ est obtenu pour des valeurs constantes du courant base I_B. Ce quadrant nous inspire plusieurs réflexions car on distingue quatre zones bien particulières :
- la zone de saturation du transistor apparaît pour les faibles valeurs de V_{CE} (autour de 0,3 volt) que l'on notera $V_{CE(sat)}$. Dans cette zone, il n'existe pas de lien de proportionnalité direct entre le courant I_C et I_B ce qui interdit l'écriture $I_C = \beta\ I_B$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

- la zone linéaire (ou mode actif direct) du transistor est une région dans laquelle on peut écrire la relation $I_C = \beta I_B$. Dans un montage amplificateur utilisant un transistor, on tâchera de polariser le composant à l'intérieur de cette zone.
- la zone de blocage pour laquelle $I_C \approx 0$. On dit que le transistor est bloqué.
- enfin, la zone de claquage du transistor, phénomène irréversible lorsque la tension V_{CE} devient supérieure à une valeur limite souvent notée $V_{CE(max)}$.

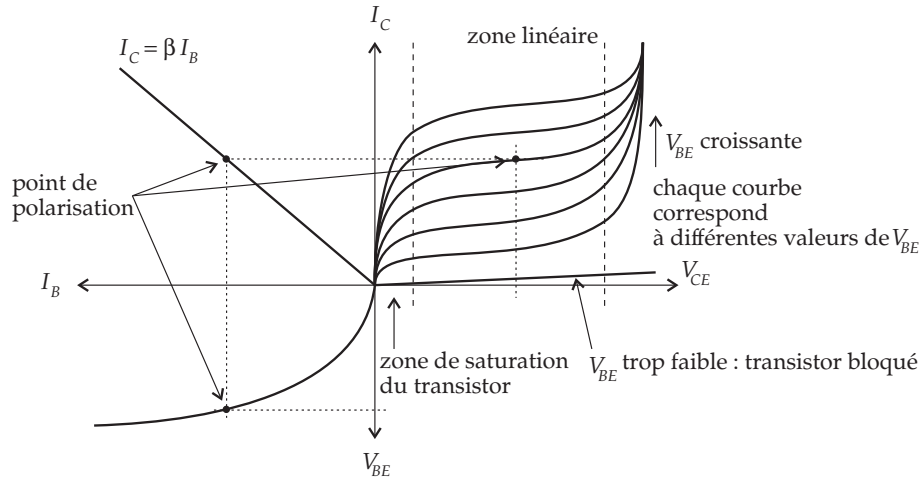


Figure 23.3 **Réseau 4 quadrants caractéristique d'un transistor *NPN*.**

Remarques

• D'une certaine façon, le transistor peut être assimilé à un générateur de courant lié lorsqu'il fonctionne dans la zone linéaire. C'est un interrupteur, soit ouvert lorsqu'il fonctionne dans la zone de blocage, soit fermé lorsqu'il fonctionne dans la zone de saturation.

• Bien que non représenté sur la figure 23.3, il existe une puissance maximale à ne pas dépasser car au-delà, le transistor peut être détruit. L'expression de la puissance dissipée par le transistor dépend principalement de la tension V_{CE} et du courant qui traverse la jonction collecteur-émetteur soit :

$$P_D = V_{CE} \cdot I_C$$

Il faudra prendre soin à ne pas dépasser la puissance maximale $P_{D(max)}$ indiquée dans les notices constructeurs.

• Le réseau de caractéristique représenté figure 23.3 est celui d'un transistor *NPN*. Le réseau d'un transistor équivalent *PNP* serait parfaitement identique. Cependant, les courants statiques étant tous inversés, Il suffit de changer le signe des quatre grandeurs I_C, I_B, V_{CE} et V_{BE}. De positives, elles deviennent ainsi négatives.

23.4 Polarisation du transistor, Point de fonctionnement statique, Droite de charge statique

Nous avons déjà présenté la notion de point de fonctionnement statique dans le cas de la diode à jonction *PN*.

Voir chapitre 22, § 22.4

Cette notion prend toute son importance dans le cas du transistor dans la mesure où ce point conditionne le fonctionnement du montage en régime dynamique.

Rappelons que cette opération consiste à placer le composant actif dans un état de repos (ou de conduction) bien défini. Cet état est caractérisé par un point (V_{CE0}, I_{C0}) sur le réseau de caractéristiques (Fig. 23.3). Il correspondait également à l'intersection entre la droite de charge du circuit et le réseau de caractéristiques du transistor.

Il faut à ce niveau là déjà avoir à l'esprit qu'en régime dynamique, on superposera autour de ce point une composante alternative sinusoïdale.

Si l'on souhaite amplifier cette composante sinusoïdale en sortie, on comprend qu'il faille dans ce cas placer judicieusement le point de fonctionnement dans la zone linéaire du réseau de caractéristiques. Pour illustrer cette notion fondamentale, traitons un exemple sur un cas simple.

Exercice d'application 23.1

Déterminer le point de fonctionnement du montage de la figure 23.4. On donne V_{CC} = 10 volts, β = 100, R_C = 2 kΩ et pour R_B, deux valeurs : 300 kΩ et 150 kΩ. Conclure sur l'influence de la valeur de R_B sur le point de polarisation.

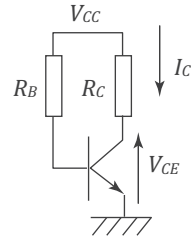


Figure 23.4

SOLUTION. La base est ramenée au potentiel V_{CC} par la résistance R_B, L'émetteur est connecté à la masse ce qui permet d'écrire :

$$V_{BE} > 0$$

Pour la suite nous allons faire l'hypothèse que le transistor fonctionne dans la zone linéaire (mode actif direct) soit donc V_{BE} = 0,7 V et $I_C = \beta I_B$. Il restera à montrer que cette hypothèse est valide.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Pour $R_B = 300\ k\Omega$, nous pouvons écrire :
$V_{CC} = R_B \cdot I_B + V_{BE}$

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = \frac{10 - 0{,}7}{300 \cdot 10^3} = 31\ \mu A \text{ avec } I_C = I_{C_0} = 3{,}10\ mA$$

de plus, la droite de charge statique s'écrit:

$$V_{CE} = V_{CE_0} = V_{CC} - R_C \cdot I_C = V_{CC} - R_C \cdot \beta \cdot I_B = 3{,}8\ V > 0$$

on en déduit : $V_{BC} = V_{BE} - V_{CE} = -3{,}1\ V < 0$
L'hypothèse de départ, lorsque $R_B = 300\ k\Omega$, est donc correcte compte tenu des valeurs de V_{CE} et de V_{BC}.
Lorsque $R_B = 150\ k\Omega$, le courant I_B devient égal a :

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = \frac{10 - 0{,}7}{150 \cdot 10^3} = 62\ \mu A$$

soit : $V_{CE} = V_{CC} - R_C \cdot \beta \cdot I_B = -2{,}4\ V < 0$
$V_{CE} < 0$, le transistor fonctionne en saturation, la relation $I_C = \beta I_B$ n'est plus valide. Le courant I_{C0} se calcule en considérant $V_{CE(sat)} = 0{,}3$ volt qui est la tension de saturation du transistor soit :

$$I_C = I_{C_0} = \frac{V_{CC} - V_{CE(sat)}}{R_C} = \frac{10 - 0{,}3}{2 \cdot 10^3} = 4{,}85\ mA$$

Le transistor peut être assimilé ici à un interrupteur fermé, la tension à ses bornes étant proche de 0.
Le point de polarisation, on pouvait s'en douter, dépend très fortement du choix des composants qui polarisent le transistor. Modifier R_B revient à modifier le courant base et par conséquent la position du point de fonctionnement sur la droite de charge.
On notera qu'il s'agit là d'un exemple de circuit de polarisation. Il en existe cependant bien d'autres.

23.5 Transistor en régime dynamique

La superposition d'une composante alternative autour du point de fonctionnement (ou point de polarisation) constitue la base même de l'amplification dans un transistor. D'un point de vue pratique, on injecte un signal sinusoïdal sur la base du transistor. Dans l'hypothèse d'un comportement linéaire du transistor, ce signal engendre une tension sinusoïdale sur le collecteur du transistor. Celle-ci étant plus élevée que le signal injecté sur la base comme le montre la figure 23.5.

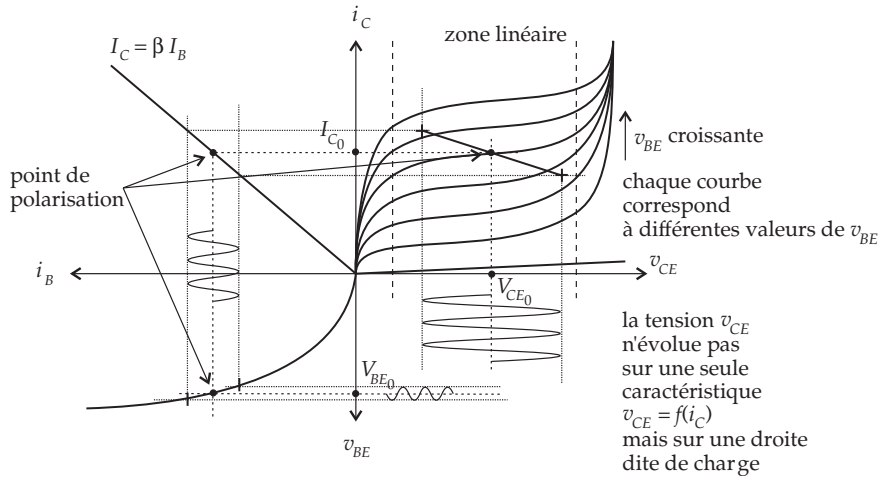


Figure 23.5 **Superposition d'une composante sinusoïdale autour du point de fonctionnement. Principe de l'amplification d'un signal**

Remarques

- L'étude des régimes statique et dynamique se fait de façon indépendante en appliquant le théorème de superposition. À la fin du calcul, il suffit donc de juxtaposer les deux résultats. Cette approche, et il s'agit d'une notion importante, implique que le fonctionnement du transistor soit linéaire. Autrement dit, on peut également dire qu'un comportement linéaire du transistor se traduit par la linéarité des caractéristiques dans le réseau quatre quadrants. Dans le cas de la diode à jonction, ceci impliquait que l'amplitude de la composante sinusoïdale soit faible pour pouvoir approcher sa caractéristique par une droite de pente égale à la tangente au point de fonctionnement. Nous retrouvons les mêmes conditions pour le transistor et c'est la raison pour laquelle on parlera souvent de régime dynamique petit signal.

Voir chapitre 22, § 22.5

- Enfin, comme pour la diode, les paramètres qui caractérisent le fonctionnement en régime dynamique dépendent du point de fonctionnement.

23.5.1 Droite de charge dynamique

Il s'agit là d'une notion nouvelle, mais la droite de charge dynamique représente d'une certaine façon, le lieu de tous les points de fonctionnement « dynamiques » qui sont dus à la variation temporelle du signal autour du point de fonctionnement statique.

On introduit alors le schéma équivalent dynamique (petit signal) pour déterminer l'expression de la droite de charge dynamique.

23.5.2 Schéma équivalent petit signal — Paramètres hybrides

En régime dynamique et avec des signaux de faibles amplitudes autour du point de fonctionnement, on peut décrire le comportement linéaire du transistor à partir des paramètres communément appelés paramètres *h* ou paramètres hybrides.

Ceci conduit à une résolution analytique plus aisée et permet au bout du compte de considérer le montage amplificateur telle une boîte noire, indépendamment des

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

composants qui le constituent. Le calcul des caractéristiques de l'amplificateur (gain, impédance d'entrée et de sortie) se fera à partir des paramètres *h* du transistor et des composants qui l'entourent (résistances de polarisation par exemple).

La matrice *H* qui définie cette boîte noire est déterminée avec les conventions de la figure 23.6.

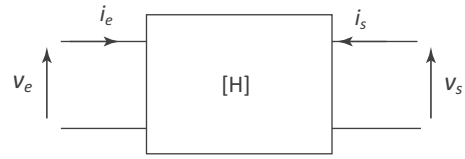


Figure 23.6 **Conventions utilisées pour la détermination des paramètres *h***

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ avec } [H] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

Appliquée au transistor *NPN* monté en émetteur commun de la figure 23.7, la matrice *H* s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} v_{BE} \\ i_C \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_B \\ v_{CE} \end{bmatrix} \text{ soit en développant : } \begin{matrix} v_{BE} = h_{11} i_B + h_{12} v_{CE} \\ i_C = h_{21} i_B + h_{22} v_{CE} \end{matrix}$$

avec :

- h_{11}, l'impédance d'entrée (en Ω) du transistor déterminée lorsque $v_{CE} = 0$,
- h_{12}, le rapport de transfert inverse en tension entre l'entrée et la sortie (grandeur sans dimension), lorsque $i_B = 0$,
- h_{21}, le rapport de transfert direct en courant entre la sortie et l'entrée (grandeur sans dimension), lorsque $v_{CE} = 0$,
- h_{22}, la conductance de sortie (exprimée en siemens) qui est l'inverse de la résistance, lorsque $i_B = 0$.

La détermination des paramètres h_{ij} de la matrice nous permet de représenter le transistor à l'aide de son schéma électrique associé équivalent (Fig. 23.7).

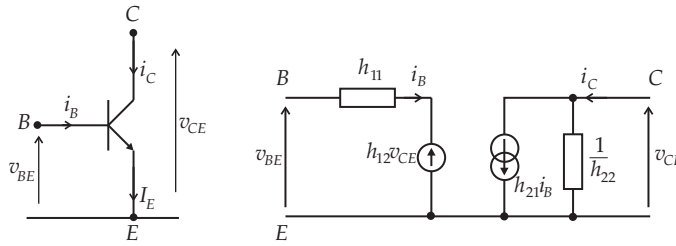


Figure 23.7 **Schéma équivalent d'un transistor *NPN* déterminé à partir des paramètres *h***

Remarques

Le paramètre h_{21} est communément appelé gain en courant du transistor. Il est assimilé à β dont nous avons parlé un peu plus haut dans ce chapitre.

La matrice H est ici définie pour le transistor en montage émetteur commun. Pour autant, il existe également deux autres matrices H écrites chacune pour le transistor en montage base commune et collecteur commun.

Cependant, nous pourrons bien souvent considérer les paramètres h_{21} et h_{22} du montage émetteur commun (et uniquement celui-ci) proches de 0 ce qui simplifiera grandement les calculs. Pour cette raison, nous utiliserons alors avantageusement les paramètres h en émetteur commun quel que soit le type de montage utilisé.

23.5.3 Amplificateur à transistor — Grandeurs caractéristiques

Un amplificateur à transistor est un dispositif qui amplifie en sortie le signal appliqué à l'entrée. Si l'amplificateur fonctionne en linéaire et il s'agit là d'une notion importante dont nous avons déjà parlé, nous pouvons alors écrire :

$$X_S = A \cdot X_E$$

avec A, le gain de l'amplificateur, X_S et X_E respectivement les grandeurs de sortie et d'entrée.

Notons qu'il existe quatre types d'amplificateurs suivant la nature des grandeurs X_E et X_S :

- l'amplificateur tension défini par $A_v = \dfrac{v_s}{v_e}$,
- l'amplificateur courant défini par $A_i = \dfrac{i_s}{i_e}$,
- l'amplificateur transrésistance défini par $A_r = \dfrac{v_s}{i_e}$,
- l'amplificateur transconductance défini par $A_g = \dfrac{i_s}{v_e}$.

Remarques

A_v et A_i sont des grandeurs sans dimensions alors que A_r est exprimé en ohms (Ω) et A_g en siemens (S).

Nous n'avons pas abordé cette notion dans le cadre de ce cours mais il faut avoir à l'esprit qu'un amplificateur quel qu'il soit est toujours caractérisé par une largeur de bande de fréquence finie, communément appelée bande-passante de l'amplificateur. En dehors de la bande-passante, les performances en termes de gain et d'impédance se dégradent. Il faudra prendre soin à faire fonctionner l'amplificateur à l'intérieur de la bande-passante.

Nous avons évoqué plus haut le fait qu'un amplificateur pouvait être représenté par un quadripôle auquel est connecté un générateur d'attaque en entrée qui fournira le signal à amplifier et une charge R_L sur laquelle sera prélevé le signal de sortie amplifié (Fig. 23.8).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit



Figure 23.8 **Représentation schématique d'un amplificateur**

On trouvera à l'intérieur du quadripôle l'ensemble des composants (résistances, transistor...) qui constitue l'amplificateur.

Les trois paramètres fondamentaux qui caractérisent l'amplificateur sont :

- l'impédance d'entrée définie par $Z_E = \dfrac{v_e}{i_e}$, (on définit également l'impédance d'entrée en charge en présence de R_L ou hors charge),
- l'impédance de sortie définie par $Z_S = \left.\dfrac{v_s}{i_s}\right|_{v_e=0}$,
- un des quatre gains que nous avons définis plus haut (A_v, A_i, A_r et A_g).

La figure 23.9 représente le schéma équivalent électrique obtenu dans le cas d'un amplificateur de type tension une fois connus Z_E, Z_S et A.

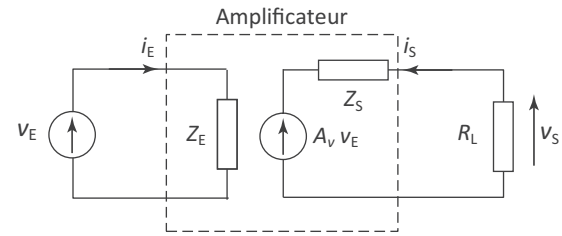


Figure 23.9 **Schéma équivalent d'un amplificateur tension**

Remarque

Par convention, tous les courants sont entrants dans les quadripôles. C'est la raison pour laquelle le courant de sortie i_s, comme i_e, est entrant dans le quadripôle.

Il faut toujours avoir à l'esprit, et nous l'avons déjà précisé, la valeur maximale que peut prendre le signal de sortie sans écrêtage. Remarquons que le calcul des grandeurs dynamiques se fait de façon indépendante des caractéristiques statiques. Pour autant, la polarisation du transistor aura un impact fort sur la qualité du signal de sortie.

Voir § 23.5.1

Il est à noter que l'opération d'amplification résulte de la transformation d'une partie de la puissance continue fournie par l'alimentation V_{cc} en puissance alternative. En clair, et même si cela semble évident, il ne faut pas s'attendre à amplifier quoi que se soit si l'amplificateur n'est connecté à aucune source d'alimentation statique.

À retenir

Pour un transistor bipolaire, on distingue trois principaux modes de fonctionnement suivant la position du point de repos sur la droite de charge statique :

- **mode saturé**, le transistor est assimilé à un interrupteur fermé et le point de fonctionnement est situé en haut de la droite de charge statique ($V_{CE} \approx 0$) ;
- **mode bloqué**, le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert et le point de fonctionnement est situé en bas de la droite de charge statique ($I_C = 0$) ;
- **mode actif direct**. Dans ce cas particulier mais largement utilisé, on peut écrire la relation $I_C = \beta\, I_B$. Le point de fonctionnement est sur la droite de charge statique dans la zone de fonctionnement linéaire.

On dit dans les deux premiers cas que le transistor fonctionne en commutation alors que dans le mode actif, le transistor est en régime de fonctionnement linéaire (ou amplificateur).

Notons que dans tous les cas et quel que soit le type de transistor (*NPN* ou *PNP*), les relations $I_E = I_C + I_B$ et $V_{CB} = V_{CE} - V_{BE}$ restent valable.

En **régime dynamique**, on superpose autour du point de fonctionnement statique une composante alternative sinusoïdale à amplifier.

La droite de charge dynamique représente le lieu des points de fonctionnement « dynamiques » qui varient au rythme du signal alternatif appliqué à l'entrée.

Dans un **fonctionnement amplificateur**, on placera judicieusement le point de fonctionnement au milieu de la droite de charge dynamique pour une excursion symétrique du signal de sortie.

En **représentation quadripolaire** à l'aide de la matrice H les paramètres du transistor sont :

- h_{11}, l'impédance d'entrée lorsque la sortie est en court-circuit,
- h_{12}, le rapport de transfert inverse lorsque le courant d'entrée est nul,
- h_{21}, le gain en courant lorsque la sortie est en court-circuit,
- h_{22}, la conductance de sortie lorsque le courant d'entrée est nul.

Dans le cas du transistor monté en émetteur commun (l'émetteur est relié à la masse en dynamique), on pourra négliger les paramètres h_{12} et h_{22}.

Dans un **montage amplificateur à transistor**, on caractérisera le dispositif à l'aide des paramètres suivants :

- Z_E l'impédance d'entrée du montage,
- Z_S l'impédance de sortie déterminée lorsque le générateur d'attaque est désactivé,
- A, le gain en tension, en courant, transrésistance ou transconductance selon le montage élaboré.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice

Les solutions sont regroupées p. 621.

23.1 Études statique et dynamique d'un montage amplificateur

Soit le montage amplificateur de la figure 23.10. On donne pour ce montage : $V_{CC} = 10$ volts, $I_{C0} = 2$ mA, $V_{CE0} = 5$ volts, $R_B = 397$ kΩ, $R_C = 1{,}8$ kΩ et $R_E = 680$ Ω. La capacité C_D joue le rôle d'un court-circuit parfait en régime sinusoïdal tandis que les deux capacités de liaison C_L isolent la composante continue de la composante sinusoïdale.

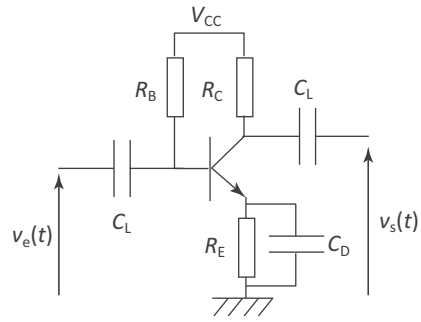


Figure 23.10

Notons que la mise en court-circuit de la résistance R_E en régime dynamique conduit à un montage particulier du transistor communément dénommé montage à émetteur commun.

On demande :

a) de déterminer et de représenter les expressions des droites de charge statique et dynamique ;

b) d'en déduire l'amplitude maximale de la tension de sortie ;

c) le gain en tension A_v du montage.

23.2 Analyse d'un montage amplificateur

Le schéma de l'amplificateur à transistor est représenté figure 23.11. On donne pour ce montage les éléments suivants :

$$V_{CC} = 15 \text{ V}, \; V_{BE} = 0{,}7 \text{ V}, \; R_1 = 68 \text{ k}\Omega, \; R_2 = 12 \text{ k}\Omega, \; R_C = 4{,}7 \text{ k}\Omega,$$

$$R_E = 1 \text{ k}\Omega, \; R_L = 10 \text{ k}\Omega, \; h_{21} = \beta = 100, \; h_{11} = 1\,870 \text{ }\Omega.$$

Les capacités de liaisons C_L sont assimilées à des courts-circuits à la fréquence de travail.

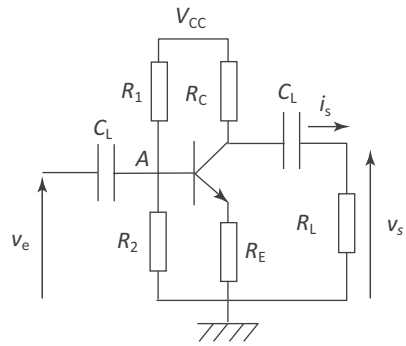


Figure 23.11 **Montage amplificateur à transistor**

On demande pour ce circuit de déterminer :

a) le point de fonctionnement du montage,
b) le gain en tension A_v,
c) l'impédance d'entrée,
d) l'impédance de sortie Z_s (hors charge),
e) l'impédance de sortie Z_s (en charge).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL 24

PRÉALABLES

- Connaître les lois fondamentales de l'électricité.
- Savoir déterminer la fonction de transfert d'un quadripôle.
- Savoir représenter le diagramme de Bode d'un filtre du premier ordre.
- Savoir utiliser la notation complexe.

MOTS CLÉS

- Amplificateur opérationnel (AOP)
- Caractéristiques intrinsèques, cas de l'AOP idéal, fonctionnement linéaire et non linéaire
- Montages fondamentaux

OBJECTIFS

- Présenter les principales caractéristiques d'un AOP.
- Donner son schéma électrique équivalent dans le cas d'un fonctionnement en régime linéaire (fonctionnement amplificateur).
- Introduire la notion de fonctionnement non linéaire de l'AOP.

24.1 INTRODUCTION

Un amplificateur opérationnel (AOP ou ampli-op), est un amplificateur de différence ou différentiel. Il amplifie la différence entre deux signaux appliqués à ses entrées. Ceci permet de limiter en sortie l'influence d'une éventuelle dérive du signal appliqué à l'entrée. Dans la pratique, cet amplificateur différentiel est constitué d'une paire de transistors supposés identiques et polarisés dans leur zone de fonctionnement linéaire.

L'AOP est devenu un standard industriel compte tenu de ses multiples applications (amplificateur, additionneur, soustracteur, intégrateur, filtre actif, oscillateurs ou systèmes à deux états tels que les générateurs de signaux rectangulaires périodiques...). On le trouve principalement sous la forme de circuit intégré.

Caractérisé par un gain en tension très élevé, on peut noter qu'il s'agit d'un composant qui ne peut être utilisé qu'en présence de composants externes le plus souvent passifs (résistances, capacités) de façon à élargir sa bande passante particulièrement réduite.

Comme bien des composants électroniques, il peut être utilisé en tant qu'amplificateur (mode de fonctionnement linéaire) ou en commutation (mode de fonctionnement non linéaire) mais il est également caractérisé par un certain nombre de limitations.

24.2 Caractéristiques d'un AOP

Un AOP est un amplificateur de type tension (impédance d'entrée Z_e élevée, impédance de sortie Z_s faible) à liaison directe car il amplifie à la fois le continu et l'alternatif. Le réseau externe de composants fixera la fonction de transfert du montage. Sa représentation schématique est donnée figure 24.1.

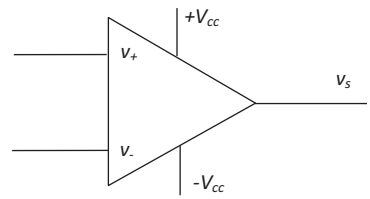


Figure 24.1 **Représentation schématique d'un amplificateur opérationnel**

Les entrées v_+ et v_- sont respectivement appelées entrée non inverseuse et entrée inverseuse. L'AOP est alimenté de façon symétrique entre les potentiels + V_{CC} et – V_{CC} (généralement +/– 15 V).

De façon plus détaillée, il est constitué par la succession de trois étages dont :

- un étage différentiel à proprement parler dont la fonction consiste à fournir en sortie un signal qui résulte de la différence amplifiée des deux signaux appliqués en entrée ;
- un amplificateur à transistors dont le but consiste à garantir un gain en tension élevé à l'AOP ;
- un montage à transistors à collecteur commun qui n'est autre qu'un amplificateur de puissance classe AB et qui permet, notamment, de fixer l'impédance de sortie à une valeur faible, caractéristique d'un amplificateur tension.

Dans la réalité, un AOP n'est pas idéal et la tension de sortie dépend à la fois de la différence entre les signaux appliqués à l'entrée et de la somme entre ces deux signaux. Cette tension s'exprime de la façon suivante :

$$v_s = A_d \cdot (v_+ - v_-) + \frac{A_c}{2} \cdot (v_+ + v_-)$$

Dans cette expression, A_d représente le gain différentiel (que l'on souhaite élevé) et A_c, le gain en mode commun (le plus faible possible). On définit alors le Rapport de Réjection en Mode Commun (RRMC) exprimé en décibels :

$$\text{RRMC} = 20 \log \frac{A_d}{A_c}$$

Idéalement, ce rapport devra tendre vers l'infini.

On note que sur la figure 24.1 la masse n'est pas explicitement accessible sur l'AOP. En fait, d'un point de vue pratique, la masse correspond au point milieu de l'alimentation continue symétrique (+/– V_{CC}) et représente le potentiel de référence dans la plupart des montages.

24.2.1 Schéma équivalent d'un AOP

La figure 24.2 représente le schéma électrique équivalent d'un AOP. Sur ce schéma apparaissent son impédance d'entrée Z_e, son impédance de sortie Z_s et son gain en tension différentiel A_d qui sont les principales grandeurs électriques qui le caractérise.

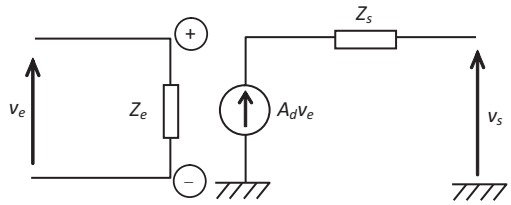


Figure 24.2 **Représentation électrique d'un AOP**

Nous avons indiqué plus haut qu'un AOP était par nature un amplificateur de type tension. Par conséquent, un AOP idéal sera caractérisé par une impédance d'entrée Z_e infinie, une impédance de sortie Z_s nulle, un gain en tension différentiel A_d infini et un gain en mode commun A_c égal à zéro. Ce dernier représente un terme parasite qui altère les qualités de l'AOP. Enfin, bien que non explicitement représenté sur la figure 24.2, l'AOP idéal possède une bande passante infinie et un RRMC infini également. En fonctionnement linéaire et en première approximation, on peut écrire :

$$v_s = A_d(v_+ - v_-) = A_d v_e = A_d \varepsilon$$

On cite bien souvent l'AOP μA741 comme étant un standard dans les applications courantes de l'électronique. Pour fixer les idées et à titre de comparaison avec les valeurs idéales, les caractéristiques de l'AOP 741 sont les suivantes :

- Z_e = 2 MΩ
- Z_s = 75 Ω
- A_d = 100 000 (100 dB)
- bande-passante = 10 Hz
- RRMC = 90 dB

24.2.2 Modes de fonctionnement de l'AOP

a) Mode de fonctionnement linéaire (ou amplificateur)

Prenons l'exemple simple du montage de la figure 24.3 (a), constitué d'un AOP et d'une résistance R.

On applique une tension $v_e = v_- > 0$, ceci entraîne que $\varepsilon = v_+ - v_- = -v_- < 0$. La tension de sortie $v_s = A_d\varepsilon < 0$ est en fait réinjectée sur l'entrée inverseuse v_- à travers la

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

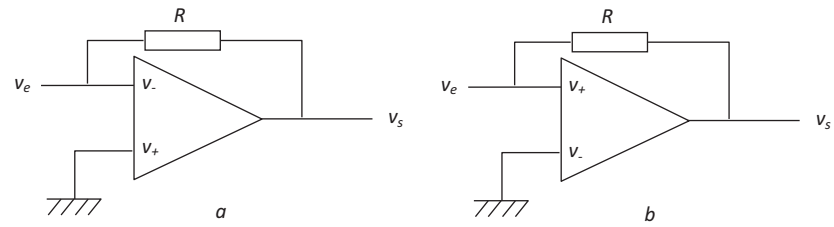


Figure 24.3 **Modes de fonctionnements de l'AOP**

résistance R. Cette action s'apparente à une rétroaction c'est-à-dire une action dans le sens sortie vers entrée. Dans notre cas, on remarque le signe opposé des deux tensions sur l'entrée inverseuse. Ceci se traduit pratiquement par un équilibre de la tension « résultante » autour de zéro ce qui équilibre le montage (soit donc $\varepsilon = 0$). On dit que le montage fonctionne en mode linéaire ce qui permet d'écrire $v_s = A_d\varepsilon$. Dans le cas idéal, A_d tend vers l'infini et ε est égal à 0.

b) Mode de fonctionnement non linéaire (commutation)

Considérons cette fois-ci le montage de la figure 24.3 (b), très ressemblant à celui de la figure 24.3 (a). On constate que la résistance R est cette fois connectée entre la sortie et l'entrée non inverseuse de l'AOP ce qui constitue ici aussi une rétroaction de la sortie vers l'entrée.

On applique une tension $v_e = v_+ > 0$, ce qui entraine dans ce cas $v_e = v_+ - v_- = v_+ > 0$. La tension de sortie $v_s = A_d\varepsilon > 0$ est ici aussi réinjectée sur l'entrée non inverseuse. Il se produit un effet cumulatif sur l'entrée non inverseuse (celle-ci augmente) ce qui va provoquer la saturation de l'AOP. La tension de sortie devient égale (ou légèrement inférieure) à $+ V_{CC}$ qui est la tension d'alimentation de l'AOP.

Le fonctionnement de l'AOP devient non linéaire, la relation $v_s = A_d\varepsilon$ n'est plus applicable dans ce cas.

Remarques

Une tension négative appliquée en v_e aurait également provoqué la saturation de l'AOP. Dans ce cas, la tension de sortie aurait été égale (ou légèrement supérieure) à $- V_{cc}$.

On parle souvent en électronique, et nous détaillerons cette notion dans le paragraphe suivant, de rétroaction négative ou contre-réaction lorsque le signal réinjecté revient en opposition de phase avec le signal d'entrée. La rétroaction positive correspond à un retour du signal en phase avec celui d'entrée.

Enfin, dans le cas de l'AOP, la détermination du signe de la rétroaction sera facilitée par la borne sur laquelle le signal sera réinjecté. Il s'agira d'une contre-réaction lorsque le retour se fera sur l'entrée inverseuse et d'une rétroaction positive lorsque le retour se fera sur l'entrée non inverseuse.

On déduit de ces deux modes de fonctionnement la caractéristique de transfert de l'AOP (Fig. 24.4).

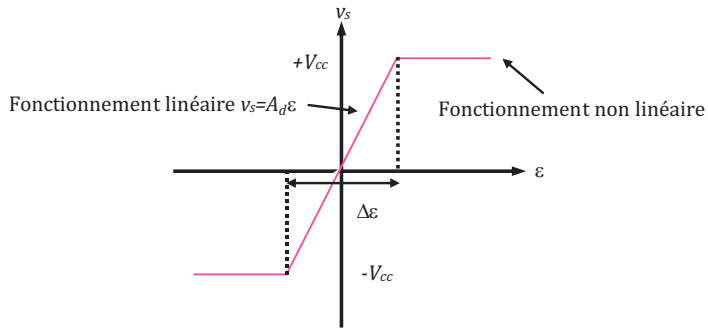


Figure 24.4 **Caractéristique de transfert de l'AOP**

24.3 Notions sur la rétroaction

La rétroaction est utilisée intensivement en électronique. Elle stabilise le gain d'un amplificateur, améliore sa reproductibilité d'un montage à un autre, améliore ses caractéristiques (Z_e, Z_s, bande passante) dans le sens d'un rapprochement vers les caractéristiques idéales et diminue la distorsion non linéaire. Il est intéressant d'en connaître le principe général qui peut être explicité à partir du schéma de la figure 24.5.

Notons que le signe – sur le mélangeur d'entrée indique que la grandeur d'entrée X_e est diminuée sous l'action de la rétroaction. Il s'agit ici d'une contre-réaction. Nous allons le démontrer dans les relations qui suivent.

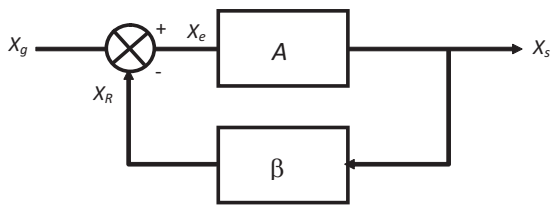


Figure 24.5 **Principe de la rétroaction en électronique**

A : gain de la chaîne directe (par exemple A_d pour l'AOP)

β : gain de la chaîne de retour (constitué par les éléments passifs qui constituent le montage)

X_i : grandeurs qui peuvent être des tensions ou des courants suivant le type d'amplificateur.

Nous pouvons écrire :

$$\left.\begin{aligned} X_s &= AX_e \\ X_R &= \beta X_S \\ X_e &= X_g - X_R \end{aligned}\right\} X_s = A\left(X_g - X_R\right) = A\left(X_g - \beta X_S\right) \Rightarrow \frac{X_s}{X_g} = \frac{A}{1 + A\beta}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On appelle cette grandeur le gain bouclé de l'amplificateur.

Dans le cas de la contre-réaction, on montre que le terme $(1 + A\beta) > 0$ ce qui veut dire que le gain de l'amplificateur bouclé $\frac{X_s}{X_g}$ est inférieur au gain de l'amplificateur non bouclé $\frac{X_s}{X_e}$. Ce résultat est un des inconvénients de la contre-réaction. Inconvénient très largement compensé par les avantages cités plus haut.

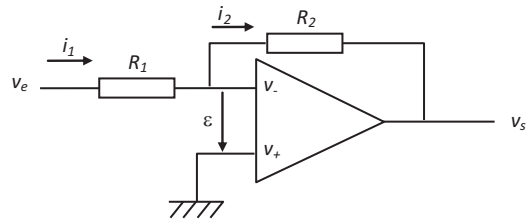
Que se passe-t-il si le gain de la chaine directe A tend vers l'infini ? Cette situation est celle de l'AOP μA741 où le gain A_d est très grand (de l'ordre de 100 000). Reprenons l'expression de X_s / X_g :

$$\frac{X_s}{X_g} = \frac{A}{1 + A\beta} = \frac{\frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{A\beta}} = \frac{1}{\beta} \text{ si } A \to \infty$$

Ce résultat est troublant mais pour autant, en présence d'un amplificateur caractérisé par un gain A extrêmement élevé, le gain bouclé du montage ne dépend pas de A.

Exercice d'application 24.1

Déterminer le gain A_v du montage suivant. L'AOP sera considéré comme étant idéal (A_d infini, Z_e infinie et Z_s égale à zéro).



SOLUTION. Si l'AOP est idéal, $\varepsilon = 0$ et $v_+ = v_-$, le potentiel sur la borne inverseuse est égal à zéro. On dit que la borne inverseuse est une masse virtuelle car elle n'est pas directement connectée à la masse. Pour autant, cela nous permet d'écrire :

$$\left.\begin{aligned} v_e &= R_1 \cdot i_1 \\ v_s &= -R_2 \cdot i_2 \end{aligned}\right\} i_1 = i_2 \Rightarrow \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1} = A_v$$

On remarque que le résultat du gain en tension ne dépend que des résistances R_1 et R_2 et ne dépend pas de A_d dans la mesure où celui-ci tend vers l'infini (dans le cas idéal).

On constate également que le gain négatif indique que le signal de sortie est inversé par rapport au signal d'entrée d'où l'appellation de montage amplificateur inverseur pour ce circuit.

24.4 GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

L'AOP n'est pas un composant idéal. Il présente toujours une certaine dissymétrie due à la dissymétrie des deux transistors qui constituent l'étage amplificateur différentiel. Les différentes grandeurs qui caractérisent l'AOP sont listées ci-dessous. Notons que les trois premières quantifient le déséquilibre en régime continu.

- La tension de décalage à l'entrée V_{i_0}. On remarque qu'en l'absence de tension appliquée entre les entrées + et –, la tension de sortie n'est pas nulle. La tension de décalage représente la tension qu'il faut appliquer entre les entrées + et – de façon à annuler la tension de sortie. Pour le µA741, $V_{i_0} = 2$ mV.
- Le courant de décalage d'entrée I_{i_0}. Il représente la différence des courants base I_{B_1} et I_{B_2} due à la différence des β sur les deux transistors et donne une indication sur la ressemblance des deux transistors. Pour le µA741, $I_{i_0} = 20$ nA.
- Le courant de polarisation d'entrée I_{i_B}. Il s'agit de la valeur moyenne des courants base I_{B_1} et I_{B_2} calculée de la façon suivante :

$$I_{i_B} = \frac{I_{B_1} + I_{B_2}}{2}$$

- La connaissance des deux grandeurs I_{i_0} et I_{i_B} permet de déterminer les courants I_{B_1} et I_{B_2} qui idéalement devraient être égaux. Pour le µA741, $I_{iB} = 80$ nA.
- Le courant de court-circuit. Il s'agit du courant maximal délivré par l'AOP lorsque la charge est en court-circuit. Pour le µA741, ce courant vaut 25 mA. Par conséquent, l'AOP ne pourra pas délivrer un courant supérieur à cette valeur.
- La pente maximale de la tension de sortie *slew-rate* (notée *SR*). Ce paramètre donne une information sur la rapidité (ou vitesse) de basculement maximale de la tension de sortie de l'AOP. Pour le µA741, le *SR* vaut 0,5 V · µs^{-1}. Ce qui veut dire que la tension de sortie ne pourra pas varier plus vite que de 0,5 V en 1 µs.
- Cette caractéristique a une influence sur la qualité du signal de sortie notamment pour les fréquences élevées, c'est-à-dire lorsque la pente du signal d'entrée devient supérieure au *SR*. En effet, on observe un phénomène caractéristique de « triangularisation » du signal de sortie qui illustre le fait que celui-ci ne suit plus la variation trop rapide du signal d'entrée.
- La fréquence de coupure f_h de l'AOP ou la bande-passante. Il s'agit d'une caractéristique fondamentale de l'AOP car au-delà de cette fréquence, le gain en tension chute brutalement. Pour le µA741, f_h est égale à 10 Hz (Fig. 24.6) et le comportement de l'AOP est assimilé à un filtre passe-bas 1er ordre (décroissance de – 20 dB/décade du gain en tension A_d). Cette caractéristique, associée au gain élevé de l'AOP (100 000 pour le µA741) montre que ce composant est inutilisable seul sans circuit de contre-réaction pour la quasi-totalité des applications en électronique. Nous l'avons déjà précisé mais la contre-réaction permettra, entre autres, de diminuer le gain tout en élargissant la bande passante de l'amplificateur.

Voir § 24.3

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

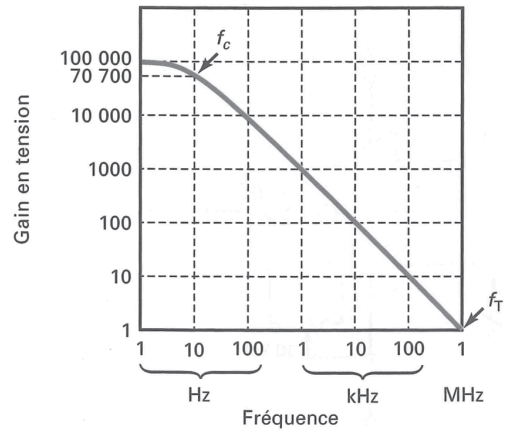


Figure 24.6 **Évolution fréquentielle du gain en tension de l'AOP741**

- La fréquence de transition f_T, fréquence pour laquelle le gain en tension est égal à 1. D'une certaine façon, cette fréquence donne une information sur la fréquence utile limite de l'AOP. Au-delà, le gain en tension devient inférieur à 0 dB (donc inférieur à 1 en linéaire).

Remarque

Dans ce paragraphe, nous avons listé un certain nombre de caractéristiques propres à l'AOP, qui mettent en évidence les limites statique et dynamique du composant. Même si dans bien des cas, l'approximation de l'AOP idéal sera suffisante en première approche, il est utile d'avoir à l'esprit que ce circuit intégré, malgré ses multiples applications (linéaires et non linéaires), n'est pas idéal en soi. Une étude plus fine et précise du montage imposera la prise en compte de certaines (ou de la totalité) de ces grandeurs.

À retenir

Un AOP est un amplificateur différentiel à liaison directe (il amplifie le continu et l'alternatif), à forte impédance d'entrée et à faible impédance de sortie. Il s'agit donc d'un amplificateur de type tension dont la fonction de transfert sera établie à partir du réseau externe de rétroaction.

Il se présente sous la forme d'un circuit intégré et est alimenté de façon symétrique à l'aide d'une alimentation à point milieu (+/– V_{CC}). Deux bornes distinguent les entrées inverseuse v_- et non inverseuse v_+.

La tension de sortie d'un AOP et plus généralement d'un amplificateur différentiel s'exprime par :

$$v_s = A_d(v_+ - v_-) + \frac{A_c}{2}(v_+ + v_-)$$

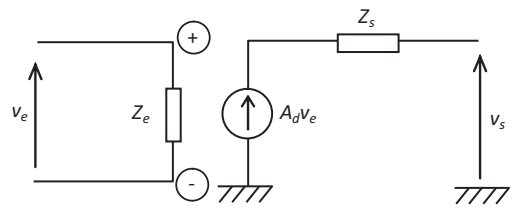
où A_d et A_c représentent respectivement le gain différentiel et le gain en mode commun de l'AOP.

En première approximation, dans le cas d'un AOP idéal :

$$v_s = A_d(v_+ - v_-) = A_d v_e = A_d \varepsilon$$

La tension de sortie ne dépend que de la différence entre les tensions v_+ et v_- pondérée par le gain en tension différentiel A_d.

Son schéma électrique équivalent est le suivant :



Idéalement et en première approximation, l'AOP est caractérisé par une impédance d'entrée Z_e infinie, une impédance de sortie Z_s nulle, un gain en tension différentiel A_d infini, un gain en tension en mode commun A_c nul et une bande passante infinie.

Dans la réalité, ces valeurs sont finies et un certain nombre de grandeurs caractérisent les imperfections de l'AOP (tension de décalage d'entrée V_{i_0}, courants de décalage et de polarisation d'entrée I_{i_0} et I_{i_B} et le *slew-rate SR* qui caractérise la rapidité de basculement de l'AOP).

Deux modes de fonctionnement caractérisent l'AOP. Ils dépendent du type de rétroaction appliqué sur le composant :

- le mode de **fonctionnement linéaire**, utilisé dans les montages amplificateurs. Le signal de sortie de l'AOP est directement proportionnel au signal d'entrée et $v_s = A_d \varepsilon$.
- le mode de **fonctionnement non linéaire**. L'AOP fonctionne en commutation c'est-à-dire que le signal de sortie ne peut prendre que deux états peu différents des tensions d'alimentation de l'AOP (+/– V_{CC}). La relation $v_s = A_d \varepsilon$ est inapplicable dans ce cas.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 623.

24.1 Analyse d'un montage amplificateur soustracteur

Le schéma de l'amplificateur est représenté figure 24.7. l'AOP est supposé idéal et fonctionnement ici en régime linéaire.

a) Déterminer l'expression du signal de sortie v_s en fonction des éléments du montage.

b) Montrer que le signal de sortie peut se mettre sous la forme : $v_s = K\left(v_{e_1} - v_{e_2}\right)$

Identifier K et en déduire la relation qui lie les résistances R_1, R_2, R_3 et R_4.

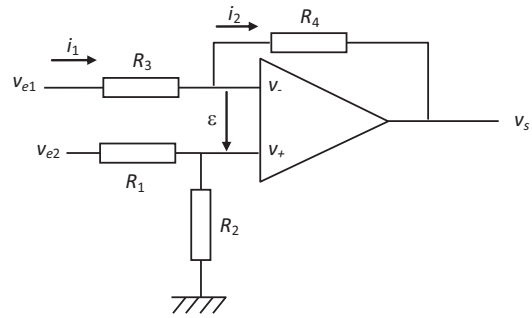


Figure 24.7 **Montage amplificateur soustracteur**

24.2 Filtrage analogique actif

Le schéma du montage est représenté figure 24.8. L'AOP est supposé idéal et fonctionne ici aussi en régime linéaire. Les composants sont : $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 100\ \text{k}\Omega$ et $C = 10\ \text{nF}$.

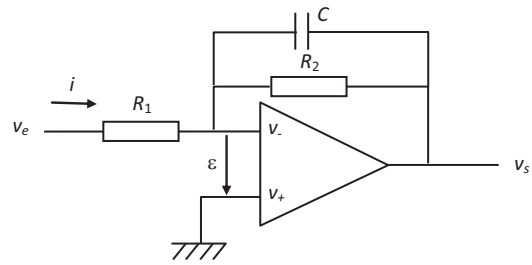


Figure 24.8 **Filtre analogique actif**

a) Le montage étant attaqué par un signal sinusoïdal, déterminer la fonction de transfert $A_v = \dfrac{V_s}{V_e}$. En déduire la fonction réalisée par ce montage et ses principales caractéristiques (gain max A_{v_0}; fréquence de coupure f_c).

b) Donner le schéma simplifié du montage lorsque la fréquence de travail est très supérieure à f_c.

c) En supposant la capacité C initialement déchargée, quelle est l'expression temporelle du signal de sortie $v_s(t)$? Conclure sur la fonction mathématique réalisée par le montage.

24.3 Bascule de Smith

Le schéma du montage est représenté figure 24.9. L'AOP est supposé idéal. Les composants sont : $R_1 = 10\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 30\ \text{k}\Omega$ et +/– V_{CC} = +/– 15 V.

a) Déterminer la caractéristique de transfert du montage $v_s = f(v_e)$.

b) Représenter le signal de sortie lorsque l'on applique en v_e le signal de la figure 24.10.

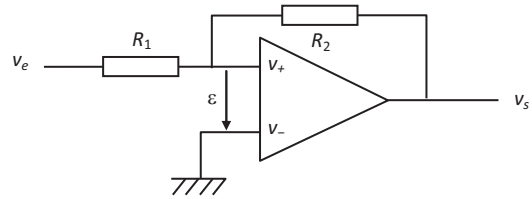


Figure 24.9 **Bascule de Smith**

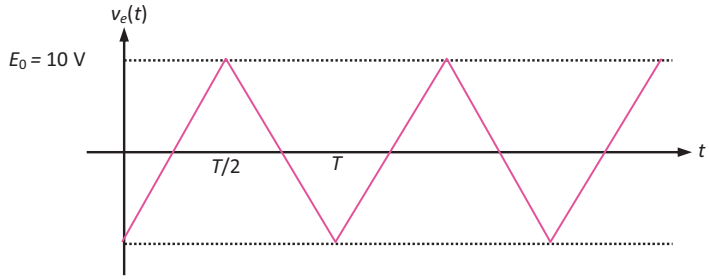


Figure 24.10

Partie VI

Physique « moderne »

PHYSIQUE ATOMIQUE

25

PRÉALABLES

- Notions de mécanique classique du point et d'électromagnétisme
- Équations différentielles linéaires sans second membre

MOTS CLÉS

- Bohr (modèle de)
- États et niveaux quantiques
- Fonction d'onde
- Ondes de matière de L. de Broglie
- Photon
- Schrödinger (équation de)
- Spin
- Transitions

OBJECTIFS

- Appréhender la logique des découvertes en physique atomique et quantique.
- Savoir retrouver les résultats exacts donnés par les premières théories semi-quantiques (ondes de matière de L. de Broglie, modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène).
- S'initier aux principes et résultats de la Mécanique quantique.
- Comprendre les effets magnétiques externes et internes à l'atome.
- Manipuler les moments cinétiques et magnétiques et leur quantification.
- Savoir lire et établir la structure électronique des atomes, ainsi que la nomenclature spectroscopique des niveaux et états.

25.1 INTRODUCTION

À la fin du XIX^{e} siècle, la notion d'atome comme plus petite entité indivisible d'un élément chimique s'était imposée ; cependant, l'électron, le proton, les noyaux atomiques et le photon n'étaient pas identifiés. En outre, la mécanique classique devait être remise en cause à l'échelle atomique (mécanique quantique de Schrödinger, 1926) et aux grandes vitesses et énergies (Relativité d'Einstein, 1905), avec des formulations et conséquences surprenantes.

UNITÉS, VOCABULAIRE ET NOTATIONS EN PHYSIQUE ATOMIQUE ET QUANTIQUE

- Les énergies sont exprimées en eV (1 eV $\approx 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ J est l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré sous une différence de potentiel de 1 V).
- Les longueurs sont exprimées en angströms (1 Å = 10^{-10} m = 100 pm) ou en rayons de Bohr ($a_0 \approx 0{,}52918$ Å).
- Les physiciens utilisent aussi le *système d'unités atomiques*.
- Le champ d'énergie potentielle $w(\vec{r})$ est dénommé *potentiel.*
- Le moment cinétique orbital, moment de la quantité de mouvement, est noté $\vec{L}$.

25.2 Atome, électron et noyau

25.2.1 Émergence de la notion d'atomes en chimie

La masse se conserve dans les réactions chimiques. On observe des rapports simples de nombres entiers, d'une part en masses de corps purs dans les composés (J.L. Proust, 1792 ; J. Dalton, 1804), d'autre part en volumes se combinant dans les réactions entre gaz (L.J. Gay-Lussac, 1908). Ceci conduit à penser que les corps composés et les gaz (sauf les gaz monoatomiques) sont formés de *molécules* constituées d'*atomes*, et à écrire les réactions chimiques comme combinaisons de molécules. L'hypothèse qu'à pression et température fixées, le nombre de molécules dans un volume donné est le même pour tous les gaz parfaits (A. Avogadro, 1918) permet de déterminer la formule moléculaire des gaz (O_2 pour l'oxygène et non O...). De proche en proche, on établit la formule chimique des composés, gazeux ou non.

Les éléments chimiques apparaissent dans les réactions avec des masses multiples de celle de l'hydrogène (J.J. Berzelius, 1813 ; W. Prout, 1815) ; fixant celle-ci on détermine la masse des éléments (pour un même nombre inconnu d'atomes).

Définition

Depuis 1961, le *nombre d'Avogadro* N_A est défini précisément en posant qu'une mole d'atomes, soit N_A atomes, de l'isotope 12 du carbone a pour masse 12 g.

Une mole de gaz parfait occupe environ 22,4 l dans les conditions normales.

25.2.2 Charge élémentaire et électron

Les expériences menées entre 1830 et 1913 conduisent aux conclusions suivantes :

- la charge électrique est toujours multiple d'une charge élémentaire e ;
- les particules négatives émises par la cathode d'un tube à vide lorsqu'elle est chauffée (rayonnement cathodique), ou par une plaque métallique chargée négativement puis éclairée par de la lumière ultraviolette (effet photoélectrique), ou encore par les noyaux radioactifs β^- sont des *électrons*, de charge – e et de masse m_e environ 2 000 fois plus petite que celle de l'atome d'hydrogène.

Voir site web

Axiome

La charge élémentaire est $e \approx 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C en physique atomique et nucléaire.

25.2.3 Atomes, noyaux et proton

Après la découverte de l'électron (J.J. Thomson, 1897), l'atome apparaît constitué de Z d'électrons et d'une charge positive $Z \cdot e$; auparavant déjà, une première *classification périodique* (D.I. Mendeleïev, 1869) avait présenté les éléments chimiques connus par masse atomique croissante (c'est en fait Z qui est pertinent) et par analogie des propriétés. Sont mesurés ensuite Z (C.G. Barkla, 1911 ; H. Moseley, 1913) et le rayon du noyau positif (E. Rutherford, 1911).

Définition

Un atome est constitué de Z électrons et d'un noyau de *nombre de masse* A :
Z est le *numéro atomique*, A est proche de la masse molaire de l'atome en grammes.

L'atome le plus simple est l'atome d'hydrogène H, qui a un *proton* pour noyau et un électron. Le proton est donc l'ion H^+ produit en retirant son électron à l'atome H (par exemple par collision d'un électron avec un atome d'hydrogène dans une décharge d'hydrogène gazeux) ; l'atome étant neutre le proton a la charge e. La masse m_p du proton peut être déduite de la mesure de la période de rotation $2 \cdot \pi \cdot m_p / (B \cdot e)$ du proton dans le champ magnétique B d'un cyclotron, et son rayon sera déduit d'expériences de collision proton-proton à haute énergie.

Tableau 25.1 **Charge, masse et taille de l'électron et du proton**

	charge	Masse	rayon
proton	$e \approx 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C	$m_p \approx 1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ kg	$\approx 0{,}8 \cdot 10^{-15}$ m
électron	– e	$m_e \approx 9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg	≈ 0

25.3 Onde électromagnétique et photon

25.3.1 Onde électromagnétique

Rappelons qu'une onde plane *sinusoïdale* (ou *monochromatique*), est périodique temporellement (avec une pulsation ω, une période T et une fréquence ν) et spatialement (avec une pulsation spatiale k , une longueur d'onde λ et un nombre d'onde $1 / \lambda$, ainsi qu'un vecteur d'onde $\vec{k}$ ayant la direction et le sens ceux de l'onde), où :

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}, \nu = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}, \quad \|\vec{k}\| = k, \quad \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2 \cdot \pi}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans le contexte de la physique atomique, plusieurs conséquences de l'électromagnétisme de J.C. Maxwell (1865) méritent d'être rappelées ou précisées :

- ω est indépendant du milieu mais la *vitesse de phase* ω / k, k et λ en dépendent (il est sous-entendu ici que les longueurs d'onde λ sont exprimées dans le vide) ;
- une particule ponctuelle de charge q et d'accélération instantanée $a(t)$ rayonne la puissance électromagnétique $P_{ray}(t) = 2 \cdot q^2 \cdot a^2 / (12 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^3)$, et en particulier une charge en rotation ou en vibration rayonne à la fréquence de son mouvement ;
- à l'énergie W transportée par une onde électromagnétique se propageant dans la direction z, est associée une quantité de mouvement de même direction et sens que $\vec{k}$ et de norme W / c ; la *pression de radiation* qu'une onde exerce en frappant une surface (effet prévu par J.C. Maxwell en 1871, mesuré par P. Lebedew en 1900) est interprétée comme un transfert de quantité de mouvement.

25.3.2 Photon

Le rayonnement électromagnétique a un caractère ondulatoire, et aussi particulaire (*dualité onde-corpuscule*). G.N. Lewis nomme le grain de lumière *photon* (1926).

Théorème 25.1

$h \approx 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ SI étant la constante de Planck, constante fondamentale de la physique quantique, avec $\hbar = \dfrac{h}{2 \cdot \pi}$, un photon d'une onde électromagnétique de pulsation ω et vecteur d'onde $\vec{k}$, ou de fréquence ν et longueur d'onde λ et de direction de propagation z, a :

- *une énergie cinétique $E = \hbar \cdot \omega = h \cdot \nu$, soit $E = \dfrac{h \cdot c}{\lambda}$ dans le vide ;*
- *une quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$, de norme $\|\vec{p}\| = \hbar \cdot \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda}$;*
- *une masse nulle et une charge nulle.*

Tableau 25.2 **Longueur d'onde et énergie du photon**

Spectre	λ	E
radioélectrique	*> 0,78 µm*	*< 1,59 eV*
Infrarouge	*1 mm → 0,78 µm*	*1,24 meV → 1,59 eV*
Visible	*0,78 µm → 0,38 µm*	*1,59 eV → 3,26 eV*
Ultraviolet	*0,38 µm → 10 nm*	*3,26 eV → 124 eV*
X	*10 nm → 1 pm*	*124 eV → 1,24 MeV*
Gamma	*< 1 pm*	*> 1,24 MeV*

a) L'énergie du photon par le rayonnement du corps noir

Un solide chaud émet de la lumière. Un four percé d'une petite ouverture est assimilable à un *corps noir* (corps absorbant tout le rayonnement qu'il reçoit).

Ayant trouvé en 1900 une formule empirique donnant, jusqu'aux hautes fréquences ν, l'énergie électromagnétique volumique u à l'intérieur d'un four de température T, M. Planck explique cette formule en appliquant la thermodynamique statistique, avec l'hypothèse que les échanges d'énergie entre la paroi chaude et le rayonnement se font par multiples de $h \cdot \nu$ où h (initialement destinée à faciliter le calcul et à tendre vers 0) s'avère devoir être érigée en constante fondamentale :

$$u = \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h \cdot \nu}{\exp[\, h \cdot \nu \,/\, (\, k_B \cdot T \,)\,] \,-\, 1} \approx \frac{8 \cdot \pi \cdot \nu^2}{c^3} \cdot k_B \cdot T \quad \text{si} \quad \frac{h \cdot \nu}{k_B \cdot T} << 1.$$

b) L'énergie du photon par l'émission photoélectrique

L'émission photoélectrique est l'émission d'électrons provoquée par l'absorption de lumière ultraviolette par la matière (métal ou vapeur monoatomique en particulier). L'effet est indépendant de l'énergie lumineuse mais n'est observé que si la fréquence ν de la lumière est supérieure à un seuil ν_S dépendant du matériau.

En 1905, A. Einstein propose, pour l'émission photoélectrique par les métaux une théorie quantique que R.A. Millikan vérifie (en 1916) en mesurant l'énergie cinétique E_C des photoélectrons en fonction de la fréquence ν ; le résultat est $E_C(\nu) = h \cdot \nu - h \cdot \nu_S$ pour $\nu \geqslant \nu_S$. L'interprétation est que pour faire juste sortir un électron du métal, il faut lui apporter une énergie W_S dite *travail de sortie* (comme dans l'émission thermoélectronique) ; si l'énergie E apportée à l'électron est supérieure à W_S, l'excédent se retrouve en énergie cinétique E_C de l'électron émis : $E_C(\nu) = E - W_S$, qui est la relation expérimentale si $E = h \cdot \nu$ et $W_S = h \cdot \nu_S$.

Voir site web

c) La quantité de mouvement du photon

Appliquée à l'énergie $W = h \cdot \nu$, la notion de quantité de mouvement associée à l'énergie transportée par l'onde (voir § 25.3.1 ci-dessus), donne au photon une quantité de mouvement de norme $\frac{W}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ et de mêmes direction et sens que $\vec{k}$;

Les rayons X ($\lambda \approx 0{,}7$ Å), provenant d'un tube au molybdène et diffusés par une cible de graphite, sont déviés et subissent une augmentation de longueur d'onde (A.H. Compton, 1923). Cette expérience est interprétée comme une collision élastique photon-électron, dans laquelle le photon cède de l'énergie et de la quantité de mouvement à l'électron ; le calcul, relativiste (fait au chapitre 26, § 26.2.3) confirme l'expression de la quantité de mouvement du photon.

Chapitre 26, § 26.2.3

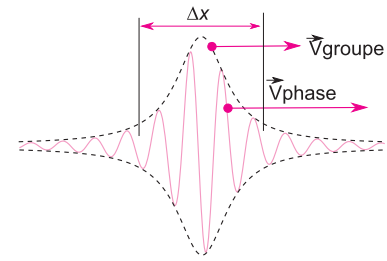
d) La masse du photon

La Relativité impose aux particules de vitesse c une masse nulle qui n'est pas incompatible avec la possession d'une quantité de mouvement.

Chapitre 26, § 26.2.1

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

25.3.3 Interférences lumineuses à un photon et paquet d'ondes



Pour appréhender la dualité onde-corpuscule, il est utile de noter que le phénomène d'interférences, clair sous l'aspect ondulatoire, subsiste lorsque l'intensité lumineuse est si réduite que l'interféromètre est traversé photon par photon : les photons successifs ne frappent l'écran qu'en des points des franges brillantes.

Plutôt qu'à une onde électromagnétique monochromatique (ω,k), de durée et d'extension spatiale infinies, le photon est associé à un *paquet d'ondes*, superposition d'ondes de pulsations et de vecteurs d'onde proches de ω et de k ; un tel paquet d'ondes (électromagnétiques ou autres) est localisé dans l'espace.

Théorème 25.2

Pour des ondes de nature quelconque, un paquet d'ondes *est une superposition d'ondes de pulsations et de vecteurs d'onde proches de* ω *et de* k.
La vitesse des ondes du paquet est leur vitesse de phase ω / k *mais la vitesse de l'enveloppe du paquet est la* vitesse de groupe $\partial\omega / \partial k$.

25.4 ÉTUDE EXPERIMENTALE DES ÉLÉMENTS

25.4.1 Propriétés des éléments

Définition

L'*état fondamental* d'un atome est celui de plus basse énergie ; les autres états sont dits *excités*.

Définitions

♦ L'*énergie d'ionisation* d'un atome A est l'énergie minimale W_i qu'il faut lui apporter, lorsqu'il dans son état fondamental, pour arracher un premier électron, c'est-à-dire pour amener à l'infini et au repos l'électron le moins lié :
$A + W_i \rightarrow A^+ + e^-$, soit $W_i = E(A^+) - E(A)$ où E est l'énergie de l'atome ou de l'ion.

♦ L'*énergie de nième ionisation* est l'énergie minimale $W_{i\,n}$ qu'il faut apporter pour arracher un nième électron, après que n – 1 électrons ont été arrachés :
$A^{(n-1)+} + W_{i\,n} \rightarrow A^{n+} + e^-$, soit $W_{i\,n} = E(A^{n+}) - E(A^{(n-1)+})$.

♦ L'*énergie de liaison* d'un atome A est l'énergie W qu'il faut apporter à l'atome pour lui arracher ses Z électrons :
$A + W \rightarrow$ noyau $+ Z \cdot e^-$.

♦ L'*affinité électronique* d'un atome A est l'énergie minimale W_a qui est cédée par cet atome lorsqu'il capture un électron, c'est-à-dire l'énergie qui est cédée par cet atome lorsqu'il capture un électron qui était à l'infini et au repos :

$A + e^- \rightarrow A^- + W_a$, soit $W_a = E(A) - E(A^-)$.

Voir site web

Tableau 25.3 **Énergies d'ionisation et affinité électronique pour Z = 1 à 11**

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
eV	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na
$W_{i\,1}$	13,6	24,6	5,4	9,3	8,3	11,3	14,5	13,6	17,4	21,6	5,1
$W_{i\,2}$		54,4	75,6	18,2	25,2	24,4	29,6	35,1	35,0	41,0	47,3
$W_{i\,3}$			122,5	153,9	37,9	47,9	47,4	54,9	62,7	63,4	71,6
W_a	0,8		0,6		0,3	1,3		1,5	3,4		0,5

Remarque

Pour Z grand, on peut estimer l'énergie de liaison W par $W \approx C \cdot Z^{7/3}$ (premier terme d'un développement dans le modèle de Thomas-Fermi) où $C \approx 20{,}9126$ eV.

Exercice d'application 25.1

Calculer l'énergie de liaison de l'atome de lithium.

SOLUTION. $Z = 3 \Rightarrow W = W_{i\,1} + W_{i\,2} + W_{i\,3} \approx 203{,}5$ eV.

La première détermination du *rayon atomique* et de la constante d'Avogadro N_A (J. Loschmidt, 1865) est déduite du volume molaire du liquide et de l'expression de la viscosité du gaz donnée par la théorie cinétique pour des sphères dures.

Les propriétés physiques et chimiques des atomes présentent une pseudo-périodicité en Z ; les périodes successives se terminent chacune par un *gaz rare*, en Z = 2, 10, 18, 36, 54, 86 (figure 25.1).

25.4.2 Niveaux d'énergie atomiques et transitions entre niveaux

Définition

Le *spectre* d'émission ou d'absorption d'un matériau est la répartition en fréquences ou longueurs d'onde du rayonnement électromagnétique pouvant être émis ou absorbé par ce matériau. Le spectre peut être *continu* (toutes les fréquences ou longueur d'onde existent) ou être *discret* (c'est-à-dire constitué d'un ensemble de *raies* ayant chacune une fréquence et une longueur précises).

Le rayonnement du corps noir (§ 25.3.2) donne un exemple de spectre continu.

Après les premières mesures sur le spectre solaire (A.J. Angström, 1868), les nombreuses expériences consacrées à l'étude des spectres discrets des rayonnements lumineux émis lors de décharges électriques dans les gaz mettent plusieurs faits en évidence.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

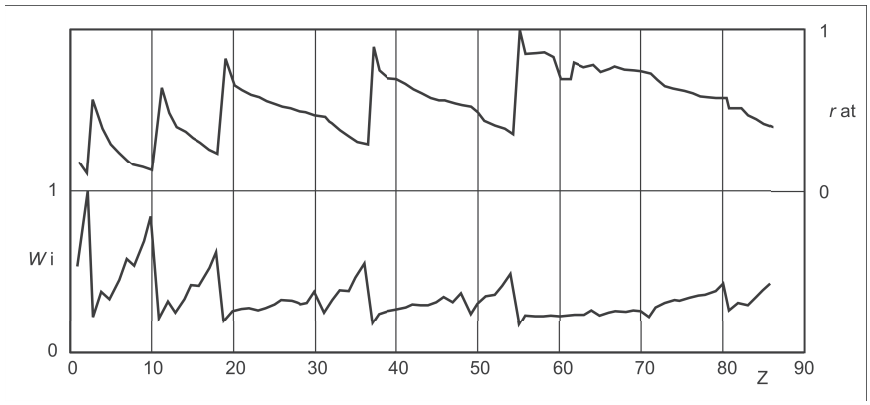


Figure 25.1 **Énergie d'ionisation et rayon des atomes en fonction de *Z* pour *Z* entre 1 et 86**
La courbe du bas donne l'énergie d'ionisation (expérimentale) des atomes en unité 24,6 eV.
La courbe du haut donne le rayon (calculé) des atomes en unité 2,98 Å.

Les raies de l'hydrogène sont groupées en séries et sont données par une formule simple dite de J.R. Rydberg (J.J. Balmer, 1885 ; W. Ritz, 1908). De façon plus générale, les longueurs d'onde des raies atomiques s'obtiennent à partir de *termes spectraux* T_k formant une suite caractéristique de l'atome considéré ($\lambda_{k\,p} = T_k - T_p$). Un spectre continu accompagne le spectre discret.

Résultat expérimental

♦ *Les* raies d'absorption ou d'émission *d'un atome sont interprétées comme des transitions dites* radiatives *dans lesquelles l'atome passe d'un niveau d'énergie E à un autre, avec absorption ou émission d'*un seul photon *: $h \cdot \nu = |E_p - E_k|$.*
Pour l'hydrogène, l'expérience donne $\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R_H \cdot \left| \frac{1}{k^2} - \frac{1}{p^2} \right|$ *(formule de Rydberg) où k et p sont entiers et* $R_H \approx 1{,}0968 \cdot 10^7\ m^{-1}$ *(constante de Rydberg).*
♦ *L'atome peut aussi passer d'un niveau d'énergie à un autre sous l'effet de collisions avec d'autres particules (transitions dites* non radiatives*).*

Il y a deux processus d'émission radiative : l'*émission spontanée* et l'*émission stimulée* qui est à la base du fonctionnement des lasers.

Voir site web

Définition

Le niveau *fondamental* d'un atome est celui d'énergie minimale ; les autres niveaux sont dits *excités*. On parle de même d'état fondamental et d'états excités de l'atome.

L'expérience de J. Franck et G. Hertz (1914), figure 25.2, met en évidence des états atomiques stationnaires excités et de transitions par collisions.

