

# PHYSIQUE CHIMIE


**MPSI**

Jean-Michel Bauduin • Thierry Bars • Mélanie Cousin • Yves Josse •  
Frédéric Legrand • Josiane Manasses • Hélène Michel

Avec la collaboration scientifique de Nicolas Champavert

Conception et création de couverture : Dominique Raboin

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--



**DANGER**  
LE PHOTOCOPIAGE  
TUE LE LIVRE

© Dunod, 2017

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

[www.dunod.com](http://www.dunod.com)

ISBN 978-2-10-076853-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

# Avant-propos

*« Quiconque a pensé pensera toujours, et l'entendement, une fois exercé à la réflexion, ne peut plus rester au repos. »*

J.-J. Rousseau, *Émile, ou de l'éducation*

## Les sciences physiques

Les sciences physiques ont pour objectif d'expliquer et de prévoir les phénomènes que nous pouvons observer. Par principe leurs lois, établies dans notre environnement terrestre, ont un caractère universel : valables dans nos laboratoires, elles sont réputées applicables en tout lieu, jusqu'aux confins de l'Univers, à toute date, dans le passé depuis la naissance de celui-ci, dans le présent et dans le futur, le plus lointain soit-il.

L'expérimentation y joue un rôle central. Une théorie, un modèle, ne valent que si leurs prévisions sont en accord avec les résultats expérimentaux, aux incertitudes près.

Expérimentation et développement théorique sont des moteurs qui se relaient l'un l'autre dans l'évolution des connaissances. Il est ainsi des étapes lors desquelles l'expérience permet de mettre en évidence un phénomène qui ne peut être expliqué par les théories existantes. Le travail du scientifique consiste alors à retoucher ces dernières, à les compléter, à en mettre de nouvelles en chantier pour rendre compte du phénomène observé. Il est à l'inverse d'autres étapes lors desquelles l'édifice théorique permet de prévoir un phénomène jusque-là inconnu. Le travail consiste alors à imaginer, à concevoir des expériences permettant de l'observer effectivement ou non et ainsi de confirmer ou d'infirmer certains éléments de l'édifice théorique.

L'histoire des sciences est riche d'exemples tels que mécanique newtonienne et observation du mouvement des planètes, théorie de l'électromagnétisme et prévision de l'existence des ondes électromagnétiques, modèle standard de la physique des particules et prévision de l'existence du boson de Higgs...

## L'ouvrage

Son contenu est conforme à celui des programmes en vigueur.

Mais, au-delà de cela, nous avons délibérément pris le parti de faire découvrir au lecteur les concepts, les lois de la physique et de la chimie dans le cadre de problématiques concrètes, en utilisant aussi souvent que possible des résultats expérimentaux. Au travers de cette démarche, notre ambition est de lui donner le goût de l'expérimentation en le sensibilisant à la richesse d'une telle approche.

En cela, **nous avons cherché à mettre en avant l'esprit des programmes**, qui valorisent le travail mené à partir de données expérimentales.

Ainsi, nous avons également voulu **tenir compte de la tendance actuelle des problèmes de concours**, qui évaluent de plus en plus l'aptitude à commenter et à exploiter des résultats expérimentaux.

Toutes les expériences décrites et exploitées, aussi bien dans le cours que dans les exercices, ont été effectivement conçues pour la rédaction de l'ouvrage. Pour la plupart elles ont été mises au point et réalisées par Frédéric Legrand, que nous remercions tous chaleureusement.

## Sa structure

La structure de chaque chapitre est la suivante.

- **L'essentiel du cours**, déroulé à partir d'une contextualisation servant de fil conducteur, présentant les concepts essentiels et les méthodes importantes. Des pictogrammes sont utilisés pour en faciliter la lecture :

□ : pour des **questions destinées à structurer l'exposé**, questions qu'un étudiant curieux pourrait être amené à se poser; nous l'incitons d'ailleurs à tenter d'y répondre au moins partiellement avant de poursuivre sa lecture,



! : pour attirer l'attention sur un point important,



💡 : pour mettre en valeur **une remarque** intéressante ou **une astuce**.

- Une **interrogation de cours** sous forme d'un QCM permettant au lecteur de tester rapidement sa compréhension des notions introduites dans l'essentiel du cours.
- Des **exercices** de niveaux progressifs, comprenant des liens avec les méthodes développées en cours (des méthodes vers les exercices et des exercices vers les méthodes) qui permettent une lecture croisée de l'ouvrage.
- Les **corrigés** de l'interrogation de cours et des exercices.

## Remerciements

Nous tenons à remercier l'ensemble du personnel du laboratoire de sciences physiques du lycée Chateaubriand de Rennes pour son assistance et ses encouragements dans la réalisation des nombreuses expériences conçues pour cet ouvrage. Nous remercions Joëlle Vidal, professeur de chimie à l'université de Rennes 1, pour ses conseils concernant la partie chimie. Merci également aux collègues qui nous ont fait part de leurs observations. Enfin, ces remerciements ne sauraient être complets sans une mention spéciale à tous nos proches pour leur infinie patience!



# Table des matières

## Partie 1 Signaux physiques

1 Oscillateur harmonique .....	7
2 Propagation et superposition des signaux .....	23
3 Optique géométrique .....	61
4 Introduction au monde quantique .....	97
5 Circuits électriques dans l'ARQS .....	117
6 Circuits linéaires du premier ordre.....	147
7 Oscillateurs amortis .....	171
8 Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé .....	193
9 Filtrage linéaire .....	217

## Partie 2 Mécanique

10 Cinématique du point et du solide.....	253
11 Loi de la quantité de mouvement.....	285
12 Approche énergétique.....	313
13 Mouvements de particules chargées.....	345
14 Loi du moment cinétique.....	367
15 Champ de force centrale .....	397

## Partie 3 Thermodynamique

16 Système thermodynamique à l'équilibre.....	427
---	-----

17 Échanges d'énergie – Premier principe .....	451
18 Second principe .....	477
19 Machines thermiques.....	501

## **Partie 4 Induction et forces de Laplace**

20 Champ magnétique et ses actions .....	533
21 Circuit fixe dans un champ variable .....	557
22 Circuit mobile dans un champ stationnaire.....	583

## **Partie 5 Architecture de la matière**

23 Atomes et éléments .....	611
24 Molécules et solvants .....	641
25 Solides cristallins .....	667

## **Partie 6 Transformations chimiques**

26 Équilibre thermodynamique d'un système chimique.....	691
27 Évolution temporelle d'un système chimique .....	711

## **Partie 7 Réactions chimiques en solution aqueuse**

28 Réactions acido-basiques .....	735
29 Dissolution et précipitation .....	763
30 Réactions d'oxydo-réduction.....	779
31 Diagrammes potentiel-pH.....	805
Index.....	827

**Partie 1**

**Signaux physiques**



# Oscillateur harmonique

## L'essentiel du cours

### Contexte

Les systèmes oscillatoires sont nombreux dans notre quotidien. Il suffit d'observer par sa fenêtre : un enfant joue à la balançoire, un oiseau passe en battant des ailes, une branche d'arbre oscille après le passage d'une rafale de vent, une voisine fait ses vocalises... Bien qu'il s'agisse de phénomènes physiques bien différents, on peut se demander si un même modèle mathématique simple peut les décrire.

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons étudié **expérimentalement** trois phénomènes physiques différents : les vibrations d'une branche d'un diapason et le son qu'il émet, ainsi que le mouvement d'une masse accrochée à un ressort.

### ■ 1 Du signal sinusoïdal...

Considérons une grandeur physique  $x(t)$  oscillant de façon sinusoïdale. Elle est décrite par une fonction  $x(t) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ , dont la représentation graphique est précisée sur la figure 1.1.

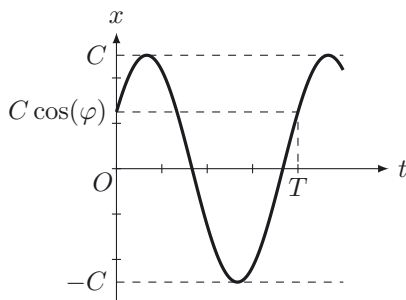


Figure 1.1. Une fonction sinusoïdale.

Quelques éléments de vocabulaire concernant  $x(t)$  :

- $C$  est l'**amplitude**. Elle est positive et son unité est la même que celle de  $x$ .
- $T$  est la **période**. Positive, elle s'exprime en secondes.
- $\varphi$  est la **phase à l'origine**. Appartenant à l'intervalle  $]-\pi, +\pi]$ , elle s'exprime en radians.

La phase à l'origine est l'argument du cosinus lorsque  $t = 0$ . Nous pouvons lire sur le graphe  $x(0) = C \cos(\varphi)$ .

La fonction cosinus étant  $2\pi$ -périodique ( $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ ), la fonction  $x(t)$  est  $T$ -périodique. Nous pouvons le vérifier rapidement :

$$x(t + T) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t + T) + \varphi\right) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + 2\pi + \varphi\right) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = x(t)$$

Nous pouvons définir deux autres grandeurs caractérisant la périodicité de la fonction  $x(t)$  :

- Sa **fréquence** :  $f = \frac{1}{T}$ . Elle représente le nombre de répétitions du signal par seconde et s'exprime en Hz.

- Sa **pulsation** :  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

On en déduit trois expressions équivalentes de la fonction  $x(t)$  :

$$x(t) = C \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = C \cos(2\pi ft + \varphi) = C \cos(\omega t + \varphi)$$

### Expérience du diapason (figure 1.2)

Un diapason, emboîté sur sa caisse de résonance ( $C$ ), est mis en vibration au moyen d'un marteau en caoutchouc. Le son émis est capté avec un microphone  $M$  placé à une distance  $d$  de l'ouverture de la caisse et relié à un amplificateur non représenté. La position, selon un axe ( $Ox$ ), d'une branche du diapason est déterminée par intégration temporelle de son accélération  $a_x(t)$  mesurée à l'aide d'un accéléromètre  $A$  fixé à sa base. Le microphone et l'accéléromètre délivrent des tensions analogiques proportionnelles au volume du son émis, pour l'un et à l'accélération, pour l'autre.

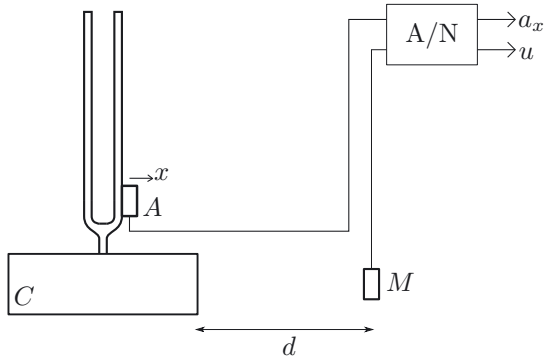


Figure 1.2. Dispositif expérimental.

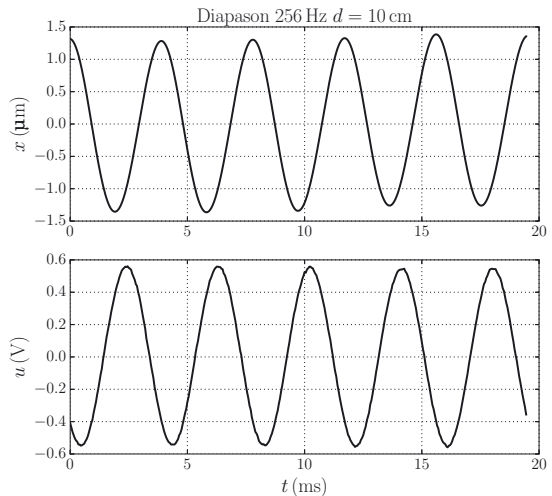


Figure 1.3. Résultats expérimentaux.

Le bloc (A/N) représenté figure 1.2 est un convertisseur analogique-numérique qui permet de convertir les signaux analogiques délivrés par nos capteurs en signaux numériques pouvant être acquis et traités par ordinateur. La double intégration temporelle de l'accélération permettant d'obtenir la position est réalisée à l'aide d'un script Python.

Le déplacement  $x(t)$  de la branche du diapason autour de sa position d'équilibre et la tension  $u(t)$  à la sortie de l'amplificateur sont représentés sur la figure 1.3. Nous constatons que ces deux signaux ont des allures très proches de celle d'une sinusoïde. Une analyse spectrale, méthode qui sera développée dans le chapitre 2 consacré à la propagation d'un signal, permet de le confirmer. Nous allons donc les modéliser comme étant deux signaux sinusoïdaux.

#### □ Comment déterminer les caractéristiques de ces signaux sinusoïdaux ?

- Cherchons  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$ .  
Sur la courbe  $x(t)$  de la figure 1.3, on mesure  $T = 3,9 \text{ ms}$ ,  $X_m = 1,3 \mu\text{m}$  et  $x(0) = 1,3 \mu\text{m}$ .  
On en déduit  $f = \frac{1}{T} = 2,6 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  et  $\omega = 2\pi f = 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Par ailleurs,  $x(0) = X_m \cos(\varphi_x) = X_m$  implique que  $\cos(\varphi_x) = 1$  et par conséquent  $\varphi_x = 0$ . Au final, nous avons  $x(t) = X_m \cos(\omega t)$  avec  $X_m = 1,3 \mu\text{m}$ .

- De la même manière, cherchons  $u(t)$  sous la forme  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ .

Sur la courbe  $u(t)$  de la figure 1.3, on mesure la même période que pour  $x(t)$  donc la même fréquence et la même pulsation, et  $U_m = 0,55 \text{ V}$ . Enfin  $u(0) = U_m \cos(\varphi_u) = -0,42 \text{ V}$  permet de déterminer  $\cos(\varphi_u) = -0,42/0,55$ . On en déduit  $\varphi_u = \pm 2,4 \text{ rad}$ . Pour choisir entre ces deux valeurs, intéressons-nous au signe de la dérivée de  $u(t)$  à  $t = 0$ .  $\frac{du}{dt} = -U_m \omega \sin(\omega t + \varphi_u)$  donc  $\frac{du}{dt}(0) = -U_m \omega \sin(\varphi_u)$ . La fonction  $u(t)$  étant décroissante à  $t = 0$ ,  $\sin(\varphi_u) > 0$ , et la solution qui convient est  $\varphi_u = 2,4 \text{ rad}$ . Au final, nous obtenons  $u(t) = U_m \cos(\omega t + 2,4)$  avec  $U_m = 0,55 \text{ V}$  et  $\omega = 2\pi f = 1,6 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Méthode 1.1 : Détermination des caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Soit un signal sinusoïdal de la forme  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ .

- Pour déterminer l'amplitude  $C = \frac{z_{\max} - z_{\min}}{2}$ , mesurer  $z_{\max}$  et  $z_{\min}$ .
- Pour déterminer la pulsation  $\omega$ , mesurer la période  $T$  et en déduire  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .
- Pour déterminer  $\varphi$ , mesurer  $z(0) = C \cos(\varphi)$ , en déduire  $\varphi = \pm \arccos\left(\frac{z(0)}{C}\right)$  puis choisir le bon signe en fonction du sens de variation de  $u(t)$  à  $t = 0$ .

➔ Exercice (1.1)

La fonction  $\arccos(\varphi)$  est définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et donne des valeurs sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .



Le signal  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$  peut être mis sous la forme  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .

Pour justifier cette remarque, développons la première expression de  $x(t)$  :

$$C \cos(\omega t + \varphi) = C \cos(\varphi) \cos(\omega t) - C \sin(\varphi) \sin(\omega t)$$

Par identification à la seconde expression de  $x(t)$ , nous obtenons :

$$A = C \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad B = -C \sin(\varphi) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Si on connaît  $C$  et  $\varphi$  ces relations permettent de déterminer  $A$  et  $B$ . Si à l'inverse on connaît  $A$  et  $B$ , on peut en déduire  $C$  et  $\varphi$  tels que :  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  et  $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$ .



La fonction  $\arctan(\varphi)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et donne des valeurs sur l'intervalle  $]-\pi/2, +\pi/2[$ . Pour déterminer  $\varphi$  qui est défini sur  $[-\pi, +\pi]$ , il est important d'étudier au préalable le signe de  $\cos(\varphi) = \frac{A}{C}$  ou de  $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C}$ .

## ■ 2 ... à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Les lois de la physique se traduisent souvent, comme nous le verrons dans les chapitres suivants, par des équations différentielles, c'est-à-dire des équations faisant intervenir les fonctions étudiées et leurs dérivées. Parmi les équations différentielles que nous pouvons rencontrer, certaines sont chargées de sens pour le physicien. Nous nous proposons d'aller à la découverte de l'une d'elles.

Reprenons le cas d'une fonction  $x(t)$  de la forme  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ . En la dérivant deux fois par rapport au temps, nous obtenons  $\frac{dx}{dt} = -\omega C \sin(\omega t + \varphi)$  puis  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 C \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$ . Nous en déduisons l'équation différentielle suivante :

$$(1.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation est une **équation différentielle linéaire** (c'est une combinaison linéaire de la fonction étudiée et de ses dérivées), **du deuxième ordre** (la dérivée d'ordre le plus élevé est la dérivée seconde) **sans second membre** (on dit aussi **homogène**). Un système physique dont le comportement est régi par cette équation porte le nom d'**oscillateur harmonique**.



Nous venons d'établir qu'une fonction de la forme  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$  est solution de l'équation 1.1. En fait, on peut montrer que **toute** solution de cette équation peut se mettre sous la forme  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi)$ , qui constitue donc sa **solution générale**.

### Définition : L'oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système dont la grandeur  $x(t)$  qui le caractérise vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

$\omega_0$  est la **pulsation propre** de l'oscillateur et se mesure en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Attention aux signes des coefficients :  $\frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0^2 x = 0$  est aussi une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, mais ce n'est pas celle de l'oscillateur harmonique !

### Expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4)

Un petit solide ( $S$ ), de centre de masse  $M$  et de masse  $m$ , est accroché à une potence par l'intermédiaire d'un ressort vertical. La position de  $M$  est repérée sur un axe vertical descendant dont l'origine  $O$  est confondue avec sa position d'équilibre.

Le solide ( $S$ ) étant à l'équilibre sous l'effet de son poids et de la force exercée par le ressort, nous l'avons écarté vers le bas d'une valeur  $x_0 = 4,8 \text{ cm}$  et l'avons lâché sans vitesse. Nous avons filmé son mouvement puis, en utilisant un logiciel d'analyse vidéo, nous avons extrait la position  $x(t)$  du point  $M$  au cours du temps. Enfin, à l'aide de Python, nous avons tracé le graphe de  $x(t)$ .

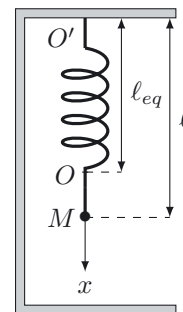


Figure 1.4. Oscillateur mécanique.



Le graphe obtenu est présenté figure 1.5. Nous constatons une allure sinusoïdale qui peut être confirmée par une analyse spectrale, méthode que nous avons déjà évoquée dans l'expérience du diapason et qui sera développée dans le chapitre 2.

Cela nous amène à considérer que le corps ( $S$ ) accroché au ressort se comporte comme un oscillateur harmonique et que  $x(t)$  doit être solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ . Nous en déduisons que  $x(t)$  peut se mettre sous une des deux formes équivalentes :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

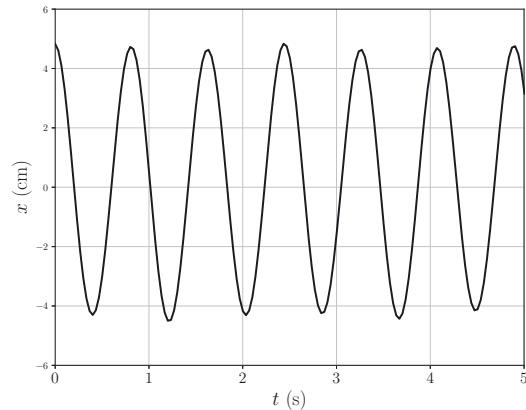


Figure 1.5. Position expérimentale.

### Étude théorique du mouvement d'une masse accrochée à un ressort

Une étude théorique nécessite d'être capable d'exprimer la force exercée par le ressort sur le solide ( $S$ ). Ce ressort est caractérisé par sa constante de raideur  $k$  (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et sa longueur à vide  $\ell_0$  (en m). Lorsque la longueur  $\ell$  du ressort est égale à sa longueur à vide, le ressort n'exerce aucune force sur le solide. Par contre, si le ressort est étiré ( $\ell > \ell_0$ ) il tire sur le solide, alors que s'il est comprimé ( $\ell < \ell_0$ ) il pousse dessus.

La force exercée par un ressort est donnée par la loi phénoménologique de Hooke.

#### Définition : Loi de Hooke

La **force de rappel** exercée par un ressort, de constante de raideur  $k$  (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ ) et de longueur à vide  $\ell_0$ , sur un solide relié en  $M$  à l'une de ses extrémités, s'écrit :

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$$

où  $\ell$  est la longueur du ressort et  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire dirigé du point de fixation du ressort vers le point  $M$ .

Les lois de la mécanique newtonienne, qui seront abordées dans des chapitres ultérieurs, permettent la mise en équations du problème. En repérant la position de  $M$  sur un axe vertical descendant dont l'origine est confondu avec sa position d'équilibre, nous sommes amenés à poser  $x = \ell - \ell_{eq}$ . La loi de la quantité de mouvement (voir chapitre 11) conduit alors à l'équation différentielle  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ . Nous reconnaissons celle de l'oscillateur harmonique et identifions la pulsation propre de notre système à  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Sa période est alors  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ . La masse du corps ( $S$ ) et la constante de raideur du ressort utilisé valant respectivement  $m = 275 \text{ g}$  et  $k = 15,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , nous trouvons  $T = 0,83 \text{ s}$ . Cela correspond à la valeur expérimentale que nous pouvons déduire de la courbe de la figure 1.5.

### ■ 3 Solutions de l'équation différentielle

Lorsque les lois de la physique nous conduisent à une équation différentielle devant être satisfaite par la grandeur étudiée, il nous faut rechercher parmi **l'ensemble des solutions** de cette équation, celle qui satisfait aux **conditions initiales** de notre problème.

Reprenons l'expérience de la masse accrochée à un ressort (figure 1.4). Nous savons que  $x(t)$ , solution de l'équation différentielle  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ , est de la forme  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Nous connaissons par ailleurs les conditions initiales :  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$ .

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \implies \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\text{Nous en déduisons : } \begin{cases} x(0) = x_0 = A \\ \dot{x}(0) = 0 = B\omega_0 \end{cases} \implies x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

Nous pouvons également utiliser la forme  $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$  :

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \implies \dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{Nous en déduisons : } \begin{cases} x(0) = x_0 = C \cos(\varphi) \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega_0 C \sin(\varphi) \end{cases} \implies \begin{cases} C \cos(\varphi) = x_0 \\ \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varphi = 0 \\ C = x_0 \end{cases}$$

puisque  $x_0 > 0$  et  $C > 0$ . Nous retrouvons bien le résultat précédent  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ .



La forme  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  est mieux adaptée aux calculs des constantes d'intégration à partir des conditions initiales que la forme  $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

#### Méthode 1.2 : Recherche de la solution de l'équation homogène

L'équation différentielle **homogène** de l'oscillateur harmonique est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

- Sa solution générale est  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .
- La solution satisfaisant au problème physique est obtenue en calculant les constantes d'intégration  $(A, B)$  ou  $(C, \varphi)$  à partir des conditions initiales.

➔ Exercice (1.2)

□ **Comment le choix de l'origine influe-t-il sur la forme de l'équation différentielle ?**

Reprenons encore une fois notre expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4). Nous pouvons choisir de prendre l'origine de l'axe au point  $O'$  où le ressort est accroché à la potence. Dans ce cas,  $x(t) = \ell(t)$ ,  $x_{eq} = \ell_{eq}$  et  $x(t) = x_{eq} + C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . En dérivant deux fois par rapport au temps nous obtenons :  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , soit :  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 (x(t) - x_{eq})$ .

Nous aboutissons à une équation différentielle un peu différente de la précédente :

$$(1.2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{eq}$$

C'est l'équation de l'**oscillateur harmonique avec second membre constant** où  $\omega_0$  est la **pulsation propre** de l'oscillateur harmonique et où  $x_{eq}$  repère sa **position à l'équilibre**.



On peut montrer que **toute** solution de cette équation peut se mettre sous une des deux formes équivalentes  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{eq}$  ou  $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{eq}$  qui constituent donc les formes de sa **solution générale**.

### Méthode 1.3 : Recherche de la solution de l'équation avec second membre

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec second membre constant est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = K \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver la **solution au problème physique** étudié il faut procéder par étapes :

- Écrire la solution générale de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) :  $x_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .
- Déterminer la solution particulière constante  $x_2$  de l'équation différentielle complète, avec second membre constant :  $x_2 = K/\omega_0^2$ . C'est la position d'équilibre du système.
- Écrire la solution générale de l'équation différentielle complète, avec second membre constant sous la forme  $x(t) = x_1(t) + x_2$ .
- Calculer les constantes d'intégration  $(A, B)$  ou  $(C, \varphi)$  à partir des conditions initiales.

➔ Exercice (1.2)



Dans l'étude d'un oscillateur il est souvent plus simple de prendre l'origine à la position d'équilibre. L'équation différentielle à laquelle on aboutit est alors homogène.

## ■ 4 Aspect énergétique

Nous verrons dans les chapitres suivants que l'étude d'un système oscillant ne peut aboutir à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, homogène ou avec second membre constant, que si les **phénomènes dissipatifs d'énergie sont négligés**.

□ **Comment se comporte au cours du temps l'énergie d'un oscillateur harmonique ?**

Reprenons une dernière fois notre expérience d'une masse accrochée à un ressort (figure 1.4), en prenant **l'origine à la position d'équilibre**. Nous verrons au chapitre 12 que pour un **tel système mécanique** nous pouvons définir **trois types d'énergie** :

- L'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ .
- L'énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{2} k x^2$ .
- L'énergie mécanique  $E_m = E_p + E_c$ .

Nous savons que  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$  avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Nous en déduisons :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

$$\text{D'où : } E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

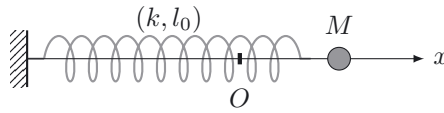
Ainsi, l'énergie mécanique de l'oscillateur reste constante au cours de son mouvement, ce qui est en cohérence avec le fait que pour aboutir à l'équation de l'oscillateur harmonique il faille négliger les phénomènes dissipatifs d'énergie.

**Bilan**

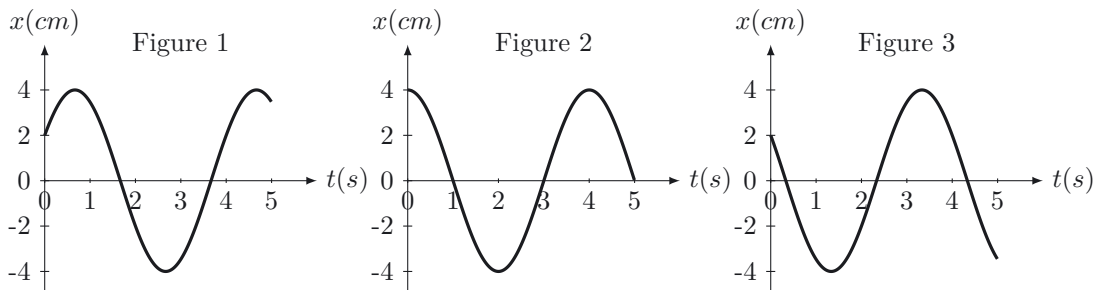
Nous verrons au chapitre 12, qu'un système effectuant des oscillations de faible amplitude autour d'une position d'équilibre stable se comporte, si les phénomènes dissipatifs d'énergie sont négligeables, comme un oscillateur harmonique. C'est ce qui fait l'importance de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, homogène ou avec second membre constant. L'énergie d'un tel système reste constante au cours du temps.

# Interro de cours

Une petite perle de masse  $m$  percée en son centre est enfilée sur un axe horizontal. Accrochée à l'extrémité d'un ressort horizontal de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , elle peut glisser sans frottement sur l'axe.



1. La perle est assimilée à un point  $M$  dont la position est repérée par le paramètre  $x = OM$ . Sachant que l'origine de l'axe ( $Ox$ ) est pris au niveau de la position d'équilibre de la perle, déterminer l'expression du paramètre  $x$  en fonction de la longueur  $\ell$  du ressort et de  $\ell_0$ .
  - (a)  $x = \ell$ .
  - (b)  $x = \ell - \ell_0$ .
  - (c)  $x = \ell + \ell_0$ .
  - (d)  $x = \ell_0 - \ell$ .
2. Le système masse-ressort décrit précédemment constitue un oscillateur harmonique dont l'équation du mouvement est :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ . Rappeler l'expression de la solution générale  $x(t)$  de cette équation différentielle et préciser l'expression de la pulsation propre des oscillations en fonction des données.
  - (a)  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)$  et  $\omega_0 = k/m$ .
  - (b)  $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et  $\omega_0 = \sqrt{m/k}$ .
  - (c)  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .
  - (d)  $x(t) = C \cos(\omega_0 t)$  et  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .
3. On lance la perle depuis sa position initiale  $\overrightarrow{OM}(0) = x_0 \vec{u}_x$  avec une vitesse  $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$ . En déduire l'expression de la solution  $x(t)$  vérifiant ces conditions initiales.
  - (a)  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ .
  - (b)  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + v_0 \sin(\omega_0 t)$ .
  - (c)  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) - v_0 \sin(\omega_0 t)$ .
  - (d)  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .
4. Sachant que  $x_0 > 0$  et  $v_0 > 0$ , déterminer la représentation graphique correspondant à l'expérience décrite précédemment.



- (a) Figure 1.
- (b) Figure 2.
- (c) Figure 3.

On souhaite écrire  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

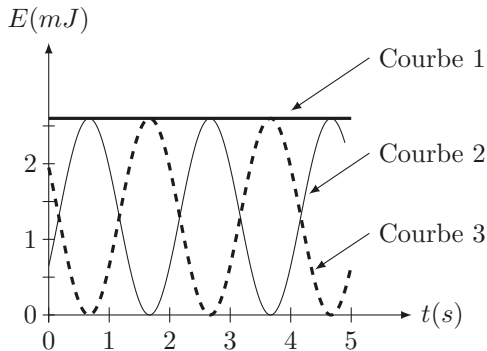
5. Par lecture graphique, déterminer la valeur de la pulsation propre  $\omega_0$  et de l'amplitude  $C$  des oscillations.

- (a)  $\omega_0 = 1,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $C = 4 \text{ cm}$ .
- (b)  $\omega_0 = 1,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $C = 8 \text{ cm}$ .
- (c)  $\omega_0 = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $C = 4 \text{ cm}$ .

6. Par lecture graphique, déterminer la valeur de la phase à l'origine  $\varphi$ .

- (a)  $\varphi = 0 \text{ rad}$ .
- (b)  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$ .
- (c)  $\varphi = -\pi/3 \text{ rad}$ .

7. Sur la figure ci-dessous, sont représentées les énergies cinétique, potentielle et mécanique de l'oscillateur. Pouvez-vous identifier ces trois courbes ?



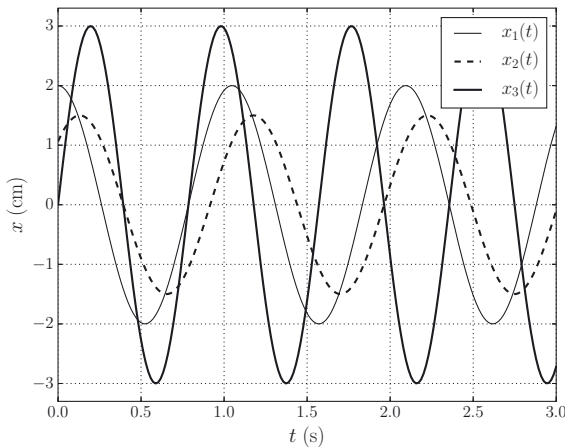
- (a) Courbe (1) =  $E_m$ , courbe (2) =  $E_p$  et courbe (3) =  $E_c$ .
- (b) Courbe (1) =  $E_p$ , courbe (2) =  $E_m$  et courbe (3) =  $E_c$ .
- (c) Courbe (1) =  $E_m$ , courbe (2) =  $E_c$  et courbe (3) =  $E_p$ .

# Exercices

## Exercice 1.1 Les valeurs de Sophie

➔ Méthode (1.1)

Étudiante en MPSI, Sophie réalise l'enregistrement du mouvement de trois oscillateurs harmoniques rappelé sur la figure ci-dessous.



Elle propose alors les expressions suivantes :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad ; \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t)$$

et  $x_3(t) = A_3 \cos(\omega_3 t)$

avec  $A_1 = 2,0 \text{ m}$ ,  $A_2 = 1,5 \text{ m}$ ,  $A_3 = 3,0 \text{ m}$ ,  
 $\omega_1 = \omega_2 = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\omega_3 = 8,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Vérifier les valeurs des amplitudes et des pulsations proposées par Sophie en portant un soin particulier aux unités proposées. Corriger si nécessaire.
2. Sophie a omis d'indiquer la phase à l'origine dans les trois cas. Réparer cet oubli et proposer des expressions de  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$ .

## Exercice 1.2 Un peu d'écriture

➔ Méthodes (1.2) (1.3)

L'abscisse  $x(t)$  d'un point matériel  $M$  obéit à l'équation différentielle suivante :  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$ . La position et la vitesse initiales de  $M$  sont respectivement  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = v_0$ .

1. En écrivant la solution  $x(t)$  sous la forme  $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + x_p$ , exprimer  $A$ ,  $B$ ,  $x_p$  et  $\omega$ .
2. Montrer que  $x(t)$  peut aussi s'écrire sous la forme  $x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) + x_p$ . Déterminer les expressions de  $C$  et  $\varphi$ .
3. On prend  $x_e = 0,0 \text{ m}$  et  $\omega_0 = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer  $A$ ,  $B$ ,  $x_p$  puis  $C$  et  $\varphi$  avec les conditions initiales :
  - a.  $x_0 = 1,0 \text{ m}$  et  $v_0 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - b.  $x_0 = -1,0 \text{ m}$  et  $v_0 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

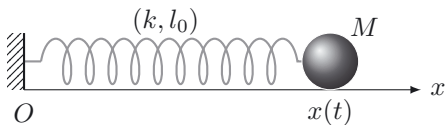
**Exercice 1.3 En apesanteur**

Il est important pour les astronautes de suivre l'évolution de leur masse corporelle au cours d'une mission spatiale. Or l'apesanteur rend inopérants les dispositifs habituels de mesure de la masse. Les astronautes utilisent alors une balance inertielle : il s'agit d'une sorte de chaise reliée à un point fixe du vaisseau par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$ . L'ensemble oscille à une fréquence dépendant de la masse posée sur la chaise. La fréquence d'oscillations mesurée est  $f_0 = 0,710$  Hz lorsque la chaise est vide. La masse de cette dernière est  $m_0 = 30$  kg.

1. Un astronaute de masse  $m$  prend place sur le dispositif. La période des oscillations est alors  $T = 2,56$  s. Déterminer  $m$ .
2. Que vaut la raideur  $k$  du ressort ?

**Exercice 1.4 Un ressort à tout casser**

Le jeune Nicolas s'amuse à viser ses soldats en plomb avec des billes en utilisant un ressort en guise de lanceur. Il place la bille contre le ressort, comprime celui-ci, puis lâche la bille.



Nous négligeons tout frottement avec le sol de sorte que la bille peut être assimilée à un point  $M$  d'abscisse  $x(t)$  en translation selon l'axe  $Ox$ . La longueur du ressort à l'instant  $t$  est ainsi  $x(t)$ .

Le ressort possède une longueur à vide  $l_0 = 6,0$  cm et une raideur  $k = 80$  N · m<sup>-1</sup>. La masse des billes est  $m = 1,3$  g.

1. Par des considérations énergétiques, déterminer la vitesse maximale atteinte par la bille si Nicolas comprime initialement son ressort de  $a = 4,0$  cm.
2. Nous souhaitons retrouver ce résultat par une autre méthode. L'équation différentielle vérifiée par la position  $x(t)$  de la bille lors de la phase de propulsion est la suivante :  $m\ddot{x} + k(x - l_0) = 0$ .
  - a. Résoudre l'équation différentielle et en déduire l'expression de  $x(t)$  au cours de cette phase avec une compression initiale de  $a = 4,0$  cm (sans vitesse initiale).
  - b. Quelle est la vitesse maximale atteinte par la bille ?

**Exercice 1.5 *Fabricando fit faber***

L'abscisse  $x(t)$  d'un oscillateur obéit à l'équation différentielle  $a\ddot{x} + bx = c$ . Nous envisageons les trois cas suivants :

- Cas (1) :  $a = 1,0$  ;  $b = 5,0$  USI ;  $c = 0$ .
- Cas (2) :  $a = 1,0$  ;  $b = 6,0$  USI ;  $c = 8,0$  USI.
- Cas (3) :  $a = 2,0$  ;  $b = 1,0$  USI ;  $c = 0$ .

1. Préciser les unités manquantes pour les constantes  $b$  et  $c$ .
2. Résoudre ces équations, avec les conditions initiales  $x(0) = 1,0$  m et  $\dot{x}(0) = 0,0$  m · s<sup>-1</sup>. Préciser dans chaque cas la pulsation propre puis la période de l'oscillateur.
3. Reprendre la question précédente avec  $x(0) = 0,0$  m et  $\dot{x}(0) = 1,0$  m · s<sup>-1</sup>.



**Exercice 1.6 Divergente**

L'abscisse  $x(t)$  d'un point matériel  $M$  obéit à l'équation différentielle  $\ddot{x} - \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$ .

1. Déterminer la position d'équilibre  $x_{eq}$  de  $M$ .
2. L'expression  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + x_{eq}$  est-elle solution de l'équation différentielle ?
3. L'expression  $x(t) = x_0 \exp(\omega_0 t) + x_{eq}$  est-elle solution de l'équation différentielle ? Dans l'affirmative, cette solution est-elle périodique ? Divergente ? Que peut-on alors dire de la stabilité de la position d'équilibre  $x_{eq}$  ?

# Corrections

## Interro de cours

1. Réponse (b).
2. Réponse (c).
3. Réponse (d) : la solution générale s'écrit sous la forme  $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  avec  $x(0) = x_0 = A$  et  $\dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0$ .
4. Réponse (a) : initialement,  $\dot{x}(0) = v_0 > 0$ .
5. Réponse (c) : la période est  $T_0 = 4,0 \text{ s}$  d'où  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et l'amplitude vaut  $C = 4 \text{ cm}$ .
6. Réponse (c) :  $C \cos(\varphi) = 2$  et  $\dot{x}(0) = -C\omega_0 \sin(\varphi) > 0$ .
7. Réponse (a) : l'énergie mécanique de l'oscillateur se conservant, comme initialement le ressort s'allonge, l'énergie potentielle commence par augmenter (courbe 2), l'énergie cinétique diminuant (courbe 3).

## Exercice 1.1

1. Sophie a vraiment commis de nombreuses erreurs :  $A_1 = 2,0 \text{ cm}$ ,  $A_2 = 1,5 \text{ cm}$  et  $A_3 = 3,0 \text{ cm}$ , les périodes sont  $T_1 = T_2 = 1,05 \text{ s}$ ,  $T_3 = 0,78 \text{ s}$ , donc  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T_1} = 6,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_3 = 8,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Notons que les unités proposées par Sophie pour les pulsations sont incorrectes.
2.  $\varphi_1 = 0$ , donc  $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$ ;  $x_2(t)$  est en retard par rapport à  $x_1(t)$ , le décalage temporel entre deux passages par 0 est  $\delta t = 0,13 \text{ s} = \frac{\varphi_2}{2\pi} T_2$ , soit  $\varphi_2 = 0,78 \text{ rad} \approx \frac{\pi}{4}$ , on obtient donc :  
 $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_1 t - \pi/4)$ . Quant à  $x_3(t)$ , on reconnaît clairement la courbe d'un sinus :  
 $x_3(t) = A_3 \sin(\omega_3 t) = A_3 \cos(\omega_3 t - \pi/2)$ .

## Exercice 1.2

1. On réinjecte la forme donnée dans l'équation différentielle :  $\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$ , d'où  $-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \omega_0^2(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + x_p) = \omega_0^2 x_e$  pour tout  $t$ . On en déduit immédiatement  $\omega = \omega_0$  et  $x_p = x_e$ .

Les valeurs de  $A$  et  $B$  s'obtiennent par la prise en compte des conditions initiales. On obtient :

$$x(0) = A + x_e = x_0, \text{ d'où } A = x_0 - x_e, \text{ et } \dot{x}(0) = v_0 = B\omega_0, \text{ soit } B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

L'expression finale est ainsi  $x(t) = (x_0 - x_e) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + x_e$ .

2. On développe  $C \cos(\omega_0 t + \varphi)$  en  $C \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - C \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)$ . Par identification à l'expression précédente on obtient  $C \cos(\varphi) = A$  et  $-C \sin(\varphi) = B$ , soit  $\tan(\varphi) = -B/A = -\frac{v_0}{(x_0 - x_e)\omega_0}$  et :

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_0 - x_e)^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

3. Dans les deux cas,  $x_p = 0,0 \text{ m}$ .

a. Nous trouvons  $A = x_0 = 1,0 \text{ m}$  et  $B = 1,0 \text{ m}$ . Nous en déduisons  $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,4 \text{ m}$ . Enfin,  $\arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = -45^\circ$  et  $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C} < 0$  :  $\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = -45^\circ$ .

b. Nous trouvons  $A = x_0 = -1,0 \text{ m}$  et  $B = 1,0 \text{ m}$ . Nous en déduisons  $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 1,4 \text{ m}$ . Enfin,  $\arctan\left(-\frac{B}{A}\right) = 45^\circ$  et  $\sin(\varphi) = -\frac{B}{C} < 0$  :  $\varphi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) - 180 = -135^\circ$ .

**Exercice 1.3**

- La fréquence d'oscillation d'un corps de masse  $M$  au bout du ressort de raideur  $k$  est donnée par  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$ , soit  $M = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$ . On aura donc ainsi  $m_0 = \frac{k}{4\pi^2 f_0^2}$  et  $m + m_0 = \frac{k}{4\pi^2 f_1^2} = \frac{kT^2}{4\pi^2}$ . On en déduit  $\frac{m + m_0}{m_0} = T^2 f_0^2$ , soit  $m = m_0(T^2 f_0^2 - 1) = 69 \text{ kg}$ .
- $k = 4\pi^2 f_0^2 m_0 = 6,0 \cdot 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**Exercice 1.4**

- L'énergie potentielle élastique de  $M$  est  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$ , son énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , le système est conservatif donc  $E_m = \frac{1}{2}k(x-l_0)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0-a-l_0)^2$ . On aura ainsi :  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}k(x-l_0)^2$ . La vitesse maximale est obtenue pour  $x = l_0$  et on obtient :  $v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{m}} = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- On cherche  $x(t) = l_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à  $x(0) = l_0 - a = l_0 + A$  et  $\dot{x}(0) = 0 = B\omega_0$ . On a donc  $x(t) = l_0 - a \cos(\omega_0 t)$ .
  - La vitesse de  $M$  est  $\dot{x}(t) = a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ . La vitesse maximale est donc  $v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Exercice 1.5**

- $a\ddot{x}$  s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . L'unité de  $b$  sera donc  $\text{s}^{-2}$ , et l'unité de  $c$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Cas (1) : c'est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_1 = \sqrt{b} = 2,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut donc écrire  $x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_1(0) = A = 1,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_1(0) = 0 = B\omega_1$ , soit  $x_1(t) = 1,0 \cos(\omega_1 t)$ . La période de l'oscillateur est  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2,8 \text{ s}$ .
  - Cas (2) : c'est l'équation d'un oscillateur harmonique avec un second membre, de pulsation  $\omega_2 = \sqrt{b}$ , soit  $\omega_2 = 2,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut donc écrire  $x_2(t) = A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t) + \frac{c}{b}$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_2(0) = A + \frac{4}{3} = 1,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_2(0) = 0 = B\omega_2$ , soit  $x_2(t) = -0,33 \cos(\omega_2 t) + 1,3$ . La période de l'oscillateur est  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2,6 \text{ s}$ .
  - (3) : l'équation peut se réécrire  $\ddot{x} + \frac{b}{a}x = 0$ ; c'est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_3 = \sqrt{b/a} = 0,71 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut donc écrire  $x_3(t) = A \cos(\omega_3 t) + B \sin(\omega_3 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_3(0) = A = 1,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_3(0) = 0 = B\omega_3$ , soit  $x_3(t) = 1,0 \cos(\omega_3 t)$ . La période de l'oscillateur est  $T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 8,9 \text{ s}$ .
- Cas (1) : c'est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_1 = \sqrt{b}$ . On peut donc écrire  $x_1(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_1(0) = A = 0,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_1(0) = B\omega_1 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $x_1(t) = 0,45 \sin(\omega_1 t)$ .
  - Cas (2) : c'est l'équation d'un oscillateur harmonique avec un second membre, de pulsation  $\omega_2 = \sqrt{b}$ . On peut donc écrire  $x_2(t) = A \cos(\omega_2 t) + B \sin(\omega_2 t) + \frac{c}{b}$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_2(0) = A + \frac{4}{3} = 0,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_2(0) = B\omega_2 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit :  $x_2(t) = -1,3 \cos(\omega_2 t) + 0,41 \sin(\omega_2 t) + 1,3$ .

- (3) : l'équation peut se réécrire  $\ddot{x} + \frac{b}{a}x = 0$  ; c'est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_3 = \sqrt{b/a}$ . On peut donc écrire  $x_3(t) = A \cos(\omega_3 t) + B \sin(\omega_3 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à :  $x_3(0) = A = 0,0 \text{ m}$  et  $\dot{x}_3(0) = B\sqrt{\omega_3} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $x_3(t) = 1,4 \sin(\omega_3 t)$  avec  $\omega_3 = 0,71 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 1.6**

1. À l'équilibre,  $\ddot{x} = 0$ , en réinjectant ceci dans l'équation différentielle, nous obtenons la position d'équilibre de  $M$  :  $x_{eq} = -x_e$ .
2. On réinjecte  $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + x_{eq}$  dans l'équation différentielle, on obtient  $-2\omega_0^2 x_0 \cos(\omega_0 t) = 0$ , ce qui ne peut être nul pour tout  $t$  : cette expression ne satisfait donc pas à l'équation différentielle donnée.
3. En réinjectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient  $0 = 0$  : cette expression est donc solution de l'équation différentielle. Cette solution n'est pas périodique et elle diverge avec le temps.  $x_{eq}$  ne peut donc pas être une position d'équilibre stable.

# Propagation et superposition des signaux

## L'essentiel du cours

### Contexte

Tout en écoutant jouer un orchestre symphonique, un physicien mélomane se pose de nombreuses questions. Comment les musiciens ont-ils réussi à accorder leurs instruments en quelques secondes en début de concert ? Comment expliquer que deux notes de même hauteur, jouées par deux instruments de musique différents, semblent si différentes ? Comment la propagation du son dans la salle conduit-elle à tous ces effets sonores ?

## ■ 1 Notions de signal et de spectre

### Définition : Signal

Un **signal** est une **grandeur physique** définie localement qui peut varier au cours du temps.

Nous pouvons citer quelques exemples de signaux dans une salle de concert :

- Le déplacement transversal d'un point d'une corde d'un instrument à cordes (piano, violon, guitare, etc.) lorsqu'un musicien en joue.
- La surpression locale  $p(t)$  de l'air par rapport à la pression d'équilibre  $P_0$  lors du passage d'une onde sonore. Cette surpression, aussi appelée pression acoustique, est alors la composante variable de la pression totale de l'air  $P(t) = P_0 + p(t)$ .
- Le déplacement de la membrane d'un microphone sous l'effet de l'onde sonore qu'il capte ou d'un haut-parleur sous l'effet d'une tension délivrée par un amplificateur.
- La tension générée par un microphone lors de l'enregistrement d'un son.

On trouve des signaux dans tous les domaines de la physique. Ils peuvent être mécaniques (déplacement, surpression), électriques (tension, intensité), électromagnétiques (champ électrique ou magnétique), quantiques (fonction d'onde décrivant une particule quantique).

### Spectre d'un signal constitué d'une superposition de signaux sinusoïdaux

Lorsqu'un signal est une superposition de signaux sinusoïdaux, il est intéressant d'accompagner la description de son **évolution temporelle** par une **représentation fréquentielle**.

À titre d'exemple, considérons le signal  $u(t)$  dont l'évolution temporelle est donnée figure 2.1 et la représentation fréquentielle figure 2.2.

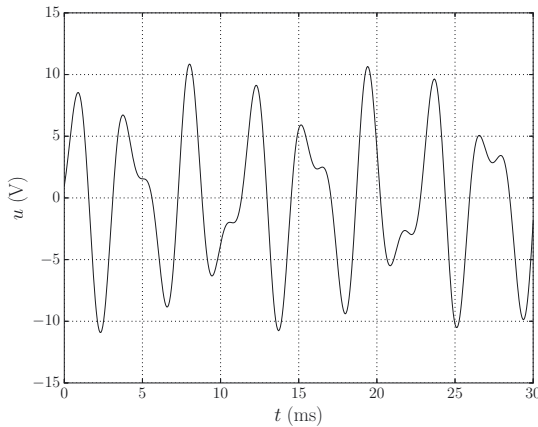


Figure 2.1. Évolution temporelle.

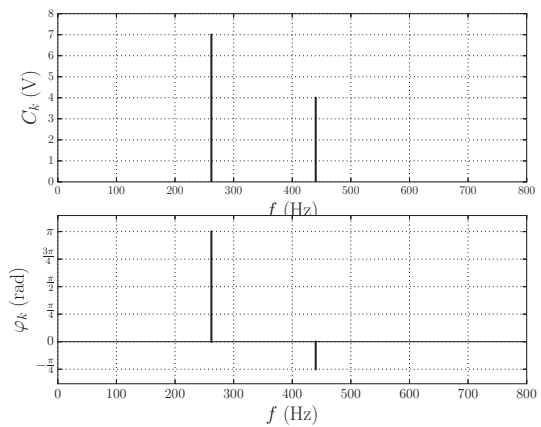


Figure 2.2. Représentation fréquentielle.

**Définition : Représentation fréquentielle d'un signal**

Soit un signal  $s(t)$  résultant de la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences  $f_n$ , d'amplitudes  $C_n \in \mathbb{R}^+$  et de phase à l'origine  $\varphi_n \in [-\pi, +\pi]$  :

$$s(t) = \sum_n C_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

Sa représentation fréquentielle est composée de deux graphiques :

- **Spectre en amplitude** : barres verticales de longueurs  $C_n$  et d'abscisses  $f_n$ .
- **Spectre de phase à l'origine** : segments verticaux de coordonnées  $[(f_n, 0), (f_n, \varphi_n)]$ .

□ **Comment reconstituer le signal  $u(t)$  à l'aide de sa représentation fréquentielle ?**

D'après sa représentation fréquentielle donnée figure 2.2, le signal  $u(t)$  comporte deux composantes sinusoïdales de fréquences  $f_1 = 262$  Hz et  $f_2 = 440$  Hz. La lecture des amplitudes sur la figure 2.2 nous permet d'écrire :

$$u(t) = C_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \text{ avec } C_1 = 7,0 \text{ V}, \varphi_1 = \pi, C_2 = 4,0 \text{ V et } \varphi_2 = -\pi/4.$$

**Analyse spectrale d'un signal périodique**

Cette analyse spectrale s'appuie sur un théorème mathématique, **le théorème de Fourier** qui permet de considérer un **signal périodique** comme une somme de signaux sinusoïdaux et de le décomposer en **série de Fourier**.

**Définition : Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique**

Un signal  $s(t)$  périodique de période  $T$ , de fréquence  $f = 1/T$ , peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de  $f$ , soit  $nf$ , constituant sa décomposition en **série de Fourier** :

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n \cos(2\pi nft) + B_n \sin(2\pi nft)] = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi nft + \phi_n)$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_n \in \mathbb{R}^+$ ,  $\phi_n \in ]-\pi, +\pi]$  et  $(A_n, B_n) \in \mathbb{R}^2$ .

Le théorème de Fourier donne les moyens de calculer les coefficient  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  :

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(2\pi nft) dt \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(2\pi nft) dt \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

Ces expressions ne sont toutefois pas au programme.

**Quelques éléments de vocabulaire :**

- $s_0$  est la **valeur moyenne du signal** :  $s_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s_M(t) dt$ .
- $C_n \cos(2\pi nft + \phi_n)$  est son **harmonique de rang  $n$** , un signal sinusoïdal dont la fréquence est un multiple entier de la fréquence  $f$ .
- L'harmonique de rang  $n = 1$  porte le nom de **fondamental**.
- $f_n = nf$ ,  $C_n$  et  $\phi_n$  sont respectivement la fréquence, l'amplitude et la phase à l'origine de l'harmonique de rang  $n$ .

À titre d'exemple, intéressons-nous à une même note de musique, un Do<sub>3</sub>, jouée par deux instruments différents, un piano et une guitare. À l'aide d'une carte d'acquisition et d'un ordinateur nous avons mémorisé la tension  $u(t)$  prélevée aux bornes du microphone utilisé pour les enregistrements. Puis nous avons réalisé une analyse spectrale de ces signaux avec Python. Les résultats sont donnés ci-dessous :

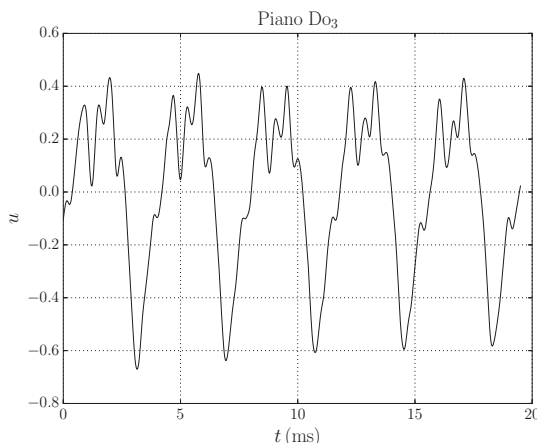


Figure 2.3. Évolution temporelle.

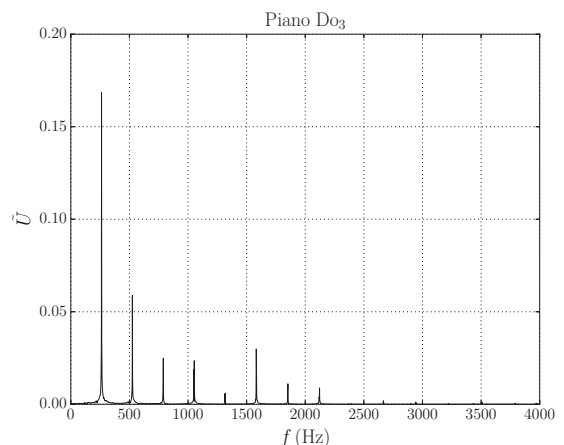


Figure 2.4. Spectre en amplitude.

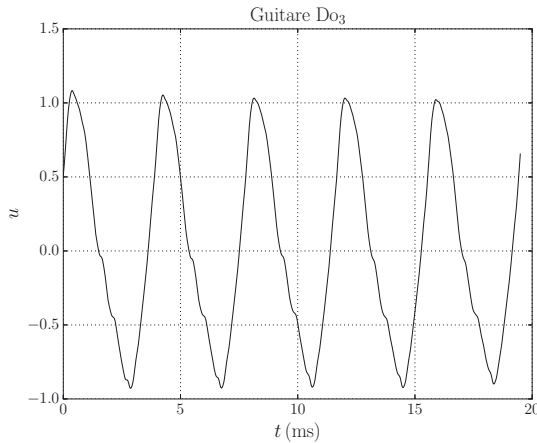


Figure 2.5. Évolution temporelle.

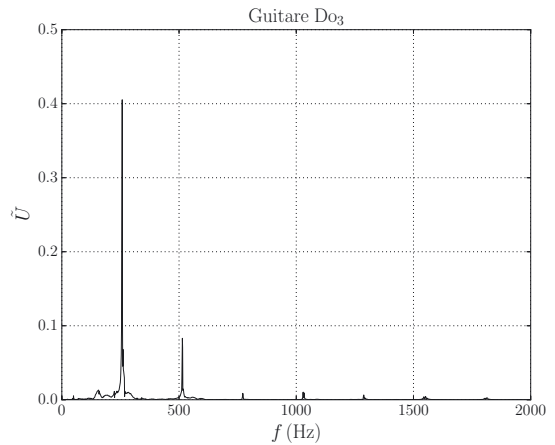


Figure 2.6. Spectre en amplitude.

Sur les deux courbes d'évolution temporelle nous mesurons une période  $T = 3,8$  ms, qui correspond à une fréquence  $f = 2,6 \cdot 10^2$  Hz. Sur les deux spectres en amplitude, nous relevons un premier pic, le plus important, pour une fréquence  $f = 262$  Hz. C'est la **fréquence fondamentale**. Elle correspond à une période  $T = 3,82$  ms, en accord avec les mesures faites sur les courbes de représentation temporelle. Nous observons par ailleurs sur chaque spectre la présence d'**harmoniques** dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale.

Ainsi les deux notes jouées correspondent à des signaux de même période, dont les harmoniques fondamentales ont même fréquence. C'est cette fréquence fondamentale, égale à l'inverse de la période du signal, qui fait la **hauteur** de la note. En revanche les spectres diffèrent par le nombre de leurs harmoniques et les valeurs relatives de leurs amplitudes par rapport à celle du fondamental. Ce sont ces harmoniques qui font le **timbre** de l'instrument de musique. Tout en ayant la même hauteur les deux notes ne sont pas perçues de la même façon.

Sur les exemples précédents nous avons noté que l'amplitude du fondamental est plus grande que celles des harmoniques, qui décroissent lorsque leur rang  $n$  augmente.

Ce n'est pas toujours le cas comme le montre le spectre du  $Do_3$  joué par une clarinette et représenté sur la figure 2.7.

Nous remarquons dans ce cas un fondamental à 259 Hz (la clarinette n'est pas accordée avec les deux instruments précédents). Nous notons également l'absence des premiers harmoniques de rangs pairs et l'importance des premiers harmoniques de rangs impairs. L'harmonique de rang 2 est quasiment absent, les harmoniques de rang 3 (octave + quinte) et de rang 5 (double octave + tierce) sont plus intenses que le fondamental. Les amplitudes des harmoniques de rangs plus élevés sont ensuite globalement de plus en plus faibles.

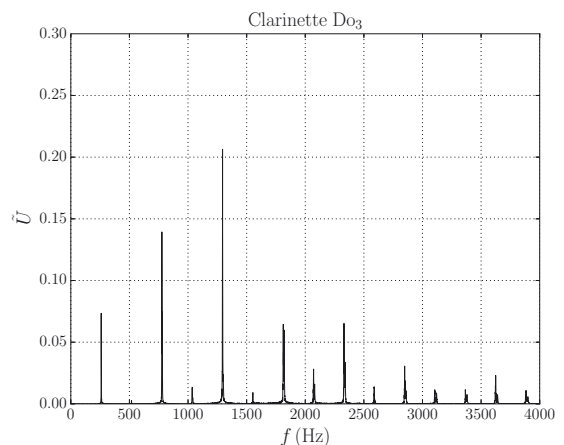


Figure 2.7. Spectre en amplitude.



**Les ordres de grandeur des fréquences** des signaux rencontrés sont très différents d'un domaine à l'autre de la physique. Citons par exemple :

- Son audible par l'oreille humaine :  $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$ .
- Ondes électromagnétiques du domaine radioélectrique :  $f \in [9 \text{ kHz}, 300 \text{ GHz}]$ .
- Lumière visible par l'œil humain :  $f \in [4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, 8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}]$ .

## ■ 2 Ondes progressives

Un signal sonore est engendré par une très faible variation de pression de l'air autour de la pression d'équilibre, appelée pression acoustique. Dans la partie précédente, nous avons enregistré à l'aide d'un microphone un son émis par un instrument de musique. Il a donc fallu que la **perturbation** que constitue la **pression acoustique**, générée au voisinage immédiat de l'instrument, se propage de proche en proche jusqu'à la membrane du microphone, générant ainsi ce qu'on appelle une **onde progressive**.

### Définition : Onde progressive

Une **onde progressive** est la propagation de **proche en proche** dans l'espace de **variations temporelles** d'un signal, générées au voisinage d'un point, **sans transport de matière**.



La notion d'onde progressive est une notion abstraite. L'étude d'une onde nécessite d'identifier la grandeur physique qui se propage.

Dans une salle de concert, les sons émis sont complexes et se propagent dans toutes les directions.

Pour étudier expérimentalement ce phénomène de propagation dans le domaine acoustique, nous avons enregistré en laboratoire le son émis par un claquement de mains (applaudissements). Le dispositif utilisé est décrit figure 2.8 et les résultats sont donnés figures 2.9 et 2.10.

Deux microphones  $M_1$  et  $M_2$ , munis d'amplificateurs, sont placés sur une potence, à des distances différentes  $d_1$  et  $d_2$  d'une source sonore. Les microphones sont fixés à environ 60 cm au dessus de la table et leur membrane a un diamètre de 10 mm.

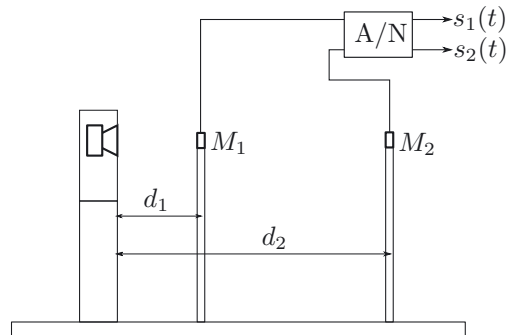


Figure 2.8. Dispositif expérimental.

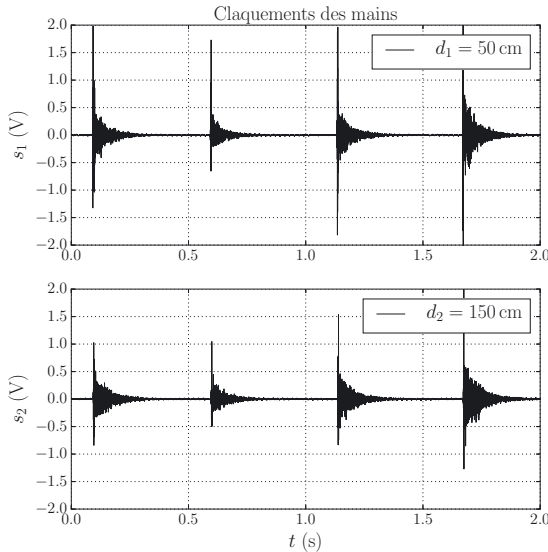


Figure 2.9. Applaudissements.

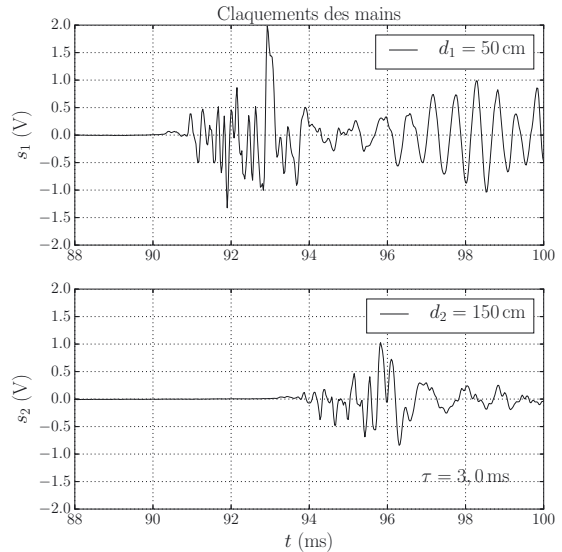


Figure 2.10. Zoom sur les signaux.

Nous constatons que le signal sonore est perçu par le microphone  $M_2$  avec un certain retard sur le microphone  $M_1$ . Ce retard est lié à la **célérité**  $c$  de l'onde sonore.

**Définition : Célérité d'une onde progressive**

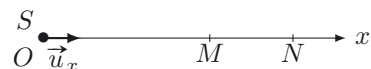
La célérité d'une onde progressive est la vitesse à laquelle les variations temporelles de la grandeur physique étudiée se propagent dans l'espace.

**Quelle est la célérité  $c$  du son dans l'air ?**

Notons  $\tau$  l'écart temporel entre les réceptions du signal par les deux microphones. Sur les zooms des enregistrements de la figure 2.10 nous mesurons, au niveau des premiers fronts montants, un retard  $\tau = 3,00 \text{ ms} \pm 0,05 \text{ ms}$  pour une distance  $d = d_2 - d_1 = 100,0 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}$ . Cela nous conduit à une célérité  $c = d/\tau = 333 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \pm 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , en accord avec la valeur connue de  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $20^\circ\text{C}$  sous une pression de 1 bar.

**Comment traduire la propagation d'un signal se propageant dans la direction et le sens d'un axe  $Ox$  avec une célérité  $c$  ?**

Un signal est émis dans la direction et le sens de  $\vec{u}_x$ , pendant une durée  $T_s$ , par une source  $S$  située en  $O$ .



La figure 2.11 en donne l'évolution temporelle  $f(t)$  au niveau de la source pour  $t \in [0, T_s]$ . Nous supposons qu'il se propage sans déformation ni atténuation.

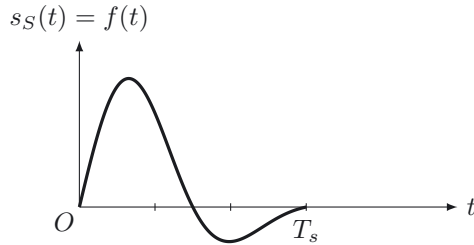


Figure 2.11. Allure du signal au niveau de la source.

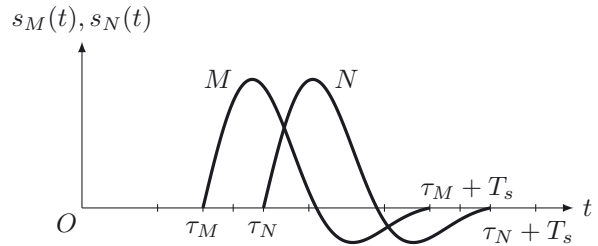


Figure 2.12. Allure du signal reçu en  $M$  et  $N$ .

La valeur  $s_M(t)$  du signal en un point  $M$  d'abscisse  $x_M$  positive, à la date  $t$ , correspond alors à sa valeur  $s_S(t - \tau_M)$  lors de son émission par la source à la date  $(t - \tau_M)$ ,  $\tau_M = x_M/c$  étant le temps nécessaire à sa propagation de  $S$  en  $M$  à la célérité  $c$ . Nous pouvons donc écrire :

$s_M(t) = s_S(t - \tau_M) = s_S(t - x_M/c)$ . Il en est de même pour la valeur  $s_N(t)$  du signal en  $N$  d'abscisse  $x_N > x_M$  :  $s_N(t) = s_S(t - \tau_N) = s_S(t - x_N/c)$ , comme l'illustre la figure 2.12.

Nous pouvons alors écrire pour tout point d'abscisse  $x > 0$  :

$$s(x, t) = s_S(t - \tau) = s_S(t - x/c) = f(t - x/c)$$



En faisant le changement de variable  $t - x/c \rightarrow x - ct$  on peut aussi mettre  $s(x, t)$  sous la forme  $s(x, t) = g(x - ct)$ .

□ **Et si le signal se propage dans le sens négatif ?**

Il suffit de changer  $c$  en  $-c$  et on obtient :  $s(x, t) = f(t + x/c) = g(x + ct)$ .

**Définition : Représentation mathématique d'une onde progressive**

Un signal  $s(x, t)$  se propageant sans déformation ni atténuation dans la direction d'un axe  $Ox$  peut se mettre sous la forme :

- Pour une propagation dans le sens des  $x$  croissants :

$$s(x, t) = f(t - x/c) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = g(x - ct)$$

- Pour une propagation dans le sens des  $x$  décroissants :

$$s(x, t) = f(t + x/c) \quad \text{ou} \quad s(x, t) = g(x + ct)$$

□ **Comment représenter mathématiquement une onde progressive sinusoïdale ?**

Considérons le cas où la source est placée en  $O$  et émet un signal sinusoïdal  $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ , de pulsation  $\omega$ , d'amplitude  $S_0$  et de phase à l'origine  $\varphi_0$ . Supposons que ce signal se propage sans déformation ni atténuation dans la direction de l'axe  $Ox$ , dans le sens des  $x$  croissants. D'après ce qui précède, son expression en un point d'abscisse  $x$  est de la forme :  $s(x, t) = s(0, t - \tau)$ , soit :

$s(x, t) = S_0 \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_0) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi_0\right)$ . En posant  $k = \frac{\omega}{c}$ , on aboutit à :  $s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ . C'est l'expression d'une **onde progressive**

sinusoïdale, également appelée **onde progressive harmonique**, se propageant dans la direction de l'axe  $Ox$ , dans le sens des  $x$  croissants.



Pour une propagation dans le sens des  $x$  décroissants il suffit de changer  $c$  en  $-c$  soit  $k$  en  $-k$  et on obtient :  $s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$ .

**Définition : Onde progressive harmonique**

Une onde progressive harmonique se propageant selon l'axe  $Ox$  est une onde correspondant à la propagation dans cette direction, **sans atténuation ni déformation**, d'une grandeur dont les **variations temporelles** sont **sinusoïdales**. Le signal est de la forme :

- $s(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$  pour une propagation dans le sens des  $x$  croissants.
- $s(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$  pour une propagation dans le sens des  $x$  décroissants.

□ **Que dire de la périodicité d'une onde progressive harmonique ?**

Le signal  $s(x, t)$  est une fonction de deux variables indépendantes, la variable d'espace  $x$  et le temps  $t$ . On peut toutefois, pour se ramener à une fonction d'une seule variable :

- Figer la variable d'espace  $x$ . De façon imagée, cela revient à « filmer » le phénomène en un point donné d'abscisse  $x$ , pour en étudier l'**évolution temporelle** en ce point.
- Figer le temps. De façon imagée, cela revient à « photographier » le phénomène à une date donnée  $t$  pour en étudier l'**évolution spatiale** sur cette photographie.

Dans le premier cas on parle de **représentation temporelle** et dans le second cas de **représentation spatiale** du signal.

La figure 2.13 représente l'évolution temporelle du signal  $s(x, t)$  pour deux valeurs de  $x$  ( $x = 0$  et  $x = x_1$ ). Il faut imaginer qu'un « film » a été tourné en deux points d'abscisses  $x = 0$  et  $x = x_1$ . La figure 2.14 représente son évolution spatiale pour deux valeurs de  $t$  ( $t = 0$  et  $t = \tau$ ). Il faut imaginer qu'une « photographie » a été prise à chacun de ces deux instants.

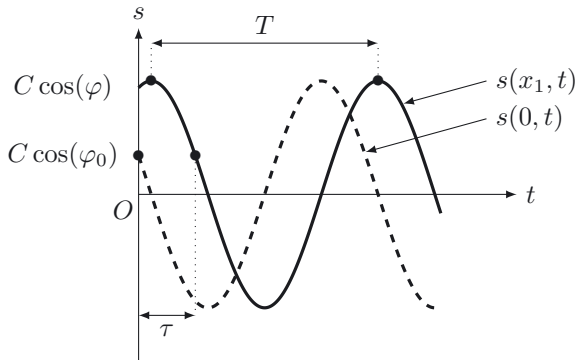


Figure 2.13. Évolution temporelle d'un signal harmonique.

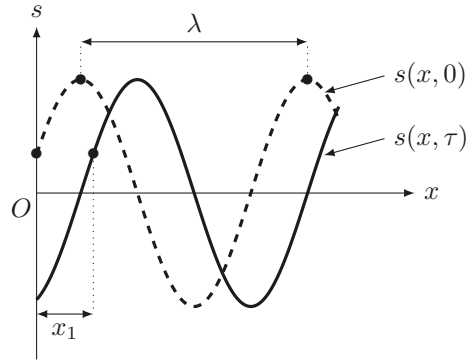


Figure 2.14. Évolution spatiale d'un signal harmonique.

Sur ces représentations graphiques, nous pouvons remarquer qu'un signal harmonique possède une double périodicité, temporelle et spatiale :

- **Périodicité temporelle** (figure 2.13) :  $S_0 \cos \left( \omega \left( t + \frac{2\pi}{\omega} \right) - kx + \varphi_0 \right) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ .

On en déduit la période temporelle  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

- **Périodicité spatiale** (figure 2.14) :  $S_0 \cos \left( \omega t - k \left( x + \frac{2\pi}{k} \right) + \varphi_0 \right) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ .

On en déduit la période spatiale  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Les périodes temporelle et spatiale sont liées :  $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c \Rightarrow \lambda = cT$ .

On peut définir d'autres caractéristiques temporelles et spatiales d'une onde harmonique.

#### Définition : Caractéristiques temporelles et spatiales d'une onde harmonique

- **Caractéristiques temporelles :**
  - Période temporelle :  $T$  (en s).
  - Fréquence temporelle :  $f = 1/T$  (en Hz).
  - Pulsation temporelle :  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).
- **Caractéristiques spatiales :**
  - Période spatiale ou **longueur d'onde** :  $\lambda$  (en m) avec  $\lambda = cT$ .
  - Fréquence spatiale :  $\sigma = 1/\lambda$  (en  $\text{m}^{-1}$ ).
  - Pulsation spatiale :  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$  (en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ ) avec  $k = \frac{\omega}{c}$ .

#### Étude expérimentale d'une onde sonore progressive et harmonique

Pour illustrer cette notion d'onde harmonique progressive, étudions la propagation d'une note de musique enregistrée en laboratoire avec le même dispositif que celui décrit sur la figure 2.8. La source est un haut-parleur relié à un ordinateur. Un son sinusoïdal de fréquence  $f = 200$  Hz est généré par l'ordinateur. Deux microphones, reliés à des amplificateurs, sont placés à des distances  $d_1 = 15$  cm et  $d_2 = 50$  cm du haut parleur. Les enregistrements des tensions acquises à la sortie des amplificateurs sont donnés sur la figure 2.15.

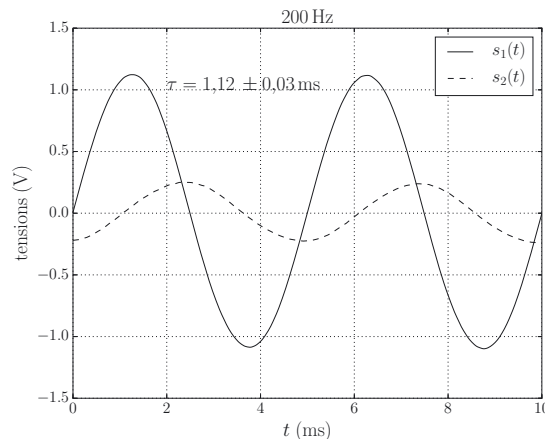


Figure 2.15. Propagation d'un son sinusoïdal.

□ Comment mesurer le déphasage lié à la propagation de l'onde sonore ?

Nous pouvons déduire les expressions des signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  reçus par les deux microphones des courbes de la figure 2.15 en utilisant la méthode 1.1 du chapitre 1.

- Signal  $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  :  
 Nous pouvons lire  $S_1 = 1,13 \text{ V}$  et  $s_1(0) = S_1 \cos(\varphi_1) = 0$ , avec une pente positive en  $t = 0$ .  
 D'où :  $\varphi_1 = -\pi/2 = -1,6 \text{ rad}$ .
- Signal  $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  :  
 Nous pouvons lire  $S_2 = 0,23 \text{ V}$  et  $s_2(0) = S_2 \cos(\varphi_2) = -0,22 \text{ V}$ , avec une pente positive en  $t = 0$ . D'où :  $\varphi_2 = -\arccos(-0,22/0,23) = -2,9 \text{ rad}$ .

Le déphasage entre les deux signaux est donc égal à  $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -2,9 - (-1,6) = -1,3 \text{ rad}$ .

Nous pouvons retrouver ce déphasage à partir des courbes de la figure 2.15 par la mesure du retard temporel  $\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}$  du signal  $s_2(t)$  sur le signal  $s_1(t)$ .

En effet,  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont les images des variations temporelles au niveau des microphones  $M_1$  et  $M_2$  du signal sonore qui se propage depuis le haut parleur :

$$s_1(t) = K_1 s(d_1, t) = S_1 \cos(\omega t - kd_1 + \varphi_0) \text{ et } s_2(t) = K_2 s(d_2, t) = S_2 \cos(\omega t - kd_2 + \varphi_0).$$

Les amplitudes des deux signaux sont différentes car elles diminuent au cours de la propagation.

$$\text{D'où : } s_2(t) = S_2 \cos(\omega t - k(d_2 - d_1) - kd_1 + \varphi_0) = S_2 \cos\left(\omega t - kd_1 + \varphi_0 - \frac{\omega}{c}(d_2 - d_1)\right).$$

Nous en déduisons le déphasage de  $s_2(t)$  sur  $s_1(t)$  :  $\Delta\varphi_{2/1} = -\frac{\omega}{c}(d_2 - d_1)$ . Puis en introduisant le

$$\text{retard temporel } \tau = \frac{d_2 - d_1}{c}, \Delta\varphi_{2/1} = -\omega\tau = -2\pi\frac{\tau}{T} = -2\pi f\tau.$$

Sur la figure 2.15 nous lisons  $\tau = 1,12 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ , ce qui conduit à  $\Delta\varphi_{2/1} = -1,4 \text{ rad}$ . Ce résultat est en accord avec le précédent, aux incertitudes près.

Cette seconde méthode, reposant sur la mesure d'un retard temporel, est souvent utilisée pour déterminer expérimentalement le déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, notamment à l'aide d'un oscilloscope.

Soient les signaux sinusoïdaux :

$$s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Le déphasage du signal  $s_2(t)$  sur le signal  $s_1(t)$  est défini par :

$$\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$$

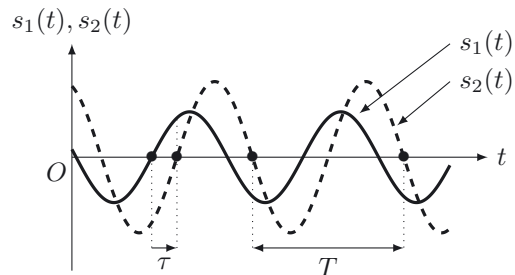


Figure 2.16. Détermination d'un déphasage.

**Méthode 2.1 : Détermination d'un déphasage entre deux signaux sinusoïdaux**

Pour déterminer le déphasage  $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$  du signal  $s_2(t)$  sur le signal  $s_1(t)$  :

- Mesurer le retard temporel  $\tau$  de  $s_2(t)$  sur  $s_1(t)$ .
- Mesurer la période  $T$  des signaux.
- Déterminer  $\Delta\varphi_{2/1}$  :  $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1 = -\omega\tau = -\frac{2\pi}{T}\tau$ .

➔ Exercice (2.1)

Pour  $\Delta\varphi_{2/1} \in ]-\pi, \pi]$ , on peut citer quelques cas particuliers :

- $\Delta\varphi_{2/1} = 0$  : les 2 signaux sont en phase.
- $\Delta\varphi_{2/1} = \pi$  : les 2 signaux sont en opposition de phase.
- $\Delta\varphi_{2/1} \in ]-\pi, 0[$  : le signal (2) est en retard par rapport au signal (1).
- $\Delta\varphi_{2/1} \in ]0, +\pi[$  : le signal (2) est en avance par rapport au signal (1).
- $\Delta\varphi_{2/1} = -\pi/2$  : le signal (2) est en quadrature retard par rapport au signal (1).
- $\Delta\varphi_{2/1} = \pi/2$  : le signal (2) est en quadrature avance par rapport au signal (1).

### ■ 3 Phénomène d'interférence

#### Définition : Le phénomène d'interférence

Le phénomène d'interférence résulte de la superposition de deux ondes sinusoïdales de même pulsation  $\omega$  (donc de même fréquence) dont le déphasage est indépendant du temps.

□ **Que se passe-t-il lorsqu'on superpose deux ondes sonores de même pulsation ?**

Pour répondre à cette question nous avons réalisé l'expérience décrite par la figure 2.17, en utilisant des transducteurs piézoélectriques travaillant dans le domaine ultrasonore.

**Les émetteurs  $E_1$  et  $E_2$** , branchés sur le même GBF, sont alimentés par une tension sinusoïdale de fréquence  $f = 40$  kHz, et créent au niveau de leurs membranes des surpressions  $p_i(t) = P_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . En se propageant celles-ci génèrent deux ondes ultrasonores.

**Un récepteur  $R$**  relié à un amplificateur produit à la sortie de celui-ci une tension  $u(t)$ , image de la pression acoustique  $p(t)$  arrivée au niveau de sa membrane.

Les émetteurs, placés sur un banc optique, sont distants de  $a = 10,0 \pm 0,1$  cm. Le récepteur, dont la position peut être repérée au millimètre près, est placé sur un autre banc d'optique parallèle à celui des émetteurs et distant de  $d = 80,0 \pm 0,5$  cm de ce dernier. Les émetteurs et le récepteur sont placés à la même hauteur.

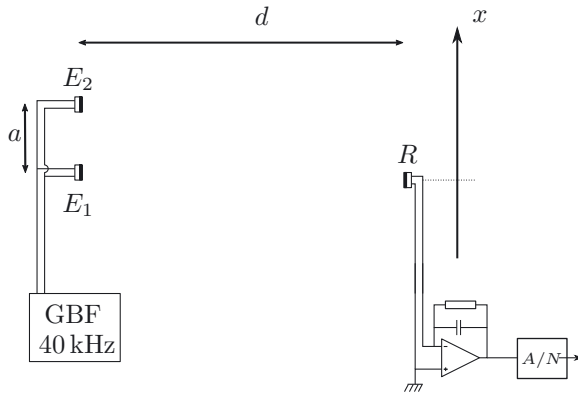


Figure 2.17. Dispositif expérimental.

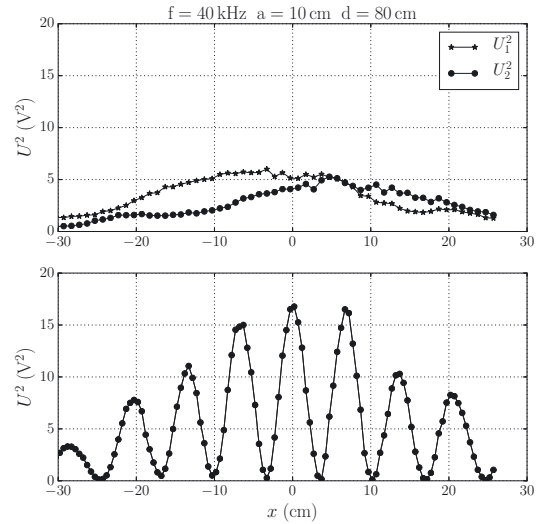


Figure 2.18. Interférences d'onde ultrasonores.

Pour commencer, nous avons allumé un émetteur puis l'autre, tour à tour, et mesuré aux bornes du récepteur une tension amplifiée du type  $u_i(t) = U_{0i} \cos(\omega t + \varphi_i)$  pour chaque émetteur allumé. À l'aide d'un traitement numérique nous avons ensuite calculé la tension efficace  $U_i = U_{0i}/\sqrt{2}$  que nous avons élevé au carré afin d'obtenir l'intensité sonore  $I_i$  au niveau du récepteur à un facteur de proportionnalité près. (En effet, il faut savoir que l'intensité sonore  $I$  est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de la pression acoustique :  $I = \alpha \langle p^2(t) \rangle$ . Donc  $I = \beta U^2$ .) Puis nous avons recommencé avec les deux émetteurs allumés simultanément. La figure 2.18 présente les résultats.

La fenêtre du haut présente les courbes  $U_1^2$  et  $U_2^2$  obtenues en ne faisant fonctionner qu'un émetteur, respectivement  $E_1$  et  $E_2$ . Nous observons que l'intensité sonore captée,  $I_1$  dans un cas,  $I_2$  dans l'autre est maximale lorsque le récepteur est placé face à l'émetteur en fonctionnement.

La fenêtre du bas présente la courbe obtenue en faisant fonctionner les deux émetteurs ensemble. Elle est très différente des précédentes. L'intensité sonore captée  $I$  passe par une succession de valeurs quasi-nulles et de valeurs maximales lorsque nous déplaçons le récepteur par rapport aux sources. **Elle n'est pas la somme de  $I_1$  et  $I_2$ .**

Nous mettons ainsi en évidence le phénomène d'**interférence de deux ondes sinusoïdales de même fréquence**.

### Approche théorique du phénomène d'interférence

Pour étudier ce phénomène qu'on peut rencontrer chaque fois que deux ondes progressives sinusoïdales de même fréquence se superposent, considérons une formulation plus générale, valable pour tout type d'onde (sonore, lumineuse, etc.).

Considérons deux sources  $S_1$  et  $S_2$  émettant deux ondes sinusoïdales de même pulsation  $\omega$ . Le signal émis par la source  $S_i$  est de la forme  $s_i(t) = S_{0i} \cos(\omega t)$  au niveau de la source elle-même et  $s_i(M, t) = S_i \cos(\omega t - kd_i)$  au niveau d'un point  $M$  situé à une distance  $d_i$  de  $S_i$ .

Le signal résultant de la superposition au point  $M$  des deux ondes progressives est de la forme  $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_1 \cos(\omega t - kd_1) + S_2 \cos(\omega t - kd_2)$ . Ce signal, somme de deux



fonctions sinusoidales de même pulsation  $\omega$  est lui-même une fonction sinusoidale de pulsation  $\omega$ . Nous pouvons donc la chercher sous la forme  $s(M, t) = S \cos(\omega t + \phi)$ .

□ **Comment déterminer l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoidaux de même pulsation ?**

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser la **représentation de Fresnel**.

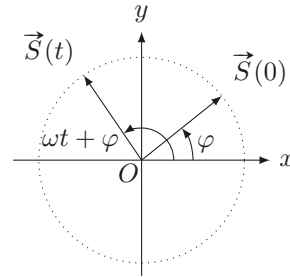
**Définition : Représentation de Fresnel**

À un signal sinusoidale de la forme :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$$

la représentation de Fresnel associée dans le plan  $(Oxy)$  le vecteur  $\vec{S}(t)$  de norme  $\|\vec{S}\| = S$  et faisant un angle  $(\vec{u}_x, \vec{S}) = \omega t + \phi$  avec l'axe  $(Ox)$ .

Ce vecteur tourne dans le plan  $(Oxy)$  autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .



En utilisant la représentation de Fresnel, représentons dans le même plan  $(Oxy)$  les vecteurs  $\vec{S}_1(M, t)$  et  $\vec{S}_2(M, t)$  associés aux signaux  $s_1(M, t)$  et  $s_2(M, t)$  (figure 2.19).

Le vecteur  $\vec{S}(M, t)$  associé au signal résultant est défini par  $\vec{S}(M, t) = \vec{S}_1(M, t) + \vec{S}_2(M, t)$ .

Les vecteurs  $\vec{S}_1(M, t)$  et  $\vec{S}_2(M, t)$  tournant autour de l'axe  $Oz$  à la même vitesse angulaire  $\omega$ , leur écart angulaire ne varie pas au cours du temps et la figure tourne sans se déformer. Nous en déduisons que le vecteur  $\vec{S}(M, t)$  tourne lui-aussi à la vitesse angulaire  $\omega$  et que son module reste constant. Cela confirme l'expression du signal résultant qui s'écrit sous la forme  $s(M, t) = S \cos(\omega t + \phi)$ .

**L'amplitude  $S$  du signal résultant ne dépend que du déphasage entre les signaux  $s_1(M, t)$  et  $s_2(M, t)$ .**

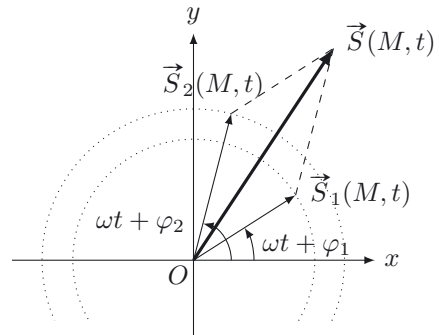


Figure 2.19. Construction de Fresnel en  $M$ .

L'amplitude  $S$  du signal résultant se détermine en calculant la norme du vecteur résultant  $\vec{S}(M, t)$  :

$$S = \|\vec{S}\| = \|\vec{S}_1 + \vec{S}_2\| = \sqrt{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)} = \sqrt{(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_1) + (\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_2) + 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)}$$

On en déduit une expression appelée **formule des interférences** :

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

**Méthode 2.2 : Calcul de l'amplitude résultante**

Lorsque deux signaux sinusoïdaux  $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  de même pulsation  $\omega$  se superposent, le signal résultant est un signal sinusoïdal du type  $S \cos(\omega t + \varphi)$  dont l'amplitude  $S$  se déduit de la **formule des interférences** :

$$(2.1) \quad S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

➔ Exercice (2.2)

□ Quelles sont les conditions d'interférences constructives ou destructives ?

**Définition : Interférences constructives et destructives**

On parle d'interférences constructives lorsque l'amplitude  $S$  du signal résultant est maximale et d'interférences destructives lorsqu'elle est minimale.

Les conditions d'interférences constructives ou destructives se déduisent de la formule des interférences. En notant  $\Delta\varphi_{1/2} = \varphi_1 - \varphi_2$  le déphasage du signal (1) par rapport au signal (2) :

- **Interférences constructives** :  $\Delta\varphi_{1/2} = m2\pi$  (avec  $m \in \mathbb{Z}$ ).  
Les signaux sont en phase à  $2\pi$  près et  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2} = S_1 + S_2$ .
- **Interférences destructives** :  $\Delta\varphi_{1/2} = (2m + 1)\pi$  (avec  $m \in \mathbb{Z}$ ).  
Les signaux sont en opposition de phase à  $2\pi$  près et  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2} = |S_1 - S_2|$ .

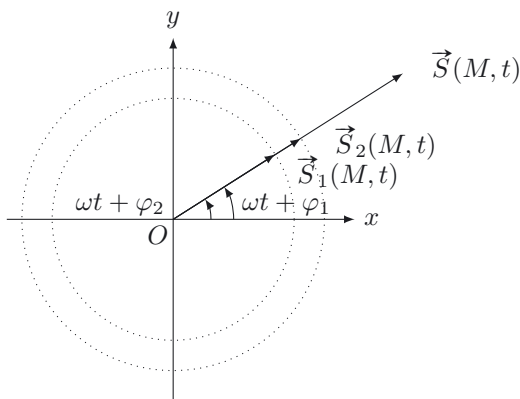


Figure 2.20.  $\varphi_1 = \varphi_2 + m2\pi$   
Interférences constructives.

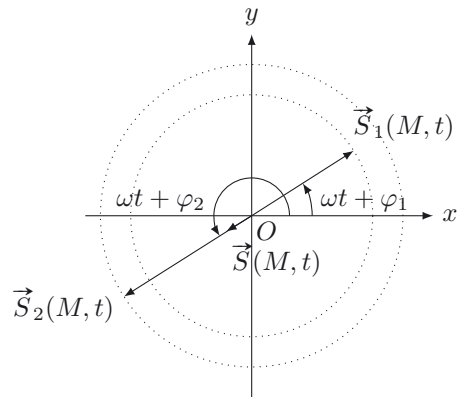


Figure 2.21.  $\varphi_1 = \varphi_2 + \left(m + \frac{1}{2}\right) 2\pi$   
Interférences destructives.

💡 | Si  $\Delta\varphi_{1/2}$  est quelconque :  $S_{\min} = |S_1 - S_2| \leq S \leq S_{\max} = S_1 + S_2$ .

□ Comment les conditions d'interférences constructives ou destructives se traduisent-elles dans le domaine d'espace où les ondes interfèrent ?

Nous avons vu qu'en un point  $M$  du domaine d'espace où les deux ondes interfèrent, le signal résultant  $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_1 \cos(\omega t - kd_1(M)) + S_2 \cos(\omega t - kd_2(M))$  est de la forme  $s(M, t) = S \cos(\omega t + \phi)$ .

Le déphasage en  $M$  entre les deux signaux s'écrit :  $\Delta\varphi_{1/2}(M) = k(d_2(M) - d_1(M))$ . Soit, en introduisant la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  :  $\Delta\varphi_{1/2}(M) = 2\pi \frac{d_2(M) - d_1(M)}{\lambda}$ .

#### Définition : Différence de marche

Lorsque 2 ondes ( $\mathcal{O}_1$ ) et ( $\mathcal{O}_2$ ) se propagent depuis leurs sources jusqu'en un point  $M$ , elles parcourent des chemins différents de longueurs respectives  $d_1(M)$  et  $d_2(M)$ , dépendant de la position du point  $M$  considéré. La différence de marche en  $M$  entre les deux signaux est définie par :

$$\delta(M) = d_2(M) - d_1(M)$$

D'après ce qui précède  $\Delta\varphi_{1/2}(M) = \varphi_1 - \varphi_2$  peut s'exprimer en fonction de cette différence de marche :  $\Delta\varphi_{1/2}(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda}$ . On en déduit :

- **Interférence constructive en  $M$**  :  $\delta(M) = m\lambda$ .
- **Interférence destructive en  $M$**  :  $\delta(M) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$ .

**Retour sur l'expérience d'interférence de deux ondes ultrasonores** (figure 2.18)

- Lorsque le récepteur  $R$  est placé en  $x = 0$ ,  $d_1(0) = d_2(0)$  et donc  $\delta(0) = 0$ . On observe bien une interférence constructive en  $x = 0$  et un maximum d'amplitude.
- En se déplaçant sur l'axe  $Ox$ , on passe par une succession de points où l'amplitude est alternativement minimale, lorsque  $\delta(M) = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$  et maximale, lorsque  $\delta(M) = m\lambda$ .
- On constate que l'intensité maximale correspondant aux interférences constructives diminue à mesure qu'on s'éloigne de la position  $x = 0$ . Ce phénomène est lié à la diminution de l'amplitude de la pression acoustique lorsque l'onde se propage.

## ■ 4 Phénomène d'ondes stationnaires

Dans une salle de concert nous pouvons remarquer que les parois ne sont pas parallèles et sont, pour certaines, équipées d'aménagements limitant la réflexion des ondes sonores. De fait, dans une salle parallélépipédique il peut apparaître à certaines fréquences des effets très gênants pour l'écoute, conduisant à une inhomogénéité du son entre des points situés à quelques mètres les uns des autres et se traduisant par une différence importante du niveau sonore. Ces effets sont liés à la superposition d'ondes sonores incidentes et réfléchies qui, en se propageant en sens inverse, génèrent un phénomène d'**ondes stationnaires**.

Pour mettre en évidence le phénomène d'ondes stationnaires, considérons le dispositif expérimental de la **corde de Melde** représenté figure 2.22.

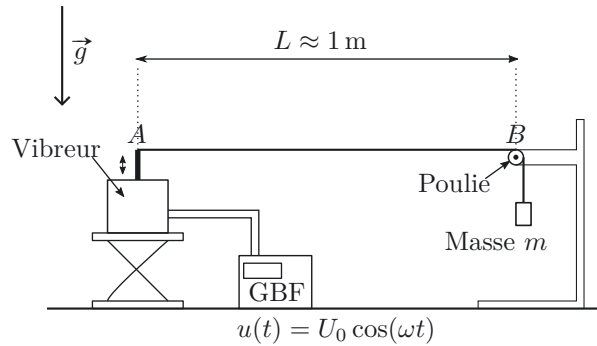


Figure 2.22. Dispositif expérimental de la corde de Melde.

Une corde de longueur utile  $L = AB$  passe sur une poulie et est maintenue sous tension par un corps de masse  $m$ . Elle est accrochée en  $A$  à un vibreur qui impose à ce point des oscillations sinusoïdales transversales de très faible amplitude. Ces oscillations se propagent jusqu'à l'extrémité fixe  $B$  de la corde, où elles se réfléchissent. Il s'établit alors le long de la corde un système d'ondes progressives sinusoïdales se propageant en sens inverse.

À **certaines fréquences**, on observe des états vibratoires pour lesquels l'amplitude de vibration d'un point de la corde dépend de sa position. On observe ainsi des points, appelés **ventres de vibration**, où l'amplitude est maximale et d'autres, appelés **nœuds de vibration**, où elle est nulle. C'est ce qui constitue le phénomène d'ondes stationnaires.

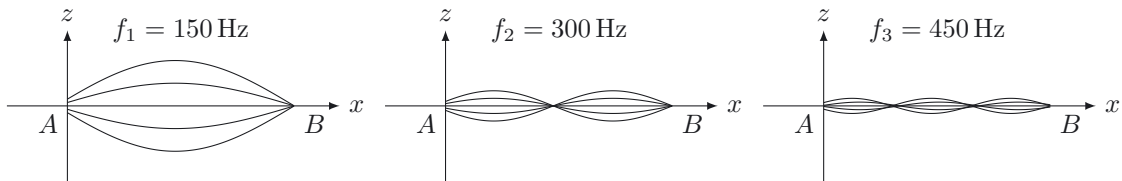


Figure 2.23. Représentations de la corde de Melde à différentes fréquences d'excitation.

La célérité des ondes le long d'une corde vibrante est donnée par la relation  $c = \sqrt{T/\mu}$  où  $T$  est la tension de la corde et  $\mu$  sa masse linéique. Avec une corde de longueur  $L = 1,00$  m et tendue de sorte que la célérité des ondes soit égale à  $c = 300$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ , on peut faire les observations suivantes :

- $f_1 \simeq 150$  Hz : nous observons un ventre au milieu de la corde, un nœud en  $B$  et un autre au voisinage immédiat de  $A$ . La corde vibre entre deux positions extrêmes en dessinant un « fuseau ».
- $f_2 \simeq 300$  Hz : nous observons 2 fuseaux encadrés par trois nœuds situés en  $B$ , au voisinage immédiat de  $A$  et au milieu de la corde ainsi qu'un ventre à équidistance de deux nœuds consécutifs.
- $f_3 \simeq 450$  Hz : nous observons 3 fuseaux.

Chaque fois qu'on augmente la fréquence  $f$  de 150 Hz, le nombre de fuseaux observés augmente d'une unité. Ainsi pour  $f_n = n f_1$  on observe  $n$  fuseaux.

□ **Comment rendre compte du phénomène d'onde stationnaire ?**

Considérons le cas de deux ondes sinusoïdales, de même pulsation  $\omega$  et de même amplitude  $S_0$ , se propageant en sens inverse parallèlement à un axe  $Ox$ . En un point  $M$  d'abscisse  $x$ , pour l'onde se propageant dans le sens :

- des  $x$  croissants :  $s_1(M, t) = s_1(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ .
- des  $x$  décroissants :  $s_2(M, t) = s_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi'_0)$ .

Nous en déduisons l'expression de l'onde résultante :

$$(2.2) \quad s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi'_0) \quad \text{avec} \quad k = \omega/c$$

□ **Que nous apprend la construction de Fresnel ?**

Soit  $\vec{S}_1(M, t)$ ,  $\vec{S}_2(M, t)$  et  $\vec{S}(M, t)$  les vecteurs associés à  $s_1(M, t)$ ,  $s_2(M, t)$  et  $s(M, t)$ .

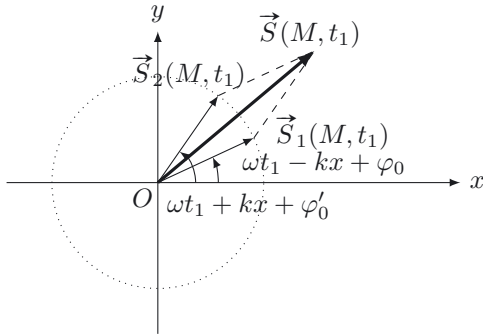


Figure 2.24. Représentation à  $t_1$ .

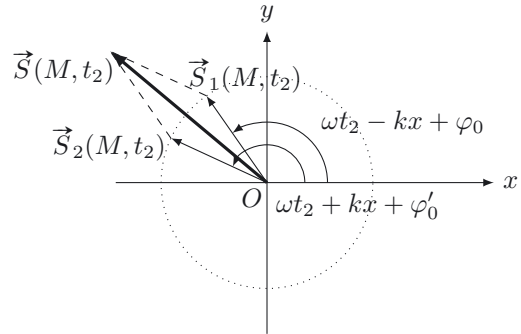


Figure 2.25. Représentation à  $t_2 > t_1$ .

Les vecteurs  $\vec{S}_1(M, t)$  et  $\vec{S}_2(M, t)$  tournent à la même vitesse angulaire  $\omega$  et à  $x = \text{cste}$  leur angle reste constant. En un point  $M$  donné, la figure tourne donc autour de l'axe  $Oz$  sans se déformer. Nous en déduisons que le vecteur  $\vec{S}$  tourne également à la vitesse angulaire  $\omega$  et que son module, qui dépend de  $x$ , reste constant. Le signal résultant s'écrit donc sous la forme  $s(M, t) = S(x) \cos(\omega t + \varphi)$ . En outre quand les signaux sont en phase les vecteurs  $\vec{S}_1(M, t)$  et  $\vec{S}_2(M, t)$  sont égaux et  $\|\vec{S}\|$  est maximum. L'abscisse  $x$  d'un ventre de vibration doit vérifier l'équation suivante :

$$(2.3) \quad \omega t - kx + \varphi_0 = \omega t + kx + \varphi'_0 + 2n\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Quand les signaux sont en opposition de phase les vecteurs  $\vec{S}_1(M, t)$  et  $\vec{S}_2(M, t)$  sont opposés et  $\|\vec{S}\|$  est minimum ( $\|\vec{S}\| = 0$ ). L'abscisse  $x$  d'un nœud de vibration doit vérifier l'équation suivante :

$$(2.4) \quad \omega t - kx + \varphi_0 = \omega t + kx + \varphi'_0 + (2n + 1)\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}$$

□ **Quelle est l'expression du signal résultant ?**

En utilisant la formule trigonométrique  $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$  la relation 2.2 se met sous la forme :

$$(2.5) \quad s(M, t) = 2S_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi'_0 - \varphi_0}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi'_0 + \varphi_0}{2}\right)$$

**Définition : Onde stationnaire sinusoïdale**

Lorsque deux signaux sinusoïdaux de même amplitude et de même pulsation  $\omega$  se superposent en se propageant en sens inverse, le signal résultant est une onde stationnaire décrite par une fonction mathématique de la forme :

$$s(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi') \quad \text{avec} \quad k = \omega/c$$



Le signal résultant, contrairement aux signaux  $s_1(x, t)$  et  $s_2(x, t)$  qui se superposent, n'est pas de la forme  $f\left(t \pm \frac{x}{c}\right)$  et donc **ne se propage pas**.

Pour nous en convaincre, traçons l'allure du signal  $s(M, t)$  en fonction de  $x$  à différents instants  $t$ .

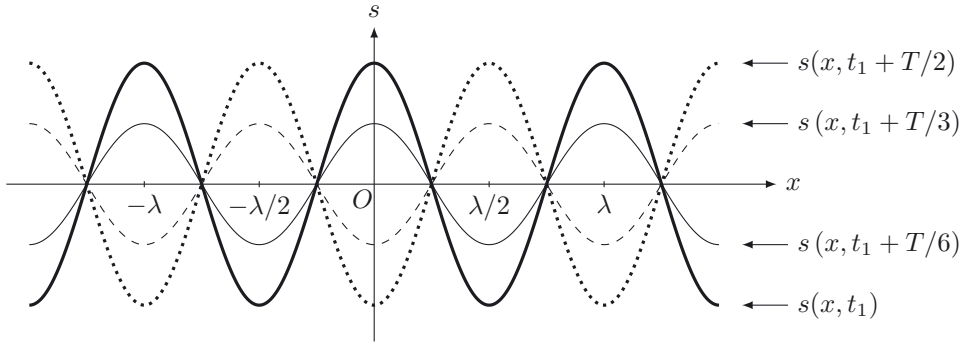


Figure 2.26. Représentation spatiale du signal résultant à différents instants.

Nous remarquons que ce signal est très différent de celui d'une onde progressive harmonique se propageant selon  $Ox$  (figure 2.14). En outre, cette représentation confirme bien l'existence de **ventres** et de **nœuds** de vibration.

**Définition : Nœuds et ventres de vibration**

- Un nœud de vibration est un point où l'amplitude de l'onde stationnaire est nulle.
- Un ventre de vibration est un point où l'amplitude de l'onde stationnaire est maximale.

□ **Quelles sont les positions  $x_n$  des nœuds de vibration ?**

Une amplitude nulle correspond à  $\cos(kx_n + \varphi) = 0$ . On en déduit :

$$kx_n + \varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \implies x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \implies x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□ **Quelles sont les positions  $x_n$  des ventres de vibration ?**

Une amplitude maximale correspond à  $\cos(kx_n + \varphi) = \pm 1$  On en déduit :

$$kx_n + \varphi = n\pi \implies x_n = n \frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \implies x_n = n \frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Deux nœuds ou deux ventres successifs sont distants de  $\lambda/2$ . Un nœud et un ventre successifs sont distants de  $\lambda/4$ .



Les positions des ventres et des nœuds peuvent également se déduire des relations 2.3 et 2.4 obtenues à partir de la représentation de Fresnel.

### Méthode 2.3 : Recherche des positions des ventres et des nœuds de vibration

- Écrire l'onde stationnaire sous la forme :  $s(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi')$ .
- Rechercher les positions des **nœuds** en résolvant l'équation :  $\cos(kx + \varphi) = 0$ .
- Rechercher les positions des **ventres** en résolvant l'équation :  $\cos(kx + \varphi) = \pm 1$ .

➔ Exercice (2.3)

#### □ Et les instruments à cordes dans tout cela ?

Dans un instrument à cordes, chaque corde est fixée à chacune de ses extrémités. Elle a une longueur donnée  $L$ , une masse linéique  $\mu$  et est tendue avec une tension  $T$ . Ces trois paramètres varient d'une corde à l'autre.

Lorsque le musicien joue de son instrument, il met ses cordes en vibration en les écartant de leur position de repos et en les relâchant (guitariste), en communiquant une vitesse à certains de leurs points en les frappant avec un marteau (pianiste), ou en frottant la corde avec son archet (violoniste). La hauteur d'une note, c'est-à-dire la fréquence de l'harmonique fondamentale, dépend de la masse linéique, de la tension de la corde et de sa longueur. Le violoniste agit sur la longueur de la corde pour modifier la hauteur du son qu'elle émet.

#### □ Quelles sont les fréquences de vibration d'une corde fixée à ses extrémités ?

Considérons une corde  $OA$ , fixée en  $O$  et  $A$ , de longueur  $L$ , effectuant de petites oscillations transversales dans le plan  $(Oxz)$ . L'élongation transversale à la date  $t$  d'un point  $M$  de la corde est notée  $z(M, t)$ . La célérité des ondes se propageant le long de la corde a pour expression  $c = \sqrt{T/\mu}$ .

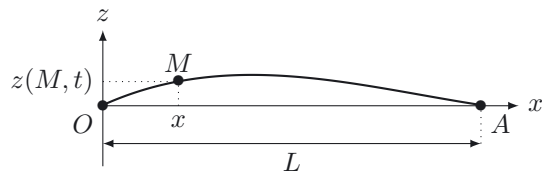


Figure 2.27. Corde vibrante à la date  $t$ .

Lorsque la corde entre en vibration, un système d'ondes stationnaires s'installe. Nous cherchons donc l'expression de  $z(M, t)$  sous la forme :  $z(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi')$  avec  $k = \omega/c$ .

Cette expression doit satisfaire aux **conditions aux limites**  $z(0, t) = 0$  et  $z(L, t) = 0, \forall t$ .

- En  $x = 0$  :  $z(0, t) = A \cos(\varphi) \cos(\omega t + \varphi') = 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + n\pi$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Avec  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  on obtient :  $z(x, t) = A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi') = A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi')$ .
- En  $x = L$  :  $z(L, t) = A \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi') = 0 \Rightarrow \sin(kL) = 0$ . D'où :  
 $kL = n\pi \Rightarrow k_n = n\frac{\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  car  $kL > 0$ .

Finalement les ondes stationnaires qui satisfont aux conditions aux limites sont de la forme :

$$z_n(x, t) = A \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos(\omega t + \varphi') \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi les deux conditions aux limites imposent une quantification de la pulsation spatiale  $k$  donc de la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  et de la fréquence  $f = c/\lambda$  :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad ; \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad ; \quad f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L}$$

Ces expressions définissent les **modes propres** et les **fréquences propres** d'une corde vibrante fixée à ses extrémités.

#### Définition : Fréquences propres et modes propres

Les **modes propres** d'une corde de longueur  $L$  fixée à ses extrémités sont les modes de vibration de la forme :

$$z_n(x, t) = A \sin(k_n x) \cos(2\pi f_n t + \varphi') \quad \text{avec} \quad f_n = n \frac{c}{2L} \quad , \quad k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où  $c$  est la célérité des ondes le long de la corde. Leurs fréquences  $f_n$  constituent les **fréquences propres** de la corde.

- Le mode  $n = 1$  est le **mode fondamental** :  $f_1 = c/2L$  et  $\lambda_1 = 2L$ .  
On en déduit que  $L = \lambda_1/2$ . On observe deux nœuds, un à chaque extrémité de la corde et un fuseau de longueur  $\lambda_1/2$ .
- Le mode  $n > 1$  est le **mode harmonique de rang  $n$**  :  $f_n = n(c/2L)$  et  $\lambda_n = 2L/n$ .  
On en déduit que  $L = n(\lambda_n/2)$ . On observe  $n + 1$  nœuds dont un à chaque extrémité de la corde et  $n$  fuseaux de longueur  $\lambda_n/2$ .

#### Méthode 2.4 : Recherche des fréquences propres d'une corde vibrante

- Écrire les ondes stationnaires sous la forme :  $s(x, t) = A \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi')$ .
- Identifier les conditions aux limites aux extrémités de la corde (valeurs des amplitudes imposées en ces points).
- Déterminer les fréquences propres  $f_n$  qui satisfont à ces conditions aux limites.

➔ Exercice (2.4)

□ **Comment définir l'état vibratoire d'une corde fixée à ses deux extrémités ?**

On montre qu'un état vibratoire quelconque d'une corde ayant des conditions imposées à ses extrémités est **une combinaison linéaire** de ses modes propres satisfaisant à ces conditions aux limites.

#### État vibratoire d'une corde fixée à ses extrémités

Une vibration quelconque d'une corde fixée à ses extrémités est décomposable en modes propres satisfaisant aux conditions aux limites :

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \cos(2\pi f_n t + \varphi_n) \quad \text{avec} \quad f_n = n \frac{c}{2L} \quad , \quad k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*$$





Les coefficients  $A_n$  se déterminent à partir des **conditions initiales**, c'est-à-dire des positions et vitesses des points de la corde à  $t = 0$  (hors programme).  
Il faut faire la distinction entre les **conditions aux limites**, qui permettent de définir les modes propres de la corde et les **conditions initiales**, qui permettent de déterminer la combinaison linéaire de modes propres.

### Retour sur le contexte des instruments à cordes

C'est la fréquence du mode fondamental qui confère à une note sa hauteur. Pour les quatre cordes d'un violon, les masses linéiques sont différentes (et les tensions sont voisines), ce qui explique que les notes émises soient différentes. L'accord se fait en modifiant légèrement les tensions. Pour modifier la hauteur du son émis par une corde, le violoniste modifie sa longueur.

## ■ 5 Phénomène de diffraction

Abordons pour finir un dernier phénomène ondulatoire, le phénomène de diffraction. Celui-ci se manifeste lorsqu'une onde progressive rencontre des ouvertures dont les dimensions ne sont pas suffisamment grandes devant sa longueur d'onde.

Ce phénomène peut être mis en évidence avec une expérience réalisée dans le domaine de l'optique ondulatoire, domaine dans lequel un faisceau lumineux est identifié à une onde électromagnétique progressive.

Considérons par exemple un faisceau parallèle de diamètre  $d = 1,0 \text{ mm}$  d'un laser émettant une radiation de longueur d'onde  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . Le faisceau éclaire une diapositive percée d'une **fente verticale** de largeur  $a$  ou d'un **trou circulaire** de diamètre  $a$ , avec  $a \simeq 0,1 \text{ mm}$ .

En plaçant un écran quelques mètres après le plan de la diapositive, nous observons une **figure de diffraction** centrée sur le point où le faisceau parviendrait en l'absence de la diapositive.

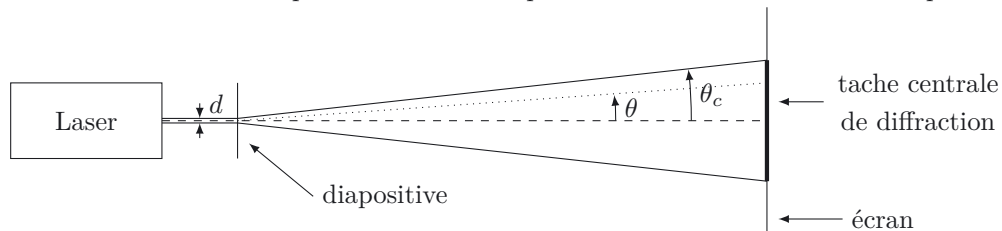


Figure 2.28. Vue de dessus du dispositif expérimental.

Notons  $\mathcal{E}$  l'éclairement sur l'écran mesuré dans la direction de l'angle  $\theta$  défini sur la figure 2.28. Dans le cadre de l'optique ondulatoire, cet éclairement est proportionnel à la valeur moyenne du carré du champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde lumineuse progressive :  $\mathcal{E} = \alpha \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$ . Il se mesure en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

□ **Quelles sont les particularités des figures de diffraction obtenues ?**

L'étude théorique du phénomène est hors programme. Nous nous contenterons donc d'en donner les résultats essentiels.

Dans les deux cas nous remarquons un très fort étalement de la tache lumineuse sur l'écran, par rapport au diamètre qu'elle aurait en l'absence de la diapositive. Cet étalement se fait dans la direction perpendiculaire à la fente dans le cas de la fente (figure 2.29) et radialement dans le cas du trou circulaire (figure 2.31). En réalisant l'expérience avec des fentes de différentes largeurs et

des trous de différents diamètres, nous constatons que l'étalement est d'autant plus important que  $a$  est faible.

Ainsi, le phénomène de diffraction est d'autant plus prononcé que les dimensions de l'ouverture qui restreint le passage de la lumière sont faibles.

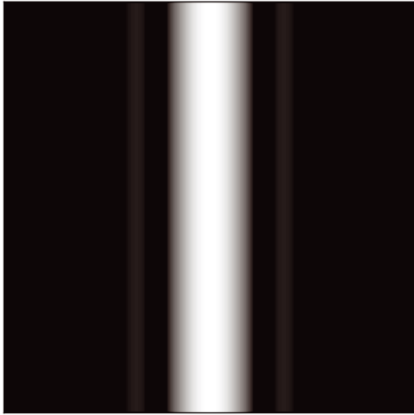


Figure 2.29. Figure de diffraction par une fente.

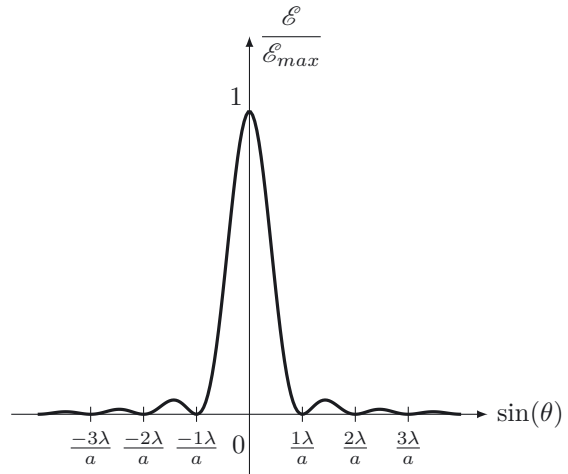


Figure 2.30. Éclairement pour une fente.

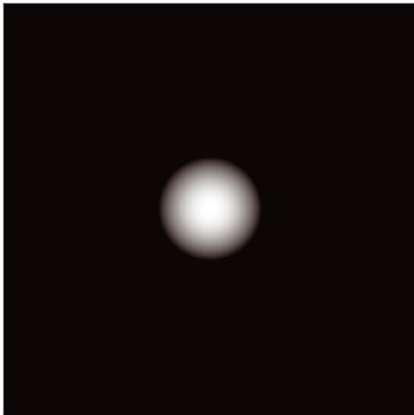


Figure 2.31. Figure de diffraction par un trou.

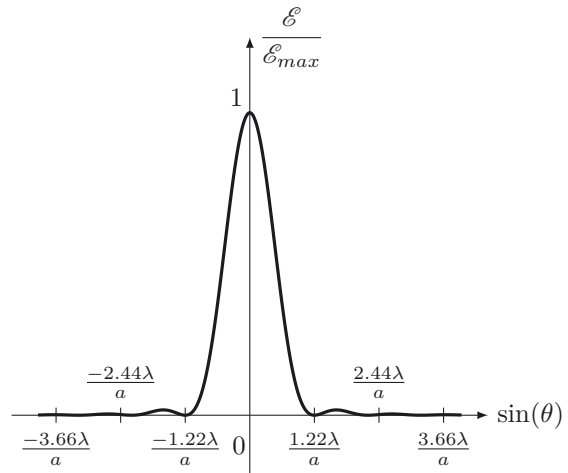


Figure 2.32. Éclairement pour un trou.

Les figures 2.30 et 2.32 donnent la répartition de l'éclairement relatif en fonction de l'angle  $\theta$  défini sur la figure 2.28. Dans les deux cas nous remarquons que :

- L'éclairement est maximal pour la valeur  $\theta = 0$  correspondant à la direction initiale du faisceau laser.
- L'éclairement s'annule périodiquement de part et d'autre de la valeur  $\theta = 0$ .
- Entre deux annulations successives, l'éclairement passe par un maximum local dont la valeur est très faible devant celle du maximum principal observé en  $\theta = 0$ .

Nous distinguons ainsi une zone centrale très lumineuse, appelée **tache centrale de diffraction**, entourée de zones beaucoup moins lumineuses, appelées **taches secondaires de diffraction**.

En comparant les éclairements de la tache centrale et des taches secondaires, il est possible de montrer que 84% de l'énergie lumineuse incidente est concentrée dans la tache centrale de diffraction dans le cas d'une fente et 95% dans celui d'un trou circulaire. Ainsi une figure de diffraction est-elle souvent caractérisée par le demi-angle  $\theta_c$  du cône défini par la tache centrale de diffraction (figure 2.28), c'est-à-dire l'angle entre la direction incidente et la direction de la première annulation.

- Dans le cas de la diffraction par une fente de largeur  $a$  :  $\sin(\theta_c) = \frac{\lambda}{a}$ .
- Dans le cas de la diffraction par un trou circulaire de diamètre  $a$  :  $\sin(\theta_c) = 1,22 \frac{\lambda}{a}$ .

Le phénomène de diffraction mis en évidence ici dans le domaine des ondes lumineuses est un phénomène ondulatoire que l'on retrouve dans **tous les domaines** : mécanique (ondes sonores, ondes de surface telle que la houle), électromagnétisme (ondes électromagnétiques), physique quantique (ondes de matière, introduites au chapitre 4), etc.

#### Définition : Échelle angulaire d'un phénomène de diffraction

La figure de diffraction par une ouverture est caractérisée par  $\theta_c$ , le **rayon angulaire de sa tache centrale de diffraction**, à l'intérieur de laquelle se trouve concentrée la très grande majorité de l'énergie diffractée. En notant  $d$  la taille caractéristique de cette ouverture et  $\lambda$  la longueur d'onde de l'onde diffractée :

$$\sin(\theta_c) \simeq \frac{\lambda}{d}$$

#### □ Quelles sont les conditions d'observation d'un phénomène de diffraction ?

Sachant que  $\sin(\theta_c) \simeq \lambda/d$ , deux éléments sont déterminants dans l'observation d'un phénomène de diffraction : la valeur du rapport  $\lambda/d$  et la précision avec laquelle les angles sont mesurés.

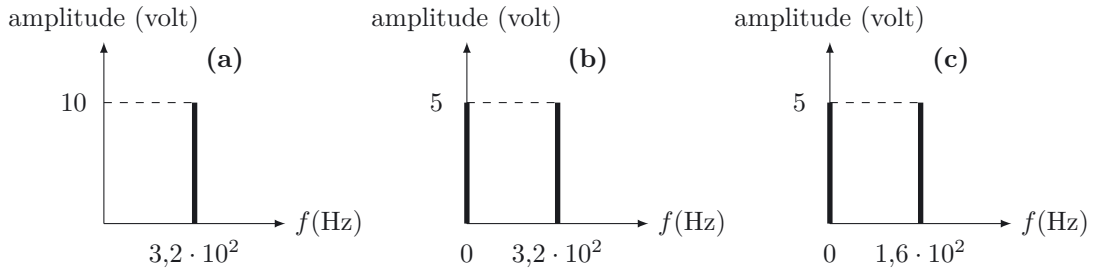
Si  $d$  est très grand devant  $\lambda$  (d'un facteur 100 au moins), alors  $\theta_c$  est inférieur à l'incertitude sur les mesures angulaires et le phénomène de diffraction passe inaperçu. Si au contraire  $d$  est inférieur à  $100\lambda$ , de sorte que  $\theta_c$  soit mesurable, le phénomène de diffraction est observable.

#### Condition d'observation d'un phénomène de diffraction

Le phénomène de diffraction d'une onde de longueur d'onde  $\lambda$  par une ouverture de dimension caractéristique  $d$  est observable lorsque  $d$  est inférieure à une centaine de longueurs d'onde.

# Interro de cours

1. On considère le signal  $s(t) = A \cos^2(\omega t)$  avec  $A = 10 \text{ V}$  et  $\omega = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer le spectre du signal. On rappelle que  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$ .



2. Les deux signaux  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  sont représentés sur la figure 1. Trouver l'affirmation correcte.
- (a)  $e_1(t) = A \cos(\omega t)$  et  $e_2(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $A = 7,0 \text{ V}$ ,  $B = 5,0 \text{ V}$ ,  $\omega = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\varphi = -60^\circ$ .
  - (b)  $e_1(t) = A \cos(\omega t)$  et  $e_2(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $A = 7,0 \text{ V}$ ,  $B = 5,0 \text{ V}$ ,  $\omega = 6,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\varphi = 60^\circ$ .
  - (c)  $e_1(t) = A \sin(\omega t)$  et  $e_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$  avec  $A = 7,0 \text{ V}$ ,  $B = 5,0 \text{ V}$ ,  $\omega = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\varphi = -60^\circ$ .
  - (d)  $e_1(t) = A \sin(\omega t)$  et  $e_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$  avec  $A = 7,0 \text{ V}$ ,  $B = 5,0 \text{ V}$ ,  $\omega = 60 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\varphi = 60^\circ$ .

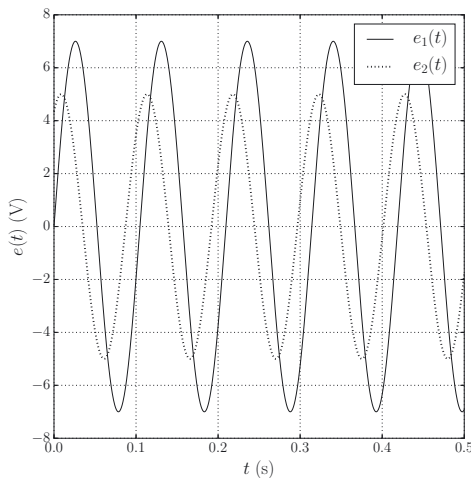


Figure 1

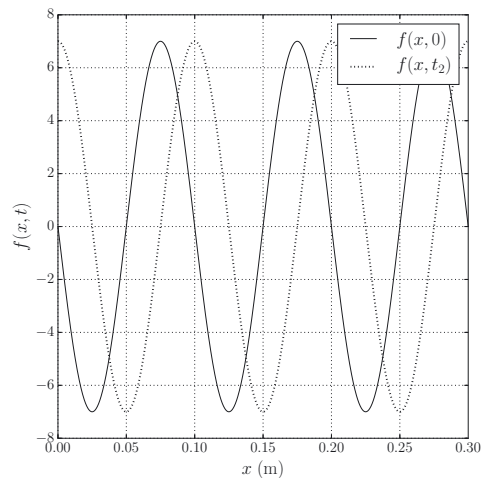


Figure 2

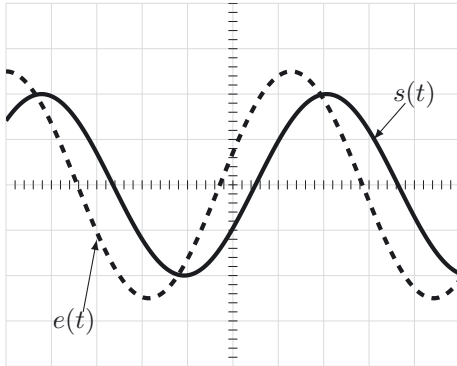
3. On considère une onde progressive harmonique se propageant à la célérité  $c = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  selon l'axe  $Ox$ , dont la fonction d'onde est représentée à deux instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 > 0$  sur la figure 2. Indiquer les affirmations justes.

- (a) L'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants.
- (b) L'onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants.
- (c) La fréquence de l'onde est  $f = 100 \text{ Hz}$  et sa longueur d'onde  $\lambda = 0,10 \text{ m}$ .
- (d) La fréquence de l'onde est  $f = 10 \text{ Hz}$  et sa longueur d'onde  $\lambda = 0,10 \text{ m}$ .
4. On réalise l'expérience de Melde en faisant vibrer une corde de longueur  $L = 1,0 \text{ m}$  avec un vibreur à la fréquence  $f = 40 \text{ Hz}$ . La corde est fixée à l'autre extrémité et on observe l'établissement d'une onde stationnaire avec trois fuseaux. Indiquer les affirmations justes.
- (a) La longueur d'onde de l'onde est  $\lambda = 0,67 \text{ m}$ .
- (b) La longueur d'onde de l'onde est  $\lambda = 6,7 \text{ cm}$ .
- (c) La célérité d'une onde progressive harmonique le long de la corde serait  $c = 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (d) La célérité d'une onde progressive harmonique le long de la corde serait  $c = 27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
5. On éclaire une fente de largeur  $a = 0,10 \text{ mm}$  avec un laser de longueur d'onde  $\lambda$ . La figure de diffraction est observée sur un écran placé à  $D = 3,0 \text{ m}$  de la fente et fait apparaître une tache centrale de largeur  $3,8 \text{ cm}$ . Indiquer les affirmations justes.
- (a) On observe un étalement du faisceau perpendiculairement aux fentes.
- (b) On observe un étalement du faisceau parallèlement aux fentes.
- (c) Plus la fente est fine et plus la tache de diffraction est large.
- (d) Plus la fente est fine et plus la tache de diffraction est petite.
6. Quelle est la longueur d'onde du laser dans l'expérience de diffraction décrite ci-dessus ?
- (a)  $\lambda = 0,63 \text{ } \mu\text{m}$ .
- (b)  $\lambda = 0,53 \text{ } \mu\text{m}$ .
- (c)  $\lambda = 0,43 \text{ } \mu\text{m}$ .

## Exercices

### Exercice 2.1 Déphasées

➔ Méthode (2.1)



Les tensions électriques  $e(t)$  et  $s(t)$  sont observées à l'oscilloscope (figure ci-contre). Elles peuvent s'écrire :

$$e(t) = E \cos(\omega t) \text{ et } s(t) = S \cos(\omega t + \varphi).$$

La base de temps est réglée sur  $0,5 \text{ ms/div}$  et la sensibilité verticale est de  $2 \text{ V/div}$ .

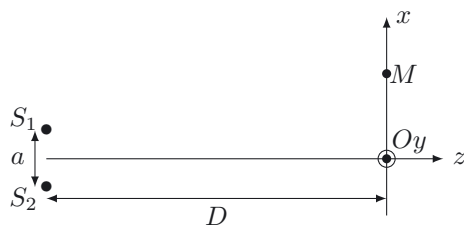
1. Déterminer les amplitudes  $E$  et  $S$  puis la période  $T$  et la pulsation  $\omega$  de ces deux signaux.
2. Déterminer le déphasage  $\varphi$  du signal  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ .  $s(t)$  est-il en avance ou en retard de phase par rapport à  $e(t)$ ?

### Exercice 2.2 Le delta, la loi du silence

➔ Méthode (2.2)

Deux émetteurs considérés comme ponctuels, situés en  $S_1$  et  $S_2$ , émettent des ondes sonores harmoniques de même fréquence  $f = 1,0 \text{ kHz}$  et en phase.

Un petit micro  $M$  peut être déplacé le long de l'axe  $Ox$  : il délivre une tension proportionnelle au « signal sonore » reçu au point  $M$  d'abscisse  $x$ .



Les signaux émis par les sources  $S_1$  et  $S_2$  sont identiques :

$$s_1(S_1, t) = s_2(S_2, t) = A \cos(\omega t).$$

Au point  $M$ , ces deux signaux s'écrivent :

$$s_1(M, t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1(M))$$

$$s_2(M, t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2(M)).$$

La célérité du son dans l'air est  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

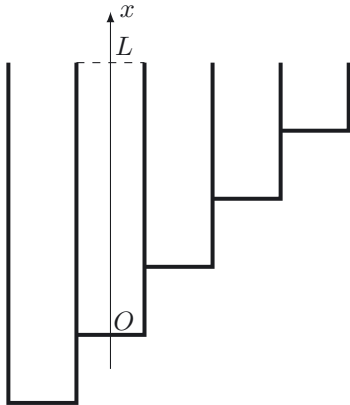
1. Exprimer puis calculer la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes émises par les sources.
2. Expliquer pourquoi  $A_1 \neq A$  et  $A_2 \neq A$ .
3. Que représentent les termes  $\varphi_1(M)$  et  $\varphi_2(M)$ ? Les exprimer notamment en fonction des distances  $S_1M$  et  $S_2M$ .
4. Exprimer le déphasage  $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  en  $M$  entre les deux ondes issues de  $S_1$  et  $S_2$  en fonction de la différence de marche  $\delta(M) = S_2M - S_1M$  et de  $\lambda$ .
5. Utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer l'amplitude  $B$  de l'onde résultant de la superposition des deux ondes en  $M$  en fonction notamment de  $\delta$ .
6. À quelle condition portant sur  $\delta$  les interférences sont-elles destructives?

7. Dans l'hypothèse où  $x \ll D$  et  $a \ll D$ , il est possible de montrer que  $\delta(M) \simeq \frac{ax}{D}$ . En déduire les positions du micro pour lesquelles les interférences sont destructives. L'amplitude du son reçue par le micro dans ces positions est-elle minimale ou maximale ?

### Exercice 2.3 La flûte de Pan

➔ Méthode (2.3)

La flûte de Pan est un instrument de musique à vent composé d'un ensemble de tuyaux sonores de longueurs différentes assemblés par des ligatures. Chaque tuyau possède une extrémité à l'air libre et l'autre est fermée.



Les sons émis sont produits par les vibrations des colonnes d'air contenues dans les différents tuyaux. La hauteur du son émis dépend de la longueur du tuyau : un long tuyau produit un son plus grave qu'un tuyau court.

Nous considérons l'un des tuyaux, fermé en  $x = 0$  et ouvert en  $x = L$  et cherchons une solution de type stationnaire pour la surpression acoustique dans ce tuyau :  $p(x, t) = p_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi')$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  sa longueur d'onde.

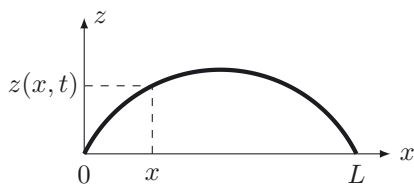
La célérité du son dans l'air est  $c = 342 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans les conditions d'utilisation de la flûte.

1. Qu'appelle-t-on nœuds et ventres de vibration ?
2. Montrer que deux nœuds ou deux ventres successifs sont distants de  $\lambda/2$ , un nœud et un ventre successifs étant distants de  $\lambda/4$ .
3. Nous admettons que  $x = 0$  correspond à un ventre pour l'onde de surpression et  $x = L$  à un nœud.
  - a. Quelles sont les fréquences propres du tuyau ?
  - b. Quelle longueur  $L$  doit posséder le tuyau pour émettre un  $\text{Do}_3$  de fréquence 262 Hz ?

### Exercice 2.4 One Note Samba

➔ Méthode (2.4)

Gitarriste débutant, Marco joue le standard « One Note Samba » sur sa corde de Si.



Le son émis est produit par les vibrations de la corde de longueur  $L = 65,0 \text{ cm}$ .

Nous cherchons une solution de type stationnaire pour l'élongation  $z(x, t)$  de la corde :

$z(x, t) = z_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi')$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  sa longueur d'onde.

1. Préciser les conditions aux limites imposées en  $x = 0$  et  $x = L$ .

- Déterminer les fréquences propres qui satisfont à ces conditions aux limites. On introduira  $c$  la célérité des ondes pouvant se propager le long de la corde.
- La note obtenue avec la corde à vide est un  $\text{Si}_2$  de fréquence  $f = 247 \text{ Hz}$ . En déduire  $c$ .

### Exercice 2.5 Ondes d'une nuit d'été

Une couronne lunaire est un phénomène optique créé par la diffraction de la lumière de la Lune par les gouttelettes d'eau d'un mince nuage. Lorsque la Lune est pleine et le nuage homogène, il est possible d'observer un beau disque blanc (couronne) entouré d'anneaux à couleurs irisées.

- Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde d'une onde lumineuse.
- Expliquer l'élargissement angulaire du faisceau lumineux issu de la Lune par les gouttelettes d'eau.
- L'angle sous lequel est vue la couronne entourant la Lune est de l'ordre de  $6^\circ$ . En déduire une estimation de la taille des gouttes d'eau constituant le nuage.
- Le premier anneau entourant la couronne est vert, l'anneau le plus éloigné est rouge. Proposer une explication.

### Exercice 2.6 La bonne mesure

Yves utilise un GBF pour générer une tension électrique  $e(t) = E \cos(\omega t) + U_0$  avec les valeurs  $E = 2,0 \text{ V}$ ,  $U_0 = 3,0 \text{ V}$ . À l'aide d'un multimètre numérique, il réalise les trois mesures de tension demandées : la valeur moyenne du signal  $e_m$ , sa valeur efficace  $e_{\text{eff,DC}}$  et la valeur efficace de la partie alternative du signal  $e_{\text{eff,AC}}$ . Il obtient  $E_1 = 3,3 \text{ V}$ ,  $E_2 = 3,0 \text{ V}$  et  $E_3 = 1,4 \text{ V}$  sans noter à quoi correspond chaque mesure.

- Déterminer la valeur moyenne  $e_m$ .
- La valeur efficace d'un signal  $u(t)$  périodique de période  $T$  est définie par  $u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$ .  
Calculer  $e_{\text{eff,DC}}$  et  $e_{\text{eff,AC}}$ .
- Vérifier les mesures effectuées et indiquer à quelles mesures correspondent  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .

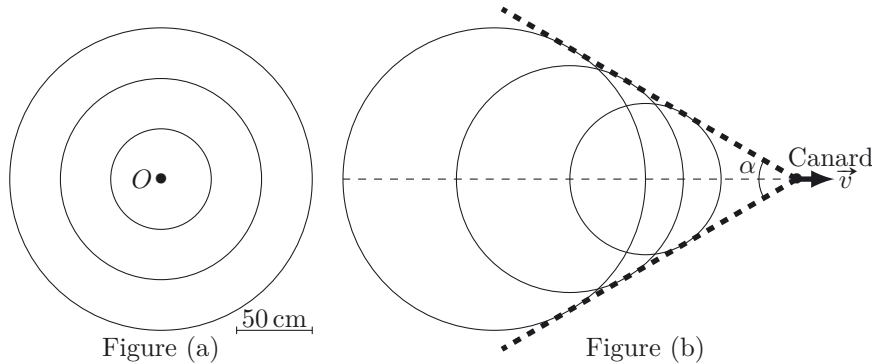
On rappelle que la moyenne temporelle de  $\cos^2(\omega t)$  sur une période vaut  $1/2$ .

### Exercice 2.7 Le canard entraîné

Désœuvré, le petit Nicolas joue au bord d'une grande flaque d'eau dans laquelle il jette des cailloux, générant ainsi des ondes circulaires de surface. La figure (a) montre le front d'onde aux instants  $t_1 = 0,67 \text{ s}$ ,  $t_2 = 1,3 \text{ s}$  et  $t_3 = 2,0 \text{ s}$  lorsqu'un caillou est jeté en  $O$  à l'instant  $t = 0$ .

Nicolas traîne ensuite à l'aide d'une ficelle son petit canard flottant sur la surface de l'eau. En déplaçant rapidement son jouet, il observe le sillage en V qui apparaît et suit le canard, notant que ce sillage est d'autant plus étroit que la vitesse  $v$  du canard est élevée.





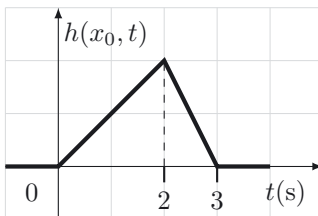
La modélisation suivante est proposée : à chaque instant, le canard perturbe la surface de l'eau et produit une onde quasi-circulaire se propageant à la vitesse  $c$ . La figure (b) représente les fronts d'onde circulaires émis à trois instants successifs.

Le sillage est alors formé par l'enveloppe des cercles émis à différents instants et représenté en pointillé sur la figure.

1. À quelle vitesse  $c$  se déplacent les ondes à la surface de la mare ?
2. Les ondes sont ici des ondes de gravité dont la vitesse s'exprime en fonction de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de la profondeur  $h$  de la mare. Montrer par analyse dimensionnelle que la célérité des ondes peut s'écrire  $c = \sqrt{gh}$ . Dédire de cette expression une estimation de la profondeur de la flaque. Nous prendrons  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
3. Estimer graphiquement l'angle  $\alpha$  caractérisant le sillage. Montrer que  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c}{v}$  et en déduire la vitesse  $v$  du canard.
4. On parle d'onde de choc lorsque l'onde générée par un objet se propage moins vite que l'objet. S'agit-il ici d'une onde de choc ? Citer un autre exemple.

### Exercice 2.8 La ola

Dans un stade, une ola (vague) est initiée à l'instant  $t = 0$  par le spectateur n°0 situé en  $O$ . Nous étudions la propagation de cette vague le long d'une rangée de spectateurs en supposant pour simplifier que ceux-ci sont alignés selon une droite  $Ox$ , la position du spectateur n° $i$  étant  $x_i = ia$  avec  $a = 50 \text{ cm}$ .



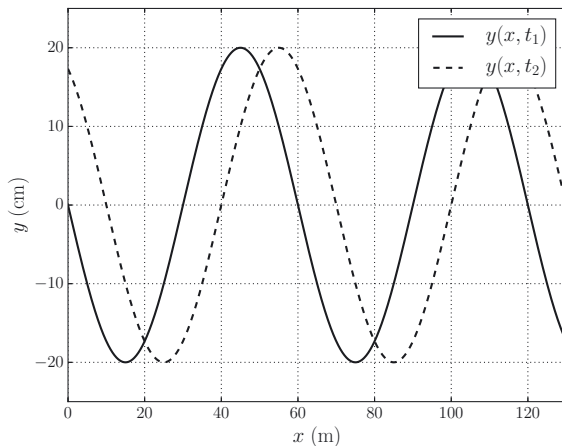
La hauteur  $h(x_0, t)$  des mains de l'initiateur est tracée en fonction du temps : la phase de levée dure 2,0s puis le spectateur se rassied (phase de retour d'une durée de 1,0s). Nous supposons que tous les spectateurs à sa droite (du côté  $x > 0$ ) reproduiront le même geste mais avec un retard  $\tau = 0,50 \text{ s}$  sur le voisin de gauche.

1. Dessiner sur le même graphe que pour  $h(x_0, t)$  l'évolution de la hauteur des mains  $h(x_{10}, t)$  du spectateur n°10 en fonction du temps.
2. Dessiner les positions  $h(x_i, t_1)$  des mains des spectateurs à l'instant  $t_1 = 5,0 \text{ s}$  puis  $h(x_i, t_2)$  à l'instant  $t_2 = 10 \text{ s}$ . Montrer qu'une onde se propage et déterminer sa vitesse de propagation  $c$ .

- En reliant les points  $h(x_i, t)$  à un instant  $t$ , il est possible de définir une fonction d'onde continue de  $x$  et de  $t$  notée  $h(x, t)$ .  $h(x, t)$  peut-elle s'écrire sous la forme  $h(x - ct)$  ou  $h(x + ct)$ ?
- La vague parvient à l'instant  $t_3 = 15$  s dans la tribune occupée par le club du troisième âge de Bazouges-sur-Vilaine. Le temps de réponse est maintenant  $\tau' = 1,0$  s, la durée de la phase de levée de 4,0 s et celle de retour de 2,0 s. Dessiner les positions  $h(x_i, t_4)$  des mains des spectateurs à l'instant  $t_4 = 20,0$  s. À quelle vitesse  $c'$  se propage maintenant la vague?

### Exercice 2.9 Emportées par la houle

La houle est un mouvement ondulatoire de la surface de la mer formé par un vent lointain.



Nous l'assimilerons ici pour simplifier à une onde harmonique se propageant le long d'un axe  $Ox$ .

Nous notons  $y(x, t)$  l'ordonnée du point de la surface qui se trouve en  $x$  à l'instant  $t$ . La fonction  $y(x, t)$  est représentée sur la figure à deux instants différents  $t_1 = 0,0$  s et  $t_2 = 1,0$  s.

Nous admettons que  $t_2$  est inférieur à la période  $T$  de l'onde.

- Dans quel sens se propage l'onde?
- Déterminer sa longueur d'onde  $\lambda$ , sa période et sa vitesse de propagation  $c$ .
- Proposer une écriture de  $y(x, t)$ .
- Emportées par la houle qui les traîne et les entraîne, deux mouettes rieuses se trouvent aux abscisses  $x_1 = 0,0$  m et  $x_2 = 5,0$  m à la surface de l'eau. Peut-on dire que la houle les éloigne l'une de l'autre? Représenter sur le même graphe l'évolution de l'ordonnée des deux mouettes (assimilées à deux points sur la surface de l'eau) en fonction du temps.

### Exercice 2.10 Un Si soit-il

Guitariste débutant, Marco est invité à intervenir sur scène avec l'orchestre de son école sur le standard « One Note Samba » qui présente pour lui l'avantage de n'avoir qu'une note à jouer. Il accorde alors consciencieusement sa corde de Si dans la loge à la température de  $20^\circ\text{C}$  et attend le grand moment.

Le public est surchauffé et lorsque Marco joue son premier Si, la température de la salle est de  $30^\circ\text{C}$ . Marco redoute au plus haut point l'impitoyable professeur de musique et chef d'orchestre, Mme Dragon, qui ne tolérera pas une erreur d'accordage supérieure à 2 Hz.

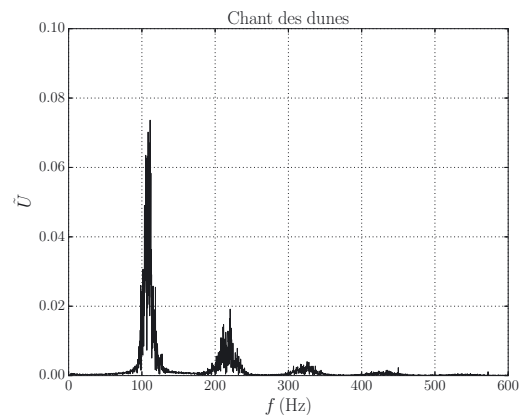
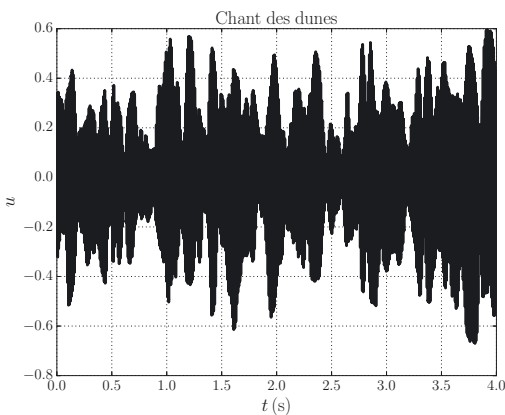
La corde de Si, en nylon, possède une masse linéique  $\mu = 0,551 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$  et une longueur  $L = 65,0$  cm. Correctement accordée, elle émet à vide un  $\text{Si}_2$  de fréquence  $f = 247$  Hz.

Nous admettrons que la célérité  $c$  des ondes transversales le long de la corde s'exprime en fonction de  $\mu$  et de la tension  $T$  de la corde par la relation  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

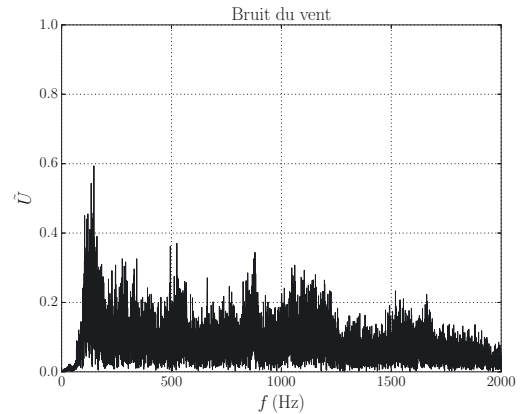
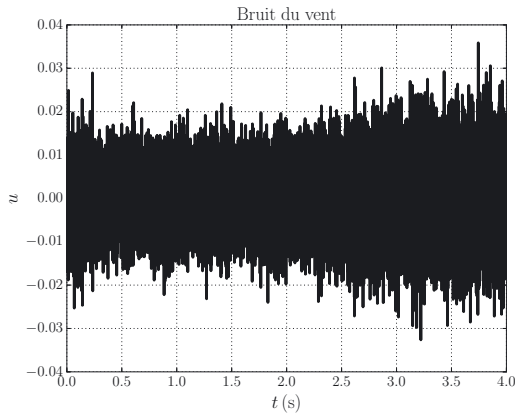
1. Rappeler l'expression de la fréquence  $f$  du mode propre fondamental en fonction de  $L$  et  $c$ . En déduire la vitesse  $c$  de propagation des ondes le long de la corde de Si.
2. Déterminer alors la tension  $T$  de la corde de Si correctement accordée.
3. La dilatation du bois de l'instrument liée à une élévation de température peut entraîner un allongement de la corde : si sa longueur est  $L_0$  à  $0^\circ\text{C}$ , elle vaut  $L = L_0(1 + \alpha\theta)$  à  $\theta^\circ\text{C}$  avec un coefficient de dilatation thermique du bois  $\alpha \simeq 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Montrer qu'à tension constante, l'allongement de la corde peut être négligé malgré l'augmentation de température de  $10^\circ\text{C}$ .
4. L'augmentation de température a également pour conséquence de détendre la corde. Nous admettrons ainsi que la tension  $T$  de la corde évolue de  $dT = -Es\beta d\theta$  lorsque la température augmente de  $d\theta$ .  $E = 2,5 \cdot 10^9 \text{ USI}$  est le module d'Young de la corde en nylon,  $s = 0,25 \text{ mm}^2$  sa section et  $\beta \simeq 9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Calculer la fréquence alors émise par la corde de Si et conclure quant aux craintes de Marco.

### Exercice 2.11 Saar trek

Lors d'un trekking dans le désert du Sahara, Saar reste sans voix devant la puissance et la beauté du chant d'une dune provoqué par une avalanche de sable. Aussi enregistre-t-il le son émis à l'aide de son A-phone. Le signal obtenu ainsi que son analyse spectrale sont présentés sur la figure ci-dessous.



Saar peut ainsi comparer cet enregistrement avec celui préalablement réalisé du bruit du vent soufflant dans le même désert présenté sur la figure suivante.



1. En quoi le chant des dunes se démarque-t-il clairement du bruit du vent ?
2. Lors de l'avalanche, les grains de sable roulent les uns sur les autres. Soumis à l'accélération de la pesanteur  $g$ , ils s'entrechoquent alors avec une fréquence  $f$  qui ne dépend que de leur diamètre  $d$ . On cherche la fréquence sous la forme  $f = \alpha g^a d^b$ . Déterminer  $a$  et  $b$  par analyse dimensionnelle. Nous admettrons que  $\alpha = 0,4$ .
3. En déduire une estimation du diamètre  $d$ . On prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
4. Le chant des dunes impressionne par la puissance du son émis. Pour la justifier, nous devons faire l'hypothèse que les différentes couches de grains en mouvement émettent de façon synchrone. Raisonnons sur deux sources sonores émettant les ondes de fonctions d'onde  $s_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx)$  et  $s_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx - \varphi)$ .
  - a. Qualifier et comparer les deux ondes.
  - b. Utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer l'amplitude de l'onde résultante :  $s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t)$  en fonction du déphasage.
  - c. Exprimer alors les conditions d'interférences constructives et destructives puis conclure quant à la nécessaire synchronisation des grains.

# Corrections

## Interro de cours

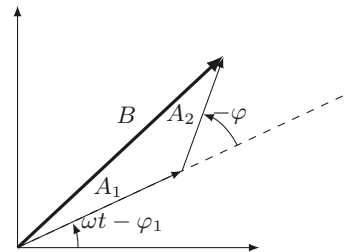
1. Réponse (b) :  $s(t) = \frac{A}{2}(1 + \cos(2\omega t))$  possède deux composantes spectrales de même amplitude, l'une de fréquence nulle, l'autre de fréquence  $f = \frac{2\omega}{2\pi}$ .
2. Réponse (d) :  $e_2$  est en avance de phase par rapport à  $e_1$ .
3. Réponses (a) et (c) : le signal se décale vers la droite entre  $t_1$  et  $t_2$ .  $\lambda$  est la période spatiale qui se lit facilement sur le graphe. On en déduit  $f = \frac{c}{\lambda}$ .
4. Réponses (a) et (d) : il y a trois fuseaux, soit trois ventres de vibration. Ainsi  $L = \frac{3\lambda}{2}$ . Une onde progressive harmonique se propage le long de la corde à la célérité  $c$  telle que  $\lambda = c/f$ .
5. Réponses (a) et (c).
6. Réponse (a) : l'élargissement angulaire du faisceau est  $2\theta$  avec  $\sin(\theta) \simeq \frac{\lambda}{a}$ . La largeur de la tache principale sur l'écran est donc de l'ordre de  $2\frac{\lambda}{a}D$  d'où la valeur de  $\lambda$ .

## Exercice 2.1

1. Les deux signaux ont la même période  $T = 3,2$  ms donc la même pulsation  $\omega = 2,0 \cdot 10^3$  rad  $\cdot$  s<sup>-1</sup>. Les amplitudes sont  $E = 5,0$  V et  $S = 4,0$  V.
2. Nous commençons par lire le retard temporel de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$  :  $\tau = 0,40$  ms. Le déphasage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$  est alors  $\varphi = -\omega\tau = -0,79$  rad :  $s(t)$  est en retard de phase par rapport à  $e(t)$ .

## Exercice 2.2

1. Par définition,  $\lambda = \frac{c}{f} = 0,34$  m.
2. Les sources  $S_1$  et  $S_2$  sont ponctuelles, elles émettent des ondes sphériques dont l'amplitude décroît comme l'inverse de la distance. On aura donc  $A_1 \neq A$  et  $A_2 \neq A$  mais aussi  $A_1 \neq A_2$  si  $M$  n'est pas à égale distance de  $S_1$  et  $S_2$ .
3.  $\varphi_1(M)$  et  $\varphi_2(M)$  représentent les retards de phase en  $M$  liés à la propagation du signal sonore entre les sources et  $M$ . On aura ainsi  $\varphi_1(M) = \frac{2\pi S_1 M}{\lambda}$  et  $\varphi_2(M) = \frac{2\pi S_2 M}{\lambda}$ .
4.  $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2 M - S_1 M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda}$ .
5. Nous pouvons dessiner la représentation de Fresnel (voir figure ci-contre). Nous avons :  
 $(A_1 + A_2 \cos \varphi)^2 + A_2^2 \sin^2 \varphi = B^2$ , soit :  
 $B^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi$  et enfin :  
 $B = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(2\pi\delta/\lambda)}$ .
6. Les interférences sont destructives pour :  
 $\varphi = \pi + 2m\pi$  avec  $m$  entier, soit pour  $\delta = (m + 0,5)\lambda$ .



7. Les positions  $x_m$  pour lesquelles les interférences sont destructives vérifient  $\frac{ax_m}{D} = (m + 0,5)\lambda$ , donc  $x_m = (m + 0,5)\frac{\lambda D}{a}$ . L'amplitude du son reçu par le micro dans ces positions est d'amplitude minimale.

**Exercice 2.3**

- Un nœud de vibration est un point où, pour tout instant  $t$ , l'amplitude de l'onde stationnaire est nulle ; un ventre de vibration est un point où, pour tout  $t$ , l'amplitude de l'onde stationnaire est maximale.
- Une amplitude nulle (nœud) correspond à  $\cos(kx_n + \varphi) = 0$ . On en déduit :  

$$kx_n + \varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \implies x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \implies x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$
 Une amplitude maximale (ventre) correspond à  $\cos(kx'_n + \varphi) = \pm 1$  On en déduit :  

$$kx'_n + \varphi = n\pi \implies x'_n = n\frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \implies x'_n = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$
 On obtient donc  $x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$ ,  $x'_{n+1} - x'_n = \frac{\lambda}{2}$  et  $x_n - x'_n = \frac{\lambda}{4}$  : deux nœuds ou deux ventres successifs sont distants de  $\lambda/2$ , un nœud et un ventre successifs sont distants de  $\lambda/4$ .
- D'après la question précédente, la longueur du tuyau et la longueur d'onde de l'onde stationnaire sont forcément liées par une relation du type  $L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ , où  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $\lambda = \frac{c}{f}$  où  $f$  est la fréquence de l'onde, les fréquences propres s'écrivent :  $f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2L}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .
  - La fréquence fondamentale correspond à  $n = 0$  :  $f_0 = \frac{c}{4L} = 262 \text{ Hz}$ . Le tuyau doit posséder une longueur  $L = 32,6 \text{ cm}$  pour émettre un  $\text{Do}_3$ .

**Exercice 2.4**

- La corde est fixée à ses deux extrémités : pour tout instant  $t$ ,  $z(0, t) = z(L, t) = 0$ .
- $\forall t$ ,  $z(0, t) = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0$  :  $z(x, t)$  se met sous la forme  $z(x, t) = z_0 \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi)$ .  
 $\forall t$ ,  $z(L, t) = 0 \Leftrightarrow \sin(kL) = 0$  :  $k$  ne peut prendre que certaines valeurs quantifiées  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Nous en déduisons les fréquences propres  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} = n\frac{c}{2L}$ .
- La fréquence  $f$  correspond à la fréquence  $f_1$  du fondamental, d'où  $c = 2Lf = 321 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 2.5**

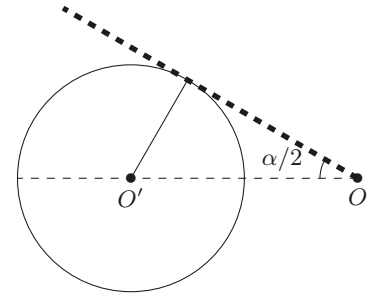
- $\lambda \approx 600 \text{ nm}$ .
- Chaque goutte d'eau de diamètre  $d$  présente dans le nuage va diffracter comme une ouverture circulaire de même diamètre, dans un cône de demi-angle au sommet  $\theta \approx \lambda/d$ .
- $6^\circ = 0,1 \text{ rad} \approx 2\lambda/d$ , soit  $d \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .
- La diffraction dépend de la longueur d'onde, le rayon du premier anneau sombre correspond à la longueur la plus petite, le dernier à la longueur d'onde la plus grande. Près de la couronne, on aura un anneau sombre pour le violet, l'œil fera la synthèse des longueurs d'onde non éteintes, d'où la couleur verte. Lorsqu'on s'éloigne, les couleurs autres que le rouge vont s'éteindre avant ce dernier, donc il restera du rouge à grande distance.

**Exercice 2.6**

- $e_m = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = U_0$ , car  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .
- $e_{\text{eff,AC}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T E^2 \cos^2(\omega t) dt} = \frac{E}{\sqrt{2}}$ ,  $e_{\text{eff,DC}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (E \cos(\omega t) + U_0)^2 dt} = \sqrt{\frac{E^2}{2} + U_0^2}$ .
- $e_{\text{eff,DC}}$  est plus grande que  $U_0$  et que  $e_{\text{eff,AC}}$ . De plus,  $e_m = U_0 = 3,0 \text{ V} = E_2$ . On obtient donc :  
 $E_1 = 3,3 \text{ V} = e_{\text{eff,DC}}$  et  $E_3 = 1,4 \text{ V} = e_{\text{eff,AC}}$ . On vérifie bien que  $E_3 = \frac{E}{\sqrt{2}}$ , et que  $E_1 = \sqrt{\frac{E^2}{2} + U_0^2}$ .

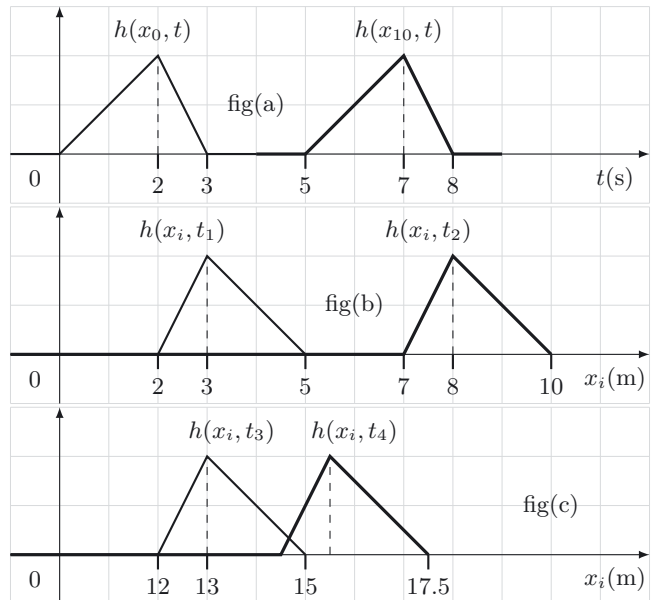
**Exercice 2.7**

- On considère la figure (a). Entre l'instant  $t = 0$  et  $t_3$ , le front d'onde s'est déplacé de 1,0 m, donc la vitesse de propagation des ondes à la surface de la mare est  $c = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- On cherche à obtenir à partir de  $g$  dont l'unité est  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  et de  $h$  dont l'unité est m une vitesse, d'unité  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le produit  $gh$  s'exprimant en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ , sa racine carrée est bien homogène à une vitesse, d'où l'expression  $c = \sqrt{gh}$ . On peut donc écrire  $h = \frac{c^2}{g} = 2,6 \text{ cm}$ .
- On peut facilement tracer un triangle rectangle d'angle  $\alpha/2$ . On obtient  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2,3}{4}$ , soit  $\alpha = 60^\circ$ .  
Si on suppose qu'à l'instant initial, le canard est en  $O'$ , alors à l'instant  $t$  où il atteint  $O$ , le centre  $O'$  de la surface d'onde émise en  $O'$  à  $t = 0$  est situé à la distance  $vt$  de  $O$ , et le rayon  $R(t)$  de cette surface d'onde est  $R(t) = ct$ . Sur le triangle rectangle représenté sur le schéma ci-contre, on a  $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{R(t)}{O'O} = \frac{c}{v}$ .  
On en déduit  $v = 2c = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- On aura ainsi  $c = \frac{v}{2} < v$  : il s'agit donc d'une onde de choc. On peut aussi mentionner le cas d'un avion passant le mur du son.



**Exercice 2.8**

- Le spectateur n°10 reproduit le graphe du spectateur n°0 avec un décalage temporel de 5,0 s, cf. fig(a) ci-contre.
- Les positions  $h(x_i, t_1)$  et  $h(x_i, t_2)$  sont représentées ci-contre, fig(b). Nous constatons une avancée du front d'onde dans le sens des  $x$  croissants, à la célérité :  
 $c = \frac{a}{\tau} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Comme la ola se propage dans le sens des  $x$  croissants on l'écrira  $h(x - ct)$ .
- Ci-contre sont représentés  $h(x_i, t_3)$  et  $h(x_i, t_4)$  (fig(c)). Nous constatons une avancée du front d'onde dans le sens des  $x$  croissants, à la célérité :  
 $c' = \frac{a}{\tau'} = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



**Exercice 2.9**

- Entre  $t_1$  et  $t_2$ , nous remarquons que le signal s'est traduit en bloc dans le sens des  $x$  croissants : l'onde se propage donc dans le sens et la direction de  $\vec{u}_x$ .

2. La longueur d'onde  $\lambda$  représente sa période spatiale et d'après le graphe,  $\lambda = 60$  m. Nous pouvons trouver la vitesse de propagation en observant le décalage des deux courbes entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$c = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \text{ Sa période est donc } T = \frac{\lambda}{c} = 6,0 \text{ s}.$$

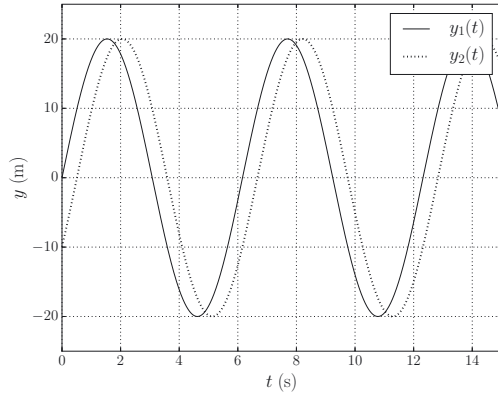
3. Nous remarquons qu'en  $x = 0, t = 0, y(0, 0) = 0$  et que  $y(x, t)$  est décroissante en  $x = 0$  à l'instant initial.

Nous cherchons donc une forme en sinus et compte tenu de la décroissance en  $x = 0$ , nous choisissons :

$y(x, t) = 20 \sin(\omega t - kx)$  car l'amplitude mesurée sur le graphe est de 20 m. Nous avons alors :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0,10 \text{ rad/m}.$$

4. La houle ne les éloigne pas l'une de l'autre ; elle n'auront qu'un mouvement vertical et non un mouvement horizontal. Nous avons  $y_1(t) = 20 \sin(\omega t)$  et  $y_2(t) = 20 \sin(\omega t - 0,52)$ , cf. graphe ci-contre.



**Exercice 2.10**

1. La fondamentale correspond à  $\lambda/2 = L$  (ondes stationnaires le long de la corde), soit  $\lambda = 2L = 130$  cm, d'où  $c = \lambda f = 321 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2.  $T = c^2 \mu = 56,8 \text{ N}$ .
3.  $\Delta L = L_0 \alpha \Delta \theta$  et  $L_0 = \frac{L}{1 + \alpha \theta} = 65,0 \text{ cm}$ , d'où  $\Delta L = 9,75 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Avec cette nouvelle longueur de corde, la fréquence du fondamental ne varie pas de façon significative.
4.  $f = \sqrt{\frac{T - Es\beta\Delta\theta}{\mu}} \frac{1}{2L} = 246 \text{ Hz}$ . Marco n'a donc pas de soucis à se faire.

**Exercice 2.11**

1. Sur les deux spectres fréquentiels, nous voyons clairement la différence entre le bruit du vent, qui présente un caractère aléatoire, avec une répartition des fréquences très étalée et le chant des dunes, qui présente des pics clairement séparés.
2. En raisonnant sur les dimensions,  $T^{-1} = L^a T^{-2a} L^b$ , soit  $-1 = -2a$  et  $a + b = 0$ , d'où  $a = 0,5$  et  $b = -0,5$ . On peut donc écrire  $f = 0,4 \sqrt{\frac{g}{d}}$ .
3.  $d = \frac{(0,4)^2 g}{f^2}$  et la lecture du spectre nous permet d'obtenir  $f = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ , soit  $d = 0,11 \text{ mm}$ .
4. a. Il s'agit de deux ondes progressives harmoniques se propageant dans la direction de l'axe des abscisses  $x$  dans le sens des  $x$  croissants à la même vitesse  $c = \frac{\omega}{k}$ . Les deux ondes ont la même pulsation, elles ont comme amplitudes respectivement  $A_1$  et  $A_2$  et sont déphasées de  $\varphi$ .  
 b. La représentation de Fresnel est dessinée ci-contre :

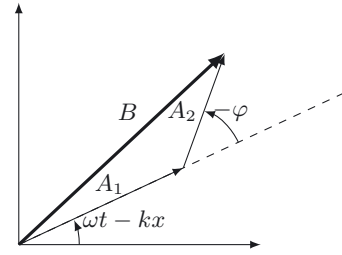


L'amplitude  $B$  de l'onde résultante est donnée par

$$(A_1 + A_2 \cos \varphi)^2 + A_2^2 \sin^2 \varphi = B^2, \text{ soit}$$

$$B = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(2\pi\delta/\lambda)}.$$

- c. Les interférences constructives ont lieu pour  $\varphi = 2k\pi$  et correspondent à  $B$  maximum ; les interférences destructrices ont lieu pour  $\varphi = (2k + 1)\pi$  et correspondent à  $B$  minimum. Pour que le son soit puissant, il faut que la superposition de toutes les ondes issues de toutes les couches de grains soit constructive donc que les grains soient synchronisés. Dans le cas contraire, les ondes s'anéantiraient les unes les autres et le son perdrait de sa puissance.





# Optique géométrique

## L'essentiel du cours

### Contexte

Observation d'étoiles à l'aide d'une lunette astronomique.

Un astronome amateur utilise sa nouvelle lunette astronomique pour observer des étoiles. La lunette, représentée figure 3.1, peut être utilisée avec un capteur CCD pour mémoriser l'image des étoiles ou avec un oculaire pour une observation directe à l'œil.

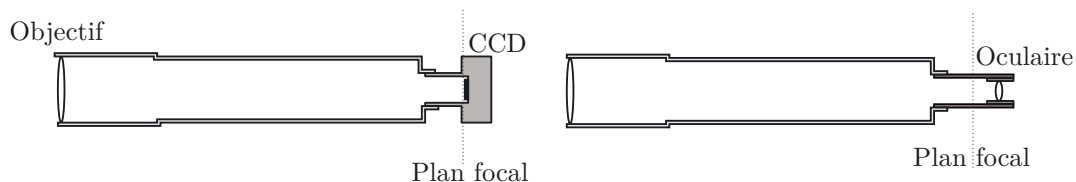


Figure 3.1. Lunette astronomique. Utilisation d'un capteur CCD ou d'un oculaire.

Il est amené à se poser une multitude de questions lors de ses observations : quelle lumière est émise par les étoiles ? Quelles sont les principales parties fonctionnelles de sa lunette ? Comment l'œil parvient-il à former une image nette des étoiles ?

## ■ 1 Les sources de lumière

La première question posée concerne l'émission de lumière. Les sources lumineuses, qu'elles soient célestes ou terrestres, présentent des caractéristiques différentes selon leur constitution et leur mode d'émission. La caractérisation d'une source lumineuse se fait principalement au travers de l'étude de son spectre.

Voici quelques exemples de sources de lumière.

- Les sources thermiques, émettant un **spectre continu**, comme les étoiles, le Soleil et les lampes à incandescence. Le spectre d'émission dépend de la température de l'émetteur (5 700 K pour le Soleil, 2 800 K pour une lampe à incandescence classique et 3 100 K pour une lampe à incandescence à halogène). Les atomes sont excités par l'agitation thermique.
- Les lampes à décharge basse pression (lampes spectrales). Ces sources émettent un **spectre de raies**, c'est-à-dire un ensemble de radiations de longueurs d'onde bien précises correspondant à des transitions énergétiques atomiques. Les atomes du gaz sont excités par une décharge électrique.

- Les lampes à fluorescence (par exemple les lampes fluocompactes), qui contiennent de la vapeur de mercure excitée par décharge. Une raie ultraviolette très intense émise par le mercure est absorbée par un revêtement fluorescent déposé sur la surface interne de l'ampoule. En retour ce revêtement émet des radiations dont les longueurs d'onde sont continûment réparties dans des **bandes** du domaine visible.
- Les lasers, qui émettent une lumière **quasi-monochromatique**.

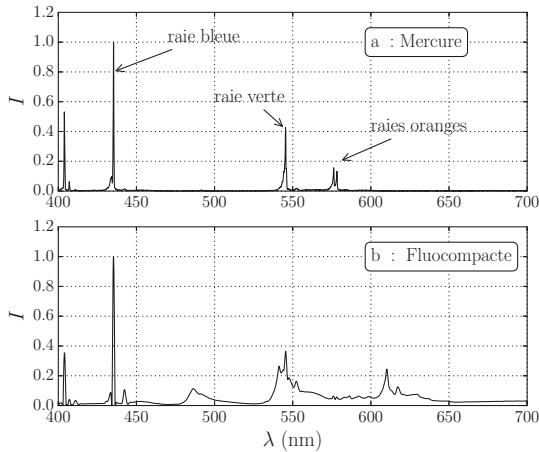


Figure 3.2. Spectres du mercure et d'une lampe à fluorescence.

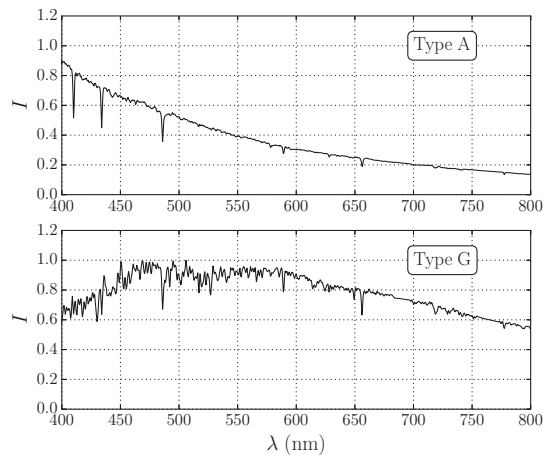


Figure 3.3. Spectre d'étoiles.

La figure 3.2-a montre le spectre d'une lampe à décharge à vapeur de mercure, où l'on voit les raies d'émission de cet atome dans le domaine visible. La figure 3.2-b montre le spectre d'une lampe à fluorescence : on repère deux raies bleues du mercure et trois bandes larges émises par les éléments fluorescents.

La figure 3.3 montre les spectres de deux étoiles de températures différentes (environ 10 000 K pour le type A, 6 000 K pour le type G). Le Soleil est une étoile de type G ; son spectre d'émission a un maximum vers 500 nm. Le spectre d'une étoile comporte des raies d'absorption, caractéristiques du gaz présent dans sa couche externe. La couleur d'une étoile dépend de sa température : une étoile de type G comme le Soleil est blanche ou jaune, une étoile plus chaude (type A) est bleue, une étoile plus froide est orange ou rouge.

#### Quelle est la couleur d'une lumière ?

Le spectre d'une lumière visible par l'œil humain s'étend sur un intervalle étroit de longueurs d'ondes. La perception des couleurs relève de processus physiologiques complexes au niveau du fond de l'œil. Les couleurs spectrales perçues sont liées aux longueurs d'onde dans le vide des radiations lumineuses :

Couleurs	violet	bleu	vert	jaune	orange	rouge
Longueur d'onde moyenne	430 nm	465 nm	550 nm	580 nm	595 nm	615 nm

Les sources lumineuses étant caractérisées, intéressons-nous maintenant à la propagation de la lumière entre l'étoile et la lunette astronomique.

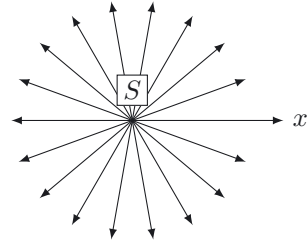
## ■ 2 Propagation de la lumière dans un milieu

### □ Comment définir une source ponctuelle monochromatique ?

La lumière est une onde électromagnétique, qui peut se propager dans le vide. On s'intéresse à une source idéale, ponctuelle et monochromatique, qui émet une onde dans le vide. Une étoile est assimilable à une source ponctuelle car sa distance à l'observateur est extrêmement grande devant son diamètre. Une petite largeur  $\delta\lambda$  de son spectre est assimilable à une lumière monochromatique. Dans une direction particulière ( $Sx$ ), la vibration lumineuse s'écrit :

$$s(x, t) = A(x) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

où  $A(x)$  est l'amplitude de la vibration, qui décroît avec la distance à la source. Dans le vide, l'onde lumineuse se propage à la vitesse  $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $k = \frac{\omega}{c}$ . La figure ci-contre montre les rayons, qui sont des demi-droites d'origine  $S$ . L'énergie lumineuse se propage le long de ces rayons.



### □ La vitesse de la lumière dépend-elle du milieu de propagation ?

La vitesse de propagation de la lumière dans un milieu matériel transparent est inférieure à sa vitesse  $c$  dans le vide.

#### Définition : Indice de réfraction

L'indice de réfraction  $n$  d'un milieu transparent est le rapport entre la célérité de la lumière dans le vide  $c$  et la vitesse de propagation  $v$  de la lumière dans le milieu :  $n = \frac{c}{v}$ .



■  $v < c$  donc l'indice de réfraction d'un milieu transparent est toujours supérieur à 1.

Quelques ordres de grandeurs :

- indice du vide :  $n = 1$  (par définition)
- indice de l'air sec :  $n \approx 1,0003$
- indice de l'eau liquide :  $n \approx 1,33$
- indice du verre  $n \approx 1,5$ .

En général un milieu transparent est **dispersif**, c'est-à-dire que la vitesse de propagation dans le milieu dépend de la longueur d'onde. La loi de Cauchy est un modèle donnant l'évolution de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde dans le vide :  $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes qui dépendent du milieu.  $A$  est sans dimension et  $[B] = \text{L}^2$ .

### □ La notion de rayon lumineux permet-elle de décrire la propagation de la lumière ?

Dans des milieux transparents homogènes et en absence d'obstacles, les rayons issus de la source ponctuelle  $S$  sont rectilignes. En présence d'objets (écrans opaques, miroirs, lentilles, etc.), des phénomènes de diffraction apparaissent lorsque la taille de ces objets est inférieure à environ 100 fois la longueur d'onde (chapitre 2). Seule une représentation ondulatoire permet de rendre compte de la diffraction. À l'inverse, lorsque les objets ont une taille supérieure au millimètre, on peut généralement négliger la diffraction et utiliser la notion de rayon lumineux pour décrire la propagation de la lumière : c'est l'approximation de l'optique géométrique.

**Approximation de l'optique géométrique**

Dans le cadre de l'optique géométrique, les aspects ondulatoires de la lumière sont négligés. Cela revient à supposer que les instruments utilisés sont de très grandes tailles devant la longueur d'onde (facteur 1 000 au moins). L'optique géométrique s'intéresse alors aux rayons lumineux et utilise des lois simples ayant pour origine des constatations géométriques.



■ L'optique géométrique ne fait pas d'hypothèses sur la nature de la lumière.

### ■ 3 La lumière arrive sur un dioptre

Après avoir été émis par l'étoile et s'être propagés dans le vide, les rayons lumineux arrivent en contact avec l'atmosphère où des phénomènes de réflexion et de réfraction peuvent se produire.

Pour les décrire, on introduit le vocabulaire suivant :

**Définition : Vocabulaire de l'optique géométrique**

- **Dioptre** : surface séparant deux milieux d'indices différents. Si cette surface est plane, on parle de dioptre plan.
- **Normale** : direction perpendiculaire au dioptre, au point où le rayon le rencontre.
- **Plan d'incidence** : plan contenant la normale et le rayon incident.
- **Angle d'incidence** : angle entre la normale au dioptre et le rayon incident.



■ En optique géométrique, tous les angles sont définis par rapport à la normale au dioptre.

On considère un rayon incident qui se propage dans un milieu d'indice  $n_1$  et qui rencontre un dioptre de séparation avec un milieu d'indice  $n_2$ . La figure 3.4 introduit les notations utilisées.

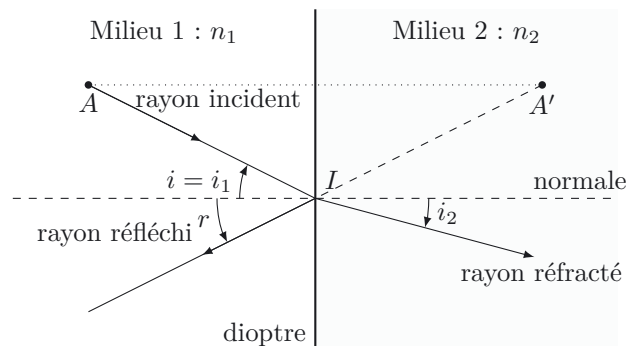


Figure 3.4. Réflexion et réfraction d'un rayon lumineux lorsque  $n_1 < n_2$ .

Dans le plan d'incidence, les angles par rapport à la normale sont des grandeurs algébriques, positifs pour une rotation dans le sens trigonométrique, négatifs pour la rotation inverse. La direction du rayon réfléchi est donnée par la première loi de Snell-Descartes :

**Loi de la réflexion : première loi de Snell-Descartes**

- Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence,
- l'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale est opposé à l'angle d'incidence  $r = -i$ .



▮ Cette loi permet également de prévoir la direction du rayon réfléchi par un miroir.

La direction du rayon réfracté est donnée par la seconde loi de Snell-Descartes :

**Loi de la réfraction : seconde loi de Snell-Descartes**

- Le rayon réfracté (ou transmis) appartient au plan d'incidence,
- les angles d'incidence  $i_1 = i$  et de réfraction  $i_2$  sont tels que :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

**Méthode 3.1 : Construction géométrique du rayon réfléchi et du rayon réfracté**

On considère un rayon incident qui se propage d'un milieu d'indice  $n_1$  vers un milieu d'indice  $n_2$ . Soit  $I$  le point d'intersection entre le rayon incident et le dioptré (ou point d'incidence).

- Construction du rayon réfléchi :
  - Prendre un point  $A$  appartenant au rayon incident et construire le point  $A'$  symétrique de  $A$  par rapport au dioptré.
  - Le rayon réfléchi a la même direction que la droite  $(A'I)$ .
- Construction du rayon réfracté :
  - Si  $n_1 < n_2$ , construire un rayon réfracté qui traverse la normale en s'en rapprochant et tel que  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ .
  - Si  $n_1 > n_2$ , construire un rayon réfracté qui traverse la normale en s'en éloignant et tel que  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ .

➔ Exercices (3.1) (3.2)

□ Existe-t-il toujours un rayon réfracté et un rayon réfléchi ?

- Cas  $n_1 < n_2$  :  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ , d'où  $i_2 < i_1$ . **Le rayon réfracté se rapproche de la normale.** Ce rayon existe quel que soit l'angle d'incidence du rayon incident. Pour une incidence rasante ( $i_1 \rightarrow \pi/2$ ), l'angle du rayon réfracté tend vers une valeur limite  $i_{2\ell} = \arcsin(n_1/n_2)$ ; on parle alors de **réfraction limite**.
- Cas  $n_1 > n_2$  :  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ , d'où  $i_2 > i_1$ . **Le rayon réfracté s'éloigne de la normale.** L'angle du rayon réfracté étant limité à  $\pi/2$ , il n'existe pas de rayon réfracté si  $\sin i_1 > n_2/n_1$ , c'est-à-dire si  $i_1 > \arcsin(n_2/n_1)$ ; on parle alors de **réflexion totale** de la lumière incidente.

**Méthode 3.2 : Établir la condition de la réflexion totale**

- Vérifier que le rayon lumineux se propage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent ( $n_1 > n_2$ ).
- Calculer l'angle d'incidence limite, qui permet d'avoir un angle réfracté égal à  $\pi/2$  :  

$$n_1 \sin i_{1\ell} = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \text{ soit } \sin i_{1\ell} = \frac{n_2}{n_1}.$$
- Vérifier qu'il y a réflexion totale si  $i_1 > i_{1\ell}$ .

➔ Exercice (3.3)

La lumière provenant d'une étoile est en partie réfléchi sur les différentes couches de l'atmosphère. Pour limiter cette réflexion mais également l'absorption et la diffusion de la lumière incidente par les éléments de l'atmosphère, les grands observatoires sont placés en altitude. L'idéal est de placer l'instrument d'observation hors de l'atmosphère, sur un satellite. C'est le cas du télescope spatial Hubble.

## ■ 4 Observation d'une étoile à l'aide d'un système optique

On considère une lunette astronomique formée d'un objectif qui fait l'image d'une étoile sur un capteur photosensible (CCD). Dans sa forme la plus simple, l'objectif est une lentille biconvexe en verre, dont les deux faces constituent deux dioptries sphériques.

**Définition : Système optique centré**

Un système optique centré est un ensemble de dioptries qui admettent un axe de symétrie de révolution, constituant son **axe optique**. Il est délimité par une face d'entrée, par laquelle la lumière incidente entre dans le système et une face de sortie, par laquelle elle en ressort.

On définit les éléments suivants :

- **Plans transverses** : plans perpendiculaires à l'axe optique.
- **Point objet** : intersection de rayons lumineux arrivant sur le système optique.
- **Objet réel ou virtuel** : un objet est réel s'il est situé avant la face d'entrée du système optique (il peut être touché). Dans le cas contraire l'objet est virtuel.
- **Point image** : point d'intersection des rayons lumineux émergeant du système optique.
- **Image réelle ou virtuelle** : une image est réelle si elle est située après la face de sortie du système optique (elle peut être visible sur un écran). Dans le cas contraire l'image est virtuelle.



Les rayons provenant d'un point objet situé à très grande distance du système optique sont pratiquement parallèles entre eux. On dit que le point est à l'infini. Pour un point objet sur l'axe optique à l'infini, les rayons incidents sont parallèles à l'axe optique.

La figure 3.5 illustre les différentes configurations que l'on peut rencontrer avec un système optique centré ( $S$ ).



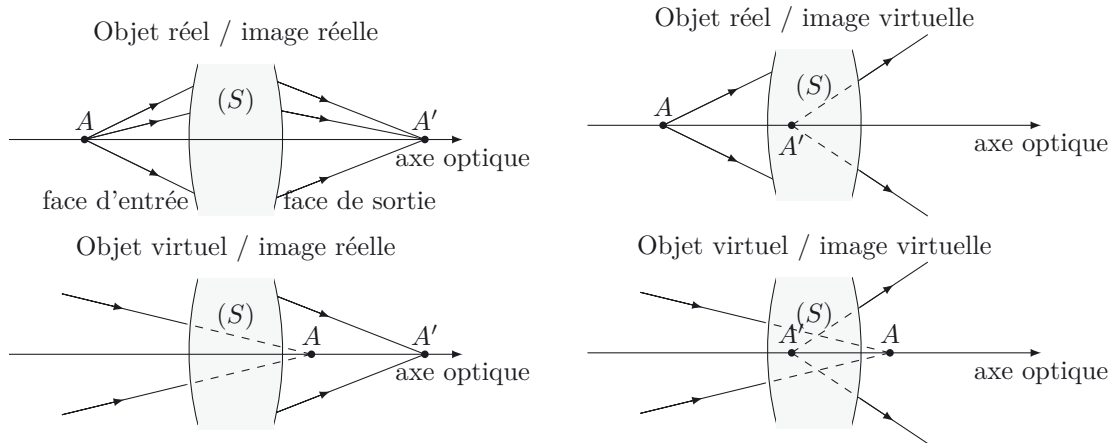


Figure 3.5. Présentation des configurations possibles dans un système optique.

L'axe optique est orienté dans le sens de propagation de la lumière. Les rayons réels sont tracés en traits pleins et les prolongements des rayons lumineux en pointillés, pour positionner les objets virtuels ou les images virtuelles.



Dans le cas d'un miroir (ou de la réflexion par un dioptre) l'image  $A'$  d'un objet réel  $A$  est virtuelle (figure 3.4) : on ne peut pas matérialiser cette image sur un écran.

□ Tous les rayons issus d'un point objet convergent-ils en un point image ?

Cette question introduit les notions de **stigmatisme** et d'**aplanétisme**.

#### Définition : Stigmatisme et aplanétisme

- Un système optique est rigoureusement stigmatique si les rayons lumineux passant par le point objet  $A$  passent tous par le point image  $A'$  après avoir traversé le système optique  $(S)$ . Les points  $A$  et  $A'$  sont alors conjugués par  $(S)$ .
- Un système optique est rigoureusement aplanétique si le conjugué d'un objet transverse  $AB$  est une image transverse  $A'B'$ .

Les systèmes optiques centrés réalisent, sous certaines conditions, un stigmatisme et un aplanétisme approchés. Pour les mettre en évidence, nous avons réalisé des simulations numériques de tracés de rayons à travers une lentille en verre biconvexe. Lorsque les rayons proviennent d'un objet ponctuel lointain situé sur l'axe optique (figure 3.6), il y a bien un point de convergence des rayons à la sortie de la lentille, à condition que les rayons incidents soient proches de l'axe (a). Pour un point objet lointain situé hors de l'axe (figure 3.7), l'abscisse sur l'axe du point image est indépendante de la direction des rayons incidents tant que l'angle de ces rayons avec l'axe optique est faible (a).

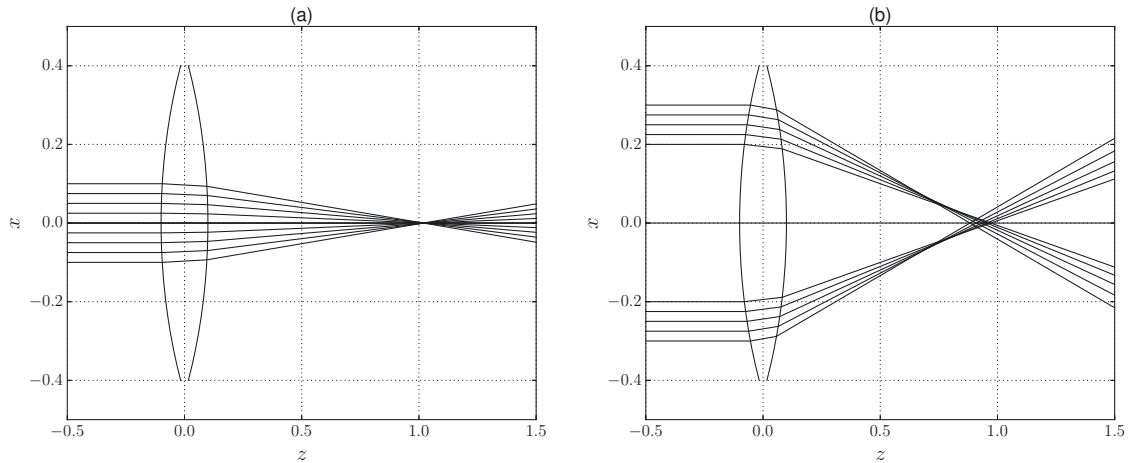


Figure 3.6. Cas d'un faisceau lumineux provenant d'un objet ponctuel situé à une grande distance sur l'axe optique.

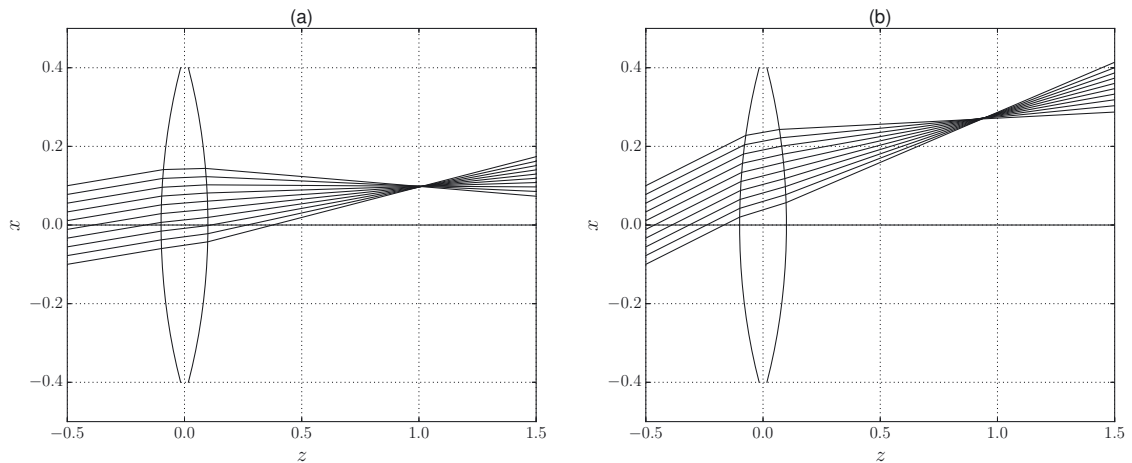


Figure 3.7. Cas d'un faisceau lumineux provenant d'un objet ponctuel situé à une grande distance en dehors de l'axe optique.



En pratique, seul le miroir plan est un système rigoureusement stigmatique et aplanétique.

□ **Quand peut-on considérer un stigmatisme ou un aplanétisme approchés ?**

Les simulations des figures 3.6 et 3.7 montrent que le stigmatisme et l'aplanétisme sont obtenus, de manière approchée, si les rayons provenant de l'objet vérifient des conditions, appelées conditions de Gauss.

### Conditions de Gauss

On obtient un stigmatisme et un aplanétisme approchés en respectant les conditions de Gauss :

- les rayons lumineux doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique,
- les rayons lumineux doivent être peu écartés de l'axe optique.



En pratique, ces conditions peuvent être réalisées à l'aide d'un diaphragme ou en réduisant le diamètre des lentilles. Dans les conditions de Gauss, on peut faire les approximations suivantes :  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\tan \theta \approx \theta$  où  $\theta$  est l'angle (en radian) entre un rayon et l'axe optique.

Nous nous plaçons désormais dans ces conditions de Gauss pour étudier la lentille constituant l'objectif de la lunette astronomique.

### Vocabulaire concernant les lentilles minces

- **Lentille mince** : une lentille est mince si la distance entre les deux sommets (intersection des dioptries et de l'axe optique) est petite devant les autres distances caractéristiques de la lentille.
- **Lentille convergente** : lentille qui dévie les rayons lumineux incidents vers l'axe optique (par exemple lentille biconvexe).
- **Lentille divergente** : lentille qui écarte les rayons de l'axe optique (par exemple lentille biconcave).
- **Centre optique** : intersection de la lentille mince avec l'axe optique. On le note  $O$ .
- **Foyer objet** : point objet de l'axe optique dont l'image est à l'infini (grande distance) sur l'axe. Il est noté  $F$ .
- **Foyer image** : image d'un point objet situé à l'infini (grande distance) sur l'axe optique. Il est noté  $F'$ .
- **Plan focal objet ou image** : plan transverse contenant un foyer (objet ou image). Un point de ce plan est appelé foyer secondaire.
- **Mesures algébriques** : la mesure algébrique  $\overline{OA}$  est une longueur affectée d'un signe.  $\overline{OA}$  est positive si le vecteur  $\overrightarrow{OA}$  est dans le même sens que l'axe optique et négative sinon. Si ce vecteur est orthogonal à l'axe optique, on adopte souvent une convention positive vers le haut.
- **Distance focale image et vergence** : la distance focale image est définie par  $f' = OF'$  et la vergence par  $V = 1/f'$ . La vergence s'exprime en dioptrie ( $\delta$ ) ; elle est positive pour une lentille convergente et négative pour une lentille divergente.

#### □ Comment construire l'image d'un objet par une lentille mince ?

Les conditions de Gauss permettent d'obtenir un stigmatisme approché : tous les rayons incidents passant par un point  $A$  émergent d'une lentille en passant par un point image  $A'$ . Pour construire l'image d'un objet  $AB$  transverse (délimité par les deux points objet  $A$  et  $B$  avec  $A$  appartenant à l'axe optique), on utilise les propriétés des rayons lumineux indiquées dans la méthode suivante.

**Méthode 3.3 : Construction de l'image d'un objet transverse  $AB$  par une lentille**

Pour obtenir l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  transverse par une lentille mince convergente ou divergente, deux rayons émergents parmi les trois proposés ci-dessous sont utilisés.

- Le rayon incident passant par  $B$  et le centre optique  $O$  n'est pas dévié.
- Le rayon incident se propageant parallèlement à l'axe optique et passant par  $B$  émerge de la lentille en passant par  $F'$ .
- Le rayon incident passant par  $B$  et par  $F$  émerge parallèlement à l'axe optique.

➔ Exercice (3.4)

On utilise cette méthode pour construire géométriquement les images  $A'B'$  par les lentilles présentées sur la figure 3.8.

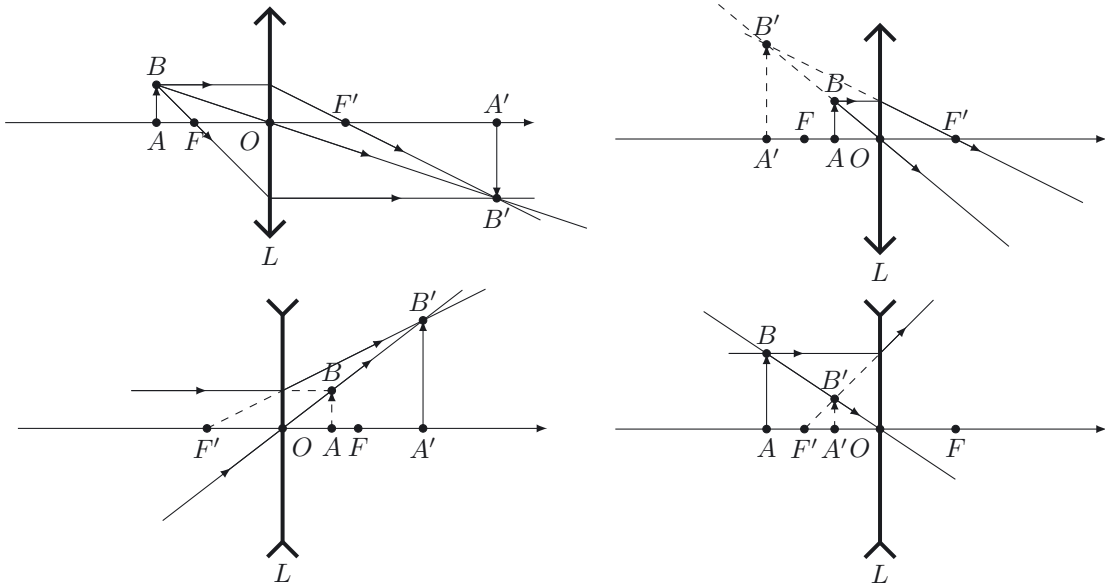


Figure 3.8. Exemples de constructions d'un objet  $AB$  à l'aide de lentilles minces convergentes ( $f' > 0$ ) ou divergentes ( $f' < 0$ ).

**Méthode 3.4 : Construction du cheminement d'un rayon quelconque**

Pour obtenir le cheminement d'un rayon lumineux à travers une lentille, on utilise les propriétés des foyers secondaires.

- Deux rayons incidents parallèles donnent des rayons émergents qui se croisent dans le plan focal image à l'intersection entre le rayon incident parallèle passant par  $O$  et le plan focal image.
- Deux rayons incidents qui se croisent dans le plan focal objet au point  $C$  donnent des rayons émergents parallèles entre eux suivant la direction  $(OC)$ .

➔ Exercice (3.5)

□ Peut-on retrouver la position et la taille d'une image par le calcul ?

Dans les conditions de Gauss, le système optique conjugue l'objet  $AB$  et son image  $A'B'$ . La position de l'image se déduit de celle de l'objet en utilisant une formule de conjugaison. Les formules de conjugaison peuvent être démontrées à l'aide de considérations géométriques. Pour une lentille mince il existe deux formules de conjugaison et trois formules de grandissement.



Ces formules de conjugaison et de grandissement sont valables pour tout type de lentilles minces, convergente ( $f' > 0$ ) ou divergente ( $f' < 0$ ).

**Méthode 3.5 : Utiliser une formule de conjugaison ou de grandissement**

Soit une lentille mince de distance focale image  $f'$  qui conjugue l'objet  $A$  et l'image  $A'$ . Les deux formules de conjugaison sont :

- **Formule de Descartes** ou formule de conjugaison avec origine au centre optique :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

- **Formule de Newton** ou formule de conjugaison avec origines aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

- La taille de l'image  $A'B'$  se détermine à partir du grandissement transversal défini par

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} :$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

➔ Exercices (3.6) (3.7)

□ Avec quel type de lentille mince peut-on former une image réelle d'un objet réel ?

Pour répondre à cette question, posons  $x = \overline{OA}$  et  $x' = \overline{OA'}$  et traduisons la relation de conjugaison de Descartes par la droite d'équation  $\frac{1}{x'} = \frac{1}{x} + \frac{1}{f'}$  tracée dans le plan  $(1/x, 1/x')$ .

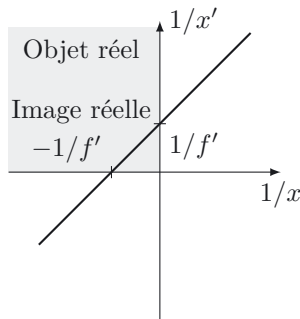


Figure 3.9. Lentille convergente.

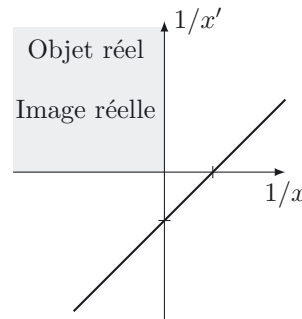


Figure 3.10. Lentille divergente.

Les domaines grisés sur les figures 3.9 et 3.10 sont ceux pour lesquels l'objet et l'image sont tous deux réels ( $x < 0$  et  $x' > 0$ ). Nous constatons que **ce n'est possible qu'avec une lentille**

**convergente.** Il faut en outre avoir  $1/x > -1/f'$ , c'est-à-dire  $x < -f'$ , ce qui correspond à un objet situé avant le foyer objet  $F$  de la lentille. On a alors  $1/x' < 1/f'$ , c'est-à-dire  $x' > f'$ , ce qui correspond à une image située après le foyer image  $F'$  de la lentille.

□ **Comment choisir la distance focale de la lentille convergente pour obtenir une image réelle d'un objet réel ?**

Notons  $p$  et  $p'$  les distances de l'objet réel  $A$  et de l'image réelle  $A'$  au centre optique de la lentille ( $p = -x$  et  $p' = x'$ ). Notons  $D$  la distance entre  $A$  et  $A'$  ( $D = p + p'$ ). La relation de conjugaison de Descartes conduit à :

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow (p + p')f' = pp' \Rightarrow Df' = p(D - p)$$

Ainsi  $p$  doit être une racine positive du trinôme  $p^2 - Dp + Df' = 0$ . Une condition nécessaire est que le discriminant de celui-ci soit positif ou nul, c'est-à-dire que  $D \geq 4f'$ .

#### Conjugaison d'un objet réel en une image réelle par une lentille convergente

Pour conjuguer un objet réel en une image réelle, la distance objet-image  $D$  doit vérifier  $D \geq 4f'$  où  $f'$  est la distance focale de la lentille convergente.

Il faut en outre placer l'objet à une distance de la lentille supérieure à  $f'$ .



■ Pour projeter une image sur un écran, il faut qu'elle soit réelle.

□ **Où se trouve l'image d'une étoile par l'objectif de la lunette astronomique ?**

Les étoiles sont à une distance extrêmement grande devant la taille de la lunette. Leur image se forme donc dans le plan focal image. Il faut en conséquence placer le capteur CCD dans ce plan. Le diamètre apparent d'une étoile (à l'exception du Soleil) est trop petit pour être visible sur une image. Une étoile est donc assimilable à un objet ponctuel situé à l'infini. Considérons deux étoiles  $A_\infty$  et  $B_\infty$ , dont les images, se formant dans le plan focal image, sont respectivement  $A'$  et  $B'$ .

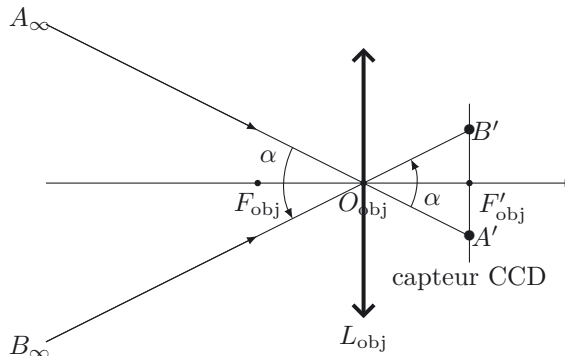


Figure 3.11. Construction géométrique des images de deux étoiles par l'objectif de la lunette astronomique.

La distance  $A'B'$  entre les deux images s'obtient à partir de l'angle  $\alpha$  séparant les deux étoiles. Sachant que  $\alpha \ll 1$  (condition de Gauss), on a  $A'B' = \alpha f'_{\text{obj}}$ .

## ■ 5 Observation à l'œil à travers la lunette astronomique

Après avoir photographié les étoiles à l'aide d'un capteur CCD, on souhaite faire une observation à l'œil. On place alors un oculaire à la place du capteur photosensible, comme indiqué sur la figure 3.1. Pour positionner précisément l'oculaire par rapport à l'objectif, on s'intéresse dans un premier temps au système optique que constitue l'œil (figure 3.12).

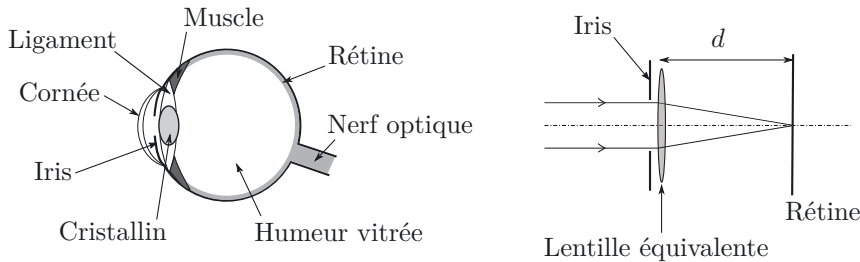


Figure 3.12. Description et modélisation d'un œil emmétrope (sans défaut).

- L'œil est un système optique convergent constitué de la cornée, du cristallin et de l'humeur vitrée ; ce système peut être modélisé par une unique lentille convergente équivalente placée dans l'air.
- Les muscles et les ligaments permettent de bomber plus ou moins le cristallin et de modifier ainsi la valeur de la distance focale de la lentille équivalente (accommodation).
- L'iris joue le rôle d'un diaphragme et permet de régler la quantité de lumière pénétrant dans l'œil. La contraction et la dilatation de l'iris permettent de faire varier la taille de la pupille (ouverture circulaire par où passe la lumière).
- La rétine est constituée de cellules sensibles à la lumière. Lorsque l'accommodation est faite, l'image se forme sur la rétine et est envoyée au cerveau via le nerf optique.

Un œil emmétrope (sans défaut) forme sans accommodation l'image sur la rétine d'un point situé à très grande distance (à l'infini). L'accommodation consiste à réduire légèrement la distance focale du cristallin, de manière à venir former sur la rétine l'image d'un objet proche. Le point le plus proche (*punctum proximum*) pouvant être vu nettement, par un œil standard, est à une distance  $d_m = 25$  cm de l'œil (distance minimale de vision distincte) et le point le plus lointain (*punctum remotum*) est situé à une très grande distance (à l'infini).

### □ Quelle est la plage de variation de la distance focale ?

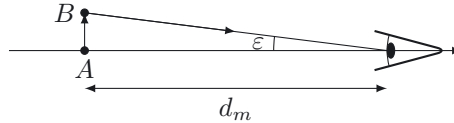
La distance entre la lentille équivalente et la rétine est notée  $d$ . Lors de l'accommodation, la distance focale de la lentille équivalente varie en raison de la contraction du cristallin. Lors d'une vision au *punctum remotum*, l'objet étant suffisamment loin pour pouvoir être considéré à l'infini, l'image se forme sur la rétine ; la distance focale de la lentille est donc  $f'_{PR} = d$ . Lors d'une vision au *punctum proximum* (accommodation maximale), la distance focale de la lentille  $f'_{PP}$  s'obtient avec la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_{PP}}$$
 avec  $OA = -d_m$  et  $OA' = d$ . On obtient ainsi  $f'_{PP} = \frac{d_m d}{d_m + d}$ . Avec  $d = 17$  mm et  $d_m = 25$  cm, on trouve que la distance focale d'un œil emmétrope varie entre 16 mm et 17 mm.

□ Quel est le plus petit objet que l'on peut observer à l'œil nu ?

Cette question revient à se demander quelle doit être la distance la plus petite entre deux points objets pour que leurs images se forment sur deux cellules rétinienne différentes. Le pouvoir séparateur de l'œil  $\varepsilon$  est l'angle minimum entre deux rayons pénétrant dans l'œil pour lesquels cette condition est satisfaite. Pour un œil standard, il vaut environ  $1'$  (une minute d'arc), soit  $1/60$  degrés ou encore  $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-4}$  rad.

Lors d'une vision au *punctum proximum*, la distance minimale entre deux objets distincts est  $\ell = \varepsilon d_m \approx 0,07$  mm.



□ Où placer l'oculaire pour observer des étoiles à la lunette sans accommoder ?

On désire observer, sans avoir à accommoder, un objet situé à l'infini (ou à très grande distance) en plaçant l'œil derrière l'oculaire de la lunette. Il faut donc que l'image, par la lunette, de l'objet à l'infini, soit elle-même rejetée à l'infini. Cela constitue la définition d'un **système afocal**.

L'objectif forme de l'objet  $A_\infty$  une image  $A_i$  qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire. L'image  $A'_\infty$  de  $A_i$  par l'oculaire constitue l'image de  $A_\infty$  par la lunette :

$$A_\infty \xrightarrow{\text{objectif}} A_i \xrightarrow{\text{oculaire}} A'_\infty$$

$A_\infty$  étant à l'infini,  $A_i$  se situe dans le plan focal image de l'objectif. Pour que  $A'_\infty$  soit rejetée à l'infini,  $A_i$  doit se former dans le plan focal objet de l'oculaire. Ainsi, pour que la lunette soit **afocale**, le plan focal image de l'objectif et le plan focal objet de l'oculaire doivent être confondus. Si l'objectif et l'oculaire sont assimilables à deux lentilles minces convergentes, leur distance doit alors être égale à la somme de leurs distances focales images.

Le cheminement d'un rayon lumineux est présenté sur la figure 3.13 dans le cas où  $f'_{\text{obj}} = 5f'_{\text{oc}}$ .

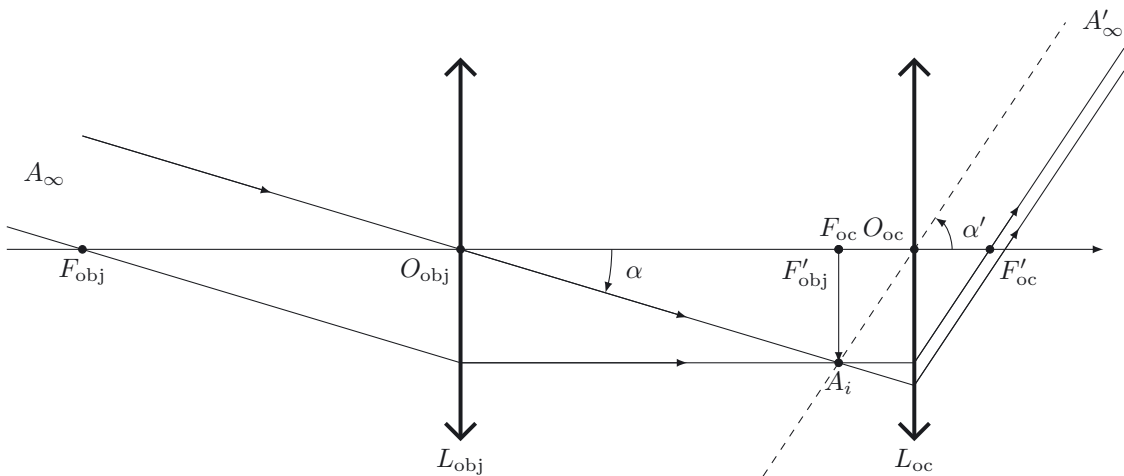


Figure 3.13. Construction géométrique de rayons lumineux au sein d'une lunette astronomique.



□ **Comment caractériser la lunette ?**

Une lunette astronomique est habituellement caractérisée par son grossissement, défini par le rapport de l'angle  $\alpha'$  sous lequel est vu l'image à la sortie de la lunette par l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit l'objet sans la lunette :  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ . Les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont algébriques et définis à partir de l'axe optique. On choisit (arbitrairement) le sens des angles positifs dans le sens trigonométrique. La taille de l'image intermédiaire peut alors s'exprimer en fonction de  $\alpha$  et  $\alpha'$  :

$$\overline{F'_{\text{obj}}A_i} = \alpha f'_{\text{obj}} = -\alpha' f'_{\text{oc}}$$

où  $\overline{F'_{\text{obj}}A_i} < 0$ ,  $\alpha < 0$  et  $\alpha' > 0$ . On obtient ainsi le grossissement de la lunette :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_{\text{obj}}}{f'_{\text{oc}}}$$



▮  $G$  étant négatif, la lunette astronomique n'est pas adaptée à une observation terrestre. Le fait de renverser l'image d'un astre ne présente en revanche aucun inconvénient.

La lunette astronomique permet ainsi d'augmenter le pouvoir séparateur  $\varepsilon$  de l'observateur. À l'œil nu ce pouvoir séparateur, rappelons-le, vaut environ une minute d'arc. Par exemple, pour  $f'_{\text{obj}} = 1,0\text{ m}$  et  $f'_{\text{oc}} = 10\text{ mm}$ , le grossissement est  $G = -100$ . Le pouvoir séparateur devient  $\varepsilon/|G| = 3 \cdot 10^{-6}\text{ rad}$ , soit environ 0,6 secondes d'arc (une seconde d'arc égale 1/3 600 degrés).

## Interro de cours

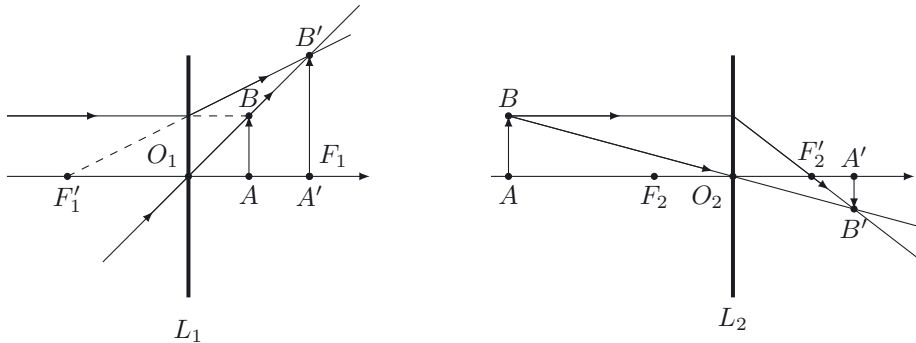
1.  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la célérité de la lumière dans le vide et  $v$  celle dans un milieu transparent. L'indice de l'eau est  $n = 1,33$ . Indiquer si les affirmations suivantes sont exactes.
  - (a) L'indice optique  $n$  d'un milieu transparent est défini par  $n = \frac{c}{v}$ . Celui de l'air vaut exactement un.
  - (b) Une onde lumineuse de fréquence  $f = 4,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  possède dans l'eau une longueur d'onde  $\lambda = 0,48 \mu\text{m}$ .
  - (c) L'indice d'un milieu transparent ne dépend pas de la longueur d'onde de la lumière car les aspects ondulatoires sont négligeables.
  
2. Un rayon lumineux se propageant dans un milieu transparent d'indice  $n_1$  arrive sur la surface de séparation avec un deuxième milieu d'indice  $n_2$  en faisant un angle  $i_1$  avec la normale au dioptre. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?
  - (a) La loi de Descartes sur la réfraction stipule que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence et que  $n_1 \sin(i_2) = n_2 \sin(i_1)$ .
  - (b) La loi de Descartes sur la réfraction se limite à la relation  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ .
  - (c) Si  $n_1 > n_2$ , le rayon réfracté n'existe que si  $i_1$  est inférieur à  $\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .
  - (d) Si  $n_1 < n_2$ , le rayon réfracté n'existe que si  $i_1$  est supérieur à  $\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .
  
3. Indiquer si les affirmations suivantes sont exactes.
  - (a) Les conditions de Gauss consistent à ne considérer que les rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique.
  - (b) Dans les conditions de Gauss, un système optique peut être considéré comme approximativement stigmatique et aplanétique.
  - (c) Si un système optique donne d'un objet ponctuel une tache image de taille inférieure à la taille d'un pixel du détecteur, il pourra être considéré comme approximativement stigmatique.
  
4. Un miroir plan donne d'un objet réel ponctuel  $A$  une image  $A'$ .
  - (a) La position de  $A'$  dépend de l'inclinaison des rayons lumineux issus de  $A$ . Le miroir plan est cependant approximativement stigmatique dans les conditions de Gauss.
  - (b) L'image de  $A'$  est symétrique de  $A$  par rapport au miroir ; c'est une image réelle.
  - (c) Le miroir plan est rigoureusement stigmatique pour des objets de petite dimension.
  
5. Indiquer si les affirmations suivantes sont exactes.
  - (a) Lorsqu'un œil accommode, le cristallin se déforme et sa vergence augmente.
  - (b) La plage d'accommodation d'un œil normal s'étend de 5 cm de l'œil (*punctum proximum*) à l'infini (*punctum remotum*).
  - (c) La limite de résolution angulaire de l'œil est de l'ordre de  $1^\circ$ .

On rappelle les formules de Descartes :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$  ;  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ .

6. Une lentille divergente (L) de centre  $O$  et de distance focale image  $f' = -10$  cm forme l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  virtuel perpendiculaire à l'axe optique de hauteur  $AB = 5,0$  mm et situé à 30 cm de la lentille. Quelle affirmation est-elle correcte ?

- (a) L'image  $A'B'$  est réelle, inversée, située à 15 cm de (L) et de hauteur  $A'B' = 2,5$  mm.
- (b) L'image  $A'B'$  est virtuelle, droite, située à 20 cm de (L) et de hauteur  $A'B' = 2,5$  mm.
- (c) L'image  $A'B'$  est virtuelle, inversée, située à 15 cm de (L) et de hauteur  $A'B' = 5,0$  mm.
- (d) L'image  $A'B'$  est virtuelle, inversée, située à 15 cm de (L) et de hauteur  $A'B' = 2,5$  mm.

Les deux figures ci-dessous montrent la formation de l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  par deux lentilles inconnues  $L_1$  et  $L_2$ .



7. Indiquer si les affirmations suivantes sont exactes. Corriger si nécessaire.

- (a) La lentille  $L_1$  est divergente ; l'objet et son image sont réels.
- (b) La lentille  $L_1$  est convergente ; l'objet est virtuel et son image réelle.
- (c) Le tracé est faux : l'image se trouvant dans le plan focal image de la lentille, l'objet devrait être à l'infini.
- (d)  $F_1$  est le foyer principal objet de la lentille et  $B'$  un foyer secondaire objet.

8. Indiquer si les affirmations suivantes sont exactes. Corriger si nécessaire.

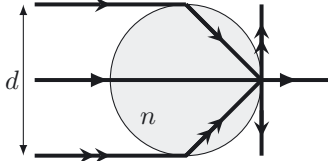
- (a) La lentille  $L_2$  est divergente ; l'objet et son image sont réels.
- (b) La lentille  $L_2$  est convergente ; l'objet est virtuel et son image réelle.
- (c) La distance  $AA'$  est forcément supérieure à  $4f_2'$  où  $f_2'$  est la distance focale de  $L_2$ .
- (d) Si on rapproche l'objet du plan focal objet de  $L_2$ , son image se rapproche du plan focal image de  $L_2$ .

## Exercices

### Exercice 3.1 La baguette magique

➔ Méthode (3.1)

Une baguette cylindrique pleine, de rayon  $R$  et de longueur  $h$ , est constituée d'un matériau inconnu transparent d'indice optique  $n$ . Elle est éclairée perpendiculairement à son axe par un laser dont le faisceau de diamètre  $d = 2R$  est supposé formé de rayons parallèles entre eux.



Nous constatons que le faisceau est fortement élargi à la sortie de la baguette. La figure ci-contre propose le tracé de trois rayons lumineux.

L'indice de l'air est  $n_{\text{air}} = 1,0$ .

1. L'un des rayons n'est pas dévié par la baguette. Justifier.
2. Expliquer le tracé des deux rayons extrêmes en précisant la valeur de l'indice  $n$  de la baguette compatible avec ce tracé.

### Exercice 3.2 Mes halos, quoi...

➔ Méthode (3.1)

En vacances en Suède, Sabrina observe deux magnifiques halos apparaissant comme deux cercles lumineux autour du Soleil, le petit halo à  $22^\circ$  de l'axe Sabrina-Soleil et le grand à  $46^\circ$  du même axe. Ces halos sont causés par la double réfraction de la lumière à travers une mince couche de cristaux de glace d'un nuage de type cirrus.

La figure (a) montre un rayon dévié par un cristal de section hexagonale régulière ( $A_1 = 120^\circ$ ) et la figure (b) envisage la déviation par un cristal dont deux faces adjacentes forment un angle  $A_2 = 90^\circ$ .

Il est possible de montrer que la déviation  $D$  est minimale pour  $i = i'$ . Sabrina observe alors dans cette direction une surintensité lumineuse.

L'indice optique de la glace est  $n = 1,31$ , celui de l'air  $n_{\text{air}} = 1,00$ .

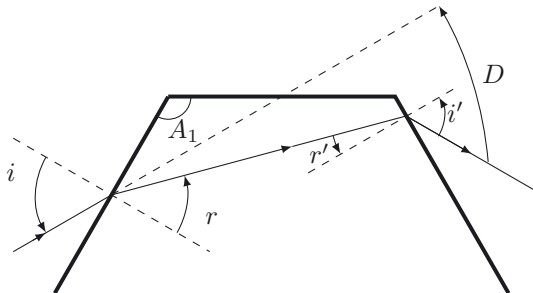


Figure (a)

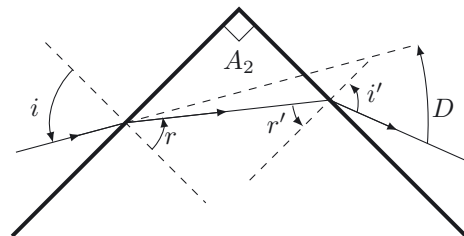


Figure (b)

1. Écrire les relations liant  $i$  et  $r$  d'une part,  $i'$  et  $r'$  d'autre part.
2. Montrer que la déviation  $D$  définie sur les schémas peut s'écrire  $D = i + i' - r - r'$  dans les deux cas.
3. Dessiner le rayon lumineux correspondant au maximum d'intensité dans les deux cas (a) et (b).
4. Calculer les valeurs de  $r$ ,  $i$  et  $D$  pour lesquelles il y a surintensité lumineuse dans les deux cas proposés et conclure.

### Exercice 3.3 Comme un poisson dans l'eau

➔ Méthode (3.2)

Un poisson observe la surface de l'eau depuis la profondeur  $h = 1,0$  m. En se plaçant à la verticale, sa vision du monde extérieur se fait dans un disque lumineux de rayon  $R$ , le reste de la surface ne semblant pas éclairé.

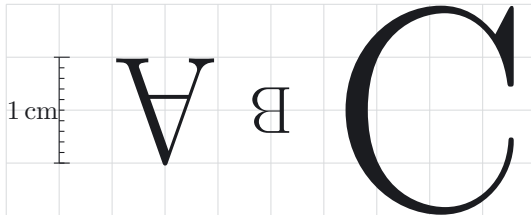
Les indices de l'eau et de l'air sont respectivement  $n_{\text{eau}} = 1,3$  et  $n_{\text{air}} = 1,0$ .

1. Rappeler les lois de Descartes pour la réfraction.
2. Expliquer l'existence du disque lumineux et déterminer son rayon  $R$ .

### Exercice 3.4 L'ABC des lentilles

➔ Méthode (3.3)

Nous réalisons l'image des trois premières lettres de l'alphabet sur un même écran à l'aide de trois lentilles différentes. Les trois lettres, qui peuvent être réelles ou virtuelles, ont la même hauteur  $h = 1,0$  cm et leurs images, nettes sur l'écran, sont représentées sur la figure.



Les trois lentilles  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  sont dans un même plan à  $2,0$  m de l'écran.  $L_1$  et  $L_2$  sont convergentes et  $L_3$  divergente ; leurs distances focales sont respectivement :  $f'_1 = 1,0$  m,  $f'_2 = 1,3$  m et  $f'_3 = -2,0$  m. Chaque lettre se trouve sur l'axe optique de l'une des lentilles.

1. Les images sont-elles réelles ou virtuelles ?
2. Attribuer chaque lettre à sa lentille.
3. Définir et déterminer le grandissement dans chaque cas ainsi que la nature réelle ou virtuelle de la lettre objet.
4. Tracer les rayons lumineux correspondant aux trois situations et vérifier les conclusions obtenues précédemment.

**Exercice 3.5 Les malheurs de Sophie**

➔ Méthode (3.4)

Les lentilles  $L_1$  et  $L_2$  présentées sur la figure ci-dessous sont de nature inconnue. Ayant tout misé sur l'apprentissage des formules de conjugaison, Sophie se trouve bien embarrassée pour caractériser les lentilles mais estime intuitivement que  $L_1$  est vraisemblablement convergente et  $L_2$  divergente.

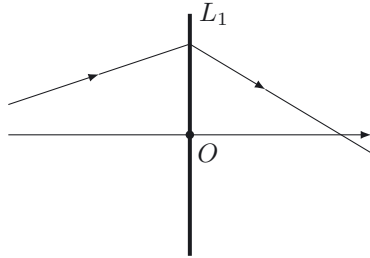


Figure 1

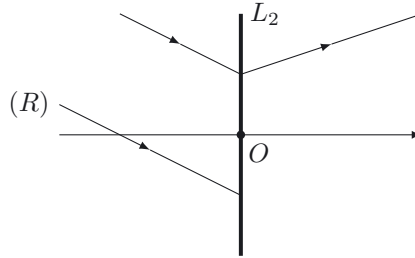


Figure 2

1. Confirmez-vous *a priori* l'intuition de Sophie?
2. Déterminer graphiquement la position des foyers objet  $F_i$  et image  $F'_i$  de chaque lentille  $L_i$ .
3. En déduire la nature des lentilles  $L_1$  et  $L_2$ .
4. Compléter la figure 2 en représentant le rayon émergent provenant du rayon incident (R).

**Exercice 3.6 Être à la hauteur de son image**

➔ Méthode (3.5)

On dispose d'un objet plan de hauteur  $h$  dont on souhaite réaliser une image plane sur un écran à l'aide d'une lentille convergente de distance focale  $f'$ .

1. Montrer par un tracé de rayons que l'image sur l'écran sera inversée.
2. Déterminer les positions de la lentille et de l'écran pour lesquelles l'image et l'objet ont la même taille. On pourra choisir l'une des relations de conjugaison et de grandissement suivantes :
  - Formules de Descartes :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$  ;  $\gamma = \frac{OA'}{OA}$
  - Formules de Newton :  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$  ;  $\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$
 où  $O$  est le centre de la lentille,  $F$  son foyer objet,  $F'$  son foyer image,  $A$  un point objet sur l'axe optique et  $A'$  son image par la lentille.
3. Tracer alors l'image à l'aide de rayons lumineux particuliers.
4. La distance entre l'objet et l'écran est  $D = 40$  cm. Quelle est la distance focale  $f'$  de la lentille utilisée? Cette méthode de détermination de la focale d'une lentille est la méthode de Silbermann.

### Exercice 3.7 Divergente

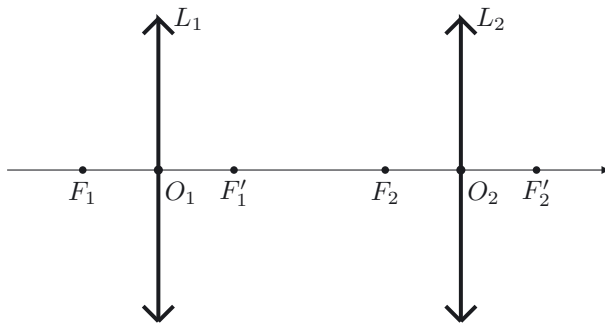
➔ Méthode (3.5)

Nous réalisons l'image par une lentille mince  $L$  de distance focale en valeur absolue  $|f'| = 20$  cm d'un objet plan perpendiculaire à l'axe optique de la lentille. L'objet est réel, de hauteur  $h = 1,0$  cm et situé à  $1,0$  m de  $L$  alors que l'image est virtuelle.

1. Montrer que  $L$  est divergente.
2. Déterminer graphiquement la position de l'image.
3. Vérifier le résultat précédent puis calculer la taille de l'image en utilisant les relations de conjugaison et de grandissement suivantes :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$  ;  $\gamma = \frac{OA'}{OA}$  où  $O$  est le centre de la lentille,  $F'$  son foyer image,  $A$  un point objet sur l'axe optique et  $A'$  son image par la lentille.

### Exercice 3.8 Le choix de Sophie

Sophie étudie le doublet de lentilles convergentes présenté sur la figure ci-dessous.



Les distances focales  $f'_1$  et  $f'_2$  des deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  sont identiques et valent  $4,0$  cm. La distance entre les deux lentilles est  $e = O_1O_2 = 16$  cm.

Les formules de conjugaison suivantes sont rappelées, reliant un point objet  $A$  sur l'axe optique à son image  $A'$ , dans le cas d'une lentille de centre  $O$  et de foyers  $F$  et  $F'$  :

- formule de Descartes :  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$
- formule de Newton :  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$

Cherchant les positions du foyer principal objet  $F$  et du foyer principal image  $F'$  du doublet, Sophie est confrontée au choix de la formule la plus appropriée.

Elle opte pour la formule de Descartes et obtient  $\overline{O_2F'} = 10$  cm et  $\overline{O_1F} = 6,0$  cm.

1. Déterminer graphiquement la position des foyers principaux objet  $F$  et image  $F'$  du doublet. Que penser des résultats obtenus par Sophie ?
2. Nous cherchons à retrouver ces positions par le calcul.
  - a. Commenter le choix de Sophie.
  - b. Déterminer les positions de  $F$  et  $F'$ .
3. Les deux lentilles sont dorénavant accolées. Montrer que leur association est alors équivalente à une lentille mince unique dont la vergence est la somme de leurs vergences.

**Exercice 3.9 À la loupe**

Frédéric est plongé dans la lecture de « La Bretagne sous la pluie, mythe ou réalité ? ». La petite taille de la police de caractères l'amène à approcher son livre jusqu'à la distance minimale de vision distincte  $d_m = 25$  cm. Ses yeux doivent alors accommoder et la fatigue aidant, il envisage d'utiliser une loupe afin de terminer l'ouvrage.

La loupe est assimilée à une lentille mince convergente de distance focale  $f' = 10$  cm.

1. La hauteur d'une lettre est  $h = 2,0$  mm. Déterminer l'angle  $\alpha$  sous lequel Frédéric voit cette lettre à l'œil nu avant d'utiliser la loupe.
2. Frédéric utilise la loupe pour lire de façon confortable, c'est-à-dire sans accommoder. Où doit se situer la loupe par rapport au livre ?
3. On appelle alors  $\alpha'$  l'angle sous lequel est vue une lettre observée à travers la loupe. Déterminer puis calculer le grossissement de la loupe défini par  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ .

**Exercice 3.10 Le bon reflex**

Le pentaprisme en toit qui équipe la plupart des boîtiers photographiques reflex est une adaptation du prisme pentagonal (ou équerre optique) qui permet de dévier le faisceau lumineux de  $90^\circ$  quelque soit son angle d'incidence. La figure (b) montre un rayon pénétrant par la face  $AB$  et ressortant par la face  $AE$ . Le miroir plan incliné à  $45^\circ$  et présenté sur la figure (a) joue *a priori* le même rôle.

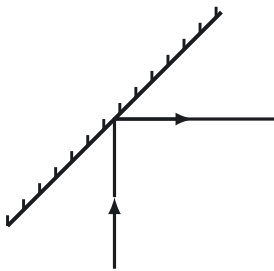


Figure (a)

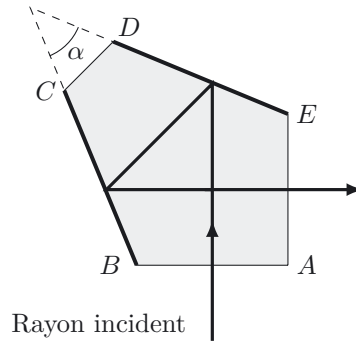


Figure (b)

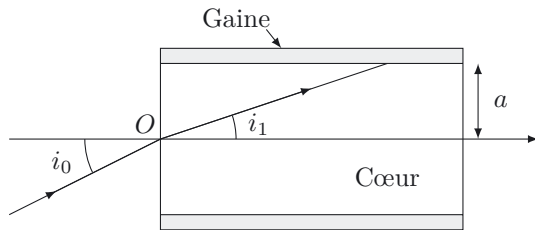
L'indice optique du verre utilisé pour la réalisation du pentaprisme est  $n = 1,58$ .

1. Déterminer l'angle  $\alpha$  pour lequel le pentaprisme dévie bien le rayon lumineux incident de  $90^\circ$ .
2. Expliquer la nécessité de traiter les faces  $ED$  et  $BC$  du pentaprisme afin de les rendre réfléchissantes.
3. Le grand intérêt du pentaprisme réside dans le fait qu'il dévie toujours les rayons de  $90^\circ$ , quelque soit leur angle d'incidence. Montrer que ce n'est pas le cas du miroir plan.



### Exercice 3.11 Le très haut débit pour tous

Le très haut débit donne un accès performant à Internet et permet d'envoyer et de recevoir un grand nombre de données (documents, photos, vidéos, etc.) dans un temps court. La fibre optique constitue aujourd'hui le support de communication le plus performant.



La fibre optique à saut d'indice est constituée de deux types de verre différents, l'un constituant le cœur d'indice  $n_1$  et l'autre la gaine d'indice  $n_2 < n_1$ . La lumière se propage dans le cœur en subissant éventuellement des réflexions totales sur la gaine.

La célérité de la lumière dans le vide est :  
 $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

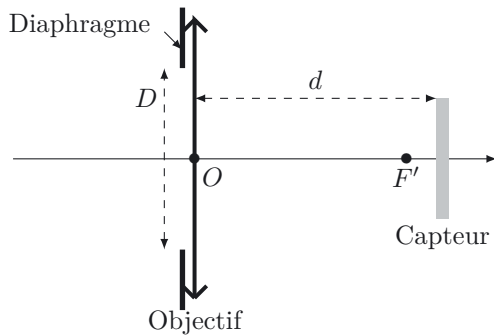
1. Un rayon lumineux se propageant dans l'air pénètre dans le cœur au point  $O$  sous l'angle d'incidence  $i_0$ . Déterminer l'angle de réfraction  $i_1$ . L'indice de l'air est  $n_{\text{air}} = 1,0$ .
2. Déterminer l'angle maximal  $i_{0\text{max}}$  pour lequel ce rayon subira une réflexion totale sur la gaine. On appelle ouverture numérique (O.N.) la quantité  $\sin(i_{0\text{max}})$ . Exprimer l'O.N. en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  puis la calculer avec  $n_1 = 1,48$  et  $n_2 = 1,46$ .
3. On considère une longueur  $L = 10 \text{ km}$  de fibre. Déterminer le temps mis par la lumière pour parcourir  $L$  dans le cas d'un rayon incident d'angle d'incidence  $i_0 = 0$  puis dans celui d'un rayon d'angle d'incidence  $i_{0\text{max}}$ . Montrer que la différence  $\Delta t$  entre ces deux temps de propagation s'écrit  $\Delta t = n_1 \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{L}{c}$ . Calculer  $\Delta t$ .
4. Des impulsions très brèves de durée  $\tau$  sont envoyées en entrée de la fibre avec une période  $T$  ( $\tau \ll T$ ). Le faisceau lumineux convergeant en entrée est conique ; son demi-angle au sommet est  $i_{0\text{max}}$ . Déterminer la valeur minimale de  $T$  pour que les impulsions soient séparées après avoir parcouru la distance  $L$  dans la fibre.
5. 1 bit correspond à la présence ou à l'absence d'une impulsion. Exprimer le débit maximal en bits par seconde de la fibre étudiée. Comparer à une ligne ADSL qui permet le transfert de  $512 \text{ Mo} \cdot \text{s}^{-1}$  (1 octet = 8 bits). En pratique, les fibres utilisées sont monomodes avec un petit diamètre de cœur de l'ordre d'une dizaine de microns. La lumière se propage alors sans réflexions et la dispersion devient négligeable, permettant l'obtention de débits beaucoup plus importants.

### Exercice 3.12 Mon beau miroir

Josiane dispose pour se remaquiller d'un petit miroir plan d'une dimension de l'ordre de 5 cm. La longueur de son visage est environ 20 cm. Pourra-t-elle avoir une vue d'ensemble de son œuvre ?

**Exercice 3.13 Flash danse****Document 1 : modélisation et réglages de l'appareil photographique**

Un appareil photographique est modélisé simplement de la façon suivante :



- l'objectif, généralement constitué de plusieurs lentilles, est décrit comme une lentille convergente de distance focale  $f'$  ;
- un diaphragme circulaire de diamètre  $D$  qui limite l'étendue du faisceau lumineux ; on définit le nombre d'ouverture  $N$  par la relation  $N = \frac{f'}{D}$  ;
- un capteur photosensible constitué d'une matrice de pixels.

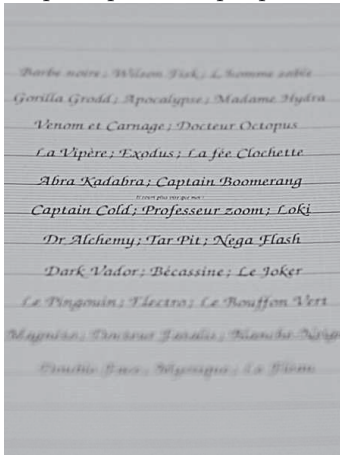
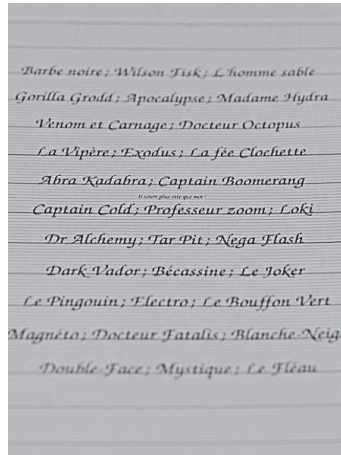
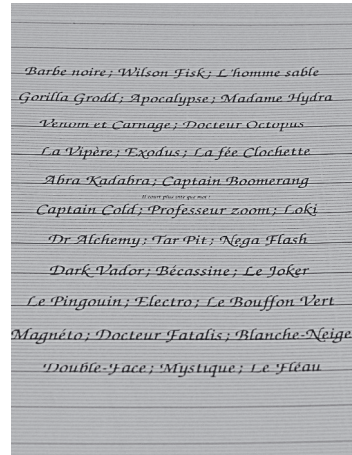
Avant la prise de vue, le photographe doit se préoccuper de plusieurs réglages importants.

- La mise au point est réalisée sur une partie du sujet que le photographe souhaite mettre en valeur. Cette mise au point, manuelle ou automatique (autofocus), consiste en un déplacement des lentilles de l'objectif afin que l'image de la partie sélectionnée soit nette. Il existe ainsi un plan objet de netteté optimale et une zone, en amont et en aval de ce plan, dans laquelle les objets donnent une image d'une netteté acceptable. L'étendue de cette zone dans laquelle l'image n'est pas floue est appelée la profondeur de champ.
- L'ouverture est le réglage du diamètre utile de l'objectif à l'aide du diaphragme, généralement exprimée sous la forme  $f'/N$ . Ce réglage permet de contrôler la quantité de lumière qui atteint le capteur et la profondeur de champ.
- Le temps de pose est la durée pendant laquelle le capteur est exposé à la lumière. Il contrôle, avec le diaphragme, la quantité de lumière qui atteint le capteur. Lorsque cette quantité de lumière est appropriée, on dit que la photo est bien exposée (ni trop claire, ni trop sombre).
- Le choix de la focale  $f'$  de l'objectif est important car il définit l'angle de vue, c'est-à-dire la quantité de la scène du sujet pouvant être prise par l'objectif. Les objectifs de type « grand angle » (objectifs de petite focale) sont adaptés pour photographier un paysage alors que des « téléobjectifs » (objectifs de grande focale) sont particulièrement appréciés en photographie sportive ou animalière pour cadrer le sujet de façon plus « serrée ».
- La sensibilité ISO est la mesure de la sensibilité à la lumière du capteur de l'appareil. Un nombre ISO élevé correspond à une sensibilité élevée : il faut alors peu de lumière pour réaliser l'image. Augmenter la sensibilité du capteur facilite la prise de vue en condition de faible luminosité mais s'accompagne d'un bruit électronique qui dégrade l'image.

## Document 2 : Flash info

Photographe et amie de Flash, Iris teste avec son héros ses deux dernières acquisitions : un objectif à focale fixe de 35 mm ouvrant à  $f'/1.4$  et un objectif à focale variable de 28-140 mm. Pour les trois premières photos, Iris photographie une feuille inclinée à  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique sur laquelle Flash a inscrit la liste de ses pires ennemis. Iris met au point sur Professeur Zoom et fait varier l'ouverture de son objectif afin d'apprécier l'évolution de la profondeur de champ. Les autres réglages sont réalisés automatiquement par l'appareil en mode « priorité à l'ouverture ». Pour les trois photos suivantes, Iris utilise son deuxième objectif, faisant varier la focale de ce dernier à ouverture fixée. Son appareil est installé sur un trépied situé à une distance d'environ 4 m de Flash.

L'appareil photographique d'Iris est doté d'un capteur CMOS  $23,5 \times 15,6 \text{ mm}^2$  à 24,1 millions de pixels. Les valeurs de la focale  $f'$ , du temps de pose  $\tau$  et de l'ouverture  $D = f'/N$  sont indiquées pour chaque photo.

(1) : 35 mm, 1/250 s,  $f'/1.4$ (2) : 35 mm, 1/60 s,  $f'/3.2$ (3) : 35 mm, 1/60 s,  $f'/7.1$ (4) : 35 mm, 1/125 s,  $f'/7.1$ (5) : 70 mm, 1/125 s,  $f'/7.1$ (6) : 140 mm, 1/125 s,  $f'/7.1$

**Document 3 : Flash danse**

Prendre un cliché de Flash est un défi pour Iris qui doit choisir un temps de pose très faible pour éviter que sa photographie ne soit floue. Les prises de vue suivantes ont été réalisées avec la focale fixe de 35 mm, l'appareil photographique étant monté sur un trépied situé à environ 4 m de Flash. Iris utilise le mode « priorité au temps de pose », les autres paramètres étant réglés automatiquement par l'appareil.

(7) : 35 mm, 1/4000 s,  $f'/1.6$ (8) : 35 mm, 1/5 s,  $f'/16$ (9) : 35 mm, 1/2 s,  $f'/16$ 

- Les photos (1) à (3) mettent en évidence le rôle de l'ouverture du diaphragme sur la profondeur de champ, c'est-à-dire la zone dans laquelle doit se trouver l'objet pour obtenir une image nette. La ligne correspondant au Capitaine Zoom se trouve à environ 50 cm de l'objectif, deux lignes successives sont distantes de 1,0 cm sur la feuille et deux interlignes successives de 1 mm.
  - Comment évolue la profondeur de champ avec l'ouverture du diaphragme ?
  - Estimer la profondeur de champ pour les trois ouvertures. Un site internet indique que pour une mise au point sur un objet à 50 cm de l'objectif, les profondeurs de champ sont respectivement de 1 cm, 3 cm et 7 cm pour les ouvertures  $f'/1.4$ ,  $f'/3.2$  et  $f'/7.1$ . Est-ce cohérent ?
  - Quels intérêts voyez-vous pour un photographe à l'utilisation d'une grande ouverture ?
- Les photos (4) à (6) mettent en évidence le rôle de la focale de l'objectif. Comment évolue l'angle de vue (c'est-à-dire la quantité de la scène du sujet pouvant être prise par l'objectif) lorsque la focale de l'objectif augmente ?
- Les photos (7) à (9) mettent en évidence le rôle de la durée d'exposition.
  - Expliquer pourquoi le capteur est quasiment situé dans le plan focal image de l'objectif.
  - Donner une évaluation de la taille  $a$  d'un pixel du capteur d'Iris.
  - On considère un point  $A$  de Flash situé sur l'axe de l'appareil et dont l'image nette est  $A'$ .  $A$  se déplace dans un plan perpendiculaire à l'axe avec une vitesse  $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Évaluer

le temps de pose maximal  $\tau_{\max}$  pour que l'image  $A'$  reste sur un pixel pendant la prise de vue. Commenter.

- d. Commenter la valeur de l'ouverture imposée par l'appareil sur les trois photos. Quel défaut supplémentaire apparaît sur la photo (9)? Quel intérêt peut-il y avoir pour un photographe à utiliser un long temps de pause?

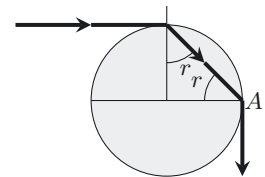
## Corrections

### Interro de cours

1. Réponse (a) : fausse.  $n$  est bien égal à  $\frac{c}{v}$  mais l'indice de l'air vaut approximativement un. Réponse (b) : vraie. Réponse (c) : fausse, l'indice d'un verre dépend de la longueur d'onde, le verre est dit dispersif.
2. Réponse (a) : fausse,  $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$ . Réponse (b) : fausse, il faut ajouter que le rayon réfracté appartient au plan d'incidence. Réponse (c) : vraie. Réponse (d) : fausse, il n'y a pas d'angle de réfraction limite dans ce cas.
3. Réponse (a) : fausse, la proposition est incomplète, les rayons doivent aussi être proches de l'axe optique. Réponse (b) : vraie. Réponse (c) : vraie.
4. Réponse (a) : fausse, le miroir plan est rigoureusement stigmatique. Réponse (b) : fausse, l'image de  $A$  est virtuelle. Réponse (c) : fausse, il n'y a pas de condition sur la taille de l'objet.
5. Réponse (a) : vraie. Réponse (b) : fausse, le punctum proximum est généralement à environ 25 cm de l'œil. Réponse (c) : fausse, la limite de résolution angulaire est de l'ordre de  $1' = \frac{1}{60}^\circ$  et non  $1^\circ$ .
6. Réponse (d), par application des formules de Descartes.
7. Réponse (a) : fausse, l'objet est virtuel. Réponse (b) : fausse, la lentille est divergente. Réponse (c) : fausse, l'image se trouve dans le plan focal objet de la lentille. Réponse (d) : vrai.
8. Réponse (a) : fausse, la lentille est convergente. Réponse (b) : fausse, l'objet est réel. Réponse (c) : vraie. Réponse (d) : fausse, l'image du foyer objet  $F_2$  est un point à l'infini !

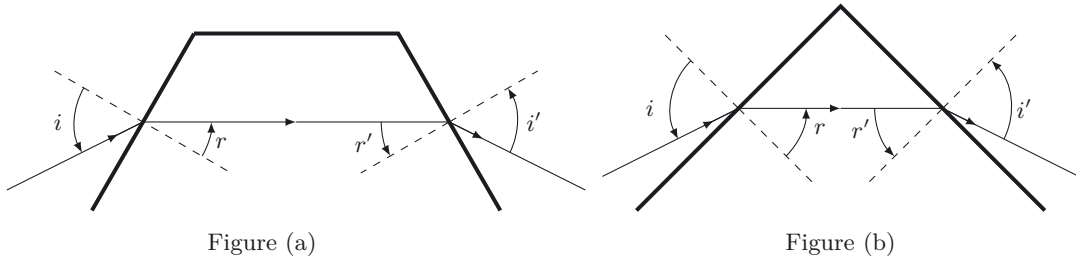
### Exercice 3.1

1. Le rayon passant par l'axe de symétrie de la baguette arrive sur le dioptré (air/milieu) en incidence normale. D'après les lois de Descartes, ce rayon pénètre dans la baguette sans être dévié et arrive donc aussi en incidence normale sur l'interface (milieu/air) : il émerge en restant dans la même direction.
2. Les rayons extrêmes arrivent sur l'interface (air/milieu) avec un angle d'incidence  $i \approx \pi/2$ . D'après la loi de Descartes relative à la réfraction, ils se réfractent en faisant un angle  $r$  avec la normale (axe vertical) donné par  $\sin i = 1 = n \sin r$ . On remarque que  $r = 45^\circ$ , donc  $n = 1,4$ . Ces deux rayons arrivent ensuite en  $A$  en faisant l'angle d'incidence  $r$  donc d'après les lois de Descartes se réfractent dans l'air en faisant l'angle de réfraction  $i'$  tel que  $\sin i' = n \sin r$ . On trouve donc  $i' = 90^\circ$ , ce qui correspond au schéma représenté.



### Exercice 3.2

1. Nous pouvons, d'après les lois de Descartes, écrire que  $n_{\text{air}} \sin i = n \sin r$ , et  $n \sin r' = n_{\text{air}} \sin i'$ .
2. La pénétration du rayon incident dans le milieu d'indice  $n$  donne lieu à une première déviation  $D' = i - r$ . La sortie du rayon donne de nouveau naissance à une seconde déviation  $D'' = i' - r'$ . La déviation totale est la somme de ces deux déviations et le calcul ne dépend pas de la forme du cristal. On a donc  $D = i - r + i' - r'$ .
3. Lorsque  $i = i'$ , alors  $r = r'$  : le système présente donc une symétrie. On peut alors représenter ces rayons comme ci-dessous.

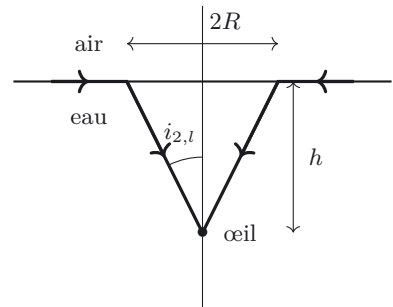


4. Dans le cas de la figure (a), on obtient  $r = r' = 30^\circ$ , soit  $i = i' = 41^\circ$  et  $D = 22^\circ$ . Dans le cas de la figure (b), on obtient  $r = r' = 45^\circ$ , soit  $i = i' = 68^\circ$  et  $D = 46^\circ$ . Ceci correspond bien aux deux halos observés par Sabrina : les deux types de géométrie sont donc présents dans le cristal.

**Exercice 3.3**

- Lois de Descartes pour la réfraction : le rayon réfracté appartient au plan d'incidence, plan formé par la normale au dioptre et le rayon incident ; si on note  $i_1$  l'angle d'incidence (angle entre la normale au dioptre et le rayon incident dans le milieu (1) d'indice  $n_1$ ) et  $i_2$  l'angle de réfraction (angle entre la normale au dioptre et le rayon réfracté dans le milieu (2) d'indice  $n_2$ ), alors  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

- Ici, le milieu (1) est l'air d'indice  $n_{\text{air}} = 1$ , et le milieu (2) l'eau d'indice  $n_{\text{eau}} > 1$ . Considérons un rayon arrivant à l'œil du poisson regardant verticalement. D'après les lois de Descartes, son angle d'incidence  $i_1$  est supérieur à l'angle de réfraction  $i_2$  : on aura donc un phénomène de réfraction limite, les rayons arrivant à l'œil du poisson feront avec la verticale des angles  $i_2 < i_{2,l} = \arcsin(n_{\text{air}}/n_{\text{eau}}) = 50^\circ$ ,  $i_{2,l}$  correspondant à l'angle d'incidence maximum  $i_1 = \pi/2$ . Toute la lumière captée par l'œil du poisson sera donc comprise à l'intérieur d'un cône d'angle au sommet  $i_{2,l}$  (voir figure ci-contre) et la surface de l'eau ne sera éclairée qu'à l'intérieur de ce cône. On aura donc  $R = h \tan i_{2,l} = 1,2\text{m}$ .



**Exercice 3.4**

- Ces images étant visibles sur l'écran, ce sont des images réelles.
- Les images de A et du B sont renversées donc cela correspond aux deux lentilles convergentes  $L_1$  et  $L_2$ . La lettre C non renversée correspondra à la lentille divergente  $L_3$ .

Nous notons que pour la lettre A, le grandissement est  $\gamma = -1$ , ce qui correspond à une lentille située à la même distance de l'écran que de l'image, c'est-à-dire à 2,0 m de l'objet et ce qui correspond aussi à une distance objet-écran égale à 4,0 m mais aussi à  $4f'$ . Pour la lettre A, la distance focale  $f'$  est  $f' = 1,0\text{m}$  et l'image de la lettre A est formée à partir de la lentille  $L_1$ . Par conséquent, l'image de la lettre B est réalisée avec la lentille  $L_2$ .

- Considérons un objet  $\overline{AB}$  placé perpendiculairement à l'axe optique, dont l'image par un système optique centré est  $\overline{A'B'}$ , supposé également perpendiculaire à l'axe (aplanétisme approché). A et A' sont sur l'axe. Le grandissement est alors par définition  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ . Pour une lentille de centre O, on

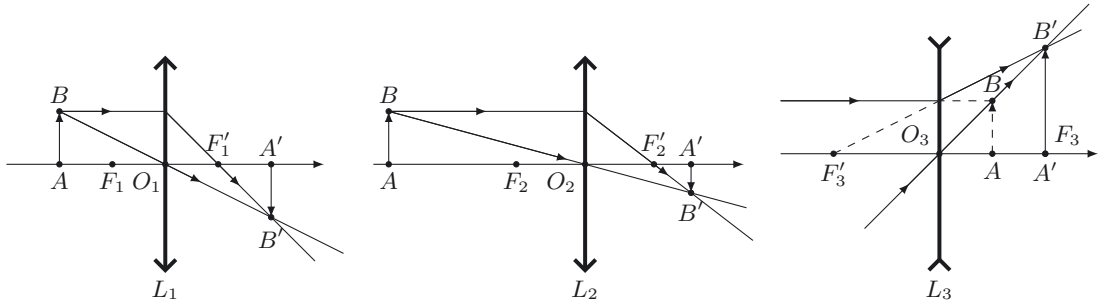
montre que  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ .

Pour la lettre A, le grandissement est  $\gamma_1 = -1,0$ , et la lettre objet est réelle, car  $\overline{O_1A'} = -2,0\text{m}$ .

Pour la lettre B, le grandissement est  $\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A}} \approx -0,5$  avec  $\overline{O_2A'} = 2,0\text{ m}$ . On obtient donc  $\overline{O_2A} \approx -4,0\text{ m}$  : l'objet est réel.

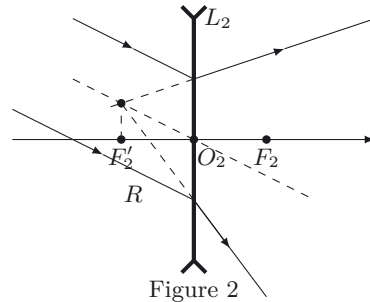
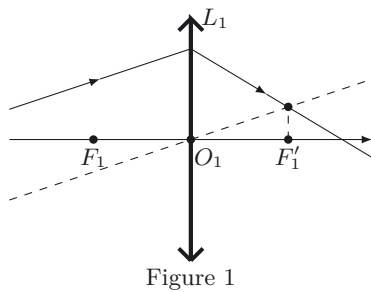
Pour la lettre C, le grandissement est  $\gamma_3 = +2,0 = \frac{\overline{O_3A'}}{\overline{O_3A}}$  avec  $\overline{O_3A'} = 2,0\text{ m}$ . On obtient donc  $\overline{O_3A} = 1,0\text{ m}$  : l'objet est virtuel.

4. Les schémas sont représentés ci-dessous.



### Exercice 3.5

1. Oui, nous confirmons l'intuition de Sophie : sur la figure 1, un rayon qui a tendance à s'éloigner de l'axe est dévié vers ce dernier par la lentille, ce qui correspond bien au comportement d'une lentille convergente. Pour la seconde lentille, un rayon qui s'approche de l'axe avant la lentille en est écarté par  $L_2$ , ce qui est typique du comportement d'une lentille divergente.

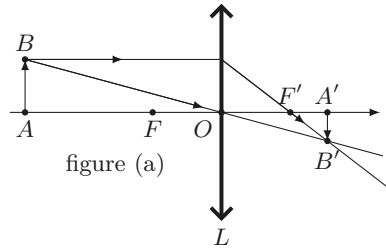


2. On détermine la position des foyers en traçant le rayon parallèle au rayon incident passant par le centre, qui n'est pas dévié. Les deux rayons ou leur prolongement se coupent dans le plan focal image de la lentille considérée en un point appelé foyer secondaire. Nous en déduisons alors les positions sur l'axe du foyer principal image. Le foyer objet est symétrique du foyer image par rapport à la lentille.
3.  $L_1$  est convergente et  $L_2$  divergente.
4. Les deux rayons parallèles émergent de la lentille en semblant provenir du foyer secondaire image d'où le tracé du rayon R sur la figure 2.



**Exercice 3.6**

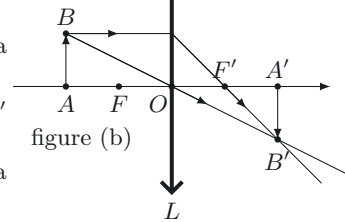
1. L'image est réelle, l'objet aussi, celui-ci est donc placé avant le foyer objet de cette lentille. Nous traçons alors le rayon partant de  $B$  passant par le centre qui n'est pas dévié et le rayon partant de  $B$  parallèle à l'axe optique émergent au foyer image. L'image  $B'$  se forme à l'intersection ces deux rayons, et nous constatons qu'elle est bien inversée (cf. figure (a) ci-contre).



2. Nous choisissons la formule du grandissement de Descartes :

$$\gamma = -1 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \rightarrow \overline{OA'} = -\overline{OA}. \text{ En réinjectant ensuite dans la formule de conjugaison de Descartes, nous obtenons : } \overline{OA'} = -\overline{OA} = 2\overline{OF'}. \text{ L'objet doit donc être situé à la distance } 2f' \text{ de la lentille, elle-même située à la distance } 2f' \text{ de l'écran.}$$

3. Nous reprenons pour le tracé les mêmes arguments que dans la première question ; le tracé est représenté ci-contre, figure (b).

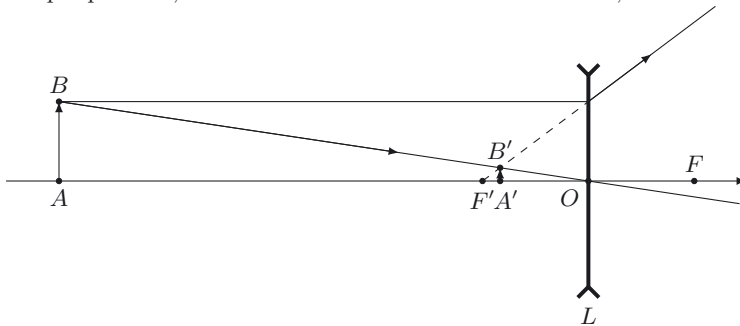


4. D'après ce qui précède,  $D = 40 \text{ cm} = 4f'$ , soit  $f' = 10 \text{ cm}$ .

**Exercice 3.7**

1. Une lentille convergente éclairée par un objet réel situé au delà de son foyer objet ( $1,0 \text{ m} > f'$ ) donne nécessairement une image réelle. La lentille  $L$  est donc divergente.
2. Nous traçons le rayon passant par  $B$  et parallèle à l'axe : il émerge de  $L$  en semble provenir de  $F'$ . De même nous traçons le rayon passant par le centre et non dévié : l'image  $A'B'$  se trouve à l'intersection de ces deux rayons (cf. figure ci-après).

Graphiquement, nous notons  $\overline{OA'} = -17 \text{ cm}$  et  $\overline{A'B'} = 0,17 \text{ cm}$ .



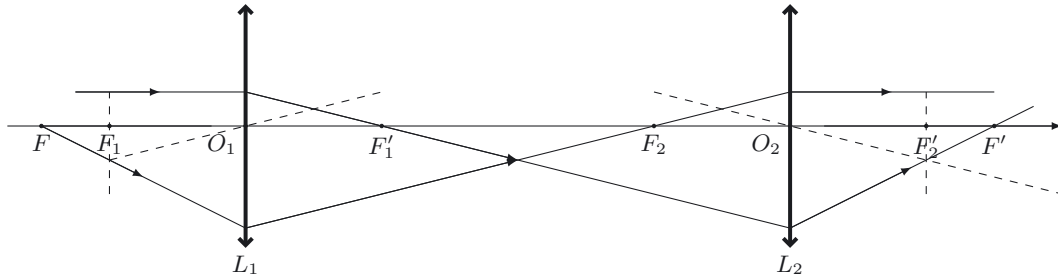
3. On applique les formules données :  $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OF'}}$ , soit  $\overline{OA'} = -17 \text{ cm}$ , ce qui corrobore bien les mesures effectuées sur la figure ci-dessus.

Pour le grandissement, le calcul amène à  $\gamma = 0,17$  et donc à une taille pour l'image de  $0,17 \text{ cm}$ , correspondant à celle relevée sur le graphe.

**Exercice 3.8**

1. Nous avons tracé ci-dessous les rayons permettant la détermination des deux foyers objet et image du doublet. Pour trouver la position de  $F'$  : un rayon provenant de l'infini va converger en  $F'_1$  et pour tracer son prolongement après  $L_2$ , nous traçons en pointillés le rayon passant par  $O_2$  qui lui est

parallèle. Les deux rayons parallèles avant  $L_2$  se croiseront en un point du plan focal image de  $L_2$ .  $F'$  sera l'intersection du rayon venant de l'infini avec l'axe optique. Le même travail mais « dans l'autre sens » pour trouver  $F$ . Nous obtenons ainsi  $\overline{O_1F} = -6,0 \text{ cm}$  et  $\overline{O_2F'} = 6,0 \text{ cm}$ . Sophie a donc fait quelques erreurs...



2. Nous cherchons à retrouver ces positions par le calcul.

a. Sophie a choisi la formule de Descartes, elle sait en effet que  $F'$  est l'image de  $F_1'$  par  $L_2$ .

Connaissant  $\overline{O_2F_1'}$ , la formule de Descartes l'amène à  $\overline{O_2F'}$ . Nous pensons cependant qu'ici la formule de Newton, plus simple dans sa manipulation, aurait été plus efficace, car nous connaissons aussi  $\overline{F_2F_1'}$  : on obtient donc assez directement  $\overline{F_2F'} = -\frac{f_2'^2}{F_2F_1'}$ .

b. L'utilisation de la méthode préconisée ci-dessus conduit à  $\overline{F_2F'} = 2,0 \text{ cm}$ .

Le schéma ci-dessus nous montre que l'image de  $F$  par  $L_1$  est  $F_2$ . En utilisant la loi de Newton, il vient :  $\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{F_1'F_2} = -2,0 \text{ cm}$ .

3. Considérons un objet  $A$ . Son image par  $L_1$  est  $A_1$ , et l'image de  $A_1$  par  $L_2$  est  $A'$ . On utilise la formule de Descartes, en confondant les deux centres des lentilles en un centre unique  $O$  :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

En faisant la somme de ces deux équations, on obtient :  $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} = V_1 + V_2 = V$  : on voit donc que la formule de conjugaison alors obtenue est celle d'une lentille unique de centre  $O$  et de vergence  $V = V_1 + V_2$ .

### Exercice 3.9

1. On considère la figure (a) ci-contre.

Nous voyons que  $\tan(\alpha) = \frac{h}{d_m}$ , soit  $\alpha = 0,45^\circ$ .

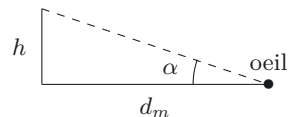


Figure (a)

2. Si Frédéric n'accomode pas, l'image du livre fournie par la loupe est « à l'infini » : le livre doit donc se trouver dans le plan focal objet de la loupe, c'est à dire à 10 cm de cette dernière.

3. On considère la figure (b) ci-contre.

Nous voyons que  $\tan(\alpha') = \frac{h}{f'}$  soit  $\alpha' = 1,1^\circ$ . Les angles étant petits, nous pouvons considérer que  $\tan(\alpha) \approx \alpha$  et idem pour  $\alpha'$ . On obtiendra donc dans la limite des petits angles :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{d_m}{f'} = 2,5.$$

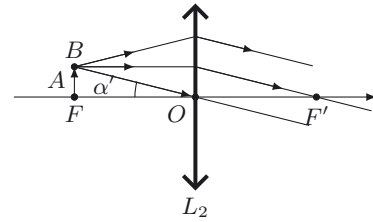


Figure (b)

**Exercice 3.10**

1. On note  $\beta$  l'angle entre  $DE$  et l'horizontale. Cet angle se retrouve entre le rayon incident vertical et la normale à  $DE$ . Le rayon incident se réfléchit donc sur  $DE$  en suivant les lois de Descartes et l'angle entre le rayon réfléchi et le rayon incident est  $2\beta$ . Le même raisonnement peut être mené pour la face  $CB$  (cf figure ci-contre). On peut donc affirmer que  $2\beta + 2\beta + \pi/2 = \pi$ , soit  $\beta = \pi/8$ . Or  $2\beta + \alpha = \pi/2$ , soit  $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ .
2. Le coefficient de réflexion énergétique à l'interface air/verre est très mauvais. Si les faces ne sont pas traitées, la majorité de l'énergie incidente est emportée par le rayon transmis et non réfléchi. Notons que  $\beta$  est trop faible ici pour qu'il y ait réflexion totale.
3. Si on appelle  $i$  l'angle d'incidence sur un miroir plan, le rayon réfléchi suit les lois de Descartes et est donc dévié de  $2i$  par rapport au rayon incident. Il n'y aura donc que pour  $i = 45^\circ$  que la déviation sera de  $90^\circ$ .

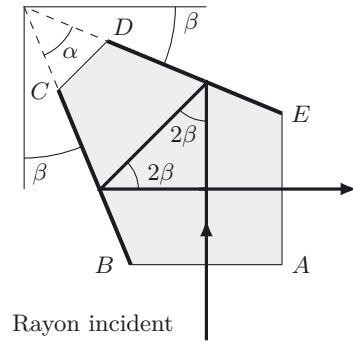


Figure (b)

**Exercice 3.11**

1. On applique les lois de Descartes relatives à la réfraction :  $n_{\text{air}} \sin(i_0) = n_1 \sin(i_1)$ . On obtient  $i_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n_1} \sin i_0\right)$ .
2. Le rayon pénétrant dans le cœur arrive sur la gaine avec l'angle d'incidence  $i'_1 = \frac{\pi}{2} - i_1$ . Pour qu'il y ait réflexion totale sur la gaine, il faut que  $\sin(i'_1) = \cos(i_1) > \frac{n_2}{n_1}$ . Il faut donc que :  $|i_1| < \arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ , soit  $|i_0| < i_{0\text{max}} = \arcsin\left(n_1 \sin\left(\arccos\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)\right) = \arcsin\left(n_1 \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}\right)$  (on a utilisé  $\sin(i) = \sqrt{1 - \cos^2(i)}$ ).  
On obtient ainsi  $O.N. = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,242$ .

3. La vitesse de propagation dans le cœur est :  
 $v = \frac{c}{n_1}$ . Le rayon incident d'incidence  $i_0 = 0$  se propage selon l'axe de la fibre, il parcourt donc simplement la longueur  $L$ .

On aura ainsi  $t_1 = \frac{L}{v} = \frac{n_1 L}{c} = 49 \mu\text{s}$ .

On écrit également  $\tan(i_{1\max}) = \frac{\sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}}{\frac{n_2}{n_1}} = \frac{a}{L'}$

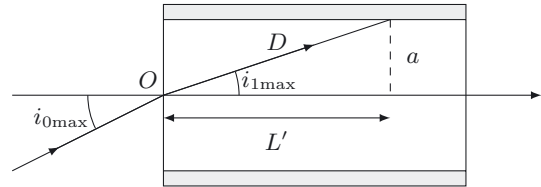
soit  $L' = \frac{n_2 a}{O.N.}$ .

Il y aura donc  $N = \frac{L}{L'}$  fois la distance  $D = \frac{a}{\sin(i_{1\max})} = \frac{n_1 a}{O.N.}$  parcourue par le rayon limite dans la

fibre. Le temps de parcours  $t_2$  sera ainsi :  $t_2 = n_1 \frac{ND}{c} = \frac{n_1^2 L}{n_2 c} = 50 \mu\text{s}$ . On obtient :

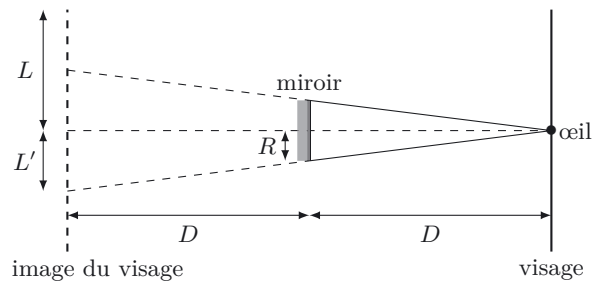
$$\Delta t = n_1 \left( \frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{L}{c} = 0,68 \mu\text{s}.$$

4. La propagation dans la fibre entraîne, d'après la question précédente, un élargissement temporel du signal de  $\Delta t$ . Pour que les signaux restent séparés en sortie, il faut que  $\tau + \Delta t \approx \Delta t \leq T$ .
5. Le débit est donc de  $\frac{1}{\Delta t}$  bits par seconde, soit  $1,5 \cdot 10^6 \text{ bits} \cdot \text{s}^{-1} = 0,18 \text{ Mo} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ceci est bien en dessous du débit de la ligne ADSL !



### Exercice 3.12

Nous allons commencer par supposer que les yeux de Josiane sont approximativement au centre de sa figure. La demi-longueur de son visage est donc  $L = 10 \text{ cm}$ , le rayon du miroir  $R = 2,5 \text{ cm}$ . On note  $D$  la distance du visage au miroir. L'image du visage de Josiane par le miroir est virtuelle et est située à  $2D$  du visage. Sur la figure ci-contre, nous constatons que la partie visible du visage de Josiane sera donnée par  $2L' = 4R = 10 \text{ cm}$ , et ceci quel que soit  $D$  : Josiane ne pourra donc pas admirer la totalité de son œuvre, il lui faudrait pour cela un miroir deux fois plus large.



### Exercice 3.13

1. a. La profondeur de champ augmente lorsque le nombre d'ouverture  $N$  croît donc lorsque l'ouverture  $D$  diminue.
- b. Pour la photo (1), on peut estimer que l'image est nette de Loki à la fée Clochette, soit sur environ  $L_1 = 2 \text{ cm}$  de feuille. Compte tenu de l'inclinaison de cette dernière, la profondeur de champ sera  $d_1 = L_1 \cos(45) = 1,4 \text{ cm}$ . Pour la photo (2), on peut estimer la zone de netteté de Joker à Docteur Octopus, soit  $L_2 = 5 \text{ cm}$ , d'où une profondeur de champ de  $d_2 = 3,5 \text{ cm}$ . Pour la photo (3), la zone de netteté s'étend sur environ  $L_3 = 12 \text{ cm}$ , ce qui correspond à une profondeur de champ  $d_3 = 8,5 \text{ cm}$ .

Les indications données par le site sont en bon accord avec celle trouvées ci-dessus, bien que systématiquement plus faibles. L'appréciation de la netteté étant assez subjective, les critères de netteté du site internet sont certainement plus contraignants que ceux mis en œuvre ci-dessus.

- c. L'utilisation d'une grande ouverture est adaptée à des photos prises avec peu de lumière ambiante. On peut aussi vouloir volontairement réduire la profondeur de champ pour mettre en relief un sujet en floutant son environnement.
2. Lorsque la focale augmente, l'angle de vue, donné approximativement par  $\frac{D}{f'}$ , diminue.
3. a. Flash est situé à 4 m de l'appareil photo et cette distance est très grande devant la distance focale  $f' = 35$  mm : du point de vue de l'appareil photographique, tout se passe comme si Flash était à l'infini. Son image se formera donc quasiment dans le plan focal image de l'objectif.
- b. On note  $a_1 = 23,5$  mm et  $a_2 = 15,6$  mm, et  $n = 24,1 \cdot 10^6$ . On peut estimer la taille d'un pixel par  $a \approx \sqrt{\frac{a_1 a_2}{n}} = 3,9 \mu\text{m}$ .
- c. On note  $l$  la distance de Flash à l'objectif. Le grandissement par cette lentille est  $\gamma = -\frac{f'}{l}$ . Si on note  $x(t) = v_0 t$  la position à l'instant  $t$  de  $A$  perpendiculairement à l'axe, la position de son image  $A'$  à  $t$  est  $x'(t) = -\gamma v_0 t$ . Pour que  $|x'(t)|$  reste inférieur à  $a$ , il faut que  $t < \frac{la}{v_0 f'} = \tau_{\text{max}} = 0,45$  ms. On remarque que ce temps augmente si  $f'$  diminue et diminue avec la rapidité des mouvements. On peut noter aussi que seule la photo (7) respecte ce critère, les photos (8) et (9) ne le respectent pas et sont donc floues.
- d. Comme le temps de pose a été augmenté dans les photos (8) et (9), l'appareil a automatiquement diminué  $D$  pour diminuer l'exposition.  $D$  est donc dix fois plus faible sur les photos (8) et (9). La dernière photo est toutefois clairement surexposée. Un grand temps de pose est utilisé pour les photos nocturnes (mais il faut que les sujets restent immobiles), pour les prises de photos de sport où on veut rendre l'impression de vitesse mais aussi en photographie nocturne urbaine, avec la mise en relief des trafics routiers.



# Introduction au monde quantique

## L'essentiel du cours

### Contexte

L'électron : onde ou particule ?

À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la mécanique newtonienne et la théorie de l'électromagnétisme permettaient d'expliquer un très grand nombre de phénomènes physiques, et pourtant, certaines expériences restaient incomprises, notamment l'effet photoélectrique.

## ■ 1 Dualité onde-particule pour la lumière

### Approche documentaire : effet photoélectrique

L'effet photoélectrique est l'émission d'électrons par un métal exposé à la lumière.

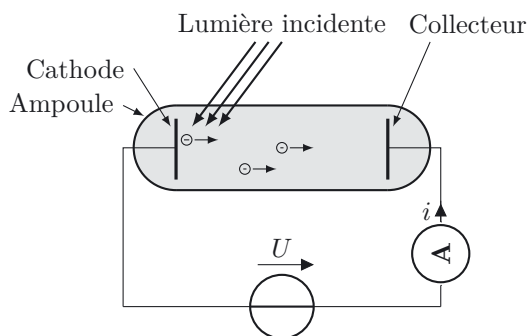


Figure 4.1. Dispositif expérimental

Les expériences menées par Lenard montrent notamment qu'aucun courant électrique n'est détecté si la fréquence  $\nu$  de la lumière incidente est inférieure à une fréquence seuil  $\nu_s$  dépendant du métal constituant la cathode et cela quelle que soit l'intensité de la lumière incidente. Si la fréquence est supérieure à  $\nu_s$ , au contraire, un courant électrique apparaît, qui peut être annulé par l'application d'une tension  $U$  négative et inférieure à une valeur appelée tension d'arrêt  $U_a < 0$ .

La figure 4.1 schématise le dispositif expérimental utilisé par Lenard en 1902, comprenant une ampoule sous un vide poussé, une cathode (plaque métallique) éclairée par une lumière incidente et un collecteur.

Une différence de potentiel  $U$  est imposée entre la plaque métallique (au potentiel  $V_p$ ) et le collecteur (au potentiel  $V_c$ ), telle que  $U = V_c - V_p$ . Un microampèremètre permet de mesurer le courant électrique  $i$  dû aux électrons éjectés par la plaque métallique éclairée et qui parviennent jusqu'au collecteur.

**Approche documentaire : interprétation de l'effet photoélectrique**

La conception classique de la lumière en tant qu'onde électromagnétique laissait présager l'existence d'un seuil d'intensité lumineuse pour extraire les électrons de la cathode et restait impuissante à expliquer le seuil de fréquence, l'énergie transportée par l'onde étant *a priori* indépendante de sa fréquence.

Einstein introduit en 1905 la notion de quanta d'énergie : une lumière de fréquence  $\nu$  est constituée de particules d'énergie  $h\nu$  que nous nommons aujourd'hui photons.

En absorbant un photon, l'électron gagne une énergie  $h\nu$  lui permettant de s'extraire du métal et d'acquérir une énergie cinétique  $E_c$ . En notant  $W$  le travail d'extraction, c'est-à-dire l'énergie minimale qu'il faut fournir pour extraire l'électron de la surface du métal, le bilan énergétique de l'effet photoélectrique s'écrit  $h\nu = E_c + W$ . Nous retrouvons bien ainsi l'existence d'une fréquence seuil  $\nu_s = \frac{W}{h}$  en dessous de laquelle l'électron ne peut pas s'extraire de la cathode : aucun courant n'est alors mesuré. La tension d'arrêt  $U_a$  correspond à la situation dans laquelle l'électron arrive sur le collecteur en ayant perdu toute son énergie cinétique. La conservation de l'énergie mécanique de l'électron entre la cathode et le collecteur donne  $E_c = 0 - eU_a$ , soit  $-U_a = \frac{h\nu - W}{e}$  : la tension d'arrêt varie linéairement avec la fréquence  $\nu$  de la lumière incidente.

L'hypothèse corpusculaire permet bien de rendre compte de l'effet photoélectrique.

- **Qu'est-ce qu'un photon ? Quelles sont ses principales caractéristiques ?**

**Définition : Photon**

Le photon est la particule associée à la lumière. C'est une particule sans masse qui se déplace à la célérité  $c$  dans le vide ;  $c$  est une constante fondamentale dont la valeur exacte est :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Énergie d'un photon (relation de Planck-Einstein)**

Soit une onde lumineuse monochromatique de fréquence  $\nu$  et se propageant à la célérité  $c$  dans le vide. L'énergie  $E$  d'un photon est reliée à  $\nu$  par la relation dite de Planck-Einstein :

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

où  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck.

On trouve aussi cette relation sous la forme :  $E = \hbar\omega/2\pi = \hbar\omega$  où  $\hbar = h/2\pi$  est la constante de Planck réduite.



L'unité usuelle pour exprimer l'énergie d'un photon est l'électron-volt (eV). Elle correspond à l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V, soit :  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .



**Quantité de mouvement d'un photon**

Un photon se déplace dans la direction du faisceau lumineux indiquée par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  et possède une quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}$$

Avec  $\lambda = c/\nu$  pour une onde lumineuse et  $E = h\nu$  pour le photon, on en déduit :

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} = \frac{E}{c} \vec{u}$$

□ **Quelle est l'énergie d'un photon dans le domaine visible ? d'un photon X ?**

Le domaine visible est défini par  $\lambda \in [400 \text{ nm} ; 800 \text{ nm}]$ . Dans le rouge ( $\lambda_R = 800 \text{ nm}$ ) un photon possède une énergie  $E_R = hc/\lambda_R = 2,5 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,6 \text{ eV}$ , et dans le violet ( $\lambda_B = 400 \text{ nm}$ ) donc  $E_B = hc/\lambda_B = 5,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3,1 \text{ eV}$ . On remarque que  $E_B > E_R$ .

Dans le domaine des rayons X, nous pouvons considérer un cas moyen avec  $\lambda_X = 0,10 \text{ nm}$ . Un photon X aura donc une énergie  $E_X = hc/\lambda_X = 2,0 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 12 \text{ keV}$ .

Nous comprenons ici le caractère dangereux des rayons X. Les photons possèdent une énergie importante, pouvant aller jusqu'à ioniser les atomes ou brûler les tissus traversés. Ces rayons X ont cependant un intérêt pour la recherche : la diffraction des rayons X permet par exemple de déterminer les positions des atomes dans un cristal (chapitre 25).

□ **Quelle est la quantité de mouvement d'un photon visible ? Combien de photons arrivent sur Terre par unité de temps et de surface ?**

La quantité de mouvement d'un photon visible de longueur d'onde  $\lambda_m = 600 \text{ nm}$  est extrêmement faible :  $p = \frac{h}{\lambda_m} = 1,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Le flux solaire  $\Phi$  qui arrive sur Terre est de l'ordre de  $10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ , donc sachant qu'un photon possède une énergie  $E = hc/\lambda = 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  on en déduit le nombre de photons arrivant sur Terre par unité de temps et par unité de surface :  $N^* = \Phi/E = 3 \cdot 10^{21} \text{ photons} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ .

□ **L'aspect corpusculaire de la lumière se manifeste-t-il dans une expérience d'interférence ?**

Si nous éclairons avec un laser un écran percé de deux fentes (fentes d'Young), l'onde lumineuse est diffractée par chacune des deux fentes et dans la zone de recouvrement des deux ondes apparaissent des franges brillantes et des franges sombres (figure 4.2) : phénomène d'interférence dû à la superposition de deux ondes lumineuses.

Les interférences s'expliquent par le caractère ondulatoire de la lumière. Que se passe-t-il si l'intensité de la lumière est assez faible pour que les photons soient émis un par un (source à photons uniques) ? La figure 4.3 montre une simulation numérique des impacts des photons sur le détecteur pour successivement  $N = 100$ ,  $N = 500$  et  $N = 3000$  photons. Cette simulation est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus en 1986 à l'Institut d'Orsay par Philippe Granier, Alain Aspect et Gérard Roger.

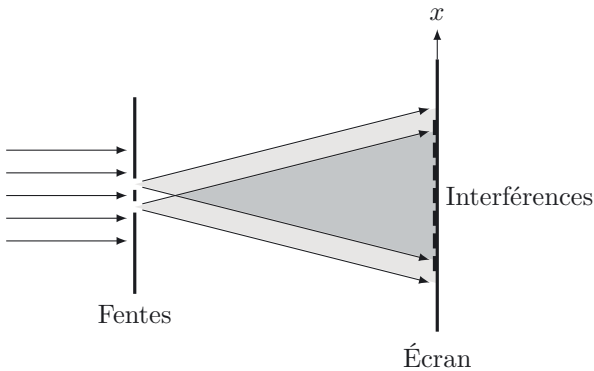


Figure 4.2. Expérience des fentes d'Young.

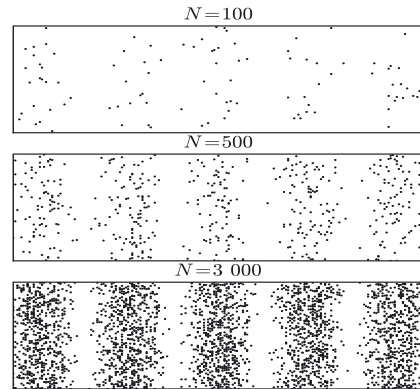


Figure 4.3. Simulation numérique d'impacts des photons.

L'aspect corpusculaire de la lumière se manifeste par les impacts aléatoires des photons sur le détecteur. Pour un très grand nombre d'impacts, la répartition de ces derniers est non uniforme : on observe effectivement des zones où la probabilité d'avoir un impact est grande (interférences constructives) et des zones où la probabilité est très faible voire nulle (interférences destructives). La répartition des impacts correspond à la figure d'interférence prévue par la théorie ondulatoire de la lumière.

Ces observations confirment le **double aspect de la lumière** : à la source puis au niveau du détecteur, un photon unique est créé puis détecté, la lumière se comporte comme une particule. La figure d'interférences indique quant à elle que la lumière s'est comportée comme une onde en se propageant dans le dispositif interférentiel. Nous pouvons alors conclure que **chaque photon a interféré avec lui-même après « être passé par les deux voies » du dispositif** expérimental.

## ■ 2 Dualité onde-particule pour la matière

La lumière possédant un double aspect ondulatoire et corpusculaire, il est légitime de se demander si une particule élémentaire possédant une masse, comme par exemple l'électron, peut elle aussi se comporter comme une onde.

Pour mettre en évidence le comportement ondulatoire des électrons, nous avons réalisé une expérience de diffraction d'électrons s'inspirant de celle que C. J. Davisson et L. H. Germer ont mis en œuvre en 1927 (diffraction d'électrons par un cristal de nickel). Dans un tube en verre sous vide (figure 4.4), un filament en tungstène chauffé à incandescence émet des électrons, qui sortent par l'orifice percé dans la cathode. L'anode est un anneau porté à un potentiel  $U > 0$  par rapport à la cathode, ce qui permet d'accélérer les électrons. Ceux-ci rencontrent une membrane en graphite polycristalline et sont détectés par un dépôt fluorescent disposé sur l'extrémité de l'ampoule sphérique, de diamètre 100 mm. Une caméra enregistre la projection de la figure de diffraction, de symétrie radiale. On note  $r$  la distance à l'axe. Pour obtenir la courbe  $I(r)$  d'intensité en fonction du rayon, on extrait d'une image 200 profils radiaux dont on calcule la moyenne.

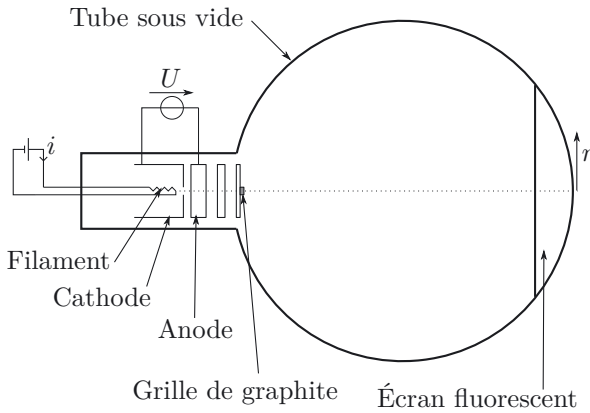


Figure 4.4. Diffraction des électrons.

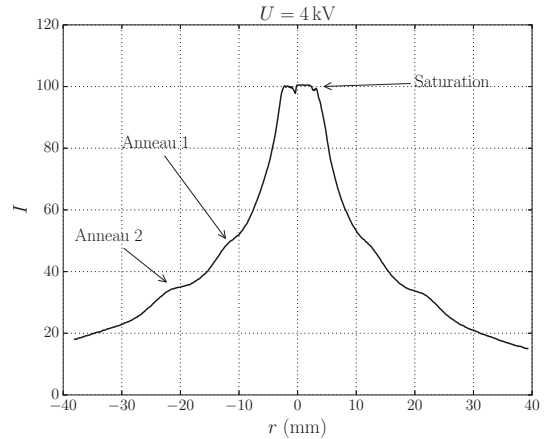


Figure 4.5. Intensité de fluorescence.

L'intensité de la lumière fluorescente est donnée figure 4.5 en fonction de  $r$ . Nous constatons que, de manière identique à la diffraction par les rayons X, la courbe  $I(r)$  comporte une décroissance globale de l'intensité, à laquelle se superposent deux anneaux de diffraction. Ceci met clairement en évidence le comportement ondulatoire des électrons. Pour cette tension  $U = 4 \text{ kV}$ , les rayons des anneaux sont  $R_1 = 12 \pm 1 \text{ mm}$  et  $R_2 = 22 \pm 1 \text{ mm}$ .

□ Quelle longueur d'onde peut-on associer à une particule ?

#### Relation de de Broglie : dualité onde-particule (1924)

À une particule de masse  $m$  et de quantité de mouvement  $\vec{p}$ , on associe une onde de matière, aussi appelée onde de de Broglie, dont la longueur d'onde  $\lambda$  est donnée par :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Cette longueur d'onde  $\lambda$  est appelée longueur d'onde de de Broglie.

Tant que la vitesse  $v$  de la particule reste environ inférieure à  $c/10$ , on reste dans un cadre non relativiste. Ainsi, la quantité de mouvement de la particule s'écrit  $p = mv$  et la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda = \frac{h}{mv}$ . Notons par ailleurs que le comportement ondulatoire d'une particule relève du cadre de la mécanique quantique.



La relation  $v = c/\lambda$  n'est pas valable pour l'onde de matière, mais seulement pour l'onde lumineuse.

Dans l'expérience de diffraction menée ci-dessus, pour une tension  $U = 4 \text{ kV}$ , les électrons (charge  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , masse  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ) acquièrent une quantité de mouvement  $p = \sqrt{2meU}$  ce qui correspond à la vitesse  $v = 3,8 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cela confirme l'hypothèse non relativiste puisque  $(v/c)^2 = 1,6 \cdot 10^{-2} \ll 1$ . D'après la relation de de Broglie, leur longueur d'onde est  $\lambda = \frac{h}{p} = 19 \text{ pm}$ .

Pour un échantillon polycristallin, la théorie ondulatoire (confirmée par les expériences de diffraction de rayons X) prédit des anneaux de diffraction d'angle  $2\theta$  par rapport à l'axe. L'angle  $\theta$  est donné par la relation de Bragg :  $2D \sin \theta = \lambda$ , où  $D$  est la distance entre deux plans cristallins.

Soit  $L = 135$  mm la distance entre la grille de graphite et l'écran fluorescent, et  $R$  le rayon d'un anneau de diffraction. On a  $\tan(2\theta) = \frac{R}{L}$ . Avec la relation de Bragg, on obtient la distance  $D$  en

fonction du rayon de l'anneau  $R$  :  $D = \frac{\lambda}{2 \sin(\frac{1}{2} \arctan(\frac{R}{L}))}$ . Avec le premier anneau, on obtient  $D_1 = 0,21$  nm. Le second anneau donne  $D_2 = 0,12$  nm.

La figure 4.6 montre la structure cristalline du graphite et les deux plans cristallins de distances  $D_1 = 213$  pm et  $D_2 = 123$  pm qui sont mis en évidence dans cette expérience de diffraction :

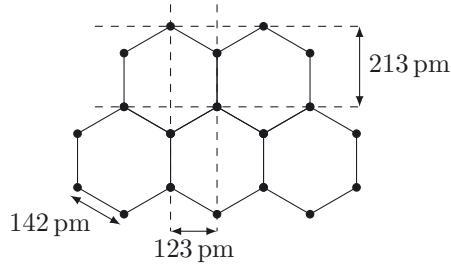


Figure 4.6. Structure cristalline du graphite.

En conclusion, cette expérience met bien en évidence le comportement ondulatoire des électrons, car leur longueur d'onde de de Broglie est proche de la distance des plans cristallins du graphite. Un traitement quantique est donc nécessaire. La diffraction d'électrons est aujourd'hui couramment employée pour obtenir les structures cristallines des nanoparticules.

#### Méthode 4.1 : Nécessité d'une description quantique

Quand doit-on utiliser la mécanique quantique pour décrire le comportement d'une particule ?

- Calculer  $\lambda$ , sa longueur d'onde de de Broglie.
- Comparer  $\lambda$  à la dimension caractéristique  $L$  de l'environnement avec lequel elle interagit.
- Si  $\lambda \ll L$ , une description classique peut suffire.
- Si  $\lambda \approx L$ , une description quantique est nécessaire.

➔ Exercice (4.7)

### ■ 3 Notion de fonction d'onde

□ Peut-on faire des interférences avec des ondes de matière ?

F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma ont réalisé en 1992 une expérience d'interférences (de type fentes d'Young) avec des atomes de néon. Les atomes étaient refroidis à environ 1 mK, afin d'avoir une longueur d'onde de de Broglie relativement grande  $\lambda \approx 20$  nm. Ils devaient franchir un écran comportant deux fentes espacées de 6  $\mu\text{m}$ . La répartition des impacts des atomes de néon sur l'écran d'observation a révélé une figure d'interférences semblable à celle obtenue figure 4.3 en utilisant une onde lumineuse.