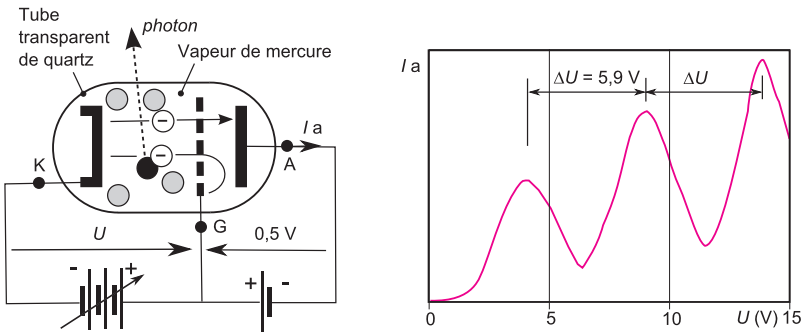


Figure 25.2 Expérience de J. Franck et G. Hertz

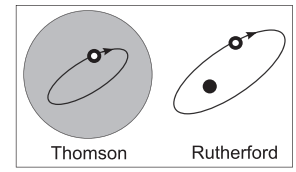
Les électrons émis à vitesse négligeable par la cathode du tube à vapeur de mercure sont accélérés par la tension U entre grille G et cathode K. Les électrons qui n'ont subi que des collisions *élastiques* avec les atomes de mercure (c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique) traversent la grille et sont recueillis par l'anode A ; les électrons ayant subi des collisions *inélastiques* au cours de leur accélération ont perdu à chaque fois leur énergie cinétique (au profit d'un atome dont l'état interne a été modifié) avant d'être réaccélérés et, ne pouvant franchir la petite tension « décélératrice » appliquée entre G et A, sont recueillis par la grille. Faisant croître U, on constate des chutes de courant d'anode séparées de ΔU et correspondant à des électrons ayant subi une, deux, ... collisions inélastiques, ΔU s'expliquant par le passage des atomes à un niveau excité ; on observe aussi l'émission de lumière de fréquence $\nu = e \cdot \Delta U / h$, due à la désexcitation des atomes. $e \cdot \Delta U \approx 4{,}9$ V est l'énergie de passage à un niveau excité. Une courbe $I_a(U)$ plus précise fait apparaître l'énergie d'excitation à d'autres niveaux (4,7 V, 5,3 V, ...).

25.5 Modèles classiques de l'atome

25.5.1 Modèle de Thomson

Le premier modèle de l'atome (J.J. Thomson, 1897) est une sphère de charge positive répartie uniformément en volume, dans laquelle les électrons ponctuels peuvent se déplacer ; le mouvement ou la mise en mouvement des électrons (vibration ou rotation) peut expliquer l'émission ou l'absorption de lumière. Un succès du modèle est d'avoir permis d'interpréter une expérience de diffusion de rayons X pour obtenir le numéro atomique Z d'un atome (C.G. Barkla, 1911).

25.5.2 Modèle planétaire



Après avoir identifié les particules α émises par une source radioactive (particules petites, de faible masse et d'énergie cinétique d'environ 8,6 MeV), E. Rutherford (1911) réalise une expérience de diffusion de particules α par une feuille d'or (les atomes d'or sont lourds et restent immobiles). L'observation d'α diffusés vers l'arrière invalide le modèle de Thomson ; aucun α n'aurait dû être dévié de plus de 1° car, d'après le théorème de Gauss en électrostatique, le champ électrique produit en chaque point de l'espace par une sphère uniformément chargée en volume reste petit (il est nul au centre et maximal

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

à la surface de la sphère) alors que celui produit par une charge ponctuelle devient infini au voisinage de la charge. La charge positive de l'atome d'or est concentrée dans un *noyau* d'un diamètre de l'ordre de 10^{-14} m. Dans le modèle planétaire ainsi justifié (et imaginé dès 1901 par J. Perrin), les électrons gravitent autour d'un noyau positif et déterminent la taille de l'atome.

25.5.3 Application du modèle planétaire à l'atome d'hydrogène

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES POUR TOUS LES CALCULS DE L'ATOME D'HYDROGÈNE

- L'atome d'hydrogène ($Z = 1$) ou un ion *hydrogénoïde* est constitué d'un électron de charge $-e$ et d'un noyau de charge $Z \cdot e$, ponctuels, en interaction coulombienne.
- La masse du noyau, très supérieure à la masse m_e de l'électron (1836,15 m_e pour l'hydrogène), est supposée infinie, de sorte que le référentiel du noyau est galiléen ; d'après le théorème du mouvement relatif, la masse M du noyau, pourra ensuite être prise en compte en remplaçant m_e par la *masse réduite* $\dfrac{m_e \cdot M}{M + m_e}$.
- L'origine O est la position du noyau et $\vec{r}$ est le vecteur position de l'électron.
- On prend l'énergie potentielle nulle à l'infini.

Voir chapitre 3

Le principe fondamental de la dynamique classique donne les équations du mouvement ; la force coulombienne étant à énergie potentielle et *centrale*, l'énergie mécanique et le moment cinétique orbital $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ ($\vec{p} = m_e \cdot \vec{v}$, quantité de mouvement de l'électron de vitesse $\vec{v}$) se conservent. On trouve des états « liés » (trajectoires circulaires et elliptiques) et des états « libres » (trajectoires hyperboliques).

Théorème 25.3

Dans le cas où l'électron est sur une trajectoire circulaire de rayon R, le modèle planétaire classique de l'atome H ou d'un ion hydrogénoïde donne :

- *la vitesse de l'électron :* $v = \sqrt{\dfrac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot R}}$ *(fréquence de rotation* $\dfrac{v}{2 \cdot \pi \cdot R}$*) ;*
- *l'énergie mécanique totale de l'électron (ou de l'atome) :*

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 - \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} = - \frac{Z \cdot e^2}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} < 0 \, ;$$

- *la norme du moment cinétique orbital :* $L = \|\vec{L}\| = m_e \cdot v \cdot R = \sqrt{\dfrac{Z \cdot e^2 \cdot m_e \cdot R}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0}}$

DÉMONSTRATION

$\vec{f} = m_e \cdot \vec{a}$ avec la force coulombienne et l'accélération normale $a = v^2/R$ s'écrit $\frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} = m_e \cdot \frac{v^2}{R}$, qui donne $v^2 = \frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_e \cdot R}$ puis v et les autres grandeurs.

Tous les rayons de trajectoires étant possibles et donc aussi toutes les fréquences de rotation, le spectre de raies ne s'interprète pas ; en outre, en perdant son énergie par rayonnement, l'électron tomberait sur le noyau en $16 \cdot 10^{-12}$ s !

Théorème 25.4

À énergie E négative donnée, pour une trajectoire elliptique :
- *le moment cinétique est de norme plus petite que dans le mouvement circulaire :* $\|\vec{L}\|(E) < \|\vec{L}_{\text{circulaire}}\|(E)$ *; la période est la même ;*
- *l'ellipse a le noyau pour foyer et le diamètre* $2 \cdot R(E)$ *d'une trajectoire circulaire pour grand axe.*

Voir site web

Théorème 25.5

Pour une énergie E positive, l'électron a une trajectoire hyperbolique et se retrouve à l'infini avec une énergie potentielle nulle et une vitesse non nulle.

25.6 MODÈLES SEMI-QUANTIQUES DE L'ATOME H

Ces modèles sont des adaptations de la mécanique classique destinées à restituer les propriétés des systèmes spécifiques que sont l'atome H et les hydrogénoïdes.

25.6.1 Modèle de Bohr

Axiomes

Le *modèle de Bohr* (N. Bohr, 1913) de l'atome H ou d'un ion hydrogénoïde suppose, outre les hypothèses du modèle planétaire, que :
- l'électron tourne autour du noyau sur une orbite circulaire, selon les lois de la mécanique classique, mais avec une condition de quantification revenant à écrire que la norme du moment cinétique est un multiple entier de $\hbar$:
  $\|\vec{L}\|_{\text{BOHR}} = n \cdot \hbar$ où $n = 1, 2, 3, ..., \infty$;
- tant qu'il est dans l'un des états n ainsi calculés, l'électron ne rayonne pas (malgré son mouvement de rotation !).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

a) Orbites circulaires quantifiées de Bohr et niveaux d'énergie

En identifiant à $n\cdot\hbar$ le moment cinétique trouvé dans le cadre du modèle planétaire classique (théorème 25.3) on obtient :

$$\sqrt{\frac{Z\cdot e^2\cdot m_e\cdot R}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}} = n\cdot\hbar\,.$$

Cette relation donne le rayon R_n de l'orbite de nombre n et les autres relations du modèle planétaires donnent les autres grandeurs, toutes numérotées par n.

Théorème 25.6

Sur l'orbite circulaire n de Bohr (n = 1, 2, 3, ...) : $\|\vec{L}\|_{BOHR} = n\cdot\hbar \Rightarrow$

♦ *rayon* $R_n = \dfrac{n^2}{Z}\cdot a_0$, *où* $a_0 = \dfrac{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar^2}{m_e\cdot e^2} \approx 0{,}52918\ 10^{-10}\ m = 0{,}52918\ Å$ *est le* rayon de Bohr, *rayon de la première orbite de Bohr pour l'atome H ;*

♦ *énergie* $E_n = -\dfrac{Z\cdot e^2}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R_n} = -\dfrac{Z^2\cdot e^2}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot a_0\cdot n^2} = -\dfrac{W_i^\infty}{n^2}$

où $W_i^\infty = Z^2\cdot W_0$ *et* $W_0 = \dfrac{m_e\cdot e^4}{32\cdot\pi^2\cdot\varepsilon_0^2\cdot\hbar^2} \approx 21{,}799\ 10^{-19}\ J \approx 13{,}606\ eV$;

♦ *vitesse* $v_n = \sqrt{\dfrac{Z\cdot e^2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot m_e\cdot R_n}} = \dfrac{Z}{n}\cdot v_0$ *où* $v_0 = \dfrac{e^2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot\hbar}$.

W_i^∞ est l'énergie d'ionisation (la notation ∞ rappelle l'approximation d'un noyau de masse infinie faite), énergie faisant passer de l'état fondamental n = 1 ; à l'état juste ionisé n = ∞ (électron à l'infini au repos) : $E_1 + W_i^\infty = E_\infty$.

b) Rayonnement dans la théorie de Bohr

Théorème 25.7

♦ *La longueur d'onde* λ *dans le vide d'un photon absorbé ou émis lors de la transition entre les niveaux* k *et* p (p > k) *de l'hydrogène ou d'un ion hydrogénoïde est donnée par* $h\cdot\nu = E_p - E_k$ *avec* $\nu = c / \lambda$, *soit dans le cadre du modèle de Bohr :*

$\dfrac{1}{\lambda} = Z^2\cdot R_H^\infty\cdot\left(\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{p^2}\right)$ *avec* $R_H^\infty = \dfrac{m_e\cdot e^4}{64\cdot\pi^3\cdot\varepsilon_0^2\cdot\hbar^3\cdot c} \approx 1{,}0974\ 10^7\ m^{-1}$.

♦ *L'ensemble des transitions entre niveaux peut être classé en* séries de raies *: la série n est constituée des transitions entre le niveau n et les niveaux supérieurs.*

♦ *Chaque série de raies est complétée par un spectre continu correspondant aux transitions entre niveaux et états libres (E > 0) non quantifiés :* $h\cdot\nu = E - E_k$.

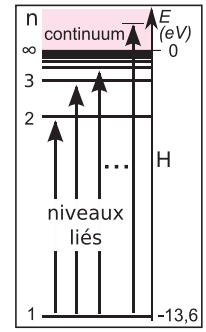
R_H^∞ est la constante de Rydberg théorique de l'atome H et $Z^2\cdot R_H^\infty$ celle de l'ion hydrogénoïde (dans l'approximation d'un noyau de masse infinie faite). On retrouve la loi de Rydberg expérimentale présentée au § 25.4.5.

Exercice d'application 25.2

Calculer la plus petite longueur d'onde du rayonnement qui peut être émis ou absorbé par un atome d'hydrogène passant d'un niveau d'énergie à l'autre.

SOLUTION. Longueur d'onde minimale ⇔ fréquence maximale ⇔ énergie maximale :

$h \cdot c / \lambda = E_\infty - E_1 = W_i \Rightarrow \lambda = h \cdot c / W_i \approx 9{,}1 \cdot 10^{-9}$ m $= 9{,}1$ nm.



Les premières séries de l'hydrogène, interprétées ou prévues par le modèle de Bohr en 1913, ont reçu le nom de leur découvreur :

- séries n = 1 de T. Lyman (1906-1914) dans l'ultraviolet,
- n = 2 de J.J. Balmer (1885) dans le visible,
- n = 3 de F. Paschen (1908) dans l'infrarouge,
- n = 4 de F.S. Brackett (1922),
- n = 5 de A.H. Pfund (1924),
- n = 6 de C.J. Humphreys (1952) dans l'infrarouge lointain,
- n = 7 de Hansen-Strong (1973).

L'étude des séries de Rydberg (n = 3) et de Pickering (n = 4) de l'ion He^+ (produit par décharge électrique dans l'hélium gazeux), confirme le modèle de Bohr ($R_{He} \approx 4R_H$).

Théorème 25.8

♦ v_n *étant la vitesse de l'électron sur l'orbite de Bohr n de l'ion hydrogénoïde,* v_0 *étant la vitesse de l'électron sur la première orbite de Bohr de l'atome H :*

$\dfrac{v_n}{c} = \dfrac{Z}{n} \cdot \alpha$ *où* $\alpha = \dfrac{v_0}{c} = \dfrac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \hbar \cdot c} \approx \dfrac{1}{137{,}04}$ *est la* constante de structure fine.

♦ *Diverses grandeurs peuvent s'exprimer en fonction de* α *:*

$a_0 = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\hbar}{m_e \cdot c}$, $R_n = \dfrac{n^2}{Z} \cdot \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{\hbar}{m_e \cdot c}$, $v_n = \dfrac{Z}{n} \cdot \alpha \cdot c$, $E_n = -\dfrac{Z^2}{n^2} \cdot \dfrac{\alpha^2}{2} \cdot m_e \cdot c^2$,

$R_H^\infty = \dfrac{\alpha^2}{2} \cdot \dfrac{m_e \cdot c}{h} = \dfrac{\alpha^2}{2} \cdot \dfrac{m_e \cdot c}{2 \cdot \pi \cdot \hbar}$.

La vitesse de l'électron croissant avec n et avec *Z*, les effets relativistes qui apparaissent aux vitesses non négligeables devant la vitesse c de la lumière, concernent plutôt les orbites proches du noyau des ions de *Z* élevé. La constante α représente le degré du caractère relativiste de l'atome H et $Z \cdot \alpha / n$, celui de l'orbite n de l'ion hydrogénoïde *Z*. Les effets relativistes sont faibles (mais non négligeables eu égard à la précision des mesures spectroscopiques) pour l'atome H et plus importants pour les orbites proches du noyau dans les atomes de *Z* plus élevé.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice d'application 25.3

Estimer le degré du caractère relativiste de l'ion hydrogénoïde Bi^{82+}.

SOLUTION. Avec $Z = 83$: $v_1 / c = Z \cdot \alpha \approx 0{,}6$ ce qui n'est pas très inférieur à 1.

c) Conclusion sur le modèle de Bohr

D'autres systèmes hydrogénoïdes peuvent êtres traités de la même façon, moyennant la prise en compte la masse et la charge des particules ; en particulier le *positronium* constitué d'un positron e^+ (charge e, masse m_e) et d'un électron.

Voir site web

Le modèle de Bohr est dépassé mais encore utile : il donne des ordres de grandeurs et certains résultats exacts importants (niveaux d'énergie), il est d'un calcul simple pouvant être refait rapidement sans documents et il suggère un système d'unités adapté à la physique atomique.

25.6.2 Extension du modèle de Bohr par Sommerfeld

En 1915 A. Sommerfeld quantifie les orbites elliptiques (nombres quantiques radial, azimutal et magnétique orbital) puis il calcule des corrections relativistes.

25.7 ONDES DE MATIÈRE

Axiome

À une particule d'énergie cinétique E_C et de quantité de mouvement $\vec{p}$ est associée une *onde de L. de Broglie*, de nature nouvelle, dont la pulsation ω et le vecteur d'onde $\vec{k}$ sont donnés par les mêmes relations que pour le photon :

$E_C = \hbar \cdot \omega$ et $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$ (ou encore $p = h / \lambda$ en introduisant la longueur d'onde λ).

Faisant cette proposition en 1923, L. de Broglie étend la dualité onde-corpuscule du photon à toutes les particules. En 1924, il interprète la condition de Bohr ; pour être stable, la trajectoire circulaire doit contenir un nombre entier de longueurs d'onde :

$$2 \cdot \pi \cdot R = n \cdot \lambda = n \cdot (h / p) = n \cdot h / (m_e \cdot v) \Leftrightarrow m_e \cdot v \cdot R = n \cdot \hbar .$$

Comparons la vitesse de l'onde à la vitesse de la particule ; pour $v \ll c$:

$$\omega / k = (\hbar \cdot \omega) / (\hbar \cdot k) = E_C / p = (m \cdot v^2 / 2) / (m \cdot v) = v / 2$$

$$\omega(k) = E_C / \hbar = [\, p^2 / (2 \cdot m) \,] / \hbar = \hbar \cdot k^2 / (2 \cdot m)$$

$$\Rightarrow \partial\omega / \partial k = \hbar \cdot k / m = p / m = v$$

Théorème 25.9

v étant la vitesse de la particule, l'onde de L. de Broglie a une vitesse de phase ω / k inférieure à v ($\approx$ v / 2 si v $\ll$ c), mais une vitesse de groupe, vitesse d'un paquet d'ondes proches de (ω,k), égale à v : $\partial\omega / \partial k =$ v.

La diffraction d'électrons de 54 eV réfléchis sur la surface d'un cristal de nickel, donnant une distribution angulaire compatible avec la distance interatomique de 2,15 Å mesurée par diffraction de rayonnement électromagnétique X, l'idée de L. de Broglie est confirmée (C.J. Davisson et L.H. Germer, 1927) ; des expériences de diffraction sont faites ensuite avec des neutrons (1936-1945). Des expériences d'interférence sont réalisées avec des électrons relativistes (1954-1956), des jets atomiques ou moléculaires (1980-1990) et des neutrons (1990). La diffraction d'électrons ou de neutrons est appliquée à la détermination des structures cristallines ou moléculaires ; le microscope électronique (E.Ruska, 1931) utilise des électrons de 10 à 300 keV dont la courte longueur d'onde (2,5 pm pour 200 keV) donne un pouvoir séparateur 1 000 fois meilleur que celui d'un microscope optique.

Certaines configurations permettent de réaliser l'analogue de l'expérience d'interférence optique d'Young. Des électrons de vitesse donnée frappent un écran percé de deux fentes ; les électrons ayant traversé les fentes sont détectés sur une plaque fluorescente. On constate sur la plaque des franges brillantes et sombres correspondant respectivement aux points frappés ou pas par des électrons. Comme en optique, les franges disparaissent si l'un ou l'autre des deux trous est bouché, et le phénomène d'interférence peut être observé électron par électron. On est conduit à penser qu'une onde de matière qui s'est dédoublée en passant par les fentes a « guidé » l'électron, sans que l'on puisse savoir par quelle fente est passé l'électron.

Voir site web

Exercice d'application 25.4

Calculer l'interfrange que l'on doit observer dans une expérience équivalente à celle des fentes d'Young (distance entre fentes $a \approx 3$ µm, distance entre plan des fentes et plaque fluorescente $D \approx 16$ cm) réalisée avec des électrons d'énergie cinétique $E_C \approx 80$ keV.

SOLUTION. $E_C \Rightarrow \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_C}} \approx 0{,}042 \cdot 10^{-10}$ m $\Rightarrow i = \dfrac{\lambda \cdot D}{a} \approx$ 0,23 µm (exp. : 0,2 µm).

25.8 MÉCANIQUE QUANTIQUE DE SCHRÖDINGER

En 1926, E. Schrödinger écrit les équations générales qui régissent les particules en mouvement non relativiste dans un champ d'énergie potentielle (dit *potentiel*) quelconque ; la Mécanique quantique de Schrödinger retrouve les ondes de L. de Broglie

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

pour une particule libre et s'applique par exemple aussi bien aux électrons d'un atome, aux électrons d'un semi conducteur, aux protons et neutrons d'un noyau atomique ou aux vibrations d'une molécule.

25.8.1 Principes et définitions

a) Les premiers principes

Axiomes

♦ L'état mécanique d'une particule de masse m placée dans un *potentiel* $w(\vec{r},t)$ est décrit par la *fonction d'onde* complexe $\Psi(\vec{r},t)$, dont l'évolution dans le temps est donnée par l'*équation de Schrödinger dépendant du temps* :

$$\widehat{H}\,\Psi = j\cdot\hbar\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \text{ avec } \widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\Delta + w(\vec{r},t)$$

où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ est le laplacien et $\widehat{H}$ est l'opérateur *hamiltonien*, c'est-à-dire : $-\dfrac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\Delta\Psi + w(\vec{r},t)\cdot\Psi = j\cdot\hbar\cdot\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}$, avec $j^2 = -1$.

♦ $|\Psi(\vec{r},t)|^2$ est la densité de probabilité de présence de la particule en $\vec{r}$:
Probabilité [à l'instant t, la particule est dans le volume $d\tau$ en $\vec{r}$] = $|\Psi(\vec{r},t)|^2\cdot d\tau$, ce qui suppose que Ψ est *normée à 1*, c'est-à-dire $\iiint_{\text{tout l'espace}} |\Psi(\vec{r},t)|^2\cdot d\tau = 1$.
(Ψ doit donc en principe tendre assez vite vers 0 à l'infini.)

♦ Comme fonction de $\vec{r}$, Ψ doit être mathématiquement continue ; elle doit être aussi à dérivées premières continues, sauf en une discontinuité infinie du potentiel $w(\vec{r},t)$ (Ψ est simplement nulle en cette discontinuité qui représente un « mur » strictement infranchissable pour la particule).

Axiomes

♦ Chaque grandeur physique A (*observable*) est décrite par un opérateur linéaire $\widehat{A}$ construit à partir des opérateurs fondamentaux position et quantité de mouvement :

$$\widehat{\vec{r}} = \vec{r}\cdot \text{ (soit } \widehat{x} = x\cdot, \ldots)$$

$$\widehat{\vec{p}} = -j\cdot\hbar\cdot\overrightarrow{\text{grad}} = -j\cdot\hbar\cdot\vec{\nabla} \text{ (soit } \widehat{p}_x = -j\cdot\hbar\cdot\frac{\partial}{\partial x}, \ldots)$$

♦ Les valeurs possibles d'une observable A sont les *valeurs propres* a de $\widehat{A}$:
$\widehat{A}\alpha = a\cdot\alpha$ où la fonction α de $\vec{r}$ est la *fonction propre* associée.

♦ $\widehat{A}\Psi = a\cdot\Psi \Leftrightarrow$ [dans l'état Ψ, l'observable A a la valeur *a déterminée* (c'est-à-dire non aléatoire)].

♦ Si la particule est dans un état Ψ où la grandeur physique A n'a pas une valeur *déterminée* et si Ψ est exprimée comme *mélange* des fonctions propres α_i, de

valeur propre associée a_i et normées à 1 :

$$\Psi = \Sigma_i \, c_i \cdot \alpha_i, \text{ alors Probabilité } [A = a_i] = |c_i|^2.$$

Ainsi, l'opérateur *énergie cinétique* est $\widehat{E}_C = \dfrac{\widehat{\vec{p}} \cdot \widehat{\vec{p}}}{2 \cdot m} = -\dfrac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \vec{\nabla}\,\vec{\nabla} = -\dfrac{\hbar^2}{2 \cdot m} \cdot \Delta$ et l'opérateur *énergie mécanique* est l'opérateur *hamiltonien* $\widehat{H}$ déjà cité. Un opérateur n'est pas une matrice mais la notion de fonction propre est analogue à celle de vecteur propre. Un opérateur linéaire $\widehat{A}$ est tel que, pour tous nombres λ_1 et λ_2 et pour toutes fonctions α_1 et α_2 : $\widehat{A}\,[\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2] = \lambda_1 \cdot \widehat{A}\,\alpha_1 + \lambda_2 \cdot \widehat{A}\,\alpha_2$.

Exercice d'application 25.5

La fonction $\alpha(\vec{r}) = y + j \cdot z$ *est-elle fonction propre des opérateurs*

$$\widehat{A} = \widehat{y}\,\widehat{p}_z - \widehat{z}\,\widehat{p}_y \quad \textit{et} \quad \widehat{B} = \widehat{z}\,\widehat{p}_x - \widehat{x}\,\widehat{p}_z \; ?$$

SOLUTION.

$$\widehat{A}\alpha = -\, j \cdot \hbar \cdot [y \cdot \frac{\partial}{\partial z} - z \cdot \frac{\partial}{\partial y}]\,[y + j \cdot z]$$

$$= -\, j \cdot \hbar \cdot [y \cdot j - z] = \hbar \cdot [y + j \cdot z] = \hbar \cdot \alpha \Rightarrow \text{ oui ;}$$

$$\widehat{B}\alpha = -\, j \cdot \hbar \cdot [z \cdot \frac{\partial}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial}{\partial z}]\,[y + j \cdot z] = \hbar \cdot x \Rightarrow \text{ non.}$$

Remarques

- La trajectoire classique est remplacée par une *orbitale* correspondant à une fonction d'onde dont on déduit la probabilité de présence de la particule autour de chaque point.
- La mécanique quantique introduit dans les lois de la nature un *indéterminisme* (c'est-à-dire un hasard) fondamental (qui n'est pas lié à une quelconque approximation ou méconnaissance, contrairement à la thermodynamique statistique) ; cependant l'évolution de la fonction d'onde dans le temps, et donc des probabilités de présence, est déterministe.
- Certaines grandeurs (position, quantité de mouvement, ...) deviennent probabilistes (c'est-à-dire « floues », en quelque sorte), tandis que d'autres (énergie...) deviennent *discrètes* (c'est-à-dire à valeurs possibles dans une liste).
- La fonction d'onde est définie à une constante multiplicative complexe de module 1 près qui disparaît dans $|\Psi|^2$ et peut être choisie librement (-1, j ou $\exp(j \cdot \xi)$, où $j^2 = -1$).
- Le résultat de la mesure d'une grandeur A qui n'a pas une valeur *déterminée* dans l'état Ψ de la particule est aléatoire ; après la mesure l'état de la particule est modifié puisque la grandeur a alors la valeur déterminée trouvée.
- L'ordre dans lequel on applique les opérateurs est important (pas de commutativité en général) ; ce problème ne se pose pas pour les cas traités dans ce livre.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Les états d'énergie déterminée ou états « stationnaires »

Ce problème de Mécanique quantique est le plus courant.

Théorème 25.10

Les états d'énergie E déterminée *d'une particule placée dans un* potentiel $w(\vec{r})$ *indépendant du temps (états* stationnaires*) sont obtenus de la façon suivante :*

♦ $\hat{H}\,\psi = E\cdot\psi$, *c'est-à-dire* $-\dfrac{\hbar^2}{2\cdot m}\cdot\Delta\psi + w(\vec{r})\cdot\psi = E\cdot\psi$,

où $\iiint_{\text{tout l'espace}} |\psi(\vec{r})|^2\cdot d\tau = 1$, *donnent E et la* fonction d'onde indépendante du temps $\psi(\vec{r})$; $\hat{H}\,\psi = E\cdot\psi$ *est* l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

♦ *Alors :* $\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot t}$ *où* $\Omega = E/\hbar$ *(et donc* $|\Psi(\vec{r},t)|^2 = |\psi(\vec{r})|^2$*)*

DÉMONSTRATION

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{H}\,\Psi = j\cdot\hbar\cdot\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}\\ \hat{H}\,\Psi = E\cdot\Psi\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}j\cdot\hbar\cdot\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = E\cdot\Psi\\ \hat{H}\,\Psi = E\cdot\Psi\end{array}\right\}.$$

La première équation différentielle est de variable *t*, linéaire, sans second membre d'ordre 1 et à coefficients constants ; ayant trouvé une solution particulière de la forme $e^{\eta\cdot t}$, on obtient la solution générale $C\cdot e^{-j\cdot E\cdot t/\hbar}$; *C*, constante arbitraire *par rapport à t,* est notée $\psi(\vec{r})$.

Remarques

♦ L'une des relations de L. de Broglie, $E = \hbar\cdot\Omega$, est retrouvée.

♦ ψ et $|\Psi|^2 = |\psi|^2$ sont indépendants du temps mais Ψ dépend du temps.

Axiome

Un système de plusieurs particules est décrit par une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,t)$ ou $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots)$ obéissant à des lois analogues à celles énoncées pour une particule.

c) Valeurs moyennes et lien entre mécaniques quantique et classique

Théorème 25.11

La valeur moyenne d'une observable est, avec $\Psi(\vec{r},t)$ *ou* $\psi(\vec{r})$ *:*

♦ $< f(\vec{r}) > = \iiint_{\text{tout l'espace}} f(\vec{r})\cdot|\Psi|^2\cdot d\tau$ *si l'observable n'est fonction que de* $\vec{r}$ *et* t ;

♦ $< A > = \iiint_{\text{tout l'espace}} \Psi^*\hat{A}\Psi\cdot d\tau$ *si plus généralement l'opérateur* $\hat{A}$ *est quelconque.*

Théorème 25.12

♦ *La mécanique quantique redonne la mécanique classique dans la limite* $\hbar \to 0$ *et dans la limite des grands nombres quantiques.*
♦ *Le théorème de P. Ehrenfest restitue le Principe fondamental de la dynamique :*

$$< \vec{f} > \; = \frac{\mathrm{d} < \vec{p} >}{\mathrm{d}t} \text{, où } < \vec{f} >$$

est calculé à partir de l'opérateur force $\widehat{\vec{f}}$.
♦ *Les* relations d'incertitude quantique $\Delta E \cdot \Delta t \geqslant \hbar/2,\ \Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \hbar/2$...
(W. Heisenberg, 1927) autorisent des états non stationnaires (avec une incertitude ΔE *sur l'énergie et une durée d'évolution* Δt*), dans lesquels la position et la quantité de mouvement sont assez bien déterminées (avec des incertitudes* Δx, Δp_x *,...).*

25.8.2 Résultats sur le moment cinétique

Théorème 25.13

♦ Opérateur moment cinétique orbital *:*

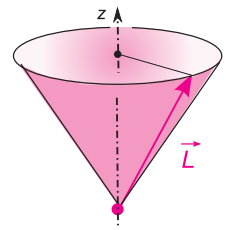
$$\widehat{\vec{L}} \; = \; \widehat{\vec{r}} \; \wedge \; \widehat{\vec{p}} \text{ et donc } \widehat{L}_z = \widehat{x}\ \widehat{p}_{\,y} - \widehat{y}\ \widehat{p}_{\,x} = \; - \; j \cdot \hbar \cdot \left[x \cdot \frac{\partial}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right] \text{ , ...}$$

♦ *De* $\vec{L}$*, on ne peut connaître simultanément que le carré de la norme* $\|\vec{L}\|^2$ *(ainsi que sa norme* $\|\vec{L}\|$*) et l'une de ses coordonnées,* L_z *par exemple :*

$$\begin{cases} \|\vec{L}\| \; = \; \hbar \cdot \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \text{ où } \ell \; = \; 0, 1, 2, ... \\ L_z \; = \; \hbar \cdot \mathrm{m}_\ell \text{ où } \mathrm{m}_\ell \; = \; - \; \ell, \; - \; \ell \; + 1, ..., \; + \ell \end{cases}$$

ℓ et m_ℓ étant les nombres quantiques *orbital* et *magnétique orbital*

Seuls $\|\vec{L}\|$ et L_z ayant une valeur déterminée, on peut représenter $\vec{L}$ comme pouvant prendre n'importe quelle orientation sur un cône.



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 25.14

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), la fonction propre Y commune à $\widehat{L}_z$ *et à* $\widehat{\vec{L}}^2$ *(équations* $\widehat{L}_z Y = L_z \cdot Y$ *et* $\widehat{\vec{L}}^{\,2} Y = \|\vec{L}\|^2 \cdot Y$*) est :*

$$Y_{\ell\, m_\ell}(\theta,\varphi) = \wp_{\ell\, m_\ell}(\cos\theta)\cdot[\,(1/\sqrt{2\cdot\pi})\cdot\exp(j\cdot m_\ell\cdot\varphi)\,]$$

où les fonctions $\wp_{\ell\, m}$ *et* $Y_{\ell\, m}$ *sont connues respectivement sous le nom de* fonction de Legendre associée normée *et d'*harmonique sphérique.

Théorème 25.15

Une définition générale de $\widehat{\vec{J}}$ *donne les mêmes propriétés pour tout moment cinétique* $\vec{J}$ *qui sera rencontré (orbital, de spin, somme de moments cinétiques) :*

$$\begin{cases} \|\vec{J}\| = \hbar\cdot\sqrt{j\cdot(j+1)} \text{ où } j \text{ est le nombre quantique} \\ (\text{parfois demi entier}) \text{ associé à } \|\vec{J}\| \\ J_z = \hbar.m_j \text{ où } m_j = -j, -j+1, ..., +j \end{cases}$$

25.9 Atome d'hydrogène de Schrödinger

25.9.1 Méthode de calcul et premiers résultats

Le traitement classique de l'atome d'hydrogène et de l'ion hydrogénoïde et les résultats quantiques sur le moment cinétique orbital $\vec{L}$ conduisent à rechercher les états stationnaires dans lesquels L_z, $\|\vec{L}\|$ et l'énergie E ont une valeur déterminée. La résolution (non détaillée dans ce livre) se fait dans mêmes hypothèses que pour le modèle planétaire.

Théorème 25.16

♦ *Les* états quantiques stationnaires de l'atome H ou d'un ion hydrogénoïde, *où la coordonnée* L_z *du moment cinétique orbital* $\vec{L}$*, la norme* $\|\vec{L}\|$ *et l'énergie E ont une valeur déterminée, sont donnés par la résolution des équations*

$\{\widehat{L}_z\psi = L_z\cdot\psi\ ,\ \widehat{\vec{L}}^{\,2}\psi = \|\vec{L}\|^2\cdot\psi$ *et* $\widehat{H}\ \psi = E\cdot\psi\}$

en coordonnées sphériques (r, θ, φ) ;

♦ *Par séparation des variables, on obtient sous forme factorisée les fonctions d'onde indépendantes du temps, numérotées par les nombre quantique n,* ℓ *et* m_ℓ *:*

$$\psi_{n\,\ell\, m_\ell}(r,\theta,\varphi) = \mathcal{R}_{n\ell}(r)\cdot Y_{\ell\, m_\ell}(\theta,\varphi)$$

$$= \mathcal{R}_{n\ell}(r)\cdot\wp_{\ell\, m_\ell}(\cos\theta)\cdot[\,(1\sqrt{2\cdot\pi})\cdot\exp(j\cdot m_\ell\cdot\varphi)\,]\ ;$$

on trouve simultanément les valeurs associées de E, $\|\vec{L}\|$ *et* L_z*.*

Théorème 25.17

Dans l'état (n ,ℓ , m_ℓ) *de l'atome H ou d'un ion hydrogénoïde :*

♦ $E_n = -\dfrac{m_e \cdot e^4}{32 \cdot \pi^2 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot \hbar^2} \cdot \dfrac{Z^2}{n^2}$, où $n = 1, 2, 3, \ldots$ *est le nombre quantique principal (comme dans le modèle de Bohr) ;*

♦ $\|\vec{L}\|_\ell = \hbar \cdot \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)}$, *où* $\ell = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots, n - 1$ *est le nombre quantique orbital dont les valeurs sont aussi notées s, p, d, f, g, ... ;*

♦ $(L_z)_{m_\ell} = \hbar \cdot m_\ell$, *où* $m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \ldots, +\ell$ *est le nombre quantique magnétique orbital.*

En raison de la forme du *potentiel* coulombien, l'énergie ne dépend que de n.

Théorème 25.18

Premières fonctions d'onde $\psi_{n\,\ell\,m_\ell}$ *de l'atome* H *ou d'un ion hydrogénoïde :*

$$\psi_{1\,0\,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{a_0}\right) ;$$

$$\psi_{2\,0\,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{3/2} \cdot \left(1 - \frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) ;$$

$$\psi_{2\,1\,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0} \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot \cos\,\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{5/2} \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot z$$

$$\psi_{2\,1\,\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{3/2} \cdot \frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0} \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot \sin\,\theta \cdot \exp(\pm j \cdot \varphi)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{5/2} \cdot \exp\left(-\frac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot (x \pm j \cdot y)$$

Les fonctions d'onde sont complexes pour $m_\ell \neq 0$ mais, en en faisant des combinaisons linéaires, on peut construire des fonctions d'onde réelles.

Théorème 25.19

On peut remplacer l'ensemble $\{ \psi_{2\,1\,-1}, \psi_{2\,1\,1} \}$ *par l'ensemble*

$$\begin{cases} \psi_{2\,px} = \dfrac{\psi_{2\,1\,1} + \psi_{2\,1\,-1}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\dfrac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{5/2} \cdot \exp\left(-\dfrac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot x \\ \psi_{2\,py} = \dfrac{\psi_{2\,1\,1} - \psi_{2\,1\,-1}}{j \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\dfrac{Z}{2 \cdot a_0}\right)^{5/2} \cdot \exp\left(-\dfrac{Z \cdot r}{2 \cdot a_0}\right) \cdot y \end{cases}$$

Les orbitales 2px, 2py et 210 = 2pz ont même forme et correspondent chacune à une coordonnée nulle du moment cinétique orbital (respectivement L_x, L_y et L_z). Les orbitales

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

(n, ℓ, m_ℓ), qui résultent d'une recherche systématique d'états de base, privilégient un axe (conventionnellement l'axe des z) et sont par exemple adaptées à l'étude de l'atome en présence d'un champ magnétique ; les orbitales 2px, 2py, 2pz sont plus représentatives de l'atome seul ou prêt à former une molécule.

25.9.2 Densités de probabilité de présence et valeurs moyennes

Théorème 25.20

Les fonctions d'ondes permettent de calculer :

♦ *la probabilité* $|\psi(r,\theta,\varphi)|^2 \cdot d\tau$ *de présence de l'électron dans un élément de volume* $d\tau$ *situé en* $\vec{r}$, *en particulier l'élément* $d\tau = (dr)\cdot(r\cdot d\theta)\cdot(r\cdot \sin\theta\cdot d\varphi) = r^2\cdot dr\cdot \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$ *associé aux coordonnées sphériques ;*

♦ *la probabilité* $P(r)\cdot dr$ *pour que l'électron soit à une distance de* O *entre r et* $r + dr$ *où* $P(r) = r^2\cdot \int_{\phi=0}^{2.\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} |\psi|^2\cdot \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$, *densité de probabilité de présence radiale.*

DÉMONSTRATION

On obtient $P(r)\cdot dr$ en intégrant (« en sommant ») la probabilité $|\psi(r,\theta,\varphi)|^2\cdot r^2\cdot dr\cdot \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$ sur toutes les valeurs possibles de θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ et de ϕ $(0 \leqslant \phi \leqslant 2\cdot\pi)$: et de θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$: $P(r)\cdot dr = r^2\cdot dr\cdot \int_{\phi=0}^{2\cdot\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} |\psi|^2\cdot \sin\theta\cdot d\theta\cdot d\varphi$.

Théorème 25.21

♦ *Quelques densités de probabilité de présence radiales* $P_{n,\ell}$ *:*

$$P_{1\,0}(r) = 4\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)\cdot\left(\frac{Z\cdot r}{a_0}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{2\cdot Z\cdot r}{a_0}\right) ;$$

$$P_{21} = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)\cdot\left(\frac{Z\cdot r}{a_0}\right)^4\cdot\exp\left(-\frac{Z\cdot r}{a_0}\right) ;$$

$$P_{2\,0}(r) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{Z}{a_0}\right)\cdot\left(\frac{Z\cdot r}{a_0}\right)^2\cdot\left(1-\frac{Z\cdot r}{2\cdot a_0}\right)^2\cdot\exp\left(-\frac{Z\cdot r}{a_0}\right) .$$

♦ $P_{n,\ell=n-1}(r)$ *maximale pour* $r = n^2\cdot a_0 / Z = R_n$, *rayon de l'orbite* n *de Bohr.*

♦ $< r >_{n\ell} = \frac{3\cdot n^2 - \ell\cdot(\ell+1)}{2}\cdot\frac{a_0}{Z}$;

$$< r >_{n,\ell=n-1} = \left(1+\frac{1}{2\cdot n}\right)\cdot\frac{n^2\cdot a_0}{Z} = \left(1+\frac{1}{2\cdot n}\right)\cdot R_n \approx R_n \text{ si n grand}$$

$$< \frac{1}{r} >_n = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z}{a_0} = \frac{1}{R_n} ; < \frac{1}{r^3} >_{n\ell} = \frac{2}{n^3\cdot\ell\cdot(\ell+1)\cdot(2\cdot\ell+1)}\cdot\frac{Z^3}{a_0^3}$$

Remarque

P(r) est nul en $r = 0$, alors que $|\Psi|^2$ ne l'est pas dans les états s !

L'électron ayant une probabilité de présence en chaque point, on peut considérer qu'il est réparti dans l'espace avec la charge volumique $\rho(\vec{r}) = -e\cdot|\psi(\vec{r})|^2$.

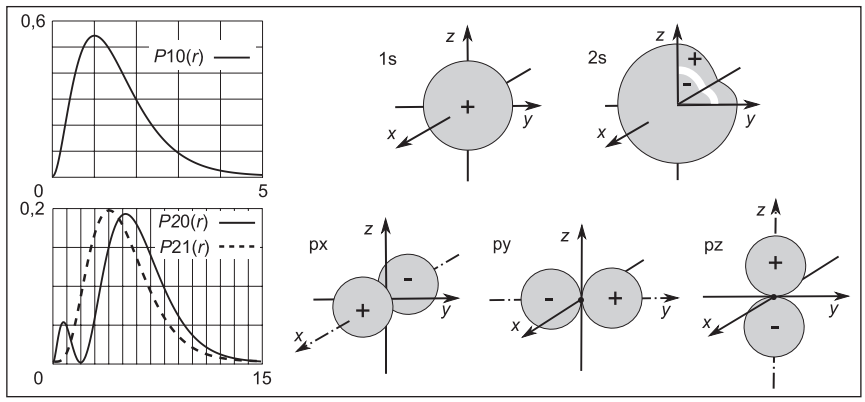


Figure 25.3 **Premières fonctions d'onde d'un hydrogénoïde.**

À gauche : densité de probabilité de présence radiale (en unité 1 / a) en fonction de la distance r (en unité $a = a_0 / Z$) pour les états 1s, 2s et 2p.

À droite : allure de la distribution angulaire de densité de probabilité de présence et signe de la fonction d'onde pour les états 1s, 2s et px, py, pz ; la vue éclatée de la distribution angulaire 2s montre le changement de signe.

25.10 Moment magnétique orbital

Théorème 25.22

Au moment cinétique orbital $\vec{L}$ d'une particule de charge q et de masse m correspond un moment magnétique orbital $\vec{\mu}_L$: $\vec{\mu}_L = \dfrac{q}{2\cdot m}\cdot\vec{L}$.

Démonstration

♦ La charge en rotation est analogue à une spire de courant : à une masse en rotation est lié un moment cinétique, à une spire de courant un moment magnétique.

♦ La démonstration est élémentaire pour une particule en mouvement circulaire uniforme de vitesse v et de rayon r ; elle est un peu plus subtile dans le cas général.

Voir site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Théorème 25.23

Le moment magnétique orbital de l'électron est :

$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot \vec{L} = -\mu_B \cdot \frac{\vec{L}}{\hbar}$ *où* $\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e}$ *est le* magnéton de Bohr.

Comme $\vec{L}$, $\vec{\mu}_L$ *est quantifié ; en particulier sa coordonnée selon l'axe z (en pratique la direction d'un champ magnétique) ne peut prendre que les valeurs* $-\, m_\ell \cdot \mu_B$.

25.11 Spin de l'électron et d'autres particules

25.11.1 Mise en évidence du spin de l'électron

Théorème 25.24

Une particule de moment magnétique $\vec{\mu}$ *placée dans un champ magnétique non uniforme* $\vec{B}(\vec{r})$ *subit une force* $\overrightarrow{grad}\ (\ \vec{\mu} \cdot \vec{B}\ )$ *de valeur algébrique* $\mu_z \cdot (\ \partial B_z / \partial z\ )$ *dans une région où* $\vec{B} = \vec{B}_z(z)$ *a la direction z et est non uniforme selon z.*

Dans l'expérience de O. Stern et W. Gerlach (1922), un faisceau d'atomes d'argent traverse un champ magnétique non uniforme ; bien que l'atome d'argent (formé d'un cœur et d'un électron périphérique) ait un moment magnétique orbital nul dans l'état fondamental, le faisceau se sépare en deux faisceaux symétriques, ce qui laisse penser que l'atome a un moment magnétique dont la coordonnée μ_z peut prendre deux valeurs. Un résultat similaire est ensuite observé avec des atomes H.

À la valeur du nombre de spin s correspondent les $2 \cdot s + 1$ valeurs $-\, s, -\, s + 1, \ldots, +\, s$ de m_s et donc $2 \cdot s + 1$ valeurs μ_z ; l'expérience donnant $2 \cdot s + 1 = 1$, $s = 1/2$.

Théorème 25.25

L'électron a un moment cinétique intrinsèque $\vec{S}$ de spin

- *de nombre quantique* de spin $s = 1/2$ *:* $\|\vec{S}\| = \hbar \cdot \sqrt{s \cdot (s+1)} = \hbar \cdot \sqrt{3}/2$ *;*
- *et donc de nombre quantique* magnétique de spin $m_s = \pm\, 1/2$ *:* $S_z = \hbar \cdot m_s$.

Attribuer à l'électron un moment cinétique intrinsèque *de spin* $\vec{S}$ et un moment magnétique correspondant, permet d'expliquer la *structure fine* (dédoublement de niveaux) du spectre de l'atome H en champ magnétique nul (S.A. Goudsmitt et G.E. Uhlenbeck, 1925). La mécanique quantique relativiste correcte pour l'électron (équation de Dirac) implique l'existence du spin de l'électron (P.M. Dirac, 1928). Le moment cinétique de spin est intrinsèque ; il est conseillé d'abandonner l'image historique de l'électron tournant sur lui-même.

Exercice d'application 25.6

Calculer, pour un électron, l'angle θ entre $\vec{S}$ et l'axe des z.

SOLUTION.

$$\cos\theta = \frac{|S_z|}{||\vec{S}||} = \frac{|\,m_s \cdot \hbar\,|}{||\vec{S}||} = \frac{(\hbar/2)}{\hbar \cdot \sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ soit } \theta \approx 54,7°.$$

25.11.2 Moments cinétique et magnétique de spins

Au moment cinétique de spin $\vec{S}$ d'une particule correspond un moment magnétique $\vec{\mu}_S$ qui lui est proportionnel et qu'il est commode d'écrire de façon analogue à un moment magnétique orbital, en introduisant un *facteur* g. À titre de comparaison, le tableau 25.5 donne le nombre quantique *s* de spin et le moment magnétique des particules déjà rencontrées, ainsi que du neutron.

Tableau 25.4 **Spin et moment magnétique de spin**

	S	$\vec{\mu}_s$	g	magnéton
électron	1 / 2	$\vec{\mu}_s = -g_e \cdot \frac{e}{2 \cdot m_e} \cdot \vec{S} = -\mu_B \cdot g_e \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$	$g_e \approx 2$	$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e}$
proton	1 / 2	$\vec{\mu}_s = g_p \cdot \frac{e}{2 \cdot m_p} \cdot \vec{S} = \mu_N \cdot g_p \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$	$g_p \approx 5,588$	$\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_p}$
neutron	1/2	$\vec{\mu}_s = g_n \cdot \frac{e}{2 \cdot m_p} \cdot \vec{S} = \mu_N \cdot g_n \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar}$	$g_n \approx -1,367$	$\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_p}$
photon	1	$\vec{\mu}_s = \vec{0}$		

Pour l'électron, l'électrodynamique quantique (R. Feynman *et al.*, 1948) fixe $g_e \approx 2,0023$; on retient en pratique $g_e \approx 2$ donné par l'expérience par l'équation de P.M. Dirac. Pour le neutron (qui n'a pas de charge mais a un moment magnétique !) et pour les noyaux de spin non nul, on garde la même forme que pour le proton : le magnéton est le *magnéton nucléaire* associé au proton ; g peut être positif ou négatif. Le photon a un spin mais pas de moment magnétique de spin.

Selon le type la particule, le nombre quantique de spin *s* est demi-entier (cas des fermions) ou entier (cas des bosons) ; cette distinction est importante.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

25.12 Atome d'hydrogène avec spin

25.12.1 Effet d'un champ magnétique sur l'atome

Théorème 25.26

Un atome H *ou un ion hydrogénoïde placé dans un champ magnétique* $\vec{B}$ *uniforme et selon z, acquiert une énergie supplémentaire :*

$$\begin{cases} -\vec{\mu}_L\cdot\vec{B} = \dfrac{e}{2\cdot m_e}\cdot\vec{L}\cdot\vec{B} = \dfrac{e}{2\cdot m_e}\cdot L_z\cdot B \\ = \dfrac{e}{2\cdot m_e}\cdot m_\ell\cdot\hbar\cdot B = m_\ell\cdot\dfrac{e\cdot\hbar\cdot B}{2\cdot m_e} = m_\ell\cdot\mu_B\cdot B \\ -\vec{\mu}_S\cdot\vec{B} = g_e\cdot\dfrac{e}{2\cdot m_e}\cdot\vec{S}\cdot\vec{B} = g_e\cdot\dfrac{e}{2\cdot m_e}\cdot S_z\cdot B = m_s\cdot g_e\cdot\dfrac{e\cdot\hbar\cdot B}{2\cdot m_e} = m_s\cdot g_e\cdot\mu_B\cdot B \end{cases}.$$

Alors : $E_{n\,m_\ell\,m_s} = E_n + (m_\ell + g_e\cdot m_s)\cdot\mu_B\cdot B.$

Ces relations ne sont vérifiées que si le champ magnétique est assez fort pour rendre négligeable l'interaction spin-orbite (effet magnétique interne à l'atome).

25.12.2 États de l'atome d'hydrogène avec spin de l'électron

Définition

♦ Compte tenu du spin de l'électron, un état, ou *spin-orbitale*, est repéré par les nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s)

où $\begin{cases} n = 1, 2, \ldots \text{ puis } \ell = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ puis } m_\ell = -\ell, -\ell+1, \ldots, +\ell \\ m_s = \pm 1/2, \text{ nombre quantique } \textit{magnétique de spin} \end{cases}.$

♦ La *fonction d'onde avec spin* peut être écrite $\phi_{n\,\ell\,m_\ell\,m_s}(\vec{r},\vec{S}) = \psi_{n\,\ell\,m_s}(\vec{r})\cdot\sigma_{m_s}(\vec{S})$

avec la notation usuelle $\sigma_{m_s} = \begin{cases} \alpha(\vec{S}) \text{ pour l'état } m_s = 1/2 \text{ où } S_z = \hbar/2 \\ \beta(\vec{S}) \text{ pour l'état } m_s = -1/2 \text{ où } S_z = \hbar/2 \end{cases}.$

Théorème 25.27

*L'*orbitale (n, ℓ, m_ℓ)*, ou* case quantique*, contient 2 états.*
La sous-couche (n, ℓ) *contient* $2\cdot(2\cdot\ell+1)$ *états.*
La couche *n contient* $2\cdot n^2$ *états.*

Démonstration

À (n, ℓ, m_ℓ) donnés : 2 valeurs de m_s, soit 2 états. À (n, ℓ) donnés : 2 valeurs de m_s et $(2\cdot\ell+1)$valeurs de m_ℓ, soit $2\cdot(2\cdot\ell+1)$ états. Nombre d'états à n donné :

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} 2\cdot(2\cdot\ell+1) = 4\cdot[1+2+\ldots+(n-1)]+2\cdot n = 4\cdot[(n-1)\cdot(n-1+1)/2]+2\cdot n = 2\cdot n^2.$$

25.12.3 Interaction spin-orbite et autres effets relativistes

La description précise des spectres de raies observés, nécessite des corrections de *structure fine* à l'énergie : interaction *spin-orbite* et autres effets relativistes.

a) Interaction spin-orbite

Le calcul détaillé de l'énergie d'interaction spin-orbite ΔE dans le référentiel du laboratoire est très délicat : il doit être fait en Relativité (pour exprimer la transformation des champs électrique et magnétique dans un changement de référentiel) et il fait intervenir le référentiel non galiléen de l'électron (L. Thomas, 1926).

Théorème 25.28

Dans son référentiel, l'électron est soumis à un champ magnétique $\vec{B}\,'$ *produit par la rotation du noyau autour de lui.*
*L'*interaction spin-orbite *entre le moment magnétique de spin* $\vec{\mu}_S$ *de l'électron et le champ* $\vec{B}\,'$ *donne, dans le référentiel du laboratoire, une contribution* $\Delta E = -\,\vec{\mu}_S \cdot \vec{B}\,' / 2$ *à l'énergie (et non* $-\,\vec{\mu}_S \cdot \vec{B}\,'$*, en raison d'effets relativistes).*

Théorème 25.29

$\vec{L}$ et $\vec{r}$ étant le moment cinétique $\vec{L}$ et la position $\vec{r}$ de l'électron de l'atome H *ou d'un ion hydrogénoïde dans le référentiel du laboratoire :*

♦ *le champ magnétique auquel est soumis l'électron dans son référentiel R ' est :*

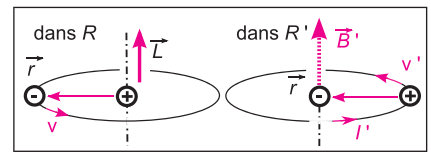
$$\vec{B}\,' = \frac{Z \cdot e}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot m_e} \cdot \frac{\vec{L}}{r^3} \; ;$$

♦ *la contribution spin-orbite à l'énergie est, dans le référentiel* R *du laboratoire :*

$$\Delta E = -\,\frac{\vec{\mu}_S \cdot \vec{B}\,'}{2} = \frac{Z \cdot e^2 \cdot g_e}{16 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c^2 \cdot m_e^2} \cdot \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^3} \quad (\text{pour } \vec{L} \neq \vec{0}\,, \text{ et } 0 \text{ pour } \vec{L} = \vec{0}\,).$$

DÉMONSTRATION

♦ La démonstration est élémentaire dans le cas où, dans le référentiel du laboratoire, l'électron tourne autour du noyau sur une orbite de rayon r avec une vitesse de norme v. Dans le référentiel de l'électron, le noyau tourne autour de l'électron sur une orbite de rayon r avec une vitesse v, et donc avec une période $T\,'$; on assimilant ce système à une spire de courant de rayon r et d'intensité $I\,' = (Z \cdot e)/T\,' = Z \cdot e \cdot v/(2 \cdot \pi \cdot r)$ qui produit en son centre le champ $B\,' = \mu_0 \cdot I\,'/(2 \cdot r) = \mu_0 \cdot Z \cdot e \cdot v/(4 \cdot \pi \cdot r^2) = \mu_0 \cdot Z \cdot e \cdot L/(4 \cdot \pi \cdot m_e \cdot r^3)$ où $L = m_e \cdot v \cdot r$. Le sens des grandeurs (figure) et $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$ donnent $\vec{B}\,'$.



♦ La démonstration est un peu plus subtile dans le cas général.

Voir site web

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\Delta E = -\frac{\vec{\mu}_S \cdot \vec{B}\,'}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-g_e\cdot\frac{e}{2\cdot m_e}\cdot\vec{S}\right)\cdot\left(\frac{Z\cdot e}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot c^2\cdot m_e}\cdot\frac{\vec{L}}{r^3}\right)$$

$$= \frac{Z\cdot e^2\cdot g_e}{16\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot c^2\cdot m_e^2}\cdot\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{r^3}$$

Théorème 25.30

Pour l'atome H *ou un ion hydrogénoïde dans un état* (n,ℓ) *où* $\ell \neq 0$, *en remplaçant* $1/r^3$ *par sa moyenne* $< 1/r^3 >$, *on obtient la contribution spin-orbite :*

$$\Delta E_{n\ell} = \frac{1}{n^3\cdot\ell\cdot(\ell+1)\cdot(2\cdot\ell+1)}\cdot\frac{\vec{L}\cdot\vec{S}}{\hbar^2}\cdot g_e\cdot\frac{Z^4\cdot\alpha^4}{2}\cdot m_e\cdot c^2$$

qui est de la forme $A_{n\ell}\cdot\vec{L}\cdot\vec{S}$.

DÉMONSTRATION

On substitue dans ΔE, la valeur moyenne $<1/r^3>$ (théorème 25.21), puis a_0 (théorème 25.6) et on fait apparaître la constante α (théorème 25.8).

Théorème 25.31

$\vec{L}\cdot\vec{S} = (\|\vec{J}\|^2 - \|\vec{L}\|^2 - \|\vec{S}\|^2)/2 = [\,j\cdot(j+1) - \ell\cdot(\ell+1) - s\cdot(s+1)\,]\cdot\hbar^2/2$ *où* $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ *est le moment cinétique total, dans un état où les nombres quantiques associés à* $\|\vec{L}\|^2$, $\|\vec{S}\|^2$ et $\|\vec{J}\|^2$ *sont* ℓ , s *et* j.

DÉMONSTRATION.

On utilise l'astuce suivante (à retenir !), puis le théorème 25.15 :

$$\vec{J}\cdot\vec{J} = (\vec{L}+\vec{S})\cdot(\vec{L}+\vec{S}) = \vec{L}\cdot\vec{L} + 2\cdot\vec{L}\cdot\vec{S} + \vec{S}\cdot\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{S} = (\vec{J}\cdot\vec{J} - \vec{L}\cdot\vec{L} - \vec{S}\cdot\vec{S})/2$$

Théorème 25.32

Pour l'atome H *ou un ion hydrogénoïde dans un état* (n,ℓ,j), *en remplaçant* $\vec{L}\cdot\vec{S}$ *par sa valeur :*

$$\Delta E^{SO}_{n\ell j} = \begin{cases} \dfrac{j\cdot(j+1) - \ell\cdot(\ell+1) - 3/4}{n^3\cdot\ell\cdot(\ell+1)\cdot(2\cdot\ell+1)}\cdot\dfrac{Z^4\cdot\alpha^4}{2}\cdot m_e\cdot c^2 \;si\; \ell \neq 0 \\ 0\;si\;\ell = 0 \end{cases}.$$

L'inventaire, à ℓ donné, des valeurs de $m_j = m_\ell + m_s$ dans les différents états (m_ℓ, m_s), permet de compter le nombre d'états donnant chaque valeur de m_j et de déterminer les valeurs possibles de j, chaque moment cinétique total $\vec{J}$ correspondant à des états $m_j = -j, -j+1, \ldots, +j$. La figure 25.4 détaille la méthode.

$m_j = m_\ell + m_s$		m_ℓ				
		$-\ell$	$-\ell+1$	• • •	$\ell-1$	ℓ
m_s	−1/2	$-\ell-1/2$	$-\ell+1/2$	• • •	$\ell-3/2$	$\ell-1/2$
	+1/2	$-\ell+1/2$	$-\ell+3/2$	• • •	$\ell-1/2$	$\ell+1/2$

	m_j		
	$-\ell-1/2$	×	
	$-\ell+1/2$	×	×
	• • •	×	×
	$\ell-1/2$	×	×
	$\ell+1/2$	×	

$j = \ell + 1/2$ ↵

$j = \ell - 1/2$ ↵

Figure 25.4 **Détermination des états correspondant à un moment cinétique total**

Le cas considéré ici est celui de la somme des moments cinétiques orbital et de spin d'un électron, mais la méthode est générale. On construit le tableau à deux entrées donnant les valeurs possibles du nombre quantique magnétique de moment total (somme des valeurs possibles des nombres quantiques magnétiques individuels).

Dans un deuxième temps, on dresse la liste ordonnée des valeurs obtenues et on aligne en face de chacune une croix par état individuel trouvé avec cette valeur dans le tableau ; sachant qu'à chaque valeur j du nombre quantique de moment total doivent correspondre les valeurs − j, − j + 1, ..., j du nombre quantique magnétique de moment total, on trouve les valeurs possibles de j.

Définition

Lorsqu'on tient compte de l'interaction spin-orbite, on constate que les nombres quantiques pertinents pour définir un état de l'hydrogène ou d'un ion hydrogénoïde ne sont plus (n, ℓ, m_ℓ, m_s) mais (n, ℓ, j, m_j).

L'état (n, ℓ, j, m_j) est noté : $n\,[\,\text{lettre}(\ell)\,]_j^{m_j}$, où lettre (ℓ) = s, p, d, f, g,... pour respectivement $\ell = 0, 1, 2, 3, 4...$ Un niveau d'énergie sans champ magnétique extérieur est noté sans préciser m_j.

b) Autres effets relativistes

Lorsque l'on tient compte de l'interaction spin-orbite, on ne peut pas négliger deux corrections relativistes qui sont du même ordre de grandeur.

Théorème 25.33

♦ *Correction relativiste à l'énergie cinétique, à l'ordre le plus bas en* v / c *:*

$$\Delta E^{EC}_{n\ell} = -\frac{< p^4 >}{8\cdot c^2\cdot m_e^3} = -\frac{8\cdot n - 6\cdot\ell - 3}{4\cdot n^4\cdot(2\cdot\ell+1)}\cdot\frac{Z^4\cdot\alpha^4}{2}\cdot m_e\cdot c^2.$$

♦ *Correction de C.G. Darwin (1928), où h / (*$m_e \cdot c$*) est la longueur de Compton :*

$$\Delta E^{D}_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{8\cdot m_e^2\cdot c^2}\cdot < \Delta w(\vec{r}) >$$

$$= \frac{Z\cdot e^2\cdot\hbar^2}{8\cdot m_e^2\cdot c^2}\cdot|\psi_{n\ell m_\ell}(\vec{0})|^2 = \begin{cases}\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{Z^4\cdot\alpha^4}{2}\cdot m_e\cdot c^2 \; si\; \ell = 0\\ 0 \; si\; \ell \neq 0\end{cases}$$

Voir chapitre 26

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

25.12.4 Bilan des niveaux d'énergie et des transitions

a) Niveaux en l'absence de champ magnétique extérieur

Théorème 25.34

En tenant compte des corrections relativistes (dont l'interaction spin-orbite) :
♦ *si* $\ell \neq 0$ *et* $j = \ell \pm 1/2$ *:* $E_{n\,\ell\,j}^{B=0} = E_n + \Delta E_{n\,\ell}^{SO} + \Delta E_{n\,\ell}^{EC}$ *(théorèmes 25.32 et 33) ;*
♦ *si* $\ell = 0$ *et* $j = 1/2$ *:* $E_{n\,\ell\,j}^{B=0} = E_n + \Delta E_{n\,\ell}^{D} + \Delta E_{n\,\ell}^{EC}$ *(théorème 25.33).*

b) Niveaux en présence d'un champ magnétique extérieur

Théorème 25.35

Pour l'atome H *ou un hydrogénoïde en champ magnétique* $\vec{B}$ *fort, avec spin (effet Paschen-Back) :* $E_{n\,m_\ell\,m_S} = E_n + (m_\ell + g_e \cdot m_s) \cdot \dfrac{e \cdot \hbar \cdot B}{2 \cdot m_e} + \Delta E_{n\,\ell\,m_\ell\,m_S}^{SO}$

avec $\Delta E_{n\,\ell\,m_\ell\,m_S}^{SO} = \dfrac{m_\ell \cdot m_s}{n^3 \cdot \ell \cdot (\ell+1) \cdot (2\cdot\ell+1)} \cdot g_e \cdot \dfrac{Z^4 \cdot \alpha^4}{2} \cdot m_e \cdot c^2$ *si* $\ell \neq 0$ *et* 0 *si* $\ell = 0$.

DÉMONSTRATION

Au niveau $E_{n\,m_\ell\,m_s}$ sans spin et avec champ magnétique (théorème 25.26), et pour $\ell \neq 0$, on ajoute la contribution de spin-orbite en $\vec{L} \cdot \vec{S}$ (théorème 25.30) , on exprime $\vec{L} \cdot \vec{S}$ en fonction des bons nombres quantiques, en notant que $L_z = m_\ell \cdot \hbar$ et $S_z = m_s \cdot \hbar$, et que L_x, L_y, S_x et S_y sont indéterminés et peuvent être remplacés par leur valeur moyenne (nulle) : $\vec{L} \cdot \vec{S} = L_z \,.\, S_z + L_y \,.\, S_y + L_x \,.\, S_x = m_\ell \cdot m_s \cdot \hbar^2$.

Théorème 25.36

Pour l'atome H *ou un hydrogénoïde en champ magnétique* $\vec{B}$ *faible, avec spin (effet Zeeman anormal) :* $E_{n\,\ell\,j} = E_{n\,\ell\,j}^{B=0} - \vec{\mu}_J \cdot \vec{B}$ *avec* $\vec{\mu}_J = -g_J \cdot \vec{J} \cdot \mu_B / \hbar$ *où* $g_J = \dfrac{3 \cdot j \cdot (j+1) - \ell \cdot (\ell+1) + (3/4)}{2 \cdot j \cdot (j+1)}$ *est le facteur de Landé, avec* $g_e = 2$.

Voir site web

c) Règles de sélection des transitions radiatives « autorisées »

Toutes les transitions radiatives entre niveaux n'ont pas la même probabilité ! Ceci n'apparaissait pas dans les premières observations expérimentales et dans les calculs de Bohr et de Schrödinger sans spin ni champ extérieur car chaque niveau était *dégénéré*, c'est-à-dire correspondait à plusieurs états quantiques distincts. Les transitions *dipolaires électriques* (dans lesquelles l'évolution de la fonction d'onde lors du passage d'un état à un autre donne une distribution de charge ayant un moment dipolaire oscillant) sont les plus intenses ; des conditions fixent des *règles de sélection* pour ces transitions, les autres transitions étant dites *interdites*.

Théorème 25.37

*Pour les transitions radiatives les plus intenses (*dipolaires électriques*) entre niveaux de l'hydrogène ou d'un hydrogénoïde, les* règles de sélection *à appliquer aux nombres quantiques qui interviennent dans la situation considérée sont :*
Δn *quelconque ;* $\Delta\ell = \pm 1$ *;* $\Delta \mathrm{j} = 0, \pm 1$ *(sauf* $0 \to 0$*) ;*
$\Delta \mathrm{m_j} = 0, \pm 1$ *;* $\Delta \mathrm{m}_\ell = 0, \pm 1$ *;* $\Delta \mathrm{m}_s = 0$.

25.13 Atomes à plusieurs électrons

25.13.1 Niveaux profonds de l'atome

Le rayonnement électromagnétique X qu'émet une cible métallique bombardées par des électrons de 1 à 100 kV (W. Röntgen, 1895 , M. von Laue, 1912) présente un spectre continu (rayonnement de freinage) mais aussi des séries de raies dites *de fluorescence* (H. Moseley, 1913). Des électrons sont arrachés des niveaux atomiques profonds (peu modifiés par l'environnement des atomes) ; un électron arraché laisse un état quantique vide qu'occupe un électron d'un niveau supérieur en émettant un photon. L'expérience donne les niveaux d'énergie profonds de l'atome sous la même forme que ceux d'un ion hydrogénoïde :

$$\varepsilon_\mathrm{n} = -\, Z_\mathrm{n}{}^{*2} \cdot \mathrm{W}_0 / \mathrm{n}^2 \text{ où } Z_\mathrm{n}{}^* = Z - \zeta_\mathrm{n} \text{ avec } \zeta_1 \approx 1 \text{ à } 2,\ \zeta_2 \approx 10,\ \zeta_3 \approx 20.$$

Un électron du niveau n voit une charge effective $Z_\mathrm{n}{}^* \cdot \mathrm{e}$, qui est la charge $Z \cdot \mathrm{e}$ du noyau *écrantée* par la charge $-\zeta_\mathrm{n} \cdot \mathrm{e}$ des électrons plus proches du noyau. L'expérience fournit le numéro atomique Z, et montre la structure atomique en couches.

25.13.2 Principe d'exclusion de Pauli

Les données spectroscopiques d'atomes à plusieurs électrons montrent que deux électrons d'un système ne peuvent pas occuper un même état (W. Pauli, 1924).

Principe : fonction d'onde d'un système de particules de spin demi-entier

La fonction d'onde avec spin d'un système de particules *indiscernables*, $\phi_\mathrm{A}(\vec{r}_1, \vec{S}_1, \vec{r}_2, \vec{S}_2, \vec{r}_3, \vec{S}_3, ...)$, notée de façon abrégée $\phi_\mathrm{A}(1,2,3, ...)$, doit rester inchangée, au signe près, dans l'échange de deux particules ($|\phi_\mathrm{A}|^2$ ainsi inchangée) :

Pour des particules de spin s demi entier (fermions) comme l'électron, deux particules ne peuvent pas être dans le même état quantique, c'est-à-dire avoir tous leurs nombres quantiques identiques, et la fonction d'onde avec spin doit être antisymétrique dans l'échange de deux particules (c'est-à-dire changer de signe).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

25.13.3 Électrons indépendants dans un potentiel moyen sphérique

Ne pouvant résoudre l'équation de Schrödinger en tenant compte directement de l'interaction coulombienne entre les électrons de l'atome, on considère que tous ces électrons sont soumis à un même potentiel moyen $\widetilde{w}(r)$ représentant l'interaction avec le noyau et avec les électrons qui *écrantent* le noyau à la distance r, soit :

$\widetilde{w}(r) = -Z\cdot e^2 / (4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r)$ pour $r \to 0$ et $\widetilde{w}(r) = -e^2 / (4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r)$ pour $r \to \infty$.