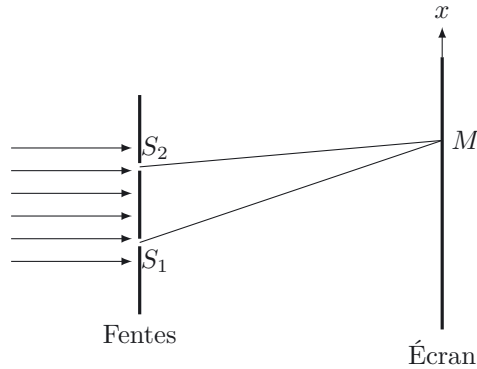


Figure 4.7. Dispositif d'interférences.

### □ Comment interpréter l'obtention d'une figure d'interférences avec des particules ?

L'interprétation des phénomènes d'interférences avec des ondes acoustiques ou lumineuses nous a amené à introduire une grandeur  $s(M, t)$  nommée signal (acoustique ou lumineux).

Dans le cas des fentes d'Young présenté sur le schéma de la figure 4.7, le signal en un point  $M$  de l'écran résulte de la superposition des signaux  $s_1(M, t)$  et  $s_2(M, t)$  issus respectivement des fentes  $S_1$  et  $S_2$  :  $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$ . L'intensité sonore ou lumineuse alors observée en  $M$  est proportionnelle à la moyenne temporelle  $\langle s^2(M, t) \rangle$  de  $s^2(M, t)$ .

Dans le cas des interférences avec des particules, les zones de grande densité d'impact sur l'écran correspondent à des zones de l'écran où la probabilité de présence des particules est élevée. À l'inverse, les zones avec peu d'impacts sur l'écran correspondent à des zones de l'écran où la probabilité de présence des particules est faible. À la notion d'intensité se substitue alors celle de probabilité de présence.

On introduit donc en mécanique quantique la notion de fonction d'onde complexe  $\Psi(M, t)$  qui joue un rôle similaire au signal  $s(M, t)$  introduit précédemment.

#### Définition : Fonction d'onde et densité de probabilité

En mécanique quantique, une particule est décrite par une fonction d'onde à valeurs complexes  $\Psi(M, t)$  dont le module au carré  $|\Psi(M, t)|^2$  est la densité de probabilité de présence de la particule au point  $M$  à l'instant  $t$ .



La notion de trajectoire de la particule n'a plus de sens en mécanique quantique.

Pour préciser la notion de densité de probabilité, considérons un problème à une dimension, selon un axe  $(Ox)$ , avec une fonction d'onde  $\Psi(x, t)$ . La probabilité de trouver la particule entre  $x$  et  $x + dx$  à l'instant  $t$  est  $dP = |\Psi(x, t)|^2 dx$ .

La probabilité de trouver la particule sur un intervalle  $[a, b]$  est donc égale à l'intégrale de  $|\Psi(x, t)|^2$  sur cet intervalle. Si l'on est certain que la particule se trouve dans l'intervalle  $[a, b]$  alors :

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx = 1$$

Si l'on note  $\Psi^*$  la fonction complexe conjuguée de  $\Psi$ , la densité de probabilité s'écrit aussi  $\Psi\Psi^*$ .

Afin d'interpréter l'expérience d'interférences avec des particules matérielles évoquée ci-dessus, nous devons appliquer à la fonction d'onde un **principe de superposition**. Notons  $\Psi_1(M, t)$  la fonction d'onde décrivant la particule lorsque seule la fente 1 est présente (l'autre fente est fermée), et  $\Psi_2(M, t)$  la fonction d'onde lorsque seule la fente 2 est présente. Lorsque les deux fentes sont présentes, la fonction d'onde décrivant la particule est proportionnelle à la somme des deux fonctions d'onde précédentes :  $\Psi(M, t) = \alpha(\Psi_1(M, t) + \Psi_2(M, t))$ . En première approche, on pourra prendre  $\alpha = 1$ . La probabilité de détecter la particule au voisinage d'un point  $M$  de l'écran est alors proportionnelle à :

$$\begin{aligned} |\Psi(M, t)|^2 &= |\Psi_1(M, t) + \Psi_2(M, t)|^2 \\ &= |\Psi_1(M, t)|^2 + |\Psi_2(M, t)|^2 + (\Psi_1(M, t)\Psi_2^*(M, t) + \Psi_1^*(M, t)\Psi_2(M, t)) \end{aligned}$$

Nous obtenons une densité de probabilité qui n'est pas simplement la somme des densités de probabilité  $|\Psi_1(M, t)|^2$  et  $|\Psi_2(M, t)|^2$ , mais comporte en plus un terme d'interférence. C'est ce terme d'interférence qui contient les variations spatiales de probabilité d'impact observées expérimentalement sur l'écran. L'existence de ce terme d'interférence, prouvée expérimentalement, montre que la notion de trajectoire, telle qu'elle est définie en mécanique classique, ne peut expliquer le mouvement de la particule entre la source et l'écran de détection.

## ■ 4 Quantification de l'énergie d'une particule libre confinée 1D

Pour décrire le comportement d'un électron dans un atome, la physique quantique est nécessaire, car la longueur d'onde de de Broglie de l'électron est de l'ordre de la taille de l'atome. Cette théorie permet par exemple de retrouver la quantification des niveaux d'énergie permis pour l'électron, en accord avec le spectre discret d'émission, véritable carte d'identité de l'atome.

Pour **mettre en évidence le principe de la quantification**, nous allons ici étudier le cas simple d'une **particule libre confinée dans un puits infini à une dimension**. La particule est libre de se déplacer sur l'axe  $(Ox)$  tout en restant confinée entre  $x = 0$  et  $x = L$ . Elle possède une énergie potentielle nulle entre  $x = 0$  et  $x = L$  et infinie à l'extérieur de l'intervalle entre  $x = 0$  et  $x = L$ , ce qui l'empêche d'en sortir.

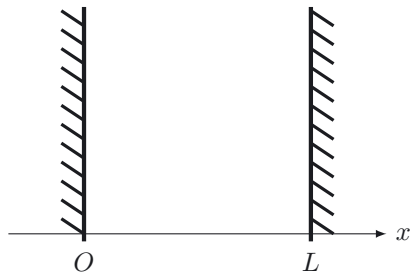


Figure 4.8. Confinement d'une particule.

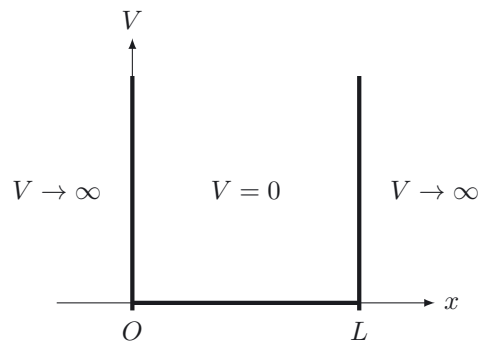


Figure 4.9. Puits unidimensionnel infini.

### □ Quel résultat donne la mécanique classique ?

Si nous étudions ce problème d'un point de vue classique, en supposant une particule ponctuelle déposée avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  à l'intérieur du puits, celle-ci va évoluer à énergie mécanique constante, donc à énergie cinétique constante et va faire une série d'aller-retour entre  $x = 0$  et  $x = L$  à vitesse constante. Nous remarquons de plus que si nous connaissons la position et la

vitesse de la particule à  $t = 0$  nous pouvons alors en déduire la position et la vitesse de la particule à chaque instant. Les lois de la physique classique sont déterministes.

□ **Qu'en est-il si on aborde le problème d'un point de vue quantique ?**

La particule quantique doit être décrite à l'aide d'une fonction d'onde  $\Psi(x, t)$ . En dehors de l'intervalle  $[0, L]$ , la densité de probabilité est nulle car la particule ne peut s'y trouver :  $|\Psi(x, t)|^2 = 0$ . Par continuité en  $x = 0$  et en  $x = L$ , on en déduit que  $\Psi(x = 0, t) = 0$  et  $\Psi(x = L, t) = 0$  : nous retrouvons les mêmes conditions aux limites que celles de l'onde stationnaire sur la corde de Melde. Par analogie, la fonction d'onde  $\Psi(x, t)$  est de la forme  $\Psi(x, t) = f(x)g(t)$  définie sur  $\mathbb{C}$ , avec  $f(x) = C \sin(kx + \varphi)$  où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  est la pulsation spatiale de la fonction d'onde avec  $\lambda$  la longueur d'onde de de Broglie ( $\lambda = h/p$ ). Nous admettrons que  $g(t) = \exp(-i\omega t)$ , où  $\omega = 2\pi\nu = \frac{E}{\hbar}$  est la pulsation temporelle de la fonction d'onde avec  $E$  l'énergie de la particule.



On rappelle que la relation  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  valable pour une onde lumineuse ne l'est pas pour une onde de matière !

$$\Psi(x = 0, t) = 0 \Rightarrow f(x = 0) = C \sin(\varphi) = 0 \text{ soit } \varphi = 0 \text{ et } f(x) = C \sin(kx).$$

$$\Psi(x = L, t) = 0 \Rightarrow f(x = L) = C \sin(kL) = 0 \text{ soit } k = k_n = n\pi/L \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Or } k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} :$$

la longueur d'onde de de Broglie ne peut donc prendre que certaines valeurs discrètes  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme dans le cas de la corde de Melde, la longueur de la cavité est égale à un nombre entier de fois la demi longueur d'onde.

L'énergie potentielle de la particule étant nulle dans le puits, l'énergie  $E$  de la particule quantique confinée est égale à son énergie cinétique :  $E = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ .

Il en découle une quantification de l'énergie de la particule :  $E_n = \frac{1}{2} \frac{h^2}{m\lambda_n^2} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{m} \frac{n^2}{4L^2}$ . Cette énergie augmente en  $n^2$ .

### Énergie d'une particule libre confinée 1D

L'énergie d'une particule libre confinée dans un puits unidimensionnel infini est quantifiée et a pour expression :

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}^*$$

L'énergie de la particule confinée n'est jamais nulle et sa valeur minimale correspond à  $n = 1$  soit  $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$ . Ainsi, contrairement au point de vue classique, la particule ne peut pas être immobile en un point de l'axe. La densité de probabilité de présence de la particule en  $x$  est ainsi  $|\Psi(x, t)|^2 = |C|^2 \sin^2\left(n\pi \frac{x}{L}\right)$ . Il existe donc des ventres et des nœuds de probabilité de présence comme nous avons trouvé des ventres et des nœuds d'amplitude sur la corde de Melde (dans le chapitre 2).

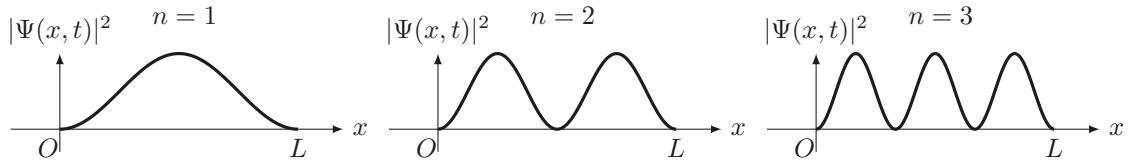


Figure 4.10. Densité de probabilité de présence de la particule dans un puits infini.

De plus, pour passer d'un niveau d'énergie à un autre, la particule peut absorber ou émettre un photon d'énergie  $E = h\nu$ . Par exemple, pour que la particule initialement dans son état fondamental avec une énergie  $E_1$  passe dans un état excité d'énergie  $E_3$ , elle peut absorber un photon d'énergie  $E = E_3 - E_1 = \frac{h^2}{mL^2}$ .

#### Méthode 4.2 : Détermination des niveaux énergétiques de la particule confinée

Pour déterminer les niveaux d'énergie d'une particule confinée dans un puits infini de largeur  $L$ , il faut :

- Écrire la partie spatiale de la fonction d'onde stationnaire sous la forme suivante :  $f(x) = C \sin(kx + \varphi)$  avec  $k = 2\pi/\lambda$ .
- Utiliser les conditions aux limites  $f(0) = 0$  et  $f(L) = 0$  et en déduire la quantification de la longueur d'onde de de Broglie.
- Exprimer alors l'énergie de la particule et en déduire les niveaux d'énergie permis.

➔ Exercice (4.1)



C'est le confinement qui est à l'origine de la quantification de l'énergie d'une particule. Plus l'espace dans lequel elle est confinée est réduit, plus les niveaux d'énergie sont éloignés les uns des autres et plus l'énergie minimale est importante.



## Interro de cours

Données : constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  ; masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  ; masse du proton  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ; célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s) aux questions ci-dessous.

1. La quantité de mouvement  $p$  d'une particule peut s'écrire :

(a)  $p = \hbar k$  avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de la particule.

(b)  $p = \frac{h}{\lambda}$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de la particule.

(c)  $p = h\lambda$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde de la particule.

2. Si les ondes de matière associées à un électron et à un proton ont la même longueur d'onde :

(a) l'électron et le proton ont la même vitesse ;

(b) l'électron et le proton ont la même énergie cinétique ;

(c) l'électron et le proton ont la même quantité de mouvement.

3. Une lumière monochromatique dont les photons ont une énergie de 2,0 eV est située :

(a) dans le domaine visible ;

(b) dans le domaine infrarouge ;

(c) dans le domaine ultraviolet.

4. Des protons possèdent une énergie cinétique  $E_c = 2,0 \text{ keV}$ .

(a) Leur vitesse est  $6,2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(b) Leur vitesse est  $4,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

(c) L'onde de matière associée possède la longueur d'onde  $\lambda = 0,48 \mu\text{m}$ .

(d) L'onde de matière associée possède la longueur d'onde  $\lambda = 0,64 \text{ pm}$ .

5. On considère l'expérience d'interférences photon par photon décrite dans le cours (figure 4.3).

(a) Cette expérience met en évidence la dualité onde-corpuscule.

(b) Cette expérience illustre le caractère probabiliste d'un phénomène quantique.

(c) Si on essaye de détecter par quelle fente passe un photon, la figure d'interférences disparaît.

6. Une particule libre de masse  $m$  est confinée dans un puits à une dimension de profondeur infinie et de largeur  $a$ .

(a) Les longueurs d'onde permises sont quantifiées :  $\lambda_n = \frac{2a}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(b) Les longueurs d'onde permises sont quantifiées :  $\lambda_n = \frac{na}{2}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(c) L'énergie de la particule est quantifiée :  $E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8ma^2}$ .

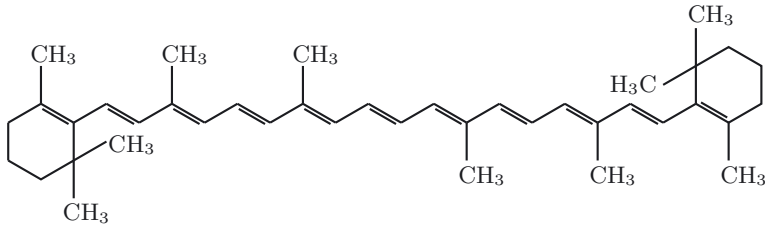
(d) L'énergie de la particule est quantifiée :  $E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$ .

## Exercices

### Exercice 4.1 Puits carré et potiron

➡ Méthode (4.2)

Dans le cas d'une molécule de  $\beta$ -carotène, l'interaction de la lumière avec la matière dans le domaine visible dépend essentiellement des électrons  $\pi$  qui peuvent se déplacer tout le long de la molécule.



Dans un modèle très simple, les électrons  $\pi$  sont libres de se déplacer dans un puits de potentiel infiniment profond et de largeur  $L$ ,  $L$  correspondant à la longueur des liaisons le long desquelles les électrons  $\pi$  sont délocalisés. Dans le cas du  $\beta$ -carotène :  $L = 1,83$  nm.

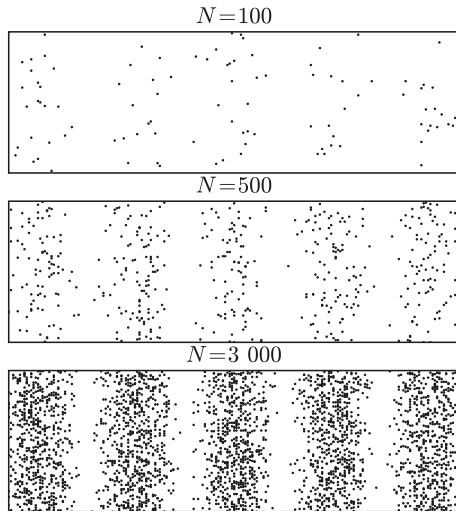
Données : constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J · s ; masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg ; célérité de la lumière dans le vide  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>.

On rappelle que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  J.

1. En exploitant une analogie avec la corde vibrante de longueur  $L$  fixée à ses extrémités, déterminer les niveaux d'énergie  $E_n$  d'un électron dans le puits de potentiel en introduisant un nombre entier  $n$ .
2. Calculer l'écart d'énergie  $E_{12} - E_{11}$  entre les niveaux  $n = 12$  et  $n = 11$  en eV.
3. Quelle est la longueur d'onde dans le vide d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau  $n = 11$  au niveau  $n = 12$  ?
4. Proposer une explication à la couleur orangée de la soupe au potiron.

**Exercice 4.2 Point par point**

Une expérience d'interférences avec la lumière peut être réalisée « photon par photon » à l'aide d'une source lumineuse à photon unique (voir par exemple la thèse de Vincent Jacques « Source de photons uniques et interférences à un seul photon. De l'expérience des fentes d'Young au choix retardé. »).



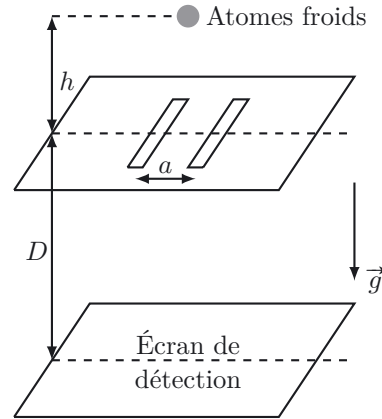
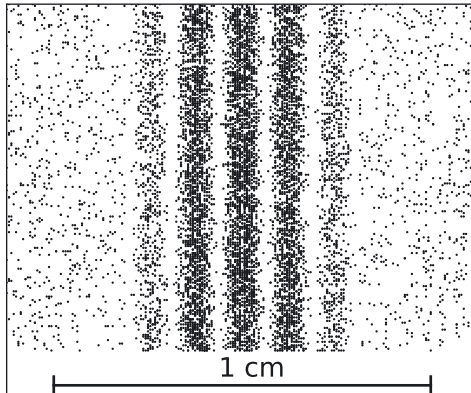
La figure ci-contre montre une simulation numérique des impacts des photons sur le détecteur pour successivement  $N = 100$ ,  $N = 500$  et  $N = 3\ 000$  photons.

1. Décrire l'évolution de la figure lorsque le nombre  $N$  de photons augmente.
2. Proposer une interprétation de cette expérience en termes probabilistes.

## Exercice 4.3 Onde de matière

## Expérience des fentes d'Young

L'expérience des fentes d'Young réalisée par F. Shimizu, K. Shimizu et H. Takuma en 1992 avec des atomes de néon est schématisée sur la figure ci-dessous à droite.



Un nuage d'atomes de néon est capturé et refroidi dans un piège laser puis lâché sans vitesse initiale à une hauteur  $h = 3,5$  cm par rapport à un écran percé de deux fentes distantes de  $a = 6,0$   $\mu\text{m}$ . L'écran de détection est placé à une distance  $D = 85$  cm du plan des deux fentes, enregistrant l'impact de chaque atome. La répartition des impacts sur l'écran (figure de gauche) révèle une figure d'interférences semblable à celle obtenue en utilisant une onde lumineuse ou acoustique.

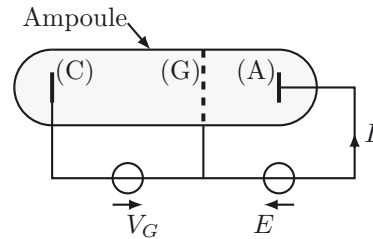
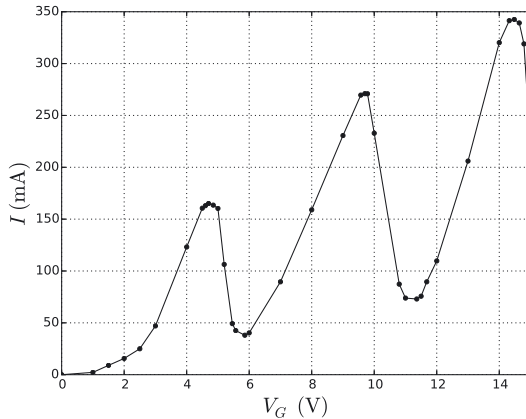
Données : masse molaire du néon  $M = 20,2$   $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$   $\text{mol}^{-1}$ , constante de Planck  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$   $\text{J} \cdot \text{s}$  et accélération de la pesanteur  $g = 9,8$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. En étudiant la chute libre d'un atome de néon entre le piège et les fentes, estimer la vitesse d'un atome lorsqu'il arrive dans le plan des fentes.
2. En déduire alors la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$  des atomes de néon atteignant la bifente.
3. Le calcul de l'interfrange sur l'écran obtenu en envisageant une onde de longueur d'onde  $\lambda$  éclairant les fentes d'Young conduit à la valeur  $i = \frac{\lambda D}{a}$ . Calculer  $i$  et comparer à la valeur déduite de la figure. Les ordres de grandeur sont-ils les mêmes ? Comment expliquez-vous l'écart entre l'interfrange expérimental et celui obtenu à l'aide de la formule proposée ?

### Exercice 4.4 Une énergie quantifiée

#### Expérience de Franck et Hertz ( d'après Wikipédia)

L'expérience menée par James Franck et Gustav Hertz en 1914 a pour objet de prouver la quantification des niveaux d'énergie des électrons dans les atomes, ce qui en fait l'une des expériences fondamentales de la physique quantique. Elle a ainsi permis de confirmer les hypothèses du modèle de l'atome de Bohr.



Dans une ampoule fermée contenant une vapeur de mercure sous faible pression, des électrons sont émis par un filament chauffé constituant la cathode (C). Une grille (G) à large maille et portée au potentiel  $V_G > 0$  permet d'accélérer les électrons émis par la cathode. L'électrode collectrice (A) est portée à un potentiel positif  $V_A = V_G - E$  plus petit que celui de la grille. La tension  $E$  est constante et l'intensité  $I$  du courant circulant dans le tube est mesurée pour différentes valeurs de  $V_G$ .

Les électrons peuvent subir deux types de collisions avec les atomes du gaz :

- des chocs élastiques où l'électron conserve son énergie cinétique.
- des chocs inélastiques où l'électron peut transférer de l'énergie à l'atome.

Une perte d'énergie importante des électrons les rend incapables d'atteindre l'anode ( ils rejoignent la grille) et on observe alors une chute de l'intensité  $I$  du courant traversant le tube.

La constante de Planck est  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

1. Expliquer pourquoi des électrons se déplaçant de (C) vers (A) sont d'abord accélérés entre (C) et (G) puis ralentis entre (G) et (A).
2. Expliquer pourquoi l'intensité  $I$  augmente lorsque la tension  $V_G$  augmente depuis la valeur  $V_{G1}$  de  $V_G$  pour laquelle l'intensité chute une première fois. Que se passe-t-il alors ?
3. Expliquer en quoi l'expérience vient confirmer la notion de niveaux d'énergie discontinus de l'atome.
4. Interpréter alors le reste de la courbe.

5. Le spectre d'émission du mercure comprend une raie intense dans l'ultraviolet de longueur d'onde  $\lambda = 254 \text{ nm}$ . Est-ce en accord avec l'expérience de Franck et Hertz ? On rappelle que la célérité de la lumière dans le vide est  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 4.5 Elektra libre

Elektra est un personnage de fiction de masse  $m = 62 \text{ kg}$  évoluant dans l'univers Marvel. Elle se singularise notamment par sa capacité à courir à des vitesses de l'ordre de  $30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  !

On rappelle que la constante de Planck vaut  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ .

- Calculer la longueur d'onde de de Broglie associée à une Elektra libre en pleine action.
- Elektra relève-t-elle du domaine de la physique quantique ou de la physique classique ?
- Nous considérons maintenant les électrons libres d'un métal à température ambiante. L'énergie cinétique moyenne des électrons libres est  $\frac{3}{2}k_B T$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann et  $T = 293 \text{ K}$  la température. Nous admettrons qu'il y a  $n = 8,0 \cdot 10^{28}$  électrons libres par mètre cube dans le métal. La masse d'un électron est  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .
  - Calculer la vitesse moyenne d'un électron libre puis sa longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$ .
  - Comparer  $\lambda$  à la distance moyenne entre électrons libres dans le métal. Les électrons relèvent-ils de la physique quantique ?

### Exercice 4.6 Être et ne pas être

#### Le chat de Schrödinger (d'après Wikipédia)

La fonction d'onde est un des concepts fondamentaux de la mécanique quantique. Son interprétation probabiliste a été développée entre autres par Max Born, Werner Heisenberg dans les années 1925-1927 et constitue l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique. La fonction d'onde correspond à la représentation de l'état quantique  $|\Psi(t)\rangle$  d'un système dans une base de dimension infinie, en général celle des positions  $|\vec{r}\rangle$  ; dans ce dernier cas, elle est notée  $\Psi(\vec{r}, t)$ .

Elle correspond à une amplitude de probabilité, en général à valeur complexe. La probabilité de trouver une particule au voisinage de la position  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  est alors proportionnelle au carré du module de la fonction d'onde  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ , densité de probabilité (volumique) de présence, et à la mesure du volume du voisinage de  $\vec{r}$ .

La fonction d'onde doit par ailleurs obéir à une équation appelée équation de Schrödinger. Celle-ci étant linéaire, la superposition de deux fonctions d'onde est aussi solution de l'équation de Schrödinger. Prenons l'exemple d'interférences atomiques réalisées avec un montage de type fentes d'Young.

Un atome qui atteint l'écran de détection est passé soit par la première fente, soit par la deuxième. La fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  qui lui est associée après les fentes s'écrit ainsi comme la superposition des fonctions d'onde  $\Psi_1(\vec{r}, t)$  et  $\Psi_2(\vec{r}, t)$  correspondant aux atomes passant respectivement par la première et la seconde fente :  $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_1(\vec{r}, t) + \Psi_2(\vec{r}, t)$ . Cette approche nous permet de décrire efficacement les phénomènes interférentiels.

Le chat de Schrödinger est une expérience de pensée imaginée en 1935 par le physicien Erwin Schrödinger, afin de mettre en évidence des lacunes supposées de l'interprétation de Copenhague de la physique quantique et, plus particulièrement, le problème de la mesure. Le principe en est le suivant : un chat est enfermé dans une boîte avec un flacon de gaz mortel et une source radioactive. Si un compteur Geiger détecte un certain seuil de radiations, le flacon est brisé et le chat meurt. Selon l'interprétation de Copenhague, le chat est à la fois vivant et mort. Pourtant, si nous ouvrons la boîte, nous pourrions observer que le chat est soit mort, soit vivant.

1. En considérant le chat comme un objet quantique, commenter l'interprétation de Copenhague.
2. Comment interpréter l'expérience d'un point de vue classique ?

### Exercice 4.7 Un problème de taille

#### ➔ Méthode (4.1)

Nous envisageons plusieurs systèmes pour lesquels nous nous interrogeons sur la pertinence d'un traitement quantique.

On rappelle la valeur de la constante de Planck réduite  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  et la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

1. Un escargot de masse  $m = 20 \text{ g}$  se déplace à la vitesse  $v = 1,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer la longueur d'onde de de Broglie qui lui est associée. Conclure.
2. Ant-Man est un super-héro pouvant réduire sa taille à celle d'une fourmi de l'ordre de  $D = 2 \text{ mm}$ . Sa masse est alors  $m = 20 \text{ mg}$  et il peut atteindre des vitesses supersoniques de l'ordre de  $v = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ant-Man relèverait-il du domaine de la physique classique ou de la physique quantique ?
3. Les atomes d'hélium dans un gaz à température  $T = 293 \text{ K}$  et pression  $P = 1,0 \text{ bar}$  possèdent une énergie cinétique moyenne égale à  $\frac{3}{2}k_B T$ , où  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann. On note  $n$  le nombre de molécules d'hélium par unité de volume du gaz. La masse molaire de de l'hélium est  $M = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Calculer la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda$  associée à un atome et comparer  $\lambda$  à  $n^{-1/3}$  (ordre de grandeur de la distance interatomique dans le gaz). L'étude vous semble-t-elle devoir être menée dans le cadre de la mécanique quantique ?
4. L'énergie cinétique d'un électron de masse  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  dans un atome est de l'ordre d'une dizaine d'eV. La taille de l'atome est de l'ordre de  $0,1 \text{ nm}$ . Calculer la longueur d'onde de de Broglie associée à l'électron et conclure quant à la nécessité d'un traitement quantique.

## Corrections

### Interro de cours

1. Réponses (a) et (b).
2. Réponse (c).
3. Réponse (a).
4. Réponses (a) et (d) :  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  puis  $\lambda = \frac{h}{mv}$ .
5. Réponses (a), (b) et (c).
6. Réponses (a) et (d) : par analogie avec la corde vibrante,  $a = n \frac{\lambda_n}{2}$  ( $\frac{\lambda_n}{2}$  est la distance entre deux nœuds successifs pour le mode  $n$ ),  $E_n = \frac{p_n^2}{2m}$  et  $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2a}$ .

### Exercice 4.1

1. La particule ne pouvant pas pénétrer dans la zone extérieure au puits, où le potentiel est infini, sa fonction d'onde doit s'annuler en  $x = 0$  et  $x = L$ , si on note ( $Ox$ ) l'axe sur lequel l'électron peut se mouvoir. Ceci est analogue à la situation de la corde de Melde fixée à ses deux extrémités. La fonction d'onde spatiale de l'électron va prendre la forme :  $\varphi(x) = A \sin(kx)$  et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Les conditions aux limites s'écrivant  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ , on obtient une quantification de  $k$ , et donc de  $\lambda$  :  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  et  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  avec  $n$  entier relatif non nul. Grâce à la relation de de Broglie, on remonte à  $p_n = \frac{nh}{2L}$ , et à l'énergie associée, uniquement sous forme cinétique car dans le puits,  $V(x) = 0$  :  $E_n = \frac{p_n^2}{2m_e} = \frac{n^2 h^2}{8m_e L^2}$ .
2.  $E_{12} - E_{11} = \frac{h^2}{8m_e L^2} (12^2 - 11^2) = 2,6 \text{ eV}$ .
3.  $E_{12} - E_{11} = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$ , soit  $\lambda = \frac{hc}{E_{12} - E_{11}} = 0,48 \mu\text{m}$ , ce qui se situe dans le bleu.
4. La bande d'absorption par la molécule de  $\beta$ -carotène se situant dans le bleu, la soupe de potiron apparaîtra de la couleur complémentaire au bleu, c'est-à-dire orange.

### Exercice 4.2

1. La figure présente tout d'abord un caractère discret, analogue à celui qu'on obtiendrait en envoyant des particules une à une sur le détecteur et les impacts observés semblent se répartir de façon totalement aléatoire ( $N = 100$ ). On peut donc interpréter ce phénomène en disant que la source émet une succession de photons individuels, qui produisent des impacts discrets sur le détecteur.  
Au fur et à mesure qu'on envoie des photons, lorsque  $N$  croît, on constate cependant que les impacts sont plus fréquents dans les régions qui correspondent aux franges brillantes selon la théorie ondulatoire, et lorsque  $N$  devient très grand, on retrouve finalement une densité d'impacts correspondant à la figure d'interférences à deux ondes.
2. Dans une approche probabiliste, si seule la fente 1 était ouverte, la probabilité qu'un photon parvienne sur un élément de surface  $dS$  centré en  $M$  est  $dP_1(M, t) = |\Psi_1(M, t)|^2 dS$ , avec  $\Psi_1(M, t)$  la fonction d'onde correspondant au passage par la fente 1 (état propre 1).  
Si seule la fente 2 était ouverte, la probabilité qu'un photon parvienne sur un élément de surface  $dS$  centré en  $M$  est  $dP_2(M, t) = |\Psi_2(M, t)|^2 dS$ , avec  $\Psi_2(M, t)$  la fonction d'onde correspondant au passage par la fente 2 (état propre 2).



Lorsque les deux fentes sont ouvertes, la fonction d'onde en  $M$  et  $t$  s'écrit comme une superposition des deux fonctions d'onde précédentes :  $\Psi(M, t) = \alpha(\Psi_1(M, t) + \Psi_2(M, t))$  (nous prendrons  $\alpha = 1$  pour simplifier). La probabilité de détection sur l'écran devient alors :

$$dP(M, t) = |\Psi(M, t)|^2 dS = (\Psi_1(M, t) + \Psi_2(M, t))(\Psi_1^*(M, t) + \Psi_2^*(M, t))dS$$

$$dP(M, t) = dP_1(M, t) + dP_2(M, t) + (\Psi_1(M, t)\Psi_2^*(M, t) + \Psi_1^*(M, t)\Psi_2(M, t))dS \neq dP_1(M, t) + dP_2(M, t).$$

On obtient donc un terme d'interférence  $(\Psi_1(M, t)\Psi_2^*(M, t) + \Psi_1^*(M, t)\Psi_2(M, t))$  dont la présence explique le fait que l'intensité lumineuse obtenue en présence des deux fentes ouvertes n'est pas la somme des intensités dues à chacune des fentes si elle était seule.

### Exercice 4.3

1. On applique la loi de l'énergie cinétique à un atome soumis uniquement à son poids :

$$m \frac{v^2}{2} - 0 + 0 - mgh = 0, \text{ soit } v = \sqrt{2gh} = 0,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2.  $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{\mathcal{N}Ah}{Mv} = 24 \text{ nm}$  pour les atomes de néon atteignant la bifente.

3.  $i = \frac{\lambda D}{a} = 3,4 \text{ mm}$ . Sur la figure, on mesure 1,3 mm. L'ordre de grandeur est correct mais le calcul précis de l'interfrange dans cette expérience doit prendre en compte la variation de la longueur d'onde de de Broglie au fur et à mesure de l'accélération des atomes par le champ de pesanteur. Au niveau de l'écran, la vitesse des atomes est  $v' = \sqrt{2g(D+h)} = 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la longueur d'onde de de Broglie associée est alors  $\lambda' = 4,8 \text{ nm}$ , et on trouverait  $i' = 0,67 \text{ mm}$ . Nous voyons donc qu'avec nos arguments simples, nous n'avons qu'un ordre de grandeur de l'interfrange.

### Exercice 4.4

1. De  $(C)$  à  $(G)$ , le potentiel est croissant, donc le champ électrique associé est orienté de  $(G)$  à  $(C)$  et, ainsi, la force électrique  $\vec{F} = -e\vec{E}$  est orientée de  $(C)$  vers  $(G)$  et accélère donc les électrons. De  $(G)$  à  $(A)$ , le potentiel est décroissant, la force électrique sera orientée de  $(A)$  vers  $(G)$  et ralentit les électrons.
2. En  $V_G = 0$ , les électrons ne sont soumis à aucune accélération, donc il n'y a pas d'électrons à atteindre  $(A)$ . Lorsque  $V_G$  augmente, les électrons qui ne heurtent aucun atome de mercure ou qui ne subissent que des collisions élastiques arrivent en  $(G)$  avec l'énergie  $eV_G$ , et ils ont suffisamment d'énergie pour atteindre alors  $A$  s'ils ne subissent que des collisions élastiques. Le fait que  $I$  augmente s'interprète tout simplement en remarquant que plus  $V_G$  sera importante, plus la vitesse des électrons en  $G$  sera grande donc plus le nombre d'électrons atteignant  $(A)$  par seconde sera important. Graphiquement,  $V_{G1} \approx 4,8 \text{ V}$  : les électrons arrivent en  $(G)$  avec suffisamment d'énergie pour subir une collision inélastique avec un atome de mercure auquel ils vont céder une partie de leur énergie ; ils n'auront alors plus suffisamment d'énergie pour vaincre le freinage et n'arriveront plus en  $(A)$  d'où la chute de l'intensité.
3. L'atome de mercure est initialement dans son état fondamental. Si les niveaux d'énergie étaient continus, il pourrait être excité par n'importe quel électron, si petite soit l'énergie de ce dernier. Or on constate que tant que les électrons n'ont pas l'énergie  $eV_{G1}$ , ils ne peuvent céder de l'énergie à l'atome de mercure. Ceci veut donc dire que l'excitation de l'atome de mercure de l'état fondamental à l'état excité n'est possible que si l'électron lui fournit une énergie bien précise, correspondant à l'énergie de transition entre l'état fondamental et le premier état excité : niveaux d'énergie discontinus.
4. Pour  $V_G > V_{G1}$ , l'énergie des électrons en  $(G)$  augmentant, même s'ils subissent une collision inélastique avec un atome de mercure, ils ont une énergie qui peut leur permettre d'atteindre  $(A)$ , et l'intensité croît de nouveau.

Pour  $V_G = 2V_{G1}$ , on note une seconde chute : pour cette tension, les électrons peuvent en effet subir deux collisions inélastiques. Nous observons ensuite une chute d'intensité pour chaque multiple entier de  $V_{G1}$ .

5.  $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 4,9 \text{ eV}$ . Ceci est bien en accord avec la valeur trouvée expérimentalement.

### Exercice 4.5

- $\lambda = \frac{h}{mv} = 3,6 \cdot 10^{-37} \text{ m}$ .
- Avec une aussi petite longueur d'onde de de Broglie (inférieure à toutes les dimensions macroscopiques du monde d'Élektra), Élektra relève du domaine de la physique classique.
- a. On écrit que  $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}k_B T$ , soit  $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

La longueur d'onde de de Broglie est  $\lambda = \frac{h}{m_e v} = 6,3 \text{ nm}$ .

- Si on suppose que chaque électron a un volume propre de volume  $d^3$ , la distance entre deux électrons étant alors  $d$ , on aura  $nd^3 = 1 \text{ m}^3$ , d'où  $d = 0,23 \text{ nm}$ . La longueur d'onde de de Broglie étant plus grande que  $d$ , on peut considérer que ces électrons relèvent de la mécanique quantique.

### Exercice 4.6

- Un observateur extérieur n'a aucun moyen de savoir si le mécanisme s'est enclenché. Il y a donc deux états propres quantiques possibles pour le chat, l'état « mort » et l'état « vivant ». Si le chat était un objet quantique, il pourrait être dans une superposition de ces deux états, avec une équiprobabilité d'être dans l'un ou l'autre, donc à la fois mort et vivant : état du chat = 50% Mort + 50% Vivant, d'où l'interprétation de Copenhague.

Dès qu'on ouvre la boîte et qu'on observe le chat, on observera qu'il est soit vivant, soit mort.

- D'un point de vue classique, l'animal est déjà soit mort, soit vivant, avant qu'on ouvre la boîte, on ne peut l'imaginer être dans une superposition de ces deux états.

### Exercice 4.7

- $\lambda = \frac{h}{p} = 3,3 \cdot 10^{-29} \text{ m}$ . Ceci est très inférieur à toutes les dimensions du monde dans lequel évolue l'escargot, ce dernier ne sera donc pas quantique.
- $\lambda = \frac{h}{p} = 6,6 \cdot 10^{-32} \text{ m}$  : comme l'escargot, Ant-Man n'est pas quantique.
- On calcule tout d'abord la vitesse quadratique moyenne des atomes d'hélium par  $\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}mu^2$ , soit

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \lambda = \frac{h \mathcal{N}_A}{Mu} = 74 \text{ pm}.$$

Calculons à présent la densité en atomes d'hélium, supposé être un gaz parfait :  $P = nk_B T$ , soit  $n = 2,5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ , soit  $d = n^{-1/3} = 3,4 \text{ nm}$ .  $\lambda$  étant encore très inférieure à la distance interatomique, l'étude pourra être menée dans un cadre classique.

- On calcule la quantité de mouvement de l'électron par  $E_c = \frac{p^2}{2m_e}$ , soit  $p = \sqrt{2m_e E_c}$ . Numériquement,  $p = 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $\lambda = 0,39 \text{ nm}$ , de l'ordre de grandeur de la taille de l'atome ; un traitement quantique est donc indispensable.

# Circuits électriques dans l'ARQS

## L'essentiel du cours

### Contexte

Dans ce chapitre, nous caractériserons les principaux composants que l'on peut trouver au laboratoire, puis nous les associerons pour construire des circuits simples.

## ■ 1 Grandeurs électriques et leurs mesures

### □ Quelles grandeurs électriques étudier ? Comment les mesurer ?

Les principales grandeurs mesurées en électricité sont l'intensité du courant et la tension.

L'intensité du courant est la quantité de charge  $dq$  traversant une section du conducteur pendant un intervalle de temps, divisée par la durée  $dt$  de celui-ci :  $i = \frac{dq}{dt}$ . C'est une grandeur algébrique.

### Méthode 5.1 : Mesure de l'intensité d'un courant

La mesure de l'intensité du courant dans un circuit est réalisée à l'aide d'un **ampèremètre** placé **en série** avec les composants du circuit.

➔ Exercices (5.1) (5.4)

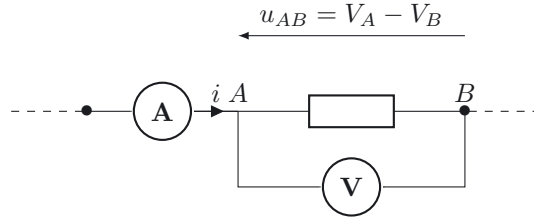
La tension aux bornes d'un dipôle électrique (composant électrique présentant deux bornes) est égale à la différence de potentiel entre ses bornes :  $u_{AB} = V_A - V_B$ .

### Méthode 5.2 : Mesure d'une tension

La mesure d'une tension aux bornes d'un dipôle est réalisée à l'aide d'un **voltmètre** placé **en parallèle** du dipôle.

➔ Exercice (5.1)

Le schéma suivant présente différents symboles : dipôle, courant le traversant, tension à ses bornes, appareils de mesure.



La puissance instantanée algébriquement reçue par le dipôle est définie par  $\mathcal{P}(t) = u_{AB}(t)i(t)$  (dans le cas où  $u_{AB}$  et  $i$  sont de sens opposés comme sur le schéma ci-dessus).



$\mathcal{P}(t) = u_{AB}(t)i(t)$  représente la **puissance algébrique reçue** par le dipôle. Positive, elle est effectivement reçue par le dipôle. Négative, elle est fournie par celui-ci.

Un dipôle est qualifié de récepteur s'il reçoit une puissance, de générateur s'il en fournit.



Un même composant peut avoir au cours de son fonctionnement un comportement générateur ou un comportement récepteur (accumulateurs, moteurs à courant continu...).

## ■ 2 ARQS

Nous souhaitons caractériser les dipôles récepteurs disponibles en salle de TP : résistor (ou conducteur ohmique) appelé usuellement résistance, condensateur, bobine, diode électroluminescente (LED). À cette fin, nous les connecterons à une source de tension, continue ou sinusoïdale.

On distingue deux régimes : le régime continu (ou stationnaire) où toutes les grandeurs sont indépendantes du temps et le régime variable où les grandeurs évoluent dans le temps.

### □ Un phénomène de propagation est-il observable dans les circuits électriques ?

Pour répondre à cette question, comparons le temps caractéristique de variation du signal  $\tau_{\text{sig}}$  avec son temps de propagation  $\tau_{\text{prop}}$ . Pour un circuit de taille  $L \approx 1,0 \text{ m}$  et une célérité des signaux électriques  $c \approx 1,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  :  $\tau_{\text{prop}} = L/c \approx 10 \text{ ns}$ .

Dans le cas d'un GBF en régime sinusoïdal,  $\tau_{\text{sig}}$  s'identifie à la période du signal. Pour des fréquences inférieures au mégahertz, celle-ci est supérieure à  $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , ce qui est très grand devant  $\tau_{\text{prop}}$ . Le temps de propagation est donc négligeable.

### Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

Dans le cadre de l'ARQS, tous les effets liés à la propagation des signaux sont négligés.



Dans le cadre de l'ARQS, l'intensité du courant est la même en tout point d'un circuit série dans lequel les composants sont connectés les uns à la suite des autres.

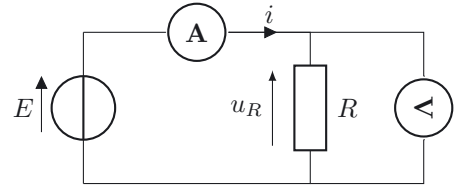
Dans la suite de ce chapitre et les suivants, nous nous placerons dans le cadre de l'ARQS.

### ■ 3 Dipôles récepteurs : linéarité

#### □ Quel montage réaliser pour caractériser un résistor ?

Nous souhaitons établir un lien entre l'intensité du courant  $i$  traversant le résistor et la tension  $u_R$  à ses bornes. À cette fin nous réalisons le circuit ci-contre, où  $E$  est une source de tension continue.

La valeur normalisée de la résistance du résistor utilisé est  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ .



#### □ Comment choisir le sens du courant dans un circuit ?

Le choix du sens du courant est **arbitraire** puisque son intensité est **algébrique**. Cependant, on peut choisir le sens du courant en fonction de celui de la tension.

#### Conventions récepteur et générateur

- Convention générateur : le courant traversant le dipôle et la tension à ses bornes sont dans le même sens.
- Convention récepteur : le courant traversant le dipôle et la tension à ses bornes sont dans des sens opposés.

La convention utilisée dépend du dipôle et de sa capacité à fournir de l'énergie.

#### □ Comment caractériser un dipôle ?

Pour rendre compte de l'évolution des grandeurs électriques, on trace la caractéristique courant-tension du dipôle, c'est-à-dire la représentation de l'intensité du courant en fonction de la tension à ses bornes pour différents points de fonctionnement, obtenus en faisant varier  $E$ . La figure 5.1 présente la caractéristique courant-tension du résistor. Nous constatons que  $u_R$  et  $i$  sont proportionnels :  $u_R = Ri$  où  $R$  est la résistance. En mesurant la pente, on trouve  $R = 1011 \Omega$ .

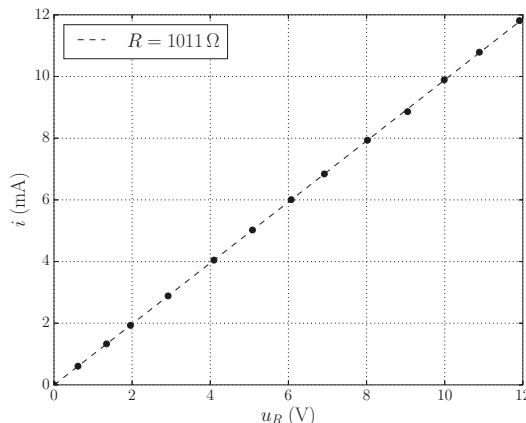


Figure 5.1. Tracé expérimental de la caractéristique courant-tension d'un résistor.

### Caractéristiques d'un résistor

- La tension aux bornes d'un résistor est donnée par la loi d'Ohm en convention récepteur :  $u_R = Ri$ .
- La résistance  $R$  d'un résistor s'exprime en ohm ( $\Omega$ ). Les résistances usuelles sont comprises entre quelques ohms et plusieurs mégohms.
- La puissance **reçue** s'écrit  $\mathcal{P} = u_R \cdot i = Ri^2$  et correspond à la puissance électrique convertie en puissance thermique (effet Joule) dans le résistor.



Les formules ci-dessus ne sont valables qu'en convention récepteur. En convention générateur la relation courant-tension s'écrit  $u_R = -Ri$ .



Pour suivre l'évolution d'un courant dans un circuit, on utilise souvent un résistor aux bornes duquel on branche un oscilloscope ou une carte d'acquisition permettant de suivre la tension  $u_R$ , de laquelle on déduit  $i = u_R/R$ .

#### □ Le même montage permet-il de caractériser un condensateur ou une bobine ?

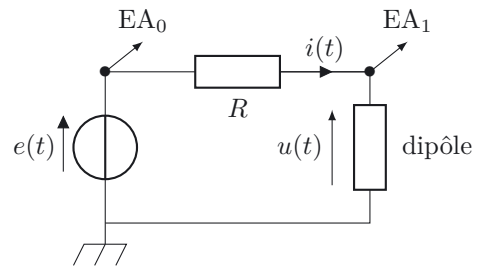
La réponse est non, car, en régime continu :

- Avec un condensateur, on constate que l'intensité du courant est nulle. Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Avec une bobine, on constate que la tension à ses bornes est très proche de 0 V. La bobine se comporte pratiquement comme un interrupteur fermé (ou un fil).

Pour caractériser un condensateur ou une bobine, nous décidons donc de réaliser des expériences en régime variable à l'aide d'un GBF délivrant une tension sinusoïdale.

#### □ Quel montage peut-on réaliser pour observer en régime variable à la fois l'intensité traversant un dipôle et la tension à ses bornes ?

On branche le dipôle à étudier en série avec un résistor aux bornes d'un GBF. Les entrées analogiques  $EA_0$  et  $EA_1$  d'une carte d'acquisition sont connectées comme indiqué sur la figure ci-contre. On a :  $u(t) = EA_1$  et  $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$  avec  $u_R(t) = EA_0 - EA_1$  (mesure différentielle).



Les résultats sont présentés figure 5.2 pour le condensateur et figure 5.3 pour la bobine.

Nous observons que la tension et le courant sont de la même forme que le signal sinusoïdal imposé par le GBF. Par ailleurs nous avons pu constater, en faisant varier la fréquence, que le courant est toujours en avance de  $\pi/2$  par rapport à la tension dans un condensateur alors qu'il est toujours en retard de  $\pi/2$  dans une bobine. Cela suggère une relation de proportionnalité entre  $i$  et  $\frac{du_C}{dt}$  pour un condensateur et entre  $u_L$  et  $\frac{di}{dt}$  pour une bobine.

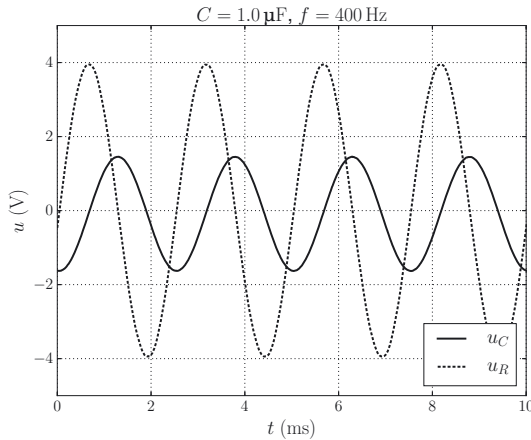


Figure 5.2. Condensateur.

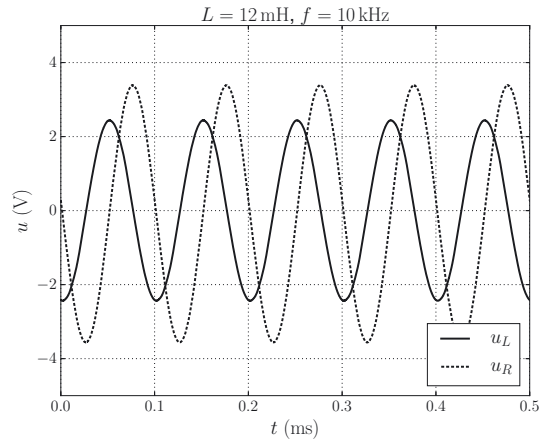


Figure 5.3. Bobine.

### Caractéristiques d'un condensateur

- La charge  $q$  de l'armature qui reçoit le courant  $i$  s'écrit en convention récepteur  $q = Cu_C$  et l'intensité du courant qui parcourt le condensateur  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$ .
- Sa capacité  $C$  se mesure en farad (F) et vaut couramment de quelques pF à quelques mF.
- La puissance reçue en convention récepteur s'écrit  $\mathcal{P} = u_C \cdot i = Cu_C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Cu_C^2 \right)$ .  
Elle fait intervenir l'énergie stockée dans le condensateur :  $E_C = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ .
- L'énergie étant une fonction continue du temps, la tension aux bornes d'un condensateur est toujours une fonction continue du temps.

### Caractéristiques d'une bobine idéale

- La tension à ses bornes s'écrit en convention récepteur :  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .
- Son inductance  $L$  se mesure en henry (H) et vaut couramment de quelques mH à quelques H.
- La puissance reçue en convention récepteur s'écrit  $\mathcal{P} = u_L \cdot i = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$ .  
Elle fait intervenir l'énergie stockée dans la bobine :  $E_L = \frac{1}{2} Li^2$ .
- L'énergie étant une fonction continue du temps, l'intensité traversant une bobine est toujours une fonction continue du temps.



En réalité, une bobine réelle doit être modélisée par l'association en série d'une bobine idéale et d'une résistance  $r$ . La relation courant-tension s'écrit alors :  $u_L = ri + L \frac{di}{dt}$ .

□ Obtient-on le même type de relation avec une diode électroluminescente (LED) ?

On refait les expériences précédentes avec une LED (figure 5.4).

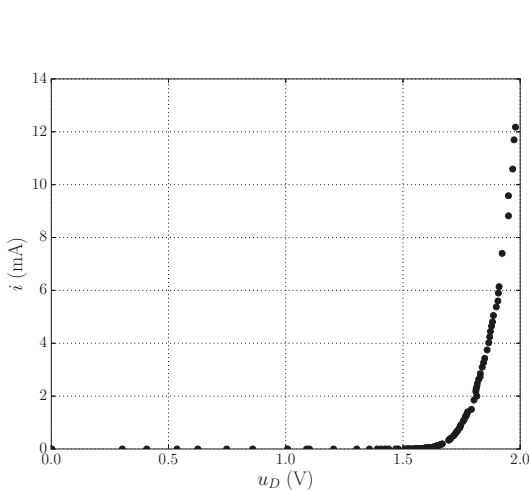


Figure 5.4. Caractéristique courant-tension d'une LED.

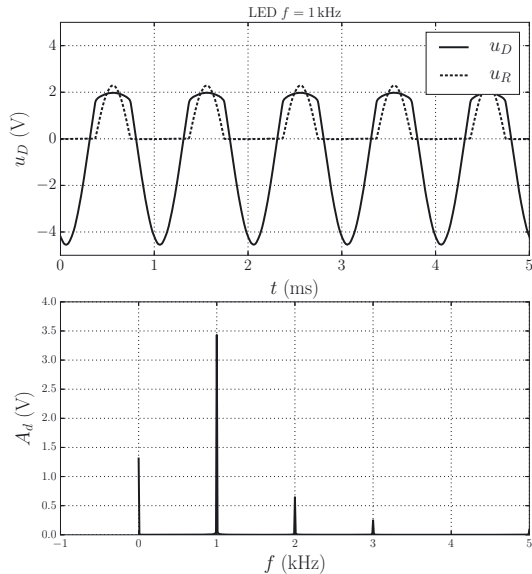


Figure 5.5. Réponse temporelle et spectre.

En régime continu (caractéristique courant-tension), nous constatons que le courant est nul jusqu'à une tension de seuil environ égale à 1,6V. Pour une tension supérieure au seuil, la LED s'allume et le courant augmente alors que la tension ne varie presque plus.

En régime variable, nous observons une tension  $u_D$  déformée par rapport à la tension sinusoïdale de fréquence  $f = 1 \text{ kHz}$  délivrée par le GBF. Sur le spectre de  $u_D$ , nous constatons qu'à coté de la fréquence fondamentale de 1 kHz apparaissent de nouvelles fréquences, multiples de celle-ci. Ce dernier point nous permet de distinguer les dipôles linéaires des dipôles non linéaires.

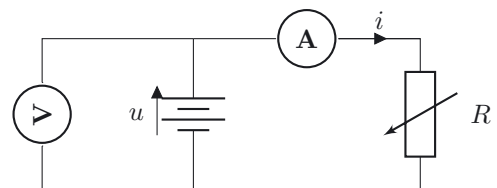
**Définition : Dipôle linéaire**

Un dipôle est linéaire si, alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale, il n'introduit pas de nouvelles fréquences. C'est le cas lorsqu'il existe une relation affine ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants reliant  $i$  à  $u$ .

**■ 4 Sources de tension – Dipôles générateurs**

En utilisant le circuit ci-contre, dans lequel nous avons fait varier la résistance  $R$  (rhéostat), nous avons déterminé la caractéristique d'un dipôle générateur constitué de deux piles alcalines LR06.

On remarquera que la convention choisie pour étudier la pile est la **convention générateur**.





La caractéristique courant-tension est présentée sur la figure 5.6.

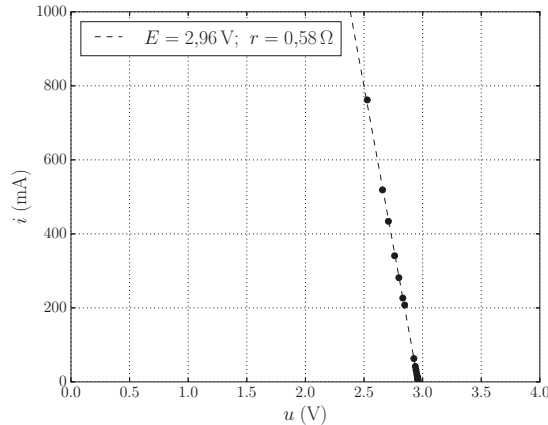
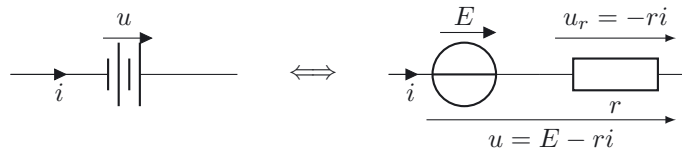


Figure 5.6. Caractéristique courant-tension de deux piles LR06 en série.

Les points de fonctionnement obtenus sont alignés sur une droite, ce qui montre le comportement linéaire de ce dipôle. La droite ne passant pas par l'origine, ce dipôle peut imposer un courant en l'absence de tension ou une tension en l'absence de courant : on parle alors de dipôle actif. Il peut être modélisé par l'association en série d'une source idéale de tension avec une résistance  $r$  comme le montre le schéma ci-dessous :



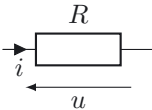
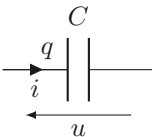
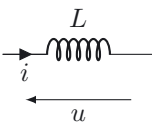
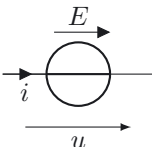
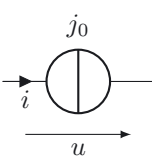
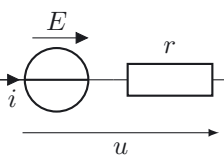
On obtient bien une relation affine entre  $i$  et  $u$  :  $i = \frac{E}{r} - \frac{u}{r}$ . La mesure de la pente de la caractéristique courant-tension, égale à  $-\frac{1}{r}$ , permet de déterminer la valeur de  $r$ . Pour la pile étudiée nous trouvons  $r = 0,58 \Omega$  (résistance interne de la pile).

□ **Qu'en est-il pour les autres générateurs ?**

#### Modèle de Thévenin

Le modèle de Thévenin consiste en l'association série d'une source idéale de tension  $E$  avec une résistance  $r$ . Il permet de décrire tous les dipôles actifs linéaires dont la caractéristique courant-tension est un segment de droite.

Le tableau suivant présente les dipôles linéaires disponibles au laboratoire.

Dipôle	Symbole et convention	Relation courant-tension
Résistor		$u = Ri$
Condensateur		$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$
Bobine idéale		$u = L \frac{di}{dt}$
Source de tension idéale		$u = E \quad \forall i$
Source de courant idéale		$i = j_0 \quad \forall u$
Générateur réel (modèle de Thévenin)		$u = E - ri$

## ■ 5 Circuits électriques

□ Comment sont réparties les tensions dans un circuit composé de plusieurs dipôles ?

Commençons par introduire un peu de vocabulaire des circuits.

- Nœud : borne commune à au moins 3 dipôles.
- Branche : portion de circuit entre deux nœuds consécutifs.
- Maille : ensemble de branches successives définissant un circuit fermé.

Considérons pour répondre à la question le circuit de la figure 5.7 comprenant deux résistors et une source de tension idéale. Ce circuit modélise la connexion d'un résistor à un générateur réel.

Orientons le sens de parcours de cette maille.  
 La tension aux bornes de la source de tension se répartit entre les deux dipôles :

$$E = u_1 + u_2 \quad \text{soit} \quad -E + u_1 + u_2 = 0$$

La somme des tensions algébriques rencontrées dans le sens de parcours de la maille est nulle.

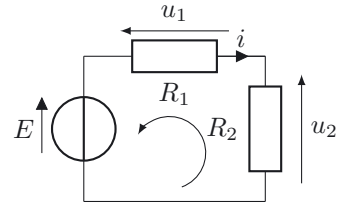


Figure 5.7. Maille orientée.

**Méthode 5.3 : Utilisation de la loi des mailles**

**Loi des mailles** (loi d'additivité des tensions) : la somme des tensions algébriques rencontrées dans le sens de parcours d'une maille est nulle. Pour l'appliquer :

- Orienter arbitrairement la maille.
- Écrire que  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k u_k = 0$  où  $n$  est le nombre de dipôles dans la maille et avec  $\varepsilon_k = +1$  si  $u_k$  est orienté dans le sens de la maille et  $\varepsilon_k = -1$  sinon.

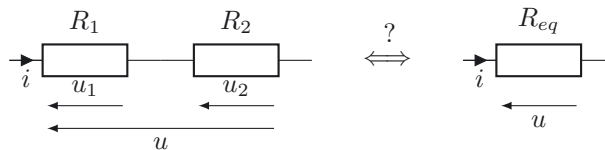
➔ Exercices (5.2) (5.5)



La position relative des dipôles n'a aucune importance dans un circuit série. On peut intervertir deux dipôles sans modifier le comportement du circuit.

□ **Plusieurs résistances en série sont-elles équivalentes à une seule résistance ?**

Pour répondre à cette question cherchons à établir l'équivalence entre les deux montages suivants :



Dans le circuit de droite :  $u = R_{eq}i$ . Dans celui de gauche :  $u = u_1 + u_2$ ,  $u_1 = R_1i$  et  $u_2 = R_2i$ . D'où  $u = (R_1 + R_2)i$ . On en déduit que les deux montages sont équivalents si  $R_{eq} = R_1 + R_2$ .

**Méthode 5.4 : Remplacement d'une association de résistances en série**

Des résistances sont dites en série si elles sont parcourues par le même courant. Une telle association est équivalente à une résistance unique :

- Cas de deux résistances en série :  $R_{eq} = R_1 + R_2$ .
- Cas de  $n$  résistances en série :  $R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k$ .

➔ Exercice (5.3)

Reprenons le circuit de la figure 5.7 comprenant deux résistances en série alimentées par une source de tension.

La loi des mailles et l'expression de la résistance équivalente conduisent à  $E = (R_1 + R_2)i$  et  $u_2 = R_2i$ . En éliminant  $i$  on obtient :  $u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$ . Cette relation constitue la relation du **diviseur de tension**.

#### Méthode 5.5 : Exploitation de la notion de diviseur de tension

Un diviseur de tension est constitué de deux résistances en série parcourues par un courant d'intensité  $i$ . Pour établir la relation du diviseur de tension :

- Exprimer la tension aux bornes de l'association série des deux résistances en fonction de  $i$ .
- Exprimer la tension aux bornes d'une des résistances en fonction de  $i$ .
- Éliminer  $i$  entre les deux relations précédentes :  $u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E$ .

➔ Exercices (5.2) (5.5)

□ **Comment utiliser la relation du diviseur de tension pour mettre en évidence l'influence de la résistance interne d'un générateur ?**

Lorsqu'un générateur possède une résistance interne  $r$ , la tension aux bornes de la résistance  $R$  qu'on connecte à ses bornes n'est pas égale à la tension  $E$  du générateur mais à  $\frac{R}{R+r}E$ . Lorsque  $R \gg r$  on retrouve une tension voisine de  $E$ . Par contre lorsque  $R \approx r$  on constate une forte différence entre la tension  $E$  et la tension aux bornes de la résistance.



On veillera en travaux pratiques à choisir des résistances grandes devant la résistance interne du GBF (égale en général à  $50 \Omega$ ).

□ **Comment se répartissent les courants dans deux branches parallèles ?**

Nous avons réalisé le circuit ci-contre, dans lequel  $R_1 = 1011 \Omega$ ,  $R_2 = 397 \Omega$  et  $R_3$  est variable. Une alimentation stabilisée en tension fournit la tension  $E = 2,0 \text{ V}$ .

Pour différentes valeurs de  $R_3$  nous avons mesuré  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$  avec trois ampèremètres.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant avec les chiffres indiqués sur les appareils.

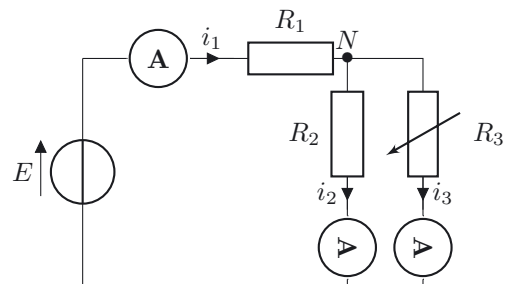


Figure 5.8. Branches en parallèle.

$R_3$ ( $\Omega$ )	$i_1$ (mA)	$i_2$ (mA)	$i_3$ (mA)	$i_1 - i_2 - i_3$ (mA)
0	1,764	0,046	1,718	0,000
100	1,642	0,348	1,293	0,001
200	1,568	0,531	1,037	0,000
300	1,519	0,653	0,865	0,001
400	1,484	0,741	0,742	0,001
500	1,458	0,807	0,65	0,001
600	1,437	0,858	0,579	0,000
700	1,42	0,898	0,521	0,001
800	1,407	0,932	0,474	0,001
900	1,395	0,96	0,435	0,000
1000	1,385	0,983	0,401	0,001

Nous constatons que plus la résistance  $R_3$  augmente, plus  $i_3$  est faible. Par ailleurs les résultats expérimentaux montrent qu'aux incertitudes près,  $i_1 = i_2 + i_3$ , c'est-à-dire  $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ . Ainsi la somme des intensités algébriques des courants arrivant au nœud  $N$  est nulle. Ce résultat constitue la loi des nœuds. Il se généralise au cas d'un nombre quelconque de branches .

#### Méthode 5.6 : Utilisation de la loi des nœuds

**Loi des nœuds** : la somme des intensités algébriques des courants arrivant à un nœud est nulle. Pour l'appliquer :

- Algébriser les intensités des courants des branches reliées au nœud considéré.
- Écrire que  $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k i_k = 0$  avec  $\varepsilon_k = +1$  si le courant d'intensité  $i_k$  est orienté vers le nœud et  $-1$  sinon.

On peut également énoncer la loi des nœuds en disant que la somme des intensités des courants arrivant vers le nœud est égale à la somme de celles des courants en sortant.

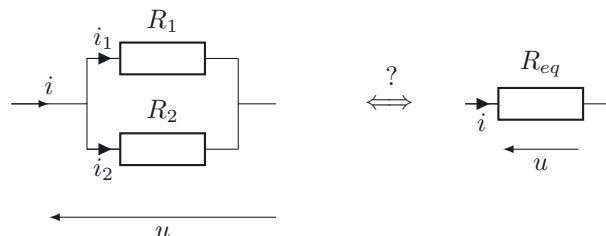
➔ Exercice (5.1)



Cette relation peut être établie en écrivant qu'entre deux instants voisins, en régime quasi-stationnaire, la charge qui entre dans une portion du circuit comprenant un nœud est égale à la charge qui en sort (conservation de la charge).

□ Plusieurs résistances en parallèle sont-elles équivalentes à une seule résistance ?

Pour répondre à cette question, cherchons à établir l'équivalence entre les deux montages suivants :



Dans le montage de gauche la loi des nœuds et la loi d'Ohm permettent d'écrire  $i = i_1 + i_2$ ,  $i_1 = \frac{u}{R_1}$  et  $i_2 = \frac{u}{R_2}$ , d'où l'on déduit  $i = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u$ . Dans le montage de droite, la loi d'Ohm permet d'écrire  $i = \frac{u}{R_{eq}}$ . Par identification, nous obtenons  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , soit  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

#### Méthode 5.7 : Remplacement d'une association de résistances en parallèle

Des résistances sont en parallèle si elles sont connectées aux mêmes nœuds. Elles sont alors soumises à la même tension. Une telle association est équivalente à une résistance unique :

- Cas de deux résistances en parallèle :  $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \implies R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .
- Cas de  $n$  résistances en parallèle :  $\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$ .

➔ Exercices (5.3) (5.5)

Reprenons le circuit de la figure 5.8 qui nous a permis de vérifier expérimentalement la loi des nœuds. La loi d'Ohm conduit à  $i_3 = u/R_3$ . Par ailleurs, les deux résistances en parallèle  $R_2$  et  $R_3$  sont équivalentes à une résistance  $R_{eq} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$  aux bornes de laquelle la tension est égale à  $u = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} i_1$ . On en déduit  $i_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_1$ . Cette relation constitue la relation du **diviseur de courant**.

#### Méthode 5.8 : Exploitation de la notion de diviseur de courant

Un diviseur de courant est constitué de deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  en parallèle, soumises à une même tension  $u$ . Pour établir la relation du diviseur de courant :

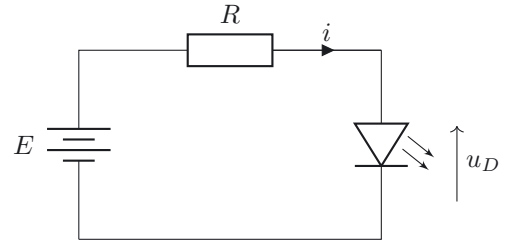
- Exprimer l'intensité  $i_1$  du courant circulant dans  $R_1$ , en fonction de  $u$ .
- Utiliser la notion de résistance équivalente à l'association parallèle des deux résistances pour relier l'intensité totale  $i$  à  $u$ .
- Éliminer  $u$  entre les deux relations précédentes :  $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$ .

➔ Exercice (5.4)

□ Peut-on utiliser les relations précédentes pour déterminer le point de fonctionnement d'un dipôle non linéaire ?

À titre d'exemple reprenons le cas de la LED, en utilisant la caractéristique courant-tension obtenue expérimentalement (figure 5.4).

Considérons le circuit ci-contre, contenant la pile étudiée plus haut, la LED et une résistance  $R = 200 \Omega$ . On négligera la résistance interne  $r = 0,58 \Omega$  de la pile devant la résistance  $R$ .



D'après la loi des mailles nous avons  $E = Ri + u_D$ , soit  $u_D = E - Ri$ .

La relation reliant  $u_D$  et  $i$  est imposée à la fois par la caractéristique courant-tension de la LED et par celle des composants en amont.

La figure 5.9 montre que le point de fonctionnement de la LED est le point d'intersection de sa caractéristique avec la représentation graphique de la relation courant-tension  $u_D = E - Ri$  imposée à ses bornes par le générateur et la résistance  $R$ . Nous constatons expérimentalement que le courant est suffisamment élevé pour allumer la LED.

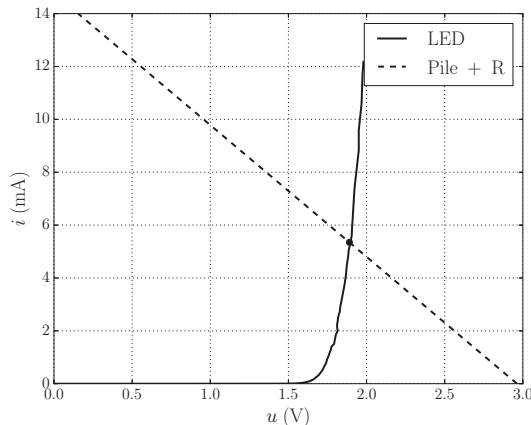


Figure 5.9. Détermination du point de fonctionnement d'une LED.

#### Méthode 5.9 : Détermination du point de fonctionnement d'un dipôle

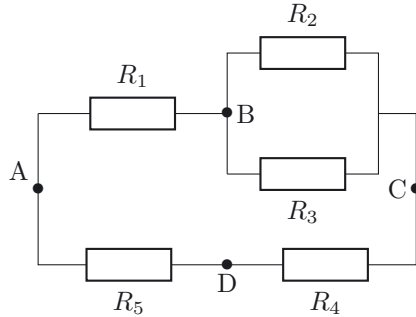
Lorsqu'on connecte un dipôle à un circuit extérieur, la loi des mailles permet d'obtenir une relation entre la tension aux bornes du dipôle et le courant qui le traverse. L'intersection de la représentation graphique de cette relation avec la caractéristique courant-tension du dipôle donne le point de fonctionnement de celui-ci.

➔ Exercice (5.6)

Ce chapitre nous a permis de caractériser les différents dipôles électriques en introduisant les grandeurs électriques et les outils permettant l'étude de circuits. Nous allons utiliser ces outils dans les chapitres suivants.

## Interro de cours

On considère le réseau de résistances suivant :



1. Les résistances  $R_2$  et  $R_3$  sont :
  - (a) en série ;
  - (b) en parallèle ;
  - (c) ni en série, ni en parallèle.
2. Les résistances  $R_4$  et  $R_5$  sont :
  - (a) en série ;
  - (b) en parallèle ;
  - (c) ni en série, ni en parallèle.
3. Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont :
  - (a) en série ;
  - (b) en parallèle ;
  - (c) ni en série, ni en parallèle.
4. Les résistances  $R_3$  et  $R_4$  sont :
  - (a) en série ;
  - (b) en parallèle ;
  - (c) ni en série, ni en parallèle.

Dorénavant, on considère  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$ .

5. Que vaut la résistance  $R_{AC}$  équivalente à l'ensemble de résistances compris entre  $A$  et  $C$  ?
  - (a)  $\frac{3R}{2}$ .
  - (b)  $\frac{6R}{7}$ .
  - (c)  $5R$ .
6. Que vaut la résistance  $R_{BC}$  équivalente à l'ensemble de résistances compris entre  $B$  et  $C$  ?
  - (a) C'est la même que  $R_{AB}$  :  $R_{AB} = R_{BC}$ .

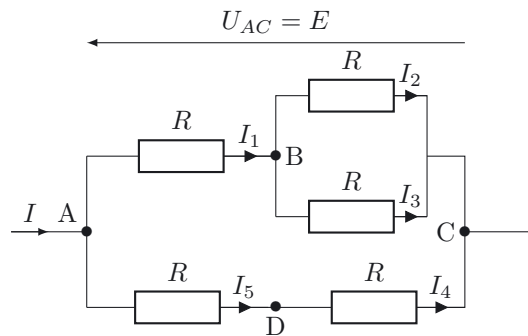


- (b)  $\frac{3R}{7}$ .  
 (c)  $\frac{4R}{5}$ .

7. Combien de lois des mailles et de lois des nœuds indépendantes peut-on écrire au maximum ?

- (a) 3.  
 (b) 4.  
 (c) 5.  
 (d) 6.

Un générateur impose, entre les bornes  $A$  et  $C$ , une tension  $U_{AC} = E$ . On note  $I$  l'intensité arrivant au nœud  $A$ .



8. Un étudiant représente la flèche de l'intensité dans la branche  $AB$  dans le sens inverse de celui du schéma. Il la note  $I'_1$ . Commenter.

- (a) Les électrons vont tous converger au nœud  $B$  ce qui est impossible. L'étudiant doit corriger son erreur et utiliser  $I_1$ .  
 (b) Cela importe peu. L'étudiant devra écrire la loi des nœuds en  $B$  :  $I'_1 + I_2 + I_3 = 0$  au lieu de :  $I_1 = I_2 + I_3$ . Il trouvera une valeur opposée :  $I'_1 = -I_1$ .

9. Que vaut la tension  $U_{CD}$  ?

- (a)  $U_{CD} = 2E$ .  
 (b)  $U_{CD} = -E/2$ .  
 (c)  $U_{CD} = E/2$ .

10. Que vaut la tension  $U_{BC}$  ?

- (a)  $U_{BC} = 2E$ .  
 (b)  $U_{BC} = E/2$ .  
 (c)  $U_{BC} = E/3$ .

11. Parmi ces propositions, identifier la(les) proposition(s) fausse(s).

- (a)  $I_1 = 2I_2$ .  
 (b)  $I_2 = I_3$ .  
 (c)  $I_4 = I_5$ .  
 (d)  $I_1 = I_5$ .  
 (e)  $I_1 = 4I/7$ .

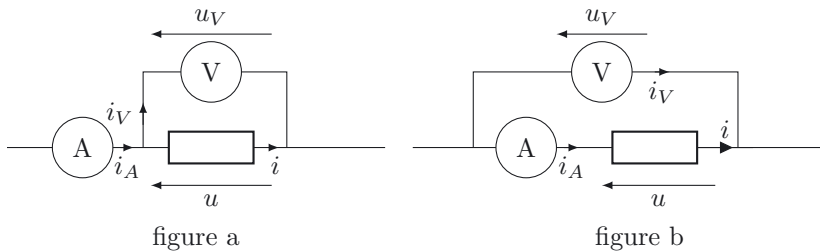
## Exercices

### Exercice 5.1 Montages courte ou longue dérivation

➔ Méthodes (5.1) (5.2) (5.6)

Lorsqu'on veut mesurer simultanément, à l'aide d'un ampèremètre et d'un voltmètre, l'intensité et la tension aux bornes d'un dipôle quelconque, se pose la question du choix de l'emplacement pour ces deux appareils.

Deux montages peuvent alors être mis en œuvre : le montage dit courte dérivation (figure a) et le montage dit longue dérivation (figure b).



Le voltmètre possède une résistance interne  $R_V$  et l'ampèremètre une résistance interne  $R_A$ . Dans la suite on considérera que le dipôle étudié est un conducteur ohmique de résistance  $R$ .

1. On considère le montage courte dérivation.

a. L'intensité  $i_A$  du courant traversant l'ampèremètre, et donc mesurée par ce dernier, est-elle la même que l'intensité  $i$  traversant le dipôle ?

La tension  $u_V$  aux bornes du voltmètre, et donc la tension mesurée par ce dernier, est-elle la même que la tension  $u$  aux bornes du dipôle ? Conclure.

b. Exprimer  $u_V$ ,  $i$  et  $i_A$  en fonction de  $u$ ,  $R$ , et  $R_V$ . En déduire la condition que doit vérifier  $R$  pour que l'erreur relative commise sur la mesure de  $u_V$  ou de  $i_A$  soit inférieure à 1%. Faire l'application numérique avec  $R_V = 1,0 \text{ M}\Omega$ ,  $R_A = 10 \Omega$ .

2. On considère le montage longue dérivation.

a. L'intensité  $i_A$  du courant traversant l'ampèremètre, et donc mesurée par ce dernier, est-elle la même que l'intensité  $i$  traversant le dipôle ?

La tension  $u_V$  aux bornes du voltmètre, et donc la tension mesurée par ce dernier, est-elle la même que la tension  $u$  aux bornes du dipôle ? Conclure.

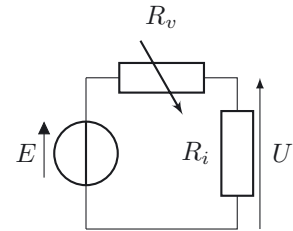
b. Exprimer  $u_V$ ,  $u$  et  $i_A$  en fonction de  $i$ ,  $R$ , et  $R_A$ . En déduire la condition que doit vérifier  $R$  pour que l'erreur relative commise sur la mesure de  $u_V$  ou de  $i_A$  soit inférieure à 1%. Faire l'application numérique avec  $R_V = 1,0 \text{ M}\Omega$ ,  $R_A = 10 \Omega$ .

### Exercice 5.2 Mesure d'une résistance d'entrée

➔ Méthodes (5.3) (5.5)

Un moyen assez efficace de mesurer la résistance d'entrée  $R_i$  d'un appareil consiste à utiliser la méthode dite de la tension moitié. On réalise pour cela le circuit électrique ci-contre, avec  $R_v$  une résistance variable (rhéostat).

On fait alors varier la résistance  $R_v$  tout en mesurant les tensions  $E$  (aux bornes du générateur) et  $U$ . On suppose dans un premier temps le générateur comme étant un générateur de tension idéal.



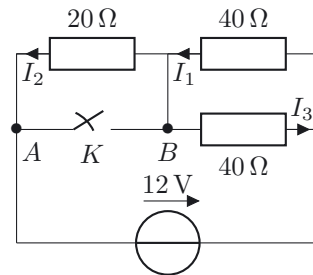
1. Montrer qu'alors  $U$  s'exprime facilement en fonction de  $E$ ,  $R_i$  et  $R_v$ .
2. Pour quelle valeur particulière de  $R_v$  aboutit-on à  $U = E/2$ ? Commenter le nom donné à cette méthode.
3. On tient maintenant compte de la résistance interne  $r$  du générateur. Établir l'expression de la tension  $U_e$  aux bornes de celui-ci. La résistance  $r$  intervient-elle dans la détermination de  $R_i$ ?

### Exercice 5.3 Intensité et tension dans un circuit avec interrupteur

➔ Méthodes (5.4) (5.7)

On considère le circuit ci-contre.

1. Que valent l'intensité du courant  $I_2$  dans la résistance de  $20\ \Omega$  ainsi que la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  lorsque l'interrupteur  $K$  est ouvert?
2. Mêmes questions lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé.

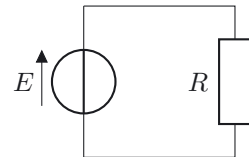


### Exercice 5.4 Shunt ampèremétrique

➔ Méthodes (5.1) (5.8)

Pour mesurer l'intensité du courant dans le circuit ci-contre on dispose d'un ampèremètre pouvant mesurer des intensités allant jusqu'à  $1,0\ \text{mA}$  et dont la résistance interne  $R_A$  est égale à  $10\ \Omega$ .

Pour les applications numériques on prendra :  $E = 9,0\ \text{V}$  et  $R = 1,0\ \text{k}\Omega$ .



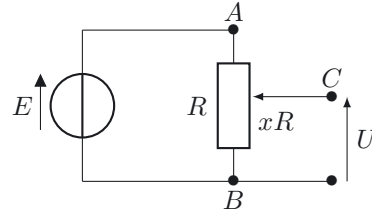
1. Comment doit-on connecter l'ampèremètre?
2. L'appareil dont on dispose est-il adapté à la mesure à réaliser?
3. Pour contourner la difficulté on connecte en parallèle à l'ampèremètre une résistance  $R_S$  dite résistance de shunt. Dessiner le montage.
4. L'ampèremètre est livré avec trois résistances de shunt :  $0,5\ \Omega$  ;  $1,0\ \Omega$  ;  $1,5\ \Omega$ .  
Quelle est la mieux adaptée à la mesure à réaliser?

5. La présence de l'ampèremètre et de sa résistance de shunt modifie-t-elle de façon appréciable la valeur de l'intensité dans la résistance  $R$  ?

### Exercice 5.5 Montage potentiométrique

→ Méthodes (5.3) (5.5) (5.7)

On considère le montage potentiométrique ci-contre. La résistance totale  $R$  du potentiomètre est placée entre les points  $A$  et  $B$  tandis que son curseur est relié au point  $C$  de sorte que la résistance entre  $B$  et  $C$  soit égale à  $xR$  (avec  $0 \leq x \leq 1$ ).



1. Exprimer  $U$  en fonction des données en utilisant la notion de diviseur de tension.
2. Retrouver le résultat précédent en utilisant la loi des mailles.

On connecte maintenant entre les points  $B$  et  $C$  une résistance utilisatrice  $R_u$ .

3. Déterminer la nouvelle valeur de  $U$  en fonction des données.
4. À quelle condition portant sur la résistance du potentiomètre peut-on utiliser, en première approximation, le résultat de la première question ?

### Exercice 5.6 Étude du point de fonctionnement d'une varistance

→ Méthode (5.9)

Les varistances sont des composants utilisés pour protéger les circuits et réseaux de distribution d'éventuelles surtensions. En effet, l'impédance de la varistance décroît avec la tension à ses bornes, ce qui permet l'évacuation du courant créant la surtension.

Un étudiant désirent étudier ce composant décide d'en tracer la caractéristique courant-tension, en utilisant un générateur de tension continue.

1. Quel montage doit-il réaliser ?
2. Il obtient alors le tableau de valeurs suivant :

$U$ (V)	0,00	0,76	1,20	1,74	2,11	2,52	3,00	3,46	4,10
$I$ (mA)	0,00	1,53	2,80	4,87	6,68	9,02	12,3	16,2	22,2

$U$ (V)	4,47	5,07	5,54	6,00	6,45	7,00	7,40
$I$ (mA)	27,2	36,2	44,4	53,5	66,2	83,4	98,3

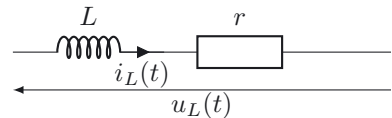
Tracer pour lui la caractéristique courant-tension de la varistance. Est-ce un composant linéaire ? Comment évolue sa résistance  $R$  avec la tension à ses bornes ?

3. Cette varistance est placée en série avec une résistance  $R' = 200 \Omega$  et on alimente le tout avec un générateur de tension continue de f.e.m  $E = 10,0 \text{ V}$ . Comment utiliser la caractéristique précédente pour trouver le point de fonctionnement de ce montage, c'est-à-dire l'intensité parcourant cette varistance et la tension à ses bornes ? Comment évolue ce point de fonctionnement avec  $E$  ?

4. L'affirmation de l'introduction « l'impédance de la varistance décroît avec la tension à ses bornes, ce qui permet l'évacuation du courant créant la surtension » est-elle justifiée ?

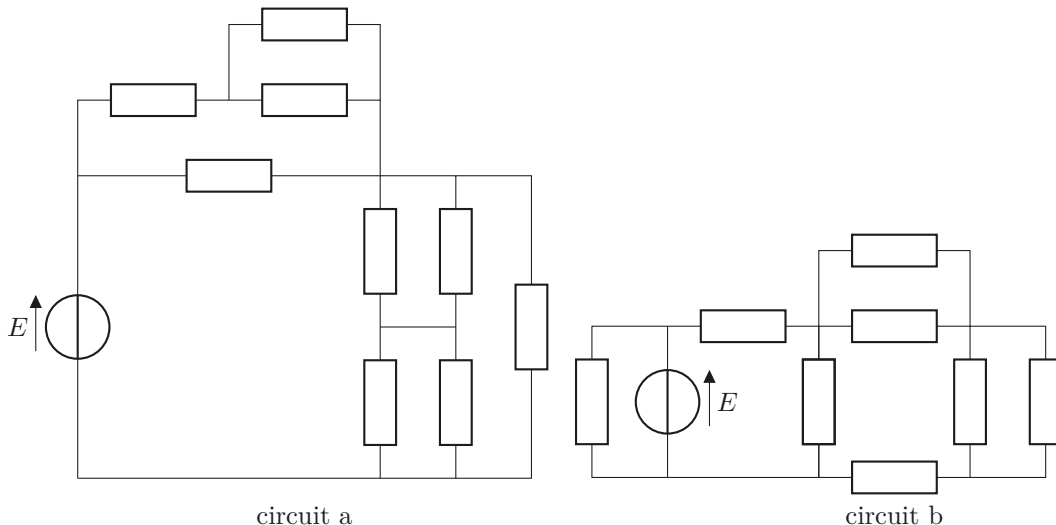
### Exercice 5.7 Caractéristiques statiques

- On considère une bobine idéale d'inductance  $L$ , en convention récepteur.
  - Rappeler la relation existant entre la tension  $u_L(t)$  à ses bornes et l'intensité  $i_L(t)$  la traversant. On précisera sur un schéma les orientations de ces deux grandeurs.
  - Que devient la tension aux bornes de cette bobine idéale lorsqu'on travaille en régime permanent ? En déduire l'allure de la caractéristique statique de cette bobine idéale.
- En pratique, une bobine réelle est constituée de l'association série d'une inductance  $L$  et d'une résistance comme indiqué sur la figure ci-contre.  
Donner la nouvelle expression de  $u_L(t)$ . Que devient cette tension lorsqu'on travaille en régime permanent ? En déduire la caractéristique statique de cette bobine réelle.
- On considère à présent un condensateur idéal de capacité  $C$ , en convention récepteur.
  - Rappeler la relation existant entre la tension  $u_C(t)$  à ses bornes et l'intensité  $i_C(t)$  le traversant. On précisera sur un schéma les orientations de ces deux grandeurs.
  - Que devient l'intensité parcourant ce condensateur lorsqu'on travaille en régime permanent ? En déduire l'allure de la caractéristique statique de ce condensateur.



### Exercice 5.8 Combien de nœuds ?

On considère les deux circuits électriques suivants, constitués de dipôles (de natures non précisées) et d'une source de tension.



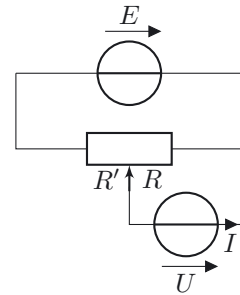
Pour chacun d'eux, identifier le nombre de nœuds.

**Exercice 5.9** Mesure d'une f.e.m par la méthode d'opposition

Pour mesurer une température  $T$  on peut utiliser un thermocouple, capteur facile à mettre en œuvre qui délivre une tension  $U$  fonction de  $T$ . L'utilisation de tables de référence permet, connaissant  $U$ , de remonter à  $T$ . Une bonne détermination de  $T$  nécessite une mesure précise de  $U$ . Pour cela on a souvent recours à une méthode dite d'opposition utilisant le montage représenté ci-dessous. Aux bornes d'un générateur de tension stabilisé de f.e.m  $E$  on connecte un rhéostat de résistance totale  $R_T$ .

Dans un premier temps, le thermocouple, traité comme un générateur de tension de f.e.m inconnue  $U$ , est connecté comme indiqué sur la figure. On note  $R$  la résistance du rhéostat en parallèle avec le thermocouple et  $R'$  la résistance complémentaire ( $R+R' = R_T$ ). Un galvanomètre, non représenté, permet la mesure de l'intensité  $I$  du courant circulant dans la branche du thermocouple.

On cherche la position du curseur du rhéostat pour laquelle l'intensité  $I$  s'annule. On note alors  $R_1$  la valeur de  $R$  correspondante. Dans un second temps, on reprend la manipulation en remplaçant le thermocouple par un générateur de tension de f.e.m  $E_0$ . On note  $R_2$  la nouvelle valeur de  $R$  permettant d'annuler  $I$ .



1. Montrer que  $U$  s'exprime facilement en fonction de  $E_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .
2. La résistance interne des générateurs (thermocouple, générateur de référence) intervient-elle dans la détermination de  $U$ ? Commenter.

**Exercice 5.10** Problème du quotidien

Une étudiante, logeant dans un appartement assez petit, ne dispose pas de beaucoup de prises électriques dans sa cuisine. Elle décide donc de brancher sur la même prise 220 V à la fois sa bouilloire électrique et son grille-pain. Les puissances consommées en régime sinusoïdal par la bouilloire et le grille-pain valent respectivement 1300 W et 1000 W. La prise est protégée par un fusible de 10,0 A.

1. Faire le schéma électrique du circuit ainsi réalisé.
2. L'étudiante pourra-elle utiliser de manière simultanée sa bouilloire et son grille-pain ?
3. Si seule la bouilloire est branchée, quelle énergie sera consommée pour 10 min de fonctionnement ?

**Exercice 5.11** Adaptation d'impédance

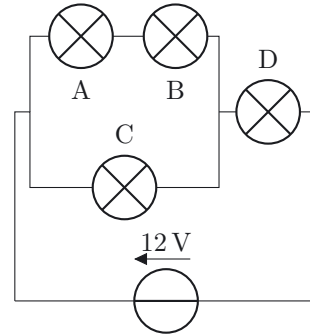
Une batterie est caractérisée par sa force électromotrice  $E = 12\text{ V}$  et par sa résistance interne  $r = 2,0\ \Omega$ . On connecte cette batterie à un circuit d'utilisation modélisé par une résistance  $R$ .

1. Faire le schéma électrique du circuit ainsi réalisé.
2. Déterminer la puissance  $\mathcal{P}(R)$  reçue par la résistance  $R$  en fonction de  $E$ ,  $r$  et  $R$ .
3. Étudier la fonction  $\mathcal{P}(R)$  et tracer sa courbe représentative. Pour quelle valeur de  $R$  la puissance  $\mathcal{P}(R)$  est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur numérique ?

### Exercice 5.12 Mais que se passe-t-il lorsqu'une ampoule grille ?

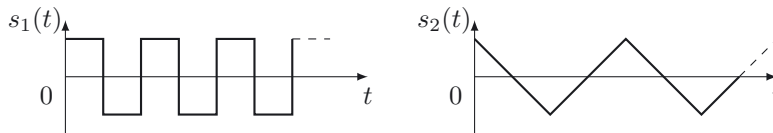
Quatre ampoules identiques  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , de résistance  $R = 40\ \Omega$ , sont connectées comme l'indique le schéma ci-dessous.

1. Déterminer la puissance consommée par chacune des quatre ampoules.
2. L'ampoule  $A$  grille brutalement. Déterminer alors la puissance consommée par les trois ampoules restantes, ainsi que la tension aux bornes de l'ampoule grillée  $A$ .
3. Dans les guirlandes des sapins de Noël, est-il préférable de mettre les différentes ampoules en série ou en parallèle ?



### Exercice 5.13 Réponses à des signaux créneaux ou triangles

On considère les deux signaux physiques périodiques  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  dont les allures sont représentées ci-dessous :



Dans la suite, suivant les cas traités,  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  pourront représenter une tension ou un courant.

1. On considère une bobine idéale d'inductance  $L$ , en convention récepteur. On note  $u_L(t)$  la tension à ses bornes et  $i_L(t)$  l'intensité du courant la parcourant. Représenter l'allure de  $u_L(t)$  pour  $i_L(t) = s_1(t)$ , puis pour  $i_L(t) = s_2(t)$ .
2. On considère un condensateur idéal de capacité  $C$ , en convention récepteur. On note  $u_C(t)$  la tension à ses bornes et  $i_C(t)$  l'intensité du courant le parcourant. Représenter l'allure de  $i_C(t)$  pour  $u_C(t) = s_1(t)$ , puis pour  $u_C(t) = s_2(t)$ .

# Corrections

## Interro de cours

1. Réponse (b).
2. Réponse (a).
3. Toutes les charges circulant dans  $R_1$  ne circulent pas dans  $R_2$  donc les résistances ne sont pas en série. La tension  $U_{AB}$  aux bornes  $R_1$  n'est pas identique à la tension  $U_{BC}$  aux bornes aux bornes  $R_2$  donc les résistances ne sont pas en parallèle. Réponse (c).
4. Réponse (c), pour des raisons similaires à la question précédente.
5.  $\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{R_5 + R_4} + \frac{1}{R_1 + R_{23}}$  avec  $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ .  
Après calcul avec  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$ , on trouve  $R_{AC} = \frac{6R}{7}$ . Réponse (b).
6. Si cela vous est nécessaire, n'hésitez pas à redessiner le circuit pour que le point  $B$  apparaisse à l'extrémité gauche du réseau et le point  $C$  apparaisse à l'extrémité droite du réseau.  
 $\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_4 + R_5}$ .  
Après calcul avec  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$ , on trouve  $R_{BC} = \frac{3R}{7}$ . Réponse (b).
7. Il y a 3 mailles donc on ne peut écrire que 2 lois des mailles (la troisième serait redondante avec les autres). Il y 2 nœuds donc on ne peut écrire qu'une loi des nœuds (la deuxième serait équivalente à la première). Réponse (a)
8. Faire un choix de fléchage n'impose évidemment pas le sens du courant ni celui des charges. Les intensités associées sont algébriques. Réponse (b).
9. Un diviseur de tension donne :  $U_{DC} = \frac{R}{R+R}E = \frac{E}{2}$ . Mais  $U_{CD} = -U_{DC} = -\frac{E}{2}$ . Réponse (b).
10. Un diviseur de tension donne :  $U_{BC} = \frac{R_{BC}}{R+R_{BC}}E = \frac{E}{3}$  puisque  $R_{BC} = \frac{R}{2}$  est la résistance équivalente à l'association parallèle des deux résistances  $R$  entre  $B$  et  $C$ . Réponse (c).
11. Un diviseur de courant permet de vérifier  $I_2 = I_3 = \frac{R}{R+R}I_1 = \frac{I_1}{2}$ .  
Un autre diviseur de courant permet de vérifier  $I_1 = \frac{2R}{2R + (R + R_{BC})}I = \frac{2R}{2R + (\frac{3R}{2})}I = \frac{4}{7}I$ .  
En utilisant la loi des nœuds :  $I_5 = I - I_1 = \frac{3}{7}I$ . Donc  $I_1 \neq I_5$ . Réponse (d).

## Exercice 5.1

1. a. La loi des nœuds nous indique que  $i_A = i + i_V$ , où  $i_V$  est l'intensité circulant dans le voltmètre. Donc  $i_A \neq i$  et une erreur est commise sur la mesure de l'intensité  $i$ . En revanche la tension mesurée par le voltmètre est bien la tension  $u$  aux bornes du dipôle. Le montage n'introduit donc pas d'erreur sur la mesure de  $u$ .
- b. Nous avons  $i = \frac{u}{R}$ ,  $i_V = \frac{u}{R_V}$  et  $u_V = u$ . La loi des nœuds amène à  $i_A = u \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V} \right)$ . L'erreur relative sur la mesure de  $i$  s'écrit  $\frac{i_A - i}{i} = \frac{R}{R_V}$ . Elle est inférieure à 0,01 si  $R < 0,01R_V = 10 \text{ k}\Omega$ .



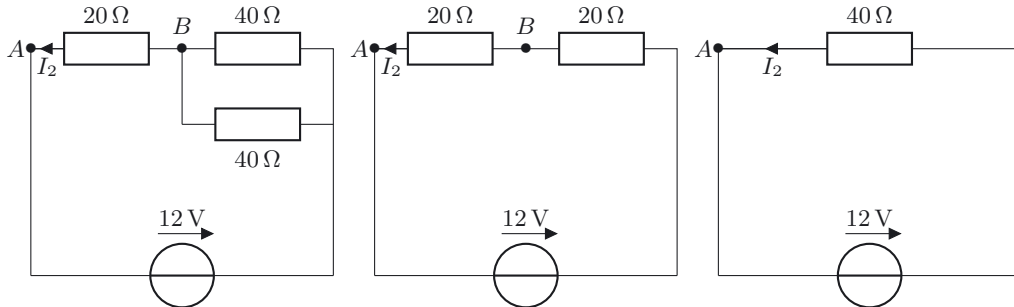
2. a. L'intensité  $i_A$  est maintenant égale à  $i$ , l'ampèremètre étant situé dans la même branche que le dipôle. Le montage n'introduit donc pas d'erreur sur la mesure de  $i$ . En revanche, le voltmètre mesure la tension aux bornes de l'association série de l'ampèremètre et du dipôle. Donc  $u_V \neq u$  et le montage induit une erreur sur la mesure de la tension  $u$ .
- b. La tension lue s'écrit :  $u_V = u + R_A i$ , avec  $u = R i$ . Rappelons que  $i_A = i$ . L'erreur relative sur la mesure de  $u$  s'écrit  $\frac{u_V - u}{u} = \frac{R_A}{R}$ . Elle est inférieure à 0,01 si  $R > 100 R_A = 1,0 \text{ k}\Omega$ .

**Exercice 5.2**

1. La notion de diviseur de tension permet d'écrire :  $U = \frac{R_i}{R_i + R_v} E$ .
2. Nous constatons que  $U = E/2$  pour  $R_v = R_i$ . La méthode consiste donc à modifier  $R_v$  jusqu'à ce que la tension mesurée soit la moitié de  $E$ . La valeur de  $R_v$  correspond alors à celle de la résistance d'entrée  $R_i$  de l'appareil.
3. En notant  $I$  l'intensité du courant dans le circuit (convention générateur pour le générateur), la tension  $U_e$  aux bornes du générateur s'écrit :  $U_e = E - rI$ . La loi des mailles permet d'écrire :  $E = (R_v + R_i + r)I$ . Par élimination de  $I$  on obtient  $U_e = E - r \frac{E}{R_v + R_i + r} \neq E$ . Nous avons par contre  $U = \frac{R_i}{R_i + R_v} U_e$ . Étant donné que la tension d'entrée effectivement mesurée est  $U_e$  et non  $E$ , pour  $R_v = R_i$ , nous aurons toujours  $U = U_e/2$  : la résistance d'entrée du générateur n'intervient donc pas dans la détermination de  $R_i$ .

**Exercice 5.3**

1. Lorsque  $K$  est fermé,  $I_2 = 0 \text{ A}$  puisque la résistance en parallèle de  $K$  est court-circuitée. La tension  $U_{AB}$  est donc nulle.
2. Lorsque  $K$  est ouvert, nous pouvons dessiner un circuit équivalent (schéma de droite) en associant les résistances et en déduire la résistance totale du circuit.



L'intensité  $I_2$  se déduit du schéma de droite :  $I_2 = \frac{12}{40} = 0,30 \text{ A}$ . La tension  $U_{AB}$  se déduit du schéma du milieu en utilisant la notion de diviseur de tension :  $U_{AB} = -\frac{20}{20 + 20} 12 = -\frac{12}{2} = -6,0 \text{ V}$ .

**Exercice 5.4**

1. L'ampèremètre doit être mis en série avec la résistance  $R$ .
2. L'intensité dans le circuit a pour expression :  $I = \frac{E}{R}$ . Numériquement elle vaut :  $I = 9,0 \text{ mA}$ . Elle est trop importante pour l'ampèremètre dont on dispose.
3. Schéma du montage :

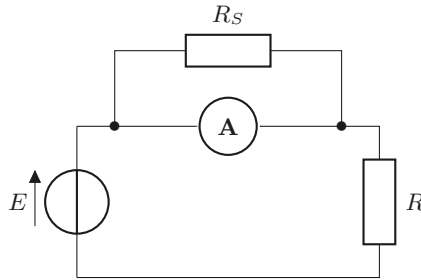


figure 1 : schéma du montage

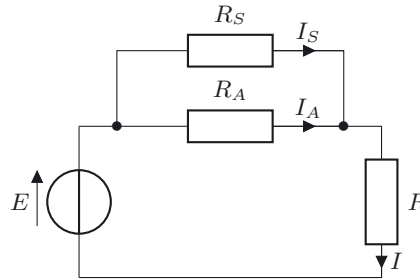


figure 2 : schéma équivalent

4. À partir du schéma équivalent on calcule l'intensité  $I_A$  dans l'ampèremètre en utilisant la notion de diviseur de courant :  $I_A = \frac{R_S}{R_S + R_A} I$ . Celle-ci doit être inférieure à l'intensité maximale  $I_{\max}$  admissible par l'ampèremètre, donc  $\frac{R_S}{R_S + R_A} I \leq I_{\max}$ . On en déduit que  $R_S \leq \frac{I_{\max}}{I - I_{\max}} R_A$ . En prenant  $I = 9,0 \text{ mA}$ ,  $I_{\max} = 1,0 \text{ mA}$  et  $R_A = 10 \Omega$  on obtient  $R_S \leq 1,25 \Omega$ . La résistance de shunt la mieux adaptée à la mesure est celle pour laquelle l'intensité dans l'ampèremètre est la plus grande, tout en étant inférieure à la valeur maximale admissible  $I_{\max}$ . C'est donc la deuxième :  $R_S = 1,0 \Omega$ .
5. Les résistances en parallèle  $R_A$  et  $R_S$  sont équivalentes à une résistance  $R_{eq} = \frac{R_A R_S}{R_A + R_S}$ , elle-même en série avec la résistance  $R$ . La résistance vue par le générateur est alors  $R'_{eq} = R_{eq} + R$ . L'intensité dans la résistance  $R$  vaut donc  $I = \frac{E}{R'_{eq}}$ . Numériquement on trouve  $I = 9,0 \text{ mA}$ . À la précision de deux chiffres significatifs la présence de l'ampèremètre et de son shunt ne modifie pas de façon appréciable la valeur de  $I$  calculée à la question 2.

### Exercice 5.5

- En utilisant la notion de diviseur de tension, nous obtenons directement :  $U = \frac{xR}{R} E = xE$ .
- De la loi des mailles nous déduisons :  $E = RI$  (avec un choix d'orientation de  $I$  correspondant à la convention générateur pour le générateur), puis de la loi d'Ohm :  $U = xRI = xR \frac{E}{R} = xE$ .
- Entre les points  $B$  et  $C$  nous avons maintenant, comme le montre la figure 2, deux résistances  $xR$  et  $R_u$  en parallèle. Cette association est équivalente à la résistance  $R_{eq} = \frac{xR R_u}{xR + R_u}$ .

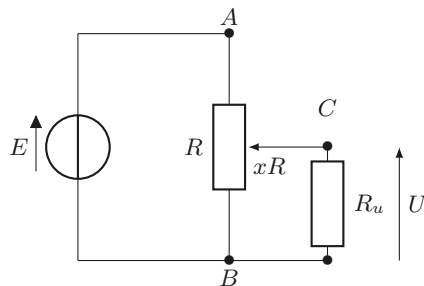


figure 1

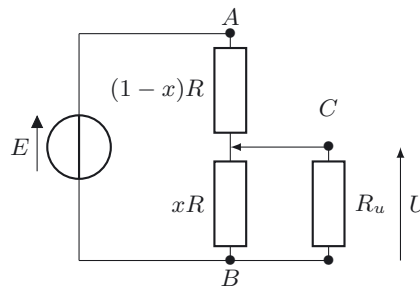


figure 2

La notion de diviseur de tension amène à :  $U = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + (1-x)R} E = \frac{1}{1 + (1-x) \frac{R}{R_{eq}}} E$ .

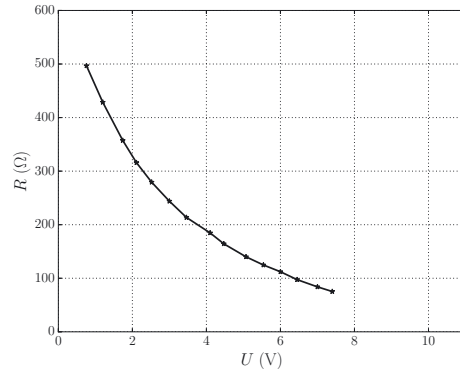
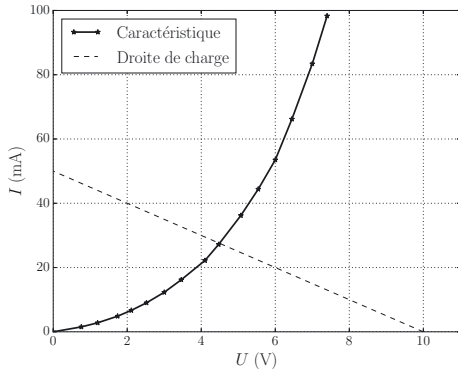
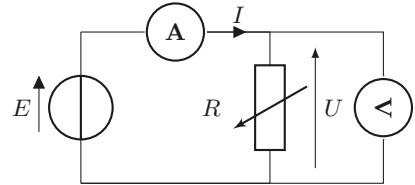
En remplaçant  $R_{eq}$  par son expression :

$$U = \frac{1}{1 + (1-x)\frac{xR + R_u}{xR_u}} E = \frac{x}{x + (1-x)\frac{xR + R_u}{R_u}} E = U = \frac{x}{1 + x(1-x)\frac{R}{R_u}} E.$$

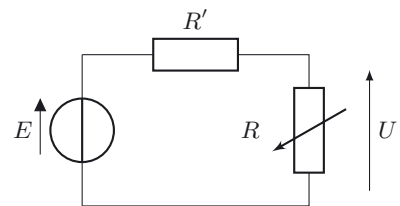
4. Le résultat précédent s'identifie en première approximation à celui de la première question lorsque  $x(1-x)\frac{R}{R_u} \ll 1$ . Ceci est réalisé pour  $R \ll R_u$ .

**Exercice 5.6**

1. L'étudiant peut utiliser un ampèremètre et un voltmètre selon le montage ci-contre.
2. La caractéristique est tracée ci-dessous (figure de gauche). Ce composant n'est pas linéaire, la tension  $U$  n'étant pas proportionnelle à  $I$ . La pente de la courbe augmente lorsque  $U$  augmente. La résistance  $R$  de la varistance diminue donc car la pente est inversement proportionnelle à  $R$ . Cela est confirmé par le tracé de  $R = \frac{U}{I}$  en fonction de  $U$  (figure de droite).



3. Le montage est représenté ci-contre. La loi des mailles permet d'écrire la tension aux bornes de la varistance :  $U = E - R'I$ . L'intersection de la droite de charge d'équation  $U = E - R'I$  (en pointillés sur la figure) et de la caractéristique de la varistance donne le point de fonctionnement. On en détermine les coordonnées par interpolation :  $U = 4,5 \text{ V}$  et  $I = 28 \text{ mA}$ . Lorsque  $E$  augmente, la droite de charge se translate verticalement et le point de fonctionnement décrit la caractéristique de la varistance dans le sens d'une augmentation de l'intensité.

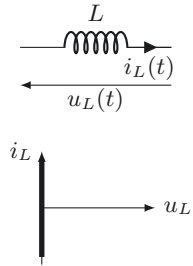


4. Le tracé de la résistance en fonction de  $U$  montre bien que la résistance diminue lorsque la tension  $U$  augmente.

**Exercice 5.7**

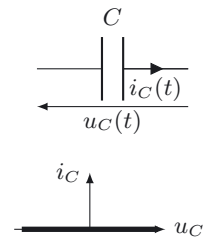
1. Pour la bobine idéale :

- a. Les orientations étant rappelées sur le schéma ci-contre, la relation liant  $u_L$  et  $i_L$  s'écrit :  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ .
- b. En régime permanent  $\frac{di_L}{dt} = 0$  donc la tension aux bornes de la bobine idéale est nulle. Elle se comporte comme un court-circuit (interrupteur fermé). L'allure de sa caractéristique statique est représentée ci-contre en trait gras.



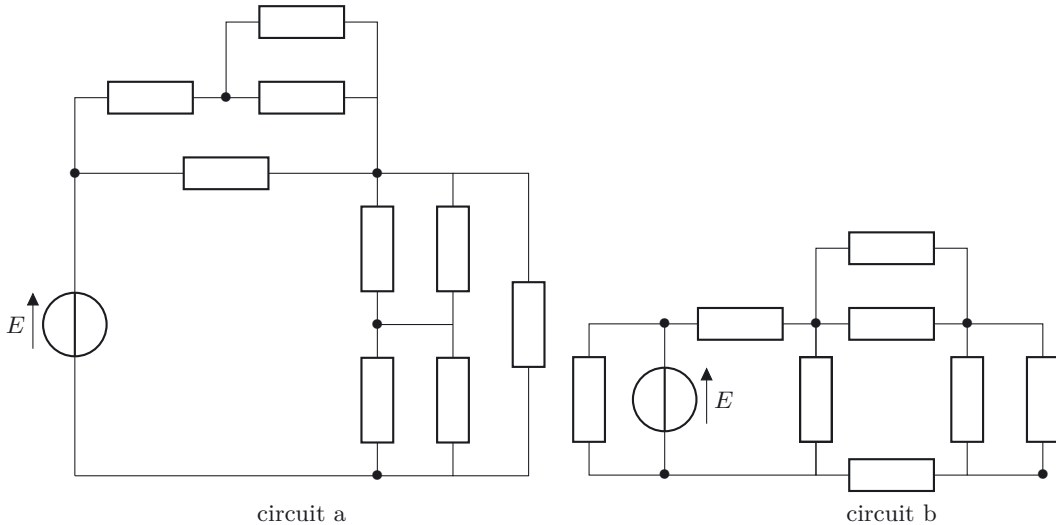
- 2. Pour la bobine réelle, la tension  $u_L$  devient :  $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t) + r i_L(t)$ . En régime permanent  $\frac{di_L}{dt} = 0$ . La caractéristique statique de la bobine réelle est donc celle d'une résistance  $r$ .
- 3. Pour le condensateur idéal :

- a. Les orientations étant rappelées sur le schéma ci-contre, la relation entre  $u_C$  et  $i_C$  s'écrit :  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ .
- b. En régime permanent  $\frac{du_C}{dt} = 0$  donc  $i_C = 0$ . L'allure de sa caractéristique statique est représentée ci-contre en trait gras.



**Exercice 5.8**

1. Mettons les nœuds en évidence (●) sur les schémas :



Les circuits a et b possèdent tous les deux 5 nœuds.

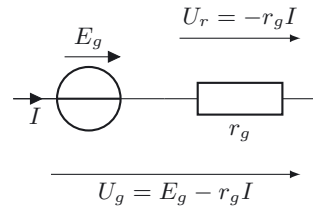
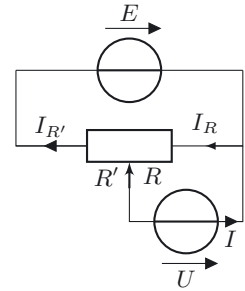
**Exercice 5.9**

- En notant  $I_R$  et  $I_{R'}$  les intensités des courants circulant dans  $R$  et  $R'$ , la loi des nœuds permet d'écrire :  $I_{R'} = I_R - I$ . Lorsque  $I = 0$  et  $R = R_1$ ,  $I_R = I_{R'}$ , d'où  $E = R'I_{R'} + R_1I_R = R_T I_R$  et  $U = R_1 I_R$ . On en déduit  $R_1 = R_T \frac{U}{E}$ . En remplaçant  $U$  par  $E_0$ , on obtient de la même façon  $R_2 = R_T \frac{E_0}{E}$ .

En éliminant  $E$  des relations précédentes, on obtient :  $U = E_0 \frac{R_1}{R_2}$ .

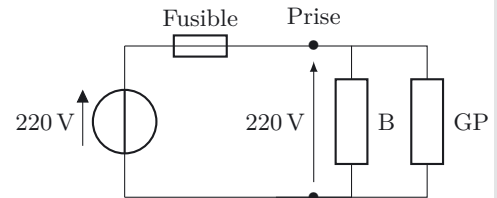
- Un générateur de tension réel étant modélisé par un générateur de tension idéal de f.e.m  $E_g$  en série avec une résistance interne  $r_g$ , la tension à ses bornes vaut  $U_g = E_g - r_g I$ . Dans la branche du capteur où l'intensité du courant est nulle, la présence d'une résistance interne ne modifie donc pas la tension aux bornes de  $R$ . Si le générateur de f.e.m  $E$  possède une résistance interne  $R_e$ , les valeurs de  $R_1$  et  $R_2$  sont remplacées par :  $R'_1 = (R_T + R_e) \frac{U}{E}$  et  $R'_2 = (R_T + R_e) \frac{E_0}{E}$ . Nous obtenons donc toujours  $U = E_0 \frac{R'_1}{R'_2}$ , avec  $R'_1$  et  $R'_2$  obtenues expérimentalement en annulant l'intensité  $I$ .

La détermination de  $U$  ne nécessitant pas la connaissance de la résistance interne des générateurs, cette méthode est très précise.



**Exercice 5.10**

- Le grille-pain  $GP$  et la bouilloire  $B$  sont branchés en dérivation sur la même prise. Le schéma électrique est représenté ci-contre.



- La donnée des puissances consommées permet de déduire l'intensité ( $I_B$  ou  $I_{GP}$ ) circulant dans chaque appareil, sachant que la tension aux bornes de ceux-ci est  $U = 220$  V. Pour la bouilloire on obtient :  $I_B = \frac{1300}{220} = 5,91$  A et pour le grille-pain :  $I_{GP} = \frac{1000}{220} = 4,55$  A. L'intensité totale vaut alors :  $I_B + I_{GP} = 10,5$  A. Elle est supérieure à l'intensité maximale autorisée (10 A). L'étudiante ne pourra donc pas utiliser ses deux appareils simultanément.
- Pour connaître l'énergie  $E_B$  consommée par la bouilloire, il suffit de multiplier sa puissance par la durée de fonctionnement (600 s). On trouve  $E_B = 7,80 \cdot 10^5$  J.

**Exercice 5.11**

- Le schéma électrique est représenté ci-contre.
- L'intensité circulant dans  $R$  s'écrit  $i = \frac{E}{R+r}$ .  
Nous en déduisons la puissance reçue par la résistance :

$$\mathcal{P}(R) = Ri^2 = R \frac{E^2}{(R+r)^2}$$

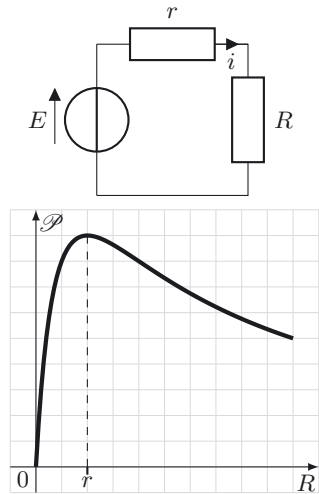
- La dérivée de la puissance par rapport à  $R$  a pour expression :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = E^2 \frac{(r-R)}{(r+R)^3}$$

Cette dérivée est nulle pour  $R = r$ , positive si  $R < r$  et négative sinon. La puissance est donc maximale pour  $r = R$  et vaut alors :

$$\mathcal{P}_{\max} = \mathcal{P}(r) = \frac{E^2}{4r} = 18 \text{ W}$$

La courbe demandée est tracée ci-contre.


**Exercice 5.12**

- L'association en série des ampoules  $A$  et  $B$  est équivalente à une résistance  $2R$  (schéma équivalent du haut). L'association en parallèle de cette résistance  $2R$  avec l'ampoule  $C$  est ensuite équivalente à une résistance  $\frac{2R}{3}$  (montage équivalent du bas).  
La résistance totale du circuit est celle de l'association en série des résistances  $R$  et  $\frac{2R}{3}$ , soit  $R_T = \frac{5R}{3}$ .

$$\text{On en déduit : } I = \frac{E}{R_T} = \frac{3E}{5R}.$$

La loi des nœuds appliquée au nœud  $N$  donne :  $I = I_1 + I_2$ . Par ailleurs  $2RI_1 = RI_2$ . De ces deux relations on déduit :

$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{E}{5R} \text{ et } I_2 = \frac{2I}{3} = \frac{2E}{5R}.$$

Les puissances consommées par les différentes ampoules valent

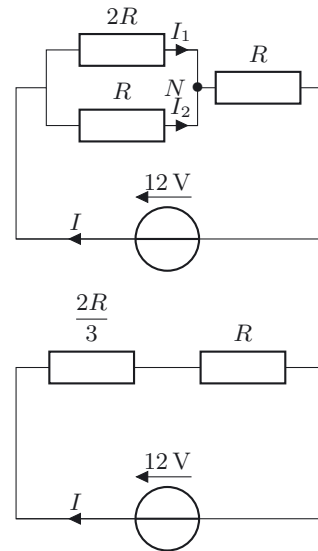
$$\text{alors : } \mathcal{P}_D = RI^2 = \frac{9E^2}{25R} = 1,3 \text{ W}, \mathcal{P}_C = RI_2^2 = \frac{4E^2}{25R} = 0,58 \text{ W}$$

$$\text{et } \mathcal{P}_A = \mathcal{P}_B = RI_1^2 = \frac{E^2}{25R} = 0,14 \text{ W}.$$

- Si  $A$  grille le courant ne circule plus dans sa branche et la résistance totale du circuit devient celle de l'association en série de  $C$  et  $D$ , soit  $2R$ . On en déduit l'intensité  $I$  du courant traversant  $C$  et  $D$  :  
 $I = \frac{E}{2R}$ , puis les puissances qu'elles dissipent :  $\mathcal{P}_C = \mathcal{P}_D = \frac{E^2}{4R} = 0,90 \text{ W}$ . La puissance dissipée dans  $B$ , traversée par aucun courant, est quant à elle nulle.

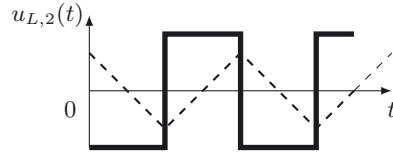
La tension aux bornes de  $A$  est la même que celle aux bornes de  $C$  soit  $\frac{E}{2} = 6,0 \text{ V}$ .

- Si  $A$  grille,  $C$ , montée en parallèle avec l'association série de  $A$  et  $B$ , pourra continuer de fonctionner. En revanche  $B$ , montée en série avec  $A$ , ne fonctionnera plus. Il est donc préférable de monter les ampoules en parallèle dans une guirlande de Noël.

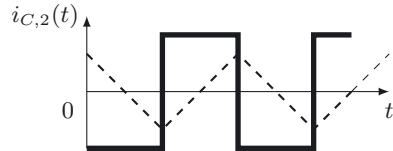


**Exercice 5.13**

1. Pour la bobine idéale :  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ . Nous en déduisons l'allure de la tension  $u_L$ , tracée en trait gras, qui est proportionnelle à la dérivée de  $i_L$  par rapport au temps :



2. Pour le condensateur idéal :  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ . Nous en déduisons l'allure de l'intensité  $i_C$ , tracée en trait gras, qui est proportionnelle à la dérivée de  $u_C$  par rapport au temps :







# Circuits linéaires du premier ordre

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi doit-on attendre entre les prises de deux photos successives avec flash ?

Qui a déjà utilisé un appareil photo a pu remarquer l'existence d'un délai minimal entre la prise de deux photos successives avec flash. Le fonctionnement de ce dernier nécessite effectivement un stockage d'énergie qui n'est pas instantané puis une restitution très rapide de celle-ci sous forme d'énergie lumineuse. Les composants présents dans le flash, susceptibles de stocker l'énergie, sont des condensateurs.

Dans ce chapitre, nous allons chercher à comprendre le principe de fonctionnement du circuit d'alimentation du flash en le modélisant simplement par un unique condensateur en série avec une résistance et nous réaliserons une étude expérimentale du montage.

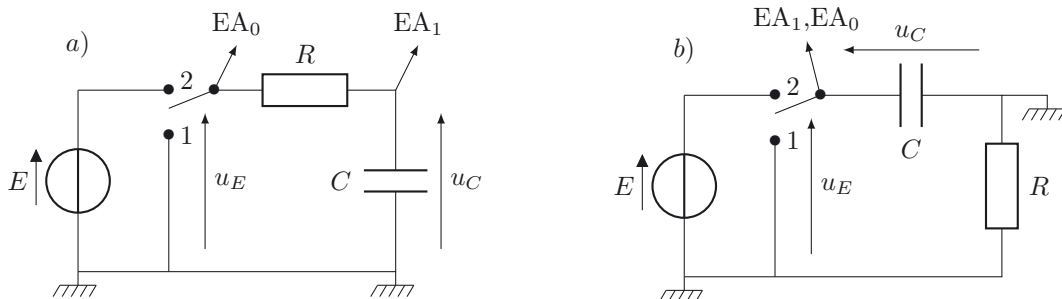
### ■ 1 Étude expérimentale

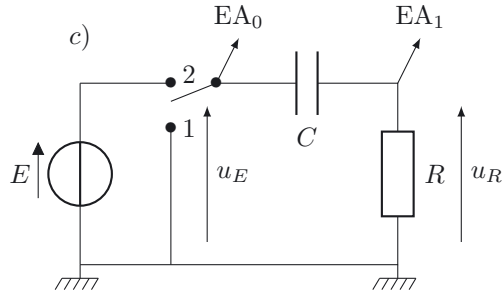
Le montage expérimental est composé d'un générateur de tension, d'une résistance, d'un interrupteur et du condensateur de l'appareil photo. Nous souhaitons visualiser au cours du temps l'échelon de tension  $u_E$  appliqué au circuit  $RC$  ainsi que la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur.



Dans un circuit électrique, il ne doit y avoir qu'une seule masse, commune à tous les appareils utilisés (générateur, carte d'acquisition, oscilloscope...).

Voici une proposition de montages expérimentaux où  $EA_0$  et  $EA_1$  représentent les Entrées Analogiques de la carte d'acquisition :





□ Quel est le circuit adapté à la visualisation au cours du temps de l'échelon  $u_E$  et de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur ?

**Circuit b** : il ne convient pas car les deux masses court-circuitent la résistance.

**Circuit c** : il ne convient pas car s'il ne comporte bien qu'une seule masse, en revanche la tension mesurée sur la voie  $EA_1$  est  $u_R$  et non  $u_C$ .

**Circuit a** : il convient car il comporte une seule masse et la voie  $EA_1$  mesure bien  $u_C$ .

En utilisant ce circuit *a*, nous réalisons une acquisition avec  $E = 5,0\text{ V}$ ,  $R = 180\ \Omega$  et  $C$  inconnu (le condensateur étant initialement déchargé). À  $t = 0$ , l'interrupteur est basculé de la position 1 à la position 2 ce qui permet de créer un échelon de tension aux bornes du dipôle  $RC$  (Figure 6.1).

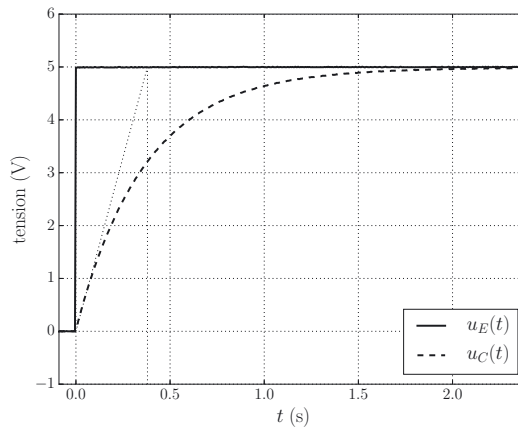


Figure 6.1. Courbe expérimentale : réponse du circuit  $RC$ .

□ Comment pouvons-nous commenter l'évolution de  $u_C$  en fonction du temps ?

Nous observons un retard à l'établissement de la tension aux bornes du condensateur. Cette tension varie de manière continue, de la valeur initiale nulle  $u_C(0) = 0$  à la valeur finale  $u_C(\infty) = E$ . Au bout de quelques dixièmes de seconde le signal n'évolue plus de façon perceptible dans le temps : un **régime permanent** est atteint. Avant ce régime permanent, nous observons un **régime transitoire**.

Par une méthode numérique, nous calculons la dérivée  $\dot{u}_C = \frac{du_C}{dt}$  puis nous la traçons en fonction de  $u_C$  (Figure 6.2).

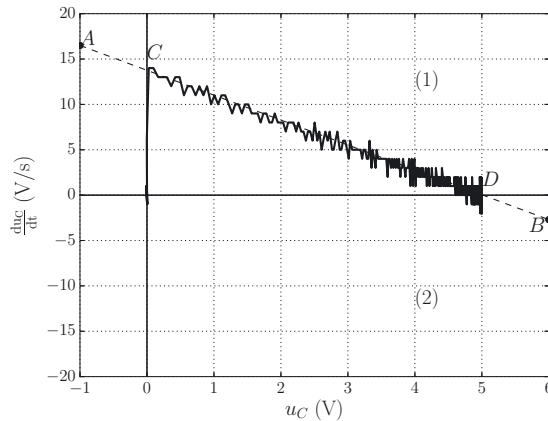


Figure 6.2. Trajectoire de phase associée à la charge du condensateur.

### Représentation dans le plan de phase

Cette nouvelle représentation graphique, éliminant le temps, s'appelle un portrait de phase. La courbe représentant  $\dot{u}_C$  en fonction de  $u_C$  est une **trajectoire de phase**.

□ Comment pouvons-nous commenter le portrait de phase de la figure 6.2 ?

- Le point  $C$  correspond à l'état initial dans lequel le condensateur est déchargé.
- Le point  $D$  correspond au régime permanent dans lequel  $\dot{u}_C = 0$  et  $u_C = \text{cste}$ .
- Au cours de la charge du condensateur  $\dot{u}_C > 0$  donc  $u_C$  croît. La trajectoire de phase est parcourue de gauche à droite, de  $C$  vers  $D$ .

De plus, le portrait de phase suggère une allure affine :

$$(6.1) \quad \frac{du_C}{dt} = au_C + b$$

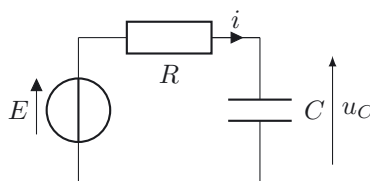
Dans la partie suivante, une étude théorique permettra de retrouver la forme de cette équation et de déterminer la capacité  $C$  du condensateur.



Une trajectoire de phase se parcourt de gauche à droite dans la partie supérieure (1) où  $\dot{u}_C > 0$  ( $u_C$  croît) et de droite à gauche dans la partie inférieure (2) où  $\dot{u}_C < 0$  ( $u_C$  décroît).

## ■ 2 Interprétation théorique et mise en équation

Considérons le circuit simplifié suivant, lorsque  $t > 0$  :



La loi des mailles conduit à :

$$(6.2) \quad E = Ri + u_C$$

Avec  $i = C \frac{du_C}{dt}$  (condensateur en convention récepteur), nous obtenons l'équation différentielle :

$$(6.3) \quad \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{RC} + \frac{E}{RC}$$

Cette équation est identique à celle obtenue à partir du portrait de phase (équation 6.1) avec, par identification, une pente  $a = -1/RC$  et une ordonnée à l'origine  $b = E/RC$ .

Après avoir effectué une régression linéaire de la trajectoire de phase (figure 6.2) et en exploitant ses points  $A (x_A = -1,0 \text{ V}, y_A = 16,5 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1})$  et  $B (x_B = 6,0 \text{ V}, y_B = -2,7 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1})$  nous obtenons :  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -2,7 \text{ s}^{-1}$ . Nous en déduisons  $C = -1/aR \approx 2 \text{ mF}$ .

Cette méthode graphique nous permet de déterminer l'ordre de grandeur de  $C$ . Cependant, en raison du bruit lié à la dérivation numérique (figure 6.2), la mesure n'est pas d'une grande précision.

### ■ 3 Résolution de l'équation différentielle

Nous devrions pouvoir obtenir une valeur plus précise de  $C$  en exploitant la courbe de la figure 6.1. Pour cela, il nous faut résoudre l'équation différentielle 6.3 de la charge du condensateur. Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(6.4) \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec un second membre constant.

#### Méthode 6.1 : Résolution d'une équation différentielle du premier ordre

Soit l'équation différentielle :  $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\tau \in \mathbb{R}^+$ .

Sa solution générale, de la forme  $u(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \alpha\tau$ , est la somme de :

- La solution générale  $u_g(t)$  de l'équation sans second membre (équation homogène) :

$$u_g(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad K = \text{cste} \in \mathbb{R}$$

- La solution particulière constante  $u_p$  ( $\frac{du_p}{dt} = 0$ ) de l'équation complète :  $u_p = \alpha\tau$ .

La constante d'intégration  $K$  se détermine à partir de la condition initiale  $u(0)$  après avoir sommé la solution générale et la solution particulière.

➔ Exercices (6.1) (6.2)



Du point de vue physique, la solution de l'équation sans second membre intervient dans le régime transitoire en s'amortissant. Elle devient négligeable en régime permanent.



Attention aux signes des coefficients. Les solutions de l'équation  $\frac{du}{dt} - \frac{u}{\tau} = \alpha$ , avec  $\tau$  réel positif, divergent et n'aboutissent donc pas à un régime permanent.

Appliquons la méthode 6.1 décrite précédemment pour déterminer la loi de charge  $u_C(t)$  du condensateur, solution de l'équation 6.4.

La solution générale de l'équation homogène s'écrit  $u_{Cg}(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  avec  $\tau = RC$  et la solution particulière constante de l'équation complète est donnée par  $u_{Cp} = E$ .

Nous en déduisons :  $u_C(t) = E + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

Avant la fermeture de l'interrupteur le condensateur est déchargé ( $u_C(0^-) = 0$ ). La continuité de la tension aux bornes du condensateur impose  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ . D'où  $K = -E$  et :

$$(6.5) \quad u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$



Penser à ajouter la solution particulière à la solution de l'équation homogène avant de déterminer la constante d'intégration grâce à la condition initiale.

La constante  $\tau$  a la dimension d'un temps puisque l'argument d'une fonction mathématique est sans dimension. Elle porte le nom de **constante de temps**.

□ **Comment peut-on déterminer graphiquement la valeur de la constante de temps ?**

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \implies \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \implies \frac{du_C}{dt}(0) = \frac{E}{\tau}$$

Nous en déduisons l'équation de la tangente à l'origine à la courbe  $u_C(t)$  :  $f(t) = \frac{E}{\tau}t$ . Cette tangente intercepte l'asymptote de la courbe  $u_C(t)$  à la date  $t_1$  solution de l'équation  $\frac{E}{\tau}t_1 = E$ . D'où  $\tau = t_1$  (figure 6.1).

Graphiquement, nous trouvons  $\tau = 0,38$ s. Cette valeur nous conduit à une valeur de  $C$  égale à  $\tau/R = 2,1$  mF. Dans le contexte de l'appareil photo, c'est ce temps  $\tau$  qui est responsable (en partie) du délai entre deux prises de vues avec flash.

### Méthode 6.2 : Détermination graphique d'une constante de temps $\tau$

- Tracer la tangente à l'origine à la courbe  $u_C(t)$ .
- Déterminer l'abscisse  $\tau$  du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote de la courbe  $u_C(t)$ .

 Exercice (6.3)



La constante  $\tau$  donne l'ordre de grandeur de la durée de la charge du condensateur. En effet, on montre que l'écart relatif entre  $u_C(t)$  et sa limite  $E$  est inférieur à 5 % pour  $t > 3\tau$  et inférieur à 1 % pour  $t > 5\tau$ .

Pour finir, connaissant l'expression temporelle de la tension  $u_C$  aux bornes du condensateur, nous avons cherché à superposer une courbe théorique à la courbe expérimentale de la figure 6.1 en ajustant la valeur de la capacité du condensateur. Cet ajustement est représenté sur la figure 6.3, pour deux valeurs de capacité :  $C_1 = 1,0 \text{ mF}$  et  $C_2 = 2,1 \text{ mF}$ . Nous remarquons que pour la valeur  $C_2 = 2,1 \text{ mF}$ , la courbe théorique est parfaitement ajustée.

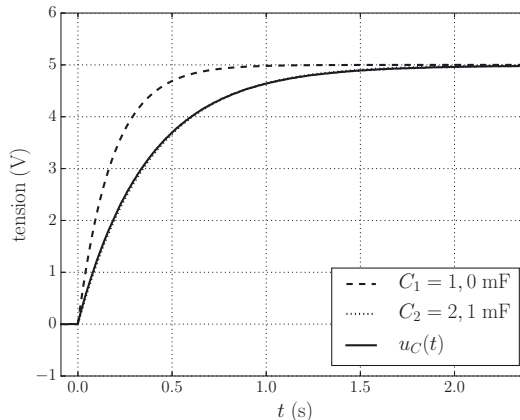


Figure 6.3. Ajustement des courbes théorique et expérimentale.

#### Bilan

L'étude expérimentale nous a permis de mettre en évidence le comportement d'un condensateur au cours de sa charge et de déterminer la valeur de sa capacité. Elle nous a également permis de comprendre que le délai entre deux prises de vue successives avec flash est lié à la constante de temps de la charge du condensateur, qui se décharge ensuite dans la lampe du flash.

## ■ 4 Approche énergétique

Il est également possible d'aborder la question du délai d'attente entre deux prises de vue successives avec flash par le biais de l'énergie nécessaire à son allumage.

Supposons pour cela que le fonctionnement du flash nécessite une énergie  $E_f$ .

□ **Quel est le temps nécessaire au stockage d'une énergie  $E_f$  dans le circuit ?**

L'énergie est stockée dans le condensateur. Nous en déduisons qu'au cours de la charge du condensateur, elle a pour expression :

$$(6.6) \quad E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C E^2 \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)^2$$

Pour atteindre l'énergie  $E_f$ , un temps d'attente est donc nécessaire. Ce temps est de l'ordre de quelques  $\tau$  si on utilise une tension de charge  $E$  telle que  $E_f$  soit proche de l'énergie maximale  $E_{\max} = \frac{1}{2}CE^2$  pouvant être stockée dans le condensateur.

□ **Le condensateur stocke-t-il toute l'énergie fournie par la batterie ?**

Pour répondre à cette question, faisons un bilan d'énergie dans le circuit  $RC$ . Reprenons l'équation de la loi des mailles (équation 6.2) obtenue précédemment et multiplions la par  $i$  :

$$(6.7) \quad Ei = Ri^2 + u_C i = Ri^2 + Cu_C \frac{du_C}{dt}$$

Nous sommes en convention générateur au niveau du générateur. Le terme  $Ei$  constitue donc la **puissance algébrique fournie** par celui-ci. Nous sommes par contre en convention récepteur au niveau de la résistance et du condensateur. Les termes  $Ri^2$  et  $u_C i$  constituent donc les **puissances algébriques reçues** respectivement par la résistance et le condensateur.

Ainsi, la puissance fournie par le générateur apparaît comme la somme de la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance et de la puissance reçue par le condensateur.

L'énergie délivrée par le générateur n'est donc pas intégralement stockée dans le condensateur. Une partie est dissipée dans la résistance.

Notons  $E_G$  l'énergie fournie par le générateur lors de la charge du condensateur :

$$E_G = \int_0^\infty E i dt = E \int_0^\infty i dt = E \int_0^\infty C \frac{du_C}{dt} dt = CE \int_0^\infty \frac{du_C}{dt} dt = CE(u_C(\infty) - u_C(0)) = CE^2$$

Or en fin de charge, l'énergie stockée dans le condensateur vaut  $E_G = \frac{1}{2}CE^2$ . Nous constatons donc que seule la moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur, l'autre moitié étant perdue par effet Joule dans la résistance, quelle que soit la valeur de  $R$ .

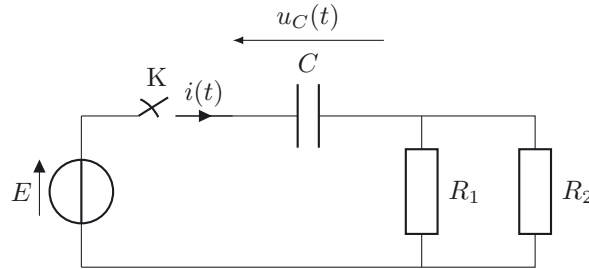
### Méthode 6.3 : Réalisation du bilan énergétique d'un circuit

- Appliquer la loi des mailles au circuit.
- Multiplier l'équation obtenue par l'intensité  $i$  du courant dans le circuit.
- Identifier chaque terme de la relation obtenue en terme de puissance fournie (dipôles en convention générateur) ou reçue (dipôles en convention récepteur).
- Intégrer par rapport au temps pour obtenir un bilan énergétique.

➔ Exercice (6.4)

## Interro de cours

On considère le circuit ci-dessous où le condensateur est initialement déchargé. À  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ . On donne  $R_1 = R_2 = R = 1,0 \text{ k}\Omega$ .



1. Parmi les équations différentielles proposées, choisir celle vérifiée par  $u_C$ .

(a)  $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{2RC} = \frac{E}{2RC}$ .

(b)  $\frac{du_C}{dt} + \frac{2u_C}{RC} = \frac{2E}{RC}$ .

(c)  $\frac{du_C}{dt} + \frac{2u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$ .

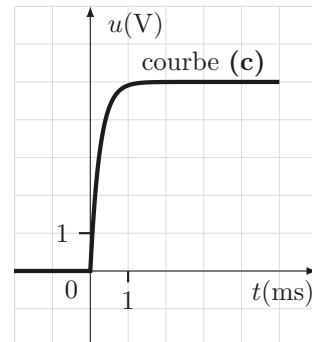
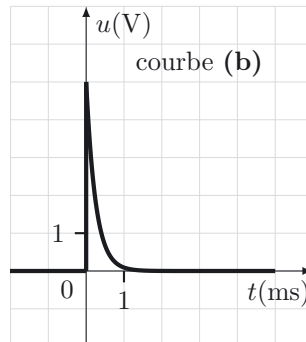
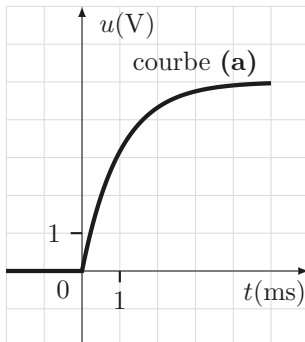
2. Que vaut  $i(0^+)$  ?

(a) 0.

(b)  $\frac{2E}{R}$ .

(c)  $\frac{R}{2E}$ .

3. Trois étudiants réalisent chacun le circuit décrit ci-dessus : l'étudiant 1 visualise la tension aux bornes des résistances, les étudiants 2 et 3 visualisent la tension aux bornes du condensateur mais l'étudiant 3 se trompe en réalisant le montage et connecte les résistances en série. Associer à chaque courbe le numéro de l'étudiant.





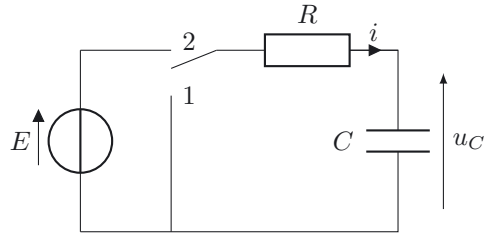
4. Quelle est la valeur de la constante de temps  $\tau$  du circuit ?
- (a)  $\tau = 0,25$  ms.
  - (b)  $\tau = 1,0$  ms.
  - (c)  $\tau = 2,5$  ms.
5. Quelle est la valeur de la capacité du condensateur ?
- (a)  $C = 0,50$   $\mu\text{F}$ .
  - (b)  $C = 0,10$   $\mu\text{F}$ .
  - (c)  $C = 50$  nF.
6. Quelle est l'énergie reçue par le condensateur pendant la charge ?
- (a)  $\frac{1}{2}CE^2$ .
  - (b)  $\frac{1}{2}C\left(\frac{E}{2}\right)^2$ .
  - (c)  $\frac{1}{2}C(2E)^2$ .
  - (d)  $\frac{1}{2}CE$ .
7. Quelle est l'énergie fournie par la source pendant la petite durée  $dt$  ?
- (a)  $Ei$ .
  - (b)  $ECdu_C$ .
  - (c)  $-ECdu_C$ .
8. Quelle est l'énergie fournie par la source pendant la charge ?
- (a)  $\frac{1}{4}CE^2$ .
  - (b)  $\frac{1}{2}CE^2$ .
  - (c)  $CE^2$ .
9. Parmi les affirmations suivantes, choisir celle(s) qui est (ou sont) juste(s) ?  
Par rapport au cas d'un condensateur  $C$  en série avec une seule résistance  $R$  :
- (a) le condensateur se charge plus vite et reçoit plus d'énergie au cours de la charge ;
  - (b) le condensateur se charge plus vite mais reçoit la même quantité d'énergie ;
  - (c) l'énergie dissipée par la résistance est moindre donc le rendement de la charge est meilleur.

## Exercices

### Exercice 6.1 Temps de charge d'un condensateur

➔ Méthode (6.1)

On considère le montage ci-contre, qui permet d'étudier la charge d'un condensateur de capacité  $C$  à travers une résistance  $R$ . Le générateur délivre une tension  $E$  pratiquement constante (à mieux que 1%).

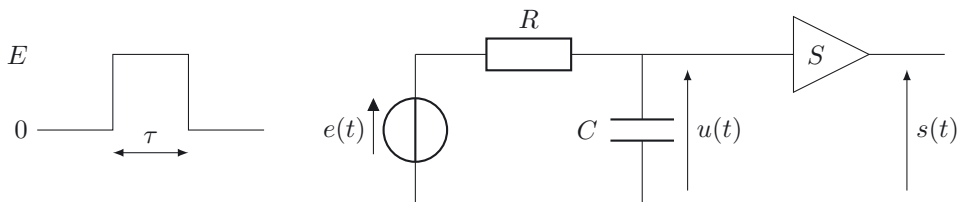


1. Comment faut-il procéder pour décharger complètement le condensateur puis pour le charger sous une tension  $E$  ?
2. Déterminer l'expression de la tension  $u_C(t)$ , où  $t = 0$  coïncide avec le début de la charge. En déduire le temps de relaxation  $\tau$ .
3. Soit  $\Delta t$  la durée qu'il faut pour obtenir une tension  $u_C$  égale à  $U$ , où  $U < E$ . Déterminer  $\Delta t/\tau$  en fonction de  $U/E$ .
4. Application numérique : calculer  $\Delta t/\tau$  pour  $U/E = 0,5$  ;  $U/E = 0,7$  ;  $U/E = 0,9$  ;  $U/E = 0,99$  et  $U/E = 0,999$ .
5. Exprimer la dérivée  $\frac{du_C}{dt}$  à l'instant  $t = 0$ , en fonction de  $E$  et  $\tau$ . En déduire une méthode pour tracer la tangente de la courbe  $u_C(t)$  en  $t = 0$ .
6. À l'aide de ces résultats, faire une représentation graphique précise de  $u_C(t)$ , en reportant  $\tau$  sur l'axe du temps et en plaçant précisément la tangente.
7. Compte tenu de la précision limitée des instruments de mesure (voltmètres, oscilloscopes, etc.), mais aussi des petites fluctuations présentes dans les tensions, on considère généralement que la charge est complète lorsque la tension  $u_C$  est à moins de 1% de la valeur asymptotique. En déduire le temps de charge en fonction de  $\tau$ .

### Exercice 6.2 Cellule $RC$ à retard

➔ Méthode (6.1)

Les cellules  $RC$  à retard sont utilisées en électronique numérique pour introduire un léger retard dans la propagation du signal. Dans le circuit suivant, la source de tension délivre une impulsion de hauteur  $E$  et de durée  $\tau$ .



Le bloc  $S$  placé en sortie réalise une opération de seuillage sur la tension  $u(t)$ , définie par :  
 si  $u < \frac{E}{2}$  alors  $s = 0$  et si  $u \geq \frac{E}{2}$  alors  $s = E$ .

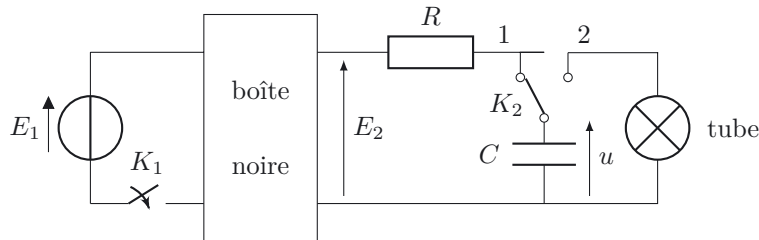
Le courant en entrée du bloc  $S$  est négligeable devant le courant traversant  $R$ . On suppose que la capacité  $C$  est déchargée lorsque l'impulsion se déclenche. Les valeurs de  $R$  et  $C$  sont choisies telles que  $RC < \tau/5$ .

1. Déterminer l'évolution de la tension  $u(t)$  lorsque la tension d'entrée est au niveau haut ( $e = E$ ). Quelle est en pratique la valeur de  $u$  lorsque le front descendant de l'impulsion survient ?
2. Déterminer  $u(t)$  après l'impulsion.
3. Représenter graphiquement  $e(t)$ ,  $u(t)$  et  $s(t)$  sur la même figure. Conclure sur l'utilité du dispositif.
4. Quel est le retard lorsque  $RC = \tau/5$  ?

### Exercice 6.3 Flash d'appareil photo

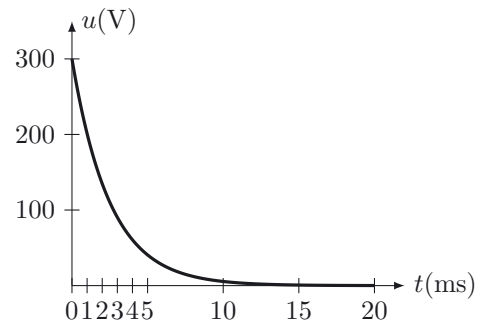
➔ Méthode (6.2)

Pour délivrer un éclair très bref, de puissance lumineuse suffisante, on utilise un tube à décharge nécessitant une tension élevée pour son amorçage. Cette tension, typiquement de l'ordre de 300 V, est obtenue à partir d'une pile de 9 V à l'aide d'un dispositif électronique non décrit (boîte noire).



On prendra dans la suite :  $E_1 = 9,00 \text{ V}$  ;  $E_2 = 300 \text{ V}$  ;  
 $R = 1,00 \text{ k}\Omega$  ;  $C = 150 \mu\text{F}$ .

On ferme l'interrupteur  $K_1$ . Le dispositif électronique produit en sortie une tension  $E_2 = 300 \text{ V}$ . On ferme ensuite l'interrupteur  $K_2$  dans la position (1) pour charger le condensateur initialement déchargé. Puis on bascule l'interrupteur  $K_2$  dans la position (2). Le condensateur se décharge alors rapidement dans le tube à décharge, produisant l'éclair lumineux. L'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de cette décharge est représentée ci-contre :



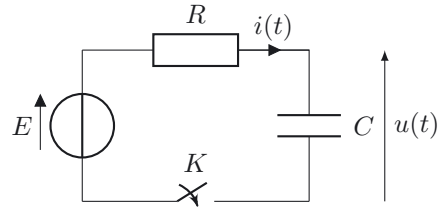
1. Calculer la constante de temps  $\tau$  de la charge du condensateur et indiquer le temps nécessaire à cette charge.
2. Calculer l'énergie  $E_C$  stockée dans le condensateur à la fin de la charge.
3. Pourquoi effectue-t-on une charge sous haute tension ?
4. Déterminer la constante de temps  $\tau'$  de la décharge au travers du tube à éclat. En assimilant le tube à éclat, après son amorçage, à une résistance  $r$ , en déduire la valeur de celle-ci.
5. Comparer  $\tau$  et  $\tau'$  Commenter.

**Exercice 6.4 Étude énergétique de la charge d'un condensateur**

➔ Méthode (6.3)

On considère le circuit de charge d'un condensateur représenté ci-contre.

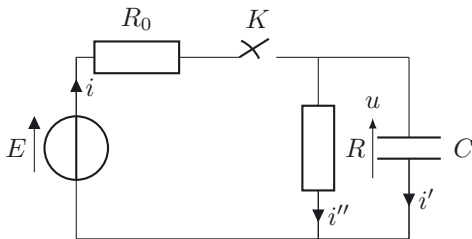
À la date ( $t = 0$ ), le condensateur étant déchargé, on ferme l'interrupteur.



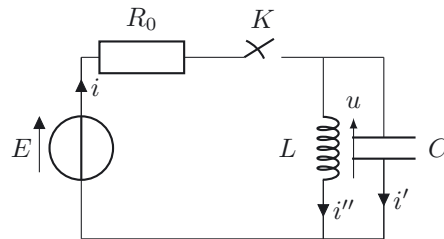
1. À partir de la loi des mailles, établir un bilan de puissance de la charge du condensateur.
2. Établir l'expression de  $u(t)$ . En déduire celle de  $i(t)$ .
3. Donner l'expression  $E_C$  de l'énergie stockée dans le condensateur une fois la charge terminée.
4. Établir l'expression de l'énergie  $E_G$  fournie par le générateur au cours de la charge.
5. Commenter le résultat obtenu.

**Exercice 6.5 Conditions initiales et régime permanent**

On considère les circuits suivants alimentés par un générateur idéal de tension continue. Les condensateurs sont initialement déchargés et aucun courant ne circule dans les circuits avant la fermeture de l'interrupteur  $K$  à l'instant  $t = 0$ .



Circuit (a)



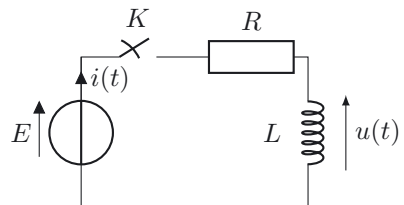
Circuit (b)

1. Déterminer les expressions de  $i$ ,  $i'$ ,  $i''$  et  $u$  juste après la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à  $t = 0^+$ .
2. Déterminer les expressions de ces mêmes grandeurs lorsque le régime permanent est atteint.

**Exercice 6.6 Établissement du courant dans un circuit  $RL$** 

On considère le montage ci-contre dans lequel une source idéale de tension soumet un circuit inductif constitué d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$  à un échelon de tension.

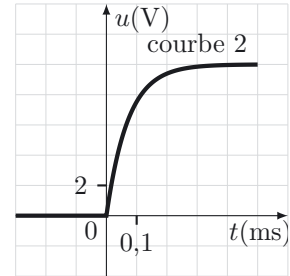
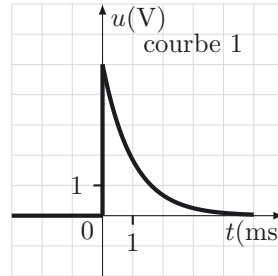
À l'instant initial  $t = 0$ , l'interrupteur  $K$  est fermé.



- Déterminer les valeurs de la tension  $u$  aux bornes de la bobine et de l'intensité  $i$  du courant dans le circuit juste après la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire à l'instant  $t = 0^+$ .
- Sans calcul, déterminer les expressions de  $u$  et  $i$  lorsque le régime permanent est établi.
- Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ . On fera apparaître la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$ .
- Résoudre l'équation différentielle et en déduire également l'expression de la tension  $u(t)$ .
- Représenter l'allure de  $i(t)$  et  $u(t)$  puis vérifier les valeurs finales atteintes.

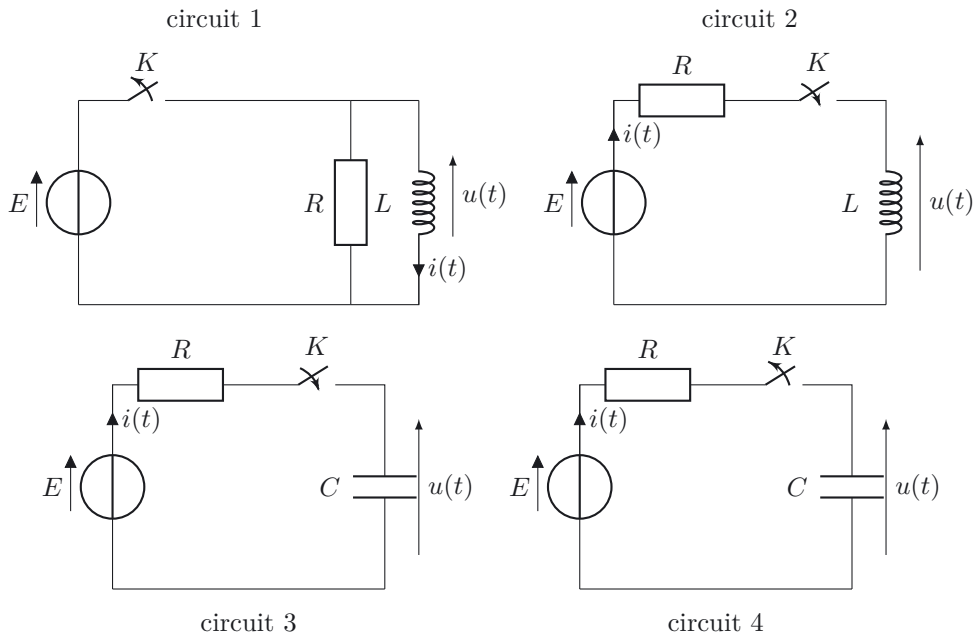
### Exercice 6.7 Vous me reconnaissez ?

Un étudiant distrait, mais surtout maladroit, rentrant d'une séance de travaux pratiques sur l'observation de régimes transitoires sur les circuits du premier ordre, fait tomber toutes ses notes qui s'éparpillent. En les rangeant, il retrouve alors les courbes expérimentales suivantes, tracées en utilisant une résistance  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ , mais il ne sait plus à quel montage les attribuer.



Pourriez-vous l'aider à identifier les montages correspondant, ainsi que les valeurs de  $E$ ,  $L$  ou  $C$  utilisées ?

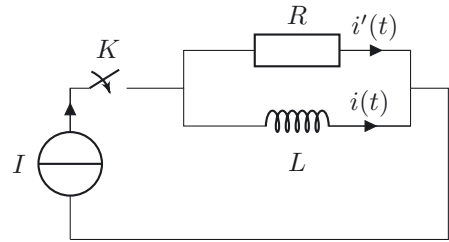
Tous les interrupteurs s'ouvrent ou se ferment à  $t = 0$ .



### Exercice 6.8 Circuit $RL$ parallèle

On considère un circuit  $RL$  parallèle alimenté par une source de courant idéale qui délivre un courant  $I$  constant.

L'interrupteur  $K$  est ouvert pour  $t < 0$ , on le ferme à l'instant  $t = 0$ .



1. Quelle est la relation simple reliant  $i(t)$ ,  $i'(t)$  et  $I$  ?
2. Quelles sont les valeurs de  $i$  et  $i'$  juste avant et juste après la fermeture de l'interrupteur ?
3. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de  $i(t)$ , puis déterminer les expressions littérales de  $i(t)$  et de  $i'(t)$  pour  $t > 0$ .
4. Tracer les courbes donnant  $i(t)$  et  $i'(t)$  en fonction du temps. On donne  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 1,0 \text{ mH}$ ,  $I = 10 \text{ mA}$ . On indiquera sur les graphes les valeurs numériques pertinentes.
5. Déterminer l'énergie stockée dans l'inductance  $L$  au bout d'un temps très long (notion à préciser). Faire l'application numérique.
6. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance  $R$  au bout d'un temps très long. Faire l'application numérique.
7. En déduire par un bilan énergétique l'énergie fournie par le générateur de courant au bout d'un temps très long.

### Exercice 6.9 Oscillations de relaxation d'une lampe néon

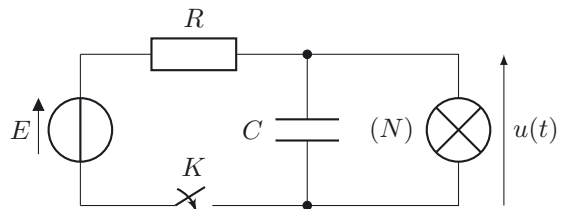
On considère le circuit représenté ci-contre :

$(N)$  est une lampe au néon.

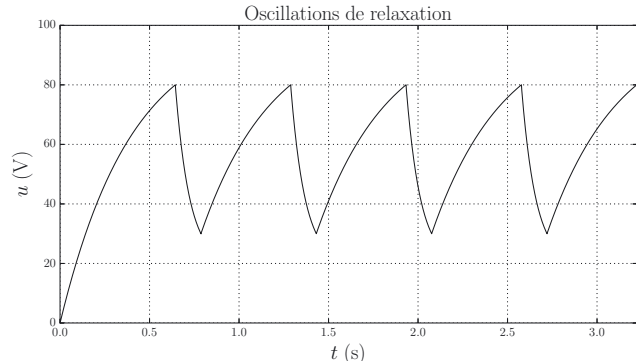
Éteinte, elle est équivalente à un interrupteur ouvert et ne s'allume que si la tension à ses bornes devient supérieure à une valeur  $V_a$  dite potentiel d'allumage.

Allumée, elle est équivalente à une résistance  $r$  et ne s'éteint que si la tension à ses bornes devient inférieure à une valeur  $V_e$  dite potentiel d'extinction ( $V_e < V_a$ ).

À la date  $t = 0$  on ferme l'interrupteur alors que le condensateur est déchargé. On observe alors aux bornes de la lampe la tension  $u(t)$  suivante :



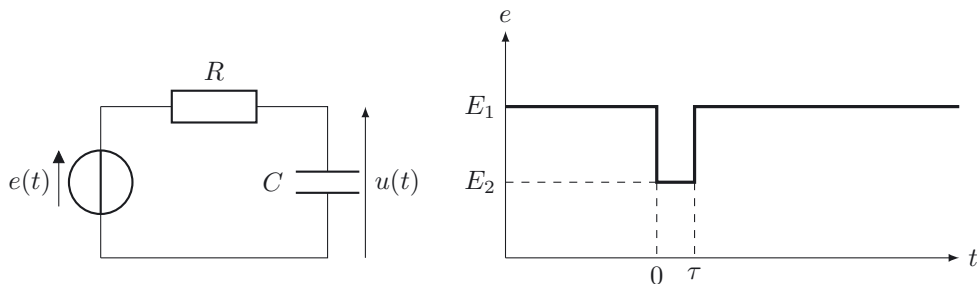
1. À quelle condition sur  $E$  la lampe au néon s'allume-t-elle ?
2. En observant la courbe  $u(t)$ , décrire le comportement de la lampe. En déduire les valeurs de  $V_a$  et  $V_e$ .
3. En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, établir l'équation différentielle satisfaite par la tension  $u(t)$  lorsque la lampe est allumée. Montrer qu'elle correspond à la loi de charge du condensateur sous une tension  $E'$  au travers d'une résistance  $R'$ . On exprimera  $E'$  et  $R'$  en fonction des éléments du montage.
4. À quelle condition sur  $E$  la lampe peut-elle s'éteindre ?



### Exercice 6.10 Condensateur de découplage

Un condensateur de découplage sert à atténuer les variations de tension qui peuvent apparaître aux bornes des générateurs. Le circuit suivant permet d'en comprendre le fonctionnement. Le générateur est modélisé par une source de tension  $e$  en série avec une résistance  $R$ . Le condensateur de capacité  $C$  est placé en sortie et on s'intéresse à la tension  $u$  à ses bornes.

On suppose que la tension  $e$  reste constante et égale à  $E_1$  pendant une durée très longue, puis subit une baisse à la valeur  $E_2$  pendant une durée  $\tau$  très brève. On suppose que  $\tau \ll RC$ . On simplifiera les expressions avec le développement limité suivant, valable lorsque  $x \ll 1$  :  $\exp(x) \simeq 1 + x$ .



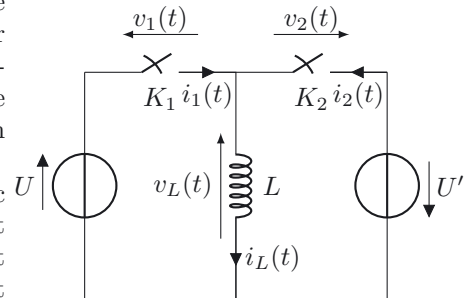
1. Quelle est la tension  $u$  à l'instant  $t = 0$  ?
2. Déterminer l'expression de  $u(t)$  pour  $0 \leq t \leq \tau$ .
3. Que peut-on dire de la variation de tension  $|\Delta u|$  entre  $t = 0$  et  $t = \tau$ , comparée à la différence  $\Delta e = E_1 - E_2$  ?
4. Pour  $t > \tau$ , décrire l'évolution de la tension  $u(t)$ , sans faire de calculs. Quelle est la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent ? Comparer cette durée à  $\tau$ .
5. Représenter graphiquement  $u(t)$ .
6. Application numérique :  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 1000 \mu\text{F}$ ,  $\Delta e/E_1 = 0,1$  et  $\tau = 1 \text{ ms}$ . Calculer  $|\Delta u|/E_1$  et conclure sur l'efficacité du dispositif.

### Exercice 6.11 Commande d'essuie-glace

Historiquement les commandes d'essuie-glaces consistaient à appliquer la tension constante de la batterie aux bornes d'un moteur placé en série, qui animait les balais d'essuie-glaces. De nos jours, le dispositif a été grandement amélioré grâce à l'utilisation de l'électronique de puissance, qui permet la variation de la tension appliquée au moteur et la régulation de la vitesse des balais d'essuie-glaces, grâce à des dispositifs fonctionnant en commutation minimisant les pertes énergétiques.

Nous nous proposons d'illustrer ici le principe de la conversion d'énergie entre une source de tension continue (de f.e.m  $U$ ) et un moteur (charge) qui peut être modélisé par une source de tension continue de f.e.m  $U'$ . Pour commander le transfert d'énergie entre ces deux sources de même nature, sans changer la nature de l'une d'elle, on utilise un hacheur à accumulation inductive.

La figure ci-contre donne le schéma de ce hacheur, avec interrupteurs mécaniques  $K_1$  et  $K_2$ . Ces interrupteurs sont commandés de telle façon que les deux sources ne puissent jamais être reliées directement et que l'inductance  $L$  ne soit jamais en circuit ouvert.



Le système évolue de la façon suivante :

- pour  $t \in [0, \alpha T[$ ,  $K_1$  est fermé,  $K_2$  est ouvert ;
- pour  $t \in [\alpha T, T[$ ,  $K_1$  est ouvert,  $K_2$  est fermé ;
- les différents courants et tensions doivent reprendre périodiquement la même valeur, la période est  $T$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ .

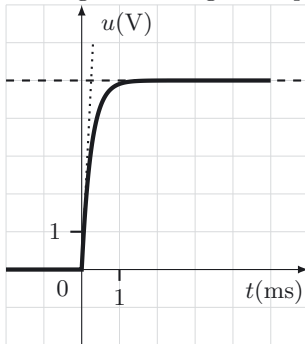
1. Quelle est la relation simple reliant  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  et  $i_L(t)$  ? Quelle est la relation simple liant  $U$ ,  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  et  $U'$  ?
2. On s'intéresse à la première phase de fonctionnement, pour  $t \in [0, \alpha T[$ .
  - a. Que valent alors  $v_1(t)$  et  $i_2(t)$  ? Que deviennent alors les deux relations du 1. ?
  - b. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $i_L(t)$ . La résoudre en posant  $i_L(0) = I_{\min}$ .
  - c. Donner alors la valeur de  $i_L(t)$  pour  $t = \alpha T$ . On nommera  $I_{\max}$  cette valeur, qu'on exprimera en fonction de  $I_{\min}$ .
3. On s'intéresse maintenant à la seconde phase de fonctionnement, pour  $t \in [\alpha T, T[$ .
  - a. Que valent alors  $v_2(t)$  et  $i_1(t)$  ? Que deviennent alors les deux relations du 1. ?
  - b. Déterminer alors l'équation différentielle satisfaite par  $i_L(t)$ . La résoudre en faisant intervenir  $I_{\max}$ .
  - c. Donner alors la valeur de  $i_L(t)$  pour  $t = T$ . Le régime étant périodique, à quoi doit être égale cette valeur ?
4. On dispose donc de deux équations reliant  $I_{\min}$  et  $I_{\max}$ . Montrer que la compatibilité de ces deux équations conduit à une relation simple entre  $U'$ ,  $U$  et  $\alpha$ . Sur quel paramètre suffit-il d'agir pour modifier la tension fournie à la charge,  $U$  restant fixée ? Conclure sur l'utilisation de ce dispositif pour la régulation de la vitesse des balais d'essuie-glace.
5. Tracer l'évolution temporelle de  $i_L(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $v_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $v_2(t)$  et  $v_L(t)$  sur quelques périodes, pour  $\alpha = 0,7$ . En déduire les valeurs moyennes  $I_L$ ,  $I_1$ ,  $V_1$ ,  $I_2$ ,  $V_2$  et  $V_L$  de ces différentes grandeurs.
6. Quelle relation obtient-on entre  $I_1$  et  $I_2$  ? Quelle est alors la puissance moyenne fournie par la source ? reçue par la charge ? Commenter.



# Corrections

## Interro de cours

1. La résistance équivalente vaut  $R/2$ . La résistance  $R$  du cours est remplacée par  $R/2$ . Réponse (b).
2. Par continuité,  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ . Or  $u_C(0^+) + \frac{Ri(0^+)}{2} = E$  d'où  $i(0^+) = \frac{2E}{R}$ . Réponse (b).
3. Courbe (a) : étudiant 3 (charge plus lente avec  $R_{eq} = 2R$ ); Courbe (b) : étudiant 1 (discontinuité incompatible avec  $u_C$ ); Courbe (c) : étudiant 2.
4. La tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale à l'instant  $t = \tau = 0,25$  ms. Réponse (a).



5. La constante de temps vaut  $\tau = R_{eq}C = \frac{RC}{2}$  donc  $C = \frac{2\tau}{R} = 0,50 \mu\text{F}$ . Réponse (a).
6. À la fin de la charge,  $u_C = E$  donc l'énergie stockée dans le condensateur vaut  $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ . Toute cette énergie a été reçue puisque le condensateur était initialement déchargé. Réponse (a).
7. La puissance fournie par la source (énergie fournie par seconde) vaut  $\mathcal{P} = Ei = EC \frac{du_C}{dt}$  donc pendant  $dt$ , l'énergie fournie vaut  $\mathcal{P}dt = ECdu_C$ . La source étant en convention générateur, il s'agit bien d'une énergie fournie. Le signe « - » n'est pas nécessaire. Réponse (b).
8. L'énergie fournie par la source est obligatoirement supérieure à l'énergie reçue par le condensateur puisqu'une partie de cette énergie est perdue par effet Joule dans la résistance. Réponse (c). On peut aussi faire le calcul consistant à sommer toutes les petites énergies fournies :  $\int_0^E EC du_C$ .
9. La constante de temps vaut  $\tau = R_{eq}C = \frac{RC}{2}$  donc la charge est plus rapide mais les énergies (respectivement reçue par le condensateur et fournie par la source) sont les mêmes. Le bilan d'énergie est donc le même. Réponse (b).

## Exercice 6.1

1. Pour décharger le condensateur, il faut laisser l'interrupteur dans la position 1 pendant plusieurs secondes. La charge est déclenchée lorsqu'on bascule dans la position 2. Si la tension  $u_C$  en début de charge n'est pas nulle, on doit refaire l'expérience en allongeant le temps dans la position 1.
2. Le courant circulant dans la résistance est  $i = \frac{dq}{dt}$  où  $q$  est la charge portée par le condensateur. La charge est liée à la tension par  $q = Cu_C$ . La loi des mailles s'écrit :  $E = Ri + u_C$ , d'où l'on déduit

l'équation différentielle suivante :  $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$ . On voit par homogénéité des dimensions que  $\tau = RC$  est un temps.

On considère tout d'abord la solution générale de l'équation sans second membre, obtenue en posant  $E = 0$  :  $u_C(t) = A \exp(-t/\tau)$ . On doit lui ajouter une solution particulière de l'équation complète. Lorsque le second membre est constant, une solution particulière simple est aussi constante, ici  $u_C = E$ . La solution générale est la somme  $u_C(t) = A \exp(-t/\tau) + E$ . La constante  $A$  est déterminée en écrivant la condition initiale à  $t = 0$ . À l'instant  $t = 0^-$  (juste avant le basculement de l'interrupteur) la tension  $u_C$  est nulle car le condensateur est déchargé. Cette tension doit être une fonction continue du temps, donc elle est aussi nulle juste après le basculement de l'interrupteur, c'est-à-dire  $u_C(0^+) = 0$ . La condition s'écrit  $A + E = 0$ . On obtient finalement :  $u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ .

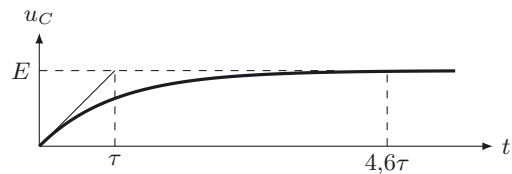
3. La durée  $\Delta t$  est l'instant  $t$  tel que  $u_C(t) = U$ . Le calcul conduit à :  $\Delta t/\tau = -\ln\left(1 - \frac{U}{E}\right)$ .

4.	$U/E$	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999
	$\Delta t/\tau$	0,69	1,2	2,3	4,6	6,9

5. La dérivée à l'instant  $t = 0$  est  $\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{E}{\tau}$ .

La tangente à l'origine est donc tracée en reportant  $\tau$  en abscisse et  $E$  en ordonnée.

6. On trace tout d'abord la tangente en  $t = 0$ , puis on place les points calculés ci-dessus.



7. La tension  $u_C$  est à moins de 1% de  $E$  lorsque  $t > 4,6\tau$ . En pratique, le temps de charge du condensateur est donc environ  $5\tau = 5RC$ .

### Exercice 6.2

1. Lorsque  $e = E$ , l'équation différentielle pour la tension  $u(t)$  est :  $RC \frac{du}{dt} + u = E$ , dont la solution générale est  $u(t) = A \exp(-t/RC) + E$ .

En prenant l'origine du temps sur le front montant de l'impulsion, la condition initiale imposée par la continuité de la tension aux bornes de la capacité est  $u(0) = 0$ , ce qui permet de déterminer  $A$ . On obtient donc :  $u(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$ .

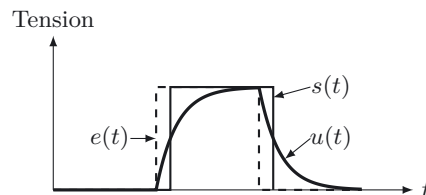
$\exp(-5) = 6,7 \cdot 10^{-3}$ , donc à  $t = \tau$  on a  $u(\tau) \simeq E$  à mieux que 1%.

2. Pour étudier la phase qui suit le front descendant, on peut choisir une nouvelle origine du temps coïncidant avec ce front. L'équation différentielle est maintenant  $RC \frac{du}{dt} + u = 0$ . La solution générale est  $u(t') = B \exp(-t'/RC)$ .

Avec la condition initiale  $u(0) = E$ , on obtient :  $u(t') = E \exp\left(-\frac{t'}{RC}\right)$ .

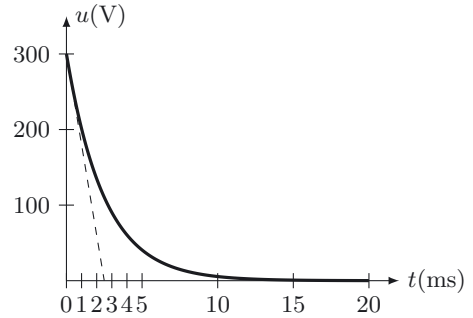
3. Voici ci-contre le tracé de  $e(t)$ ,  $u(t)$  et  $s(t)$ . On obtient en sortie une impulsion identique à celle de l'entrée, mais légèrement retardée.

4. Pour  $RC = \frac{\tau}{5}$ , le retard est  $\Delta t = \frac{\tau}{5} \ln(2) = 0,14\tau$ .



**Exercice 6.3**

- $\tau = RC$ . Numériquement :  $\tau = 150$  ms. On peut considérer que la charge est terminée au bout de  $5\tau$  (condensateur chargé à plus de 99%), c'est-à-dire pour 750 ms.
- $E_C = \frac{1}{2}CE_1^2$ . Numériquement :  $E_C = 6,75$  J.
- Pour stocker une énergie donnée, plus la tension de charge est faible, plus la valeur de la capacité du condensateur doit être élevée. Pour stocker une énergie de 6,75 J sous une tension de charge de 9,00 V (tension aux bornes de la pile) la capacité du condensateur devrait être égale à  $C = \frac{2E_C}{E_1^2}$ , soit  $C = 1,67$  mF. Il s'agit là d'un condensateur plus volumineux, difficilement compatible avec les problèmes de miniaturisation. En outre, sa décharge dans le tube serait plus longue, ce qui n'est pas ce qu'on recherche pour un bon fonctionnement du dispositif.
- Pour déterminer la valeur de la constante de temps de la décharge, on trace la tangente à l'origine à la courbe  $u(t)$  et on détermine l'abscisse de son point d'intersection avec la limite (0 V).  
On trouve :  $\tau' = 2,5$  ms et  $r = \frac{\tau'}{C} = 17 \Omega$ .
- $\tau$  est de l'ordre du dixième de seconde alors que  $\tau'$  est de l'ordre du millième de seconde. Le flash est beaucoup plus bref que la charge du condensateur.



**Exercice 6.4**

- La loi des mailles amène à :  $E = u + Ri$ . En multipliant cette équation par  $i$ , on obtient :  $Ei = ui + Ri^2$ . Les différents termes de cette expression s'interprètent de la façon suivante :
  - le terme  $Ei$  correspond à la puissance fournie par le générateur ;
  - le terme  $ui$  correspond à la puissance fournie au condensateur ;
  - le terme  $Ri^2$  correspond à la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.
 Signification physique : une partie seulement de la puissance délivrée par le générateur est fournie au condensateur. Le reste est dissipé par effet Joule dans la résistance.

- Au niveau du condensateur :  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ .  
En reportant cette expression dans celle traduisant la loi des mailles :  $\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$ . La solution générale de cette

équation différentielle est  $u(t) = K \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E$ .

Des conditions initiales on tire :  $u(0) = K + E = 0$ , d'où  $K = -E$ .

Il vient ainsi  $u(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$ , d'où finalement

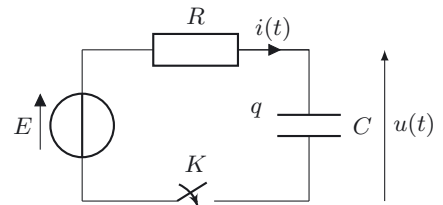
$$i(t) = C \frac{du}{dt} = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

- Énergie stockée dans le condensateur en fin de charge :  $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ .

- Énergie fournie par le générateur entre les dates  $t$  et  $t + dt$  :  $Ei dt$ .

Énergie fournie par le générateur au cours de la charge :  $E_G = \int_0^\infty Ei dt = E \int_0^\infty \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) dt$

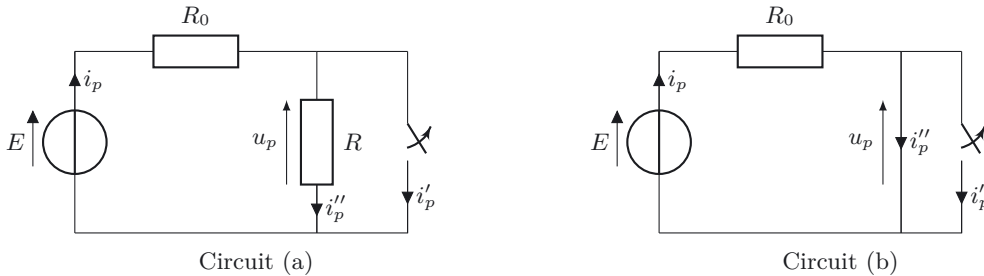
soit  $E_G = CE^2$ .



5. L'énergie fournie par le générateur au cours de la charge est le double de celle stockée dans le condensateur. En d'autres termes seule la moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée dans le condensateur. L'autre moitié est dissipée par effet Joule dans la résistance, et ce quelle que soit la valeur de la résistance.

**Exercice 6.5**

1. **Circuit (a)** : nous commençons par exploiter la continuité de la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial :  $u(0^+) = 0$  puisque le condensateur était déchargé ;  $u$  étant également la tension aux bornes de la résistance mise en parallèle du condensateur, il vient :  $i''(0^+) = u(0^+)/R = 0$ . Comme  $u(0^+) = 0$ , la tension aux bornes de  $R_0$  est égale à  $E$ , d'où  $i(0^+) = E/R_0$ . Enfin la loi des nœuds  $i = i' + i''$  nous permet de déduire que  $i'(0^+) = i(0^+) = E/R_0$ . Nous remarquons la discontinuité de l'intensité circulant dans le condensateur à la fermeture de l'interrupteur.
- Circuit (b)** : nous commençons par exploiter la continuité de la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial :  $u(0^+) = 0$  puisque le condensateur était déchargé. L'intensité circulant dans la bobine varie également de façon continue :  $i''(0^+) = 0$  puisqu'aucun courant ne circulait dans le circuit avant la fermeture de  $K$ . La tension  $E$  appliquée est aussi la tension aux bornes de  $R_0$  puisque  $u(0^+) = 0$ . Nous en déduisons  $i(0^+) = E/R_0$ . Enfin la loi des nœuds  $i = i' + i''$  nous permet de déduire que  $i'(0^+) = i(0^+) = E/R_0$ .
2. Le régime permanent est ici continu. Les condensateurs se comportent alors comme des interrupteurs ouverts alors que les bobines peuvent être assimilées à des court-circuits. Il est utile de représenter les circuits équivalents en régime permanent. En régime permanent, les grandeurs seront écrites avec un indice  $p$ .



**Circuit (a)** : nous reconnaissons un diviseur de tension :  $u_p = \frac{R}{R + R_0}E$ . Il est immédiat que  $i'_p = 0$ , ainsi  $i_p = i''_p = \frac{E}{R + R_0}$ .

**Circuit (b)** :  $u_p = 0$  puisqu'il s'agit de la tension aux bornes d'un court-circuit. Par ailleurs  $i'_p = 0$  (circuit ouvert). Nous en déduisons que  $i_p = i''_p = \frac{E}{R_0}$ .

**Exercice 6.6**

1. La présence de la bobine dans le circuit assure la continuité de l'intensité du courant à l'instant initial. Comme  $i = 0$  avant la fermeture de l'interrupteur :  $i(0^+) = 0$ . La tension  $u_R = Ri$  aux bornes de la résistance est donc initialement nulle. En appliquant la loi des mailles au circuit, il découle que  $u(0^+) = E$ .
2. En régime permanent, les grandeurs seront écrites avec un indice  $p$ . En régime permanent établi, la bobine se comporte comme un court-circuit. La valeur finale de  $u$  est ainsi  $u_p = 0$ . La tension aux bornes de  $R$  est donc finalement  $u_{R,p} = E$ . Nous en déduisons la valeur finale de l'intensité  $i_p = \frac{E}{R}$ .

3. La tension aux bornes de la bobine est  $u = L \frac{di}{dt}$ .

Appliquons la loi des mailles au circuit :  $E = u_R + u = Ri + L \frac{di}{dt}$ .

Nous en déduisons l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  :  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .

4. La solution de l'équation homogène s'écrit  $A \exp(-t/\tau)$  où  $A$  est une constante qui reste à déterminer.  $E/R$  est une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution générale s'obtient en sommant la solution de l'équation homogène et la solution particulière :  $i(t) = A \exp(-t/\tau) + E/R$ .

La constante  $A$  est déterminée à l'aide de la condition initiale  $i(0) = 0$  :  $A + E/R = 0$ .

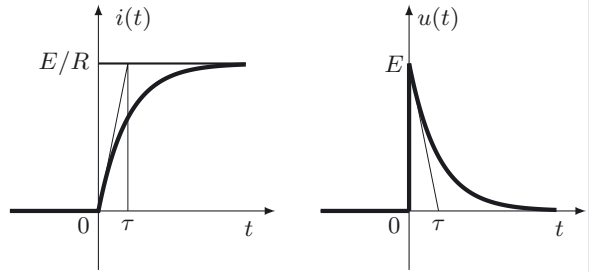
Finalement :  $i(t) = \frac{E}{R} [1 - \exp(-t/\tau)]$ .

La tension  $u(t)$  s'en déduit facilement :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = E \exp(-t/\tau).$$

5. Traçons ci-contre l'allure de  $i(t)$  et  $u(t)$ .

Nous vérifions bien que l'intensité  $i$  tend vers  $\frac{E}{R}$  alors que la tension  $u$  tend vers 0 lorsque  $t \gg \tau$ .



### Exercice 6.7

- Courbe 1** : on observe une diminution exponentielle de la tension et une discontinuité de cette dernière en  $t = 0$ . On peut affirmer que  $u$  ne peut être observée aux bornes d'une capacité car sinon il y aurait continuité de la tension. Nous éliminons donc les circuits 3 et 4.  $u = L \frac{di}{dt} > 0$  indique une croissance de l'intensité dans le circuit, compatible avec la fermeture de  $K$  : courbe 1  $\rightarrow$  circuit 2.

À  $t = 0$ ,  $i = 0$  : la tension  $E$  se retrouve exclusivement aux bornes de  $L$ . On obtient alors  $E = 5,0 \text{ V}$ . Pour la détermination de la constante de temps  $\tau = \frac{L}{R}$  du circuit, on peut considérer l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote à 0 V, ou à quel instant l'écart relatif entre  $u$  et son asymptote est de 37% (soit  $u(\tau) = 1,8 \text{ V}$ ). On obtient par ces deux méthodes  $\tau = 1,0 \text{ ms}$  et par conséquent  $L = 1,0 \text{ H}$ .
- Courbe 2** : on observe une augmentation exponentielle de la tension et une continuité de cette dernière en  $t = 0$ . On peut donc affirmer que  $u$  est la tension aux bornes d'un condensateur et que ce dernier se charge : courbe 2  $\rightarrow$  circuit 3.

Quand  $t \rightarrow \infty$ ,  $i = 0$  : la tension  $E$  se retrouve exclusivement aux bornes de  $C$ . On obtient donc  $E = 10 \text{ V}$ . Pour la détermination de la constante de temps  $\tau = RC$  du circuit, on peut considérer l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote à 10 V, ou à quel instant l'écart relatif entre  $u$  et son asymptote est de 37% (soit  $u(\tau) = 6,3 \text{ V}$ ). On obtient par ces deux méthodes  $\tau = 0,070 \text{ ms}$  et par conséquent  $C = 7,0 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ .

### Exercice 6.8

- La loi des noeuds amène immédiatement à  $I = i + i'$ .
- Juste avant la fermeture de l'interrupteur,  $i(0^-) = 0$ ,  $i'(0^-) = 0$ . Il y a continuité du courant aux bornes de  $L$ , donc  $i(0^+) = i(0^-) = 0$  et, par suite,  $i'(0^+) = I$ .
- On applique la loi des mailles dans la maille  $(R, L)$  :  $L \frac{di}{dt} - Ri' = 0 = L \frac{di}{dt} - R(I - i)$ .  
On obtient donc :  $L \frac{di}{dt} + Ri = RI$ .

La solution de cette équation différentielle du premier ordre est de la forme :  $i(t) = I + A \exp(-t/\tau)$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .  $A$  est déterminée par la prise en compte des conditions initiales :  $i(0^+) = 0 = I + A$ , soit  $A = -I$ . On aboutit donc finalement à :  $i(t) = I \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$  et  $i'(t) = I \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ .

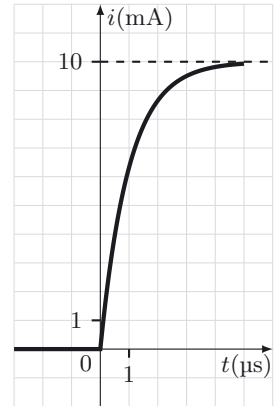
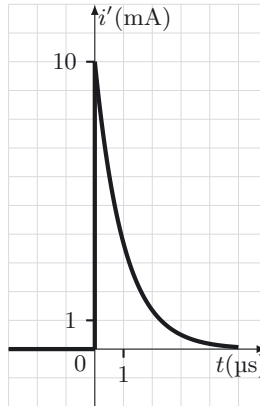
4. On obtient les deux graphes suivants, avec  $\tau = 1,0 \mu\text{s}$ .

5. Pour  $t \gg \tau$ , l'énergie stockée dans l'inductance est  $E_L = \frac{1}{2} LI^2 = 5,0 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ .

6. La puissance instantanée dissipée par effet Joule est  $Ri'^2 = RI^2 \exp(-2t/\tau)$ . On obtient l'énergie dissipée au bout d'un temps «infini» en intégrant cette puissance de 0 à  $\infty$ .

Il vient donc :  $E_J = \frac{1}{2} LI^2 = 5,0 \cdot 10^{-8} \text{ J}$ .

7. On en déduit donc l'énergie fournie par le générateur au bout d'un temps très long : une partie est dissipée par effet Joule dans la résistance, l'autre est stockée dans l'inductance. D'où  $E_{\text{gene}} = LI^2 = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ J}$ .



### Exercice 6.9

1. Tant que la lampe reste éteinte, elle est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur se charge sous la tension  $E$ , au travers de la résistance  $R$ . La tension aux bornes du condensateur tend alors exponentiellement vers  $E$ . Au cours de cette charge, la lampe ne pourra donc s'allumer que si  $V_a$  est inférieur à cette limite :  $E > V_a$ .
2. La tension aux bornes de la lampe croît tout d'abord exponentiellement à partir de la valeur  $u = 0,0 \text{ V}$  qui correspond à un condensateur initialement déchargé. Lorsqu'elle atteint la valeur  $u = 80 \text{ V}$ , elle se met à décroître exponentiellement jusqu'à atteindre la valeur  $u = 30 \text{ V}$ . Puis elle croît à nouveau exponentiellement jusqu'à atteindre la valeur  $u = 80 \text{ V}$  et ainsi de suite. Les changements de sens de variation de  $u(t)$  correspondent à des changements de l'état de la lampe qui est tantôt éteinte, tantôt allumée. Lorsque  $u(t)$  croît vers la valeur  $u = 80 \text{ V}$ , la lampe est éteinte, lorsque qu'elle décroît vers la valeur  $u = 30 \text{ V}$ , elle est allumée. La lampe clignote périodiquement. On déduit de ce comportement les valeurs des potentiels d'allumage et d'extinction de la lampe :  $V_a = 80 \text{ V}$  et  $V_e = 30 \text{ V}$ .
3. Lorsque la lampe est allumée, elle est équivalente à une résistance  $r$ .

Loi des mailles :  $u = E - Ri$ .

Loi des nœuds appliquée au nœud  $A$  :  $i = i_1 + i_2$ .

Par ailleurs :  $i_1 = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$  et  $i_2 = \frac{u}{r}$ .

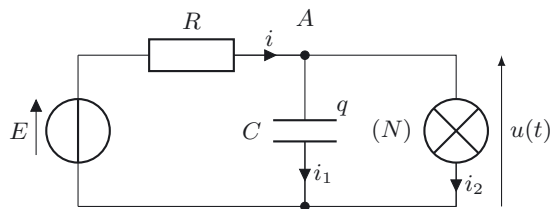
On en déduit :  $i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R} = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{r}$ .

Cela correspond bien à une loi de charge (ou de décharge) d'un condensateur  $C$  sous une tension

$E'$  au travers une résistance  $R'$  :  $\frac{du}{dt} + \frac{u}{R'C} = \frac{E'}{R'C}$

avec  $R' = \frac{Rr}{R+r}$  et  $E' = \frac{r}{R+r} E$ .

4. Toute solution de l'équation différentielle établie dans la question précédente tend vers la valeur  $E'$ . Pour que la lampe puisse s'éteindre il faut donc que :  $E' < V_e$ , ce qui conduit à :  $E < \frac{R+r}{r} V_e$ .



**Exercice 6.10**

- À l'instant  $t = 0$ , la tension  $E_1$  est appliquée depuis assez longtemps pour qu'on soit en régime permanent donc  $u(0) = E_1$ .
- On cherche l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  pour  $t \in [0, \tau]$ . La loi des mailles s'écrit  $Ri + u = E_2$ , le sens choisi pour  $i$  étant celui d'une convention récepteur pour  $C$ . La caractéristique de la capacité s'écrit  $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ . On obtient l'équation :  $RC \frac{du}{dt} + u = E_2$ .

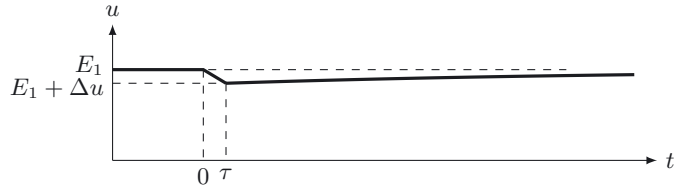
La solution générale de cette équation est  $u(t) = A \exp(-t/RC) + E_2$ . La constante  $A$  se détermine en utilisant la continuité de la tension aux bornes de la capacité, soit  $u(0^+) = u(0^-) = E_1$ .

La solution est :  $u(t) = (E_1 - E_2) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E_2$ .

Sachant que  $t \ll RC$ , on linéarise cette expression en faisant un développement limité à l'ordre 1 :

$$u(t) = (E_1 - E_2) \left(1 - \frac{t}{RC}\right) + E_2 = E_1 - (E_1 - E_2) \frac{t}{RC}$$

- La variation de tension en sortie est  $|\Delta u| = (E_1 - E_2)\tau/RC$ .  $|\Delta u|$  est donc très faible devant  $E_1 - E_2$ .
- Pour  $t > \tau$ , la tension  $u(t)$  tend à nouveau vers  $E_1$ , avec un temps caractéristique égal à  $RC$ . Il faut environ  $5RC$  pour que  $u = E_1$ , ce qui est un temps grand devant  $\tau$ .
- Voici ci-contre la représentation graphique de  $u(t)$ , avec une variation  $\Delta u$  volontairement exagérée.



- $\frac{|\Delta u|}{E_1} = \frac{\Delta e}{E_1} \frac{\tau}{RC} = 10^{-3}$ . Une variation de tension de 10% en entrée a pour conséquence une variation de seulement 0,1% en sortie. Le dispositif est donc très efficace pour absorber les variations de tension du générateur.

**Exercice 6.11**

- $i_1(t) + i_2(t) = i_L(t)$  (loi des noeuds) et  $U + U' = v_1(t) - v_2(t)$  (loi des mailles).
- Première phase :

a.  $v_1(t) = 0$  et  $i_2(t) = 0$  ; on aboutit alors à  $i_1(t) = i_L(t)$  et  $U + U' = -v_2(t)$ .

b. Par la loi des mailles appliquée dans la maille de gauche, on obtient :  $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = U$ . La résolution de cette équation avec prise en compte de la condition initiale amène à  $i_L(t) = \frac{U}{L}t + I_{\min}$ .

c.  $i_L(\alpha T) = \frac{U}{L}\alpha T + I_{\min} = I_{\max}$ .

- Seconde phase :

a.  $v_2(t) = 0$  et  $i_1(t) = 0$  ; On aboutit alors à  $i_2(t) = i_L(t)$  et  $U + U' = v_1(t)$ .

b. Par la loi des mailles appliquée dans la maille de droite, on obtient :  $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -U'$ . La résolution de cette équation avec prise en compte de la continuité de l'intensité  $i_L$  à  $t = \alpha T$  amène à  $i_L(t) = -\frac{U'}{L}(t - \alpha T) + I_{\max}$ .

c.  $i_L(T) = -\frac{U'}{L}(1 - \alpha)T + I_{\max}$ .

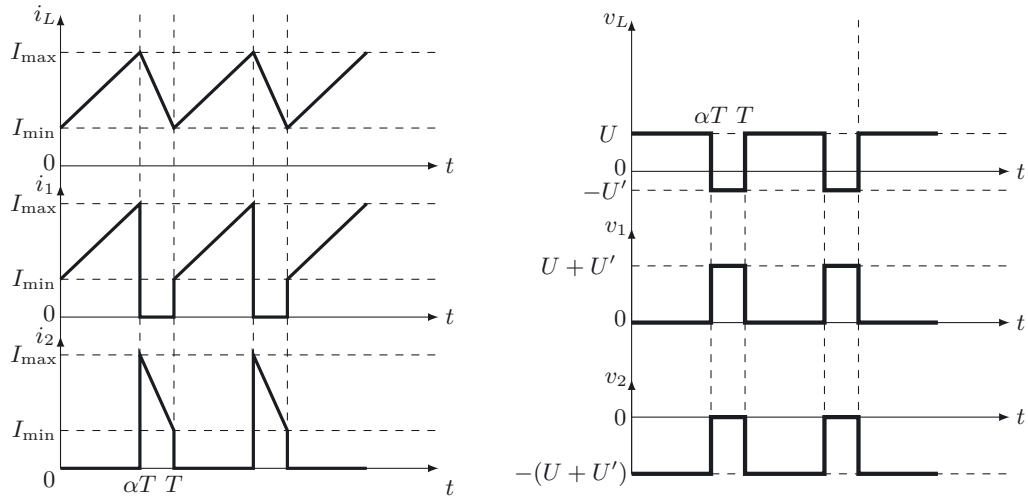
Cette valeur doit donc être égale à  $I_{\min}$ , pour assurer le caractère périodique de l'évolution :

$$I_{\min} = -\frac{U'}{L}(1 - \alpha)T + I_{\max}$$

- La compatibilité de ces deux équations conduit à :  $\frac{U'}{L}(1 - \alpha)T = \frac{U}{L}\alpha T$  soit  $(1 - \alpha)U' = \alpha U$ .

Nous constatons donc qu'en faisant varier le rapport cyclique  $\alpha$  de 0 à 1, on peut faire varier  $U'$  de 0 à  $\infty$ ,  $U$  restant inchangé. Ceci permet donc de réguler la f.e.m aux bornes du moteur, et donc la vitesse de rotation de ce dernier.

5. On obtient les chronogrammes suivant :



Il vient :  $I_L = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$ ,  $I_1 = \alpha \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$ ,  $I_2 = (1 - \alpha) \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$ ,  $V_L = 0$ ,  $V_1 = U$  et  $V_2 = -U'$ .

6. On remarque donc que :  $\alpha I_2 = (1 - \alpha) I_1$ . La puissance moyenne fournie par la source est  $\mathcal{P}_{\text{source}} = UI_1$ , celle reçue par la charge  $\mathcal{P}_{\text{charge}} = U' I_2 = U' \frac{1 - \alpha}{\alpha} I_1 = UI_1$  : il y a donc transfert de puissance moyenne sans pertes de la source à la charge.



# Oscillateurs amortis

## L'essentiel du cours

### Contexte

À quoi sert la suspension dans une voiture et comment la dimensionner ?

Dans une suspension de voiture, un ressort est associé à chaque roue afin de maintenir son contact avec le sol. Lorsque le véhicule roule sur une bosse ou un trou, il se met à osciller à cause de ces ressorts, ce qui peut nuire au confort des passagers mais aussi à l'adhérence des roues sur le sol. Pour réduire au maximum et le plus rapidement possible les oscillations, un amortisseur introduisant une force de frottement est associé à chaque ressort.

Nous avons étudié les oscillations harmoniques non amorties dans le chapitre 1. Nous allons voir à présent comment ajouter un amortissement.

## ■ 1 Approche expérimentale d'un oscillateur amorti

### □ Comment modéliser et simuler la suspension d'une roue avec son amortisseur ?

Revenons sur l'expérience de l'oscillateur harmonique mais en plongeant le corps ( $S$ ) de masse  $m$  dans différents fluides pour étudier l'amortissement des oscillations.

Nous avons utilisé un corps de masse  $m = 100 \text{ g}$  et un ressort de raideur  $k = 3,47 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Nous avons plongé ( $S$ ) dans un fluide (eau ou glycérine) de masse volumique  $\rho$ . Nous avons communiqué initialement une énergie au système en étirant le ressort, puis avons enregistré le mouvement avec une caméra à 120 images par seconde. L'extraction de la position au cours du temps du centre de masse  $M$  de ( $S$ ) a été réalisée à l'aide du logiciel Tracker.

La figure 7.1 présente le dispositif expérimental et la figure 7.2 les évolutions de la position de  $M$  au cours du temps dans l'eau et dans la glycérine. Nous constatons deux comportements différents. Dans l'eau, nous observons des oscillations amorties avant que ( $S$ ) atteigne sa position d'équilibre. Dans la glycérine, ( $S$ ) revient à sa position d'équilibre sans osciller. Nous souhaitons mettre en équation cet oscillateur pour expliquer les différences de comportement.

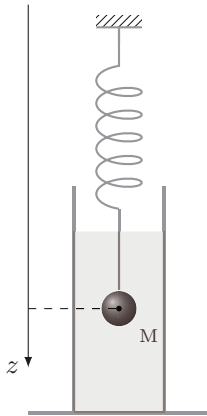


Figure 7.1. Schéma du dispositif masse-ressort.

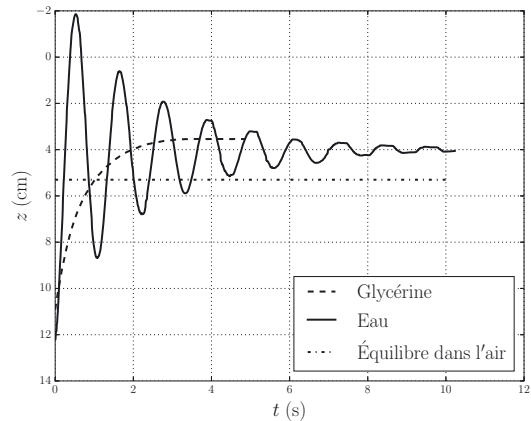


Figure 7.2. Évolution de la position de la masse en fonction du temps dans l'eau et la glycérine.

## ■ 2 Mise en équation de l'oscillateur mécanique

On considère le solide ( $S$ ), de masse  $m$  et de volume  $V$ , dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On choisit un axe descendant pour repérer le centre de masse  $M$  de ( $S$ ) par sa cote  $z$  (figure 7.1). Le système est soumis comme dans le chapitre 1 à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_z$  et à la tension du ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$ . Nous devons compléter ce bilan en tenant compte des forces qu'exerce le fluide sur le système.

□ Quelles sont les forces exercées par le fluide ?

### Définition : Poussée d'Archimède

Lorsqu'un solide de volume  $V$  est immergé dans un fluide (liquide ou gaz) de masse volumique  $\rho$ , il est soumis à une force qui est l'opposée du poids du fluide déplacé. Cette force est appelée poussée d'Archimède et s'écrit  $\vec{\Pi} = -\rho V \vec{g}$ .



Le système restant immergé au cours du mouvement, on suppose que cette force reste constante au cours du temps.

Cette force étant constante, elle ne peut être responsable de l'amortissement des oscillations. On introduit donc une deuxième force qui modélise les frottements du fluide sur le système.

### Modélisation d'un amortissement par une force de frottement

Lorsqu'un solide est en mouvement lent dans un fluide, à la vitesse  $\vec{v}$ , on peut modéliser la force de frottement qu'exerce le fluide sur ce solide par la relation  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\alpha$  est le coefficient de frottement fluide (unité :  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

□ **Le fluide intervient-il sur la position d'équilibre du système ?**

À l'équilibre,  $\vec{v} = \vec{0}$  donc  $\vec{f} = \vec{0}$ . La loi de la quantité de mouvement conduit à :  $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{T} = \vec{0}$ . Nous obtenons en projection sur  $\vec{u}_z$  :  $mg - \rho Vg - k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ , d'où :  $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k} - \frac{\rho Vg}{k}$ . Nous en déduisons que la poussée d'Archimède, qui n'intervient pas dans l'amortissement des oscillations, modifie en revanche la position d'équilibre. Plus le fluide est dense, plus la position d'équilibre est « haute » (figure 7.2) : la glycérine est donc plus dense que l'eau.

□ **Quelle est l'équation différentielle du mouvement ?**

La loi de la quantité de mouvement appliquée au système conduit à :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{T} + \vec{f}$ , soit en projection sur  $\vec{u}_z$  :  $m\ddot{z} = mg - \rho Vg - k(\ell - \ell_0) - \alpha\dot{z}$ . Comme nous nous intéressons au mouvement par rapport à la position d'équilibre, nous posons  $z = \ell - \ell_{eq}$ . En remplaçant  $\ell$  par  $z + \ell_{eq}$  et en tenant compte de l'expression de  $\ell_{eq}$ , nous obtenons alors après simplification l'équation suivante :

$$(7.1) \quad \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

Comme dans le chapitre 1, posons  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Introduisons en outre un facteur sans dimension  $Q$ , appelé facteur de qualité, défini par  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ . L'équation devient :

$$(7.2) \quad \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Une interprétation énergétique de ce facteur de qualité est donnée à l'exercice 7.5.

### ■ 3 Résolution de l'équation différentielle : régimes de variation

L'équation 7.2 est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants du type  $a\ddot{z} + b\dot{z} + cz = d$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes réelles. On doit la résoudre dans  $\mathbb{R}$ .

#### Méthode 7.1 : Résolution de l'équation différentielle $a\ddot{z} + b\dot{z} + cz = d$

- La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale  $z_g(t)$  de l'équation sans second membre ( $d = 0$ ) et de la solution particulière constante  $z_p$  de l'équation complète. Cette dernière, définie par  $\frac{dz_p}{dt} = 0$ , a pour expression  $z_p = d/c$ .
- On cherche les solutions de l'équation différentielle sans second membre ( $d = 0$ ) de la forme  $z(t) = K \exp(rt)$  où  $r \in \mathbb{C}$ . Pour cela on reporte cette forme dans l'équation sans second membre. En simplifiant par  $K \exp(rt)$ , on obtient l'équation caractéristique :  $ar^2 + br + c = 0$ .
- En fonction de la valeur du discriminant de cette équation ( $\Delta = b^2 - 4ac$ ), les solutions à **valeurs réelles** de l'équation différentielle sans second membre sont de la forme :
  - Si  $\Delta > 0$  :  $z_g(t) = K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp(r_2 t)$  avec  $r_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ .
  - Si  $\Delta = 0$  :  $z_g(t) = (K_1 + K_2 t) \exp(rt)$  avec  $r = -b/2a$ .
  - Si  $\Delta < 0$  :  $z_g(t) = \exp(-\frac{t}{\tau})(K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t))$  avec  $\tau = 2a/b, \omega = \sqrt{-\Delta}/2a$ .

➔ Exercice (7.1)



Les constantes d'intégration  $K_1$  et  $K_2$  sont déterminées par les conditions initiales  $z(0)$  et  $\dot{z}(0)$  écrites pour la solution générale  $z(t) = z_g(t) + z_p$  de l'équation complète.

□ **Comment évolue la solution en fonction de l'amortissement de l'oscillateur ?**

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle du mouvement (équation 7.2) est :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ . Son discriminant a pour expression :  $\Delta = 4\omega_0^2(\frac{1}{4Q^2} - 1)$ . Il dépend du coefficient d'amortissement  $\alpha$  au travers du facteur de qualité  $Q = \sqrt{km}/\alpha$ . Lorsque la valeur du coefficient d'amortissement augmente, le facteur de qualité diminue.

On distingue, en fonction de la valeur de  $Q$ , trois types de régimes.

- Cas  $Q > \frac{1}{2}$  / Discriminant négatif / **Régime pseudo-périodique**

$$z(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) (K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$\omega$  est appelé **pseudo-pulsation** et est inférieure à  $\omega_0$ . Remarquons de plus que  $\omega$  tend vers  $\omega_0$  lorsque  $Q$  tend vers l'infini. On définit également la **pseudo-période**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

On constate un retour à l'équilibre avec des oscillations dont l'amplitude diminue de manière exponentielle (figure 7.2 dans le cas de l'eau).

- Cas  $Q < \frac{1}{2}$  / Discriminant positif / **Régime apériodique**

$$z(t) = K_1 \exp(r_1 t) + K_2 \exp(r_2 t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) (K_1 \exp(\beta_1 t) + K_2 \exp(\beta_2 t))$$

$$\text{Avec } r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \text{ et } \beta_{1,2} = \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

On constate un retour direct à l'équilibre sans oscillations (figure 7.2 dans le cas de la glycérine).

- Cas  $Q = \frac{1}{2}$  / Discriminant nul / **Régime critique**

$$z(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) (K_1 + K_2 t)$$

C'est le régime théorique limite entre les deux régimes précédents.

□ **Durée du régime transitoire et facteur de qualité en régime pseudo-périodique ?**

Dans le cas du régime pseudo-périodique, le retour à l'équilibre se fait en oscillant. La solution  $z(t)$  comporte un facteur  $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 6,  $\tau$  représente l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.



La durée du régime transitoire augmente lorsque le facteur de qualité augmente. **La durée du régime transitoire la plus courte correspond au régime critique.**

## Retour au contexte de l'amortisseur de voiture

Dans le contexte de l'amortisseur de voiture, pour le confort des passagers et pour une bonne adhérence des roues sur le sol, on cherche à revenir au régime permanent le plus rapidement possible après le passage de la voiture sur une irrégularité de la route. L'amortisseur est donc conçu pour fonctionner au voisinage du régime critique avec une charge nominale du véhicule. En revanche, lorsqu'on charge trop celui-ci, la masse augmente donc le facteur de qualité également et des oscillations gênantes peuvent apparaître.

### □ Comment déterminer expérimentalement la valeur d'un coefficient de frottement ?

Pour répondre à cette question, nous traçons à l'aide de python la courbe représentant  $z(t)$  en prenant pour  $m$  et  $k$  les valeurs de l'expérience de la figure 7.1. Le coefficient de frottement  $\alpha$  est ajusté pour que les courbes expérimentales et théoriques se superposent au mieux. On constate que le frottement est environ 30 fois plus fort dans la glycérine que dans l'eau.

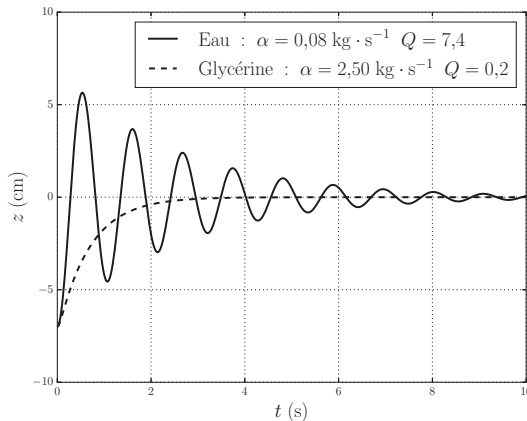


Figure 7.3. Évolution temporelle de la position de la masse (régime apériodique et pseudo-périodique).

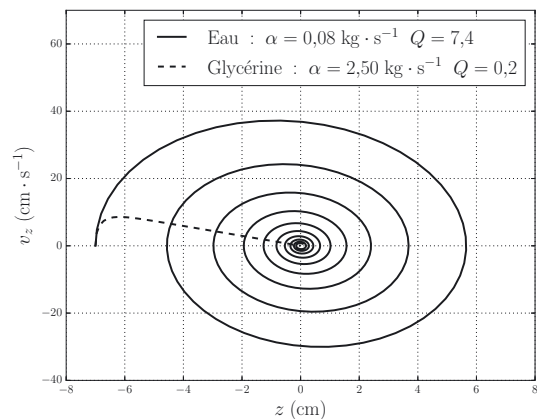


Figure 7.4. Trajectoires de phase de l'oscillateur amorti (régime apériodique et pseudo-périodique).

### □ Quelle est l'incidence du type de régime sur la trajectoire de phase ?

Cette incidence est illustrée par la figure 7.4. Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, la trajectoire de phase tourne autour du point d'équilibre en s'en rapprochant pour finir par l'atteindre. Le nombre de tours correspond au nombre d'oscillations avant arrêt. Dans le cas d'un régime apériodique, la trajectoire atteint directement le point d'équilibre sans tourner autour.

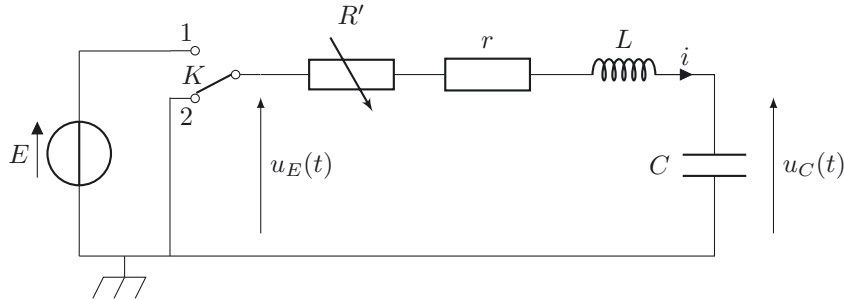
### □ Peut-on prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques ?

Dans le chapitre 1, nous avons montré que, dans le cas de l'oscillateur harmonique, l'énergie mécanique se conserve et qu'elle se partage entre énergie potentielle et énergie cinétique du système. Dans ce chapitre sur l'oscillateur amorti, nous avons ajouté un élément (la force de frottement) qui dissipe de l'énergie en la transmettant au fluide contenu dans l'amortisseur. Au cours du temps, l'énergie mécanique initiale de l'oscillateur diminue donc progressivement jusqu'à ce que celui-ci atteigne sa position d'équilibre.

En électricité, une bobine et un condensateur peuvent également stocker de l'énergie mais une résistance ne peut qu'en dissiper. La partie suivante propose de faire le parallèle avec la situation mécanique qui vient d'être étudiée pour mettre en évidence une analogie électro-mécanique.

## ■ 4 Oscillateur électrique amorti

Afin de mettre en évidence des oscillations amorties en électricité nous réalisons le montage suivant :



Le circuit  $RLC$  série est composé d'une bobine d'inductance  $L = 11,3 \text{ mH}$  et de résistance interne  $r = 2,8 \Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C = 0,99 \mu\text{F}$  et d'une résistance variable  $R'$ . La résistance totale est donc  $R = R' + r$ . La résistance  $R'$  permet de modifier le terme de dissipation d'énergie. L'interrupteur  $K$  est maintenu dans la position (1) assez longtemps pour que l'alimentation stabilisée qui délivre une tension  $E = 5,0 \text{ V}$  charge le condensateur. À  $t = 0$ , l'interrupteur est basculé dans la position (2) afin d'annuler la tension  $u_E$  appliquée au circuit  $RLC$  série. Pour éviter les rebonds causés par les interrupteurs mécaniques, nous avons en réalité utilisé un interrupteur électronique.

□ **Peut-on trouver une équation différentielle similaire à l'équation 7.2 ?**

On applique la loi des mailles au circuit ci-dessus pour  $t > 0$  :

$$(7.3) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

En utilisant la relation courant-tension dans un condensateur en convention récepteur :  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , on obtient, après avoir divisé par  $LC$ , l'équation :

$$(7.4) \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , cette équation se met sous la forme :

$$(7.5) \quad \ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

Cette équation 7.5 est formellement identique à l'équation 7.2.

□ **Quels régimes de variations peut-on observer ?**

Les équations différentielles étant identiques, on observe les mêmes régimes :

- Pour  $Q > \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $R < R_c$  avec  $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ , un régime pseudo-périodique correspondant à de faibles dissipations d'énergie.

- Pour  $Q < \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $R > R_c$ , un **régime apériodique** correspondant à des dissipations d'énergie importantes.
- Pour  $Q = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $R = R_c$ , un **régime critique** séparant les deux régimes précédents.

La figure 7.5 présente les courbes expérimentales obtenues dans les trois régimes différents. La figure 7.6 montre la trajectoire de phase pour le régime pseudo-périodique. La courbe théorique, tracée avec la solution  $u_C(t)$  de l'équation 7.4, est très proche de la courbe expérimentale.

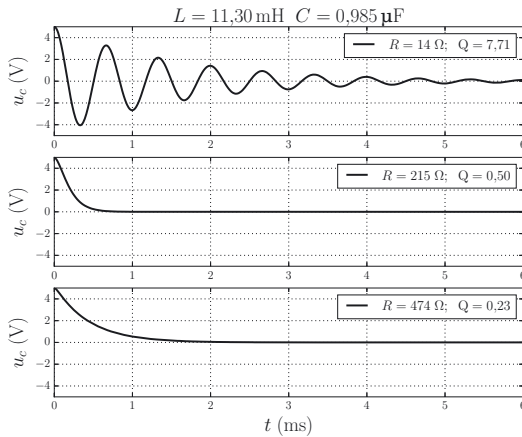


Figure 7.5. Évolution temporelle expérimentale de la tension aux bornes du condensateur pour les trois régimes de variation.

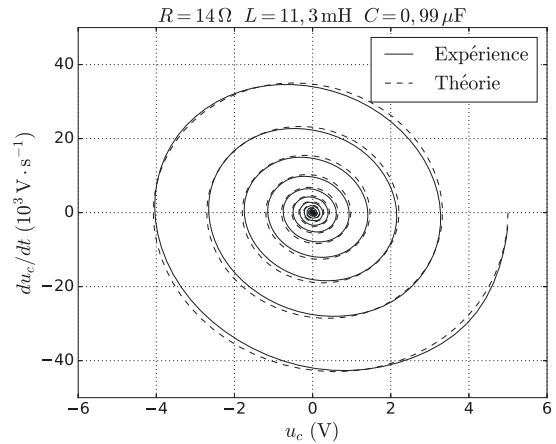


Figure 7.6. Trajectoires de phase expérimentale et théorique dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

### Méthode 7.2 : Reconnaissance d'un régime de variations temporelles

- Un régime pseudo-périodique se caractérise par des oscillations amorties dans l'évolution temporelle et une trajectoire de phase qui s'enroule autour du point d'équilibre en s'en rapprochant.
- Un régime apériodique se caractérise par l'absence d'oscillations dans l'évolution temporelle et une trajectoire de phase qui tend vers le point d'équilibre sans s'enrouler autour.
- Entre ces deux régimes, le régime critique a la particularité d'avoir la durée du régime transitoire la plus courte.

➔ Exercices (7.2) (7.3)

## ■ 5 Analogies électro-mécanique

□ Quelles analogies possibles entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques ?

En reprenant l'équation mécanique 7.1 et l'équation électrique 7.3 dans laquelle on élimine  $u_C = \frac{q}{C}$  et  $i = \frac{dq}{dt}$  au profit de la charge  $q$  du condensateur, on obtient les deux équations suivantes :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = 0$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

À partir de ces deux équations, on peut dresser le tableau des analogies suivant :

Grandeurs électriques	Grandeurs mécaniques
Charge ( $q$ )	Élongation ( $z$ )
Intensité ( $i$ )	Vitesse ( $\dot{z}$ )
Inductance ( $L$ )	Masse ( $m$ )
Résistance ( $R$ )	Coefficient de frottement ( $\alpha$ )
Capacité ( $C$ )	Inverse de la raideur ( $1/k$ )
Énergie emmagasinée dans une bobine : $Li^2/2$	Énergie cinétique : $m\dot{z}^2/2$
Énergie stockée dans un condensateur : $q^2/2C$	Énergie potentielle élastique : $kz^2/2$

L'exercice 7.9 illustre ces analogies entre grandeurs électriques et mécaniques.



## Interro de cours

On propose la série d'équations différentielles suivantes :

$$\text{n}^\circ 1 : L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0; \quad \text{n}^\circ 2 : \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{k}{m} x = 0; \quad \text{n}^\circ 3 : LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0;$$

$$\text{n}^\circ 4 : \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k}{m} z = \frac{k}{m} \ell_0; \quad \text{n}^\circ 5 : LC \frac{d^2 u}{dt^2} + u = 0; \quad \text{n}^\circ 6 : m \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + ky = k \ell_0;$$

1. Quelles sont les équations différentielles caractéristiques d'un oscillateur dont l'énergie se conserve ?
  - (a) 1.
  - (b) 2.
  - (c) 3.
  - (d) 4.
  - (e) 5.
  - (f) 6.
2. Quelles sont les équations différentielles caractéristiques d'un oscillateur amorti ?
  - (a) 1.
  - (b) 2.
  - (c) 3.
  - (d) 4.
  - (e) 5.
  - (f) 6.

On se restreint dans la suite aux équations traduisant des oscillations électriques amorties.

3. Quelle est l'expression de la pulsation propre  $\omega_0$  des oscillations ?
  - (a)  $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - (b)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
  - (c)  $\omega_0 = \sqrt{LC}$ .
  - (d)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C}}$ .
4. Quelle est l'expression du facteur de qualité  $Q$  ?
  - (a)  $Q = \frac{1}{RC}$ .
  - (b)  $Q = \frac{1}{R\sqrt{C}}$ .
  - (c)  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .
  - (d)  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ .

5. La pseudo-pulsation  $\omega$  des oscillations observées est telle que :
- (a)  $\omega = \omega_0$  ;
  - (b)  $\omega > \omega_0$  ;
  - (c)  $\omega < \omega_0$ .
6. Un étudiant réalise un circuit  $RLC$  série avec une bobine d'inductance  $L = 40$  mH, un condensateur initialement chargé de capacité  $C = 1,0$   $\mu\text{F}$  et un conducteur ohmique de résistance variable  $R$ . Quelle valeur doit-il choisir pour  $R$  pour ne pas observer d'oscillations aux bornes du condensateur ?
- (a)  $R \geq 400 \Omega$ .
  - (b)  $R \leq 400 \Omega$ .
  - (c)  $R \geq 100 \Omega$ .
  - (d)  $R \leq 100 \Omega$ .
7. L'étudiant recommence l'expérience après avoir enlevé le conducteur ohmique du circuit. Qu'observe-t-il aux bornes du condensateur ?
- (a) Des oscillations à amplitude constante.
  - (b) Des oscillations amorties.
  - (c) Pas d'oscillations.
8. Dans les conditions de la question 7, il fait une acquisition de la tension aux bornes du condensateur et mesure une fréquence  $f \simeq 795$  Hz. Déterminer la valeur du facteur de qualité.
- (a)  $Q \simeq 0,3$ .
  - (b)  $Q \simeq 0,7$ .
  - (c)  $Q \simeq 11,3$ .
9. Que vaut la résistance interne de la bobine ?
- (a)  $r \simeq 1,77 \Omega$ .
  - (b)  $r \simeq 17,7 \Omega$ .
  - (c)  $r \simeq 177 \Omega$ .
10. Un étudiant connecte un condensateur de capacité  $C$ , préalablement chargé sous la tension  $E$ , aux bornes d'un dipôle constitué d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$  en parallèle, réalisant ainsi un circuit  $RLC$  parallèle. À l'aide d'un oscilloscope, il observe des oscillations amorties de la tension  $u$  commune aux trois éléments du circuit. Quelle est l'expression du facteur de qualité de celui-ci ?
- (a)  $Q = \frac{1}{RC}$ .
  - (b)  $Q = \frac{1}{R\sqrt{C}}$ .
  - (c)  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ .
  - (d)  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ .

# Exercices

## Exercice 7.1 Résoudre une équation différentielle du second ordre

### ➔ Méthode (7.1)

Un système physique est régi par une équation différentielle du type  $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$ , où  $x$  est homogène à une longueur. On considère les cas suivants :

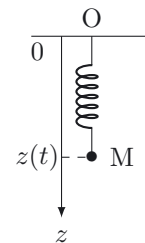
	$a$ (m · s <sup>-2</sup> )	$b$ (m · s <sup>-1</sup> )	$c$	$d$ (m)
(1)	1,0	-2,0	5,0	0,0
(2)	1,0	0,30	-6,0	0,0
(3)	1,0	0,10	25	0,0
(4)	2,0	10	1,0	0,0
(5)	1,0	0,10	25,0	8,0

1. Résoudre ces équations, en prenant comme conditions initiales  $x(0) = 1,0$  m et  $\dot{x}(0) = 0,0$  m · s<sup>-1</sup>.
2. Commenter, dans chaque cas, la stabilité du système.

## Exercice 7.2 Rôle du coefficient de frottement

### ➔ Méthode (7.2)

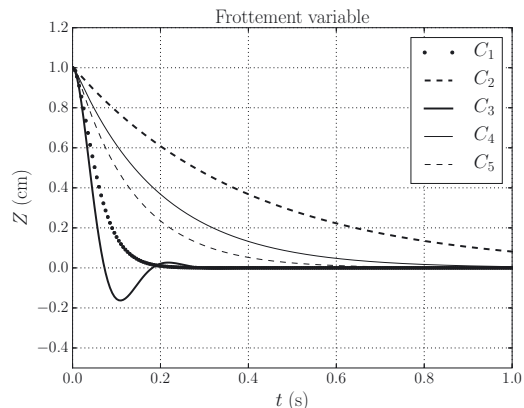
Un corps ( $S$ ), de masse  $m = 90$  g est suspendu à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur  $k = 1,0 \cdot 10^2$  N · m<sup>-1</sup> et de longueur à vide  $l_0$ . Il est plongé dans une éprouvette, non représentée, remplie d'un liquide visqueux. Lorsqu'il est animé d'une vitesse  $\vec{v}$ , il est soumis de la part de ce liquide à une force de frottement fluide  $\vec{F} = -h\vec{v}$ . La position de ( $S$ ) est repérée par la coordonnée  $z(t)$  de son centre d'inertie  $M$  sur un axe vertical descendant  $Oz$ . On note  $z_{eq}$  la valeur de  $z$  à l'équilibre et on pose  $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ .



Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au sol et supposé galiléen, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{Z} + \frac{h}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0$$

Pour différents fluides, de viscosités différentes et donc pour lesquels le coefficient de frottement  $h$  est différent, on réalise la capture vidéo du mouvement de ( $S$ ) qu'on lâche, chaque fois, à  $t = 0$  avec une vitesse nulle dans la position  $Z_0 = a > 0$ . On en déduit après traitement le comportement de  $Z(t)$ , représenté ci-contre pour les différents fluides utilisés.



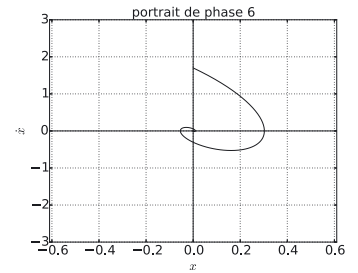
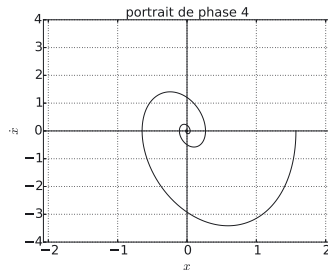
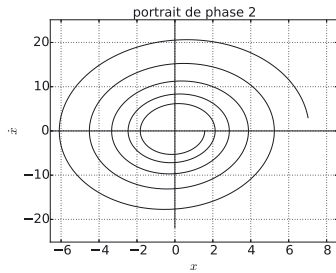
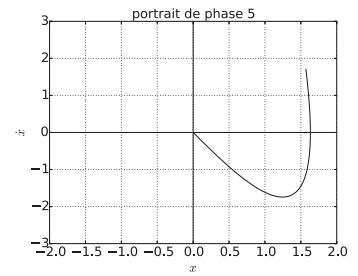
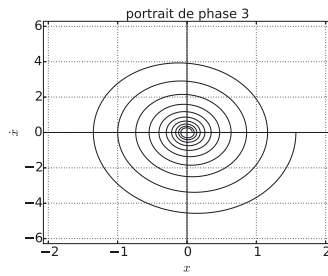
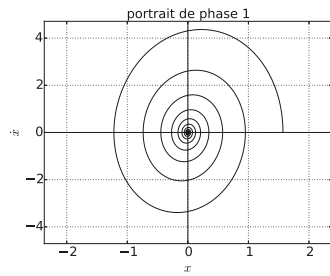
1. Pour chacune des courbes, identifier *a priori* le type de régime libre correspondant.

2. Exprimer le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur en fonction des données.
3. Les valeurs du coefficient de frottement correspondant aux 5 tracés sont  $h_a = 3,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h_b = 6,0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h_c = 14 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h_d = 20 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $h_e = 40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
Calculer les facteurs de qualité correspondant. Y en a-t-il un qui soit remarquable? Quelle est la caractéristique du régime libre associé?
4. Attribuer à chacune des courbes le facteur de qualité lui correspondant.

**Exercice 7.3 Qui sont les intrus ?**

➔ Méthode (7.2)

Les graphes ci-dessous, représentant en abscisse une variable  $x(t)$  et en ordonnée sa dérivée  $\dot{x}(t)$ , sont censés être des portraits de phase d'oscillateurs amortis.

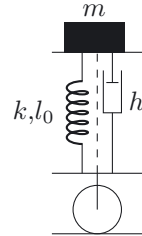


1. Parmi ces 6 graphes se cachent des intrus. Les identifier en justifiant la réponse.
2. Pour les graphes restants, indiquer la position d'équilibre stable, le sens de parcours des trajectoires de phase, la nature des conditions initiales et le régime d'oscillations.

### Exercice 7.4 Mal des transports et suspension automobile

Le mal des transports a son origine dans des conflits sensoriels entre nos capteurs auditifs et visuels. Dans le cas de mouvements oscillatoires verticaux, l'effet est le plus intense au voisinage de 0,20 Hz.

Dans le cadre d'une modélisation simple, on considère le dispositif de suspension d'une roue constitué d'un ressort, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement  $h$ . Lorsque la voiture est animée, dans le référentiel de la route, considéré galiléen, d'une vitesse verticale  $\vec{v}_z$ , l'amortisseur la soumet à une force de frottement fluide  $\vec{f} = -h\vec{v}_z$ . La masse de la voiture étant  $M$ , on considère que le dispositif de suspension d'une roue supporte une masse  $m = M/4$ . On néglige les masses des roues et de leurs systèmes de suspension devant celle de la voiture. On prend  $M = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg}$  et  $k = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .



1. On réalise un essai dynamique à vide, au cours duquel le châssis est abaissé d'une hauteur  $a$  et libéré sans vitesse initiale. Quelle valeur de  $h$  choisir pour que le retour à l'équilibre se fasse le plus rapidement possible et sans oscillations ? Faire l'application numérique.
2. L'usure des amortisseurs est responsable d'une diminution du coefficient de frottement d'un sixième de sa valeur initiale. Qu'en résulte-t-il pour le confort des passagers ?

### Exercice 7.5 Dissipation énergétique par frottement fluide

Un corps ( $S$ ), de masse  $m = 50 \text{ g}$ , est suspendu à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort vertical de raideur  $k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $l_0 = 20 \text{ cm}$ . Lorsqu'il est animé d'une vitesse  $\vec{v}$ , ( $S$ ) est soumis de la part de l'air à une force de frottement fluide  $\vec{F} = -h\vec{v}$ .

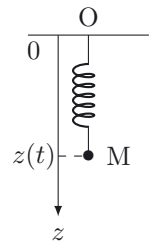
La position de ( $S$ ) est repérée par la coordonnée  $z(t)$  de son centre d'inertie  $M$  sur un axe vertical descendant  $Oz$ . On note  $z_{eq}$  la cote de  $M$  à l'équilibre.

On lâche ( $S$ ) à  $t = 0$  avec une vitesse nulle dans la position  $z_0 = z_{eq} + a > z_{eq}$ . Le référentiel  $\mathcal{R}$  lié au sol est supposé galiléen.

En introduisant la variable  $Z(t) = z(t) - z_{eq}$ , on peut montrer que  $Z$  vérifie l'équation différentielle :  $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$  avec  $\omega_0$  la pulsation propre de l'oscillateur et  $Q$  son facteur de qualité.

On s'intéresse aux aspects énergétiques de ce mouvement. On se place dans l'hypothèse  $Q \gg 1$ .

1. Déterminer les expressions de  $Z(t)$  et de  $\dot{Z}(t)$  dans le cadre de cette hypothèse, en fonction de  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $a$ .
2. Donner l'expression approchée de l'énergie mécanique de ( $S$ ) en fonction du temps.
3. Quel est le signe de la dérivée temporelle de  $E(t)$  ? Commenter le résultat.
4. Donner une expression approchée de la variation relative  $\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t+T) - E(t)}{E(t)}$  de  $E(t)$  pendant une période. En déduire une interprétation énergétique du facteur de qualité  $Q$ .



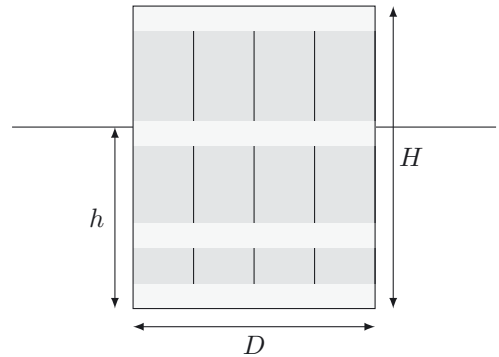
**Exercice 7.6 Lien entre équation du mouvement et énergie mécanique**

On reprend le cadre de l'exercice «Dissipation énergétique par frottement fluide» (exercice 7.5). L'équation du mouvement, dans le référentiel galiléen d'étude  $\mathcal{R}$ , s'écrit :  $m\ddot{z} + h\dot{z} + k(z - l_0) = mg$ . L'objectif est de faire le lien entre cette équation différentielle et la dissipation énergétique.

1. Rappeler la définition de la puissance d'une force  $\vec{F}$  s'exerçant sur un point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans le cas d'une force conservative, rappeler la relation entre sa puissance et son énergie potentielle.
2. Exprimer les puissances associées à la force de frottement fluide, à la force de rappel du ressort et au poids. Ces forces sont-elles conservatives ? Si oui, quelles sont les énergies potentielles associées ?
3. Partant de l'équation du mouvement, comment faire apparaître les puissances ci-dessus ?
4. Montrer que le bilan de puissance s'écrit :  $\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \mathcal{P}_f$  où  $E_c$  est l'énergie cinétique de  $(S)$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $E_p$  son énergie potentielle et  $\mathcal{P}_f$  la puissance de la force de frottement.
5. Intégrer cette équation entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ . En déduire ce que devient l'énergie qu'on fournit initialement à  $(S)$  en l'écartant de  $a$  de sa position d'équilibre et en l'abandonnant sans vitesse.

**Exercice 7.7 Tonneaux de Whisky à la dérive**

Barbe Noire est très mécontent : lors de l'abordage d'un vaisseau écossais, les marins assiégés ont livré à la mer toute leur cargaison de tonneaux de whisky. Il voit donc flotter loin de lui 4 tonneaux remplis du breuvage tant convoité. Tous les tonneaux sont identiques mais contiennent des volumes de whisky différents. On assimile un tonneau à un cylindre de hauteur  $H = 90$  cm et de diamètre  $D = 70$  cm. À l'équilibre, chaque tonneau est immergé dans l'eau de mer de masse volumique  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  d'une hauteur  $h$  comme indiqué sur la figure ci-contre.



On prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Les hauteurs immergées sont  $h_1 = 20$  cm,  $h_2 = 30$  cm,  $h_3 = 50$  cm et  $h_4 = 55$  cm.

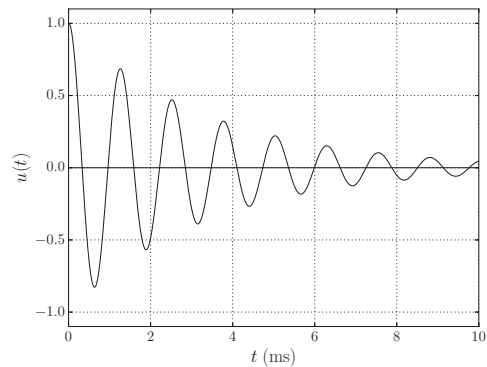
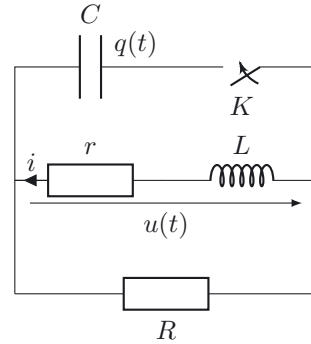
1. Relier, pour chaque tonneau, sa hauteur  $h_i$  immergée à sa masse totale.
2. Heurtés par une baleine bleue, les tonneaux sont soulevés de  $a = 10$  cm. Après le départ du cétacé, ils se mettent à osciller dans un mouvement que nous supposons uniquement vertical et sont soumis à une force de frottement fluide  $\vec{F} = -f\vec{v}$  avec  $f = 10 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Déterminer alors pour chaque tonneau la pseudo-période de ses oscillations et le temps caractérisant son retour à l'équilibre.

**Exercice 7.8 Caractéristiques d'une bobine et régime transitoire**

Afin de déterminer expérimentalement les caractéristiques d'une bobine réelle (inductance  $L$  et résistance  $r$ ), un étudiant propose à son professeur de réaliser le montage suivant.

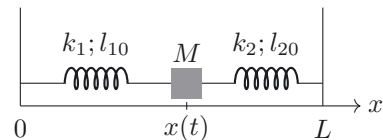
Il choisit de prendre  $R = 1,0 \cdot 10^4 \Omega$  et  $C = 1,0 \mu\text{F}$ . Le condensateur ayant été préalablement chargé avec une charge  $q_0 = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ , on ferme l'interrupteur  $K$  à l'instant  $t = 0$ .

- Proposez un dispositif expérimental permettant de charger ce condensateur.
- Montrer que la tension  $u(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :  $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$ .  
Exprimer  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R, r, L$  et  $C$ .
- Identifier les conditions initiales  $u(0)$  et  $i(0)$ .
- À partir du graphe ci-contre qui montre l'évolution temporelle de  $u(t)$ , estimer les valeurs de la pseudo-période  $T$  et du décrément logarithmique  $\delta = \ln \left( \frac{u(t)}{u(t+T)} \right)$ .
- Quelle relation relie  $\delta$  au facteur de qualité  $Q$ ?  
On pourra exprimer la pseudo-période en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .
- En déduire les valeurs expérimentales de  $\omega_0$  et  $Q$ , puis celles de  $L$  et  $r$ . Commenter.



### Exercice 7.9 À propos des analogies électromécaniques

Un solide  $M$ , de masse  $m$ , peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe  $Ox$  entre deux parois verticales fixes, situées en  $x = 0$  et  $x = L$ , au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  vitesse de  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Les frottements entre  $M$  et l'axe horizontal sont négligeables.



$M$  est relié aux parois par l'intermédiaire de deux ressorts de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueurs à vide  $l_{10}$  et  $l_{20}$ . On supposera que  $L = l_{10} + l_{20}$ . On repère  $M$  par son abscisse  $x(t)$ .

- Identifier les différentes forces s'exerçant sur  $M$ .
- Déterminer la position d'équilibre  $x_{eq}$  de  $M$ .
- On écarte  $M$  de sa position d'équilibre de la quantité  $a > 0$  et on le lâche sans vitesse initiale. On pose  $X(t) = x(t) - x_{eq}$ . Déterminer l'équation différentielle satisfaite par  $X(t)$ .
- Identifier les grandeurs électriques analogues aux grandeurs mécaniques  $k_1, k_2, M, h, X, \dot{X}$  et  $a$ . Dessiner le schéma électrique équivalent à cette situation mécanique. Préciser les conditions initiales et l'opération effectuée à  $t = 0$ .
- La situation électrique serait-elle identique si on lâchait  $M$  en  $X(0) = 0$  avec une vitesse initiale  $\dot{X}(0) = v_0 > 0$ ?

# Corrections

## Interro de cours

1. L'équation d'un oscillateur harmonique non amorti est de la forme :  $\frac{d^2Z}{dt^2} + \omega_0^2 Z = C$ , où  $C$  est une constante, quelle que soit la grandeur  $Z(t)$ , le terme positif  $\omega_0^2$  et la constante  $C$ . Les oscillations sont d'amplitude constante, ce qui traduit la conservation de l'énergie. Réponses **(d)** et **(e)**.
2. L'équation d'un oscillateur harmonique amorti est de la forme :  $\frac{d^2Z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 Z = C$  où  $C$  est une constante, quelle que soit la grandeur  $Z(t)$ , le terme positif  $\omega_0^2$  et la constante  $C$ . Réponses **(a)**, **(c)** et **(f)**. S'il y a des oscillations, leur amplitude diminue, ce qui traduit une dissipation d'énergie.
3. Les équations traduisant des oscillations électriques amorties sont les équations n°1 et n°3. Par comparaison avec l'équation canonique rappelée dans la question précédente, on trouve  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  donc  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Attention, il faut veiller à travailler avec une équation où le coefficient devant la dérivée seconde est 1 avant d'identifier l'expression de  $\omega_0^2$ . Réponse **(b)**.
4. De manière analogue, on trouve  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$  donc  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . Réponse **(c)**.
5. L'expression de la pseudo-pulsation correspond à la valeur absolue de la partie imaginaire des racines de l'équation caractéristique  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ . On obtient :  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} < \omega_0$ . Il ne faut pas confondre la pulsation propre (pulsation en absence de phénomènes dissipatifs d'énergie) et la pseudo-pulsation. Réponse **(c)**.
6. L'absence d'oscillations suppose un régime aperiodique ou critique soit  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \leq \frac{1}{2}$ . On a donc  $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 400 \Omega$ . Réponse **(a)**.
7. On pourrait s'attendre à ce qu'en absence de conducteur ohmique, les oscillations soient d'amplitude constante. Cependant il existe toujours la résistance interne de la bobine ainsi que celle des fils. Il y aura donc un amortissement qui toutefois sera faible compte tenu des valeurs de celles-ci. Réponse **(b)**.
8. Puisque  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ , on a :  $Q = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}} \simeq 11,3$  avec  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .  
Réponse **(c)**. On peut aussi justifier cette réponse en remarquant que c'est la seule pour laquelle  $Q$  est grand devant 0,5 (régime pseudo-périodique faiblement amorti).
9. Puisque  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , on a :  $r = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 17,7 \Omega$ . Réponse **(b)**.
10. La loi des nœuds s'écrit :  $i_C + i_R + i_L = 0$ . Les relations courant-tension aux bornes des différents éléments s'écrivent :  $i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$ ,  $i_R = \frac{u}{R}$  et  $u = L \frac{di_L}{dt}$ . En dérivant l'équation traduisant la loi des nœuds et en éliminant les différentes intensités, on obtient, après division par  $C$ , l'équation différentielle :  $\ddot{u} + \frac{1}{RC} \dot{u} + \frac{1}{LC} u = 0$ . On en déduit  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ . Réponse **(d)**.



**Exercice 7.1**

1. Les équations ont respectivement pour solutions :

- **Équation (1)** :  $1,0\ddot{x} - 2,0\dot{x} + 5,0x = 0$ . Équation caractéristique :  $1,0r^2 - 2,0r + 5,0$ . Discriminant :  $\Delta = -16$ . Solutions de l'équation caractéristique :  $r_{1,2} = 1,0 \pm 2,0i$ .  
Solution générale de l'équation différentielle :  $x_1(t) = \exp(1,0t) (K_1 \cos(2,0t) + K_2 \sin(2,0t))$ .  
C.I.  $\Rightarrow K_1 = 1,0$  et  $K_2 = -0,5$ . D'où :  $x_1(t) = \exp(1,0t) (1,0 \cos(2,0t) - 0,50 \sin(2,0t))$  m.
- **Équation (2)** :  $1,0\ddot{x} + 0,30\dot{x} - 6,0x = 0$ . Équation caractéristique :  $1,0r^2 + 0,30r - 6,0$ . Discriminant :  $\Delta = 24$ . Solutions de l'équation caractéristique :  $r_1 = -2,6$  et  $r_2 = 2,3$ .  
Solution générale de l'équation différentielle :  $x_2(t) = K_1 \exp(-2,6t) + K_2 \exp(2,3t)$ .  
C.I.  $\Rightarrow K_1 = 0,47$  et  $K_2 = 0,53$ . D'où :  $x_2(t) = (0,47 \exp(-2,6t) + 0,53 \exp(2,3t))$  m.
- **Équation (3)** :  $1,0\ddot{x} + 0,10\dot{x} + 25x = 0$ . Équation caractéristique :  $1,0r^2 + 0,10r + 25$ . Discriminant :  $\Delta = -1,0 \cdot 10^2$ . Solutions de l'équation caractéristique :  $r_{1,2} = -5,0 \cdot 10^{-2} \pm 5,0i$ . Solution générale de l'équation différentielle :  $x_3(t) = \exp(-5,0 \cdot 10^{-2}t) (K_1 \cos(5,0t) + K_2 \sin(5,0t))$ . C.I.  $\Rightarrow K_1 = 1,0$  et  $K_2 = 1,0 \cdot 10^{-2}$ . D'où :  $x_3(t) = \exp(-5,0 \cdot 10^{-2}t) (1,0 \cos(5,0t) + 1,0 \cdot 10^{-2} \sin(5,0t))$  m.
- **Équation (4)** :  $2,0\ddot{x} + 10\dot{x} + 1,0x = 0$ . Équation caractéristique :  $2,0r^2 + 10r + 1,0$ . Discriminant :  $\Delta = 92$ . Solutions de l'équation caractéristique :  $r_1 = -4,9$  et  $r_2 = -0,10$ .  
Solution générale de l'équation différentielle :  $x_4(t) = K_1 \exp(-4,9t) + K_2 \exp(-0,10t)$ .  
C.I.  $\Rightarrow K_1 = -2,1 \cdot 10^{-2}$  et  $K_2 = 1,0 \Rightarrow x_4(t) = (-2,1 \cdot 10^{-2} \exp(-4,9t) + 1,0 \exp(-0,10t))$  m.
- **Équation (5)** :  $1,0\ddot{x} + 0,10\dot{x} + 25x = 8,0$ . La solution générale de cette équation avec second membre constant est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, qui n'est autre que l'équation (3), et de la solution particulière constante  $x_p = \frac{8,0}{25} = 0,32$  de l'équation avec second membre. D'où :  $x_5(t) = 0,32 + \exp(-5,0 \cdot 10^{-2}t) (K_1 \cos(5,0t) + K_2 \sin(5,0t))$ .  
Les conditions initiales, utilisées sur la solution complète et non sur la solution de l'équation homogène, nous donnent :  $K_1 = 0,68$  et  $K_2 = 0,68 \cdot 10^{-2}$ .  
D'où :  $x_5(t) = (0,32 + \exp(-5,0 \cdot 10^{-2}t) (0,68 \cos(5,0t) + 0,68 \cdot 10^{-2} \sin(5,0t)))$  m.

Les valeurs des  $x_i(t)$  obtenues sont exprimées en mètre.

2. Dans les deux premiers cas, le système est instable puisque la solution diverge. Nous pouvons le prévoir sans calcul car les coefficients de l'équation sans second membre ne sont pas tous de même signe. Dans les autres cas le système est stable.

**Exercice 7.2**

1. Nous visualisons *a priori* un régime pseudo-périodique amorti et quatre régimes apériodiques amortis.
2. L'équation différentielle du mouvement se met sous la forme  $\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$  avec  $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$ .
3. Nous obtenons :  $Q_a = 1,0$ ;  $Q_b = 0,50$ ;  $Q_c = 0,21$ ;  $Q_d = 0,15$  et  $Q_e = 0,075$ . La valeur de  $Q_b$  est remarquable puisqu'elle correspond au régime critique. Ce dernier est le régime apériodique dont le retour vers la position d'équilibre se fait le plus rapidement.
4. Le régime critique ( $Q_b = 0,50$ ) correspond à la courbe 1, le régime pseudo-périodique ( $Q_a > Q_b$ ) à la courbe 3. Les autres régimes sont apériodiques. Pour ces régimes le retour à l'équilibre est d'autant plus lent que le coefficient de frottement  $h$  est grand et donc que  $Q$  est faible. Les courbes 2, 4 et 5 correspondent donc respectivement aux facteurs de qualités  $Q_e$ ,  $Q_d$  et  $Q_c$ .

**Exercice 7.3**

1. Lorsque  $\dot{x}$  est positive, alors  $x(t)$  évolue dans le sens croissant. On en déduit que les 6 portraits de phase proposés sont décrits dans le sens horaire. Les portraits de phase 1 et 2 sont donc des intrus puisqu'ils correspondent, dans le sens horaire, à des oscillations amplifiées et non amorties.

2. Pour les quatre graphes restants, les trajectoires de phases s'achèvent en  $x = 0$  qui est donc la position d'équilibre stable. Le sens de parcours est comme nous l'avons vu précédemment le sens horaire. Pour les portraits de phase 3 et 4, les conditions initiales sont du type  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = 0$  : l'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre et lâché sans vitesse. Pour le portrait de phase 6,  $x(0) = 0$  mais  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  : l'oscillateur est lancé depuis sa position d'équilibre avec une vitesse non nulle. Enfin, pour le portrait de phase 5 :  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$  : l'oscillateur est écarté de sa position d'équilibre et lancé avec une vitesse non nulle.

Pour les portraits de phase 3, 4 et 6, la trajectoire de phase s'enroule autour de la position d'équilibre. Ils correspondent donc à des régimes pseudo-périodiques, l'amortissement augmentant du 3 au 4 et du 4 au 6. Le portrait de phase 5 correspond à un retour à l'équilibre aperiodique amorti.

### Exercice 7.4

1. La loi de la quantité de mouvement appliquée à la masse  $m$  repérée par sa cote  $z$  s'écrit en projection sur un axe vertical ascendant :  $m\ddot{z} = -h\dot{z} - k(z - l_0) - mg$ . Soit, en introduisant  $z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$  cote de la position d'équilibre et  $Z = z - z_e$  cote à partir de la position d'équilibre :

$$\ddot{Z} + \frac{h}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

Le retour à l'équilibre le plus rapide et sans oscillations se fait au régime critique, pour lequel on a  $Q = \sqrt{km}/h = 1/2$ . Avec  $m = M/4$ , cela conduit à  $h = 2\sqrt{km} = 4,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. En raison de l'usure des amortisseurs, le coefficient de frottement devient égal à  $h' = 3,7 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et le facteur de qualité à  $Q' = \sqrt{km}/h' = 0,6$ . Il est supérieur à  $1/2$ . Le mouvement vertical devient pseudo-périodique, de pseudo-pulsation  $\omega' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q'^2}} = 3,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , de pseudo-période  $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 1,7 \text{ s}$ .

Les irrégularités de surface de la route donneront naissance à des oscillations du châssis susceptibles de provoquer le mal des transports chez certains passagers.

### Exercice 7.5

1. Nous supposons  $Q \gg 1$ . Le mouvement est donc pseudo-périodique et la pseudo-pulsation  $\omega$  est très voisine de  $\omega_0$ . La solution s'écrit, en prenant  $\omega \simeq \omega_0$  :  $Z(t) \simeq \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées à l'aide des conditions initiales :  $Z(0) = a = A$  et  $\dot{Z}(0) = 0$ , d'où  $0 = B\omega_0 - A\frac{\omega_0}{2Q} \simeq B\omega_0$ .

$$\text{Finalement : } Z(t) \simeq a \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \dot{Z}(t) \simeq -a\omega_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \sin(\omega_0 t).$$

2. L'énergie potentielle de ( $S$ ) est la somme de son énergie potentielle élastique et de son énergie potentielle de pesanteur. À une constante additive près, elle est de la forme :  $E_p = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 - mgz + C$ .

À l'équilibre, la tension du ressort compensant le poids de ( $S$ ), il vient :  $-k(z_{eq} - l_0) + mg = 0$ . On en déduit :  $z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ , puis :  $z(t) = Z(t) + z_{eq} = Z(t) + l_0 + \frac{mg}{k}$ . En injectant cette forme de  $z$  dans

l'expression de  $E_p$  on obtient, après simplification :  $E_p = \frac{1}{2}kZ^2 + E_{po}$ , où  $E_{po}$  est une constante qu'on peut prendre nulle en posant  $E_p = 0$  à l'équilibre. L'énergie mécanique de ( $S$ ) s'écrit alors :

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}kZ^2 \simeq \frac{1}{2}ma^2\omega_0^2 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right) \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}ka^2 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right) \cos^2(\omega_0 t).$$

$$\text{Finalement : } E(t) \simeq \frac{1}{2}ka^2 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right)$$

3. En dérivant  $E(t)$  on obtient :  $\frac{dE}{dt} = -\frac{\omega_0}{Q} \frac{1}{2} ka^2 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{Q}\right) < 0$ . On peut en conclure que  $E(t)$  diminue au cours des oscillations. Cette dissipation de l'énergie mécanique est due à la force de frottement fluide.
4. Calculons la variation relative d'énergie pendant une période :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E(t+T) - E(t)}{E(t)} = \frac{E(t+T)}{E(t)} - 1 = \exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right) - 1 \simeq \exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right) - 1 \simeq -\frac{2\pi}{Q}$$

Le facteur de qualité est donc inversement proportionnel à la variation relative d'énergie au cours d'une période :  $Q = -2\pi \frac{E}{\Delta E}$ . Si  $Q$  est élevé, l'oscillateur reviendra vers sa position d'équilibre avec un grand nombre d'oscillations car il perd peu d'énergie à chaque oscillation.

**Exercice 7.6**

1. Si le point matériel se déplace à la vitesse  $\vec{v}$  dans  $\mathcal{R}$ , la puissance de la force  $\vec{F}$  est  $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ . Dans le cas où cette force est conservative, sa puissance et son énergie potentielle (définie à une constante près) sont liées par la relation :  $\mathcal{P} = -\frac{dE_p}{dt}$ .

2. Résumons dans un tableau :

Force	Puissance	Force conservative	Énergie potentielle
Force de frottement fluide	$\mathcal{P}_f = -h\dot{z}^2$	Non	
Force de rappel du ressort	$\mathcal{P}_e = -k(z - l_0)\dot{z}$	Oui	$E_{pe} = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 + C_1$
Poids	$\mathcal{P}_p = mg\dot{z}$	Oui	$E_{pp} = -mgz + C_2$

En effet :  $\mathcal{P}_e = -k(z - l_0)\dot{z} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(z - l_0)^2\right)$  et  $\mathcal{P}_p = mg\dot{z} = -\frac{d}{dt}(-mgz)$ . Les énergies potentielles sont bien entendu définies à une constante additive près.

3. En multipliant l'équation du mouvement par  $\dot{z}$ , nous faisons apparaître les puissances :

$$m\ddot{z}\dot{z} = mg\dot{z} - h\dot{z}^2 - k(z - l_0)\dot{z} \implies m\ddot{z}\dot{z} = \mathcal{P}_p + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_e$$

4. En remarquant que  $m\ddot{z}\dot{z} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$ , l'équation précédente conduit à :

$$\frac{dE_c}{dt} - \mathcal{P}_p - \mathcal{P}_e = \mathcal{P}_f \implies \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{pp}}{dt} + \frac{dE_{pe}}{dt} = \mathcal{P}_f \implies \frac{d(E_c + E_p)}{dt} = \mathcal{P}_f \quad \text{où} \quad E_p = E_{pe} + E_{pp}$$

L'énergie potentielle étant définie à une constante près, nous prendrons  $C = C_1 + C_2 = 0$  par la suite.

5. L'équation précédente peut s'écrire  $d(E_c + E_p) = \mathcal{P}_f dt = \delta W_f$ . Elle nous permet, par intégration entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ , de faire un bilan d'énergie au cours du mouvement :  $\Delta(E_c + E_p) = W_f$ . L'énergie cinétique étant nulle au début et à la fin des oscillations, on en déduit  $\Delta E_p = W_f$ .

En posant  $Z = z - z_{eq}$ , avec  $z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$ , on obtient  $E_p = \frac{1}{2}k(z - l_0)^2 - mgz = \frac{1}{2}kZ^2$ . À la fin, le système est à l'équilibre, donc  $Z = 0$ . Au début, il est écarté de sa position d'équilibre de  $a$ , donc  $Z = a$ . On en déduit  $\Delta E_p = 0 - \frac{1}{2}ka^2 = -\frac{1}{2}ka^2$ . D'où :  $W_f = -\frac{1}{2}ka^2$ . Or  $E_p = \frac{1}{2}ka^2$  représente l'énergie qu'on fournit initialement à  $(S)$  en l'écartant de sa position d'équilibre et en l'abandonnant sans vitesse. Cette énergie est donc dissipée par les frottements lors du retour de  $(S)$  à l'équilibre.

**Exercice 7.7**

1. Le tonneau (i) est à l'équilibre sous l'effet de son poids  $m_i \vec{g}$  et de la poussée d'Archimède  $-\mu\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h_i \vec{g}$ .

On en déduit :  $m_i \vec{g} - \mu\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h_i \vec{g} = \vec{0}$  et finalement :  $h_i = \frac{4m_i}{\mu\pi D^2}$ .

2. Soit  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire de la verticale ascendante et  $z$  la cote du centre d'inertie  $G_i$  du tonneau (i) comptée à partir de sa position d'équilibre. Si  $G_i$  se déplace de  $z$ , alors la hauteur immergée devient  $h = h_i - z$ . L'application de la loi de la quantité de mouvement au tonneau mène à :

$$m_i \ddot{z} = -f\dot{z} - m_i g + \mu\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 hg = -f\dot{z} - m_i g + \mu\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h_i - z)g$$

Après simplification et division par  $m_i$ , on obtient :

$$\ddot{z} + \frac{f}{m_i} \dot{z} + \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{\mu g}{m_i} z = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{z} + \frac{\omega_{0i}}{Q_i} \dot{z} + \omega_{0i}^2 z = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\omega_{0i}}{Q_i} = \frac{f}{m_i} \quad \text{et} \quad \omega_{0i} = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\pi \mu g}{m_i}}$$

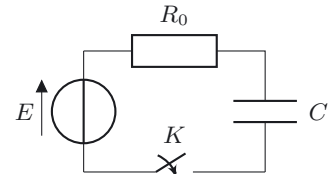
Le temps  $\tau_i$  caractérisant le retour à l'équilibre pour le tonneau (i) est :  $\tau_i = \frac{2Q_i}{\omega_{0i}} = \frac{2m_i}{f}$ . Le retour à l'équilibre se fait selon un régime pseudo-périodique de pseudo-période  $T_i = 2\pi/\omega_i$  avec

$$\omega_i = \omega_{0i} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_i^2}} = \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{1}{\tau_i^2}}$$

Tonneau	(1)	(2)	(3)	(4)
$m_i$ en kg	77	$1,2 \cdot 10^2$	$1,9 \cdot 10^2$	$2,1 \cdot 10^2$
$\tau_i$ en s	15	23	38	42
$T_i$ en s	0,90	1,1	1,4	1,5

### Exercice 7.8

1. Nous pouvons proposer le montage ci-contre. Le condensateur est chargé à travers une résistance  $R_0$  sous une tension  $E$ . Lorsque le condensateur est chargé, l'intensité du courant dans le circuit est nulle et la tension aux bornes du condensateur est égale à  $E$ . La charge du condensateur vaut alors  $q_0 = CE$ . Pour avoir  $q_0 = 1,0 \cdot 10^{-6}$  C, il suffit de prendre  $E = 1,0$  V.



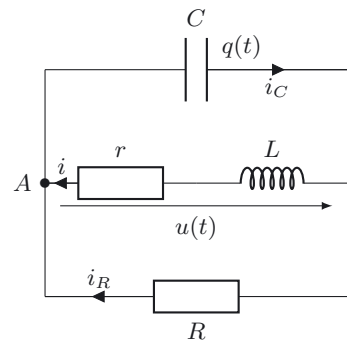
2. Le schéma ci-contre indique les conventions choisies au niveau de chaque branche du circuit.

La loi des nœuds appliquée en A donne :  $i_C = i + i_R$  soit en isolant  $i$  :  $i = i_C - i_R$ . Les relations tension-courant aux bornes des différentes branches en parallèle donnent :

$$u = ri + L \frac{di}{dt}$$

$$u = \frac{q}{C} \quad \text{et} \quad u = Ri_R$$

Par ailleurs, au niveau du condensateur (attention aux conventions de signe choisies) :  $i_C = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du}{dt}$ .



En éliminant  $i$  de la relation tension-courant de la bobine, on obtient :

$$u = ri + L \frac{di}{dt} = ri_C - ri_R + L \frac{di_C}{dt} - L \frac{di_R}{dt}$$

Puis en éliminant  $i_C$  et  $i_R$  au profit de  $u$  :  $u = -rC \frac{du}{dt} - \frac{r}{R}u - LC \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{du}{dt}$ . Il vient ainsi :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \left(rC + \frac{L}{R}\right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)u = 0, \quad \text{ce qui peut se mettre sous la forme :} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0$$

$$\text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right) \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\left(rC + \frac{L}{R}\right)} \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right) LC}$$

- La tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant dans la bobines varient de façon continue. Nous en déduisons les conditions initiales  $u(0) = \frac{q_0}{C}$  et  $i(0) = 0$ .
- Sur le graphe, au niveau de l'axe des abscisses, 7 pseudo-périodes correspondent à 8,9 ms. Nous en déduisons  $T = 1,3$  ms. Par ailleurs nous lisons :  $u(0) = 1,0$  V et  $u(T) = 0,68$  V. D'où :  $\delta = 0,38$ .
- La tension  $u(t)$  peut s'écrire sous la forme  $u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) (A \cos(\omega t + \varphi))$  où  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Nous en déduisons :  $\frac{u(t)}{u(t+T)} = \exp\left(\frac{\omega_0 T}{2Q}\right)$  et donc  $\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q}$ . Par ailleurs :  $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ , d'où

finalement :  $\delta = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$ , soit  $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}$ .

- A partir des valeurs numériques de  $\delta$  et  $T$ , nous obtenons en utilisant les relations de la question précédente :  $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}} = 8,3$  et  $\omega_0 = \frac{2Q\delta}{T} = 4,8 \cdot 10^3$  rad · s<sup>-1</sup>.  
 Pour trouver  $L$  et  $r$ , nous pouvons simplifier les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$  en faisant l'hypothèse que  $r$  est très inférieure à  $R$ . Nous obtenons :  $\omega_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}}$  d'où :  $L \simeq \frac{1}{\omega_0^2 C} = 43$  mH puis  $Q \simeq \frac{1}{\omega_0 \left(rC + \frac{L}{R}\right)}$ ,  
 d'où  $r \simeq \frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_0 Q} - \frac{L}{R}\right) = 21 \Omega$ . La valeur de  $r$  valide l'hypothèse  $r \ll R$ . Par ailleurs ces valeurs de  $r$  et  $L$  sont typiques des caractéristiques d'une bobine usuellement utilisée en travaux pratiques.

**Exercice 7.9**

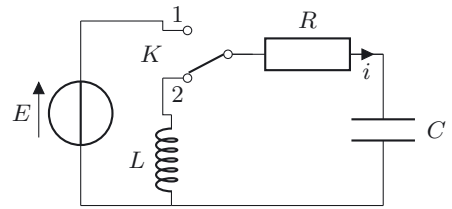
- Le solide est soumis à son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ , à la réaction normale  $\vec{N} = N\vec{u}_z$ , aux forces de rappel des ressorts  $-k_1(x-l_{10})\vec{u}_x$  et  $k_2(L-x-l_{20})\vec{u}_x = -k_2(x-l_{10})\vec{u}_x$  et à la force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$ . Remarquons que la somme des tensions des deux ressorts s'écrit :  $-(k_1 + k_2)(x - l_{10})\vec{u}_x$  et s'identifie à la force de rappel exercée par un ressort unique de raideur  $k_1 + k_2$ .
- La loi de la quantité de mouvement appliquée à  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  conduit à :  $m\vec{a}(M) = \vec{N} + m\vec{g} - (k_1 + k_2)(x - l_{10})\vec{u}_x - h\dot{x}\vec{u}_x$   
 À l'équilibre et en projection sur  $\vec{u}_x$ , on obtient :  $-(k_1 + k_2)(x_{eq} - l_{10}) = 0$ . D'où :  $x_{eq} = l_{10}$ .
- L'équation ci-dessus fournit, en projection sur  $\vec{u}_x$  :  $m\ddot{x} + h\dot{x} + (k_1 + k_2)(x - l_{10}) = 0$ , soit en introduisant  $X(t) = x(t) - x_{eq}$  :  $m\ddot{X} + h\dot{X} + (k_1 + k_2)X = 0$
- Précisons les analogies électro-mécaniques :

$k_1$	$k_2$	$m$	$h$	$X$	$\dot{X}$	$a$
$1/C_1$	$1/C_2$	$L$	$R$	$q$	$i = \dot{q}$	$q_0$

$C_1$  et  $C_2$  sont les capacités de deux condensateurs. Les ressorts étant équivalents à un ressort unique de raideur  $k = k_1 + k_2$ , ces condensateurs doivent être équivalents à un condensateur unique de capacité  $C$  tel que  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ . Ils doivent être placés en série. Par analogie les ressorts sont également dits en série.  $L$  est l'inductance d'une bobine,  $R$  une résistance,  $q$  la charge du condensateur équivalent,  $i$  l'intensité du courant circulant dans le condensateur équivalent et  $q_0$  la valeur initiale de  $q$ . Le schéma électrique équivalent est représenté ci-contre.

L'interrupteur  $K$  étant dans la position (1), le condensateur équivalent de capacité  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$  est chargé sous la tension  $E$  au travers de la résistance  $R$ . Lorsque le régime permanent est atteint, la charge du condensateur vaut  $q_0 = CE$ . L'interrupteur est alors basculé, à  $t = 0$ , dans la position (2). En raison de la continuité de la charge du condensateur et de l'intensité du courant dans la bobine :  $q(0) = q_0$ ,  $i(0) = 0$ .

5. Les conditions initiales électriques, analogues aux nouvelles conditions initiales mécaniques, deviennent  $q(0) = 0$  et  $\dot{q}(0) = i(0)$ . Il suffit d'inverser les positions de la bobine et des condensateurs. L'interrupteur étant dans la position (1), un courant s'établit dans la bobine. Lorsque le régime permanent est atteint, son intensité vaut :  $i_0 = E/R$ . L'interrupteur est ensuite basculé, à  $t = 0$ , dans la position (2).



# Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi la fréquence de l'alimentation d'une plaque de chauffage à induction influe-t-elle sur la puissance transmise à la casserole ?

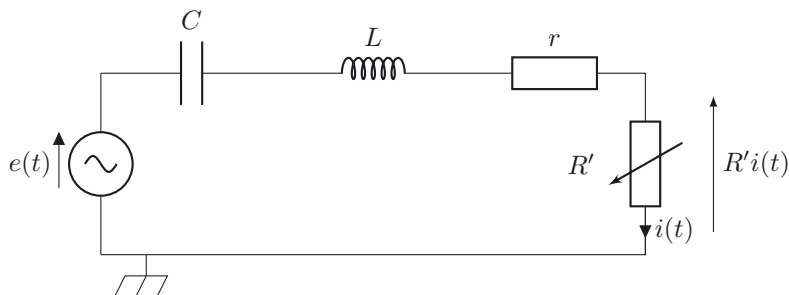
Une plaque de chauffage à induction comporte une bobine alimentée par un circuit électrique de fréquence variable. La casserole posée sur la plaque est le siège d'un phénomène d'induction, qui sera étudié au chapitre 21. Elle est alors parcourue par des courants induits qui la chauffent par effet Joule. Pour comprendre pourquoi un changement de fréquence de l'alimentation permet de modifier le courant dans la bobine, nous allons dans ce chapitre étudier l'influence de la fréquence sur le comportement d'un circuit électrique.

### ■ 1 Modélisation et approche expérimentale

Nous modélisons l'ensemble {plaque à induction+casserole} par un circuit  $RLC$  série. La bobine  $L$  correspond à la bobine inductrice de la plaque à induction, le condensateur  $C$  est présent dans le circuit d'alimentation et  $R$  modélise la charge du circuit de la bobine liée à la présence sur la plaque de la casserole parcourue par des courants induits.

□ **Quelle est l'influence de la fréquence d'alimentation sur le montage ?**

Le circuit d'étude ci-dessous est réalisé en prenant une bobine d'inductance  $L = 11,3 \text{ mH}$  et de résistance interne  $r = 3,9 \Omega$ , un condensateur de capacité  $C = 1,0 \mu\text{F}$  et une résistance  $R'$  variable. Il est alimenté par une source de tension idéale sinusoïdale  $e(t) = E_m \cos(2\pi ft)$ . Nous noterons  $R = r + R'$  la résistance totale du circuit.



□ Quelle est la forme de l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  ?

La loi des mailles appliquée au circuit  $RLC$  série conduit à :  $u_L + Ri + u_C = E_m \cos(\omega t)$  avec  $\omega = 2\pi f$ ,  $u_L = L \frac{di}{dt}$  et  $i = C \frac{du_C}{dt}$ . Après dérivation de cette équation par rapport au temps, élimination de  $u_C$  et  $u_L$  et division par  $L$ , nous obtenons :

$$(8.1) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = -\frac{E_m \omega}{L} \sin(\omega t) = \frac{E_m \omega}{L} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Soit, en introduisant la pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et le facteur de qualité  $Q = \frac{L}{R} \omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  :

$$(8.2) \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E_m \omega}{L} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

□ Quelle est la forme de l'évolution temporelle de l'intensité du courant  $i(t)$  ?

L'équation 8.2 est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, avec un second membre sinusoïdal. La solution de cette équation est la somme :

- de la solution de l'équation sans second membre qui a été déterminée en fonction des valeurs de  $\omega_0$  et  $Q$  dans le chapitre précédent ;
- d'une solution particulière de l'équation complète avec second membre sinusoïdal.

Nous avons vu au chapitre précédent que la solution de l'équation sans second membre, correspondant à un régime libre, tend vers 0 quelle que soit la valeur de  $Q$ . En posant  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ , nous pouvons négliger dans l'expression de  $i(t)$ , au bout de quelques  $\tau$ , le terme correspondant à ce régime libre. Le **régime transitoire** est alors terminé et fait place à un **régime forcé**.

□ Quelle est la forme du régime forcé pour une tension d'alimentation sinusoïdale ?

Pour répondre à cette question, nous avons enregistré en régime forcé les évolutions temporelles de la tension d'entrée et de la tension aux bornes de  $R'$ , image de l'intensité du courant dans le circuit. La figure 8.1 présente ces enregistrements pour deux valeurs différentes de la fréquence.

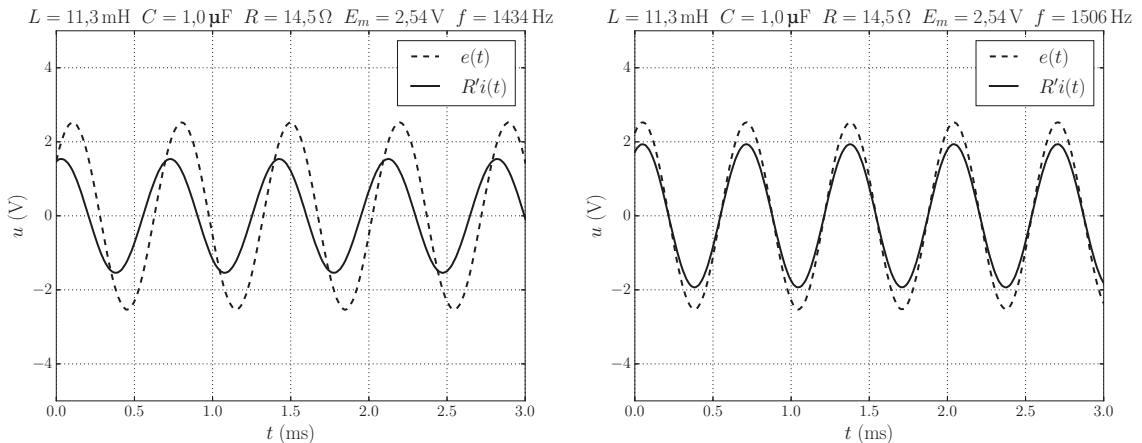


Figure 8.1. Évolutions temporelles de  $e$  et de  $u_{R'} = R' i$  pour deux fréquences différentes.



Nous constatons qu'en régime forcé, lorsque la tension d'alimentation est sinusoïdale, l'intensité du courant l'est également. Cela est lié au caractère linéaire des composants du circuit. Nous parlerons de **régime forcé sinusoïdal**. Nous pouvons écrire  $i(t)$  sous la forme :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ .

Lorsque la fréquence est modifiée, nous constatons une évolution de l'amplitude  $I_m$  et du déphasage avance  $\phi$  de  $i(t)$  sur  $e(t)$ . Pour rendre compte de cela nous avons tracé, figure 8.2,  $I_m$  et  $\phi$  en fonction de la fréquence de la tension d'alimentation  $e(t)$  pour différentes valeurs de  $R$  donc de  $Q$ .

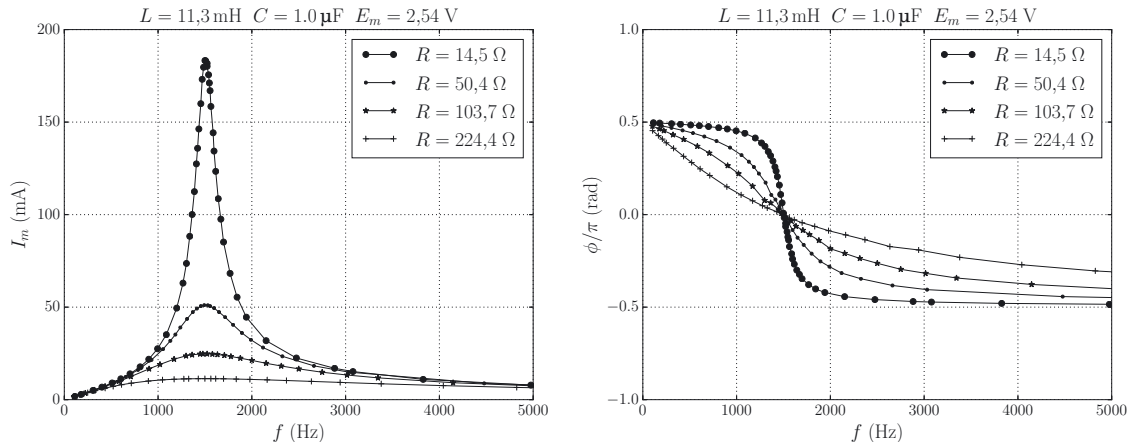


Figure 8.2. Évolution en fonction de la fréquence de l'amplitude  $I_m$  du courant (gauche) et du déphasage  $\phi$  (droite) pour différentes valeurs de résistance  $R$ .

Avec les valeurs de  $L$  et  $C$  utilisées :  $\omega_0 = 9,4 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ .

Nous observons que  $I_m$  admet un maximum pour une certaine valeur de la fréquence. Cela constitue un phénomène de **résonance**. En fonction de  $Q$ , ce phénomène peut être plus ou moins aigu.

#### Définition : Phénomène de résonance

On observe, en régime sinusoïdal forcé, un phénomène de résonance pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière appelée fréquence de résonance.

#### Définition : Acuité d'une résonance

$\Delta f$  étant la plage de fréquence dans laquelle l'amplitude de la grandeur étudiée est supérieure à sa valeur maximale divisée par  $\sqrt{2}$  et  $f_r$  étant la fréquence de résonance, on définit l'acuité d'une résonance par le rapport  $\frac{f_r}{\Delta f}$ . Plus l'acuité est importante, plus la résonance est aiguë.

#### □ Comment exploiter les graphes expérimentaux d'amplitude et de phase ?

Nos graphes expérimentaux mettent en évidence un phénomène de **résonance d'intensité** dans le circuit  $RLC$  série. Ce phénomène est observable à la fréquence  $f_r = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Hz}$  qui n'est autre que la fréquence propre du circuit, quelle que soit la valeur de  $R$  donc de  $Q$ . À la résonance le déphasage avance  $\phi$  de l'intensité du courant sur la tension excitatrice est nul.



Ces résultats ne sont pas généralisables. L'existence d'un phénomène de résonance, la valeur de la fréquence de résonance, le déphasage à la résonance entre la grandeur étudiée et la grandeur excitatrice peuvent dépendre du facteur de qualité du système.

Nous pouvons aussi calculer l'acuité d'une résonance. Par exemple, pour la courbe correspondant à  $R = 50,4 \Omega$ , les relevés expérimentaux fournissent :  $I_m(f_r) = 51 \text{ mA}$ ,  $I_m = I_m(f_r)/\sqrt{2} = 36 \text{ mA}$  pour  $f_b = 1195 \text{ Hz}$  et  $f_h = 1895 \text{ Hz}$ . D'où une acuité de résonance égale à  $\frac{f_r}{f_h - f_b} = 2,1$ .



Selon les applications, on peut souhaiter avoir un phénomène de résonance (oscillateurs...) ou au contraire l'éviter.

### Méthode 8.1 : Exploitation des graphes expérimentaux d'amplitude et de phase

Le graphe d'amplitude permet de :

- Mettre en évidence la présence ou l'absence d'un phénomène de résonance.
- Déterminer la fréquence de résonance  $f_r$  correspondant au maximum de l'amplitude.
- Déterminer la plage de fréquence  $\Delta f$  et donc l'acuité de la résonance.

Le graphe de phase permet de déterminer la fréquence propre  $f_0$  de l'oscillateur (voir tableau récapitulatif en fin de cours).

➔ Exercice (8.1)

## Retour au contexte de la plaque à induction

La fréquence d'alimentation de la bobine permet de piloter l'intensité du courant dans celle-ci et donc le champ magnétique qu'elle crée. En la modifiant, on modifie les courants induits dans la casserole et donc la puissance dissipée par effet Joule dans celle-ci. Plus la fréquence est proche de la fréquence de résonance, plus la puissance transmise à la casserole est grande.

Il nous reste à déterminer les expressions de  $I_m$  et de  $\phi$  en fonction de  $\omega$ . Pour cela nous pouvons utiliser :

- **La construction de Fresnel.**

Cette méthode a été introduite au chapitre 2. Elle consiste à associer au signal sinusoïdal  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  de pulsation  $\omega$ , le vecteur  $\vec{S}$  du plan complexe de norme  $S_m$  faisant avec l'axe des réels ( $Ox$ ) l'angle  $\varphi$ .

La somme de deux signaux  $s_1(t) = S_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $s_2(t) = S_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$ , de pulsation  $\omega$  et représentés dans le plan complexe par les vecteurs  $\vec{S}_1$  et  $\vec{S}_2$ , est un signal de pulsation  $\omega$ ,  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ , représenté dans le plan complexe par le vecteur  $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ .

Cette méthode est illustrée par l'exercice 8.4.

- **La méthode complexe**, que nous allons présenter.

## ■ 2 Outils de résolution : la méthode complexe

À la grandeur sinusoïdale  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \phi)$  nous associons la grandeur complexe définie par  $g(t) = G_m \exp(j\omega t + \phi) = G_m \exp(j\phi) \exp(j\omega t) = G_m \cos(\omega t + \phi) + jG_m \sin(\omega t + \phi)$  où  $j$  est le

nombre complexe de carré  $-1$ . La grandeur sinusoidale  $g(t)$  et sa grandeur complexe conjuguée  $\underline{g}(t)$  sont liées par la relation  $g(t) = \Re(\underline{g}(t))$ .

**Définition : Amplitude complexe d'une grandeur sinusoidale**

On définit l'amplitude complexe  $\underline{G}$  de la grandeur sinusoidale  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \phi)$  de pulsation  $\omega$  par  $\underline{G} = G_m \exp(j\phi)$ .

Une fois déterminée, elle permet de remonter à cette grandeur elle-même. En effet :

- l'amplitude  $G_m$  de  $g(t)$  est égale au module de  $\underline{G}$  :  $G_m = |\underline{G}|$  ;
- la phase à l'origine  $\phi$  de  $g(t)$  est égale à l'argument de  $\underline{G}$  :  $\phi = \arg(\underline{G})$ .

Dans l'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions sinusoidales de pulsation  $\omega$ , la notation complexe est compatible avec les opérations de combinaisons linéaires, de dérivation et d'intégration. On montre que :

- Si  $g_1(t)$  et  $g_2(t)$  sont éléments de  $\mathcal{E}$  et  $(\lambda_1, \lambda_2)$  deux réels, alors  $g(t) = \lambda_1 g_1(t) + \lambda_2 g_2(t) \in \mathcal{E}$  et son amplitude complexe vaut  $\underline{G} = \lambda_1 \underline{G}_1 + \lambda_2 \underline{G}_2$ .
- Si  $g(t) \in \mathcal{E}$  alors  $\frac{dg}{dt}$  et  $\int g dt$  sont des éléments de  $\mathcal{E}$  dont les amplitudes complexes valent respectivement  $j\omega \underline{G}$  et  $\frac{\underline{G}}{j\omega}$ .

□ **Quel est l'intérêt de la notation complexe pour étudier un régime sinusoidal forcé ?**

Un système linéaire est régi par une équation différentielle linéaire donc par une équation dans laquelle toutes les opérations sont compatibles avec la notation complexe. C'est pourquoi l'étude d'un **système linéaire en régime sinusoidal forcé** peut se faire en utilisant la **notation complexe**.

Nous allons voir, sur l'exemple développé dans la partie « Modélisation et approche expérimentale », que la notation complexe permet de substituer à l'équation différentielle linéaire une équation algébrique entre les amplitudes complexes.

Nous pouvons soit partir de l'équation différentielle, soit utiliser la notion d'impédance complexe.

□ **Comment utiliser la notation complexe en partant de l'équation différentielle ?**

Reprenons l'équation différentielle 8.2 satisfaite par  $i(t)$  :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E_m \omega}{L} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous en déduisons l'équation satisfaite par  $\underline{i}(t)$ , dont la partie réelle s'identifie à l'équation 8.2 :

$$(8.3) \quad \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{i}}{dt} + \omega_0^2 \underline{i} = \frac{E_m \omega}{L} \exp\left(j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Puis en remplaçant  $\underline{i}(t)$  par  $\underline{i}(t) = \underline{I} \exp(j\omega t)$  et après simplification par  $\exp(j\omega t)$  :

$$(8.4) \quad (j\omega)^2 \underline{I} + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \underline{I} + \omega_0^2 \underline{I} = \frac{E_m \omega}{L} \exp(j\pi/2)$$



L'équation 8.4 peut se déduire directement de l'équation différentielle 8.2 en remplaçant les grandeurs sinusoidales par leurs amplitudes complexes.

Sachant que  $\exp(j\pi/2) = j$ , nous obtenons après factorisation de  $\underline{I}$  :

$$(8.5) \quad \underline{I} = \frac{jE_m\omega}{L} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = \frac{E_m Q}{L\omega_0} \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

D'où nous déduisons  $I_m$  et  $\phi$  en prenant le module et l'argument  $\underline{I}$  :

$$I_m = |\underline{I}| = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{I}) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

Cela confirme nos observations expérimentales : la résonance d'intensité est bien observée pour  $\omega = \omega_0$  ( $I_m$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$  et vaut  $E_m/R$ ), c'est-à-dire pour  $f = f_0$  et, à cette fréquence,  $\phi = 0$ .

**Méthode 8.2 : Amplitude complexe et équation différentielle linéaire**

Dans l'étude du régime sinusoïdal forcé d'une grandeur  $g(t)$ , on peut déterminer son amplitude complexe  $\underline{G}$  en partant de l'équation différentielle linéaire qu'elle doit satisfaire :

- Dans cette équation différentielle, remplacer les grandeurs sinusoïdales et leurs dérivées par leurs amplitudes complexes, notamment  $g(t)$ ,  $\dot{g}(t)$  et  $\ddot{g}(t)$  respectivement par  $\underline{G}$ ,  $j\omega\underline{G}$  et  $(j\omega)^2\underline{G} = -\omega^2\underline{G}$ .
- Déduire  $\underline{G}$  de l'équation algébrique ainsi obtenue dans le corps des complexes.

➔ Exercice (8.2)

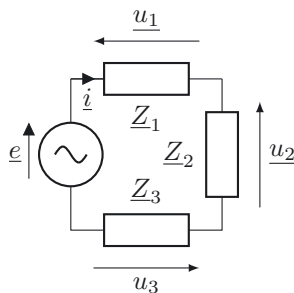
□ Comment utiliser la notion d'impédance complexe ?

**Définition : Impédance complexe**

On considère, en **convention récepteur**, un dipôle passif soumis à une tension sinusoïdale  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et parcouru par un courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ . Son impédance complexe  $\underline{Z}$  est définie par  $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I}$  et son module s'exprime en ohm.

Les lois des mailles et des nœuds s'appliquent avec les amplitudes complexes et les impédances complexes.

- Loi des mailles



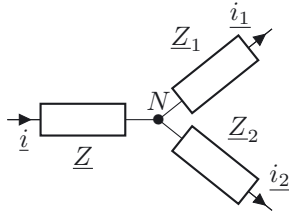
Grandeurs complexes :

$$e = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3$$

Amplitudes complexes :

$$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$$

- Loi des nœuds



Grandeurs complexes :  
 $i = i_1 + i_2$   
 Amplitudes complexes :  
 $I = I_1 + I_2$

On donne dans le tableau ci-dessous les impédances complexes des dipôles  $R$ ,  $L$  et  $C$  :

Dipôle	Résistor	Bobine idéale	Condensateur
Symbole et convention			
Relation courant-tension	$u = Ri$	$u = L \frac{di}{dt}$	$i = C \frac{du}{dt}$
Impédance complexe	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$
Déphasage avance de $i$ sur $u$ ( $\phi = -\arg Z$ )	$\phi_R = 0$	$\phi_L = -\pi/2$	$\phi_C = +\pi/2$

Les lois d'association en série et parallèle des résistances s'appliquent aux impédances complexes.

Association série et diviseur de tension		Impédance équivalente : $Z_{eq} = Z_1 + Z_2$ Généralisation : $Z_{eq} = \sum_{k=0}^n Z_k$ Diviseur de tension : $u_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} u$
Association parallèle et diviseur de courant		Impédance équivalente : $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$ Généralisation : $\frac{1}{Z_{eq}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{Z_k}$ Diviseur de courant : $i_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} i$

À titre d'exemple, reprenons le circuit  $RLC$  série. Son impédance complexe a pour expression :

$$Z_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R \left( 1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

D'où :  $I = \frac{E}{Z_{eq}} = \frac{E_m}{R} \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$ . Nous retrouvons l'équation 8.5 obtenue précédemment.

Les courbes théoriques de  $I_m$  et  $\phi$  en fonction de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  sont représentées sur la figure 8.3 pour différentes valeurs de  $R$ . Nous constatons les mêmes comportements que pour les courbes expérimentales de la figure 8.2.

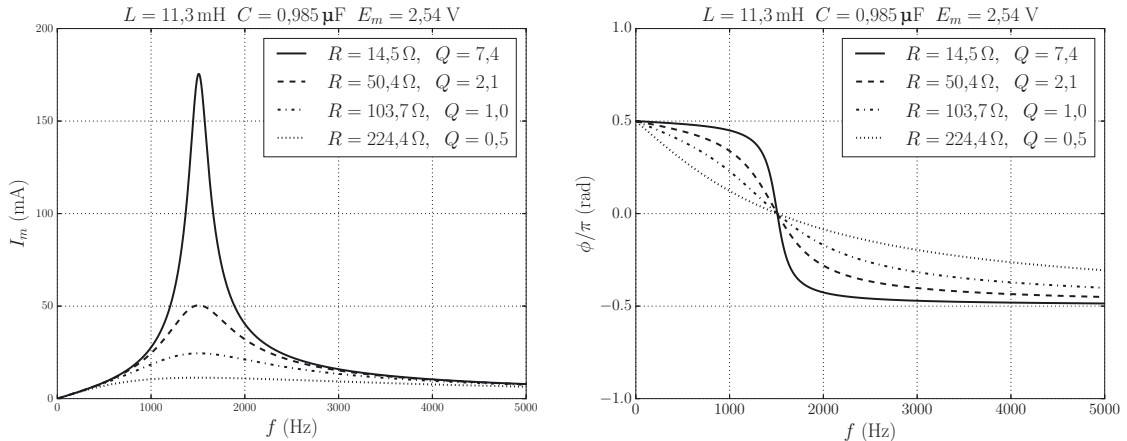


Figure 8.3. Évolution en fonction de la fréquence de l'amplitude  $I_m$  du courant (gauche) et du déphasage  $\phi$  (droite) pour différentes valeurs de résistance  $R$ .

### Méthode 8.3 : Utilisation des impédances complexes

L'étude du régime sinusoïdal forcé d'un circuit électrique linéaire peut se faire directement en utilisant la notion d'impédance complexe.

- Dans le schéma du circuit, caractériser chaque dipôle par son impédance complexe et remplacer les tensions et intensités par leurs amplitudes complexes.
- Établir un nombre suffisant de relations algébriques entre les amplitudes complexes des tensions et intensités introduites. Pour cela, on peut :
  - Appliquer les lois des mailles et des nœuds en utilisant les amplitudes complexes des tensions et des intensités.
  - Écrire aux bornes d'un dipôle d'impédance complexe  $Z$ , en convention récepteur, une relation du type  $\underline{U} = Z \underline{I}$ .
  - Utiliser les notions de diviseur de tension ou de courant.
  - Simplifier le circuit en introduisant des impédances complexes équivalentes.
- Résoudre le système d'équations linéaires obtenu dans le corps des complexes afin d'exprimer les amplitudes complexes recherchées.

➔ Exercice (8.3)

## ■ 3 Cas d'un système mécanique – Analogies

Nous reprenons dans cette partie l'exemple d'une suspension de voiture, objet du contexte du chapitre 7, en supposant que le véhicule roule sur une route bosselée. On modélise l'action de celle-ci par une force sinusoïdale verticale qui s'exerce sur la suspension du véhicule :  $\vec{F}_{\text{exc}} = f_r \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . Dans le chapitre 7, nous avons illustré ce contexte en considérant un dispositif composé d'un corps ( $S$ ) de masse  $m$ , accroché à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$  et plongé dans

un fluide de masse volumique  $\rho$ . En reprenant les paramètres de cet oscillateur et en complétant l'équation du mouvement fournie par la loi de la quantité de mouvement, pour tenir compte de la force  $\vec{F}_{\text{exc}} = f_r \cos(\omega t) \vec{u}_z$ , nous obtenons :

$$(8.6) \quad \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{f_r}{m} \cos(\omega t)$$

En régime sinusoïdal forcé la solution est de la forme :  $z(t) = Z_m \cos(\omega t + \varphi)$ . En appliquant la méthode 8.2, nous obtenons :

$$(8.7) \quad \underline{Z} = \frac{f_r}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \frac{f_r}{m \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

D'où nous déduisons :  $Z_m = \frac{f_r}{m \omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$  et  $\varphi = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}\right)$

□ **Observe-t-on un phénomène de résonance pour ce système mécanique ?**

La simulation est réalisée à partir des expressions précédentes de  $Z_m$  et  $\varphi$ . Les courbes d'élongation et de phase en fonction de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  sont présentées sur la figure 8.4. Nous observons une **résonance d'élongation** dans l'eau mais pas dans la glycérine. On peut montrer par le calcul, en faisant une étude de la fonction  $Z_m(\omega)$ , qu'une résonance est observée si  $Q$  est supérieur à  $1/\sqrt{2}$ .