Théorème 25.38

♦ *Dans l'approximation des électrons indépendants, les électrons de l'atome n'interagissent pas entre eux mais sont soumis à un même potentiel sphérique* $\widetilde{w}(r)$ *représentant globalement l'interaction avec le noyau et avec les autres électrons.*

♦ *La résolution, en coordonnées sphériques, de l'équation de Schrödinger* à un électron *donnerait les énergies* $\varepsilon_{n\,\ell}$*, les fonctions d'onde* $\psi_{n\,\ell\,m_\ell}(\vec{r}) = \widetilde{\mathscr{R}}_{n\ell}(r)\cdot Y_{\ell\,m_\ell}(\theta,\varphi)$ *et les spin-orbitales* $\phi_{n\,\ell\,m_\ell\,m_s}(\vec{r},S_z)$.

♦ Z *états* $(n_i, \ell_i, m_{\ell i}, m_{si})$ *différents sont occupés et l'énergie totale de l'atome est* $E = \sum_{i=1}^{Z} \varepsilon_{n_i\,\ell_i}$ *; l'occupation des états définit la* configuration *de l'atome.*

♦ *Chaque état à un électron a les mêmes nombres quantiques que dans un hydrogénoïde ; l'ordre des niveaux* $\varepsilon_{n\,\ell}$ *est indépendant de la forme précise de* $\widetilde{w}(r)$.

Les énergies $\varepsilon_{n\,\ell}$ à un électron ne dépendent plus seulement de n (comme avec le potentiel coulombien) mais aussi de ℓ, et seule la partie radiale $\widetilde{\mathscr{R}}$ de ψ dépend de la forme du potentiel $\widetilde{w}(r)$. Dans l'état fondamental de l'atome, les niveaux $\varepsilon_{n\,\ell}$ sont occupés par énergie croissante, à raison d'un électron par état (n, ℓ, m_ℓ, m_s).

Devant changer de signe dans l'échange de deux électrons, la fonction d'onde avec spin d'un système de Z électrons n'est pas le produit de spin-orbitales attribuées chacune à un électron, mais une combinaison linéaire de tels produits :

$$\phi(1,2,3,\ldots,Z) = \frac{1}{\sqrt{Z\,!}}\cdot\begin{vmatrix} \phi_1(1) & \ldots & \phi_1(Z) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi_N(1) & \ldots & \phi_N(Z) \end{vmatrix}$$ où $|\ |$ est un déterminant.

25.13.4 Interaction spin-orbite

Le résultat du calcul à l'approximation des électrons indépendants dans un potentiel sphérique $\widetilde{w}(r)$ commun est ensuite corrigé pour prendre en compte l'interaction spin-orbite, ainsi que d'autres écarts comme l'*échange-corrélation* non traités ici.

On distingue deux approximations pour l'interaction spin-orbite . le couplage faible L-S (concernant plutôt les atomes de faible Z comme le carbone) et le couplage fort *J-J* (concernant plutôt les atomes de grand Z comme le plomb).

Pour rechercher les différents états possibles (avec les bons nombres quantiques), on note préalablement que seules les sous-couches incomplètes interviennent car une sous-couche complète ou vide a des moments cinétique et orbital nuls.

Théorème 25.39

♦ *En couplage L-S, l'état global de l'atome, à configuration γ fixée (occupation des états à un électron), est caractérisé par les nombres quantiques (L, S, J, m_J) associés respectivement à* $\|\vec{\mathbf{L}}\|$, $\|\vec{\mathbf{S}}\|$, $\|\vec{\mathbf{J}}\|$ *et* $\mathbf{J}_z$, $\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$ *étant les moments totaux.*

♦ *La correction à l'énergie est de la forme* $\Delta E^{\mathrm{SO}} = A_{\gamma \mathrm{L S}} \cdot \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}$ *et se traite comme dans le cas de l'hydrogène (théorème 25.30).*

EXPLICATION

On déduit les valeurs possibles de L et S de l'inventaire des valeurs de $m_L = \Sigma_i\, m_{\ell\, i}$ et $m_S = \Sigma_i\, m_{s\, i}$ dans les états ($m_{\ell\, 1}$,$m_{s\, 1}$,$m_{\ell\, 2}$,$m_{s\, 2}$, ...), par un procédé analogue à celui présenté figure 25.4 pour un hydrogénoïde, mais en tenant compte de l'indiscernabilité des électrons et du principe de Pauli ; l'inventaire des valeurs de $m_J = m_L + m_S$ donne les valeurs possibles de J.

Théorème 25.40

En couplage J-J, l'état global de l'atome, à configuration γ fixée, est caractérisé par les nombres quantiques (j_1, j_2, ..., J, m_J) *associés respectivement à* $\|\vec{J}_i\|$ *pour les différents électrons concernés,* $\|\vec{\mathbf{J}}\|$ *et* $\mathbf{J}_z$ *, où* $\vec{J}_i = \vec{L}_i + \vec{S}_i$ *et* $\vec{\mathbf{J}} = \Sigma_i\, \vec{J}_i$.

25.13.5 Notation des états et niveaux

Définition

♦ Couche n : K, L, M, ... pour n = 1, 2, 3, ...

♦ Sous-couche (n, ℓ) : na , $\begin{cases} \text{où a} = \text{s , p, d , f , g , h , ...} \\ \text{pour } \ell = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,... \end{cases}$.

♦ Sous-couche (n, ℓ) et nombre k d'électrons qu'elle contient : na^{k} ;
s^2, p^6, d^{10}, f^{14} et g^{18} correspondent à l'occupation maximale respective.

♦ *Configuration* d'un atome : ensemble de ses na^{k}.

♦ *Orbitale* (n , ℓ , m_ℓ) : représentée par une *case quantique* à 2 états ($m_s = \pm 1/2$).

Définition

♦ En *notation du couplage* L-S, l'état global d'un atome, caractérisé, à configuration donnée, par les nombres quantiques (L, S, J, m_J) associés aux moments cinétiques totaux $\vec{\mathbf{L}}, \vec{\mathbf{S}}$ et $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}}$, est noté : $\mathrm{configuration}^{2.S+1}[\mathrm{lettre(L)}]_{\mathrm{J}}^{m_J}$,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

où configuration est l'ensemble des na^k ; lettre(L) = S, P, D, F, G, ... selon que L = 0, 1, 2, 3, 4,... et $2 \cdot S + 1$ est appelé *multiplicité*.
♦ $^{2.S+1}$[lettre(L)] est un *terme* et $^{2.S+1}$[lettre(L)]$_J$ correspond à un *niveau*.

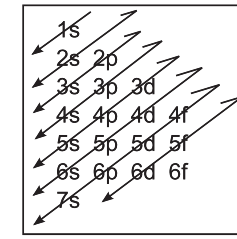
Exemples :
♦ Ca ($Z = 20$) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$ = [–]$4s^2$ ou [–]$4s^1 5s^1$, [–]$4s^1 3d^1$, ... ;
♦ C ($Z = 6$) $1s^2 2s^2 2p^2\ ^1D_2$ pour L = 2, S = 0, J = 2.

25.13.6 Ordre de remplissage des orbitales dans l'état fondamental

a) Remplissage des sous-couches : règle de Klechkowski-Madelung

Théorème 25.41

Règle de P. Klechkowski-E. Madelung (1925) : à quelques exceptions près, les sous-couches (n, ℓ) *sont remplies à* n + ℓ *croissant puis* n *croissant.*



La règle empirique, mais confirmée par les calculs, est représentée sur le diagramme ci-contre. À partir de l'élément $Z = 18$; certaines sous-couches peuvent commencer à se remplir alors que des sous-couches de plus petit n (donc plus internes) sont encore vides. Pour tous les atomes, les états de la couche externe (donc de plus grand n) sont de type s-p. Lorsque les états s-p d'une couche n finissent de se remplir (avec donc 8 électrons, soit un *octet*), les sous-couches de plus petit n (donc plus internes) sont complètes ou vides ; ceci correspond à un *élément de gaz rare*. Le remplissage progressif d'une sous-couche d correspond aux *éléments de transition*, celui de la sous-couche 4f aux *terres rares* ou *lanthanides* et celui de la sous-couche 5f aux *actinides* ; les exceptions à la règle concernent des éléments appartenant à ces trois catégories.

Remarque

Les exceptions sont les suivantes. Pour Z = 24, 29, 41, 42, 44 à 47, 78 et 79 : un électron qui devrait être sur la dernière orbitale s considérée occupe la dernière orbitale d considérée. Pour Z = 57, 58 et 64 : un électron qui devrait être sur l'orbitale 4f occupe l'orbitale 5d. Pour Z = 89 à 93 et 96 : un électron qui devrait être sur l'orbitale 5f occupe l'orbitale 6d.

Exemple
Ni ($Z = 28$) = $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^8$ = $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^8 4s^2$ = [Ar]$3d^8 4s^2$.

Une orbitale (n,ℓ,m_ℓ) peut être occupée, soit par un électron *célibataire*, soit par un *doublet* de deux électrons *appariés* de spins individuels $\vec{S}$ opposés.

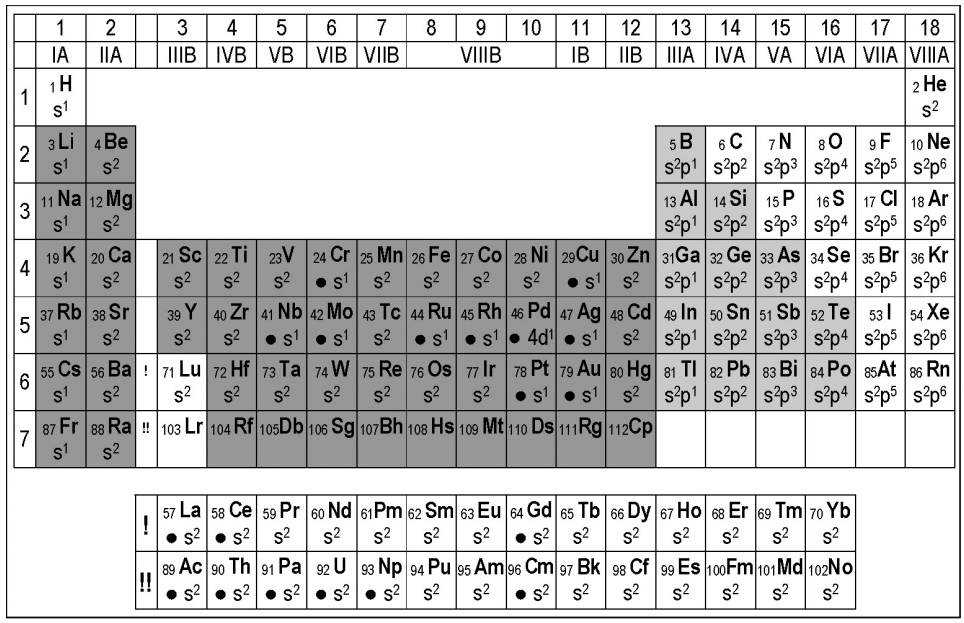


Figure 25.5 **Tableau périodique des éléments**

Le tableau dresse l'inventaire des éléments chimiques, avec leur symbole, leur numéro atomique Z (en indice) et leur structure électronique périphérique ; les éléments dont la structure électronique (interne ou périphérique) fait exception à la règle de Klechkowski sont marqués par ● .

Le numéro de ligne du tableau donne le nombre quantique principal de la couche électronique périphérique de l'atome. Les métaux sont indiqués en grisé sombre, les métaux pauvres et les métalloïdes en grisé clair. On distingue en particulier les métaux alcalins (colonne 1), les métaux alcalino-terreux (colonne 2), les halogènes (colonne 17), les gaz rares ou nobles (colonne 18), les lanthanides (! et Lu) et les actinides (!! et Lr).

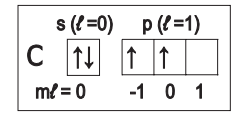
b) Remplissage des orbitales : règle de Hund

Théorème 25.42

♦ *Dans l'état fondamental, à configuration donnée par la règle de Klechkowski, un maximum d'orbitales de la sous-couche* (n, ℓ) *incomplète sont occupées chacune par un électron de même* m_s *avant d'être complétées par un électron de* m_s *opposé.*
♦ *Plus précisément, à configuration donnée par la règle de Klechkowski, parmi les états possibles* (L, S, J, m_J) *en notation du couplage* L-S, *le niveau d'énergie fondamental correspond à* S *maximal, puis à* L *maximal, puis à J minimal ou maximal selon que la sous-couche incomplète est moins ou plus qu'à moitié remplie.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Un état (L, S, J, m_J) est un mélange d'états ($m_{\ell 1}$, m_{s1}, $m_{\ell 2}$, m_{s2},...) des électrons de la sous-couche incomplète.



Les tables donnent l'état fondamental en notation L-S.

Exemples :

♦ C ($Z = 6$) : $1s^2 2s^2 2p^2$, niveaux $^1S_0$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^3P_2$, $^1D_2$, état fondamental $^3P_0$;

♦ Pb ($Z = 82$) : [Xe] $4f^{14}\ 5d^{10}\ 6s^2\ 6p^2$, même structure de sous-couche p incomplète et même état fondamental $^3P_0$ en notation L-S.

25.13.7 Transitions radiatives

Théorème 25.43

Comme pour l'hydrogène, on calcule les contributions de spin-orbite, ainsi que les contributions magnétiques en présence d'un champ magnétique.
Toutefois, dans les états où le spin électronique total de l'atome à plusieurs électrons est nul, seule subsiste la contribution magnétique orbitale en présence d'un champ magnétique : $\Delta E_{m_L} = -\vec{\mu}_L \cdot \vec{B} = m_L \cdot \mu_B \cdot B$ *(*effet Zeeman normal*, plus rare que l'*effet Zeeman anormal *rencontré lorsque le spin de l'atome est non nul).*

Théorème 25.44

Pour les transitions radiatives dipolaires électriques *entre niveaux d'un atome, les règles de sélection à appliquer aux nombres quantiques qui interviennent sont :*
Δn *quelconque ;* $\Delta L = 0, \pm 1$ *(sauf* $0 \to 0$*) ;* $\Delta J = 0, \pm 1$ *(sauf* $0 \to 0$*) ;* $\Delta S = 0$ *;*
$\Delta m_J = 0, \pm 1$ *;* $\Delta m_L = 0, \pm 1$ *;* $\Delta m_S = 0$ *;*

$$[\Delta j_1 = 0 \text{ et } \Delta j_2 = 0, \pm 1] \quad \text{ou} \quad [\Delta j_2 = 0 \text{ et } \Delta j_1 = 0, \pm 1].$$

25.13.8 Calcul numérique élémentaire des atomes

Deux premières méthodes de calcul du potentiel moyen $\widetilde{w}(r)$ ont été développées dans les années 1930. Dans le modèle de Thomas-Fermi le nuage électronique est traité en chaque point comme un gaz quantique d'électrons libres, de charge volumique $\rho(\vec{r})$, en équilibre autour du noyau. Dans la méthode de Hartree, on part de fonctions d'ondes vraisemblables, puis, pour chaque électron, on calcule en tout point le potentiel exercé par les autres et on résout l'équation de Schrödinger pour trouver de nouvelles fonctions d'onde ; on réitère le calcul jusqu'à la convergence.

À retenir

- Le rayonnement électromagnétique a à la fois une nature ondulatoire et corpusculaire (avec le photon) ; L. de Broglie associe une onde aux particules matérielles.
- La théorie planétaire semi-quantique de Bohr donne les niveaux d'énergie exacts de l'atome d'hydrogène et des ions hydrogénoïdes.
- La théorie fondamentale non relativiste de la Mécanique est la Mécanique quantique de Schrödinger.
- Au moment cinétique orbital d'un électron et au moment cinétique intrinsèque des particules sont associés respectivement un moment magnétique orbital et un moment magnétique de spin. Un atome est soumis à des effets magnétiques internes et éventuellement à un champ magnétique extérieur.
- Le principe de Pauli, qui empêche à un même état quantique d'être occupé par plus d'un électron explique la structure en couches des atomes à plusieurs électrons.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 626.

25.1 Photons

Combien de photons par seconde et par période de l'onde interviennent dans ces deux cas :

a) émission de l'émetteur de radiodiffusion France Inter ($\lambda \approx 1\,852$ m, $P \approx 2\,000$ kW) ?

b) traversée de la pupille de l'œil, d'aire $S \approx 50$ mm^2, pour l'intensité minimale $I \approx 10^{-10}$ W · m^{-2} perçue ($\lambda \approx 5{,}6$ μm) ?

25.2 Ionisation du lithium

Calculer théoriquement l'énergie de troisième ionisation de l'atome de lithium Li.

25.3 Séparation entre les séries de raies d'un l'hydrogénoïde

Pour quels n les séries S_n de raies d'un ion hydrogénoïde sont-elles bien séparées ?

25.4 Positronium

Pour le positronium, constitué d'un positron e^+ (masse m_e de l'électron et charge e) et d'un électron, calculer le rayon R_1' de la première orbite de Bohr, l'énergie d'ionisation W_i' et la constante de Rydberg R'.

25.5 Mesure de coordonnées du moment cinétique de spin

On fait traverser trois appareils de type Stern et Gerlach situés l'un derrière l'autre par un électron, afin de mesurer S_z (on trouve $S_z > 0$), S_y (on trouve $S_y < 0$) et de nouveau S_z . Donner, pour chaque mesure, la valeur de la coordonnée de $\vec{S}$ cherchée.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

25.6 Raie à 21 cm de l'hydrogène

Déterminer les niveaux d'énergie qu'acquiert l'électron de l'atome d'hydrogène dans son état fondamental quand on tient compte de l'interaction entre son moment magnétique de spin et le champ $\vec{B}$ produit par le moment magnétique de spin $\vec{\mu}_p$ du noyau ; en déduire la longueur d'onde de la transition radiative entre ces niveaux et commenter. On donne :

$$\iiint_{\text{espace}} \vec{B}(\vec{r})\cdot|\psi_{100}(\vec{r})|^2\cdot d\tau = (2\cdot\mu_0/3)\cdot|\psi_{100}(\vec{0})|^2\cdot\vec{\mu}_p.$$

25.7 Table de Mendeleïev

Sans regarder la table de Mendeleïev, chercher combien de colonnes ont respectivement la ligne 5 et la ligne 6.

25.8 Niveau spectroscopique fondamental du nickel

Écrire la configuration de l'atome Ni ($Z = 28$) puis, pour cette configuration, celui des termes $\{^3P, ^1D, ^3F, ^1G, ^1S\}$ qu'a l'état fondamental, et enfin le niveau (L,S,J) fondamental.

25.9 États 2p de l'hydrogène dans un champ magnétique fort

a) Écrire, en fonction des moments cinétiques orbital et de spin de l'électron, la contribution magnétique ΔE à l'énergie quand l'atome H est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ assez fort pour rendre négligeables les effets de structure fine.

b) Exprimer, en valeur absolue, le plus petit écart δE entre les valeurs possibles de ΔE pour les états 2p.

c) Pour quel B l'effet du champ l'emporte-t-il sur la contribution de structure fine ?

25.10 Effet Zeeman normal sur une raie du mercure

La raie d'émission du mercure, de longueur d'onde $\lambda_0 \approx 1\,849$ Å et de fréquence ν_0, correspond à la transition entre le niveau 6^1P_1, d'énergie E_1, et le niveau 6^1S_0, d'énergie E_0 . On se propose d'étudier l'effet d'un champ magnétique $\vec{B}$.

a) Que deviennent les niveaux E_0 et E_1 ?

b) Exprimer la fréquence de chacune des transitions entre un niveau issu de E_1, et un niveau issu de E_0.

c) Calculer le champ B nécessaire pour observer l'écart entre les raies extrêmes avec un spectromètre de résolution $\Delta\nu \approx \nu_0 / R$ avec $R \approx 20\,000$.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE

26

PRÉALABLES

- Équations différentielles linéaires
- Éléments de physique quantique (chapitre 25)

MOTS CLÉS

- Énergie de liaison
- Énergie de masse
- Défaut de masse
- Demi-vie radioactive
- Nucléons
- Nuclides
- Section efficace

OBJECTIFS

- Connaître le noyau et les particules de la physique nucléaire.
- Acquérir et manipuler des notions de dynamique relativiste.
- Comprendre les bases de modèles nucléaires simples.
- Voir des exemples de réactions et désintégrations nucléaires.
- Savoir faire le bilan énergétique des réactions et désintégrations nucléaires.
- Comprendre la notion de section efficace.
- Savoir mettre en équations les cinétiques de désintégrations nucléaires.
- Acquérir des notions élémentaires en physique des particules et des interactions.

UNITÉS, VOCABULAIRE ET NOTATIONS

La physique du nucléaire et la physique des particules font usage d'unités, de terminologie et de notations particulières :

♦ les énergies sont exprimées en eV, en MeV ou en GeV

$$(1\ \text{eV} \approx 1{,}6021 \cdot 10^{-19}\ \text{J}, \quad 1\ \text{MeV} = 10^{6}\ \text{eV}, \quad 1\ \text{GeV} = 10^{9}\ \text{eV})\ ;$$

♦ les longueurs sont exprimées en femtomètres ou fermis ($1\text{fm} = 10^{-15}$ m) ;

♦ les masses sont exprimées en unité u (12 u pour l'atome de carbone 12) ou en $\text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$ ($1\ \text{u} \approx 1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \approx 931{,}49\ \text{MeV} \cdot \text{c}^{-2}$) ;

- un champ d'énergie potentielle $w(\vec{r})$ est dénommé *potentiel* ;
- l'énergie cinétique est souvent notée T ou K ;
- « une particule de 9 MeV » a une énergie cinétique de 9 MeV.

26.1 Les nuclides et les particules associées

26.1.1 Inventaire

La chimie et la physique atomique établissent la distinction entre *nombre de masse A* et *numéro atomique Z* des éléments. Des espèces atomiques, dites *isotopes*, de mêmes propriétés chimiques mais de masses différentes sont mises en évidence (J.J. Thomson, 1912). La spectrométrie de masse des ions (F.W. Aston, 1919) permet de mesurer précisément des masses atomiques. La découverte du neutron (J. Chadwick, 1932) conduit à penser que les noyaux atomiques sont constitués de protons et de neutrons (W. Heisenberg, 1932).

La physique nucléaire fait intervenir les noyaux, le proton p et le neutron n, mais aussi le photon γ et l'électron e^-, ainsi que le positron e^+ (antiélectron), le neutrino électronique ν et l'antineutrino électronique $\overline{\nu}$.

Définition

- Un *noyau atomique* donné, ou *nuclide* selon la terminologie préconisée, est composé de A *nucléons*, dont Z protons et $N = A - Z$ neutrons.
- A est le *nombre de masse* et Z le *numéro atomique* (c'est-à-dire le nombre d'électrons de l'atome ayant ce nuclide pour noyau).
- D étant le symbole de l'atome de numéro atomique Z, les notations usuelles actuelles d'un nuclide sont :

$$ {}^{A}_{Z}D_{N} \ , \ {}^{A}_{Z}D, \text{ ou } {}^{A}D_{N} \text{ ou encore simplement } {}^{A}D \ (D \text{ fixe } Z \ ; \ N = A - Z). $$

- Proton : ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, p ou ${}^{1}_{1}\mathrm{p}$; neutron : n ou ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$; nuclide hélium 4 : ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ ou α .

Tableau 26.1 **Charge et masse de particules**

	Charge	Masse
proton p	e	$m_p \approx 1{,}67262 \cdot 10^{-27}$ kg $\approx 938{,}2723$ MeV $\cdot c^{-2} \approx 1{,}007276$ u
neutron n	0	$m_n \approx 1{,}67493 \cdot 10^{-27}$ kg $\approx 939{,}5656$ MeV $\cdot c^{-2} \approx 1{,}008665$ u
$e^{\pm}$	$\pm$ e	$m_e \approx 9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg $\approx 0{,}51100$ MeV $\cdot c^{-2} \approx 0{,}00054858$ u
ν et $\overline{\nu}$	0	≈ 0

26.1.2 Définition de nuclides remarquables

Définition

- *Isotopes de numéro atomique Z* : nuclides de même nombre Z de protons ;
- *Isobares de nombre de masse A* : nuclides de même nombre A de nucléons ;

- *Isotones de nombre de neutrons N* : nuclides de même nombre N de nucléons ;
- *Nuclides miroirs* : deux nuclides qui diffèrent par la permutation de Z et de N ;
- *Nuclide dans un état excité*, noté ${}^{A}_{Z}D_N{}^{*}$;
- *Nuclide isomère*, noté ${}^{A}_{Z}{}^{m}D_N$ *:* nuclide excité dans un état *métastable* (c'est-à-dire de longue durée de vie).

Ainsi, ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ sont des isotopes de carbone, ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ sont des isobares de nombre de masse 14, ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ et ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$ sont des isobares à 7 neutrons, ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}_4$ et ${}^{7}_{4}\mathrm{Be}_3$ sont des nuclides miroirs, ${}^{115}_{49}\mathrm{In}^{*}$ est un nuclide excité, ${}^{115\,m}_{48}\mathrm{Cd}$ est un isomère.

26.1.3 Propriétés des nuclides

Les premières expériences de diffusion coulombienne de particules α (issues d'une source radioactive) par une feuille d'or donnent au nuclide un rayon inférieur à 26 fm (E. Rutherford, 1911). Des expériences de diffusion d'électrons rapides (R. Hofstadter, de 1953 à 1958) montrent que la densité de la matière nucléaire décroît sur une épaisseur de l'ordre du fm à la périphérie du nuclide. Le rayon nucléaire est d'environ 7 fm pour l'or ($A = 197$) et 3 fm pour l'oxygène ($A = 16$).

Théorème 26.1

Le rayon nucléaire donné par les expériences de diffusion étant

$$R = R_0 \cdot A^{1/3} \text{ où } R_0 \approx \begin{cases} 1{,}1 \text{ fm } \textit{avec des électrons} \\ 1{,}4 \text{ fm } \textit{avec des particules nucléaires} \end{cases}$$

le volume par nucléon est approximativement le même dans tous les nuclides.

Les nuclides dont N ou Z est un *nombre magique* (2, 8, 20, 28, 50, 82 ou 126) ont des propriétés remarquables par rapport à leurs voisins (plus grande stabilité...).

Le neutron et le proton ont un moment cinétique intrinsèque de spin $\vec{S}$, de nombre quantique $s = 1/2$, et un moment magnétique de spin (tableau 25.5).

Théorème 26.2

- *Le* moment cinétique de spin du nuclide, $\vec{S}$, *est caractérisé par un nombre quantique de spin noté* I *:*

$$\begin{cases} \|\vec{S}\| = \hbar \cdot \sqrt{I \cdot (I+1)} \\ S_z = \hbar \cdot \mathrm{m}_I \text{ où } \mathrm{m}_I = -I, -I+1, ..., +I \end{cases}.$$

- I *est nul pour les nuclides de A et Z pairs ;*
- I *est entier non nul* (1, 2, ...) *pour les nuclides de A pair et Z impair ;*
- I *est demi-entier* (1/2, 3/2, ...) *pour les nuclides de A impair.*

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

♦ *À un moment cinétique de spin nucléaire* $\vec{S}$ *non nul* ($I \neq 0$) *est associé un moment magnétique de spin donné sous la forme :*

$$\vec{\mu}_s = g \cdot \frac{e}{2 \cdot m_p} \cdot \vec{S} = \mu_N \cdot g \cdot \frac{\vec{S}}{\hbar} \text{ où } \begin{cases} \mu_N = \dfrac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_p} \text{ est le magnéton nucléaire} \\ \text{le facteur g peut être positif ou négatif} \end{cases}$$

26.2 DYNAMIQUE RELATIVISTE

26.2.1 Cinématique relativiste

La *Relativité restreinte* (A. Einstein, 1905) introduit un formalisme dans lequel tout *événement* est repéré par ses coordonnées (x, y, z, t) dans un référentiel, et où la coordonnée temporelle t dépend du référentiel ! La formule matricielle de transformation dans un changement de référentiel galiléen est montrée ci-dessous à titre d'information ; elle assure que dans tous les référentiels galiléens (en translation uniforme les uns par rapport aux autres), les lois physiques ont la même forme et que la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur c (ce qui est implicite dans les équations de l'Électromagnétisme) ; les référentiels galiléens $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}$' étant munis de repères orthonormés d'axes parallèles, $\mathscr{R}$' étant en translation uniforme à la vitesse u selon x par rapport à $\mathscr{R}$, et les origines O et O' coïncidant à $t = t' = 0$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ c \cdot t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(u) & 0 & 0 & -\gamma(u) \cdot u/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma(u) \cdot u/c & 0 & 0 & \gamma(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ c \cdot t \end{bmatrix}, \text{ où } \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

avec $\gamma(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$

26.2.2 Dynamique d'une particule

a) Force, quantité de mouvement et énergies

Écrivant, pour une particule, les relations classiques

$$\vec{f} = d\vec{p} / dt \quad \text{et} \quad -dE_C = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

entre quantité de mouvement $\vec{p}$, énergie cinétique E_C et force $\vec{f}$, on cherche une formulation quadridimensionnelle fondée sur la cinématique relativiste. On trouve que dans un changement de référentiel galiléen [p_x , p_y , p_z , E_R / c] se transforme comme [x , y , z , c t], avec une expression de $\vec{p}$ et d'une énergie nouvelle E_R.

Théorème 26.3

Pour une particule de masse m et de vitesse $\vec{v}$*, soumise à une force* $\vec{f}$ *:*

♦ *principe fondamental :*

$$\vec{f} = d\vec{p} / dt ;$$

♦ *quantité de mouvement :*

$$\vec{p} = m \cdot \gamma(v) \cdot \vec{v} \quad avec \ \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

♦ *énergie relativiste :*

$$E_R = \gamma(v) \cdot m \cdot c^2 = m \cdot c^2 + E_C ;$$

♦ *invariant relativiste énergie-quantité de mouvement :*

$$(E_C + m \cdot c^2)^2 - p^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 \ dans \ tout \ référentiel !$$

♦ *énergie cinétique :*

$$E_C = [\gamma(v) - 1] \cdot m \cdot c^2 = \sqrt{m^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} - m \cdot c^2.$$

DÉMONSTRATION

$E_R = \gamma(v) \cdot m \cdot c^2$ et $\vec{p} = m \cdot \gamma(v) \cdot \vec{v}$ établies, il est facile de trouver l'invariant $\gamma^2 \cdot m^2 \cdot c^4 - \gamma^2 \cdot m^2 \cdot v^2 \cdot c^2 = \gamma^2 m^2 \cdot c^4 \cdot [1 - (v^2/c^2)] = m^2 \cdot c^4$, puis $E_C(v)$ et $E_C(p)$.

Exercice d'application 26.1

Calculer la correction relativiste à l'expression classique de l'énergie cinétique $E_C(p)$ *d'une particule, à l'ordre le plus bas. On rappelle que*

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + (\varepsilon / 2) - (\varepsilon^2 / 8) + \ldots .$$

SOLUTION.

$$E_C = \sqrt{m^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2} - m \cdot c^2 = m \cdot c^2 \cdot \left\{ \sqrt{1 + [p^2 \cdot c^2 / (m^2 \cdot c^4)]} - 1 \right\}$$

$$\varepsilon = p^2 \cdot c^2 / (m^2 \cdot c^4) \Rightarrow E_C \approx p^2 / (2 \cdot m) - p^4 / (8 \cdot m^3 \cdot c^2)$$

$$\Rightarrow \Delta E_C \approx -p^4 / (8 \cdot m^3 \cdot c^2)$$

Au terme de masse près, on retrouve la dynamique classique pour $v \ll c$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Dans la conservation de l'énergie totale $E_C + m\cdot c^2 + E_P(\vec{r})$ d'une particule d'énergie potentielle E_P, le terme constant $m\cdot c^2$ est sans conséquences, mais l'énergie relativiste $E_C + m\cdot c^2$ est celle pertinente dans les systèmes de particules.

Exercice d'application 26.2

Calculer la vitesse finale d'un électron émis à une vitesse négligeable par une cathode chauffée et accéléré sous 250 kV.

SOLUTION. Conservation de l'énergie totale relativiste de l'électron entre la cathode A et l'anode B :

$$m_e\cdot c^2 + 0 + (-e\cdot V_A) = m_e\cdot c^2 + E_{CB} + (-e\cdot V_B)$$

$$\Rightarrow E_{CB} = e\cdot(V_A - V_B) = e\cdot U$$

$$\Rightarrow [\gamma(v_A) - 1]\cdot m_e\cdot c^2 = e\cdot U \Rightarrow \gamma(v_A) = 1 + [e\cdot U / (m_e\cdot c^2)]$$

$$\Rightarrow v_A = c\cdot\sqrt{1 + 2\cdot[m_e\cdot c^2 / (e\cdot U)]} \,/\, \{1 + [m_e\cdot c^2 / (e\cdot U)]\}$$

$$\approx 2{,}2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

au lieu de $v_A = c\cdot\sqrt{2\cdot e\cdot U / m_e} \approx 2{,}96\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ en mécanique classique.

b) Masse d'une particule de vitesse c (comme le photon)

Théorème 26.4

Pour une particule ayant une masse m, une vitesse v, *une énergie* E_R *et une quantité de mouvement* p : $v = c \Leftrightarrow m = 0 \Leftrightarrow E_R = p\cdot c$.

DÉMONSTRATION

$E_R(v) = \gamma(v)\cdot m\cdot c^2 = m\cdot c^2 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ n'a de sens, à valeur donnée de E_R et à numérateur (ou dénominateur) nul, que si le dénominateur (ou le numérateur) est nul (forme 0 / 0). $E_R(p) = E_C + m\cdot c^2 = \sqrt{m^2\cdot c^4 + p^2\cdot c^2}$ avec $m = 0$.

c) Onde de L. de Broglie associée à une particule relativiste

Tableau 26.2 **Longueur d'onde de L. de Broglie pour quelques particules**

	Énergie cinétique	λ	v / c
$e^{\pm}$ de désintégration	$\leqslant$ 2 MeV	$\geqslant 0{,}5\ 10^{-12}$ m	$\leqslant$ 0,98
e^- anneau HERA	30 GeV	$4{,}1\ 10^{-17}$ m	≈ 1
n thermique	< 0,5 eV	> 40 10^{-12} m	< 3,3 10^{-5}
n rapide de fission	$\approx$ 2 MeV	$\approx$ 20 fm	$\approx$ 0,065
p anneau HERA	$\approx$ 820 GeV	1,5 10^{-18} m	≈ 1
α de désintégration	2 $\rightarrow$ 9 MeV	10 fm $\rightarrow$ 4,8 fm	0,0327 $\rightarrow$ 0,0694

Exercice d'application 26.3

Longueur de L. de Broglie d'une particule de masse m et d'énergie cinétique E_C *?*

SOLUTION.

$$p^2 \cdot c^2 = (E_C + m \cdot c^2)^2 - m^2 \cdot c^4 = (E_C + 2 \cdot m \cdot c^2) \cdot E_C$$
$$\Rightarrow \lambda = h / p = h / \sqrt{(E_C + 2 \cdot m \cdot c^2) \cdot E_C} \, .$$

26.2.3 Dynamique d'un système de particules

a) Conservations mécaniques dans une collision de particules

Théorème 26.5

♦ *Pour des particules sans interaction, sauf au moment de la collision, l'énergie relativiste totale* $E_R = \sum_{\text{particules } i} E_{R\,i} = \sum_{\text{particules } i} (E_{C\,i} + m_i \cdot c^2)$ *et la quantité de mouvement totale* $\vec{P} = \sum_{\text{particules } i} \vec{p}_i$ *se conservent.*

♦ *L'énergie cinétique totale* $\sum_{\text{particules } i} E_{C\,i}$ *et la somme* $\sum_{\text{particules } i} (m_i \cdot c^2)$ *des énergies de masse peuvent être considérées avant et après la collision, ne se conservent que si les particules présentes restent les mêmes (collision* élastique*).*

Le terme $m \cdot c^2$ dans la conservation de l'énergie, exprime qu'une particule (même élémentaire) contient de l'énergie du seul fait de sa masse, ce qui ouvre la possibilité de transformations entre énergies cinétiques et énergies de masse des particules.

Théorème 26.6

L'invariant relativiste total d'un système permet de définir la masse M du système : $E_R - P^2 \cdot c^2 = M \cdot c^2$ *; en général, la somme des masses initiales (ou finales) ne se conserve pas et diffère de la masse M du système.*

b) Application à l'effet Compton

Théorème 26.7

La longueur d'onde dans le vide d'un photon qui est dévié d'un angle θ *dans sa collision avec un électron au repos, subit une variation* $\Delta\lambda$ *:*

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e \cdot c} \cdot (1 - \cos\theta), \text{ où } \lambda_C = \frac{h}{m_e \cdot c} \text{ est la longueur de Compton.}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

DÉMONSTRATION

En notant $\vec{p}$ et $\vec{p}\,'$ la quantité de mouvement du photon avant et après la collision, et $\vec{p}_e\,'$ la quantité de mouvement de l'électron après la collision, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie relativiste donne :

$$\begin{cases} \vec{p} + \vec{0} = \vec{p}\,' + \vec{p}_e\,' \\ (p \cdot c) + (m_e \cdot c^2) = (p' \cdot c) + \left(\sqrt{m_e^2 \cdot c^4 + p_e'^2 \cdot c^2}\right) \end{cases}$$

où ont été utilisés $p \cdot c = h \cdot c / \lambda = h \cdot \nu$ pour le photon et $E_R = \sqrt{m_e^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$.

À l'aide de la première équation, on exprime $p_e'^2$ que l'on reporte dans la deuxième, puis on isole la racine pour la faire disparaître par élévation au carré :

$$\vec{p}_e\,' = \vec{p} - \vec{p}\,' \Rightarrow p_e'^2 = (\vec{p} - \vec{p}\,')^2$$
$$= p^2 + p'^2 - 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{p}\,' = p^2 + p'^2 - 2 \cdot p \cdot p' \cdot \cos\theta$$

$$p \cdot c + m_e \cdot c^2 - p' \cdot c = \sqrt{m_e^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2 + p'^2 \cdot c^2 - 2 \cdot p \cdot p' \cdot c^2 \cdot \cos\theta}$$

Après simplification : $m_e \cdot c \cdot (p - p') = p \cdot p' \cdot (1 - \cos\theta) \Rightarrow m_e \cdot c \cdot (\lambda' - \lambda) / h = 1 - \cos\theta$.

c) Référentiel du laboratoire et référentiel du centre de masse

Définition

♦ Le référentiel $\mathscr{R}$ *du laboratoire* est celui dans lequel est réalisée l'expérience.

♦ Le référentiel $\mathscr{R}^*$ *du centre de masse* est celui dans lequel la quantité de mouvement totale du système de particules est nulle : $\vec{P} = \vec{0}$.

Théorème 26.8

La Relativité permet à une réaction entre particules d'énergie suffisante de donner naissance à de nouvelles particules par matérialisation d'énergie.
La condition est que dans le référentiel $\mathscr{R}^*$ du centre de masse, l'énergie cinétique finale soit positive ; le seuil de réaction *correspond au cas où toutes les particules finales sont au repos dans $\mathscr{R}^*$.*
On peut revenir dans le référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire en utilisant l'invariant relativiste du système et celui de chaque particule, avant ou après la collision.

DÉMONSTRATION

La somme des masses finales est supérieure à la somme des masses initiales. Dans le référentiel $\mathscr{R}$, toute l'énergie cinétique initiale ne peut en général pas être transformée en énergie de masse car la quantité de mouvement $\vec{P}$ du système doit aussi être conservée ; la condition doit donc être exprimée dans $\mathscr{R}^*$ ($\vec{P}^* = \vec{0}$).

Exercice d'application 26.4

Quelle énergie minimale d'un photon frappant une particule immobile X de masse M permet la réaction de matérialisation $\gamma + X \rightarrow e^- + e^- + X$ *?*

SOLUTION. En notant K l'énergie cinétique de X, et $h\cdot\nu$ l'énergie du photon, la conservation de l'énergie relativiste du système dans $\mathscr{R}^*$ et l'invariant relativiste du système dans $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}^*$ avant la collision donnent (en utilisant $p \cdot c = h \cdot c / \lambda = h \cdot \nu$ pour le photon :

$$\begin{cases} (0 + h\cdot\nu^*) + (M\cdot c^2 + K^*) = 2\cdot m_e\cdot c^2 + M\cdot c^2 + 0 \Rightarrow h\cdot\nu^* + K^* = 2\cdot m_e\cdot c^2 \\ [\,(0 + h\cdot\nu^*) + (M\cdot c^2 + K^*)\,]^2 - 0 = [\,(0 + h\cdot\nu) + (M\cdot c^2 + 0)\,]^2 - [\,h\cdot\nu + 0\,]^2 \end{cases}$$

La deuxième relation devient :

$$\Rightarrow [2\cdot m_e\cdot c^2 + M\cdot c^2]^2 = [h\cdot\nu + M\cdot c^2]^2 - [\,h\cdot\nu\,]^2$$

$$\Rightarrow h\cdot\nu = [1 + \frac{m_e}{M}]\cdot 2\cdot m_e\cdot c^2 \,;$$

X est indispensable (pas de $\mathscr{R}^*$ pour un photon seul !).

Théorème 26.9

En Relativité comme en mécanique classique, dans une collision ne donnant que deux particules finales, la valeur de la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de chaque particule ont une valeur déterminée dans le référentiel $\mathscr{R}^*$ du centre de masse ; il reste une indétermination de direction. Si la collision donne plus de deux particules, seules la quantité de mouvement et l'énergie cinétique totales sont déterminées.

DÉMONSTRATION

$\left\{ \vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = \vec{0}\ ,\ E_C(p_1^*) + E_C(p_2^*) = E_0^* \right\}$ donne les inconnues $p_1{}^*, p_2{}^*, E_{C1}{}^*$ et $E_{C2}{}^*$;

$\vec{P}_0^{\,*} = \vec{0}$ laisse la direction des particules indéterminée.

Dans le cas de plus de deux particules, il y a moins d'équations que d'inconnues.

26.3 MASSE ET ÉNERGIE DE LIAISON NUCLÉAIRES

26.3.1 Défaut de masse et énergie de liaison

Les mesures précises montrent que la masse m d'un nuclide est significativement inférieure à la somme des masses des nucléons le constituant (de 1 % pour C par exemple) : $m < Z\cdot m_p + N\cdot m_n$. Ce résultat en accord avec la Relativité montre que l'énergie de liaison nucléaire est du même ordre que les énergies de masse en jeu.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Définition

L'*énergie de liaison B* d'un nuclide ou *énergie de dissociation* est l'énergie qu'il faudrait apporter au nuclide de masse m au repos pour le dissocier en ses nucléons (Z protons et N neutrons) :

$$m \cdot c^2 + B = Z \cdot m_p \cdot c^2 + N \cdot m_n \cdot c^2, \text{ soit } B = Z \cdot m_p \cdot c^2 + N \cdot m_n \cdot c^2 - m \cdot c^2 ,$$

ou encore $B(A,Z) = Z \cdot m_p \cdot c^2 + (A - Z) \cdot m_n \cdot c^2 - m(A,Z) \cdot c^2$.

L'énergie relativiste $m \cdot c^2$ à prendre en compte dans les bilans énergétiques est : $m(A,Z) \cdot c^2 = Z \cdot m_p \cdot c^2 + (A - Z) \cdot m_n \cdot c^2 - B(A,Z)$.

Lorsque A croît, l'énergie de liaison par nucléon, B / A, croît, puis passe par un maximum vers $A = 56$ et décroît lentement ensuite (figure 26.1).

Définition

Un nuclide étant donné, l'*énergie de séparation d'un neutron* (notée S_n) ou *d'un proton* (notée S_p) est l'énergie qu'il faut apporter au nuclide pour lui enlever un neutron ou un proton : ${}^{A}_{Z}D + S_n \rightarrow {}^{A-1}_{Z}D + {}^{1}_{0}n$ et ${}^{A}_{Z}D + S_p \rightarrow {}^{A-1}_{Z-1}D + {}^{1}_{1}p$.

26.3.2 Masses nucléaires et masses atomiques

Définition

L'unité u de masses atomiques et nucléaires est définie de telle sorte que la masse d'un atome de carbone ${}^{12}C$ soit exactement 12 u.

Le nombre d'Avogadro N_A est alors défini de telle sorte que la masse de N_A atomes de carbone ${}^{12}C$ soit de 12 g : $N_A \approx 6{,}0221367 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

1 u $\approx 1{,}6605 \cdot 10^{-27}$ kg $\approx 931{,}49$ MeV/c^2.

Tableau 26.3 **Masse atomique de quelques isotopes**

	Z	*A*	M (u)		*Z*	*A*	M (u)
H	1	1	1,007825	Mo	42	98	97,90541
H	1	2	2,014102	Xe	54	140	139,9216
H	1	3	3,016050	Ba	56	137	136,905500
He	2	4	4,002603	Ba	56	142	141,91635
Ar	18	40	39,962384	La	57	137	136,906040
K	19	40	39,964000	Ce	58	137	136,90733
Ca	20	40	39,962589	U	92	234	234,040946
Sc	21	49	48,95003	U	92	235	235,043915
Kr	36	90	89,91972	U	92	236	236,045637
Sr	38	94	93,9153	Pu	94	238	238,049553

Les tables (comme le tableau 26.3) donnent la masse M de l'atome plutôt que la masse m du nuclide. Les tables chimiques qui ne précisent pas l'isotope donnent seulement la masse moyenne de l'atome dans la composition isotopique naturelle pour cet atome.

Théorème 26.10

En négligeant le défaut de masse de l'atome (énergie de liaison des électrons), la masse m *du nuclide se déduit de la masse* M *de l'atome de numéro atomique Z par* $m \approx M - Z \cdot m_e$ *(en particulier,* $m_p \approx M_H - m_e$*).*

Les relations ne mettant pas en jeu d'électrons peuvent être écrites indifféremment en masses atomiques ou nucléaires ; ainsi, $m \cdot c^2 + B = Z \cdot m_p \cdot c^2 + N \cdot m_n \cdot c^2$ équivaut à $M \cdot c^2 + B = Z \cdot M_H \cdot c^2 + N \cdot m_n \cdot c^2$ ($Z \cdot m_e \cdot c^2$ ajouté aux deux membres).

26.4 Modèles du nuclide

Seuls les modèles de la goutte liquide et le modèle en couches sont évoqués ici.

26.4.1 Modèle de la goutte liquide

Les premières propriétés observées suggèrent le modèle semi-empirique de la *goutte liquide* (C. von Weiszäker, 1935). La relation entre A et le rayon R (théorème 26.1) conduit à imaginer un nuclide comme formé de nucléons juxtaposés.

L'énergie de liaison du nuclide par nucléon, B / A, mesurée est presque indépendante du nombre A de nucléons (7 à 9 MeV pour la plupart des nuclides). Ceci laisse penser que chaque nucléon (proton ou neutron) n'interagit attractivement qu'avec ses plus proches voisins ; si B_0 est l'énergie de liaison d'un nucléon avec un nucléon voisin et si chaque nucléon est entouré de k nucléons : $B \approx A \cdot (k \cdot B_0 / 2)$, soit B / A indépendant de A, et B proportionnelle à A : $B_V = a_V \cdot A$.

Cette interaction entre nucléons est l'*interaction forte*, troisième interaction fondamentale, après l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique. Elle s'exerce entre les nucléons et est fortement attractive mais de courte portée.

Les nucléons à la surface du nuclide ayant moins de voisins que ceux qui sont à l'intérieur, il faut soustraire de l'énergie de liaison en volume un terme proportionnel à la surface du nuclide, c'est-à-dire à $R^2 = (R_0 \cdot A^{1/3})^2$, soit : $\Delta B_S = - a_S \cdot A^{2/3}$.

En répartissant la charge $Z \cdot e$ du nuclide uniformément dans la sphère nucléaire de rayon R, on obtient l'énergie électrostatique $(3 / 5) \cdot (Z \cdot e)^2 / (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R)$. Ce calcul n'est pas tout à fait représentatif de l'énergie d'interaction entre les protons du nuclide car il revient à répartir la charge e de chaque proton dans toute la sphère nucléaire ; pour $Z = 1$ l'expression donne, au lieu de 0, l'énergie propre d'un proton constitué à partir de charges infiniment petites. Il convient donc de soustraire l'énergie propre de la charge de chaque proton qui a été répartie dans la sphère :

$$E_Q = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} - Z \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z \cdot (Z-1) \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{Z \cdot (Z-1) \cdot e^2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \cdot A^{1/3}}$$

énergie coulombienne positive, soit : $\Delta B_Q = -a_Q \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot A^{-1/3}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Deux corrections pouvant s'interpréter en mécanique quantique, sont ajoutées :

- une correction d'*asymétrie*, diminuant l'énergie de liaison lorsque le nuclide ne contient pas autant de neutrons que de protons, (voir exercice 26.5) : ΔB_A ;
- une correction d'*appariement* prenant en compte la parité de A et Z : ΔB_P.

L'expression $B(A,Z) = B_V + \Delta B_S + \Delta B_Q + \Delta B_A + \Delta B_P$ obtenue pour l'énergie de liaison est semi-empirique dans la mesure où elle est issue de considérations physiques raisonnables mais ne remontant pas aux principes fondamentaux ; elle se prête bien à un ajustement des constantes sur les mesures expérimentales. Ce type de démarche est souvent adopté pour les mises en forme de mesures physiques et pour les applications technologiques.

Théorème 26.11

♦ *L'énergie de liaison du nuclide (A,Z) est de la forme :*

$$B(A,Z) \approx a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_Q \cdot Z \cdot (Z - 1) \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (A - 2 \cdot Z)^2 \cdot A^{-1} + \varepsilon \cdot a_P \cdot A^{-3/4}$$

avec $\varepsilon = 0$ *pour A impair,* -1 *pour A pair et Z impair,* $+1$ *pour A et Z pairs, et par exemple le jeu suivant de valeurs trouvé expérimentalement*

(en MeV) $\quad a_V \approx 14{,}0 \ , \ a_S \approx 13{,}0 \ , \ a_Q \approx 0{,}60 \ , \ a_A \approx 19 \ , \ a_P \approx 34.$

♦ *La masse* m *du nuclide* (A,Z) *est donc donnée par :*

$$m(A,Z) \cdot c^2 \approx Z \cdot m_p \cdot c^2 + (A - Z) \cdot m_n \cdot c^2 - B(A,Z).$$

a) Nuclides les plus stables

Théorème 26.12

À nombre de nucléons A donné, le nombre de protons correspondant à la plus grande stabilité du nuclide est donné, selon le modèle de la goutte liquide par :

$$Z(A) \approx \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + a_Z \cdot A^{2/3}} \text{ où } a_Z = a_Q / (4 \cdot a_A) \approx 0{,}0079 \, .$$

L'énergie de liaison par nucléon est alors (en négligeant le terme en a_P*) :*

$$B(A) / A \approx a_V - a_A - a_S \cdot A^{-1/3} + a_A \cdot [\, 1 + a_Z \cdot A^{2/3} \,]^{-1}.$$

DÉMONSTRATION

À A donné, le nombre Z cherché est celui qui minimise l'énergie $m(A,Z) \cdot c^2$: $(\partial m / \partial Z)_A = 0$; on néglige en outre $[(m_n - m_p) \cdot c^2 + a_Q \cdot A^{-1/3}] / (4 \cdot a_A)$ devant 1. En substituant Z dans $B(A,Z)$, on obtient $B(A)$.

$Z(A)$ résulte d'un compromis entre le terme d'énergie coulombienne (minimal quand Z est petit) et le terme d'asymétrie (minimal quand $Z = A/2$).

La figure 26.1 montre les courbes $N(A) = A - Z(A)$ et $B(A)$.

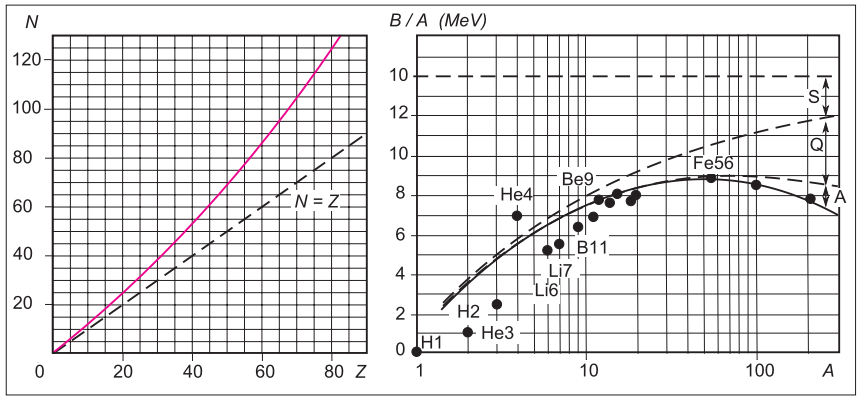


Figure 26.1 **Modèle de la goutte liquide pour les nuclides les plus stables**

La courbe de gauche (en rouge) donne le nombre N de neutrons du nuclide en fonction de son nombre Z de protons ; elle est en bon accord avec l'expérience.

La courbe de droite donne l'énergie de liaison B du nuclide en fonction de son nombre A de nucléons (échelle logarithmique), en négligeant la correction d'appariement ; les courbes en pointillés montrent les corrections de surface (S), d'énergie coulombienne (Q) et d'asymétrie (A) à l'approximation initiale $B / A = 14$ d'énergie de volume. Les valeurs expérimentales indiquées font apparaître le bon accord avec l'expérience pour $A > 10$.

26.4.2 Modèle en couches

Les valeurs de N ou Z *magiques* (§ 26.1) donnant aux nuclides des propriétés remarquables rappellent la périodicité des propriétés des atomes ; les énergies discrètes des photons émis lors des désintégrations γ indiquent que les nuclides possèdent des niveaux d'énergie discrets, comme les atomes. Ces similitudes suggèrent une structure en couches des nuclides. Il y a cependant quelques différences entre atome et nuclide. Dans l'atome, les électrons (fermions indiscernables) se répartissent sur les orbitales en respectant le principe de Pauli, alors que dans le nuclide, il y deux populations de fermions discernables entre elles : les protons et les neutrons (fermions indiscernables), qui se répartissent séparément sur les orbitales. Dans l'atome, les électrons sont soumis à l'attraction d'un centre commun (le nuclide), l'interaction entre électrons jouant un rôle secondaire, alors que dans le nuclide, les nucléons interagissent entre eux et il n'y a pas de centre.

a) Nucléons indépendants dans un potentiel nucléaire moyen

Dans l'approximation des nucléons indépendants, un potentiel sphérique $\widetilde{w}(r)$ commun représente globalement l'interaction avec les autres nucléons.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les potentiels parmi les plus simples envisagés sont le potentiel harmonique type ressort $\widetilde{w}(r) = m_0 \cdot \omega^2 \cdot r^2 / 2$ et le potentiel plus réaliste en puits sphérique non infini à bord arrondi de R.D. Woods et D.S. Saxon (1954) :

$$\widetilde{w}(r) = - \frac{U_0}{1 + \exp[(r - R)/a}.$$

Théorème 26.13

♦ *On résout l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires à un nucléon dans le potentiel sphérique moyen* $\widetilde{w}(r)$*, comme pour les électrons de l'atome.*
♦ *On prend ensuite en compte les états de spin du nucléon.*
♦ *Les nombres quantiques sont :*
• *le nombre quantique* orbital $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., \infty$ *(*s, p, d, f, g, h, ...*) :*

$$\| \vec{L} \| = \hbar \cdot \sqrt{\ell \cdot (\ell + 1)} \; ;$$

• *le nombre quantique* magnétique orbital $m_\ell = -\ell, -\ell+1, ..., +\ell$ *:* $L_z = \hbar \cdot m_\ell$ *;*
• *le nombre quantique* principal n = 1, 2, ...*:* ε *dépend de n et* ℓ *:* $\varepsilon_{n\,\ell}$ *;*
• *le nombre quantique* magnétique de spin $m_s = \pm 1/2$*, tel que* $S_z = \hbar \cdot m_s$.
♦ *D'après le principe de Pauli, chaque état de proton* (n, ℓ, m_ℓ, m_s) *est occupé par un proton au plus et chaque état de neutron* (n, ℓ, m_ℓ, m_s) *par un neutron au plus.*

Les niveaux d'énergie ne sont calculables analytiquement que pour le potentiel harmonique : $\varepsilon_k = [\, k + (3/2) \,] \cdot \hbar \cdot \omega$ où $k(n,\ell) = 0, 1, 2, ...$ Ces deux potentiels permettent de retrouver les trois premiers nombres magiques, mais pas les suivants.

b) Prise en compte de l'énergie d'interaction spin-orbite

Un fort couplage spin-orbite entre moments cinétiques orbital et de spin de chaque nucléon (couplage *J-J* évoqué au chapitre 25) permet de retrouver tous les nombres magiques connus (M.G. Mayer et O. Haxel, J.H.D. Jensen et H.E. Suess, 1949).

26.5 Désintégrations et réactions nucléaires

L'observation fortuite du noircissement fortuite d'une plaque photographique placée à côté d'un certain minerai (H. Becquerel, 1896) et la séparation chimique de l'élément (radium) responsable du phénomène (P. et M. Curie, 1898), constituent la découverte de la radioactivité. Trois types de radiations émises par les substances radioactives sont mis en évidence : α et β (E. Rutherford, 1898) puis γ (P. Villard, 1900). En étudiant en particulier leur déviation par un champ magnétique, les radiations α, β et γ sont ensuite identifiées comme constituées respectivement de noyaux d'hélium 4 (E. Rutherford, 1907), d'électrons (P. et M. Curie, H. Becquerel, 1900) et de photons. Les lois de décroissance radioactive sont énoncées (E. Rutherford et F. Soddy, 1903). Les substances radioactives fournissent les projectiles permettant de réaliser les premières réactions nucléaires artificielles.

Certains nuclides radioactifs naturels rencontrés sur Terre (^{235}U, ^{238}U, ^{232}Th, ^{40}K, ...) existent depuis l'origine de la planète ; d'autres (^{3}H, ^{14}C, ...) sont produits par l'action du rayonnement cosmique (protons) sur les nuclides de la haute atmosphère.

26.5.1 Lois de conservation

a) Inventaire des grandeurs qui se conservent

Théorème 26.14

Dans une réaction nucléaire ou une désintégration se conservent principalement :
- *la charge électrique totale ;*
- *l'énergie et la quantité de mouvement relativistes totales ;*
- *le nombre total de nucléons* (p^+,n) *:* $\Sigma_i\ A_i$ *;*
- *le nombre total de leptons électroniques* (e^-,ν) *;*

leurs antiparticules (e^+,$\overline{\nu}$) *comptant pour – 1 ;*
- *le caractère demi-entier ou entier du spin.*

b) Conservation de l'énergie et énergie de réaction

Théorème 26.15

Dans une réaction nucléaire ou une désintégration nucléaire, entre l'état initial et l'état final, l'augmentation algébrique de la somme des énergies cinétiques (qui dépendent du référentiel) est égale à la diminution algébrique de la somme des énergies de masse, dite énergie de réaction Q *(qui est indépendante du référentiel) :*

$$\sum_f E_{C\,f} - \sum_i E_{C\,i} = \sum_i (m_i \cdot c^2) - \sum_f (m_f \cdot c^2) = Q.$$

DÉMONSTRATION

Conservation de l'énergie relativiste : $\sum_i (m_i \cdot c^2 + E_{C\,i}) = \sum_f (m_f \cdot c^2 + E_{C\,f})$.

Théorème 26.16

- *Si* $Q > 0$*, la réaction,* exoénergétique*, est énergétiquement toujours possible.*
- *Si* $Q < 0$*, la réaction,* endoénergétique*, n'est énergétiquement possible que si la somme des énergies cinétiques initiales est suffisante ; le seuil est défini dans le référentiel* $\mathcal{R}^*$ *du centre de masse et correspond au cas où toutes les particules finales sont au repos :* $\sum_f E^*_{C\,f} = \sum_i E^*_{C\,i} + Q \geqslant 0 \Leftrightarrow \sum_i E^*_{C\,i} \geqslant -Q.$
- *Une désintégration n'est énergétiquement possible que si elle est exoénergétique* ($Q > 0$) *puisque la seule particule présente initiale est au repos dans* $\mathcal{R}^*$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Remarque

Même sous l'aspect de l'énergie, une réaction ou désintégration qui apparaît *énergétiquement possible* lorsque l'on compare l'état initial et l'état final, peut ne pas se produire, ou ne se produire qu'avec une petite probabilité, si une faible barrière de potentiel à la surface du nuclide empêche l'éjection de particules du noyau (cas de la fission et de la désintégration α, ...).

26.5.2 Désintégrations nucléaires

Définition

♦ Une *désintégration radioactive* est une transformation spontanée aléatoire d'un nuclide, accompagnée de l'émission d'une particule de *rayonnement radioactif* ; le nuclide *parent* se transforme en un nuclide *fils*.

♦ Les nuclides susceptibles de se désintégrer au cours de leur existence sont dits *nuclides radioactifs* ou *radioéléments*, les autres sont dits *stables*.

a) Radioactivité γ et conversion interne

Théorème 26.17

Une désintégration γ correspond à la transition du nuclide d'un état excité vers un état d'énergie plus basse, avec émission d'un photon d'énergie définie (de 10 keV *à quelques* MeV*) :*

$$^{A}_{Z}D_N{}^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}D_N + \gamma.$$

$E_D{}^*$ et E_D étant respectivement l'énergie initiale et l'énergie finale du nuclide et $\cdot\, \nu$ la fréquence du photon :

$$E_D{}^* = E_D + h{\cdot}\nu, \text{ soit } h \cdot \nu = E_{\mathrm{D}}{}^* - E_{\mathrm{D}}\,.$$

DÉMONSTRATION

Comme dans la désexcitation des atomes, l'énergie cinétique du fils est négligeable.

Le noyau parent excité résulte d'un processus antérieur (désintégration β ou α, réaction nucléaire). L'énergie du photon de désintégration γ est généralement très grande devant celle d'un photon de transition atomique ou d'un rayonnement X. La durée de vie des états excités de nuclides est généralement beaucoup plus courte que celle des états atomiques excités, et non mesurable (de l'ordre de 10^{-14} s) ; les nuclides *isomères* ont cependant une demi-vie de 10^{-10} s à plusieurs années, les règles de sélection nucléaires rendant certaines transitions peu probables.

Exemple :

$$^{223}_{88}\mathrm{Ra}^{*} \rightarrow {}^{223}_{88}\mathrm{Ra} + \gamma \text{ (où } {}^{223}_{88}\mathrm{Ra}^{*} \text{ vient de } {}^{227}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{223}_{88}\mathrm{Ra}^{*} + \alpha).$$

Dans le cas d'une conversion interne, une partie ou la totalité de l'énergie de désexcitation est absorbée par un électron de l'atome (couche K ou L) qui est éjecté ; le photon γ a alors une énergie moindre ou n'existe pas.

b) Radioactivité α

Théorème 26.18

Une désintégration α est l'émission d'un nuclide $\alpha = {}^4_2\mathrm{He}$ d'énergie définie (2 à 9 MeV) : ${}^A_Z R_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{D}_{N-2} + {}^4_2\mathrm{He}_2$; elle n'est énergétiquement possible que si $M_R \geqslant M_D + M_\alpha$, c'est-à-dire $Q = (M_R - M_D - M_\alpha)\cdot c^2 \geqslant 0$ (indifféremment en masses nucléaires ou en masses atomiques).

DÉMONSTRATION

Conservation de l'énergie relativiste (en masses nucléaires ou atomiques puisque la réaction ne fait pas intervenir d'électrons) dans le référentiel $\mathscr{R}^*$ du nuclide parent : $M_R\cdot c^2 = (M_D\cdot c^2 + E_{C\,D}) + (M_\alpha\cdot c^2 + E_{C\,\alpha})$; la désintégration n'est possible que si la somme des énergies cinétiques finale $E_{C\,D} + E_{C\,\alpha}$ est positive.

La radioactivité α s'observe le plus souvent pour des nuclides de $Z > 90$. La particule α émise a une énergie cinétique définie ; la probabilité de désintégration est d'autant plus grande (et donc la demi-vie radioactive d'autant plus courte) que l'énergie de désintégration Q est grande. Le nuclide fils est souvent produit dans divers états excités et l'émission d'α s'accompagne d'une émission de photons γ.

Exemples :

$$ {}^{212}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^4_2\mathrm{He}\ ,\ {}^{227}_{90}\mathrm{Th} \begin{cases} \rightarrow {}^{223}_{88}\mathrm{Ra} + {}^4_2\mathrm{He}\ (23\%) \\ \rightarrow {}^{223}_{88}\mathrm{Ra}^* + {}^4_2\mathrm{He}\ (77\%) \end{cases}. $$

Théorème 26.19

Dans la désintégration α d'un nuclide R au repos en un nuclide fils D, l'énergie cinétique de la particule α et de D sont approximativement :

$$E_{C\,\alpha} = \frac{Q}{1 + (m_\alpha / m_D)}\ ,\ E_{C\,D} = \frac{Q}{1 + (m_D / m_\alpha)}.$$

DÉMONSTRATION

On obtient $E_{C\alpha}$ et E_{CD} en écrivant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie relativiste du système ; la vitesse de la particule α, et à plus forte raison la vitesse de recul de D, étant très inférieures à c, on peut utiliser l'expression non relativiste de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique des particules.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\begin{cases} \vec{0} = m_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha + m_D \cdot \vec{v}_D \\ m_R \cdot c^2 + 0 = [m_\alpha \cdot c^2 + (m_\alpha \cdot v_\alpha^2/2)] + [m_D \cdot c^2 + (m_D \cdot v_D^2/2)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_\alpha \cdot v_\alpha = m_D \cdot v_D \\ (m_\alpha \cdot v_\alpha^2/2) + (m_D \cdot v_D^2/2) = Q \end{cases}$$ donne v_α et v_D puis $E_{C\alpha}$ et E_{CD}.

L'interprétation de la désintégration α est qu'une particule α initialement sur un niveau énergétique assez élevé franchit par effet tunnel la barrière de potentiel nucléaire qui la retenait au sein du noyau (figure 26.2 a) ; une particule a une certaine probabilité quantique d'être dans des régions classiquement interdite.

c) Radioactivité β

L'apparente non conservation de l'énergie observée lors des désintégrations β^- conduit à postuler l'émission simultanée d'une particule inconnue et indétectable par des moyens ordinaires (W. Pauli, 1930) : le neutrino, mis en évidence plus tard (C.L. Gowan et F. Reines, 1956). Le neutrino assure aussi la conservation du moment cinétique de spin dans la désintégration. Plus précisément, les désintégrations font intervenir le neutrino électronique ou l'antineutrino.

Axiome

Le neutrino ν et l'antineutrino $\overline{\nu}$ ont une charge nulle, une masse quasi-nulle et un nombre de spin 1/2.

Théorème 26.20

♦ *Une désintégration β^- produit l'émission d'un électron et d'un antineutrino $\overline{\nu}$:*

$$^A_Z R_N \rightarrow {}^A_{Z+1} D_{N-1} + {}^0_{-1}e^- + {}^0_0\overline{\nu} \ ;$$

elle n'est énergétiquement possible que si $m_R \geqslant m_D + m_e$ *en masses nucléaires, soit* $M_R \geqslant M_D$ *en masses atomiques.*

♦ *Une désintégration β^+ produit l'émission d'un positron et d'un neutrino ν :*

$$^A_Z R_N \rightarrow {}^A_{Z-1} D_{N+1} + {}^0_{+1}e^+ + {}^0_0\nu \ ;$$

elle n'est énergétiquement possible que si $m_R \geqslant m_D + m_e$ *en masses nucléaires, soit* $M_R \geqslant M_D + 2 \cdot m_e$ *en masses atomiques.*

DÉMONSTRATION.

Dans le référentiel où le nuclide parent est au repos (référentiel du centre de masse du système), la conservation de l'énergie relativiste s'écrit, en masses nucléaires :

$$m_R \cdot c^2 = (m_D \cdot c^2 + E_{C\,D}) + (m_e \cdot c^2 + E_{Ce}) + (0 + E_{C\,\nu}).$$

La désintégration n'est possible que si la somme des énergies cinétiques finales est positive :

$$E_{C\,D} + E_{Ce} + E_{C\,\nu} = m_R \cdot c^2 - m_D \cdot c^2 - m_e \cdot c^2 \geqslant 0 \,;$$

en masses atomiques, pour $\beta^{\pm}$:

$$m_R = M_R - Z \cdot m_e \text{ et } m_D = M_D - (Z \mp 1) \cdot m_e \Rightarrow M_R \geqslant M_D + m_e \pm m_e.$$

L'électron ou le positron émis a une énergie aléatoire comprise entre 0 et une valeur maximale généralement inférieure à 2 MeV, la conservation de l'énergie Q étant assurée par l'énergie cinétique du neutrino ; ceci correspond à la présence de plus de deux particules finales (théorème 26.9). Un électron ou un positron est émis alors qu'il n'y en a pas dans le nuclide (plusieurs arguments le montrent) ; ceci est une conséquence de l'équivalence relativiste masse-énergie.

Théorème 26.21

Une capture électronique (E.C.) correspond à la capture d'un électron interne de l'atome par le nuclide et à l'émission d'un neutrino ν :

$${}^{A}_{Z}R_N + {}^{0}_{-1}e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}D_{N+1} + {}^{0}_{0}\nu, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\text{atome } ({}^{A}_{Z}R_N) \rightarrow \text{atome } ({}^{A}_{Z-1}D_{N+1})^* + {}^{0}_{0}\nu \rightarrow \text{atome } ({}^{A}_{Z-1}D_{N+1}) + {}^{0}_{0}\nu + \gamma \,;$$

elle n'est énergétiquement possible que si, en masses atomiques :

$$M_R \geqslant M_D^* \text{ , c'est-à-dire } M_R \geqslant M_D + E_X/c^2.$$

E_X est l'énergie d'excitation de l'atome D ($\approx$ énergie de liaison sur la couche K*).*

DÉMONSTRATION

De même que l'atome parent, l'atome fils est neutre mais un état quantique de sa couche électronique interne est vide ; l'atome fils est donc dans un état excité. L'énergie d'excitation peut être considérée comme l'énergie à apporter à un électron de la couche K pour l'amener à la périphérie de l'atome, c'est-à-dire approximativement comme l'énergie de liaison sur la couche K (moins de 100 keV).