□ **Ce comportement peut-il être observé pour une grandeur électrique du circuit *RLC* série ?**

D'après le tableau des analogies entre grandeurs électriques et mécaniques dressé à la fin du chapitre 7, l'élongation  $z$  a un comportement analogue à la charge  $q$  du condensateur donc à la tension  $u_C = q/C$  aux bornes de celui-ci. En utilisant la méthode 8.3, la notion de pont diviseur de tension

et en introduisant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ , nous obtenons :

$$(8.8) \quad \underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_C \underline{E}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{E}}{1 + \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C}} = \frac{E_m}{1 + jRC\omega + (j\omega)^2 LC} = \frac{E_m}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

L'équation 8.8 étant formellement analogue à l'équation 8.7, le comportement de la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur du circuit *RLC* série est comparable à celui de l'élongation  $z(t)$  du dispositif mécanique. Ceci est illustré par la figure 8.4.

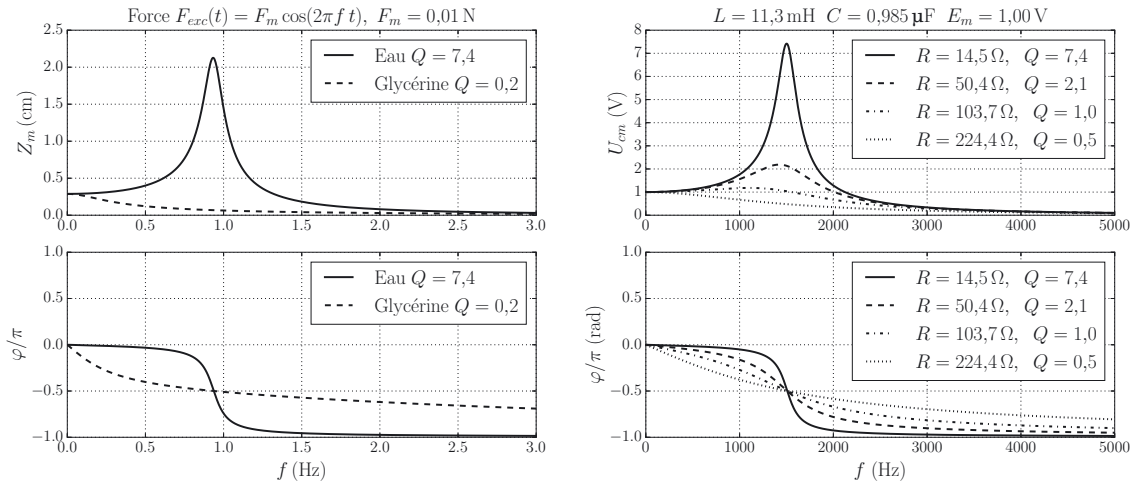


Figure 8.4. Évolutions en fonction de la fréquence de l'amplitude et de la phase de l'élongation  $z(t)$  (à gauche), de la tension  $u_C(t)$  (à droite) pour différentes valeurs de  $Q$ .

Nous constatons que la tension aux bornes du condensateur présente une résonance si le facteur de qualité est supérieur à  $1/\sqrt{2}$ . La valeur de la fréquence de résonance  $f_r$  est alors inférieure à  $f_0$ .

Une étude de la fonction  $U_{Cm}(f)$  permet d'établir son expression :  $f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ . Une étude de la fonction  $\varphi(f)$  permet d'établir que le déphasage est égal à  $-\pi/2$  pour la fréquence propre  $f_0$ .

Récapitulons pour finir ce que nous venons de voir sur nos exemples de contextualisation concernant les phénomènes de résonance d'un oscillateur amorti en régime sinusoïdal forcé.

**Récapitulatif des résonances en mécanique et en électricité**

Circuit $RLC$ série	Oscillateur mécanique	Existence
Nature de la résonance	Nature de la résonance	de résonances
Résonance de courant $i(t)$	Résonance de vitesse $v(t)$	Résonance $\forall Q$ et $f_r = f_0$ Déphasage nul pour $f = f_0 = f_r$
Résonance de tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$	Résonance d'élongation $z(t)$	Résonance seulement si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ Alors $f_r = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ Déphasage égal à $-\frac{\pi}{2}$ pour $f = f_0$



# Interro de cours

Pour chaque situation décrite, identifier la (ou les) affirmation(s) correcte(s).

1. On considère l'équation différentielle suivante :  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$  où  $x$  est une grandeur homogène à une longueur.
  - (a) La grandeur  $Q$  est homogène à un temps.
  - (b) La grandeur  $A$  a la dimension d'une longueur.
  - (c) La grandeur  $\omega_0$  désigne la pulsation imposée par le dispositif exciteur.
2. On cherche à résoudre  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$ .
  - (a) Au bout d'un certain temps le régime permanent est atteint et  $x(t)$  tend vers 0.
  - (b)  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  est la solution particulière qui correspond au régime forcé.
  - (c) Pour étudier le régime forcé on doit connaître les conditions initiales  $x(0)$  et  $\dot{x}(0)$ .
  - (d) La solution de l'équation homogène peut s'obtenir en utilisant la notation complexe.
3. On considère un condensateur traversé par un courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et soumis à une tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  en convention récepteur.
  - (a) L'impédance complexe d'un condensateur s'écrit  $Z_C = jC\omega$ .
  - (b) La tension aux bornes du condensateur est en avance de  $\pi/2$  par rapport à l'intensité.
  - (c) Le déphasage de la tension par rapport au courant s'obtient à l'aide de  $\varphi = \arg Z_C$ .
  - (d) On a  $I = C\omega U$ .
4. On considère un circuit série composé d'une source délivrant une tension  $e(t) = E \cos(\omega t)$  et de deux dipôles d'impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ . On note  $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  et  $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$  les tensions aux bornes de ces dipôles, en convention récepteur.
  - (a) Les amplitudes des différentes tensions sont liées par la relation  $E = U_1 + U_2$ .
  - (b) Les amplitudes des différentes tensions satisfont à l'inégalité  $E < U_1 + U_2$ .
  - (c) Les amplitudes des différentes tensions satisfont à l'inégalité  $E > U_1 + U_2$ .
5. Un dipôle  $RLC$  série est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de fréquence  $f$ . Avec un oscilloscope on visualise la tension  $u_R$  aux bornes de la résistance. Sur l'écran :
  - (a) on observe que la tension  $u_R$  croît, passe par un maximum puis décroît.
  - (b) On observe une tension sinusoïdale de fréquence  $f$ .
  - (c) On observe une tension constante.
6. On reprend le montage précédent. Sur l'écran de l'oscilloscope, on visualise cette fois la tension  $u_R$  et la tension  $e$  imposée par le générateur. On fait varier la fréquence  $f$  du générateur.
  - (a) L'amplitude la tension  $u_R$  passe par un maximum uniquement si la résistance du circuit est suffisamment faible.
  - (b) L'amplitude de la tension  $u_R$  est maximale quand la fréquence vaut  $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .
  - (c) Quand l'amplitude de la tension  $u_R$  est maximale,  $u_R$  est en retard sur la tension  $e$ .
  - (d) Les caractéristiques de la résonance observée (condition, fréquence, déphasage) seraient les mêmes quelle que soit la structure du circuit, à partir du moment où la tension étudiée est une tension aux bornes d'une résistance.

## Exercices

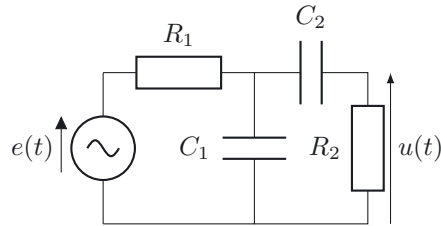
### Exercice 8.1 Résonance de tension : étude expérimentale

➔ Méthode (8.1)

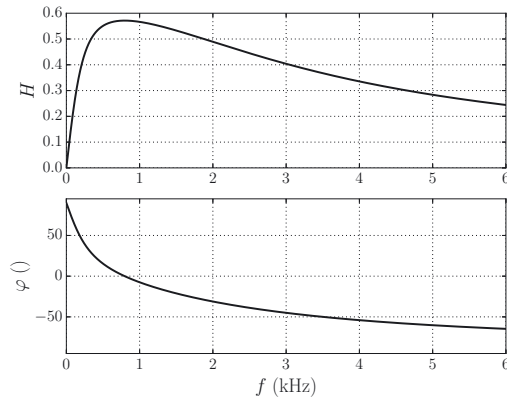
On considère le circuit suivant, avec  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ . On note  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  et on pose  $H = \frac{U_m}{E_m}$ .

1. Comment étudier expérimentalement l'évolution du rapport  $H$  avec la fréquence ? On expliquera le protocole expérimental suivi et on détaillera les instruments de mesure utilisés.
2. Même question concernant l'évolution de la phase  $\varphi$  avec  $f$ .

Les courbes représentatives de  $H(f)$  et  $\varphi(f)$  sont fournies par les figures ci-contre.



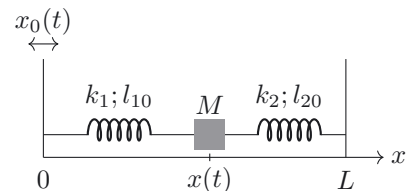
3. Observe-t-on un phénomène de résonance de tension ?
4. En utilisant la courbe de gain  $H(f)$ , déterminer les valeurs de la fréquence de résonance, de la tension maximale pouvant être atteinte et du facteur de qualité. Peut-on considérer cette résonance comme aiguë ?
5. Quelle remarque peut-on faire concernant le déphasage à la résonance ? En déduire une méthode expérimentale permettant de déterminer avec une meilleure précision la valeur de la fréquence de résonance.



### Exercice 8.2 Système à deux ressorts

➔ Méthode (8.2)

Un solide  $M$ , de masse  $m$ , peut se déplacer sur une tige horizontale parallèle à l'axe  $Ox$  au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  vitesse de  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Les frottements entre  $M$  et l'axe horizontal sont négligeables. On repère  $M$  par son abscisse  $x(t)$ .



$M$  est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueurs à vide  $l_{10}$  et  $l_{20}$ . Celle de droite est immobile en  $x = L$ , celle de gauche, d'abscisse  $x_0(t)$ , est animée d'un mouvement d'équation horaire  $x_0(t) = X_{0m} \cos(\omega t)$ . On supposera que  $L = l_{10} + l_{20}$ .

1. Identifier les différentes forces s'exerçant sur  $M$ .

- Déterminer la position d'équilibre  $x_{eq}$  de  $M$  lorsque la paroi de gauche est immobile en  $x = 0$ .
- On introduit  $X = x - x_{eq}$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $X$  lorsque la paroi bouge.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes  $\underline{x}_0(t) = X_{0m} \exp(j\omega t)$ ,  $\underline{X}(t) = X_m \exp(j(\omega t + \varphi))$  et  $\underline{v}(t) = V_m \exp(j(\omega t + \phi))$  associées à  $x_0(t)$ ,  $X(t)$  et  $v(t) = \dot{X}(t)$ .

- Définir les amplitudes complexes  $\underline{X}_0$ ,  $\underline{X}$  et  $\underline{V}$  de  $x_0(t)$ ,  $X(t)$  et  $v(t)$ .
- En exprimant  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\alpha$  en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{X}_0$$

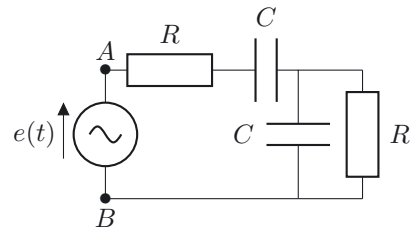
- Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

### Exercice 8.3 Associations d'impédances

#### ➔ Méthode (8.3)

On considère le circuit suivant, dans lequel  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

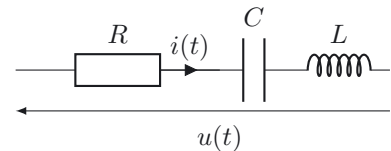
- Exprimer l'impédance complexe  $\underline{Z}_{e1}$  équivalente à la résistance  $R$  et au condensateur  $C$  en parallèle.
- Exprimer l'impédance complexe  $\underline{Z}_{e2}$  équivalente à la résistance  $R$  et au condensateur  $C$  en série.
- Utiliser les résultats précédents pour établir l'expression de l'impédance complexe équivalente au circuit entre les points  $A$  et  $B$ .



### Exercice 8.4 Représentation de Fresnel et déphasage

On considère le circuit suivant. On pose  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

- En utilisant la représentation de Fresnel, dessiner dans le plan complexe les vecteurs représentant les tensions  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  et  $u_L(t)$ , aux bornes de  $R$ ,  $C$  et  $L$ .
- En déduire le rapport  $U_m/I_m$  ainsi que le déphasage avance  $\varphi$  de la tension  $u(t)$  par rapport à l'intensité  $i(t)$ .

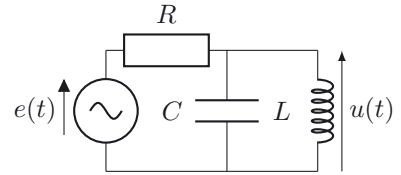


- Faire l'application numérique avec  $R = 1,0 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $C = 0,1 \mu\text{F}$ ,  $L = 0,10 \text{ H}$  et  $f = 1,0 \text{ kHz}$ .

**Exercice 8.5 Comportement d'un circuit à haute et basse fréquence**

On considère le circuit suivant. On pose  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

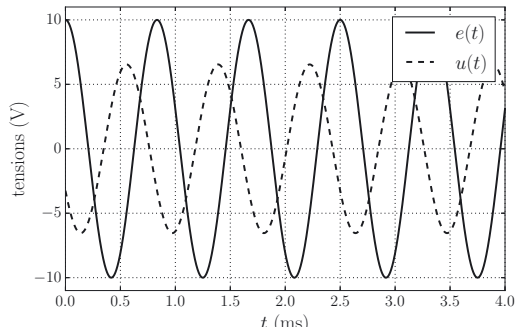
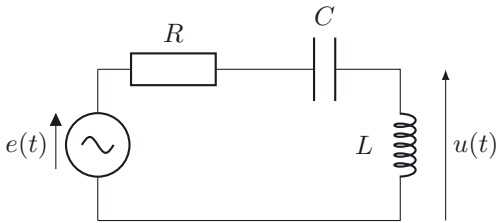
1. Définir les grandeurs complexes  $\underline{e}(t)$  et  $\underline{u}(t)$  puis les amplitudes complexes  $\underline{E}$  et  $\underline{U}$  associées aux tensions  $e(t)$  et  $u(t)$ .
2. Établir l'expression de  $\underline{U}$  en fonction de  $E_m$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .
3. En déduire les expressions de  $U_m$  et de  $\varphi$  en fonction de  $E_m$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .
4. Retrouver ces résultats à l'aide de la représentation de Fresnel.



5. Discuter du comportement de  $U_m$  et de  $\varphi$  à très basse et à très haute fréquence. Ces résultats étaient-ils prévisibles par une analyse qualitative du montage ?

**Exercice 8.6 Utilisation d'un oscillogramme**

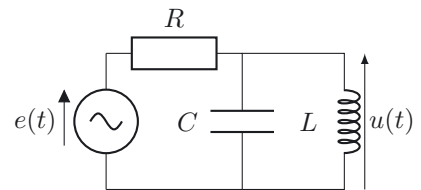
On considère le circuit suivant. On pose  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence  $f = 1,2 \cdot 10^3$  Hz, avec  $R = 1,0$  k $\Omega$  et  $C = 0,10$   $\mu$ F.



1. Déduire de cet oscillogramme les valeurs expérimentales de  $E_m$ ,  $U_m$  et  $\varphi$ .
2. En utilisant la notion de pont diviseur de tension, établir les expressions de  $U_m$  et de  $\varphi$  en fonction des composants du circuit.
3. En déduire la valeur numérique de l'inductance  $L$  de la bobine.

**Exercice 8.7 Étude théorique d'une résonance de tension**

On étudie le circuit ci-contre, avec  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ . On note  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  la tension aux bornes de l'association  $LC$  parallèle. On définit les amplitudes complexes  $\underline{E}$  et  $\underline{U}$  des tensions  $e(t)$  et  $u(t)$ . On pose  $H = \frac{U_m}{E_m}$ .



- En utilisant les lois d'association des impédances et la notion de diviseur de tension, montrer qu'on peut écrire : 
$$\underline{U} = \frac{1}{1 + j \left( RC\omega - \frac{R}{L\omega} \right)} \underline{E}$$
- En déduire les expressions de  $H$  et de  $\varphi$ , en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $\omega$ .
- Existe-t-il un phénomène de résonance de tension ? On tracera l'évolution de  $H$  et  $\varphi$  avec  $\omega$ .
- Si oui, déterminer l'expression de la fréquence de résonance  $f_0$  et du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Faire l'application numérique avec  $R = 1,0 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $L = 0,10 \text{ H}$  et  $C = 0,10 \mu\text{F}$ .
- Peut-on considérer que cette résonance est aiguë ?

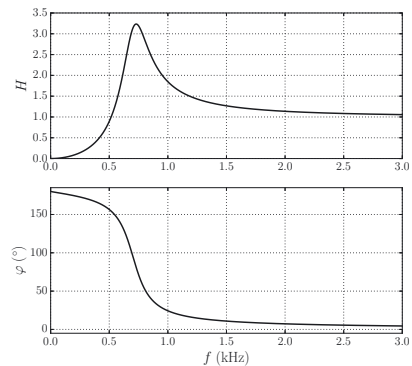
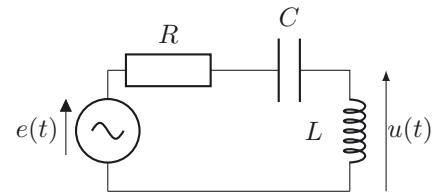
### Exercice 8.8 Étude de la surtension aux bornes d'une bobine idéale

On considère le circuit ci-contre, avec  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

On pose  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  et  $H = \frac{U_m}{E_m}$ .

On introduit les amplitudes complexes  $\underline{E}$  et  $\underline{U}$  des tensions  $e(t)$  et  $u(t)$ .

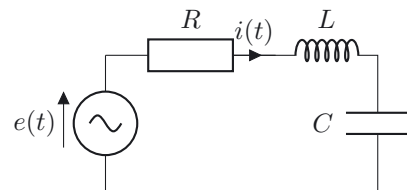
- Établir la relation entre  $\underline{U}$  et  $\underline{E}$ .
- On pose :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$  et  $X = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Donner la valeur de  $\varphi$  pour  $X = 0$ ,  $X = 1$ ,  $X \rightarrow \infty$  et esquisser l'allure de la courbe représentant  $\varphi(X)$ .
- Établir l'expression de  $U_m$  en fonction de  $X$ ,  $E_m$  et  $Q$ . Que vaut  $U_m$  pour  $X = 0$ ,  $X = 1$  et  $X \rightarrow \infty$  ?
- Montrer que  $U_m(X)$  admet un maximum ailleurs qu'en  $X = 0$  si et seulement si  $Q$  est supérieur à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Quelle est l'expression  $X_m$  de  $X$  pour ce maximum ? Situer  $X_m$  par rapport à  $X = 1$ . Vers quelle valeur tend  $X_m$  lorsque  $Q$  devient très grand devant 1 ?
- La figure ci-contre donne les courbes représentant les variations de  $H$  et  $\varphi$  en fonction de la fréquence  $f$ . En utilisant l'étude précédente, déduire de ces deux courbes les valeurs de  $f_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .



### Exercice 8.9 Bilan de puissance dans un circuit RLC série

On considère le circuit suivant dans lequel  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .

- On introduit la charge  $q(t)$  du condensateur  $C$  telle que  $i(t) = \frac{dq}{dt}$ . Écrire l'équation traduisant la loi des mailles dans le circuit et faisant intervenir  $e(t)$ ,  $i(t)$  et  $q(t)$ .



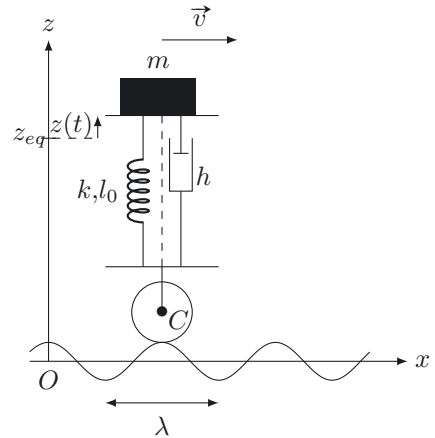
- Établir la relation :  $e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li(t)^2 + \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C} \right)$  puis l'interpréter physiquement sous la forme d'un bilan de puissance.
- En régime sinusoïdal forcé, montrer que l'énergie fournie par le générateur sur une période est entièrement consommée par effet Joule dans la résistance.
- Montrer dans ce cas que l'énergie dissipée par effet Joule sur une période est maximale pour la pulsation  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ , c'est à dire à la résonance d'intensité. On pourra au préalable exprimer l'intensité  $i(t)$  en notation complexe, puis la mettre sous la forme  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , où on exprimera uniquement l'amplitude  $I_m$  en fonction des données.

**Exercice 8.10 Conduite islandaise**

En Islande beaucoup de routes sont de fait des pistes présentant souvent des ondulations assez marquées. Les touristes peuvent être surpris par la conduite des Islandais qui roulent toujours à vive allure sur ces pistes bosselées, alors qu'eux mêmes, roulant beaucoup plus lentement, sont très secoués. Quand ils prennent exemple sur les conducteurs locaux, ils s'aperçoivent que leur confort est nettement amélioré. Nous allons tenter d'expliquer ce phénomène.

Dans le cadre d'une modélisation simple, on peut considérer que le système de suspension d'une roue, de rayon  $R$ , est constitué de la mise en parallèle d'un ressort, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement  $h$ . La masse de la voiture étant  $M$ , on considère que le système de suspension d'une roue supporte une masse  $m = M/4$ .

Le véhicule, animé d'un mouvement horizontal rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ , roule sur une route dont le profil impose au centre  $C$  de la roue considérée une cote  $z_C(t) = R + E_m \cos\left(2\pi \frac{x(t)}{\lambda}\right)$ ,  $x(t)$  étant l'abscisse de  $C$ .



On repère le mouvement vertical de  $m$  par sa cote  $z(t)$  comptée à partir de sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos et que  $z_C = R$ .

On admet que la force exercée par l'amortisseur sur  $m$  est donnée par  $\vec{F}_f = -h(\dot{z} - \dot{z}_C)\vec{u}_z$ .

On prendra  $M = 1,0 \cdot 10^3$  kg,  $k = 3,0 \cdot 10^4$  N · m<sup>-1</sup> et  $h = 2,0 \cdot 10^3$  kg · s<sup>-1</sup>.

- Après avoir fait un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur la masse  $m$ , déterminer dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen l'équation du mouvement vertical de la masse  $m$ .
- Donner l'expression de  $x(t)$  en supposant qu'à l'instant initial  $C$  se trouve à la verticale de  $O$ .
- Montrer que l'amplitude  $Z_m$  des oscillations verticales du véhicule est donnée par la relation :

$$Z_m = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} E_m, \text{ avec } \omega_0 \text{ et } Q \text{ à relier à } h, m \text{ et } k, \text{ et } \omega \text{ à } \lambda \text{ et } v.$$

- Tracer l'évolution de  $Z_m$  avec le rapport  $X = \omega/\omega_0$ .

5. On prend  $E_m = 2,5$  cm et  $\lambda = 3$  m. Au voisinage de quelle vitesse faut-il éviter de se placer si on veut éviter d'être trop secoué ?
6. Commenter la conduite islandaise et le rôle des amortisseurs.

# Corrections

## Interro de cours

1.  $[A\omega_0^2] = [\ddot{x}] = LT^{-2}$  et  $[\omega_0] = T^{-1}$  donc  $[A] = L$ ; Le facteur de qualité  $Q$  est sans dimension;  $\omega_0$  désigne la pulsation propre de l'oscillateur et non celle du dispositif excitateur qui est  $\omega$ . Réponse **(b)**.
2. Seule la réponse **(b)** est correcte. L'étude du régime sinusoïdal forcé, pour lequel la solution générale de l'équation homogène est négligeable devant la solution particulière  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  de l'équation complète, se fait en général à l'aide de la notation complexe. La dépendance temporelle étant connue, on cherche à déterminer  $X_m$  et  $\varphi$  en fonction de  $A$ ,  $Q$ ,  $\omega_0$  et  $\omega$ .
3.  $Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{jC\omega}$  donc  $\varphi = \arg U - \arg I = \arg Z_C = \arg \frac{1}{jC\omega} = -\frac{\pi}{2}$  et  $|Z_C| = \frac{|U|}{|I|} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega}$ . Réponses **(c)** et **(d)**.
4. La loi des mailles donne  $\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$ . On en déduit  $|\underline{E}| = |\underline{U}_1 + \underline{U}_2| < |\underline{U}_1| + |\underline{U}_2|$ . Réponse **(b)**.
5. La réponse d'un circuit linéaire à une excitation sinusoïdale de fréquence  $f$  est, en régime forcé, une réponse sinusoïdale de fréquence  $f$ . Réponse **(b)**.
6. En faisant varier la fréquence  $f$ , on observe dans le circuit  $RLC$  série une résonance d'intensité et donc de tension  $u_R = Ri$ . L'amplitude de  $u_R$  passe par un maximum pour la fréquence de résonance  $f_r = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  quel que soit  $Q$  et donc  $R$ . À cette fréquence  $u_R$  et  $e$  sont en phase.  
L'impédance complexe du circuit dépend de sa structure. Il en est de même de l'amplitude complexe de l'intensité du courant dans la résistance. Lorsqu'une résonance d'intensité est observée, ses caractéristiques dépendent donc de la structure du circuit. Réponse **(b)**.

## Exercice 8.1

1. Un multimètre utilisé en voltmètre permet de mesurer les tensions efficaces aux bornes du générateur et du résistor  $R_2$  via un interrupteur deux voies, ce pour différentes fréquences. Il suffit alors, pour chaque valeur de la fréquence, de calculer le rapport des tensions efficaces.
2. Les tensions aux bornes du générateur et de  $R_2$  sont observées sur les deux voies d'un oscilloscope. Le déphasage peut se lire en mode bi-courbes (on détermine alors le signe du déphasage en observant quelle tension est en avance sur l'autre, et on obtient sa valeur absolue en mesurant le décalage temporel  $\delta t$  entre les deux signaux, par  $|\varphi| = 2\pi\delta t/T$ ) ou en mode XY (méthode de Lissajou). Il est bon de privilégier cette dernière méthode pour les faibles déphasages.
3. La courbe  $H(f)$  admet un maximum. Cela signifie que si nous faisons varier  $f$  en maintenant  $E_m$  constant, nous observons un maximum de  $U_m$  donc une résonance en tension.
4. Nous obtenons par lecture  $H_{\max} = 0,57$  pour une fréquence de résonance  $f_r = 8,0 \cdot 10^2$  Hz. Le facteur de qualité s'obtient en déterminant la bande passante  $\Delta f$  définie comme l'intervalle de fréquence pour lequel  $H \geq H_{\max}/\sqrt{2}$ . Nous obtenons par lecture  $H = H_{\max}/\sqrt{2} = 0,40$  correspondant aux fréquences  $f_b = 2,0 \cdot 10^2$  Hz et  $f_h = 3,1 \cdot 10^3$  Hz. Nous en déduisons :  $Q = \frac{f_r}{f_h - f_b} = 0,28$ . La résonance n'est pas aiguë.
5. À la résonance, pour  $f_r = 8,0 \cdot 10^2$  Hz, nous constatons que  $\varphi = 0$ . La résonance étant assez floue, l'utilisation de l'oscilloscope en mode XY permet une détermination plus précise de la fréquence de résonance, en recherchant la fréquence pour laquelle on observe un segment de droite à l'écran.



**Exercice 8.2**

- Le solide est soumis à son poids  $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ , à la réaction normale  $\vec{N} = N\vec{u}_z$ , aux forces de rappel des ressorts  $-k_1(l_1 - l_{10})\vec{u}_x$  et  $k_2(l_2 - l_{20})\vec{u}_x$  et à la force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$ .
- La loi de la quantité de mouvement appliquée à  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  conduit à :  $m\vec{a}(M) = \vec{N} + m\vec{g} - k_1(l_1 - l_{10})\vec{u}_x + k_2(l_2 - l_{20})\vec{u}_x - h\dot{x}\vec{u}_x$ .  
À l'équilibre, lorsque la paroi de gauche est immobile en  $x = 0 : l_1 = x_{eq}$  et  $l_2 = L - x_{eq} = l_{10} + l_{20} - x_{eq}$ . En projection sur  $\vec{u}_x$ , on obtient alors :  $-(k_1 + k_2)(x_{eq} - l_{10}) = 0$ . D'où :  $x_{eq} = l_{10}$ .
- L'équation ci-dessus fournit, en projection sur  $\vec{u}_x : m\ddot{x} + h\dot{x} + k_1(l_1 - l_{10}) - k_2(l_2 - l_{20}) = 0$ . Lorsque l'abscisse de la paroi est  $x_0(t)$ , il vient  $l_1(t) = x(t) - x_0(t)$  et  $l_2(t) = L - x(t) = l_{10} + l_{20} - x(t)$ . En introduisant  $x(t) = X(t) + x_{eq} = X(t) + l_{10}$ , on obtient finalement :  $m\ddot{X} + h\dot{X} + (k_1 + k_2)X = k_1x_0(t)$ .
- Par définition des amplitudes complexes :  $\underline{X}_0 = X_{0m}$ ,  $\underline{X} = X_m \exp(j\varphi)$  et  $\underline{V} = V_m \exp(j\phi)$ .
- En remplaçant  $X(t)$  et  $x_0(t)$  par leurs amplitudes complexes dans l'équation du 3), on obtient :  $(j\omega)^2 m \underline{X} + j\omega h \underline{X} + (k_1 + k_2) \underline{X} = k_1 X_{0m} \implies \underline{X} = \frac{k_1 X_{0m}}{(j\omega)^2 m + j\omega h + (k_1 + k_2)}$ .  
Puis :  $\underline{V} = j\omega \underline{X} \implies \underline{V} = \frac{k_1 X_{0m}}{j\omega m + h + \frac{(k_1 + k_2)}{j\omega}} \implies \underline{V} = \frac{k_1/h}{1 + j \left( \frac{m\omega}{h} - \frac{(k_1 + k_2)}{h\omega} \right)} X_{0m}$ .  
D'où :  $\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{X}_0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$ ,  $Q = \frac{\sqrt{(k_1 + k_2)m}}{h}$  et  $\alpha = \frac{k_1}{h}$ .
- $V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} X_{0m}$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$ . On observe donc une résonance de vitesse pour cette pulsation.

**Exercice 8.3**

- La résistance et le condensateur sont en parallèle :  $\frac{1}{Z_{e1}} = jC\omega + \frac{1}{R}$  d'où  $Z_{e1} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$ .
- Pour l'association en série :  $Z_{e2} = R + \frac{1}{jC\omega}$ .
- L'impédance équivalente au circuit entre les points  $A$  et  $B$  est :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{e1} + \underline{Z}_{e2} = \frac{R}{1 + jRC\omega} + \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega} = R \left[ \frac{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}{jRC\omega(1 + jRC\omega)} \right]$$

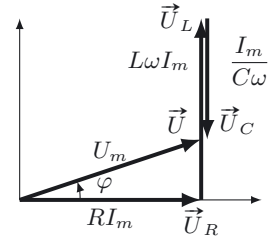
**Exercice 8.4**

- En régime sinusoïdal forcé, les tensions aux bornes de  $R$ ,  $C$  et  $L$  s'écrivent respectivement :  $u_R(t) = Ri(t) = RI_m \cos(\omega t)$  ;  $u_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{I_m}{C\omega} \sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega} \cos(\omega t - \pi/2)$  et  $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t) = L\omega I_m \cos(\omega t + \pi/2)$ .  
 $\vec{U}$ ,  $\vec{U}_R$ ,  $\vec{U}_C$  et  $\vec{U}_L$  étant les vecteurs du plan complexe représentant  $u(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$  et  $u_L(t)$ , la relation  $u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$  se traduit par la somme vectorielle  $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_L$  représentée ci-dessous.

2. On en déduit graphiquement :

- $U_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2$  soit  $\frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  ;
- $\tan(\varphi) = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$  ;  
avec  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$  si  $\omega \geq \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$  si  $\omega < \omega_0$ .

3. Numériquement :  $\frac{U_m}{I_m} = 1,4 \cdot 10^3 \Omega$  et  $\varphi = -44^\circ$ .



### Exercice 8.5

1. Par définition, les grandeurs complexes s'écrivent :  $\underline{e}(t) = E_m \exp(j\omega t)$ ,  $\underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t + \varphi)$  et les amplitudes complexes :  $\underline{E} = E_m$  et  $\underline{U} = U_m \exp(j\varphi)$ .
2. Nous reconnaissons un diviseur de tension. En notant  $\underline{Z}_e$  l'impédance complexe équivalente à l'association  $LC$  parallèle :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_e}{R + \underline{Z}_e} \underline{E} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_e}} \underline{E} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z}_e} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = \frac{1}{1 + jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} E_m.$$

3. Nous en déduisons pour l'amplitude :  $U_m = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} E_m$ .

Pour la phase il est intéressant de mettre  $\underline{U}$  sous la forme  $\underline{U} = a + jb$  :  $\underline{U} = \frac{1 - jR \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{1 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2} E_m$ .

Nous en déduisons :  $\tan(\varphi) = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega\right)$  avec :  $\cos(\varphi) > 0$ , donc  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

Nous aurions aussi pu écrire directement  $\varphi = -\arctan \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)$ .

4. Nous pouvons écrire les relations suivantes :  $e(t) = u_R(t) + u(t) = Ri(t) + u(t) = Ri_C(t) + Ri_L(t) + u(t)$  ;  
 $i_C(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$  et  $u(t) = L \frac{di_L}{dt}$ . En régime sinusoïdal forcé, il vient :  $e(t) = RC \frac{du}{dt} + \frac{R}{L} \int u dt + u(t)$   
d'où  $E_m \cos(\omega t) = -RC\omega U_m \sin(\omega t + \varphi) + \frac{RU_m}{L\omega} \sin(\omega t + \varphi) + U_m \cos(\omega t + \varphi)$ , soit finalement :

$$E_m \cos(\omega t) = RC\omega U_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{RU_m}{L\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}) + U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

En représentation de Fresnel, cette relation se traduit par la somme vectorielle représentée ci-dessous.

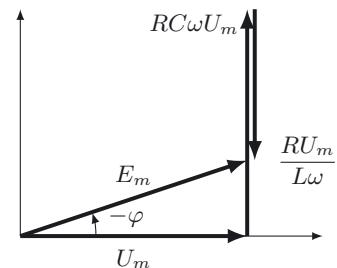
Dans le triangle rectangle nous pouvons écrire  $E_m^2 = U_m^2 + R^2 \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 U_m^2$  (relation de Pythagore),  
 $\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi) = \left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)$  et  $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) = \frac{U_m}{E_m} > 0$ . Nous retrouvons ainsi les expressions de  $U_m$  et de  $\varphi$  obtenues à la question précédente.

5. À très basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ) :  $\underline{U}(t) \simeq \frac{jL\omega}{R} \underline{E}(t)$ .

Donc :  $U_m \simeq \frac{L\omega}{R} E_m \simeq 0$  et  $\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$ . Le condensateur tendant à se comporter comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un court-circuit, il était prévisible que  $U_m$  tende vers zéro.

À très haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ) :  $\underline{U}(t) \simeq \frac{1}{jRC\omega} \underline{E}(t)$ .

Donc :  $U_m \simeq \frac{E_m}{RC\omega} \simeq 0$  et  $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$ . Le condensateur se comportant comme un court-circuit en haute fréquence et la bobine comme un interrupteur ouvert, il était prévisible que  $U_m$  tende vers zéro.



**Exercice 8.6**

1. Nous lisons  $E_m = 10\text{ V}$  et  $U_m = 6,5\text{ V}$ . Le signal  $u(t)$  étant en avance par rapport à  $e(t)$ ,  $\varphi$  est positif. Nous lisons un écart temporel entre des annulations successives de ces deux signaux sur un front montant (ou descendant)  $\delta t = 2,8 \cdot 10^{-4}\text{ s}$ . Nous en déduisons  $\varphi = 2\pi \frac{\delta t}{T} = 2,1\text{ rad}$ .

2. La notion de diviseur de tension conduit à : 
$$\underline{U} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \underline{E} = \frac{jL\omega}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} E_m.$$

Nous en déduisons pour l'amplitude : 
$$U_m = \frac{L\omega E_m}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}.$$

Pour la phase il est intéressant de mettre  $\underline{U}$  sous la forme  $\underline{U} = a + jb$  :

$$\underline{U} = jL\omega \frac{R - j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} E_m \implies \underline{U} = \frac{L\omega(L\omega - \frac{1}{C\omega}) + jRL\omega}{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} E_m.$$

Nous en déduisons :  $\tan(\varphi) = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$  avec :  $\sin(\varphi) > 0$ , donc  $0 < \varphi < \pi$ .

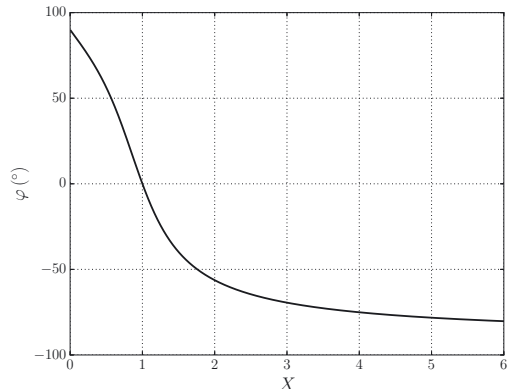
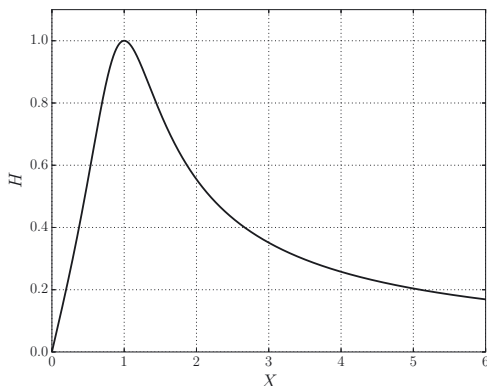
3. De l'expression de  $\tan(\varphi)$  nous déduisons :  $L = \frac{R}{\omega \tan(\varphi)} + \frac{1}{C\omega^2} = \frac{R}{2\pi f \tan(\varphi)} + \frac{1}{C4\pi^2 f^2} = 0,10\text{ H}$ .

**Exercice 8.7**

1. L'admittance équivalente de l'association  $LC$  parallèle est  $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$ . Utilisons la notion de diviseur de tension : 
$$\underline{U} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}} \underline{E} = \frac{\underline{E}}{1 + j(RC\omega - \frac{R}{L\omega})}.$$

2. Le gain s'écrit  $H = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega - \frac{R}{L\omega})^2}}$  et  $\varphi$  est tel que  $\sin(\varphi) = H(\frac{R}{L\omega} - RC\omega)$  et  $\cos(\varphi) = H$ .

3. Il existe bien un phénomène de résonance de tension. Traçons l'allure de  $H$  et de  $\varphi$  en fonction de  $X = \frac{\omega}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  :



4. La relation entre  $\underline{U}$  et  $\underline{E}$  peut s'écrire : 
$$\underline{U} = \frac{\underline{E}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

En identifiant :  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,6 \text{ kHz}$  et  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1,0$ .

5. Cette résonance ne peut pas être considérée comme aiguë.

**Exercice 8.8**

1. Nous reconnaissons un diviseur de tension :

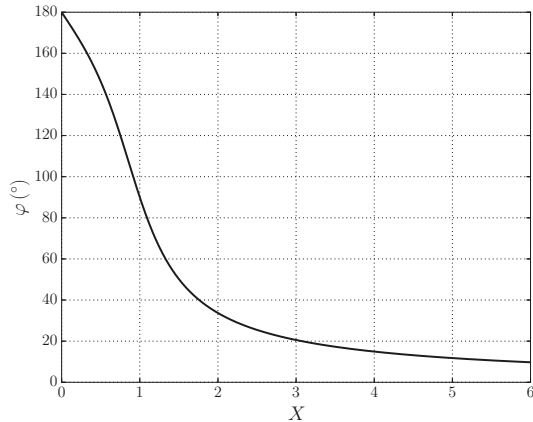
$$\underline{u}(t) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e}(t).$$

2. L'expression de  $\underline{u}(t)$  peut s'écrire :

$$\underline{u}(t) = \frac{jQ \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{e}(t).$$

Pour  $X = 0$ ,  $\varphi = \pi$  ; pour  $X = 1$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et  $\varphi$  tend vers 0 lorsque  $X \rightarrow \infty$ .

Esquissons ci-contre l'allure de  $\varphi$  avec  $X$  :



3. Nous déduisons  $U_m = \frac{QX}{\sqrt{(1 + Q^2 \left( X - \frac{1}{X} \right)^2}} E_m$ . Pour  $X = 0$ ,  $U_m = 0$  ; pour  $X = 1$ ,  $U_m = QE_m$  et  $U_m \rightarrow E_m$  lorsque  $X \gg 1$ .

4.  $U_m$  peut aussi s'écrire  $U_m = \frac{Q}{\sqrt{\frac{1}{X^2} + Q^2 \left( 1 - \frac{1}{X^2} \right)^2}} E_m$ . Posons  $x = \frac{1}{X^2}$  puis  $F(x) = x + Q^2(1 - x)^2$ .

Dérivons  $F(x)$  par rapport à  $x$  afin de trouver le minimum de  $F$  et donc le maximum de  $U_m$  :

$$\frac{dF}{dx} = 1 - 2Q^2(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

Si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , il existe une valeur  $X_m$  de  $X$  pour laquelle  $U_m$  est maximal :  $X_m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ .

Nous remarquons que  $X_m > 1$  mais qu'il tend vers 1 lorsque  $Q$  devient très grand devant 1.

5. Sur la courbe de phase,  $\varphi = 90^\circ$  pour  $f = f_0 = 7,1 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ . Nous lisons sur le diagramme de gain la fréquence  $f_m = 7,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  pour laquelle  $H$  est maximal. La valeur maximale du gain est alors

$$H_{\max} = 3,2. \text{ Or } H_{\max} = H(X_m) = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} \simeq Q \text{ si } 4Q^2 \gg 1.$$

Ainsi nous déduisons  $Q = 3,2$  et  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 4,5 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'hypothèse  $4Q^2 \gg 1$  est vérifiée.

**Exercice 8.9**

1. Utilisons la loi des mailles :  $e(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt}(t) + \frac{q(t)}{C}$ .

2. Multiplions l'équation précédente par  $i(t)$  :

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + L \frac{di}{dt}(t)i(t) + \frac{q(t)}{C}i(t) = Ri^2(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \right).$$

La puissance  $e(t)i(t)$  fournie par le générateur sert à compenser la puissance  $Ri^2(t)$  dissipée par effet Joule et à stocker les énergies  $\frac{1}{2}Li^2(t)$  et  $\frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C}$  respectivement dans la bobine et dans le condensateur.

3. Si  $f(t)$  est périodique de période  $T$ , alors  $\int_0^T \frac{df}{dt}(t)dt = [f(t)]_0^T = 0$ . Ainsi, l'énergie fournie par le générateur sur une période  $\int_0^T e(t)i(t)dt$  est égale à l'énergie  $\int_0^T Ri^2(t)dt$  consommée dans la résistance pendant la même période.

4. Utilisons la notation complexe :  $\underline{i}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$ . En écrivant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , nous

obtenons  $I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$ . L'énergie dissipée par effet Joule sur une période s'écrit donc :

$$\int_0^T Ri^2(t)dt = RI_m^2 \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi)dt = RT \frac{I_m^2}{2} \text{ qui est maximale pour } \omega = \omega_0.$$

**Exercice 8.10**

1. Les forces s'appliquant sur  $M$  sont la force de rappel, la force de frottement fluide et le poids.   l'équilibre, la force de rappel (avec  $z = 0$  et  $z_{C,eq} = R$ ) est compensée par le poids. Ainsi, en mouvement, la résultante du poids et de la force de rappel peut s'écrire :  $-k \left( z(t) - E_m \cos \left( 2\pi \frac{x(t)}{\lambda} \right) \right) \vec{u}_z$ .

Appliquons alors la loi de la quantité de mouvement à  $m$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , écrite en projection suivant  $Oz$  :  $m\ddot{z} + k(z(t) - z_C(t) + R) + h(\dot{z} - \dot{z}_C) = 0$ .

Nous en déduisons :  $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}(z_C(t) - R) + \frac{h}{m}\dot{z}_C(t)$ .

2. La vitesse du véhicule est constante :  $x(t) = vt + A$  où  $A = 0$  puisque  $C$  se trouve à la verticale de  $O$    l'instant initial. Finalement :  $x(t) = vt$ .

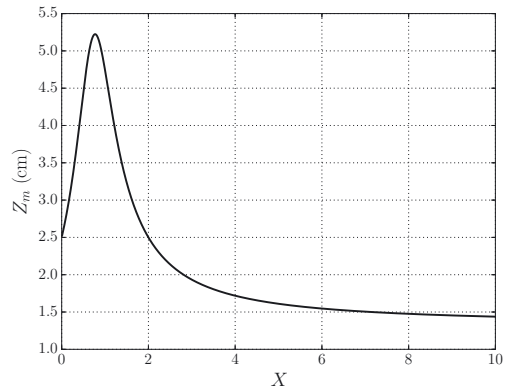
3. Posons  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}v$ . Nous pouvons alors chercher  $z(t)$  en utilisant la notation complexe et cherchons  $\underline{z}(t)$  sous la forme  $\underline{z}(t) = \underline{Z}_m \exp(i\omega t)$ .

L'équation du mouvement devient :  $\left( -\omega^2 + j\omega \frac{h}{m} + \frac{k}{m} \right) \underline{Z}_m = \frac{k}{m} E_m + j\omega \frac{h}{m} E_m$ .

Nous en déduisons  $\underline{Z}_m = \frac{\frac{k}{m} + j\omega \frac{h}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega \frac{h}{m}} E_m = \frac{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} E_m$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$ .

L'amplitude  $Z_m$  des oscillations verticales est le module de  $\underline{Z}_m$ . Nous obtenons bien l'amplitude donnée dans l'énoncé.

4. L'allure de  $Z_m$  en fonction de  $X$  est tracée sur la figure ci-contre.
5. La pulsation propre est  $\omega_0 = 11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il y a résonance d'amplitude pour une pulsation  $\omega$  voisine de cette valeur. Or  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} v$  : il faut donc éviter les vitesses de l'ordre de  $v_0 = \frac{\lambda\omega_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^1 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .
6. À faible vitesse, l'amplitude des oscillations est très importante. Celle-ci diminue en roulant plus vite, ce que font les islandais. L'amortisseur amortit les oscillations de la suspension (ressort) et participe ainsi au confort des passagers.



# Filtrage linéaire

## L'essentiel du cours

### Contexte

Comment se fait la conversion d'une tension alternative en une tension constante dans une alimentation à découpage ?

De nombreux appareils électroniques branchés sur le secteur utilisent une alimentation à découpage. La tension sinusoïdale du secteur (220 V, 50 Hz) est redressée puis filtrée pour obtenir une tension à peu près constante. Celle-ci est découpée au moyen d'un interrupteur électronique (transistor), pour donner une tension carrée de haute fréquence (10 kHz à 100 kHz) dont l'amplitude est abaissée avec un transformateur. Nous allons voir comment cette tension carrée est ensuite filtrée pour obtenir une tension constante, dont la valeur est réglée par le rapport cyclique du découpage.

### ■ 1 Caractéristiques d'un signal périodique

Dans le cadre de notre contexte, nous considérons le signal carré représenté ci-dessous, de période  $T$  et de rapport cyclique  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

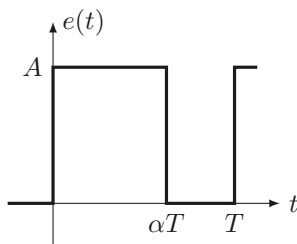


Figure 9.1. Représentation temporelle.

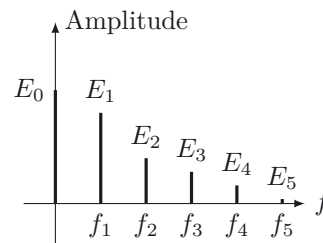


Figure 9.2. Spectre du signal.

Commençons par quelques définitions concernant les signaux périodiques.

#### Définition : Valeur moyenne d'un signal

La valeur moyenne  $\langle e(t) \rangle$  d'un signal périodique  $e(t)$  de période  $T$  est définie par :

$$E_0 = \langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e(t) dt. \text{ Le résultat est indépendant de } t_0.$$



La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

Dans le cas du signal de la figure 9.1, la valeur moyenne s'écrit :

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} A dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T 0 dt = \alpha A$$

**Définition : Valeur efficace d'un signal périodique**

La valeur efficace  $E_{\text{eff}}$  d'un signal périodique  $e(t)$  de période  $T$  est définie par :

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\langle e^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^2(t) dt}. \text{ Le résultat est indépendant de } t_0.$$

Dans le cas du signal de la figure 9.1 la valeur efficace s'écrit :

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} A^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T 0 dt} = \sqrt{\alpha} A$$

□ **Quelle est la valeur efficace du signal sinusoïdal :  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$  ?**

La période de ce signal est  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et  $\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi)$ . D'où :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_m^2}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_m^2}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) dt} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$$



Au laboratoire, un multimètre en mode AC permet de mesurer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. La mesure de l'amplitude s'obtient en multipliant le résultat par  $\sqrt{2}$ .

**Définition : Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique**

Un signal périodique de période  $T$ , de fréquence  $f = 1/T$ , peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences  $nf$ , constituant sa décomposition en **série de Fourier** :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n2\pi ft + \phi_n)$$

$E_0$  est la valeur moyenne du signal et  $E_n \cos(n2\pi ft + \phi_n)$  son harmonique de rang  $n$ , de fréquence  $f_n = nf$ , d'amplitude  $E_n$  et de phase à l'origine  $\phi_n$ . Le fondamental est l'harmonique de rang 1.

La figure 9.2 représente le spectre en fréquence et en amplitude du signal carré représenté figure 9.1, limité aux cinq premiers harmoniques.

□ **Comment récupérer la valeur moyenne du signal (ou composante continue) pour obtenir un signal constant dans le temps ?**

Dans notre contexte, nous cherchons à élaborer un signal constant à partir d'un signal carré. Nous allons voir que nous pouvons y parvenir à l'aide d'un système permettant de sélectionner certaines harmoniques d'un signal périodique et d'éliminer les autres. Un tel système constitue un **filtre**.



## ■ 2 Notions de filtrage

### □ Qu'est-ce qu'un filtre ?

#### Définition : Filtre

Un filtre est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont les fréquences appartiennent à une certaine plage appelée bande-passante. Idéalement, les signaux dont la fréquence est en dehors de la bande passante sont arrêtés par le filtre. Dans la pratique, ils doivent être suffisamment atténués pour pouvoir être négligés.



L'étude d'un filtre linéaire est menée en régime sinusoïdal, en utilisant la notation complexe.

Au signal d'entrée  $u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$  on associe l'amplitude complexe  $\underline{u}_e = U_{em} \exp(j\varphi_e)$  et au signal de sortie  $u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$ , l'amplitude complexe  $\underline{u}_s = U_{sm} \exp(j\varphi_s)$ .

### □ Comment caractériser un filtre ?

Dans le cas d'un filtre idéal, l'amplitude du signal de sortie est égale à l'amplitude du signal d'entrée pour les fréquences de la bande passante et est nulle sinon. Dans le cas d'un filtre réel,  $U_{sm}$  est une fonction continue de la fréquence ; on définit alors la **fonction de transfert complexe**  $\underline{H}$  du filtre.

#### Définition : Fonction de transfert complexe d'un filtre

La fonction de transfert complexe d'un filtre linéaire est une fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , définie par :  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{U_{sm} \exp(j\varphi_s)}{U_{em} \exp(j\varphi_e)}$ .

- Son module constitue le **gain linéaire** du filtre :  $G = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = |\underline{H}|$ .
- Son argument est le **déphasage** de  $u_s(t)$  par rapport à  $u_e(t)$  :  $\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(\underline{H})$ .



On définit également le **gain en décibel** d'un filtre :  $G_{dB} = 20 \log |\underline{H}|$ . Son intérêt est de permettre la représentation sur un même graphique de gains appartenant à de grandes plages de valeurs. Par exemple, à des gains linéaires compris entre  $1,0 \cdot 10^{-3}$  et  $1,0 \cdot 10^3$  correspondent des gains en décibels compris entre  $-60$  dB et  $60$  dB.

#### Méthode 9.1 : Détermination du signal de sortie d'un filtre en régime sinusoïdal

**En régime sinusoïdal**, les caractéristiques du signal de sortie peuvent se déduire de celles du signal d'entrée à l'aide de la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre :

- $U_{sm} = |\underline{H}| U_{em}$
- $\varphi_s = \arg(\underline{H}) + \varphi_e$

➔ Exercice (9.1)

**Définition : Bande passante à  $-3$  dB et fréquence de coupure**

- La bande passante à  $-3$  dB d'un filtre est la bande de fréquence dans laquelle le gain en décibels est supérieur au gain maximal du filtre moins trois décibels.
- Une fréquence de coupure  $f_c$  d'un filtre est définie par  $G_{\text{dB}}(f_c) = G_{\text{dB,max}} - 3$ .



Une fréquence de coupure est aussi définie par  $G(f_c) = \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$  car  $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3$  dB.



Lorsqu'un filtre passe-bas (passe-haut) présente une variation du gain non monotone,  $G_{\text{max}}$  est le gain à fréquence nulle (à fréquence infinie).

**Définition : Diagramme de Bode d'un filtre**

Le diagramme de Bode d'un filtre est la représentation des caractéristiques de sa fonction de transfert en fonction de la fréquence  $f$  sur une échelle logarithmique.

C'est l'association de deux diagrammes :

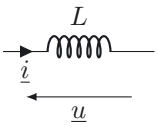
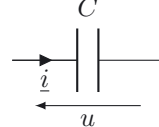
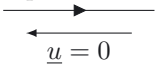
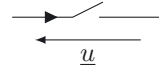
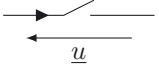
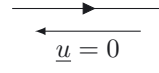
- diagramme de Bode en gain : tracé de  $G_{\text{dB}} = 20 \log |H|$  ;
- diagramme de Bode en phase : tracé de  $\varphi = \arg H$ .



L'utilisation d'une échelle logarithmique permet de voir l'évolution de la fonction de transfert  $H$  sur une large plage de fréquences. Le diagramme de Bode peut également être tracé en fonction de la fréquence réduite ( $f/f_0$ ).

**Comment réaliser un filtre ?**

Pour réaliser un filtre, il faut utiliser des composants dont l'impédance dépend de la fréquence comme par exemple des condensateurs et des bobines. Le tableau suivant rappelle le comportement de ces dipôles en basse fréquence (BF) et en haute fréquence (HF).

Dipôle	Bobine idéale	Condensateur
Symbole et conventions		
Impédance complexe	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = 1/jC\omega$
Comportement en BF $\omega \rightarrow 0$	$\underline{Z}_L \rightarrow 0 \implies \underline{u} \rightarrow 0$	$\underline{Z}_C \rightarrow \infty \implies \underline{i} \rightarrow 0$
Schéma équivalent en BF	Interrupteur fermé (fil) 	Interrupteur ouvert 
Comportement en HF $\omega \rightarrow \infty$	$\underline{Z}_L \rightarrow \infty \implies \underline{i} \rightarrow 0$	$\underline{Z}_C \rightarrow 0 \implies \underline{u} \rightarrow 0$
Schéma équivalent en HF	Interrupteur ouvert 	Interrupteur fermé (fil) 

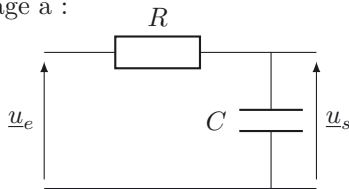
### Retour au contexte

Pour obtenir une tension constante à partir du signal carré de fréquence  $f$  dont le spectre est présenté figure 9.1, nous cherchons à réaliser un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est inférieure à la fréquence  $f$  du fondamental. Ce filtre laissera passer la fréquence nulle et devra atténuer fortement toutes les fréquences non nulles présentes dans le spectre.

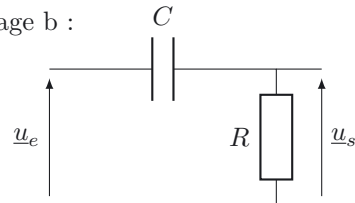
## ■ 3 Utilisation d'un filtre passe-bas du premier ordre

Nous cherchons à réaliser un filtre passe-bas à partir d'un résistor et d'un condensateur. Deux montages sont *a priori* possibles :

Montage a :

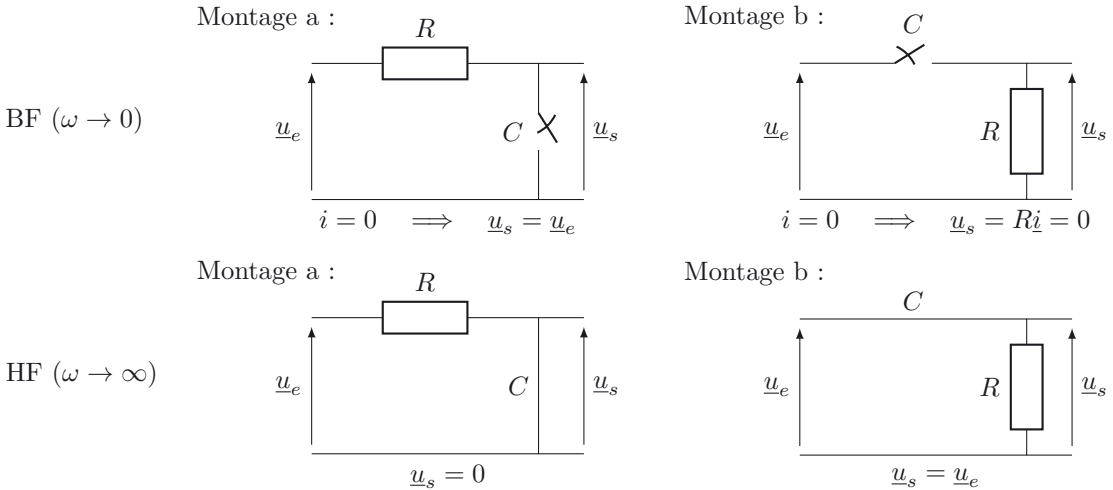


Montage b :



Parmi ces montages, y en a-t-il un qui constitue un filtre passe-bas ?

Pour répondre à cette question, menons une étude aux limites, en basses et hautes fréquences.



- Le montage a laisse passer les basses fréquences alors qu'il coupe les hautes fréquences. Il s'agit d'un filtre passe-bas.
- Le montage b coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences. Il s'agit d'un filtre passe-haut.

Dans la suite nous étudierons donc le montage a.

**Méthode 9.2 : Détermination de la nature d'un filtre par une étude aux limites**

- Remplacer les condensateurs et les bobines par leurs équivalents en basses ou hautes fréquences (interrupteurs ouverts ou fermés).
- En raisonnant sur les schémas équivalents et en utilisant les lois des circuits, établir les relations limites entre  $u_s$  et  $u_e$  à basses et hautes fréquences.
- En déduire la nature du filtre (passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande).

➔ Exercices (9.2) (9.5)

□ **Comment choisir les valeurs des composants ?**

Pour répondre à cette question, nous devons établir l'expression de la fonction de transfert du filtre et déterminer sa fréquence de coupure.

Nous reconnaissons un diviseur de tension : 
$$u_s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} u_e = \frac{1}{1 + Z_R/Z_C} u_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} u_e.$$

D'où nous déduisons : 
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega} \text{ et } G(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}}.$$



Ce filtre est un filtre d'ordre 1 car le dénominateur de sa fonction de transfert mise sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable  $\omega$  est un polynôme de degré 1.

Le gain maximal correspond à une pulsation ou à une fréquence nulle et vaut  $G_{\max} = 1$ . La pulsation de coupure  $\omega_c$  est donc définie par  $G(\omega_c) = 1/\sqrt{2}$ . Compte tenu de l'expression de  $G(\omega)$ , on obtient :  $\omega_c = 1/RC$  et  $f_c = 1/(2\pi RC)$ .

Dans le cas du convertisseur alternatif-continu de l'alimentation à découpage de notre contexte, l'ordre de grandeur de la fréquence du fondamental est la dizaine de kilohertz. Nous choisissons donc une fréquence de coupure située au moins une décade en dessous, soit  $f_c \approx 1,0$  kHz. Pour obtenir simplement une valeur proche de 1,0 kHz, nous choisissons  $R = 100 \Omega$  et  $C = 1,0 \mu\text{F}$ .

La figure 9.3 représente le diagramme de Bode du filtre RC étudié.

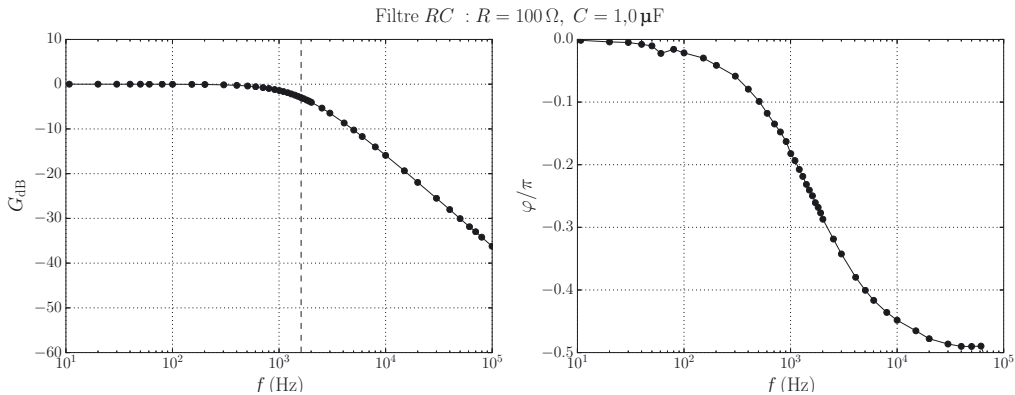


Figure 9.3. Diagramme de Bode expérimental du filtre RC.

Les parties rectilignes sont interprétables à partir de la fonction de transfert  $\underline{H}(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_c)}$  :

fréquence	$\underline{H}(f)$	$G_{\text{dB}}$	$\varphi$
$f \ll f_c$	$\underline{H}(f) \sim 1$	$G_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$	$\varphi = 0 \text{ rad}$
$f \gg f_c$	$\underline{H}(f) \sim \frac{f_c}{jf}$	$G_{\text{dB}} = 20 \log f_c - 20 \log f$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Lorsque  $f \gg f_c$ , on observe une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  sur le diagramme  $G_{\text{dB}}(\log f)$ .

La méthode d'interprétation des parties rectilignes d'un diagramme de Bode à partir de la fonction de transfert que nous venons de voir peut être étendue à tous les filtres.

**Méthode 9.3 : Interprétation des zones rectilignes dans les diagrammes de Bode**

- Établir les expressions équivalentes de la fonction de transfert lorsque  $f \ll f_c$  et  $f \gg f_c$ .
- En déduire :
  - Les pentes, en dB/décade, des différentes parties du diagramme asymptotique de  $G_{\text{dB}}(\log f)$ .
  - Les limites du déphasage  $\varphi$  en basses et hautes fréquences.

➔ Exercices (9.1) (9.3)



Pour les filtres d'ordre 1, l'intersection des deux asymptotes se fait pour  $f = f_c$ . Cela permet une détermination graphique de la fréquence de coupure pour ce type de filtres.

□ Peut-on ainsi récupérer un signal constant en sortie du filtre ?

La figure 9.4 montre à gauche les signaux d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  et à droite le spectre du signal d'entrée pour deux valeurs du rapport cyclique (0,50 en haut, 0,75 en bas). Sur les graphes de droite le gain du filtre en décibel est porté pour chaque harmonique.

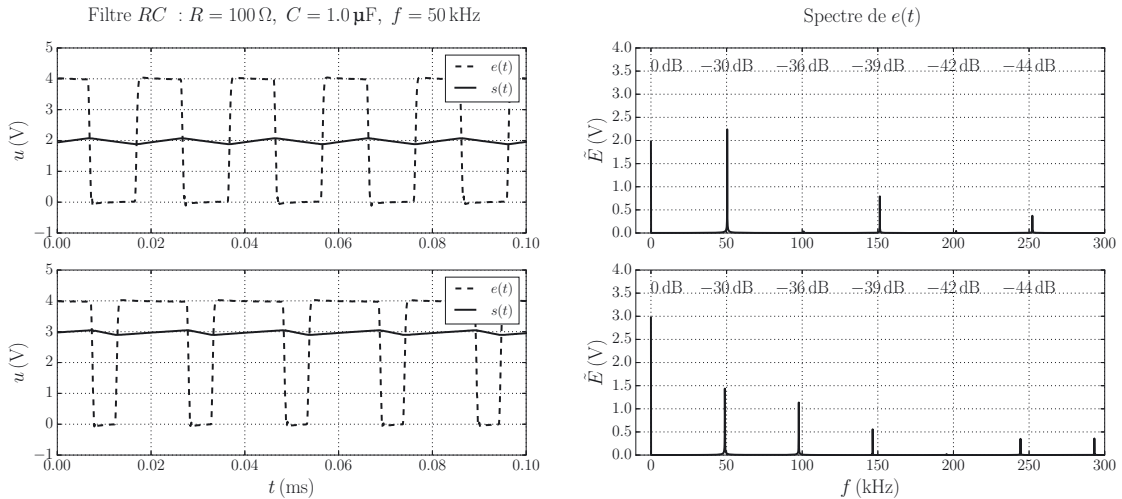


Figure 9.4. Pour deux rapports cycliques : Signaux d'entrée et de sortie du filtre (à gauche) ; spectre du signal d'entrée et gain du filtre (à droite).

Avec un gain de 0 dB pour la valeur moyenne et une atténuation égale ou supérieure à 30 dB pour les différents harmoniques nous obtenons un signal de sortie dont la composante de fréquence nulle est largement prépondérante. Nous constatons cependant que des ondulations subsistent, ce qui signifie que les amplitudes du fondamental et des harmoniques ne sont pas assez atténuées.

□ Peut-on prévoir le signal de sortie en régime périodique non sinusoïdal ?

En utilisant la **fonction de transfert** définie en régime sinusoïdal et la notion de **décomposition en série de Fourier** d'un signal périodique, il est possible de prévoir la réponse d'un filtre linéaire à un signal d'entrée périodique non sinusoïdal.

**Méthode 9.4 : Prédiction du signal de sortie d'un filtre en régime périodique**

Les signaux d'entrée et de sortie périodiques de fréquence  $f$  sont décomposés en série de Fourier. En retenant les  $N$  premiers harmoniques, il vient :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^N E_n \cos(n2\pi ft + \phi_n) \quad \text{et} \quad s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^N S_n \cos(n2\pi ft + \psi_n) \quad \text{avec} :$$

- $S_0 = |\underline{H}(0)|E_0$
- $S_n = |\underline{H}(f_n)|E_n = |\underline{H}(nf)|E_n$
- $\psi_n = \phi_n + \varphi(nf)$  avec  $\varphi(nf) = \arg(\underline{H}(nf))$

➔ Exercice (9.4)

□ **Comment quantifier l'ondulation résultante ?**

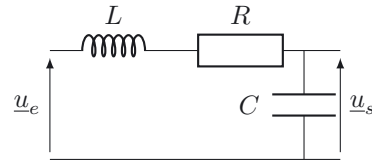
À titre d'exemple, revenons sur les signaux d'entrée et de sortie représentés figure 9.4. Pour la fréquence  $f = 50 \text{ kHz}$  du fondamental,  $G_{\text{dB}} = -30 \text{ dB}$  ce qui correspond à un gain linéaire égal à  $G = 10^{(G_{\text{dB}}/20)} = 0,032$ .

Pour le rapport cyclique 1/2, l'amplitude  $S_1$  du fondamental du signal de sortie se déduit de celle du fondamental du signal d'entrée égale à  $E_1 = 2,2 \text{ V}$  par :  $S_1 = 0,032 \times E_1 = 0,070 \text{ V}$ .

L'amplitude de l'ondulation est en fait un peu plus grande à cause des harmoniques de rang  $n > 1$ .

## ■ 4 Amélioration du filtrage

Dans le cadre de notre contexte, pour améliorer le filtrage et ainsi réduire l'ondulation de la tension en sortie, nous considérons le filtre ci-contre. La résistance  $R$  correspond à l'association de la résistance interne de la bobine et de la résistance d'un résistor mis en série avec elle.



La Méthode 9.2 permet de vérifier que ce montage est également un filtre passe-bas.

□ **Quelles sont les différences entre ce filtre et le filtre RC précédent ?**

Pour répondre à cette question, commençons par déterminer la fonction de transfert de ce nouveau filtre. L'impédance équivalente de la bobine et du résistor s'écrit  $Z_{eq} = R + jL\omega$ . On reconnaît

ensuite un diviseur de tension :  $u_s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_{eq}} u_e = \frac{1}{1 + Z_{eq}/Z_C} u_e$ . D'où :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega + LC(j\omega)^2} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{f}{f_0} - \frac{f^2}{f_0^2}}$$

avec  $Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$ .



Ce filtre est un filtre d'ordre 2 car le dénominateur de sa fonction de transfert, mise sous la forme d'une fraction rationnelle de la variable  $\omega$ , est un polynôme de degré 2.

Appliquons ensuite la Méthode 9.3 à ce filtre :

fréquence	$\underline{H}(f)$	$G_{\text{dB}}$	$\varphi$
$f \ll f_0$	$\underline{H}(f) \sim 1$	$G_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$	$\varphi = 0 \text{ rad}$
$f \gg f_0$	$\underline{H}(f) \sim -\frac{f_0^2}{f^2}$	$G_{\text{dB}} = 40 \log f_0 - 40 \log f$	$\varphi = -\pi \text{ rad}$
$f = f_0$	$\underline{H}(f_0) = -jQ$	$G_{\text{dB}} = 20 \log Q$	$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

On observe cette fois une asymptote hautes fréquences de pente  $-40 \text{ dB/décade}$ . Ce filtre atténue donc davantage les fréquences situées hors de la bande passante.

Sur la figure 9.5, on peut voir les asymptotes trouvées précédemment.

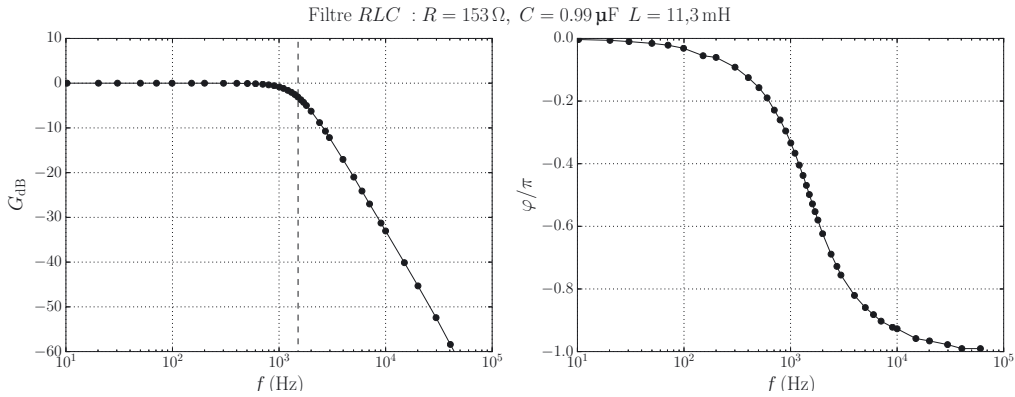


Figure 9.5. Diagramme de Bode expérimental du filtre  $RLC$ .

La figure 9.6 reprend, dans le cas du filtre passe-bas d'ordre 2, le principe de la figure 9.4 réalisée dans le cas du filtre passe-bas d'ordre 1.

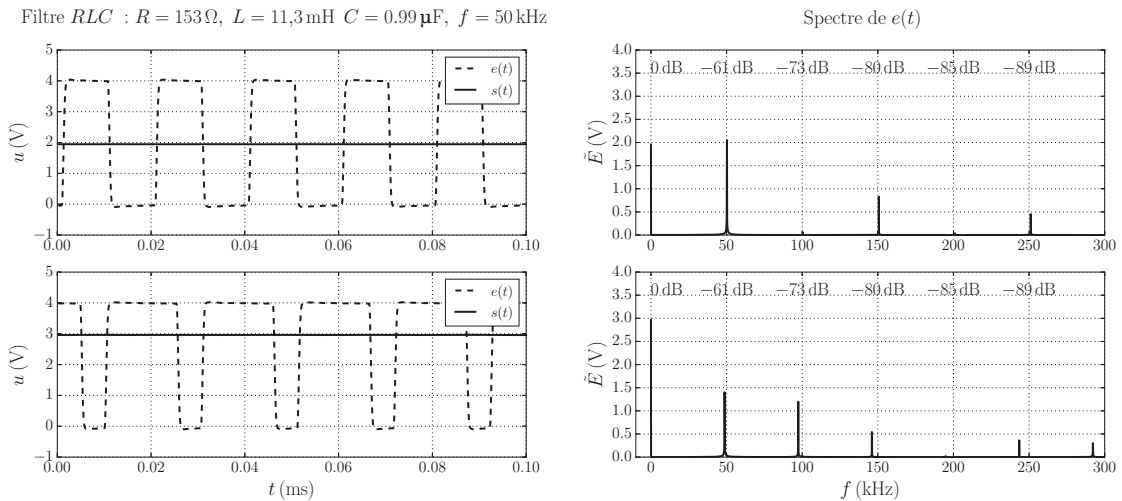


Figure 9.6. Pour deux rapports cycliques : Signaux d'entrée et de sortie du filtre (à gauche) ; spectre du signal d'entrée et gain du filtre (à droite).

Avec le filtre passe-bas d'ordre 2 le fondamental est atténué de 61 dB alors qu'il n'était atténué que de 30 dB avec le filtre passe-bas d'ordre 1. Cette atténuation beaucoup plus importante explique l'absence cette fois d'ondulations en sortie.

La valeur de la tension en sortie est contrôlée par le rapport cyclique. Dans une alimentation à découpage, un système de régulation permet d'ajuster le rapport cyclique pour que la valeur de la tension de sortie reste constante quel que soit le courant demandé par la charge.



Comme nous l'avons vu au chapitre 8, la tension de sortie présente une surtension lorsque le facteur de qualité est supérieur à  $1/\sqrt{2}$ . Dans le cas du filtrage on souhaite éviter ce phénomène. On choisit donc généralement  $Q = 1/\sqrt{2}$  pour que le gain en bande passante soit le plus constant possible .



## ■ 5 Dérivateur et intégrateur

Un **filtre dérivateur** réalise l'opération  $s(t) = \tau \frac{de(t)}{dt}$  où  $\tau$  est une constante positive ou négative homogène à un temps. En régime sinusoïdal, en utilisant la notation complexe, cela conduit à la relation entre amplitudes complexes :  $\underline{S} = j\tau\omega \underline{E}$ . On en déduit la fonction de transfert d'un filtre dérivateur :  $\underline{H}(\omega) = j\tau\omega$ . Pour un tel filtre, le gain en décibels présente une pente de +20 dB par décade et le déphasage est égal à  $\pi/2$  si  $\tau > 0$  ou à  $-\pi/2$  si  $\tau < 0$ .

Un **filtre intégrateur** réalise l'opération  $s(t) = \frac{1}{\tau} \int e(t) dt$  où  $\tau$  est une constante positive ou négative homogène à un temps. En régime sinusoïdal, en utilisant la notation complexe, cela conduit à la relation entre amplitudes complexes :  $\underline{S} = \frac{1}{j\tau\omega} \underline{E}$ . On en déduit la fonction de transfert d'un filtre intégrateur :  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{j\tau\omega}$ . Pour un tel filtre, le gain en décibels présente une pente de -20 dB par décade et le déphasage est égal à  $-\pi/2$  si  $\tau > 0$  ou à  $\pi/2$  si  $\tau < 0$ .

### □ Comment dériver ou intégrer un signal périodique non sinusoïdal ?

Un signal périodique de fréquence  $f$  peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences  $f_n = nf$  (série de Fourier). Notons  $n_{\min}$  et  $n_{\max}$  les valeurs minimale et maximale des rangs de ses harmoniques significatifs, auxquels correspondent les fréquences  $f_{\min}$  et  $f_{\max}$ .

#### Méthode 9.5 : Utilisation d'un filtre comme dérivateur ou intégrateur

- Un filtre peut être utilisé comme dérivateur dans un domaine de fréquence où son gain a une pente de +20 dB par décade et où son déphasage est égal à  $\pi/2$  ou  $-\pi/2$ .
- Un filtre peut être utilisé comme intégrateur dans un domaine de fréquence où son gain a une pente de -20 dB par décade et où son déphasage est égal à  $\pi/2$  ou  $-\pi/2$ .
- Le filtre doit être calibré de sorte que les fréquences des harmoniques significatives du signal appartiennent toutes au domaine dans lequel il se comporte comme un dérivateur ou un intégrateur. On prend en général comme critère :
  - pour un dérivateur :  $f_{\max} < 10f_c$  ;
  - pour un intégrateur :  $f_{\min} > 10f_c$ .

➔ Exercice (9.5)

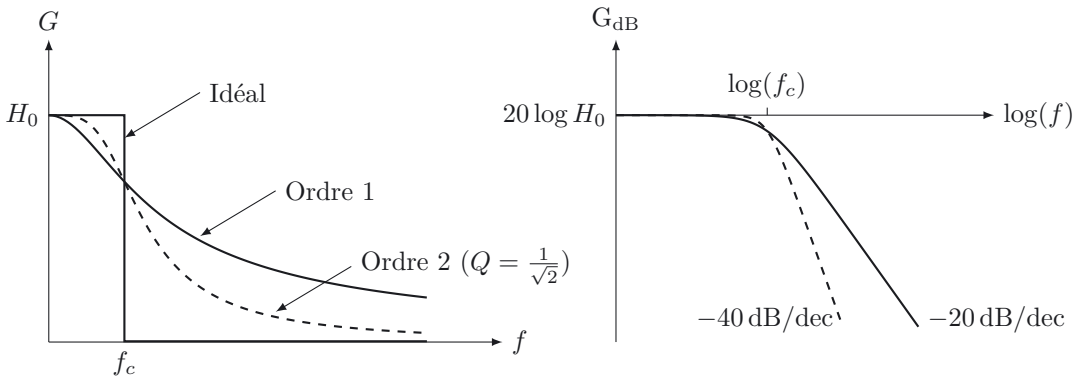


Un filtre dont le gain en décibels ne présente dans aucun domaine une pente égale à +20 dB par décade ne peut pas être utilisé comme dérivateur. De même un filtre dont le gain en décibels ne présente dans aucun domaine une pente égale à -20 dB par décade ne peut pas être utilisé comme intégrateur.

## ■ 6 Les différents types de filtres

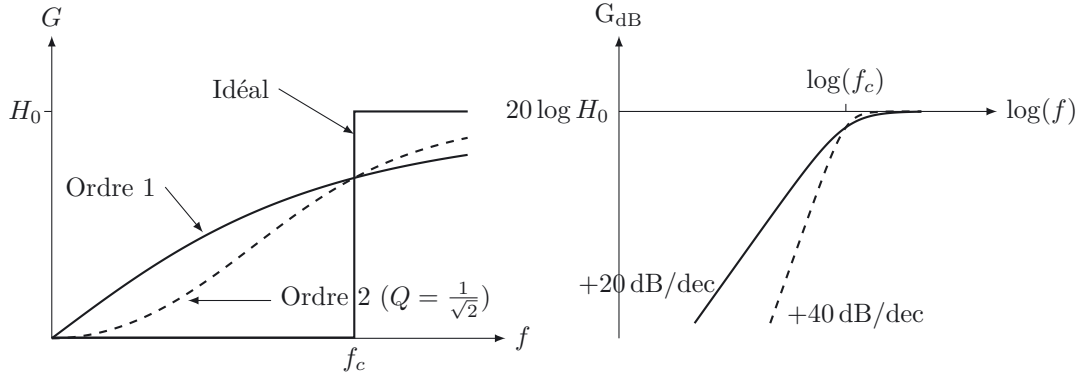
Nous présentons dans cette partie les différents types de filtres rencontrés dans les exercices. Les fonctions de transfert sont données sous forme canonique (le dénominateur commence par 1) avec  $H_0$  le gain maximal dans la bande passante,  $f_c$  la fréquence de coupure,  $f_0$  la fréquence propre du filtre et  $Q$  le facteur de qualité.

Filtres passe-bas	Fonction de transfert	Caractéristiques
Passe-bas d'ordre 1	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}$	pente de $-20\text{dB/décade}$ si $f \gg f_c$ comportement intégrateur si $f \gg f_c$
Passe-bas d'ordre 2	$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_0}}$	pente de $-40 \text{ dB/décade}$ si $f \gg f_0$ $f_c = f_0$ si $Q = 1/\sqrt{2}$ surtension si $Q > 1/\sqrt{2}$

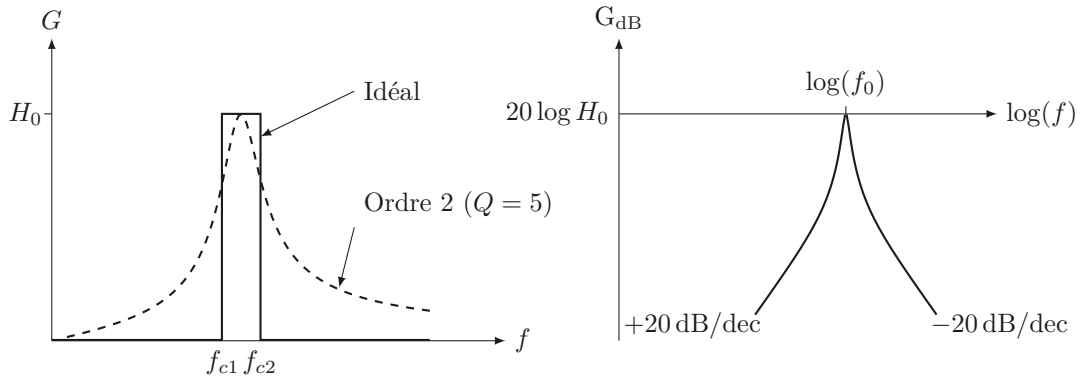


Un filtre passe-bas calibré de sorte à ne conserver que la composante continue est aussi appelé **filtre moyennneur**.

Filtres passe-haut	Fonction de transfert	Caractéristiques
Passe-haut d'ordre 1	$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}}$	pente de $+20\text{dB/décade}$ si $f \ll f_c$ comportement dérivateur si $f \ll f_c$
Passe-haut d'ordre 2	$\underline{H} = \frac{-H_0 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_0}}$	pente de $+40 \text{ dB/décade}$ si $f \ll f_0$ $f_c = f_0$ si $Q = 1/\sqrt{2}$ surtension si $Q > 1/\sqrt{2}$

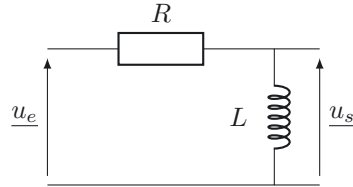


Filtres passe-bande	Fonction de transfert	Caractéristiques
Passe-bande d'ordre 2	$H = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$	<p><math>BP = f_{c2} - f_{c1} = f_0/Q</math></p> <p>penne de +20 dB/décade si <math>f \ll f_0</math></p> <p>comportement dérivateur si <math>f \ll f_0</math></p> <p>penne de -20 dB/décade si <math>f \gg f_0</math></p> <p>comportement intégrateur si <math>f \gg f_0</math></p>



## Interro de cours

On considère le filtre suivant, avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  :



1. D'après son comportement asymptotique, il s'agit d'un filtre :

- (a) passe-bas ;
- (b) passe-haut ;
- (c) passe-bande.

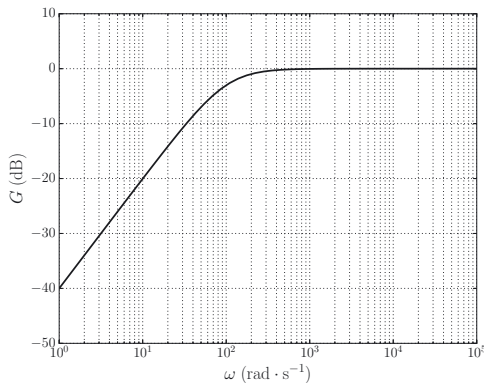
2. Sa fonction de transfert vaut :

- (a)  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jL\omega/R}$ .
- (b)  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jR/L\omega}$ .
- (c)  $\underline{H} = \frac{jL\omega/R}{1 + jL\omega/R}$ .

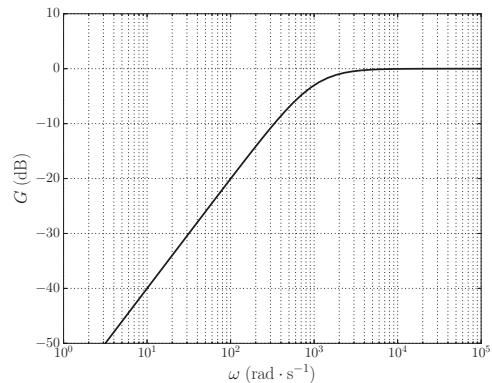
3. Identifier la (ou les) affirmations(s) fausses concernant la pulsation de coupure d'un filtre :

- (a) c'est la pulsation à laquelle il y a intersection entre les deux asymptotes du diagramme de Bode en gain ;
- (b) c'est la pulsation pour laquelle le gain en décibel vaut le gain maximal diminué de 3 décibels ;
- (c) c'est la pulsation pour laquelle le gain vaut la moitié du gain maximal.

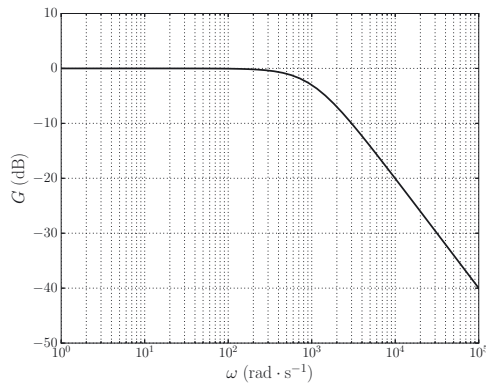
4. Trois étudiants ont tracé le diagramme de Bode du circuit mais l'étudiant 1 a inversé la résistance et la bobine, l'étudiant 2 s'est trompé d'une décade en choisissant  $R = 0,10 \text{ k}\Omega$ . Seul l'étudiant 3 a fait les choses correctement. Associer à chaque courbe le numéro de l'étudiant.



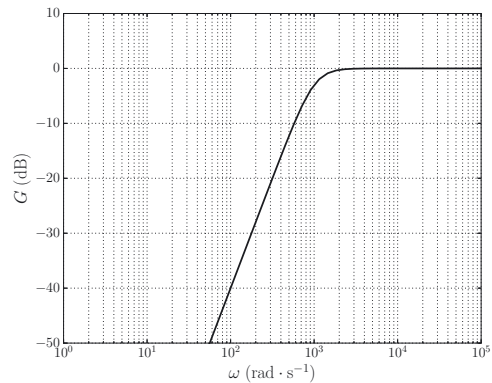
courbe (a)



courbe (b)



courbe (c)



courbe (d)

5. D'après le diagramme de Bode, la valeur de l'inductance de la bobine vaut :
- $L = 1,0 \text{ H}$ .
  - $L = 0,50 \text{ H}$ .
  - $L = 0,10 \text{ H}$ .
6. On note  $\omega_0 = 1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La phase à très basse pulsation ( $\omega \ll \omega_0$ ) vaut :
- $\pi/2$ .
  - 0.
  - $-\pi/2$ .
7. On impose, en entrée, une tension triangulaire de pulsation  $\omega \ll \omega_0$ . La tension de sortie est alors :
- sinusoïdale ;
  - carrée ;
  - triangulaire.
8. On impose en entrée la tension  $u_e(t) = E \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$ . La tension de sortie vaut :
- $u_s(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$ .
  - $u_s(t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$ .
  - $u_s(t) = \frac{E}{2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$ .
9. On impose en entrée la tension  $u_e(t) = E_1 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + E_2 \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{3}\right)$  avec  $\omega_1 = \omega_0/10$  et  $\omega_2 = 10\omega_0$ . La tension de sortie vaut :
- $u_s(t) \simeq E_1 \cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$ .
  - $u_s(t) \simeq E_2 \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{3}\right)$ .
  - $u_s(t) \simeq \frac{E_1}{10} \cos(\omega_1 t + \pi) + E_2 \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{3}\right)$ .

## Exercices

### Exercice 9.1 Diagramme de Bode et superposition

➔ Méthodes (9.1) (9.3)

Considérons un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_c}}$ . On rappelle que le diagramme de

Bode asymptotique en gain de ce filtre est constitué de deux demi-droites se coupant en  $f = f_c$  :

- $f < f_c$  : demi-droite d'équation  $G_{dB} = 20 \log(|H_0|)$  (horizontale) ;
- $f > f_c$  : demi-droite d'équation  $G_{dB} = 20 \log(|H_0|) - 20 \log(f/f_c)$ , de pente -20 dB/décade.

En ce qui concerne le diagramme de Bode asymptotique en phase, il est constitué de deux demi-droites :

- $f < f_c$  : demi-droite d'équation  $\varphi = \arg(H_0)$  ;
- $f > f_c$  : demi-droite d'équation  $\varphi = \arg(H_0) - \frac{\pi}{2}$ .

On considère un système physique linéaire permettant, à partir d'un signal d'entrée  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ , de générer un signal de sortie  $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

La relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est donnée par la fonction de transfert complexe

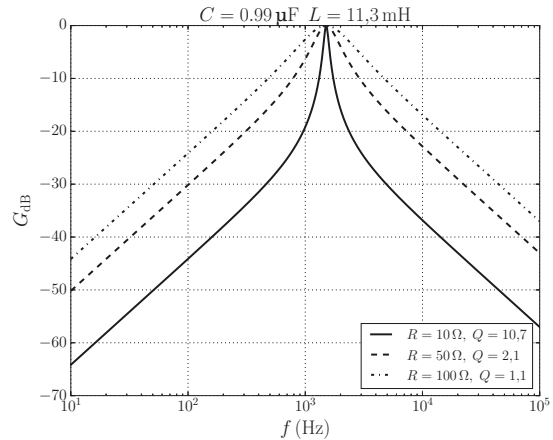
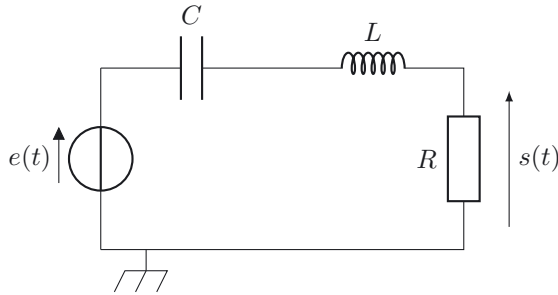
$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{3}{\left(2 + 5j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + 3j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \text{ avec } \omega_1 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } \omega_2 = 6,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1. Déterminer l'expression de  $S_m$  et  $\varphi$  en fonction de  $E_m$ ,  $\omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ .  
Avec  $E_m = 1,0 \text{ V}$ , calculer numériquement  $S_m$  et  $\varphi$  pour  $\omega = 1,0 \cdot 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\omega = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Commenter.
2. En terme de filtrage, quelle est la fonction réalisée par la fonction de transfert  $\underline{H}$ ? La mettre sous la forme canonique suivante :  $\underline{H} = \frac{H_0}{\left(1 + j\frac{f}{f_{c1}}\right) \left(1 + j\frac{f}{f_{c2}}\right)}$  et identifier les expressions de  $H_0$ ,  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$ . Calculer numériquement  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$ .
3. En remarquant que  $\underline{H}$  est le produit de  $\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 + j\frac{f}{f_{c1}}}$  et de  $\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_{c2}}}$ , tracer le diagramme de Bode asymptotique correspondant à  $\underline{H}$  (on pourra procéder par superposition).

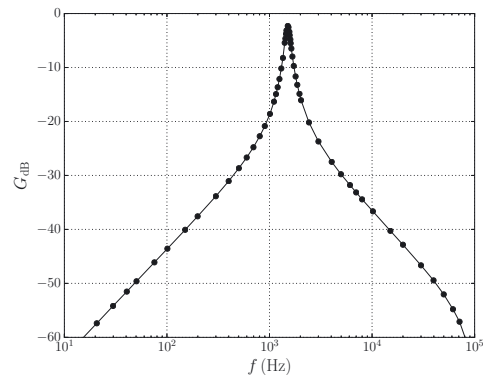
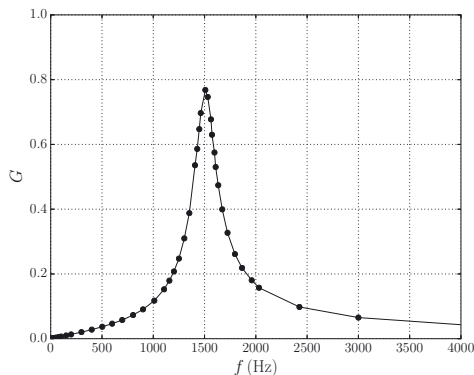
### Exercice 9.2 Filtre RLC passe-bande

➔ Méthode (9.2)

Un filtre passe-bande peut être réalisé avec une bobine et un condensateur. La figure suivante montre le schéma d'un filtre RLC idéal (bobine idéale d'inductance  $L$ ) et le diagramme de Bode pour  $L = 11,3 \text{ mH}$ ,  $C = 0,99 \mu\text{F}$  et trois valeurs de  $R$ .



1. Faire une analyse qualitative de ce filtre à basse et haute fréquence.
2. Établir l'expression de la fonction de transfert en régime sinusoïdal et la mettre sous la forme 
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$
. Exprimer  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Calculer la fréquence  $f_0$  correspondant à  $\omega_0$ .
3. Obtenir une forme approchée de  $\underline{H}(\omega)$  pour  $\omega \ll \omega_0$ , et une autre pour  $\omega \gg \omega_0$ . Retrouver les asymptotes observées sur le diagramme de Bode.
4. Donner le déphasage  $\phi$  de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$  pour  $\omega \ll \omega_0$  et pour  $\omega \gg \omega_0$ . Déterminer aussi  $\phi$  pour  $\omega = \omega_0$ . En déduire le tracé de  $\phi$  en fonction de la fréquence  $f$ .
5. La valeur  $R = 10 \Omega$  est finalement retenue pour réaliser le filtre passe-bande. La figure ci-dessous montre le gain et le gain en décibel en fonction de la fréquence, obtenus expérimentalement.



Le gain à la fréquence  $f_0$  est inférieur à 1. Expliquer ce fait sachant que la bobine utilisée a une résistance interne  $r = 3,3 \Omega$ .

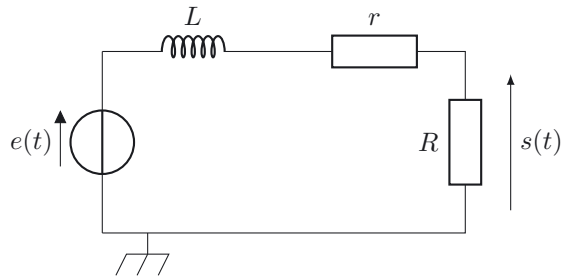
6. Par définition, la bande passante à  $-3$  dB est la gamme de fréquence pour laquelle le gain  $G$  est supérieur au gain maximal divisé par  $\sqrt{2}$ . Relever sur la courbe  $G(f)$  la largeur de la bande passante  $\Delta f$ . Calculer aussi le rapport  $\Delta f/f_0$ , qui exprime la sélectivité de ce filtre passe-bande.

7. En revenant au filtre  $RLC$  idéal (question 1), montrer que les deux fréquences de coupure à  $-3$  dB vérifient la relation  $Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$ . Démontrer que  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . En déduire l'influence de la résistance  $R$  sur la largeur de la bande passante.

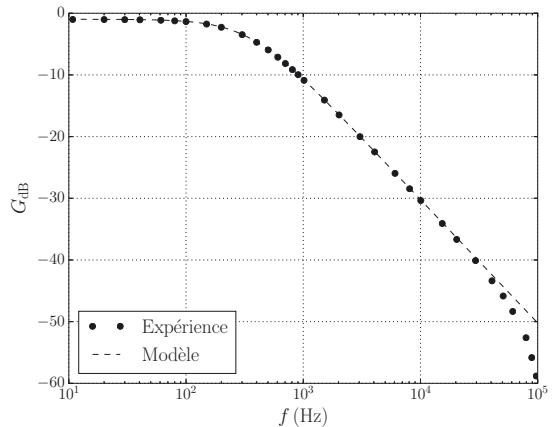
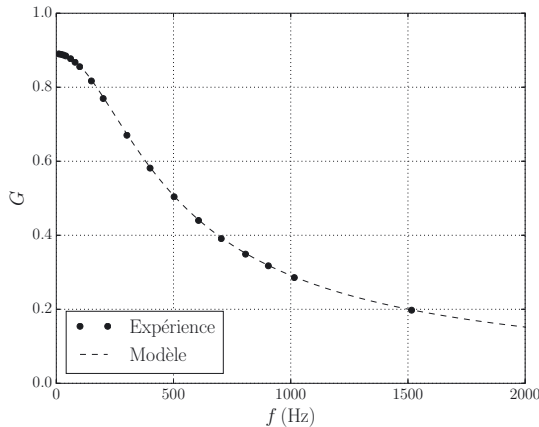
**Exercice 9.3 Conversion alternatif-continu avec un filtre  $RL$**

➔ Méthode (9.3)

On considère un filtre  $RL$  constitué d'une bobine d'inductance  $L = 11,3$  mH et de résistance interne  $r = 2,6 \Omega$ , en série avec une résistance  $R = 21,9 \Omega$  aux bornes de laquelle on obtient la tension de sortie  $s(t)$ . Ce filtre est destiné à fournir une puissance importante à la résistance  $R$ , qui constitue la résistance de charge.

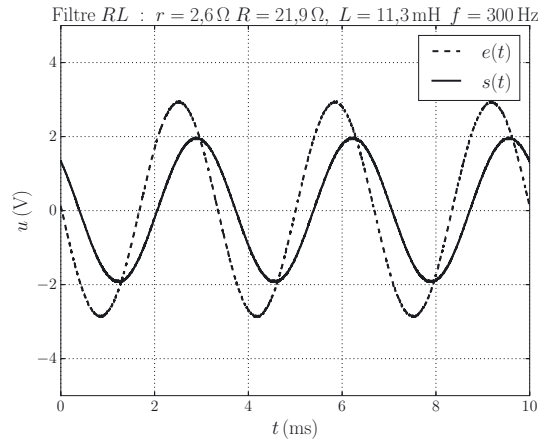


La figure suivante montre le relevé expérimental du gain et du gain en décibel pour différentes fréquences, avec la courbe obtenue à partir du modèle :

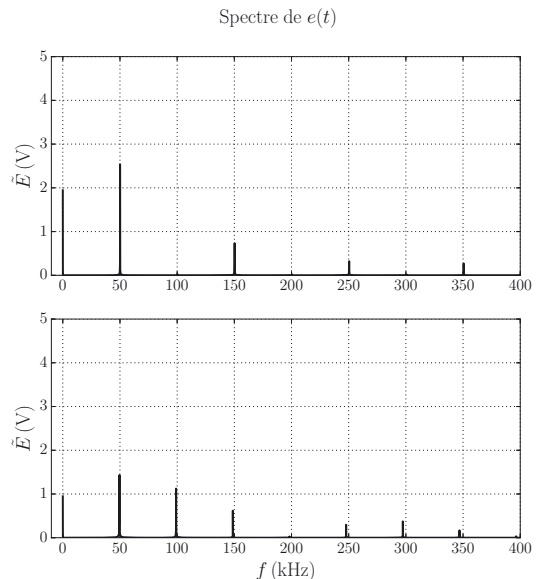
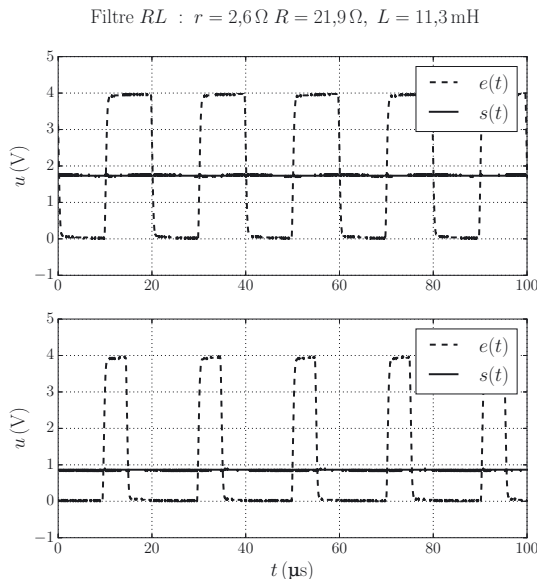




La figure ci-contre montre les tensions sinusoïdales en entrée et en sortie du filtre, pour une fréquence de 300 Hz.



1. Relever sur la courbe expérimentale ci-dessus montrant  $e(t)$  et  $s(t)$  le gain  $G$  et le déphasage  $\phi$  à la fréquence  $f = 300\ \text{Hz}$ .
2. Établir l'expression de la fonction de transfert en régime sinusoïdal  $\underline{H}(\omega)$ .
3. Calculer le gain dans la bande passante et comparer au gain expérimental.
4. Calculer la fréquence de coupure  $f_c$  et comparer à la fréquence de coupure expérimentale.
5. Calculer le gain et le déphasage à  $f = 300\ \text{Hz}$  et comparer aux valeurs expérimentales.
6. Déterminer la forme asymptotique du gain pour  $f \gg f_c$  et comparer à la courbe expérimentale.
7. Le signal d'entrée est à présent une tension carrée de fréquence 50 kHz, variant entre 0 et 4 V, avec un rapport cyclique variable. La figure suivante montre les tensions d'entrée et de sortie pour les rapports cycliques 0,5 et 0,25 ainsi que le spectre en fréquence de la tension d'entrée.



Quel est le gain du filtre (en décibel) pour le fondamental ? Comparer au gain à fréquence nulle. Expliquer la forme de la tension de sortie et sa valeur.

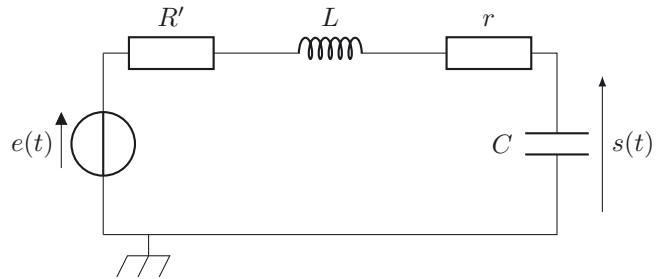
8. Pour le rapport cyclique 0,5, calculer la puissance dissipée dans la résistance  $R$ , et la puissance dissipée dans la bobine. Si l'on cherche à transférer le maximum de puissance entre la source de tension et la résistance  $R$ , quel est l'inconvénient de ce filtre ?

**Exercice 9.4** Filtre réducteur de bruit

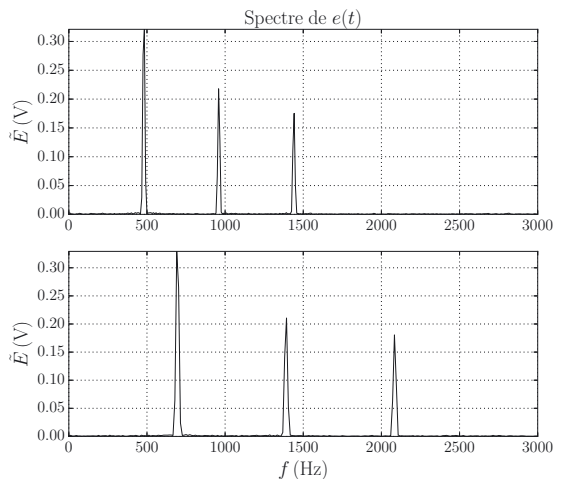
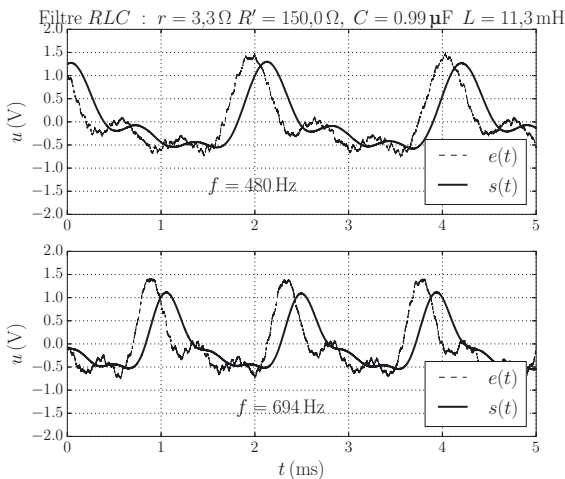
➔ Méthode (9.4)

Un signal analogique  $e(t)$  est affecté de perturbations aléatoires plus ou moins intenses, qu'on désigne par le terme général de *bruit*. On suppose que l'information utile contenue dans le signal  $e(t)$  s'étend sur un domaine de fréquence allant de 0 à  $2,0 \cdot 10^3$  Hz.

On cherche à réduire le bruit au moyen du filtre représenté ci-contre, constitué d'une bobine d'inductance  $L = 11,3$  mH et de résistance interne  $r = 3,3 \Omega$ , en série avec une résistance  $R'$  et un condensateur de capacité  $C = 0,99 \mu\text{F}$ , aux bornes duquel on obtient la tension de sortie  $s(t)$ .



Le diagramme de Bode expérimental de ce filtre est donné figure 9.5. La figure suivante montre les tensions d'entrée et de sortie pour un signal périodique comportant trois harmoniques, à deux fréquences différentes. Le spectre en fréquence de  $e(t)$  est aussi donné.



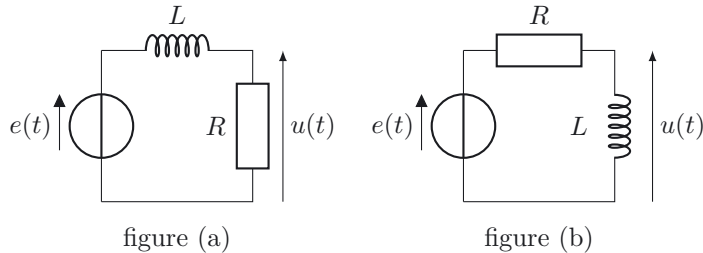
1. Établir l'expression de la fonction de transfert en régime sinusoïdal et la mettre sous la forme 
$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$
. Exprimer la pulsation  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $R = R' + r$ ,  $L$  et  $C$ .

- On se place dans le cas  $Q = 1/\sqrt{2}$ . En pratique, la valeur  $R' = 150 \Omega$  permet d'avoir un facteur de qualité très proche de cette valeur. Exprimer le gain  $G(\omega)$  en fonction du rapport  $\omega/\omega_0$ . Déterminer la fréquence de coupure  $f_c$  à  $-3$  dB et calculer sa valeur. Déterminer la forme asymptotique de  $G(\omega)$  pour  $f > 10f_c$ .
- Donner une expression approchée de  $\underline{H}(\omega)$  dans la bande passante. En déduire la tangente du déphasage,  $\tan(\varphi)$ , dans la bande passante. Sachant que si  $|\varphi| \ll 1$  rad,  $\tan(\varphi) \simeq \varphi$ , montrer que  $\varphi \simeq -\tau\omega$ . Exprimer  $\tau$  en fonction de  $R$  et  $C$ .
- On considère un signal périodique  $e(t)$  comportant 3 harmoniques. Écrire  $e(t)$  sous la forme d'une somme de trois sinusoides d'amplitudes  $E_1, E_2, E_3$  et de phases à l'origine  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .
- On suppose que les trois harmoniques sont dans la bande passante. Sachant que dans la bande passante  $G \simeq 1$  et  $\varphi \simeq -\tau\omega$ , montrer que le signal de sortie  $s(t)$  est une copie retardée du signal d'entrée. Quel est le retard ?
- Commenter les signaux observés en sortie du filtre pour les fréquences 480 Hz et 694 Hz. Comment expliquer la réduction du bruit ?

### Exercice 9.5 Le dilemme de Mélanie

➔ Méthodes (9.2) (9.5)

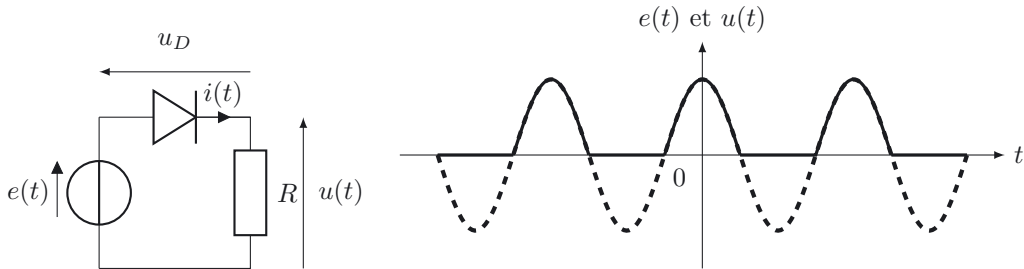
Mélanie doit proposer à son professeur de physique un protocole de montage qui lui permettra de dériver un signal de fréquence fondamentale  $f = 800$  Hz. Elle hésite entre les deux montages suivants :



- Par des analyses qualitatives des montages à haute et basse fréquence, déterminer la nature probable de ces deux filtres.
- Déterminer les fonctions de transfert complexes  $\underline{H}_a$  et  $\underline{H}_b$  de ces deux montages, ainsi que leurs fréquences de coupure  $f_{ca}$  et  $f_{cb}$ .
- Parmi ces deux montages, lequel permettra à Mélanie de réaliser la dérivation souhaitée ?
- Quelles valeurs des composants présents dans ce montage conseilleriez-vous à Mélanie pour que la dérivation soit correctement effectuée ?

### Exercice 9.6 La diode, redresseur de tort ?

On considère le circuit suivant :



La diode est considérée comme idéale : lorsque  $i(t) > 0$ , alors  $u_D(t) = 0$  et la diode est dite passante, et lorsque  $u_D(t) < 0$ ,  $i(t) = 0$  et la diode est dite bloquée.

1. Représenter la caractéristique  $(i, u_D)$  de cette diode idéale.
2. On considère une tension  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  (en pointillés sur le schéma ci-dessus). Le signal de sortie  $u(t)$  a la forme représentée en trait plein et gras sur le schéma ci-dessus. Justifier l'allure de ce graphe.
3. Calculer la valeur moyenne  $U_0 = \langle u(t) \rangle$  de  $u(t)$ , puis sa valeur efficace  $U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle}$ . Justifier l'appellation redresseur mono-alternance pour ce montage.

### Exercice 9.7 Quel filtre pour ce diagramme de Bode ?

Le tracé expérimental du diagramme de Bode d'un filtre inconnu est représenté ci-après.

1. Préciser la nature de ce filtre.
2. Déterminer l'ordre de ce filtre.

3. On donne les fonctions de transfert sous forme canonique suivantes :

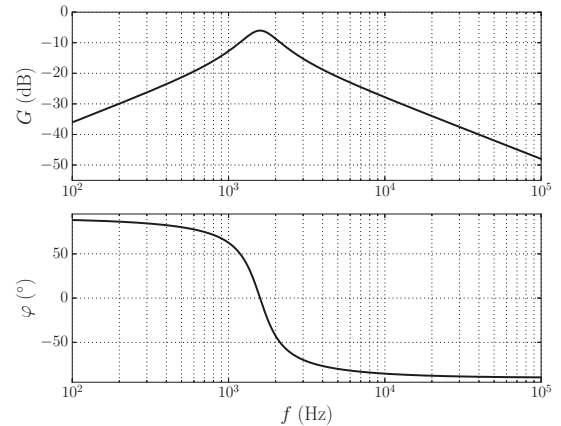
$$\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H}_2 = \frac{H_0 j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H}_3 = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f} \right)}$$

$$\underline{H}_4 = \frac{H_0}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_c} - \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}$$

$$\underline{H}_5 = \frac{-H_0 \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_c} - \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}$$



Quelle est celle qui vous paraît décrire le comportement du filtre inconnu ?

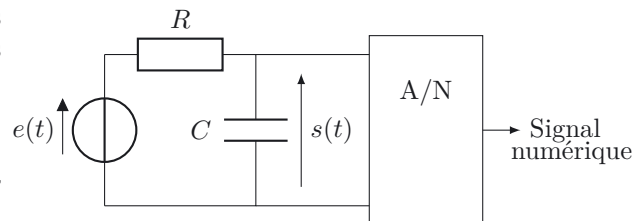
4. En vous servant astucieusement des diagrammes de Bode en phase et en gain, déterminer les différentes caractéristiques intervenant dans cette fonction de transfert.

### Exercice 9.8 Filtrage d'un signal d'accéléromètre

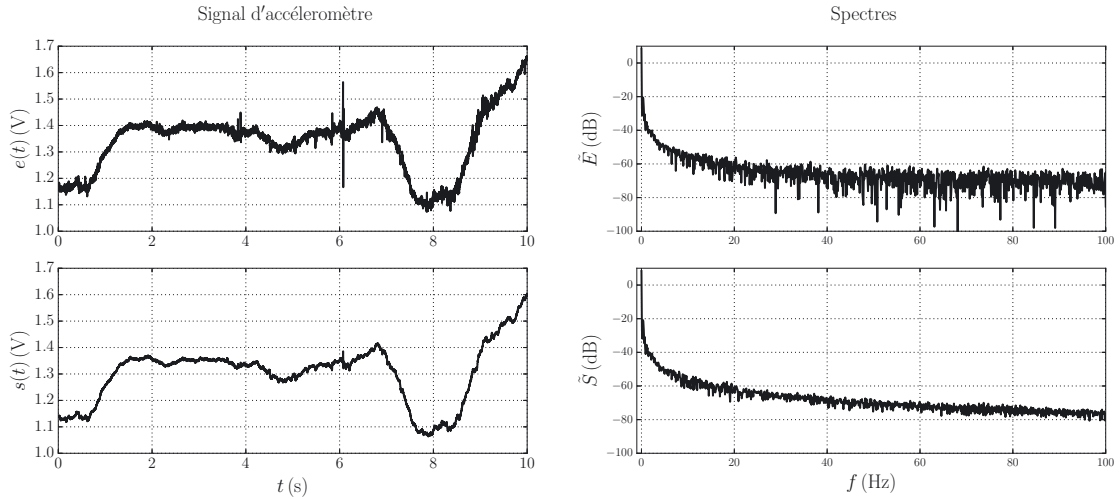
Un accéléromètre mesure, sur un axe  $x$ , la composante  $f(t) = (\vec{a} - \vec{g}) \cdot \vec{u}_x$  de la différence entre l'accélération et le champ de pesanteur terrestre.

Un accéléromètre analogique délivre une tension  $e(t) = u_0 + \alpha f(t)$ , où  $\alpha$  est une constante et  $u_0$  une tension de décalage constante, qui permet d'obtenir une tension positive, comprise par exemple entre 0 et 3 V.

On s'intéresse aux variations de  $e(t)$  de basse fréquence, inférieure à 10 Hz. Ces variations sont principalement dues aux changements d'orientation de l'accéléromètre par rapport à la pesanteur terrestre. Afin de filtrer le signal pour atténuer les composantes fréquentielles supérieures à 10 Hz avant de faire la conversion analogique-numérique, on fait appel au filtre  $RC$  représenté ci-contre.



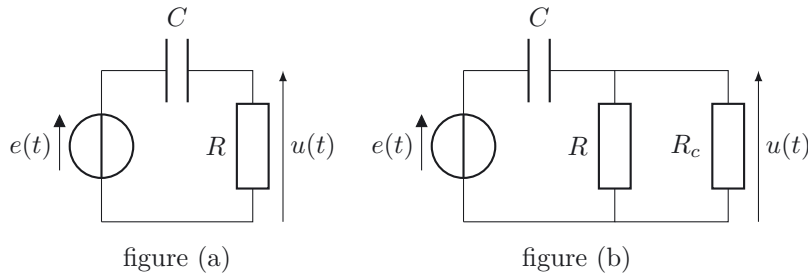
La fréquence de coupure du filtre est de 10 Hz. La figure suivante montre le signal délivré par l'accéléromètre lors d'un déplacement lent à la main et le signal en sortie du filtre. Les spectres en fréquence (en échelle décibel) sont aussi donnés à droite.



1. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(\omega)$  du filtre  $RC$ . On choisit  $C = 1,0 \mu\text{F}$ . Calculer  $R$  pour avoir une fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  de  $10 \text{ Hz}$ .
2. Tracer le gain en décibel  $G_{\text{dB}}$  en fonction de  $\log(f)$  et le déphasage  $\phi$  en fonction de  $\log(f)$  (diagramme de Bode).
3. Comparer les spectres de  $e(t)$  et de  $s(t)$ , particulièrement dans la bande de fréquence allant de  $80 \text{ Hz}$  à  $100 \text{ Hz}$ . Expliquer à l'aide du diagramme de Bode.
4. Expliquer les changements observés sur le signal  $s(t)$  par rapport au signal  $e(t)$ .

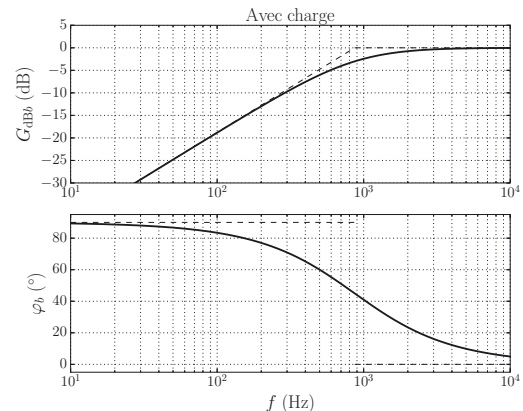
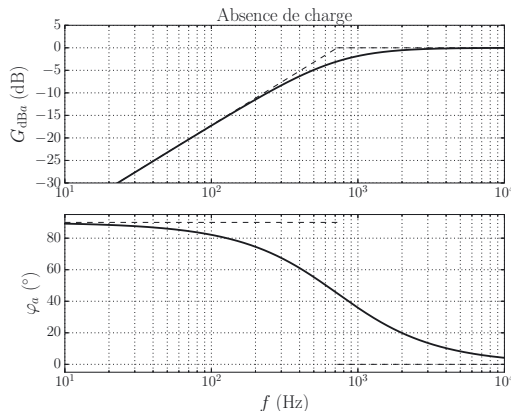
### Exercice 9.9 Mais que fait la charge ?

On considère le circuit représenté par la figure (a) ci-dessous :



On donne  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 0,22 \text{ }\mu\text{F}$ .

- Déduire la nature probable de ce filtre par une analyse qualitative du montage à basse et haute fréquence.
- Déterminer la fonction de transfert complexe  $\underline{H}_a$  de ce premier montage. Quelle fonction réalise ce montage ? Quelle est sa fréquence de coupure  $f_{ca}$  ? Faire l'application numérique.
- La tension de sortie  $u(t)$  est destinée à alimenter un montage non représenté ici, qu'on modélisera par une résistance  $R_c$  (résistance de charge), comme représenté sur le montage de la figure (b) ci-dessus. Déterminer alors la fonction de transfert complexe  $\underline{H}_b$  de ce second montage. Quelle fonction réalise ce montage ? Quelle est sa fréquence de coupure  $f_{cb}$  ?
- Les figures suivantes montrent les allures du diagramme de Bode correspondant à  $\underline{H}_a$  et  $\underline{H}_b$ .



Ces graphes vous paraissent-ils être en accord avec l'étude théorique menée précédemment ? Déduire de leur étude la valeur de la résistance de charge  $R_c$ .

Quelle est l'influence de la résistance de charge sur le fonctionnement du filtre ?

- On cherche à minimiser l'influence de cette charge  $R_c$ . Comment doit-on choisir cette dernière pour que le filtre conserve à mieux de 1% près la fréquence de coupure calculée en 2. ?

**Exercice 9.10 Carré filtré**

On considère un signal carré parfaitement symétrique, dont l'allure est représentée ci-après ;  $T$  représente la période de signal, qu'on pourra faire varier, tout en maintenant l'amplitude constante.

On alimente avec ce signal créneau un filtre, dont on cherche à déterminer la nature et toutes les caractéristiques.

On obtient pour les fréquences  $f = 1,0 \cdot 10^2$  Hz et  $f = 10$  kHz les oscillogrammes suivants.

1. Quelle opération réalise ce filtre pour  $f = 1,0 \cdot 10^2$  Hz ? pour  $f = 10$  kHz ? En déduire sa nature.
2. Parmi les fonctions de transfert suivantes :

$$\underline{H}_1 = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

$$\underline{H}_2 = \frac{H_0 j \frac{f}{f_c}}{1 + j \frac{f}{f_c}}$$

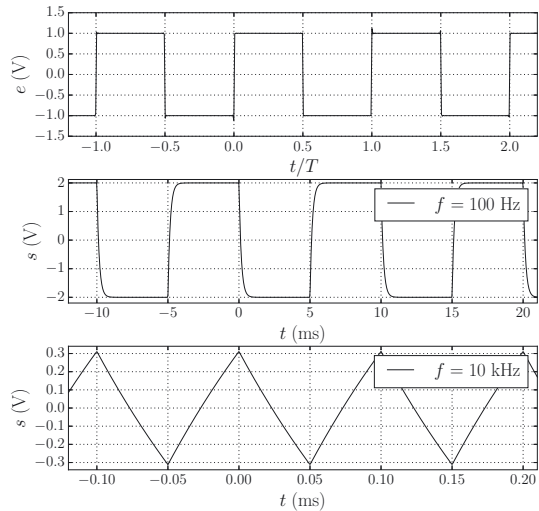
$$\underline{H}_3 = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f} \right)}$$

$$\underline{H}_4 = \frac{H_0}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_c} - \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}$$

$$\underline{H}_5 = \frac{-H_0 \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{f}{f_c} - \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}$$

laquelle choisiriez-vous pour décrire ce filtre ?

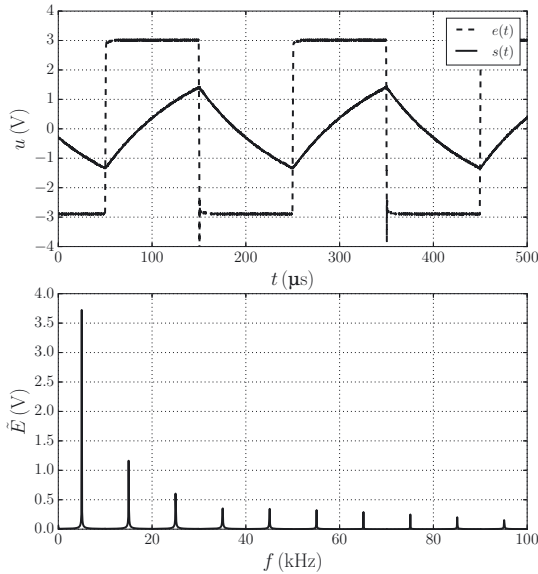
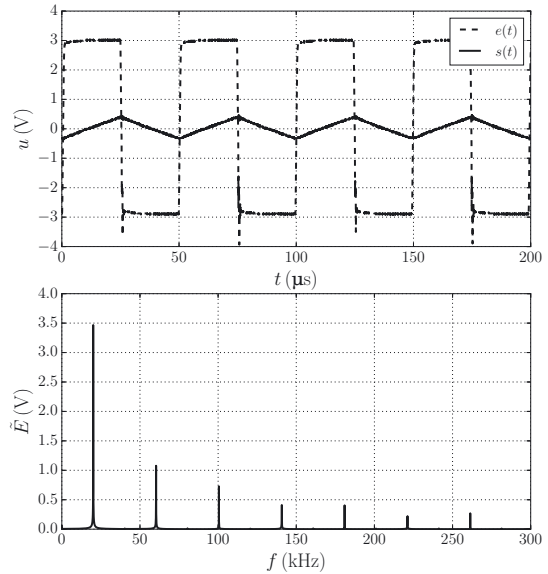
3. En vous servant des oscillogrammes fournis, déterminer les paramètres inconnus intervenant dans cette fonction de transfert.



**Exercice 9.11 Filtre RC intégrateur**

Sous certaines conditions, un filtre  $RC$  passe-bas peut réaliser l'intégration d'un signal. Les deux figures suivantes montrent la réponse d'un filtre  $RC$  passe-bas ( $R = 100 \Omega$  et  $C = 0,99 \mu\text{F}$ ) à un signal carré (ou créneau) de fréquences 5 kHz et 20 kHz.  $e(t)$  et  $s(t)$  sont les tensions en entrée et en sortie du filtre. Le spectre de fréquences  $\tilde{E}(f)$  du signal d'entrée est aussi donné. Le diagramme de Bode du filtre est donné figure 9.3.



Filtre RC :  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 0.99 \mu\text{F}$ ,  $f = 5 \text{ kHz}$ Filtre RC :  $R = 100 \Omega$ ,  $C = 0.99 \mu\text{F}$ ,  $f = 20 \text{ kHz}$ 

Par définition, un filtre intégrateur parfait réalise l'opération suivante :  $s(t) = \frac{1}{\tau} \int e(t) dt$ , où  $\tau$  est une constante réelle. Cette relation peut aussi s'écrire  $\frac{ds(t)}{dt} = \frac{e(t)}{\tau}$ .

1. Faire le schéma du filtre RC passe-bas. Déterminer sa fonction de transfert en régime sinusoïdal  $\underline{H}(\omega)$ . En déduire sa fréquence de coupure à  $-3 \text{ dB}$  et calculer sa valeur.
2. Démontrer que la fonction de transfert d'un intégrateur parfait est  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{j\tau\omega}$ . En déduire le diagramme de Bode d'un intégrateur.
3. Sur le diagramme de Bode du filtre RC, repérer le domaine de fréquence où la fonction de transfert est assimilable à celle d'un intégrateur. Préciser alors l'expression de  $\tau$  en fonction de  $R$  et  $C$ .
4. Pour un signal  $e(t)$  périodique comme le signal carré, l'intégration est réalisée si toutes ses harmoniques sont dans le domaine intégrateur du filtre. Expliquer les observations faites avec un signal carré aux fréquences 5 kHz et 20 kHz.

# Corrections

## Interro de cours

1. La bobine se comporte comme un interrupteur fermé à très basse pulsation  $\underline{u}_s \simeq 0$  et comme un interrupteur ouvert à très haute pulsation  $\underline{u}_s \simeq \underline{u}_e$ . Réponse (b).
2. Un diviseur de tension permet d'obtenir  $\underline{H} = \frac{jL\omega/R}{1 + jL\omega/R} = \frac{1}{1 - jR/L\omega}$ . Réponse (c).
3. Réponse (b). La réponse (a) n'est valable que pour les filtres du 1er ordre.
4. Courbe (d) : C'est celle d'un filtre passe-haut d'ordre 2 (asymptote de pente égale à 40 dB/décade). Elle ne correspond donc à aucun étudiant.  
 Courbe (c) : étudiant 1. En inversant la résistance et la bobine, l'étudiant 1 a en fait étudié un filtre passe-bas.  
 Courbe (a) : étudiant 2. La pulsation de coupure du filtre est  $\omega_c = R/L$ . En prenant une résistance 10 fois plus faible que l'étudiant 3 qui a correctement travaillé, l'étudiant 2 obtient une fréquence de coupure dix fois plus faible que l'étudiant 3.  
 Courbe (b) : étudiant 3. Puisque c'est la seule restante, elle correspond finalement à l'étudiant 3.
5.  $\omega_c = 1 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = R/L$  avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ . Réponse (a).
6. Pour  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\underline{H} \sim jL\omega/R$ . Réponse (a).
7. Pour  $\omega \ll \omega_0$  le filtre présente les caractéristiques d'un dérivateur. Réponse (b).
8.  $\underline{H}(\omega_0) = \underline{H}(\omega_c) = \frac{1}{1 - j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)$ .  
 Donc  $U_{sm} = |\underline{H}(\omega_c)|U_{em} = \frac{E}{\sqrt{2}}$  et  $\varphi_s = \arg(\underline{H}(\omega_c)) + \varphi_e = \frac{\pi}{2}$ . Réponse (b).
9. Le filtre, dont le gain en bande passante est égal à 1, laisse passer la composante de pulsation  $\omega_2 = 10\omega_0$  qui se trouve dans sa bande passante. Par contre il atténue celle de pulsation  $\omega_1 = \omega_0/10$  qui se trouve en dehors de sa bande passante. Cette pulsation  $\omega_1$  étant d'une décade plus basse que la pulsation de coupure, l'amplitude de cette composante est approximativement divisée par 10. Réponse (c).

## Exercice 9.1

1. Posons  $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = G \exp(j\varphi)$ . Ainsi,  $G$  est le gain du filtre et  $\varphi$  l'avance de phase de la tension de sortie sur la tension d'entrée. Nous pouvons écrire :

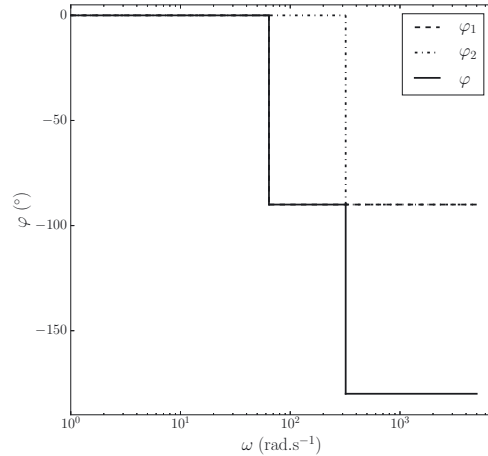
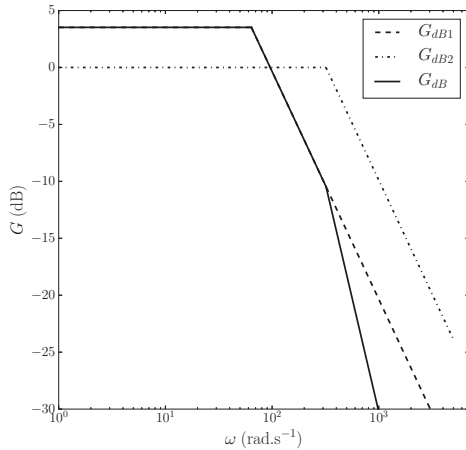
$$S_m = \frac{3}{\sqrt{4 + 25 \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sqrt{1 + 9 \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} E_m \text{ et } \varphi = -\arctan\left(\frac{5\omega}{2\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{3\omega}{\omega_2}\right)$$

Résumons dans un tableau :

Pulsation en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$1,0 \cdot 10^2$	$1,0 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^4$
$S_m$ en V	1,5	0,50	0,012
$\varphi$ en $^\circ$	-17	-95	-167

$S_m$  est faible en haute fréquence et augmente lorsque  $\omega$  diminue. En basse fréquence, la phase tend vers  $0^\circ$  alors qu'elle tend vers  $-180^\circ$  en haute fréquence.

2. Il s'agit d'un filtre passe-bas dont la fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique proposée avec  $f_{c1} = \frac{\omega_1}{5\pi} = 64 \text{ Hz}$ ,  $f_{c2} = \frac{\omega_2}{6\pi} = 3,2 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  et  $H_0 = \frac{3}{2} = 1,5$ .
3. Le gain en décibel est la somme des gains en décibel :  $G_{dB} = G_{dB1} + G_{dB2}$ . Il en est de même pour le déphasage :  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Or  $\underline{H}_1$  et  $\underline{H}_2$  correspondent à des filtres passe-bas du premier ordre. Il est donc aisé de superposer les deux diagrammes asymptotiques.



**Exercice 9.2**

1. En haute fréquence, la bobine se comporte comme interrupteur ouvert :  $s \simeq 0$ . En basse fréquence, c'est le condensateur qui ouvre le circuit pour la même conséquence :  $s \simeq 0$ .

2. En utilisant la notion de diviseur de tension :  $\frac{s}{e} = \frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$  avec

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Nous en déduisons  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1,5 \cdot 10^3$  Hz.

3. L'étude asymptotique donne :

— Si  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$ . Le gain en dB s'écrit donc  $G_{dB} \simeq 20 \log\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$  : nous retrouvons bien une pente à +20 dB par décade.

— Si  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{\omega_0}{jQ\omega}$ . Le gain en dB s'écrit donc  $G_{dB} \simeq +20 \log\left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right) = -20 \log\left(\frac{Q\omega}{\omega_0}\right)$  : nous retrouvons bien une pente à -20 dB par décade.

Ces observations sont compatibles avec les pentes observées sur les diagrammes de Bode.

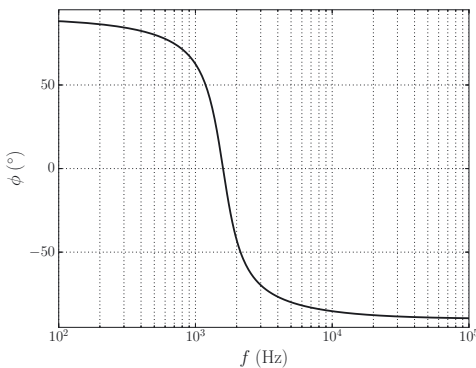
4. L'avance de phase  $\phi$  s'obtient alors aisément :

- Si  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\phi \simeq \frac{\pi}{2}$ .
- Si  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\phi \simeq -\frac{\pi}{2}$ .
- Pour  $\omega = \omega_0$ ,  $\phi = 0$ .

Nous en déduisons l'allure de  $\phi$  en fonction de  $f$  représentée ci-contre.

5. Pour  $\omega = \omega_0$ , l'impédance de l'association série de la bobine et du condensateur est  $r$ . Le montage est alors équivalent à l'association série de la résistance  $r$  de la bobine et de  $R$ .

Ainsi  $\frac{s}{e} = \frac{R}{R+r} = 0,75$  : valeur cohérente avec les courbes expérimentales.



6. Nous relevons la largeur de bande-passante  $\Delta f = 2,1 \cdot 10^2$  Hz et en déduisons  $\frac{\Delta f}{f_0} = 0,14$ .

7. Le gain vaut  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  lorsque  $\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} = \sqrt{2}$  soit quand  $Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1$ . Les deux solutions positives de cette équation sont alors :  $\omega = \omega_0 \frac{\pm 1 + \sqrt{\Delta}}{2Q}$  avec  $\Delta = 1 + 4Q^2$ . L'écart entre ces deux pulsations est donc  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ . Lorsque la résistance augmente, le facteur de qualité  $Q$  diminue et la largeur de bande passante  $\Delta\omega$  augmente : le filtre devient moins sélectif.

### Exercice 9.3

- Posons  $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = G \exp(j\phi)$ . Ainsi,  $G$  est le gain du filtre et  $\phi$  l'avance de phase de la tension de sortie sur la tension d'entrée. Nous relevons les valeurs :  $G = 0,7$  et  $\phi = -42^\circ$  (la sortie est en retard de  $42^\circ$  sur l'entrée).
- La fonction de transfert s'obtient en utilisant la notion de diviseur de tension :  $\underline{H} = \frac{R}{R + r + jL\omega}$ .
- Dans la bande passante  $\underline{H} = H_0 = \frac{R}{R + r} = 0,89$  compatible avec le gain expérimental.
- La fréquence de coupure théorique s'écrit  $f_c = \frac{R + r}{2\pi L} = 3,5 \cdot 10^2$  Hz compatible avec la fréquence de coupure expérimentale  $3,6 \cdot 10^2$  Hz obtenue à  $-3$  dB.
- Le gain théorique  $G = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_c} \right)^2}} = 0,67$  et le déphasage théorique  $\phi = -\arctan \left( \frac{f}{f_c} \right) = -41^\circ$  confirment les valeurs expérimentales.
- Pour  $f \gg f_c$ ,  $\underline{H} \simeq \frac{H_0 f_c}{jf}$ . Le gain en décibel s'écrit alors  $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log(H_0 f_c) - 20 \log(f)$  : nous retrouvons bien la pente à  $-20$  dB par décade dans ce domaine de fréquences.
- Pour le fondamental,  $G \simeq H_0 \frac{f_c}{f} = 6,1 \cdot 10^{-3}$  soit  $G_{\text{dB}} = -44$  dB très inférieur au gain en fréquence nul qui est de  $-1,0$  dB.  
Le fondamental et par conséquent les harmoniques du signal étant très atténués, il ne reste que la composante continue  $\tilde{E}$  (valeur moyenne de  $e(t)$ ) dans la bande passante : le signal  $s(t)$  est donc continu, et sa valeur est  $H_0 \tilde{E}(0)$ .
- Pour le rapport cyclique 0,5, la tension aux bornes de la résistance  $R$  est  $s = 1,8$  V d'où la puissance dissipée  $\mathcal{P} = s^2/R = 0,15$  W. La puissance dissipée dans la bobine (c'est-à-dire dans sa résistance interne) est  $\mathcal{P}_b = r \left( \frac{s}{R} \right)^2 = \frac{r}{R} \mathcal{P} = 0,018$  W. Pour un transfert maximal de puissance dans  $R$ , l'inconvénient est ici la dissipation d'énergie dans la bobine due à son caractère résistif.

### Exercice 9.4

- En utilisant la notion de diviseur de tension :  $\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R' + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + (R' + r)jC\omega}$ .

Il vient :  $\underline{H} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

2. Si  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , le gain se simplifie :  $G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$ .

La fréquence de coupure à  $-3$  dB est  $f_c = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,5$  kHz, obtenue en cherchant la valeur de  $\omega_c$  pour laquelle  $G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Si  $f > 10f_c$ , nous pouvons simplifier l'expression de  $G(\omega)$  :  $G(\omega) \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ .

3. Dans la bande passante,  $\omega \ll \omega_0$  et  $\underline{H} \simeq \left(1 - j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ . Ainsi,  $\tan(\varphi) \simeq -\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}$ . Comme  $|\varphi| \ll 1$  rad,  $\tan(\varphi) \simeq \varphi$  et donc  $\varphi \simeq -\tau\omega$  avec  $\tau = \frac{1}{Q\omega_0} = RC$ .

4.  $e(t)$  peut s'écrire :  $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + E_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3)$ .

5. Si les trois composantes sont dans la bande passante, leurs amplitudes restent quasiment inchangées en sortie de filtre et elles ont toutes le même retard de phase de  $\omega\tau$  par rapport à  $e(t)$  : il s'agit donc bien d'une copie retardée du signal d'entrée avec un retard de  $\tau$ .

6. Dans le cas  $f = 480$  Hz, les trois composantes peuvent être considérées comme appartenant à la bande passante, nous observons bien une copie retardée, avec un retard mesuré sur le graphe de 0,15 ms correspondant bien au retard théorique. Les bruits sont par ailleurs considérablement réduits, à cause du caractère passe-bas du filtre. Dans le cas  $f = 694$  Hz, la troisième harmonique n'est plus dans la bande passante : il y a bien réduction du bruit mais la restitution du signal est moins fidèle.

### Exercice 9.5

1. La bobine se comportant comme un fil (court-circuit) en basse fréquence, nous pouvons en déduire que  $u(t) \simeq e(t)$  avec le montage (a) et  $u(t) \simeq 0$  avec le montage (b). La bobine se comportant comme un interrupteur ouvert en haute fréquence,  $u(t) \simeq 0$  avec le montage (a) et  $u(t) \simeq e(t)$  dans le cas (b). Il apparaît donc que le filtre (a) est probablement passe-bas tandis que le filtre (b) est passe-haut.

2. Nous utilisons le concept de diviseur de tension : pour le montage (a),  $\underline{H}_a = \frac{u}{e} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{ca}}}$

avec  $\omega_{ca} = \frac{R}{L}$ . Pour le montage (b),  $\underline{H}_b = \frac{u}{e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_{cb}}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_{cb}}}$  avec  $\omega_{cb} = \omega_{ca} = \frac{R}{L}$ .

Les fréquences de coupure sont donc  $f_{ca} = f_{cb} = \frac{\omega_{ca}}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$ .

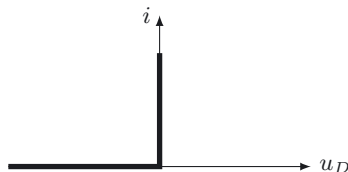
3. Le montage (b) se comporte comme un dérivateur en basse fréquence. En effet :  $\underline{H}_b \simeq j\frac{\omega}{\omega_{cb}}$  si  $\omega \ll \omega_{cb}$ .

Nous pouvons donc écrire que  $\underline{u} \simeq \frac{j\omega}{\omega_{cb}}\underline{e}$  et ainsi :  $u(t) \simeq \frac{1}{\omega_{cb}} \frac{de}{dt}$ . Ce montage permettra à Mélanie de réaliser la dérivation souhaitée.

4. Avec  $R = 10$  kΩ et  $L = 0,10$  H,  $f_{cb} = 16$  kHz  $\gg f$ .

### Exercice 9.6

1. Représentons la caractéristique de la diode idéale :



2. Lorsque  $e(t) > 0$ , la diode est passante et donc  $u_D(t) = 0$  et  $u(t) = e(t)$ . Lorsque  $e(t) < 0$ , la diode est bloquée :  $i(t) = 0$  et donc  $u(t) = 0$ .

3. La valeur moyenne de  $u(t)$  s'écrit :  $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} E_m \cos(\omega t) dt = \frac{2}{\omega T} E_m = \frac{E_m}{\pi}$  puisque l'alternance négative de  $e(t)$  est supprimée par la diode (d'où le qualificatif de redresseur mono-alternance).

De même la moyenne de  $u^2(t)$  s'écrit :  $\langle u^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} E_m^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{E_m^2}{4}$ .

Finalement :  $U_0 = \frac{E_m}{\pi}$  et  $U_{\text{eff}} = \frac{E_m}{2}$ .

### Exercice 9.7

1. C'est un filtre passe-bande, car on remarque que le gain tend vers 0 à haute et basse fréquence.
2. On constate par lecture sur le graphe qu'entre  $10^4$  Hz et  $10^5$  Hz (une décade), le gain en décibel chute de 20 dB. La pente de l'asymptote à haute fréquence est donc de -20 dB/décade. La même analyse peut être menée entre  $10^2$  Hz et  $10^3$  Hz avec la droite asymptotique, et le gain en décibel augmente de 20 dB, d'où une pente pour l'asymptote basse fréquence de +20 dB/décade. Le filtre est donc un filtre passe-bande d'ordre 2.

3. Nous choisissons  $\underline{H}_3 = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f} \right)}$ .

4. La phase s'annule lorsque  $f = f_c$ , on en déduit donc graphiquement  $f_c \approx 1,5$  kHz.

Graphiquement, les deux asymptotes se coupent pour  $G_{\text{dB}} = -12 \text{ dB} = 20 \log \left( \frac{H_0}{Q} \right)$ . Il vient donc

$\frac{H_0}{Q} = 10^{-12/20}$ . De plus, en  $f_c$ ,  $G_{\text{dB}} = -6 \text{ dB} = 20 \log H_0$ , d'où  $H_0 = 0,50$  et  $Q = 2,0$  aux incertitudes de pointés près

### Exercice 9.8

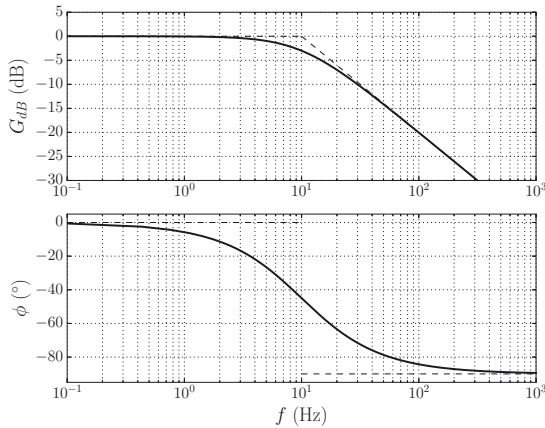
1. À l'aide de la notion de diviseur de tension, nous obtenons :  $\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ . La fréquence de coupure à -3 dB est  $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ . Nous devons donc choisir  $R = \frac{1}{2\pi f_c C} = 1,6 \cdot 10^4 \Omega$ .

2. Nous pouvons écrire  $\underline{H}(\omega) = G(\omega) \exp(j\phi)$ , puis  $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log G(\omega)$ . Précisons le comportement asymptotique :

— Si  $f \ll f_c$  :  $\underline{H} \simeq 1$  et donc  $G_{\text{dB}} \simeq 0$  et  $\phi \simeq 0$ .

— Si  $f \gg f_c$  :  $\underline{H} \simeq \frac{1}{jRC2\pi f}$  donc  $G_{\text{dB}} \simeq -20 \log(RC2\pi f)$  et  $\phi \simeq -\frac{\pi}{2}$ .

—  $H(2\pi f_c) = \frac{1}{1+j}$  donc  $G_{\text{dB}}(2\pi f_c) = -3 \text{ dB}$  et  $\phi(2\pi f_c) = -\frac{\pi}{4}$ .



L'allure du diagramme de Bode est tracé ci-contre.

3. L'atténuation observée sur le spectre est environ de  $-20$  dB dans la bande de fréquence de  $80$  Hz à  $100$  Hz, ce qui correspond à ce que nous obtenons par l'étude théorique du filtre.
4. Les lentes variations du signal sont bien reproduites à la sortie du filtre puisqu'elles sont associées à des fréquences contenues dans la bande passante. L'atténuation des hautes fréquences se traduit par un signal moins « bruité ».

### Exercice 9.9

1. Le condensateur se comporte comme un fil en haute fréquence, d'où  $u(t) \simeq e(t)$ . Il se comporte au contraire comme un coupe-circuit en basse fréquence :  $u(t) \simeq 0$ . Nous pouvons déduire de cette analyse qualitative que le filtre est probablement un filtre passe-haut.
2. La notion de diviseur de tension nous permet d'écrire 
$$\underline{H}_a = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{RjC\omega}{1 + RjC\omega}.$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut du premier ordre, de pulsation de coupure  $\omega_{ca} = \frac{1}{RC}$ . La fréquence de coupure associée est donc  $f_{ca} = \frac{1}{2\pi RC} = 7,2 \cdot 10^2$  Hz.

3. On introduit la résistance équivalente  $R_e = \frac{RR_c}{R + R_c}$ .

En appliquant la formule du diviseur de tension, on aboutit alors à :

$$\underline{H}_b = \frac{R_e}{R_e + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R_e jC\omega}{1 + R_e jC\omega}.$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut du premier ordre, de nouvelle fréquence

de coupure  $f_{cb} = \frac{1}{2\pi R_e C} = \frac{R + R_c}{2\pi RR_c C} > f_{ca}$ .

4. Les diagrammes asymptotiques en gain sont bien de pente nulle à haute fréquence et de pente égale à  $-20$  dB/décade à basse fréquence, et la phase varie bien entre  $\pi/2$  à basse fréquence et  $0$  à haute fréquence : il s'agit donc bien de filtres passe-haut du premier ordre avec un gain à haute fréquence égal à l'unité.

Dans le diagramme de gain en l'absence de charge, les deux asymptotes se coupent en  $f'_{ca} \approx 7,2 \cdot 10^2$  Hz et la phase vaut alors  $\pi/4$  en ce point, ce qui correspond bien à l'étude théorique. En présence de charge, l'intersection des asymptotes a lieu en  $f'_{cb} \approx 8,6 \cdot 10^2$  Hz  $>$   $f'_{ca}$ , ce qui correspond à l'étude théorique menée.

On peut écrire  $\frac{f_{cb}}{f_{ca}} = \frac{R}{R_e} = 1 + \frac{R}{R_c}$  d'où  $R_c = \frac{R}{\frac{f_{cb}}{f_{ca}} - 1} = 5,1 \cdot 10^3 \Omega$  aux erreurs de pointés près.

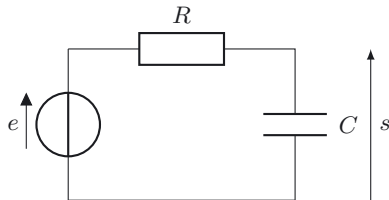
5. On veut que  $\frac{f'_{cb} - f_{ca}}{f_{ca}} = \frac{R}{R_e} - 1 = \frac{R}{R_c} < 0,01$ . Il faut donc choisir  $R_c$  telle que  $R_c > 100R = 0,10 \text{ M}\Omega$ .

**Exercice 9.10**

- $f = 1,0 \cdot 10^2 \text{ Hz}$  : le signal reproduit quasiment la tension d'entrée, mais en la multipliant par  $-2$ .  
 $f = 10 \text{ kHz}$  : le signal créneau est changé en triangle, ce qui correspond à une opération d'intégration. Il semble donc que le filtre concerné soit un filtre passe-bas du premier ordre.
- On choisit donc  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + f \frac{f}{f_c}}$ .
- À basse fréquence (ce qui correspond à  $1,0 \cdot 10^2 \text{ Hz}$ ),  $\underline{H} = H_0 = -2$  d'après la remarque précédente.  
 À haute fréquence (ce qui correspond à  $1,0 \cdot 10^4 \text{ Hz}$ ),  $\underline{H} \approx \frac{H_0 \omega_c}{j\omega} = \frac{s}{e}$ , soit  $j\omega \underline{s} = H_0 \omega_c e = \frac{ds}{dt}$ , ce qui correspond bien à une intégration, et peut s'écrire pour un signal quelconque :  $\frac{ds(t)}{dt} = H_0 \omega_c e(t)$ .  
 À la lecture du graphe, lorsque  $e = 1,0 \text{ V}$  entre  $t = 0$  et  $t = 0,050 \text{ ms}$ ,  $\frac{ds}{dt} = -12,5 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$ , d'où  $\omega_c = 6,3 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $f_c = 1,0 \text{ kHz}$ .

**Exercice 9.11**

1. Le filtre utilisé est le suivant :



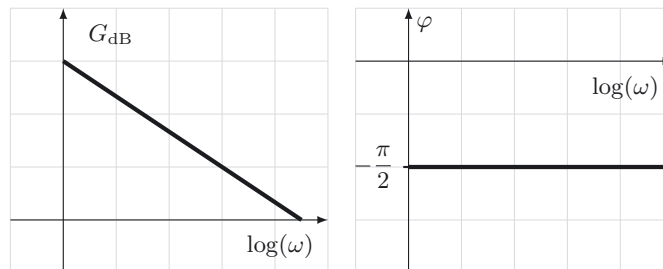
La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Sa fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = 1,6 \text{ kHz}$$

2. Pour l'intégrateur parfait :  $\frac{ds}{dt} = \frac{e}{\tau}$  soit en notation complexe :  $j\omega \underline{s} = \frac{e}{\tau}$ . La fonction de transfert est donc bien  $\underline{H} = \frac{1}{j\tau\omega}$ . On en déduit que  $G_{dB} = -20 \log(\omega\tau)$  et  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ , d'où le diagramme de Bode de l'intégrateur (échelles arbitraires pour  $G_{dB}$ ) :



- Sur le diagramme de Bode du circuit  $RC$ , le domaine  $f \gg f_c$  correspond à la fonction intégrateur. Ainsi,  $\tau = RC$ .
- Nous constatons que pour  $f = 20 \text{ kHz}$ , le filtre intègre bien le signal  $e(t)$  car  $f > 10f_c$  (toutes les harmoniques sont dans le domaine intégrateur). Ce n'est pas le cas pour  $f = 5 \text{ kHz}$  : le fondamental n'est pas dans le domaine intégrateur.



**Partie 2**

**Mécanique**



# Cinématique du point et du solide

## L'essentiel du cours

### Contexte

Comment le placement d'une caméra peut-il influencer sur l'étude d'un mouvement ?

Pour répondre à cette question nous avons réalisé l'enregistrement vidéo de deux mouvements : celui d'un point fixe  $P$  sur un plateau tournant et celui du centre de masse  $G$  d'une bille roulant dans une gouttière fixée au plateau tournant. Les enregistrements ont été réalisés avec une caméra fixée sur un support soit lié au plateau, soit lié à la table. Les deux dispositifs expérimentaux sont représentés ci-dessous :

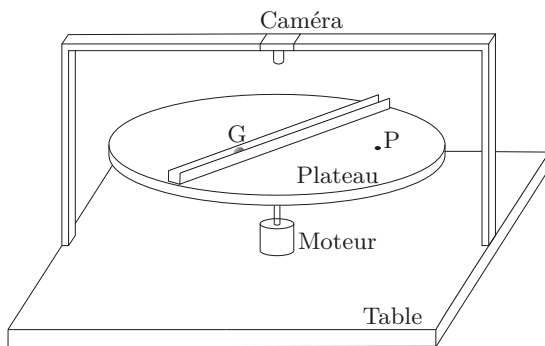


Figure 10.1. Caméra fixée sur un support lié à la table.

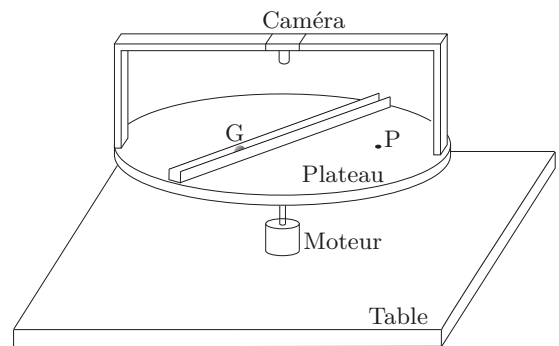


Figure 10.2. Caméra fixée sur un support lié au plateau.

Un moteur électrique fixé sur la table entraîne le plateau en rotation à vitesse angulaire constante autour de son axe vertical. L'axe optique de la caméra est confondu avec l'axe de rotation.

## ■ 1 Notions de repère d'espace et de référentiel

### Définition : Repère

Un repère d'espace est l'association d'un point origine et d'une base orthonormée directe. Il permet de repérer la position d'un point dans l'espace.

Les figures suivantes montrent les positions des points  $P$  et  $G$ , relevées par analyse de la vidéo en utilisant un repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  fixe par rapport à la caméra (axe  $Oz$  confondu avec l'axe de rotation). L'intervalle de temps entre deux points est  $\Delta t$ .

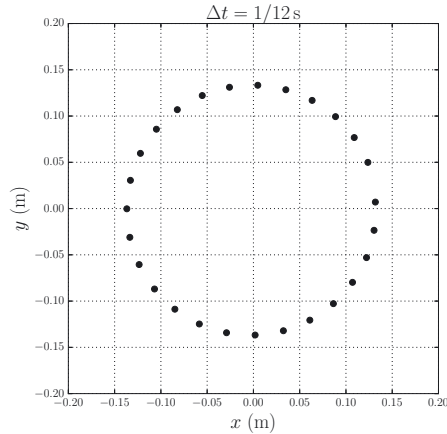


Figure 10.3. Mouvement de  $P$ , caméra liée à la table.

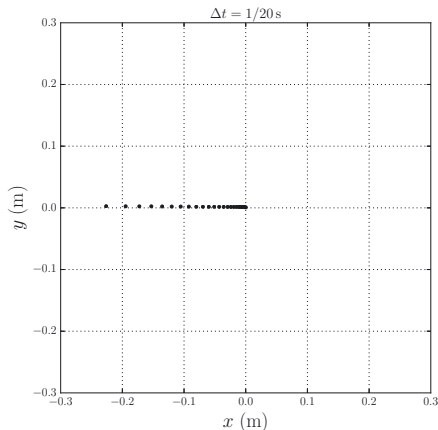


Figure 10.4. Mouvement de  $G$ , caméra liée au plateau.

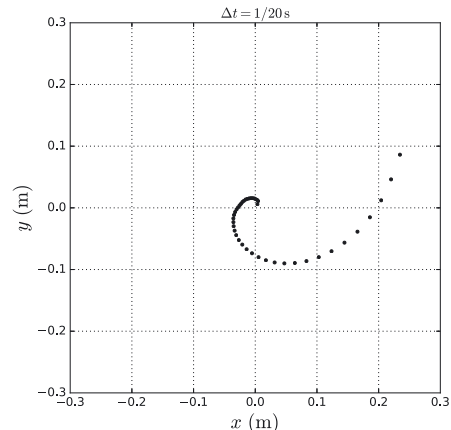


Figure 10.5. Mouvement de  $G$ , caméra liée à la table.

□ Pourquoi ces enregistrements font-ils apparaître des mouvements différents selon que la caméra est liée au plateau ou à la table ?

La caméra fixée sur le support lié au plateau est un observateur immobile par rapport au plateau. En précisant **un repère fixe par rapport au plateau** et en utilisant **une horloge**, l'observateur peut alors repérer les positions du point au cours du temps et étudier son mouvement par rapport au plateau, c'est-à-dire dans **le référentiel du plateau**.

De la même manière, la caméra fixée sur le support lié à la table est un observateur immobile par rapport à la table. En précisant **un repère fixe par rapport à la table** et en utilisant **une horloge**, l'observateur peut alors repérer les positions du point au cours du temps et étudier son

mouvement par rapport à la table, c'est-à-dire dans le **référentiel de la table**.

On remarque ainsi que le **mouvement d'un point dépend du référentiel dans lequel l'observation est réalisée**. Il est donc important de bien définir le référentiel dans lequel est réalisée l'étude mécanique.

#### Définition : Référentiel

Un référentiel est l'association d'un repère d'espace fixe par rapport à l'observateur qui décrit le mouvement et d'une horloge. Un référentiel est noté  $\mathcal{R}$ .



Il ne faut pas confondre les notions de repère d'espace et de référentiel. Préciser le référentiel d'étude, c'est préciser l'observateur. On peut changer de repère sans pour autant changer de référentiel. En outre, on peut travailler avec un repère fixe ou non.

Dans la suite de ce cours, nous noterons  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  un repère fixe du référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans ce référentiel, le point  $O$  est immobile et la base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est indépendante du temps. Un tel repère est qualifié de **repère cartésien** du référentiel  $\mathcal{R}$ .

Pour finir, nous noterons  $\mathcal{R}_p$  le référentiel lié au plateau et  $\mathcal{R}_t$  le référentiel lié à la table, aussi qualifié de référentiel terrestre puisque la table est immobile par rapport à la terre.

## ■ 2 Étude expérimentale d'un mouvement rectiligne

D'après la figure 10.4, les positions du point  $G$  se répartissent, au cours du temps, sur une droite qui constitue sa trajectoire. Le mouvement de  $G$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$  lié au plateau, est rectiligne.

#### Définition : Trajectoire

La trajectoire d'un point  $M$ , dans un référentiel donné, est l'ensemble des positions de ce point au cours du temps, rapportées à un repère fixe dans ce référentiel.

□ **Quelle est l'expression du vecteur position  $\overrightarrow{OG}$  ?**

La trajectoire de la bille étant sur l'axe  $(Ox)$ , le vecteur position est de la forme :  $\overrightarrow{OG} = x\vec{u}_x$ , avec  $x$  négatif et décroissant au cours du temps.

□ **Quelle est l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point  $G$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$  ?**

La figure 10.6 représente l'abscisse  $x$  de la bille à différents instants de l'enregistrement vidéo réalisé à 120 images par seconde. Nous pouvons en déduire les valeurs expérimentales de sa vitesse  $v_x$ .

**Méthode 10.1 : Approche expérimentale du vecteur vitesse**

Entre  $t_1$  et  $t_2$  le vecteur position du point  $G$  varie de  $\vec{OG}(t_1)$  à  $\vec{OG}(t_2)$ . Son vecteur vitesse  $\vec{v}$  est expérimentalement approché, à l'instant  $t_1$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$ , par :

$$\vec{v}(t_1) = \frac{\vec{OG}(t_2) - \vec{OG}(t_1)}{t_2 - t_1} \Big|_{\mathcal{R}_p} = \frac{\Delta \vec{OG}}{\Delta t} \Big|_{\mathcal{R}_p} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{u}_x$$

➔ Exercices (10.1) (10.2)

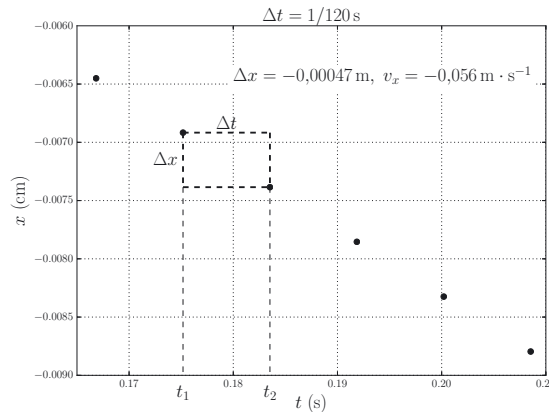


Figure 10.6. Détermination expérimentale de la vitesse.

On en déduit le vecteur vitesse de  $G$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$ , à la date  $t$ , par passage à la limite :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{OG}}{\Delta t} \Big|_{\mathcal{R}_p} = \frac{d\vec{OG}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_p} = \dot{x} \vec{u}_x$$

**Définition : Vecteur vitesse d'un point dans un référentiel  $\mathcal{R}$**

À un instant  $t$ , le vecteur vitesse  $\vec{v}$  d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est défini par :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{OM}(t + \Delta t) - \vec{OM}(t)}{\Delta t} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$$

□ Quelle est l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}$  de  $G$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$  ?

En reprenant les valeurs expérimentales de  $v_x$ , il est maintenant possible de représenter  $v_x$  en fonction de  $t$  (figure 10.7) et d'en déduire les valeurs expérimentales de  $a_x$ .

**Méthode 10.2 : Approche expérimentale du vecteur accélération**

Entre  $t_1$  et  $t_2$  le vecteur vitesse du point  $G$  varie de  $\vec{v}(t_1)$  à  $\vec{v}(t_2)$ . Son vecteur accélération  $\vec{a}$  est expérimentalement approché, à l'instant  $t_1$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_p$  par :

$$\vec{a}(t_1) = \left. \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \right|_{\mathcal{R}_p} = \left. \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}_p} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \vec{u}_x$$

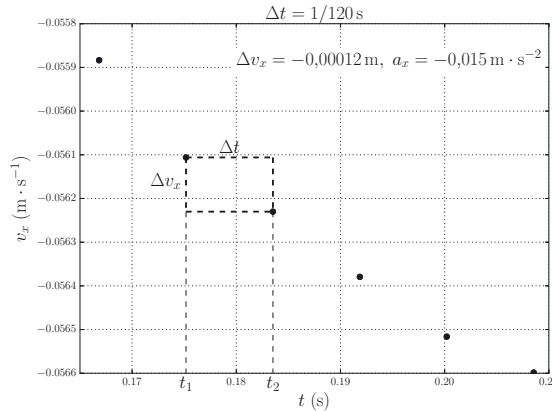


Figure 10.7. Détermination expérimentale de l'accélération.

On en déduit le vecteur accélération de  $G$  dans  $\mathcal{R}_p$ , à la date  $t$ , par passage à la limite :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}_p} = \ddot{x} \vec{u}_x.$$

**Définition : Vecteur accélération d'un point dans un référentiel  $\mathcal{R}$** 

À un instant  $t$ , le vecteur accélération  $\vec{a}$  d'un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est défini par :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left. \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}}$$

Les notions précédentes se généralisent au cas d'un mouvement quelconque.

**Généralisation au cas d'un mouvement quelconque**

D'une façon générale, la position d'un point  $M$  en mouvement quelconque peut être repérée, dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  dans un repère lié à  $\mathcal{R}$ . On définit alors, dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

- son vecteur position :  $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$  ;
- son vecteur vitesse :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$  ;
- son vecteur accélération :  $\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$ .

### ■ 3 Étude expérimentale d'un mouvement circulaire

D'après la figure 10.3, le mouvement du point  $P$  dans  $\mathcal{R}_t$  est circulaire uniforme puisque sa trajectoire est un cercle et que les arcs de cercle parcourus entre deux images successives sont égaux.

□ Quelle est l'expression du vecteur position  $\vec{OP}$  ?

D'après la figure 10.8, les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $P$  semblent être des fonctions sinusoidales de  $t$ .

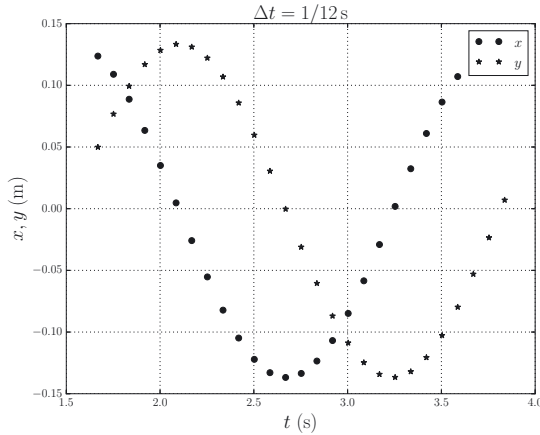


Figure 10.8. Valeurs expérimentales de  $x$  et  $y$  à différents instants.

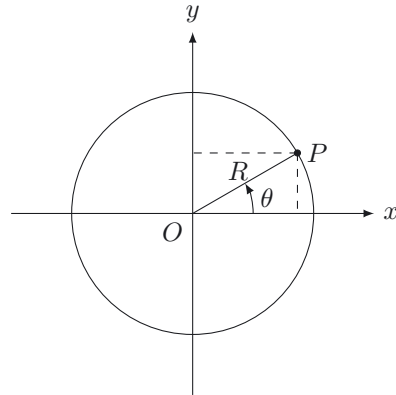


Figure 10.9. Mouvement circulaire.

Pour un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$  (figure 10.9), l'angle  $(\vec{u}_x, \vec{OP})$  est  $\theta = \omega t + \phi$ , où  $\omega$  est la vitesse angulaire du plateau (constante) et  $\phi$  l'angle à l'instant  $t = 0$ . Les coordonnées du point  $P$  sont donc  $x(t) = R \cos(\omega t + \phi)$  et  $y(t) = R \sin(\omega t + \phi)$ . Le vecteur position est  $\vec{OP}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$ .

💡 Lors de l'étude d'un point  $M$  en mouvement circulaire, il est souvent plus simple d'utiliser un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et une base polaire locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

⚠ L'expression du vecteur position  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  ne fait intervenir que sa coordonnée polaire  $r$ . Les vecteurs de la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  sont liés au point  $M$  et se déplacent avec lui.

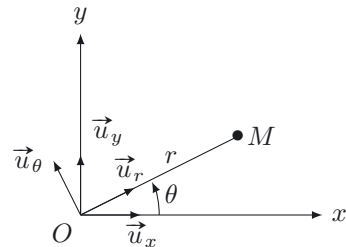


Figure 10.10. Base et coordonnées polaires.



**Définition : Coordonnées polaires et base polaire**

Les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  du point  $M$  sont définies par :

- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  tel que  $r \in \mathbb{R}^+$  ;
- $\theta = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$ , angle orienté de  $\vec{u}_x$  vers  $\overrightarrow{OM}$  tel que  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

La base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , liée au point  $M$ , est définie par :

- $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ , vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $M$  ;
- $\vec{u}_\theta$  vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur  $\vec{u}_r$  et orienté vers les  $\theta$  croissants.

Lorsque les vecteurs de la base polaire dépendent du temps dans  $\mathcal{R}$ , leurs dérivées temporelles interviennent dans les calculs des vecteurs vitesse et accélération du point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

**Méthode 10.3 : Dérivation temporelle des vecteurs de la base polaire**

Si le point  $M$  est en mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , alors les vecteurs de la base polaire dépendent du temps. Leurs dérivées temporelles dans  $\mathcal{R}$  ne sont pas nulles :

- $\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  ;
- $\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ .

➔ Exercices (10.3) (10.4)

□ Quelles sont les expressions des vecteurs vitesse  $\vec{v}$  et accélération  $\vec{a}$  d'un point  $M$  en mouvement circulaire ( $r = cste$ ) dans un référentiel  $\mathcal{R}$  ?

$$\vec{v} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \left. \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = r \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta .$$

$$\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \left. \frac{d(r\dot{\theta} \vec{u}_\theta)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{u}_r) = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta .$$

**Méthode 10.4 : Vitesse et accélération d'un point en mouvement circulaire**

Pour établir les expressions dans la base polaire des vecteurs vitesse et accélération d'un point  $M$  en mouvement circulaire, il faut :

- exprimer son vecteur position dans la base polaire liée au point  $M$  :  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$  ;
- dériver le vecteur position en considérant  $r$  comme une constante et  $\vec{u}_r$  comme une fonction du temps  $\vec{u}_r(t)$  ; on obtient :  $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta = v \vec{u}_\theta$  ;
- dériver le vecteur vitesse en le considérant comme un produit de deux fonctions du temps  $r\dot{\theta}(t)$  et  $\vec{u}_\theta(t)$  ; on obtient :  $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta$ .

➔ Exercices (10.5) (10.6)

Le vecteur accélération comporte deux composantes.



- Une composante tangentielle à la trajectoire :  $\vec{a}_t = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$ . Cette composante est nulle dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme pour lequel la vitesse angulaire  $\omega = \dot{\theta}$  est constante.
- Une composante normale à la trajectoire :  $\vec{a}_n = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$  qui est dirigée vers le centre de la trajectoire. **Le vecteur  $\vec{a}$  est donc toujours dirigé vers la concavité de la trajectoire.**

□ Quelles sont les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point  $P$  liés au plateau, dans le référentiel  $\mathcal{R}_t$  lié à la terre ?

En notant  $\omega$  la vitesse angulaire constante du plateau :

- $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \left. \frac{d(R\vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = R \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = R\omega\vec{u}_\theta$  ;
- $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = \left. \frac{d(R\omega\vec{u}_\theta)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = R\omega \left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}_t} = -R\omega^2\vec{u}_r$ .



Le mouvement de  $P$  est uniforme car le module de sa vitesse  $\|\vec{v}\| = R|\omega|$  est constant, mais son vecteur vitesse n'est pas constant puisque sa direction, parallèle à  $\vec{u}_\theta$ , varie au cours du temps. **Le vecteur accélération de  $P$  n'est donc pas nul** et il est constamment dirigé vers le centre de la trajectoire circulaire. On parle d'**accélération centripète**.

Les figures 10.11 et 10.12 ci-dessous représentent le mouvement expérimental, dans le référentiel de la table, du point  $P$  lié au plateau lorsque celui-ci tourne à vitesse angulaire constante. On remarque que l'accélération n'est pas tout à fait dirigée vers le centre. Cela est lié au fait que dans la détermination expérimentale le  $\Delta t$  utilisé dans le calcul n'est pas infiniment petit.

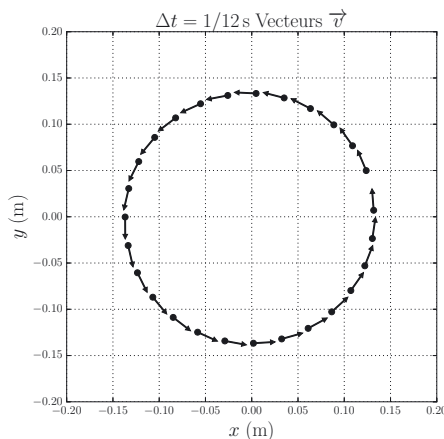


Figure 10.11. Vecteur vitesse expérimental du point  $P$  lié au plateau.

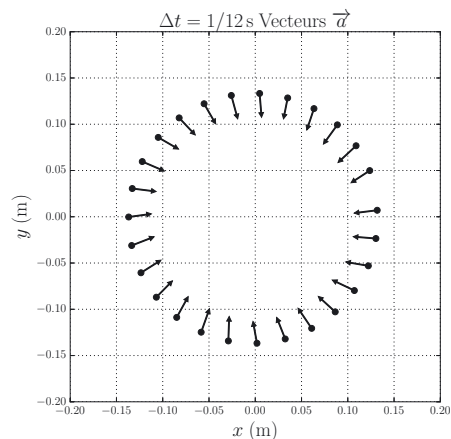


Figure 10.12. Vecteur accélération expérimental du point  $P$  lié au plateau.

Les figures 10.13 et 10.14 ci-dessous représentent le mouvement expérimental du point  $P$  lié au plateau lorsque celui-ci ne tourne plus à vitesse angulaire constante.

□ Comment évolue la vitesse  $v = \|\vec{v}\|$  au cours du temps ?

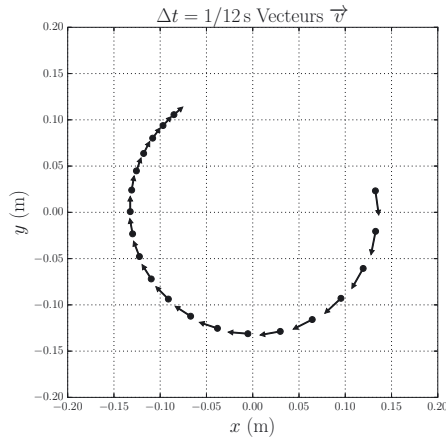


Figure 10.13. Vecteur vitesse expérimental du point  $P$  lié au plateau.

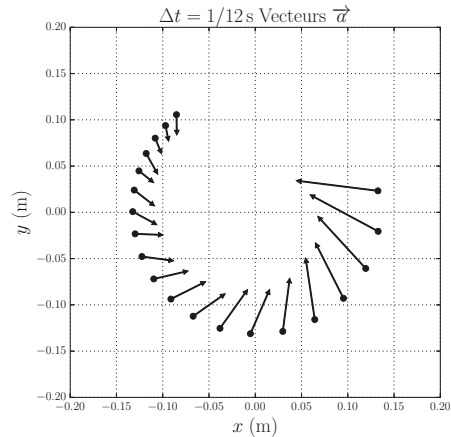


Figure 10.14. Vecteur accélération expérimental du point  $P$  lié au plateau.

- Sur la figure 10.13 on constate que  $\vec{v}$  est selon  $\vec{u}_\theta$  et que sa norme  $\|\vec{v}\|$  décroît au cours du temps. Le plateau a toujours un mouvement rotatif, mais cette fois-ci, il ralentit.
- En observant les figures 10.13 et 10.14 on constate que  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ .

$$\text{Or } \vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

Donc :  $\frac{dv^2}{dt} < 0$ . On en déduit que  $v^2 = \|\vec{v}\|^2$  décroît au cours du temps. Il en va de même pour  $\|\vec{v}\|$ . On retrouve ainsi la conclusion précédente.

On remarque que le raisonnement précédent ne fait pas appel au caractère circulaire du mouvement étudié. Le résultat peut donc être généralisé à tout type de mouvement.

#### Méthode 10.5 : Évolution de la norme du vecteur vitesse

Le signe de  $\vec{v} \cdot \vec{a}$  permet de qualifier l'évolution de  $v = \|\vec{v}\|$ . En effet  $\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$ .

Si  $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$  alors  $v$  augmente et si  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$  alors  $v$  diminue. Dans le cas particulier où  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ , le mouvement est uniforme.

➔ Exercices (10.6) (10.7)

## ■ 4 Paramétrage d'un mouvement à 3 dimensions

Lorsque le mouvement d'un point ne se fait pas dans un plan, il devient nécessaire de repérer sa position dans l'espace. En dehors des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  ou les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  définies ci-dessous. Le choix du repérage se fait en fonction de la symétrie du problème.

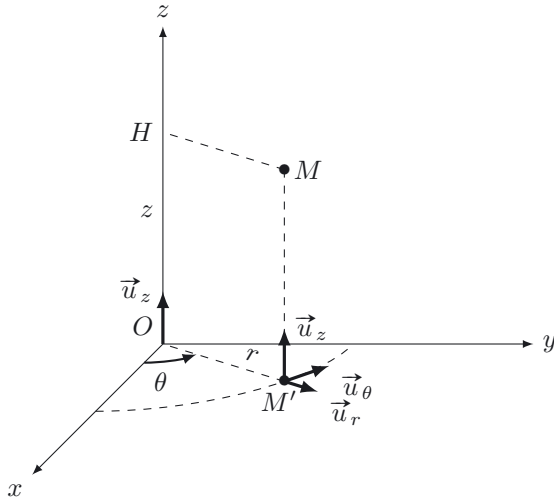


Figure 10.15. Coordonnées cylindriques.

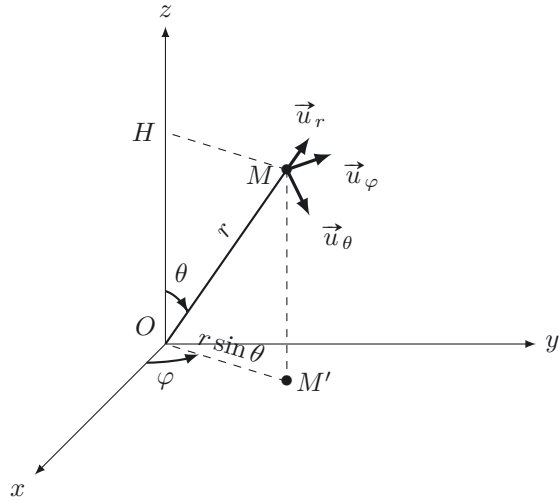


Figure 10.16. Coordonnées sphériques.

Les points  $H$  et  $M'$  sont les projetés orthogonaux du point  $M$  sur l'axe  $(Oz)$  et sur le plan  $(Oxy)$ .

### Définition : Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  du point  $M$  sont définies par :

- $r = \|\overrightarrow{HM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$  : distance de  $M$  à l'axe  $(Oz)$  ( $r \in \mathbb{R}^+$ );
- $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM'})$  : angle orienté de  $\overrightarrow{u_x}$  vers  $\overrightarrow{OM'}$  tel que  $\theta \in [0; 2\pi[$ ;
- $z = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u_z}$  ( $z \in \mathbb{R}$ ).

### Définition : Base cylindrique

La base cylindrique orthonormée directe  $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ , liée au point  $M$ , est définie par :

- $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{HM}}{\|\overrightarrow{HM}\|} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{\|\overrightarrow{OM'}\|}$  : vecteur unitaire dirigé de  $H$  vers  $M$  ou de  $O$  vers  $M'$ ;
- $\overrightarrow{u_\theta}$  : vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur  $\overrightarrow{u_r}$  dans le plan  $(Oxy)$  et orienté vers les  $\theta$  croissants;
- $\overrightarrow{u_z}$  : vecteur unitaire de la base cartésienne formant une base directe avec  $\overrightarrow{u_r}$  et  $\overrightarrow{u_\theta}$ .



Les coordonnées polaires constituent un cas particulier des coordonnées cylindriques lorsque le mouvement de  $M$  se fait dans un plan  $z = cste$  parallèle au plan  $(Oxy)$ .

**Définition : Coordonnées sphériques**

Les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  du point  $M$  sont définies par :

- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$  : distance de  $M$  à  $O$  ( $r \in \mathbb{R}^+$ );
- $\theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM})$  : angle orienté de  $\vec{u}_z$  vers  $\overrightarrow{OM}$  tel que  $\theta \in [0; \pi]$ ;
- $\varphi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OM})$  : angle orienté de  $\vec{u}_x$  vers  $\overrightarrow{OM}$  tel que  $\varphi \in [0; 2\pi[$ .

**Définition : Base sphérique**

La base sphérique orthonormée directe  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ , liée au point  $M$ , est définie par :

- $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$  : vecteur unitaire dirigé de  $O$  vers  $M$ ;
- $\vec{u}_\theta$  : vecteur unitaire du plan  $(OHM)$ , perpendiculaire au vecteur  $\vec{u}_r$  et orienté vers les  $\theta$  croissants;
- $\vec{u}_\varphi$  : vecteur unitaire du plan  $(Oxy)$ , perpendiculaire à  $OM'$  et orienté vers les  $\varphi$  croissants.

□ Comment s'exprime le vecteur position dans ces deux systèmes de coordonnées ?

Dans la base cylindrique, la relation de Chasles nous donne :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ .

Dans la base sphérique, nous avons directement :  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ .



Les bases cylindriques  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  et sphériques  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  sont des **bases orthonormées directes**. Les vecteurs de base doivent donc **vérifier la règle des trois doigts de la main droite** (voir encadré « La règle de la main droite » en fin du chapitre 13).

## ■ 5 Vecteur déplacement élémentaire

Lorsqu'un point se déplace, entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , de la position  $M(t)$  à la position  $M(t + \Delta t)$ , son vecteur déplacement  $\overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$  se définit comme la variation  $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)$  de son vecteur position. Si les deux dates sont suffisamment voisines pour pouvoir être considérées comme infiniment voisines, alors on assimile au premier ordre la variation  $\Delta t$  à la différentielle  $dt$  et la variation  $\Delta\overrightarrow{OM}$  à la différentielle  $d\overrightarrow{OM}$ . Ce vecteur  $d\overrightarrow{OM}$ , souvent noté  $d\vec{l}$ , est appelé **vecteur déplacement élémentaire du point M**.

□ Comment s'exprime le vecteur déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées ?

Pour engendrer un vecteur déplacement élémentaire dans un système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  on fait varier chaque coordonnée  $x_i$  d'une quantité élémentaire  $dx_i$ , engendrant ainsi un déplacement élémentaire  $dl_i\vec{u}_i$  de longueur  $dl_i$  dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_i$ . Le déplacement élémentaire résultant est la somme des déplacements élémentaires selon chaque vecteur de la base.

### Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :

Une variation élémentaire  $dx$  de  $x$  engendre un segment de droite de longueur  $dx$  selon  $\vec{u}_x$  correspondant à un déplacement élémentaire  $dx\vec{u}_x$ . Il en est de même pour les deux autres coordonnées

$y$  et  $z$ . Un déplacement élémentaire quelconque a alors pour expression  $\vec{dl} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ .

**Déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques :**

Les déplacements élémentaires engendrés par les variations des différentes coordonnées cylindriques sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètre		Déplacement élémentaire engendré			Vecteur dépl. élém.
Nom	Var.	Nature	Longueur	Direction	
$r$	$dr$	Segment de droite	$dr$	$\vec{u}_r$	$dr\vec{u}_r$
$\theta$	$d\theta$	Arc de cercle de centre $H$ , de rayon $r$ , d'angle au centre $d\theta$	$r d\theta$	$\vec{u}_\theta$	$r d\theta\vec{u}_\theta$
$z$	$dz$	Segment de droite	$dz$	$\vec{u}_z$	$dz\vec{u}_z$

**Déplacement élémentaire en coordonnées sphériques :**

Les déplacements élémentaires engendrés par les variations des différentes coordonnées sphériques sont présentés dans le tableau suivant :

Paramètre		Déplacement élémentaire engendré			Vecteur dépl. élém.
Nom	Var.	Nature	Longueur	Direction	
$r$	$dr$	Segment de droite	$dr$	$\vec{u}_r$	$dr\vec{u}_r$
$\theta$	$d\theta$	Arc de cercle de centre $O$ , de rayon $r$ , d'angle au centre $d\theta$	$r d\theta$	$\vec{u}_\theta$	$r d\theta\vec{u}_\theta$
$\varphi$	$d\varphi$	Arc de cercle de centre $H$ , de rayon $r \sin(\theta)$ , d'angle au centre $d\varphi$	$r \sin(\theta) d\varphi$	$\vec{u}_\varphi$	$r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi$

**Définition : Vecteur déplacement élémentaire**

Le vecteur déplacement élémentaire peut s'exprimer dans les trois systèmes de coordonnées.

- En coordonnées cartésiennes :  $\vec{dl} = d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ .
- En coordonnées cylindriques :  $\vec{dl} = d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$ .
- En coordonnées sphériques :  $\vec{dl} = d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi$ .

□ **Comment en déduire l'expression du vecteur vitesse  $\vec{v}(M)$  dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  auquel on associe le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  ?**

Il suffit pour cela de reprendre la définition du vecteur vitesse :  $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$  et d'utiliser les expressions précédentes du vecteur déplacement élémentaire.

- En coordonnées cartésiennes :  $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ .
- Coordonnées cylindriques :  $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$ .
- Coordonnées sphériques :  $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r \sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$ .



En coordonnées cylindriques, lorsque le mouvement se fait dans un plan normal à l'axe  $Oz$  ( $z = cste$ ), nous retrouvons l'expression du vecteur vitesse obtenue en coordonnées polaires par dérivation temporelle du vecteur position.

## ■ 6 Étude du mouvement d'un solide

### Définition : Solide indéformable

Un solide est dit indéformable lorsque pour tout couple de points  $(A, B)$  du solide la distance  $AB$  est indépendante du temps.

Afin d'illustrer quelques mouvements de solides, intéressons nous à un train se déplaçant en ligne droite et à une grande roue du type « London Eye » (l'œil de Londres).

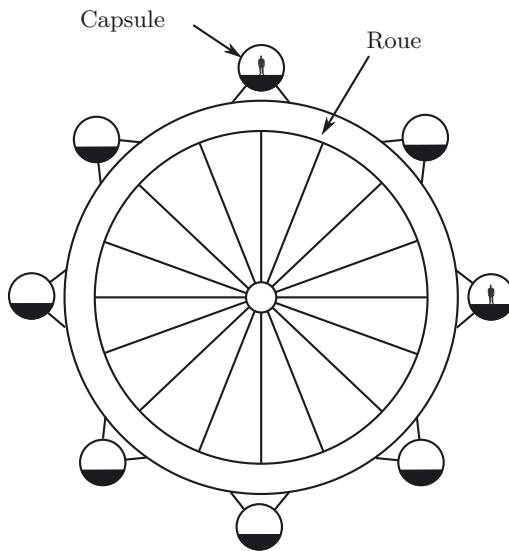


Figure 10.17. Grande roue London Eye.

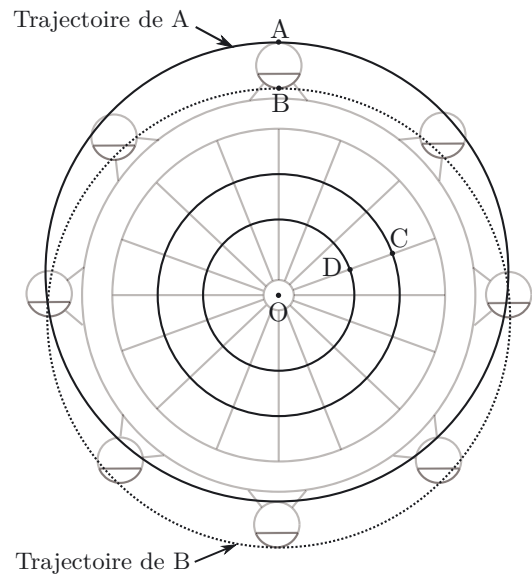


Figure 10.18. Trajectoires de différents points de la grande roue et d'une capsule.

□ **Qu'y a-t-il de commun entre le mouvement du train et celui d'une capsule de la grande roue dans le référentiel terrestre ? Qu'est-ce qui distingue ces mouvements ?**

Dans les deux cas, tous les points du solide considéré (train ou capsule) ont des trajectoires qui se déduisent les unes des autres par translation. Le solide est en **mouvement de translation**.

Dans le cas du train, tous ses points ont des trajectoires rectilignes, parallèles entre elles. Le train est un **solide en translation rectiligne**. Tous les points de la capsule ont des trajectoires circulaires de même rayon mais dont les centres sont décalés les uns par rapport aux autres (cas des points  $A$  et  $B$  de la figure 10.18). La capsule est un **solide en translation circulaire**.

□ Quelle est la différence entre le mouvement d'une capsule de la grande roue et celui de la grande roue elle-même dans le référentiel terrestre ?

Une capsule est animée, comme nous venons de le voir, d'un mouvement de translation circulaire. Ce n'est pas le cas de la grande roue qui est un **solide en rotation autour d'un axe fixe**. En effet, la trajectoire de chacun de ses points est un cercle dont le centre appartient à son axe de rotation mais dont le rayon dépend de la distance du point considéré à cet axe (cas des points  $C$  et  $D$  de la figure 10.18). Ainsi les trajectoires circulaires des différents points de la grande roue n'ont pas même rayon et ne peuvent donc pas se déduire les unes des autres par translation.

□ Comment calculer le vecteur vitesse d'un point  $M$  d'un solide ?

Il faut distinguer les deux cas.

- Si le solide est en translation (figure 10.19), tous ses points ont à chaque instant le même vecteur vitesse. Il suffit donc d'étudier le mouvement d'un seul point du solide, en général celui de son centre de masse.
- Si le solide est en rotation autour d'un axe fixe (figure 10.20), le point  $M$  est en mouvement circulaire autour de son projeté orthogonal  $H$  sur l'axe de rotation. Il faut alors connaître la vitesse angulaire  $\Omega$  du solide autour de son axe dans le référentiel d'étude et la distance  $HM = r$  du point  $M$  à l'axe de rotation.

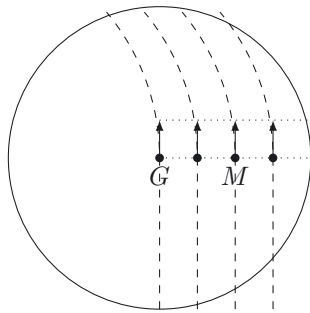


Figure 10.19. Translation.

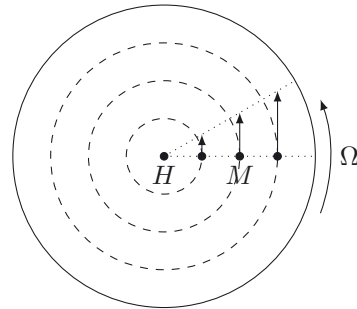


Figure 10.20. Rotation autour d'un axe fixe.

**Méthode 10.6 : Vitesse des points d'un solide**

Soit  $M$  un point quelconque du solide et  $G$  son centre de masse.

- Cas d'un solide en translation :  $\vec{v}(M) = \vec{v}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$ .
- Cas d'un solide en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour d'un axe fixe.  $H$  étant le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation et  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  la base polaire liée au point  $M$  en mouvement circulaire autour de  $H$  :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = r\Omega \vec{u}_\theta \text{ avec } r = \|\vec{HM}\|.$$

➔ Exercice (10.8)



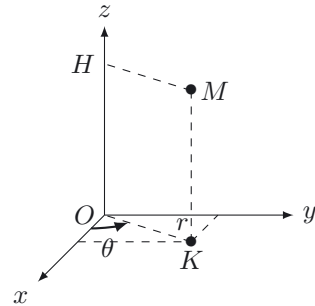
## Interro de cours

1. Par quelles coordonnées peut-on repérer le point  $M$  ?

- (a)  $(r, 0, z)$ .
- (b)  $(r, \theta, z)$ .
- (c)  $(x, y, z)$ .

2. Quel lien existe-t-il entre les coordonnées cylindriques et les coordonnées cartésiennes ?

- (a)  $r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .
- (b)  $x = r \sin(\theta)$  et  $y = r \cos(\theta)$ .
- (c)  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ .



3. Quelle est l'expression du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base cylindrique ?

- (a)  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r$ .
- (b)  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + \theta \vec{u}_\theta + z \vec{u}_z$ .
- (c)  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$ .

4. On travaille dans le référentiel lié à  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Quelle est l'expression, dans la base cylindrique, du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du point  $M$  dans ce référentiel ?

- (a)  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + \dot{z} \vec{u}_z$ .
- (b)  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$ .
- (c)  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$ .

5. On considère le point  $M$  dont les coordonnées cylindriques à  $t = 0$  sont  $(r_0, 0, 0)$  et dont le vecteur vitesse est à chaque instant de la forme  $\vec{v} = v_1 \vec{u}_\theta + v_2 \vec{u}_z$  avec  $v_1$  et  $v_2$  des constantes positives. Identifier les phrases incorrectes.

- (a) Il tourne autour de l'axe de plus en plus vite.
- (b) Il se rapproche de l'axe.
- (c) Son mouvement est la superposition d'un mouvement ascendant uniforme et d'un mouvement circulaire uniforme.

6. Quelle est la vitesse angulaire du point  $M$  de la question 5 ?

- (a)  $\omega = v_1$ .
- (b)  $\omega = v_2$ .
- (c)  $\omega = \frac{v_1}{r_0}$ .

7. Quelle est la norme du vecteur vitesse du point  $M$  de la question 5 ?

- (a)  $\|\vec{v}\| = v_1 + v_2$ .
- (b)  $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ .
- (c)  $\|\vec{v}\| = v_1 = v_2$ .

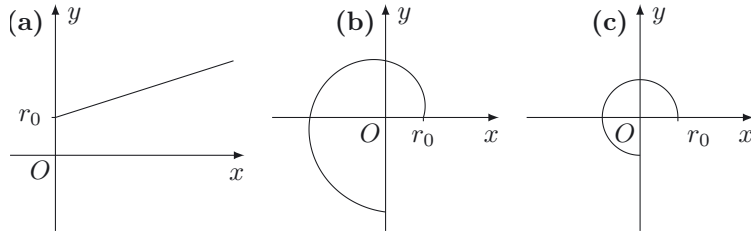
8. On considère maintenant un point  $M$  dont l'altitude reste constante et qui tourne à vitesse constante  $v_1$  autour de l'axe  $Oz$ . Que vaut son vecteur accélération  $\vec{a}$  ?

(a)  $\vec{a} = \vec{0}$  car le mouvement est uniforme.

(b)  $\vec{a} = -\frac{v_1^2}{r_0} \vec{u}_r$ .

(c)  $\vec{a} = v_1 \dot{\theta} \vec{u}_r$ .

9. Une trajectoire plane, contenue dans le plan  $xOy$  et d'équation en polaires :  $r = r_0 \left(1 + \frac{\theta}{\pi}\right)$ , est décrite à vitesse angulaire constante positive  $\omega$  par un point  $M$  pour lequel  $r(0) = r_0$ . Identifier la trajectoire correspondante parmi les propositions suivantes :



10. Quelle est la durée  $\tau$  du parcours du point  $M$  de la question précédente ?

(a)  $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ .

(b)  $\tau = \frac{3\pi}{2\omega}$ .

(c)  $\tau = \frac{r_0}{\dot{r}}$ .

11. On considère un compact disque dans un lecteur CD en fonctionnement. Tous les points du CD ont une caractéristique cinématique commune. Laquelle ?

(a) Ils présentent le même vecteur vitesse.

(b) Ils présentent la même vitesse.

(c) Ils présentent la même vitesse angulaire.

12. On considère un téléphérique dont le câble, reliant le point de départ et le point d'arrivée, forme un quart de cercle. Quel est le mouvement du téléphérique ?

(a) Le téléphérique est en rotation.

(b) Le téléphérique est en translation.

(c) Le téléphérique est en oscillation.

# Exercices

## Exercice 10.1 Ballon de volley

➔ Méthode (10.1)

Un spectateur filme un match de volley à l'aide d'une caméra numérique à raison de 25 images par seconde. De retour chez lui il utilise un logiciel d'exploitation vidéo pour analyser une action qui s'est déroulée face à la caméra, dans un plan normal à son objectif.

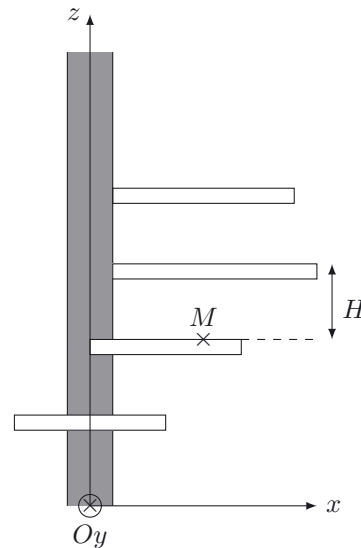
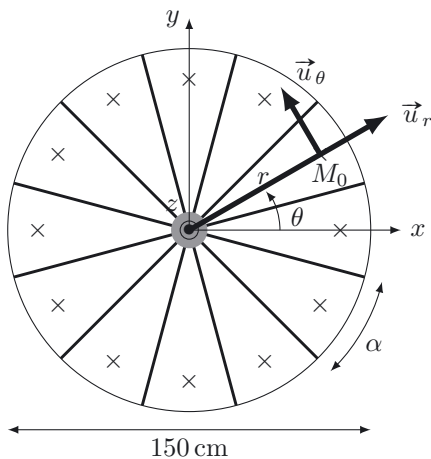
À l'aide du logiciel il pointe la position du ballon et en déduit ses coordonnées à différents instants. Il obtient les résultats consignés dans le tableau ci-contre. Évaluer le vecteur vitesse puis la vitesse du ballon au départ de l'action.

$t$	$x$	$z$
0,025 s	0,125 m	0,213 m
0,050 s	0,250 m	0,420 m

## Exercice 10.2 Montée d'un escalier en colimaçon

➔ Méthode (10.1)

Un escalier en colimaçon (hélicoïdal) est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. La figure de gauche (vue de dessus) fait apparaître l'angle de marche  $\alpha = 30^\circ$ . La figure de droite représente les quatre premières marches et définit la hauteur de marche  $H = 20$  cm.



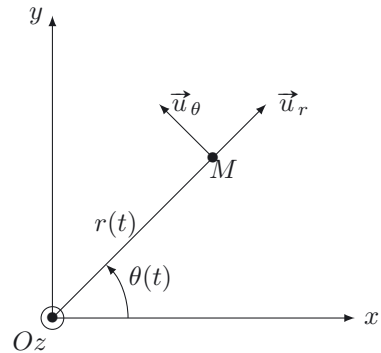
Un usager, assimilé à un point matériel  $M$ , monte à l'étage d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à la distance  $r = 60$  cm de  $Oz$ . Sur la figure de gauche  $M_0$  est le projeté de  $M$  suivant un plan perpendiculaire à  $Oz$ . Les croix représentent les positions successives de  $M_0$ , pointées lorsque l'utilisateur est sur une marche. Nous désirons étudier le mouvement de  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  lié à l'escalier et repéré par  $(O, x, y, z)$ .

1. Estimer la dérivée temporelle  $\dot{z}$  de la cote  $z$  du point  $M$ . Le mouvement est-il accéléré suivant  $Oz$ ? Proposer une expression de  $z(t)$  sachant que  $z = 0$  à l'instant  $t = 0$ .
2. Nous nous intéressons à la rotation de  $M_0$  autour du pilier central sachant que  $\theta(0) = \theta_0 = -30^\circ$  à l'instant  $t = 0$ .
  - a. Qualifier le mouvement de  $M_0$ . Donner une valeur numérique de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .
  - b. Exprimer les vecteurs vitesse et l'accélération de  $M_0$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Calculer sa vitesse.
3. Quel est le lien entre  $\dot{z}$  et  $\dot{\theta}$ ?
4. Exprimer, dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , les vecteurs vitesse et accélération de  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### Exercice 10.3 Tournez manège

#### ➔ Méthode (10.3)

Un forain se déplace sur son manège depuis la périphérie vers son axe de rotation  $Oz$ . Le manège tourne autour de l'axe  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{u}_z$ , avec  $\omega_0 = 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  repéré par  $(O, x, y, z)$ . La grande expérience du forain lui permet de se déplacer selon un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse  $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  par rapport au manège. Nous étudions le mouvement du forain assimilé à un point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  en le repérant par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ . À l'instant initial, nous considérons que  $r(0) = R = 5,0 \text{ m}$  et  $\theta(0) = 0$ . Le forain s'arrête lorsque  $r = R_{\min} = 0,50 \text{ m}$ .

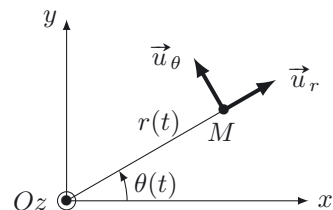


1. Déterminer les lois  $r(t)$  et  $\theta(t)$ .
2. Déterminer la vitesse et l'accélération de  $M$  à tout instant dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .
3. À quelle date sa vitesse dans  $\mathcal{R}$  est-elle maximale? Calculer cette vitesse maximale.
4. À quelle date son accélération dans  $\mathcal{R}$  est-elle maximale? Calculer cette accélération maximale.

### Exercice 10.4 Une base polaire en Antarctique

#### ➔ Méthode (10.3)

Un manchot empereur, assimilé à un point matériel  $M$ , fait des glissades sur une portion plane de banquise. Pour étudier son mouvement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de celle-ci, repéré par  $(O, x, y, z)$ , il peut être commode d'utiliser la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  dans laquelle le vecteur position se met sous la forme  $\vec{OM} = r(t) \vec{u}_r$ . Cependant, cette base est mobile dans  $\mathcal{R}$ . Nous sommes donc amenés, pour exprimer les vecteurs vitesse et accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ , à dériver les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  par rapport au temps, dans  $\mathcal{R}$ .



1. Exprimer les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

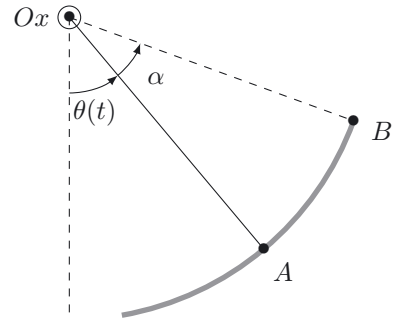
- Exprimer les vecteurs  $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . En déduire  $\frac{d\vec{u}_r}{dt}\Big|_{\mathcal{R}}$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\Big|_{\mathcal{R}}$  dans cette même base.
- Montrer que :  $\frac{d\vec{u}_r}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\Big|_{\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$ .
- Exprimer alors les vecteurs vitesse et accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  dans la base  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ .

### Exercice 10.5 Le bateau-pirate

#### ➔ Méthode (10.4)

Le bateau-pirate (ou bateau à bascule) est une attraction présente dans de nombreux parcs. Les passagers prennent place dans une nacelle située à l'extrémité d'un pendule oscillant autour d'un axe horizontal  $Ox$ . La figure suivante présente un modèle simple du dispositif. La nacelle est assimilée à un arc de cercle de rayon  $R = OA = 10$  m et d'angle au centre  $2\alpha = 60^\circ$ . Le mouvement pendulaire est tel que  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$  avec  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  et  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4,0$  s.

Le passager  $A$  (assimilé à un point) se trouve au milieu de la nacelle tandis que le passager  $B$  s'installe à l'avant du bateau comme indiqué sur le schéma.

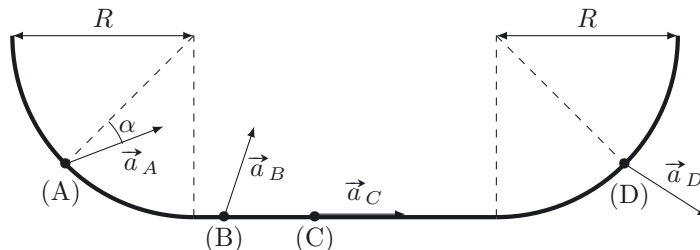


- Exprimer les positions angulaires  $\theta_A(t)$  et  $\theta_B(t)$  des points  $A$  et  $B$ . Comparer leurs vitesses angulaires, leurs vecteurs vitesse et leurs vecteurs accélération.
- Exprimer les vecteurs vitesse et accélération des deux passagers en fonction du temps. Calculer leur vitesse maximale.
- À votre avis, pourquoi le passager  $B$  ressent-il des sensations plus intenses que le passager  $A$ ?

### Exercice 10.6 Accélération d'un skateboarder

#### ➔ Méthodes (10.4) (10.5)

Un skateboarder roule sur une piste constituée d'une partie centrale plate encadrée par deux tremplins circulaires de rayon  $R = 5,0$  m. Modélisé par un point matériel se déplaçant dans un plan vertical toujours en contact avec la piste (les sauts ne sont pas envisagés), il est représenté sur la figure ci-dessous à quatre dates successives correspondant aux positions (A), (B), (C) et (D).



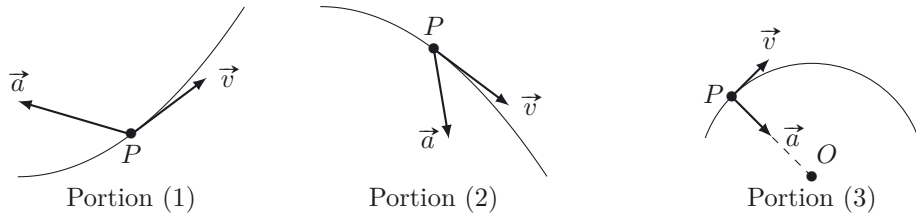
1. L'accélération présumée du skateboarder est indiquée sur la figure aux quatre points considérés. Parmi ces représentations, quelles sont celles qui ne peuvent pas correspondre à la réalité?
2. Quelles caractéristiques du mouvement peut-on déduire de la figure au point (C)?
3. Même question au point (A). Préciser la vitesse du skateboarder en ce point si  $\alpha = 10^\circ$  et  $\|\vec{a}_A\| = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### Exercice 10.7 Ça plane pour moi

➔ Méthode (10.5)

Trois portions de la trajectoire d'un planeur sont représentées ci-dessous. La vitesse  $\vec{v}$  et l'accélération  $\vec{a}$  du planeur assimilé à un point  $P$  y sont indiquées à un instant donné.

Nous nous intéressons à l'évolution de la norme du vecteur vitesse d'un planeur dans trois portions de sa trajectoire représentées ci-dessous. Les vecteurs vitesse et accélération du planeur, assimilé à un point  $P$ , y sont indiqués à un instant donné.

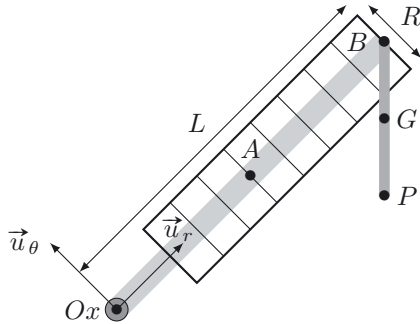


1. Déterminer pour chaque portion de trajectoire si la norme de la vitesse de  $P$  augmente ou diminue.
2. La portion (3) est circulaire de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Quel est le lien entre la norme de l'accélération et celle de la vitesse?
3. Déterminer pour chaque portion de trajectoire si  $\|\vec{v}\|$  augmente ou diminue.
4. La portion (3) est circulaire de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Quel est le lien entre la norme de  $\|\vec{a}\|$  et  $\|\vec{v}\|$ ?

**Exercice 10.8 L'être de mon moulin**

➔ Méthode (10.6)

Les ailes d'un moulin à vent tournent régulièrement autour de leur axe de rotation  $Ox$  à raison de 20 tours par minute.



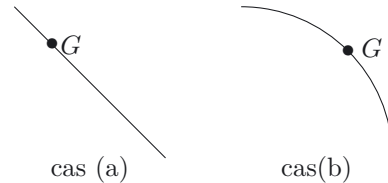
Dans un moment d'égarement, le jeune Alexandre agrippe une aile (au point  $B$ ) et se laisse alors entraîner en restant à chaque instant à la verticale. La figure ci-contre représente l'aile et Alexandre, modélisé par un solide  $S$  de centre de masse  $G$ .

La longueur de l'aile est  $L = 8,0$  m et sa largeur  $R = 1,0$  m. Le point  $A$  est le milieu du segment  $[O, B]$ .

1. Caractériser le mouvement de l'aile puis déterminer la vitesse de ses points  $O$ ,  $A$  et  $B$ .
2. Caractériser le mouvement d'Alexandre puis déterminer la vitesse de ses points  $B$ ,  $G$  et  $P$ .

**Exercice 10.9 La chatte sur un toit glissant**

Une chatte glisse depuis le faîte d'un toit. L'étude cinématique de la chute nécessite un choix adapté des coordonnées du centre de masse  $G$  de l'animal. Nous envisageons deux situations ; dans le cas (a), le toit est plan et le mouvement de  $G$  rectiligne alors que dans le cas (b), le toit est un dôme et le mouvement de  $G$  est circulaire de rayon  $R$ .



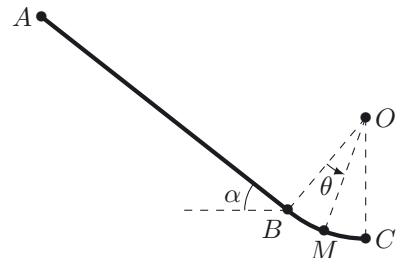
1. Quel est le système de coordonnées adapté dans chaque cas ?
2. Compléter les schémas en indiquant coordonnées et bases utiles.

**Exercice 10.10 Saut à ski**

Un skieur s'élance en  $A$  sur un tremplin constitué de deux parties représentées en coupe sur la figure ci-contre. Le skieur est assimilé à un point matériel  $M$  glissant dans le plan vertical de la figure. Le début de la piste entre  $A$  et  $B$  est rectiligne, de longueur  $L = AB = 60$  m et de pente caractérisée par l'angle  $\alpha = 35^\circ$ . La fin de la piste entre  $B$  et  $C$  est assimilée à un arc de cercle de rayon  $R = 10$  m. Nous nous limitons à l'étude de la phase d'élan.

Le skieur s'élance en  $A$  à l'instant  $t = 0$  sans vitesse initiale.

Entre  $A$  et  $B$  son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré, d'accélération  $a_0 = 5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



1. Déterminer les vecteurs vitesse  $\vec{v}(M)$  et position  $\overrightarrow{AM}$  du skieur à chaque instant au cours de cette première phase.
2. À quel instant le skieur arrive-t-il en  $B$ ? Quelle vitesse possède-t-il alors?

Entre  $B$  et  $C$  le mouvement de  $M$  est circulaire et l'angle  $\theta$  permet de repérer sa position. La vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  dépend de  $\theta$  selon la loi  $\dot{\theta} = \omega_0 \sqrt{\cos(\alpha - \theta)} + \beta$  où  $\omega_0 = 1,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\beta$  est une constante.

3. Déterminer la constante  $\beta$ .
4. Exprimer les vecteurs vitesse et l'accélération de  $M$  en utilisant une base polaire adaptée. Qualifier le mouvement de  $M$ .
5. Déterminer la vitesse du skieur en  $C$ .

### Exercice 10.11 Freinage d'un objet par frottements

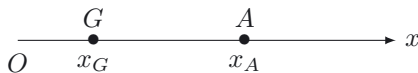
On considère un objet assimilé à un point matériel  $M$  susceptible de se déplacer selon l'axe  $Ox$ . À  $t = 0$  il se trouve en  $O$  et sa vitesse vaut  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  avec  $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



1. L'objet subit une force de frottement solide de sorte que son accélération peut être supposée constante et égale à  $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{u}_x$  avec  $a_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , jusqu'à son arrêt. Déterminer sa vitesse et sa position au cours du temps ainsi que la distance totale parcourue.
2. L'objet subit une force de frottement fluide de sorte que son accélération  $\vec{a}(M)$  est reliée à sa vitesse  $\vec{v}(M)$  par la relation  $\vec{a}(M) = -\alpha \vec{v}(M)$  avec  $\alpha = 0,10 \text{ s}^{-1}$ . Déterminer sa vitesse et sa position au cours du temps ainsi que la distance maximale parcourue.

### Exercice 10.12 Guépard vs antilope

Le guépard est considéré comme l'animal terrestre le plus rapide au monde, sa vitesse pouvant atteindre  $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Nous envisageons ici une course-poursuite avec une antilope, dans un contexte très simplifié où les deux animaux se déplacent uniquement selon l'axe  $Ox$  (voir figure).



Le guépard est assimilé au point  $G$  d'abscisse  $x_G$  et l'antilope au point  $A$  d'abscisse  $x_A$ .

Le guépard, initialement au repos en  $O$ , s'élance à la date  $t = 0$ . Il fonce vers sa proie avec une accélération constante  $\vec{a}_G = a_G \vec{u}_x$ , où  $a_G = 10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , jusqu'à atteindre sa vitesse limite  $v_{GL} = 30,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  qu'il ne peut maintenir que pendant  $10,0 \text{ s}$ . Si alors il n'a pas rattrapé l'antilope, il coupe son effort, épuisé, son festin se transformant en une longue sieste réparatrice.

L'antilope se trouve initialement au repos à l'abscisse  $x_A(0) = D = 120 \text{ m}$ . Elle s'enfuit à l'instant  $t_{A0} = 1,00 \text{ s}$  avec une accélération constante  $\vec{a}_A = a_A \vec{u}_x$ , où  $a_A = 11,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , jusqu'à atteindre sa vitesse limite  $v_{AL} = 22,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  qu'elle peut maintenir ensuite très longtemps.

1. Déterminer les abscisses  $x_G(t)$  et  $x_A(t)$  à tout instant  $t$ .
2. Quelle est l'issue de la course-poursuite?

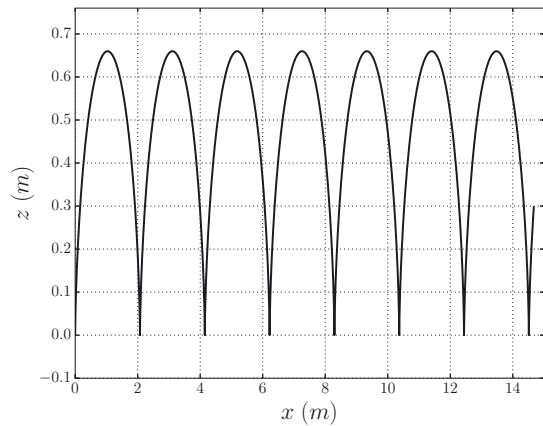
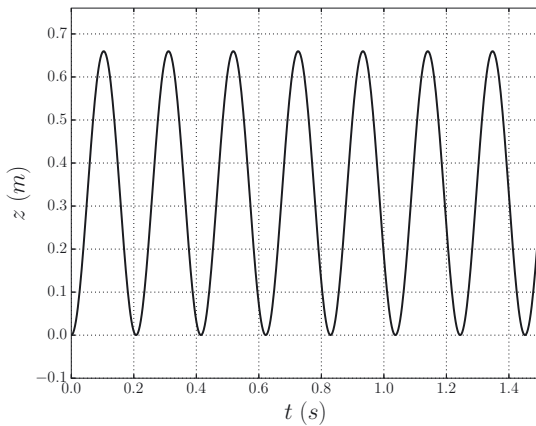
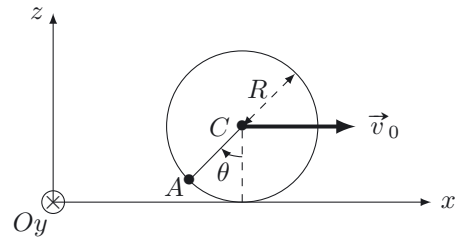


### Exercice 10.13 Mouvement cycloïdal

Un cycliste roule dans la direction de l'axe  $Ox$  à la vitesse uniforme  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  repéré par  $(O, x, y, z)$ . Les roues de son vélo sont schématisées par des cercles de rayon  $R$  et un des pneus est marqué d'un point  $A$ . En absence de glissement sur le sol, la vitesse de rotation  $\omega_0$  des roues est liée à  $v_0$  par la relation  $v_0 = R\omega_0$ .

À  $t = 0$  le centre  $C$  de la roue se trouve sur l'axe  $Oz$ .

Par simulation numérique, nous avons tracé deux courbes. Celle de gauche représente l'évolution de l'ordonnée  $z$  de  $A$  en fonction du temps, celle de droite la trajectoire de  $A$  (cycloïde) dans  $\mathcal{R}$ .



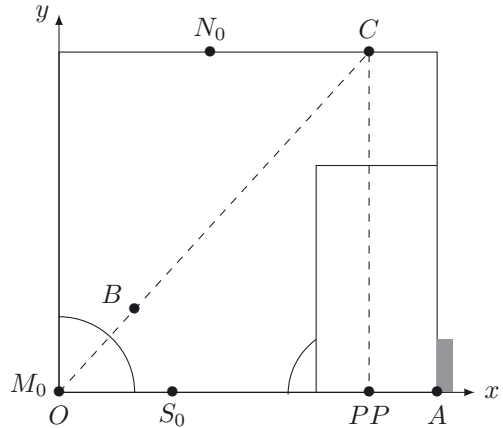
1. Caractériser le mouvement du point  $A$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement de translation de vitesse  $\vec{v}_0$  par rapport à  $\mathcal{R}$  et dans lequel le centre  $C$  de la roue est fixe. Écrire les vecteurs vitesse et accélération de  $A$  dans  $\mathcal{R}'$ .
2. Exploiter les simulations numériques pour déterminer  $\omega_0$ ,  $R$  et  $v_0$ . Vérifier que la roue ne glisse pas sur le sol.
3. Déterminer, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , les coordonnées cartésiennes  $x(t)$  et  $z(t)$  du point  $A$  puis celles de ses vecteurs vitesse et accélération.
4. Comparer les vitesses puis les accélérations de  $A$  dans les deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

**Exercice 10.14 MSN**

La MSN est le surnom donné au fameux trio d'attaquants du club de football FC Barcelone constitué de Lionel Messi (*M*), Luiz Suarez (*S*) et Neymar (*N*). L'exercice propose l'approche cinématique simplifiée d'une action de jeu impliquant les trois joueurs.

L'action se situe dans le quart du terrain représenté sur la figure ci-contre. Elle débute à la date  $t = 0$  alors que Messi se trouve au point  $M_0$ , Neymar au point  $N_0$  de coordonnées  $[x_{N_0}; y_{N_0}] = [20 \text{ m}; 45 \text{ m}]$  et Suarez au point  $S_0$  de coordonnées  $[x_{S_0}; y_{S_0}] = [15 \text{ m}; 0,0 \text{ m}]$ .

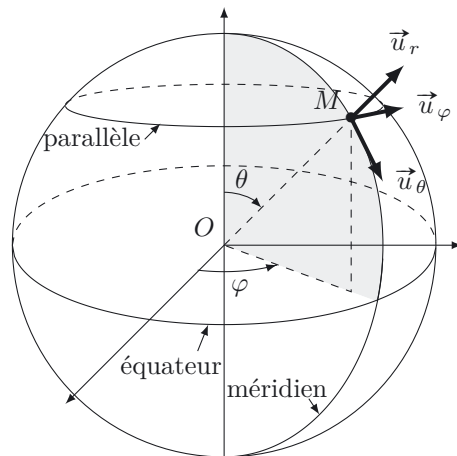
La demi-longueur du terrain, du centre du rond central  $O$  à celui de la cage  $A$ , vaut  $OA = 52 \text{ m}$ . La cage, dont la moitié est représentée par un rectangle gris sur la figure, a une demi-largeur  $L = 3,6 \text{ m}$ .



1. Au départ de l'action Messi « lance Neymar en profondeur » depuis le rond central : le ballon  $B$  se dirige vers le point  $C$  de coordonnées  $[x_C; y_C] = [41 \text{ m}; 45 \text{ m}]$  dans un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_{B_0}$ . Neymar court à vitesse constante  $v_N = 9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  le long de la ligne de touche. Déterminer  $v_{B_0}$  pour que Neymar reçoive bien le ballon en  $C$ .
2. Arrivé en  $C$ , Neymar centre instantanément au point de pénalty ( $PP$ ). Le mouvement de  $B$ , de  $C$  vers  $PP$ , est rectiligne uniforme de vitesse  $v_{B_0}$ . Suarez, qui court vers le point de pénalty depuis l'origine de l'action à vitesse constante  $v_{S_0} = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , modifie d'instinct sa vitesse au moment du centre afin d'intercepter le ballon au point de pénalty. Accélère-t-il ou ralentit-il sa course ? Déterminer son accélération  $\vec{a}_S = a_S \vec{u}_x$  en la supposant uniforme.
3. Suarez, arrivé en  $PP$ , tire dans le ballon en lui donnant de l'effet et lui communique ainsi un mouvement assimilable à un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R = 20 \text{ m}$  et de vitesse initiale  $\vec{v}_{B_1} = v_{B_1} \vec{u}_x$  avec  $v_{B_1} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Conclure quant à l'issue de l'action.

**Exercice 10.15 New York - New York**

Liza Minnelli entreprend une tournée de quatre concerts à travers les États-Unis et le Canada. Partant de New York, elle se rend à Ottawa, Portland et Redding avant de rentrer à New York pour un concert triomphal. Les latitudes et longitudes approchées des salles de concert sont indiquées dans le tableau ci-dessous. La Terre est supposée sphérique de rayon  $R = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$  et les trajets sont effectués en avion à une altitude qui peut être négligée devant  $R$ . Chaque trajet se fait selon, soit un méridien (longitude  $\varphi$  constante), soit un parallèle (colatitude  $\theta$  constante). La valeur  $\varphi = 0$  correspond au méridien de Greenwich ; la colatitude  $\theta$  est reliée à la latitude  $\lambda$  par la relation  $\theta = 90 - \lambda$ .



Le tableau suivant consigne les coordonnées géographiques de chaque ville étape.

Ville	New York	Ottawa	Portland	Redding
Latitude	40° Nord	45° Nord	45° Nord	40° Nord
Longitude	-74°	-74°	-122°	-122°

1. Sur quelle courbe l'avion de Liza se déplace-t-il lorsqu'il vole en suivant un méridien? En déduire les longueurs des trajets de l'avion s'effectuant selon un méridien.
2. Sur quelle courbe l'avion de Liza se déplace-t-il lorsqu'il vole en suivant parallèle de latitude  $\lambda$ ? En déduire les longueurs des trajets de l'avion s'effectuant selon un parallèle.
3.  $(R, \theta, \varphi)$  constituent les coordonnées sphériques d'un point  $M$  à la surface de la Terre et  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  la base sphérique associée à ce point. Donner l'expression du vecteur position de  $M$  dans cette base.
4. Exprimer  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_\varphi$  dans la base cartésienne  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .
5. Établir, dans la base sphérique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ , l'expression du vecteur vitesse d'un point se déplaçant à la surface de la Terre.



**Exercice 10.2**

- Pendant une durée  $\Delta t = 1$  s, la cote de  $M$  croît de la hauteur d'une marche :  $\Delta z = H$ . D'où :  $\dot{z} = v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 $v_z$  étant constante, le mouvement n'est pas accéléré selon  $Oz$  et puisque  $z(0) = 0$ ,  $z(t) = v_z t$ .
- Pendant une durée  $\Delta t = 1$  s,  $\theta$  varie de l'angle d'une marche :  $\Delta\theta = \alpha$ .
  - On en déduit la vitesse angulaire :  $\dot{\theta} = \omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 0,52 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Celle-ci étant constante,  $M_0$  est mouvement circulaire uniforme de rayon  $r$ . On a donc  $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ .
  - $\vec{v}(M_0) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}(M_0) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ .  $v(M_0) = r\dot{\theta} = 0,31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- En notant  $\Delta t$  la durée de montée d'une marche :  $\Delta t = \frac{H}{\dot{z}} = \frac{\alpha}{\dot{\theta}}$ , d'où on déduit :  $\dot{z} = \frac{H}{\alpha} \dot{\theta}$
- $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{M}_0\vec{M} = z\vec{u}_z + r\vec{u}_r$ . D'où par dérivation,  $r$ ,  $\dot{z}$  et  $\dot{\theta}$  étant constants :  
 $\vec{v}(M) = \dot{z}\vec{u}_z + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

**Exercice 10.3**

- Le forain se déplace à vitesse constante  $v_0$  selon la droite  $(O, \vec{u}_r)$ , fixe par rapport au manège, de la périphérie vers le centre et  $r(0) = R$  donc  $r(t) = R - v_0 t$ .  
 Le manège tourne à vitesse angulaire constante  $\omega_0$  et  $\theta(0) = 0$ , donc  $\theta(t) = \omega_0 t$ .
- $\vec{OM} = r(t)\vec{u}_r = (R - v_0 t)\vec{u}_r$   
 $\vec{v} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -v_0\vec{u}_r + (R - v_0 t)\omega_0\vec{u}_\theta$   
 $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -v_0 \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} - v_0\omega_0\vec{u}_\theta + (R - v_0 t)\omega_0 \left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -v_0\dot{\theta}\vec{u}_\theta - v_0\omega_0\vec{u}_\theta - (R - v_0 t)\omega_0\dot{\theta}\vec{u}_r$   
 $\vec{a} = -(R - v_0 t)\omega_0^2\vec{u}_r - 2v_0\omega_0\vec{u}_\theta$
- $v(t) = \sqrt{v_0^2 + (R - v_0 t)^2\omega_0^2}$ . D'où :  $v_{\max} = v(0) = \sqrt{v_0^2 + R^2\omega_0^2} = 5,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- $a(t) = \sqrt{(R - v_0 t)^2\omega_0^4 + 4v_0^2\omega_0^2}$ . D'où :  $a_{\max} = a(0) = \omega_0\sqrt{4v_0^2 + R^2\omega_0^2} = \omega_0\sqrt{4v_0^2 + R^2\omega_0^2} = 5,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Exercice 10.4**

- $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$
- On en déduit par dérivation par rapport à  $\theta$  :  $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\vec{u}_x - \sin\theta\vec{u}_y$ .  
 Puis :  $\left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y)$  et  $\left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y)$ .
- En réinjectant dans ces expressions celles de  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

- $\vec{v}(M) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r \left. \frac{d(\vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$   
 $\vec{a}(M) = \left. \frac{d\vec{v}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(\dot{r}\vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d(r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r} \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$   
 $\vec{a}(M) = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$   
 $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$

**Exercice 10.5**

- $\theta_A(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$  et  $\theta_B(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \alpha$ . Les points  $A$  et  $B$  ont donc même vitesse angulaire. À tout instant, leurs vecteurs vitesse ont même module, mais des directions différentes. Il en est de même de leurs vecteurs accélération.
- En notant  $(\vec{u}_{r,A}, \vec{u}_{\theta,A})$  la base polaire associée à  $A$  :  $\vec{v}_A = R\dot{\theta}_A \vec{u}_{\theta,A} = -R\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_{\theta,A}$  et  $\vec{a}_A = -R\dot{\theta}_A^2 \vec{u}_{r,A} + R\ddot{\theta}_A \vec{u}_{\theta,A} = -R\theta_0\omega_0^2 (\theta_0 \sin^2(\omega_0 t) \vec{u}_{r,A} + \cos(\omega_0 t) \vec{u}_{\theta,A})$ .  
De même en notant  $(\vec{u}_{r,B}, \vec{u}_{\theta,B})$  la base polaire associée à  $B$  :  
 $\vec{v}_B = -R\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) \vec{u}_{\theta,B}$  et  $\vec{a}_B = -R\theta_0\omega_0^2 (\theta_0 \sin^2(\omega_0 t) \vec{u}_{r,B} + \cos(\omega_0 t) \vec{u}_{\theta,B})$ .  
D'où on déduit  $v_{Amax} = v_{Bmax} = R\theta_0\omega_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Le passager  $A$  n'a jamais la tête en bas puisqu'à toute date  $|\theta(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ . Par contre lorsque  $|\theta(t) + \alpha| > \frac{\pi}{2}$  le passager  $B$  a la tête en bas ce qui lui procure des sensations plus intenses.

**Exercice 10.6**

- Les cas (B) et (D) ne correspondent pas à la réalité. En (B), le mouvement étant rectiligne, le vecteur accélération doit être dirigé dans la direction de ce mouvement. En (D), le mouvement étant circulaire, le vecteur accélération doit être dirigé vers l'intérieur de la trajectoire.
- En (C) le mouvement est rectiligne. De plus, le point se dirigeant vers la droite :  $\vec{a}_C \cdot \vec{v}_C > 0$ . Le mouvement est donc accéléré.
- En (A), le mouvement est un mouvement circulaire de rayon  $R$ . De plus le point se dirigeant vers la droite :  $\vec{a}_A \cdot \vec{v}_A > 0$ . Le mouvement est donc accéléré.

L'accélération normale a pour norme  $\frac{v_A^2}{R} = \|\vec{a}_A\| \cos(\alpha)$ , d'où :  $v_A = \sqrt{R\|\vec{a}_A\| \cos(\alpha)} = 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 10.7**

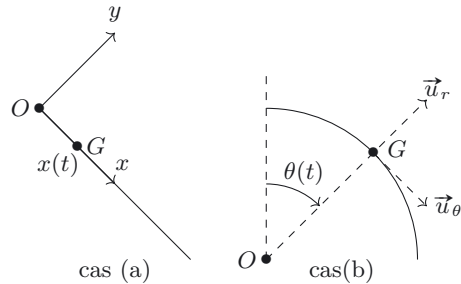
- La méthode pour résoudre cet exercice consiste à déterminer le signe du produit scalaire  $\vec{v} \cdot \vec{a}$  en observant la projection du vecteur  $\vec{a}$  sur la direction du vecteur  $\vec{v}$ .  
Pour la portion (1) :  $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$  : nous en déduisons donc que  $\|\vec{v}\|$  décroît avec le temps.  
Pour la portion (2) :  $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$  : nous en déduisons donc que  $\|\vec{v}\|$  croît avec le temps.  
Pour la portion (3) :  $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$  :  $\|\vec{v}\|$  est constante, le mouvement est uniforme.
- Nous nous plaçons dans la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  définie comme suit :  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{R}$ ,  $\vec{u}_\theta = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ . Le vecteur position dans cette base est  $\vec{OP} = R\vec{u}_r$ . En le dérivant dans le référentiel d'étude, nous obtenons  $\vec{v} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R\omega \vec{u}_\theta$  avec  $\omega$  la vitesse angulaire de ce mouvement circulaire. Nous en déduisons  $\omega = \frac{\|\vec{v}\|}{R}$ . Cette vitesse angulaire est constante car le mouvement est uniforme.  
En dérivant  $\vec{v}$  dans le référentiel d'étude, nous obtenons  $\vec{a} = R\omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -R\omega^2 \vec{u}_r = -\frac{\|\vec{v}\|^2}{R} \vec{u}_r$  ; il vient donc  $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$ .

**Exercice 10.8**

- L'aile est en rotation uniforme autour de l'axe  $Ox$  à la vitesse angulaire  $\omega = 20 \frac{2\pi}{60} = 2,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 Nous pouvons écrire la vitesse d'un point quelconque  $M$  de l'aile situé à la distance  $r_M$  de l'axe de rotation le long de  $OB$  sous la forme  $\vec{v}(M) = r_M \omega \vec{u}_\theta$ .  
 $O$  étant sur l'axe de rotation,  $r = 0$  et  $\vec{v}(O)$  est nulle. Pour  $B$  :  $r_B = L$ , d'où  $\vec{v}(B) = L\omega \vec{u}_\theta$  et  $v_B = 17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour  $A$  :  $r_A = \frac{L}{2}$ , d'où  $\vec{v}(A) = \frac{L}{2}\omega \vec{u}_\theta$  et  $v_A = 8,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Lors du mouvement d'Alexandre, la direction  $BP$  reste fixe dans le référentiel de travail.  
 Pour tout point  $N$  d'Alexandre, nous pouvons écrire  $\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN}$ . Le vecteur  $\vec{BN}$  garde une direction fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  et sa norme est constante, donc sa dérivée dans  $\mathcal{R}$  est nulle.  
 Pour tout point  $N$  de  $BP$ , il vient ainsi  $\vec{v}(N) = \frac{d\vec{ON}}{dt} = \frac{d\vec{OB}}{dt} = \vec{v}(B)$ . Alexandre est donc en mouvement de translation dans  $\mathcal{R}$ , à la vitesse  $\vec{v}(B) = L\omega \vec{u}_\theta$  et  $\vec{v}(B) = \vec{v}(G) = \vec{v}(P) = L\omega \vec{u}_\theta$ .

**Exercice 10.9**

- Dans le cas (a), le mouvement étant rectiligne, le système de coordonnées le mieux adapté est celui des coordonnées cartésiennes, un axe du repère cartésien étant confondu avec la droite trajectoire. Dans le cas (b), le mouvement étant circulaire, le système de coordonnées le mieux adapté est celui des coordonnées polaires, l'origine du repère étant pris au centre du cercle trajectoire.
- Les schémas complétés sont représentés ci-contre.



**Exercice 10.10**

- On considère l'axe  $Ax$  du segment  $AB$  et son vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ , dirigé de  $A$  vers  $B$ . En intégrant deux fois l'accélération, on obtient successivement  $\vec{v}(M) = a_0 t \vec{u}_x$  et  $\vec{AM} = \frac{a_0}{2} t^2 \vec{u}_x$ .
- Le skieur arrive en  $B$  à l'instant  $t_B = \sqrt{\frac{2L}{a_0}} = 4,6 \text{ s}$  et sa vitesse est alors  $v_B = \sqrt{2La_0} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Pour  $\theta = 0$ ,  $v_B = R\dot{\theta}(\theta = 0) = R\omega_0 \sqrt{\cos \alpha + \beta} = \sqrt{2La_0}$ . D'où :  $\beta = \frac{2La_0}{R^2\omega_0^2} - \cos \alpha = 2,6$ .
- On utilise la base polaire définie pour le point  $M$  :  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{R}$  et  $\vec{u}_\theta$  dans le plan de figure tel que  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \frac{\pi}{2}$ . Dans cette base :  $\vec{v}(M) = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega_0 \sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta} \vec{u}_\theta$ .  
 Puis :  $\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} \vec{u}_\theta + R\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$ . En dérivant  $\dot{\theta}$  on obtient :  
 $\ddot{\theta} = \omega_0 \frac{\sin(\alpha - \theta)\dot{\theta}}{2\sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}} = \frac{\omega_0^2}{2} \sin(\alpha - \theta)$ . D'où :  $\vec{a}(M) = \frac{R\omega_0^2}{2} \sin(\alpha - \theta) \vec{u}_\theta - R\omega_0^2 (\cos(\alpha - \theta) + \beta) \vec{u}_r$ .  
 Le mouvement de  $M$  est un mouvement circulaire non uniforme.
- Au point  $C$  :  $\theta = \alpha$ . D'où :  $\vec{v} = R\omega_0 \sqrt{1 + \beta} \vec{u}_X$  avec  $\vec{u}_X$  vecteur unitaire horizontal. L'application numérique donne  $v = 27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 10.11**

## 1. Frottement solide.

- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_x = -a_0 \vec{u}_x$ . D'où :  $\frac{dv}{dt} = -a_0$ . Par intégration :  $v(t) = -a_0 t + C_1$ . En tenant compte des conditions initiales :  $v(0) = C_1 = v_0$ . Finalement :  $\vec{v}(t) = (-a_0 t + v_0) \vec{u}_x$ .
- $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}(t)$ , soit :  $\frac{dx}{dt} \vec{u}_x = (-a_0 t + v_0) \vec{u}_x$ . Par intégration :  $x(t) = -a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2$ . En tenant compte des conditions initiales :  $x(0) = C_2 = 0$ . Finalement :  $\vec{OM}(t) = (-a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t) \vec{u}_x$ .
- Soit  $t_1$  la date d'arrêt :  $v(t_1) = -a_0 t_1 + v_0 = 0$ . On en déduit :  $t_1 = \frac{v_0}{a_0}$ , puis la distance parcourue :

$$d = x(t_1) = \frac{v_0^2}{2a_0} = 0,50 \text{ m.}$$

## 2. Frottement fluide.

- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_x = -\alpha v \vec{u}_x$ . D'où :  $\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0$ . Par intégration :  $v(t) = K \exp(-\alpha t)$ . En tenant compte des conditions initiales :  $v(0) = K = v_0$ . Finalement :  $\vec{v}(t) = v_0 \exp(-\alpha t) \vec{u}_x$ .
- $\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{v}(t)$ , soit :  $\frac{dx}{dt} \vec{u}_x = v_0 \exp(-\alpha t) \vec{u}_x$ . Par intégration :  $x(t) = -\frac{v_0}{\alpha} \exp(-\alpha t) + C$ . En tenant compte des conditions initiales :  $x(0) = -\frac{v_0}{\alpha} + C = 0$ , d'où :  $C = \frac{v_0}{\alpha}$ . Finalement :  $\vec{OM}(t) = \frac{v_0}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) \vec{u}_x$ .
- $x(t)$  tend donc asymptotiquement vers  $d = \frac{v_0}{\alpha} = 10 \text{ m}$  qui correspond à la distance maximale parcourue.

**Exercice 10.12**1. Pour le guépard, pendant sa phase d'accélération :  $\frac{d^2 x_G}{dt^2} = a_G$ . En intégrant deux fois on obtient,

compte tenu des conditions initiales :  $v_G(t) = a_G t$  et  $x_G(t) = \frac{1}{2} a_G t^2$ .

Cette phase prend fin à la date  $t_{G1}$  définie par :  $v_G(t_{G1}) = a_G t_{G1} = v_{GL}$ . On trouve :

$$t_{G1} = \frac{v_{GL}}{a_G} = 3,00 \text{ s. À cette date : } x_G(t_{G1}) = \frac{1}{2} \frac{v_{GL}^2}{a_G} = 45,0 \text{ m.}$$

Pour  $t > t_{G1}$  la vitesse reste constante et égale à  $v_{GL}$ . Donc :  $x_G(t > t_{G1}) = v_{GL}(t - t_{G1}) + x_G(t_{G1})$ .

Cette phase dure jusqu'à la date  $t_{G2} = t_{G1} + 10,0 \text{ s} = 13,0 \text{ s}$ . À cette date :  $x_G(t_{G2}) = 345 \text{ m}$ .

Pour l'antilope, pendant sa phase d'accélération :  $\frac{d^2 x_A}{dt^2} = a_A$ . En intégrant deux fois on obtient,

compte tenu des conditions initiales :  $v_A(t) = a_A(t - t_{A0})$  et  $x_A(t) = \frac{1}{2} a_A(t - t_{A0})^2 + D$ .

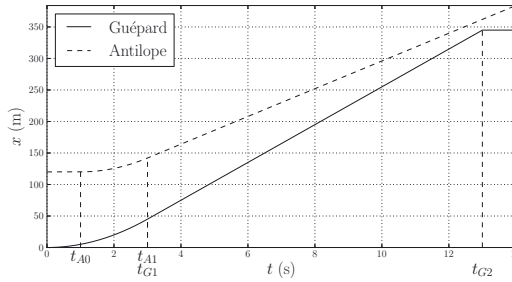
Cette phase prend fin à la date  $t_{A1}$  définie par :  $v_A(t_{A1}) = a_A(t_{A1} - t_{A0}) = v_{AL}$ . On trouve :

$$t_{A1} = t_{A0} + \frac{v_{AL}}{a_L} = 3,00 \text{ s. À cette date : } x_A(t_{A1}) = \frac{1}{2} a_A(t_{A1} - t_{A0})^2 + D = 142 \text{ m.}$$

Pour  $t > t_{A1}$  la vitesse reste constante et égale à  $v_{AL}$ . Donc :  $x_A(t > t_{A1}) = x_A(t_{A1}) + v_{AL}(t - t_{A1})$ .

2. Sur la figure ci-dessous sont tracées les courbes représentatives de  $x_A(t)$  et  $x_V(t)$ .





On constate que  $x_A(t_{G2}) = 362 \text{ m} > x_G(t_{G2})$  : le guépard ne rattrape pas l'antilope. Il est condamné à faire sa sieste le ventre vide..

**Exercice 10.13**

1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , A a un mouvement circulaire uniforme de centre C, d'axe Cy.

On définit la base polaire liée au point A,  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , avec :  $\vec{u}_r = \frac{\vec{CA}}{R}$  et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_y \wedge \vec{u}_r$ . Dans cette base, les vecteurs vitesse et accélération de A dans  $\mathcal{R}'$  ont pour expressions :  $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(A) = R\omega_0 \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(A) = -R\omega_0^2 \vec{u}_r$ .

2. Par lecture de la figure de gauche on détermine la période du mouvement de A dans  $\mathcal{R}'$  :  $T_0 = 0,21 \text{ s}$ .

On en déduit :  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'amplitude du mouvement selon z nous donne  $2R = 0,66 \text{ m}$ , d'où  $R = 33 \text{ cm}$ . Par lecture de la figure de droite on détermine la distance parcourue pendant une période :  $D = 2,1 \text{ m}$ . On en déduit  $v_0 = \frac{D}{T_0} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En reprenant les valeurs que nous venons de déterminer, on constate que  $R\omega_0 = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx v_0$ . Aux précisions des lectures près on peut en conclure que la roue ne glisse pas sur le sol.

3.  $\vec{OA} = \vec{OC} + \vec{CA} = (v_0 t \vec{u}_x + R \vec{u}_z) + R \vec{u}_r = (v_0 t \vec{u}_x + R \vec{u}_z) + R(-\sin(\omega_0 t) \vec{u}_x - \cos(\omega_0 t) \vec{u}_z)$ .  
D'où :  $x(t) = v_0 t - R \sin(\omega_0 t)$  et  $z(t) = R(1 - \cos(\omega_0 t))$ .

4.  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(A) = \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(v_0 t \vec{u}_x + R \vec{u}_z)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d(R \vec{u}_r)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = v_0 \vec{u}_x + R \left. \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = v_0 \vec{u}_x + R\omega_0 \vec{u}_\theta$ . À la vitesse de A dans  $\mathcal{R}'$  s'ajoute donc la vitesse de déplacement d'ensemble de la roue selon  $\vec{u}_x$ .

$\vec{a}_{\mathcal{R}}(A) = \left. \frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}}(A)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = R\omega_0 \left. \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -R\omega_0^2 \vec{u}_r$ . Le vecteur accélération de A est le même dans les deux référentiels.

**Exercice 10.14**

1. En prenant  $t = 0$  au départ de l'action, Neymar arrive en C à la date  $t_1 = \frac{x_C - x_{N0}}{v_N} = 2,3 \text{ s}$ . Le ballon,

lancé par Messi à  $t = 0$ , doit parcourir la distance  $D_1 = \sqrt{y_C^2 + x_C^2}$  à la vitesse  $v_{B0}$  et doit arriver en C à cette même date. Donc  $D_1 = v_{B0} t_1$ . D'où :  $v_{B0} = v_N \frac{\sqrt{y_C^2 + x_C^2}}{x_C - x_{N0}} = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. Le ballon, animé maintenant d'un mouvement rectiligne uniforme de C vers PP, a pour ordonnée  $y_B = -v_{B0}(t - t_1) + y_C$ . Il arrive au point PP d'ordonnée nulle à la date  $t_2 = \frac{y_C}{v_{B0}} + t_1 = 4,1 \text{ s}$ . Si Suarez

courrait de  $S_0$  jusqu'en PP à vitesse constante  $v_{S0}$ , il arriverait en PP à la date  $t'_2 = \frac{x_C - x_{S0}}{v_{S0}} = 4,3 \text{ s}$ .

Trop tard pour intercepter le ballon ! Il va devoir accélérer à la date  $t_1$  du centre.

Jusqu'à  $t = t_1$  son abscisse a pour expression  $x_S = v_{S0} t + x_{S0}$ . À  $t_1$  elle vaut  $x_{S1} = 29 \text{ m}$ . Pour  $t > t_1$ ,  $\dot{x}_S = a_S$  avec pour conditions initiales à  $t = t_1$  :  $x_S(t_1) = x_{S1}$  et  $\dot{x}_S(t_1) = v_{S0}$ . En intégrant deux fois

et compte tenu de ces conditions initiales, on obtient :  $x_S(t) = \frac{a_S}{2}(t - t_1)^2 + v_{S0}(t - t_1) + x_{S1}$ . Pour que  $x_S(t_2) = x_C$  il faut donc que :  $a_S = \frac{2}{(t_2 - t_1)^2}(x_C - x_{S1}) - 2\frac{v_{S0}}{(t_2 - t_1)} = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

3. Le ballon décrit pour finir un cercle de rayon  $R$ , tangent à l'axe  $Ox$  au point  $PP$ , et dont le centre  $D$  a pour coordonnées  $[x_D; y_D] = [41 \text{ m}; 20 \text{ m}]$ . En utilisant l'angle  $\theta$  défini sur la figure ci-dessous, il vient :

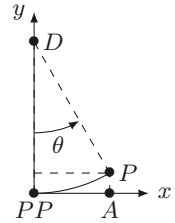
$y_P - y_A = R(1 - \cos \theta) = R(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \theta})$  avec  $\sin \theta = \frac{(x_A - x_{PP})}{R}$ . On trouve :

$y_P - y_A = 3,3 \text{ m}$ . Cette valeur étant inférieure à  $L = 3,6 \text{ m}$ , le tir est « cadré ».

Le ballon décrit un arc de cercle de longueur  $R\theta = R \arcsin \frac{(x_A - x_{PP})}{R} = 12 \text{ m}$

à la vitesse constante  $v_{B1} = 40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il parvient donc au but en un temps

$\Delta t = \frac{R\theta}{v_{B1}} = 29 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ . Il faudra de la réussite au gardien pour que la balle n'aille pas au fond des filets...



**Exercice 10.15**

1. Lorsque l'avion de Liza vole en suivant un méridien, il se déplace, dans un plan contenant l'axe de rotation de la terre, sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . On en déduit la longueur d'un trajet effectué le long d'un méridien :  $L = R |\Delta \theta| = R |\Delta \lambda|$ . Pour les trajets New York-Ottawa et Portland-Redding :  $|\Delta \lambda| = 5^\circ = 8,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$  et  $L_{NY-O} = L_{P-R} = 5,6 \cdot 10^2 \text{ km}$ .

2. Lorsque l'avion de Liza, assimilé à un point  $M$ , vole en suivant un parallèle, il se déplace dans un plan normal à l'axe de rotation de la terre sur un cercle dont le centre est la projection  $H$  du point  $M$  sur cet axe et de rayon  $R \sin \theta$ . On en déduit la longueur d'un trajet effectué le long d'un méridien :  $L = R \cos \lambda |\Delta \varphi| = R \sin \theta |\Delta \varphi|$ . Pour le trajet Ottawa - Portland :  $|\Delta \varphi| = 48^\circ = 8,4 \cdot 10^{-1} \text{ rad}$ ,  $\theta = 45^\circ = 7,9 \cdot 10^{-1} \text{ rad}$  et  $L_{O-P} = 3,8 \cdot 10^3 \text{ km}$ . Pour le trajet Redding-New York :

$|\Delta \varphi| = 48^\circ = 8,4 \cdot 10^{-1} \text{ rad}$ ,  $\theta = 50^\circ = 7,0 \cdot 10^{-1} \text{ rad}$  et  $L_{R-NY} = 4,1 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

3.  $\vec{OM} = R\vec{u}_r$

4.  $\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$

$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z$

$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y$

5.  $\vec{v} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} = R(\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi})\vec{u}_x + R(\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi})\vec{u}_y - R \sin \theta \dot{\theta} \vec{u}_z$

$\vec{v} = R(\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} + \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta} \vec{u}_z)\hat{\theta} + R(-\sin \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\theta})\hat{\varphi}$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + R \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$

# Loi de la quantité de mouvement

## L'essentiel du cours

### Contexte

La mécanique et le sport (1<sup>re</sup> mi-temps).

Lors d'une séance de sport où du basket et du badminton sont pratiqués, un spectateur enregistre les mouvements d'un ballon de basket et d'un volant de badminton afin de réaliser une étude dynamique. Les trajectoires des centres de masses des deux systèmes sont représentées figures 11.1 et 11.2. Comment le spectateur, assis dans les gradins, peut-il expliquer l'allure des trajectoires observées ?

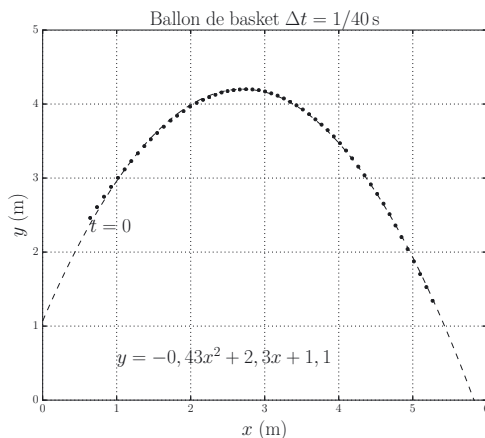


Figure 11.1. Trajectoire du ballon et parabole ajustée.

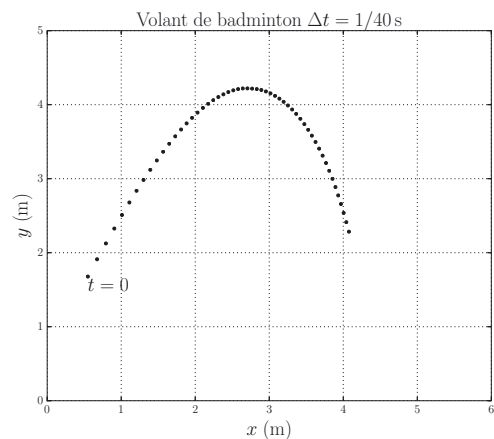


Figure 11.2. Trajectoire du volant.

## ■ 1 Principes fondamentaux de la dynamique

Toute étude de mouvement, faite dans le cadre de la physique classique, repose sur les principes fondamentaux de la mécanique newtonienne. Nous allons donc commencer par énoncer ces principes, également appelés lois de Newton.

**1<sup>re</sup> loi de Newton : le principe d'inertie**

Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels tout point matériel  $M$  isolé (ou pseudo-isolé) est en mouvement de translation rectiligne uniforme. De tels référentiels sont dits galiléens.



Un point matériel est dit isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune force et pseudo-isolé si la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.

Lorsqu'un référentiel  $\mathcal{R}_2$  est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}_1$  galiléen, alors il est lui-même galiléen.

Le référentiel terrestre lié au sol peut souvent être considéré comme galiléen, en première approche et pour des expériences de courte durée devant la période de rotation propre de la Terre (24h).

**2<sup>de</sup> loi de Newton : la loi de la quantité de mouvement**

Soit un système constitué d'un point, de plusieurs points ou d'un solide et  $\vec{p}$  sa quantité de mouvement dans un référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  galiléen. Si on note  $\vec{F}_{\text{ext}}$  la résultante des forces extérieures appliquées au système alors :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i$$

□ **Qu'est-ce que la quantité du mouvement d'un système dans un référentiel  $\mathcal{R}$  ?**

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  est définie par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Pour un système composé de 2 points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ , de vitesses  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ , elle est définie par :  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  où  $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$  et  $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ .

On en déduit :  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1 \left. \frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + m_2 \left. \frac{d\overrightarrow{OM}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$ . D'où :

$$(11.1) \quad \vec{p} = \left. \frac{d(m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

**Définition : Centre de masse**

La centre de masse (ou barycentre)  $G$  de 2 points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , de masses  $m_1$  et  $m_2$ , est défini par :

$$(11.2) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

En reportant  $\overrightarrow{OG}$  dans (11.1) :  $\vec{p} = \frac{d\left((m_1 + m_2)\overrightarrow{OG}\right)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = (m_1 + m_2) \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}}$ . D'où, en notant  $m$  la masse totale du système et  $\vec{v}_G$  la vitesse de son centre de masse  $G$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$(11.3) \quad \vec{p} = m \vec{v}_G$$

Cette expression de la quantité de mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  se généralise à tout système de masse totale  $m$ , qu'il soit notamment composé de  $n$  points matériels ou que ce soit un solide.

#### Définition : Quantité de mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$

- Pour un point matériel  $M$  de masse  $m$  animé de la vitesse  $\vec{v}$  dans  $\mathcal{R}$  :  $\vec{p} = m \vec{v}$ .
- Pour un système de  $n$  points matériels de masses  $m_i$ , dont la vitesse dans  $\mathcal{R}$  du centre de masse  $G$  est  $\vec{v}_G$  :

$$\vec{p} = \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{v}_G = m \vec{v}_G$$

- Pour un solide de masse  $m$  dont la vitesse dans  $\mathcal{R}$  du centre de masse  $G$  est  $\vec{v}_G$  :

$$\vec{p} = m \vec{v}_G$$



Lorsque la masse du système est constante la seconde loi de Newton peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = m \vec{a} = \vec{F}_{ext}$$

#### 3<sup>e</sup> loi de Newton : la loi des actions réciproques

Si deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  sont en interaction, les forces  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  et  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  respectivement exercées par  $M_1$  sur  $M_2$  et par  $M_2$  sur  $M_1$  sont telles que  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  et ces deux forces sont portées par la droite  $M_1 M_2$ .

## ■ 2 Étude des trajectoires du ballon et du volant

- Dans quel référentiel l'étude mécanique est-elle menée ?

Le spectateur qui enregistre les vidéos est assis dans les gradins qui sont fixes par rapport à la Terre. Le référentiel d'étude est donc le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  lié au sol. Nous lui associons un repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  où  $\vec{u}_y$  est le vecteur unitaire de la verticale ascendante et  $\vec{u}_x$  un vecteur unitaire horizontal défini de sorte que le plan  $(Oxy)$  soit celui des mouvements étudiés.

- Peut-on utiliser les lois de la mécanique newtonienne dans le référentiel terrestre ?

Oui, car ce référentiel peut être considéré comme galiléen dans ce type d'expériences (expériences de courte durée).

Commençons par l'étude du mouvement du centre de masse  $G$  du ballon de basket.

□ Quel est le bilan des forces appliquées au ballon ?

Définissons tout d'abord deux forces particulières : le poids et la poussée d'Archimède.

**Définition : Le poids**

Le poids  $\vec{P}$  d'un système de masse  $m$  a pour expression  $\vec{P} = m\vec{g}$  où  $\vec{g}$  est le champ de pesanteur local.

**Définition : La poussée d'Archimède**

Un solide immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une force  $\vec{\Pi}_a$ , appelée poussée d'Archimède, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. Cette force a pour origine l'augmentation de la pression dans le fluide avec la profondeur.

En notant  $m_f$  la masse du volume de fluide déplacé :  $\vec{\Pi}_a = -m_f\vec{g}$ .

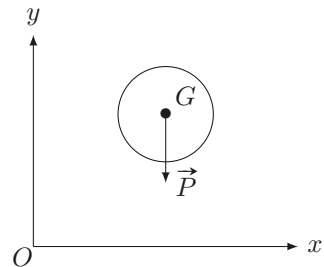
Bilan des forces appliquées au ballon :

- le poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$  ;
- la poussée d'Archimède :  $\vec{\Pi}_a = -m_f\vec{g} = m_f g\vec{u}_y$  ;
- une force de frottement de l'air (d'autant plus faible que la vitesse est faible).

Approximation / Modélisation :

Ici  $m \approx 600$  g alors que  $m_f \approx 1$  g. Nous négligerons donc  $\vec{\Pi}_a$  devant  $\vec{P}$ . Par ailleurs, nous décidons de négliger également la force de frottement de l'air.

Notre modélisation ne tiendra donc compte que du poids.



□ Quelle est l'équation du mouvement du ballon ?

**Définition : Équation du mouvement**

L'équation du mouvement d'un système mécanique est une équation vectorielle qui relie l'accélération du système aux différentes forces qui lui sont appliquées.

On applique la **loi de la quantité de mouvement** au ballon, en notant  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  les vecteurs vitesse et accélération de son barycentre  $G$  dans  $\mathcal{R}$ . On en déduit :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = m\vec{g} \implies m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = m\vec{g} \iff m\vec{a} = m\vec{g}$$

Soit en simplifiant par  $m$  :

$$(11.4) \quad \vec{a} = \vec{g}$$



L'accélération du centre de masse du ballon étant indépendante du temps, son mouvement est **uniformément accéléré**. Elle est aussi indépendante de la masse du ballon.

□ Quelles sont les équations horaires du mouvement du ballon ?

### Définition : Équations horaires

Les équations horaires d'un mouvement sont les équations donnant les paramètres de position d'un système en fonction du temps.

Les équations horaires du mouvement du ballon sont de la forme  $x = f(t)$  et  $y = g(t)$ . Pour les établir nous allons **projeter** l'équation vectorielle du mouvement dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  puis **intégrer 2 fois les équations scalaires obtenues**, en tenant compte des **conditions initiales**. Ces conditions initiales sont :  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_{x0}$  et  $\dot{y}(0) = v_{y0}$ .

En écrivant (11.4) dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  :  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y = \vec{g} = -g\vec{u}_y$ . Après projection :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 & \text{selon } (\vec{u}_x) \\ \ddot{y} = -g & \text{selon } (\vec{u}_y) \end{cases}$$

En intégrant une première fois par rapport au temps et en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = v_{x0} & \text{selon } (\vec{u}_x) \\ \dot{y} = v_y = v_{y0} - gt & \text{selon } (\vec{u}_y) \end{cases}$$

Pour comparer les résultats du modèle à l'expérience, nous avons déduit de l'enregistrement de la trajectoire du point  $G$  (figure 11.1) les composantes de son vecteur vitesse (figure 11.3).

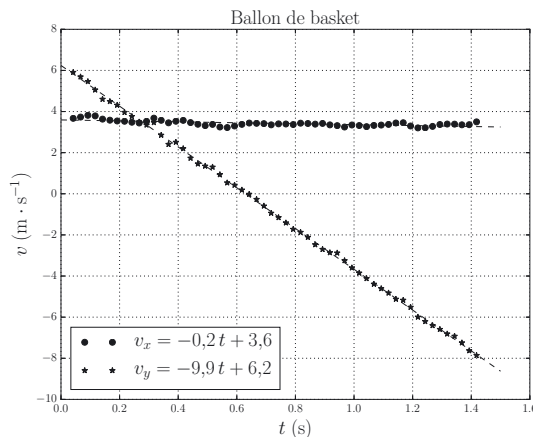


Figure 11.3. Composantes du vecteur vitesse du barycentre  $G$ .

On voit que  $v_x$  est quasi-constante (faible pente) et  $v_x \simeq v_{x0} = 3,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

De même,  $v_y$  est bien décroissante de façon linéaire. On peut identifier  $v_{y0}$  et  $g$  à l'aide des résultats de la régression linéaire :  $v_{y0} = 6,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $g = 9,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

En intégrant une seconde fois par rapport au temps et en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t & \text{selon } (\vec{u}_x) \\ y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 & \text{selon } (\vec{u}_y) \end{cases}$$

Ce sont les **2 équations horaires du mouvement**.

□ **Quelle est l'équation de la trajectoire du ballon ?**

#### Définition : Équation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire d'un point est l'équation reliant ses paramètres de position, sans faire intervenir le temps.

En éliminant le temps entre les deux équations horaires, nous obtenons l'équation de la trajectoire.

De l'expression de  $x(t)$  on déduit :  $t = \frac{x - x_0}{v_{x0}}$ , que l'on reporte dans celle de  $y(t)$  :

$$y = -\frac{g}{2v_{x0}^2} (x - x_0)^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} (x - x_0) + y_0 = -\frac{g}{2v_{x0}^2} x^2 + \left( \frac{g}{v_{x0}^2} x_0 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \right) x + \left( y_0 - \frac{g}{2v_{x0}^2} x_0^2 - \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x_0 \right)$$

Cette **équation cartésienne** est celle d'une **parabole**. En prenant  $x_0 = 6,1 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ ,  $y_0 = 2,3 \text{ m}$ ,  $v_{x0} = 3,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_{y0} = 6,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , nous avons pu vérifier que cette parabole se superpose correctement à la trajectoire expérimentale (figure 11.1). Le modèle est donc satisfaisant.

Nous venons de voir sur l'exemple précédent que la loi de la quantité de mouvement (deuxième loi de Newton) permet de faire l'étude du mouvement du centre de masse d'un système.

#### Méthode 11.1 : Étude d'un mouvement à l'aide de la deuxième loi de Newton

- Choisir le référentiel (galiléen) d'étude.
- Choisir un repère adapté au problème.
- Réaliser un bilan des forces appliquées.
- Appliquer la loi de la quantité de mouvement pour obtenir l'équation du mouvement.
- Projeter l'équation du mouvement sur les vecteurs de base.
- Déterminer les équations horaires du mouvement par résolution des équations différentielles obtenues, en tenant compte des conditions initiales.
- Déterminer l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires.

➔ Exercices (11.1) (11.2)



La loi de la quantité de mouvement fournit une équation différentielle du deuxième ordre. Pour en déduire l'équation horaire, deux conditions initiales sont nécessaires, l'une portant sur la position, l'autre sur la vitesse.

Passons maintenant à l'étude du mouvement du centre de masse  $G$  du volant de badminton.



□ Peut-on reprendre la modélisation précédente ?

Si le modèle précédent rend bien compte du mouvement du centre de masse du ballon de basket, ce n'est pas le cas pour celui du centre de masse du volant de badminton. En effet la figure 11.4 montre que sa trajectoire n'est visiblement pas une parabole. De plus, si nous étudions expérimentalement  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  (voir figure 11.5), nous constatons que  $v_x$  n'est plus constante et que  $v_y$  ne décroît plus linéairement avec le temps.

Nous devons donc retoucher notre modèle en tenant compte d'une force supplémentaire, en plus du poids : la **force de frottement fluide de l'air**.

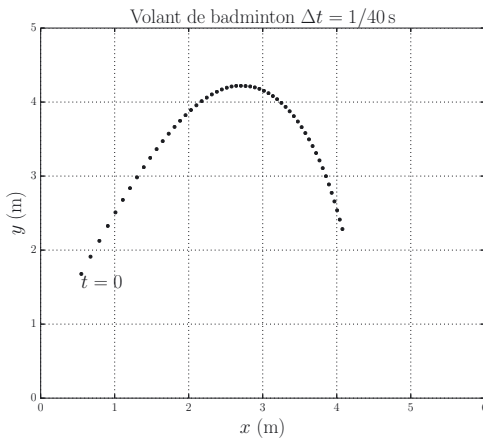


Figure 11.4. Trajectoire du volant.

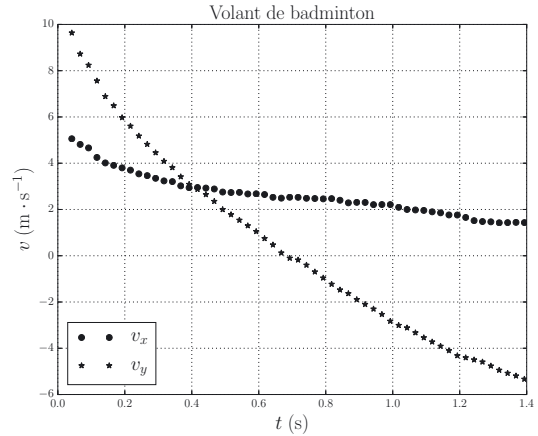


Figure 11.5. Composantes du vecteur vitesse du barycentre  $G$ .

**Définition : Force de frottement fluide**

La force de frottement fluide  $\vec{F}$  subie par un solide en mouvement dans un fluide est une force résistante qui s'oppose à ce mouvement : son sens est opposé à celui du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du centre de masse  $G$  du solide. Son expression, qui dépend du régime de l'écoulement du fluide autour du solide, est déterminée expérimentalement.

Nous retiendrons deux cas limites.

- Régime laminaire (vitesse faible, fluide assez visqueux) :  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ .
- Régime turbulent (vitesse élevée, fluide peu visqueux) :  $\vec{F} = -\beta \|\vec{v}\| \vec{v} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ .

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes positives appelées coefficients de frottement.



Le régime d'un écoulement dépend de nombreux paramètres : la vitesse relative du solide par rapport au fluide, la dimension du solide et son état de surface, la masse volumique et la viscosité du fluide, la température, la pression...

□ Quel est le modèle le mieux adapté à l'étude du mouvement du volant ?

Commençons par tester le modèle linéaire de force de frottement fluide :  $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ . La loi de la quantité de mouvement conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$(11.5) \quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \iff \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\vec{v} \iff \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

Cette équation différentielle (11.5), linéaire à second membre constant, fait apparaître une vitesse limite puisque, lorsque  $\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \rightarrow \vec{0}$ ,  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m\vec{g}}{\alpha}$ . On en déduit que le mouvement tend vers un mouvement rectiligne vertical uniforme et descendant.

Par projection de l'équation du mouvement (11.5) respectivement sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , nous obtenons :

$$\dot{v}_x = -\frac{\alpha}{m}v_x \quad \text{et} \quad \dot{v}_y = -\frac{\alpha}{m}v_y - g$$

Puis par intégration, compte tenu des conditions initiales  $v_x(0) = v_{x0}$  et  $v_y(0) = v_{y0}$  :

$$v_x = v_{x0} \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) \quad \text{et} \quad v_y = \left(v_{y0} + \frac{mg}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right) - \frac{mg}{\alpha}$$

En ajustant à la main la valeur de  $\alpha$ , nous tentons de rapprocher au mieux les courbes issues de cette modélisation de celles issues de l'expérience. Notre meilleur résultat est présenté figure 11.6.

Testons maintenant le modèle quadratique de frottement fluide :  $\vec{F} = -\beta\|\vec{v}\|\vec{v}$ .

La loi de la quantité de mouvement conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$(11.6) \quad m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \iff \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{g} - \frac{\beta}{m}\|\vec{v}\|\vec{v}$$

Cette équation différentielle (11.6) fait également apparaître une vitesse limite  $\vec{v}_{\text{lim}} = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}}\vec{u}_y$  et donc comme précédemment un mouvement limite rectiligne vertical uniforme et descendant.

Par projection de l'équation du mouvement (11.6) respectivement sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , nous obtenons :

$$\dot{v}_x = -\frac{\beta}{m}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)v_x \quad \text{et} \quad \dot{v}_y = -\frac{\beta}{m}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)v_y - g$$

La résolution analytique de ce système d'équations différentielles couplées non linéaires n'est pas possible. L'écriture d'un script Python utilisant la méthode d'Euler permet d'obtenir une solution numérique. En ajustant à la main la valeur de  $\beta$ , nous tentons à nouveau de rapprocher aux mieux les courbes issues de cette modélisation de celles issues de l'expérience. Notre meilleur résultat est présenté sur la figure 11.7.

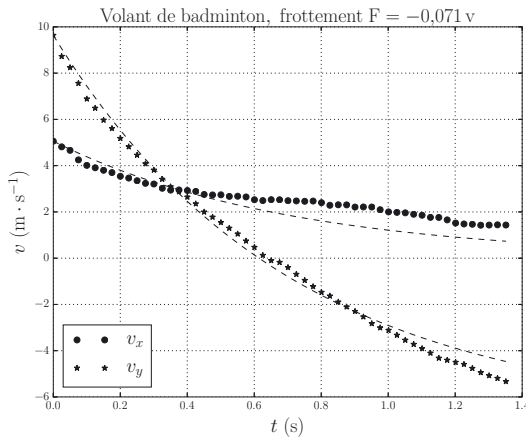


Figure 11.6. Comparaison théorie-expérience (1<sup>er</sup> cas).

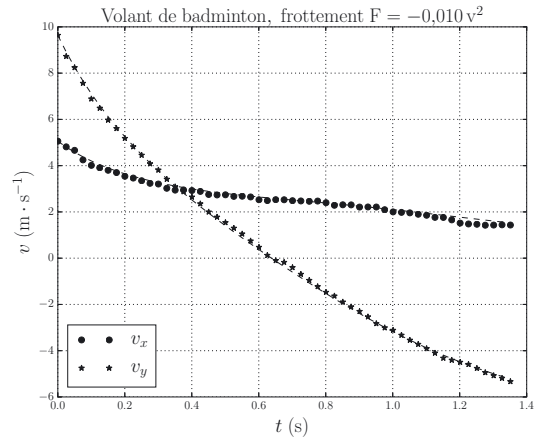


Figure 11.7. Comparaison théorie-expérience (2<sup>d</sup> cas).

En comparant les figures 11.6 et 11.7 nous constatons que le modèle quadratique  $\vec{F} = -\beta v \vec{v}$  est le mieux adapté à l'étude du mouvement du volant de badminton. Cela est lié à la forme du volant, qui entraîne de fortes turbulences, la matière de sa jupe, sa vitesse (plus de  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et la faible masse volumique de l'air. Par ailleurs, le mouvement asymptotique vertical n'est pas mis en évidence dans la mesure où le volant touche le sol avant que le régime permanent soit atteint.

### ■ 3 Étude d'un mouvement circulaire : le pendule simple

Nous désirons maintenant appliquer les méthodes précédentes à l'étude d'un mouvement circulaire. Pour cela nous allons développer l'exemple d'un pendule simple.

#### □ Qu'est-ce qu'un pendule simple ?

Un pendule simple (figure 11.8) est constitué d'un corps de masse  $m$ , accroché à une potence par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$ , et dont les dimensions sont suffisamment faibles devant  $l$  pour pouvoir être assimilé à un point matériel  $M$ . On considère qu'au cours du mouvement le fil reste tendu. La potence étant fixe par rapport au sol, l'étude du mouvement de  $M$  est faite dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

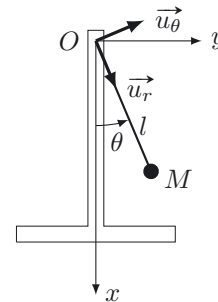


Figure 11.8. Pendule simple.



Le fil restant tendu le mouvement du point  $M$  est circulaire. La base la mieux adaptée à l'étude de son mouvement est la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ .

#### □ Quelle est l'équation horaire du mouvement du pendule simple ?

Dans notre modélisation, nous négligerons l'action de l'air (poussée d'Archimède, force de frottement). Le point matériel  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P}$  mais aussi à une force de la part du fil qui le retient. Cette force est ce qu'on appelle la tension du fil.

**Définition : La tension d'un fil**

Lorsqu'un solide est accroché à un fil tendu, il est soumis de la part de celui-ci, au niveau de son point d'accrochage  $M$ , à une force de tension  $\vec{T}$ . Cette force, dirigée parallèlement à l'axe du fil, du solide vers le fil, peut se mettre sous la forme :  $\vec{T} = -T \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  où  $T = \|\vec{T}\| > 0$ .



L'expression du module  $T$  de la tension d'un fil n'est *a priori* pas connue et doit être considérée comme une inconnue du problème.

Dans le cas de notre pendule, la tension du fil s'écrit dans la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  :  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ .

Nous appliquons la loi de la quantité de mouvement et nous obtenons l'équation du mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Le mouvement étant circulaire, il est aisé, en utilisant la méthode 10.3 du chapitre 10, de retrouver l'expression du vecteur accélération dans la base polaire et de projeter l'équation du mouvement sur  $\vec{u}_r$  et sur  $\vec{u}_\theta$  :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - T & \text{selon } (\vec{u}_r) \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) & \text{selon } (\vec{u}_\theta) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi un système de deux équations dont les inconnues sont  $T$  et  $\theta$ . La deuxième équation constitue une équation différentielle vérifiée par le paramètre  $\theta(t)$ . C'est l'équation du mouvement. En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , elle peut se mettre sous la forme :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$ .

C'est une équation différentielle **non linéaire** du deuxième ordre dont la résolution analytique n'est pas possible et qui nécessite une approche numérique. Toutefois si on se limite, dans le cadre de **l'approximation harmonique**, au cas des mouvements de faible amplitude (typiquement  $|\theta| < 15^\circ$ ), on peut assimiler  $\sin(\theta)$  à  $\theta$ . On obtient :

$$(11.7) \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Nous reconnaissons **l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique**, dont la résolution a déjà été présentée dans le chapitre 1. Sa solution générale est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

En prenant comme conditions initiales à  $t = 0$  :  $\theta(0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ , on obtient :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

C'est **l'équation horaire du mouvement**.



$\theta(t)$  étant connue,  $T$  peut ensuite se déduire de l'équation  $-ml\dot{\theta}^2 = mg \cos(\theta) - T$ .

## ■ 4 Étude d'un oscillateur harmonique – Portrait de phase

Revenons maintenant sur la notion d'oscillateur harmonique ayant fait l'objet du chapitre 1. Pour cela, nous considérons un solide de masse  $m$  pouvant glisser sans frottement sur un support horizontal en étant accroché à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ . Le solide étant de petite taille devant la longueur  $\ell$  du ressort, nous l'assimilerons à un point  $M$ . L'étude est menée dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, auquel on associe le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . Nous nous limiterons à l'étude d'un mouvement selon une direction matérialisée par l'axe  $(Ox)$ .

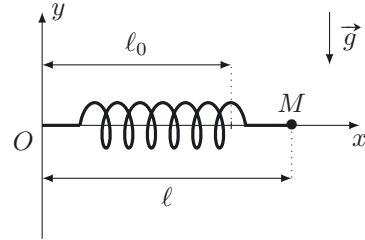


Figure 11.9. Oscillateur harmonique.

□ **Comment retrouver l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique ?**

Le solide est soumis à son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$ , à la réaction normale du support  $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$  et à la force élastique  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée au solide dans le référentiel  $\mathcal{R}$  conduit à :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}$ .

En projection sur  $(Oy)$  :  $R_n = mg$ . La réaction normale du support compense le poids. En projection sur  $(Ox)$  :  $ma_x = -k(\ell - \ell_0)$ , avec  $\ell = x$  et  $a_x = \ddot{x}$ . Nous en déduisons :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique avec second membre constant, de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  et dont la position d'équilibre est définie par  $x_{eq} = \ell_0$  :  $\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2\ell_0$ .

Le changement de variable  $X = x - x_{eq} = x - \ell_0$ , qui revient à prendre l'origine au niveau de la position d'équilibre, nous permet de retrouver l'équation homogène de l'oscillateur harmonique :

$$(11.8) \quad \ddot{X} + \omega_0^2X = 0$$

Revenons, dans le cadre de cet exemple sur une notion introduite dans le chapitre 6, celle du **portrait de phase**.

### Définition : Portrait de phase

$X(t)$  étant la grandeur étudiée et  $\dot{X}(t)$  sa dérivée par rapport au temps, le plan  $(X, \dot{X})$  constitue son **plan de phase**. Une courbe représentant  $\dot{X}$  en fonction de  $X$  pour un couple  $(X(0), \dot{X}(0))$  de conditions initiales donné est une **trajectoire de phase**. Un ensemble de trajectoires de phase correspondant à des conditions initiales différentes constitue un **portrait de phase** du système étudié.

□ **Quelle est l'équation d'une trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique ?**

En multipliant l'équation 11.8 par  $\dot{X}$ , nous obtenons :  $\dot{X}\ddot{X} + \omega_0^2X\dot{X} = 0$ .

En remarquant que  $\dot{X}\ddot{X} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{X}^2)}{dt}$  et que  $X\dot{X} = \frac{1}{2} \frac{d(X^2)}{dt}$ , nous pouvons réécrire cette équation sous la forme :  $\frac{1}{2} \frac{d(\dot{X}^2)}{dt} + \omega_0^2 \frac{1}{2} \frac{d(X^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{X}^2 + \omega_0^2X^2) = 0$ . Nous en déduisons l'équation

d'une trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique :

$$(11.9) \quad \dot{X}^2 + \omega_0^2 X^2 = \omega_0^2 a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{X}^2}{\omega_0^2 a^2} + \frac{X^2}{a^2} = 1$$

où  $a$  est une constante positive dépendant des conditions initiales :  $\omega_0^2 a = \dot{X}^2(0) + \omega_0^2 X^2(0)$ .

□ **Que dire de l'allure d'une trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique ?**

L'équation 11.9 est l'équation cartésienne d'une ellipse, de demi-axe  $a$  selon l'axe des  $X$  et de demi-axe  $\omega_0 a$  selon l'axe des  $\dot{X}$ .

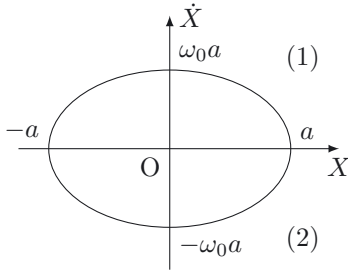


Figure 11.10. Trajectoire de phase.

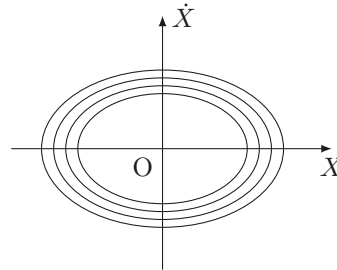


Figure 11.11. Portrait de phase.

La figure 11.10 représente une trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique.

- Elle coupe l'axe des abscisses en  $X = \pm a$  lorsque  $\dot{X} = 0$  et celui des ordonnées en  $\dot{X} = \pm \omega_0 a$  lorsque  $X = 0$ .
- Elle se parcourt de gauche à droite dans la partie supérieure (1), dans laquelle  $\dot{X} > 0$  ( $X$  croît) et de droite à gauche dans la partie inférieure (2) dans laquelle  $\dot{X} < 0$  ( $X$  décroît).
- Elle est **fermée** et **tourne autour du point représentant l'état d'équilibre de l'oscillateur** ( $X_{eq} = 0$  et  $\dot{X} = 0$ ).

La figure 11.11 représente un portrait de phase de l'oscillateur harmonique sur lequel sont superposées des trajectoires de phase correspondant à des conditions initiales différentes.



Les allures des trajectoires de phase dépendent de l'équation différentielle satisfaite par la grandeur étudiée et peuvent être très différentes de celles de l'oscillateur harmonique. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux chapitres 7 et 12 dans lesquels sont présentés d'autres portraits de phase.

## Interro de cours

1. Lors d'un championnat de patinage artistique un couple de danseurs effectue une figure pendant laquelle le patineur, accroupi, tourne rapidement sur lui-même en tenant sa partenaire, allongée sur la glace, à bout de bras. Le centre de gravité de celle-ci décrit alors un cercle dont les patins de son partenaire occupent le centre. Les frottements peuvent être négligés et le référentiel de la patinoire considéré galiléen. Malheureusement, le danseur lâche malencontreusement sa partenaire. Le mouvement du centre de gravité de celle-ci :
  - (a) reste circulaire ;
  - (b) devient rectiligne uniforme ;
  - (c) devient parabolique.
  
2. Le jeune Elio, qui ne se sépare jamais de son doudou, se rend en TGV à la capitale en compagnie de son grand-père. Sur le quai de la gare il lâche son doudou qui tombe à ses pieds. Son grand-père le ramasse et le lui redonne. Pendant le voyage, alors que le train roule à grande vitesse (constante) sur une portion rectiligne, Elio lâche à nouveau son doudou. Celui-ci tombe-t-il :
  - (a) En avant de l'enfant ?
  - (b) En arrière de l'enfant ?
  - (c) Aux pieds de l'enfant ?
  
3. Un point matériel  $M$  suit un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen. Parmi les schémas proposés représentant les trois forces subies par  $M$ , quel est le seul possible ?

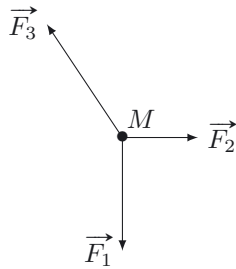


schéma (a)

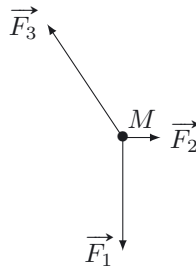


schéma (b)

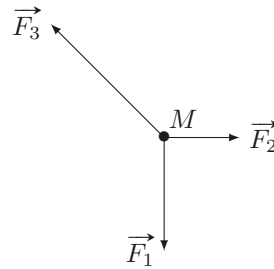


schéma (c)

4. Un point matériel  $M$  glisse de plus en plus vite le long de la pente. Parmi les schémas proposés, quel est le seul possible ?

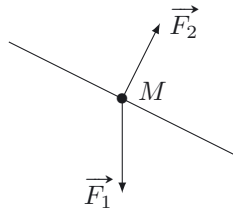


schéma (a)

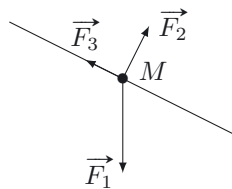


schéma (b)

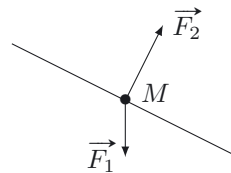
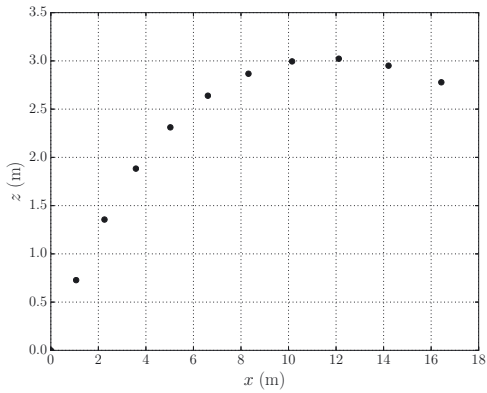
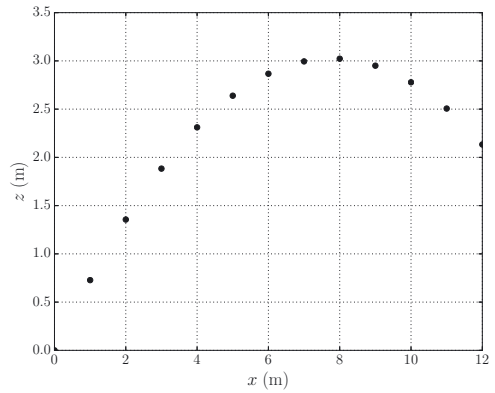


schéma (c)

5. Quelle trajectoire correspond à un lancer d'un projectile en absence de frottement ?



trajectoire (a)



trajectoire (b)

6. L'équation  $R_N - mg = 0$  (où  $R_N$  est la norme de la réaction normale du support) est valable :
- (a) dès que le support est horizontal ;
  - (b) quand le support est horizontal et en absence de frottement ;
  - (c) quand le support est horizontal et qu'il n'y a pas d'autres forces ou composantes de forces verticales que le poids et la réaction normale du support.

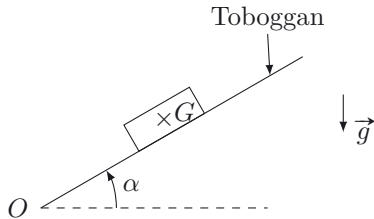


## Exercices

### Exercice 11.1 Une pelle sur un toboggan

➔ Méthode (11.1)

Au jardin d'enfant, le jeune Elio fait glisser sa pelle de masse  $m = 200 \text{ g}$  sur un toboggan en lui communiquant une vitesse initiale  $v_0 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , dans le sens de la montée.



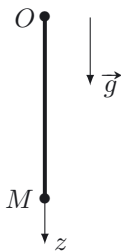
Le mouvement de la pelle est un mouvement de translation rectiligne ascendant sur le plan incliné du toboggan. Le centre de masse  $G$  de la pelle se trouve initialement en  $O$ . La pente du toboggan est définie par l'angle  $\alpha = 20^\circ$ . Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  est supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur vaut  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Nous négligeons tous les frottements.

1. Choisir un repère adapté au problème.
2. Faire un bilan des forces appliquées à la pelle.
3. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la pelle dans  $\mathcal{R}$ .
4. Projeter l'équation du mouvement sur les vecteurs de base.
5. Déterminer l'équation horaire du mouvement.
6. En déduire la distance maximale parcourue par  $G$  dans le sens de la montée.

### Exercice 11.2 La vie ne tient qu'à un élastique

➔ Méthode (11.1)

Un alpiniste chute au cours d'une ascension particulièrement difficile. Il est alors suspendu dans le vide, relié à un point fixe  $O$  de cote  $z_O = 0$  par une corde dite dynamique que nous supposons de masse négligeable.



L'élasticité de la corde est telle qu'elle peut être assimilée à un ressort de raideur  $k = 2,1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $l_0 = 10 \text{ m}$  lorsqu'elle est tendue. La corde est sans influence lorsqu'elle n'est pas tendue.

L'alpiniste assimilé à un point  $M$  de masse  $m = 70 \text{ kg}$  est repéré par sa cote  $z(t)$  (son mouvement éventuel est vertical).

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et nous négligeons tout frottement.

1. Faire un bilan des forces exercées sur l'alpiniste.
2. Déterminer la longueur  $l_e$  de la corde à l'équilibre. La calculer.
3. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $z(t)$ . La résoudre avec  $z(0) = l_e + a$  et  $\dot{z}(0) = 0$ . Nous supposons ici que la corde reste tendue et peut donc être assimilée à un ressort.
4. Calculer la période des oscillations. Dépend-elle de  $a$  ?

**Exercice 11.3** Là-haut

Dans le film d'animation « Là-haut », Carl attache des milliers de ballons à sa maison pour s'envoler vers les régions sauvages de l'Amérique du Sud.

Nous cherchons à estimer le nombre minimal  $N$  de ballons gonflés à l'hélium qui seraient nécessaires pour soulever un petit mobil-home de 3 tonnes. Nous négligeons la masse des ballons vides et des ficelles qui les attachent au mobil-home. Les ballons gonflés sont assimilés à des sphères de rayon  $R = 80$  cm. Les masses volumiques de l'hélium et de l'air valent  $\mu_{\text{He}} = 0,17 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\mu_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . L'accélération  $g$  de la pesanteur vaut  $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire les bilans des forces s'exerçant sur le mobil-home et sur l'un des ballons.
2. Estimer la valeur de  $N$ .

**Exercice 11.4** La force tu trouveras

Lors d'une séance d'entraînement sur la planète Dagobah, le jeune Luke Skywalker est soumis à la force  $\vec{F}$  par maître Yoda. Nous nous intéressons au mouvement du centre de masse  $G$  de Luke dans le référentiel Dagobesque supposé galiléen. Ses coordonnées cartésiennes dépendent du temps selon les lois suivantes, dans lesquelles  $x_0$ ,  $y_0$  et  $\omega$  sont des constantes :

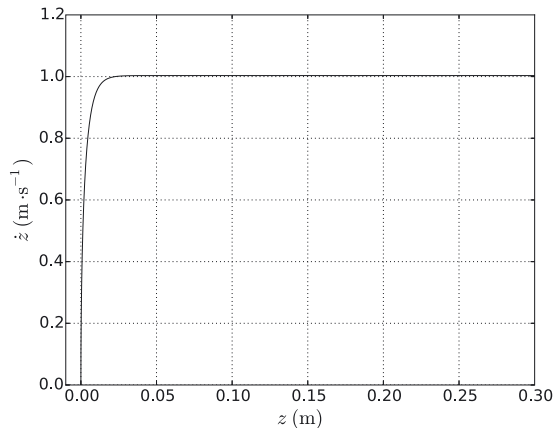
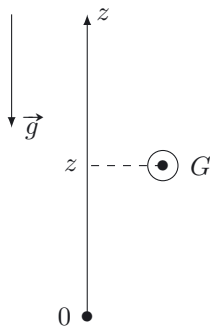
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = y_0 \sin(\omega t) \quad ; \quad z(t) = -g \frac{t^2}{2}$$

Le champ de pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  et Luke n'est soumis qu'à son poids et à la force  $\vec{F}$ .

1. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au jeune Luke.
2. Trouver la force. Montrer qu'elle ne manque pas de ressort.

**Exercice 11.5** La balle de bain

La petite Paloma joue dans son bain avec une balle de tennis de table de masse  $m = 2,7$  g et de diamètre  $d = 40$  mm. Elle s'amuse à placer la balle au fond de la baignoire et à la lâcher sans vitesse initiale. La balle remonte alors à la surface.