Dans le référentiel où l'atome parent est au repos, la conservation de l'énergie relativiste s'écrit, en masses atomiques :

$$M_R \cdot c^2 = (M_D^* \cdot c^2 + K_D^*) + (0 + K_\nu).$$

La désintégration n'est possible que si la somme des énergies cinétiques finales est positive :

$$K_D^* + K_\nu = M_R \cdot c^2 - M_D^* \cdot c^2 \geqslant 0 \text{ avec } M_D^* \cdot c^2 = M_D \cdot c^2 + E_X/c^2.$$

L'émission du neutrino est accompagnée de l'émission d'un ou plusieurs photons d'énergie totale E_X correspondant à la désexcitation de l'atome fils.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Comme $E_X << 2 \cdot m_e \cdot c^2 \approx 0{,}511$ MeV, la possibilité de capture électronique est observée pour la plupart des radioéléments β^+ mais aussi pour d'autres nuclides.

Exemples :

- le neutron libre a une demi-vie de 12 minutes : $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}$;
- $^{22}_{11}Na \rightarrow {}^{22}_{10}Pb + e^+ + \nu$.

26.5.3 Réactions nucléaires

a) Notations

Lors de la réalisation expérimentale d'une réaction nucléaire, on bombarde généralement une cible avec des particules projectiles ; la réaction se traduit par la transformation de nuclides de la cible et l'émission de particules que l'on détecte.

Définition

La réaction entre un nuclide d'une cible et une particule projectile est notée :

[nuclide cible] + [projectile] → [nuclide résiduel] + [particule émise]

ou encore, de façon condensée mais précise :

[nuclide cible] ([projectile] , [particule émise]) [nuclide résiduel],

Exemple : $^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}p$ ou $^{14}_{7}N + \alpha \rightarrow p + {}^{17}_{8}O$ ou $^{14}_{7}N$ (α , p) $^{17}_{8}O$.

Le projectile est en général de faible masse :

$^{1}_{0}n$, $^{1}_{1}p$, deutérium $^{2}_{1}H$, tritium $^{3}_{1}H$, α $^{4}_{4}He$, photon γ, ...

b) Types de réactions nucléaires

Définition

Processus possibles lorsqu'une particule projectile frappe un noyau cible :

- une diffusion (le projectile et la particule détectée sont identiques), qui peut être élastique (le noyau cible reste dans son état fondamental et la somme des énergies cinétiques se conserve) ou inélastique (le noyau cible passe dans un état excité, le projectile lui ayant cédé une partie de son énergie) ;
- une réaction de capture ou d'arrachement, selon que le projectile acquiert des nucléons du noyau cible ou lui en cède ;
- une réaction avec formation d'un noyau transitoire composé excité de durée de vie trop courte pour être observée.
- une réaction de spallation, avec émission de particules légères.

Exemples :

- $p + {}^{12}_{6}C \rightarrow {}^{6}_{3}Li \rightarrow 2\,p + n + {}^{4}_{2}He$;
- $n + {}^{99}_{43}Tc \rightarrow {}^{100}_{43}Tc \rightarrow {}^{100}_{44}Ru$ où $^{99}_{43}Tc$ est un produit de fission radioactif β^- avec une demi-vie de 200 000 ans, tandis que $^{100}_{43}Tc$ est radioactif β^- avec une demi-vie de 16 s, et que $^{100}_{44}Ru$ est stable.

Remarque

La transmutation en isotopes stables ou à vie courte est l'une des voies étudiées pour le devenir des déchets radioactifs à vie longue (les isotopes radioactifs à vie courte peuvent être stockés en surface en conditions de sûreté sur une durée raisonnable).

c) Fission nucléaire

Définition : fission nucléaire

Une réaction de fission d'un nuclide lourd fissile ($A > 230$) par une particule (neutron lent ou photon γ en particulier) correspond à la formation d'un nuclide composé excité qui émet quelques neutrons rapides (d'environ 2 MeV) et des photons γ et se fragmente en deux nuclides qui sont éjectés. $Q \approx 200$ MeV sont libérés.

Exemples :

♦ $n\ (0{,}04\ eV) + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U^*$
$\rightarrow [\ {}^{90}_{36}Kr + {}^{143}_{56}Ba + 3\ n\ ]$ ou $[\ {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\ n\ ]$ ou $[{}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\ n]$ etc ;

♦ $\gamma(6\ MeV) + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{235}_{92}U^* \rightarrow [\ {}^{90}_{36}Kr + {}^{142}_{56}Ba + 3\ n\ ]$ ou [autres].

La figure 26.2 (b) montre que, par son énergie de masse et/ou par son énergie cinétique, la particule incidente doit apporter assez d'énergie pour que le nuclide composé soit dans un état excité au dessus de la *barrière de fission* qui, dans l'état fondamental, empêche l'éjection de deux fragments par fission spontanée ; l'énergie d'excitation Q_e donnée au noyau composé doit être supérieure à la hauteur E_b de la barrière de fission. Ainsi, la capture d'un neutron d'énergie cinétique négligeable permet la fission du noyau composé dans le cas de ^{235}U ($Q_e \approx 6{,}5$ MeV, $E_b \approx 6$ MeV), mais pas dans le cas de ^{238}U ($Q_e \approx 6$ MeV, $E_b \approx 7$ MeV).

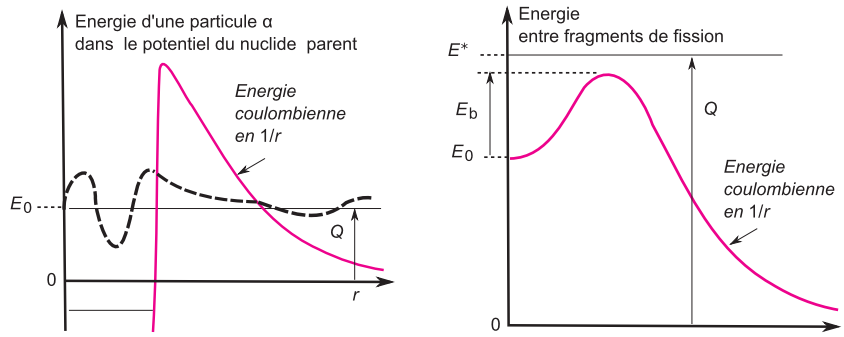


Figure 26.2 **Désintégration α. Fission nucléaire.**

À gauche : énergie d'une particule α dans le potentiel du nuclide parent. La radioactivité α se produit si la particule α est sur un niveau d'énergie $E_0 > 0$ et si la barrière coulombienne est assez étroite pour être franchie par effet tunnel. Q est l'énergie libérée et la courbe en pointillés donne l'allure de la fonction d'onde de la particule α.

À droite : énergie du système des deux fragments en fonction de la distance entre eux lors de la fission d'un nuclide. L'effet tunnel étant ici négligeable, les fragments ne peuvent se séparer que si le nuclide initialement dans son état fondamental E_0 a été excité par une énergie supérieure à la hauteur E_b de la barrière. Q est l'énergie libérée.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La fragmentation du nuclide composé pouvant se faire de diverses façons, l'irradiation d'une cible fissile donne une distribution de masse des fragments de fission ; les fragments instables subissent à leur tour des désintégrations β^- et éventuellement γ et n, en chaîne avec des demi-vies de quelques secondes à 10^7 ans.

Exemple :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U}^* \rightarrow \begin{cases} {}^{95}_{39}\mathrm{Sr} \xrightarrow{10\ \mathrm{min}} {}^{95}_{40}\mathrm{Zr} \xrightarrow{63\ \mathrm{j}} {}^{95}_{41}\mathrm{Nb} \xrightarrow{35\ \mathrm{j}} {}^{95}_{42}\mathrm{Mo} \\ {}^{139}_{53}\mathrm{Xe} \xrightarrow{2{,}7\ \mathrm{s}} {}^{139}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{41\ \mathrm{s}} {}^{139}_{55}\mathrm{Ce} \xrightarrow{9{,}5\ \mathrm{min}} {}^{139}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{10\ \mathrm{min}} {}^{139}_{57}\mathrm{La} \\ 2\ \mathrm{n} \end{cases}$$

Les neutrons de fission peuvent induire de nouvelles fissions en chaîne ; dans un réacteur les réactions sont maintenues à un taux constant, dans une bombe le taux diverge et conduit à l'explosion. Difficilement capturés par les nuclides fissiles, les neutrons rapides ne permettent pas d'entretenir des réactions en chaîne dans l'uranium naturel (0,7 % ^{235}U et 99,3 % ^{238}U) ou faiblement enrichi en ^{235}U (5 % ^{235}U) ; on ralentit donc les neutrons rapides par un modérateur (eau, graphite). Les réacteurs surgénérateurs à neutrons rapides (Super-Phénix, 1986) utilisent du plutonium ^{239}Pu (nuclide artificiel fissile) et de l'uranium naturel ; la capture de neutrons rapides par l'uranium ^{238}U (non fissile) génère plus de plutonium ^{239}Pu qu'il n'en est consommé, ce qui multiplie le potentiel énergétique de l'uranium naturel par 75 :

$$\mathrm{n\ (rapide)} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu\ (fissile)}.$$

d) Fusion nucléaire

Définition

Une réaction de fusion de deux nucléons ou nuclides légers ($A < 20$) correspond à la formation d'un nuclide plus lourd avec libération d'énergie : $Q \approx 2$ à 20 MeV.

Exemples :

- $^1_1\mathrm{H} + \mathrm{n} \rightarrow {}^2_1\mathrm{H}\ (Q = 2{,}23\ \mathrm{MeV})$,
- $^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \begin{cases} \rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \mathrm{n}\ (50\%)\ (Q = 3{,}27\ \mathrm{MeV}) \\ \rightarrow {}^3_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H}\ (50\%)\ (Q = 4{,}03\ \mathrm{MeV}) \end{cases}$
- $^3_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + \mathrm{n}\ (Q = 17{,}6\ \mathrm{MeV})$.

Exercice d'application 26.5

Si deux nuclides de deutérium doivent s'approcher à une distance $d \approx 10$ fm pour fusionner, calculer la hauteur U de la barrière coulombienne à franchir et estimer la température T requise.

SOLUTION. $U = \mathrm{e}^2 / (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot d) \approx 2{,}3 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} = 0{,}14\ \mathrm{MeV}$. Chaque nuclide ayant l'énergie $(3/2) \cdot \mathrm{k_B} \cdot T$ à grande distance, la conservation de l'énergie s'écrit : $2 \cdot (3/2) \cdot \mathrm{k_B} \cdot T + 0 = 0 + U \Rightarrow T = [\,1 / (4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)] \cdot [\mathrm{e}^2 / (3 \cdot \mathrm{k_B} \cdot d)] \approx 5{,}6 \cdot 10^8\ \mathrm{K}$.

Des réactions de fusion se produisent dans le soleil et dans les bombes thermonucléaires. Un réacteur de fusion pourrait utiliser du deutérium ^{2}H (abondant dans l'eau de mer) et du tritium ^{3}H (à produire par réactions nucléaires avec du lithium).

26.6 Aspects probabilistes et cinétiques

26.6.1 Section efficace de réaction

Une particule projectile envoyée sur une cible n'a qu'une certaine probabilité d'interagir avec l'un des nuclides de la cible, non seulement parce que les nuclides sont très petits par rapport aux atomes de la cible, mais aussi parce que les diffusions et réactions nucléaires sont de nature quantique et donc intrinsèquement probabilistes.

Définition

♦ La *section efficace* σ d'une réaction nucléaire (ou d'une diffusion nucléaire) est l'aire $\pi \cdot R_\sigma{}^2$ de la section d'une sphère fictive de rayon R_σ représentant le noyau cible et permettant d'exprimer la probabilité d'occurrence de cette réaction, comme si la particule projectile était ponctuelle : la particule projectile n'interagit avec le noyau cible que si elle arrive sur la cible avec une trajectoire rectiligne qui intercepte la section d'aire σ.

♦ Si une cible mince d'aire S, contenant n_S nuclides cibles par unité de surface, est irradiée par un faisceau de particules projectiles, la probabilité pour qu'une quelconque des particules projectiles produise la réaction est : $(n_S \cdot S) \cdot \sigma \,/\, S = n_S \cdot \sigma$.

♦ En physique nucléaire, l'unité usuelle de section efficace est le barn :

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2.$$

La section efficace de collision de deux sphères dures de type boules de billard, l'une de rayon R_1 et l'autre de rayon R_2, est $\sigma = \pi \cdot (R_1 + R_2)^2$ car le choc ne se produit que si le paramètre d'impact, distance entre la trajectoire rectiligne du centre de la sphère projectile et le centre de la sphère cible, est inférieur à $R_1{}^2 + R_2$.

La section efficace d'interaction entre un noyau de rayon R et un neutron de longueur de L. de Broglie réduite $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda / (2 \cdot \pi)$ est $\sigma = \pi \cdot (R + \lambda\!\!\!^{-})^2$.

Un nuclide peut présenter une section efficace très inférieure à sa section réelle (la particule incidente a alors une grande probabilité de traverser le nuclide sans interagir avec lui) ou une section efficace très supérieure à sa section réelle (la particule incidente interagit alors avec le nuclide même si elle passe loin de lui). Ainsi, avec des neutrons thermiques, la section efficace pour la réaction $^{11}_{5}B\ (n\ ,\ \alpha)^{8}_{3}Li$ est de 0,05 b, alors que pour la réaction $^{10}_{5}B\ (n\ ,\ \alpha)^{7}_{3}Li$ elle est de 4 000 b ; par ailleurs, le rayon R du noyau de bore étant d'environ 3 fm, $\pi \cdot R^2 \approx 0{,}3$ b.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

26.6.2 Cinétique de désintégration

Dans cette partie, λ désigne une constante de désintégration

a) Constantes de la cinétique de désintégration et notations

Définition

La cinétique d'une désintégration radioactive peut être caractérisée au choix par :

♦ la constante radioactive λ : probabilité de désintégration d'un noyau par unité de temps (exprimée en s^{-1} en SI) ;

♦ la demi-vie (ou période) T : durée au bout de laquelle la moitié (en moyenne) des nuclides présents à l'instant initial ne se sont pas désintégrés ;

♦ la constante de temps de désintégration ou vie moyenne τ : durée au bout de laquelle la proportion 1/e (en moyenne) des nuclides présents à l'instant initial ne se sont pas désintégrés (cette constante est ici notée τ par analogie avec la constante de temps de décharge d'un condensateur).

Définition

L'activité d'un échantillon est le nombre moyen de désintégrations par unité de temps dans l'échantillon, exprimée en becquerels (Bq) dans le système SI ; l'unité historique était le curie ($1\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq) ;

b) Loi de désintégration et relations entre les constantes

Théorème 26.22

λ étant la probabilité de désintégration d'un nuclide D par unité de temps :

• *un nuclide présent à l'instant t a la probabilité* $\lambda \cdot \mathrm{d}t$ *de se désintégrer entre t et* $t + \mathrm{d}t$ *;*

• *si $N(t)$ nuclides sont présents à l'instant t, la variation du nombre moyen de nuclides par désintégration entre t et* $t + \mathrm{d}t$ *est*

$$\mathrm{d}N = -N \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}t \ ;$$

• *si, simultanément à leur désintégration, des nuclides D sont produits par une source (désintégration en amont, irradiation d'une cible) à raison de Φ nuclides par unité de temps :*

$$\mathrm{d}N = -N \cdot \lambda \cdot \mathrm{d}t + \Phi \cdot \mathrm{d}t \ ;$$

• *si le nuclide se désintègre par plusieurs processus simultanés de constante respective* λ_a, λ_b, ... *:*

$$\mathrm{d}N = -N \cdot \lambda_a \cdot \mathrm{d}t - N \cdot \lambda_b \cdot \mathrm{d}t - \ldots$$

DÉMONSTRATION

$\lambda \cdot dt$ est la probabilité de désintégration d'un nuclide pendant la durée dt, c'est-à-dire la proportion du nombre moyen de nuclides présents à l'instant t qui se désintègrent entre t et $t + dt$: $\lambda \cdot dt = [\, N(t) - N(t + dt)\,] / N(t) = [\, - dN\,] / N$.

c) Désintégration simple et relation entre λ, T et vie moyenne

Théorème 26.23

$D \xrightarrow[\lambda]{} D'$

♦ *Évolution du nombre* N *de nuclides radioactifs* D *d'un échantillon :*

$$dN = -N \cdot \lambda \cdot dt \Rightarrow N(t) = N(0) \cdot \exp(-\lambda \cdot t).$$

♦ $N(T) = N(0) / 2 \Rightarrow T = \ln(2) / \lambda$; $N(\tau) = N(0) / e \Rightarrow \tau = 1 / \lambda$

♦ *Évolution de l'activité :* $a(t) = \lambda \cdot N(t) = \lambda \cdot a(0) \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$

♦ *Si D' est stable, le nombre de nuclides fils produits est* $N'(t) = N(0) - N(t)$.

DÉMONSTRATION

♦ $\displaystyle\int \frac{dN}{N} = -\lambda \cdot \int dt \Rightarrow \ln N = -\lambda \cdot t + C \Rightarrow N(t) = C \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \Rightarrow N(0) = C$;

♦ $N(0) / 2 = N(0) \cdot \exp(-\lambda \cdot T) \Rightarrow \exp(\lambda \cdot T) = 2$; de même : $\exp(\lambda \cdot \tau) = e = \exp(1)$;

♦ $a = [\, N(t) - N(t + dt)\,] / dt = [\, - dN\,] / dt = N \cdot \lambda$;

♦ N' est égal au nombre de nuclides D qui se sont désintégrés.

♦ Les nuclides D qui ont une durée de vie comprise entre t et $t + dt$ sont ceux qui se désintègrent entre t et $t + dt$; leur nombre est $N(t) - N(t + dt) = - dN = N \cdot \lambda \cdot dt$ et

$$\tau = \frac{1}{N(0)} \cdot \sum_t [(N \cdot \lambda \cdot dt) \cdot t] = \frac{1}{N(0)} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot N \cdot t \cdot dt = \lambda \cdot \int_0^\infty t \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \cdot dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Voir site web

d) Désintégrations en chaîne

Théorème 26.24

$$D_1 \xrightarrow[\lambda 1]{} D_2 \xrightarrow[\lambda 2]{} D_3 \ldots D_k \xrightarrow[\lambda k]{} D' \text{ stable} \begin{cases} dN_1 = -N_1 \cdot \lambda_1 \cdot dt \\ dN_2 = -N_2 \cdot \lambda_2 \cdot dt + N_1 \cdot \lambda_1 \cdot dt \\ dN_3 = -N_3 \cdot \lambda_3 \cdot dt + N_2 \cdot \lambda_2 \cdot dt \\ \ldots \\ dN' = N_k \cdot \lambda_k \cdot dt \end{cases}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

26.7 PHYSIQUE DES PARTICULES

Ayant mis en évidence des particules inconnues auparavant et ayant conduit à développer des accélérateurs fournissant des faisceaux de particules d'énergie croissante, la physique nucléaire s'est orientée (à partir des années 1950) vers la *physique des particules élémentaires et des interactions* ou *physique des hautes énergies* ; de nombreuses particules, élémentaires ou pas, sont apparues. Au début des années 1960, une profusion de particules soumises à l'interaction forte (*hadrons*) est mise en évidence dans les chocs de haute énergie.

À presque chaque particule correspond une antiparticule distincte ayant mêmes caractéristiques mécaniques (masse, moment cinétique de spin) mais une valeur opposée des autres caractéristiques (charge, moment magnétique de spin, étrangeté, ...) ; le photon est sa propre antiparticule.

On observe de nombreuses réactions comme :

- des désintégrations : $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \overline{\nu}_\mu$, $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$, $\pi^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e$;
- des matérialisations : $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^- + e^+$;
- des annihilations : $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$;

Axiome

Plus généralement que dans les réactions nucléaires, dans une réaction ou une désintégration en physique des particules, se conservent :

♦ le nombre de baryons plutôt que de nucléons (p^+,n,Λ ,Σ^+,Σ^0,Σ^-,Ξ^0,Ξ^-,Ω^-) , leurs antiparticules ($\overline{p}^-$,$\overline{n}$,$\overline{\Lambda}^0$,$\overline{\Sigma}^-$,$\overline{\Sigma}^0$,$\overline{\Sigma}^+$,$\overline{\Xi}^0$,$\overline{\Xi}^+$,Ω^+) comptant pour – 1,

♦ le nombre de leptons électroniques (e^-,ν), mais aussi le nombre de leptons muoniques (μ^-,ν_μ), leurs antiparticules (e^+ et $\overline{\nu}$, μ^+ et $\overline{\nu}_\mu$) comptant pour – 1.

La *Théorie quantique des champs* (P.M. Dirac, 1927 ; S. Tomonaga, J. Schwinger, R. Feynman, 1948), théorie quantique relativiste, conduit à décrire les interactions comme un échange de *particules virtuelles*. La notion de *quarks* (M. Gell-Mann, 1964) permet de considérer les hadrons comme formés de deux quarks (cas des *baryons* comme le proton, le neutron, l'Ω^-, ...) ou de trois quarks (cas des *mésons* comme le pion π^-...). La *Théorie électrofaible* (A. Salam et S. Weinberg, 1967) unifie l'*Electrodynamique quantique* et l'interaction faible (responsable des désintégrations β). La *Chromodynamique quantique QCD* (D. Gross, D. Politzek et F. Wilczek, 1973) décrit l'interaction forte au niveau des quarks et des *gluons*.

Le *Modèle standard* écrit les particules élémentaires et des interactions fondamentales (hors gravitation) sur la base de la *Chromodynamique quantique QCD* et de la *Théorie électrofaible*. Il comporte (figure 26.3) :

- 12 fermions (6 quarks et 6 leptons) et les 12 antiparticules correspondantes ;
- 3 interactions (avec leurs particules-vecteurs associées) : interaction forte (avec les 8 gluons), interaction électromagnétique (avec le photon), l'interaction faible (avec les bosons $W^\pm$ et Z^0).

Les quarks ont une charge 2 · e / 3 et – e / 3 ! Ils ne peuvent être séparés et exister à l'état libre ; en effet, l'intensité de l'interaction forte attractive entre un quark et les autres quarks d'un hadron augmente avec la distance (comme l'interaction par un ressort), jusqu'à un point ou l'énergie de liaison se matérialise en une paire quark-antiquark (méson). On note que la masse du proton est très supérieure à la somme des masses de ses trois quarks (il n'y a pas défaut de masse mais excès de masse !) ; il est maintenant démontré par un calcul numérique que l'excès de masse des hadrons est dû au mouvement des quarks et des gluons et à leurs interactions, en accord avec la Chromodynamique quantique (S. Dürr *et al*, 2008).

		q	→masse croissante (MeV/c²)→		
			1ère famille	**2ème famille**	**3ème famille**
Fermions Nombre de spin $s = 1/2$	**Quarks** *Groupés en hadrons : mésons (paire quark antiquark) ou baryons (triplet de quarks)* p = uud n = udd	$\frac{2}{3}$e	**U (up)**	**c (charm)**	**t (top)**
			Masse $3 \pm 1{,}5$ [1964] {1968}	Masse 1200 ± 200 {1975}	Masse $174\,300 \pm 5\,100$ [1994] {1995}
			Inter. : é-m, forte, faible (et gravitationnelle)		
		$-\frac{1}{3}$e	**d (down)**	**s (strange)**	**b (bottom)**
			Masse $6{,}75 \pm 1{,}75$ [1964] {1968}	Masse $117{,}5 \pm 1{,}5$ [1964] {oui}	Masse $4\,250 \pm 250$ {1978}
			Inter. : é-m, forte, faible (et gravitationnelle)		
	Leptons *Non sensibles à l'interaction forte*	– e	**électron e^-**	**muon μ^-**	**tauon τ^-**
			Masse 0,511 {~1900}	Masse 105,658 {1936}	Masse 1 777 {1975}
			Interactions : é-m, faible (et gravitationnelle)		
		0	**neutrino ν_e**	**neutrino ν_μ**	**neutrino ν_τ**
			Masse quasi nulle ($< 2.10^{-6}$) [1932]{1956}	Masse quasi nulle {1962}	Masse quasi nulle {2001}
			Interactions : é-m, faible (et gravitationnelle)		

Bosons vecteurs Particules transmettant les interactions Nombre de spin $s = 1$	**Photon γ**	**8 gluons**	**$W^\pm$, Z_0**	graviton
	[1905] {1923} Vecteur de l'interaction é-m Masse 0	{1979} Vecteurs de l'interaction forte Masse 0	Vecteurs de l'interaction faible Responsables des désintégrations $\beta^\pm$ {1983-1984} $W^\pm$ [~1959] Masse 80 480 Z_0 [1967] Masse 91 180	**?** Spin $s = 2$

Boson de Higgs	Responsable de la "brisure de symétrie électrofaible" [1963] {2008 ?}

Figure 26.3 Particules élémentaires du Modèle standard

Chaque particule x de ce tableau a son antiparticule $\bar{x}$ (même masse, charge opposée !)

Dates approximatives : [prévision] {mise en évidence expérimentale}

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

À retenir

La masse d'un nuclide est significativement inférieure à la somme des masses de ses constituants (Z protons, et A–Z neutrons), contrairement à la masse d'un atome.

La cinématique relativiste est cohérente avec l'invariance de la vitesse de la lumière dans un changement de référentiel galiléen. La dynamique relativiste donne une nouvelle expression de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, mais surtout, elle ajoute un terme d'énergie de masse dans l'expression de l'énergie.

Les réactions nucléaires et entre particules permettent la transformation de masse en énergie cinétique et inversement.

La contribution principale à la cohésion des nuclides est l'interaction forte entre les nucléons. Le nuclide peut être décrit par le modèle semi-empirique de la goutte liquide ou par un modèle en couches proche des modèles atomiques.

Les désintégrations et réactions nucléaires ont un caractère probabiliste décrit respectivement par la demi-vie radioactive et par la section efficace de réaction.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 628.

26.1 Distance d'approche dans l'expérience de Rutherford

Calculer quelle distance minimale D du centre du nuclide d'or ($Z = 79$) atteint une particule α d'énergie cinétique $E_C \approx 78{,}6$ MeV dans une collision frontale.

26.2 Masse volumique de la matière nucléaire

Comparer la masse volumique d'une étoile à neutrons ($\rho^* \sim 5 \cdot 10^{14}$ g · cm^{-3}) à celle de la matière nucléaire (ρ).

26.3 Résonance magnétique nucléaire

Calculer la fréquence du photon émis lors de la transition entre niveaux d'énergie de spin du noyau d'hydrogène dans un champ de 1 T (application : imagerie médicale IRM).

26.4 Protonthérapie

La protonthérapie est un traitement de tumeurs cancéreuses par faisceau de protons d'environ 60 à 300 MeV ; cette technique est coûteuse en l'état actuel de la technologie (accélération des protons par cyclotron) mais elle présente des avantages par rapport aux rayons X (dépôt de l'énergie en fin de trajet sans abîmer les tissus traversés, focalisation au millimètre près) et pourrait devenir plus accessible avec la disponibilité de nouveaux accélérateurs miniatures.

Calculer la vitesse v d'un proton d'énergie cinétique $T = 312$ MeV.

26.5 Électron de 1 GeV

Calculer la longueur d'onde de L. de Broglie d'un électron hyper-relativiste (vitesse proche de c) d'énergie $E = 1$ GeV.

26.6 Désintégrations β du lanthane 137

Quels types de désintégrations β de $^{137}_{57}$La sont-elles énergétiquement possibles, connaissant les masses atomiques concernées et l'énergie de liaison de la couche K de l'atome $^{137}_{56}$Ba(37,4 keV) ?

26.7 Fission spontanée du molybdène 98

La fission spontanée de $^{98}_{42}$Mo en deux nuclides de scandium $^{49}_{21}$Sc est-elle énergétiquement possible ?

26.8 Réaction de fission

$$^{235}_{92}\text{U} + \text{n (0,04 eV)} \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2\,\text{n}$$

Pour cette réaction de fission, calculer l'énergie d'excitation Q_e du noyau composé et l'énergie cinétique Q totale produite.

26.9 Énergie totale de fission

Une réaction de fission induite par la capture d'un neutron thermique de 0,04 eV par $^{235}_{92}$U produit des neutrons et les nuclides $^{90}_{36}$Kr et $^{143}_{56}$Ba qui, par désintégrations β^- successives, se transforment respectivement en $^{90}_{40}$Zr et $^{143}_{60}$Nd qui sont stables.

Écrire le bilan de cette fission comme une réaction globale et calculer l'énergie cinétique totale produite.

26.10 Pollution par le strontium 90

L'isotope artificiel $^{90}_{39}$Sr est un produit de fission radioactif β^- et le calcium est le principal constituant des os.

a) Comparer la structure électroniques de l'atome de strontium et celle de l'atome de calcium ($Z = 10$) ; commenter.

b) La demi-vie du strontium 90 étant $T \approx 28{,}5$ ans et l'activité volumique permanente admissible de l'eau étant $a = 37$ kBq, calculer la concentration volumique en masse admissible dans l'eau.

26.11 Âge d'un minerai

L'uranium 238 $^{238}_{92}$Use transforme par une chaîne de désintégrations α et β^- en plomb 206 $^{206}_{82}$Pb stable.

a) La demi-vie de ^{238}U est $T \approx 4{,}5 \cdot 10^9$ ans et celle des nuclides intermédiaires est négligeable. Calculer l'âge θ du minerai sachant que le rapport du nombre de nuclides ^{206}Pb au nombre de nuclides ^{238}U est $\varepsilon \approx 0{,}75$.

b) Calculer le nombre de particules α et β émises par un nuclide ^{238}U qui se transforme en un nuclide ^{206}Pb.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

26.12 Tomographie par émission de positrons

On injecte dans l'organisme des isotopes radioactifs β^+ se fixant sur la tumeur recherchée ; dès qu'un positron rencontre un électron il y a annihilation avec émission de deux rayonnements γ opposés et que la matière ralentit peu. Calculer l'énergie des particules γ (l'énergie cinétique de l'électron et du positron sont négligeables). Le patient étant entouré d'une couronne de détecteurs, calculer l'abscisse x du noyau radioactif sur l'axe D_1D_2 défini par deux détecteurs diamétralement opposés, en fonction des temps t_1 et t_2 d'arrivée des γ sur les deux détecteurs ($t_1 - t_2 \approx 1 \pm 0{,}35$ ns).

LA MATIÈRE

27

PRÉALABLES

- Notions de chimie élémentaire
- Notions de physique atomique (chapitre 25)

MOTS CLÉS

- Liaison chimique
- Orbitale moléculaire
- Bragg (loi de)
- Hybridation
- Cristallographie

OBJECTIFS

- Revoir les principales propriétés des états de la matière.
- Comprendre la nature des liaisons chimiques et intermoléculaires.
- Apprendre la notion d'orbitale moléculaire.
- Savoir lire et écrire la configuration des molécules diatomiques homopolaires.
- Acquérir des notions de cristallographie.
- Connaître la loi de diffraction de Bragg.

27.1 ÉTATS ET STRUCTURE DE LA MATIÈRE

27.1.1 États de la matière

Selon la pression p et la température T, une espèce chimique (formée d'atomes, ions ou molécules) se présente sous plusieurs *états* : *solide* (peu déformable, peu compressible), *liquide* (déformable et prenant la forme de son contenant, peu compressible) ou *gaz* (occupant tout l'espace de son contenant, compressible, de faible densité), états auxquels on ajoute parfois le *plasma* (gaz ionisé constitué d'ions, de particules neutres et d'électrons). Il y a coexistence des *phases* solide et liquide sur la *courbe de fusion* pression-température, des phases liquide et gazeuse sur la *courbe de vaporisation* pression-température et des trois phases au *point triple* pression-température ; au voisinage du *point critique* pression-température-volume, les phases liquide et gazeuse ne peuvent plus être distinguées. Plusieurs phases solides distinctes peuvent exister.

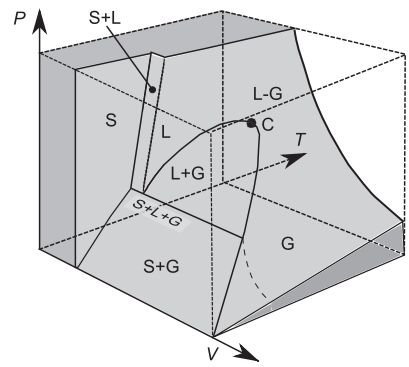


Figure 27.1 **Diagramme de phases pression-volume-température**
Sur cette surface d'états, on distingue les phases solide (S), liquide (L) et gaz (G), liquide-gaz au delà du point critique (L-G), ainsi que les régions de coexistence (S+L, S+G, L+G, ligne triple (S+L+G) et point critique (C).

Certains matériaux présentent des états particuliers : *solide amorphe* (dont la fusion s'étale sur une large plage de température, avec un ramollissement progressif), état *mésomorphe* (*cristal liquide*).

27.1.2 Structure de la matière

Les éléments chimiques n'existent sous la forme d'atomes ou d'ions séparés que dans quelques cas comme les gaz rares atomiques (hélium, néon, argon, krypton, xénon...) et les vapeurs métalliques mises en œuvre dans les tubes à décharge (mercure, sodium...) ; depuis les années 1980, on sait aussi maintenir un ion unique sous vide dans un piège pendant quelques secondes à quelques jours en laboratoire pour des expériences.

L'observation d'échantillons minéraux naturels apparaissant à l'œil nu ou sous microscope sous formes d'un cristal aux faces planes bien définies, laisse penser que ces minéraux sont constitués d'un arrangement périodique d'entités élémentaires (R.J. Haüy, vers 1800). La diffraction des rayons X (M. von Laue, W.H et W.L. Bragg, 1914), des protons ou des neutrons, confirme que ces minéraux, et plus généralement les *solides cristallins*, ont une structure spatiale ordonnée composée de la répétition par translation d'unités identiques : un ou plusieurs atomes, ions ou molécules (y compris des molécules complexes comme des protéines).

Un *solide amorphe* a une structure désordonnée, avec seulement un certain ordre à courte distance.

Dans un *liquide*, les atomes, ions ou molécules peuvent « glisser » les uns par rapport aux autres. La structure est désordonnée, avec un certain ordre à courte distance.

Un état *mésomorphe* correspond à un *cristal liquide* formé de macromolécules allongées pouvant se déplacer mais gardant toutes la même direction ; de tels états sont observés dans de nombreuses substances biologiques comme des dérivés du cholestérol (F. Reinitzer, 1888), ainsi que dans des substances synthétiques comme le MBBA (1961). Les afficheurs à cristal liquide utilisent les propriétés optiques anisotropes du

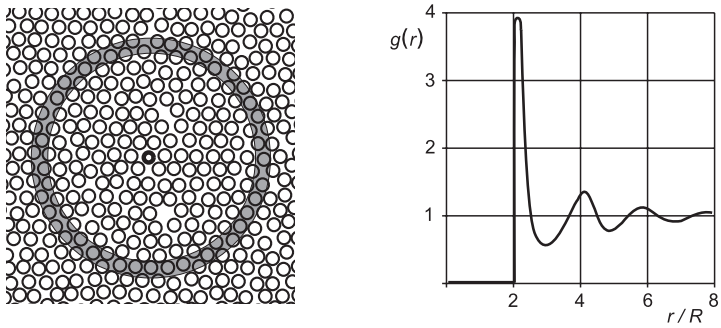


Figure 27.2 **Liquide**

À gauche : position des atomes (simulation numérique des sphères dures de rayon R)

À droite : répartition des atomes autour d'un atome quelconque ($g(r) = n(r) / n_0$ où n_0 est la densité moyenne d'atomes, calculée sur tout le volume, et $n(r)$ la densité à la distance r, calculée sur le volume d'une pellicule sphérique).

matériau et la possibilité de modifier l'orientation des macromolécules en appliquant un champ électrique.

Dans un *gaz*, il n'y a aucun ordre.

27.2 LIAISON CHIMIQUE ET MOLÉCULES

27.2.1 Liaison chimique

La cohésion des molécules est assurée par des liaisons chimiques entre ses atomes (J.J. Berzélius, 1819). La notion de valence émerge des travaux de E.F. Frankland sur la chimie organique (1852), de F.A. Kékulé sur le carbone (1858, 1866). La notion de liaison multiple apparaît avec la découverte de la double liaison du carbone dans l'éthylène (A. Crum Brown, 1864)

a) Types de liaison

Les propriétés chimiques d'un atome et sa capacité à former des liaisons chimiques avec d'autres atomes dépendent de la structure de sa couche électronique périphérique, la *couche de valence* des *électrons de valence*.

La chimie élémentaire distingue trois types principaux de liaison entre atomes :

- la *liaison ionique*, dans laquelle l'un des atomes a cédé un électron à l'autre atome pour former deux ions qui s'attirent par force électrostatique,
- la *liaison covalente*, dans laquelle chacun des deux atomes apporte un électron mis en commun de façon plus ou moins égale,
- la liaison *de coordination* ou *dative*, qui est une liaison covalente dans laquelle un électron de valence de l'un des atomes est préalablement passé dans un état de valence inoccupé de l'autre atome.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

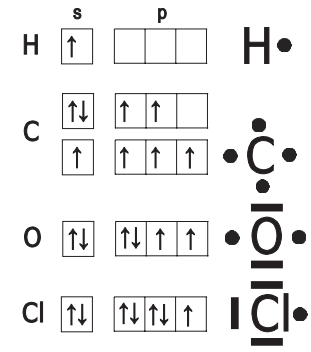
L'*énergie de liaison Q* est l'énergie qu'il faut apporter pour rompre la liaison ; *Q* est donc l'opposé de l'énergie du système de deux atomes à l'équilibre (en prenant l'énergie nulle à l'infini). L'énergie de liaison ionique (400 à 1 000 kJ · mol^{-1}) est supérieure à l'énergie de liaison covalente (100 à 1 000 kJ · mol^{-1}).

b) Règle de l'octet

La chimie élémentaire associe la tendance des atomes à former une liaison par la tendance pour chacun des atomes à compléter l'occupation de sa couche externe, toujours de type s-p, pour lui donner la configuration s^2p^6 à 8 électrons de celle d'un élément de gaz rare.

c) Représentation de Lewis

La représentation de G.N. Lewis (1916) donne de l'atome (ou de l'ion) une écriture qui met en évidence les électrons de valence (couche externe) et qui est commode pour décrire les molécules à liaisons covalentes : le noyau et les autres électrons sont représentés par le symbole de l'élément, chaque doublet d'électrons de la couche externe est symbolisé par un tiret et un électron célibataire est symbolisé par un point. Cette écriture a été confirmée par la physique atomique, avec en particulier la notion d'hybridation des orbitales.



Dans une molécule, la configuration électronique périphérique de l'atome peut être modifiée par excitation d'électrons (y compris vers des états d) ou hybridation des orbitales. C'est ce que l'on observe par exemple dans le cas important du carbone.

La valence normale d'un atome est le nombre d'électrons célibataires de sa couche de valence, c'est-à-dire le nombre de liaisons simples de covalence que peut former l'atome.

Exemple : Cl à l'état fondamental a la configuration $[Ne]3s^23p^5$et la valence 1.

d) Électronégativité d'un atome

Définition

Plus un atome est électronégatif plus il a tendance à attirer à lui un électron.

Tableau 27.1 **Électronégativité de Pauling des premiers éléments**

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	H	He	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne	Na
x	2,2		1,0	2,0	2,0	2,5	3,0	3,4	4,0		0,9

Quand *Z* augmente, l'électronégativité croît dans une période de la classification périodique et décroît dans une colonne.

e) Liaison ionique

La liaison ionique intervient dans la plupart des molécules inorganiques. La liaison ionique est impossible entre deux atomes identiques.

KCl est un exemple de molécule à liaison organique. L'énergie du système par rapport aux deux atomes éloignés est la somme :

énergie d'ionisation de K + affinité électronique de Cl + énergie coulombienne attractive entre les ions K^+ et Cl^- + énergie répulsive de Pauli s'opposant à l'interpénétration des orbitales électroniques.

La distance entre les deux ions est celle pour laquelle l'énergie du système est minimale ; l'énergie coulombienne est prépondérante dans l'énergie à l'équilibre.

f) Liaison covalente

Le rayon covalent est définit comme la moitié de la distance entre deux atomes dans une liaison covalente (au sein d'une molécule ou d'un cristal). La distance entre deux atomes différents d'une molécule est voisine de la somme des rayons covalents des deux atomes, au moins s'il n'y a pas un trop grand écart d'électronégativité entre les atomes.

La liaison covalente intervient dans les molécules organiques et dans certaines molécules inorganiques

g) Caractère partiellement ionique d'une liaison

Une liaison est rarement purement ionique. Le degré de caractère ionique d'une liaison peut être évalué en comparant le moment dipolaire expérimental p_{exp} au moment dipolaire calculé à partir de la longueur d de la liaison en supposant la liaison totalement ionique ($p_{100\,\%} = e \cdot d$). Les moments dipolaires sont souvent exprimés en debyes (1 D $\approx$ 3,34 C · m). Pour HCl :

$$p_{exp} / p_{100\%} \approx (1{,}03\ \text{D}) / (6{,}096\ \text{D}) \approx 0{,}17 = 17\ \%.$$

Le vecteur moment dipolaire $\vec{p}$ a même direction et sens que le vecteur allant de l'atome le plus électronégatif à l'atome le moins électronégatif.

Si les électronégativités des deux atomes sont proches, la liaison est covalente ; si elles sont très différentes, la liaison est ionique.

27.2.2 Liaison chimique covalente en mécanique quantique

Une molécule est formée d'atomes liés et disposés l'un par rapport à l'autre selon une géométrie définie, de telle sorte que l'énergie de la molécule est inférieure à la somme des énergies des atomes isolés et minimale. La molécule est constituée d'électrons atomiques plus ou moins mis en commun et de noyaux ; les contributions à l'énergie sont les énergies potentielles (électrons-noyaux, électrons-électrons, noyaux-noyaux) et les énergies cinétiques.

L'approximation de Born-Oppenheimer (1927) consiste à chercher la distribution des électrons et l'énergie du système pour chaque position fixée des noyaux, puis à déterminer la position des noyaux qui minimise l'énergie. En raison de leur masse faible

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

par rapport à celle des noyaux, les électrons se redistribuent en effet instantanément lors d'un déplacement des noyaux.

27.2.3 Molécules diatomiques

a) Moment cinétique orbital dans une molécule diatomique

Dans une molécule diatomique, la force agissant sur l'électron par les noyaux n'étant plus *centrale*, le moment cinétique orbital par rapport à O, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ (où $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement de l'électron), n'est plus une constante du mouvement en mécanique classique ; cependant, la force passant par l'axe de la molécule, pris pour axe des z, le moment cinétique par rapport à cet axe, qui est la composante $\vec{L}_z$ de $\vec{L}$ selon l'axe des z, est une constante du mouvement.

b) Orbitales moléculaires de la molécule homopolaire ionisée H_2^+

De même que l'étude de l'atome d'hydrogène avait permis de faire apparaître des notions applicables aux atomes à plusieurs électrons, celle de la molécule H_2^+, molécule H_2 ionisée formée de deux noyaux identiques et d'un électron, est intéressante. L'un des noyaux étant fixé au point A et l'autre au point B, on prendra l'axe AB de la molécule pour axe des z et l'origine O au centre de AB. Le calcul quantique de ce système étant possible mais très lourd, on se contente ici d'une analyse qualitative.

À partir d'une fonction d'onde atomique ψ_{at} on peut chercher une première approximation de la fonction d'onde de l'électron de la molécule (*orbitale moléculaire*) sous la forme d'un mélange de deux fonctions d'onde ψ_{at} ; l'une centrée sur A et l'autre sur B. On suppose ici les fonctions d'onde et leurs coefficients réels :

$$\psi(\vec{r}) = C_A \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) + C_B \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right) \text{ où } \vec{r} = \overrightarrow{OM}.$$

$$|\psi(\vec{r})|^2 = C_A^2 \cdot \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right)\right]^2 + C_B^2 \cdot \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right]^2 + 2 \cdot C_A \cdot C_B \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)$$

La molécule étant symétrique par rapport au plan $z = 0$, la densité de probabilité de présence $|\psi|^2$ doit avoir la même valeur au point M et en son symétrique M' ; le symétrique d'un point ou d'un vecteur étant désigné par :

$$\psi\left(\vec{r'}\right) = C_A \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM'}\right) + C_B \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM'}\right) \text{ où } \vec{r}\,' = \overrightarrow{OM'}.$$

ψ_{at} étant symétrique ou antisymétrique par rapport au plan passant par le noyau et perpendiculaire à l'axe des z :

$$\psi_{at}\left(\overrightarrow{AM'}\right) = \varepsilon \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right) \quad \text{et} \quad \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM'}\right) = \varepsilon \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) \quad \text{où} \quad \varepsilon = \pm 1$$
$$\Rightarrow \psi(\vec{r}\,') = \varepsilon \cdot \left[C_A \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right) + C_B \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right)\right]$$

$$|\psi(\vec{r}')|^2 = C_A^2 \cdot \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right]^2 + C_B^2 \cdot \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right)\right]^2 + 2 \cdot C_A \cdot C_B \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)$$

$$|\psi(\vec{r}')|^2 = |\psi(\vec{r})|^2 \Rightarrow C_A^2 = C_B^2 \Rightarrow C_B = \eta \cdot C_A \quad \text{où} \quad \eta = \pm 1$$

Soit, $C_A^2 = C_B^2$ c'est-à-dire $C_B = \pm C_A$. Il y a donc deux solutions :

$$\psi_\pm(\vec{r}) = C_\pm \cdot \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) \pm \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right] \text{ pour lesquelles}$$

$$|\psi_\pm(\vec{r})|^2 = C_\pm^2 \cdot \left\{\left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right)\right]^2 + \left[\psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right]^2 \pm 2 \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{AM}\right) \cdot \psi_{at}\left(\overrightarrow{BM}\right)\right\}$$

où, dans chaque cas, C serait donné par la condition $\iiint |\psi_\pm(\vec{r})|^2 \cdot d\tau = 1$.

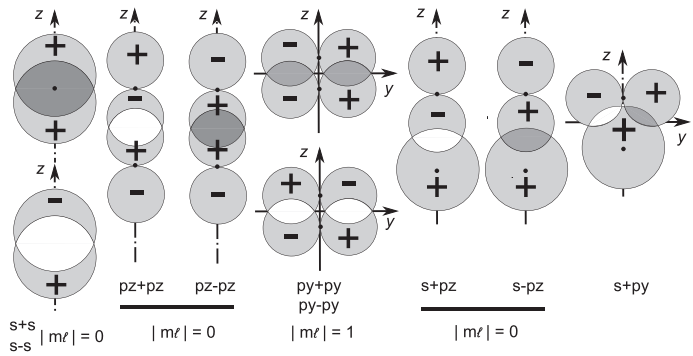


Figure 27.3 **Orbitales moléculaires de H_2^+.**

La figure montre l'allure des orbitales moléculaires formées à partir d'une fonction d'onde atomique s, p_z ou p_y, ainsi que, à titre d'illustration, de quelques orbitales moléculaires formées chacune à partir de fonctions d'onde différentes (s et p_z ou s et p_y).

Cette formule et la figure 27.3 montrent qu'à tous les points du plan de symétrie $z = 0$, selon la symétrie ou l'antisymétrie de ψ_{at}, l'une de fonctions d'onde moléculaire $\psi_\pm$ s'annule et donne une probabilité de présence nulle (*orbitale anti-liante*), tandis que l'autre donne une probabilité de présence maximale (*orbitale liante*). La région entre les deux noyaux contribue de façon fortement négative à l'énergie potentielle électrostatique puisque l'électron y est proche à la fois des deux noyaux.

Par rapport à celle qu'il aurait s'il formait un atome d'hydrogène dans l'état ψ_{at} avec l'un ou l'autre des noyaux, l'électron a une énergie inférieure lorsqu'il est dans l'orbitale moléculaire liante (avec une forte probabilité de présence dans la région entre les deux noyaux) et une énergie supérieure lorsqu'il est dans l'orbitale moléculaire anti-liante (avec une faible probabilité de présence dans la région entre les deux noyaux). Il est facile de retenir le résultat sur ces bases mais une analyse plus rigoureuse nécessiterait

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d'examiner aussi l'effet des deux noyaux sur l'énergie cinétique de l'électron et sur les fonctions d'onde ψ_{at}.

Les premières fonctions d'onde de l'électron de l'atome d'hydrogène ont été données au chapitre 25 § 9.1.

À partir de la fonction d'onde atomique dans l'état fondamental 1s, ψ_{100}, pour laquelle ($n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$), on obtient les orbitales moléculaires $\psi_+(\vec{r})$, qui est liante, et $\psi_-(\vec{r})$, qui est anti-liante. Pour ces orbitales moléculaires, $m_\ell = 0$.

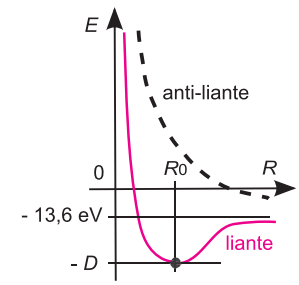
À partir de la fonction d'onde atomique dans l'état $2p_z$, $\psi_{2pz} = \psi_{210}$, pour laquelle ($n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0$), on obtient les orbitales moléculaires $\psi_+(\vec{r})$, qui cette fois est anti-liante, et $\psi_-(\vec{r})$, qui est liante. Pour ces orbitales moléculaires, $m_\ell = 0$.

À partir de la fonction d'onde atomique dans l'état $2p_x$, ψ_{2px}, mélange de fonctions d'onde pour lesquelles ($n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = \pm 1$), on obtient les orbitales moléculaires $\psi_+(\vec{r})$, qui est liante, et $\psi_-(\vec{r})$, qui est anti-liante. Pour ces orbitales moléculaires, $|m_\ell| = 1$, c'est-à-dire $L_z^2 = \hbar^2$. Les fonctions d'onde atomiques $2p_x$ s'annulant sur l'axe des z, leur recouvrement ne se fait que de part et d'autre de cet axe et le caractère liant ou anti-liant de l'orbitale moléculaire est plus faible que dans le cas des fonctions d'onde $2p_z$. On obtient des résultats analogues à partir de la fonction d'onde atomique $2p_y$. Les fonctions d'onde atomiques $2p_x$ s'annulant sur l'axe des z, leur recouvrement ne se fait que de part et d'autre de cet axe et le caractère liant ou anti-liant de l'orbitale moléculaire est plus faible que dans le cas des fonctions d'onde $2p_z$. On obtient des résultats analogues à partir de la fonction d'onde atomique $2p_y$.

Le cas des autres fonctions d'onde atomiques ns et np se traite de la même façon.

c) L'énergie totale de la molécule ionisée H_2^+

À distance R fixée entre les noyaux AB, on peut exprimer les orbitales moléculaires et pour chacune d'elles calculer l'énergie E_e de l'électron. À distance fixée entre les noyaux AB et à orbitale moléculaire donnée, l'énergie totale E de la molécule H_2^+ est la somme de l'énergie E_e de l'électron et de l'énergie coulombienne noyau-noyau E_{nn}.



Dans l'état électronique fondamental, la courbe $E(R)$ part à l'infini de l'énergie $E(\infty) \approx -13{,}6$ eV de l'électron dans l'atome d'hydrogène (électron en présence d'un seul noyau), décroît lorsque les noyaux se rapprochent (grâce au caractère liant de l'orbitale), tend vers l'infini en 0 (l'énergie électrostatique noyau-noyau l'emportant alors), et passe par un minimum $-D$ à la distance d'équilibre R_0 de la molécule.

d) Notation des orbitales moléculaires d'une molécule homopolaire

Définition

Chaque orbitale moléculaire (OM) et le niveau d'énergie correspondant sont repérés par :

♦ la notation de la sous-couche atomique (n, ℓ) de l'orbitale atomique (OA) de départ (1s par exemple) ;

♦ une lettre désignant de la valeur de $|m_\ell|$ dans la molécule :
σ, π, δ, ϕ, ..., ... respectivement pour $|m_\ell| = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
♦ l'indice bas u ou g selon qu'en deux points symétriques par rapport au centre de la molécule les valeurs de l'OM sont égales ou opposés ;
♦ une étoile en indice haut * si l'OM est anti-liante.

Ainsi les niveaux les plus bas de l'électron de la molécule H_2^+ sont :
♦ $1s\sigma_g$ (OM liante issue de l'OA 1s, et correspondant à l'état fondamental),
♦ $1s\sigma_u$* (OM anti-liante issue de l'OA 1s),
♦ $2s\sigma_g$, puis $2s\sigma_u$* (OM issues de l'OA 2s),
♦ $2p\pi_u = 2p_x\pi_u 2p_y\pi_u$ (OM liantes issues de l'OA $2p_x$ et de l'OA $2p_y$),
♦ $2p\sigma_g$ (OM liante issue de l'OA $2p_z$),
♦ $2p\pi_g^* = 2p_x\pi_g^* 2p_y\pi_g^*$ (OM liantes issues de l'OA $2p_x$ et de l'OA $2p_y$),
♦ $2p\sigma_u^*$ (OM anti-liante issue de l'OA $2p_z$).

e) Configuration électronique d'une molécule à plusieurs électrons

De même que dans un atome à plusieurs électrons, les électrons dans une molécule diatomique homopolaire (c'est-à-dire constituée de deux atomes identiques) peuvent être considérés comme indépendants et soumis à un même champ d'énergie potentielle représentant l'interaction avec les noyaux et avec les électrons qui *écrantent* les noyaux. La nomenclature des orbitales moléculaires *mono-électroniques* accessibles à un électron reste la même que dans la molécule H_2^+.

Dans l'état fondamental de la molécule, les orbitales moléculaires mono-électroniques sont occupées par énergie croissante, à raison de deux électrons de spin opposé ; lorsqu'un niveau comme $2p\pi$ correspond à plusieurs orbitales moléculaires, le remplissage se fait selon la règle de Hund : le maximum d'orbitales est d'abord occupé avec des électrons de même spin.

Théorème 27.1

L'ordre des niveaux et leur occupation maximale sont :
♦ *pour* H_2^+, H_2 *et les molécules* Li_2 *à* N_2 *(*$Z = 1$ *à* 7*) :*
$1s\sigma_g^2\ 1s\sigma_u^{*2}\ 2s\sigma_g^2\ 2s\sigma_u^{*2}\ 2p\pi_u^4\ 2p\sigma_g^2\ 2p\pi_g^{*4}\ 2p\sigma_u^{*2}\ldots$;
♦ *pour* O_2 *et* F_2 *(*$Z = 8$ *et* 9*), avec une inversion entre* $2p\pi_u$ *et* $2p\sigma_g$ *:*
$1s\sigma_g^2\ 1s\sigma_u^{*2}\ 2s\sigma_g^2\ 2s\sigma_u^{*2}\ 2p\sigma_g^2\ 2p\pi_u^4\ 2p\pi_g^{*4}\ 2p\sigma_u^{*2}\ldots$.

Théorème 27.2

Comme les orbitales liante et anti-liante correspondantes pleines se compensent énergétiquement, l'ordre de liaison (liaison simple, double, ...) est :
nombre de doublets liants – nombre de doublets anti-liants.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Exercice d'application 27.1

Écrire la configuration de la molécule F_2 *(*$Z = 9$ *pour* F*) dans son état fondamental et chercher l'ordre de liaison.*

SOLUTION. 18 électrons, donc : $1s\sigma_g^{\,2}\ 1s\sigma_u^{*2}\ 2s\sigma_g^{\,2}\ 2s\sigma_u^{*2}\ 2p\pi_u^{\,4}\ 2p\sigma_g^{\,4}$; l'ordre de liaison est $5 - 4 = 1$.

27.2.4 Hybridation des orbitales atomiques

La configuration $1s^2 2s^2 2p^2$ de l'atome de carbone dans son état fondamental, avec deux électrons non appariés dans la sous-couche 2p, ne permet pas de comprendre la valence 4 du carbone dans la molécule de méthane CH_4. L. Pauling (vers 1930) a émis l'idée de l'hybridation des orbitales atomiques externes qui sont très proches en énergie.

Définition

Une orbitale atomique hybride est un mélange d'orbitales atomiques s, p, d, ...
Une orbitale hybride peut contenir deux électrons.

À partir d'un certain nombre d'orbitales atomiques ont peut construire le même nombre d'orbitales hybrides.

Voir site web

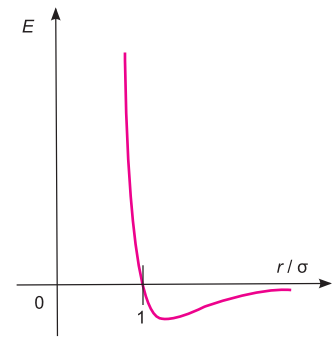
Exemples :

- orbitales sp (50% s et 50% p) « $s + p_z$ » et « $s - p_z$ »
  $\left(\psi_{n\,s} + \psi_{n\,p_x}\right)/\sqrt{2}$ et $\left(\psi_{n\,s} - \psi_{n\,p_x}\right)/\sqrt{2}$;
- orbitales sp^3
  « $s + p_x + p_y + p_z$ », « $s + p_x - p_y - p_z$ », « $s - p_x - p_y + p_z$ » et « $s - p_x + p_y - p_z$ ».
  Les principales hybridations sont sp, sp^2, sp^3, sp^3d, sp^3d^2.

27.3 POTENTIEL INTERMOLÉCULAIRE

Dans un gaz ou un liquide, les molécules neutres interagissent par une énergie potentielle (on dit souvent *un potentiel*) due :

- à l'interaction attractive entre moments dipolaires permanents, entre moment dipolaire permanent et moment dipolaire induit (déplacement de charge produit dans une molécule sous l'effet de la présence du moment permanent de l'autre) et entre moments dipolaires instantanés ;
- à l'interaction répulsive à courte distance, qui empêche le recouvrement des orbitales atomiques selon le principe de Pauli.



Le calcul des propriétés thermodynamique du gaz et du liquide compte tenu de ces interactions relève de la Mécanique statistique.

Un potentiel d'interaction phénoménologique usuel est celui de J.E. Lennard-Jones (1925) représenté sur la figure : $E(r) = 4\varepsilon \cdot [(\sigma\ /r)^{12} - (\sigma\ /r)^{6}]$.

27.4 SOLIDES CRISTALLINS

27.4.1 Diffraction de Bragg

Les plans équidistants d'atomes sont à l'origine des propriétés de diffraction des rayonnements X ou des particules par les cristaux.

Théorème 27.4

Un rayonnement de longueur d'onde λ qui frappe un cristal un plan d'atomes d'un cristal en faisant un angle θ avec ce plan (angle d'incidence $\pi/2 - \theta$) est réfléchi et diffracté par l'ensemble des plans du cristal parallèles à ce plan et distants de d*, pour la condition de Bragg :* $2 \cdot d \cdot \sin(\theta) = \mathrm{n} \cdot \lambda$ *pour tout* n *entier.*

DÉMONSTRATION

Pour que l'interférence entre les ondes réfléchies soit constructive, la différence de marche δ entre elles doit être multiple entier de λ ou nulle : $\delta = n\lambda$.

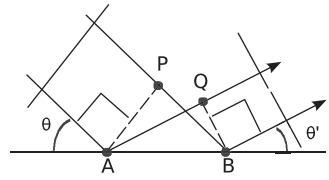
Sur la figure ci-dessous à gauche, la différence de marche est

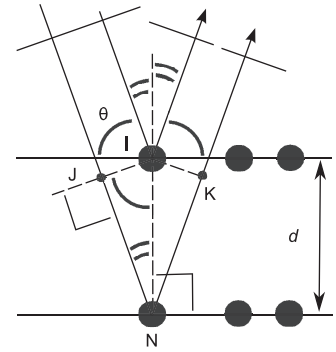
$AP - PB = AB \cdot \cos(\theta\ ') - AB \cdot \cos(\theta) = AB \cdot [\cos(\theta') - \cos(\theta)]$

qui ne peut satisfaire la condition pour les diverses valeurs de AB que pour $\theta' = \theta$.

Sur la figure ci-dessous à droite, la différence de marche est

$JN + NK = 2 \cdot JN = 2 \cdot IN \cdot \sin(\theta) = 2 \cdot d \cdot \sin(\theta)$.





Lors de la mesure, on fait tourner le cristal par rapport au faisceau de rayonnement pour rechercher les angles donnant la diffraction. On peu aussi utiliser une poudre de matériau ; l'orientation aléatoire des petits fragments de cristal donne alors directement la figure de diffraction.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

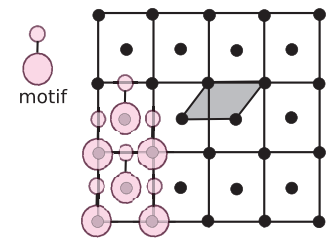
27.4.2 Structure cristallographique

a) Base ou motif

Un solide cristallin est un arrangement périodique d'entités élémentaires. L'unité qui est répétée dans le cristal est la *base* (ou le *motif*), composée d'un ou plusieurs atomes, ions ou molécules (un atome Cu pour le cuivre, un ion Na^+ et un ion Cl^- pour le chlorure de sodium, deux atomes C pour le diamant, quatre molécules CO_2 pour le dioxyde de carbone, ...).

b) Réseau et mailles

La périodicité spatiale du cristal est décrite par un *réseau spatial*, ensemble périodique de *nœuds*, points *a priori* abstraits en chacun desquels on positionne de la même façon le motif pour constituer le cristal.



Une *maille* est une cellule élémentaire parallélépipédique ayant pour sommets des nœuds du réseau spatial et dont la répétition reconstitue le réseau ; une maille est dite *primitive* ou *simple* si elle ne contient pas d'autres nœuds du réseau que ses sommets.

À une dimension, une maille est un parallélogramme défini par la longueur de deux côtés (a et b) et par l'angle entre ces deux côtés (γ) ; à trois dimensions, une maille est un parallélépipède défini par la longueur de trois côtés (a, b et c) et par l'angle entre ces côtés pris deux à deux (γ entre les côtés de longueur a et b, α entre les côtés de longueur b et c, β entre les côtés de longueur c et a). Ces longueurs et angles sont les *paramètres de maille*.

Le choix d'une maille n'est pas unique ; on adopte généralement une maille ayant à la fois le plus grand nombre de côtés perpendiculaires et un volume minimal, même si elle n'est pas primitive.

Un *point dans une maille* (position d'un atome par exemple) est défini par ses coordonnées dans le repère non normé $\left(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ dont l'origine est un sommet de la maille et dont les vecteurs sont portés par les côtés de la maille. À titre d'exemple, le point (1/2,1/2,1/2) est au centre de la maille.

Théorème 27.5

Le volume d'une maille peut être calculé (dans une base orthonormée !) à partir du produit mixte des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *:* $V = \left|\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$.

À trois dimensions, il existe 14 réseaux (A. Bravais, 1848). Les 14 réseaux sont répartis en 7 *systèmes cristallographiques* définis chacun par un type de maille primitive, et éventuellement par des mailles non primitives contenant, en plus des nœuds de la maille primitive (maille *simple* s) : un nœud au centre de la maille (maille *centrée* bc), un nœud au centre de chaque face (maille à *faces centrées* fc) ou un nœud au

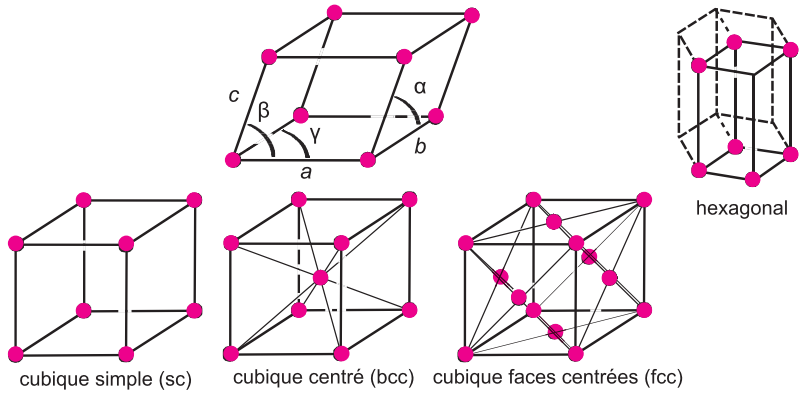


Figure 27.4 Réseaux cristallographiques.
La figure montre la maille simple la plus générale (triclinique), la maille simple du systeme hexagonal, ainsi que les mailles du système cubique.

centre de chaque face de côtés a et b (maille à *bases centrées* ec). Les 7 systèmes cristallographiques et les 14 réseaux sont :

- système cubique $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ avec mailles s, bc et fc ;
- système tétragonal $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ avec mailles s et bc ;
- système orthorhombique $a \neq b \neq c$, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ avec mailles s, bc, fc et ec ;
- système hexagonal $a = b \neq c$, $\alpha = \beta = \pi/2$ et $\gamma = 2 \cdot \pi/3$ avec maille s ;
- système trigonal $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma \neq \pi/2$ avec maille s ;
- système monoclinique $a \neq b \neq c$, $\alpha = \gamma = \pi/2$ et $\beta > \pi/2$ avec mailles s et ec ;
- système triclinique $a \neq b \neq c$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ (maille simple la plus générale).

Ainsi, le système cubique comporte en plus de la maille primitive *cubique simple*, une maille *cubique centrée* (bcc) et une maille *cubique faces centrées* (fcc).

Exercice d'application 27.2

La cellule élémentaire du chlorure de césium est un cube avec un ion Cl^- *à chaque sommet et un ion* Cs^+ *au centre du cube. Quels sont le réseau et le motif ?*

SOLUTION. Réseau cubique simple (et non cubique centré) et motif constitué d'un ion Cl^- en O et d'un ion Cs^+ en (1/2,1/2,1/2).

c) Coordinence et nombre d'atomes par maille

La *coordinence* ou l'*indice de coordination* d'un atome ou d'un ion est le nombre de ses atomes ou ions plus proches voisins (identiques à lui ou pas). La même notion peut être utilisée pour un nœud d'un réseau.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Il est souvent utile de déterminer le nombre d'atomes par maille, connaissant la position de tous les atomes. Ainsi, dans le cas d'un atome sur chaque nœud du réseau :

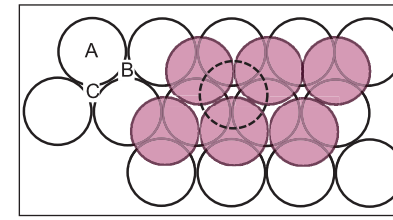
- une maille simple contient 1 atome : à chacun des 8 sommets 1 atome commun à 8 mailles ;
- une maille centrée contient 2 atomes : à chacun des 8 sommets 1 atome commun à 8 mailles, et au centre 1 atome propre à la maille, soit $8 \times (1/8) + 1 = 2$;
- une maille à faces centrées contient 4 atomes : à chacun des 8 sommets 1 atome commun à 8 mailles, et au centre de chacune des 6 faces 1 atome commun à 2 mailles, soit $8 \times (1/8) + 6 \times (1/2) = 4$.

d) Compacité d'un réseau

Théorème 27.6

La compacité *d'un réseau est la proportion du volume de l'espace qui est occupé lorsque des sphères identiques, impénétrables et de rayon maximal sont centrées aux nœuds du réseau.*
La compacité maximale ($\pi \cdot \sqrt{2}/6 \approx 0{,}74$) est obtenue pour le réseau cubique à faces centrées et pour le réseau hexagonal compactc $= 2 \cdot a \cdot \sqrt{2/3}$).

DÉMONSTRATION



Comment juxtaposer des sphères de la façon la plus compacte ? On constitue une première rangée en alignant des sphères, puis une deuxième rangée en plaçant une sphère dans chaque creux entre deux sphères de la première rangée, et ainsi de suite pour obtenir une couche compacte de sphères. On constitue ensuite une deuxième couche compacte de sphères en plaçant une sphère dans un creux sur deux entre trois sphères de la première couche (cela laisse vide la moitié des creux de la première couche). Il y a maintenant deux manières de constituer la troisième couche compacte de sphères : placer les sphères dans les creux qui sont à la verticale des sphères de la première couche (configuration *ABA*) ou dans les autres creux (configuration *ABC*). On constitue de même les couches suivantes. La configuration *ABABAB*... correspond à un réseau cubique à faces centrées avec une sphère à chaque nœud ; la configuration *ABCABC*... correspond à un réseau hexagonal compact avec une sphère à chaque nœud et en (1/3,1/3,1/3).

Dans un réseau cubique à faces centrées, la distance entre un nœud et ses plus proches voisins (ils sont 12) est la demi diagonale d'un côté, soit un rayon de sphère $a/(2 \cdot \sqrt{2})$ et un volume de sphère $\pi \cdot a^3/(12 \cdot \sqrt{2})$, à multiplier par le nombre 4 nœuds par maille.

e) Plans réticulaires

Les nœuds d'un réseau peuvent être vus comme portés par une famille de plans parallèles équidistants, dits *plans réticulaires* ; il existe plusieurs telles familles.

Théorème 27.7

Une famille de plans réticulaires est définie, relativement au repère de maille $\left(O, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, *par ses* indices de Miller h k l, *nombres entiers qui sont calculés ainsi à partir d'un plan de la famille ne passant pas par O :*

♦ *ce plan coupe l'axe* $\vec{a}$ *au point de coordonnée* x_P, *l'axe* $\vec{b}$ *au point de coordonnée* y_P, *et l'axe* $\vec{c}$ *au point de coordonnée* z_P *;*

♦ *on réduit au même plus petit commun dénominateur les fractions* $1 / x_P$, $1 / y_P$ *et* $1 / z_P$ *; les numérateurs sont les entiers* h, k *et* l *; on note les valeurs négatives par un surlignement ;*

♦ *si le plan considéré est parallèle à l'un des axes, il coupe cet axe à l'infini et l'indice de Miller correspondant est nul.*

On peut noter que :

- à la première étape, considérer l'un des deux plans les plus proches de O permet d'être certain, dans le cas d'une maille non primitive, que tous les nœuds du réseau seront portés par les plans de la famille ; par chaque nœud de la maille (dont O) passe alors l'un des plans de la famille hkl ;
- |h|, |k| et |l| sont respectivement le nombre d'intervalles que les plans de la famille définissent sur les côtés *a*, *b* et *c* de la maille en les coupant ;
- les plans de la famille ont pour équation respective $h \cdot x + k \cdot y + l \cdot z = p$ où p est le numéro du plan, en partant de p = 0 pour celui passant par O.

Le rayonnement X étant diffracté par les électrons des atomes, les plans réticulaires portant la plus grande densité d'atomes donnent la plus grande intensité.

Exercice d'application 27.3

Déterminer les indices de Miller de la famille de plans dont le plan le plus proche de l'origine coupe les trois axes de la maille aux points de coordonnée respective 3/4, – 2/3 et ∞.

SOLUTION. (3/4, – 2/3,∞) donne (4/3, – 3/2,0) = (8/6, – 9/6,0) soit 8 $\bar{9}$ 0.

27.4.3 Liaison cristalline

On retrouve dans de nombreux cristaux des liaisons de même nature que les liaisons moléculaires :

- NaCl, KCl, MgO et $CaCl_2$ sont des exemples de cristaux ioniques ;
- le diamant C, Si, Ge, et SiC sont des exemples de cristaux covalents ;
- le quartz SiO_2 et le carbure de tungstène sont des exemples de cristaux partiellement ioniques et partiellement covalents.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Les *cristaux métalliques* sont composés d'atomes dont des électrons de valence sont délocalisés dans l'ensemble du cristal. Les niveaux d'énergie atomiques de ces électrons se transforment en bandes d'énergie.

Les *cristaux moléculaires* sont constitués de molécules (ou d'atomes). La liaison entre molécules peut être de deux types :

Voir site web

- liaison de van der Waals entre moments dipolaires permanents ou induits par le rapprochement des molécules (Ar, CO, CO_2, CH_3CH_2Br, ...) ;
- liaison hydrogène (H_2O, HF, NH_3, ...).

À retenir

- Les états de la matière présentent un ordre plus ou moins grand.
- La liaison chimique met en jeu les électrons périphériques de l'atome.
- Dans une molécule, la superposition des orbitales atomiques renforce ou réduit la probabilité de présence des électrons entre les atomes (orbitales moléculaires liantes ou anti-liantes).
- La loi de Bragg est la condition de diffraction par les plans atomiques d'un cristal.
- Un cristal a une structure périodique décrite par un réseau, une maille et un motif.

Exercices

Les solutions sont regroupées p. 629.

27.1 Configuration de N_2

Écrire la configuration de la molécule N_2 ($Z = 7$ pour N) dans son état fondamental et chercher l'ordre de liaison. Écrire la configuration de N_2 dans un état excité.

27.2 Densité d'atomes sur des plans réticulaires

Calculer le nombre d'atomes par unité de surface sur les plans réticulaires 100, 110 et 111 d'un cristal cubique simple de paramètre $a \approx 3$ Å.

27.3 Maille primitive d'un réseau cubique face centrées

Calculer le volume de la maille primitive d'un réseau cubique faces centrées de paramètre a, définie par les points de coordonnées (0,0,0), (0,1/2,1/2), (1,1/2,1/2), (1/2,0,1/2), (1/2,1,1/2), (1/2,1/2,0), (1/2,1/2,1) et (1,1,1).

27.4 Compacité du réseau cubique simple

Comparer la compacité du réseau cubique simple à la compacité maximale $\pi \cdot \sqrt{2}/6$.

27.5 Énergie électrostatique de Madelung d'un cristal linéaire

Exprimer l'énergie électrostatique par ion, du cristal linéaire infini constitué de charges ponctuelles $+q$ et $-q$ réparties de façon alternée sur un axe, avec une distance a entre charges. On donne $\ln(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ pour $x > -1$.

PROBLÈME GÉNÉRAL : PHYSIQUE DANS L'ESPACE

Suite à la Seconde Guerre mondiale et avec la guerre froide qui a suivi entre les États-Unis et l'Union Soviétique, la conquête spatiale a été un enjeu politique majeur, mais a été avant tout un immense défi scientifique et technologique. Le développement des fusées, des propulseurs, des matériaux, etc., ont permis à l'homme de voyager dans l'espace pour arriver à marcher sur la Lune en juillet 1969, et à mettre en place à partir des années 1980, une station spatiale permanente en orbite autour de la Terre.

Les différentes branches de la physique sont concernées par ces vols spatiaux : la mécanique pour les trajectoires et la relation avec l'attraction gravitationnelle de la Terre, la thermodynamique pour la propulsion et les combustibles, l'optique des satellites mis en orbite autour de la Terre, les rayonnements électromagnétiques dans l'espace, l'alimentation électrique des satellites et engins spatiaux, les transmissions des vols habités vers la Terre, la physique relativiste notamment pour les vols longs dans le système solaire.

Dans le problème qui suit, nous avons centré notre étude sur deux engins spatiaux emblématiques de notre époque : la fusée Ariane V européenne et la navette spatiale américaine. Les différentes parties traitent alternativement de ces deux moyens de transport essentiels qui permettent à l'homme d'envoyer de nombreux satellites en orbite autour de la Terre, ou de rallier la station spatiale internationale pour permettre une meilleure compréhension de la vie dans l'espace.

PARTIE I. MÉCANIQUE DES VOLS SPATIAUX

1. Lancement de la fusée Ariane V et mise en orbite géostationnaire d'un satellite

1.1. Décollage de la fusée Ariane V

La fusée Ariane V initialement immobile est lancée verticalement, à partir du sol, avec une accélération telle qu'en 1 minute et 34 secondes elle atteint la vitesse de 1 km $\cdot$ s^{-1}.

Donner les expressions, en fonction du temps, de la vitesse acquise et de l'altitude atteinte au bout du temps t. Calculer numériquement la vitesse atteinte à une altitude de 100 km et le temps nécessaire pour atteindre cette altitude.

1.2 Fusée de masse variable en vol

La propulsion de la fusée est assurée par la combustion de différents produits (poudres, propergol). Les gaz résultant de la combustion sont éjectés vers l'arrière avec une vitesse constante $\vec{u_r}$ parallèle à l'axe de la fusée. La fusée maintenant dans l'espace, loin de toute masse, peut être considérée (pour simplifier) comme un système isolé

mécaniquement. La fusée est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}$ parallèle à un axe $x'x$ orienté dans le sens du mouvement et coïncidant à tout moment avec l'axe de la fusée, comme indiqué dans la figure 1.

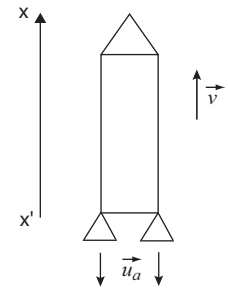


Figure 1

1.2.1 Déterminer l'expression de la vitesse absolue $\vec{u}_a$ des gaz éjectés. En projetant cette relation vectorielle sur l'axe $x'x$, calculer la vitesse absolue des gaz pour $\|\vec{u}_r\| = 4{,}8\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et pour les vitesses de la fusée $\|\vec{v}_1\| = 2\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\|\vec{v}_2\| = 6\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.2.2 La masse de l'ensemble de la fusée et du mélange de combustible diminue avec le temps. Au départ, cette masse est M_0 ; au temps t, elle est devenue $M = M_0 - m$, m correspondant à la masse des gaz éjectés. Entre les instants t et $t + \text{d}t$, on pose que la masse des gaz éjectés est dm, et la vitesse de la fusée passe de $\vec{v}$ à $\vec{v} + \text{d}\vec{v}$.

1.2.2 a) Déterminer l'équation différentielle qui lit $\|\vec{v}\|$ et m. On note $\|\vec{v}\| = v$.

b) Résoudre cette équation et trouver l'expression de la masse M de la fusée à l'instant t, en fonction de M_0, $\|\vec{u}_r\|$ (que l'on note u_r) et v. Étudier la variation de M en fonction de v.

c) Trouver l'expression de v en fonction de M. On note M_f la masse du corps de la fusée sans combustible. Montrer que la fusée ne peut pas dépasser une vitesse maximale notée v_{max} que l'on calculera.

Données : $\|\vec{u}_r\| = 4{,}8\ \text{km.s}^{-1}$; $M_0 = 775$ tonnes ; $M_f = 125$ tonnes.

1.3. Satellite mis en orbite géostationnaire

Un satellite en orbite géostationnaire apparaît comme immobile depuis le sol terrestre : cette caractéristique est notamment utilisée pour les télécommunications ou certaines observations. L'*orbite géostationnaire* est donc l'orbite la plus peuplée (environ 250 satellites actuellement).

Cependant cette orbite située à exactement 35 786 km d'altitude est difficile à atteindre et requiert beaucoup d'énergie pour une injection directe. C'est pourquoi les fusées visent plutôt une *orbite de transfert géostationnaire*, qui est une orbite dont le périgée est à basse altitude (500 km environ) et l'apogée est à l'altitude de l'orbite géostationnaire. Ainsi le satellite est largué au niveau du périgée de cette orbite de transfert, il dérive ensuite jusqu'à l'apogée de cette orbite, point où il subit une manœuvre de *circularisation* qui le place sur l'orbite géostationnaire.

1.3.1 L'orbite de transfert géostationnaire correspond à une ellipse définie par :

- un centre O ;
- un des foyers (noté T) occupé par le centre de la Terre (de rayon $R_T = 6\,370$ km) ;
- un périgée (point où le satellite est le plus proche de la Terre) marqué par un point P, d'altitude $z_P = 528$ km (mesurée à partir de la surface de la Terre) ;
- un apogée (point où le satellite est le plus éloigné de la Terre) marqué par un point A, d'altitude $z_A = 35\,786$ km (mesurée à partir de la surface de la Terre) ;
- un demi-grand axe a correspondant à OA ;
- un demi-grand axe b correspondant à OB perpendiculaire à OA ;
- une distance c entre le centre O et le foyer T notée c = OT ;
- une excentricité e donnant la forme de l'orbite, telle que $e = c/a$;
  Cette orbite elliptique est représentée figure 2.

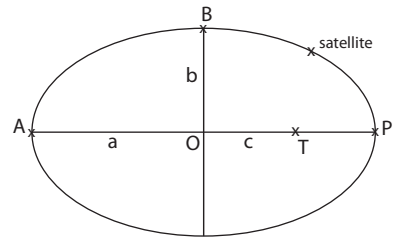


Figure 2

1.3.1 a) Déterminer l'expression de a en fonction de R_T, z_A et z_P. Calculer a.

b) Déterminer l'expression de c en fonction de R_T, a et z_P. Calculer c.

c) En déduire la valeur de l'excentricité e.

1.3.2 On propose d'écrire l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite (de masse m et représenté par un point S) sous la forme :

$$E_{p(sat)} = -\frac{k}{r}, \quad \text{avec } k = \text{constante positive et } r = \text{rayon TS.}$$

a) En considérant la conservation de l'énergie mécanique pour le satellite au cours de son mouvement, montrer que la vitesse du satellite est donnée par :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

b) Calculer la vitesse du satellite au périgée (vitesse notée v_P) et la vitesse du satellite à l'apogée (vitesse notée v_A).

On rappelle que d'après la définition de l'énergie potentielle gravitationnelle, on peut écrire : $k = G \cdot M_T \cdot m$.

Données : Masse de la terre $M_T = 5{,}9736 \cdot 10^{24}$ kg ; masse du satellite $m = 6\,800$ kg.
Constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ kg^{-1} · m^3 · s^{-2}

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2. Approche de la navette spatiale vers la station spatiale internationale

La *station spatiale internationale* (*I.S.S.* en anglais pour *International Space Station*) est constituée d'environ quinze modules pressurisés, et pèse environ 400 tonnes, pour une surface habitable d'environ 70 m^2. Depuis novembre 2009, la station a un équipage permanent de 6 personnes : chaque astronaute, au cours de son séjour de 3 à 6 mois, partage son temps de travail entre les opérations d'assemblage, de maintenance et les tâches scientifiques. À noter que l'alimentation électrique est essentiellement assurée par des panneaux solaires d'une surface de 2 500 m^2 qui fournissent environ 100 kW d'électricité.

La station spatiale se déplace sur une orbite basse autour de la Terre (orbite considérée comme circulaire), à une altitude d'environ 350 km et à une vitesse de 27 700 $km \cdot h^{-1}$ (soit 7,7 $km \cdot s^{-1}$) en faisant le tour de notre planète 15 fois par jour. Dans cette partie du problème, on va s'intéresser au vol amenant la *navette spatiale* vers la station spatiale : la navette est en effet le principal moyen de transport vers la station, assurant notamment l'acheminement de matériel de gros volume. À noter que le vaisseau russe *Soyouz* assure la relève des équipages tandis que le vaisseau japonais *HTV* est en charge du ravitaillement.

2.1. Navette en orbite circulaire

La navette de masse m et représentée par un point N, est lancée et placée sur une orbite circulaire de rayon R. On considère que la navette est soumise à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ de norme définie par :

$$\left\|\vec{F}\right\| = F = \frac{Km}{r^2}, \quad \text{avec } K = \text{constante positive.}$$

2.1.1 Montrer que la navette est animée d'un mouvement circulaire uniforme sur cette orbite (on peut utiliser le système de coordonnées polaires). Déterminer la pulsation ω du mouvement de la navette, ainsi que son accélération.

2.1.2 En déduire l'expression de la vitesse de la navette sur cette orbite, en fonction de R. Commenter.

2.2. Navette et forces de poussée ou de freinage

Avant un instant t_1, la navette soumise à la force $\vec{F}$ décrit une orbite circulaire de rayon R_1. Entre les instants t_1 et t_2, le capitaine met en marche un moteur qui fait subir à la navette une force $\vec{f}$ possédant une composante suivant l'axe portant le vecteur vitesse de la navette. On admet qu'à l'instant t_2 où la force $\vec{f}$ est annulée, la navette décrit à nouveau une orbite circulaire, de rayon R_2. À l'instant t_1, la vitesse de la navette est v_1, au temps t_2 la vitesse est v_2.

2.2.1 Calculer le travail de la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée sur la navette entre les instants t_1 et t_2, en fonction des rayons R_1 et R_2.

2.2.2 À partir du théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression du travail de la force $\vec{f}$, entre les instants t_1 et t_2, en fonction des rayons R_1 et R_2.

2.2.3 Si la force $\vec{f}$ possède une composante dans le sens opposé à la vitesse de la navette, dans quel sens cette force fait-elle varier le rayon et la norme de la vitesse de la navette ?

Par définition, cette force de sens opposé à la vitesse est considérée comme une force de freinage. Commenter.

2.2.4 Si la force $\vec{f}$ possède une composante dans le même sens que celui de la vitesse de la navette, dans quel sens cette force fait-elle varier le rayon et la norme de la vitesse de la navette ?

C'est ce type de force (dite force de poussée) qui est utilisé pour l'approche de la navette vers la station spatiale internationale. Décrire le mouvement de la navette et les changements d'orbites successifs et les variations de vitesses correspondantes.

3. Futurs voyages entre la Terre et Mars

Les vols habités vers la planète Mars constituent un des challenges scientifiques et technologiques que l'Homme a prévu de relever au cours du XXI^{e} siècle. Cette planète a de tout temps fasciné les astronomes du fait notamment des nombreux points communs avec la Terre. Les sondes qui l'ont survolée ou qui s'y sont posées ont donné de nombreuses informations précieuses sur cette planète, et notamment la possible présence d'eau sous forme de glace dans le sous-sol : ainsi, la question d'une possible présence de vie se pose sur cette planète. Les missions qui enverront des hommes sur cette planète permettront sûrement de percer quelques-uns de ses mystères.

Si les trajectoires et mouvements des engins spatiaux pour un tel vol sont assez bien connus, de nombreux paramètres sont encore inconnus, notamment le facteur humain et l'endurance physique et psychologique d'un équipage amené à rester de nombreux mois dans l'espace.

Nous proposons ici d'étudier le mouvement d'un engin spatial entre la Terre et Mars, tel que cela est envisagé actuellement. Nous étudierons également le voyage retour et les différentes possibilités plus ou moins coûteuses en énergie ou en temps. Ainsi nous calculerons le temps nécessaire à un voyage habité aller et retour entre la Terre et Mars.

3.1. Orbite de transfert d'Hohmann

Pour atteindre son objectif, à savoir la planète Mars, un engin spatial ne doit pas être envoyé en visant directement Mars lorsque cette planète est la plus proche de la Terre. La mécanique céleste montre que sa trajectoire sera déviée par l'attraction de la Terre et qu'il lui sera très difficile voire impossible d'arriver à destination.

La solution est d'utiliser une orbite de transfert qui permet de passer de l'orbite de la Terre autour du Soleil, à l'orbite de Mars autour du Soleil. Cette orbite est une ellipse imaginée en 1925 par l'ingénieur allemand Wolfgang Hohmann : cette ellipse présente un périhélie P (point le plus proche du Soleil) placé sur l'orbite de la Terre et

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

un aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) situé sur l'orbite de Mars, comme cela est indiqué dans la figure 3.

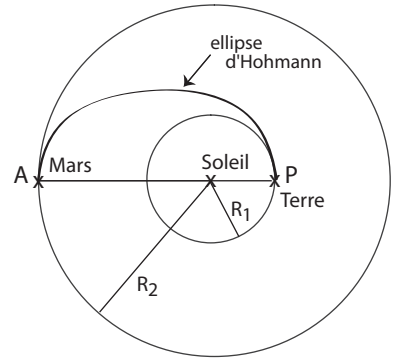


Figure 3

L'ellipse d'Hohmann est tangente aux deux orbites coplanaires, pratiquement circulaires, de la Terre et de Mars, de rayons respectifs $R_1 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km et $R_2 = 2{,}3 \cdot 10^8$ km. Le Soleil est placé en un des foyers de cette ellipse.

On considère une fusée de masse 100 tonnes se déplaçant de la Terre vers Mars suivant l'ellipse de transfert d'Hohmann. On néglige l'attraction exercée par les planètes sur le vaisseau et on ne considère que l'attraction solaire.

Données : Masse du Soleil $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg ; constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ kg$^{-1} \cdot$ m$^3 \cdot$ s^{-2}.

3.1.1 Déterminer en fonction de R_1, R_2, G et M_S, l'excentricité e et le paramètre p de l'ellipse d'Hohmann.

Rappel : le paramètre p d'une ellipse est défini par $p = \dfrac{b^2}{a} = a\left(1 - e^2\right)$

3.1.2 Déterminer en fonction de R_1, R_2, G et M_S, la constante des aires notée C de cette orbite. On donnera l'expression de l'énergie mécanique totale de la fusée sur l'orbite de transfert.

3.1.3 En utilisant la 3^e loi de Kepler, trouver la durée τ_1 de ce voyage interplanétaire entre la Terre et Mars.

3.1.4 Déterminer la position de Mars par rapport à la Terre au moment où la fusée quitte la Terre. On déterminera d'abord l'angle θ dont tourne Mars pendant la durée τ_1 du transfert. On retrouvera ensuite la période de la planète Mars notée T_M, en utilisant la 3^e loi de Kepler. On donnera alors la position relative de Mars par rapport à la Terre, avec l'angle $\widehat{TSM}$(Terre-Soleil-Mars) tel que $\widehat{TSM} = \pi - \theta$.

Remarque

La méthode la plus efficace et la moins coûteuse en énergie consiste à suivre l'ellipse de Hohmann. D'autres trajectoires sont plus rapides, mais exigent plus de poussée au départ et une correction plus grande à l'arrivée.

3.2. Voyage de retour de Mars vers la Terre

On veut déterminer le temps τ_2 nécessaire au retour de Mars vers la Terre. Arrivée sur Mars, la fusée devra attendre que la Terre et Mars soient en positions relatives favorables pour permettre un transfert retour sur une ellipse d'Hohmann. Il convient de représenter dans un schéma les deux orbites circulaires de la Terre et de Mars autour du Soleil, avec les différentes positions occupées par ces planètes et les points de rencontre de la fusée avec Mars à l'aller et avec la Terre au retour.

3.2.1 Représenter sur un schéma les positions notées « 1 » de la Terre et de Mars au moment du lancement de la fusée. Placer la position de Mars notée « 2 » pour laquelle la fusée arrive sur cette planète.

Déterminer le trajet de la Terre pendant le temps τ_1 du transfert de la fusée. Montrer que la Terre est en avance d'un angle de 75,14° par rapport à Mars. Donner sur le schéma la position notée « 2 » de la Terre lorsque la fusée atteint Mars.

3.2.2 Montrer que la Terre doit être 75,14° derrière Mars au moment du début du voyage retour de la fusée vers la Terre (qui est effectué selon une ellipse de Hohmann).

3.2.3 On veut déterminer le temps τ_2 nécessaire à la Terre pour qu'elle passe d'une position (notée A) 75,14° en avance sur Mars à une position (notée B) 75,14° en retard sur Mars.

Remarque

La Terre met 365 jours pour faire un tour complet, tandis qu'il faut 687 jours pour que Mars fasse le tour du Soleil. Si Mars et la Terre sont l'une en face de l'autre au début de leur cercle, elles le seront à nouveau après 2,133 53 ans : ce temps s'appelle la *période synodique*.

a) Déterminer l'angle que doit parcourir la Terre pour passer de la position A à B par rapport à Mars.

Sachant que la Terre prend une avance de 360° sur Mars en 2,13353 ans, quel est le temps τ_2 pour que la Terre soit en position favorable pour un retour de la fusée sur Terre ?

b) La durée totale d'une mission sur Mars (voyage aller-retour) correspond au temps de parcours d'une ellipse complète d'Hohmann (soit deux fois τ_1, puisqu'il faut τ_1 pour que la fusée arrive sur Mars et aussi un temps τ_1 pour qu'il revienne sur Terre) auquel s'ajoute le temps d'attente τ_2 pour que les planètes soient en positions favorables pour le retour de la fusée.

En déduire la durée totale τ d'un voyage aller-retour Terre-Mars.

Partie II. Mécanique d'un train d'atterrissage

On rappelle que la conception du train d'atterrissage d'un avion doit satisfaire à des contraintes acoustiques. Les concepteurs de trains travaillent en liaison avec les aéro-acousticiens pour optimiser les turbulences générées par le train et donc le bruit important ainsi créé en phase d'approche (ou après le décollage) par ces excroissances de la

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

cellule de l'avion. Par ailleurs, les procédures d'approche à moindre bruit des aéroports consistent entre autres à retarder la sortie du train. Le train d'atterrissage d'un avion doit également satisfaire à des fonctions mécaniques vitales à l'atterrissage mais aussi au roulage. On se propose ici d'étudier le mécanisme de rentrée/sortie d'un train avant et plus précisément de calculer l'effort nécessaire pour cette manœuvre.

À noter que cet exercice s'applique totalement à un train d'atterrissage de navette spatiale qui doit répondre au même type de cahier des charges.

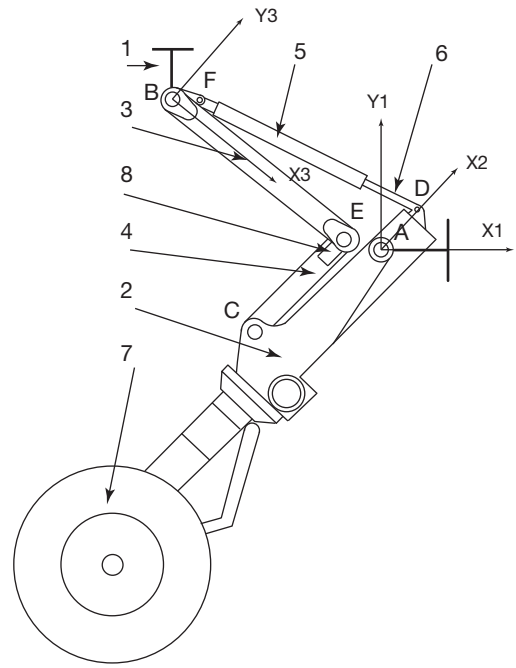


Figure 4

Le schéma du train étudié fait apparaître :

- le repère (A, $\vec{x}_1$, $\vec{y}_1$, $\vec{z}_1 = \vec{z}$) lié à la cellule de l'avion repérée 1 ;
- le repère (A, $\vec{x}_2$, $\vec{y}_2$, $\vec{z}_2 = \vec{z}$) lié à la jambe repérée 2 ; l'angle θ positionne ce repère par rapport au bâti.
- le repère (A, $\vec{x}_3$, $\vec{y}_3$, $\vec{z}_3 = \vec{z}$) lié au bras de contre fiche repéré 3 ;
- le bras de contre fiche repéré 4 et le cardan repéré 8 qui sont en liaison encastrement ;
- la liaison 1/2 pivot d'axe (A, $\vec{z}$) ;
- la liaison 1/3 pivot d'axe (B, $\vec{z}$) ;
- la liaison 2/4 pivot d'axe (C, $\vec{z}$) ;
- la liaison 2/6 pivot d'axe (D, $\vec{z}$) ;
- la liaison 3/4 pivot d'axe (E, $\vec{z}$) ;
- la liaison 3/5 pivot d'axe (F, $\vec{z}$) ;

- la liaison 5/6 pivot glissant suivant FD.

On a $\overrightarrow{AB} = 830\vec{x}_1 + 610\vec{y}_1$, $\overrightarrow{AC} = 595\vec{x}_2 + 130\vec{y}_2$, $\overrightarrow{AG_2} = 550\vec{x}_2 - 30\vec{y}_2$, $\overrightarrow{AG_7} = 1660\vec{x}_2 - 130\vec{y}_2$, $\overrightarrow{AD} = 205\vec{x}_2 + 35\vec{y}_2$, $\overrightarrow{BF} = 85\vec{x}_3 - 70\vec{y}_3$ et CE = 515 avec BE = 882. Toutes les valeurs sont en mm. Les centres de gravités des différentes pièces sont notés avec la lettre G affectée du numéro de la pièce.

On se propose de déterminer l'effort produit par le vérin 5 + 6 pour rentrer le train et plus précisément la valeur de cet effort dans la position ($\theta = 0$). Le problème est plan. Toutes les liaisons sont supposées parfaites. La résistance de l'air est négligée ainsi que le poids propre des pièces, sauf celui de la jambe repérée 2 et celui des roues repérées 7.

Le poids de l'ensemble des roues 7 est appliqué en G_7 et est égal à $\vec{P}_7 = 380$ N.

Le poids de la jambe 2 est appliqué en G_2 et est égal à $\vec{P}_2 = 970$ N.

Le poids de l'ensemble jambe 2 et roues 7 est appliqué en G_{2+7}.

1. Isoler le bras 4 associé à la pièce 8, faire le bilan des actions mécaniques exercées sur cette pièce et en déduire la direction des forces appliquées en E et C.

2. Isoler l'ensemble du vérin 5 + 6, faire le bilan des actions mécaniques exercées sur cet ensemble et en déduire la direction des forces appliquées en D et F.

3. Isoler le bras de contre fiche 3, faire le bilan des actions mécaniques exercées sur cette pièce et en déduire la direction de la force appliquée en B.

4. Isoler l'ensemble 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, faire le bilan des actions mécaniques exercées sur cet ensemble et en déduire les efforts appliqués en A et B.

5. Isoler le bras de contre fiche 3, et en déduire le torseur des actions mécaniques exercés par 5 sur 3.

Partie III. Mécanique des combustibles d'une fusée

Une application des plus classiques du théorème des quantités de mouvement étant le calcul de la réaction d'un jet, considérons une fusée à propergol solide. Pour l'essentiel, elle est constituée d'un tube de rayon $b = 1{,}5$ m et longueur $L = 30$ m $\gg b$, prolongé par une tuyère en forme de tronc de cône de sommet C et de demi angle $\alpha \ll 1$.

Le propergol a la forme d'un cylindre creux de rayon compris entre $a(t)$ et b. Il brûle en conservant cette forme et son rayon intérieur croît de $a_0 = 0{,}9$ m à b. La vitesse de régression du propergol est $\vec{w} = w \cdot \vec{e}_r$, où $w = 7$ mm $\cdot$ s^{-1} et sa masse volumique a pour valeur $\rho_p = 1\,800$ kg $\cdot$ m^{-3}.

Le gaz de combustion est produit à la vitesse radiale, constante et uniforme $\vec{v}_c = -v_c \cdot \vec{e}_r$ où $v_c = 3$ m$\cdot$s^{-1} et assimilé à un gaz parfait barotrope ; les effets de la pesanteur sont négligés. Il est canalisé vers la tuyère dont il émerge à la vitesse $\vec{v}_e = v_e \cdot \vec{e}_R$, par une calotte sphérique Σ de centre C et de rayon R_t. Cette surface s'appuie sur le bord de la tuyère et $\vec{e}_R$ est un vecteur unitaire issu de C. En outre, le rayon de la section de sortie est $R_s = 1$ m.

Pour simplifier, on admet que la pression p_c qui règne dans le corps de la fusée est quasi uniforme jusqu'à la section $z = L$ et on suppose également que le gaz est éjecté

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

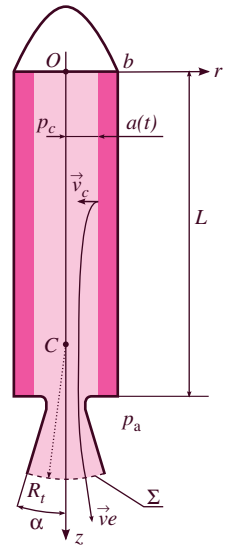


Figure 5

au travers de Σ à la pression atmosphérique p_a : la tuyère est dite « adaptée » (voir figure 5).

1. En formulant la conservation de la masse sur un élément de surface dA du cylindre $r = a(t)$, déterminer la masse volumique ρ_c des gaz de combustion, les variations du rayon $a(t)$ et la masse de propergol à chaque instant $M_p(t)$. Donner la valeur numérique de $M_p(0)$.

2. On désigne par v la vitesse axiale moyenne des gaz et par $\tau_{tr} = L/v$ le temps de transit d'une particule. Par ailleurs, on note $\tau_{cb} = (b - a_0)/w$ le temps que le propergol met pour se consumer. Déduire la valeur de v de l'égalité des débits axial et radial. Montrer que $\tau_{tr} \ll \tau_{cb}$ et en déduire que l'approximation quasi-statique est légitime.

3. On se propose de calculer la résultante des forces de pression qui agissent sur la fusée, en projection sur l'axe de révolution Oz. Désignons par $\mathcal{S}$ toutes les parties solides de la fusée et par $\vec{n}$ la normale intérieure à ce domaine ; par définition, la résultante cherchée s'écrit :

$$\vec{R} = R \cdot \vec{e}_z = \int_{\partial\mathcal{S}} p \cdot \vec{n} \cdot dA$$

La surface $\partial\mathcal{S}$ se décompose en deux parties : $(\partial\mathcal{S})_i$ intérieure à la fusée et $(\partial\mathcal{S})_e$ extérieure, au contact de l'atmosphère à la pression p_a. Montrer que :

$$\vec{R} = \int_{(\partial\mathcal{S})_i} (p - p_a) \cdot \vec{n} \cdot dA$$

4. Ensuite, isolons le domaine fluide $\mathcal{D}$ limité par $(\partial\mathcal{S})_i$ et la surface sphérique Σ qui limite la tuyère. Compte tenu de l'approximation quasi statique et de ce que les effets

de la pesanteur sont négligés, appliquer le théorème des quantités de mouvement à ce domaine et en déduire :

$$R = -\int_{\Sigma} \rho \cdot (\vec{v}_e \cdot \vec{e}_z) \cdot (\vec{v}_e \cdot \vec{n}) \cdot \mathrm{d}A - \int_{\Sigma} (p - p_a) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) \cdot \mathrm{d}A,$$

5. Montrer que la deuxième intégrale de l'expression de R est nulle.

6. En détaillant l'intégration sur la calotte sphérique Σ, montrer que le calcul de R se ramène à celui de l'intégrale suivante :

$$R = -\int_{\Sigma} \rho_e v_e^2 \cos\theta \cdot \mathrm{d}A = -2\pi R_t^2 \int_0^{\alpha} \rho_e v_e^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta.$$

7. Par ailleurs, des calculs de thermochimie fournissent la température du gaz de combustion, $T_c = 3\,400$ K, qui est donc connue indépendamment de la dynamique de l'écoulement et il s'ensuit : $p_c = \rho_c r_g T_c \simeq 43$ bars où $r_g = 300\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$ est la constante du gaz. On admet que l'évolution des gaz est isentropique. Déterminer la masse volumique et la température du gaz sur la surface Σ, sachant que $\gamma = 1{,}2$.

8. Appliquer le théorème de BERNOULLI entre un point de la frontière du propergol et un point de Σ appartenant à la même ligne de courant et en déduire la vitesse d'éjection v_e. Vérifier que $v_c \ll v_e$.

9. Achever le calcul de la résultante R (on rappelle que $\alpha \ll 1$). Vérifier qu'elle est orientée vers l'avant et supérieure au poids de l'engin.

Voir site web

PARTIE IV. CORRECTION OPTIQUE D'UN TÉLESCOPE SPATIAL

1. Télescope spatial de Hubble – Aberration de sphéricité

Le télescope spatial Hubble (HST) a été mis en orbite le 24 avril 1990 par la navette spatiale Discovery. Les premiers tests en orbite ont montré que le télescope ne pouvait pas être correctement focalisé du fait d'un défaut dans son optique : les deux caméras d'imagerie haute résolution (la *Wide Field Planetary camera* et la *Faint Object camera*) montraient toutes deux les mêmes distorsions caractéristiques de l'aberration de sphéricité (voir plus bas).

Hubble est un télescope de type Ritchey-Chrétien dont les miroirs primaires et secondaires sont en verre recouvert d'une mince couche d'aluminium. La forme exacte des miroirs est obtenue par polissage, elle est hyperbolique dans le cas du HST. Lors de la fabrication des miroirs, les propriétés de réflexion de la surface polie sont testées et le profil est affiné par polissages successifs. Pour le miroir primaire du HST, ce test optique n'a pas été correctement réalisé et le polissage de la surface a résulté en un profil erroné du miroir.

Le système conçu pour corriger l'aberration de sphéricité du HST, appelé COSTAR, a été installé en décembre 1993, durant la première mission de service, par des astronautes

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de la navette Endeavour. Il consistait en deux miroirs installés dans le trajet des rayons lumineux, dont l'un avait la forme exacte permettant la correction de l'aberration de sphéricité. COSTAR a été enlevé du télescope HST en mai 2009 lors de la quatrième mission de service par la navette Atlantis.

L'aberration de sphéricité se produit dans un système optique lorsque des rayons provenant du bord et du centre de l'optique ne se focalisent pas au même point. La position de focalisation d'un rayon sur l'axe du système dépend alors de la position de son point d'impact I sur le système. Dans cette partie, nous allons étudier dans son principe l'aberration de sphéricité d'un miroir parabolique puis d'un miroir sphérique, et sa correction par des lames réfractantes.

1. On considère un rayon provenant de l'infini et arrivant parallèlement à l'axe optique d'un miroir de révolution de forme quelconque (figure 6). Dans un repère cartésien (Sx, Sz), on définit les points S(0, 0) sommet du miroir, I(x,z) point d'impact du rayon sur le miroir et P'(z_P, 0) le point de l'axe où le rayon converge après réflexion sur le miroir. On cherche à calculer $\overline{SP'} = z_p$.

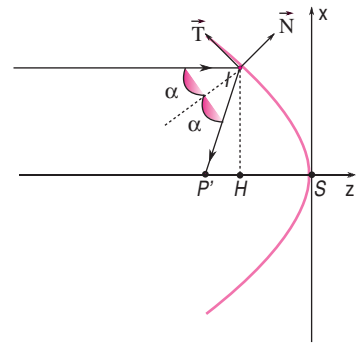


Figure 6

a) Exprimer la distance algébrique $\overline{SP'}$ en fonction de x, z et α, l'angle que fait le rayon incident en I avec la normale en I à la surface du miroir. On rappelle que $\tan 2\alpha = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$.

b) Le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la section du miroir en I (figure 6) a pour composantes $\vec{T} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dz/ds \end{pmatrix}$ où $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ est un élément d'abscisse curviligne sur la section du miroir. Exprimer $\vec{T}$ en fonction de la quantité dz/dx. En déduire les coordonnées de $\vec{N}$, vecteur unitaire normal à $\vec{T}$ en I dans le plan (Sx, Sz). (On rappelle que l'on a $\vec{T}.\vec{N} = 0$.) Montrer alors que $\tan\alpha = -dz/dx$. En déduire l'expression suivante pour $\overline{SP'}$:

$$\overline{SP'} = z + \frac{x}{2\cdot(dz/dx)}\cdot\left[1-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right].$$

2. Cas d'un miroir parabolique

On considère un miroir parabolique. Dans le plan (Sx, Sz), l'équation du profil du miroir s'écrit $z^{(p)} = \dfrac{x^2}{4f_1}$, où f_1 est une constante du miroir.

a) Quelle est la dimension de f_1 ? Quel est son signe ? Justifier.

b) Calculer $\dfrac{\mathrm{d}z^{(p)}}{\mathrm{d}x}$. En utilisant les résultats de la question 1), déduire $\overline{SP'}$. Ce résultat dépend-il de la coordonnée x du point d'arrivée I du rayon sur le miroir ? Le miroir parabolique présente-t-il une aberration de sphéricité pour des rayons arrivant parallèlement à son axe de révolution ?

c) Que représente la quantité f_1 ?

3. Cas d'un miroir sphérique

On considère un miroir sphérique. Dans le plan (Sx, Sz), l'équation du profil du miroir s'écrit $z^{(s)} = R + \sqrt{R^2 - x^2}$ où R est une constante du miroir.

a) Quelle est la dimension de R ? Quel est son signe ? Justifier.

b) Calculer $\mathrm{d}z^{(s)}/\mathrm{d}x$. En utilisant les résultats de la question 1), déduire $\overline{SP'}$. Ce résultat dépend-il de la coordonnée x du point d'arrivée I du rayon sur le miroir ? Le miroir sphérique présente-t-il une aberration de sphéricité pour des rayons arrivant parallèlement à son axe de révolution ?

c) Que représente la quantité R ?

4. On considère un miroir sphérique de rayon $\mathrm{R} = 2 \cdot f_1$ et des rayons arrivant sur le miroir très proches de l'axe ($x \ll R$).

a) En effectuant un développement limité de l'expression de $\overline{SP}'$ obtenue en 2) à l'ordre 4 en x, montrer que l'on peut écrire $\overline{SP'} = z^{(p)} + O(x^4)$, où $\mathrm{O(x^4)}$ est un terme d'ordre 4 en x que l'on précisera.

b) Montrer que la différence de chemin optique que subit un rayon se réfléchissant sur le miroir sphérique par rapport au même rayon se réfléchissant sur un miroir parabolique de distance focale f_1 et de même sommet S est approximativement : $2\left(z^{(s)} - z^{(p)}\right)$. Quelle est la signification physique du facteur 2 dans cette expression ?

c) Pour compenser cette différence de marche (et donc corriger de l'aberration de sphéricité du miroir sphérique), on introduit sur la marche des rayons avant le miroir sphérique une lame transparente en verre d'indice n dont une face est plane et parallèle à Sx, et l'autre présente un profil T(x) (voir figure 7). Montrer que la différence de marche supplémentaire que fait un rayon passant dans cette lame à la coordonnée x par rapport au trajet qu'il aurait fait en son absence, est $(n-1)\,[T(x) - T(0)]$. Quelle est la signification physique du facteur $(n-1)$ dans cette expression ?

d) Pour corriger l'aberration de sphéricité du miroir sphérique, on calcule le profil $T(x)$ de la lame de sorte à compenser exactement la différence de marche des rayons par rapport à celle qu'ils auraient eu avec un miroir parabolique. Montrer que l'on a alors : $T(x) = T(0) + \dfrac{x^4}{32(n-1)f_1^3}$. En supposant que la lame a un diamètre $2x_0 = 40$ cm

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

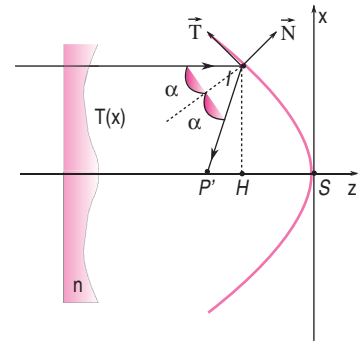


Figure 7

Insertion d'une lame correctrice dans le faisceau. L'allure du profil T(x) est arbitraire et sa variation suivant x très exagérée. On néglige la réfraction en sortie de la lame.

et que $n = 1{,}5$ et $f_1 = 140$ cm, calculez la variation maximale d'épaisseur $|T(x)\text{-}T(0)|\text{max}$. Représenter sur un graphe $|T(x)\text{-}T(0)|$ en fonction de x.

5. On peut améliorer la correction précédente en comparant cette fois le miroir sphérique de rayon $R = 2f_1$ à un miroir parabolique de focale $f_2 \neq f_1$. Quelle serait l'équation du profil $z'^{(p)}$ du miroir parabolique correspondant ? Reprendre la question 4) avec ce nouveau profil $z'^{(p)}$. En déduire que le nouveau profil T'(x) s'écrit :

$$T'(x) - T'(0) = \frac{x^4 + \gamma x^2}{32 f_1^3 (n-1)}, \quad \text{avec } \gamma = 16 f_1^3 \left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right).$$

Représenter sur un graphe $|T'(x)\text{-}T'(0)|$ en fonction de x. On prendra f = 139,8 cm.

Remarque

Le degré de liberté supplémentaire que représente le choix de f_2 permet de réduire l'aberration chromatique (le fait que des rayons de longueurs d'onde différentes ne vont pas être réfractés de la même façon car l'indice n dépend de la longueur d'onde) introduite par la lame, ce qui n'était pas possible avec le profil simple étudié en 4d.

PARTIE V. ÉLECTROSTATIQUE-ÉLECTROMAGNÉTISME

1. Modèle électrique simple du système Terre-atmosphère

On considère que l'ensemble Terre – atmosphère se comporte comme un condensateur sphérique et peut être modélisé à l'aide du schéma ci-après (voir figure 8).

La Terre est considérée comme un **conducteur parfait sphérique**, de rayon R, de centre O, de **potentiel nul** et portant une **charge négative** (– Q) uniformément répartie sur sa surface, tandis que la haute atmosphère est représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon R + H, **au potentiel V_H** et portant une charge totale (+ Q).

Dans ce modèle, les équipotentielles sont des sphères de centre O. On considérera que l'atmosphère a la permittivité du vide ε_0.

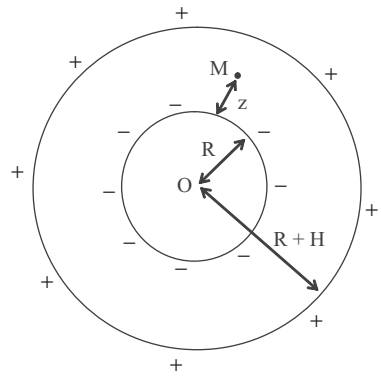


Figure 8

1.1 a) Énoncer le théorème de Gauss dans le cas général (c'est-à-dire non appliqué au cas particulier de l'exercice).

b) Utiliser ce théorème pour déterminer, en fonction de Q, R, z et ε_o, le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ en un point M quelconque d'altitude z au-dessus de la surface de la Terre ($0 < z < H$). On détaillera les étapes du calcul.

1.2 a) Déduire du résultat précédent la relation entre le potentiel V_H et la charge Q. Justifier.

b) Quelle est alors l'expression, en fonction de R et H, de la capacité C du condensateur sphérique Terre – atmosphère ($C = \dfrac{Q}{V_H}$) ?

2. Câble lancé depuis la navette spatiale Columbia

En 1996, la NASA et l'Agence Spatiale Italienne ont effectué l'expérience suivante : un câble (le « tether ») de longueur L = 19,7 km était déployé entre la soute de la navette et un satellite, dans la direction radiale par rapport à la Terre.

Ils espéraient que le déplacement du câble dans le champ magnétique terrestre permettrait d'obtenir du courant.

On fera les approximations suivantes :

- la navette se déplace vers l'est, sur une orbite circulaire dans le plan équatorial, à une vitesse de 7,7 km $\cdot$ s^{-1} ;
- le champ magnétique terrestre est uniforme le long du câble : $\vec{B_T} = -B_T \cdot \vec{u_z}$, où l'axe Oz est l'axe des pôles géographiques et $B_T \approx 3 \cdot 10^{-5}$ T.

2.1 Calculer la f.é.m induite entre les deux extrémités du câble.

2.2 Les mesures faites à bord de la navette ont mis en évidence une tension de l'ordre de 3,5 kV et un courant dans le câble d'intensité de l'ordre de 0,5 A. À cette altitude, le

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

câble est entouré d'un gaz ionisé (altitude de l'ionosphère), et ces particules chargées ferment le circuit et permettant donc le passage d'un courant dans le câble. Calculer la puissance électrique produite par induction.

2.3 Donner les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur le câble (due aux courants induits). Quels sont ces effets ?

Partie VI. Physique atomique et nucléaire

1. Alimentation électrique d'un satellite artificiel

Considérant un satellite artificiel de mesures nécessitant une puissance électrique $P_0 \approx 150$ W, on étudie deux technologies disponibles.

1.1 Le flux lumineux solaire dans la région de la Terre est $\Phi \approx 1{,}4\ \text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$. Déterminer la surface de panneaux solaires nécessaire sachant que le rendement électrique de ces panneaux est $\eta_S \approx 15\%$. Calculer la pression de radiation ϖ que subit le panneau solaire en absorbant le flux solaire, et la force F correspondante.

1.2 Un générateur thermoélectrique à radioélément (RTG) utilise des thermocouples pour convertir en énergie électrique la chaleur produite par la radioactivité α du plutonium 238, dont la demi-vie est $T \approx 88$ ans ; le rendement de conversion est $\eta_R \approx 6$ %.

Déterminer la masse m_0 de « combustible » PuO_2 nécessaire. Déterminer le temps au bout duquel la puissance électrique ne sera plus que $P \approx 100$ W.

On donne, en plus de celles indiquées au chapitre 26, la masse atomique suivante :

$$O \approx 16\ \text{u}$$

2. Une fusée de science-fiction

Une fusée à propulsion photonique, initialement au repos et de masse M_0, éjecte vers l'arrière une bouffée de N photons de fréquence ν (ces photons sont générés par une source ponctuelle placée au foyer d'un miroir parabolique) ; après l'éjection, la fusée prend la vitesse V et sa masse devient M. Ceci est assimilable à un processus inélastique avec conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie relativiste.

2.1 a) En fonction de $\beta = \dfrac{V}{c}$ et M_0, déterminer $\varepsilon = \dfrac{N\cdot h\cdot \nu}{M_0\cdot c^2}$ et M, ainsi que la diminution de masse m de la fusée.

Application numérique : $\beta \approx 0{,}6$ et $M_0 \approx 100$ t.

b) Les photons γ sont produits par la réaction d'annihilation proton-antiproton $p + \overline{p} \rightarrow \gamma + \gamma$. Déterminer leur fréquence ν_0 et leur longueur d'onde dans le vide λ_0 ; on note m_P la masse du proton.

2.2 Considérant que la diminution de masse de la fusée provient de la consommation du « combustible » protons-antiprotons, comparer la fréquence ν qu'ont les photons lors de leur éjection à la fréquence ν_0 qu'ils avaient lors de leur production, en exprimant le rapport ν / ν_0 .

2.3 Quelles sont les difficultés de réalisation technique ?

Solution du problème général

Partie I.

1.1. Décollage de la fusée Ariane V

L'accélération vaut : $a = \dfrac{1000\ (\text{m.s}^{-1})}{94\ (\text{s})} = 10{,}64\ \text{m.s}^{-2}$

La vitesse s'écrit : $v = a.t$ et la variation d'altitude avec le temps s'écrit : $z(t) = \dfrac{a}{2} \cdot t^2$; donc pour $z = 100$ km on obtient $t = 137$ s et $v = 1{,}46\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Remarque

En fait au bout de 137 s, la fusée est à environ 67 km d'altitude car du fait de l'attraction gravitationnelle, la trajectoire s'incurve et ne suit pas exactement la verticale.

1.2. Fusée de masse variable en vol

1.2.1 D'après la loi de composition des vitesses : $\vec{u_a} = \vec{u_r} + \vec{v}$; en projetant sur l'axe x'x de la fusée on obtient : $\overline{u}_a = -u_r + v$, avec $\overline{u}_a$ mesure algébrique de $\vec{u_a}$ puisque le signe de $\overline{u}_a$ dépend des valeurs relatives de u_r et v.

A.N. : $\overline{u}_a = -2{,}8\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ pour $v = 2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$; $\overline{u}_a = 1{,}2\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ pour $v = 6\ \text{km}\cdot\text{s}^{-1}$

1.2.2 a) En considérant la fusée comme étant isolée, on peut écrire la conservation de la quantité de mouvement entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$:

$$(M_0 - m) \cdot v = (M_0 - m - \mathrm{d}m) \cdot (v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m \cdot (v - u_r)$$

ce qui donne : $\mathrm{d}v = \dfrac{u_r \cdot \mathrm{d}m}{(M_0 - m - \mathrm{d}m)}$.

Si $\mathrm{d}m$ est petit devant m, on a : $\mathrm{d}v = \dfrac{u_r \cdot \mathrm{d}m}{(M_0 - m)}$.

Si on écrit $M = M_0 - m$, alors on a : $\mathrm{d}M = -\mathrm{d}m$ et donc : $\mathrm{d}v = -u_r \cdot \dfrac{\mathrm{d}M}{M}$.

b) En intégrant l'équation différentielle entre les instants $t = 0$ et t, on obtient :

$$M = M_0 \cdot e^{\left(-\frac{v}{u_r}\right)}$$

Donc la masse de la fusée est une fonction exponentielle décroissante de sa vitesse.

c) À partir de l'équation différentielle, on obtient l'expression suivante :

$$v = u_r \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

La vitesse maximale $v_{\max}$ est atteinte lorsque $M = M_f$, donc :

$$v_{\max} = u_r \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right)$$

Pour augmenter $v_{\max}$, il faut donc soit accroître la vitesse relative u_r des gaz éjectés, soit réduire le rapport $\frac{M_f}{M_0}$de la masse du corps de la fusée à la masse totale.

A.N. : $v_{\max} = 8{,}76 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

1.3. Satellite mis en orbite géostationnaire

1.3.1 a) $2a = 2R_T + z_A + z_P$; on obtient : $a = 24\,527$ km.

b) $c = a - R_T - z_P$; on obtient : $c = 17\,629$ km

c) $e = \frac{c}{a} = 0{,}718\,76$

1.3.2 a) L'énergie mécanique peut s'écrire : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = E$.

On peut écrire la conservation de l'énergie mécanique entre les points P (périgée) et A (apogée) :

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{k}{(a-c)} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{k}{(a+c)}$$

Comme aux points P et A, le vecteur vitesse est perpendiculaire au rayon vecteur, on peut écrire : $v_P \cdot (a-c) = v_A \cdot (a+c)$

Donc : $v_A = \frac{v_P \cdot (a-c)}{(a+c)}$

On peut donc écrire la vitesse au périgée comme suit :

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{k}{(a-c)} = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{v_P \cdot (a-c)}{(a+c)}\right)^2 - \frac{k}{(a+c)}$$

On obtient alors : $v_P^2 = \frac{k \cdot (a+c)}{ma \cdot (a-c)}$

On peut écrire l'énergie mécanique du satellite au périgée :

$$E_{\text{périgée}} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{k \cdot (a+c)}{ma \cdot (a-c)} - \frac{k}{(a-c)} = -\frac{k}{2a}$$

Pour un point quelconque, on peut écrire la conservation de l'énergie mécanique avec le périgée, et on obtient :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = E_{\text{périgée}} = -\frac{k}{2a}$$

On obtient donc :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

b) $v_p = \sqrt{\mathrm{G} \cdot M_T \cdot \left(\frac{2}{(a-c)} - \frac{1}{a}\right)}$ on obtient alors : $v_P = 6{,}443\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

$v_A = \sqrt{G \cdot M_T \cdot \left(\frac{2}{(a+c)} - \frac{1}{a}\right)}$ on obtient alors : $v_A = 1{,}630\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

2.1. Navette en orbite circulaire

2.1.1 D'après le principe fondamental de la dynamique, on peut écrire : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

On peut écrire cette relation vectorielle dans le système polaire comme suit :

$$\vec{F} = -\frac{K.m}{r^2} \cdot \vec{u_r} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u_\theta} - \frac{v^2}{R_c} \cdot \vec{u_r}\right)$$

On obtient donc les relations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{27.1}$$

et

$$\frac{K \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{R_c} \tag{27.2}$$

La première relation (1) indique que la vitesse est constante (v = constante), tandis que la seconde (2) indique que $r = R_c = R$.

On a donc bien un mouvement circulaire uniforme de la navette.

Si la vitesse est constante sur le cercle, on peut l'écrire comme suit : $v = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}$, où ℓ correspond à un arc de cercle interceptant un angle θ, tel que $\ell = R\theta$. On obtient la relation suivante avec la pulsation du mouvement $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$: $v = R\omega$

On peut alors écrire la relation (2) comme suit :

$$\frac{K.m}{R^2} = \frac{m.R^2.\omega^2}{R}$$

Ce qui donne :

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{K}{R^3}}$$

L'accélération de la navette est centripète (dirigée vers le centre de la Terre) et a pour expression : $\vec{a} = -R\omega^2 \cdot \vec{u_r}$.

2.1.2 Avec la relation (2), on peut écrire l'expression de la vitesse : $\frac{K}{R^2} = \frac{v^2}{R}$, ce qui donne : $v = \sqrt{\frac{K}{R}}$. On voit donc que plus le cercle décrit par la navette est proche de la Terre (*i.e.* R petit), plus sa vitesse est grande.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

2.2. Navette et forces de poussée ou de freinage

2.2.1 Le travail de la force $\vec{F}$ gravitationnelle peut s'écrire :

$$W\left(\vec{F}\right)_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Or le déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{r}$ peut s'écrire en coordonnées polaires :

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r \cdot \vec{u}_r + r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \vec{u}_\theta$$

On rappelle l'expression de la force $\vec{F}$: $\vec{F} = -\dfrac{Km}{r^2} \cdot \vec{u}_r$

Le travail de $\vec{F}$ s'écrit donc :

$$W\left(\vec{F}\right)_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{Km}{r^2} \cdot \vec{u}_r\right) \cdot \left(\mathrm{d}r \cdot \vec{u}_r + r \cdot \mathrm{d}\theta \cdot \vec{u}_\theta\right)$$

$$W\left(\vec{F}\right)_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{K.m}{r^2} \cdot \mathrm{d}r = -Km \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -Km \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= -Km\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

On obtient donc :

$$W\left(\vec{F}\right)_{t_1 \to t_2} = Km \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \tag{27.3}$$

2.2.2 On écrit le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t_1 et t_2 :

$$\frac{1}{2}.m.v_2^2 - \frac{1}{2}.m.v_1^2 = W\left(\vec{F}\right)_{t_1 \to t_2} + W\left(\vec{f}\right)_{t_1 \to t_2} \tag{27.4}$$

Or d'après la question 1 et l'expression de la vitesse en fonction du rayon R, on peut écrire :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{K}{R_1} \tag{27.5}$$

et

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m \cdot \frac{K}{R_2} \tag{27.6}$$

En combinant les équations (3), (4), (5) et (6), on peut écrire :

$$W\left(\vec{f}\right)_{t_1 \to t_2} = \frac{1}{2}m \cdot \frac{K}{R_2} - \frac{1}{2}m \cdot \frac{K}{R_1} - Km \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Donc : $W\left(\vec{f}\right)_{t_1 \to t_2} = \dfrac{1}{2}Km \cdot \left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)$

2.2.3 Si la force $\vec{f}$ est de sens opposé à la vitesse, son travail est donc résistant, négatif. Ainsi,

$$\frac{1}{2}Km \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) < 0.$$

Par conséquent, on a : $R_1 > R_2$, ce qui donne $v_2 > v_1$.

Ainsi, une telle force $\vec{f}$ assimilable à une force de freinage (puisque opposée à la vitesse) contribue à augmenter la vitesse de v_1 à v_2, lorsque la navette se rapproche de la Terre (R diminue entre les instants t_1 et t_2)

2.2.4 Si la force $\vec{f}$ est de même sens que la vitesse, son travail est donc moteur, positif. Ainsi,

$$\frac{1}{2}Km \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) > 0.$$

Par conséquent, on a : $R_1 < R_2$, ce qui donne $v_2 < v_1$.

Ainsi, une telle force $\vec{f}$ assimilable à une force de poussée (puisque dans le même sens que la vitesse) contribue à diminuer la vitesse de v_1 à v_2, lorsque la navette s'éloigne de la Terre (R augmente).

Remarque 1

La méthode d'approche de la navette vers la station spatiale internationale consiste à placer la navette sur une orbite circulaire plus basse où elle tourne plus vite que la station spatiale, puis en faisant intervenir une force de poussée, la navette voit sa vitesse diminuer et son rayon orbital augmenter pour se rapprocher petit à petit de la station.

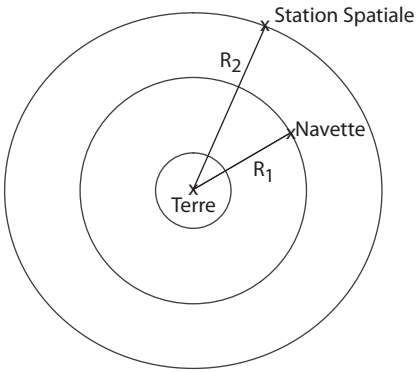


Figure 9

Remarque 2

Si la navette est soumise à ces deux forces $\vec{F}$ et $\vec{f}$, cela implique que la vitesse n'est plus tangente à la trajectoire : ce qui contribue à modifier la trajectoire de la navette qui d'un cercle devient alors une ellipse. On suppose cependant que la force $\vec{f}$ agit sur un temps suffisamment petit pour considérer que lorsque cette force $\vec{f}$ est annulée, la trajectoire de la navette est toujours circulaire.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

3.1. Orbite de transfert d'Hohmann

3.1.1 On note P le point de lancement de la fusée depuis la Terre et A le point d'arrivée sur Mars. Le transfert d'Hohmann est réalisé selon l'orbite elliptique de périhélie P et d'aphélie A, de foyer S (Soleil), et de grand axe :

$$AP = 2a = R_1 + R_2$$

On a : $SP = R_1 = a(1-e)$ et $SA = R_2 = a(1+e)$

Donc : $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1-e}{1+e}$, d'où $e = \dfrac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = 0{,}21$

Le paramètre p de l'orbite de transfert d'Hohmann est :

$$p = a \cdot \left(1 - e^2\right) = \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2\right]$$

Donc : $p = \dfrac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}82 \cdot 10^8$ km.

3.1.2 La constante des aires C s'écrit : $C = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SP} \wedge m \cdot \vec{v}_P\right\|}{m} = SP \cdot v_P = R_1 \cdot v_P$.

On a trouvé dans la question 1.3 (satellite mis en orbite géostationnaire) l'expression de la vitesse d'un point se déplaçant sur une ellipse :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

avec dans le cas de cette ellipse $k = \mathrm{G} \cdot M_s m$

on obtient donc : $v_P = \sqrt{\mathrm{G} \cdot M_S \left(\dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{a}\right)}$

La constante des aires peut alors s'écrire :

$$C = \sqrt{2\mathrm{G} \cdot M_S \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)} = 4{,}9 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}.$$

L'énergie mécanique totale sur l'ellipse de Hohmann, comme pour toute ellipse (voir question 1.3) s'écrit :

$$E = -\frac{\mathrm{G} \cdot M_S m}{2a}$$

3.1.3 La durée τ_1 du voyage Terre-Mars entre P et A est égale à la demi-période de parcours de l'orbite elliptique d'Hohmann, soit $\tau_1 = \dfrac{T}{2}$.

D'après la 3e loi de Kepler, on a : $\left(\dfrac{T^2}{a^3}\right)_{\text{fusée}} = \left(\dfrac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Terre}}$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{(2\tau_1)^2}{\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3}\right)_{\text{fusée}} = \left(\frac{1}{R_1^3}\right)_{\text{Terre}}$$

En effet, la période de rotation de la Terre est telle qu'elle fait le tour du Soleil en un an.

On obtient donc :

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}71 \text{ ans}, \quad \text{soit 260 jours.}$$

3.1.4 Pendant T_{Mars} la planète Mars tourne d'un angle 2π autour du Soleil. On note qu'elle tourne d'un angle θ pendant la durée τ_1 du voyage aller.

On peut donc écrire :

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\tau_1}{T_{\text{Mars}}}, \quad \text{soit } \theta = 2\pi \cdot \frac{\tau_1}{T_{\text{Mars}}}$$

On utilise la 3e loi de Kepler :

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{fusée}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Mars}}$$

soit $$\left(\frac{(2\tau_1)^2}{\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3}\right)_{\text{fusée}} = \left(\frac{T_{\text{Mars}}^2}{R_2^3}\right)_{\text{Mars}}$$

On obtient alors : $\dfrac{\tau_1}{T_{\text{Mars}}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{R_1+R_2}{2R_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

On en déduit : $\theta = 2\pi \cdot \dfrac{\tau_1}{T_{\text{Mars}}} = \pi \cdot \left(\dfrac{R_1+R_2}{2R_2}\right)^{\frac{3}{2}}$

Donc la position de Mars par rapport à la Terre au moment du lancement de la fusée est telle que l'angle *(TSM)* est égal à $\pi - \theta$. Ainsi, on a :

$$\left(\widehat{TSM}\right) = \pi \cdot \left[1 - \left(\frac{R_1+R_2}{2.R_2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{4}, \quad \text{soit 45 degrés.}$$

3.2. Voyage de retour de Mars vers la Terre

3.2.1 La figure 10 montre les positions notées « 1 » pour la Terre et pour Mars au moment du lancement de la fusée. Lorsque la fusée arrive sur Mars après son transfert sur l'ellipse d'Hohmann, Mars est en position « 2 ».

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On cherche la position « 2 » de la Terre, c'est-à-dire la position occupée par la Terre lorsque la fusée arrive sur Mars. En un an, la Terre parcourt 360°, donc pendant le temps τ_1 du transfert aller (τ_1 = 0,71 ans), elle parcourt :

$$(0{,}71) \times \ 360° = 255{,}14°$$

Comme après τ_1, Mars est à 180° de la position « 1 » de la Terre, cela signifie que la Terre est en avance par rapport à Mars, de (255,14° -180°) = 75,14° lorsque la fusée arrive sur Mars (position « 2 » pour la Terre, comme indiqué dans la figure 10).

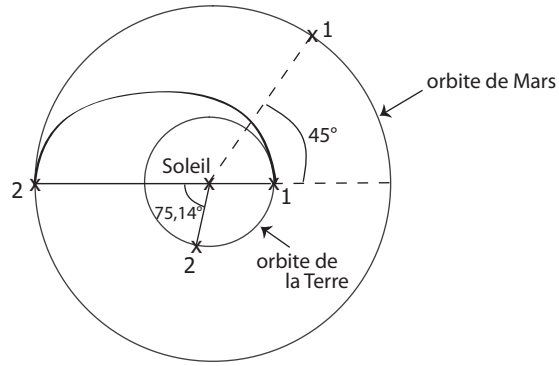


Figure 10

3.2.2 Le transfert retour de la fusée sur une ellipse d'Hohmann est réalisé en 0,71 ans. On sait que pendant ce temps, la Terre parcourt 255,14°. Cela signifie, comme le montre la figure 11, que la Terre doit être (255,14°-180°) = 75,14° en arrière de la position de Mars au moment où la fusée décolle de Mars pour son voyage retour.

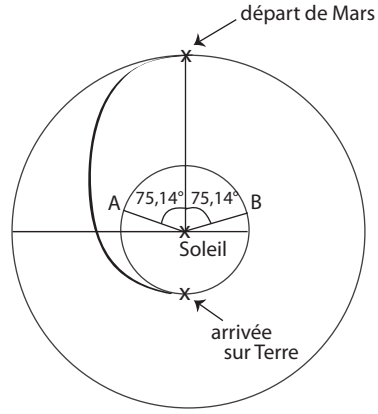


Figure 11

3.2.3 a) Quand la fusée arrive sur Mars, la Terre est 75,14° en avance sur Mars. Pour que la fusée entame le voyage retour, la Terre doit être 75,14° en retard sur Mars au

moment du départ de la fusée. Quel temps τ_2 est nécessaire à la Terre pour atteindre une telle position par rapport à Mars ?

Pour que la Terre passe de la position A (75,14° en avance sur Mars) à la position B (75,14° en retard sur Mars), la Terre doit devancer Mars de :

(360°- 2.(75,14°)) = 209,72°

Or, on sait que la Terre prend une avance de 360° sur Mars en 2,13353 ans. On peut donc écrire :

$$\tau_2 = \left(\frac{209{,}72°}{360°}\right).(2{,}13353) = 1{,}2429 \text{ ans}, \quad \text{soit 454 jours}$$

b) On peut donc calculer le temps total τ nécessaire à un voyage aller et retour de la Terre à Mars : ce temps correspond à deux fois le temps de transfert d'une moitié d'ellipse d'Hohmann (soit deux fois le temps τ_1) auquel s'ajoute le temps d'attente sur Mars pour que les planètes soient en positions relatives favorables pour un transfert retour sur une ellipse d'Hohmann (soit le temps τ_2).

Donc, on peut écrire :

$$\tau = 2.\tau_1 + \tau_2 = 2.(260 \text{ jours}) + (454 \text{ jours}) = 974 \text{ jours}, \quad \text{soit 2,67 ans}$$

Ce qui fait pour un voyage aller-retour : 2 ans, 8 mois et 14 jours.

Partie II.

On remarque tout d'abord que ce problème est plan c'est-à-dire que la cinématique (le mouvement) se déroule dans le plan contenant l'axe vertical et la direction de vol. Nous allons évidemment travailler dans ce plan. Les torseurs d'action et cinématiques n'auront chacun que trois composantes intéressantes.

1. On isole le système 4 + 8. Il est soumis aux actions de 3 en E et de 2 en C. Ces actions correspondent à des liaisons pivot supposées parfaites. Cette hypothèse, qui correspond à des liaisons sans frottement, permet de simplifier l'analyse.

Le torseur des actions de 4 + 8 sur 3 est de la forme :

$$\left\{\mathcal{A}(4+8 \to 3)\right\} = \left\{\begin{array}{l} X_{43}\cdot\vec{x} + Y_{43}\cdot\vec{y} + Z_{43}\cdot\vec{z} \\ L_{43}\cdot\vec{x} + M_{43}\cdot\vec{y} + N_{43}\cdot\vec{z} \end{array}\right\}_E$$

Nous adoptons les notations classiques avec X, Y et Z les composantes de la résultante et L, M et N celles du moment. L'indice 43 signifie que les efforts sont exercés par le solide 4 (ou l'ensemble 4 + 8 ici) sur le solide 3.

Le torseur des actions de 2 sur 3 est de la forme :

$$\left\{\mathcal{A}(2 \to 3)\right\} = \left\{\begin{array}{l} X_{23}\cdot\vec{x} + Y_{23}\cdot\vec{y} + Z_{23}\cdot\vec{z} \\ L_{23}\cdot\vec{x} + M_{23}\cdot\vec{y} + N_{23}\cdot\vec{z} \end{array}\right\}_C.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Si on applique le principe fondamental de la statique au système 4 + 8 on peut écrire :

$$\left\{\mathcal{A}(4+8\rightarrow 3)\right\}_{\mathrm{P}}+\left\{\mathcal{A}(2\rightarrow 3)\right\}_{\mathrm{P}}=\{O\}\quad\forall \mathrm{P}$$

en un point P à déterminer (le même pour les deux torseurs). Dans ce cas on peut choisir E ou C. On prend E pour calculer le moment. Il faut donc calculer le moment en E du torseur des actions de 2 sur 4. On utilise la relation de moment

$$\vec{M}(2\rightarrow 4,\mathrm{E})=\vec{M}(2\rightarrow 4,\mathrm{C})+\overrightarrow{EC}\wedge\vec{R}(2\rightarrow 4)=\overrightarrow{EC}\wedge\vec{R}(2\rightarrow 4).$$

On en déduit les deux équations vectorielles de la résultante et du moment :

$$\vec{R}(2\rightarrow 4)+\vec{R}(3\rightarrow 4)=\vec{0},$$

et

$$\vec{M}(2\rightarrow 4,\mathrm{E})+\vec{M}(3\rightarrow 4,\mathrm{E})=\vec{0}.$$

Si on réécrit la dernière équation en projection sur $\vec{z}$ (la seule possible) on obtient :

$$0+\left(\overrightarrow{EC}\wedge\vec{R}(2\rightarrow 4)\right).\vec{z}=0.$$

On en déduit que la seule possibilité (en excluant le cas particulier de résultante nulle) est que les deux vecteurs soient colinéaires. Donc la résultante de l'effort entre 2 et 4 est portée par EC (il en est de même pour l'effort entre 3 et 4).

La projection de l'équation de la résultante n'a pas d'intérêt particulier sinon de constater que les deux résultantes sont opposées.

2. On isole le système 5 + 6. Ce système (vérin et tige de vérin) est exactement dans la même situation que le système précédent. Il est soumis à deux torseurs d'action en F et D correspondant à des liaisons pivot parfaites. On applique donc le même raisonnement pour trouver que les deux résultantes $\vec{R}(3\rightarrow 5)$ et $\vec{R}(2\rightarrow 5)$ sont opposées et colinéaires à FD.

3. On isole le solide 3. Ce solide est soumis à trois actions en F, E et D correspondant à des liaisons pivot parfaites. On a donc dans les torseurs d'actions exprimés aux points F, E et D les résultantes $\vec{R}(5\rightarrow 3)$, $\vec{R}(4\rightarrow 3)$ et $\vec{R}(1\rightarrow 3)$.

- On applique le PFS au solide 3. $\left\{\mathcal{A}(4\rightarrow 3)\right\}+\left\{\mathcal{A}(5\rightarrow 3)\right\}+\left\{\mathcal{A}(1\rightarrow 3)\right\}=0.$
  Considérons dans un premier temps les deux premiers torseurs. On choisit comme point pour le calcul des moments ni F ni E mais le point de concours des supports des résultantes $\vec{R}(5\rightarrow 3)$ et $\vec{R}(4\rightarrow 3)$.
  En ce point, par définition les moments seront nuls. On en déduit donc que le moment des actions de 1 sur 3 doit lui aussi en ce point être nul (équation du moment sur $\vec{z}$).
  Nous venons de montrer que pour un solide soumis à trois forces coplanaires (issues de liaisons pivot parfaites par exemple) l'équilibre impose que les trois forces soient concourantes. Il faut qu'elles vérifient aussi l'équation de la résultante.