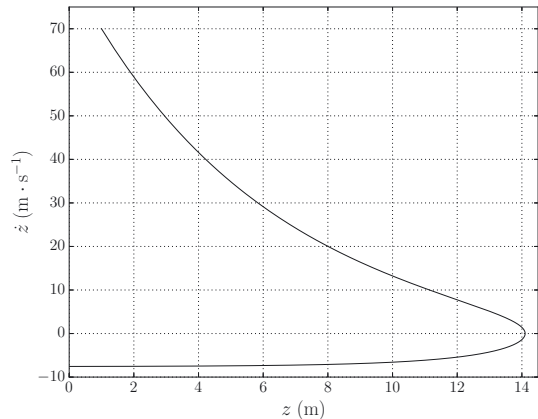
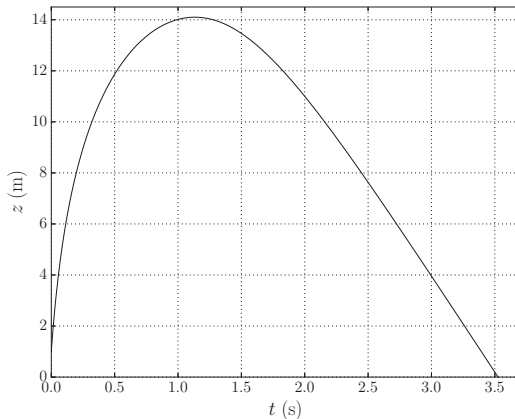


Le centre de masse  $G$  de la balle est repéré par sa cote  $z$ , initialement nulle. Lorsque  $z = 30$  cm la partie supérieure de la balle affleure la surface du bain. La balle subit une force de frottement fluide de norme  $F_f = hv^2$  proportionnelle au carré de sa vitesse  $v$  et opposée à son déplacement vertical. La trajectoire de la balle est dessinée dans l'espace des phases sur la figure ci-dessus. Nous prendrons  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $h = 0,30 \text{ USI}$  et  $\mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  (masse volumique de l'eau).

1. Faire un bilan des forces s'exerçant sur la balle lors de sa remontée vers la surface. Quelle est l'unité de  $h$  ?
2. Appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
3. Exprimer et calculer l'accélération initiale de la balle.
4. Quelle serait la vitesse de la balle pour  $z = 30$  cm s'il n'y avait pas de force de frottement ?
5. Commenter la trajectoire de phase puis évaluer la durée de la remontée de la balle vers la surface en précisant les éventuelles approximations effectuées.

### Exercice 11.6 L'as du volant

Une championne de badminton frappe dans un volant avec sa raquette, lui conférant ainsi une vitesse initiale verticale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ . La courbe représentant la cote  $z$  du volant en fonction du temps est fournie ci-dessous ainsi que la trajectoire de phase.

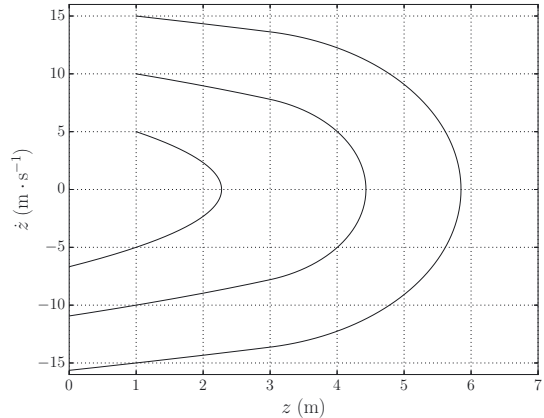
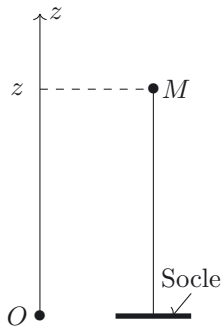


Le champ de pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{u}_z$  avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  et le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen. La masse du volant est  $m = 5,0 \text{ g}$ .

1. Déterminer graphiquement les conditions initiales du mouvement du volant.
2. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au volant en supposant qu'il ne subit aucune force de frottement.
3. Dans cette hypothèse, quelle serait la hauteur atteinte par le volant ? Le résultat est-il compatible avec les données fournies ?
4. Nous modélisons la résistance de l'air par une force de frottement fluide de module  $F_t = hm\dot{z}^2$ , avec  $h > 0$ . Déterminer numériquement la valeur de  $h$  compatible avec les tracés proposés.
5. Nous nous intéressons au retour du volant depuis sa position culminante. Par une analyse en ordre de grandeur de la loi de la quantité de mouvement, estimer le temps  $\tau$  que met le volant à atteindre sa vitesse limite. Vérifier graphiquement.

**Exercice 11.7 Jeu de Jokari**

Le Jokari est constitué d'une balle en caoutchouc  $M$ , de masse  $m = 50$  g, attachée à un socle par un élastique. On frappe la balle à l'instant initial avec une raquette en bois et on considère dans cet exercice des déplacements uniquement verticaux. La balle  $M$  est supposée ponctuelle; elle est repérée par sa cote  $z$ .



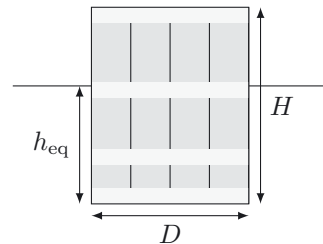
La masse de l'élastique est négligée et nous supposons qu'il peut être modélisé par un ressort de raideur  $k = 0,80 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $l_0 = 3,0$  m lorsqu'il est étiré, c'est-à-dire lorsque sa longueur est supérieure à  $l_0$ . Dans le cas contraire, il n'exerce aucune force sur la balle. Les frottements sont négligés et nous prenons pour valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Trois trajectoires de phase ont été tracées pour trois vitesses initiales différentes de la balle.

1. À l'aide du portrait de phase, déterminer dans chaque cas les conditions initiales et la hauteur maximale atteinte. Quel est le sens de parcours des trajectoires dans l'espace des phases ?
2. La montée de la balle vers son point culminant se fait en deux étapes. Pour  $z < l_0$ , l'élastique n'est pas étiré; pour  $z \geq l_0$ , il se comporte comme un ressort. En utilisant la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen, déterminer la hauteur maximale atteinte avec les conditions initiales  $z(0) = 1,0$  m et  $\dot{z}(0) = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 11.8 Le tonneau de Jack Sparrow**

Victime d'une mutinerie, le pirate Jack Sparrow est abandonné en pleine mer, flottant dans un tonneau de rhum.

Le tonneau est assimilé à un cylindre de hauteur  $H = 90$  cm et de diamètre  $D = 70$  cm. Sa masse est  $m_t = 45$  kg. La masse de Jack Sparrow est  $m_j = 80$  kg. À l'équilibre, le tonneau est immergé d'une hauteur  $h_{\text{eq}}$  dans l'eau de mer de masse volumique  $\mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , comme indiqué sur la figure ci-contre où Jack Sparrow n'a pas été représenté. L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

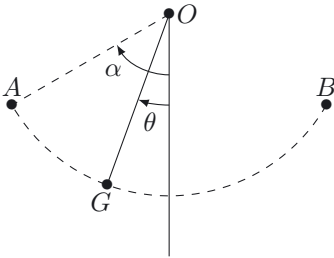


1. Déterminer  $h_{\text{eq}}$ .

2. Heurté par une baleine à bosse, le tonneau de Jack est soulevé de  $a = 10$  cm. Après le départ du cétacé, le tonneau se met à osciller dans un mouvement que nous supposons uniquement vertical. On repère la position du centre de masse  $G$  de l'ensemble (Tonneau + Jack) à l'aide d'un axe vertical ascendant dont l'origine est confondue avec la position d'équilibre de  $G$ . En négligeant tout frottement, déterminer la période des oscillations. Dépend-elle de  $a$  ?

### Exercice 11.9 Tarzan et Jane

La liane a été popularisée au cinéma comme moyen de locomotion très apprécié de Tarzan. Afin de retrouver Jane, celui-ci saisit l'extrémité d'une liane et se laisse penduler jusqu'à sa bien-aimée.



La position du centre de masse  $G$  de Tarzan est repérée par l'angle  $\theta$ . Sa position initiale est notée  $A$  et est repérée par l'angle  $\alpha = 30^\circ$ . Jane se situe au point  $B$  défini par  $\theta_B = -\alpha$ . La masse de Tarzan, peau de bête comprise, est  $m = 80$  kg, celle de Jane est  $m' = 50$  kg. La longueur de la liane est  $OG = L = 10$  m et sa masse est négligée.

Nous négligeons tout frottement et prenons pour valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

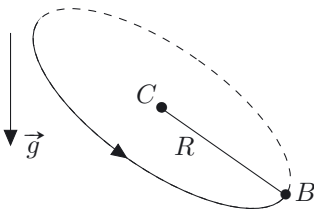
La trajectoire prévue de  $G$  est dessinée en pointillés.

La liane utilisée par Tarzan est usée et ne pourra résister à des tensions supérieures à  $2,0$  kN. Le but de cet exercice est de déterminer si Tarzan pourra retrouver Jane puis la ramener en  $A$ .

1. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à Tarzan dans le référentiel terrestre.
2. Projeter la loi sur une base polaire permettant d'obtenir deux relations, l'une correspondant à l'équation du mouvement de Tarzan et l'autre renseignant sur la tension  $T$  de la corde.
3. Intégrer l'équation du mouvement après l'avoir multipliée par  $\dot{\theta}$  pour obtenir une relation liant  $\dot{\theta}^2$ ,  $\theta$  et les données de l'énoncé.
4. En déduire une expression de la tension de la corde en fonction de  $\theta$  et des données de l'exercice. Conclure.

### Exercice 11.10 Lancer du marteau

Le lancer du marteau est une discipline de l'athlétisme qui consiste à lancer le plus loin possible un boulet de masse  $m$ . Le boulet est fixé à un câble en acier relié à une poignée, le tout de longueur  $L$ . Dans la catégorie masculine,  $m = 7,3$  kg et  $L = 1,2$  m.



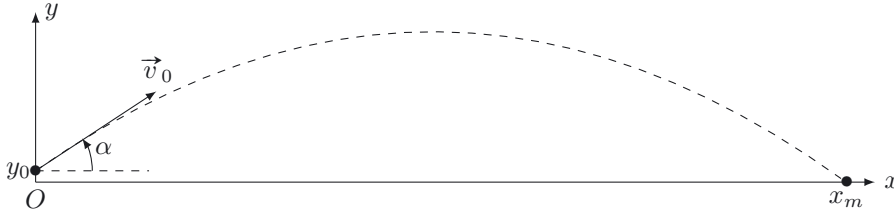
L'athlète fait tourner le boulet  $B$  plusieurs fois autour de sa tête afin d'augmenter sa vitesse, son bras restant toujours tendu. Nous nous intéressons au dernier tour avant le lancement, dans lequel nous supposons le mouvement du boulet circulaire et uniforme dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le rayon du cercle décrit est  $R$  et la vitesse du boulet  $v_0 = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Les forces de frottement sont négligées et l'accélération  $g$  de la pesanteur vaut  $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

1. Proposer une valeur pour  $R$ .
2. Comparer l'accélération du boulet et l'accélération de la pesanteur. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer la tension du câble.

### Exercice 11.11 Lancer du marteau (suite)

Nous nous intéressons maintenant au mouvement du boulet  $B$  après le lâcher du marteau par l'athlète, cet instant étant pris comme origine des temps ( $t = 0$ ).

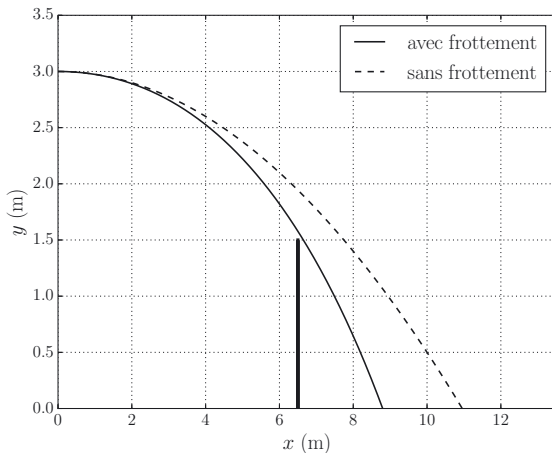


La trajectoire de  $B$  se trouve dans le plan  $(O, x, y)$  où l'axe  $Oy$  est vertical et  $B$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x_B, y_B)$ . Le boulet est lâché en  $(x_B(0) = 0, y_B(0) = y_0 = 3,0 \text{ m})$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, de norme  $v_0 = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Nous négligeons tous les frottements et donnons à l'accélération de la pesanteur la valeur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Déterminer l'équation de la trajectoire de  $B$ .
- Quelle est la valeur de l'abscisse  $x_m$  de la marque faite au sol par le boulet si  $\alpha = 35^\circ$  ?
- La vitesse  $v_0$  étant fixée, le paramètre  $\alpha$  peut être modifié pour optimiser le lancer. Trouver l'équation de la courbe séparant les points pouvant être atteints par le boulet de ceux qui ne le seront pas quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . En déduire, pour cette valeur de  $v_0$ , la meilleure marque que l'athlète peut espérer. On rappelle que  $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ .

### Exercice 11.12 L'amorti

Un joueur de badminton réalise un amorti du fond du court, communiquant ainsi au volant de masse  $m = 5,0 \text{ g}$  une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  avec  $v_0 = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .



Le centre de masse  $G$  du volant est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $x(t)$  et  $y(t)$ . Initialement,  $x(0) = 0$  et  $y(0) = 3,0 \text{ m}$ . Le filet se trouve à l'abscisse  $x_f = 6,5 \text{ m}$ , sa hauteur est de  $1,5 \text{ m}$ . La figure ci-contre montre la trajectoire du volant (en trait plein) et celle qu'il aurait en l'absence de frottement fluide (traits pointillés).

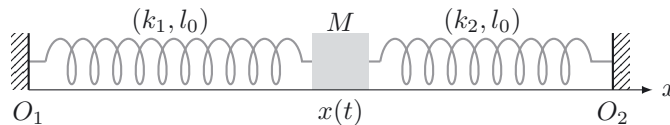
Nous supposons que la force de frottement fluide subie par le volant est du type  $\vec{F}_t = -\lambda \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse du volant et  $\lambda = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  est supposé galiléen et l'accélération de la pesanteur vaut  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire un bilan des forces appliquées au volant.
2. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au volant dans  $\mathcal{R}$ .
3. En projetant l'équation du mouvement sur les vecteurs de base, établir les équations différentielles satisfaites par les composantes  $v_x$  et  $v_y$  du vecteur vitesse suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .
4. Déterminer les expressions de  $v_x$  et  $v_y$  en fonction du temps. On fera apparaître une constante de temps  $\tau = \frac{m}{\lambda}$  que l'on calculera. Montrer que la vitesse du volant tend vers une valeur limite que l'on précisera. Est-elle atteinte avant que le volant touche le sol ?
5. Déterminer la loi horaire  $x(t)$  puis l'abscisse maximale qui pourrait être atteinte par le volant.
6. Déterminer de même la loi horaire  $y(t)$ .
7. En utilisant la trajectoire du volant, déduire à quel instant  $t_0$  le volant touche le sol. Conclure quant à l'efficacité de ce coup. Les frottements avantagent-ils le joueur ou son adversaire ?
8. Le modèle de frottement proposé n'est pas le plus adapté à l'étude de la trajectoire du volant. Quel autre modèle pouvez-vous proposer ?

### Exercice 11.13 Un oscillateur qui ne manque pas de ressorts

Deux ressorts de masses négligeables, de mêmes longueurs à vide  $\ell_0$  et de raideurs  $k_1$  et  $k_2$  sont accrochés à un support fixe en  $O_1$  et  $O_2$  (voir la figure). L'autre extrémité de chaque ressort est fixée à un bloc de masse  $m$  posé sur un support horizontal. La longueur  $L = O_1O_2$  étant supérieure à  $2\ell_0$ , les ressorts sont alors étirés. Les déplacements du bloc assimilé à un point  $M$  se font selon l'axe horizontal  $O_1x$  et nous pourrions négliger les frottements.



Le point  $M$  est repéré par son abscisse  $x(t)$  à l'instant  $t$ , l'origine de l'axe étant prise en  $O_1$ .

1. Exprimer les forces exercées sur  $M$  par les deux ressorts.
2. Déterminer la position  $x_0$  de  $M$  à l'équilibre. Discuter des cas limites  $k_1 = k_2$  et  $k_1 \gg k_2$ .
3. Montrer que l'association des deux ressorts est équivalente à un ressort dont on précisera la raideur  $k$ .
4. On pose  $X = x - x_0$ . Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $X$  et la résoudre avec les conditions initiales  $X(0) = 0$  et  $\dot{X}(0) = v_0$ .

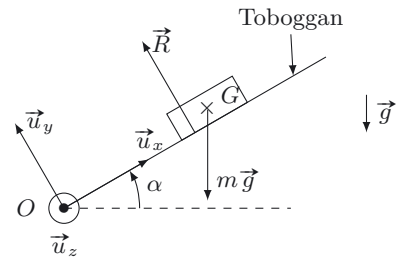
# Corrections

## Interro de cours

1. Le référentiel de la patinoire est galiléen et la danseuse pseudo isolée (somme des forces appliquées nulle en absence de frottement). Conformément à la première loi de Newton (principe d'inertie,) le mouvement de son centre de gravité devient rectiligne uniforme. Réponse **(b)**.
2. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  du train est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . Il peut, tout comme ce dernier, être considéré galiléen. La loi de la quantité de mouvement s'applique donc au doudou d'Elio de la même façon dans les deux référentiels. Les conditions initiales (vitesse nulle) étant les mêmes, les mouvements du doudou sont identiques dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Réponse **(c)**.
3. Un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel galiléen n'est possible que si  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ . Réponse **(a)**.
4. Ce mouvement rectiligne et accéléré n'est possible que si  $m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$  avec le vecteur accélération  $\vec{a}$  dans la direction et le sens de la pente. Réponse **(a)**.
5. La trajectoire d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme en absence de frottement doit faire apparaître une accélération verticale descendante mais aucune accélération horizontale. Ainsi, les points doivent être régulièrement espacés horizontalement. Réponse **(b)**.
6. Quand le support en contact avec le point matériel  $M$  est horizontal, il n'y a pas d'accélération verticale donc la somme des composantes verticales des forces doit être nulle. Réponse **(c)**.

## Exercice 11.1

1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen lié au sol, nous choisissons le repère cartésien  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  comme indiqué sur le schéma ci-contre.
2. La pelle est soumise à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  et à la réaction du support plan  $\vec{R} = N\vec{u}_y$  normale à ce dernier car les frottements sont négligés (cf. schéma).
3. L'accélération de la pelle dans  $\mathcal{R}$  est  $\vec{a}(t) = \ddot{x}_G(t)\vec{u}_x$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à la pelle dans  $\mathcal{R}$  s'écrit alors :  $m\vec{a} = \ddot{x}_G\vec{u}_x = \vec{P} + N\vec{u}_y$ .
4. La projection de cette équation sur  $\vec{u}_y$  donne :  
 $0 = N - mg \cos(\alpha)$ .  
 La projection de cette équation sur  $\vec{u}_x$  donne :  
 $m\ddot{x}_G = -mg \sin(\alpha)$ .



5. On intègre une première fois la seconde équation en tenant compte de la condition initiale  $\dot{x}_G(0) = v_0$  :  
 $\dot{x}_G(t) = -g \sin(\alpha)t + v_0$ . En intégrant une seconde fois en tenant compte de  $x_G(0) = 0$ , il vient :  
 $x_G(t) = -\frac{g}{2} \sin(\alpha)t^2 + v_0t$ .
6. Le sommet de la montée est atteint à la date  $t_f$  pour laquelle  $\dot{x}_G(t_f) = 0$ , soit  $t_f = \frac{v_0}{g \sin(\alpha)}$ . La distance maximale parcourue par  $G$  correspond à :  $x_G(t_f) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin(\alpha)}$ . Numériquement :  $x_G(t_f) = 60 \text{ cm}$ .



**Exercice 11.2**

L'étude est menée dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  lié au sol, supposé galiléen. Le mouvement de l'alpiniste étant vertical on utilise un repère cartésien dont un des axes, l'axe  $Oz$ , est vertical.

1. L'alpiniste est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_z$  et à la tension de la corde  $\vec{T} = -k(z(t) - l_0)\vec{u}_z$ .
2. À l'équilibre ( $z_e = l_e$ ) la loi de la quantité de mouvement conduit à :  $mg\vec{u}_z - k(l_e - l_0)\vec{u}_z = \vec{0}$ . La projection sur  $\vec{u}_z$  fournit :  $mg - k(l_e - l_0) = 0$ , d'où :  $l_e = l_0 + \frac{mg}{k} = 10,3\text{ m} > 10\text{ m}$ .
3. La loi de la quantité de mouvement appliquée à l'alpiniste conduit à :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ , soit par projection sur  $\vec{u}_z$  :  $m\ddot{z} = mg - k(z - l_0)$ . D'où :  $m\ddot{z} = mg - k(z - l_e + l_e - l_0)$ . En utilisant la relation obtenue dans la question 2, cette équation se réécrit :  $m\ddot{z} = k(z - l_e)$  et finalement :  $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}l_e$ .

La résolution de cette équation s'effectue par étapes.

— **Résolution de l'équation homogène**  $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$ . On reconnaît l'équation d'un oscillateur

harmonique de pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  dont la solution générale est  $z_H(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .

— Détermination d'une **solution particulière de l'équation avec second membre** :  $z_p = l_e$ .

— Détermination de la **solution générale de l'équation complète** :  $z(t) = z_H(t) + z_p(t)$ .

— **Calcul des constantes d'intégration**  $A$  et  $B$ , compte tenu des **conditions initiales** :

$$z(0) = A + l_e = a + l_e, \text{ donc } A = a \text{ et } \dot{z}(0) = B\omega = 0, \text{ donc } B = 0.$$

L'équation horaire du mouvement est donc  $z(t) = a \cos(\omega t) + l_e$ .

4. La période des oscillations est  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1,1\text{ s}$ . Elle est indépendante de  $a$ .

**Exercice 11.3**

1. Le mobil-home, posé au sol, est soumis aux  $N$  forces de tension  $\vec{T} = T\vec{u}_z$  verticales ascendantes des  $N$  fils tendus le reliant aux ballons, à son poids  $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$ , à la poussée d'Archimède verticale ascendante que nous négligerons devant son poids et à la réaction du sol verticale ascendante  $\vec{R} = R\vec{u}_z$ . Un ballon est quant à lui soumis à la tension du fil le reliant au mobil-home,  $\vec{T}' = -\vec{T} = -T\vec{u}_z$ , à son poids  $\vec{P}' = -\frac{4}{3}\pi R^3 \mu_{\text{He}}g\vec{u}_z$  et à la poussée d'Archimède  $\vec{F}'_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_{\text{air}}g\vec{u}_z$ .
2. Lorsque le mobil-home est en contact avec le sol, le système constitué des  $N$  ballons et du mobil-home est soumis aux forces extérieures suivantes :  $N\vec{F}'_a = N\frac{4}{3}\pi R^3 \mu_{\text{air}}g\vec{u}_z$ ,  $N\vec{P}' = N\frac{4}{3}\pi R^3 \mu_{\text{He}}g\vec{u}_z$ ,  $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$  et  $\vec{R} = R\vec{u}_z$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à ce système en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à :  $-Mg\vec{u}_z + N\frac{4}{3}\pi R^3(\mu_{\text{air}} - \mu_{\text{He}})g\vec{u}_z + R\vec{u}_z = \vec{0}$ .  
Nous en déduisons :  $R = Mg - N\frac{4}{3}\pi R^3(\mu_{\text{air}} - \mu_{\text{He}})g$ . Le contact avec le sol est rompu si  $R$  s'annule. Le nombre minimum de ballons nécessaires au décollage est donc le plus petit entier  $N$  pour lequel  $Mg \leq N\frac{4}{3}\pi R^3(\mu_{\text{air}} - \mu_{\text{He}})g$ , d'où :  $N \geq \frac{3M}{4\pi R^3(\mu_{\text{air}} - \mu_{\text{He}})} = 1237,9$ . Numériquement :  $N_{\text{min}} = 1238$ .

**Exercice 11.4**

1. Luke est soumis à la force  $\vec{F}$  et à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à Luke dans le référentiel Dagobesque galiléen s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{F} - mg\vec{u}_z$ .
2. On en déduit :  $\vec{F} = m\vec{a} + mg\vec{u}_z$  avec  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$ . On calcule  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  et  $\ddot{z}$  à partir des lois horaires. On obtient :  $\vec{a} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t)\vec{u}_x - \omega^2 y_0 \sin(\omega t)\vec{u}_y - g\vec{u}_z = -\omega^2 x\vec{u}_x - \omega^2 y\vec{u}_y - g\vec{u}_z$ . D'où  $\vec{F} = -m\omega^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$ , ce qui correspond à une force de rappel élastique dans le plan  $(x, y)$ ...

**Exercice 11.5**

- Les forces s'exerçant sur la balle sont : son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ , la poussée d'Archimède  $\vec{F}_a = \frac{\pi d^3}{6}\mu_e g\vec{u}_z$ , et la force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -hv^2\vec{u}_z$ .  
Par analyse dimensionnelle de  $F_f = hv^2$ , il vient  $[h]L^2T^{-2} = MLT^{-2}$ , soit  $[h] = ML^{-1}$ . Le coefficient  $h$  s'exprime donc en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- L'accélération de la balle dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  est  $\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}(t)\vec{e}_z$ . La projection sur l'axe  $Oz$  de la loi de la quantité de mouvement appliquée à la balle dans  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, conduit à :  
$$ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = \left( \frac{\pi d^3}{6}\mu_e - m \right) g - hv(t)^2.$$
- À l'instant initial  $v(0) = 0$ , d'où :  $a(0) = \left( \frac{\pi d^3}{6m}\mu_e - 1 \right) g = 1,1 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Sans frottement ( $h = 0$ ), l'accélération resterait égale à  $a(0)$  et l'équation différentielle du mouvement s'écrirait :  $\dot{v}(t) = a(0)$ . D'où, compte tenu des conditions initiales :  $v(t) = a(0)t$  et  $z(t) = \frac{1}{2}a(0)t^2$ . La surface serait atteinte à la date  $t_f = \sqrt{\frac{2z_f}{a(0)}}$  et la vitesse y serait  $v_f = \sqrt{2a(0)z_f} = 8,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Dans une première phase, pour  $0 \leq z < 2,5 \text{ cm}$ ,  $\dot{z}$  croît très rapidement avec la distance parcourue. Puis pour  $2,5 \text{ cm} \leq z < 30 \text{ cm}$  elle reste constante et égale à  $v_{\text{lim}} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
En analysant l'équation différentielle du mouvement, nous voyons que le régime limite ( $\frac{dv}{dt} = 0$ ) est atteint pour  $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{ma(0)}{h}} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il y a donc une bonne corrélation entre la vitesse calculée et celle déterminée par la trajectoire de phase.  
La vitesse parvenant à sa valeur limite sur une courte distance, on peut supposer que toute la montée se fait à la vitesse constante  $v_{\text{lim}}$ , ce qui revient à négliger la durée du régime transitoire. On obtient ainsi une estimation du temps de remontée :  $\Delta t = \frac{z_f}{v_{\text{lim}}} = 0,3 \text{ s}$ .

**Exercice 11.6**

- Au départ la vitesse du volant est positive. La trajectoire de phase est donc décrite du haut vers le bas et les conditions initiales correspondent au point le plus haut :  $z_0 = z(0) = 1,0 \text{ m}$  et  $v_0 = \dot{z}(0) = 70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- En absence de frottement le volant n'est soumis qu'à son poids. La loi de la quantité de mouvement appliquée au volant conduit à :  $m\vec{a} = m\vec{g}$ . Par projection sur  $\vec{u}_z$  on obtient :  $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$ . Cette équation s'intègre, compte tenu des conditions initiales, en  $\dot{z}(t) = -gt + v_0$  et  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$ .
- Au sommet de la trajectoire :  $t = t_m = \frac{v_0}{g}$  et  $z_{\text{max}} = z(t_m) = \frac{v_0^2}{2g} + z_0 = 2,5 \cdot 10^2 \text{ m}$ . Or on constate par analyse de la courbe  $z(t)$  que le volant ne monte qu'à 14 m. Il est donc être nécessaire de prendre en compte une force de frottement de l'air.
- La trajectoire de phase fait apparaître une vitesse limite  $v_{\text{lim}} = -7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  au cours de la descente. La vitesse étant alors vers le bas, la force de frottement est vers le haut et la loi de la quantité de mouvement projetée sur  $\vec{u}_z$  conduit à :  $\ddot{z} = -g + h\dot{z}^2$ . On en déduit :  $v_{\text{lim}}^2 = \frac{g}{h}$ , d'où  $h = \frac{g}{v_{\text{lim}}^2} = 0,17 \text{ m}^{-1}$ .
- Lors de la descente :  $\ddot{z} = -g + h\dot{z}^2$ . Avant que  $v_{\text{lim}}$  soit atteinte le terme  $-g$  est prépondérant dans le second membre. En négligeant le terme  $h\dot{z}^2$  :  $\ddot{z} \sim -g$  et  $v_{\text{lim}} \sim -g\tau$ . D'où  $\tau \sim -\frac{v_{\text{lim}}}{g} \sim \frac{1}{\sqrt{gh}} \approx 0,8 \text{ s}$ . C'est bien ce que suggère la courbe  $z(t)$  : le sommet de la trajectoire est atteint pour  $t = 1,2 \text{ s}$  et la vitesse limite (portion rectiligne décroissante) pour  $t \approx 2 \text{ s}$ . La durée entre ces deux instants vaut  $0,8 \text{ s}$ .

**Exercice 11.7**

- Les trois jeux de conditions initiales, en allant de gauche à droite pour les portraits de phase, sont :  $(z(0) = 1,0 \text{ m}; \dot{z}(0) = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ ,  $(z(0) = 1,0 \text{ m}; \dot{z}(0) = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$  et  $(z(0) = 1,0 \text{ m}; \dot{z}(0) = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})$ . Les trajectoires de phase sont décrites dans le sens horaire (si  $\dot{z} > 0$ ,  $z$  croît et si  $\dot{z} < 0$ ,  $z$  décroît).

- Première phase :  $z(t) < l_0$ . Dans ce cas, la loi de la quantité de mouvement écrite dans le référentiel terrestre galiléen et projetée selon l'axe  $Oz$  conduit à :  $m\ddot{z} = -mg$ .  
En intégrant deux fois cette relation par rapport au temps et en tenant compte des conditions initiales, on aboutit à  $\dot{z}(t) = -gt + v_0$  et  $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z(0)$ , avec  $v_0 = \dot{z}(0)$ .

On cherche l'instant  $t_1$  tel que  $z(t_1) = l_0$ . Il faut donc résoudre l'équation :  $-\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 = l_0 - z(0)$ .

On aboutit, en prenant la plus petite racine positive, à  $t_1 = \frac{v_0}{g} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - 2\frac{(l_0 - z(0))}{g}}$ , d'où

l'expression de la vitesse  $v(t_1) = v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g(l_0 - z(0))} = 7,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- Deuxième phase :  $t > t_1$ , l'élastique est étiré. Il faut donc tenir compte de sa tension dans l'expression de la loi de la quantité de mouvement. On obtient alors :  $m\ddot{z} = -mg - k(z - l_0)$ .

En introduisant la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , l'équation devient :  $\ddot{z} + \omega^2 z = \omega^2 l_0 - g$ . Par ailleurs, en prenant comme nouvelle origine des temps la date  $t_1$  ( $t' = t - t_1$ ), les conditions initiales de cette deuxième phase s'écrivent :  $z(t' = 0) = l_0$  et  $\dot{z}(t' = 0) = v_1$ . L'équation horaire du mouvement étant de la forme  $z(t') = a \cos(\omega t') + b \sin(\omega t') + l_0 - \frac{mg}{k} = A \cos(\omega t' + \varphi) + l_0 - \frac{mg}{k}$ , on déduit de ces conditions initiales :  $A \cos(\varphi) + l_0 - \frac{mg}{k} = l_0$  et  $-A\omega \sin(\varphi) = v_1$ , d'où :  $A \cos(\varphi) = \frac{mg}{k}$  et

$A\omega \sin(\varphi) = -v_1$ . Sachant que  $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ , on obtient :  $A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_1^2}{k}}$ .

L'altitude maximale atteinte est donc :  $z_{\max} = A + l_0 - \frac{mg}{k} = l_0 - \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_1^2}{k}} = 4,4 \text{ m}$ .

Ce résultat est en accord avec ce qu'on peut observer sur le portrait de phase.

**Exercice 11.8**

- L'ensemble (Tonneau+Jack) est soumis à son poids  $\vec{P} = (m_t + m_j)\vec{g}$  et à la poussée d'Archimède  $\vec{F}_a = -\mu_e \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 h \vec{g}$ . À l'équilibre,  $\vec{P} + \vec{F}_a = \vec{0}$  d'où  $h_{\text{eq}} = \frac{4(m_t + m_j)}{\mu_e \pi D^2} = 32 \text{ cm}$ .
- Compte tenu du choix de l'axe vertical ascendant et de son origine, la cote  $z(t)$  du centre de masse de l'ensemble (Tonneau+Jack) correspond à une hauteur immergée  $h = h_{\text{eq}} - z$ .

La loi de la quantité de mouvement appliquée à cet ensemble et projetée sur  $\vec{u}_z$  ascendant conduit à :  $(m_t + m_j)\ddot{z} = -(m_t + m_j)g + \mu_e \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (h_{\text{eq}} - z)g$ . En réinjectant dans cette équation l'expression de  $h_{\text{eq}}$ , il vient :  $\ddot{z} + \frac{\mu_e \pi D^2}{4(m_t + m_j)}gz = 0$ . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$T = 2\pi \sqrt{\frac{4(m_t + m_j)}{\mu_e g \pi D^2}} = 1,1 \text{ s}$ . Cette période est indépendante de  $a$ .

**Exercice 11.9**

1. Tarzan est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la tension  $\vec{T}$  de la liane. La loi de la quantité de mouvement appliquée à Tarzan dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit alors :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ .

2. On choisit la base polaire  $(G, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$ , avec  $Ox$  dirigé vers l'arrière de la figure,  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OG}}{L}$  et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_r$ .

La tension de la liane s'écrit alors  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  et l'accélération de Tarzan  $\vec{a} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ .

Par projection sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  :  $-mL\dot{\theta}^2 = -T + mg \cos(\theta)$  et  $mL\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta)$ , qui constitue l'équation du mouvement.

3. On multiplie l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$  :

$$L\ddot{\theta}\dot{\theta} = -g \sin(\theta)\dot{\theta} \iff \frac{1}{2} \frac{d(L\dot{\theta}^2)}{dt} = g \frac{d \cos(\theta)}{dt}$$

Puis on intègre entre  $t = 0$ , date à laquelle  $\theta(0) = \alpha$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ , et  $t : \frac{1}{2} L\dot{\theta}^2 = g(\cos(\theta) - \cos(\alpha))$ .

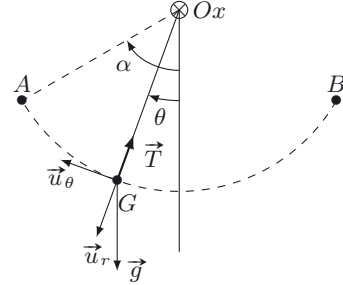
4. On réinjecte l'expression de  $L\dot{\theta}^2$  dans celle donnant  $T$ , déduite de la projection sur  $\vec{u}_r$  :

$$T(\theta) = mL\dot{\theta}^2 + mg \cos(\theta) = 3mg \cos(\theta) - 2mg \cos(\alpha)$$

La tension maximale est obtenue pour  $\theta = 0$ , et vaut  $T_{\max} = mg(3 - 2 \cos(\alpha)) = 9,9 \cdot 10^2 \text{ N}$ .

Tarzan pourra donc retrouver Jane en  $B$ . Mais arrivera-t-il à la ramener en  $A$  ?

Compte tenu de l'expression de  $\dot{\theta}^2$ , Tarzan parvient en  $B$  avec une vitesse nulle, puisque  $\theta_B = -\alpha$ . Il saisit Jane et repart sans vitesse. Le problème du retour se pose donc dans les mêmes termes qu'à l'aller. Seule la masse a changée. Elle est maintenant égale à  $(m + m')$ . La tension maximale lors du retour sera donc égale à  $T_{\max} = (m + m')g(3 - 2 \cos(\alpha)) = 1,6 \cdot 10^3 \text{ N}$ . La liane résistera !



**Exercice 11.10**

1.  $R$  doit prendre en compte la longueur du bras de l'athlète et la longueur du câble. Nous proposons, après mesure effectuée sur un bras masculin,  $R = 2,0 \text{ m}$ .

2. Le mouvement du boulet étant circulaire uniforme, de vitesse  $v_0$ , de vitesse angulaire  $\omega = \frac{v_0}{R}$ , son accélération centripète vaut  $a_B = R\omega^2 = \frac{v_0^2}{R} = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \gg g$ . Nous pouvons donc négliger le poids du boulet dans la suite de l'exercice.

3. Le boulet  $B$  est soumis à son poids, que nous négligeons, et à la tension du câble  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ . Nous travaillons dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen et utilisons le repère polaire  $(B, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_r = \frac{\vec{CB}}{R}$ ,  $\vec{u}_z$  perpendiculaire au plan du cercle et dirigé vers le haut et  $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$  tangent au cercle et orienté dans le sens du mouvement de  $B$ . L'accélération du boulet dans  $\mathcal{R}$  est  $\vec{a}_B = -\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée au boulet dans  $\mathcal{R}$  fournit l'équation du mouvement :  $m\vec{a}_B = \vec{T} = -T\vec{u}_r$ . Par projection sur la base polaire nous obtenons :  $T = m \frac{v_0^2}{R} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ N}$ .

**Exercice 11.11**

1. Le boulet une fois lancé n'est plus soumis qu'à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ . Son accélération dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  est  $\vec{a}(t) = \ddot{x}_B(t)\vec{u}_x + \ddot{y}_B(t)\vec{u}_y$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à  $B$  dans  $\mathcal{R}$  supposé galiléen amène à  $m\vec{a}(t) = m\vec{g}$ .

Par projection sur les deux axes on obtient deux équations différentielles :  $\ddot{y}_B(t) = -g$  et  $\ddot{x}_B(t) = 0$ .

Compte tenu des conditions initiales, une première intégration conduit à :  $\dot{x}_B(t) = \dot{x}_B(0) = v_0 \cos(\alpha)$  et  $\dot{y}_B(t) = -gt + \dot{y}_B(0) = -gt + v_0 \sin(\alpha)$ . Puis une seconde intégration à :  $x_B(t) = v_0 \cos(\alpha)t$  et  $y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0$ . D'où on déduit :  $t = \frac{x_B}{v_0 \cos(\alpha)}$  et l'équation de la trajectoire :  $y_B(x_B) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}x_B^2 + \tan(\alpha)x_B + y_0$ , qui est celle d'une parabole.

2. On doit résoudre l'équation  $y(x_m) = 0$ , soit  $x_m^2 - \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}x_m - \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}y_0 = 0$  dont  $x_m$  est

la racine positive. On obtient :  $x_m = \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha)y_0}{g}} = 69 \text{ m.}$

3. Un point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  peut être atteint par le palet s'il existe une valeur de l'angle  $\alpha$  telle que  $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\alpha))x^2 + \tan(\alpha)x + y_0$ . On résout cette équation à  $(x, y)$  fixés pour trouver  $\alpha$ . En posant  $Z = \tan(\alpha)$ , on aboutit après simplification à l'équation en  $Z$  suivante :  $gx^2Z^2 - 2v_0^2xZ + 2v_0^2(y - y_0) + gx^2 = 0$ . Pour qu'une solution réelle puisse exister, il faut avoir  $\Delta' = v_0^4x^2 - gx^2(2v_0^2(y - y_0) + gx^2) \geq 0$ , soit :  $y \leq y_{\text{lim}} = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} + y_0$ . L'équation  $y_{\text{lim}}(x)$  est celle d'une parabole, dite parabole de sureté.

La meilleure marque est telle que  $y_{\text{lim}}(x_{\text{max}}) = 0$ . On obtient :  $x_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{g} \left(y_0 + \frac{v_0^2}{2g}\right)} = 72 \text{ m.}$

**Exercice 11.12**

- Le volant est soumis à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$  et à la force de frottement fluide  $\vec{F}_t = -\lambda\vec{v}(t)$ .
- Loi de la quantité de mouvement appliquée au volant dans  $\mathcal{R}$  :  $m\vec{a}(t) = m\frac{d\vec{v}}{dt}(t) = -mg\vec{u}_y - \lambda\vec{v}(t)$ .
- Par projection sur  $Ox$  :  $m\frac{dv_x}{dt}(t) = -\lambda v_x(t)$ , puis sur  $Oy$  :  $m\frac{dv_y}{dt}(t) = -mg - \lambda v_y(t)$ . Ces deux équations se réécrivent sous la forme :  $\frac{dv_x}{dt}(t) + \frac{\lambda}{m}v_x(t) = 0$  et  $\frac{dv_y}{dt}(t) + \frac{\lambda}{m}v_y(t) = -g$ .
- En introduisant  $\tau = \frac{m}{\lambda} = 1,3 \text{ s}$  il vient :  $\frac{dv_x}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}v_x(t) = 0$  et  $\frac{dv_y}{dt}(t) + \frac{1}{\tau}v_y(t) = -g$ .

Les solutions de ces deux équations satisfaisant aux conditions initiales données sont :  $v_x(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  et  $v_y(t) = -g\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ .

Par ailleurs :  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0$ . D'où :  $\vec{v}_{\text{lim}} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\vec{v}) = -g\tau\vec{u}_y$ . Lorsque cette vitesse limite est atteinte, la trajectoire devient verticale. Ce n'est pas ce qui est observé sur le graphe. On en déduit que la vitesse limite n'est pas atteinte avant que le volant touche le sol.

- L'intégration de  $\dot{x} = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  en tenant compte de la condition initiale  $x(0) = 0$  conduit à  $x(t) = v_0\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ .  
On en déduit l'abscisse maximale pouvant être atteinte par le volant :  $x_{\text{max}} = \lim_{t \rightarrow \infty} x = v_0\tau = 17 \text{ m.}$
- L'intégration de  $\dot{y} = -g\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$  avec la condition initiale  $y(0) = y_0 = 3,0 \text{ m}$  conduit à :  $y(t) = g\tau^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) - g\tau t + y_0$ .

7. En notant  $x_0$  l'abscisse du point de contact du volant avec le sol, il vient :  $x_0 = v_0\tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right)\right)$ , d'où :  $t_0 = -\tau \ln\left(1 - \frac{x_0}{v_0\tau}\right)$ . On lit sur le graphe  $x_0 = 8,7$  m. On en déduit  $t_0 = 0,87$  s. Le volant touche très rapidement le sol, laissant peu de temps à l'adversaire pour réagir. Le coup est donc efficace. La trajectoire avec frottements tombe plus près du filet, rendant plus ardue la tâche de l'adversaire.
8. La vitesse initiale du volant étant assez élevée, on peut proposer une loi quadratique pour les frottements en  $-\alpha\|\vec{v}\|\vec{v}$ .

**Exercice 11.13**

1. Le ressort de gauche exerce sur  $M$  la force  $\vec{F}_1 = -k_1(x(t) - l_0)\vec{u}_x$ , et le ressort de droite la force  $\vec{F}_2 = k_2(L - x(t) - l_0)\vec{u}_x$ .
2. À l'équilibre, le poids et la réaction du support étant verticales et se compensant, la somme des deux forces précédentes est nulle. On obtient ainsi  $(k_1 + k_2)x_0 = k_2L + (k_1 - k_2)l_0$ , soit  $x_0 = \frac{k_2L + (k_1 - k_2)l_0}{k_1 + k_2}$ . Pour  $k_1 = k_2$ , on obtient sans surprise  $x_0 = L/2$ . Si  $k_1 \gg k_2$ , alors  $x_0 = l_0$ , seul le ressort (1) influera sur le déplacement de  $M$ .
3. Nous sommions les deux forces :  $\vec{F} = -(k_1 + k_2) \left(x(t) - \frac{k_2L + (k_1 - k_2)l_0}{k_1 + k_2}\right) \vec{u}_x$  ou encore :  $\vec{F} = -(k_1 + k_2)(x(t) - x_0)\vec{u}_x$  : l'association de ces deux ressorts est donc équivalente à un ressort unique situé à gauche de  $M$ , dont la raideur serait  $k = k_1 + k_2$ , et la longueur à vide  $x_0$ .
4. On applique la loi de la quantité de mouvement à  $M$ , projetée sur  $(Ox)$ , sachant que  $\ddot{x} = \ddot{X}$  :  $m\ddot{X} + kX = 0$ , soit  $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$ . Ceci est l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On cherche la solution sous la forme  $X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à  $X(0) = A = 0$  et  $\dot{X}(0) = v_0 = B\omega_0$ , d'où on déduit que  $X(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ .

# Approche énergétique

## L'essentiel du cours

### Contexte

La mécanique et le sport (2<sup>e</sup> mi-temps).

Reprenons notre étude des mouvements du ballon de basket et du volant de badminton du chapitre 11, pour l'aborder cette fois d'un point de vue énergétique.

Sur la vidéo du ballon de basket, nous constatons que le ballon est en mouvement de translation. Sur celle du volant de badminton nous remarquons un mouvement de basculement du volant d'environ 120° sur l'étendue de la trajectoire, en raison d'une base plus lourde que la jupe. Cependant, la masse du volant étant principalement concentrée dans sa base et sa vitesse de rotation étant très faible, nous décidons de négliger ce mouvement de rotation autour du centre de masse devant le mouvement du centre de masse. Ainsi, en première approximation, **nous considérerons le ballon de basket et le volant de badminton comme deux solides en translation.**

Nous reprendrons aussi l'étude du pendule simple commencée dans le chapitre 11.

## ■ 1 Les grandeurs énergétiques

Commençons par définir quelques grandeurs énergétiques. Ces grandeurs qui font intervenir les notions de vitesse et de déplacement **dependent toutes du référentiel d'étude.**

### Définition : Puissance d'une force

La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est la grandeur instantanée, exprimée en watt, définie par :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

### Définition : Travail élémentaire d'une force

Le travail élémentaire, entre  $t$  et  $t + dt$ , d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est défini par :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P} dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

**Définition : Travail d'une force entre deux points**

Le travail d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point matériel  $M$  qui se déplace, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de la position  $M_1$  à l'instant  $t_1$  à la position  $M_2$  à l'instant  $t_2$ , est défini par :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Il s'exprime en joule.

Nous rencontrerons dans la suite deux cas particuliers à connaître.

- **Cas d'un point matériel  $M$  soumis à plusieurs forces  $\vec{F}_i$**  dont la résultante est  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ . On montre que :  $\sum_i W(\vec{F}_i) = W(\vec{F})$ .
- **Cas d'un solide en translation** soumis en différents points  $M_i$  à des forces extérieures  $\vec{F}_{ext,i}$  dont la résultante est  $\vec{F}_{ext}$ . Les points d'un tel solide sont animés d'une même vitesse. Dans ces conditions, on montre que :  $\sum_i W(\vec{F}_{ext,i}) = W(\vec{F}_{ext})$ .

□ **Un travail entre deux points dépend-il du chemin suivi entre ces points ?**

Pour répondre à cette question considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplaçant, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , d'un point  $M_1$  à un point  $M_2$ , le long d'un chemin quelconque de longueur  $L$ .

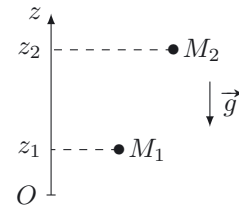
**Cas du poids**

Dans un repère cartésien de  $\mathcal{R}$  :  $d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ .

Par ailleurs, en prenant l'axe ( $Oz$ ) vertical ascendant :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ .

D'où :  $W(\vec{P})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P} \cdot d\vec{l} = \int_{M_1}^{M_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1)$ .

Ainsi dans le cas du poids, le travail ne dépend pas du chemin suivi entre  $M_1$  et  $M_2$ .

**Cas d'une force de frottement fluide**

Supposons que le point matériel se déplace de  $M_1$  à  $M_2$  avec un vecteur vitesse  $\vec{v}$  de module  $v$  constant et qu'il soit soumis à une force de frottement fluide  $\vec{F} = -h\vec{v}$ . Notons  $\vec{u}_t$  le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement. Alors :  $\vec{F} = -hv\vec{u}_t$  et  $d\vec{l} = dl\vec{u}_t$ . Donc :  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -hv\vec{u}_t \cdot dl\vec{u}_t = \int_{M_1}^{M_2} -hvd l = -hv \int_{M_1}^{M_2} dl = -hvL$ . Ainsi dans le cas de la force de frottement fluide le travail dépend du chemin suivi entre  $M_1$  et  $M_2$ .

Nous en concluons que **pour certaines forces le travail entre deux points ne dépend pas du chemin suivi** alors que **pour d'autres il en dépend**.

**Définition : Énergie cinétique d'un point matériel ou d'un solide en translation**

- L'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est définie par :  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ .
- L'énergie cinétique d'un solide de masse  $m$ , **en translation** dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , est définie par :  $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$  où  $\vec{v}_G$  est la vitesse du centre de masse  $G$  du solide.

Une énergie cinétique  $E_c$  s'exprime en joule.



Dans le cas d'un **solide en rotation autour d'un axe fixe**, autre cas au programme traité au chapitre 14, l'expression de l'énergie cinétique est différente.



## ■ 2 Les lois énergétiques

Les grandeurs énergétiques définies précédemment permettent d'énoncer plusieurs lois énergétiques.

### Loi de la puissance cinétique pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

### Loi de la puissance cinétique pour un solide en translation

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide en translation est égale à la somme des puissances des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{ext,i})$$



Une force est qualifiée de **motrice** ou de **résistante** selon qu'elle tend à augmenter ou à diminuer l'énergie cinétique du système auquel elle est appliquée. La puissance d'une force motrice est positive, celle d'une force résistante est négative.

□ Au cours de son mouvement, le volant de badminton est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la force de frottement fluide  $\vec{F}$ . Ces forces sont-elles motrices ou résistantes ?

En reprenant les résultats obtenus lors du traitement de l'acquisition vidéo, il est possible de représenter la trajectoire du centre de masse  $G$  du volant. Nous obtenons la figure 12.1 ci-contre, sur laquelle nous avons tracé le vecteur vitesse et les deux forces appliquées (poids et force de frottement fluide) à trois instants différents.

Au cours de la phase d'ascension du volant  $\mathcal{P}(\vec{P})$  et  $\mathcal{P}(\vec{F})$  sont négatives. Les deux forces sont donc résistantes. Par contre, au cours de la phase de chute  $\mathcal{P}(\vec{P})$  est positive alors que  $\mathcal{P}(\vec{F})$  est négative. Le poids devient moteur alors que la force de frottement reste résistante.

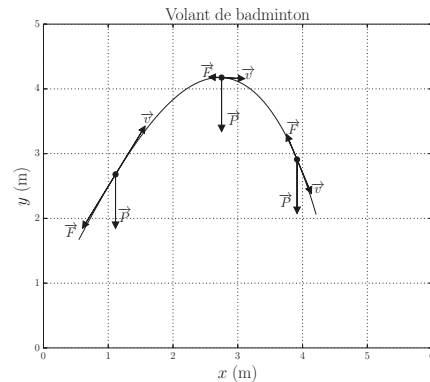


Figure 12.1. Vecteur vitesse et forces appliquées.



- Sur cet exemple, nous retrouvons une propriété vue dans le chapitre 11 : la force de frottement est toujours résistante.
- Au sommet de la trajectoire, on peut remarquer que  $\mathcal{P}(\vec{P}) = 0$ . C'est le cas limite, entre l'action résistante du poids et son action motrice.



Les forces qui restent en permanence normales au mouvement ne travaillent pas et n'interviennent pas dans les raisonnements énergétiques.

Pour illustrer cette remarque, considérons le pendule simple de la figure 12.2. Le corps de masse  $m$ , assimilé à un point  $M$ , est accroché à une potence par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$ . On considère qu'au cours du mouvement le fil reste tendu. Le point  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P}$  et à la tension  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  du fil. Cette dernière reste constamment perpendiculaire à la vitesse  $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ . Sa puissance  $\mathcal{P}(\vec{T})$  est donc nulle au cours du mouvement. On dit que **la tension ne travaille pas**.

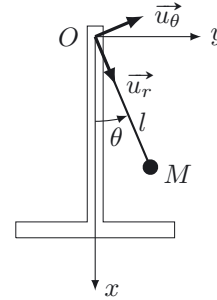


Figure 12.2. Pendule simple.

□ **À quel type d'équation la loi de la puissance cinétique conduit-elle ?**

Pour répondre à cette question reprenons le cas du pendule simple de la figure 12.2, étudié dans le chapitre 11 à l'aide de la loi de la quantité de mouvement.

Le point matériel  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_x$  et à la tension  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  du fil. On néglige les frottements de l'air. Le mouvement de  $M$  étant circulaire, on utilise les coordonnées polaires pour repérer la position de  $M$ . Le vecteur position et le vecteur vitesse de  $M$  s'écrivent respectivement  $\vec{OM} = l\vec{u}_r$  et  $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ .

On en déduit :  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$  et la dérivée temporelle de l'énergie cinétique :  $\frac{dE_c}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ . Calculons les puissances des deux forces appliquées à  $M$  :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = (mg\vec{u}_x) \cdot (l\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = (-T\vec{u}_r) \cdot (l\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = 0$$

La loi de la puissance cinétique, appliquée dans le référentiel terrestre supposé galiléen, conduit à :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{T}) \implies ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\dot{\theta}\sin(\theta) + 0 \implies ml\dot{\theta}(l\ddot{\theta} + g\sin(\theta)) = 0$$

Cette équation devant être vérifiée à chaque instant  $t$  du mouvement,  $ml\dot{\theta}$  est différent de 0. On obtient après simplification :  $l\ddot{\theta} + g\sin(\theta) = 0$ .

La loi de la puissance cinétique conduit à une **équation différentielle du second ordre**. On retrouve ainsi l'**équation de mouvement** obtenue à l'aide de la loi de la quantité de mouvement.

#### Méthode 12.1 : Utilisation de la loi de la puissance cinétique

Dans un **référentiel galiléen** :

- définir un repère adapté au problème ;
- exprimer l'énergie cinétique du système dans le référentiel d'étude, puis la dériver par rapport au temps ;
- calculer la somme des puissances des forces appliquées ;
- identifier les expressions obtenues dans les deux étapes précédentes.

➔ Exercice (12.1)

Une autre loi énergétique peut se déduire de celle de la puissance cinétique : la loi de l'énergie cinétique.

### Loi de l'énergie cinétique pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  qui se déplace de la position  $M_1$  à l'instant  $t_1$  à la position  $M_2$  à l'instant  $t_2$  est égale à la somme des travaux des forces qui lui sont appliquées :

$$\Delta(E_c) = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W(\vec{F}_i)_{M_1 \rightarrow M_2}$$

### Loi de l'énergie cinétique pour un solide en translation

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation de l'énergie cinétique d'un solide en translation dont le centre de masse  $G$  se déplace de la position  $G_1$  à l'instant  $t_1$  à la position  $G_2$  à l'instant  $t_2$  est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\Delta(E_c) = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W(\vec{F}_{ext,i})_{G_1 \rightarrow G_2}$$



- La loi de l'énergie cinétique peut aussi être appliquée entre un instant  $t_1$  et un instant quelconque  $t$  :  $E_c(t) - E_c(t_1) = \sum_i W(\vec{F}_i)_{G_1 \rightarrow G(t)}$ .
- La loi de l'énergie cinétique permet de relier les vitesses du système entre deux instants dont l'un peut être quelconque.

□ Quel est le lien entre les lois de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique ?

D'après la loi de la puissance cinétique :  $\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{P}(\vec{F})$ . On peut en déduire qu'entre  $t$  et  $t + dt$  :

$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} dt = \mathcal{P}(\vec{F})dt = \delta W(\vec{F})$ . Puis en intégrant entre  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} dt = E_c(M_2) - E_c(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W(\vec{F}) = W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

En intégrant la loi de la puissance cinétique on retrouve celle de l'énergie cinétique.

### Méthode 12.2 : Utilisation de la loi de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  :

- définir un repère adapté au problème ;
- choisir de mettre en œuvre la loi de l'énergie cinétique entre deux dates particulières  $t_1$  et  $t_2$  ou entre une date particulière  $t_1$  et une date quelconque  $t$  ;
- exprimer l'énergie cinétique du système dans le référentiel  $\mathcal{R}$  à chacune de ces dates ;
- calculer la somme des travaux, entre les deux dates choisies, des forces appliquées ;
- identifier la variation de l'énergie cinétique à la somme des travaux entre ces dates.

➔ Exercice (12.2)

### ■ 3 Énergie potentielle et force conservative

Nous avons vu qu'il existe deux catégories de forces, celles dont le travail entre deux points dépend du chemin suivi et celles dont il n'en dépend pas. Intéressons-nous à la seconde catégorie.

#### Définition : Énergie potentielle d'une force conservative

Une force conservative ( $\vec{F}_c$ ) est une force dont le travail ne dépend que des positions initiale  $M_1$  et finale  $M_2$  du système étudié et non du chemin suivi pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ .

Une telle force **dérive d'une énergie potentielle**  $E_p$  définie par :

$$W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta(E_p) = -(E_p(M_2) - E_p(M_1))$$



Dans le cas d'un déplacement infinitésimal :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$ .



L'énergie potentielle  $E_p$  ne dépend que de la position du système et est définie à **une constante additive près**. Cette constante peut être déterminée en choisissant arbitrairement une origine d'énergie potentielle.

□ **Le poids est-il une force conservative ? Si oui, quelle est l'expression de l'énergie potentielle dont il dérive ?**

Nous avons établi, en prenant un axe  $Oz$  vertical ascendant, que le travail du poids entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  d'altitudes  $z_1$  et  $z_2$  s'écrit :  $W(\vec{P})_{M_1 \rightarrow M_2} = -mg(z_2 - z_1)$ . Il ne dépend que des positions de ces points et pas du chemin suivi. **Le poids est donc une force conservative**. Nous pouvons alors écrire :  $W(\vec{P})_{M_1 \rightarrow M_2} = -(E_{pp}(M_2) - E_{pp}(M_1))$ . Par identification des deux expressions de  $W(\vec{P})_{M_1 \rightarrow M_2}$ , nous déduisons l'expression de l'énergie potentielle  $E_{pp}$  du poids, aussi appelée **énergie potentielle de pesanteur** :  $E_{pp}(z) = mgz + \text{cste}$ .

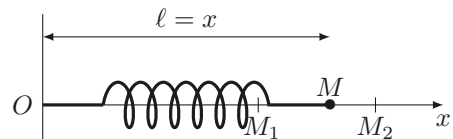
#### Énergie potentielle de pesanteur

L'axe ( $Oz$ ) étant vertical **ascendant**, un point matériel  $M$  de masse  $m$ , placé dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$ , possède une énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}(z) = mgz + \text{cste}$ .

□ **La force de rappel élastique d'un ressort est-elle une force conservative ? Si oui, quelle est l'expression de l'énergie potentielle dont elle dérive ?**

Considérons un point matériel  $M$  lié au point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , se déplaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}$  de  $M_1$  en  $M_2$  sur un axe fixe ( $Ox$ ).

La force de rappel du ressort s'écrit :  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$  et le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{l} = dx\vec{u}_x = d\ell\vec{u}_x$ .



Nous en déduisons :  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -k(\ell - \ell_0)d\ell = -\left(\frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2\right)$ . Cette fois encore nous remarquons que ce travail ne dépend que des positions des points  $M_1$  et  $M_2$  et pas

du chemin suivi entre les deux. **La force de rappel élastique est donc une force conservative** et nous pouvons écrire :  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = -(E_{pe}(M_2) - E_{pe}(M_1))$ . Par identification des deux expressions de  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2}$ , nous déduisons l'expression de l'énergie potentielle  $E_{pe}$  de la tension du ressort, aussi appelée énergie potentielle élastique :  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$ .

**Énergie potentielle élastique**

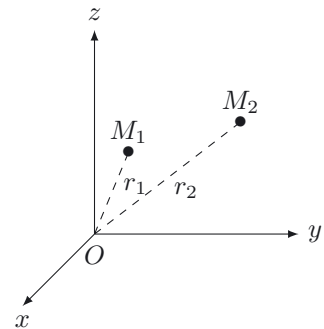
Un point matériel  $M$  soumis à la force de rappel d'un ressort, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , possède une énergie potentielle élastique  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$ .



Il est courant de choisir  $E_{pe} = 0$  lorsque  $\ell = \ell_0$ . Dans ce cas :  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ .

□ **La force gravitationnelle est-elle une force conservative? Si oui, quelle est l'expression de l'énergie potentielle dont elle dérive?**

Au référentiel  $\mathcal{R}$  associons le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Un point matériel  $M$  de masse  $m$ , de vecteur position  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$  se déplace de  $M_1$  en  $M_2$  dans le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle  $m_0$  placée en  $O$ . Il subit de la part de celle-ci la force gravitationnelle :  $\vec{F} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{u}_r$ . Le travail de cette force vaut :  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ , avec  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta)d\varphi\vec{u}_\varphi$  (vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques).



Nous en déduisons :  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\frac{Gm_0m}{r^2}dr$ .

$$D'où : W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -\frac{Gm_0m}{r^2}dr = Gm_0m \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Le travail de la force gravitationnelle ne dépendant que des positions de  $M_1$  et  $M_2$  et pas du chemin suivi entre les deux, **la force gravitationnelle est une force conservative** et nous pouvons écrire :  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = -(E_{pgrav}(M_2) - E_{pgrav}(M_1))$ . Par identification des deux expressions de  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2}$ , nous déduisons l'expression de l'énergie potentielle  $E_{pgrav}$  de la force gravitationnelle, aussi appelée énergie potentielle gravitationnelle :  $E_{pgrav} = -\frac{Gm_0m}{r} + \text{cste}$ .

**Énergie potentielle gravitationnelle**

Un point matériel  $M$  de masse  $m$ , plongé dans le champ gravitationnel d'une masse ponctuelle  $m_0$  placée en  $O$  possède une énergie potentielle :

$$E_{pgrav} = -\frac{Gm_0m}{r} + \text{cste} \quad \text{où} \quad r = \|\vec{OM}\|$$



On considère souvent une énergie potentielle nulle à grande distance soit  $\text{cste} = 0$ .

□ La force électrostatique est-elle une force conservative ? Si oui, quelle est l'expression de l'énergie potentielle dont elle dérive ?

Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel d'étude auquel nous associons le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Une particule ponctuelle  $M$  de charge  $q$  se déplace dans  $\mathcal{R}$  de  $M_1$  en  $M_2$  dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique  $\vec{E}$ . La particule subit une force  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Nous considérerons deux cas : celui où le champ électrostatique est créé par une charge ponctuelle  $q_0$  placée en  $O$  et celui où il est uniforme.

### Cas d'un champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

La particule  $M$  subit une force  $\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$  (avec  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ ). Ce cas est formellement analogue à celui de la force gravitationnelle étudié précédemment qu'on retrouve en remplaçant  $\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}$  par  $-Gmm_0$ . On en déduit que la force électrostatique est une force conservative et qu'elle dérive d'une énergie potentielle électrique  $E_{pélec} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$ .

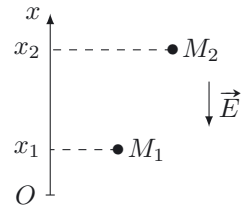


■ On considère souvent une énergie potentielle nulle à grande distance soit  $\text{cste} = 0$ .

### Cas d'un champ électrostatique uniforme

Considérons un champ électrostatique uniforme, comme celui régnant à l'intérieur d'un condensateur plan et choisissons le vecteur  $\vec{u}_x$  de la base cartésienne utilisée de sorte que  $\vec{E} = -E\vec{u}_x$ . Le point  $M$  subit la force  $\vec{F} = q\vec{E} = -qE\vec{u}_x$ .

Ainsi par analogie avec le cas du poids étudié précédemment et en remplaçant  $mg$  par  $qE$ , on en déduit que la force électrostatique est elle aussi conservative et qu'elle dérive d'une énergie potentielle  $E_{pélec} = qEx + \text{cste}$ .



Remarque : En électromagnétisme, on peut définir un potentiel électrique  $V$  associé à un champ électrostatique  $\vec{E}$  en écrivant l'énergie potentielle  $E_{pélec}$  sous la forme  $E_{pélec} = qV + \text{cste}$ .

### Énergie potentielle électrostatique

Une particule ponctuelle  $M$  de charge  $q$ , soumise à un champ électrostatique  $\vec{E}$ , possède une énergie potentielle électrostatique  $E_{pélec}$  égale à :

- $E_{pélec} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$  si  $\vec{E}$  est créé par une charge ponctuelle  $q_0$  placée en  $O$  (avec  $r = \|\vec{OM}\|$ );
- $E_{pélec} = qEx + \text{cste}$  si  $\vec{E}$  est un champ uniforme égal à  $\vec{E} = -E\vec{u}_x$ ;
- $E_{pélec} = qV + \text{cste}$  où  $V$  est le potentiel électrique  $V$  en  $M$ .

□ Une force de frottement est-elle une force conservative ?

Une force de frottement en s'opposant au mouvement est toujours résistante. Nous avons vu que son travail entre deux points dépend du chemin suivi. **Elle n'est donc pas conservative.**

**Méthode 12.3 : Détermination de l'énergie potentielle d'une force conservative**

- En identifiant l'énergie potentielle dans l'expression du travail :
  - calculer le travail entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  :  $W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  ;
  - relier ce travail à la variation de  $E_p$  :  $W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = -(E_p(M_2) - E_p(M_1))$  ;
  - en déduire l'expression de  $E_p$  à une constante additive près.
- En intégrant le travail élémentaire :
  - calculer le travail élémentaire de la force :  $\delta W(\vec{F}_c) = \vec{F}_c \cdot d\vec{l}$  ;
  - intégrer son expression qu'on identifie à  $-E_p$ . On obtient :  $E_p = -\int \delta W(\vec{F}) + \text{cste.}$

➔ Exercice (12.3)

## ■ 4 Énergie mécanique et intégrale première du mouvement

**Définition : Énergie potentielle d'un système**

L'énergie potentielle  $E_p$  d'un système se définit comme la somme des énergies potentielles :

- des forces **conservatives** appliquées dans le cas d'un point matériel,
- des forces **conservatives extérieures** appliquées dans le cas d'un solide en translation.

**Définition : Énergie mécanique d'un système**

L'énergie mécanique  $E_m$  d'un système est la somme de son énergie cinétique  $E_c$  et de son énergie potentielle  $E_p$  :  $E_m = E_c + E_p$ .

□ Comment varient au cours du temps les énergies mécaniques de notre ballon de basket et de notre volant de badminton ?

Pour répondre à cette question nous avons extrait de nos enregistrements vidéos les positions et les vitesses des centres de masse du ballon et du volant. Nous en avons déduit les valeurs de leurs énergies cinétiques  $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2$ , potentielles  $E_p = mgz_G$  et enfin mécaniques  $E_m = E_c + E_p$ , au cours du temps. Les résultats sont présentés figure 12.3 et figure 12.4.

Pour le ballon de basket, nous observons que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, alors que pour le volant de badminton, elle diminue.

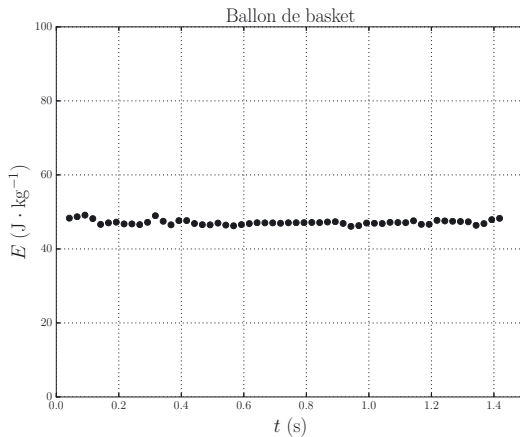


Figure 12.3. Énergie mécanique du ballon.

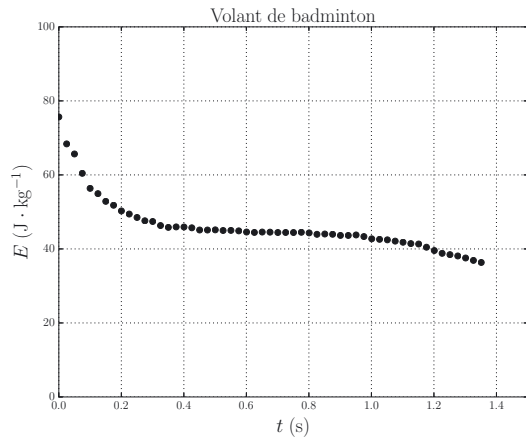


Figure 12.4. Énergie mécanique du volant.

Avant d’analyser ces résultats, posons-nous la question plus générale :

□ **Comment varie l’énergie mécanique d’un système lors de son mouvement ?**

Considérons un point matériel  $M$  en mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  sous l’effet de forces conservatives de résultante  $\vec{F}_c$  et de forces non conservatives de résultante  $\vec{F}_{nc}$ . Appliquons-lui la loi de l’énergie cinétique lors d’un déplacement entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\Delta(E_c) = E_c(M_2) - E_c(M_1) = W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} + W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Or :  $W(\vec{F}_c)_{M_1 \rightarrow M_2} = -(E_p(M_2) - E_p(M_1))$ . En injectant cette expression dans celle de  $\Delta(E_c)$  nous obtenons :  $E_c(M_2) - E_c(M_1) = -(E_p(M_2) - E_p(M_1)) + W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$ . D’où :

$$(E_c(M_2) + E_p(M_2)) + (E_c(M_1) + E_p(M_1)) = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Cette expression traduit la **loi de l’énergie mécanique**.

**Loi de l’énergie mécanique**

Dans un **référentiel galiléen**, la variation  $\Delta(E_m)$  de l’énergie mécanique, entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$ , d’un point matériel soumis à des forces conservatives de résultante  $\vec{F}_c$  et à des forces non conservatives de résultante  $\vec{F}_{nc}$  vaut :

$$\Delta(E_m) = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W(\vec{F}_{nc})_{M_1 \rightarrow M_2}$$

Pour un solide en translation, cette loi devient :

$$\Delta(E_m) = E_m(G_2) - E_m(G_1) = W(\vec{F}_{ext,nc})_{G_1 \rightarrow G_2}$$



Si toutes les forces qui travaillent sont conservatives alors l’énergie mécanique est une constante du mouvement. Le système est qualifié de **conservatif**.

Revenons maintenant sur les résultats concernant le ballon de basket et le volant de badminton. **Pour le ballon de basket** : nous avons vu dans notre étude du mouvement du ballon, au chapitre 11, que nous pouvions négliger la force de frottement de l’air. Dans ces conditions la



seule force qui travaille est le poids. C'est une force conservative, il est donc logique que l'énergie mécanique du ballon se conserve lors du mouvement.

**Pour le volant de badminton :** les forces qui travaillent sont le poids et la force de frottement de l'air. Cette dernière est non conservative. Son travail est négatif puisqu'elle est de sens opposé au vecteur vitesse. Il est donc logique que l'énergie mécanique du volant diminue lors du mouvement.

□ **Comment obtenir une équation différentielle à partir de la loi de l'énergie mécanique pour un système conservatif ?**

Pour répondre à cette question envisageons le cas du pendule simple de la figure 12.2. Nous supposons que  $M$  est lancé avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v(0)\vec{u}_\theta = l\dot{\theta}(0)\vec{u}_\theta$  depuis l'angle  $\theta(0)$  et que le fil reste tendu au cours du mouvement.

Dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen, auquel nous associons le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (voir figure 12.2), le point  $M$  est soumis à :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_x$ , force conservative qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur :  $E_{pp} = -mgx$ , en choisissant l'origine de  $E_{pp}$  en  $x = 0$  (attention ici l'axe vertical  $Ox$  est descendant) ;
- la tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ , qui ne travaille pas.

Exprimons l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de  $M$  à une date quelconque :

- $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$  avec à  $t = 0$  :  $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}(0)^2$  ;
- $E_p = -mgx = -mgl \cos(\theta)$  avec à  $t = 0$  :  $E_p = -mgl \cos(\theta(0))$ .

En écrivant que l'énergie mécanique est une constante du mouvement nous obtenons :

$$(12.1) \quad \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}(0)^2 - mgl \cos(\theta(0))$$

Cette **équation différentielle du premier ordre** est appelée **intégrale première du mouvement** du pendule.

#### Définition : Intégrale première du mouvement d'un système conservatif

L'intégrale première du mouvement d'un **système conservatif** est l'**équation différentielle du premier ordre** obtenue en écrivant que son énergie mécanique à une date  $t$  quelconque est égale à son énergie mécanique initiale.

#### Méthode 12.4 : Détermination de l'intégrale première du mouvement

Dans un **référentiel galiléen** et pour un système **conservatif** :

- exprimer l'énergie cinétique du système en fonction des dérivées temporelles des variables de position, à une date  $t$  quelconque et à la date  $t = 0$  ;
- exprimer l'énergie potentielle du système en fonction des variables de position, à une date  $t$  quelconque et à la date  $t = 0$  ;
- traduire la conservation de l'énergie mécanique en écrivant que l'énergie mécanique à une date  $t$  quelconque est égale à sa valeur à  $t = 0$ .

➔ Exercice (12.4)

□ **Peut-on retrouver l'équation d'un mouvement à partir de son intégrale première ?**

Reprenons l'exemple du pendule simple et dérivons par rapport au temps son intégrale première du mouvement correspondant à l'équation 12.1 :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \right) = 0. \text{ D'où : } \frac{1}{2} ml^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin(\theta) = ml\dot{\theta} (l\ddot{\theta} + g \sin(\theta)) = 0.$$

Cette équation étant valable à toute date, nous pouvons simplifier par  $ml\dot{\theta}$  (la fonction  $\dot{\theta}(t)$  n'est pas identiquement nulle). Nous retrouvons l'équation du mouvement du pendule simple obtenue par application de la loi de la quantité de mouvement dans le chapitre 11 :

$$(12.2) \quad l\ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$$

Ceci se généralise : **il est possible d'obtenir l'équation du mouvement d'un système conservatif en dérivant son intégrale première par rapport au temps.**



On peut faire le cheminement inverse qui consiste à intégrer par rapport au temps l'équation du mouvement d'un système conservatif pour établir son intégrale première.

Pour illustrer cette remarque, reprenons le cas du pendule simple. Multiplions par  $\dot{\theta}$  son équation du mouvement (équation 12.2) puis intégrons par rapport au temps :

$$l\ddot{\theta}\dot{\theta} + g \sin(\theta)\dot{\theta} = 0 \implies \frac{l}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - g \frac{d \cos(\theta)}{dt} = 0 \implies \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = \text{cste}$$

Nous retrouvons bien l'intégrale première du mouvement (équation 12.1), la constante étant calculée à partir des conditions initiales.

## ■ 5 Mouvement conservatif à une dimension

Dans cette partie nous nous restreignons au cas d'un **système conservatif** dont la position peut-être décrite à l'aide d'un **seul paramètre de position**. Nous nous proposons d'étudier plus particulièrement ses **positions d'équilibre**.

À titre d'exemple, nous étudierons le cas d'un point  $M$  se déplaçant selon un axe  $(Ox)$ , repéré par son vecteur position  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$  et soumis à des forces conservatives de résultante  $\vec{F} = F_x(x)\vec{u}_x$ .

### Définitions : Position d'équilibre, équilibre stable, équilibre instable

- Une **position d'équilibre** d'un système mécanique est une position telle que si on abandonne sans vitesse le système dans cette position, il y reste.
- La **stabilité** d'une position d'équilibre se définit en abandonnant le système sans vitesse au voisinage de cette position :
  - si le système se rapproche de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est **stable** ;
  - si le système s'éloigne de sa position d'équilibre, c'est que celle-ci est **instable**.



Pour un point matériel  $M$  ou un solide en translation de centre de masse  $G$ , une position d'équilibre correspond respectivement à  $\vec{a}(M) = \vec{0}$  et  $\vec{a}(G) = \vec{0}$ . Selon la loi de la quantité de mouvement cela équivaut à une résultante des forces appliquées nulle.

□ **Comment déterminer les positions d'équilibre d'un système conservatif ?**

Calculons le travail élémentaire de la résultante des forces conservatives et relierons-le à l'énergie potentielle du point matériel :  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F_x \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = F_x dx = -dE_p$ . D'où :  $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$ .

Une position d'équilibre, définie par  $\vec{a}(M) = \vec{0}$  selon la loi de la quantité de mouvement, se traduit donc pour un système conservatif à une dimension, par :  $\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$ . Elle correspond à **un extremum de sa fonction énergie potentielle**.

□ **Comment étudier la stabilité d'une position d'équilibre d'un système conservatif ?**

Étudions le comportement du système à proximité d'une position d'équilibre. Deux cas peuvent se présenter.

- La position d'équilibre correspond à un minimum de  $E_p$  et  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$ .
- La position d'équilibre correspond à un maximum de  $E_p$  et  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) < 0$ .

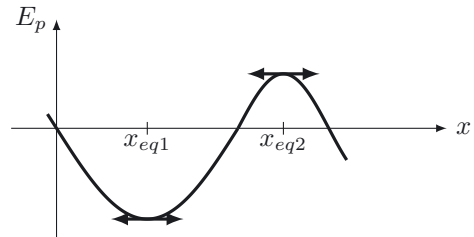


Figure 12.5. Profil d'énergie potentielle.

**Comportement du système autour d'un minimum** ( $x = x_{eq1}$ )

Si  $x < x_{eq1}$  alors  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} > 0$ . Si  $x > x_{eq1}$  alors  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} < 0$ . Dans les 2 cas, la force  $\vec{F}$  tend à ramener le système vers sa position d'équilibre qui est donc **stable**.

**Comportement du système autour d'un maximum** ( $x = x_{eq2}$ )

Si  $x < x_{eq2}$  alors  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} < 0$ . Si  $x > x_{eq2}$  alors  $F_x = -\frac{dE_p}{dx} > 0$ . Dans les 2 cas, la force  $\vec{F}$  tend à éloigner le système de sa position d'équilibre qui est donc **instable**.

Ainsi, une position d'équilibre est stable si elle correspond à un minimum, instable si elle correspond à un maximum.

**Méthode 12.5 : Étude de l'équilibre d'un système conservatif à une dimension**

Pour un système conservatif dont la position ne dépend que d'un paramètre de position  $x$  :

- calculer le travail élémentaire  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}$  de la résultante des forces conservatives et en déduire l'expression de la dérivée première de l'énergie potentielle :  $\frac{dE_p}{dx}$  ;
- rechercher les solutions  $x = x_{eq}$  de l'équation  $\frac{dE_p}{dx}(x) = 0$  ;
- pour chaque position d'équilibre  $x_{eq}$  déterminer le signe de  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq})$  :
  - si  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$  la position d'équilibre est stable (minimum de  $E_p$ ) ;
  - si  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x_{eq}) < 0$  la position d'équilibre est instable (maximum de  $E_p$ ).

➔ Exercice (12.5)



Le paramètre de position, noté  $x$  ci-dessus, peut être une coordonnée cartésienne ( $x, y, z$ ) ou un angle ( $\theta$ ).

□ **Comment étudier qualitativement le mouvement d'un système conservatif à une dimension à l'aide du graphe de son énergie potentielle ?**

À titre d'exemple reprenons le cas d'un point matériel  $M$  se déplaçant selon un axe ( $Ox$ ) et supposons que le graphe de son énergie potentielle soit celui représenté figure 12.6.

La conservation de l'énergie mécanique conduit à  $E_c + E_p = E_m$  où  $E_m$  est une constante dont la valeur dépend des conditions initiales. De  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$  nous déduisons  $E_p \leq E_m$ . **Cette inégalité permet de déterminer les valeurs de  $x$  accessibles au système.**

Nous allons envisager différentes situations, en fonction de la valeur de  $E_m$  (figure 12.6). Nous noterons  $x_0$  et  $\dot{x}_0$  les valeurs initiales de  $x$  et  $\dot{x}$ .

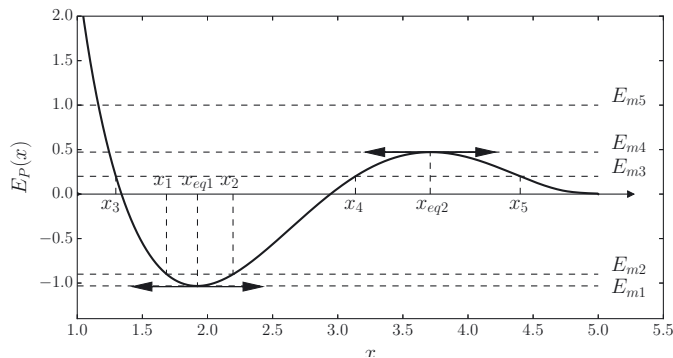


Figure 12.6. Étude qualitative du mouvement en fonction de la valeur de  $E_m$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $E_m = E_{m1}$

Une seule valeur possible pour  $x : x_{eq1}$ . Nous avons  $E_p = E_{m1}$ , d'où  $E_c = 0$ . Cela correspond au cas où  $M$  est déposé sans vitesse dans sa position d'équilibre stable. Il y reste donc.

**2<sup>e</sup> cas :**  $E_m = E_{m2}$

L'inégalité  $E_p \leq E_{m2}$  impose  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Lorsque  $x$  est différent de  $x_1$  ou  $x_2$ ,  $E_c$  est non nulle et  $M$  est en mouvement dans un sens ou dans un autre selon le signe de  $\dot{x}$ . Lorsque  $x = x_1$  ou  $x = x_2$ ,  $E_c$  s'annule,  $M$  s'immobilise en dehors d'une position d'équilibre et repart immédiatement en sens inverse. Chaque fois que  $x = x_{eq1}$ , il passe par sa position d'équilibre avec une vitesse maximale et ne s'y arrête pas. Il fait ainsi perpétuellement des allers et retours entre les points d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , de façon périodique autour de la position d'équilibre stable. **La trajectoire est bornée.** On dit que **le système est dans un état lié**. La région de l'espace, autour de la position d'équilibre stable, dans laquelle le point  $M$  est contraint de rester constitue **un puits de potentiel**.

**3<sup>e</sup> cas :**  $E_m = E_{m3}$

Ce cas recouvre deux situations différentes selon la position initiale  $x_0$  du point  $M$ .

- $x_3 \leq x_0 \leq x_4$

Cette situation est identique à la précédente. Simplement,  $E_{m3}$  étant supérieure à  $E_{m2}$ , l'extension spatiale du mouvement est plus importante.

- $x_0 \geq x_5$ 
  - Si  $\dot{x}_0 > 0$ , le point  $M$  part dans le sens des  $x$  croissants, son énergie potentielle diminue et tend vers 0, son énergie cinétique croît et tend vers  $E_m$ . Sa vitesse ne s'annule jamais. Il part à l'infini.
  - Si  $\dot{x}_0 < 0$ , le point  $M$  part dans le sens des  $x$  décroissants, son énergie potentielle augmente, son énergie cinétique diminue jusqu'à s'annuler en  $x = x_5$ . Il s'arrête dans cette position qui n'est pas une position d'équilibre et donc redémarre aussitôt dans le sens positif pour ne plus revenir et partir à l'infini, comme précédemment.

Ainsi, quelque soit le signe de  $\dot{x}_0$ , le point  $M$  fini toujours par partir à l'infini. **La trajectoire n'est pas bornée.** On dit que **le système est dans un état de diffusion.**

On remarque qu'en fonction des conditions initiales, le mouvement se fait soit dans la région définie par  $x \in [x_3; x_4]$ , soit dans celle définie par  $x \in [x_5; +\infty[$ . Le point  $M$  ne peut pas passer d'une région à l'autre. On dit que ces deux régions sont séparées par une **barrière de potentiel.**

**4<sup>e</sup> cas :**  $E_m = E_{m4}$

- Si  $x_0 = x_{eq2}$ , alors initialement  $E_p = E_{m4}$  et  $E_c = 0$ . Cela correspond au cas où  $M$  est déposé sans vitesse dans sa position d'équilibre instable. Il y reste donc tant qu'une petite perturbation ne vient pas le déstabiliser.
- Si  $x_0 > x_{eq2}$  et  $\dot{x}_0 > 0$  le point  $M$  part à l'infini.
- Dans tous les autres cas il finit par s'immobiliser dans sa position d'équilibre instable dans laquelle il reste tant qu'une petite perturbation ne vient pas le déstabiliser.

**5<sup>e</sup> cas :**  $E_m = E_{m5}$

La valeur  $E_{m5}$  de  $E_m$  est supérieure à la hauteur  $E_{m4}$  de la barrière de potentiel. On dit que la barrière de potentiel a été « effacée ». Le point  $M$  se trouve à nouveau dans un état de diffusion. Il finit toujours par partir à l'infini. Si  $\dot{x}_0 > 0$ , il y part directement. Si  $\dot{x}_0 < 0$ , il débute son mouvement dans le sens négatif, s'arrête au point d'abscisse définie par  $E_p(x) = E_{m5}$  et redémarre dans le sens positif pour partir à l'infini.

□ **Comment ces différents cas se retrouvent-ils sur un portrait de phase ?**

De l'équation de la conservation de l'énergie mécanique nous déduisons une expression de  $\dot{x}$  :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E_m - E_p(x) \quad \implies \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_p)}$$

Nous avons représenté figure 12.7 les trajectoires de phase  $\dot{x} = f(x)$  correspondant aux différentes valeurs  $E_{mi}$  de  $E_m$  considérées précédemment.

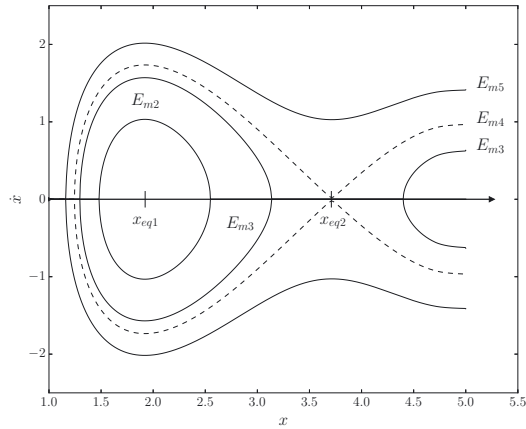


Figure 12.7. Portrait de phase.

Nous pouvons faire les commentaires suivants.

- Une trajectoire doit être parcourue dans le sens des  $x$  décroissants lorsque  $\dot{x} < 0$  et dans le sens des  $x$  croissants lorsque  $\dot{x} > 0$ .
- Les trajectoires de phase fermées correspondent aux états liés. Elles traduisent des mouvements d'oscillations périodiques autour de la position d'équilibre  $x_{eq1}$ , et sont parcourues dans le sens horaire.
- Les trajectoires ouvertes correspondent aux états de diffusion. Elles correspondent à des mouvements lors desquels le point  $M$  peut venir de l'infini et y repartir après avoir fait demi-tour pour la valeur minimale de  $x$  correspondant à  $E_p = E_m$  et en franchissant ensuite la barrière de potentiel en  $x_{eq2}$  avec une vitesse non nulle.
- La trajectoire en pointillés correspond à la limite entre les états liés et les états de diffusion. Elle porte le nom de **séparatrice**.

## ■ 6 Petits mouvements dans un puits de potentiel

Dans cette partie, nous reprenons à titre d'exemple le cas d'un système conservatif composé d'un point matériel  $M$  se déplaçant selon un axe ( $Ox$ ) et dont l'énergie potentielle est  $E_p(x)$ .

### Définition : Puits de potentiel

Un puits de potentiel est un profil d'énergie potentielle encadrant un minimum local, c'est-à-dire une position d'équilibre stable  $x_{eq}$ , pour laquelle  $\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$  et  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$ .

□ Comment modéliser de petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable ?

Lorsque dans son mouvement le point  $M$  reste proche de sa position d'équilibre d'abscisse  $x_{eq}$ , nous pouvons adopter pour expression approchée de son énergie potentielle  $E_p(x)$  un développement

limité de celle-ci, au deuxième ordre, au voisinage de  $x = x_{eq}$ . La **formule de Taylor** conduit à :

$$E_p(x) = E_p(x_{eq}) + \left( \frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) \right) (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) \right) (x - x_{eq})^2 + o((x - x_{eq})^2)$$

$\frac{dE_p}{dx}(x_{eq}) = 0$  et  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq}) = k > 0$  permettent alors de poser, au deuxième ordre :

$$E_p(x) \simeq E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 \quad \text{avec } k > 0$$

Dans ces conditions, l'intégrale première du mouvement s'écrit :

$$(12.3) \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 = E_m(0)$$

En dérivant cette équation 12.3 :  $m\dot{x}\ddot{x} + k(x - x_{eq})\dot{x} = 0$  et après simplification par  $\dot{x} (\neq 0)$  :

$$(12.4) \quad m\ddot{x} + kx = kx_{eq}$$

Nous reconnaissons l'équation du mouvement d'une masse  $m$  accrochée à un ressort de constante de raideur  $k$  soit l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  autour de la position d'équilibre  $x_{eq}$ , introduite au chapitre 1.

Ainsi, **un système effectuant de petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable se comporte comme un oscillateur harmonique**, en première approximation. Il effectue des oscillations sinusoïdales autour de sa position d'équilibre stable.

Remplacer la fonction énergie potentielle du système par son développement limité au deuxième ordre autour de sa position d'équilibre stable revient à remplacer, localement au niveau de celle-ci, l'énergie potentielle réelle du système par celle d'un oscillateur harmonique qui est de forme parabolique. Cette modélisation du système réel limité aux mouvements de faibles amplitudes porte le nom d'**approximation harmonique**.

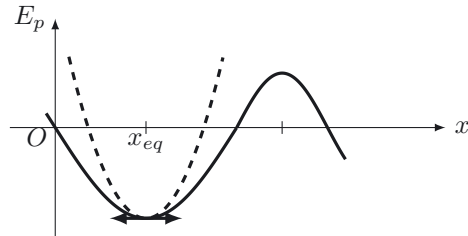


Figure 12.8. Puits de potentiel réel et puits de potentiel harmonique.

## ■ 7 Effets non linéaires – Approche numérique

Lorsqu'un système effectue des oscillations d'amplitudes trop importantes autour d'une position d'équilibre stable, l'approximation harmonique n'est plus possible. Une approche numérique permet alors de mettre en évidence **l'apparition de phénomènes non linéaires**.

À titre d'exemple, reprenons le cas du pendule simple représenté figure 12.2. Afin qu'il reste indéformable même dans le cas d'un mouvement de forte amplitude, nous supposons que le fil a été remplacé par une barre rigide de masse très faible devant la masse  $m$  du solide, de dimensions négligeables, fixé à son extrémité.

Rappelons ce que nous avons déjà établi concernant le pendule simple :

- son équation du mouvement :  $l\ddot{\theta} + g \sin(\theta) = 0$  (équation 12.2) ;
- son énergie potentielle :  $E_p(\theta) = -mgl \cos(\theta)$  ;
- son intégrale première :  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}(0)^2 - mgl \cos(\theta(0))$  (équation 12.1).

□ Quelles sont les positions d'équilibre du pendule simple rigide ?

De l'expression de  $E_p(\theta)$  nous déduisons :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgl \sin(\theta) \text{ et } \frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl \cos(\theta). \text{ D'où :}$$

- $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$  pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  ;
- $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(0) = mgl > 0$  ;
- $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\pi) = -mgl < 0$ .

Nous en déduisons que la position d'équilibre  $\theta_{eq1} = 0$  est stable et que la position  $\theta_{eq2} = \pi$  est instable.

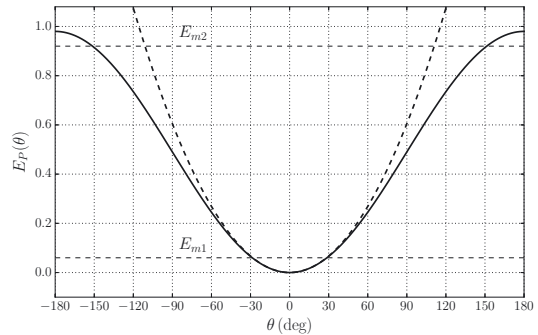


Figure 12.9. Énergie potentielle.

□ Comment se manifestent les effets non linéaires sur l'équation horaire ?

En dehors de l'approximation harmonique, l'équation du mouvement est une équation non linéaire dont la résolution analytique est impossible. Une **résolution numérique** est alors nécessaire pour déterminer l'équation horaire. C'est ce que nous avons fait à l'aide de Python, pour deux valeurs de l'énergie mécanique :  $E_{m1}$  et  $E_{m2}$ .

Pour chacune de ces valeurs nous avons tracé la courbe  $\theta(t)$  et le spectre de  $\theta(t)$ . Les résultats sont présentés figures 12.10 et 12.11 pour  $E_m = E_{m1}$ , figures 12.12 et 12.13 pour  $E_m = E_{m2}$ .

Pour  $E_m = E_{m1}$  l'amplitude est égale à  $30^\circ$  (figure 12.9). Le spectre ne comporte que l'harmonique fondamental. L'amplitude est suffisamment faible pour que l'hypothèse harmonique soit faite.

Pour  $E_m = E_{m2}$ , l'amplitude est égale à  $150^\circ$  (figure 12.9). Le spectre comporte deux harmoniques, le fondamental et l'harmonique de rang 3. Ce dernier est une manifestation des effets non linéaires. L'amplitude n'est pas suffisamment faible pour que l'hypothèse harmonique soit faite.

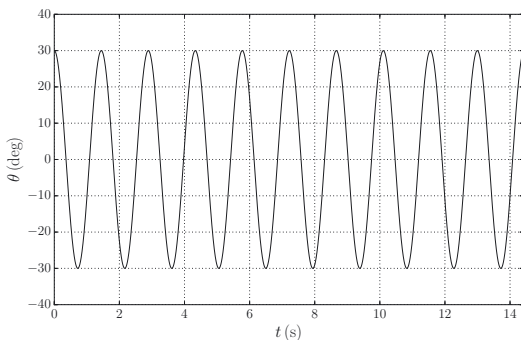


Figure 12.10.  $\theta(t)$  pour  $E_m = E_{m1}$ .

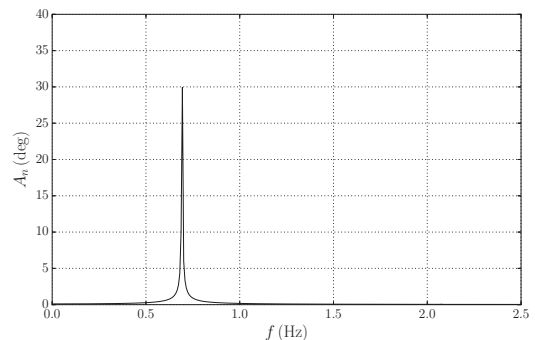


Figure 12.11. Spectre pour  $E_m = E_{m1}$ .



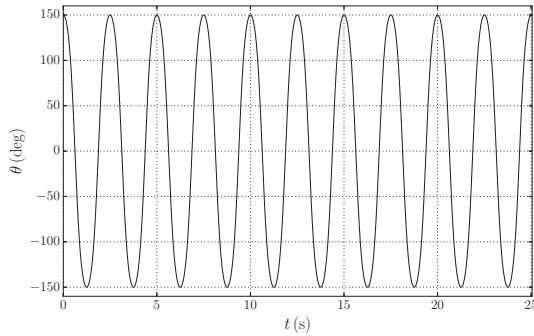


Figure 12.12.  $\theta(t)$  pour  $E_m = E_{m2}$ .

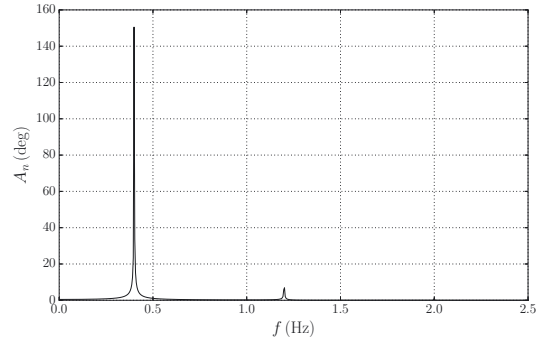


Figure 12.13. Spectre pour  $E_m = E_{m2}$ .

□ **Comment se manifestent les effets non linéaires sur le portrait de phase ?**

L'intégrale première du mouvement peut s'écrire :  $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + E_p = E_m$  avec  $E_p = -mgl \cos(\theta)$ .

Un développement de Taylor à l'ordre deux au voisinage de la position d'équilibre stable  $\theta = 0$  fournit une expression approchée de  $E_p$  dans le cadre de l'hypothèse harmonique :

$$E_p(\theta) \simeq E_p(0) + \left(\frac{dE_p}{d\theta}(0)\right)\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(0)\right)\theta^2 = -mgl + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

Dans ces conditions, l'intégrale première est de la forme :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(0) - mgl + \frac{1}{2}mgl\theta^2(0)$$

Soit, en posant  $\omega^2 = g/l$  et après simplification :  $\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = \dot{\theta}^2(0) + \omega^2\theta^2(0)$ . Ce qui peut s'écrire :

$$\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2 = C \quad \text{avec} \quad C = \dot{\theta}(0)^2 + \omega^2\theta^2(0)$$

Nous obtenons l'équation de la trajectoire de phase dans le cadre de l'approximation harmonique. C'est celle d'une ellipse.

Sur la figure 12.14 nous présentons les trajectoires de phase correspondant aux valeurs  $E_{m1}$  et  $E_{m2}$  de  $E_m$ . Nous constatons que celle correspondant à  $E_{m1}$  a bien l'allure d'une ellipse, ce qui confirme la validité de l'hypothèse harmonique dans ce cas. Par contre celle correspondant à  $E_{m2}$  est trop déformée pour être assimilée à une ellipse. Nous voyons là la manifestation sur le portrait de phase des effets non linéaires.

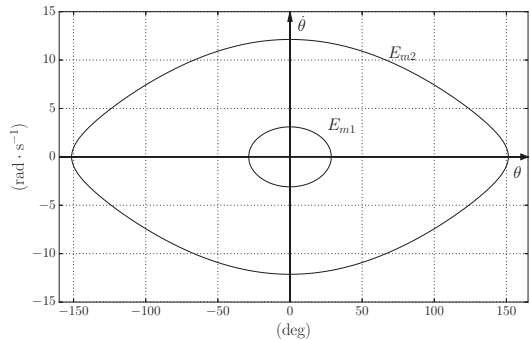
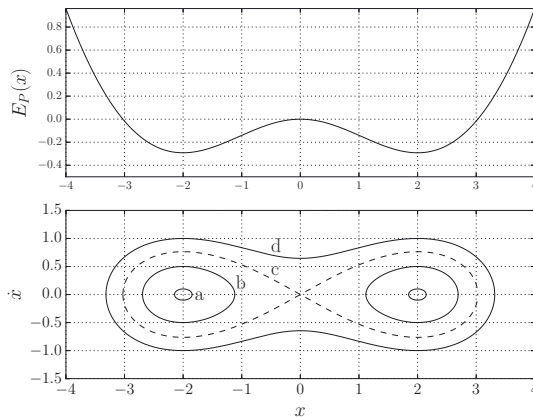


Figure 12.14. Portrait de phase.

## Interro de cours

1. On considère un système subissant une force conservative  $\vec{F}_c$  et une force non conservative  $\vec{F}_{nc}$ . La loi de l'énergie cinétique s'écrit :
  - (a)  $\Delta E_c = W(\vec{F}_c)$ ;
  - (b)  $\Delta E_c = W(\vec{F}_c) + W(\vec{F}_{nc})$ ;
  - (c)  $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_c) + \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$ .
2. Pour ce même système, la loi de l'énergie mécanique s'écrit :
  - (a)  $\Delta E_m = W(\vec{F}_{nc})$ ;
  - (b)  $\Delta E_m = W(\vec{F}_c) + W(\vec{F}_{nc})$ ;
  - (c)  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$ .
3. Un énoncé demande de déterminer la valeur de la vitesse du point matériel étudié en un point de sa trajectoire. Dans ce cas, il est judicieux d'utiliser :
  - (a) la loi de la quantité de mouvement ;
  - (b) la loi de la puissance cinétique ;
  - (c) la loi de l'énergie cinétique.
4. Pour chercher les positions d'équilibre d'un système conservatif d'énergie potentielle  $E_p$  paramétré par la seule coordonnée  $z$ , on détermine la solution  $z_{eq}$  de l'équation :
  - (a)  $E_p(z) = 0$ ;
  - (b)  $\frac{dE_p}{dz}(z) = 0$ ;
  - (c)  $\frac{dE_p}{dt}(z) = 0$ .
5. Pour établir l'équation du mouvement d'un système conservatif paramétré par la seule coordonnée  $z$ , on utilise :
  - (a)  $\frac{dE_m}{dz} = 0$ ;
  - (b)  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ ;
  - (c)  $\frac{dE_p}{dt} = 0$ .
6. La relation traduisant la conservation de l'énergie mécanique est appelée :
  - (a) l'équation du mouvement ;
  - (b) la dérivée première du mouvement ;
  - (c) l'intégrale première du mouvement.
7. Les graphiques ci-dessous représentent le profil d'énergie potentielle d'un système conservatif à une dimension et les trajectoires de phase pour différentes valeurs de son énergie mécanique.



Ce système possède :

- (a) une position d'équilibre stable et deux positions d'équilibre instables ;
- (b) une position d'équilibre instable et deux positions d'équilibre stables ;
- (c) une seule position d'équilibre.

8. Quelle trajectoire de phase correspond à un mouvement d'oscillations sinusoïdales ?

- (a) Trajectoire a.
- (b) Trajectoire b.
- (c) Trajectoire d.

9. Quel(s) couple(s) de conditions initiales est(sont) compatible(s) avec la trajectoire de phase d ?

- (a) Le système est initialement dans la position d'équilibre  $x_{eq} = -2,0\text{ m}$  avec une vitesse initiale  $v_0 = 1,0\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (b) Le système est initialement dans la position d'équilibre  $x_{eq} = 2,0\text{ m}$  avec une vitesse initiale  $v_0 = 0,5\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (c) Le système est initialement dans la position d'abscisse  $x_0 = -3,3\text{ m}$  sans vitesse initiale.

10. À l'instant initial, le système est abandonné sans vitesse dans la position d'abscisse  $x = 3,3\text{ m}$ . Laquelle des affirmations suivantes est juste ?

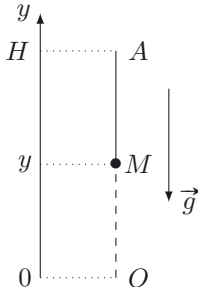
- (a) Abandonné sans vitesse, le système reste dans sa position initiale.
- (b) Il effectue des oscillations sinusoïdales entre les points d'abscisses  $x = 3,3\text{ m}$  et  $x = -3,3\text{ m}$ .
- (c) Il effectue des oscillations entre les points d'abscisse  $x = 3,3\text{ m}$  et  $x = -3,3\text{ m}$  en décrivant sa trajectoire de phase dans le sens horaire.
- (d) Il effectue des oscillations entre les points d'abscisse  $x = 3,3\text{ m}$  et  $x = 0,0\text{ m}$  en décrivant sa trajectoire de phase dans le sens anti-horaire.

## Exercices

### Exercice 12.1 Sauvetage en montagne

➔ Méthode (12.1)

Deux alpinistes coincés sur une paroi rocheuse sont hélitreuillés par le PGHM (Peloton de Gendarmerie de Haute Montagne). L'hélicoptère se tient en vol stationnaire à une hauteur  $H = 20$  m des infortunés alpinistes. Le treuil remonte les deux alpinistes à une vitesse constante  $v_0 = 20 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .



Le filin qui remonte les deux alpinistes assimilés au point  $M$  de masse  $m = 170$  kg est inextensible et de masse négligeable. On s'intéresse à l'énergie dépensée pour hélitreuiller les alpinistes depuis leur position initiale  $O$  jusqu'à l'hélicoptère en  $A$ .

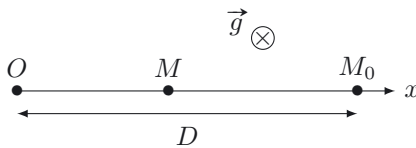
On néglige tout frottement. L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire un bilan des forces exercées sur  $M$ .
2. Calculer la puissance dépensée par le treuil au cours de la manœuvre de sauvetage.
3. Calculer l'énergie fournie par le treuil pour remonter les alpinistes.

### Exercice 12.2 Curling

➔ Méthode (12.2)

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.



Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point  $M$  de masse  $m = 20$  kg glissant selon l'axe  $Ox$  vers le point  $M_0$  visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale  $O$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ , la maison se trouvant à la distance  $D = OM_0 = 25$  m du point  $O$ .

Nous supposons que la force de frottement  $\vec{F} = -F_0 \vec{u}_x$  de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons  $F_0 = 3,0$  N. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide.

Le lancé étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête !

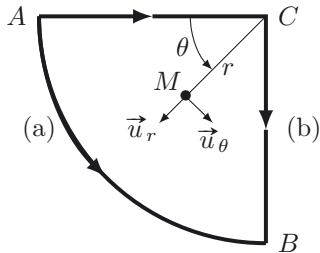
1. Que valent les énergies cinétiques initiale  $E_{c,I}$  et finale  $E_{c,F}$  de la pierre ?
2. Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.
3. Appliquer la loi de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse  $v_0$  adaptée.

### Exercice 12.3 Le côté conservatif de la Force

➔ Méthode (12.3)

L'enseignement de maître Yoda impose une maîtrise totale de la Force.

L'apprenti assimilé à un point  $M$ , soumis à la force  $\vec{F}$ , doit parcourir deux chemins (a) et (b) et déterminer si  $\vec{F}$  est conservative.  $M$  est repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ .



Le chemin (a) est un arc de cercle de rayon  $R$  tandis que le chemin (b) est constitué de deux segments de droite  $AC$  et  $CB$  de longueur  $R$ . Les deux chemins sont issus de  $A$  et mènent à  $B$ .

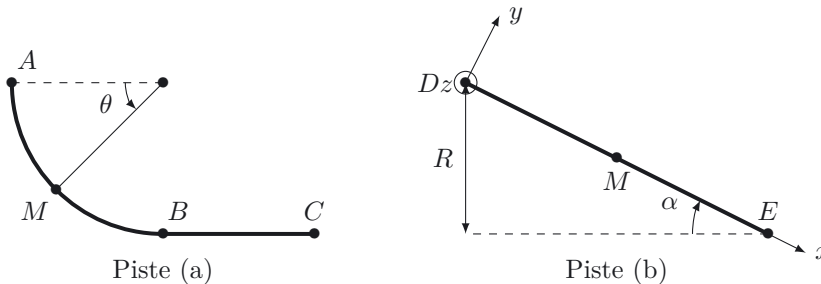
La force  $\vec{F}$  s'écrit  $\vec{F} = r^2 d^2 \vec{u}_\theta$  en coordonnées polaires, où  $d$  est une constante.

1. Déterminer le travail  $W$  de la force  $\vec{F}$  pour les deux chemins envisagés. Conclure quant au caractère conservatif de  $\vec{F}$ .
2. Réitérer avec la force  $\vec{F}' = r^2 d^2 \vec{u}_r$ .
3. Déterminer l'énergie potentielle dont dérive la force envisagée qui est conservative. On pourra par exemple utiliser un déplacement élémentaire sur le chemin  $CB$ .

### Exercice 12.4 L'Arène des neiges

➔ Méthode (12.4)

En vacances à Villar d'Arène, Olaf s'adonne aux joies de la luge sur diverses pentes enneigées.



L'équipage constitué par Olaf et sa luge est ici assimilé à un point  $M$  de masse  $m$  glissant sans frottement sur les pistes (a) ou (b) représentées sur la figure ci-dessus. La piste (a) est constituée d'un arc de cercle de rayon  $R = 20$  m entre  $A$  et  $B$  puis d'une partie horizontale de longueur  $R$  entre  $B$  et  $C$ . Entre  $A$  et  $B$ ,  $M$  est repéré par l'angle  $\theta$ . La piste (b) est rectiligne, de pente  $\alpha = 20^\circ$  entre  $D$  et  $E$ .  $M$  est repéré par son abscisse  $x$ . Olaf s'élance de  $A$  ou de  $D$  sans vitesse initiale.

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire dans chaque cas un bilan des forces exercées sur  $M$ . Justifier le caractère conservatif du mouvement.

2. Écrire l'énergie cinétique  $E_c$  de  $M$  dans les deux situations.
3. Exprimer dans chaque cas l'énergie potentielle de  $M$ .
4. Donner les expressions littérales de la vitesse de  $M$  en  $B$ ,  $C$  et  $E$ . Calculer ces vitesses avec  $R = 20$  m. Comparer les vitesses en  $E$  et en  $B$ . Commenter.

### Exercice 12.5 Une question d'équilibre

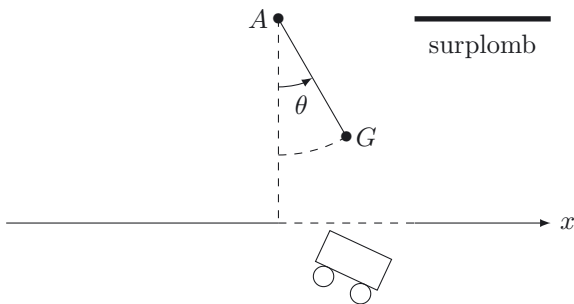
➔ Méthode (12.5)

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  repéré par une coordonnée  $\theta \in [-\pi, \pi]$  possède une énergie potentielle  $E_p(\theta) = E_0\theta - mgR\cos(\theta)$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.  $E_0$ ,  $g$  et  $R$  sont des constantes positives.

1. Montrer qu'il existe des positions d'équilibre si une condition impliquant  $E_0$ ,  $m$ ,  $g$  et  $R$  est vérifiée. Préciser la condition et les deux positions d'équilibre.
2. Étudier la stabilité des deux positions d'équilibre.

### Exercice 12.6 Le wagon infernal

Dans « Indiana Jones et le temple maudit », le héros est contraint à une course-poursuite dans un wagonnet de mine privé de tout moyen de freinage.



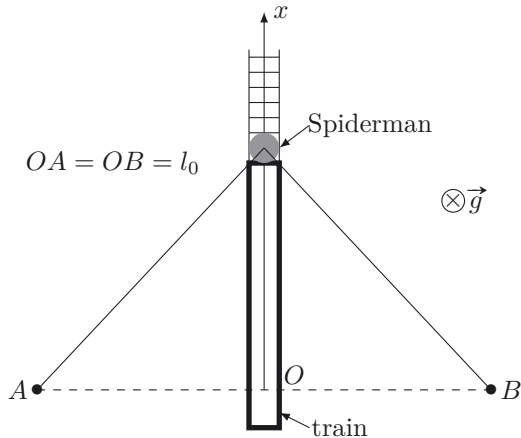
Lancé à une vitesse  $v_0 = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , il ne peut ralentir que sous l'effet de la force de frottement fluide exercée par l'air, de norme  $f_a = hv^2$ , où  $v$  est la vitesse du wagon et  $h = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Un précipice est annoncé à 300 mètres.

Le wagonnet est ici considéré comme un solide en translation, de masse  $M = 380$  kg, Indiana Jones compris. La portion de rails étudiée est horizontale.

1. Par application de la loi de la puissance cinétique, déterminer la vitesse du wagonnet à l'approche du précipice.
2. Indiana Jones utilise son fouet qu'il enroule autour d'une poutre ( $A$ ) afin de se suspendre alors que le wagonnet disparaît dans le gouffre. Il est donc suspendu, la distance  $R$  entre la poutre et son centre de masse  $G$  étant supposée constante et égale à 2,5 m. Pourra-t-il atteindre le surplomb qui se trouve à la même hauteur que  $A$ , à la distance  $R$  de celui-ci? La masse d'Indiana Jones est  $m = 80$  kg.

### Exercice 12.7 Spiderman tend le métro

Dans le film Spiderman 2, l'homme araignée stoppe la progression d'un métro privé de ses freins par un perfide sabotage, sauvant ainsi tous ses passagers d'une mort certaine.

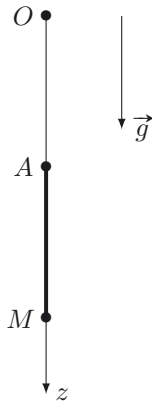


À l'instant initial, Spiderman tisse deux fils qui se collent en  $A$  et  $B$ ; il se trouve alors à l'abscisse  $x = 0$  à l'avant du train. À cet instant, le train de masse totale  $M = 200$  tonnes possède une vitesse  $\vec{V} = V\vec{u}_x$ ,  $V$  prenant la valeur  $V = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Les fils élastiques seront assimilés à des ressorts de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0 = 20 \text{ m}$ . Le train parcourt  $600 \text{ m}$  pendant environ  $50 \text{ s}$  avant de s'arrêter. Nous négligeons tout frottement.

1. Grâce à un bilan d'énergie à préciser, déterminer la raideur  $k$ .
2. En considérant que  $l_0$  est très petit devant la distance parcourue avant l'arrêt, proposer une simplification de l'expression de l'énergie potentielle élastique et estimer la durée du freinage prévue par le modèle.

### Exercice 12.8 La vie tient à un élastique

Alpinistes chevronnés, Peter et Elliot s'offrent une ascension particulièrement difficile. Alors qu'il est assuré par Elliot, situé en  $A$  de cote  $z_A = 10 \text{ m}$  sur la figure, Peter chute depuis le point  $O$  de cote  $z_O = 0$ .



Les deux hommes sont reliés par une corde dite dynamique que nous supposons de masse négligeable. L'élasticité de la corde est telle qu'elle peut être assimilée à un ressort de raideur  $k = 2,1 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $l_0 = 10 \text{ m}$  lorsqu'elle est tendue. La corde est sans influence sur la chute de Peter lorsqu'elle n'est pas tendue.

Peter sera assimilé à un point  $M$  de masse  $m = 70 \text{ kg}$ . La position  $A$  d'Elliot est fixe. Nous négligeons tout frottement.

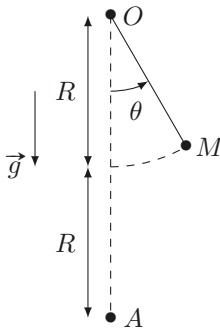
L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Justifier le caractère conservatif de la chute de  $M$ .

2. Exprimer l'énergie potentielle de  $M$  dans la première partie de la chute (la corde n'est pas tendue). Déterminer alors la vitesse  $v_0$  de  $M$  à l'issue de cette première phase.
3. Dans un second temps, la corde se tend. Exprimer alors l'énergie potentielle de  $M$ .
4. Déterminer littéralement puis numériquement la hauteur totale de chute  $H$ .
5. Que vaut la force élastique lorsque  $M$  se trouve en  $z = H$ ? Discuter du rôle de  $k$  sur cette force de « choc ». La force de « choc » maximale que peut supporter un corps humain est évaluée à 12 kN. Conclure quant à l'issue de la mésaventure de Peter.

**Exercice 12.9 Un pendule électrique**

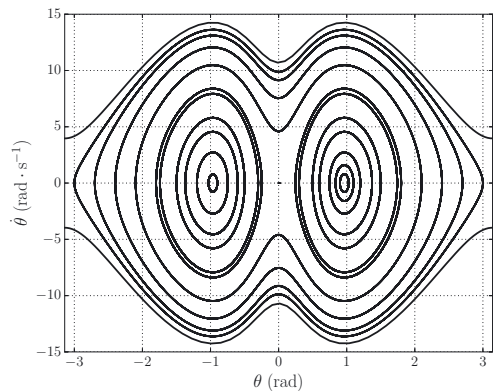
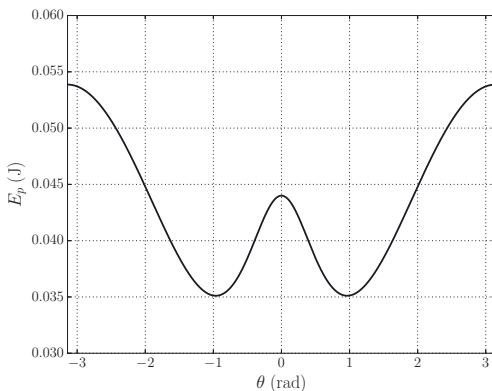
Un pendule est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par une fine tige dont nous négligerons la masse.



La boule de masse  $m = 20$  g sera assimilée à un point matériel noté  $M$ . Une boule identique est placée en  $A$ . Chargées électriquement, avec la même charge, les deux boules se repoussent. La force exercée par  $A$  sur  $M$  s'écrit  $\vec{F}_e = \frac{k}{(AM)^3} \vec{AM}$ , où  $k = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^2$ .

C'est une interaction en  $1/r^2$ , comme l'interaction gravitationnelle, mais répulsive. La liaison d'axe est supposée sans frottement et nous ne tenons pas compte d'éventuels frottements fluides. La longueur du pendule est  $R = 10$  cm.

1. Exprimer la distance  $AM$  en fonction de  $R$  et  $\theta$ .
2. Montrer que la force  $\vec{F}_e$  est conservative et que l'énergie potentielle dont elle dérive peut s'écrire :  $E_{pe}(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)}}$ .
3. Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(\theta)$  de la boule  $M$ .
4. Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure ci-dessous à gauche. Déduire de ce graphique l'existence de positions d'équilibre, et la nature stable ou instable de ces positions.





5. Discuter de la nature de la trajectoire de  $M$  suivant la valeur de son énergie mécanique.
6. Expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase du pendule (à droite sur la figure).

### Exercice 12.10 Un solide... élastique et dilatable

Considérons une interaction entre deux atomes décrite par l'énergie potentielle suivante :

$$E_p = -\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^{10}}, \text{ avec } A \text{ et } B \text{ des constantes positives.}$$

1. Tracer l'allure de  $E_p$  en fonction de  $r$  et montrer qu'elle admet un minimum pour une certaine valeur  $r_e$  de  $r$  que l'on déterminera. Proposer une explication simple à la cohésion des solides.
2. L'expression de l'énergie potentielle peut être développée à l'ordre deux autour de la valeur  $r = r_e$  (développement de Taylor) :  $E_p(r) \simeq E_p(r_e) + (r - r_e) \frac{dE_p}{dr}(r_e) + \frac{(r - r_e)^2}{2} \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_e)$ .  
Développer et commenter l'expression approchée de  $E_p$  autour de la position d'équilibre  $r = r_e$ .
3. Montrer que la force d'interaction entre les atomes peut alors être modélisée par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $r_e$ . Exprimer  $k$ . Proposer une explication à l'élasticité des solides.
4. Une élévation de température d'un solide est associée à une augmentation de l'énergie cinétique des atomes qui le constituent. En s'aidant de la courbe d'énergie potentielle, expliquer brièvement la dilatation des solides généralement observée lorsque leur température augmente.

# Corrections

## Interro de cours

1. Réponse (b). La réponse c correspond à la loi de de la puissance cinétique.
2. Réponse (a). La réponse c correspond à la loi de la puissance mécanique.
3. Réponse (c). Seule la loi de l'énergie cinétique fait intervenir directement la valeur de la vitesse (élevée au carré).
4. Réponse (b). Les positions d'équilibre d'un système conservatif correspondent aux extrema de son énergie potentielle.
5. Réponse (b). L'énergie mécanique d'un système conservatif reste constante au cours du temps.
6. Réponse (c). On peut dériver  $E_m = cte$  pour établir l'équation du mouvement. À l'inverse on peut intégrer l'équation du mouvement pour établir l'équation de conservation de l'énergie mécanique, d'où son nom.
7. Réponse (b). Une position d'équilibre instable se traduit par un maximum local sur le profil énergétique et une position d'équilibre stable se traduit par un minimum local.
8. Réponse (a). Des oscillations sinusoidales se traduisent par une trajectoire de phase elliptique. Cela correspond au cas des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable. Dans ce voisinage, on peut approcher l'expression de l'énergie potentielle par une fonction parabolique en  $x^2$  et ainsi retrouver l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique.
9. Réponses (a) et (c). Les points dont les coordonnées dans le portrait de phase correspondent aux conditions initiales de ces deux cas sont sur la trajectoire de phase d.
10. Réponse (c). Le système est abandonné sans vitesse dans une position qui n'est pas une position d'équilibre, il se met donc en mouvement. Lorsque  $\dot{x} > 0$  alors  $x$  croît. La trajectoire est donc nécessairement décrite dans le sens horaire. Enfin la trajectoire de phase n'est visiblement pas une ellipse. L'hypothèse harmonique ne peut-être faite, le mouvement n'est pas sinusoidal.

## Exercice 12.1

1.  $M$  est soumis à son poids  $-mg\vec{u}_y$ , et à la tension du filin  $\vec{T} = T\vec{u}_y$ .
2. Le poids dérive de l'énergie potentielle  $E_p = mgy$ . La loi de la puissance cinétique s'écrit :  $\frac{dE_c}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} + P_{\vec{T}}$  avec  $P_{\vec{T}}$  la puissance de la force de traction. La vitesse étant constante,  $\frac{dE_c}{dt} = 0$  et  $P_{\vec{T}} = mg\frac{dy}{dt} = mgv_0 = 3,3 \cdot 10^2 \text{ W}$ , ce qui correspond à la puissance dépensée par le treuil au cours de la manœuvre de sauvetage.
3. La loi de l'énergie mécanique s'écrit :  $\Delta(E_c + E_p) = W_{\vec{T}}$  avec  $W_{\vec{T}}$  le travail de la force de traction. La vitesse étant constante,  $\Delta E_c = 0$  et  $W_{\vec{T}} = mgH = 33 \text{ kJ}$ , ce qui correspond à l'énergie fournie par le treuil pour remonter les alpinistes.

## Exercice 12.2

1. Par définition,  $E_{c,I} = \frac{1}{2}mv_0^2$ , et  $E_{c,F} = 0$  car sa vitesse finale est nulle.
2. La pierre est soumise à son poids et à la réaction normale au support, qui sont perpendiculaires à son déplacement donc ne travaillent pas, et à la force de frottement tangentielle  $\vec{F}$ , dont le travail est  $W(\vec{F})_{O \rightarrow M_0} = \int_O^{M_0} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -F_0 D$ .

3. On applique la loi de l'énergie cinétique à la pierre entre  $O$  et  $M_0$  :  $E_{c,F} - E_{c,I} = -\frac{1}{2}mv_0^2 = -F_0D$ ,  
 soit  $v_0 = \sqrt{\frac{2F_0D}{m}} = 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 12.3**

1. Pour le chemin (a),  $r = R$ ,  $\theta$  varie entre 0 et  $\pi/2$ , d'où  $\vec{F}(M) = R^2 d^2 \vec{u}_\theta$  et  $d\vec{OM} = R d\theta \vec{u}_\theta$ , soit  $W_a = \int_{(a)} \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_0^{\pi/2} d^2 R^2 R d\theta = \frac{\pi}{2} d^2 R^3$ .  
 Pour le chemin (b), entre  $A$  et  $C$ ,  $\theta = 0$ ,  $r$  varie de  $R$  à 0 et  $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r$ , entre  $C$  et  $B$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $r$  varie de 0 à  $R$  et  $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r$  :  $W_b = \int_{(b)} \vec{F}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_R^0 r^2 d^2 \vec{u}_{\theta=0} \cdot dr \vec{u}_r + \int_0^R r^2 d^2 \vec{u}_{\theta=\pi/2} \cdot dr \vec{u}_r = 0$ .  
 Le résultat étant différent selon le chemin choisi, la force  $\vec{F}$  n'est pas conservative.  
 2. En reprenant le même raisonnement, on aboutit à  $W'_a = 0$ ,  $W'_b = 0$  :  $\vec{F}'$  est conservative.  
 3. On calcule le travail élémentaire de la force  $\vec{F}'$  pour un déplacement infinitésimal  $d\vec{OM}$ . En coordonnées polaires,  $d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$ . Ainsi :  $\delta W' = d^2 r^2 \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = d^2 r^2 dr$ .  
 On obtient donc  $\delta W' = -dE'_p$  avec  $E'_p = -\frac{d^2}{3} r^3 + \text{cste}$ , énergie potentielle dont dérive  $\vec{F}'$ .

**Exercice 12.4**

1. On introduit pour le cas (a) le système de coordonnées polaires entre  $A$  et  $B$ , avec les deux vecteurs de base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , puis, entre  $B$  et  $C$ , un système de coordonnées cartésiennes  $(\vec{u}_x$  parallèle à  $BC$  et orienté de  $B$  vers  $C$ ,  $\vec{u}_z$  vertical ascendant).  
 $M$  est soumis entre  $A$  et  $B$  à son poids  $\vec{P} = mg(\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta)$ , et à la réaction de la piste  $\vec{N} = -N \vec{u}_r$ . Entre  $B$  et  $C$ , le poids sera  $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$  et la réaction de la piste  $\vec{N} = N \vec{u}_z$ .  
 Dans le cas (b),  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P} = mg(-\cos \alpha \vec{u}_y + \sin \alpha \vec{u}_x)$ , et à la réaction de la piste  $\vec{N} = N \vec{u}_y$ .  
 Comme il n'y a pas de frottement, la réaction de la piste est normale à cette dernière, et ne travaille pas, puisqu'elle est perpendiculaire à la vitesse de  $M$ . Le poids étant conservatif, le mouvement sera conservatif.  
 2. Dans le cas (a), entre  $A$  et  $B$  :  $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $E_c = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$ , entre  $B$  et  $C$  :  $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$  et  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ .  
 Dans le cas (b),  $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ .  
 3. Dans le cas (a), on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en  $z = 0$ , soit pour  $M$  en  $B$  : entre  $A$  et  $B$ ,  $E_p = mgz_M = mgR(1 - \sin \theta)$ , entre  $B$  et  $C$ ,  $E_p = 0$ . Dans le cas (b), on prend l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur en  $x = 0$ , soit pour  $M$  en  $D$  :  $E_p = -mgx \sin \alpha$ .  
 4. Dans le cas (a) entre  $A$  et  $B$  :  $\frac{1}{2} m v^2(\theta) + mgR(1 - \sin \theta) = mgR$ . Entre  $B$  et  $C$ ,  $E_p = 0$ , donc  $E_c = mgR$ .  
 On obtient donc  $v(B) = \sqrt{2gR} = v(C) = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Dans le cas (b) :  $\frac{1}{2} m v^2 - mgx \sin \alpha = 0$ , d'où  $v(E) = \sqrt{2gx_E \sin \alpha} = \sqrt{2gR} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On obtient donc  $v(B) = v(E)$  : seule compte en l'absence de frottement la variation d'altitude de  $M$ , et la vitesse obtenue est celle d'un mouvement de chute libre sur la hauteur  $R$ .

**Exercice 12.5**

- Pour déterminer les positions d'équilibre, on dérive  $E_p(\theta)$  par rapport à  $\theta$  et on cherche à annuler cette dérivée.  $\frac{dE_p}{d\theta} = E_0 + mgR \sin(\theta) = 0$  amène à  $\sin(\theta) = -\frac{E_0}{mgR}$ . Pour que cette équation admette des solutions, il faut que  $\frac{E_0}{mgR} \leq 1$ . Dans ce cas, on obtient pour les deux positions d'équilibre entre  $[-\pi, +\pi]$  :  $\theta_1 = -\arcsin\left(\frac{E_0}{mgR}\right) \in [-\pi/2, 0]$  et  $\theta_2 = -\pi + \arcsin\left(\frac{E_0}{mgR}\right) \in [-\pi, -\pi/2]$ .
- Pour étudier la stabilité de ces équilibres, il faut dériver deux fois l'énergie potentielle par rapport à  $\theta$  et étudier le signe de cette dérivée seconde pour les positions d'équilibre déterminées précédemment.  $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgR \cos(\theta)$  est positive pour  $\theta_1$  et négative pour  $\theta_2$  :  $\theta_1$  est donc une position d'équilibre stable,  $\theta_2$  une position d'équilibre instable.

**Exercice 12.6**

- Le wagonnet est soumis à son poids, qui ne travaille pas, à la réaction des rails perpendiculaire à ces derniers, qui ne travaille pas, et à la force de frottement fluide. La loi de la puissance cinétique appliquée à ce solide en translation amène à :  $\frac{dE_c}{dt} = Mv \frac{dv}{dt} = -hv^3$ . On aboutit à  $\frac{dv}{v^2} = -\frac{h}{M} dt$  qu'on intègre entre  $t = 0$  ( $v(0) = v_0$ ) et  $t$  :  $v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{h}{M}v_0 t}$ .  
En intégrant de nouveau cette équation, on obtient :  $x(t) - x_0 = \frac{M}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{M}v_0 t\right)$ . Le temps  $t_f$  pour lequel le wagon arrive au précipice est donné par  $x(t_f) - x_0 = d = 300$  m. Nous obtenons ainsi :  $t_f = \frac{M}{hv_0} \left(\exp\left(\frac{hd}{M}\right) - 1\right) = 18$  s, et  $v_f = v(t_f) = 41$  km · h<sup>-1</sup>.
- Le système est conservatif, l'énergie mécanique d'Indiana Jones se conserve et vaut initialement  $\frac{1}{2}mv_f^2$  ;  $z$  étant l'altitude de G comptée à partir de la position initiale, il vient ainsi :  $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_f^2$ , soit  $z = \frac{1}{2g}(v_f^2 - v^2) < \frac{1}{2g}v_f^2 = 6,6$  m. Indy pourra atteindre le surplomb.

**Exercice 12.7**

- Comme tous les frottements sont négligés, le système est conservatif. La seule énergie potentielle à prendre en compte est l'énergie potentielle élastique des ressorts,  $E_{pe} = 2\frac{1}{2}k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2$ . La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :  $\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + 2\frac{1}{2}k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}MV^2 = k\left(\sqrt{l_0^2 + x_f^2} - l_0\right)^2$  avec  $x_f$  l'abscisse d'arrêt du train. Il vient ainsi :  $k = \frac{1}{2} \frac{MV^2}{\left(\sqrt{l_0^2 + x_f^2} - l_0\right)^2} = 1,9 \cdot 10^2$  N · m<sup>-1</sup>.
- Lorsqu'on est proche de l'arrêt, on peut considérer que  $x \gg l_0$ , soit  $E_p \approx kx^2$ . On aboutit alors à :  $\frac{1}{2}Mv^2 + kx^2 \approx \frac{1}{2}MV^2$ . En dérivant cette expression par rapport au temps, il vient :  $M \frac{dv}{dt} + 2kx = 0$ . En identifiant  $\frac{dv}{dt}$  à  $-\frac{V}{\tau}$ , on trouve  $\tau \approx \frac{MV}{2kx_f} \approx 22$  s : le temps trouvé par cette méthode approchée est plus faible que celui annoncé dans l'énoncé, mais l'ordre de grandeur est respecté.

**Exercice 12.8**

1. Lorsque  $M$  est en chute libre (corde non tendue), il n'est soumis qu'à son poids qui dérive de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = -mgz$ . Lorsque la corde se tend, se rajoute la tension de la corde, qui dérive de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe} = \frac{k}{2}(z - z_A - l_0)^2 = \frac{k}{2}(z - 2l_0)^2$  (la longueur de la corde est  $z - z_A$ ). Tous les frottements étant négligés, la chute de  $M$  se fera avec conservation de l'énergie mécanique.
2.  $E_{pp} = -mgz$ . La conservation de l'énergie mécanique s'écrit  $\frac{1}{2}mv^2 - mgz = 0$ , avec  $z - z_A < l_0$ , soit  $z < 2l_0$ , car  $v = 0$  en  $z = 0$ . Cette phase cesse en  $z = 2l_0$ , où la vitesse est  $v_0 = \sqrt{4gl_0} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
3. Dans la seconde phase, l'énergie potentielle devient  $E_p = -mgz + \frac{k}{2}(z - 2l_0)^2$ .
4. Dans cette seconde phase, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit :  $\frac{1}{2}mv^2 - mgz + \frac{k}{2}(z - 2l_0)^2 = 0$ . Cette phase cesse en  $z = H$  tel que  $v(H) = 0$ .  $H$  vérifie donc l'équation suivante :  

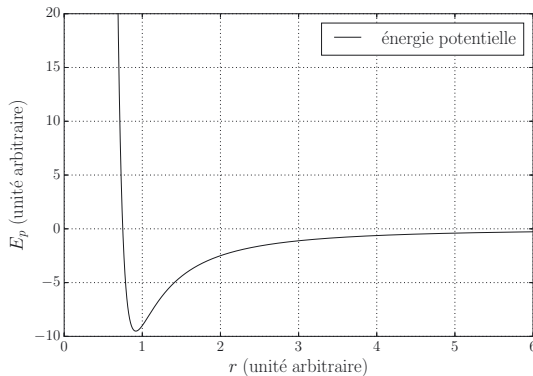
$$H^2 - 2 \left( 2l_0 + \frac{mg}{k} \right) H + 4l_0^2 = 0$$
. On aboutit à  $H = \left( 2l_0 + \frac{mg}{k} \right) + \sqrt{\left( 2l_0 + \frac{mg}{k} \right)^2 - 4l_0^2} = 24 \text{ m}$ , seule racine de valeur supérieure à  $2l_0$ .
5. La force élastique en  $H$  vaut  $\vec{F} = -k(H - 2l_0)\vec{u}_z$ , de norme  $F = k(H - 2l_0) = 8,3 \text{ kN}$ . En remplaçant  $H$  par son expression, nous constatons que  $F$  croît avec  $k$ . Heureusement pour Peter,  $F < 12 \text{ kN}$  : il s'en tirera avec quelques contusions, mais bien vivant !

**Exercice 12.9**

1. Pour exprimer la distance  $AM$ , appliquons la relation de Chasles :  $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM}$ . Nous en déduisons  $AM = \sqrt{\vec{AM} \cdot \vec{AM}} = \sqrt{4R^2 + R^2 - 4R^2 \cos(\theta)} = R\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)}$ .
2. Le travail élémentaire de la force s'écrit  $\vec{F}_e : \delta W = \vec{F}_e \cdot d\vec{AM} = \frac{k}{(AM^2)^{3/2}} \left[ \frac{1}{2} d(AM^2) \right] = -dE_{pe}$  avec  $E_{pe} = \frac{k}{(AM^2)^{1/2}} = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)}}$ .
3. La liaison d'axe étant supposée sans frottement, il nous suffit de rajouter l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = mgz_M = -mgR \cos(\theta)$  (origine prise en  $O$ ) à l'énergie potentielle ci-dessus, d'où la forme suivante pour l'énergie potentielle totale de la boule :  $E_p(\theta) = -mgR \cos(\theta) + \frac{k}{R\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)}}$ .
4. Il y a deux positions d'équilibre stables (cuvettes de potentiel) au voisinage de  $\pm 1 \text{ rad}$ , et trois positions d'équilibre instables (maxima d'énergie potentielle) en  $-\pi, 0$  et  $\pi$ .
5. La conservation de l'énergie mécanique amène à :  $\frac{1}{2}mv^2 = E_{m0} - E_p(\theta)$ . Nous pouvons donc considérer plusieurs configurations pour l'énergie mécanique.
  - Cas 1 :  $E_{m0} < 0,035 \text{ J}$  : pas de mouvement possible.
  - Cas 2 :  $0,035 \text{ J} \leq E_{m0} \leq 0,044 \text{ J}$  : mouvement oscillatoire périodique autour d'une des deux positions d'équilibre stable.
  - Cas 3 :  $0,044 \text{ J} < E_{m0} \leq 0,054 \text{ J}$  : mouvement périodique entre deux valeurs correspondant à l'intersection de la droite  $E_{m0}$  avec la courbe d'énergie potentielle.
  - Cas 4 :  $E_{m0} > 0,054 \text{ J}$  : mouvement révolitif.
6. On observe des trajectoires quasi-elliptiques au voisinage des deux positions d'équilibre stables, ce qui correspond au cas 2 cité ci-dessus, puis des trajectoires fermées non elliptiques avec un minimum local pour  $\dot{\theta}$  en  $\theta = 0$ , qui correspondent au cas 3, et enfin deux trajectoires de phases ouvertes symétriques par rapport à l'axe correspondant au cas 4.

**Exercice 12.10**

1. L'allure de  $E_p$  est représentée ci-dessous :



En calculant sa dérivée, il vient  $\frac{dE_p}{dr} = \frac{2A}{r^3} - \frac{10B}{r^{11}}$ .  
 $\frac{dE_p}{dr} = 0$  pour  $r = r_e = \left(\frac{5B}{A}\right)^{1/8}$ , et cette position est un minimum d'énergie potentielle, d'énergie  $E_{p,m}$ . Ce puits de potentiel est généralement très profond dans les solides, il faut donc fournir une très grande énergie pour les dissocier, ce qui explique la grande cohésion des solides.

2.  $\frac{d^2E_p}{dr^2} = -\frac{6A}{r^4} + \frac{110B}{r^{12}}$  d'où  $\frac{d^2E_p}{dr^2}(r_e) = \frac{16A}{r_e^4}$ . Il vient donc :  $E_p(r) = E_p(r_e) + \frac{8A}{r_e^4}(r - r_e)^2$
3. Nous voyons que  $E_p(r) = E_p(r_e) + \frac{1}{2}k(r - r_e)^2$ , ce qui correspond à la forme de l'énergie élastique d'un ressort de raideur  $k = \frac{16A}{r_e^4}$ . Nous pouvons modéliser l'interaction entre deux atomes d'un solide par un ressort fictif très raide, qu'on peut comprimer ou étirer, ce qui explique la faible élasticité des solides.
4. Lorsque la température s'élève, l'énergie mécanique  $E_m$  devient plus grande, et s'approche de 0. Si on augmente l'énergie mécanique, les deux valeurs limites de  $r$  correspondant à  $E_p(r) = E_m$ ,  $r_1 < r_e$  et  $r_2 > r_e$  évoluent, mais la courbe d'énergie potentielle étant dissymétrique par rapport à  $r_e$ ,  $r_2$  augmente plus rapidement avec  $E_m$  que  $r_1$  ne diminue. La distance moyenne entre les deux atomes  $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$  devient plus grande que  $r_e$  : phénomène de dilatation des solides.

# Mouvements de particules chargées

## L'essentiel du cours

### Contexte

La spectrométrie de masse est une méthode d'analyse chimique reposant sur le mouvement d'ions dans des champs électriques et magnétiques. Comment ces champs peuvent-ils influencer le mouvement des particules chargées ?

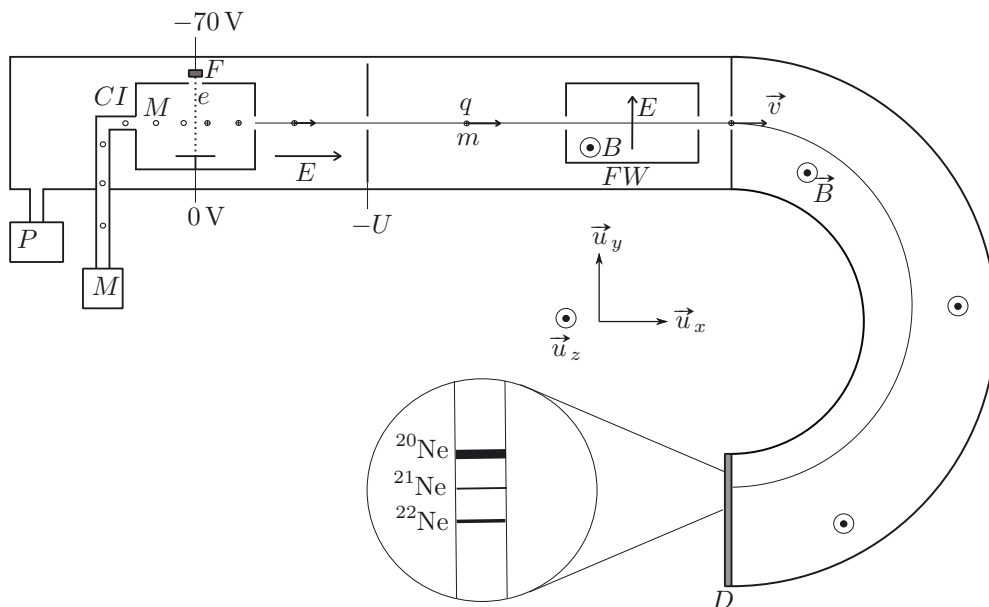


Figure 13.1. Spectromètre de masse.

La figure 13.1 présente le schéma d'un spectromètre de masse à **ionisation par impact électronique** et à **secteur magnétique**. Une pompe à vide ( $P$ ) maintient l'ensemble à une pression de l'ordre de  $10^{-4}$  Pa. Les molécules ou atomes à étudier ( $M$ ) sont introduits sous forme gazeuse dans la **chambre d'ionisation** ( $CI$ ). Des électrons sont émis par un filament de tungstène ( $F$ ) porté à incandescence et accélérés grâce à une différence de potentiel de  $-70$  V établie entre

la chambre et le filament. En entrant en collision avec les molécules ou atomes présents dans la chambre, ils provoquent la formation de fragments ionisés ou de cations atomiques. Les ions ainsi produits, de masse  $m$  et de charge  $q > 0$ , sortent de la chambre d'ionisation pour entrer dans la **zone d'accélération** où ils sont accélérés par un champ électrique produit par une différence de potentiel  $-U$  de l'ordre de  $-1\text{ kV}$  à  $-10\text{ kV}$ . Ils pénètrent ensuite dans un **filtre de vitesse de Wien (FW)** constitué d'une chambre où règnent un champ électrique et un champ magnétique perpendiculaires. Ce filtre réduit la dispersion des vitesses en ne laissant sortir que les ions dont la vitesse est très proche du rapport  $E/B$ .

Les ions de vitesse  $\vec{v}$  entrent par une fente dans une zone circulaire appelée **secteur magnétique** où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire. La position du point d'impact d'un ion sur le détecteur ( $D$ ) dépend de sa vitesse  $v$  et de son rapport  $q/m$ . On analyse, pour une vitesse  $v$  fixée, la répartition et la densité des points d'impact sur le détecteur. Si  $M$  est un atome, on peut ainsi obtenir sa composition isotopique. Par exemple, les isotopes  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{21}\text{Ne}$  et  $^{22}\text{Ne}$  du néon donnent trois positions d'impact pour les ions  $\text{Ne}^+$ . Si  $M$  est une molécule, l'analyse des points d'impact des fragments donne une information sur sa composition chimique.

Dans ce chapitre nous allons mettre en équation le mouvement d'une particule chargée dans la zone d'accélération en sortie de la chambre d'ionisation puis dans le secteur magnétique.

#### □ Pourquoi faut-il un vide poussé dans le spectromètre de masse ?

Le vide poussé (de l'ordre de  $10^{-4}\text{ Pa}$ ) est nécessaire afin de limiter les interactions entre les particules étudiées et les particules composant l'air.

## ■ 1 Action d'un champ électrique uniforme et stationnaire

#### □ Qu'est-ce qu'un champ uniforme et stationnaire ?

Un champ est défini localement, en tout point  $M$  d'un domaine d'espace  $\mathcal{D}$ . Il est dit **uniforme** lorsque sa valeur est la même en tout point de  $\mathcal{D}$ , à un instant  $t$ . Il est dit **stationnaire** lorsque sa valeur en un point  $M$  quelconque de  $\mathcal{D}$  ne dépend pas du temps.

#### □ Comment créer un champ électrique uniforme et stationnaire ?

Le champ électrique à l'intérieur d'un condensateur plan, aux bornes duquel on établit une différence de potentiel  $U$ , peut être considéré comme **uniforme** lorsqu'on se situe loin des bords. Ce champ est **dirigé vers l'armature de potentiel le plus bas**. Si en outre la différence de potentiel est indépendante du temps, il est **stationnaire**. C'est le cas dans la zone d'accélération du spectromètre de masse présenté précédemment où la tension  $U$  vaut quelques kV.