- Nous connaissons parfaitement la direction de la résultante de 5 sur 3 (droite FD) et celle de 4 sur 3 (droite CE). Les actions de 1 sur 3 (la résultante) passe donc par le point d'intersection de FD et de CE. Sa direction est connue.

4. On isole l'ensemble 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7. Il est soumis aux actions extérieures en A et B de la part du solide 1 (liaisons pivots parfaites) et de la gravité aux centres de gravité G2 et G7 des solides 2 et 7. Nous avons donc dans ce cas quatre torseurs qui se réduisent aux points considérés à des résultantes. Nous ne pouvons pas appliquer le résultat précédent. Mais les deux efforts dus à la gravité sont connus. Il est possible de les remplacer par un torseur équivalent au barycentre G_{27} des masses des deux solides. Dans ce cas le torseur sera de la forme $\left\{\mathcal{A}(\text{gravité} \rightarrow 2+7)\right\}$ constitué d'une résultante $\vec{R}(\text{gravité} \rightarrow 2+7) = m_2 \cdot \vec{g} + m_7 \cdot \vec{g}$ et d'un moment nul.

Nous nous retrouvons alors avec le cas précédent de trois forces coplanaires appliquées. On peut résoudre sans difficulté particulière avec la direction de la résultante des actions de 1 sur l'ensemble en B connue (déterminée précédemment) et celle de la gravité connue également en direction. On en déduit la direction des actions de 1 sur l'ensemble en A.

5. Il suffit de reprendre l'équilibre de 3 pour résoudre complètement le problème à ce stade sans aucune difficulté, soit analytiquement soit graphiquement.

PARTIE III.

1. La conservation de la masse s'écrit : $\rho_c \cdot (\vec{v_c} \cdot \vec{e_r}) \cdot \mathrm{d}A = \rho_p \cdot (\vec{w} \cdot \vec{e_r}) \cdot \mathrm{d}A$. On en déduit $\rho_c = 4{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On a également $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = w$ dont on tire l'équation horaire $a(t) = a_0 + wt$ et la masse de propergol à un instant donné : $M_p(t) = \rho_p \pi(b^2 - a^2)L$; en particulier : $M_p(0) = 244$ t.

2. Du fait de la conservation de la masse de gaz, le débit radial est égal au débit axial : $2\pi a_0 L v_c = \pi a_0^2 v$, soit $v = 2(L/a_0)v_c$. Le rapport des deux temps caractéristiques s'écrivant :

$$\tau_{tr}/\tau_{cb} = [L/(b - a_0)](w/v).$$

on a d'une part $L/(b - a_0) = 50$ et d'autre part $w/v = \dfrac{1}{2}(a_0/L)(w/v_c) = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$. Par conséquent, $\tau_{tr}/\tau_{cb} \sim 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ et l'approximation quasi statique est légitime.

3. Puisque l'intégrale dont se déduit $\vec{R}$ est étendue à une surface fermée, on peut, sans rien changer, retrancher l'intégrale de la pression atmosphérique qui est constante :

$$\vec{R} = \int_{\partial \mathcal{S}_i} (p - p_a) \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}A + \int_{\partial \mathcal{S}_e} (p - p_a) \cdot \vec{n} \cdot \mathrm{d}A.$$

Mais, sur $\partial \mathcal{S}_e$, $p = p_a$ et la deuxième intégrale disparaît, ce qui établit le résultat.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

4. Après avoir avoir tenu compte des hypothèses et noté que sur $(\partial\mathcal{S})_\text{i}$, $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$ (fond et tuyère) ou $\vec{v}\cdot\vec{e}_z=0$ (propergol). Le théorème des quantités de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}}\rho\cdot(\vec{v}\cdot\vec{e}_z)\cdot(\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot\mathrm{d}A &= -\int_{\partial\mathcal{D}}(p-p_\text{a})\cdot(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\cdot\mathrm{d}A\\ &= -\int_{(\partial\mathcal{S})_\text{i}}(p-p_\text{a})\cdot(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\cdot\mathrm{d}A\\ &\quad -\int_{\Sigma}(p-p_\text{a})\cdot(\vec{n}\cdot\vec{e}_z)\cdot\mathrm{d}A,\end{aligned}$$

où nous reconnaissons la résultante cherchée.

5. Nous avons admis que la tuyère est adaptée, si bien que sur Σ, $p=p_\text{a}$, ce qui annule la deuxième intégrale.

6. Dans la première, nous avons tout d'abord : $\vec{n}=\vec{e}_R$ et, par suite : $\vec{v}_\text{e}\cdot\vec{n}=v_\text{e}$. Ensuite, en désignant par θ l'angle formé par $\vec{e}_R$ et $\vec{e}_z$, il vient : $\vec{v}_\text{e}\cdot\vec{e}_z=v_\text{e}\cdot(\vec{e}_R\cdot\vec{e}_z)=v_\text{e}\cos\theta$. Enfin, l'élément de surface est un anneau découpé sur la calotte sphérique Σ, de rayon $R_\text{t}\sin\theta$ et d'aire $\mathrm{d}A=(2\pi R_\text{t}\sin\theta)\cdot(R_\text{t}\mathrm{d}\theta)$. Il suffit alors de reporter ces transformations pour trouver le résultat demandé.

7. L'écriture de l'équation d'une transformation isentropique en variables (ρ,p) puis en variables (p,ρ) conduit au résultat :

$$\rho_\text{e}=\rho_\text{c}\left(\frac{p_\text{a}}{p_\text{c}}\right)^{1/\gamma}=0{,}18\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

et

$$T_\text{e}=T_\text{c}\left(\frac{p_\text{a}}{p_\text{c}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=1\,850\ \text{K}.$$

8. Il faut utiliser la forme compressible du théorème de Bernoulli (cas d'un fluide barotrope) :

$$\frac{\gamma r_\text{g}T_\text{c}}{\gamma-1}+\frac{1}{2}v_\text{c}^2=\frac{\gamma r_\text{g}T_\text{e}}{\gamma-1}+\frac{1}{2}v_\text{e}^2\quad\Rightarrow\quad v_\text{e}=\sqrt{\frac{2\gamma r_\text{g}}{\gamma-1}(T_\text{c}-T_\text{e})+v_\text{c}^2}.$$

Le terme v_c^2 est négligeable et on trouve : $v_\text{e}=2\,360\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Incidemment, on observe que ρ_e, T_e et v_e sont uniformes sur Σ car les valeurs trouvées sont indépendantes de la ligne de courant choisie.

9. Après avoir remarqué que $R_\text{s}\simeq\alpha\ R_\text{t}$, il vient :

$$R=-2\pi R_\text{t}^2\rho_\text{e}v_\text{e}^2\int_0^\alpha\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\ \simeq-\pi R_\text{s}^2\rho_\text{e}v_\text{e}^2=-3{,}15\cdot10^6\ \text{N}\simeq-315\ \text{tf}.$$

La résultante est entièrement engendrée par la réaction à l'éjection de quantité de mouvement. Elle est négative, c'est-à-dire orientée vers l'avant de la fusée et excède son poids (comme on pouvait l'espérer...).

PARTIE IV.

1. a) Calcul de $\overline{SP'}$: d'après la relation de Chasles, on a $\overline{SP'} = \overline{SH} + \overline{HP'}$ où H est le projeté orthogonal de I sur l'axe du miroir (figure 6). Or

$$\overline{SH} = z \quad \text{et} \quad \overline{HP'} = \frac{\overline{IH}}{\tan 2\alpha} = \frac{\overline{IH}}{2\tan\alpha}\left(1 - \tan^2\alpha\right),$$

d'où

$$\overline{SP'} = z - \frac{x}{2\tan\alpha}\left(1 - \tan^2\alpha\right).$$

b) On a

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}.$$

Avec l'orientation de $\vec{N}$ choisie sur la figure 6, la relation $\vec{T}.\vec{N} = 0$ impose

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\tan\alpha = \dfrac{x_{\vec{N}}}{z_{\vec{N}}} = -\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. L'expression de $\overline{SP'}$ découle du résultat de la question 1a) et de cette expression de $\tan\alpha$.

2. a) f_1 a la dimension d'une longueur car z et x sont des longueurs. Cette grandeur est négative car $z^{(p)}$ est négatif (figure 6).

b) $\dfrac{\mathrm{d}z^{(p)}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{2f_1}$ et $\overline{SP'} = \dfrac{x^2}{4f_1} + f_1 - \dfrac{x^2}{4f_1} = f_1$. Ce résultat ne dépend pas de x : tout rayon arrivant parallèlement à l'axe optique d'un miroir parabolique converge après réflexion en un unique point P'. Le miroir parabolique est rigoureusement stigmatique pour un point à l'infini sur l'axe : il ne présente pas d'aberration de sphéricité.

c) f_1 est la distance focale du miroir parabolique (P' est le conjugué d'un point P à l'infini sur l'axe).

3. a) R a la dimension d'une longueur car x et z sont des longueurs. R est négatif car $z^{(s)}$ est négatif (figure 6).

b) $\dfrac{\mathrm{d}z^{(s)}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ et $\overline{SP'} = R - \dfrac{R^2}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$. Ce résultat dépend de x : les rayons arrivant parallèlement à l'axe optique d'un miroir sphérique ne convergent pas en un point unique de l'axe après réflexion sur le miroir, mais en des points dont la distance au sommet dépend de x. Le miroir sphérique n'est pas rigoureusement stigmatique pour un point à l'infini sur l'axe : il présente une aberration de sphéricité.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

c) Pour $x = 0$, $\overline{SP'} = R/2 < 0$. On retrouve la distance focale d'un miroir sphérique concave dans les conditions de Gauss, où R représente le rayon de courbure algébrique du miroir.

4. a) On a $z^{(s)} \approx R - R(1 - \frac{x^2}{2R^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{x^4}{2R^4}) \approx \frac{x^2}{2R} + \frac{x^4}{8R^3} \approx \frac{x^2}{4f_1} + \frac{x^4}{64f_1^3}$.

b) Par rapport à un miroir parabolique de distance focale f_1, un rayon se réfléchissant au point *I(x, z)* sur un miroir sphérique de focale f_1 parcourra un chemin optique plus court de $\approx 2\left(z^{(s)} - z^{(p)}\right)$ où le facteur 2 traduit l'aller-retour dû à la réflexion de la lumière sur le miroir.

c) L'épaisseur de lame traversée par un rayon arrivant sur le miroir en x est $T(x) - T(0)$, le chemin optique parcouru dans la lame est $n(T(x) - T(0))$. La différence de chemin optique introduite par la lame par rapport au cas où elle n'est pas présente est donc $(n - 1)\,(T(x) - T(0))$. Le terme $(n\text{-}1)$ traduit donc le fait que l'on ôte au trajet du rayon dans l'air la partie correspondant au passage dans la lame $(-(T(x) - T(0))$ et qu'on la remplace par le chemin optique effectué dans la lame $(n(T(x) - T(0))$.

d) On a $T(x) - T(0) = 2\left(z^{(s)} - z^{(p)}\right) = \frac{x^4}{32(n-1)f_1^3}$.

$$\text{A.N. : } |T(x) - T(0)|_{\max} = 0{,}0036 \text{ cm}.$$

5. Le nouveau profil est $z'^{(p)} = \frac{x^4}{4f_2}$.

On a alors $(n - 1) \cdot [T(x) - T(0)] = 2\left(\frac{x^2}{4f_1} + \frac{x^4}{64f_1^3} - \frac{x^2}{4f_2}\right)$, soit, après calculs, l'expression proposée.

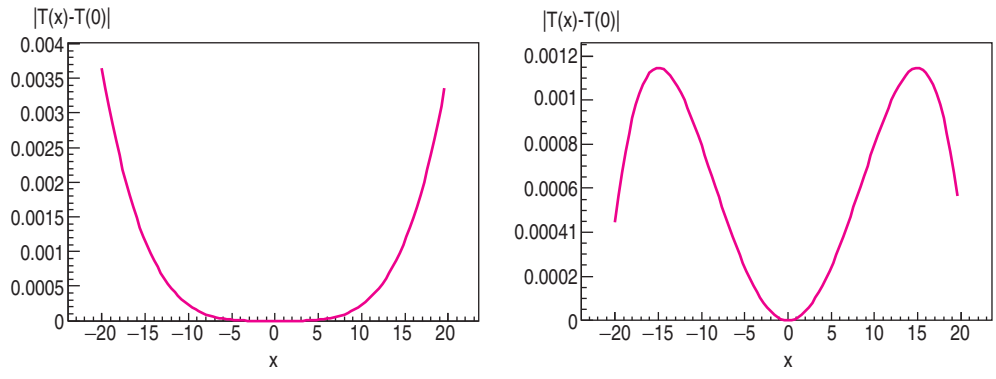


Figure 12

À gauche : profil de la question 4c). À droite : profil de la question 4d).

PARTIE V.

1. Modèle électrique simple du système Terre-atmosphère

1.1 a) Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée $\sum$ est égal au quotient des charges intérieures à la surface $\sum$ par la permittivité du vide ε_0 .

b) La distribution de charge étant à symétrie sphérique, elle est invariante par rotation d'angle θ et par rotation d'angle φ (en coordonnées sphériques) ; par conséquent, le champ électrostatique $\vec{E}(z)$ et le potentiel $V(z)$ électrostatique en un point M ne dépendent que de l'altitude z de ce point au-dessus de la surface de la Terre; les lignes de champ étant normales aux surfaces équipotentielles (ici des sphères de centre O), le champ $\vec{E}(z)$ est ici radial. On choisira donc comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon $(R + z)$ avec $0 < z < H$.

Le flux du champ électrostatique à travers cette surface s'écrit :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} E(z) \cdot \mathrm{d}S = E(z) \cdot 4\pi(R+z)^2 = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$E(z) = -\frac{Q}{4\pi\,(R+z)^2}$$

1.2 a) La différence de potentiel entre les deux sphères équipotentielles $V(z = R) = 0$ et $V(z = R + H) = V_H$ s'écrit : $V_H - 0 = \displaystyle\int_0^H -E(z) \cdot \mathrm{d}z$

$$V_H = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+H)} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

1.2 b) On en déduit la capacité du condensateur ainsi formé :

$$C = \frac{Q}{V_H} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R(R+H)}{H}$$

2. Câble lancé depuis la navette spatiale Columbia

2.1 Le champ magnétique terrestre est considéré ici approximativement dirigé selon l'axe des pôles géographiques, il est donc perpendiculaire au plan équatorial dans lequel la navette décrit une orbite circulaire ; la vitesse est tangente à la trajectoire (suivant $\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires) et le champ électromoteur est donc dans la direction du câble (radiale par rapport à la Terre) :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_T = v \cdot \vec{u}_\theta \wedge (-B_T \cdot \vec{u}_z) = -v \cdot B_T \cdot \vec{u}_r$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On en déduit la f.é.m e induite entre les deux extrémités du câble :

$$e = E_{\text{m}} \cdot L = v \cdot B_T \cdot L = 4{,}6 \text{ kV}$$

2.2 La puissance électrique produite vaut : $p = e \cdot I = 2{,}3$ kW

2.3 La force de Laplace agissant sur le câble s'écrit :

- $\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B_T}$ où le vecteur $I \cdot \vec{L}$ indique le sens du courant, c'est-à-dire ici le sens du champ électromoteur.
- $\vec{F} = -I \cdot L \cdot B_T \cdot \vec{u_\theta}$ soit numériquement $F = 0{,}3$ N.

Il en résulte que la force de Laplace est en sens contraire du vecteur vitesse et freine la navette (conformément à la loi de Lenz) ; l'énergie potentielle de pesanteur est transformée peu à peu en énergie électrique.

Partie VI.

1. Alimentation électrique d'un satellite artificielle

1.1 $\eta \,.\, \Phi \,.\, S = P_0 \Rightarrow S = \dfrac{P_0}{\eta \,.\, \Phi} \approx 0{,}71 \text{ m}^2$.

Chaque photon a l'énergie $h \cdot \nu$; l'onde, de fréquence ν, transporte Φ / ($h \cdot \nu$) photons par unité de temps et de surface.

Chaque photon cède sa quantité de mouvement h / λ au panneau ; la pression est la quantité de mouvement reçue par unité de surface de la paroi et par unité de temps :

$$\varpi = \frac{\Phi}{h \cdot \nu} \cdot \frac{h}{\lambda} = \frac{\Phi}{\lambda \cdot \nu} = \frac{\Phi}{\text{c}} \approx 0,47 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \Rightarrow F = \frac{\Phi \cdot S}{\text{c}} = \frac{P_0}{\eta \cdot \text{c}} \approx 0,33 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

1.2 Chaque désintégration $^{238}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U} + {}^{4}_{2}\text{He}$ libère l'énergie

$$Q = (\text{M}_{\text{Pu}} - \text{M}_{\text{U}} - \text{M}_{\alpha}) \cdot \text{c}^2 \approx 0{,}006004 \times 931{,}49 \text{ MeV} \approx 5{,}59 \text{ MeV} \approx 8{,}94 \cdot 10^{-13} \text{ J}.$$

Un échantillon de N_0 noyaux Pu subit $\lambda \cdot N_0$ désintégrations par unité de temps et libère la puissance $\lambda \cdot N \cdot Q$, dont $\eta_{\text{R}} \cdot \lambda \cdot N_0 \cdot Q = P_0$ convertie en énergie électrique. Chaque noyau Pu étant dans le groupement PuO_2 de masse molaire $\text{M}_{\text{PuO2}} = \text{M}_{\text{Pu}} + 2 \cdot \text{M}_{\text{O}} \approx 270$ g : $m_0 = N_0 \cdot M_{PuO2} / N_A$.

$$P_0 = \frac{\eta_{\text{R}} \cdot \lambda \cdot Q \cdot m_0 \cdot \text{N}_{\text{A}}}{\text{M}_{\text{PuO2}}} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{T} \Rightarrow m_0 = \frac{\text{M}_{\text{PuO2}} \cdot T \cdot P_0}{\text{N}_{\text{A}} \cdot \ln(2) \cdot \eta_{\text{R}} \cdot Q} \approx 5{,}0 \text{ kg}.$$

Évolution du nombre N de noyaux Pu et du nombre $\lambda \cdot N$ de désintégrations par unité de temps, auquel la puissance P est proportionnelle : $N = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$ et

$$\lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \Rightarrow P = P_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t) \Rightarrow t = T \cdot \frac{\ln(P_0 / P)}{\ln(2)} \approx 51{,}5 \text{ ans}.$$

2. Fusée de science-fiction

2.1 a) Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie relativiste du système, avant et après l'éjection :

$$\begin{cases} 0 = \gamma(V)\cdot M\cdot V - \dfrac{N\cdot h}{\lambda} = \gamma(V)\cdot M\cdot V - \dfrac{N\cdot h\cdot \nu}{\mathrm{c}} \\ M_0\cdot \mathrm{c}^2 = \gamma(V)\cdot M\cdot \mathrm{c}^2 + N\cdot h\cdot \nu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma(V)\cdot M\cdot V = \dfrac{N\cdot h\cdot \nu}{\mathrm{c}} \\ \gamma(V)\cdot M\cdot \mathrm{c}^2 = M_0\cdot \mathrm{c}^2 - N\cdot h\cdot \nu \end{cases}$$

$$\varepsilon = \frac{\beta}{1+\beta} \approx \frac{3}{8}\,,\ \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,\ M = M_0\cdot\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx \frac{1}{2}\cdot M_0\,,$$

$$m = M_0 - M \approx \frac{1}{2}\cdot M_0.$$

b) La conservation de la quantité de mouvement implique l'émission de deux photons de même fréquence et de sens opposés. Conservation de l'énergie relativiste :

$$2\cdot \mathrm{m_P}\cdot \mathrm{c}^2 = 2\cdot h\cdot \nu_0 \Rightarrow \nu_0 = \frac{\mathrm{m_P}\cdot \mathrm{c}^2}{h} \approx 2{,}3\cdot 10^{23}\,\mathrm{Hz} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \frac{h}{\mathrm{m_P}\cdot \mathrm{c}} \approx 1{,}3\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}.$$

2.2 $\left\{ \varepsilon = \dfrac{N\cdot h\cdot \nu}{M_0\cdot \mathrm{c}^2}\ ;\ m = N\cdot \mathrm{m_P}\ ;\ \nu_0 = \dfrac{\mathrm{m_P}\cdot \mathrm{c}^2}{h} \right\} \Rightarrow \dfrac{\nu}{\nu_0} = \dfrac{M_0\cdot \varepsilon}{N\cdot \mathrm{m_P}} = \dfrac{M_0}{m}\cdot \varepsilon \approx \dfrac{3}{4}.$

Remarque

ν est en fait la fréquence moyenne des photons éjectés, les deux photons d'une paire de photons d'annihilation n'ayant pas nécessairement la même fréquence après réflexion sur le miroir parabolique, selon leur direction initiale.

2.3 Produire des antiprotons (ou des antiatomes d'hydrogène) en grande quantité et les piéger dans un réservoir immatériel (par un champ magnétique par exemple) afin qu'ils ne s'annihilent pas avec les protons des parois.

Chapitre 1

1.1 a) On a la relation : $x^2 + y^2 = a^2$ avec z qui augmente en fonction de θ. La trajectoire est une hélice. Le pas p correspond à z quand $\theta = 2\pi$, donc $p = 2\pi h$.

b) $\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho + z \cdot \vec{u}_z$ et $\vec{v} = a\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + h\dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$ (NB : ρ = constante, $\dot{\rho} = 0$)

$\vec{a} = -a\dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_\rho + a\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta + h\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_z$ (NB : $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho$). La vitesse est constante lorsque $\dot{\theta}$ est constante.

c) $\vec{v}$ est dans le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et est perpendiculaire à $\vec{u}_\rho$. Si α est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$, alors on a : $\tan\alpha = \dfrac{h\dot{\theta}}{a\dot{\theta}} = \dfrac{h}{a}$ donc l'angle α est constant.

d) $\theta = \omega t$ donc $\dot{\theta} = \omega$ et $\ddot{\theta} = 0$

On a alors $\|\vec{v}\| = \omega \cdot \sqrt{a^2 + h^2}$ = cste ;
$\vec{a} = -a\omega^2 \cdot \vec{u}_\rho$ donc $\|\vec{a}\| = a\omega^2$= cste.

1.2 a) On a : $\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$, $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho$, $\ddot{r} = 2\alpha$, $\dot{r} = 2\alpha t$, $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$.

Donc : $\vec{v} = 2\alpha t \cdot \vec{u}_\rho + \alpha\omega t^2 \cdot \vec{u}_\theta$
et $\vec{a} = \left(2\alpha - \alpha\omega^2 t^2\right) \cdot \vec{u}_\rho + (4\alpha\omega t) \cdot \vec{u}_\theta$

b) $r(\theta) = \left(\dfrac{\alpha}{\omega^2}\right) \cdot \theta^2$ (équation d'une spirale)

1.3 a) et **b)** $v(t) = -3t^2 + 6t - 2$ et $a(t) = -6t + 6$

c)

t	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$1+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$a(t)$		+	0	−	
$v(t)$	−2	0	1	0	$-\infty$

d) Entre 0 et $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, décélération ; entre $1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et 1, accélération ; entre 1 et $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, décélération ; entre $1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $+\infty$, accélération.

1.4 En chute libre, on a : $y - y_0 = \dfrac{1}{2}gt^2$ donc $t_{\text{chute}} = 0{,}99$ s.
Donc, la distance horizontale parcourue pendant ce temps est :
$x - x_0 = v_0 t = 4{,}45$ m, distance inférieure à 6,2 mètres.
Donc le cascadeur ne peut réaliser ce saut !

1.5 a) On a : $x_H = \dfrac{x_S}{2}$ et $y_H = \dfrac{y_M}{2}$; d'après Pythagore, on a : $x_H^2 + y_H^2 = a^2$
L'homme décrit donc un cercle de centre O (origine du repère) et de rayon a.

b) On a : $y_H^2 = a^2 - x_H^2$ donc, $\dot{y}_H = \dfrac{-x_H\dot{x}_H}{\sqrt{a^2 - x_H^2}}$
Ainsi on a : $\vec{v}_H = x_H \cdot \vec{i} + y_H \cdot \vec{j}$ et donc $\|\vec{v}_H\|^2 = \dot{x}_H^2 + \dot{y}_H^2$
On obtient donc :

$$\|\vec{v}_H\| = \frac{a\dot{x}_H}{\sqrt{a^2 - x_H^2}}$$

c) Si on pose $\alpha = \dfrac{2}{3}$, on obtient alors :

$$\frac{x_H^2}{(1-\alpha)^2} + \frac{y_H^2}{\alpha^2} = 4a^2$$

C'est l'équation d'une ellipse de centre O, de demi-axe $2a(1-\alpha)$ suivant x et demi-axe $2a\alpha$ suivant y.

1.6 a) et **b)** On a : $\vec{v} = R\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$ et $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ avec le vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$.

c) On a de même :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho + R\ddot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

d) Quand le mouvement est circulaire et uniforme, on a : $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$. Donc :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\rho = -R\omega \cdot \vec{u}_\rho.$$

L'accélération est centripète.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 2

2.1 a) , **b)**. et **c)** Poids appliqué au projectile + PFD : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$, donc $\vec{a} = \vec{g}$. Donc par intégrations successives + conditions limites, on trouve :

$$\vec{v} = (v_0 \cos\alpha) \cdot \vec{i} + (-gt + v_0 \sin\alpha) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{r} = (v_0 t \cos\alpha) \cdot \vec{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h\right) \cdot \vec{j}$$

Quand le projectile touche le sol, on a $y = 0$, soit

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h = 0$$

La résolution de cette équation du second degré donne :

$t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2(\sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}$, $t_1 < 0$ impossible

$t_2 = \dfrac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2(\sin\alpha)^2 + 2gh}}{g}$; on trouve : $t_2 = 4{,}73$ s

La distance d correspond au temps t_2 : donc, $d = 47{,}3$ m.

La vitesse du projectile touchant le sol correspond au temps t_2 : $v = 31{,}6$ m · s^{-1}.

d) On écrit : $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$, et on remplace t dans l'expression de y. On obtient alors l'équation de la trajectoire :

$$y = \left(\frac{g}{2v_0^2(\cos\alpha)^2}\right) x^2 + (\tan\alpha)x + h$$

2.2 a) On a d'après le PFD à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

En projetant sur un axe parallèle au plan incliné et dans le sens descendant de la pente, on obtient : $mg \sin\alpha - kx_e = 0$ soit $x_e = \dfrac{mg \sin\alpha}{k}$

b) D'après le PFD, on a : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$; en projetant comme dans le a), on a : $mg \sin\alpha - kx = m\ddot{x}$ soit l'équation différentielle suivante : $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = g \sin\alpha$

La solution de l'équation sans second membre est : $x_1 = A \cos\left(\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right) t + \phi\right)$

Une solution particulière est obtenue en posant x = cste soit $\ddot{x} = 0$.

On a alors : $x_2 = x_e = \dfrac{mg \sin\alpha}{k}$

La solution générale est :

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A \cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right) t + \phi\right) + \frac{mg \sin\alpha}{k}$$

Avec les conditions limites : à $t = 0$, $x = x_e - x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Alors l'équation horaire est :

$$x = x_0 \cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right) t + \pi\right) + \frac{mg \sin\alpha}{k}$$

2.3 a) D'après le PFD, on a : $\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ et en projetant suivant un axe OZ vertical pointant vers le haut, on obtient : $-mg + F = -ma$ soit $F = 663$ N ($m = 85$ kg).

b) D'après le PFD, on a : $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$ et en projetant suivant un axe OZ vertical pointant vers le haut, on obtient : $-mg + T = -ma$ soit $F = 624$ N ($m = 80$ kg).

2.4 a) À l'équilibre, on a : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; en projetant sur un axe parallèle à la pente et suivant le sens descendant de la pente, on obtient : $mg \sin\alpha - R_T = 0$; en projetant sur un axe perpendiculaire à la pente (dirigé vers le haut) on obtient : $-mg \cos\alpha + R_N = 0$. Donc on a $R_T = R_N \tan\alpha$.

On a équilibre tant que $R_T \leqslant \mu_S R_N$, donc tant que $\tan\alpha \leqslant \mu_S$, donc angle limite $\alpha_0 = 16{,}7°$.

b) Ici $\alpha > \alpha_0$, donc le corps glisse sauf si une force $\vec{f}$ est exercée dans le sens opposé au mouvement descendant. On écrit le PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$, soit en projetant suivant les axes précédents : $mg \sin\alpha - R_T - f = 0$ et $-mg \cos\alpha + R_N = 0$,

donc la plus petite force est :

$$f = mg(\sin\alpha - \mu_S \cos\alpha) = 35{,}5 \text{ N}.$$

c) Même méthode qu'à la question b), avec $\vec{R}_T$ orientée cette fois dans le sens descendant de la pente (car opposée au mouvement ascendant), et coefficient de frottement dynamique utilisé ici. Donc, on obtient la force f suffisante pour avoir mouvement rectiligne uniforme ascendant sur la pente : $f = mg(\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha) = 78{,}6$ N.

2.5 a) D'après l'équilibre de la caisse A avec la masse C dessus, on a : $\vec{P}_{A+C} + \vec{T}_A + \vec{R}_N + \vec{f} = \vec{0}$ (où $\vec{f}$ est la force de frottement de la caisse A sur la table) ; soit en projetant respectivement suivant un axe parallèle à la table et dirigé vers la droite et un axe perpendiculaire à la table et dirigé vers le haut : $T_A - f = 0$ et $-(m_A + m_C)g + R_N = 0$.
De part et d'autre de la poulie, la force de tension de la corde se transmet ; on a donc :

$$T_A = T_B = T$$

D'après l'équilibre de la masse B, on a : $\vec{P}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$, soit en projetant sur un axe vertical dirigé vers le haut : $-m_B g + T_B = 0$.
On arrive alors aux expressions suivantes :

$$f = T = m_B g \text{ et } R_N = (m_A + m_C)g$$

Or l'équilibre sera maintenu tant que $f \leqslant \mu_S R_N$, donc pour $m_c \geqslant 6{,}7$ kg.

b) En appliquant le PFD pour la caisse A et la masse B respectivement, on obtient :
$\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{R}_N + \vec{f} = m_A \cdot \vec{a}_A$ et $\vec{P}_B + \vec{T}_B = m_B \cdot \vec{a}_B$.
On note que la poulie transmet les tensions de cordes et les intensités des accélérations, donc on peut écrire : $T_A = T_B = T$ et $a_A = a_B = a$.
En effectuant les mêmes projections qu'à la question a), on obtient :

$$T - m_B g = -m_B a$$
$$T - f = T - \mu_D R_N = m_A a \; ; \; R_N - m_A g = 0$$

On obtient alors :

$$a = \frac{(m_B - \mu_D m_A)\, g}{(m_A + m_B)} = 2{,}61 \text{ m.s}^{-2}$$

et $T = \dfrac{m_A m_B g(1 + \mu_D)}{(m_A + m_B)} = 35{,}9$ N

2.6 a) On applique le PFD sur la gouttelette A : $\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$. On projette cette relation sur un axe OZ vertical (dirigé vers le haut) : dans ce cas les vecteurs accélération et vitesse sont dirigés vers le bas (sens de la chute). Donc, on obtient :

$$-m \cdot \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -mg + 6\pi\mu r V$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{6\pi\mu r}{m}\right) V = g$$

L'équation sans second membre a pour solution :

$$V_1 = A \cdot \exp\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right) t\right)$$

Une solution particulière est : $V_2 = \dfrac{mg}{6\pi\mu r}$
La solution générale est donc :

$$V = V_1 + V_2 = A \cdot \exp\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right) t\right) + \frac{mg}{6\pi\mu r}$$

Avec les conditions limites : à $t = 0$, $V(0) = 0$, on arrive à l'expression suivante :

$$V = \frac{mg}{6\pi\mu r}\left[1 - \exp\left(\left(\frac{-6\pi\mu r}{m}\right) t\right)\right]$$

b) Quand t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro, donc la vitesse tend vers une valeur limite $V_0 = \dfrac{mg}{6\pi\mu r}$.

2.7 a) On a : $\dfrac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x} = \dfrac{Aax^2(x-a)(3a-x)}{x^6}$, donc $\dfrac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$ est du signe de $(x-a)(3a-x)$. On a le tableau de variation suivant :

t	0		a		$3a$		$+\infty$
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$	
$3a-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{\mathrm{d}E_p(x)}{\mathrm{d}x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$E_p(x)$	$+\infty$	décroissant	0	croissant	$\frac{4A}{27}$	décroissant	0

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On a équilibre stable en $x = a$ et instable en $x = 3a$.

b) La force appliquée à la particule est telle que :

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x}$$

La force est attractive si $F_x < 0$ soit $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x} > 0$, soit dans la région $a < x < 3a$.

La force est répulsive si $F_\mathrm{x} > 0$ soit $\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}(x)}{\mathrm{d}x} < 0$, soit dans les régions où $x < a$ et où $x > 3a$.

c) L'énergie mécanique $\dfrac{A}{9}$ est inférieure à $\dfrac{4A}{27}$: donc à la position $x = 1{,}5a$ la particule est dans un puits de potentiel (délimité par les points correspondant à $E_\mathrm{p}(x) = \dfrac{A}{9}$, c'est-à-dire $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p}$ et donc $E_\mathrm{c} = 0$ soit vitesse nulle).

Pour « libérer » la particule, il faut lui fournir l'énergie E_L nécessaire pour franchir la barrière de potentiel, soit $E_\mathrm{L} = \dfrac{4A}{27} - \dfrac{A}{9} = \dfrac{A}{27}$.

La conservation de l'énergie mécanique donne alors :

$E_\mathrm{mi} = \dfrac{4A}{27} = E_\mathrm{mf} = E_\mathrm{p}(+\infty) + \dfrac{1}{2}mv^2$ avec $E_\mathrm{p}(+\infty) = 0$; donc, $v = \sqrt{\dfrac{8A}{27m}}$

2.8 a) La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

On obtient alors : $v^2 = 2g(H - h)$

Le PFD donne : $\vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$; on projette cette relation suivant les axes du repère de Frenet.

NB : on définit l'angle de rotation θ du chariot lorsqu'il est sur la boucle, comme suit : l'angle θ augmente dans le sens trigonométrique et $\theta = 0$ quand le chariot est à la hauteur du centre de la boucle.

On arrive aux relations suivantes, respectivement suivant $\vec{T}$ et $\vec{N}$:

$-mg\cos\theta = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et $mg\sin\theta + R_N = m\dfrac{v^2}{R_\mathrm{c}}$ (où R_c = rayon de courbure).

En combinant les relations obtenues, on arrive à l'expression de R_N :

$$R_N = 2(H - h) - R_c\sin\theta$$

Le chariot reste accroché sur les rails si $R_N > 0$, donc : $H > h + \dfrac{R_\mathrm{c}}{2}\sin\theta$

Pour que le chariot fasse un tour complet, il doit atteindre le sommet de la boucle caractérisé par $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et $h = 2R_\mathrm{c}$. Donc la condition sur H est :

$$H > \frac{5R_\mathrm{c}}{2} = \frac{5R}{2}$$

b) Quand le chariot quitte les rails, on a $v = 0$ et donc d'après la relation obtenue par conservation de l'énergie, on obtient : $H = h$. Quand le chariot tombe, $R_N = 0$, donc $H = h + \dfrac{R_\mathrm{c}}{2} \cdot \sin\theta$; donc le chariot tombe pour $\theta = 0$ (quand le chariot est à la hauteur du centre de la boucle).

2.9 a) et **b)** On écrit la conservation de l'énergie mécanique avec $E_\mathrm{mf} = 0$.

Donc, on a : $\dfrac{1}{2}mv_0^2 - \dfrac{\mathrm{G}Mm}{R} = 0$, donc

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\mathrm{G}M}{R}}$$

Sur la Terre : $v_0 = 11{,}2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$;
sur la Lune : $v_0 = 2{,}4\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

c) On imagine que pour que la fusée arrive sur la Lune il faut qu'elle atteigne au moins un point où l'attraction de la Terre et de la Lune se compensent totalement (on note cette position r_n). On note d la distance entre le centre de la Terre et le centre de la Lune. On écrit la conservation de l'énergie mécanique pour la fusée située à la surface de la Terre et à la position r_n.

Donc, on a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{T}m}{R_\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{L}m}{d - R_\mathrm{T}} = 0 - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{T}m}{r_\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{L}m}{d - r_\mathrm{n}}$$

Or à la position r_n, on a les deux attractions (Terre et Lune) dont les effets s'annulent ; donc en r_n,

on a : $-\dfrac{GM_T m}{r_n} + \dfrac{GM_L m}{d - r_n} = 0$, on trouve donc :

$$r_n = \frac{d\sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}}}{1 + \sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}}}.$$

En remplaçant r_n par son expression dans la relation trouvée plus haut donnant v_0, on trouve $v_0 = 11{,}1\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.10 a) On applique le PFD : $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$. On rappelle l'expression de l'accélération dans le repère polaire :

$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{u}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right) \cdot \vec{u}_\theta$; comme $\rho = L$, on a $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.

On a donc : $\vec{a} = \left(-L\dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{u}_\rho + \left(L\ddot{\theta}\right) \cdot \vec{u}_\theta$

On projette la relation issue du PFD sur $\vec{u}_\theta$, et on obtient :

$$-mg \sin\theta = mL\ddot{\theta}, \text{ soit } \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

b) Quand θ est petit, on peut écrire $\sin\theta \approx \theta$; l'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

La solution de l'équation est :

$$\theta_1 = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

avec ω la pulsation $\left(\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}\right)$ et T la période définie par $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$.

c) On peut écrire la conservation de l'énergie mécanique. À noter que la force $\vec{T}$ ne travaille pas car elle s'exerce perpendiculairement au déplacement. Donc seule l'énergie potentielle gravitationnelle intervient. Cette énergie peut s'écrire en fonction de l'angle θ comme suit :

$$E_p(\theta) = -mgx + E_0 = -mgL\cos\theta + E_0$$

(E_0 est une constante)

La vitesse dans le repère polaire vaut : $\vec{v} = \dot{\rho} \cdot \vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$, soit $\vec{v} = L\dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$, donc, l'énergie cinétique s'écrit : $E_c = \dfrac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$.

On obtient donc l'expression de l'énergie mécanique E_m :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta + E_0$$

Comme E_m est constante, on peut dériver son expression par rapport au temps. Donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin\theta\ ;$$

on arrive donc à la même équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$.

2.11 a) La conservation de la quantité de mouvement donne :

$m \cdot \vec{v}_0 + 0 = m \cdot \vec{v}_1 + m \cdot \vec{v}_2$ soit $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

On projette cette relation respectivement suivant un axe parallèle à $\vec{v}_0$ (dans le sens de $\vec{v}_0$) et suivant un axe perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (dirigé vers le haut) ; on obtient : $v_0 = v_1\cos(30) + v_2\cos(45)$ et $0 = -v_1\sin(30) + v_2\sin(45)$

On obtient alors les relations suivantes :

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2} \text{ et } v_1 = v_0\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right),$$

$$v_2 = v_0\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

L'énergie cinétique totale finale s'écrit :

$$E_{cf} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

On peut donc écrire E_{cf} en fonction de l'énergie cinétique initiale $E_{ci} = \dfrac{1}{2}mv_0^2$:

$$E_{cf} = E_{ci}\left(\frac{3}{2+\sqrt{3}}\right)$$

L'énergie cinétique perdue vaut : $\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = 19{,}6$ eV ; la collision est donc inélastique.

b) En reprenant la méthode suivie à la question a), dans le cas général, on obtient l'équation :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$2v_1^2 + \gamma v_0^2 - 2v_0 v_1 \cos\alpha = 0.$$

Chapitre 3

3.1 a) i. Dans $\mathscr{R}$', le propriétaire suit un mouvement rectiligne uniforme, d'équation : $x' = v_{\mathscr{R}} t$. Dans $\mathscr{R}$, on peut donner les coordonnées polaires de l'homme : $\rho = v_{\mathscr{R}} t$; $\theta(t) = \omega t$, ce qui donne $\rho = \frac{v_{\mathscr{R}}}{\omega}\theta$, c'est l'équation d'une spirale.

ii. Dans le système cylindrique, on peut écrire :
$\vec{v}_r = v_{\mathscr{R}} \cdot \vec{u}_\rho$ et $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = (\omega \cdot \vec{u}_z) \wedge \left(v_{\mathscr{R}} t \cdot \vec{u}_\rho\right) = \omega v_{\mathscr{R}} t \cdot \vec{u}_\theta$
Donc, $\vec{v}_a = v_{\mathscr{R}} \cdot \vec{u}_\rho + \omega v_{\mathscr{R}} t \cdot \vec{u}_\theta$

iii. De même pour l'accélération absolue :
$\vec{a}_r = \vec{0}, \vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2 v_{\mathscr{R}} t \cdot \vec{u}_\rho$, $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega v_{\mathscr{R}} \cdot \vec{u}_\theta$
Donc, $\vec{a}_a = -\omega^2 v_{\mathscr{R}} t \cdot \vec{u}_\rho + 2\omega v_{\mathscr{R}} \cdot \vec{u}_\theta$

NB : on retrouve ces résultats en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans $\mathscr{R}$: $\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho$.

b) i. Dans $\mathscr{R}$', l'homme décrit un cercle de centre O et de rayon r_0. Dans $\mathscr{R}$, on a les coordonnées polaires suivantes pour l'homme :

$$\rho = r_0 = \text{cste} \; ; \; \theta(t) = (\omega + \omega').t.$$

Cela correspond aussi à une trajectoire circulaire dans $\mathscr{R}$.

ii. Dans le système cylindrique, on a :
$\vec{v}_r = r_0.\omega'.\vec{u}_\theta$ et $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = (\omega.\vec{u}_z) \wedge \left(r_0.\vec{u}_\rho\right) = \omega.r_0.\vec{u}_\theta$
Donc, $\vec{v}_a = (\omega + \omega').r_0.\vec{u}_\theta$

iii. Pour l'accélération absolue :
$\vec{a}_r = -r_0.\omega'^2.\vec{u}_\rho$, $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2.r_0.\vec{u}_\rho$, $\vec{a}_c = 2.\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = -2.\omega.\omega'.r_0.t.\vec{u}_\rho$
Donc, $\vec{a}_a = -r_0.(\omega + \omega')^2.\vec{u}_\rho$

3.2 a) Dans $\mathscr{R}$, le mouvement de la goutte P est défini par : $\overrightarrow{OP} = (h - vt) \cdot \vec{k}$
On note le point O' matérialisant le passant. On peut écrire : $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$
On sait que : $\overrightarrow{O'O} = -Vt \cdot \vec{i}$; donc,

$$\overrightarrow{O'P} = -Vt \cdot \vec{i} + (h - vt) \cdot \vec{k}$$

Cependant, le référentiel $\mathscr{R}$' (mobile, lié au passant) est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ (fixe, lié à la Terre). Donc, $\vec{i}' = \vec{i}$ et $\vec{k}' = \vec{k}$. Donc dans $\mathscr{R}$', les composantes de la goutte P sont : $x' = -Vt$; $z' = h - vt$.
On peut écrire : $z' = \left(\frac{v}{V}\right) x' + h$; c'est l'équation d'une droite affine de pente $\frac{v}{V}$.

b) Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est le même. En tenant compte de la pente, on a :

$$\overrightarrow{O'O} = -Vt\cos\theta \cdot \vec{i} - Vt\sin\theta \cdot \vec{k} \; ;$$

les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ ont les expressions suivantes : $\vec{i} = \cos\theta \cdot \vec{i}' - \sin\theta \cdot \vec{k}'$ et $\vec{k} = \sin\theta \cdot \vec{i}' + \cos\theta \cdot \vec{k}'$ ($\vec{i}'$ et $\vec{k}'$ sont respectivement parallèle et perpendiculaire à la pente).
On a donc :

$$\overrightarrow{O'P} = -Vt\cos\theta \cdot \vec{i} + [(h - vt) - Vt\sin\theta] \cdot \vec{k}.$$

En remplaçant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$ par leurs expressions en fonction de $\vec{i}'$ et $\vec{k}'$, et en exprimant z' en fonction de x', on obtient à nouveau l'équation d'une droite :

$$z' = \left(\frac{v\cos\theta}{v\sin\theta + V}\right) x' + \left(\frac{hV\cos\theta}{v\sin\theta + V}\right)$$

3.3 a) On note $\mathscr{R}$ le référentiel fixe lié à la rive de départ (origine A, axes AX et AY respectivement parallèle et perpendiculaire à la rive) et $\mathscr{R}$' le référentiel mobile lié à l'eau. $\mathscr{R}$' est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}$: on note son origine A' confondu avec A à $t = 0$.
On a donc la vitesse de l'eau comme vitesse d'entraînement : $\vec{v}_e = V \cdot \vec{i}$. De plus le nageur se déplace dans $\mathscr{R}$' suivant l'axe $A'Y'$: donc, $\vec{v}_r = v \cdot \vec{j}' = v \cdot \vec{j}$.
Donc, $\vec{v}_a = V \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j}$; par conséquent, on a : $\overrightarrow{AM} = Vt \cdot \vec{i} + vt \cdot \vec{j}$; on obtient alors l'équation de la trajectoire : $y_M = \left(\frac{v}{V}\right) x_M$. Le nageur aborde donc la rive opposée quand $y_M = D$, donc avec $x_M = \left(\frac{V}{v}\right) D$. Le temps de nage est $t = \frac{D}{v}$.

b) Cette fois, on impose $\vec{v}_a = v_a \cdot \vec{j}$. Donc, le nageur doit garder une orientation à contre-courant avec un angle α par rapport à la ligne AB. Ainsi on a : $\sin\alpha = \dfrac{V}{v}$.

Le temps de traversée est $t = \dfrac{D}{v\cos\alpha}$. Comme $v\cos\alpha < v$, le temps de traversée dans ce cas est plus long que dans le cas de la question a).

3.4 a) Les forces agissant sur la bille sont le poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$(verticale) et la réaction $\vec{N}$ du tube sur la bille. On a d'après le PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{N} = m \cdot \vec{a}_a$, avec $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, donc $\vec{N} = m \cdot \vec{a}_a$.

La loi de composition des accélérations donne : $\vec{N} = m \cdot (\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c)$

donc $m \cdot \vec{a}_r = \vec{N} - m \cdot \vec{a}_e - m \cdot \vec{a}_c$.

Comme O et O' sont confondus et que le plateau tourne à vitesse angulaire constante, $\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = \omega \cdot \vec{k}' \wedge \left(\omega \cdot \vec{k}' \wedge r' \cdot \vec{i}'\right) = (-r'\omega^2) \cdot \vec{i}'$, $\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = \left(2\omega \cdot \vec{k}'\right) \wedge \left(\dot{r}' \cdot \vec{i}'\right) = 2\dot{r}'\omega \cdot \vec{j}'$.

À noter aussi que $\vec{N}$ est perpendiculaire au tube et dans le sens de la rotation du tube, donc $\vec{N} = \left\|\vec{N}\right\| \cdot \vec{j}' = N \cdot \vec{j}'$. De plus, $\vec{a}_r$est dirigée selon $\vec{i}'$. On trouve alors $a_r = r'\omega^2$ et $N = 2m\dot{r}'\omega$ ($\vec{N}$ est donc opposée à la force de Coriolis)

Dans $\mathscr{R}'$, la bille a un mouvement rectiligne dans le tube.

b) Dans $\mathscr{R}$, le point B représente la bille. Dans le repère polaire, on a :

$$\overrightarrow{OB} = r \cdot \vec{u}_r \text{ et } m \cdot \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t^2} =$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{u}_r + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \cdot \vec{u}_\theta = N \cdot \vec{u}_\theta$$

Donc, on peut écrire : $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = 0$ et $2m\dot{r}\dot{\theta} = N$, avec $\dot{\theta} = \omega$.

On obtient alors l'équation $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$; l'équation caractéristique correspondante est : $x^2 - \omega^2 = 0$, dont la solution générale est (quand t tend vers l'infini) :

$r(t) = \dfrac{r_0}{2}e^{\omega t}$ (spirale logarithmique)

3.5 Dans le référentiel $\mathscr{R}'$ lié à l'ascenseur, on applique le PFD :

$$M \cdot \vec{a}' = \vec{P} + \vec{T} - M \cdot \vec{a}_e - M \cdot \vec{a}_c$$

On a : $\vec{P} = -Mg \cdot \vec{u}_z$; $\vec{T} = k(L - L_0) \cdot \vec{u}_z$; $\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = \vec{0}$ car $\vec{\omega} = \vec{0}$

$\vec{a}_e$ correspond à l'accélération de l'ascenseur (que l'on cherche).

De plus, on se place dans le cas où la masse occupe une position fixe dans $\mathscr{R}'$, donc avec $\vec{a}' = \vec{0}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\vec{0} = -Mg \cdot \vec{u}_z + k(L - L_0) \cdot \vec{u}_z - M \cdot \vec{a}_e,$$

$$\vec{a}_e = \left[\frac{k}{M}(L - L_0) - g\right] \cdot \vec{u}_z.$$

Si on considère le cas où l'ascenseur est non accéléré avec la longueur L_R du ressort, alors :

$$\vec{0} = \left[\frac{k}{M}(L_R - L_0) - g\right] \cdot \vec{u}_z$$

soit

$$\frac{k}{M} \cdot (L_R - L_0) - g = 0.$$

Donc $\dfrac{k}{M} = \dfrac{g}{(L_R - L_0)}$; par conséquent, on a :

$$\vec{a}_e = g\left(\frac{(L - L_R)}{(L_R - L_0)}\right) \cdot \vec{u}_z.$$

On voit donc qu'on peut relativement aisément mesurer l'accélération de l'ascenseur.

3.6 a) Le blé pousse suivant la réaction du support $\vec{R}$. On doit donc déterminer l'expression de $\vec{R}$ dans $\mathscr{R}'$.

b) Le PFD permet d'écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} - m \cdot \vec{a}_e - m \cdot \vec{a}_c = m \cdot \vec{a}_r$$

On a $\vec{a}_r = \vec{0}$ et $\vec{a}_c = \vec{0}$ (graine fixe) ; $\vec{P} = -mg \cdot \vec{k}'$. Donc, $\vec{R} = mg \cdot \vec{k}' - m\omega^2 r' \cdot \vec{i}'$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On note α l'angle que fait la réaction $\vec{R}$ avec la verticale. On obtient la relation suivante pour trouver cet angle α :

$$\tan\alpha = \frac{mr'\omega^2}{mg} = \frac{r'\omega^2}{g}$$

Pour $r_1 = 0{,}1$ m, α vaut 22°. Pour $r_2 = 1$ m, α vaut 77°.
Ainsi, plus la graine est située loin de l'axe de rotation, plus la pousse est inclinée vers cet axe de rotation.

3.7 a) Pas de déviation du fil car la voiture est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel lié à la Terre supposé galiléen.

b) En fait on a $\vec{a}_e = \vec{a}_0$; la voiture se déplace en ligne droite, donc $\vec{a}_c = \vec{0}$. De plus la bille est en équilibre donc $\vec{a}_r = \vec{0}$. La tension du fil est notée $\vec{T}$.
On a : $-m\cdot\vec{a}_0+\vec{T}+\vec{P} = \vec{0}$; en projetant suivant les axes $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ ($\vec{i}'$ dans le sens du mouvement, $\vec{j}'$ vertical dirigé vers le haut), on obtient :

$$-ma_0\cdot\vec{i}'+T\sin\alpha\cdot\vec{i}'+T\cos\alpha\cdot\vec{j}'-mg\cdot\vec{j}' = \vec{0}$$

En combinant les composantes suivant $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$, on trouve : $\tan\alpha = \dfrac{a_0}{g}$.

c) i. $\vec{f}_{ic} = -2m\omega\cdot\vec{k}\wedge R\omega\cdot\vec{u}_\theta = 2mR\omega^2\cdot\vec{u}_r$
$\vec{f}_{ie} - m\omega\cdot\vec{k}\wedge\left(\omega\cdot\vec{k}\wedge R\cdot\vec{u}_r\right) = mR\omega^2\cdot\vec{u}_r$
ii. Donc, $\vec{T}+\vec{P}+\vec{f}_{ic}+\vec{f}_{ie} = \vec{0}$; d'où :

$$\vec{T} = mg\cdot\vec{k} - 3mR\omega^2\cdot\vec{u}_r$$

L'angle γ que fait le fil avec la vertical peut être déterminé comme suit :

$$\tan\gamma = \frac{3mR\omega^2}{mg} = \frac{3R\omega^2}{g}$$

3.8 a) Le satellite reste à la verticale d'un même point de la Terre : sa trajectoire est donc circulaire. D'après le théorème du moment cinétique calculé par rapport au point O (centre de la Terre) et appliqué au satellite M, soumis à une force centrale, on peut écrire : $\dfrac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

Pour que la trajectoire soit dans un plan contenant O (centre de la Terre), il faut que ce plan soit le plan équatorial.

b) Le satellite suit l'orbite circulaire à une vitesse angulaire égale à celle de la rotation de la Terre. On a la relation suivante pour ce mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{F} = -\frac{GM_Tm}{r^2}\cdot\vec{u}_r = -m\frac{v^2}{r}\cdot\vec{u}_r,$$

d'où $\dfrac{GM_T}{r^2} = \dfrac{v^2}{r}$; on a donc : $v^2 = \dfrac{GM_T}{r}$.
De plus, sur une période T d'un jour, le satellite parcourt une distance $2\pi r$: donc, $v = \dfrac{2\pi r}{T}$.
Donc, on obtient : $r_S = \sqrt[3]{\dfrac{GM_TT^2}{4\pi^2}}$. Or on sait que : $GM_T = g_0R_T^2$, donc on a : $r_S = \sqrt[3]{\dfrac{g_0R_T^2T^2}{4\pi^2}}$.
On trouve $r_S = 42626$ km et $v_S = 3{,}1$ km $\cdot$ s^{-1}.

Chapitre 4

4.1 a) Le système considéré est le diable (noté D ou Diable). Il s'agit de recenser les torseurs qui lui sont extérieurs :

$$\left\{\mathcal{A}(\text{Charge}\to D)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{P}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G, \left\{\mathcal{A}(\text{Sol}\to D)\right\}$$
$$= \left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_B \left\{\mathcal{A}(\text{Main}\to D)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C$$

Le torseur résultant noté $\left\{\mathcal{A}(\text{Résultant}\to D)\right\}$ peut être obtenu par la somme des autres torseurs au même point par exemple B :
Torseur de la charge sur le diable exprimé en B

$$\left\{\mathcal{A}(\text{Charge}\to D)\right\}_B$$
$$= \left\{\begin{matrix}\vec{P}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix}-Mg\vec{y}\\ -Mg\vec{y}\wedge\overrightarrow{GB}\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{matrix}-Mg\vec{y}\\ Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha)\vec{z}\end{matrix}\right\}_B$$

puisque $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \frac{h}{2}\vec{x}_1 - \frac{L}{2}\vec{y}_1 + a\vec{y}_1$ avec

$$\vec{x}_1 = (\sin\alpha)\vec{x} - (\cos\alpha)\vec{y} \text{ et}$$

$$\vec{y}_1 = (\cos\alpha)\vec{x} + (\sin\alpha)\vec{y}.$$

Torseur de l'action de la main exprimé en B

$$\left\{\mathcal{A}(\text{Main} \to D)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C = \left\{\begin{matrix}-F\vec{y}\\ -F\vec{y}\wedge\overrightarrow{CB}\end{matrix}\right\}_B = \left\{\begin{matrix}-F\vec{y}\\ -Fb\cos\alpha\,\vec{z}\end{matrix}\right\}_B,$$

avec $\overrightarrow{CB} = -b\vec{y}_1$

Torseur de l'action du sol sur la roue en B

$$\left\{\mathcal{A}(\text{Roue} \to D)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_S = \left\{\begin{matrix}R_y\vec{y}\\ 0\end{matrix}\right\}_B,$$

avec $\overrightarrow{SB} = r\vec{y}$

Torseur résultant en B :

$\left\{\mathcal{A}(\text{Résultant} \to D)\right\} = \left\{\mathcal{A}(\text{Charge} \to D)\right\}_B +$
$\left\{\mathcal{A}(\text{Main} \to D)\right\}_B + \left\{\mathcal{A}(\text{Sol} \to D)\right\}_B$

En projection sur les 3 axes du repère de base, le torseur résultant s'écrit :

$/\vec{x} : 0, \quad /\vec{y} : -Mg + R_y - F, \quad /\vec{z} :$
$Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha - \frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha) - Fb\cos\alpha$

b) Il existe un moment en B qui n'est pas nul et qui a donc tendance à faire tourner la roue et à faire avancer le diable.

c) En considérant le diable comme le système, le PFS appliqué en B s'écrit :

$\left\{\mathcal{A}(\text{Sol} \to \text{Diable})\right\}_B$
$+ \left\{\mathcal{A}(\text{Charge} \to \text{Diable})\right\}_B$
$+ \left\{\mathcal{A}(\text{Main} \to \text{Diable})\right\}_B = \{0\}$

soit en projection sur les axes de la base, la résultante du PFS s'écrit au point B :

$/\vec{y} : -Mg + R_y - F = 0, \quad /\vec{z} : Mg(\frac{h}{2}\sin\alpha -$
$\frac{L}{2}\cos\alpha + a\cos\alpha) - Fb\cos\alpha = 0$

Soit :

$$F = Mg\left(\frac{h}{2b}\tan\alpha - \frac{L}{2b} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\text{et } R_y = P + Mg\left(\frac{h}{2b}\tan\alpha - \frac{L}{2b} + \frac{a}{b}\right)$$

4.2 a) On a $\vec{V}(O \in S_1/S_0) = \vec{0}$ car c'est un point fixe dans le repère R_0. La relation de champ des vitesses donne $\vec{V}(A \in S_1/S_0) = \vec{V}(O \in S_1/S_0) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\overrightarrow{OA} = (a\alpha)\vec{z}_1$.

b) On a $\vec{V}(A \in S_2/S_0) = \vec{V}(A \in S_1/S_0)$ car le point A est le centre de la liaison pivot entre ces deux solides.

$$\begin{aligned}\vec{V}(G \in S_2/S_0) &= \vec{V}(A \in S_2/S_0) + \vec{\Omega}(S_2/S_0)\wedge\overrightarrow{AG}\\ &= (a\alpha)\vec{z}_1 + (\vec{\Omega}(S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_1/S_0)\wedge\overrightarrow{AG}\\ &= (b\beta)\vec{y}_2 + \alpha(a + b\sin\beta)\vec{z}_1\end{aligned}$$

$\vec{V}(G \in S_2/S_1) = \vec{V}(A \in S_2/S_1) + \vec{\Omega}(S_2/S_1)\wedge\overrightarrow{AG} = b\beta\vec{y}_2$.

4.3 a) $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \theta\vec{x}_0$ et $\vec{V}(P \in S_1/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R_0} = -\lambda\theta\vec{y}_1$

b) $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \theta\vec{x}_0$ et $\vec{V}(A \in S_1/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{R_0} = d\theta\vec{y}_1$

c) P étant le centre de masse du curseur, la question **a)** permet de déduire la résultante cinétique.

$$\{\mathcal{C}(Cr/R_0)\} = \left\{\begin{matrix}m\vec{V}(P \in S_1/R_0) = (-m\lambda\theta)\vec{y}_1\\ \mathcal{J}(P,\text{C})\left[\vec{\Omega}(S_1/R_0)\right] = (A_C\theta)\vec{x}_0\end{matrix}\right\}_P$$

d) De la même façon, A étant le centre de masse du disque D, on obtient :

$$\{\mathcal{C}(D/R_0)\}_A = \left\{\begin{matrix}M\vec{V}(A \in S_1/R_0) = Md\theta\vec{y}_1\\ \mathcal{J}(A,D)[\vec{\Omega}(S_1/R_0)] = A_D\theta\vec{x}_0\end{matrix}\right\}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

e) L'énergie cinétique de l'ensemble S_1 par rapport à R_0 est obtenue en calculant le co-moment des torseurs cinématique et cinétique. Pour le curseur Cr, d'après les questions **a)** et **c)** : $2T(\mathrm{C}/R_0) = \{\mathcal{V}(\mathrm{C}/R_0)\}_P \,.\, \{\mathcal{C}(\mathrm{C}/R_0)\}_P = (A_\mathrm{C} + m\lambda^2)\dot{\theta}^2$. Pour le disque D, d'après les questions **b)** et **d)** : $2T(D/R_0) = (A_D + Md^2)\dot{\theta}^2$ et l'on obtient pour S_1 :

$$\begin{aligned} 2T(S_1/R_0) &= 2T(\mathrm{C}/R_0) + 2T(D/R_0) \\ &= (A_\mathrm{C} + A_D + m\lambda^2 + Md^2)\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

f) Les puissances des actions extérieures exercées sur le système S_1 se calculent en effectuant le co-moment du torseur des efforts et du torseur cinématique, tous deux pris en un même point. $\mathcal{P}(\vec{g} \to Cr/R_0) = mg\lambda\dot{\theta}\sin\theta$ et $\mathcal{P}(\vec{g} \to D/R_0) = -Mgd\dot{\theta}\sin\theta$. On a $\mathcal{P}(S_0 \to S_1/R_0) = \vec{0}$. Ce dernier résultat est en accord avec l'hypothèse de liaison parfaite entre S_0 et S_1.

g) Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit, pour le solide S_1 dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_0 : $\left.\dfrac{dT(S_1/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \mathcal{P}(\overline{S}_1 \to S_1/R_0)$. D'après les résultats des questions **e)** et **f)**, on obtient : $\left.\dfrac{1}{2}\dfrac{d(A_\mathrm{C} + A_D + m\lambda^2 + Md^2)\dot{\theta}^2}{dt}\right|_{R_0} = (m\lambda - Md)g\dot{\theta}\sin\theta$. Soit après dérivation et en supposant $\dot{\theta} \neq 0$: $(A_\mathrm{C} + A_D + m\lambda^2 + Md^2)\ddot{\theta} = (m\lambda - Md)g\sin\theta$.

Chapitre 5

5.1 a) Pression dans les deux liquides.
Liquide supérieur :

$$z_\mathrm{i} \leqslant z \leqslant 0,\ p_1(z) = p_a - \rho_1 \mathrm{g} z.$$

Liquide inférieur :

$$z \leqslant z_\mathrm{i},\ p_2(z) = p_\mathrm{i} + \rho_2 \mathrm{g}(z_\mathrm{i} - z) \text{ où}$$

$$p_\mathrm{i} = p_a - \rho_1 \mathrm{g} z_\mathrm{i}$$

est la pression à l'interface z_i.

b) Résultante des forces :

$$\begin{aligned} F &= S\,[p_2(z_\mathrm{c} - H) - p_1(z_\mathrm{c})] \\ &= \mathrm{g}S\left[\rho_2(z_\mathrm{i} - z_\mathrm{c} + H) + \rho_1(z_\mathrm{c} - z_\mathrm{i})\right]. \end{aligned}$$

c) Théorème d'Archimède :

$$\begin{aligned} F &= (m_1 + m_2)\mathrm{g} \\ &= \mathrm{g}S\,\{\rho_1(z_\mathrm{c} - z_\mathrm{i}) + \rho_2[H - (z_\mathrm{c} - z_\mathrm{i})]\}. \end{aligned}$$

Les résultats sont identiques.

5.2 a) Il s'agit de la forme différentielle (5.5) :

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x/(\omega x - at) + \mathrm{d}y/\omega y = 0 \\ \Leftrightarrow\quad &\omega(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) - at\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

L'intégration à t fixé est immédiate et donne : $\omega xy - aty = C(t)$, soit encore : $y = C(t)/(\omega x - at)$. Les lignes de courant sont des hyperboles équilatères d'asymptotes $x = at/\omega$ et $y = 0$.

b) La représentation lagrangienne s'obtient par intégration du système différentiel :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = u = \omega x - at, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = v = -\omega y, \end{cases} \\ \Rightarrow\ &\begin{cases} x = (x_0 - a/\omega^2)\mathrm{e}^{\omega t} + at/\omega + a/\omega^2, \\ y = y_0\mathrm{e}^{-\omega t}, \end{cases} \end{aligned}$$

où x_0 et y_0 sont les coordonnées de la particule à l'instant $t = 0$. On élimine le temps entre ces deux relations pour obtenir l'équation des trajectoires :

$$x = (x_0 - a/\omega^2)(y_0/y) - (a/\omega^2)\ln(y/y_0) + a/\omega^2.$$

c) L'énergie cinétique associée à ce champ de vitesse a pour valeur :

$$\begin{aligned} e_c &= \frac{1}{2}\rho[(\omega x - at)^2 + (-\omega y)^2] \\ &= \frac{1}{2}\rho[\omega^2(x^2 + y^2) - 2\omega axt + a^2t^2], \end{aligned}$$

et sa dérivée particulaire s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}e_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial e_c}{\partial t} + u\frac{\partial e_c}{\partial x} + v\frac{\partial e_c}{\partial y}$$
$$= \rho\left[a^2 t - \omega a x + \omega(\omega x - at)^2 - \omega^3 y^2\right].$$

d) Accélération en représentation eulérienne :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega x - at \\ -\omega y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -a + \omega(\omega x - at) \\ \omega^2 y \end{pmatrix}.$$

Le lecteur peut vérifier que cette expression est identique (à un changement de représentation près) à celle obtenue en dérivant deux fois $x(t)$ et $y(t)$.

5.3 a) Appliquons le théorème de Bernoulli (voir tableau 5.1) à la ligne de courant $\mathcal{L}$ indiquée sur la figure : $p(Z_M) + \rho g Z_M + \frac{1}{2}\rho V_r^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho V_j^2$. L'écoulement dans le canal d'amener étant à lignes de courant rectilignes et parallèles à la surface libre, il s'ensuit que la répartition des pressions est hydrostatique : $p(Z_M) + \rho g Z_M = p_a + \rho g H$. D'autre part, considérons le tube de courant limité par une section droite du canal d'amener, le radier (fond du canal), la surface libre, la paroi interne de la conduite forcée et une section droite du jet, la conservation de la masse s'écrit : $(H - H_0)L V_r = A V_j$ dont il résulte $V_r = A V_j/[(H - H_0)L] \ll V_j$. Après avoir reporté ces résultats dans le théorème de Bernoulli et placé le point M sur la surface libre où $p(H) = p_a$, on obtient en première approximation :

$$V_j = \sqrt{2gH + V_r^2} \simeq \sqrt{2gH} = 44{,}7 \text{ m.s}^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad Q_v = A\sqrt{2gH} = 3{,}58 \text{ l.s}^{-1}.$$

La vitesse ne dépend que de la hauteur d'eau H et non du rapport des sections.

b) Le débit prend maintenant la valeur :

$$q_v = \frac{1}{4}\pi d^2\sqrt{2gH} = (d/D)^2 Q_v < Q_v.$$

5.4 a) L'application du théorème de Bernoulli fournit (voir tableau 5.1) :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_S}{\rho_S} + \frac{1}{2}V^2$$
$$\Rightarrow \quad V = \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p_a}{\rho_S}\right)\right]^{1/2}.$$

b) Après avoir posé l'égalité $V = c_S$, il vient : $(p_0/p_a)(\rho_S/\rho_0) = \frac{1}{2}(\gamma + 1)$. Il ne reste plus qu'à éliminer les masses volumiques avec l'équation de la transformation isentropique, $\rho_S/\rho_0 = (p_a/p_0)^{1/\gamma}$, pour obtenir :

$$\frac{p_0}{p_a} = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Dans le cas de l'air pour lequel $\gamma = 1{,}4$: $p_0/p_a = 1{,}89$.

5.5 a) Par hypothèse, l'écoulement dans les sections d'entrée et de sortie est à lignes de courant quasi parallèles à l'axe Os ou Ox et la pression réduite est donc constante dans un plan orthogonal à ces axes (voir encadré p. 125). Mais les effets de la pesanteur étant négligés, c'est en fait la pression statique qui est indépendante de la coordonnée transversale. Par continuité avec l'atmosphère au niveau de la surface libre {voir $(5.16)_2$}, elle vaut donc p_a.

b) L'énergie mécanique des particules fluides qui traversent la section d'entrée est la même quelle que soit la ligne de courant considérée puisque leur vitesse et leur pression sont les mêmes. Le fluide étant parfait, cette énergie se retrouve dans les sections de sortie et on a les égalités (théorème de Bernoulli, tableau 5.1) :

$$\rho e_m = p_a + \frac{1}{2}\rho\vec{v}_0^2$$
$$= p_a + \frac{1}{2}\rho\vec{v}_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho\vec{v}_2^2$$

dont il résulte $v_0 = v_1 = v_2 = cste$.

c) Pour exprimer la conservation de la masse, il faut commencer par isoler un domaine fluide $\mathcal{D}$ et celui qui s'impose est limité par les trois sections droites $\mathcal{A}_i$, $i = 0, 1, 2$, les deux surfaces libres

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Σ_1 et Σ_2 et la surface mouillée de la plaque $\mathcal{A}_m$; on a : $\partial\mathcal{D} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \mathcal{A}_m$. Seules les sections droites contribuent au flux car les autres surfaces sont des surfaces de courant où $\vec{v}.\vec{n} = 0$ {condition $(5.16)_1$} :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \rho(\vec{v}.\vec{n})\mathrm{d}A = \rho(-v_0h_0 + v_1h_1 + v_2h_2)$$
$$= 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = h_1 + h_2.$$

d) La résultante cherchée doit être évaluée sur la totalité du bord de la plaque :

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{A}_m} (-p\vec{N})\mathrm{d}A + \int_{\mathcal{A}_s} (-p\vec{N})\mathrm{d}A$$
$$= -\int_{\mathcal{A}_m} (p - p_a)\vec{N}\mathrm{d}A,$$

où $\vec{N}$ est la normale extérieure à la plaque et $\mathcal{A}_m$ et $\mathcal{A}_s$ les faces mouillée et sèche de la plaque. L'intégrale de $p_a = cste$ sur la surface fermée $\mathcal{A}_m \cup \mathcal{A}_s$ est nulle.
On cherche maintenant à faire apparaître $\vec{F}$ dans l'expression (5.18) du théorème des quantités de mouvement appliquée au domaine $\mathcal{D}$. La contribution au flux de quantité de mouvement ne peut provenir que des sections droites puisque les autres sont des surfaces de courant où $\vec{v}.\vec{n} = 0$:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})\mathrm{d}A$$
$$= \rho\vec{v}_0(-v_0)h_0 + \rho\vec{v}_1(v_1)h_1 + \rho\vec{v}_2(v_2)h_2.$$

Toutes les frontières de $\partial\mathcal{D}$ contribuent à l'intégrale des forces de pression mais on peut regrouper les trois sections droites et les deux surfaces libres puisqu'il y règne la pression atmosphérique, et, en ajoutant et retranchant l'intégrale de la pression atmosphérique sur $\mathcal{A}_m$, il vient :

$$\int_{\partial\mathcal{D}} (-p\vec{n})\mathrm{d}A = -\int_{\mathcal{A}_m} (p - p_a)\vec{n}\,\mathrm{d}A$$
$$= \int_{\mathcal{A}_m} (p - p_a)\vec{N}\mathrm{d}A = -\vec{F}.$$

où on aura reconnu $\vec{F}$, puisque, sur $\mathcal{A}_m$: $\vec{n} + \vec{N} = 0$. En formulant le théorème des quantités de mouvement, il vient enfin : $\vec{F} = \rho v_0^2 h_0 \vec{e}_s + \rho(v_2^2h_2 - v_1^2h_1)\vec{e}_x$. Le vecteur unitaire $\vec{e}_s$ se projette sur les axes selon : $\vec{e}_s = -\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y$ ce qui permet de séparer les deux composantes de $\vec{F}$: $F_x = \rho\left(v_2^2h_2 - v_1^2h_1 - v_0^2h_0\sin\alpha\right)$ et $F_y = -\rho v_0^2 h_0\cos\alpha$.

e) Puisque le fluide est parfait, l'effort qu'il exerce en tous point de $\mathcal{A}_m$ est de la forme $-p\vec{n}\,\mathrm{d}A$ où $\vec{n} = -\vec{e}_y$. L'intégrale de ces efforts est donc parallèle à $\vec{e}_y$ et, par conséquent : $F_x = 0$, ce qui s'écrit : $h_2 - h_1 = h_0\sin\alpha$. D'après la conservation de la masse : $h_0 = h_1 + h_2$ et, en résolvant, nous obtenons : $h_1 = \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha)h_0$ et $h_2 = \frac{1}{2}(1 + \sin\alpha)h_0$. Enfin, on a pour la résultante :

$$\| \vec{F} \| = |F_y| = \rho v_0^2 h_0\cos\alpha = (\rho q_v^2/h_0)\cos\alpha.$$

Chapitre 6

6.1 L'expression (5.18) doit être utilisée de la manière suivante. Tout d'abord, les deux derniers termes sont regroupés pour faire apparaître la pression réduite p_g. Ensuite, le vecteur $\vec{R}$ s'identifie à l'intégrale des forces de frottement sur la paroi. Enfin, l'ensemble de l'expression est projeté sur l'axe des x. Nous obtenons ainsi :

$$\tau_p 2\pi RL = \left[p_g(0) - p_g(L)\right]\pi R^2$$
$$\Rightarrow \quad \Delta p_g = 4\tau_p L/D \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{1}{4}\Lambda.$$

6.2 a) Le débit est égal au volume Sh qui s'est écoulé pendant la durée τ : $q_v = Sh/\tau = 3{,}33.10^{-7}$ m^3.s^{-1}. La vitesse débitante a donc pour valeur : $\mathcal{U} = q_v/s = 0{,}333$ m.s^{-1}.

b) Par application du théorème de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point de la section s_0, on obtient :

$$p_{g0} = p_0 + \rho gL = p_a + \rho gH - \frac{1}{2}\rho\mathcal{U}^2$$
$$(V_S \ll V_{s_0}).$$

D'autre part, l'écoulement étant à lignes de courant parallèles dans s_1, on a par continuité avec l'atmosphère : $p_{g1} = p_a$, si bien que

$$\Delta p_g = p_{g0} - p_{g1} = \rho g H \left[1 - \frac{1}{2}\mathcal{U}^2/(gH)\right];$$

$$\simeq \rho g H = 8630\ Pa$$

l'énergie cinétique est négligeable devant l'énergie potentielle.

c) D'après l'expression générale de la perte de charge, on a :

$$\Lambda = \Delta p_g \frac{d}{L}\frac{2}{\rho \mathcal{U}^2} \simeq \frac{2}{L}\left(\frac{4s}{\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{gH}{\mathcal{U}^2} = 0{,}220,$$

dont on déduit :

$$\mathcal{R} = 64/\Lambda = 291 \text{ et } \mu = \rho \mathcal{U} d \mathcal{R} = 87{,}5\ Pl.$$

Chapitre 7

7.1 L'égalité des pressions au niveau des deux pistons entraîne que :

$P_A = P_B$ soit $\frac{f}{s} = \frac{F}{S}$ d'où $F = f\frac{S}{s}$ soit F = 1 000 N

7.2 La quantité de matière injectée dans le réservoir est :

$n_1 = \frac{P_1\ V_1}{\mathrm{R}\ T_1}$ et $n_2 = \frac{P_2\ V_2}{\mathrm{R}\ T_2}$ soit n_1 = 0,123 mol et n_2 = 0,224 mol.

La pression totale est alors : $P = (n_1 + n_2)\mathrm{R}T$ soit $P = 1{,}8\ 10^5$ Pa (1,8 bar).

Les pressions partielles se calculent à partir de leurs fractions molaires, soit :

$p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}P$ et $p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}P$

soit p_1 = 0,64 bar et p_2 = 1,16 bar.

7.3 La capacité thermique adéquate pour résoudre cet exercice est la capacité thermique massique à pression constante c_P = 1 005 J · kg^{-1} · K^{-1} car le système étudié est caractérisé par sa masse et son évolution est isobare d'où : $Q = mc_P(T_2 - T_1)$ soit Q = – 2 613 J. Le résultat étant négatif, ce travail est perdu par l'air.

7.4 a) La masse de vapeur d'eau se calcule grâce à l'équation d'état des gaz parfaits dans les conditions initiales :

$$P_1\ V_1 = \frac{m}{M}\mathrm{R}\ T_1 \text{ soit } m = \frac{P_1\ V_1\ M}{\mathrm{R}\ T_1}$$

$$m = \frac{4 \cdot 10^5 \times 2 \cdot 10^{-3} \times 18 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \times (273 + 150)}$$

$$m = 4{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

b) La transformation étant isobare et réalisée en vase clos, la conservation de la quantité de matière donne le volume V_2 après chauffage :

$$V_2 = V_1\frac{T_1}{T_2} = 2 \cdot 10^{-3} \times \frac{(273 + 900)}{(273 + 150)}$$

$$= 5{,}55 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ \ (V_2 = 5{,}55\ \mathrm{L})$$

c) La compression est isotherme d'où : $P_2V_2 = P_3V_3$.

$V_3 = V_2\frac{P_2}{P_3} = 5{,}55 \cdot 10^{-3} \times \frac{4 \cdot 10^5}{25 \cdot 10^5} =$

$V_3 0{,}89 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3\ \ (V_3 = 0{,}89\ \mathrm{L})$

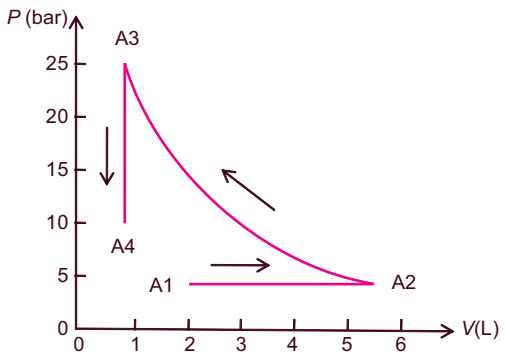
d) La transformation est isochore d'où :

$$T_4 = T_3\frac{P_4}{P_3}$$

$$T_4 = (900 + 273) \times \frac{10 \cdot 10^5}{25 \cdot 10^5}$$

$$= 469\ \mathrm{K}\ \ (T_4 = 196\ ^\circ\mathrm{C})$$

e) Représentation graphique :



7.5 a) Le système étudié est tout l'air contenu dans le compresseur (cylindre + réservoir). Lors de la phase d'admission d'air, les paramètres d'état de l'air ne varient pas (pas de transformation). En revanche, lors de la phase de compression, le système est fermé : l'état initial du système est P_0 et $(V + V_0)$ et son état final est P_1 et $(v + V_0)$. Comme la transformation est isotherme,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

la conservation de la quantité de matière entre ces deux états donne :

$P_0\,(V + V_0) = P_1\,(v + V_0)$ d'où $P_1 = P_0\,\dfrac{V + V_0}{v + V_0}$

soit $P_1 = 1{,}09$ bar

b) Lors de la deuxième compression, l'état initial du système est P_0 dans le volume V et P_1 dans le réservoir V_0 et son état final est P_1 dans $(v + V_0)$. On a :

$$P_0 V + P_1 V_0 = P_1\,(v + V_0)$$

$$\text{d'où}\quad P_2 = \frac{P_0\,V + P_1\,V_0}{v + V_0}\quad \text{soit } P_1 = 1{,}18 \text{ bar.}$$

Le même raisonnement pour la troisième compression donne :

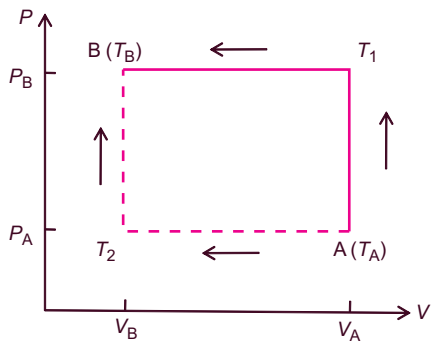
$$P_0 V + P_2 V_0 = P_2\,(v + V_0)$$

$$\text{d'où}\quad P_3 = \frac{P_0\,V + P_2\,V_0}{v + V_0}\ \text{soit } P_1 = 1{,}27 \text{ bar}$$

c) Il arrive un moment où la pression dans le réservoir devient supérieure à la pression dans le volume mort v même en fin de compression. Il est alors impossible d'ouvrir la soupape S_2 lors la phase d'admission suivante. Dans cette configuration, le système se réduit à l'air dans le cylindre, sans le réservoir, d'où :

$P_0 V = P_L v$ d'où $P_L = P_0\,\dfrac{V}{v}$ soit $P_L = 10$ bar.

7.6 a) La représentation graphique des deux trajets est donnée ci-dessous.



b) Ces paramètres se calculent grâce à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$P_A = n\,R\,\frac{T_A}{V_A}\ \text{soit } P_B \approx 1{,}95 \text{ bar}$$

$$P_B = n\,R\,\frac{T_B}{V_B}\ \text{soit } P_B \approx 7{,}03 \text{ bar}$$

$$T_1 = \frac{P_B\,V_A}{n\,R}\ \text{et}\ T_2 = \frac{P_A\,V_B}{n\,R}$$

soit $T_1 \approx 1\,057$ K et $T_2 \approx 117$ K

c) Le calcul des travaux des forces de pression se réduit à celui de la transformation isobare dans chaque trajet (ces travaux sont nuls dans une transformation isochore), d'où :

$W_1 = -P_B\,(V_B - V_A)$ et $W_2 = -P_A(V_B - V_A)$ soit $W_1 = 10\,545$ J et $W_2 = 2\,925$ J.

Les transferts thermiques interviennent pour chacune des transformations. On utilise les capacités thermiques molaires à volume constant ou à pression constante selon la transformation étudiée :

$Q_1 = nC_V(T_1 - T_A) + nC_P(T_B - T_1)$

soit $Q_1 = -5\,116$ J

$Q_2 = nC_P(T_2 - T_A) + nC_P(T_B - T_2)$

soit $Q_1 = 2\,487$ J

La somme $W_1 + Q_1$ donne 5 429 J alors que la somme $W_2 + Q_2$ donne 5 412 J, autrement dit on obtient le même résultat aux erreurs d'arrondis près.

Chapitre 8

8.1 Lors de cette transformation, la température du système (le fer) varie et il cède de la chaleur au milieu extérieur (le lac). En considérant une transformation *réversible* faisant passer le fer de 100 °C à 20 °C (il est inutile d'expliciter cette transformation), la variation d'entropie du système est :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}\ \text{avec}\ \delta Q = mc\,dT$$

$$\text{d'où}\ \Delta S = mc\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}\ \text{soit}\ \Delta S = mc\ln\frac{T_2}{T_1}$$

L'entropie d'échange avec la source thermique à la température T_2 est calculée comme :

$$S_e = \frac{Q\ (\text{syst})}{T_2}\ \text{avec}\ Q\ (\text{syst}) = mc(T_2 - T_1)\ \text{d'où}$$

$$S_e = mc\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

La production d'entropie dans le système représente le bilan :

$$S_p = \Delta S - S_e = mc\left(\frac{T_1}{T_2} - 1 + \ln\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Les applications numériques donnent $\Delta S = -111\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$, $S_e = -126\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $S_p = 15\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$. L'entropie produite étant positive, la transformation est effectivement irréversible.

8.2 Le volume final s'obtient en utilisant la relation de Laplace faisant intervenir P et V :

$$P_1\ V_1^{\gamma} = P_2\ V_2^{\gamma} \quad \text{soit} \quad V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

d'où $V_2 = 5{,}16\cdot 10^3\ \text{m}^3$ (5,16 L)

Le travail des forces de pression est donné directement par la relation :

$$W = \frac{P_2\ V_2 - P_1\ V_1}{\gamma - 1} \quad \text{d'où} \quad W = 830\ \text{J}$$

La variation d'énergie interne ΔU s'obtient grâce au premier principe, sachant que $Q = 0$:

$$\Delta U = W \quad \text{soit} \quad \Delta U = 830\ \text{J}$$

Enfin, l'élévation de température du gaz (parfait) ΔT est fournie par l'énergie interne :

$$\Delta U = nC_V\ \Delta T \text{ avec } n = \frac{m}{M} \text{ soit } \Delta T = \frac{M\ \Delta U}{m\ C_V}$$

d'où $\Delta T = 132$ K.

8.3 On calcule d'abord le volume massique du mélange soit $v_1 = V_1/m = 0{,}1\ \text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}$ (cette valeur est comprise entre v_l et v_v : c'est bien un mélange liquide-vapeur). On détermine ensuite le titre en vapeur $x = \dfrac{v - v_l}{v_v - v_l}$

$$x = \frac{0{,}1 - 0{,}001127}{0{,}19444 - 0{,}001127}\text{x} = 0{,}51\ (51\ \%).$$

La masse de vapeur se calcule enfin comme suit : $m_v = xm$ d'où $m = 0{,}51 \times 0{,}1 = 0{,}051$ kg (une autre méthode consiste à négliger le volume du liquide devant celui de la vapeur, ainsi on a directement $m_v = V_1/v_v = 0{,}1/0{,}19444 = 0{,}051$ kg).

La température reste constante pendant toute la vaporisation : elle est donnée directement par la table soit $\theta_0 = 179{,}9\ ^\circ\text{C}$. Le volume final est alors occupé uniquement par de la vapeur donc $V_2 = mv_v = 0{,}1 \times 0{,}19444 = 0{,}01944\ \text{m}^3$ soit $V_2 = 19{,}4$ L.

La chaleur échangée est $Q = m(h_2 - h_1)$ où $h_1 = (1-x)h_l + xh_v = (1 - 0{,}51) \times 762{,}81 + 0{,}51 \times 2\,778{,}1 = 1\,790{,}6\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $h_2 = 2\,778{,}1\ \text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ soit $Q = 98{,}7$ kJ.

Le travail échangé est $W = -P_0(V_2 - V_1)$ ou encore $W = -mP_0(v_v - v_1)$ soit $W = -9{,}4$ kJ.

8.4 La masse de vapeur s'obtient à partir de la valeur du volume massique v_1 :

$$V_1 = mv_1 \text{ soit } m = \frac{V_1}{v_1} \text{ d'où}$$

$$m = \frac{0{,}1}{1{,}7814} = 0{,}05613\ \text{kg}\ (56{,}13\ \text{g}).$$

Le volume en fin de compression est de même : $V_2 = mv_2$ soit $V_2 = 0{,}0561 \times 0{,}014768 \approx 8{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{m}^3$

Le travail et la chaleur échangés sont donnés par : $W = m(u_2 - u_1) - Q$ et $Q = mT_0\ (s_2 - s_1)$

$$Q = 0{,}05613 \times (273 + 500) \times (6{,}1401 - 8{,}5133)$$
$$= -103{,}0\ \text{kJ}$$
$$W = 0{,}05613 \times (2\,942{,}9 - 3\,130{,}8) + 103{,}0\ \text{W}$$
$$= 92{,}5\ \text{kJ}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$P_1\ V_1 = \frac{m}{M}\ \text{R}\ T_1 \text{ soit } m = \frac{M\ P_1\ V_1}{\text{R}\ T_1} \text{ d'où}$$

$$m = \frac{18\cdot 10^{-3} \times 2\cdot 10^5 \times 0{,}1}{8{,}31 \times 773} = 0{,}05604\ \text{kg}.$$

$$P_1\ V_1 = P_2\ V_2 \text{ soit } V_2 = \frac{P_1}{P_2}\ V_1$$

d'où $V_2 = \dfrac{2}{200}\ 0{,}1 = 0{,}001\ \text{m}^3$ (1 L).

$$W = P_1\ V_1\ \ln\frac{P_2}{P_1}$$

d'où $W = 2\cdot 10^5 \times 0{,}1 \times \ln\dfrac{200}{2}$ = et $Q = -W$

$Q = -92$ kJ.

Les erreurs sur le volume, le travail et la chaleur échangés sont respectivement :

$$\frac{\Delta V_2}{V_2} = \frac{1 - 0{,}83}{0{,}83} = 20\ \%\ ;$$

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{92{,}5 - 92}{92{,}5} = 0{,}4\ \%\ ;$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{103 - 92}{103} = 10{,}6\ \%$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

8.5 a) Le gaz subit trois transformations AB (isobare), BC (isotherme) et CA (isochore) qui le fait passer d'un état A (P_1, V_1, T_1) à B (P_1, $2V_1$, T_2) puis C (P_2, V_1, T_2) pour revenir à A (P_1, V_1, T_1). L'équation d'état des gaz parfaits permet de calculer directement la température T_2 en fin de détente isobare et la pression P_2 en fin de compression isotherme :

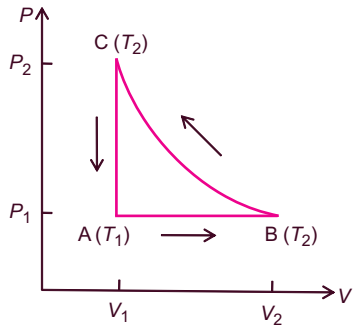
AB : $P_1 \cdot 2V_1 = RT_2$ d'où $T_2 = \dfrac{2\ P_1\ V_1}{R}$ soit

$T_2 = \dfrac{2 \times 2\ 10^5 \times 14\ 10^{-3}}{8{,}31} = 674$ K

BC : $P_2V_1 = P_1 \cdot 2V_1$ d'où $P_2 = 2P_1$

soit $P_2 = 2 \times\ 2 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^5$ Pa (4 bars)

b) Représentation graphique



Le travail échangé au cours du cycle est représenté par l'aire du cycle.

Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique : le travail est positif, le gaz reçoit du travail (récepteur).

c) Les travaux échangés sont respectivement :

Détente isobare AB :

$$W_1 = -P_1(2V_1 - V_1) = -P_1V_1 = -2\ 800 \text{ J}.$$

Compression isotherme

$$\text{BC} : W_2 = RT_2 \ln\frac{P_2}{P_1} = 2RT_2 \ln 2 = 3\ 882 \text{ J}.$$

Refroidissement isochore CA : $W_3 = 0$.

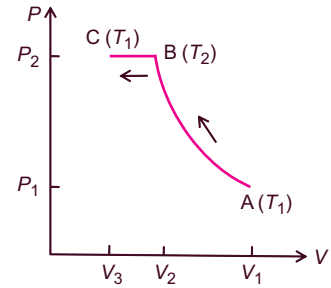
Le bilan sur le cycle est donc :

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 1\ 082 \text{ J}.$$

Comme dans un cycle $\Delta U = 0$, on a :

$$Q = -W = -1\ 082 \text{ J}.$$

8.6 a) Tracée dans un diagramme $P(V)$, cette double opération est représentée ci-contre.



La première transformation du système (1 mole d'air) est une adiabatique réversible d'un gaz parfait. Les paramètres utilisés étant des pressions et des températures, on lui applique la loi de Laplace adéquate :

$$P_1^{1-\gamma}\ T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}\ T_2^{\gamma} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

$$T_2 = 579 \text{ K}$$

Le travail des forces de pression lors de la transformation adiabatique AB est :

$$W_1 = \Delta U \text{ soit } W_1 = \frac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$$

d'où $W_1 = 5\ 796$ J

Le travail des forces de pression lors de la transformation isobare BC est :

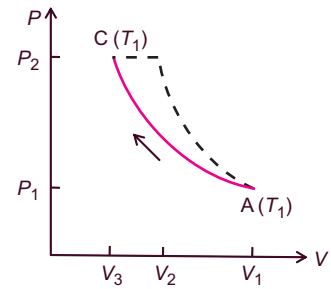
$W_2 = -P_1(V_3 - V_2) = R(T_2 - T_1)$

d'où $W_2 = 2\ 319$ J.

Le travail total est la somme des travaux :

$W = W_1 + W_2$ soit $W = 8\ 115$ J.

b) Le diagramme est différent : le point C est confondu avec le point B car $T_2 = T_1$.



Le travail total des forces de pression se réduit à la transformation isotherme :

$$W' = n\,R\,T_1\ \ln\frac{P_2}{P_1} \text{ soit } W' = 5\,740\ \text{J}$$

c) Le travail de l'opérateur est égal au travail total reçu par le gaz. Comme W' < W, le compresseur isotherme est plus intéressant, car il nécessite moins d'énergie pour fonctionner... à condition de respecter l'établissement (lent) des échanges thermiques. Les compresseurs réels fonctionnent plus rapidement et se rapprochent plus d'un compresseur adiabatique irréversible. Cependant, en fractionnant l'étape de compression en utilisant plusieurs compresseurs réels (compresseur étagé), on peut se rapprocher du comportement isotherme.

8.7 a) Le calcul du volume massique initial $v_A = V_A/m$ donne $v_A = 0{,}08928\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Cette valeur est comprise entre celle du liquide saturant v_l et celle de la vapeur saturante v_v à 150 °C : $0{,}001139 < v_A < 0{,}1633\ \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$, c'est donc un mélange liquide vapeur. Le titre est obtenu à partir de la relation $v = (1 - x)v_l + xv_v$ soit $x = 0{,}225$.

b) Le volume V_B n'est constitué que de vapeur saturante d'où : $V_B = mv_B$

soit $V_B = 0{,}28 \times\ 0{,}3928 = 0{,}110\ \text{m}^3$ (110 L)

Le travail et la chaleur sont donnés par :

$W_1 = -P_s m(v_B - v_A)$ et $Q_1 = m(h_B - h_A)$

avec $h_A = (1 - x_A)h_l + x_A h_v$

$W_1 = -4{,}758 \cdot 10^5 \times 0{,}28 \times (0{,}3928 - 0{,}8928)$

soit $W_1 = -40{,}4$ kJ

$h_A = (1 - 0{,}225) \times\ 632{,}20 + 0{,}225 \times\ 2\,746{,}5$

$= 1\,107{,}8\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$Q_1 = 0{,}28 \times\ (2\,746{,}5 - 1\,107{,}8)$

soit $Q_1 = 458{,}8$ kJ

c) À 250 °C, la pression de vapeur saturante est de 39,73 bar, or la pression en C est seulement de 12 bars : comme $P_C < P_s$ on est en présence d'une vapeur seule.

Le volume V_C est donné par :

$V_C = mv_C$ soit $V_C = 0{,}28 \times\ 0{,}19234 = 0{,}0538\ \text{m}^3$ (53,8 L)

Comme $Q_2 = 0$ (adiabatique), le travail W_2 est donné par :

$$W_2 = m(u_C - u_B)$$

soit $W_2 = 0{,}28 \times (2\,704{,}2 - 2\,559{,}5)$

soit $W_2 = 40{,}5$ kJ

d) Le volume V_D est donné par :

$$V_D = mv_D$$

soit $V_D = 0{,}28 \times\ 0{,}1633 = 0{,}0457\ \text{m}^3$ (45,7 L)

La température θ_D est donnée directement par la table : $\theta_D = 188$ °C.

Le travail et la chaleur sont donnés par :

$W_3 = -P_D m(v_D - v_C)$ soit :

$$W_3 = -12 \cdot 10^5 \times 0{,}28 \times (0{,}1633 - 0{,}19234)$$

$$= 9{,}7\ \text{kJ}$$

$Q_3 = m(h_D - h_C)$ soit :

$$Q_3 = 0{,}28 \times\ (2\,784{,}8 - 2\,935{,}0) = -42{,}1\ \text{kJ}$$

Chapitre 9

9.1 Le cycle décrit est tel que : $W < 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$.

Le cycle sera réalisable si l'inégalité de Clausius est vérifiée : $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} \leqslant 0$.

Or, d'après le 1er principe : $Q_f = -W - Q_c$ donc $Q_f > -Q_c > 0$

Comme $T_c > T_f > 0$ alors $\dfrac{Q_f}{T_f} > -\dfrac{Q_c}{T_c}$ d'où $\dfrac{Q_c}{T_c} + \dfrac{Q_f}{T_f} > 0$

Par conséquent, l'inégalité de Clausius n'est pas vérifiée. Le cycle n'est pas réalisable.

9.2 a) Cette machine frigorifique fonctionne de manière réversible, donc : $e_C = \dfrac{T_f}{T_c - T_f} = 15$

d'où : $T_f = T_c \dfrac{e_C}{1 + e_C} = (273 + 22)\dfrac{15}{16} = 276{,}6$ K (ou 3,6 °C)

b) Avec $T_c = 273 + 10 = 283$ K et $T_f = 276{,}6$ K on obtient :

$$e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{276{,}6}{283 - 276{,}6} = 43$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Conclusion : Un faible écart de température entre les deux sources de chaleur conduit à une valeur élevée de l'efficacité... mais la machine a aussi moins d'intérêt. Inversement, un écart de température important entre les deux sources de chaleur conduit à une faible valeur de l'efficacité.

9.3 a) Au cours de son fonctionnement, la PAC extrait la quantité de chaleur Q_f de la source froide constituée par l'atmosphère et fournit la quantité de chaleur Q_c à la source chaude constituée par la piscine. En d'autres termes : $Q_c = -Q_{eau}$

$$\text{Or, } \delta Q_{eau} = m_e.c_e.dT \text{ avec } m_e = \rho.V$$

D'où, $Q_{eau} = \rho V c_e.\Delta T = \rho V c_e(T_{fin} - T_{init}) = 100$ x 1000 x 4185 x (27 – 15) = 5 022 · 10^6 J
Soit :

$$Q_c = -Q_{eau} = -5\,022 \text{ MJ}$$

b) La PAC fonctionnant de manière réversible, l'application du deuxième principe de la thermodynamique, donne :

$$\int_{T_{f,initial}}^{T_{f,final}} \frac{\delta Q_f}{T_f} + \int_{T_{c,initial}}^{T_{c,final}} \frac{\delta Q_c}{T_c} = 0$$

avec $\delta Q_c = -\delta Q_{eau} = -\rho V c_e\, dT$
Comme T_f est constante :

$$\int_{T_{f,initial}}^{T_{f,final}} \frac{\delta Q_f}{T_f} = \frac{1}{T_f}\int_{T_{f,initial}}^{T_{f,final}} \delta Q_f = \frac{Q_f}{T_f}$$

D'où : $Q_f = -T_f \cdot \int_{T_{c,initial}}^{T_{c,final}} \frac{\delta Q_c}{T_c}$

$$= -T_f \cdot \int_{288}^{300} \frac{-\rho V c_e dT_c}{T_c}$$

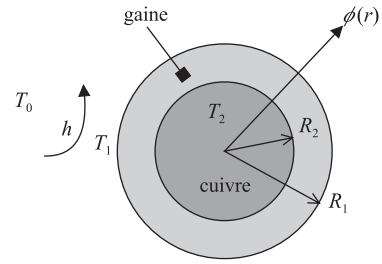
$$Q_f = \rho V c_e T_f \ln\frac{300}{288} = 100 \times 10^3 \times 4\,185 \times 288 \ln\frac{300}{288} = 4\,920{,}2 \cdot 10^6 \text{ J} = 4\,920{,}2 \text{ MJ}$$

c) La température de la source chaude n'étant pas constante, on ne peut pas utiliser l'expression de l'efficacité de Carnot, même si le cycle est réversible. D'où :

$$e_{PAC} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-5022}{-5022 + 4920{,}2} = 49{,}3$$

Chapitre 10

10.1



Loi de Fourier : $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla}\mathrm{T}$
En coordonnées radiales,

$$\phi = S(r)\,\varphi = -\lambda\, S(r)\,\frac{dT}{dr} \text{ et } S(r) = 2\pi r L$$

Donc : $\frac{\phi}{2\pi\lambda L}\frac{dr}{r} = dT$, soit en intégrant :

$$\frac{\phi}{2\pi\lambda L}[\ln r]_{R_2}^{R_1} = [T]_{T_2}^{T_1}.$$

Pour un cylindre de longueur unitaire $L = 1$, on obtient finalement :

$$\phi_L = \frac{2\pi\lambda\,(T_2 - T_1)}{\ln\left(R_1/R_2\right)}$$

Puissance thermique dissipée par effet joule :

$$P = U\,i = R\,i^2.$$

Soit ici :

$$\phi_{max} = R\,i_{max}^2.$$

La résistance électrique du câble de cuivre vaut $R_{élec} = \frac{L}{\gamma S}$, où γ est la conductivité électrique du cuivre. Cette expression est à rapprocher de celle de la résistance thermique : $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$, où λ est la conductivité thermique.
Résistivité du cuivre : $\rho = \frac{1}{\gamma}$
On a donc : $R_{élec} = \frac{\rho L}{S}$.

$i_{\max}^2 = \dfrac{\phi_{\max} S}{\rho L}$, soit avec $L = 1$ et $S = \pi {R_2}^2$,

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{\phi_{\max} \pi R_2^2}{\rho}}$$

A.N. : $\phi_{\max} = 94{,}3$ W (calculé pour un $\Delta T_{\max}$, c'est-à-dire avec $T_2 = 100$ °C) et $i_{\max} = 680$ A.

10.2 On suppose que le fil est infiniment long et donc on détermine le coefficient d'échange à partir des corrélations correspondant aux conditions d'écoulement forcé autour d'un cylindre infini.

La température moyenne de l'air est :

$$T_m = \frac{T_{air} + T_{fil}}{2} = \frac{25 + 75}{2} = 50\ ^\circ\text{C}$$

On calcule le nombre de Reynolds :

$$\text{Re}_{air} = \frac{u\, d}{\nu_{air}} = \frac{1{,}2 \times 1{,}5 \times 10^{-3}}{17{,}95 \times 10^{-6}} = 100{,}3$$

On utilise la corrélation (tableau 10.1, ligne 3) pour déterminer le nombre de Nusselt :

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{air} &= 0{,}683\ \text{Re}_{air}^{0{,}466} \text{Pr}_{air}^{0{,}33} \\ &= 0{,}683 \times 100{,}3^{0{,}466} \times 0{,}698^{0{,}33} = 5{,}19 \end{aligned}$$

Le coefficient d'échange est alors :

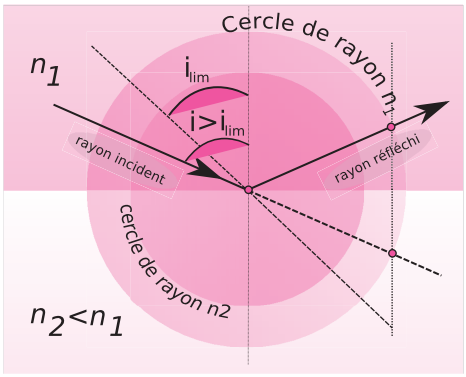
$$\begin{aligned} h &= \text{Nu}_{air} \frac{\lambda_{air}}{d} = 5{,}19 \frac{0{,}0283}{0{,}0015} \\ &= 97{,}92\ \text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1} \end{aligned}$$

Le flux de chaleur, par unité de longueur du fil, échangé avec l'air est donc :

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi\, dh \left(T_{fil} - T_{air}\right) \\ &= \pi \times 0{,}0015 \times 97{,}92(75 - 25) \\ &= 23{,}06\ \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \end{aligned}$$

Chapitre 11

11.1 La droite JC ne coupe jamais le cercle de rayon n_2 : il n'y a pas de rayon réfracté.



11.2 La formule du cours donne $n = \sin((A + D)/2)/\sin(A/2) = 1{,}509$. En différentiant cette formule, on trouve $\delta n = (\delta D/2)\cos((A + D)/2)/\sin(A/2) = 0{,}011$ avec δD l'incertitude sur la déviation D exprimée en radian (sinon, problème d'homogénéité). Au final, on a : $n = 1{,}51 \pm 0{,}01$.

11.3 La formule de l'exercice 11.2 écrite aux petits angles (le sinus est approximé par son argument) conduit au résultat.

11.4 a) On a, par définition,

$$n = c/v = (c\text{T}/v\text{T}) = \lambda_0/\lambda,$$

où T est la période de l'onde.

b) L'indice de l'air est $n = 1{,}00029$, très proche de 1. Il est donc justifié d'assimiler la longueur d'onde dans l'air à celle dans le vide.

c) L'indice de l'eau est $n_{eau} = 1{,}33$. On a $\lambda = \lambda_0/n = 700/1{,}33 = 526{,}3$ nm.

d) Le poisson est toujours perçu comme rouge car l'œil est sensible à la fréquence de l'onde, pas à sa longueur d'onde.

11.5 a) L'angle i_0 est l'angle entre la verticale au point B et le rayon AB. L'angle r_0 est l'angle entre la verticale (en pointillés sur le schéma) et le rayon BC. On a : $\sin i_0 = e/(e^2 + l^2)^{1/2} = 10/(100 + 4)^{1/2} = 0{,}9806$. Les deux angles sont reliés par la troisième loi de Snell-Descartes :

$$n \cdot \sin i_0 = N \cdot \sin r_0.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

b) Tout rayon traversant l'échantillon et étant réfracté dans le bloc réfractant aura un angle d'incidence $i \leqslant i_0$, donc un angle réfracté $r \leqslant r_0$. Comme tous ces rayons atteignent la surface supérieure du bloc réfractant en des points situés à gauche de B, les rayons réfractés atteindront la surface inférieure du bloc réfractant à gauche de C.

c) La zone éclairée de la surface inférieure du bloc réfractant a pour étendue la longueur DC. Cette longueur dépend de n, sa mesure permet donc de déterminer l'indice de réfraction du liquide.

11.6 a) Soit H l'intersection de la normale en B avec DC. On a :

$$R = DH + HC = e + BH \cdot \tan r_0 = e + L \cdot \tan r_0.$$

Or :

$$\tan r_0 = \frac{\sin r_0}{\cos r_0} = \frac{\sin r_0}{\sqrt{1 - \sin^2 r_0}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

$$\text{avec } \alpha = \sin r_0 = (n \cdot \sin i_0)/N$$

D'où le résultat proposé.

b) Application numérique. On trouve :

$$\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \text{ avec}$$

$$\gamma = \frac{R - e}{L} = \frac{145 - 100}{40} = 1{,}125$$

soit $\alpha = 0{,}7474$. On en déduit :

$$n = N\alpha \,/\, \sin i_0$$

$$= (1{,}75 \times 0{,}7474) \,/\, 0{,}9806 = 1{,}334.$$

Cette valeur est bien supérieure à 1, et est proche de l'indice optique de l'eau pure.

c) On a simplement $\delta n = \dfrac{N}{\sin i_0}\delta\alpha$.

d) Avec $\delta\alpha = 0{,}007$, on trouve

$$\delta n = (1{,}75 \,/\, 0{,}9806) \times 0{,}007 = 0{,}0125$$

que l'on approxime par $\delta n \approx 0{,}02$ si l'on veut être conservatif ($\delta n \approx 0{,}01$ convient aussi).

Chapitre 12

12.1 L'image du soleil (considéré à l'infini) se forme dans le plan focal image du télescope. Le rayon de l'image dans le plan focal est :

$$R = f'\alpha = 60 \times (16/60) \times (\pi/180) = 0{,}28 \text{ cm}.$$

12.2 Soit $x = \overline{OP'}$ et $h = \overline{PP'} = x - \overline{OP}$. La relation de conjugaison des lentilles minces donne une équation du second degré en x dont les solutions sont :

$$x = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4hf'}}{2}.$$

La solution recherchée est ici celle qui correspond à la plus petite valeur (pour que l'on puisse former l'image de la lampe sur le sol), soit $x = 0{,}105$ m. L'incertitude relative est $\delta f'/f' = |f'_{mesuré} - f'| \,/\, f'_{mesuré} \approx 0{,}05$, soit 5 %.

12.3 On applique la relation de conjugaison pour chacune des lentilles et on suppose les centres confondus. En combinant les deux équations, on obtient le résultat.

12.4 Pour qu'il y ait formation d'une image, il faut que la lentille équivalente soit convergente, donc que $f' > 0$. Il faut donc que $f'_1 < -f'_2$ avec f'_2 négative (lentille divergente).

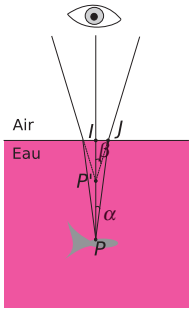
12.5 a) Les prolongements arrières des rayons ne se coupent pas en un point unique. Il n'y a donc pas d'image du point P. Le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique.

$\alpha(°)$	0	10	25	30	40	45
$\beta(°)$	0	13,3	34,2	41,7	58,8	70,1

b) La pupille de l'œil sélectionne un petit pinceau de rayons suffisamment parallèles pour que leurs prolongements arrières se croisent au voisinage d'un point unique, image P' de P au sens du stigmatisme approché. C'est une image virtuelle puisqu'elle se trouve au croisement des prolongements arrières des rayons et non pas au croisement des rayons eux-mêmes.

c) Soit I le point d'incidence sur le dioptre eau-air du rayon vertical issu de P, et soit J le point d'incidence d'un rayon voisin. On voit que l'on a $\tan \alpha = IJ/PI$ et $\tan \beta = IJ/P'I$, soit, aux

petits angles, $\alpha/\beta = IP'/IP$. Or la 3e loi de Snell-Descartes appliquée aux petits angles pour le dioptre eau-air donne $\alpha/\beta = 1/n$. On en déduit : $\overline{IP'}/\overline{IP} = 1/n = 0{,}75$.



L'image P' de P est vue 25 % plus proche de la surface de l'eau que la position réelle de P.

Remarque

Le même résultat peut être obtenu à partir de la relation de conjugaison d'un dioptre plan.

Chapitre 13

13.1 L'équation est $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + q/C = 0$ qui conduit à : $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2 + q/LC = 0$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ indépendante du temps. On vérifie que $[\omega_0] = 1/\mathrm{T}^2$.

13.2 On trouve $l_1 = l_0 + mg/k$. L'équation d'évolution de l'élongation x est :

$$m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -kx - k \cdot (l_1 - l_0 - mg/k).$$

Le dernier terme est nul et on a $m\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = -kx$. C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0{}^2 = k/m$ comme dans le cas d'un ressort oscillant sur un plan horizontal sans frottement. La différence ici est que l'oscillation se fait autour de la nouvelle position d'équilibre l_1.

13.3 On a $L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t + R \cdot i + q/C = 0$, qui devient $\mathrm{d}^2q/\mathrm{d}t^2 + R \cdot \mathrm{d}q/\mathrm{d}t + q/LC = 0$, de la forme de l'équation (13.5) du cours avec $\gamma = R$. L'amortissement est dû à la présence de la résistance. Il y amortissement critique si $\omega_0 = \gamma/2$, soit $\gamma = 2/(LC)^{1/2}$.

13.4 La période d'un pendule de longueur l dans le champ de pesanteur g est $T = 2\pi(l/g)^{1/2} = 15{,}1$ s. Ce résultat ne dépend pas de la masse de l'objet oscillant.

13.5 $T = 2\pi(l/g)^{1/2} = 35{,}3$ s. On a

$$1/2mv^2 = 1/2m(\omega_0 A)^2$$

soit :

$$v = \omega_0 A = (g/l)^{1/2}A = 2{,}3 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

13.6 $T = \rho(2L\nu_1)^2 = 0{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 440)^2 \approx 310$ N.

13.7 On applique la formule pour un tuyau fermé à l'une de ses extrémités : $V = v/4L$ (pour le mode 1), avec $V = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la vitesse du son dans l'air à 20 °C. On trouve $\nu = 340/(4 \cdot 0{,}03) = 2{,}9$ kHz. On est bien dans le domaine des sons audibles (20-20 000 Hz).

Chapitre 14

14.1 Si les deux intensités sont différentes, on a $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$, d'où le résultat.

14.2 D'après le cours, on a :

$$\Delta\lambda = \frac{\overline{\lambda}}{N} = \frac{577{,}1}{274} = 2{,}106 \text{ nm}.$$

L'incertitude sur cette mesure est :

$$\delta(\Delta\lambda) = \Delta\lambda \frac{\delta N}{N} \approx 8 \cdot 10^{-3}.$$

D'où, $\Delta\lambda = 2{,}106 \pm 0{,}008$ nm.

14.3 L'image est une tache centrée sur le foyer image de la lentille de diamètre

$$1{,}22 \cdot \lambda f / D = 5 \text{ µm}.$$

14.4 Avec $\lambda = 550$ nm, on a $\phi = 1{,}22\lambda \cdot d_{\text{œil}}/d = 7{,}4 \cdot 10^{-6}$ m, soit 7,4 µm. L'image d'un point éloigné se forme dans le plan de la rétine (plan focal du cristallin). Il faut que les deux images soient séparées sur la rétine, donc que leurs centres soient distants d'au moins 7,4 µm. À la limite, les images sont distantes de 7,4 µm, et l'angle sous lesquelles les étoiles sont vues est :

$$\phi/d_{\text{œil}} = 7{,}4 \cdot 10^{-3}/22 = 3{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ radians}.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

14.5 La taille (entre deux minimas d'intensité) de la tache principale de diffraction d'une fente de largeur a observée dans le plan focal d'une lentille convergente de focale f' pour une longueur d'onde λ est $d = 2\lambda f'/a$. On en déduit $a = 101{,}2$ µm. L'incertitude est $\delta a = a \cdot (\delta d/d) = 2 \cdot 10^{-5}$ m (on suppose f' et λ parfaitement connus).

Chapitre 15

15.1 D'après la loi de Wien, on trouve, pour $T = 310$ K, $\lambda_{max} = 9{,}4$ µm. L'émission a lieu dans le domaine des infrarouges.

15.2 La formule donnant l'indice au minimum de déviation est (voir chapitre 11) :

$$n = \frac{\sin\frac{(A+D)}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

Sur $[-\pi/2, \pi/2]$, le sinus est une fonction croissante, et on a n d'autant plus grand que D est grand. Or n est d'autant plus grand que λ est petit (loi de Cauchy). On en déduit que les petites longueurs d'onde sont plus déviées que les grandes (« le bleu est plus dévié que le rouge »).

15.3 Le nombre N de fentes du réseau éclairé est $N = n \cdot \phi$. Le pouvoir de résolution du réseau limité par diffraction est dans l'ordre p : $R = pN = p \cdot n \cdot \phi = 6\,000$ dans l'ordre 1, et 12 000 dans l'ordre 2. Pour résoudre le doublet du sodium, il faut au minimum :

$$R = \frac{\overline{\lambda}}{\Delta\lambda} = \frac{589{,}3}{0{,}6} = 982.$$

Le doublet est résolu dans l'ordre 1, il l'est a fortiori dans les ordres plus élevés, qui sont plus dispersifs.

15.4 D'après la formule des réseaux, on a $\lambda = (\sin i')/(p\,n)$. ($n$ est l'inverse du pas d du réseau, et on est en incidence normale : $i_0 = 0$). D'où :

$$\lambda = \sin(14{,}07)/(500 \cdot 10^{-6}) = 482{,}2 \text{ nm}.$$

Chapitre 16

16.1 Force électrostatique :

$$F_e = \frac{e \cdot e}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a_0 \cdot a_0} = 8{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ N} ;$$

force gravitationnelle :

$$F_g = G \cdot \frac{mM}{a_0 \cdot a_0} = 3{,}6 \cdot 10^{-47} \text{ N} ;$$

le rapport des deux forces est indépendant de la distance entre l'électron et le proton et est de l'ordre de $\frac{F_e}{F_g} = 2 \cdot 10^{39}$.

16.2 La densité linéique vaut $\lambda = \frac{Q}{\pi R}$; le champ élémentaire créé en C par une charge élémentaire $dq = \lambda \cdot dl$ située autour d'un point P du demi-cercle s'écrit $d\vec{E}(C) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{(PC)^2}$; ici $PC = R$ quel que soit le point P du demi cercle ; par symétrie, le champ total est porté par l'axe perpendiculaire au diamètre passant par les extrémités du demi cercle et son intensité vaut :

$$E(C) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot R} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \cdot (\pi R)^2}$$

16.3 a) Le champ élémentaire créé en A par une charge élémentaire $dq = \lambda \cdot dx$ située autour d'un point P du segment, d'abscisse x, s'écrit :

$$d\vec{E}(A) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{(PA)^2} = \frac{\lambda \cdot dx}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{(a-x)^2}$$

D'après le principe de superposition, le champ total en A s'obtient par intégration de $d\vec{E}(A)$, pour x variant de $(-D)$ à $(+D)$. On obtient :

$$\vec{E}(A) = \frac{\lambda D}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}}{a^2 - D^2}$$

b) Par symétrie, le champ total en B sera porté par l'axe (Oy) ; en utilisant le même principe de calcul que dans la question précédente et en projetant le champ élémentaire $d\vec{E}(B)$ suivant l'axe (Oy), on obtient :

$$E(B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot y} \cdot \frac{D}{\sqrt{a^2 + D^2}}$$

16.4 a) Le potentiel élémentaire créé en O par une charge élémentaire $dq = \sigma \cdot dS$ située autour d'un point P du disque s'écrit : $dV(O) = \dfrac{\sigma \cdot dS}{4\pi\varepsilon_0 \cdot OP}$ avec $V = 0$ à l'infini ; on exprime dS et OP en coordonnées polaires et on intègre sur l'ensemble du disque :

$$V(O) = \iint_{\rho,\phi} \frac{\sigma\rho \cdot d\rho \cdot d\phi}{4\pi\varepsilon_0.\rho} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$$

b) Le principe est le même avec $\sigma(\rho) = A/(R^2 - \rho^2)^{1/2}$

On obtient : $V(O) = \dfrac{A\pi}{4\varepsilon_0}$ avec $V = 0$ à l'infini.

c) $$Q = \iint_{\text{disque}} dq = \iint_{\text{disque}} \frac{A\rho \cdot d\rho \cdot d\phi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}$$
$$= 2\pi \cdot AR = 8\varepsilon_0 R \cdot V(O)$$

16.5 On utilise la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ en coordonnées sphériques ; à partir des dérivées partielles de V, on obtient les composantes de $\vec{E}$:

$$E_r = \frac{3\left(3\cos^2\theta - 1\right) qd^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^4}$$

$$\text{et } E_\theta = \frac{3\sin(2\theta) \cdot qd^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^4}$$

16.6 a) Pour un point M d'abscisse x sur l'axe (Ox) du cercle (droite passant par O et perpendiculaire au plan du cercle), on a :

$$E(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{R^2 + x^2}} \text{ suivant l'axe } Ox$$

b) On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$, ce qui conduit ici à :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{R^2 + x^2}}$$

En intégrant cette expression, on obtient :

$$V(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}} + \text{constante ;}$$

ceci est valable pour les points M situés sur l'axe du cercle.

16.7 En coordonnées cylindriques, en choisissant l'axe Oz coïncidant avec le fil, en un point $M(\rho,\varphi,z)$, le champ $E(M)$ et le potentiel $V(M)$ ne dépendent ni de z (la distribution de charges est invariante par translation le long de l'axe Oz) ni de φ (la distribution de charges est invariante par rotation d'angle φ autour de l'axe Oz) ; les surfaces équipotentielles sont donc les surfaces latérales de cylindres d'axe Oz et la direction de $\vec{E}(M)$ est suivant $\vec{u_\rho}$. On choisit comme surface de Gauss un cylindre d'axe Oz, de rayon ρ et de hauteur h.

- Si $0 < \rho < R$ on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \cdot R} \cdot \vec{u_\rho}.$$

- Si $\rho > R$ on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda + 2\pi\sigma R}{2\pi\varepsilon_0 \cdot \rho} \cdot \vec{u_\rho}.$$

Le champ est discontinu à la traversée de la surface chargée du cylindre (pour $\rho = R$).

16.8 a) On calcule la charge totale Q par intégration de $\mu(r) = kr$ (où k est un coefficient de proportionnalité à déterminer) sur tout le volume de la boule ; on obtient :

$$Q = \pi k \cdot R^4, \quad \text{soit} \quad \mu(M) = \frac{Qr}{\pi R^4}$$

b) Par symétrie, la distribution de charge étant invariante par rotation d'angle θ et d'angle φ, le champ $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ ne dépendent que de r ; les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre O et le champ est radial (suivant $\vec{u_r}$). On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r. On obtient alors :

- si $r \leqslant R$: $\vec{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{r^2}{r^4} \cdot \vec{u_r}$
- si $r \geqslant R$: $\vec{E}(M) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2} \cdot \vec{u_r}$

Chapitre 17

17.1 I. a) La force magnétique subie par la particule $\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours normale à la vitesse, donc au déplacement élémentaire et son travail est nul quel que soit le déplacement → pas

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

de variation d'énergie cinétique → pas d'accélération.

b) Théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = eU$ d'où $v_B = \sqrt{v_A^2 + \dfrac{2eU}{m}}$.

c) La force magnétique est suivant $\vec{u}_y$ et le mouvement reste dans le plan $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$; dans le repère de Frenet, on a :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = m\left(\frac{dv}{dt} \cdot \vec{u}_t + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{u}_n\right)$$

d'où $\dfrac{dv}{dt} = 0$ et $R = \dfrac{mv}{eB}$

II. a) $\tau = \dfrac{\pi R}{v} = \dfrac{\pi m}{eB}$, et $f = \dfrac{1}{2\tau} = \dfrac{eB}{2\pi m}$

b) v_0 est négligeable, d'où $v_n = \sqrt{n \cdot \dfrac{2eU}{m}}$ et $R_n = \dfrac{mv_n}{eB} = \dfrac{1}{B}\sqrt{n \cdot \dfrac{2mU}{e}}$

Pour $N = 10$, $n = 20$ et $R_{20} = 19{,}3$ cm.

c) $R = 35$ cm , d'où $N = 33$ tours, $E_c = 13{,}2$ MeV et $t = 1{,}4$ μs.

17.2 a) $v \geqslant v_0$: $\frac{1}{2} \cdot mv^2 = qU$ d'où $v = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$

et $x = 2R = 2 \cdot \dfrac{mv}{qB} = \dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{q}}$

b) $a_{max} = \Delta x = \dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{2U}{q}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right)$

$= 1{,}24$ mm

17.3 On a $B = \dfrac{\mu_0}{2} \cdot \dfrac{I}{R}$, d'où $R = \dfrac{\mu_0}{2} \cdot \dfrac{I}{B}$ = 25 cm.

17.4 D'après le principe de superposition,

$$B(C) = \frac{I.\mu_0}{4} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 4{,}7\ \mu\text{T}.$$

17.5 Le champ magnétique créé par un fil infini en un point M situé à une distance D de ce fil vaut : $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \cdot \dfrac{I}{D} \cdot \vec{u_\phi}$; on en déduit :

$$D = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{B} = 1{,}67 \text{ cm}.$$

17.6 Le champ magnétique créé au centre C de la spire par chacun des côtés du carré a la même direction, le même sens et la même intensité ; la distance D entre C et un côté du carré vaut $D = a/2$; le champ créé au point C par un côté de la spire vaut $\vec{B}(C) = \dfrac{\mu_0}{a\pi\sqrt{2}} \cdot \dfrac{I}{D} \cdot \vec{k}$ où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire, normal au plan de la spire, et dont le sens dépend du sens de circulation du courant dans la spire (il peut être déterminé par la loi de Biot et Savart) ; on en déduit le champ total créé en C :

$$\overrightarrow{B_{total}}(M) = 4 \cdot \vec{B}(C) = \frac{\mu_0}{\pi a} I \cdot 2\sqrt{2} \cdot \vec{k}$$

17.7 a) Les 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 sont à l'intérieur du carré ; le contour du carré est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre et le sens positif de la normale à une surface simple s'appuyant sur ce contour est celui de $-\vec{u_z}$ (voir le § 17.3.2). D'après le théorème d'Ampère, la circulation $\hat{C}$ du champ magnétique le long du contour $ABCDA$ vaut $\hat{C} = \mu_0 \cdot (-I + 2I - 3I + 4I) = 2\mu_0 I$.

b) C'est la même car les 4 points P_1, P_2, P_3, P_4 sont aussi à l'intérieur du cercle dans lequel est inscrit le carré et le calcul précédent est indépendant de la forme du contour (pourvu que l'orientation du contour reste la même).

17.8 On a $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \cdot \dfrac{I}{d} \cdot \vec{u_\phi}$, le vecteur $\vec{u_\phi}$ correspondant au vecteur $\vec{u_\phi}$ de la base associée aux coordonnées cylindriques dont l'axe (Oz) coïncide avec l'axe du fil, le sens positif étant celui du sens du courant. On a alors $B(M) = 2 \cdot 10^{-8}$ T.

17.9 a) La norme $B(M)$ dépend *a priori* de ρ et z mais est indépendante de φ car la distribution de courants est invariante par rotation d'angle φ autour de l'axe Oz.

b) D'après les lignes de champ, $\vec{B}(M)$ est colinéaire et dans le même sens que le vecteur $\vec{u_\phi}$.

c) Un contour d'Ampère bien adapté au problème est donc un cercle de centre O et de rayon ρ.

d) Pour $a < \rho < b$, on a $I_{int} = Ni$ et $B = \dfrac{Ni\mu_0}{2\pi\rho}$.

e) $\varphi = \dfrac{Nhi\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Wb

17.10 Lorsque le barreau est parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme B, il subit une force (force de Laplace) qui, pour une valeur I_0 de l'intensité du courant, compense le poids du barreau et l'empêche de tomber.

La force de Laplace est donnée par $\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$ et doit être ici dans le plan de la figure et dirigée vers le haut ; compte tenu du sens du courant, il faut donc que le champ magnétique soit normal au plan de la figure et dirigé vers l'arrière. On a $I_0 LB = mg$.

a) On a $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\dfrac{\vec{j} \wedge \vec{B}}{\mu_m}$.

b) La densité volumique de charges libres μ_m s'écrit ici $\mu_m = -ne$, d'où on déduit que $n = \dfrac{jB}{eE_H} = 2{,}5 \cdot 10^{28}$ électrons par m^3.

c) $n_a = \dfrac{N_A \rho}{M} = 2{,}5 \cdot 10^{28}$ atomes par m^3 ; il y a en moyenne 1 électron libre par atome de sodium.

Chapitre 18

18.1 a) $\varphi(t) = B(S) + \dfrac{\pi a^2}{2}\cos(\omega t)$

b) $e = -\dfrac{d\varphi}{dt} = B\omega \cdot \dfrac{\pi a^2}{2} \cdot \sin(\omega t)$

$U_{max} = B\omega \cdot \dfrac{\pi a^2}{2}$ et $\omega = 2\pi \cdot f$; on en déduit $B = \dfrac{U_{max}}{f\pi^2 a^2} = 3{,}2 \cdot 10^5$ T.

18.2 a) Par définition : $\phi = \iint_{spire} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ d'où :

$$\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \cdot \iint_{spire} \frac{dr}{r} \cdot dz = \frac{\mu_0}{2\pi} ih \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pour N spires :

$$\phi_{total} = N\phi = N \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} ih \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

b) D'après la loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi_{total}}{dt}$ et $e = Ri_b$; on en déduit :

$$i_b = \frac{\mu_0}{2\pi} Nh \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{\omega}{R} I_0 \cdot \sin(\omega t)$$

c) L'anneau de la pince comporte un bobinage analogue à celui de la bobine torique ; il faut placer le fil sur l'axe de l'anneau ; en mesurant le courant dans le tore, on a accès à I_0. La pince ne fonctionne pas en courant continu car dans ce cas, il n'y a pas de variation de flux magnétique et donc pas de courant induit.

18.3 a) $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ et

$$\phi = NB\pi a^2 = Nn\mu_0 \pi a^2 \cdot i(t)$$

$$e(t) = -Nn\mu_0 \pi a^2 \cdot \frac{di}{dt}$$

b) $e(t) = -\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{0 - Nn\mu_0\pi a^2 I}{\Delta t} = \dfrac{I_{induit}}{R}$

$= \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$

On en déduit la quantité d'électricité induite pendant cette annulation :

$$\Delta q = Nn\mu_0 \pi a^2 IR$$

18.4 a) On peut faire le calcul en coordonnées sphériques ou en coordonnées cylindriques :

Équation de Maxwell-Gauss : on calcule $\text{div}\vec{E}$ et on obtient $\text{div}\vec{E} = \dfrac{\mu}{\varepsilon_0}$.

De même, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées sphériques :

Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$ car la densité de courant est nulle ici.

b) $\vec{E}(M) = \dfrac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \cdot \vec{u_r} = E \cdot \vec{u_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ donc :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{A}{4\varepsilon_0} r^2$$

On en déduit $V(r) = -\dfrac{A}{4\varepsilon_0} \cdot \dfrac{r^3}{3} + \text{constante}$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

18.5 a) *Équation de Maxwell-Ampère* : en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \vec{0}$ car cette expression du champ magnétique est valable à l'extérieur du fil, où il n'y a donc pas de courant $\left(\vec{j} = \vec{0}\right)$.

Équation du flux magnétique : $\text{div}\,\vec{B} = 0$

b) On obtient $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \vec{0}$ (pas de courant à l'intérieur du solénoïde) et $\text{div}\,\vec{B} = 0$.

18.6 a) $$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \frac{i_0}{\pi R^2}\sin(\omega t) \cdot \vec{u_z}$$

b) D'après la formule précédente, les variations temporelles du champ électrique sont équivalentes à un courant dont le vecteur densité de courant s'écrit :

$$\vec{j_d} = \frac{i_0}{\pi R^2} \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u_z} \text{ avec } \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j_d}$$

Ce courant, et donc le champ magnétique, sont invariants par translation de z et par rotation d'angle φ. B ne dépend donc que de r.
De plus, le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant et le champ magnétique est donc normal à ce plan.

c) $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j_d}$, ce qui conduit en utilisant les coordonnées cylindriques à :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \frac{i_0}{2\pi R^2} r \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u_\theta}$$

18.7 $$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n i_0 \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u_z}$$

Par analogie avec l'exercice précédent, on en déduit :

$$\vec{E} = \mu_0 \cdot \frac{n i_0 \omega}{2} r \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u_\theta}$$

Chapitre 19

19.1 a) Soit N le nombre d'électrons traversant la section par unité de temps , la quantité de charge correspondante s'exprime par $\text{d}q = N \cdot \text{e}$ (en valeur absolue), or $N = S \cdot v \cdot \text{d}t \cdot n$ où $S \cdot v \cdot \text{d}t$ représente le volume balayé par ces charges.

$\text{d}q = S \cdot v \cdot \text{d}t \cdot n \cdot \text{e}$ or $i = \text{dq}/\text{dt}$, donc :

$$v = \frac{i}{neS} = \frac{10}{82{,}5 \cdot 10^{27} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 2{,}5 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) $$N = \frac{\text{d}q}{\text{e}} = \frac{\text{i} \cdot \text{d}t}{\text{e}} = \frac{10 \times 1}{1{,}6.10^{-19}} = 6{,}25.10^{19} \text{ électrons}$$

19.2 a) $$\text{d}w = -q \cdot u = \text{e} \cdot u = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 5 = 8 \cdot 10^{-19}\text{J}$$

b) $\text{d}w > 0$ donc l'électron a acquis de l'énergie.

c) L'électron se déplace du potentiel le plus élevé au plus faible, donc le courant circule dans l'autre sens, il est donc positif du potentiel le plus faible au plus élevé. Le dipôle est générateur (u et i positif en convention générateur), il fournit de l'énergie à l'électron qui l'échangera à son tour avec le circuit extérieur.

19.3 a) $W = 60 \times 2 = 120 \text{ W} \cdot \text{h}$,

$W = 60 \times 2 \times 3600 = 432 \text{ kJ}$

b) $W = 12 \times 60 = 720 \text{ W} \cdot \text{h}$,

$W = 12 \times 60 \times 3600 = 2\,592 \text{ kJ}$

c) $P = u \cdot i = 12 \times 30 = 360 \text{ W}$,

$T = \frac{W}{P} = \frac{720}{360} = 2 \text{ h}$

19.4 a) $$\text{R}_{AB} = \rho \cdot \frac{c}{ab} = 17 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01 \times 0{,}02} = 4{,}25\ \mu\Omega$$

b) $$\text{R}_{CD} = \rho \cdot \frac{a}{cb} = 17 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{0{,}01}{0{,}05 \times 0{,}02} = 0{,}17\ \mu\Omega$$

c) Un élément conducteur n'a pas de résistance intrinsèque, tout dépend du trajet du courant, la grandeur caractéristique est sa résistivité.

19.5 La source de tension impose sa tension e à la résistance R, donc $i = e/\mathrm{R}$, la puissance fournie par la source vaut $p_s = e \cdot i$ et celle dissipée par la résistance vaut $p_R = R \cdot i^2$.
La source de courant impose son courant j à la résistance R, donc $u = \mathrm{R} \cdot j$, la puissance fournie par la source vaut $p_s = u \cdot j$ et celle dissipée par la résistance vaut $p_R = R \cdot j^2$.

	R = 1 kΩ			R = 500 Ω		
	i u	p_S	p_R	i u	p_S	p_R
Source de tension	10 mA 10 V	0,1 W	0,1 W	20 mA 10 V	0,2 W	0,2 W
Source de courant	10 mA 10 V	0,1 W	0,1 W	10 mA 5 V	0,05 W	0,05 W
Source de tension réelle	9,5 mA 9,5 V	0,095 W	0,09 W	18 mA 9,1 V	0,18 W	0,16 W

19.6 a) $q = \mathrm{C} \cdot u = 10 \cdot 10^{-6} \times 10 = 100\ \mu\mathrm{C}$,
$w = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{C} \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 = 500\ \mu\mathrm{J}$

b) $\Delta u = \frac{i}{\mathrm{C}} \cdot \Delta t = \frac{0{,}005}{10 \cdot 10^{-6}} \times 0{,}01 = 5\ \mathrm{V}$,
$\Delta t = \mathrm{C} \cdot \frac{\Delta u}{i} = 10 \cdot 10^{-6} \frac{-5}{-0{,}02} = 2{,}5\ \mathrm{ms}$

19.7 a) $w = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{L}i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01 \cdot 2^2 = 20\ \mathrm{mJ}$

b) $\Delta i = \frac{u}{\mathrm{L}} \cdot \Delta t = \frac{10}{0{,}01} \times 0{,}02 = 20$ A. Il faut une variation de $-\Delta i = -20$ A, soit une tension $u = \mathrm{L} \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0{,}01 \times \frac{-20}{0{,}005} = -40$ V.

Chapitre 20

20.1 $I_1 = -2$ A, $I_3 = 0$ A, $I_2 = 1$ A,
$U_3 = 3$ V, $U_1 = 4$ V, $U_2 = -3$ V

20.2 a) Lampe 1 :

$$\mathrm{R}_1 = \frac{U^2}{P} = \frac{10^2}{200} = 0{,}5\ \Omega$$

Lampe 2 :

$$\mathrm{R}_2 = \frac{U^2}{P} = \frac{10^2}{100} = 1\ \Omega$$

b) $I = \frac{E}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}} = \frac{12}{0{,}5 + 0{,}1} = 20$ A

$U = \mathrm{R}_1 \cdot I = 0{,}5 \times 20 = 10$ V

c) Résistance équivalente aux deux lampes en parallèle :

$$\mathrm{R}_{AB} = \frac{\mathrm{R}_1 \cdot \mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2} = \frac{0{,}5 \times 1}{0{,}5 + 1} \approx 0{,}33\ \Omega$$

$$I = \frac{E}{\mathrm{R}_{AB} + \mathrm{R}} = \frac{12}{0{,}33 + 0{,}1} \approx 27{,}7\ \mathrm{A}$$

$$U = \mathrm{R}_{AB} \cdot I = 0{,}33 \times 27{,}7 \approx 9{,}2\ \mathrm{V}$$

20.3 Circuit (a) :

$$\mathrm{R}_{Th} = \frac{\mathrm{R}_3 \cdot (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$$

$$E_{Th} = \frac{\mathrm{R}_1 \cdot \mathrm{R}_3 \cdot I}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$$

Circuit (b) :

$$\mathrm{R}_{Th} = \frac{\mathrm{R}_2 \cdot \mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$$

$$E_{Th} = \frac{\mathrm{R}_3 \cdot E}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}$$

20.4 $u + \mathrm{R} \cdot i = \mathrm{E}$; $u = \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$;
$i + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}$; $u + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$;

$$\begin{cases} i(t) = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \\ u(t) = \mathrm{E} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \end{cases} ;$$

$\tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}$

20.5 $u + \mathrm{L} \cdot \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mathrm{E}$; $i = \frac{u}{\mathrm{R}} + \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
$u + \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \mathrm{L} \cdot \mathrm{C} \cdot \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \mathrm{E}$
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L} \cdot \mathrm{C}}} \approx 31623\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$
$\mathrm{m} = \frac{1}{2 \cdot \mathrm{R}} \sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}} \approx 0{,}32$
$u(t) = (\mathrm{K}_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + \mathrm{K}_2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{E}$
$u(0) = \mathrm{K}_1 + \mathrm{E} = 0$
$\mathrm{K}_1 = -\mathrm{E}$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

$$\frac{du}{dt}(0) = -\frac{K_1}{\tau} + K_2 \cdot \omega = 0$$

$$K_2 = \frac{E}{\tau \cdot \omega} = \frac{m \cdot E}{\sqrt{1-m^2}}$$

$\omega \approx 29\,960$ rad · s $\quad \tau \approx 100$ µs

$$u(t) = E\left(\cos(\omega t) + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}\sin(\omega t)\right)e^{-t/\tau} + E$$

Chapitre 21

21.1 $i_1 = 10\cos(\pi/3) + j10\sin(\pi/3)$

$i_2 = 5\cos(\pi/3) - j5\sin(\pi/3)$

$i_3 = 5\cos(\omega t + 2\pi/3 - \pi/2)$

$= 5\cos(\pi/6) + j5\sin(\pi/6)$

$i_1 + i_2 = 5\sqrt{3}\cos(\omega t + \pi/6)$

$i_1 + i_3 = 16{,}54 \cdot \cos(\omega t + 0{,}97)$

21.2 RL série : $\underline{Z} = R + j \cdot L \cdot \omega$

RC série : $\underline{Z} = R - j \cdot \frac{1}{C \cdot \omega}$

RL parallèle :

$$\underline{Z} = \frac{RL\omega}{R^2(L\omega)^2} + (L\omega + jR)$$

RC parallèle :

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2} \cdot (1 - j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$$

21.3 $I = \frac{U}{Z} = \frac{230}{\sqrt{10^2 + (0{,}066 \times 2\pi \times 50)^2}}$

≈ 10 A

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}066 \times 2\pi \times 50}{10}\right)$$

$\approx 1{,}12$ rad $\approx 64°$

$P = 230 \times 10 \times \cos(1{,}12) = 10 \times 10^2$

$= 1\,000$ W

$Q = 230 \times 10 \times \sin(1{,}12)$

$= 0{,}066 \times 2\pi \times 50 \times 10^2$

$= 2\,070$ V.A.R

Il faut que la puissance réactive totale soit nulle, donc le condensateur doit fournir 2 070 V.A.R.

$$C = \frac{2\,070}{2\pi \times 50 \times 230^2} \approx 125\ \mu F$$

21.4

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j \cdot R \cdot C \cdot \omega}{1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega} = \frac{j \cdot \omega/\omega_0}{1 + j \cdot \omega/\omega_0}$$

$$\underline{H}(x) = \frac{j \cdot x}{1 + j \cdot x}$$

$\lim_{x\to 0} |\underline{H}(x)| = 0 \qquad \lim_{x\to 0} |\underline{H}(x)|_{dB} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \arg\underline{H}(x) = 90°$

$\lim_{x\to +\infty} |\underline{H}(x)| = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} |\underline{H}(x)|_{dB} = 0$ dB

$\lim_{x\to +\infty} \arg\underline{H}(x) = 0°$

$|\underline{H}(1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad |\underline{H}(1)|_{dB} = -3$ dB

$\arg\underline{H}(1) = 45°$

Lorsque $i(t) = \frac{v_e(t) - V}{R}$, asymptote d'équation $|\underline{H}(x)|_{dB} \approx +20 \cdot \log(x)$ c'est une droite de pente +20dB/décade. Lorsque $\omega \gg \omega_0$, asymptote horizontale $|\underline{H}(x)|_{dB} \approx 0$ dB

21.5 $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0}(j\omega) + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2}$ avec

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ et $m = \frac{1}{2 \cdot R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$L \approx 255$ µH et $C \approx 8$ µF

Chapitre 22

22.1 a) La condition de conduction de la diode est, compte tenu de la convention choisie sur la figure 22.9 : $i(t) > 0$.

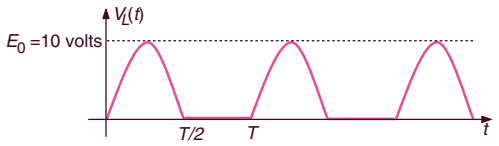
La démarche consiste à déterminer à partir de quelle valeur de la tension d'entrée v_e(t) la diode conduit. L'équation de maille le long du circuit nous permet d'écrire :

$$v_e(t) - V - R \cdot i(t) = 0 \text{ soit } i(t) = \frac{v_e(t) - V}{R}$$

soit en remplaçant dans I : $\frac{v_e(t) - V}{R} > 0$.

On remarque que lorsque la diode conduit, la tension V à ses bornes est nulle, on en déduit la condition sur $v_e(t)$: $v_e(t) > 0$.

En conclusion, en l'absence de tension de seuil pour la diode, dès que la tension $v_e(t)$ devient positive (entre 0 et *T/2*), la diode devient passante et la tension aux bornes de la charge est égale à $v_e(t)$. Dans le cas contraire (entre *T/2* et *T*), elle est bloquée, le courant est nul et la tension égale à 0.



Il s'agit d'un signal redressé mono alternance (ou simple alternance) dans la mesure où il ne redresse qu'une seule des deux alternances sinusoïdales du signal d'entrée. Ce signal est positif et l'on pourrait calculer sa valeur moyenne (ou composante continue) $v_{L\text{moy}}$.

$$v_{L_{\text{moy}}} = \frac{1}{T}\int_0^T v_e(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} E_0 \sin \omega t\,\mathrm{d}t$$

$$v_{L_{\text{moy}}} = \frac{E_0}{\pi} = 3{,}18\ \text{V}$$

La fonction de redressement est très utilisée en électronique, elle permet de transformer un signal périodique dont la valeur moyenne est nulle en un signal périodique (positif ou négatif) à valeur moyenne non nulle. Cette composante continue peut être conservée et traitée. Par exemple, c'est la fonction élémentaire qui permet de réaliser une alimentation continue à partir du secteur 50 Hz (chargeur de batterie ou d'accumulateurs...).

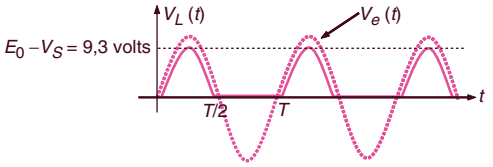
b) On tient compte maintenant de la tension de seuil V_s de la diode mais ceci ne change en rien la condition de conduction de la diode. Il suffit de considérer le schéma équivalent associé. Dans la mesure où la tension aux bornes de la diode est égale à V_s lorsqu'elle est passante, on peut écrire :

$$\frac{v_e(t) - V}{R} > 0 \quad \text{soit} \quad v_e(t) > V_s = 0{,}7\ \text{V}$$

Dans ce cas, la tension $v_L(t)$ s'exprime par :

$$v_L(t) = v_e(t) - V_s = v_e(t) - 0{,}7$$

Lorsque la diode est bloquée, le courant est nul et la tension $v_L(t)$ également.



c) Le générateur de fcem V_s est associé à la résistance R_s= 5 Ω.
La condition de conduction de la diode n'est pas modifiée ici aussi, ce qui donne :

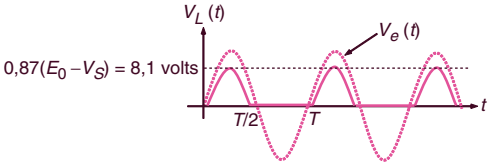
$$i(t) > 0 \text{ soit } \frac{v_e(t) - V}{R} > 0 \text{ et par conséquent}$$
$$v_e(t) > V_s = 0{,}7\ \text{V}.$$

Cette condition étant vérifiée, le courant I qui circule dans le circuit s'exprime par :

$$i(t) = \frac{v_e(t) - V_s}{R + R_s}$$

d'où :

$$v_L(t) = R \cdot i(t) = \frac{R \cdot (v_e(t) - V_s)}{R + R_s}$$
$$= 0{,}87 \cdot (v_e(t) - V_s)$$



On note que l'influence de la tension de seuil V_s sera d'autant plus sensible sur $v_L(t)$ que l'amplitude du signal d'entrée $v_e(t)$ est faible. À la limite, si $v_e(t)$ décroit jusqu'à 0,7 V, le signal de sortie devient nul.

22.2 a) Au même titre que l'exercice précédent, la condition de conduction de la diode n'est pas modifiée, soit $I > 0$ et il s'agit de notre hypothèse pour résoudre l'exercice.
Il reste à exprimer I en fonction de V_e, de V et des éléments résistifs du montage. L'application de la loi de Kirchhoff nous permet d'écrire :

$$I = I_1 + I_2 \text{ avec : } I_1 = \frac{V_e - V_L}{R_1} \text{ et } I_2 = -\frac{V_l}{R_2}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

En notant que, lorsque la diode est passante, la tension à ses bornes V est égale à V_s. En remplaçant dans l'expression de I, il vient :

$$I = \frac{(V_e - V_s)}{R_1} - \frac{V_s}{R_2} > 0$$

Soit :

$$V_e > V_s \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right) = 1{,}45 \cdot 0{,}7 = 1\ \text{V}$$

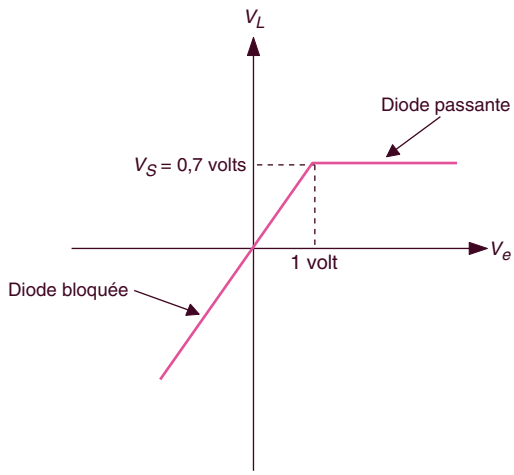
Nous constatons que lorsque la tension d'entrée excède 1 V, la diode devient passante et impose en sortie une tension égale à V_s = 0,7 V.

Lorsque la diode est bloquée, elle est associée à un circuit ouvert. Il ne reste que les deux résistances R_1 et R_2 qui forment un pont de résistances. L'expression de la tension de sortie est alors :

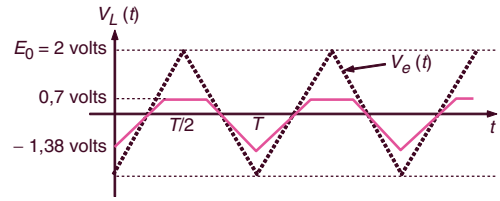
$$V_L = V_e \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = 0{,}69 \cdot V_e$$

Le signal de sortie est l'image du signal d'entrée à un coefficient près.

Nous avons déterminé les conditions de fonctionnement du circuit limiteur. La synthèse des résultats que nous avons obtenus est facilitée par la représentation graphique de $V_L = f(V_e)$.



b)



22.3 La capacité C est initialement déchargée (U_c = 0).

Lorsque la tension $v_e(t)$ augmente et devient supérieure à V_s = 0,7 V, la diode devient passante tandis que la capacité se charge à travers la diode jusqu'à atteindre la tension maximale :

$$U_{C_{max}} = E_0 - V_s = 1{,}3\ \text{V}$$

Notons que la charge de C à travers la diode est très rapide (elle suit la variation de $v_e(t)$) dans la mesure où la résistance série de la diode est considérée comme nulle alors que R de valeur élevée, n'a pas d'influence sur la charge de C.

Lors de la phase de décroissante de $v_e(t)$, la diode se bloque.

T étant la constante de temps du circuit, on remarque que :

$$\tau = R \cdot C = 1\ \text{s} \gg T = 10\ \text{ms}$$

La capacité n'a, par conséquent, pas le temps de se décharger dans R et elle conserve sa valeur de 1,3 V.

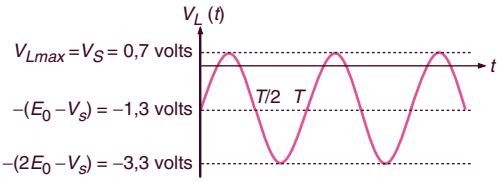
Tout se passe comme si C se comportait comme un générateur de tension de valeur :

$$U_{C_{max}} = 1{,}3\ \text{V}$$

L'application de la loi de Kirchhoff dans le montage nous permet d'écrire :

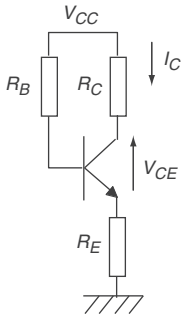
$$V_L = v_e(t) - U_{C_{max}}$$

La tension de sortie est l'image de la tension d'entrée à laquelle on a rajouté une composante continue égale à $-(E_0 - V_s) = -1{,}3$ V.



Chapitre 23

23.1 a) Le schéma équivalent statique est le suivant :

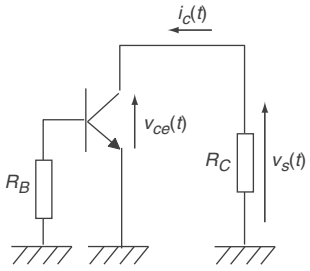


D'où l'on tire l'équation de la droite de charge statique suivante :

$$V_{CC} = V_{CE} + (R_C + R_E) \cdot I_C$$

avec l'approximation $I_E \approx I_C$

Le schéma équivalent dynamique s'obtient en éteignant la source de tension continue V_{CC} soit :



D'où l'on tire l'expression de la droite de charge dynamique :

$$v_{ce}(t) = -R_C \cdot i_c(t)$$

L'application du théorème de superposition nous permet d'écrire que :

$$V_{CE} = v_{ce}(t) + V_{CE0} \text{ et } I_C = i_{ce}(t) + I_{C0}$$

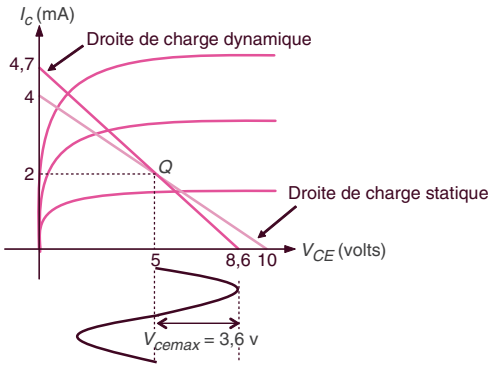
où V_{CE} et I_C sont respectivement les composantes instantanées de la tension et du courant dans le transistor. Celles-ci résultent de la superposition des composantes variables ($v_{ce}(t)$ et $i_c(t)$) et des composantes continues ou statiques (V_{CE0} et I_{C0}). En utilisant ces notations, l'équation de la droite de charge dynamique s'écrit :

$$V_{CE} - V_{CE0} = -R_C \cdot (I_C - I_{CE0})$$

Il reste à représenter graphiquement les deux droites dans le réseau de caractéristiques en notant que, pour faciliter les calculs, on choisira judicieusement deux points qui correspondent aux intersections des droites avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Après calculs, on trouve les couples de points suivants pour le tracé des deux droites:

- $[I_C = 0, V_{CE} = 10$ volts$]$ et $[I_C = 4$ mA, $V_{CE} = 0]$ pour la droite de charge statique,
- $[I_C = 0, V_{CE} = 8,6$ volts$]$ et $[I_C = 4,7$ mA, $V_{CE} = 0]$ pour la droite de charge dynamique.



b) On constate que le tracé nous apporte de précieuses informations. En effet, l'intersection entre les droites de charge statique et dynamique correspond au point de fonctionnement Q du montage.

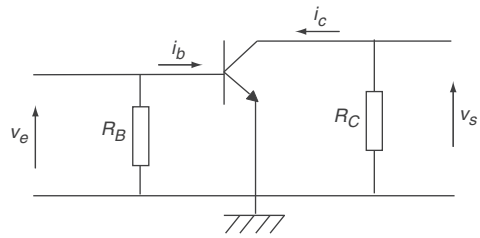
De plus, nous pouvons déduire de ce tracé l'amplitude maximale de la tension de sortie alternative $v_{smax} = v_{cemax}$.

Cette amplitude, limitée par la droite de charge dynamique, est de 3,6 V. Au-delà de cette valeur, il y a écrêtage du signal en sortie. Nous ne pouvons plus faire alors l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire de l'amplificateur.

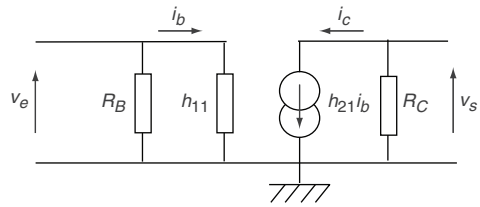
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

La solution qui permettrait de symétriser la tension de sortie consisterait à placer le point de fonctionnement au milieu de la droite de charge dynamique. Il faudra prendre soin dans tout montage à satisfaire cette condition, si l'on souhaite faire fonctionner le montage dans des conditions optimales. On comprend bien que l'approche qui consiste à dissocier l'étude statique et l'étude dynamique reste valide. Pour autant, quel que soit la valeur du gain du montage (que nous détaillerons un peu plus loin), l'amplitude du signal de sortie ne pourra jamais excéder $v_{smax} = 3{,}6$ V.

c) Le schéma équivalent dynamique, lorsque la source continue est désactivée est le suivant :



En remplaçant le transistor par son modèle quadripolaire en H, on obtient :



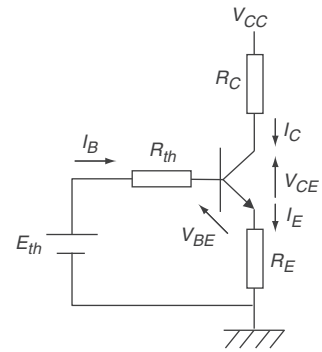
À partir duquel on détermine le gain en tension A_v.

$$v_e = h_{11}\, i_b \; ; \quad v_s = -h_{21}\, i_b\, R_C$$

$$\text{d'où } A_v = -\frac{h_{21}\, R_C}{h_{11}} = -138{,}5$$

On note que le gain en tension est élevé, caractéristique du montage émetteur commun. Pour autant, nous avons montré que l'amplitude maximale du signal de sortie v_{smax} ne pourra pas dépasser 3,6 V soit donc un signal appliqué en entrée d'amplitude maximale égale à 65 mV.
Le gain négatif indique un déphasage temporel de 180° entre les signaux d'entrée et de sortie. On observera un signal de sortie en opposition de phase par rapport au signal d'entrée.

23.2 a) Le générateur d'alimentation alternative v_e étant déconnecté, le schéma équivalent statique est représenté ci-dessous. Dans un souci de simplification, on déterminera le générateur équivalent de Thévenin vu entre le point A et la masse.



Avec :

$$R_{\text{Th}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 10{,}2\ \text{k}\Omega \text{ et}$$

$$E_{\text{Th}} = \frac{R_2 \cdot V_{CC}}{R_1 + R_2} = 2{,}25\ \text{V}$$

$$\text{d'où : } I_{\text{B}} = \frac{E_{\text{Th}} - V_{\text{BE}}}{R_{\text{Th}} + (\beta + 1) \cdot R_{\text{E}}} = 13{,}9\ \mu\text{A},$$

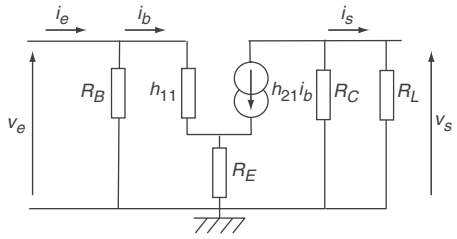
$$I_{\text{C}} = \beta \cdot I_{\text{B}} = 1{,}39\ \text{mA}$$

et

$$V_{\text{CE}} = 12 - (\beta \cdot I_{\text{B}}) \cdot R_{\text{C}} - (\beta + 1) \cdot I_B \cdot R_E$$
$$= 7{,}07\ \text{V} > 0$$

$V_{\text{CE}} > 0$ et $V_{\text{BE}} > 0$, le transistor fonctionne en mode actif direct.

b) Pour déterminer les grandeurs A_v, Z_e et Z_s, il est nécessaire d'établir le schéma équivalent dynamique petits signaux. Dans un souci de simplification, on posera $R_B = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$



Nous pouvons écrire :

$$v_e = h_{11} \cdot i_b + (h_{21} + 1) \cdot R_E \cdot i_b \text{ et } v_s = R_L \cdot i_s$$

en remarquant que $i_s = -\dfrac{h_{21} \cdot i_b \cdot R_C}{R_C + R_L}$ soit

$$v_s = -\frac{h_{21} \cdot i_b \cdot R_C \cdot R_L}{R_C + R_L}$$

Le gain s'écrit alors :

$$A_v = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{h_{21} \cdot R_C \cdot R_L}{(R_C + R_L) \cdot [h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E]}$$
$$= --3,1$$

c) Impédance d'entrée
Par définition $Z_e = \dfrac{v_e}{i_e}$

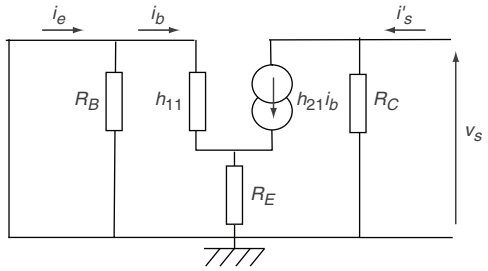
$$i_e = \frac{v_e}{R_B} + i_b \text{ avec } i_b = \frac{v_e}{h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E}$$

soit donc $i_e = v_e \left(\dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E} \right)$

$$Y_e = \frac{1}{Z_e} = \left(\frac{1}{R_B} + \frac{1}{h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E} \right) \text{ soit}$$

$$Z_e = \left(\frac{R_B \cdot [h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E]}{R_B + h_{11} + (h_{21} + 1) \cdot R_E} \right) = 9\,280\ \Omega$$

d) Impédance de sortie (hors charge)
Par définition $Z_s = \left. \dfrac{v_s}{i'_s} \right|_{v_e = 0}$ ce qui revient au schéma suivant :



On remarque que si $v_e = 0$ alors $i_e = i_b$. L'équation de maille à l'entrée conduit à :

$$h_{11} \cdot i_b + (h_{21} + 1) \cdot R_E i_b = 0 \text{ soit } i_b = 0$$

Si $i_b = 0$, le générateur $h_{21} i_b = 0$, il est donc désactivé. On en déduit l'impédance de sortie : $Z_s = R_C = 4\,700\ \Omega$

e) Impédance de sortie (en charge)
La définition reste identique. Il suffit de rajouter la résistance R_L en parallèle avec R_C. On en déduit $Z_s = \dfrac{R_C R_L}{R_C + R_L} = 3\,197\ \Omega$

Remarques

Il est judicieux de comparer la valeur du gain de cet amplificateur avec celui du montage de la figure 23.10 où l'on avait obtenu – 138,5 (montage à émetteur commun) et ceci même si les deux montages sont quelque peu différents. En effet, on remarque que le gain en tension est sensiblement diminué (– 3,1) lorsque la résistance d'émetteur n'est pas découplée.

Les valeurs des impédances d'entrée et de sortie seront qualifiées de « moyennes » (quelques centaines d'ohms à quelques centaines de kilo ohms). On ne peut par conséquent pas classer ce montage parmi les 4 types d'amplificateurs dont nous avons parlé (tension, courant, transrésistance ou transconductance). En effet, cette classification est établie selon les valeurs des impédances d'entrée et de sortie (idéalement, elles doivent tendre vers zéro ou l'infini).

Chapitre 24

24.1 a) L'AOP étant idéal, ceci implique que $\varepsilon = 0$. De plus, Z_e est infinie ce qui veut dire qu'aucun courant ne rentre dans les entrées inverseuse et non inverseuse de l'AOP. Dans ce cas, on peut écrire :

$i_2 = i_1$ par conséquent $v_{e1} = (R_3 + R_4) \cdot i_1 + v_s$

$$v^+ = \frac{R_2 \cdot v_{e_2}}{R_1 + R_2} = v^-$$

$$v_{e_1} = R_3 \cdot i_1 + v^+ = R_3 \cdot i_1 + \frac{R_2 \cdot v_{e_2}}{R_1 + R_2}$$
$$\Rightarrow i_1 = \frac{1}{R_3} \cdot \left(v_{e_1} - \frac{v_{e_2} \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

d'où

$$v_{e_1} = \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3}\right) \cdot \left(v_{e_1} - \frac{v_{e_2} R_2}{R_1 + R_2}\right) + v_s$$

$$\Rightarrow v_s = v_{e_1} - \frac{(R_3 + R_4)\, v_{e_1}}{R_3} + \frac{(R_3 + R_4)\, R_2 v_{e_2}}{R_3 (R_1 + R_2)}$$

En réduisant au même dénominateur, il vient :

$$v_s = -v_{e_1} \frac{R_4}{R_3} + \frac{(R_3 + R_4)\, R_2 v_{e_2}}{R_3 (R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow v_s = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \left(v_{e_1} - \frac{(R_3 + R_4)\, R_2 v_{e_2}}{R_4 (R_1 + R_2)}\right)$$

b) Pour que le signal de sortie puisse se mettre sous la forme $v_s = K\left(v_{e_1} - v_{e_2}\right)$, il faut que :

$$\frac{(R_3 + R_4)\, R_2}{R_4 (R_1 + R_2)} = 1 \Rightarrow \frac{(R_3 + R_4)}{R_4} = \frac{(R_1 + R_2)}{R_2}$$

$$\text{soit } \frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2}$$

Cette relation vérifiée, le signal de sortie s'écrit :

$$v_s = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \left(v_{e_1} - v_{e_2}\right) \text{ avec } K = -\frac{R_4}{R_3}$$

On constate ici aussi que l'expression du signal de sortie est indépendante de A_d gain de l'AOP. Celui-ci étant infini, l'expression de v_s ne dépend que des résistances du montage.

24.2 a) La tension différentielle $\varepsilon = 0$ car l'AOP est ici aussi idéal. La borne inverseuse de l'AOP se comporte alors comme une masse virtuelle et ramène un potentiel nul entre les dipôles constitués par R_1 d'un coté et R_2 en parallèle avec C de l'autre. Ces deux dipôles étant traversés par le même courant i dans la mesure où l'impédance différentielle de l'AOP Z_e est ici infinie. Le générateur délivrant une tension sinusoïdale, nous utiliserons ici la notation complexe. Nous pouvons par conséquent écrire :

$V_e = R_1 I$ et $V_s = -ZI$ avec

$$Z = \frac{\dfrac{R_2}{jC\omega}}{R_2 + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

d'où : $A_v = -\dfrac{R_2}{R_1} \cdot \dfrac{1}{1 + jR_2C\omega}$

Expression que l'on peut identifier avec la fonction de transfert d'un filtre actif passe-bas du premier ordre de la forme :

$$A_v = \frac{A_{v_0}}{1 + j \cdot \dfrac{f}{f_c}}$$

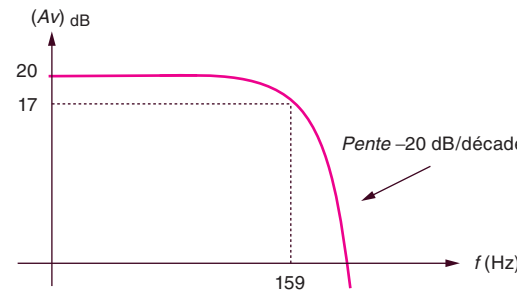
Par identification, on en déduit que le gain maximum $A_{v_0} = -\dfrac{R_2}{R_1} = -10$

d'où A_{v_0} (en dB) $= 20 \log |A_{v_0}| = 20$ dB

et la fréquence de coupure du filtre $f_c = \dfrac{1}{2\pi R_2 C}$ = 159 Hz.

Par opposition aux filtres passifs dont le gain maximum ne peut être supérieur à 0 dB, il est donc possible ici d'ajuster le gain dans la bande passante par un choix judicieux des résistances R_1 et R_2. La fréquence de coupure ne dépendant que de R_2 et C.

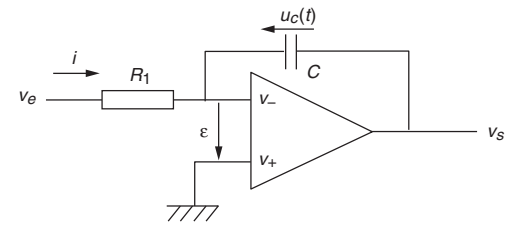
Nous pouvons représenter graphiquement l'évolution fréquentielle du module de la fonction de transfert.



b) Lorsque la fréquence de travail $f \geqslant f_c$, le terme $R_2C\omega$ devient prépondérant devant 1 (soit $R_2C\omega \geqslant 1$) dans l'expression du gain A_v. Celui-ci s'écrit alors :

$$A_v = -\frac{1}{jR_1C\omega}$$

Le schéma du montage simplifié est le suivant :



En effet, la condition $R_2 C\omega \geqslant 1$ implique que $R_2 >> \dfrac{1}{C\omega}$, le terme $\dfrac{1}{C\omega}$ représentant l'impédance de la capacité. Pratiquement, cela signifie que le courant circule majoritairement dans la capacité C, celui qui circule dans la résistance R_2 est infiniment petit et tend vers 0.

c) En régime temporel, nous pouvons écrire :

$i(t) = C \cdot \dfrac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}$ avec $u_c(t) = -v_s(t)$ ce qui revient à écrire $i(t) = -C \cdot \dfrac{\mathrm{d}v_s(t)}{\mathrm{d}t}$

De même, nous avons :

$$v_e(t) = R_1 \cdot i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v_e(t)}{R_1}$$

$$\Rightarrow \frac{v_e(t)}{R_1} = -C \cdot \frac{\mathrm{d}v_s(t)}{\mathrm{d}t}$$

soit $\Rightarrow v_s(t) = -\dfrac{1}{R_1 C} \displaystyle\int v_e(t)\,\mathrm{d}t$

Le signal de sortie est par conséquent l'intégrale du signal appliqué à l'entrée à condition que celui-ci soit de fréquence supérieure à f_c.

Remarque

Ce circuit est particulièrement intéressant. Il a, d'une certaine façon, une double utilisation. Son comportement fréquentiel est celui d'un filtre actif passe-bas dont le gain et la fréquence de coupure peuvent être ajustées selon les valeurs de R_1, R_2 et C. Il peut également réaliser la fonction d'intégration si la fréquence du signal à l'entrée est supérieure à f_c. A ce titre, on trouvera ce circuit dans la littérature sous l'appellation pseudo-intégrateur dans la mesure où la fonction d'intégration n'est pas assurée dans toute la bande de fréquence.

24.3 a) On remarque que la rétroaction s'effectue sur l'entrée non inverseuse de l'AOP ce qui laisse penser qu'il s'agit d'une rétroaction positive. Par un effet cumulatif du potentiel sur l'entrée non inverseuse (voir § 24.2.2 (b)), l'AOP fonctionne alors en régime non linéaire et sa tension de sortie ne pourra prendre que deux valeurs, soit + V_{CC}, soit – V_{CC}.

L'AOP fonctionne alors en comparateur. Le signe de la tension de sortie dépend du signe de ε selon le principe suivant :

- si $v^+ > v^-$ ($\varepsilon > 0$), alors

$$v_s = +V_{CC} = +15 \text{ V}$$

- si $v^+ < v^-$ ($\varepsilon < 0$), alors

$$v_s = -V_{CC} = -15 \text{ V}$$

L'entrée inverseuse étant reliée à la masse, déterminons le potentiel sur l'entrée non inverseuse. Par application du théorème de Millman, nous pouvons écrire :

$$v^+ = \frac{\dfrac{v_e}{R_1} + \dfrac{v_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} \quad \text{soit} \quad v^+ = \frac{(v_e \cdot R_2 + v_s \cdot R_1)}{R_1 + R_2}$$

i. Partons de l'hypothèse où $v_s = +V_{CC}$, il en découle que :

$$v^+ = \frac{(v_e \cdot R_2 + V_{CC} \cdot R_1)}{R_1 + R_2}$$

v_s basculera de $+V_{CC}$ à $-V_{CC}$ si et seulement si $v_+ < 0$ soit :

$$v^+ = \frac{(v_e \cdot R_2 + V_{CC} \cdot R_1)}{R_1 + R_2} < 0$$

$$\text{soit} \quad v_e < -\frac{V_{CC} \cdot R_1}{R_2} = v_e^- = -5 \text{ V}$$

En d'autres termes, tant que la tension d'entrée v_e reste supérieure à – 5 V (v_e^-), la tension de sortie v_s reste au potentiel + 15 V.

ii. Partons maintenant de l'hypothèse où v_s = -V_{CC}, il en découle que :

$$v^+ = \frac{(v_e \cdot R_2 - V_{CC} \cdot R_1)}{R_1 + R_2}$$

v_s basculera de -V_{CC} à +V_{CC} si et seulement si $v_+ > 0$, soit :

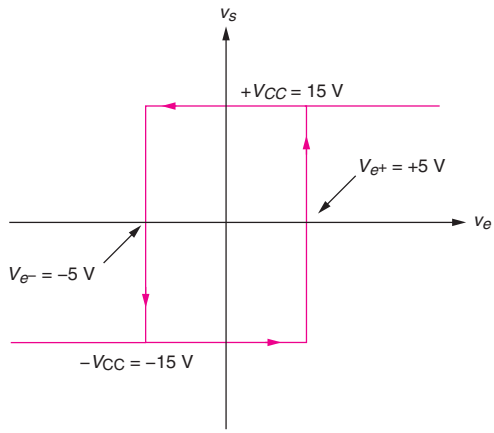
$$v^+ = \frac{(v_e \cdot R_2 - V_{CC} \cdot R_1)}{R_1 + R_2} > 0$$

$$\text{soit} \quad v_e > \frac{V_{CC} \cdot R_1}{R_2} = v_e^+ = +5 \text{ V}$$

En d'autres termes, tant que la tension d'entrée v_e reste inférieure à + 5 V (v_e^+), la tension de sortie v_s reste au potentiel – 15 V.

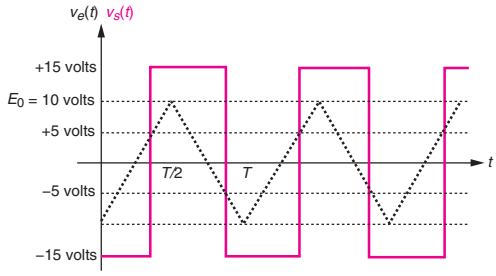
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

On déduit de ces deux résultats, la caractéristique de transfert $v_s = f(v_e)$.



On notera le sens de parcours de ce cycle, appelé également compte tenu de sa forme, cycle d'hystérésis.

b) Le signal de sortie, compte tenu du cycle d'hystérésis, est le suivant :



Remarque

Ce montage est également appelé circuit de mise en forme. La présence de seuils, ajustables par les résistances R_1 et R_2, dans la bascule de Smith permet de supprimer l'éventuel bruit parasite superposé au signal utile.

Chapitre 25

25.1 a) $P\lambda / (hc) \approx 1{,}9 \cdot 10^{34}$ s^{-1}
et $P\lambda^2 / (hc^2) \approx 1{,}1 \cdot 10^{29}$ /période

b) $IS\lambda / (hc) \approx 14\,000$ s^{-1}
et $IS\lambda^2 / (hc^2) \approx 2{,}6 \cdot 10^{-11}$ /période.

25.2 Deux ionisations de Li ($Z = 3$) donnent l'hydrogénoïde Li^{2+}, donc

$$W_{13} = W_0 \cdot Z^2 \approx 122 \text{ eV}.$$

25.3 D'après la formule de Rydberg, pour la série n :

$$R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\infty}\right) = R_H \cdot \frac{1}{n^2}$$

La série n est séparée de la série n – 1 pour :

$$R_H \cdot \frac{1}{n^2} < R_H \cdot \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n-1+1)^2}\right), \text{ soit}$$
$$n^2 - 4n + 2 < 0 \Rightarrow n \leqslant 3$$

25.4 Il faut remplacer Z par 1 et m_e par la masse réduite $m_e/2$ du système électron-positron dans les formules donnant a_0, R_1, W_0, W_i et v_1 pour un ion hydrogénoïde. On trouve :

$$R'_1 = 2a_0 \approx 1{,}05 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$
$$W'_i = W_0/2 \approx 6{,}83 \text{ eV}$$

$$R' = R_H^{\infty}/2 \approx 0{,}549 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1},$$
$$v'_1 = v_0 \approx 2{,}2 \cdot 10^6 \text{ m·s}^{-1}.$$

25.5 S_z (ou S_y ou S_x !) ne peut prendre que les valeurs $\hbar m_s = \pm\hbar/2$: $S_z = \hbar/2$, puis $S_y = -\hbar/2$, et enfin $S_z = \pm\hbar/2$ (S_y ayant une valeur déterminée à l'entrée dans l'appareil, sa coordonnée S_z était indéterminée car on ne peut connaître simultanément deux coordonnées d'un moment cinétique) ; c'est en ce sens que la mesure perturbe inévitablement le système.

25.6 L'intégrale donnée est la moyenne du champ magnétique vu par l'électron.

Avec $\vec{\mu}_e = -\frac{g_e e \cdot \vec{S_e}}{2m_e}$, $\vec{\mu}_p = \frac{g_p e \cdot \vec{S_p}}{2m_p}$ et $|\psi_{100}(\vec{0})|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}$:

$$\Delta E \approx -\vec{\mu}_e \cdot \left\langle \vec{B}(\vec{r}) \right\rangle$$
$$= \frac{\mu_0 e^2}{6} \cdot |\psi_{100}(\vec{0})|^2 \cdot \frac{g_e g_p}{m_e m_p} \cdot \vec{S_e} \cdot \vec{S_p}$$
$$= \frac{\mu_0 e^2}{6\,\pi a_0^3} \cdot \frac{g_e\, g_p}{m_e m_p} \cdot \left(\frac{\vec{S} \cdot \vec{S} - \vec{S_e} \cdot \vec{S_e} - \vec{S_p} \cdot \vec{S_p}}{2} \right)$$
$$= \frac{\mu_0 e^2 \hbar^2}{6\,\pi a_0^3} \cdot \frac{g_e\, g_p}{m_e m_p} \cdot \left(\frac{S\,(S+1) - (3/4) - (3/4)}{2} \right)$$

Par la méthode de la figure 25.4, on trouve S = 1 et 0 pour le nombre quantique de spin total. $\Delta E_{S=0} = -3A/4$ et $\Delta E_{S=1} = A/4$ où

$$A = \frac{\mu_0 e^2 \hbar^2}{6\pi a_0^3} \cdot \frac{g_e\, g_p}{m_e\, m_p}$$

$$h\cdot\nu = \frac{hc}{\lambda} = \left(E_1 + \frac{A}{4}\right) - \left(E_1 - \frac{3A}{4}\right)$$

$h\cdot\nu = A \approx 5{,}9 \cdot 10^{-6}$ eV $\Rightarrow \lambda = \dfrac{hc}{A} \approx 21$ cm.
Cette transition *interdite* (théorème 25.37) de probabilité infime est observée dans l'espace intergalactique.

25.7 La ligne n commence par l'élément de couche périphérique ns^1 et se termine par l'élément de couche périphérique $ns^2 2p^6$. D'après la règle de Klechkowski, les éléments de la ligne 5 sont $[-]5s^1$ à $[-]5s^2 4d^{10} 5p^6$, soit 2 + 10 + 6 = 18 colonnes ; les éléments de la ligne 6 sont $[-]6s^1$ à $[-]6s^2 5f^{14} 5d^{10} 6p^6$, soit 2 + 14 + 10 + 6 = 32 colonnes.

25.8 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2\, 3d^8$. $S_{max} = 1$ puis $L_{max} = 3$ donnent ^3F. La sous-couche d incomplète étant plus qu'à moitié remplie, J est maximal ; la valeur maximale de $m_J = m_L + m_S$ étant 3 + 1 = 4, J = 4, soit (3,1,4), noté $^3F_4$.

25.9 a) $\Delta E = -\overrightarrow{\mu_L} \cdot \vec{B} - \overrightarrow{\mu_s} \cdot \vec{B}$
$$= \frac{e\vec{L}}{2m_e} \cdot \vec{B} + \frac{g_e e \vec{S}}{2m_e} \cdot \vec{B}$$

b) $\Delta E = \dfrac{eB}{2m_e} \cdot (L_z + g_e S_z) = \dfrac{e\hbar B}{2m_e} \cdot (m_\ell + 2m_s)$
où $g_e \approx 2$.
$m_s = -1/2, +1/2$ et
$[\ell = 1 \Rightarrow m_\ell = -1, 0, +1] \Rightarrow$ écart minimal $\delta E = e\hbar B/(2m_e)$.

c) $\Delta E^{SF} = \Delta E^{SO} + \Delta E^{EC}$
$$= -\alpha^4 m_e c^2 \left(\frac{1}{\ell \pm 1/2 + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \cdot \frac{1}{(2n^3)}$$
$$\Delta E_+^{SF} = -(1/128)\alpha^4 m_e c^2 ;$$
$$\Delta E_-^{SF} = -(5/128)\alpha^4 m_e c^2 ;$$
$$\delta E^{SF} = (1/32)\alpha^4 m_e c^2$$
$$\delta E \,/\, \delta E^{SF} = \frac{16 e\hbar B}{\alpha^4 m_e^2 c^2}$$
$$\Rightarrow B \gg \frac{\left(\alpha^2 m_e c/4\right)^2}{e\hbar} \approx 0{,}78 \text{ T}$$

25.10 a) Le nombre en indice haut des niveaux est $2 \cdot S + 1 \Rightarrow S = 0 \Rightarrow \vec{S} = \vec{0} \Rightarrow$
$$\Delta E = -\vec{\mu}_L \vec{B} = [e/(2m_e)] \cdot \vec{L} \cdot \vec{B}$$
$$= [e/(2m_e)] \cdot L_z \cdot B$$
$$= [eB/(2m_e)] \cdot m_L \hbar$$

$$\begin{cases} (L = 0,\ m_L = 0) \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_0' = E_0 \\ (L = 1,\ m_L = 0,\ \pm 1) \Rightarrow E_1' = E_1, E_1' = E_{1\pm} \\ \qquad\qquad = E_1 \pm eB\hbar/(2m_e) \end{cases}$$

b) Les trois transitions entre E_0' et E_1' sont autorisées ($\Delta L = 1$; $\Delta S = 0$; $\Delta m_L = 0, \pm 1$) et ont pour fréquence respective :

$\nu_0 = (E_1 - E_0)/h$ comme pour $\vec{B} = \vec{0}$ et

$$\nu_\pm = \left(E_1 \pm \frac{e \cdot B \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} - E_0 \right) / h$$
$$= \nu_0 \pm \frac{e \cdot B}{4 \cdot \pi \cdot m_e}$$

c) $B > \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot \nu_0}{e \cdot R} = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot c}{e \cdot R \cdot \lambda_0}$
$\approx 2{,}9$ T

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Chapitre 26

26.1 Conservation de l'énergie classique entre $r = \infty$ et $r = D$:

$$E_C + 0 = 0 + Z \cdot \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 D}$$

$$\Rightarrow D = Z \cdot \frac{Z_\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 E_C} \approx 26{,}4 \text{ fm}$$

26.2 En notant R le rayon du noyau de nombre de masse A et m_0 la masse du nucléon : $\rho \approx A \cdot m_0 / (4\pi R^3 / 3)$. Avec $R \approx R_0 \cdot A^{1/3}$ et $m_0 \approx 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg : $\rho \approx 3m_0 / (4\pi R_0^3) \approx 0{,}3 \cdot 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Pour une étoile à neutrons (mélange d'électrons, protons et surtout neutrons) $\rho^* > \rho$!

26.3
$$E = -\vec{\mu_s} \cdot \vec{B} = -\frac{g_p e B}{2m_p} \cdot S_z$$
$$= \pm\frac{g_p e B}{2m_p} \cdot \frac{\hbar}{2}$$
$$\Rightarrow \cdot\nu = \frac{E_+ - E_-}{h} = \frac{g_p e B}{4\pi m_p} \approx 42{,}6 \text{ MHz}$$

26.4
$$T = E_R - m_p c^2 = \gamma(v) \cdot m_p c^2 - m_p c^2$$
$$= [\gamma(v) - 1] \cdot m_p c^2$$
donne $\gamma(v)$:
$$\Rightarrow v = c \cdot \frac{\sqrt{1 + 2(m_p c^2/T)}}{1 + (m_p c^2/T)}$$
$$v = c \cdot \sqrt{7}/4 \approx 0{,}66 \cdot c \approx 1{,}98 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
au lieu de :
$$v = c \cdot \sqrt{2T/m_p} = c \cdot \sqrt{2/3}$$
$$\approx 0{,}82 \cdot c \approx 2{,}46 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
en mécanique classique.

26.5 Comme pour un photon, dans ce cas :
$$\lambda = c/\nu = h \cdot c/E \approx 1{,}2 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

26.6 $M(^{137}_{57}\text{La}) < M(^{137}_{58}\text{Ce}) \Rightarrow$ désintégration β^- impossible.
$M(^{137}_{57}\text{La}) < M(^{137}_{56}\text{Ba}) + 2 \cdot m_e \Rightarrow$ désintégration β^+ impossible.
$M(^{137}_{56}\text{Ba}) \cdot c^2 - M(^{137}_{57}\text{La}) \cdot c^2 + E_X \approx 0{,}465$ MeV $> 0 \Rightarrow$ capture possible.

26.7 Dans le référentiel où le nuclide parent est au repos (référentiel du centre de masse du système), la conservation de l'énergie relativiste s'écrit, en masses atomiques ou en masses nucléaires : $M_{Mo}c^2 = 2(M_{Sc}c^2 + K_{Sc})$
La désintégration n'est énergétiquement possible que si la somme des énergies cinétiques finales est positive :
$$2K_{Sc} = M_{Mo}c^2 - 2M_{Sc}c^2 \geqslant 0$$
soit $M_{Mo} \geqslant 2M_{Sc}$, ce qui est le cas.

26.8 $^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* = {}^{236}_{92}\text{U} + Q_e$
$$\Rightarrow Q_e = [M(^{235}_{92}\text{U}) + m_n - M(^{236}_{92}\text{U})] \cdot c^2$$
$$\approx 6{,}5 \text{ MeV} ;$$
$$^{235}_{92}\text{U} + n(0{,}04 \text{ eV}) \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2n + Q$$
$$\Rightarrow Q = [M(^{235}_{92}\text{U}) - M(^{94}_{38}\text{Sr}) - M(^{140}_{54}\text{Xe}) - m_n] \cdot c^2$$
$$\approx 184{,}7 \text{ MeV}$$

26.9 Le nombre de nucléons se conservant, la fission en ^{90}Kr et ^{143}Ba après capture d'un neutron par ^{235}U s'accompagne de l'éjection de $(235 + 1) - (90 + 143) = 3$ neutrons. Chaque désintégration β^- laisse A inchangé et augmente Z de 1 ; Kr ($Z = 36$) se transforme en Zr ($Z = 40$) par $40 - 36 = 4$ désintégrations et Ba ($Z = 56$) en Nd ($Z = 60$) par $60 - 56 = 4$ désintégrations.
$$^{235}_{92}\text{U} + n \rightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow {}^{90}_{36}\text{Kr} + {}^{143}_{56}\text{Ba} + 3n$$
$$\rightarrow {}^{90}_{40}\text{Zr} + {}^{143}_{60}\text{Nd} + 3n + 8e^- + 8\,\overline{\nu}$$
En masses nucléaires m et en masses atomiques M :
$$Q = [m(^{235}_{92}\text{U}) - m(^{90}_{40}\text{Zr}) - m(^{143}_{60}\text{Nd}) - 2m_n - 8m_e] \cdot c^2$$
$$= [M(^{235}_{92}\text{U}) - M(^{90}_{40}\text{Zr}) - M(^{143}_{60}\text{Nd}) - 2m_n] \cdot c^2$$
$$\approx 197{,}6 \text{ MeV}$$

26.10 a) Le remplissage des sous-couches (règle de Klechkowski) montre que les Ca et Sr

ont la même structure électronique périphérique et donc des propriétés chimiques analogues :
Ca ($Z = 10$) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$;
Sr ($Z = 39$) : $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 4p^6\ 5s^2$.

b) L'activité d'un échantillon de n noyaux étant λn et la masse molaire M du strontium étant approximativement donnée en grammes par son nombre de masse ($M \approx 90$ g) : $a = \lambda n \Rightarrow n = a / \lambda \Rightarrow \rho = [\, nM / N_A \,] = aM / [N_A \cdot \lambda]$.
Avec $\lambda = \ln(2) / T$: $\rho = [nM / N_A]$
$= aMT / [N_A \cdot \ln(2)] \approx 7 \cdot 10^{-15}$ g $\cdot$ cm^{-3}.

26.11 a) Par le calcul du théorème 26.23 :

$$N_U(t) = N_U(0) \cdot \exp(-\lambda t) \text{ et}$$
$$N_P(t) = [N_U(0) - N_U(t)]$$
$$= N_U(0) \cdot [1 - \exp(-\lambda t)]$$
$$\Rightarrow \varepsilon = \exp(\lambda t) - 1$$
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1 + \varepsilon)$$
$$t = T \cdot \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2} \approx 3{,}6 \cdot 10^9 \text{ ans.}$$

b) x étant le nombre d'α et y le nombre de β, la conservation de A et Z donne : $\{238 = 206 + 4x$ et $92 = 82 + 2x - y\}$ soit $x = 8$ et $y = 6$.

26.12 $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$
Les deux photons sont émis dans des directions opposées avec des quantités de mouvement (et donc énergies) égales pour que la quantité de mouvement du système reste nulle.
Conservation de l'énergie relativiste : l'origine de l'axe étant au centre de l'axe,

$$m_e c^2 + m_e c^2 = E_\gamma + E_\gamma$$
$$\Rightarrow E_\gamma = m_e c^2 \approx 0{,}51 \text{ MeV}$$
$$t_1 = \frac{(R+x)}{c} \text{ et } t_2 = \frac{(R-x)}{c}$$
$$\Rightarrow x = \frac{(t_1 - t_2) \cdot c}{2} \approx 15 \pm 5{,}5 \text{ cm}$$

Une statistique sur un grand nombre d'annihilations améliore la précision.

Chapitre 27

27.1 14 électrons, donc :

$1s\sigma_g{}^2\ 1s\sigma_u{}^{*2}\ 2s\sigma_g{}^2\ 2s\sigma_u{}^{*2}\ 2p\pi_u{}^4\ 2p\sigma_g{}^2$;
l'ordre de liaison est $5 - 2 = 3$. Par exemple :
$1s\sigma_g{}^2\ \ 1s\sigma_u{}^{*2}\ \ 2s\sigma_g{}^2\ \ 2s\sigma_u{}^{*2}\ \ 2p\pi_u{}^4\ \ 2p\sigma_g{}^1\ 2p_x\pi_g{}^{*1}$.

27.2 La partie du plan 100 qui est dans la maille cubique est un carré de côté a avec, à chacun de ses 4 sommets, un atome commun à 4 carrés analogues, soit 1 atome pour l'aire a^2, soit $n_{100} = 1 / a^2 \approx 0{,}11$ Å^{-2}. La partie du plan 110 qui est dans la maille cubique est un rectangle de côtés a et $a\cdot\sqrt{2}$ avec, à chacun de ses 4 sommets, un atome commun à 4 carrés analogues, soit 1 atome pour l'aire $a^2\cdot\sqrt{2}$, soit $n_{110} = 1 / (a^2\cdot\sqrt{2})^2 \approx 0{,}0786$ Å^{-1}. La partie du plan 111 qui est dans la maille cubique est un triangle équilatéral de côté $a\cdot\sqrt{2}$ avec, à chacun de ses 3 sommets, un atome commun à 6 triangles analogues, soit 1 atome pour l'aire $a^2\sqrt{3}$, soit :

$$n_{111} = 1/\left(a^2\sqrt{3}\right) \simeq 0{,}064 \text{ Å}^{-2}.$$

27.3 Le volume peut être calculé par "volume$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = |(\vec{a} \wedge \vec{b})\cdot\vec{c}\,|$" en prenant pour vecteurs de la maille primitive les vecteurs d'origine O et d'extrémité la plus proche de O ; leurs coordonnées sont [0,1/2,1/2], [1/2,0,1/2], et [1/2,1/2,0].

$$\left|\left[\left(\frac{\vec{j}}{2}+\frac{\vec{k}}{2}\right)\wedge\left(\frac{\vec{i}}{2}+\frac{\vec{k}}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\vec{i}}{2}+\frac{\vec{j}}{2}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left|\left[\vec{j}\wedge\vec{i}+\vec{j}\wedge\vec{k}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\vec{k}\wedge\vec{i}+\vec{k}\wedge\vec{k}\right]\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\left|\left[-\vec{k}+\vec{i}+\vec{j}+\vec{0}\right]\cdot\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\right|$$
$$= \frac{1}{8}\cdot 2 = \frac{1}{4}$$

soit un volume $a^3 / 4$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

27.4 Le rayon des sphères jointives placées aux sommets de la maille cubique simple de paramètre a est a / 2, soit un volume par sphère $\pi \cdot a^3/6$. Chacun des 8 nœuds de la maille étant commun à 8 mailles, il y a une sphère entière par maille, soit une compacité :

$$(\pi \cdot a^3/6) / a^3 = \pi/6 \approx 52\ \% < 74\ \%.$$

27.5 L'énergie d'un ion $Q = \pm q$ dans le champ des autres est :

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{2Q}{a} + \frac{2Q}{2a} - \frac{2Q}{3a} + \cdots \right]$$
$$= -\frac{2q^2 \cdot \ln 2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Pour N ions, $N \cdot E_1$ compterait deux fois chaque paire de charges, donc :

$$E = \frac{E_1}{2} = -\frac{q^2 \ln 2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

BOUDENOT J.-C., *Histoire de la physique et des physiciens*, Ellipses, 2001

NOIROT Y., PARISOT J.-P. ET BROUILLET N., *Cours de physique : mathématiques pour la physique*, Dunod, 2004

PERDIJON J., *Histoire de la physique*, Dunod, 2008

PERDIJON J., *La formation des idées en physique*, Dunod, 2007

http://public.web.cern.ch

http://www.cite-sciences.fr

http://www.esa.int

http://www.nasa.gov

http://www.palais-decouverte.fr

PARTIE I

ALONSO M. et FINN E., *Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique*, Dunod, 2004

ALONSO M. et FINN E., *Physique générale 2 : champs et ondes*, Dunod, 2005

FEYNMAN R., *Cours de physique de Feynman*, 5 volumes, Dunod, 1998-2000

GIE H., SARMANT J.-P., *Mécanique 1*, Tec & Doc, 1996

KANE J. et STERHEIM M., *Physique*, 3e édition, Dunod, 2004

PARTIE II

ATKINS P.W., « Chaleur et désordre : le deuxième principe de la thermodynamique », *Pour la Science*, 1990, ISBN 0764-1931.

BRÉBEC J.-M. (dir.), collectif, *Thermodynamique 1re année MPSI-PCSI-PTSI*, Hachette, 1995

DEPONDT P., *L'entropie et tout ça : le roman de la thermodynamique*, Cassini, 2001

DURANDEAU J.-P., *Thermodynamique*, Hachette, 1995

FAROUX J.-P., RENAULT J. et BOQUET L., *Toute la Thermodynamique*, Dunod, 2002

FAVERJON G., *Thermodynamique*, Bréal, 2003

LHUILLIER C. et ROUS J., *Introduction à la thermodynamique*, 3e édition, Dunod, 1999

REEVES H., *L'heure de s'enivrer*, Le Seuil, 1986

VAN WYLEN G.J., SONNTAG R.E., DESROCHERS P., *Thermodynamique appliquée*, Édition du Renouveau Pédagogique Inc., 1992

« Carnot : pourquoi sa machine a soufflé le chaud et le froid sur toute la physique », *Sciences et vie*, hors série n° 20, avril 1994

http://users.swing.be/p.collette/gaz.html

http://www.enit.fr/thermo

PARTIE III

BORN M. et WOLF E., *Principles of Optics*, 6e édition, Cambridge UP, 1997

BRUHAT G. ET KASTLER A., *Optique*, 6e édition, Dunod, 2004

HECHT E., *Optique*, 4e édition, Pearson Education, 2005

HECHT E., *Physique* 3, De Boeck, 2007

MOULINET S., *Mini Manuel d'optique géométrique*, Dunod, 2009

PARISOT P. SEGONDS S. et LE BOITEUX S., *Optique en 26 fiches*, Dunod, 2008

PÉREZ J.-P., *Optique : fondements et applications*, Dunod, 2004

RONCHI V., *Histoire de la lumière*, Gabay, 1996

PARTIE IV

ALONSO M. et FINN E.J., *Physique générale 2 : Champs et ondes*, Dunod, 2005

BUTOLI A. et LÉVY-LEBLOND J.-M., *Électricité et magnétisme*, Vuibert, 1999

CORDIER D., *Cours de physique électromagnétisme 2,* Dunod, 2007

FAROUX J.-P. ET RENAULT J., *Électromagnétisme 1 et 2,* Dunod, 1996-1998

FAROUX J.-P., RENAULT J. ET BERTIN J., *Électromagnétisme 1, 3 et 4*, Dunod, 1992

GIÉ H. et SARMANT J.-P., *Électromagnétisme 1re et 2e année,* Tec & Doc, 1996

HALLIDAY D., RESNICK S. ET WALKER J., *Physique 2 : électricité et magnétisme,* 6e édition, Dunod, 2003

HULIN M. ET MAURY J.-P., *Les bases de l'électromagnétisme,* Dunod, 1999

KREMPF P., *Les nouveaux précis - Électromagnétisme MPSI ou PCSI*, Bréal, 2003

SANZ M.-N., BADEL A.-E. et CLAUSSET F., *Physique tout-en-un 1re année*, Dunod, 2008

http://cours.cegep-st-jerome.qc.ca/203-201-r.f/volume.htm

http://www.edumedia-sciences.com

http://www.uel-pcsm.education.fr/consultation/reference/physique

Partie V

Floyd T.L., *Fondements d'électronique-Circuits, composants et applications*, 6e édition, Reynald Goulet Inc., 2006

Granjon Y., *TD électronique*, 2e édition, Dunod, 2004

Malvino P.-A. et Bates D.J., *Principes d'Electronique*, 7e édition, Dunod, 2008

Neffati T., *Introduction à l'électronique analogique*, Dunod, 2008

Rochette P., *Les fondamentaux en électronique – Semiconducteurs, circuits intégrés, fonctions*, Ellipses, 2006

Partie VI

Atkins P.W., *Quanta a handbook of concepts*. Clarendon Press, 1974

Cagnac B., Tchang-Brillet L. et Pebay-Peyroula J.-C., *Physique atomique*, 2 vol., Dunod, 2007

Cohen-Tannoudji C., Diu B. et Laloë F., *Mécanique quantique*, 2 vol., Hermann, 1973

Kahan T., *Le noyau atomique*, Presses Universitaires de France, 1984

Levine I.N, *Physical chemistry*, McGraw-Hill Inc, 1983

Meyerhof W.E., *Éléments de physique nucléaire,* Dunod, 1970

Perez J.-P., *Relativité*, Dunod, 1999

INDEX

A

absorption 220
absorptivité 220
accélération 37
  absolue 69
  d'entraînement 71
  de Coriolis 71
  gravitationnelle 50
  relative 70
accommodation 266
adiabatique 167
admittance 419
affinité électronique 479
Albert Einstein 14
amortissement 277, 288
  critique 279
  sous-critique 278
  sur-critique 280
Ampère 370, 371, 373, 375
amplificateur
  différentiel 459, 467
  opérationnel 459
amplitude 273, 284
  complexe 418
analyse harmonique 423
angle
  d'Euler 90
  de nutation 90
  de précession 90
  de rotation propre 90
  solide 216
antisymétrie 351, 356
  Π 352
aplanétisme 251
Aristote 3
atome 11
auto-induction 368, 370
autocollimation 264

B

bande-passante 426, 461, 465
battements 297
bilan thermique 208
bobine 393, 420
bobine équivalente 400
boson de Higgs 18
boussole 363
branche 398
bras de levier 79

C

capacité thermique 157, 206
caractéristique
  statique 388, 389
  tension-courant 433
céleste 65
centre de forces 81, 83
chaleur 145, 155
  spécifique 206
champ
  de moment de torseur 92
  électromoteur 365–368, 371, 372, 375
  électrostatique 330, 332, 337
  équiprojectif 92
charge 329
  électrique 325–327, 382
  élémentaire 327, 382
chemin optique 234
Christian Huyghens 97
chronologie 31
chute 48, 78
cinématique 89
circuit
  du premier ordre 405
  filiforme 347, 348
circulation 333, 349, 352, 356, 358, 372
classification périodique 475

coefficient
d'échange 210
d'échange convectif 211
d'émission 220
de dilatation thermique 213
de performance 186, 190
local d'échange 211
collimateur 315
compacité 554
composition du mouvement 66, 93
condensateur 392, 420
équivalent 401
condition
aux limites 209
de Dirichlet 209
de Gauss 248, 249
de Neumann 209
de Newton 210
initiale 209
conducteur 205, 383
ohmique 390
conductivité thermique 205
configuration électronique d'une molécule 549
coniques 84
conservation de la charge 383
conservative 55, 56, 59
constante
de Rydberg 484
de Stefan-Boltzmann 220
de structure fine 485
de temps 406
des aires 82
constructions géométriques 256, 261
convection 210
forcée 210, 211
naturelle 210, 213
coordinence 553
coordonnées géographiques 30
corde vibrante 286
corps 44, 46, 48, 50, 78
noir 15, 218, 219, 312, 320
courant 356
base 446
d'émetteur 446
de collecteur 446
de déplacement 371, 373, 375
de diffusion 433, 441
de Foucault 370
de saturation 433, 441
électrique 384
induit 364, 365, 367, 369, 375
cristaux
covalents 555
ioniques 555
métalliques 556
critère de Rayleigh 317, 318
cycle
de Carnot 189, 195
de Rankine 194
ditherme 187
monotherme 186

D

décibels 425
densité 329, 356
de charge 328, 329
de courant 352
de flux 205
volumique 375
volumique de charge 371, 372
déphasage 418
désexcitation d'un atome 314
désintégrations nucléaires 526
déviation 240, 242, 243
diagramme
de Bode 425
de Clapeyron 189
de Raveau 188
entropique 189
différence
de marche 293
de potentiel 385
diffraction 234, 298, 299, 308
de Bragg 551
par une ouverture circulaire 301
par une ouverture rectangulaire 301
diffusivité thermique 206
dilatation thermique 213
diode
à capacité variable 440
à jonction 432
électroluminescente 440
Schottky 439

Zéner 439
dioptre 229, 249, 250, 254–256, 258, 266, 270
dipôle
actif 389
électrique 387
linéaire 388
passif 389, 422
réactif 405, 409
dispersion 237, 316, 321
dissipatif 389
dissymétrie 465
distances focales 253, 264
distribution
continue 336
continues de charges 328, 332
de charges 339
diviseur
de courant 402
de tension 402
droite de charge
dynamique 451
statique 437, 449

E

éclairement 218
écoulement
externe 211
interne 211
effet
Hall 355
Joule 390
Zeeman 508
efficacité 186, 190, 191, 197
électrisation 325
électron 11, 383
électroscope 327
électrostatique 339
émissivité 220
émittance 217
énergie 145, 154
cinétique 57
d'un condensateur 393
d'une bobine 394
électrique 385
interne 154
mécanique 59
potentielle 55
potentielle de la pesanteur 107
potentielle du système 106
potentielle électrostatique 337
relativiste 516
énoncé
de Clausius 195
de Thomson 186
enthalpie 166
entrée
inverseuse 460, 467
non inverseuse 460, 467
entropie 145
équation
d'état 151
de la chaleur 208
de Schrödinger 488, 490
équilibre thermique 204
éther 3, 12
excitation d'un atome 314
expérience d'Young 292, 298

F

f.é.m
auto-induite 369
induite 366, 367, 375
facteur
d'amortissement 410
de qualité 423
faible impédance 467
Faraday 363, 370–373
fermions 503
fibre optique 238–240
fil rectiligne infini 348
fluide
frigorigène 184, 196, 198
moteur 184
fluorescence 503
flux 337, 339
conservatif 349, 356, 358, 373
de chaleur 204
magnétique 364, 366, 367, 369, 371, 373, 375
fonction
d'état 154
d'onde 488, 490

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

fonctionnement
linéaire 467
non linéaire 467
force 45, 48
centrale 81
centrifuge 78
d'inertie 76
de Coriolis 76
de Laplace 352–354, 358, 363
de Lorentz 346, 353, 355, 358, 363, 367
électrique 330
formule
de conjugaison 259
de Newton 264, 266
des réseaux 307
Foucault 374
Fourier 204
foyer 255, 260
et plan focal 252
image 252
objet 252
franges
brillantes 294, 295
localisées 298
sombres 294, 295
fréquence 228, 273, 416
de coupure 426, 465
frottement 50, 60

G

gain 453
bouclé de l'amplificateur 464
différentiel 460, 467
en courant statique 446, 447
en mode commun 460, 461, 467
en tension différentiel 461
Galilée 5
galiléen 44, 66
Gauss 371, 372, 375
générateur 386, 388
géocentrique 5
grandissement 254
linéaire 252
Grashof 213
gravitation 48
graviton 18

H

hamiltonien 489
héliocentrique 4
hémisphérique 216, 217
Henry 363, 370
homogène 216
hybridation des orbitales atomiques 550

I

image 245
réelle 246, 247
virtuelle 246, 247
impédance 419, 420
d'entrée 454, 460, 461, 467
de sortie 454, 460, 461
indice optique 235, 237
inductance propre 369
induction 364, 368, 370, 371
intensité 293, 294, 297
d'un courant 349–352
interactions fondamentales 16
interférence 292, 295
constructive 295
destructive 295
interféromètre de Michelson 12
interrupteur idéal 389
invariant 348, 351
Isaac Newton 8
isolant 205, 383
isotherme 151, 204
isotopes 512
isotrope 216

J

jonction PN 431

L

lampe spectrale 313
Large Hadron Collider 18
latitude 30, 78
lentille
convergente 259, 264, 269
divergente 259, 265, 270
mince 258, 261, 308

liaison
  chimique 543
  cristalline 555
  ponctuelle 100
lignes de champ 331, 334, 339
limite de résolution 309, 316
logarithme décimal 425
loi
  d'Ohm généralisée 419
  de Biot et Savart 347, 348, 351, 358
  de Coulomb 329, 340
  de Faraday 365, 367, 375
  de gravitation 9
  de Kirchhoff 221, 398
  de Lenz 364, 370, 375
  de Newton 211, 340
  de Planck 218
  de Snell-Descartes 229, 231
  de Wiedmann-Franz 206
  de Wien 219, 313
  des mailles 399
  des nœuds 398
longueur d'onde 215, 228, 243, 284
Lorentz 364
lumière visible 228
luminance 216, 217
lunette 315

M

machine
  à vapeur 184, 192
  ditherme 187
  frigorifique 195
  monotherme 186
  motrice 184, 189
  réceptrice 184, 189
  thermique 184
maille 398
masse 46
Max Planck 15
Maxwell 364, 370, 371, 373–375
mécanique quantique 487
méthode de Badal 265
milieu transparent homogène 226
miroir
  plan 248, 255
  sphérique 250, 254, 256
mode de fonctionnement
  linéaire 461
  non linéaire 462
mode de résonance 286
modèle
  de Bohr 483
  de la diode 434
  de la goutte liquide 521
  du corps noir 312
  en couches 523
  ondulatoire 226
  quantique de l'atome 313
  standard 17, 536
moment
  cinétique 80
  cinétique de spin 497
  cinétique orbital 491
  de la force 79
  dynamique 98
monochromatique 228, 293
moteur thermique ditherme 190
mouvement brownien 11

N

nerf optique 266
Neumann 364
nœud 285, 398
nombre
  d'Avogadro 474
  de Grashof 213
  de Nusselt 211
  de Prandtl 211
  de Rayleigh 213
  de Reynolds 211
  magique 513
nuclide 512
numéro atomique 512
Nusselt 211

O

objet
  réel 247
  virtuel 247

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

oculaire 268
œil 266–268, 309
  hypermétrope 267
  myope 267
Oersted 363, 370
ombres 236
onde 228, 298
  de L. de Broglie 486
  périodique 228
  plane 228
  sphérique 228
  stationnaire 284, 286
optique
  géométrique 229, 234
orbitale
  anti-liante 547
  liante 547
ordre de diffraction 306
oreille 289
orientation 349, 350, 358
oscillateur harmonique 273, 275, 278, 282, 288
oscillation 271, 288
  amortie 272
  entretenue 280
  entretenue (ou forcée) 272
  périodique 272
Ostrogradsky 370

P

paquet d'ondes 478
parallèle 400
paramètres hybrides 451
passe-bande 428
passe-bas 427, 428
passe-haut 430
pendule 275, 288
période 288
  de révolution 85
perméabilité magnétique 348, 371
permittivité électrique du vide 330
phase 273, 293
  à l'origine 416
photon 16, 476
physique 2
  moderne 11
plan d'incidence 229
planéité 81
planètes 84
plans
  focaux 255, 260
  principaux 253
PNP 445
poids 49
point 25, 30, 53, 80, 84
  conjugué 246
  de fonctionnement 389
  de fonctionnement statique 436, 449
polarisation du transistor 449
pompe à chaleur 195
positronium 486
potentiel 337
  électrique 385
  électrostatique 333, 335
pouvoir
  de résolution 316, 317
  séparateur 268
Prandtl 211
presbytie 268
pression partielle 153
principe
  de conservation des puissances 422
  de Fermat 234, 235
  de Huygens-Fresnel 298, 299, 301
  de relativité 7
  de superposition 332, 336
  fondamental en repère non galiléen 103
prisme 240, 243, 321
propagation 370, 373–375
propriété
  macroscopique 381, 397, 415
pseudo pulsation 410
Ptolémée 4
puissance
  active 421
  dissipée 99
  électrique 385, 421
  réactive 421
pulsation 416
  de résonance 423
  propre 410
punctum
  proximum 267
  remotum 267

Q

quanta 15
quarks 536

R

radioactivité 12
raies d'absorption 480
rapport de réjection en mode commun 460
Rayleigh 213
rayon 227, 229, 234
  de courbure 30, 39
rayonnement thermique 215
rayons particuliers 256, 262
rayons X 12, 477
réactance 419
réactif 389
réactions nucléaires 530
récepteur 386, 388
référentiel 26, 31, 33, 34, 37, 44, 46, 56, 58, 59
réflectivité 220
réflexion 220
  totale 232, 233
réfractomètre 237, 244
réfringence 230
régime
  dynamique 437
  dynamique petit signal 451
  forcé 406
  laminaire 212
  libre 406, 410
  permanent 207
  statique 447
  transitoire 207, 405
  turbulent 212
règle
  de Klechkowski-Madelung 506
  de l'octet 544
relation
  de conjugaison 252, 254, 255, 263
  de Fourier 204
  de Lambert 218
  de Stefan-Boltzmann 220
relativité galiléenne 75
rendement 186, 190
repère 26, 32
représentation
  complexe 276, 418
  de Lewis 544
réseau 305, 321
  blazé 307
  de caractéristiques 447
résistance 390, 419
  dynamique 438, 441
  équivalente 399, 403, 404
résonance 281, 285, 289, 423
ressort 274
résultante dynamique 102
rétine 266, 267
retour inverse 246
rétroaction 463
réversibles 159
Reynolds 211
rotation 72

S

schéma équivalent 451, 461
seau d'eau de Newton 75
section efficace 533
semi-conducteur 431
semi-conducteurs 383
série 399
seuil de réaction 518
solénoïde infini 352, 358, 366, 369
solides
  amorphes 204
  cristallins 204
  indéformables 89
source
  de chaleur 171, 208
  de tension idéale 391
  indépendante 403, 404
  luminescente 313
  réelle 392
  thermique 312
spectre 312
  continu 312
  de raies 314
  en absorption 314
  en émission 314

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

spectroscope
à prisme 315, 318
à réseau 315, 319
interférentiel 320
spectroscopie 312
Stokes 370
surfaces
d'onde 227
équipotentielles 334, 339
symétrie 348, 351, 356
système 146
aplanétique 247
centré 251
de coordonnées 26
dispersif 315
optique centré 246
optique mince 253

T

télescope 257
température 145, 204
absolue 148
temps 31
tension 385
de seuil 435, 441
tesla 346
théorème
d'Ampère 349–352, 356, 358, 373
d'Ostrogradsky 372, 373
de Carnot 190, 191, 197, 198
de gauss 337
de Gauss 338, 339, 372
de l'énergie cinétique 108
de Norton 404
de Stokes 372, 373
de superposition 403
de Thévenin 403
des actions réciproques 101, 105
théorie générale de la relativité 14
thermique 203
titre 177
torseur
cinématique 100
cinétique 94
dynamique 98
statique 100
totale 217
transformateur 368, 370
transformation 152, 159
de Lorentz 13
transistors
NPN 445
NPN, PNP 445
transitoire 207
translation 71
transmission 220
transmissivité 220
transmittance 424
travail 52, 57, 105, 155
turbine à vapeur 193
tuyau sonore 287

V

valeur efficace 416
vapeur
saturante 175
surchauffée 174
vecteur
densité de courant 371, 372, 375
déplacement élémentaire 54
position 26, 32–34
rotation 73, 74
vecteur-surface 337
ventre 285
vergence 265
vibration 271
visibilité 295, 308
vitesse 32, 37, 38
absolue 67
aréolaire 83
d'entraînement 69
de la lumière 12, 374
relative 67

Z

zone
de claquage 448
de saturation 447
linéaire 448