En notant  $d$  la distance entre les 2 armatures du condensateur, le module du champ électrostatique uniforme créé vaut :

$$E = \frac{U}{d}$$

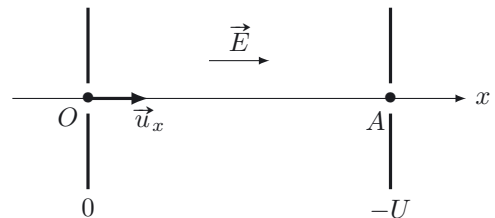


Figure 13.2. Champ électrique dans un condensateur plan.



□ Quelles sont les forces appliquées à une particule chargée plongée dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  ?

La particule de masse  $m$  et de charge  $q$  est soumise à :

- la force gravitationnelle :  $\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}$  où  $\vec{\mathcal{G}}$  est le champ gravitationnel terrestre ;
- la force électrostatique :  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ .

□ La force gravitationnelle a-t-elle beaucoup d'influence sur le mouvement de la particule ?

Pour répondre à cette question étudions les ordres de grandeur des modules de ces forces dans le cas où la particule est un proton de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg et de charge  $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C plongé dans un champ électrostatique uniforme de module  $E = 1,0 \cdot 10^3$  V · m<sup>-1</sup> à la surface de la Terre :

- $F_g = m\mathcal{G} = 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9,8 = 1,6 \cdot 10^{-26}$  N ;
- $F_e = qE = 1,60 \cdot 10^{-19} \times 1,0 \cdot 10^3 = 1,6 \cdot 10^{-16}$  N.

D'où :  $F_g/F_e \simeq 10^{-10}$  N.

**La force gravitationnelle est tout à fait négligeable devant la force électrostatique.**

Étudions maintenant le mouvement, dans un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{u}_x$  uniforme et stationnaire, d'une particule assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , de charge  $q > 0$  et pénétrant dans ce champ en un point  $O$  sans vitesse initiale (figure 13.2).

□ Quelle est la nature du mouvement de la particule ?

L'étude est faite dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire considéré **galiléen**, auquel on associe l'axe cartésien  $(Ox)$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule conduit à :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = m\vec{a} = q\vec{E} \implies \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$



Le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et stationnaire se fait à **vecteur accélération constant**.

Par projection sur  $(Oy)$  et  $(Oz)$  :  $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ . **Compte tenu des conditions initiales**, nous en déduisons  $y = z = 0$  à chaque instant. Le mouvement de la particule est donc **rectiligne** selon l'axe  $Ox$ . Puis par projection sur l'axe  $(Ox)$  :

$$(13.1) \quad \ddot{x} = \frac{qE}{m}$$

L'accélération  $\ddot{x}$  étant constante, le mouvement rectiligne est **uniformément accéléré**.



Le mouvement de la particule n'est pas dévié parce que sa vitesse initiale est parallèle à  $\vec{E}$ . Il le serait si ce n'était pas le cas.

□ Quelle est la vitesse finale de la particule à la sortie du champ accélérateur ?

Pour répondre à cette question, nous pouvons utiliser une loi énergétique ou l'équation du mouvement 13.1 obtenue à l'aide de la loi de la quantité de mouvement.

**1<sup>re</sup> méthode : Utilisation d'une loi énergétique**

L'application à la particule, dans le référentiel galiléen du laboratoire, de la loi de l'énergie cinétique entre les points  $O$  et  $A$  conduit à :

$$E_c(A) - E_c(O) = \int_O^A \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = \int_0^d qE \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x \implies \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = qEd$$

D'où nous déduisons :

$$(13.2) \quad v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$



Il est aussi possible d'utiliser la loi de l'énergie mécanique sachant que l'énergie potentielle d'une particule chargée dans un champ électrostatique est  $E_{pelec} = qV + cste$  où  $V$  est le potentiel électrique au point  $M$ .

**2<sup>e</sup> méthode : Utilisation de la loi de la quantité de mouvement**

La loi de la quantité de mouvement nous a permis d'établir l'équation du mouvement (13.1). Par intégrations successives avec pour conditions initiales :  $\vec{v}(0) = \vec{0}$  et  $\vec{OM}(0) = \vec{0}$ , nous obtenons :

$$\ddot{x} = \frac{qE}{m} \quad ; \quad \dot{x} = \frac{qE}{m}t \quad ; \quad x = \frac{qE}{2m}t^2$$

Soit  $t_1$  la date d'arrivée de la particule en  $A$  :  $x(t_1) = d = \frac{qE}{2m}t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2md}{qE}}$ .

Puis en reportant  $t_1$  dans l'expression de la vitesse :  $v_f = \dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{2dqE}{m}}$ . Or  $E = \frac{U}{d}$  donc :  $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ . Nous retrouvons bien le résultat précédent.

**Méthode 13.1 : Étude du mouvement d'une particule dans un champ électrique**

Soit une particule de charge  $q$  pénétrant en  $O$  dans un champ  $\vec{E}$  uniforme et stationnaire avec une vitesse  $\vec{v}_0$ .

- Cas où  $\vec{v}_0$  est parallèle à  $\vec{E}$ .
  - Choisir un repère cartésien tel qu'un des axes (par exemple  $Ox$ ) soit parallèle à  $\vec{E}$ .
  - Appliquer la loi de la quantité de mouvement en projection sur l'axe  $Ox$  ou la loi de l'énergie cinétique pour montrer que le mouvement est rectiligne uniformément accéléré dans la direction de  $\vec{E}$  et déterminer la vitesse finale atteinte.
- Cas où  $\vec{v}_0$  n'est pas parallèle à  $\vec{E}$ .
  - Choisir un repère cartésien tel qu'un des axes (par exemple  $Ox$ ) soit parallèle à  $\vec{E}$  et qu'un des plans de projection (par exemple  $Oxy$ ) soit défini par  $O$ ,  $\vec{E}$  et  $\vec{v}_0$ .
  - Appliquer la loi de la quantité de mouvement et la projeter sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ .
  - Intégrer les équations différentielles obtenues pour montrer que le mouvement est uniformément accéléré dans la direction  $Ox$  et uniforme dans la direction  $Oy$ .
  - Déterminer l'équation de la trajectoire et montrer que c'est une parabole.

➔ Exercice (13.1)



Le champ électrique modifie toujours le module de la vitesse de la particule mais ne modifie la direction de celle-ci que si la vitesse initiale ne lui est pas parallèle.

## ■ 2 Action d'un champ magnétique uniforme et stationnaire

### □ Comment créer un champ magnétique uniforme et stationnaire ?

Les champs magnétiques suivants peuvent être considérés uniformes et stationnaires.

- Le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de grande longueur et parcouru par un courant constant, loin de ses extrémités.
- Le champ magnétique créé par un aimant en U, entre ses branches.

### □ Quelles sont les forces appliquées à une particule chargée plongée dans un champ magnétostatique $\vec{B}$ ?

La particule de masse  $m$ , de charge  $q$  et animée dans le référentiel d'étude de la vitesse  $\vec{v}$  est soumise à :

- la force gravitationnelle :  $\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}$  où  $\vec{\mathcal{G}}$  est le champ gravitationnel terrestre ;
- la force magnétique :  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

L'expression de la force magnétique fait appel à la notion de **produit vectoriel de deux vecteurs**. Nous renvoyons le lecteur qui aurait besoin de précisions concernant cette opération vectorielle au paragraphe 5, en fin de chapitre.

### □ La force gravitationnelle a-t-elle beaucoup d'influence sur le mouvement de la particule ?

Pour répondre à cette question, étudions les ordres de grandeur des modules de ces forces dans le cas où la particule est un proton de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg, de charge  $q = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C, animé d'une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  de module  $v = 1,00 \cdot 10^6$  m · s<sup>-1</sup> et plongé dans un champ uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  de module  $B = 1,0$  T à la surface de la Terre :

- $F_g = m\mathcal{G} = 1,67 \cdot 10^{-27} \times 9,8 = 1,6 \cdot 10^{-26}$  N ;
- $F_m = qvB = 1,60 \cdot 10^{-19} \times 1,00 \cdot 10^6 \times 1,0 = 1,6 \cdot 10^{-13}$  N.

D'où :  $F_g/F_m \simeq 10^{-13}$  N.

**La force gravitationnelle est tout à fait négligeable devant la force magnétique.**

Étudions maintenant le mouvement, dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  ( $B > 0$ ) uniforme et stationnaire, d'une particule assimilée à un point matériel de masse  $m$ , de charge  $q > 0$  et pénétrant dans ce champ en un point  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}(0) = v_0\vec{u}_x$  ( $v_0 > 0$ ).

Cette situation correspond à celle du secteur magnétique du spectromètre de masse.

### □ Le champ magnétique modifie-t-il le module de la vitesse de la particule ?

Appliquons la loi de la puissance cinétique à la particule, dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_m) = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$$

En raison des propriétés du produit vectoriel,  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  est toujours perpendiculaire à  $\vec{v}$ . Donc  $\mathcal{P}(\vec{F}_m) = 0$  et l'énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  de la particule est une constante de son mouvement.



La puissance de la force magnétique étant nulle, **un champ magnétique ne peut pas modifier le module de la vitesse d'une particule chargée.**

□ Dans quel sens la particule est-elle déviée à son entrée dans le champ magnétique ?

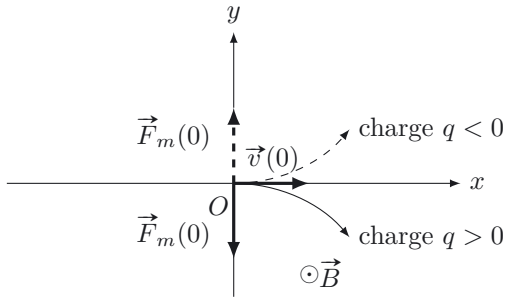


Figure 13.3. Déviation d'une particule à  $t = 0$ .

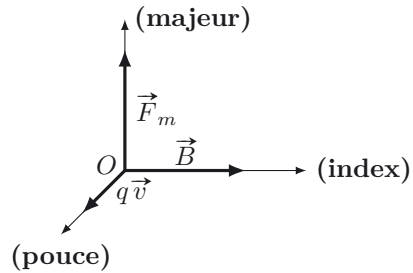


Figure 13.4. Direction et sens de la force magnétique.

À son entrée dans le champ magnétique la particule est soumise à la force magnétique :

$$\vec{F}_m(0) = q\vec{v}(0) \wedge \vec{B} = qv_0\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = qv_0B(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z) = -qv_0B\vec{u}_y$$

Si la charge  $q$  est positive, elle est déviée vers la droite, vers les  $y < 0$ . Si elle est négative, elle est déviée vers la gauche, vers les  $y > 0$  (figure 13.3).

□ Quelle est la nature du mouvement de la particule dans le champ magnétique ?

Nous admettons que la trajectoire d'une particule chargée pénétrant dans un champ magnétostatique uniforme avec **un vecteur vitesse perpendiculaire à ce champ est un cercle dont le plan est normal au champ.** La démonstration de ce résultat est hors programme.

En tout point  $M$  d'un cercle de centre  $C$ , le rayon  $CM$  est normal à la tangente au cercle passant par  $M$ . Le centre  $C$  du cercle trajectoire de la particule se trouve donc sur la normale au vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$  passant par le point  $O$  d'entrée dans le champ, à une distance de celui-ci égale au rayon  $R$  de la trajectoire. Ce centre se trouve d'un côté ou de l'autre du point d'entrée. Cela dépend du sens du champ magnétique et du signe de la charge de la particule. Pour définir ce côté, il suffit de déterminer le sens de la force magnétique à l'entrée dans le champ comme nous l'avons fait précédemment (figure 13.5).

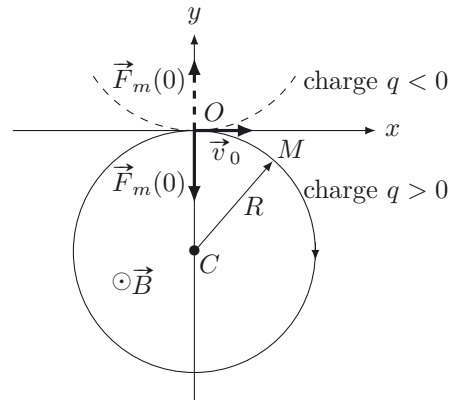
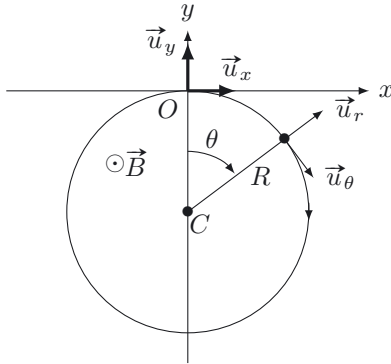


Figure 13.5. Trajectoire circulaire d'une particule chargée.

□ Comment déterminer l'expression du rayon de la trajectoire ?



L'étude est menée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire supposé galiléen, auquel est associé le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

La trajectoire étant un cercle de rayon  $R$  et de centre  $C$ , il est pertinent d'utiliser les coordonnées polaires  $(R, \theta)$  pour repérer la position d'un point  $M$  de la trajectoire ainsi que la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  liée à ce point, telle que  $\overrightarrow{CM} = R\vec{u}_r$  (figure 13.6).

Figure 13.6. Base polaire liée à  $M$ .

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la particule dans le référentiel  $\mathcal{R}$  conduit à :

$$\left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \implies m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

avec  $\vec{v} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = v\vec{u}_\theta$  et  $\vec{a} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$  (voir méthode 10.4 du chapitre 10 de cinématique).

Nous en déduisons :  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q(v\vec{u}_\theta) \wedge B\vec{u}_z = qvB(\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z) = -qvB\vec{u}_r$  et :

$$(13.3) \quad m \left( -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta \right) = -qvB\vec{u}_r$$

En projetant l'équation vectorielle 13.3 sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  nous obtenons les deux équations suivantes :

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \quad \text{et} \quad m\frac{dv}{dt} = 0$$

De la seconde nous déduisons que **le mouvement circulaire est uniforme**,  $v$  restant donc égale à  $v_0$  au cours du mouvement.

De la première nous déduisons l'expression du rayon de la trajectoire :  $R = \frac{mv_0}{qB}$ .



Le rayon de la trajectoire circulaire est une fonction croissante du rapport  $m/q$  de la particule et de sa vitesse  $v_0$ .

### Retour au contexte du spectromètre de masse :

Les particules arrivent toutes à l'entrée du secteur magnétique du spectromètre de masse avec la même vitesse. Les isotopes d'un même élément sont séparés dans ce secteur magnétique et produisent des points d'impact différents au niveau du détecteur en raison de rapports  $m/q$  différents.

**Méthode 13.2 : Étude du mouvement d'une particule dans un champ magnétique**

Soit une particule de charge  $q$  pénétrant en  $O$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  **uniforme** et **stationnaire** avec une vitesse  $\vec{v}_0$  **perpendiculaire** à ce champ. Son mouvement dans le champ magnétique est **circulaire uniforme**, dans le plan passant par  $O$  et normal à  $\vec{B}$ .

- Le centre  $C$  de la trajectoire se trouve sur la droite passant par  $O$  et normale à  $\vec{v}_0$ .
- Le côté de  $O$  où se trouve  $C$  se détermine à partir du sens de la force magnétique  $\vec{F}_m(0) = q\vec{v}_0 \wedge \vec{B}$  subie par la particule en  $O$ . Il dépend du signe de  $q$  et du sens de  $\vec{B}$ .
- Le rayon de la trajectoire se détermine en projetant la loi de la quantité de mouvement sur le vecteur unitaire radial  $\vec{u}_r$ .

➡ Exercice (13.2)

### ■ 3 Actions combinées de champs électrique et magnétique

Une particule chargée peut être plongée en même temps dans un champ électrique et dans un champ magnétique. Elle est alors soumise à la résultante des forces électrique et magnétique, appelée **force de Lorentz** et qui a pour expression :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$



La composante électrique  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  de la force de Lorentz peut modifier la vitesse  $v$  de la particule et dévier sa trajectoire, alors que la composante magnétique  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  ne peut que dévier sa trajectoire.

Dans la partie du spectromètre de masse constituant le filtre de vitesse de Wien, les particules sont plongées à la fois dans un champ électrostatique  $\vec{E} = E\vec{u}_y$  et dans un champ magnétostatique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . Une particule y entrant à la vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$  est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(E\vec{u}_y + v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z) = q(E\vec{u}_y - vB\vec{u}_y) = q(E - vB)\vec{u}_y$$

Seules les particules non déviées, pour lesquelles  $\vec{F} = \vec{0}$ , pénétreront dans le secteur magnétique du spectromètre. Ce sont les particules pour lesquelles  $v = E/B$ . Ainsi le rapport  $E/B$  des modules des champs régnant dans le filtre de vitesse de Wien permet de sélectionner les particules entrant dans le secteur magnétique en fonction de leur vitesse.

### ■ 4 Limite relativiste

Lorsque les vitesses des particules sont trop proches de celle de la lumière, les résultats de la mécanique newtonienne ne sont plus en accord avec l'expérience et il devient nécessaire d'utiliser les lois de la mécanique relativiste. On parle de vitesses non relativistes et de particules non relativistes lorsque les effets de la relativité restreinte sont négligeables, de vitesses relativistes et de particules relativistes dans le cas contraire. En prenant un critère d'erreur de 1% on peut estimer que la limite entre vitesses non relativistes et vitesses relativistes se situe au voisinage de  $0,1c$  avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide ( $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Nous avons vu qu'une particule chargée peut être accélérée par une tension  $U$ . La vitesse atteinte par cette particule à la sortie

du champ électrique accélérateur, dans le cas d'une vitesse initiale négligeable, est donnée par la relation 13.2 :  $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ .

Pour ne pas sortir du domaine de la mécanique newtonienne, il faut que  $v_f < 10^{-1}c$ . Cela correspond à une tension accélératrice inférieure, en valeur absolue, à  $U_{lim} = 10^{-2} \frac{mc^2}{2|q|}$ .

- Pour un électron :  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg,  $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Ce qui donne  $U_{lim} = 2,6 \cdot 10^3$  V.
- Pour un proton :  $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg,  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C. Ce qui donne  $U_{lim} = 4,8 \cdot 10^6$  V.

La limite relativiste est assez facilement atteinte dans le cas d'électrons. Elle l'est beaucoup plus difficilement dans le cas de protons.

### Retour au contexte du spectromètre de masse :

Les particules accélérées dans la zone accélératrice sont des ions de masses supérieures ou égales à celle d'un proton. La tension accélératrice est de l'ordre de quelques kV. Les particules restent donc non relativistes et nous pouvons bien leur appliquer les lois de la mécanique newtonienne.

La notion de limite relativiste est abordée dans l'exercice 13.7 et dans l'analyse documentaire de l'exercice 13.8. Nous y renvoyons le lecteur intéressé.

## ■ 5 Annexe : produit vectoriel de deux vecteurs

### Définition : Produit vectoriel de deux vecteurs

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  est le vecteur  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ , tel que :

- si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires :  $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  ;
- si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ne sont pas colinéaires :
  - $\vec{A} \wedge \vec{B}$  est perpendiculaire au plan défini par les deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ;
  - $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  forment une base directe ;
  - $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\alpha)$ .

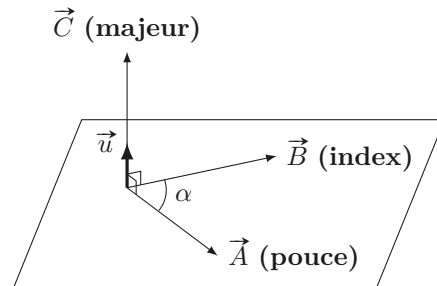


Figure 13.7. Produit vectoriel et règle de la main droite.

Dans la pratique on peut déterminer le sens de  $\vec{C}$  afin que  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$  forment une base directe en utilisant la « règle de la main droite ».

### La règle de la main droite

Avec la **main droite**, en pointant le pouce dans la direction et le sens de  $\vec{A}$ , l'index dans la direction et le sens de  $\vec{B}$ , le majeur donne la direction et le sens de  $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$  (figure 13.7).

### Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel est distributif :  $\vec{A}_1 \wedge (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) = (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) + (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_3)$ .
- Le produit vectoriel est anticommutatif ou antisymétrique :  $\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2 = -\vec{A}_2 \wedge \vec{A}_1$ .

**Remarque :** le produit vectoriel entre deux vecteurs d'une base orthonormée directe permet de définir le caractère direct de cette base. Ce caractère est invariant par permutation circulaire des vecteurs de base, comme l'illustre l'exemple suivant de la base orthonormée directe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  :

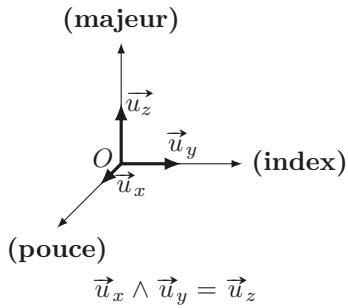


Figure 13.8

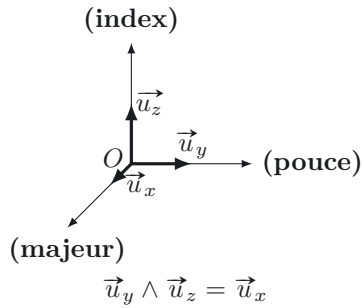


Figure 13.9

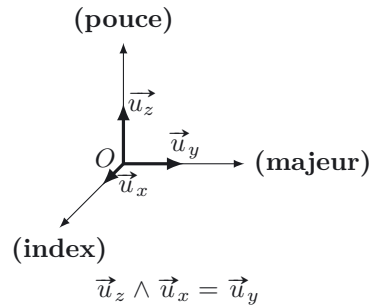
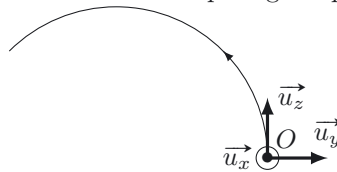


Figure 13.10

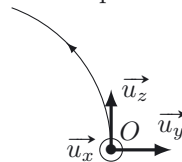


## Interro de cours

1. Un électron pénètre dans un champ électrique stationnaire uniforme avec une vitesse de direction différente de celle du champ. La force électrique a pour effet de modifier :
  - (a) uniquement la valeur de la vitesse de l'électron ;
  - (b) uniquement la direction de la vitesse de l'électron ;
  - (c) la valeur et la direction de la vitesse de l'électron.
2. La force magnétique a pour effet de modifier :
  - (a) uniquement la valeur de la vitesse d'un électron ;
  - (b) uniquement la direction de la vitesse d'un électron ;
  - (c) la valeur et la direction de la vitesse de l'électron.
3. Identifier la (ou les) affirmation(s) juste(s) :
  - (a) la force électrique dérive d'une énergie potentielle ;
  - (b) lorsqu'une particule est soumise à une force électrique ou magnétique, la force gravitationnelle est à prendre en compte systématiquement ;
  - (c) les puissances des forces magnétique et électrique sont toujours nulles.
4. L'application de la loi de la quantité de mouvement à une particule chargée de charge  $q$  en mouvement dans une région où règnent un champ  $\vec{E}$  et un champ  $\vec{B}$  se traduit par :
  - (a)  $m\vec{a} = \vec{E} + \vec{B}$  ;
  - (b)  $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{B}$  ;
  - (c)  $m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .
5. Le schéma ci-dessous montre la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. Déterminer l'orientation du champ magnétique  $\vec{B}$ .



- (a)  $\vec{B} = B\vec{u}_x$  avec  $B > 0$ .
  - (b)  $\vec{B} = -B\vec{u}_x$  avec  $B > 0$ .
  - (c)  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  avec  $B > 0$ .
6. Le schéma ci-dessous montre la trajectoire d'un proton dans un champ électrique uniforme et stationnaire. Déterminer l'orientation du champ électrique  $\vec{E}$ .



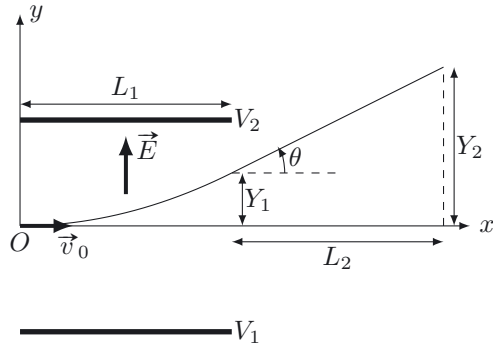
- (a)  $\vec{E} = E\vec{u}_y$  avec  $E > 0$ .
- (b)  $\vec{E} = -E\vec{u}_y$  avec  $E > 0$ .
- (c)  $\vec{E} = E\vec{u}_z$  avec  $E > 0$ .

## Exercices

### Exercice 13.1 Imprimante jet d'encre

➔ Méthode (13.1)

Dans un dispositif d'impression industriel, les gouttelettes d'encre sont chargées puis déviées de manière contrôlée par un déflecteur électrostatique avant d'atteindre le support d'impression.



Une gouttelette de volume  $V = 10 \text{ pL}$ , de charge  $q = 3,4 \cdot 10^{-15} \text{ C}$  et de vitesse  $v_0 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  entre en  $O$  dans le déflecteur constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques  $V_1$  et  $V_2$  générant un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E\vec{u}_y$  avec  $E = 5,0 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ . La longueur du déflecteur est  $L_1 = 5,0 \text{ cm}$ . Le support d'impression se trouve à la distance  $L_2 = 20 \text{ cm}$  de la sortie du déflecteur. L'encre est essentiellement constituée d'eau de masse volumique  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

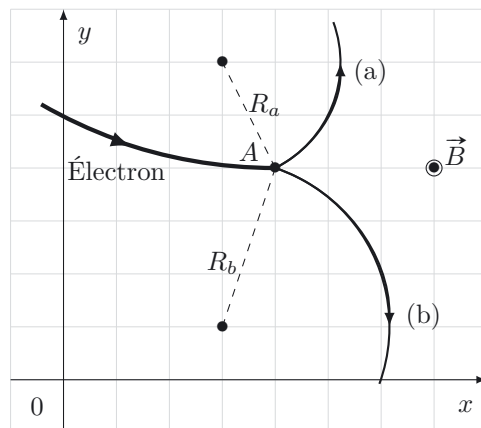
1. Quel est le signe de  $V_1 - V_2$  pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des  $y$  croissants.
2. Calculer la masse  $m$  de la gouttelette et montrer que l'on peut négliger son poids devant la force électrique de Lorentz. On donne  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
3. Appliquer la loi de la quantité de mouvement à la gouttelette entre les électrodes et déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement  $Y_1$  en sortie du déflecteur.
4. Caractériser la trajectoire de la gouttelette après sa sortie du déflecteur, en négligeant son poids.
5. Exprimer puis calculer la déflexion angulaire  $\theta$ . En déduire le déplacement  $Y_2$ .

### Exercice 13.2 Un heureux évènement

➔ Méthode (13.2)

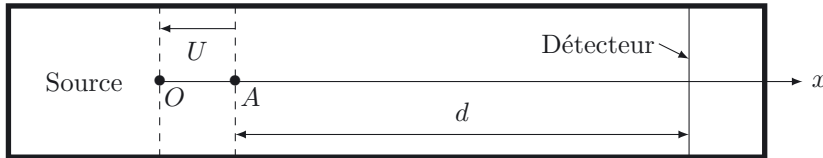
L'interaction en  $A$  d'un photon gamma (non représenté) et d'un électron relativiste donne naissance à une paire électron-positron, le positron étant l'antiparticule associée à l'électron, de même masse et de charge opposée. La naissance a lieu dans une région où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

1. Indiquer en le justifiant à quelles particules correspondent les trajectoires (a) et (b).
2. Montrer que la mesure des rayons  $R_a$  et  $R_b$  permet de déterminer la quantité de mouvement des nouveau-nés.



### Exercice 13.3 Analyseur à temps de vol linéaire

L'analyse d'un faisceau ionique consiste à séparer les ions les uns des autres selon leur rapport  $m/q$  (masse sur charge). Dans son principe, l'analyseur à temps de vol linéaire est le plus simple de tous.

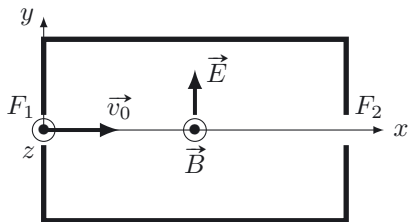


La source d'ions fournit des ions de masse  $m$  et de charge positive  $q$  qui entrent en  $O$  avec une vitesse négligeable dans une zone d'accélération ( comprise entre  $O$  et  $A$  ) où une tension électrique  $U = 15$  kV est appliquée. Les ions parcourent librement la région suivante jusqu'au détecteur situé à la distance  $d = 1,0$  m de la zone d'accélération. On mesure le "temps de vol"  $t_v$  mis par la particule pour parcourir la distance  $d$ .

1. Déterminer la vitesse  $\vec{v}_A$  de l'ion en  $A$ .
2. Montrer que la mesure du temps de vol  $t_v$  permet de déduire le rapport  $m/q$ . Calculer  $t_v$  dans le cas d'un ion de masse  $m = 3,8 \cdot 10^{-26}$  kg et de charge  $q = e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C.

### Exercice 13.4 Filtre de vitesse

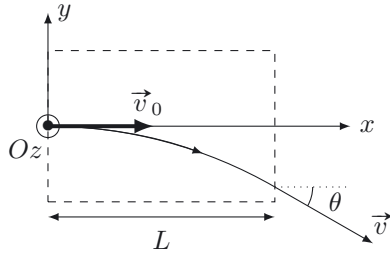
Afin de diminuer la dispersion des vitesses des ions dans un spectromètre de masse, il est nécessaire de réaliser un filtrage de vitesse. Le filtre de Wien présenté sur le schéma ci-dessous combine l'action d'un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{u}_y$  et d'un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  perpendiculaires entre eux. Les deux champs sont uniformes et permanents.



1. Un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  pénètre dans le filtre par la fente  $F_1$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$ . Écrire la force de Lorentz alors ressentie par l'ion.
2. À quelle condition l'ion peut-il avoir une trajectoire rectiligne l'amenant à la fente  $F_2$  ?
3. Exprimer en fonction de  $E$  et  $B$  la vitesse  $v_0$  de l'ion lui permettant d'atteindre la fente  $F_2$ .

### Exercice 13.5 AGLAE, la Science au service de la Beauté

L'Accélérateur Grand Louvre d'Analyse Élémentaire (AGLAE) est un accélérateur de particules implanté au musée du Louvre destiné à l'étude des œuvres d'art et d'archéologie. Lors d'une analyse, un faisceau de protons accélérés guidé avec précision percute un détail de la cible à étudier, sondant sa surface sans y pénétrer profondément. L'une des difficultés de l'analyse consiste à trier les particules issues du bombardement de protons. Nous étudions dans cet exercice un déflecteur magnétique dont le but est de dévier (et ainsi éliminer) les protons rétrodiffusés par la cible.



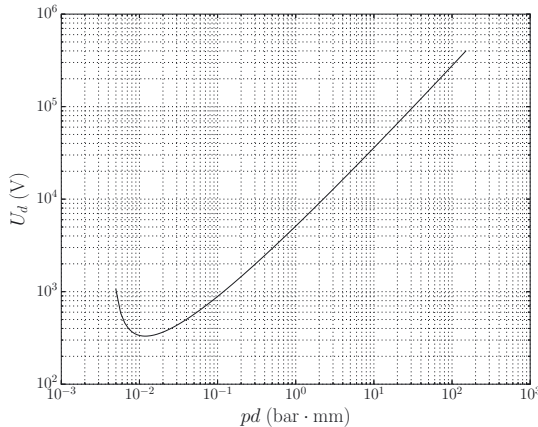
Le déflecteur magnétique compact de longueur  $L = 50 \text{ mm}$  est constitué d'aimants permanents au néodyme; il permet de défléchir des protons d'énergie cinétique  $E_c = 3,0 \text{ MeV}$  grâce à un champ magnétique  $B = 0,90 \text{ T}$ . Ce champ est supposé uniforme dans la zone entourée de pointillés sur la figure ci-contre et nul ailleurs.

Le proton possède une masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et une charge  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ . On rappelle que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

1. Calculer la vitesse  $v_0$  des protons qui pénètrent en  $O$  dans le déflecteur.
2. Indiquer la direction et le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  permettant la déviation des protons présentée sur le schéma.
3. Montrer que la vitesse  $v$  du proton à la sortie du déflecteur est la même qu'en entrée.
4. La vitesse  $\vec{v}_0$  étant orthogonale à  $\vec{B}$ , la trajectoire du proton dans le déflecteur est un arc de cercle de rayon  $R$ . Déterminer  $R$  en fonction de  $m$ ,  $v_0$ ,  $e$  et  $B$ . Calculer  $R$ .
5. Exprimer littéralement puis calculer l'angle de déflexion  $\theta$ .

**Exercice 13.6 Un champ qui fait des étincelles**

Un arc électrique apparaît dans le gaz séparant deux électrodes planes et parallèles lorsque la tension appliquée est supérieure à une valeur  $U_d$  appelée tension disruptive. La loi empirique de Paschen indique que cette tension  $U_d$  est une fonction non linéaire du produit de la pression  $p$  du gaz par la distance  $d$  entre les électrodes. La courbe de Paschen ci-dessous est celle de l'air à une température de  $20^\circ\text{C}$ .



Le mécanisme d'apparition d'une étincelle est une sorte de phénomène d'avalanche initié par des électrons primaires extraits de la cathode par agitation thermique.

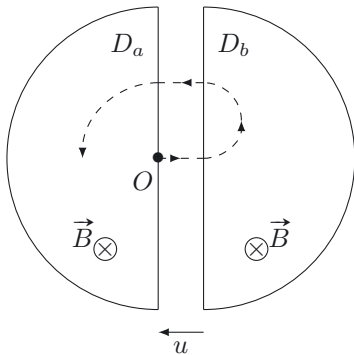
Accélérés par le champ électrique régnant entre les électrodes, ces électrons primaires peuvent acquérir suffisamment d'énergie pour arracher des électrons aux molécules, en frappant ces dernières, provoquant ainsi l'ionisation de l'air. Masse de l'électron :  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

1. On applique une différence de potentiel  $U$  à deux électrodes planes et parallèles distantes de  $d_1 = 1,0 \text{ cm}$  dans l'air à la pression atmosphérique et à la température de  $20^\circ\text{C}$ . À partir de quelle valeur  $U_d$  de  $U$  apparaîtra-t-il un arc électrique dans l'air? En déduire une estimation de la valeur  $E_d$  du champ électrique correspondant, appelé champ disruptif de l'air.

- Nous essayons de retrouver l'ordre de grandeur de  $E_d$  par des considérations microscopiques. Dans les conditions usuelles de température et de pression, le temps moyen de collision électron-molécule est de l'ordre de  $\tau_c = 10^{-12}$  s. Estimer la valeur du champ électrique nécessaire pour qu'un électron puisse acquérir entre deux chocs successifs l'énergie de première ionisation de l'azote  $W_{\text{azote}} = 2,4 \cdot 10^{-18}$  J. Comparer à la valeur  $E_d$  mesurée.
- Comment évolue la tension disruptive si on augmente la pression de l'air à température constante entre les électrodes distantes de  $d_1$ ? Proposer une explication à l'aide du modèle microscopique précédent.

### Exercice 13.7 Proteus One

Le synchrocyclotron Proteus One, mis en service en 2016 au Centre Antoine Lacassagne de Nice permet de réaliser des traitements en protonthérapie de haute énergie (235 MeV). Le principe de fonctionnement simplifié du cyclotron est présenté sur la figure ci-dessous.



Les deux demi-cylindres horizontaux (« Dees »  $D_a$  et  $D_b$ ) sont creux. Dans un vide très poussé, il y règne un champ magnétique  $\vec{B}$  (avec  $B = 5,0$  T) uniforme et permanent. Dans le mince espace entre les deux Dees, une tension alternative  $u$  de haute fréquence  $f$  et de valeur maximale  $U_M = 100$  kV crée un champ électrique alternatif  $\vec{E}$  perpendiculaire aux faces en regard des Dees.

Le proton possède une masse  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg et une charge  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C. La vitesse de la lumière dans le vide est  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ . Il est rappelé que  $1$  eV =  $1,60 \cdot 10^{-19}$  J.

- On considère un proton introduit en  $O$  avec une vitesse négligeable. La tension  $u$  appliquée est alors  $u = U_M$ . Dessiner le champ électrique  $\vec{E}$  associé et montrer que le mouvement du proton est rectiligne et uniformément accéléré jusqu'à l'entrée du Dee  $D_b$ . Par une méthode énergétique, déterminer puis calculer sa vitesse  $v_1$  à l'entrée du Dee  $D_b$ .
- Le proton décrit alors un demi-cercle de rayon  $R_1$  dans le Dee  $D_b$  soumis au champ magnétique  $\vec{B}$ . Montrer que la norme de la vitesse du proton n'évolue pas dans le Dee. Déterminer et calculer  $R_1$ .
- Montrer que la durée de la trajectoire dans le Dee ne dépend pas de la vitesse de la particule. On introduira la fréquence cyclotron  $f_c = \frac{eB}{2\pi m_0}$ .
- Lorsque le proton ressort du Dee  $D_b$ , il est de nouveau soumis au champ électrique  $\vec{E}$ . Quelle fréquence  $f$  doit posséder ce champ pour que le proton soit de nouveau accéléré? Calculer  $f$ .
- Quelle est la vitesse  $v_2$  du proton lorsqu'il pénètre dans le Dee  $D_a$ ? Déterminer le rayon  $R_2$  du demi-cercle décrit par le proton dans le Dee. La trajectoire du proton ressemble donc à une sorte de spirale divergente, le rayon du demi-cercle dans chaque Dee augmentant à chaque accélération par le champ électrique.
- Les protons devenant très énergétiques, l'évolution de leur masse  $m$  suit la loi relativiste :

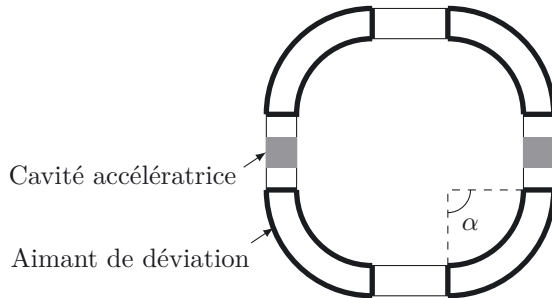
$m = \gamma m_0$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Montrer que la fréquence  $f'_c$  de parcours des demi-cercles n'est

alors plus constante. Comment évolue-t-elle lorsque la vitesse des protons augmente ? Dans un synchrocyclotron, la fréquence  $f$  évolue ainsi au fur et à mesure de l'augmentation de la vitesse des particules accélérées.

**Exercice 13.8 Le rayonnement synchrotron**

**Le synchrotron ESRF**

Situé à Grenoble, le synchrotron européen ESRF (European Synchrotron Radiation Facility) est une intense source de rayons X permettant d'étudier une gamme remarquablement large de matériaux. Plusieurs machines sont nécessaires pour produire le rayonnement synchrotron émis par les électrons ultra relativistes. Le LIDAR (accélérateur linéaire) permet une première accélération des électrons qui entrent alors dans le booster. Celui-ci est un type d'accélérateur circulaire appelé synchrotron dans lequel les particules se déplacent sur un rayon fixé, contrairement au cyclotron, le champ magnétique croissant de façon synchrone avec la vitesse des particules. Celles-ci sont accélérées à chaque tour dans des cavités accélératrices. Les électrons « boostés » sont alors transférés dans l'anneau de stockage de 844 m de circonférence pour y tourner pendant plusieurs heures avec une énergie  $E = 6,0$  GeV. La trajectoire fermée dans l'anneau est assurée par 64 aimants de déviation créant un champ magnétique  $B = 0,80$  T sur une longueur  $L = 2,45$  m et déviant le faisceau de  $\alpha = 5,625^\circ$ . La figure ci-dessous donne une vue de dessus simplifiée d'un anneau qui ne comprendrait que quatre aimants de déviation (on a alors  $\alpha = 90^\circ$ ).



Le rayonnement synchrotron correspond au rayonnement électromagnétique émis par des particules chargées subissant une accélération. L'énergie rayonnée par un électron de 6 GeV au cours d'un tour est de 4,6 MeV.

Lorsque les électrons sont relativistes, nous utilisons les expressions suivantes de la quantité de mouvement  $p$  et de l'énergie cinétique  $E_c$  :  $p = \gamma m v$  et  $E_c = (\gamma - 1) m c^2$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , où  $v$  est la vitesse de la particule et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide, avec  $c = 3,0 \cdot 10^8$  m · s<sup>-1</sup>. L'énergie  $E$  de la particule s'écrit alors  $E = \gamma m c^2$ . On rappelle que 1 eV = 1,6 · 10<sup>-19</sup> J. La masse de l'électron est  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg, sa charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

1. On considère la trajectoire circulaire de rayon  $R$  d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme. En considérant la particule comme non relativiste, exprimer sa quantité de mouvement en fonction de  $q$ ,  $B$  et  $R$ .

2. En utilisant l'expression fournie de l'énergie d'un électron relativiste, calculer  $\gamma$  pour un électron de l'anneau de stockage. Commenter brièvement.
3. Nous admettons que la relation obtenue dans la question 1. reste valable pour les électrons de l'anneau de stockage à condition d'utiliser l'expression relativiste de la quantité de mouvement. Déterminer le rayon  $\rho$  des arcs de cercle décrits dans les aimants de déviation. Valider le résultat à l'aide des données de  $L$  et  $\alpha$ .
4. L'énergie rayonnée par un électron peut se calculer à l'aide de la formule approchée suivante :  
$$E_0(\text{keV}) = 88,5 \frac{E^4(\text{GeV})}{\rho(\text{m})}$$
. Calculer  $E_0$  et comparer à la valeur indiquée dans le document. Expliquer la nécessité des cavités accélératrices dans l'anneau de stockage.

# Corrections

## Interro de cours

1. Un champ électrique modifie toujours la valeur de la vitesse d'une particule chargée. Par contre il n'en modifie la direction que s'il présente une composante normale à la vitesse initiale de la particule, ce qui est le cas ici. Réponse (c).
2. Le travail de la force magnétique est toujours nul donc l'énergie cinétique de la particule ne sera pas modifiée. Réponse (b).
3. Dans la plupart des cas, le poids étant négligeable par rapport aux forces électrique et magnétique, on ne le prend pas en compte. L'affirmation (b) est fausse. La puissance de la force magnétique est toujours nulle mais ce n'est pas le cas de celle de la force électrique. L'affirmation (c) est fausse. Réponse (a).
4. Attention  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  ne sont pas des forces! L'affirmation (a) est fausse. L'expression de la force magnétique est  $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . L'affirmation (b) est fausse. Réponse (c).
5. Attention,  $q = -e < 0$ . Pour engendrer une telle trajectoire, la force magnétique en  $O$  doit être dans le sens de  $-\vec{u}_y$ . La règle de la main droite : pouce dans la direction et le sens de  $q\vec{v}(O) = -ev\vec{u}_z$  (avec  $v > 0$ ), index dans la direction et le sens de  $\vec{B}$  et majeur dans la direction et le sens de  $\vec{f}_m$ , impose  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . Réponse (a).
6. Pour engendrer une telle trajectoire, la force électrique en  $O$  doit avoir une composante dirigée suivant  $-\vec{u}_y$ . Sachant que  $q = e > 0$ , il faut que  $\vec{E} = -E\vec{u}_y$ . Réponse (b).

## Exercice 13.1

1.  $V_1 - V_2$  doit être positif (gouttelette repoussée par  $V_1$ ) pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des  $y$  croissants.
2.  $m = V\mu = 10 \text{ ng}$ ;  $P \approx 0,1 \text{ nN}$  et  $F_e = 1,7 \text{ nN} \gg P$ . On peut donc négliger le poids devant la force de Lorentz.
3. En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la gouttelette entre les électrodes, on obtient  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} = qE\vec{u}_y$ . En intégrant une première fois, on obtient, par projection sur les deux axes :  $v_x = v_0$  et  $v_y = \frac{qE}{m}t$ . On intègre une seconde fois, il vient :  $x(t) = v_0t$  et  $y(t) = \frac{qE}{2m}t^2$ . En éliminant le temps entre ces deux expressions, on obtient  $y(x) = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$ , ce qui est l'équation d'une parabole.  
On aboutit à  $Y_1 = \frac{qE}{2mv_0^2}L_1^2 = 0,53 \text{ mm}$ .
4. Après être sortie du déflecteur, la gouttelette n'est plus soumise à aucune action, sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.
5.  $\tan(\theta) = \frac{v_y(L_1)}{v_0} = \frac{qEL_1}{mv_0^2}$ , soit  $\theta = 1,2^\circ$ . Or  $\tan(\theta) = \frac{Y_2 - Y_1}{L_2}$ , d'où  $Y_2 = Y_1 + L_2 \frac{qEL_1}{mv_0^2} = 4,8 \text{ mm}$ .

## Exercice 13.2

1. La trajectoire (a) correspond à l'électron, car la force déviante est alors  $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$  avec  $-e\vec{v}$  tangente et de direction opposée à la vitesse de la particule.  
La trajectoire (b) correspond au positron, car la force déviante est alors  $e\vec{v} \wedge \vec{B}$  avec  $e\vec{v}$  et de même direction que la vitesse de la particule.



2. Si on suppose que la trajectoire est circulaire, alors en choisissant des coordonnées polaires adaptées, l'accélération est égale en norme à  $\frac{v^2}{R}$ , la force magnétique à  $evB$  et l'application de la loi de la quantité de mouvement conduit à  $m\frac{v^2}{R} = evB$ , soit  $p = mv = eBR$ . La mesure des rayons  $R_a$  et  $R_b$  permet donc de déterminer la quantité de mouvement des nouveaux-nés.

**Exercice 13.3**

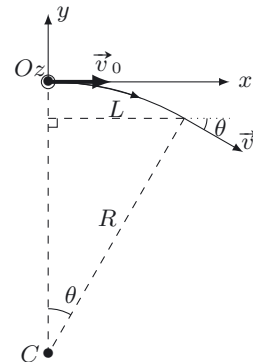
1. On peut utiliser une méthode énergétique : l'énergie mécanique se conserve, car on néglige tous frottements et la force électrique dérive de l'énergie potentielle  $E_p = qV(x)$  avec  $V(x)$  le potentiel électrique en  $x$ . On aura donc :  $\frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A = 0 + qV_O$  avec  $U = V_O - V_A$ , soit  $\vec{v}_A = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\vec{u}_x$ .
2. Entre  $A$  et le détecteur, la vitesse reste constante, donc  $t_v = \frac{d}{v_A} = d\sqrt{\frac{m}{2qU}} = \frac{d}{\sqrt{2U}}\sqrt{\frac{m}{q}}$ . Nous voyons donc que  $\frac{m}{q} = \frac{2U}{d^2}t_v^2$ . A.N :  $t_v = 2,8 \mu\text{s}$ .

**Exercice 13.4**

1.  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .
2. Pour que l'ion puisse avoir une trajectoire rectiligne, il faut que la force de Lorentz s'annule, car  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  ont tous deux un effet de déviation sur l'ion, mais dans des directions opposées. D'après la loi de la quantité de mouvement, la vitesse restera constante au cours du temps, égale à  $\vec{v}_0$  et  $\vec{E} = -\vec{v}_0 \wedge \vec{B} = v_0 B \vec{u}_y$ .
3.  $v_0 = \frac{E}{B}$ .

**Exercice 13.5**

1. On suppose les protons non relativistes.  $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ , d'où  $v_0 = \sqrt{2\frac{E_c}{m}} = 2,4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
2.  $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$  dévie les protons vers  $-\vec{u}_y$ , donc  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  avec  $B > 0$ .
3. La force  $\vec{F}$  ne travaille pas, on néglige l'action du poids sur le proton, donc l'énergie mécanique se conserve, et elle se réduit à l'énergie cinétique :  $E_c = \text{constante}$  d'où  $v = v_0$ .
4. On applique la loi de la quantité de mouvement au proton :  $m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ . La trajectoire étant circulaire, l'accélération s'écrit en polaire  $-\frac{v_0^2}{R}\vec{u}_r$  car  $v = \text{cste}$ .
- De plus  $e\vec{v} \wedge \vec{B} = -ev_0B\vec{u}_r$ . Il vient donc :  $m\frac{v_0^2}{R} = ev_0B$   
 et  $R = \frac{mv_0}{eB} = 28 \text{ cm}$ .
5. La trajectoire est un arc de cercle de centre  $C$  situé en  $x = 0$  et  $y = -R$ . Le schéma ci-contre nous montre que :  $\sin(\theta) = \frac{L}{R}$ . Nous en déduisons  $\theta = 10^\circ$ .



## Exercice 13.6

- Par lecture sur le graphe de Paschen avec  $pd_1 = 10 \text{ bar} \cdot \text{mm}$ , nous pouvons estimer que  $U_d \approx 38 \text{ kV}$  et en déduire que :  $E_d = \frac{U_d}{d} \approx 3,8 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- En appliquant la loi de la quantité de mouvement à un électron soumis à  $E_d$ , on peut aboutir à l'expression de sa vitesse à l'instant  $\tau_c$  :  $\vec{v} \approx \frac{-e\vec{E}_d}{m_e} \tau_c$ .  
Son énergie cinétique est donc  $W_{\text{azote}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2 E_d^2 \tau_c^2}{2m_e}$  et  $E_d \approx \frac{1}{e\tau_c} \sqrt{2W_{\text{azote}} m_e} = 13 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ .  
Le champ obtenu par cette estimation grossière est 3 à 4 fois plus grand que le champ mesuré, mais l'ordre de grandeur est acceptable.
- D'après la courbe de Paschen,  $U_d$  augmentera. Ceci peut s'expliquer en disant que l'augmentation de la pression est corrélée à une diminution de  $\tau_c$  (plus de collisions par unité de temps) et donc, d'après l'expression de  $E_d$  ci-dessus, celui-ci croît avec  $p$ ;  $d_1$  restant constante, cette augmentation de  $E_d$  donne lieu à une augmentation de  $U_d = d_1 E_d$ .

## Exercice 13.7

- Le champ électrique  $\vec{E}$  est dirigé dans le sens opposé à  $u$ , il accélère donc le proton. La loi de la quantité de mouvement s'écrit alors pour le proton  $m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E}$  avec  $\vec{E}$  uniforme et orienté de la gauche vers la droite, de norme  $U_M/d$  avec  $d$  distance entre les deux Dees. Du coup,  $\vec{v}(t) = \frac{e}{m_0} \vec{E}t$ , le mouvement du proton est donc rectiligne et d'accélération  $\frac{e}{m_0} \vec{E}$  uniforme.  
On utilise la conservation de l'énergie mécanique :  $\frac{1}{2} m_0 v_1^2 = eU_M$ , soit  $v_1 = \sqrt{\frac{2eU_M}{m_0}} = 4,4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Dans  $D_b$  règne un champ magnétique uniforme, et la force exercée sur le proton est alors  $\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Cette force est perpendiculaire à  $\vec{v}$ , donc elle ne travaille pas. L'énergie mécanique se limite alors à l'énergie cinétique, et se conserve : la norme de la vitesse du proton reste donc la même dans  $D_b$ .  
On applique la loi de la quantité de mouvement au proton :  $m_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ . La trajectoire étant circulaire, l'accélération s'écrit en polaire  $-\frac{v_1^2}{R_1} \vec{u}_r$  et de plus  $e\vec{v} \wedge \vec{B} = -ev_1 B \vec{u}_r$ , d'où  $m_0 \frac{v_1^2}{R_1} = ev_1 B$ ,  
d'où  $R_1 = \frac{m_0 v_1}{eB} = \sqrt{\frac{2m_0 U_M}{e}} \frac{1}{B} = 9,1 \text{ mm}$ .
- Le mouvement étant circulaire uniforme, il est parcouru à vitesse angulaire constante  $\omega_c = \frac{v_1}{R_1} = \frac{eB}{m_0}$ , et donc à la fréquence  $f_c = \frac{eB}{2\pi m_0}$ , ce qui correspond à la période  $T_c = \frac{2\pi m_0}{eB}$ . Le proton mettra donc le temps  $\frac{T_c}{2} = \frac{\pi m_0}{eB}$  à parcourir le demi-cercle dans le Dee; cette durée est bien indépendante de  $v_1$ .
- Il faudra qu'à la sortie de  $D_b$ , le champ électrique soit orienté de  $D_b$  vers  $D_a$ ; la fréquence  $f$  doit donc être égale  $f_c$ .  $f = 76 \text{ MHz}$ .
- Par une méthode énergétique, on peut écrire que  $\frac{1}{2} m_0 v_2^2 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + eU_M$ , soit  $v_2^2 = v_1^2 + \frac{2eU_M}{m_0} = 2v_1^2$ .  
Il vient donc  $v_2 = \sqrt{2}v_1 = 2\sqrt{\frac{eU_M}{m_0}} = 6,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . D'où  $R_2 = \sqrt{2}R_1 = 2\sqrt{\frac{m_0 U_M}{e}} \frac{1}{B} = 13 \text{ mm}$ .
- $f'_c = \frac{eB}{2\pi m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}$  : cette fréquence dépendant de la vitesse, elle ne sera plus constante, ce qui risque de poser un problème pour l'inversion du champ électrique.  
Nous constatons que  $f'_c$  diminue si la vitesse des protons augmente.

**Exercice 13.8**

1. La trajectoire étant circulaire et  $v = \text{cste}$ , la dérivée de la quantité de mouvement est, en norme,  $m \frac{v^2}{R}$ , et doit être égale à la force magnétique qui, en norme, est  $|q|vB$ . On obtient donc  $mv = R|q|B$ .
2. On aura  $E = \gamma mc^2$  d'où  $\gamma = 12 \cdot 10^3$ . On a donc  $v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}$ , et  $v$  sera très proche de  $c$ , les électrons vont quasiment à la vitesse de la lumière.
3.  $\rho = \frac{\gamma mv}{eB} = 25 \text{ m}$ . Or  $\rho = \frac{L}{\alpha} = 25 \text{ m}$  : le résultat est donc cohérent.
4.  $E_0 = 4,6 \text{ MeV}$ , ce qui correspond bien à la valeur indiquée dans le document. Si on n'accélérait pas l'électron dans les cavités accélératrices, cette énergie rayonnée et donc perdue par l'électron serait responsable de son freinage.



# Loi du moment cinétique

## L'essentiel du cours

### Contexte

Les pendules ont eu une place très importante dans l'histoire des sciences. Alors que Galilée pensait qu'une bille fixée à l'extrémité d'un fil oscillait à fréquence constante (pour une longueur de fil donnée), Huygens déposait un brevet en 1656 pour l'invention d'une horloge régulée par un pendule. Près d'un siècle et demi plus tard, en 1798, c'est Cavendish qui réalisa un pendule innovant : le pendule de torsion. Grâce à cette invention, il fit la première mesure de la constante de gravitation universelle.

Comment la théorie de la mécanique newtonienne peut-elle nous permettre d'expliquer les principes de fonctionnement de ces pendules ?

Dans ce chapitre, le référentiel d'étude, supposé galiléen, est noté  $\mathcal{R}$ . On lui associe le repère fixe cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

## ■ 1 Moment cinétique

Commençons par considérer **un point matériel**  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Sa quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}$  est définie par  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

### Définition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

On définit le moment cinétique du point matériel  $M$  par rapport au point  $O$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  par :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$



Le moment cinétique de  $M$  dépend du point  $O$  choisi pour le calculer.



Par définition du produit vectoriel :

- si  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires alors  $\vec{L}_O = \vec{0}$  ;
- si  $\vec{L}_O \neq \vec{0}$ ,  $\vec{L}_O$  est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$  ;
- si  $O$  est fixe et  $\vec{L}_O$  constant, le plan passant par  $O$  et normal à  $\vec{L}_O$  est indépendant du temps et contient le point  $M$  à chaque instant. Le mouvement de  $M$  est donc plan.

**Définition : Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté**

Soit  $(\Delta)$  un axe orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  et  $O$  un point de cet axe. Le moment cinétique  $L_\Delta$  de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  par rapport à  $(\Delta)$  est le projeté orthogonal de  $\vec{L}_O$  sur  $(\Delta)$  :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$



Le moment cinétique de  $M$  par rapport à un axe ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le définir.

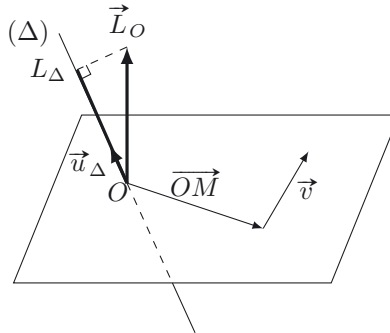


Figure 14.1. Moment cinétique d'un point  $M$ .

□ Quel est le moment cinétique par rapport à un axe fixe  $(Oz)$  d'un point  $M$  en mouvement circulaire de rayon  $R_1$  autour de cet axe ?

Notons  $O$  un point fixe de l'axe  $(Oz)$  et  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire l'orientant.

Pour étudier un tel mouvement, il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  avec  $r = R_1 = cste$  et  $z = z_1 = cste$ . Ainsi,  $\vec{OM} = R_1 \vec{u}_r + z_1 \vec{u}_z$  et  $\vec{v} = R_1 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ .

On en déduit :  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = (R_1 \vec{u}_r + z_1 \vec{u}_z) \wedge mR_1 \dot{\theta} \vec{u}_\theta = mR_1^2 \dot{\theta} \vec{u}_z - mR_1 z_1 \dot{\theta} \vec{u}_r$ , puis :

$$(14.1) \quad L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_z = mR_1^2 \dot{\theta}$$

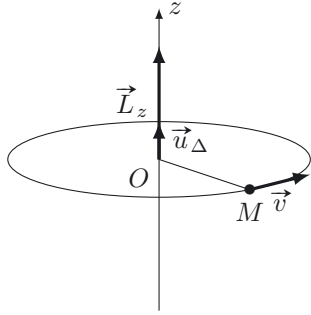
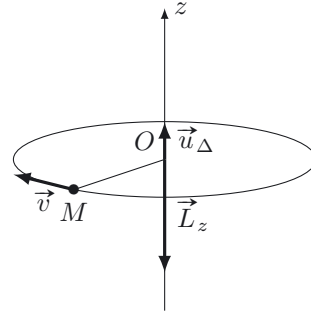
Le signe de  $L_z$  est donc le même que celui de  $\dot{\theta}$  : si  $L_z > 0$ , le point  $M$  tourne dans le sens positif ( $\theta$  croissant) et si  $L_z < 0$ , le point  $M$  tourne dans le sens négatif ( $\theta$  décroissant).



D'un point de vue pratique, il est intéressant d'utiliser la règle de la main droite pour déterminer le sens positif des rotations autour d'un axe orienté.

**Règle de la main droite et sens positif des rotations autour d'un axe orienté**

À l'aide de la main droite, on pointe le pouce dans le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  de l'axe orienté  $(\Delta)$ . Les autres doigts, légèrement repliés, pointent alors dans le sens positif des rotations autour de  $(\Delta)$ .

Figure 14.2. Exemple 1 ( $L_z > 0$ ).Figure 14.3. Exemple 2 ( $L_z < 0$ ).

Quel que soit le mouvement de  $M$ , on peut montrer en utilisant les coordonnées cylindriques que son moment cinétique par rapport à l'axe ( $Oz$ ) est toujours de la forme :  $L_z = mr^2\dot{\theta}$  (où  $r$  est la distance de  $M$  à l'axe ( $Oz$ )).

Considérons maintenant le cas d'un solide en rotation autour de l'axe fixe ( $\Delta$ ).

#### Définition : Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté

Le moment cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  s'écrit :

$$L_\Delta = J_\Delta \omega$$

$J_\Delta$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) et se mesure en  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .



- $J_\Delta$  est toujours positif. Le signe de  $L_\Delta$ , qui est donc le même que celui de  $\omega$ , nous renseigne sur le sens de rotation du solide autour de l'axe.
- $J_\Delta$  ne dépend que de la géométrie du solide et de sa répartition des masses. Plus les masses sont éloignées de l'axe, plus  $J_\Delta$  est élevé.

Un solide étant modélisé par une distribution continue de matière, le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe fait intervenir la notion de somme continue (intégrale triple sur le volume du solide). Cet aspect dépasse largement le cadre du programme mais nous pouvons citer quelques expressions de moments d'inertie pour des géométries simples.

- Cylindre creux de masse  $m$ , de rayon  $R$  et d'axe  $\Delta$  :  $J_\Delta = mR^2$ .
- Cylindre plein de masse  $m$ , de rayon  $R$  et d'axe  $\Delta$  :  $J_\Delta = (1/2)mR^2$ .  
(remarque : la masse du cylindre plein étant globalement plus proche de l'axe que celle du cylindre creux, son moment d'inertie est plus faible que celui du cylindre creux).
- Sphère pleine de rayon  $R$  centrée sur l'axe  $\Delta$  :  $J_\Delta = (2/5)mR^2$ .

## ■ 2 Moment d'une force

□ Imaginons une personne voulant ouvrir une porte en lui appliquant une force  $\vec{F}$  de de module donné, 5 N par exemple. En quel point de la porte et dans quelle direction devra-t-elle appliquer cette force pour que son action soit la plus efficace possible ?

Intuitivement, la personne va appliquer sa force perpendiculairement au plan de la porte en un point proche du bord extérieur de celle-ci (c'est d'ailleurs à ce niveau que se trouve la poignée). Il ne lui viendra certainement pas à l'esprit de l'appliquer au niveau de l'axe de rotation de la porte ou parallèlement à cet axe ou encore dans une direction du plan de la porte .

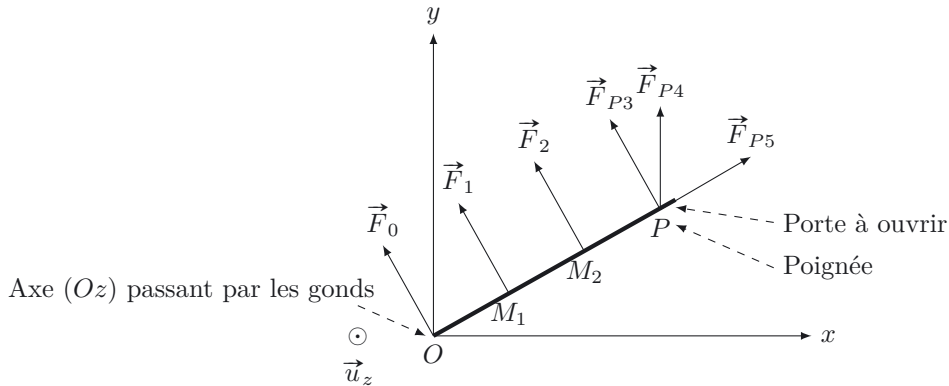


Figure 14.4. Comment ouvrir une porte ?

Nous voyons sur cet exemple que le seul concept de force n'est pas toujours suffisant pour rendre compte d'une action mécanique. C'est la raison pour laquelle nous allons introduire de nouveaux concepts, ceux de **moments d'une force ou d'un système de forces**, par rapport à **un point** ou par rapport à **un axe orienté**.

#### Définition : Moment d'une force par rapport à un point

Le moment par rapport au point  $O$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$



Par définition du produit vectoriel :

- si  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{F}$  sont colinéaires alors  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$  ;
- si  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \neq \vec{0}$ ,  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  est perpendiculaire au plan défini par  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{F}$  ;
- en notant  $\theta$  l'angle  $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{F}})$  :  $\|\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})\| = \|\overrightarrow{OM}\| \|\vec{F}\| \sin \theta$ .

La direction de la force influe donc sur son moment en un point. Pour une force donnée, le module de ce moment est d'autant plus élevé que l'angle  $\theta$  est proche de  $\pm\pi/2$ .

#### Définition : Moment d'un système de forces par rapport à un point

Le moment par rapport au point  $O$  d'un système de forces  $\vec{F}_i$  appliquées aux points  $M_i$  est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \sum_i (\overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i)$$





Le moment résultant d'un système de forces ne s'exprime pas en général en fonction de la résultante  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$  de ce système, sauf dans le cas particulier où toutes les forces sont appliquées en un même point  $M$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \sum_i (\vec{OM} \wedge \vec{F}_i) = \vec{OM} \wedge (\sum_i \vec{F}_i) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

### Définition : Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit  $(\Delta)$  un axe orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  et  $O$  un point de cet axe. On définit le moment par rapport à  $(\Delta)$  de la force  $\vec{F}$  comme le projeté orthogonal de  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  sur  $(\Delta)$  :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$



Le moment d'une force par rapport à un axe orienté ne dépend pas du point de l'axe choisi pour le définir.



Le moment d'une force par rapport à un axe orienté est nul lorsque la direction de cette force est parallèle à l'axe ou lorsqu'elle intercepte l'axe.

### Définition : Moment d'un système de forces par rapport à un axe orienté

On définit le moment par rapport à l'axe orienté  $(\Delta)$  d'un système de forces  $\vec{F}_i$  appliquées aux points  $M_i$  par :

$$\mathcal{M}_\Delta = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = \sum_i (\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \cdot \vec{u}_\Delta) = (\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Reprenons l'exemple de l'ouverture d'une porte (figure 14.4).

- Les forces  $\vec{F}_{P_5}$  et  $\vec{F}_0$  qui intuitivement ne permettent pas d'ouvrir la porte, sont des forces dont les directions interceptent l'axe. Elles ont un moment nul par rapport à cet axe.
- En ce qui concerne les forces  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_{P_3}$  appliquées respectivement aux points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $P$ , elles sont perpendiculaires à l'axe de rotation et leurs moments sont de la forme :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \|\vec{OM}_i\| \|\vec{F}_i\| \vec{u}_z$ . On en déduit que  $\mathcal{M}_z(\vec{F}_1) < \mathcal{M}_z(\vec{F}_2) < \mathcal{M}_z(\vec{F}_{P_3})$ . Ainsi, plus le point d'application de la force  $\vec{F}_i$  est loin de l'axe de rotation, plus son moment est élevé.
- En ce qui concerne les forces  $\vec{F}_{P_3}$  et  $\vec{F}_{P_4}$ , toutes les 2 appliquées en  $P$ , leurs moments sont de la forme :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{P_i}) = \|\vec{OP}\| \|\vec{F}_{P_i}\| \sin(\widehat{\vec{OP}, \vec{F}_{P_i}}) \vec{u}_z$ . Or  $(\widehat{\vec{OP}, \vec{F}_{P_3}}) = \pi/2$  et  $(\widehat{\vec{OP}, \vec{F}_{P_4}}) < \pi/2$ . Donc  $\mathcal{M}_z(\vec{F}_{P_4}) < \mathcal{M}_z(\vec{F}_{P_3})$ .

Nous en concluons que  $\vec{F}_{P_3}$ , qui est intuitivement la force la plus efficace pour ouvrir la porte, est celle dont le moment par rapport à l'axe de rotation de la porte est le plus grand.

Maintenant que nous avons mis en évidence l'importance de la notion de moment d'une force par rapport à un axe  $(\Delta)$  dans l'étude du mouvement d'un système en rotation autour de celui-ci, voyons comment calculer simplement ce moment.

Commençons par remarquer qu'une force  $\vec{F}$ , appliquée en un point  $M$ , peut toujours être décomposée en une force  $\vec{F}_{\parallel}$  parallèle à  $(\Delta)$  et une force  $\vec{F}_{\perp}$  normale à  $(\Delta)$ . Le moment par rapport à un axe d'une force parallèle à celui-ci étant nul, le moment de  $\vec{F}$  par rapport à  $(\Delta)$  se réduit à celui de sa composante  $\vec{F}_{\perp}$ .

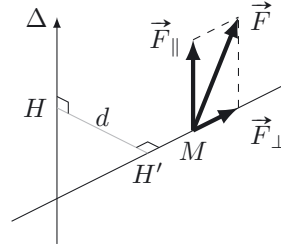


Figure 14.5. Décomposition d'une force.

Le calcul du moment d'une force par rapport à un axe orienté  $(\Delta)$  peut être simplifié en utilisant la notion de bras de levier.

#### Définition : Le bras de levier

Le bras de levier d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  est la distance  $d$  entre l'axe orienté  $(\Delta)$  et la droite d'action de sa composante  $\vec{F}_{\perp}$ , normale à  $(\Delta)$ .

#### Méthode 14.1 : Calcul d'un moment de force par rapport à un axe

Le moment  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$  par rapport à un axe  $(\Delta)$  peut se calculer en utilisant la notion de bras de levier.

- Décomposer  $\vec{F}$  en une force  $\vec{F}_{\parallel}$  parallèle à  $(\Delta)$  et une force  $\vec{F}_{\perp}$  normale à  $(\Delta)$ .
- Déterminer à l'aide de la règle de la main droite le sens dans lequel  $\vec{F}_{\perp}$  a tendance à faire tourner le système autour de  $(\Delta)$ .
- Définir le bras de levier  $d$  par rapport à  $(\Delta)$  de la composante  $\vec{F}_{\perp}$  de la force  $\vec{F}$ .
- $F_{\perp}$  étant le module de  $\vec{F}_{\perp}$ ,  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = +dF_{\perp}$  ou  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = -dF_{\perp}$  selon que  $\vec{F}_{\perp}$  a tendance à faire tourner le système autour de  $(\Delta)$  dans le sens positif ou négatif.

➔ Exercice (14.1)

#### Règle de la main droite et sens de rotation autour d'un axe orienté

On place le pouce de la main droite parallèlement à l'axe de sorte que les autres doigts, légèrement repliés, pointent dans la direction et le sens de  $\vec{F}_{\perp}$ . Si le pouce est dans le sens du vecteur unitaire de l'axe, c'est que la force a tendance à faire tourner dans le sens positif. S'il est dans le sens contraire, c'est qu'elle a tendance à faire tourner dans le sens négatif.

Reprenons une dernière fois l'exemple de l'ouverture d'une porte (figure 14.4) et calculons les moments  $\mathcal{M}_z$  des forces  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_{P3}$  et  $\vec{F}_{P4}$  par rapport à l'axe orienté  $Oz$ . Pour cela faisons apparaître les droites d'action et les bras de levier sur un schéma.

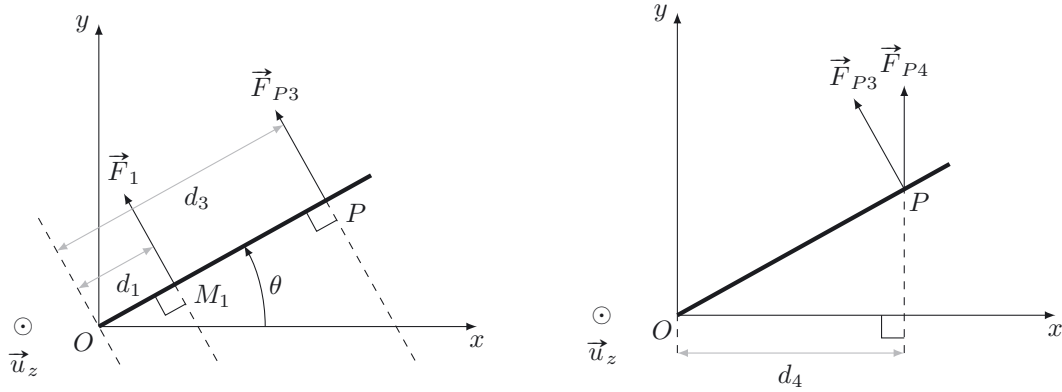


Figure 14.6. Bras de levier  $d_i$  (en gris) et droites d'action (en pointillés).

Dans les 3 cas, d'après la règle de la main droite, la force appliquée fait tourner la porte dans le sens positif donc :  $\mathcal{M}_z(\vec{F}_i) = +d_i F$  où  $F$  est la norme de la force ( $F = 5\text{N}$ ). Puisque  $d_1 < d_4 < d_3$ , on peut conclure que :  $0 < \mathcal{M}_z(\vec{F}_1) < \mathcal{M}_z(\vec{F}_{P4}) < \mathcal{M}_z(\vec{F}_{P3})$ .

### ■ 3 Couple de forces et liaison pivot

Un **couple de forces** est un système de forces particulier. On en rencontre notamment dans les liaisons de type pivot entre stator et rotor.

**Définition : Couple de forces**

Un **couple de forces** est un système de forces (au minimum 2) dont la résultante  $\vec{F}$  est nulle et dont le moment résultant en un point est non nul.



**Le moment en un point d'un couple de forces est indépendant du point choisi pour le calculer.** On pourra noter  $\vec{\Gamma}$  ce moment sans préciser ce point. Par abus de langage on appelle parfois « couple » le moment  $\vec{\Gamma}$  d'un couple de forces.

Illustrons cette définition avec les trois exemples ci-dessous :

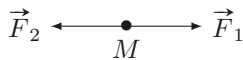


Figure 14.7

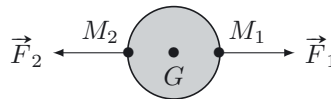


Figure 14.8

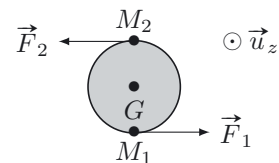


Figure 14.9

Chaque système (point matériel  $M$  ou disque de rayon  $R$  et de centre  $G$ ) est soumis à 2 forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  telles que leur résultante  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ .

Calculons le moment résultant au point  $O$  de ce système de forces dans les 3 cas considérés.

- 1<sup>er</sup> cas (figure 14.7) :  $\mathcal{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OM} \wedge \vec{F}_2 = \vec{OM} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{OM} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ . Le moment résultant est nul, ce système de forces ne constitue donc pas un couple de forces.

- 2<sup>e</sup> cas (figure 14.8) :  $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_2 = (\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2) \wedge \vec{F}_1 = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_1$ .  
D'où  $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$  puisque les vecteurs  $\overrightarrow{M_2M_1}$  et  $\vec{F}_1$  sont colinéaires. Le moment résultant est nul, ce système de forces ne constitue donc pas un couple de forces.
- 3<sup>e</sup> cas (figure 14.9) : comme dans le deuxième cas,  $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_1$ . Mais cette fois-ci, les vecteurs  $\overrightarrow{M_2M_1}$  et  $\vec{F}_1$  étant orthogonaux,  $\vec{\mathcal{M}}_O \neq \vec{0}$ . Le moment résultant n'étant pas nul, le système de forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  constitue un couple. On remarque que son moment est bien indépendant du point  $O$ .



Le moment d'un couple de forces est qualifié de couple moteur ou de couple résistant selon que sa puissance est positive ou négative. Pour plus de détails, voir la dernière partie de ce chapitre concernant la loi de l'énergie cinétique pour un solide en rotation.

**Définition : Liaison pivot**

Une **liaison pivot** est une liaison entre deux solides en rotation l'un par rapport à l'autre, sans translation possible.



Si dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$  un des solides est fixe et l'autre mobile, le solide fixe porte le nom de **stator** et le solide mobile le nom de **rotor**.

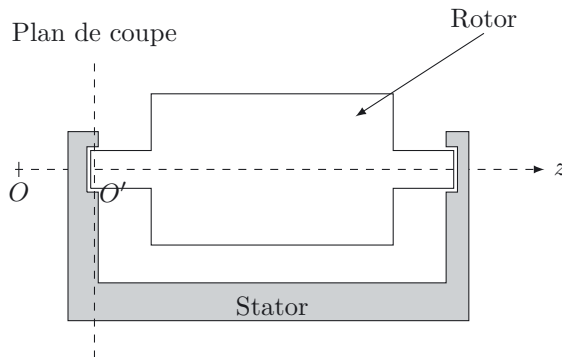


Figure 14.10. Liaison pivot.

Au niveau de chaque liaison pivot, le stator exerce sur le rotor des forces radiales pour le maintenir en place et permettre sa rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Le moment résultant en  $O'$  de ces forces radiales est nul.

Si les frottements sont négligeables, on peut considérer qu'il n'y a pas d'autres forces. La liaison pivot est alors qualifiée de parfaite. Ainsi dans une liaison pivot parfaite, le moment par rapport à l'axe des forces exercées par le stator sur le rotor est nul.

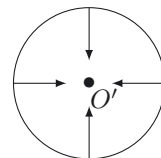


Figure 14.11. Bilan des forces radiales.

Si les frottements ne sont pas négligeables, le stator exerce, outre les forces radiales précédentes, des forces tangentielles opposées au vecteur vitesse en chaque point du rotor. Si ces forces sont uniformément réparties sur la surface de contact, leur résultante est nulle. Par contre, leur moment résultant en  $O'$  ne l'est pas. Le moment des forces de frottement du stator sur le rotor constitue alors un couple résistant de moment :  $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma \vec{u}_z$  (le signe  $\pm$  dépend du sens de rotation du rotor).

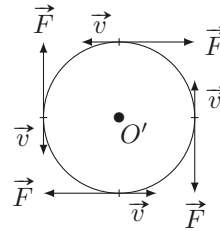


Figure 14.12. Bilan des forces de frottement.

## ■ 4 Loi du moment cinétique pour un point matériel

Après avoir dégagé les concepts de moment cinétique et de moment de force, nous pouvons énoncer la loi du moment cinétique. Commençons par le cas d'un point matériel.

### Loi du moment cinétique par rapport à un point fixe pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel  $M$  calculé en un point fixe  $O$  est égale au moment résultant en  $O$  des forces appliquées :

$$(14.2) \quad \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$$

### Loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté pour un point matériel

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté  $(\Delta)$  d'un point matériel  $M$  est égale au moment résultant par rapport cet axe des forces appliquées :

$$(14.3) \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$



Cette loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe orienté  $(\Delta)$  est obtenue en réalisant le produit scalaire entre l'équation 14.2 et le vecteur  $\vec{u}_\Delta$  orientant l'axe  $(\Delta)$ , ce qui revient à projeter  $\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$  et  $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$  sur l'axe  $(\Delta)$ .

Illustrons l'application de la loi du moment cinétique en étudiant le mouvement dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen d'un pendule simple de masse  $m$  et de longueur  $l$  lâché sans vitesse dans le plan vertical  $(Oxy)$  lorsque le fil fait un angle  $\theta_0$  avec l'axe vertical  $(Ox)$ .

On utilise la base cylindrique  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  (figure 14.13).

Le point matériel  $M$  de masse  $m$  est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_x$  et à la tension  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  du fil. Son mouvement est un mouvement circulaire de rayon  $l$  autour de l'axe horizontal  $(Oz)$ .

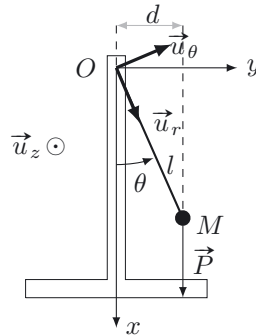


Figure 14.13. Pendule simple.

Appliquons au point matériel  $M$  la loi du moment cinétique par rapport à l'axe fixe ( $Oz$ ) :

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{T})$$

La direction de la tension  $\vec{T}$  interceptant l'axe ( $Oz$ ), le moment par rapport à l'axe de cette force est nul. Le poids a un bras de levier égal à  $d$  (figure 14.13) et il tend à faire tourner  $M$  dans le sens négatif lorsque  $\theta$  est positif. On en déduit :  $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd = -mgl \sin(\theta)$ .

Par ailleurs  $M$  étant en mouvement circulaire de rayon  $l$  autour de l'axe ( $Oz$ ), son moment cinétique par rapport à ( $Oz$ ) vaut, d'après l'équation 14.1 :  $L_z = ml^2\dot{\theta}$ .

D'où :  $ml^2\ddot{\theta} = -mgl \sin(\theta)$ , soit  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ . On retrouve ainsi l'équation du mouvement du pendule simple.

#### Méthode 14.2 : Appliquer la loi du moment cinétique à un point matériel

La recherche de l'équation du mouvement d'un point matériel peut se faire en lui appliquant la loi du moment cinétique, dans un référentiel galiléen.

- **1<sup>re</sup> variante** : utiliser la loi du moment cinétique **par rapport à un point fixe**.
  - Choisir un point fixe et un système de coordonnées adaptés au problème.
  - Faire un bilan des forces et calculer leurs moments par rapport au point fixe.
  - Calculer le moment cinétique de  $M$  par rapport au point fixe et calculer sa dérivée.
  - Déterminer l'équation vectorielle du mouvement à l'aide de la loi du moment cinétique par rapport à un point fixe.
  - Projeter cette équation sur un axe choisi afin d'obtenir l'équation scalaire du mouvement.
- **2<sup>e</sup> variante** : utiliser la loi du moment cinétique **par rapport à un axe fixe**.
  - Définir le système de coordonnées cylindriques adapté au problème et orienter l'axe.
  - Faire un bilan des forces et calculer leurs moments par rapport à l'axe fixe en utilisant la notion de bras de levier.
  - Calculer le moment cinétique de  $M$  par rapport à l'axe fixe et calculer sa dérivée.
  - Déterminer l'équation scalaire du mouvement à l'aide de la loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe

➔ Exercice (14.2)



La 2<sup>e</sup> variante est bien adaptée lorsque le mouvement de  $M$  se fait dans un plan perpendiculaire à un axe fixe.



La **loi du moment cinétique** conduit à une équation différentielle du second ordre.

## ■ 5 Loi du moment cinétique pour un solide

Pour un solide en rotation autour d'un **axe fixe** ( $\Delta$ ), il est intéressant d'utiliser la loi du moment cinétique par rapport à un axe fixe, adaptée au cas du solide.

### Loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté

Dans un **référentiel galiléen**  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un **axe fixe orienté** ( $\Delta$ ) d'un solide en rotation autour de cet axe est égale au moment résultant par rapport à ( $\Delta$ ) des forces extérieures :

$$(14.4) \quad \frac{dL_{\Delta}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext,i})$$

En notant  $J_{\Delta}$  le moment d'inertie du solide par rapport à ( $\Delta$ ) et  $\omega$  sa vitesse angulaire autour de ( $\Delta$ ) :  $L_{\Delta} = J_{\Delta}\omega$ . On peut écrire la loi du moment cinétique sous la forme :

$$(14.5) \quad J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext,i})$$



Dans le cas du solide, la loi du moment cinétique, comme la loi de la quantité de mouvement, ne fait appel qu'aux **seules forces extérieures** appliquées au solide.



Si le **moment résultant par rapport à l'axe fixe** ( $\Delta$ ) **des forces extérieures est nul**, la loi du moment cinétique par rapport à ( $\Delta$ ), appliquée au solide dans  $\mathcal{R}$  galiléen, nous donne :  $J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext,i}) = 0$ . Le solide tourne alors à **vitesse angulaire constante** autour de l'axe ( $\Delta$ ).



Plus le moment d'inertie  $J_{\Delta}$  du solide autour de l'axe ( $\Delta$ ) est élevé, plus il est difficile de modifier sa rotation autour de cet axe. Ce moment d'inertie intervient sur la vitesse angulaire d'un solide en rotation autour d'un axe de la même façon que la masse  $m$  sur la vitesse d'un solide en translation. Ces deux grandeurs caractérisent l'inertie du solide à une modification de son mouvement. D'ailleurs la masse intervenant dans la quantité de mouvement du solide est appelée **masse inertielle**.

**Méthode 14.3 : Utiliser la loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe**

La loi du moment cinétique par rapport un axe fixe orienté permet d'établir l'équation du mouvement d'un solide en rotation autour d'un tel axe, dans un référentiel galiléen.

- Définir le système de coordonnées cylindriques adapté au problème et orienter l'axe.
- Faire un bilan des forces extérieures et calculer leurs moments par rapport à l'axe fixe à l'aide de la notion de bras de levier.
- Calculer le moment cinétique du solide par rapport à l'axe fixe en utilisant son moment d'inertie par rapport à cet axe et calculer sa dérivée.
- Déterminer l'équation scalaire du mouvement à l'aide de la loi du moment cinétique.

➔ Exercice (14.3)

## ■ 6 Le pendule pesant

Un pendule pesant est un solide de masse  $m$  mobile autour d'un axe fixe horizontal ne passant pas par son centre de masse  $G$ .

Le pendule que nous avons étudié expérimentalement était constitué d'un bras léger en aluminium sur lequel était emmanché un bloc lourd. La distance  $L$  entre le centre de masse  $G$  de ce bloc et l'axe de rotation était modifiable. Pour nos expériences, nous avons adopté la valeur  $L = OG = 39,0$  cm. La liaison pivot entre l'axe et le pendule comportant deux roulements à billes, nous n'avons observé que de très faibles amortissements. Cela nous a conduit dans notre modélisation à considérer la liaison pivot comme parfaite.

Nous avons réalisé des enregistrements vidéo d'une trentaine de périodes, pour des conditions initiales différentes. Après extraction de la position de  $G$ , nous en avons déduit l'angle  $\theta$  entre le bras et la verticale au cours du temps.

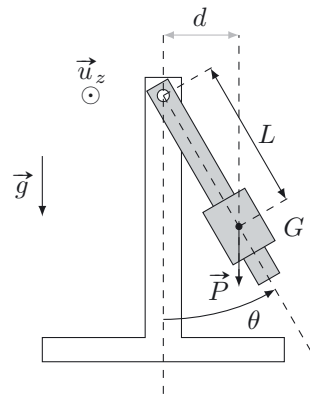


Figure 14.14. Pendule pesant.

Sur les figures 14.15 à 14.18 ci-dessous, nous avons représenté  $\theta$  en fonction du temps ainsi que le spectre en décibel, calculé sur une trentaine de périodes. La période d'oscillation  $T$  est déterminée à partir de l'analyse spectrale sur  $\theta$ .

□ **Quels commentaires pouvons-nous faire sur ces graphes ?**

Pour commencer, l'allure de l'angle  $\theta$  en fonction du temps semble sinusoïdale. Mais pour une analyse plus fine il faut examiner les spectres en fréquence. Nous pouvons alors remarquer qu'il existe, hormis pour l'expérience 1, des harmoniques de rang 2 et 3 de plus en plus importants à mesure que l'amplitude des oscillations augmente.

De plus, en comparant les différentes périodes, nous remarquons que dans l'ordre croissant des amplitudes des oscillations :  $T_1 = T_2 = 1,25$  s ;  $T_3 = 1,27$  s et  $T_4 = 1,31$  s.



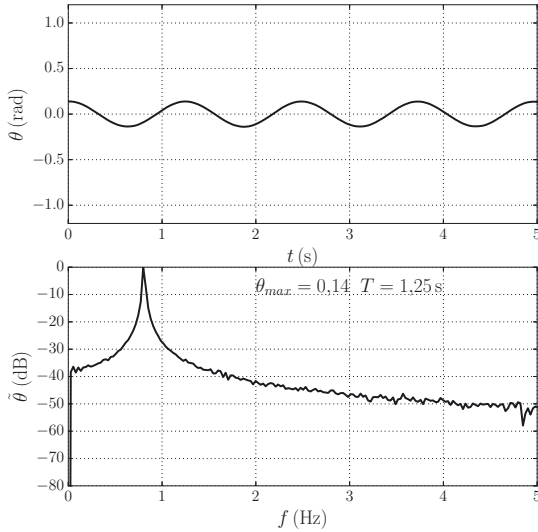


Figure 14.15. Expérience 1.

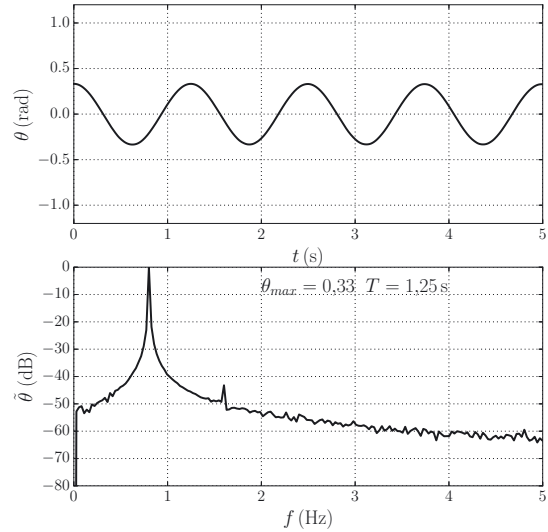


Figure 14.16. Expérience 2.

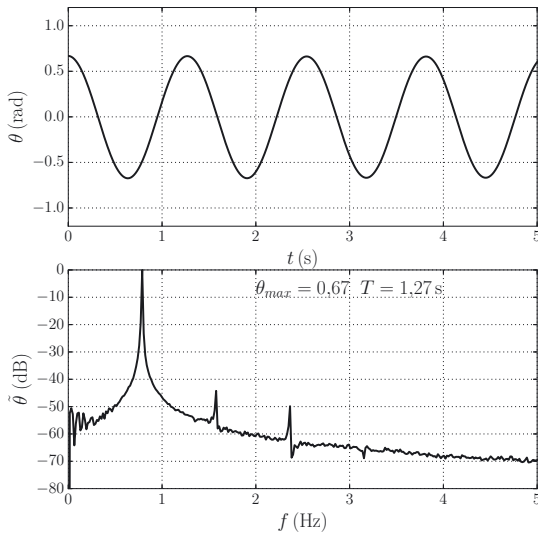


Figure 14.17. Expérience 3.

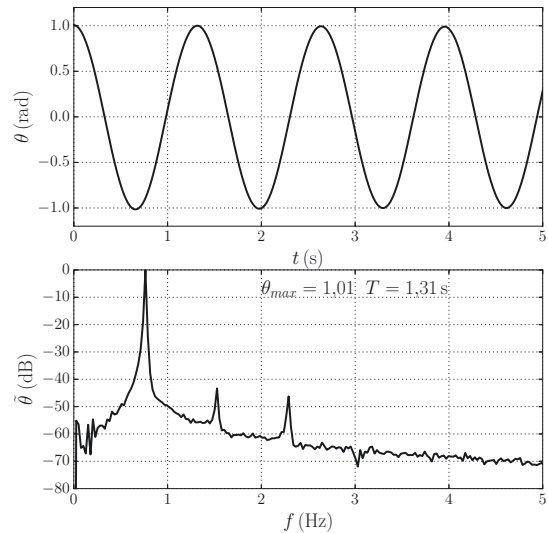


Figure 14.18. Expérience 4.

Nous pouvons donc conclure que :

- Lors de la première expérience, il est possible de considérer les oscillations comme sinusoïdales et d'assimiler le pendule pesant à un oscillateur harmonique.
- Pour des oscillations d'amplitude plus importante, plus l'amplitude augmente, plus on s'éloigne des oscillations harmoniques et plus la période  $T$  des oscillations augmente.

□ Comment justifier théoriquement ces observations ?

Pour répondre à cette question, appliquons au pendule pesant la loi du moment cinétique par rapport à l'axe fixe ( $Oz$ ) dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. La liaison pivot étant supposée parfaite, le seul moment par rapport à l'axe non nul est celui du poids  $\vec{P}$  appliqué en  $G$ . Le théorème du moment cinétique conduit alors à :  $J_z \dot{\theta} = -mgd$  où  $d$  est le bras de levier du poids et  $J_z$  le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe ( $Oz$ ). D'où :

$$(14.6) \quad J_z \ddot{\theta} = -mgL \sin(\theta) \implies \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J_z}}$$

Si on se limite aux oscillations de faible amplitude :  $\sin(\theta) \sim \theta$  et l'équation du mouvement devient :

$$(14.7) \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  et de période  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{mgL}}$ , ce qui justifie le comportement harmonique du pendule pour les faibles amplitudes.

En négligeant la masse du bras on peut considérer que  $J_z = mL^2$ . On en déduit  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ . Avec  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  et  $L = 39,0 \text{ cm}$  on obtient  $T = 1,25 \text{ s}$ , ce qui est en parfait accord avec l'expérience. Dans l'hypothèse des petites oscillations, on peut déterminer l'intégrale première du mouvement en multipliant l'équation (14.7) du mouvement par  $\dot{\theta}$  puis en intégrant l'expression obtenue par rapport au temps :

$$(14.8) \quad \begin{aligned} \ddot{\theta} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta \dot{\theta} &= 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta^2 &= \text{cste} \end{aligned}$$

Pour des oscillations de plus grande amplitude, l'intégrale première du mouvement s'obtient par la même méthode à partir de l'équation (14.6) :

$$(14.9) \quad \begin{aligned} \ddot{\theta} \dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) \dot{\theta} &= 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \omega_0^2 \cos(\theta) &= \text{cste} \end{aligned}$$

L'intégrale première du mouvement permet de déterminer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  et des conditions initiales et ainsi de tracer le portrait de phase théorique du pendule pour différentes conditions initiales. C'est ce que nous avons fait pour un angle initial multiple de  $2\pi$  et des vitesses initiales régulièrement espacées. Les résultats sont présentés figure 14.19.

Nous observons 3 types de trajectoires de phase.

- Des trajectoires fermées autour de  $\theta = 0$  [ $2\pi$ ] qui correspondent à des oscillations autour de la position d'équilibre stable. Les mouvements sont qualifiés de **pendulaires**. Pour de faibles amplitudes ils sont sinusoïdaux et les trajectoires de phase sont des ellipses (équation 14.8). Pour des amplitudes plus grandes ils ne le sont plus et les trajectoires de phase se déforment du fait de la présence d'harmoniques dans le spectre de  $\theta(t)$ .
- Les trajectoires ouvertes pour lesquelles la vitesse  $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais et qui correspondent aux mouvements de révolution du pendule lors desquels il tourne sans s'arrêter autour de l'axe ( $Oz$ ). Ces mouvements sont qualifiés de **révolutifs**.

- La trajectoire en pointillés, appelée **séparatrice** qui correspond à une vitesse du pendule s'annulant dans la position d'équilibre instable  $\theta = \pm\pi$ . Cette position atteinte, le pendule y reste tant qu'une petite perturbation ne vient pas le déstabiliser.

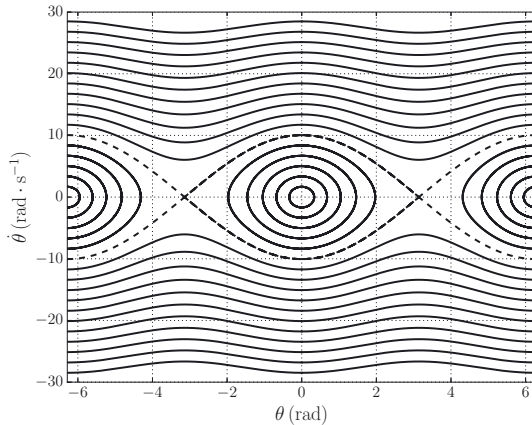


Figure 14.19. Portrait de phase théorique.

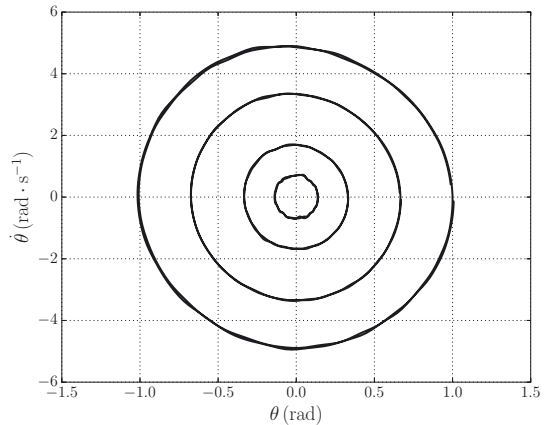


Figure 14.20. Portrait de phase expérimental.

La figure 14.20 présente le portrait de phase expérimental correspondant aux enregistrements des figures 14.15 à 14.18 pour des mouvements pendulaires d'amplitudes inférieures à  $60^\circ$ .

#### Méthode 14.4 : Interprétation d'un portrait de phase

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, deux types de mouvements, identifiables sur un portrait de phase, peuvent être observés.

- Les **mouvements pendulaires** pour lesquels les **trajectoires de phase sont fermées** autour d'une position d'équilibre stable. Ce sont des mouvements d'oscillations.
- Les **mouvements révolutifs** pour lesquels les **trajectoires de phase sont ouvertes**. Dans ce type de mouvements la vitesse du solide ne s'annule jamais.
- Entre les deux, le cas particulier pour lequel le solide **arrive sans vitesse dans une position d'équilibre instable** et s'y arrête définitivement (en théorie). La trajectoire de phase correspondante constitue la **séparatrice**.

➔ Exercice (14.4)



Après l'étude du pendule pesant nous recommandons au lecteur attentif celle d'un **pendule de torsion**. Nous le renvoyons pour cela aux exercices 14.9 et 14.10.

## ■ 7 Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation

Intéressons-nous maintenant à l'approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté en reprenant les notions introduites au chapitre 12.

### Définition : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation dans un référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  à la vitesse angulaire  $\omega$  s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, les notions de puissance et de travail d'une force ou d'un couple s'énoncent de la façon suivante :

### Définition : Puissance d'une force appliquée à un solide en rotation

La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point  $M$  d'un solide en rotation dans le référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe  $(\Delta)$  à la vitesse angulaire  $\omega$  est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})\omega$$

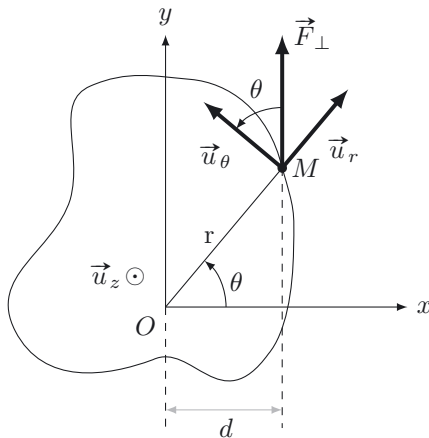


Figure 14.21. Solide en rotation : vue de dessus.

Considérons un solide en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe fixe  $(Oz)$  et soumis au point  $M$  à la force  $\vec{F}$  dont nous notons  $\vec{F}_{\perp}$  et  $\vec{F}_{\parallel}$  les composantes respectivement perpendiculaire et parallèle à  $(Oz)$ . La figure ci-contre décrit la situation dans le plan normal à  $(Oz)$  et contenant le point  $M$ .

Nous pouvons successivement écrire :

- $\vec{v}(M) = r\omega \vec{u}_{\theta}$  ;
- $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot r\omega \vec{u}_{\theta} = F_{\theta} r \omega$ .

Or :  $F_{\theta} = F_{\perp} \cos(\theta)$ , donc :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = F_{\perp} \cos(\theta) r \omega$$

Par ailleurs :  $\mathcal{M}_z(\vec{F}) = F_{\perp} d = F_{\perp} r \cos(\theta)$ .

Nous obtenons bien :  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}_z \omega$ .



Si le solide est soumis à un couple  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_{\Delta}$ , alors la puissance de ce couple se calcule directement sous la forme :  $\mathcal{P}(\vec{\Gamma}) = \Gamma \dot{\theta}$ .

**Définition : Travail d'une force appliquée à un solide en rotation**

Le travail d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un point  $M$  d'un solide en rotation dans le référentiel  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) est défini par :

$$W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{P}(\vec{F}) dt = \int_{M_1}^{M_2} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) d\theta$$



Si le solide est soumis à un couple  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{u}_\Delta$ , alors le travail de ce couple se calcule directement sous la forme :  $W(\vec{\Gamma}) = \int_{M_1}^{M_2} \Gamma d\theta$ .

Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, les lois de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique introduites au chapitre 12 s'énoncent de la façon suivante.

**Loi de la puissance cinétique pour un solide**

Dans un référentiel galiléen, la loi de la puissance cinétique appliquée à un **solide** soumis aux **forces extérieures**  $\vec{F}_{ext,i}$  et aux **couples extérieurs**  $\vec{\Gamma}_{ext,j}$  s'écrit :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{ext,i}) + \sum_j \mathcal{P}(\vec{\Gamma}_{ext,j})$$

**Loi de l'énergie cinétique pour un solide**

Dans un référentiel galiléen, la loi de l'énergie cinétique appliquée à un **solide** soumis aux **forces extérieures**  $\vec{F}_{ext,i}$  et aux **couples extérieurs**  $\vec{\Gamma}_{ext,j}$  s'écrit :

$$\Delta_{M_1 \rightarrow M_2} E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1) = \sum_i W(\vec{F}_{ext,i})_{M_1 \rightarrow M_2} + \sum_j W(\vec{\Gamma}_{ext,j})_{M_1 \rightarrow M_2}$$



Attention à ne pas confondre les expressions de  $E_c$ , de  $\mathcal{P}(\vec{F})$  et de  $W(\vec{F})_{M_1 \rightarrow M_2}$  dans le cas d'un point en translation et d'un solide en rotation autour d'un axe !



En mécanique du solide, on distingue les couples moteurs pour lesquels  $\mathcal{P}(\vec{\Gamma}) > 0$  des couples résistants pour lesquels  $\mathcal{P}(\vec{\Gamma}) < 0$ . Les premiers permettent d'augmenter l'énergie cinétique du solide en rotation alors que les seconds permettent de la diminuer.

- Exemple de couple moteur : le couple des forces magnétiques exercées par le stator d'un moteur électrique sur son rotor.
- Exemple de couple résistant : le couple des forces de frottement exercées par l'étrier (stator) d'un frein à disque sur le disque du frein (rotor).

## Interro de cours

1. Le moment cinétique par rapport à  $O$  d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , de vitesse  $\vec{v}$  et subissant une force  $\vec{F}$  :
  - (a) s'écrit  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$  ;
  - (b) s'écrit  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$  ;
  - (c) est nul si sa trajectoire est une droite passant par le point  $O$ .
2. Une force dont la droite d'action est normale à un axe  $(\Delta)$  est appliquée à un point matériel. Son moment par rapport à  $(\Delta)$  :
  - (a) a la même dimension que le travail d'une force ;
  - (b) permet de savoir si la force modifie la vitesse du point matériel ;
  - (c) a un module inversement proportionnel à son bras de levier par rapport à  $(\Delta)$ .
3. Dans quel schéma, le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe  $Oz$  est-il négatif ?

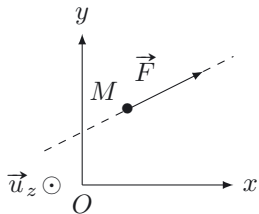


schéma (a)

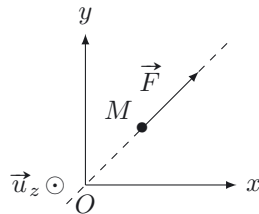


schéma (b)

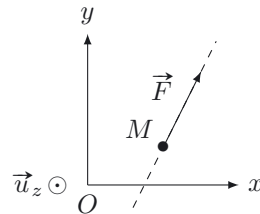


schéma (c)

4. Quel schéma illustre correctement la notion de bras de levier  $d$  par rapport à l'axe  $Oz$  ?

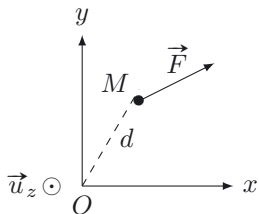


schéma (a)

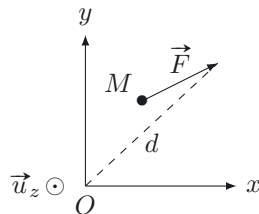


schéma (b)

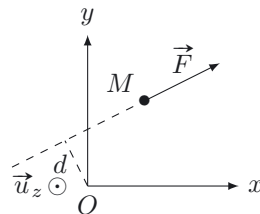


schéma (c)

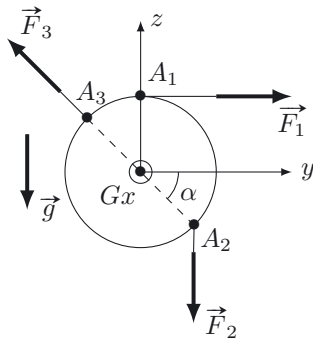
5. On considère un système constitué de deux points matériels de même masse  $m$  et situés à la même distance  $r$  d'un axe  $\Delta$ . Le moment d'inertie de ce système par rapport à  $\Delta$  :
  - (a) ne varie pas si on double la masse  $m$  et on divise par deux la distance  $r$  ;
  - (b) est divisé par deux si on double la masse  $m$  ;
  - (c) est multiplié par quatre si on double la distance  $r$ .
6. Un pendule pesant, abandonné sans vitesse initiale avec une grande inclinaison, présente :
  - (a) un mouvement révolutif ;
  - (b) un mouvement pendulaire ;
  - (c) des oscillations harmoniques.

## Exercices

### Exercice 14.1 Des moments de tension

➔ Méthode (14.1)

Un disque homogène de masse  $m$ , de rayon  $R = 20$  cm et de centre de masse  $G$  est susceptible de tourner librement autour de l'axe horizontal  $Gx$  (liaison pivot parfaite).



Trois fils lui sont attachés en  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  et tendus avec des forces de normes  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ .

1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le disque.
2. Calculer le moment des forces exercées par rapport à l'axe  $Gx$ .
3. Dans quel sens le disque va-t-il tourner ?

### Exercice 14.2 Un pendule électrique

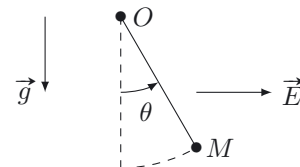
➔ Méthode (14.2)

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable.

La boule est préalablement chargée avec une charge électrique  $Q = 2,3 \cdot 10^{-4}$  C. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme  $\vec{E} = E\vec{u}_x$  avec  $E = 500$  V  $\cdot$  m $^{-1}$ .

La longueur du pendule est  $OM = R = 10$  cm et la masse de la boule assimilée à un point  $M$  est  $m = 20$  g.

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .

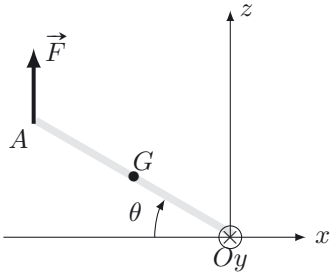


1. Appliquer la loi du moment cinétique à  $M$  et en déduire la position d'équilibre  $\theta_e$  du pendule.
2. On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la pulsation  $\omega_0$  des oscillations puis calculer sa période  $T_0$ . On admettra que  $\cos(\theta_e + \varepsilon) \simeq \cos(\theta_e) - \varepsilon \sin(\theta_e)$  et  $\sin(\theta_e + \varepsilon) \simeq \sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e)$  si  $|\varepsilon| \ll \theta_e$ .

## Exercice 14.3 Faire le mur

➔ Méthode (14.3)

Gérard utilise sa grue pour dresser un mur en béton préfabriqué à la verticale.



Le mur est initialement posé sur le sol ( $\theta = 0$ ). La grue le soulève en exerçant une force  $\vec{F}$  toujours verticale appliquée en A. Le mur pivote alors autour de l'axe  $Oy$  fixe.

Le mur possède une hauteur  $H = OA = 3,0$  m, une masse  $m = 5,0 \cdot 10^3$  kg et son centre de masse  $G$  se situe à  $OG = a = 1,2$  m de la base. Le moment d'inertie du mur par rapport à l'axe  $Oy$  est  $J = 2,8 \cdot 10^3$  kg  $\cdot$  m<sup>2</sup>.

On néglige tous les frottements et l'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8$  m  $\cdot$  s<sup>-2</sup>.

1. Faire un bilan des forces exercées sur le mur.
2. Appliquer la loi du moment cinétique au mur par rapport à l'axe  $Oy$ . En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .
3. Le mur pivote autour de sa base  $Oy$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0 = 0,20$  rad  $\cdot$  s<sup>-1</sup> constante. Déterminer et calculer la force  $\vec{F}$  exercée par la grue.
4. Exprimer la puissance de la force  $\vec{F}$  puis le travail  $W$  effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale. Calculer  $W$ .

## Exercice 14.4 Les malheurs de Sophie

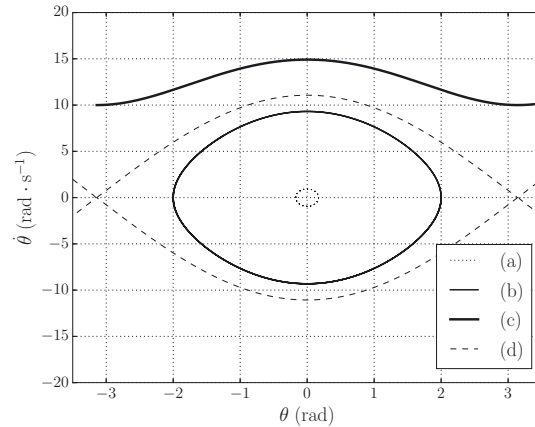
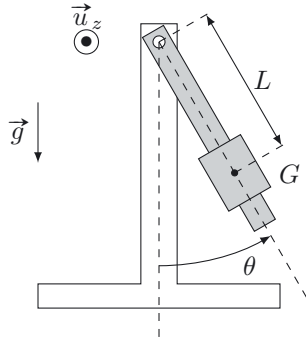
➔ Méthode (14.4)

Étudiante studieuse mais étourdie, Sophie a simulé les trajectoires de phase du pendule pesant présenté sur la figure ci-dessous avec des conditions initiales  $\theta_i$  et  $\dot{\theta}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dont elle ne se souvient que partiellement :

- trajectoire de phase (1) : angle initial  $\theta_1$  faible, vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_1 = 0$  ;
- trajectoire de phase (2) :  $\theta_2 = -\pi$ ,  $\dot{\theta}_2 \neq 0$  ;
- trajectoire de phase (3) :  $\theta_3 > \theta_1$ ,  $\dot{\theta}_3 = 0$ .

Les trajectoires de phase notées (a), (b) et (c) sont tracées sur le diagramme ci-dessous.

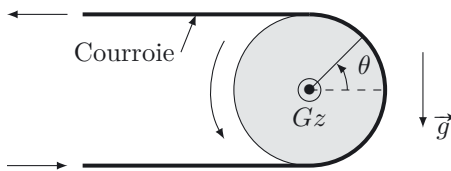




1. Identifier les trois trajectoires de phase (a), (b) et (c) en précisant si elles correspondent à un mouvement pendulaire ou à un mouvement révolutif. Indiquer les valeurs de  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $\dot{\theta}_2$ .
2. L'une des trajectoires correspond-elle à un mouvement pendulaire isochrone? Est-il alors possible d'évaluer sa période d'oscillation?
3. À quoi correspond la courbe (d) tracée en pointillés? Comment la nomme-t-on?

**Exercice 14.5 La roue tourne**

Un moteur de puissance  $P = 1,0\text{ kW}$  fait tourner une roue autour de son axe  $Gz$  par l'intermédiaire d'une courroie.



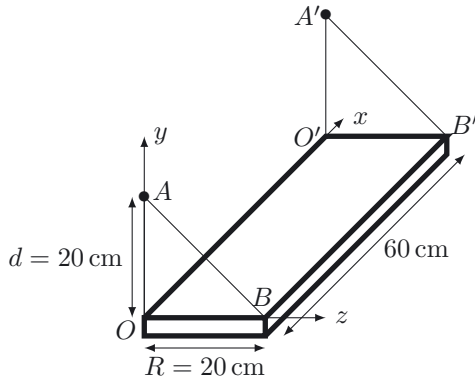
La roue de centre de masse  $G$  possède un rayon  $R = 30\text{ cm}$ , une masse  $m = 1,0\text{ kg}$  et son moment d'inertie par rapport à  $Gz$  est  $J = mR^2$ . Elle subit un couple de frottement de moment  $\vec{C}_f = -C_f \vec{u}_z$  que nous supposons constant (liaison d'axe  $Gz$ ).

Nous négligeons tout frottement fluide.

1. Les courroies exercent un couple moteur de moment  $\vec{C} = C \vec{u}_z$  sur la roue. Appliquer la loi du moment cinétique à la roue par rapport à l'axe  $Gz$ . En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par  $\theta$ .
2. Quel est le lien entre  $C$  et  $C_f$  lorsque la roue tourne à vitesse angulaire constante?
3. Calculer  $C$  pour que la roue tourne à une vitesse angulaire constante de 1000 tours par minute. On admet que la puissance  $P$  correspond à la puissance du couple moteur. En déduire  $C_f$ .
4. Le moteur est brutalement arrêté et on suppose que le couple de frottement garde la même valeur constante. Combien de tours la roue va-t-elle effectuer avant de s'arrêter?

### Exercice 14.6 Une étagère murale

Marie achète une étagère murale afin de ranger sa collection J'assure de chez Dunod.



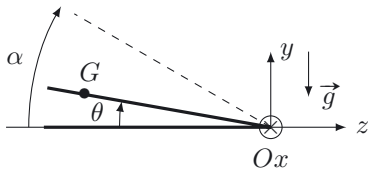
L'étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A').

La planche est en bois, de masse  $m = 1,0$  kg, de centre de masse G situé à la distance  $\frac{R}{2}$  de l'axe  $OO'$  et nous négligerons la masse des câbles. La valeur de l'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Déterminer la tension des câbles et la réaction  $\vec{R}_N$  du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre.  $\vec{R}_N$  est supposée normale au mur. Réaliser les applications numériques.
- Marie oublie de fixer les câbles en B et B'. La planche n'est retenue que par les câbles OA et O'A' et elle tourne donc autour de l'axe  $OO'$ . Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe  $OO'$  vaut  $J = \frac{1}{3}mR^2$ . Quelle est la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur ?

### Exercice 14.7 Le panier de basse quête

Dans le jeu de société Titeuf, les joueurs passent une série d'épreuves visant à déterminer « qui sera le pôv'naze ». L'une des épreuves consiste à mettre une petite balle dans un panier de basket miniature à l'aide d'un lanceur.



Nous modélisons le lanceur comme indiqué sur la figure. Le support du lanceur peut tourner autour de l'axe  $Ox$  (liaison pivot parfaite). Il est repéré à un instant  $t$  par sa position angulaire  $\theta$ . Au repos,  $\theta = \alpha$ .

Le lanceur subit l'action mécanique d'un ressort spiral (non représenté) correspondant à un couple de moment  $\vec{\Gamma} = C(\alpha - \theta)\vec{u}_x$  avec  $C = 16 \text{ mN} \cdot \text{m}$  et les angles  $\alpha$  et  $\theta$  exprimés en radians. Au repos, le lanceur se trouve en  $\theta = \alpha = 30^\circ$ . La balle de masse  $m = 2,0$  g est posée sur le support du lanceur dont nous négligerons la masse. Elle sera considérée comme ponctuelle et située en G à la distance  $a = OG = 5,0$  cm de l'axe de rotation.

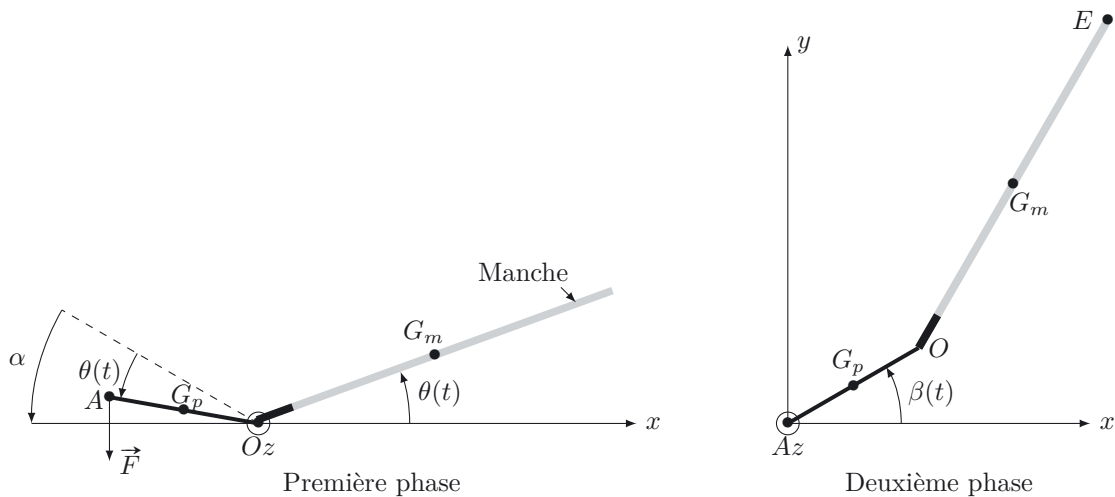
Nous nous intéressons à la phase de lancer au cours de laquelle la balle est posée sur le support et reste solidaire de celui-ci.

L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire le bilan des actions mécaniques s'exerçant sur l'ensemble support+ballon, ( $S$ ). Écrire leur moment par rapport à  $Ox$ .
2. Appliquer la loi du moment cinétique à l'ensemble ( $S$ ). En déduire une équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .
3. En multipliant l'équation ci-dessus par  $\dot{\theta}$ , montrer que l'on obtient un bilan de puissance que l'on interprétera soigneusement.
4. Un joueur donne au lanceur la position initiale  $\theta_0 = 10^\circ$  et libère alors celui-ci. Déterminer la vitesse de la balle lorsqu'elle quitte le lanceur en  $\theta = \alpha$ . L'étude balistique montre qu'une vitesse de  $60 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  permet d'assurer le panier. Conclure.

### Exercice 14.8 La pelle et la Bête

Lors d'un rude hiver, la Bête souhaite déblayer la neige qui obstrue l'entrée de son château. Elle marche malencontreusement sur l'extrémité de sa pelle et s'assomme.



La pelle est constituée d'un manche de masse  $m_m = 1,0 \text{ kg}$ , de longueur  $L = 1,6 \text{ m}$  et d'une plaque de masse  $m_p = 1,0 \text{ kg}$ , de longueur  $OA = l = 30 \text{ cm}$ . Les centres de masse respectifs du manche et de la plaque sont  $G_m$  et  $G_p$  avec  $OG_m = a = 80 \text{ cm}$  et  $OG_p = b = 12 \text{ cm}$ . L'angle entre le manche et la plaque est  $\alpha = 30^\circ$ .

Dans une première phase, la Bête marche sur l'extrémité de la pelle, exerçant en  $A$  la force notée  $\vec{F} = -F\vec{u}_y$  avec  $F = 400 \text{ N}$ . La pelle tourne alors autour de l'axe  $Oz$ , sa rotation étant repérée par l'angle  $\theta(t)$ . Initialement, le manche est horizontal ( $\theta(0) = 0$ ).

Dans une deuxième phase, la pelle tourne autour de l'axe  $Az$ , sa rotation étant repérée par l'angle  $\beta(t)$ .

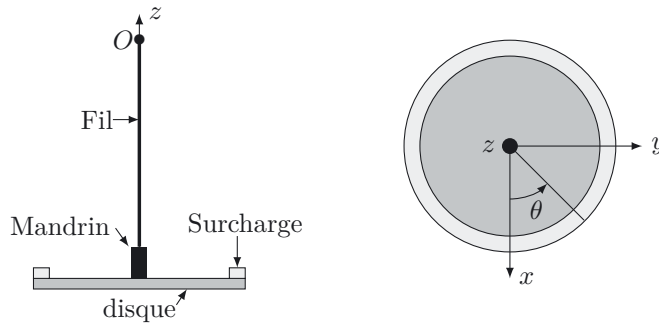
On néglige tous les frottements et l'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Faire un bilan des forces exercées sur la pelle lors de la première phase puis exprimer leurs moments par rapport à l'axe  $Oz$ .
2. Appliquer à la pelle la loi du moment cinétique par rapport à  $Oz$ . Le moment d'inertie de la pelle par rapport à  $Oz$  est  $J_1 = 0,65 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

3. Multiplier l'équation différentielle obtenue précédemment par  $\dot{\theta}$  puis intégrer et en déduire une intégrale première du mouvement.
4. Déterminer l'expression littérale de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_0$  à l'issue de cette phase, c'est-à-dire lorsque  $\theta = \alpha$ .
5. Dans la deuxième phase, la pelle tourne autour de l'axe  $Az$ . Son moment d'inertie par rapport à  $Az$  est  $J_2 = 0,90 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Appliquer la loi de l'énergie cinétique à la pelle. En déduire une intégrale première du mouvement. Nous admettrons qu'à l'instant où débute cette deuxième phase,  $\dot{\beta} = \dot{\theta}_0$ .
6. L'extrémité  $E$  de la pelle se trouve à une distance  $D = 1,8 \text{ m}$  de l'axe  $Az$  correspondant à la hauteur du nez de la Bête. Évaluer la vitesse de  $E$  lorsqu'elle percute le nez de la Bête (on a alors  $\beta \simeq 85^\circ$ ). Conclure.

### Exercice 14.9 Le couple ne tient qu'à un fil

On réalise un pendule de torsion avec un fil et un disque de rayon  $R = 10 \text{ cm}$  sur lequel est fixé un mandrin. Le fil est attaché en  $O$ .



La rotation du disque autour de l'axe  $Oz$  est repérée par l'angle  $\theta$  indiqué sur la vue de dessus de la figure de gauche. Sollicité en torsion, le fil exerce un couple de rappel de moment  $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ . Nous négligeons tout frottement et cherchons à déterminer la constante de torsion  $C$ .

Le calcul précis du moment d'inertie  $J_0$  par rapport à l'axe de rotation du solide constitué par le cylindre et le mandrin n'étant pas possible, on utilise la méthode de la surcharge qui consiste à placer sur le disque un anneau de moment d'inertie  $J_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  par rapport à l'axe de rotation.

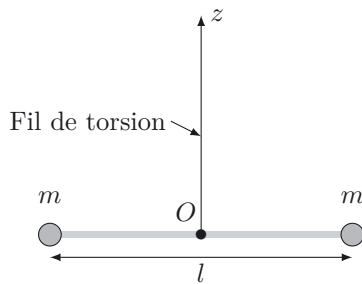
1. Déterminer la période  $T_0$  des oscillations du pendule en l'absence de la surcharge.
2. Déterminer la période  $T_1$  des oscillations du pendule avec la surcharge.
3. Montrer qu'il est possible de déterminer  $C$  sans connaître le moment d'inertie  $J_0$ .
4. Les mesures donnent  $T_0 = 1,0 \text{ s}$  et  $T_1 = 1,7 \text{ s}$ . Déterminer  $C$ .

### Exercice 14.10 Une expérience attirante

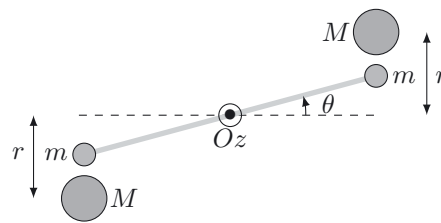
L'expérience réalisée par Cavendish en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle  $G$ . Décrivons sommairement le dispositif.

Deux petites sphères de masse  $m = 0,72$  kg sont fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, de longueur  $l = 180$  cm et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion  $C$ . Si la tige tourne d'un angle  $\theta$  par rapport à sa position d'équilibre  $\theta = 0$ , le fil exerce ainsi le couple de rappel  $-C\theta\vec{u}_z$  sur la tige.

Deux boules de plomb de masse  $M = 160$  kg sont fixées, l'une derrière et l'autre devant chaque petite sphère, à une distance  $r = 20$  cm définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle  $\theta$  par rapport à sa position au repos. Les 2 petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

1. Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion  $C$  du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.
  - a. Montrer à l'aide de la loi du moment cinétique que l'oscillateur est harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{ml^2}}$ .
  - b. La mesure de la période  $T_0$  des oscillations donne  $T_0 = 7,0$  min. En déduire la valeur de  $C$ .
2. Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire  $\theta$  par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que  $\theta$  est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.
3. La valeur obtenue par Cavendish à l'aide de ce dispositif est  $G = 6,75 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ . En déduire la déviation angulaire  $\theta$  et commenter.

## Corrections

### Interro de cours

1.  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$  représente le moment en  $O$  d'une force, à ne pas confondre avec le moment cinétique en  $O$  d'un point matériel  $M$  défini par  $\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$  (sans oublier le  $m$ ) qui est nul si  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. Réponse (c).
2.  $\mathcal{M}_\Delta = \pm d \|\vec{F}\|$  où  $d$  le bras de levier. Ainsi  $[\mathcal{M}_\Delta] = [L].[F] = [W]$ . Le moment d'une force a donc la dimension d'un travail. Par contre, c'est le travail de la force et non son moment qui permet de caractériser l'effet de celle-ci sur la valeur de la vitesse du point. Enfin le moment de la force par rapport à l'axe est proportionnel à son bras de levier. Réponse (a).
3. La règle de la main droite donne :  $\mathcal{M}_\Delta < 0$  pour le premier schéma (pouce selon  $-\vec{u}_z$ ) et  $\mathcal{M}_\Delta > 0$  pour le troisième schéma (pouce selon  $+\vec{u}_z$ ). Pour le deuxième schéma,  $\mathcal{M}_\Delta = 0$ . Réponse (a).
4. Le bras de levier  $d$  correspond à la distance entre le droite d'action de  $\vec{F}$  (représentée par des pointillés) et l'axe  $Oz$ . Réponse (c).
5. Le moment d'inertie de ce système par rapport à  $\Delta$  vaut  $J_\Delta = 2mr^2$ . Ainsi, il est multiplié par quatre si  $r$  est multiplié par deux. Réponse (c).
6. Le pendule va osciller périodiquement. Le mouvement est dit « pendulaire ». Mais les oscillations ne sont pas harmoniques car l'approximation des petits angles n'est pas valable et donc l'équation différentielle du mouvement ne peut pas être approchée par l'équation d'un oscillateur harmonique. Réponse (b).

### Exercice 14.1

1. Le disque est soumis : à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  en  $G$ , à la réaction d'axe parfaite autour de  $Gx$ , à  $\vec{F}_1$  en  $A_1$ ,  $\vec{F}_2$  en  $A_2$  et  $\vec{F}_3$  en  $A_3$ .
2. Le moment par rapport à  $(Gx)$  de la liaison pivot parfaite est nul. En utilisant la méthode du bras de levier par rapport à  $(Gx)$ , il vient  $\mathcal{M}_{Gx}(\vec{P}) = 0$ , de même pour  $\vec{F}_3$  dont le prolongement passe par  $Gx$  (longueur du bras de levier nulle). On aboutit par la même méthode à  $\mathcal{M}_{Gx}(\vec{F}_1) = -F_1R$  (la longueur du bras de levier est  $R$  et  $\vec{F}_1$  fait tourner le disque négativement autour de l'axe  $(Gx)$ ) et  $\mathcal{M}_{Gx}(\vec{F}_2) = -F_2R \cos \alpha$  (la longueur du bras de levier est  $R \cos \alpha$  et  $\vec{F}_2$  fait tourner le disque négativement autour de l'axe  $(Gx)$ ).
3. Les seuls moments par rapport à  $(Gx)$  non nuls sont négatifs, le disque tournera dans le sens des aiguilles d'une montre.

### Exercice 14.2

1. On considère que l'axe  $Oz$  pointe vers nous, et on utilise le système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et la base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  pour repérer la position de  $M$ .  
 $M$  est soumis à son poids, de moment par rapport à  $(Oz)$   $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mgR \sin(\theta)$ , à la force électrique  $\vec{F}_e = Q\vec{E}$  de moment par rapport à l'axe  $(Oz)$   $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_e) = QER \cos(\theta)$ , et à la tension du fil  $\vec{T} = T\vec{u}_r$  avec  $T < 0$ , de moment nul par rapport à  $(Oz)$ , les moments étant tous calculés en utilisant la méthode du bras de levier.  
 $M$  étant en mouvement de rotation autour de  $(Oz)$ , sa vitesse est  $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ , et son moment cinétique par rapport à  $(Oz)$  donné par  $L_{Oz} = \vec{u}_z \cdot (mR\vec{u}_r \wedge R\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mR^2\dot{\theta}$ . L'application de la loi du moment cinétique par rapport à  $Oz$  amène à :  $mR^2\ddot{\theta} = QER \cos(\theta) - mgR \sin(\theta)$ .  
 Lorsque le pendule est à l'équilibre,  $\ddot{\theta} = 0$  :  $\tan(\theta_e) = \frac{QE}{mg}$ , et  $\theta_e = 30^\circ$ .

Notons qu'ici, la force électrique n'est pas négligeable par rapport au poids car il ne s'agit pas d'une particule mais d'un objet macroscopique.

2. Linéarisons l'équation du mouvement au voisinage de la position d'équilibre, en utilisant les relations fournies, avec  $\varepsilon = \theta - \theta_e$  :  $mR\ddot{\theta} = mR\ddot{\varepsilon} = QE(\cos(\theta_e) - \varepsilon(\sin \theta_e)) - mg(\sin(\theta_e) + \varepsilon \cos(\theta_e))$ , soit :

$$\ddot{\varepsilon} + \left( \frac{mg \cos(\theta_e) + QE \sin(\theta_e)}{mR} \right) \varepsilon = 0. \text{ On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation :}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg \cos(\theta_e) + QE \sin(\theta_e)}{mR}}. \text{ L'application numérique donne } \omega_0 = 11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,59 \text{ s.}$$

### Exercice 14.3

1. Le mur est soumis à : son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  en  $G$ , la force  $\vec{F}$  exercée par la grue en  $A$ , et la réaction  $\vec{R}$  au niveau du bas du mur en  $O$ .
2. En utilisant la méthode du bras de levier, le moment de la réaction par rapport à  $(Oy)$  est nul, le moment du poids par rapport à  $(Oy)$  s'écrit  $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}) = -mga \cos(\theta)$ , et le moment de  $\vec{F}$  par rapport à  $(Oy)$  s'écrit  $\mathcal{M}_{Oy}(\vec{F}) = HF \cos(\theta)$ .

Le mur étant en rotation autour de l'axe  $(Oy)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , son moment cinétique par rapport à  $(Oy)$  est  $L_{Oy} = J\dot{\theta}$ . La loi du moment cinétique appliquée au mur par rapport à l'axe  $Oy$  s'écrit :  $J\ddot{\theta} = FH \cos(\theta) - mga \cos(\theta)$ , d'où :  $\ddot{\theta} = \frac{FH - mga}{J} \cos(\theta)$ .

3. Si  $\omega_0 = \dot{\theta} = 0,20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , alors  $\ddot{\theta} = 0$ , d'où  $F = \frac{mga}{H} = 2,0 \cdot 10^4 \text{ N}$ .

4. La puissance de  $\vec{F}$  dans le référentiel du laboratoire s'écrit  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \vec{v}_A = FH\dot{\theta} \cos(\theta) = FH \frac{d \sin(\theta)}{dt}$  d'où le travail effectué par la grue pour dresser le mur à la verticale :

$$W = \int_0^{\pi/2} FH d(\sin(\theta)) = FH = mga = 5,9 \cdot 10^4 \text{ J.}$$

### Exercice 14.4

1. Nous identifions facilement la trajectoire de phase (2) comme correspondant à la courbe (c) car c'est la seule trajectoire sur laquelle la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  ne s'annule jamais. Cette trajectoire correspond ainsi à un mouvement révolatif.

Comme  $\theta_3 > \theta_1$ , nous pouvons identifier la trajectoire de phase (3) avec la courbe (b) et la trajectoire de phase (1) avec la courbe (a). Ces deux trajectoires correspondent à un mouvement pendulaire.

En utilisant les graphes, on obtient  $\dot{\theta}_2 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\theta_1 = 0,17 \text{ rad}$  et  $\theta_3 = 2,0 \text{ rad}$ .

2. La trajectoire (a) correspond à un mouvement isochrone car sa trajectoire de phase est quasi-elliptique et  $\theta_1 \ll 1$ . D'après les conditions initiales, la loi horaire correspondante est  $\theta_1(t) = \theta_1 \cos(\omega_1 t)$  d'où  $\dot{\theta}_1(t) = -\theta_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t)$ . On voit ainsi que  $\dot{\theta}_{1,\max} = \theta_1 \omega_1$ . On détermine alors  $\dot{\theta}_{1,\max} \approx 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  par lecture graphique, on en déduit ainsi  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \approx 5,9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit  $T_1 \approx 1,1 \text{ s}$ .

3. La courbe (d) tracé en pointillés s'appelle la courbe séparatrice ; elle correspond à des trajectoires de phases qui aboutissent à vitesse nulle au niveau des points d'équilibre instable  $\theta = \pm\pi$ . Elle sépare les trajectoires révolatives des trajectoires pendulaires.

**Exercice 14.5**

1. La roue est soumise à la liaison d'axe sans frottement de moment nul par rapport à  $(Gz)$ , à son poids, de moment nul par rapport à  $(Gz)$ , au couple moteur dû aux courroies  $\vec{C} = C\vec{u}_z$  et au couple résistant  $\vec{C}_f = -C_f\vec{u}_z$ . La roue étant en rotation autour de l'axe  $(Gz)$ , son moment cinétique par rapport à  $(Gz)$  est  $L_{Gz} = J\dot{\theta}$  et la loi du moment cinétique appliquée à la roue conduit à :  $J\ddot{\theta} = C - C_f$ .
2. Lorsque la roue tourne à vitesse constante,  $\ddot{\theta} = 0$ , d'où  $C = C_f$ .
3. La puissance du couple moteur est  $P = C\dot{\theta}$ , donc  $C = \frac{P}{\dot{\theta}} = 9,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} = C_f$ .
4. Lorsqu'on coupe le moteur,  $C = 0$  : l'équation du mouvement se simplifie en :  $\ddot{\theta} = -\frac{C_f}{J}$ , soit par intégration :  $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) - \frac{C_f}{J}t$  et  $\theta(t) = \theta(0) + \dot{\theta}(0)t - \frac{C_f}{2J}t^2$ .  
Lorsque la roue s'arrête pour  $t = t_f$ ,  $\dot{\theta}(t_f) = 0$ , soit  $t_f = \frac{J\dot{\theta}(0)}{C_f}$ , et  $\theta(t_f) - \theta(0) = \frac{J}{2C_f}\dot{\theta}(0)^2 = 52 \text{ rad}$ .  
La roue effectuera 8,2 tours avant de s'arrêter.

**Exercice 14.6**

1. Faisons le recensement des forces s'exerçant sur l'étagère : en  $B$  et  $B'$ , les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{B'A'}$ , elles ont la même norme  $T_1$  par symétrie, et on peut les écrire  $\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}T_1(\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$ .  
Leur moment résultant par rapport à  $(Ox)$  est  $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -R\sqrt{2}T_1$ .  
En  $O$  et  $O'$ , les tensions des câbles verticaux, égales par symétrie, s'écrivent  $\vec{T}_O = T_2\vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$ . Leurs moments par rapport à  $(Ox)$  sont nuls.  
La réaction du mur est  $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$ , son moment par rapport à  $(Ox)$  est nul car son point d'application est au milieu de  $OO'$ . Le poids de la planche est  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ , son moment par rapport à  $(Ox)$  est  $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$ .  
A l'équilibre la somme de ces forces est nulle, soit  $\sqrt{2}T_1 + 2T_2 = mg$  et  $\sqrt{2}T_1 = R_N$ .  
A l'équilibre, la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe  $(Ox)$  est nulle, soit :  
 $R\sqrt{2}T_1 = \frac{mgR}{2}$ . On obtient ainsi  $T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}} = 3,5 \text{ N}$ ,  $R_N = \frac{mg}{2} = 4,9 \text{ N}$ ,  $T_2 = \frac{mg}{4} = 2,5 \text{ N}$ .
2. La planche n'est plus soumise qu'aux deux forces  $\vec{T}_{O'} = \vec{T}_O$  verticales, à la réaction du mur et à son poids, elle est en rotation autour de  $(Ox)$ . On note  $\theta(t)$  l'angle que fait à l'instant  $t$  l'étagère avec l'axe horizontal  $\vec{u}_z$ .  
Les tensions et la réaction du mur ne travaillent pas dans le référentiel du laboratoire et le poids dérive de l'énergie potentielle  $E_p = -mg\frac{R}{2}\sin(\theta)$ .  
Le système est donc conservatif :  $E_c + E_p = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mg\frac{R}{2}\sin(\theta) = \text{cste} = 0$ , car  $\dot{\theta}(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$ .  
D'où  $\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J}\sin(\theta)$ .  
Lorsque l'étagère touche le mur,  $\theta = \pi/2$ , et  $\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{mgR}{J}} = \sqrt{\frac{3g}{R}} = 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 14.7**

1. Les actions mécaniques s'exerçant sur  $(S)$  sont : le poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$  s'appliquant en  $G$ , de moment par rapport à  $Ox$   $\mathcal{M}_{Ox}(\vec{P}) = -mga\cos(\theta)$  (méthode du bras de levier), la réaction d'axe parfaite de



moment nul par rapport à  $Ox$  et l'action du ressort spiral qui se réduit au couple  $\vec{\Gamma}$  de moment par rapport à l'axe  $Ox$   $C(\alpha - \theta)$ .

2. ( $S$ ) étant en rotation autour de l'axe ( $Ox$ ), son moment cinétique par rapport à ( $Ox$ ) s'écrit donc  $L_{Ox} = \vec{u}_x \cdot (m\vec{OG} \wedge \vec{v})$  avec la vitesse du ballon  $\vec{v} = \dot{\theta}\vec{u}_x \wedge \vec{OG}$ , soit  $L_{Ox} = ma^2\dot{\theta}$ . La loi du moment cinétique appliquée à l'ensemble ( $S$ ) par rapport à ( $Ox$ ) amène à :  $ma^2\ddot{\theta} = -mga \cos(\theta) + C(\alpha - \theta)$ .
3.  $ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mga \cos(\theta)\dot{\theta} + C(\alpha - \theta)\dot{\theta}$ .  
 $ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$  correspond à la puissance cinétique,  $-mga \cos(\theta)\dot{\theta} < 0$  à la puissance du poids, qui est résistante,  $C(\alpha - \theta)\dot{\theta} > 0$  à la puissance du ressort spirale, motrice. Si on veut que le ballon se mette en mouvement, il faut que la puissance motrice soit supérieure à la puissance résistante.
4. En intégrant la relation de la question 3., il vient  $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C(\alpha - \theta)^2 + mga \sin(\theta) = \text{cste}$  où la constante est donnée par  $\text{cste} = \frac{1}{2}C(\alpha - \theta_0)^2 + mga \sin(\theta_0)$  (conditions initiales).  
 Pour  $\theta_f = \alpha$ , on aboutit à  $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}_f^2 = \frac{1}{2}C(\alpha - \theta_0)^2 + mga(\sin(\theta_0) - \sin(\alpha))$ , et la vitesse de la balle lorsqu'elle quitte le lanceur est  $v_f = a\dot{\theta}_f$ .

On obtient :  $v_f = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{1}{2}C(\alpha - \theta_0)^2 + mga(\sin(\theta_0) - \sin(\alpha)) \right)} = 81 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le panier ne sera donc pas atteint.

**Exercice 14.8**

1. Lors de la première phase, la pelle est soumise à son poids  $\vec{P}$ , se décomposant en le poids de la plaque  $\vec{P}_p = -m_p g \vec{u}_y$  en  $G_p$  et le poids du manche  $\vec{P}_m = -m_m g \vec{u}_y$  en  $G_m$ , la réaction du sol  $\vec{R}$  en  $O$  et la force  $\vec{F} = -F \vec{u}_y$  exercée par la bête en  $A$ .  
 Avec la méthode du bras de levier, le moment de  $\vec{P}_m$  par rapport à ( $Oz$ ) est  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_m) = -m_m g a \cos(\theta)$ , le moment de  $\vec{P}_p$  par rapport à ( $Oz$ )  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}_p) = m_p g b \cos(\alpha - \theta)$ , le moment de  $\vec{F}$  par rapport à ( $Oz$ )  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}) = Fl \cos(\alpha - \theta)$ , le moment de la réaction du sol par rapport à ( $Oz$ ) nul.

Le moment total des forces par rapport à  $Oz$  est ainsi  $\mathcal{M}_{\text{tot}, Oz} = -m_m g a \cos(\theta) + (m_p g b + Fl) \cos(\alpha - \theta)$ .

2. La pelle étant en rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), son moment cinétique par rapport à cet axe est  $J_1 \dot{\theta}$ . L'application de la loi du moment cinétique à la pelle par rapport à ( $Oz$ ) conduit à :  
 $J_1 \dot{\theta} = -m_m g a \cos(\theta) + (Fl + m_p g b) \cos(\alpha - \theta)$ .
3. Multiplions cette équation par  $\dot{\theta}$  :  $J_1 \dot{\theta}^2 = -m_m g a \cos(\theta)\dot{\theta} + (Fl + m_p g b) \cos(\alpha - \theta)\dot{\theta}$ . En intégrant cette relation et en prenant en compte les conditions initiales ( $\dot{\theta}(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$ ), il vient :  
 $\frac{1}{2}J_1 \dot{\theta}^2 + m_m g a \sin(\theta) + (Fl + m_p g b)(\sin(\alpha - \theta) - \sin(\alpha)) = 0$  ce qui est une intégrale première du mouvement.

4. La première phase se termine lorsque  $\theta = \alpha$ , soit  $\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2}{J_1} (-m_m g a + Fl + m_p g b) \sin(\alpha)}$ .

5. Dans la deuxième phase, la pelle n'est plus soumise qu'au poids, conservatif, dont l'énergie potentielle résultante est  $E_p = m_p g y_{G_p} + m_m g y_{G_m} = m_p g b \sin(\beta) + m_m g (l \sin(\beta) + a \sin(\beta + \alpha))$ , et à la réaction du sol en  $A$  qui ne travaille pas car  $A$  est fixe. Elle est en rotation autour de l'axe  $Az$  et son énergie cinétique vaut  $\frac{1}{2}J_2 \dot{\beta}^2$ . Le système étant conservatif, l'énergie mécanique se conserve :

$\frac{1}{2}J_2 \dot{\beta}^2 + m_m g (l \sin(\beta) + a \sin(\beta + \alpha)) + m_p g b \sin(\beta) = \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_0^2 + m_m g a \sin(\alpha)$  par prise en compte des conditions initiales  $\beta(0) = 0$  et  $\dot{\beta}(0) = \dot{\theta}_0$ .

6. De l'équation ci-dessus, on extrait  $\dot{\beta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{2}{J_2} g [m_m a (\sin(\alpha) - \sin(\alpha + \beta)) - (m_m l + m_p b) \sin(\beta)]$ .

L'application numérique conduit à une vitesse angulaire finale  $\dot{\beta}_f = 13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit à une vitesse pour  $E$  au moment de l'impact avec le nez de la bête :  $V_E = D\dot{\theta} = 23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui est environ  $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .  
 On comprend que la bête puisse être assommée !

**Exercice 14.9**

- Le disque, de moment cinétique par rapport à  $(Oz)$   $J\dot{\theta}$ , est soumis à l'action de son poids, qui passe par l'axe  $(Oz)$ , et au couple de torsion du fil  $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ . L'application au disque de la loi du moment cinétique par rapport à l'axe  $(Oz)$  amène à :  $J_0\ddot{\theta} = -C\theta$ . C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_0}}$  et de période  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}$ .
- On reprend la même méthode, avec comme système l'ensemble {disque+surcharge}. Le poids de la surcharge étant parallèle à  $(Oz)$ , son moment par rapport à  $(Oz)$  est nul et la loi du moment cinétique à ce système par rapport à l'axe  $Oz$  s'écrit :  $(J_0 + J_1)\ddot{\theta} = -C\theta$ . On obtient la nouvelle période des oscillations :  $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + J_1}{C}}$ .
- $J_0 = C\frac{T_0^2}{4\pi^2}$  et  $J_0 + J_1 = C\frac{T_1^2}{4\pi^2}$ . En faisant la différence entre ces deux équations, on aboutit à  $J_1 = \frac{C}{4\pi^2}(T_1^2 - T_0^2)$ , soit  $C = \frac{4\pi^2 J_1}{T_1^2 - T_0^2}$ .
- $C = 0,21 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

**Exercice 14.10**

- On note  $(Oz)$  l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon  $l/2$  autour de  $(Oz)$  à la même vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à  $(Oz)$  est  $L_{Oz} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}$ . Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à  $(Gz)$  sont nuls, et au couple de torsion  $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$ . L'application de la loi du moment cinétique à ce système par rapport à  $(Gz)$  conduit à  $\frac{ml^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$ , soit  $\ddot{\theta} + \frac{2C}{ml^2}\theta = 0$ . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{ml^2}}$ .
  - $C = \frac{2\pi^2 ml^2}{T_0^2} = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .
- On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est  $r - \frac{l}{2}\sin(\theta) \approx r - \frac{l}{2}\theta$ . On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par  $\vec{u}_\theta$  :  $\vec{F}_g = \frac{GMm}{(r - \frac{l}{2}\theta)^2}\vec{u}_\theta \approx \frac{GMm}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)\vec{u}_\theta$ . Le moment de cette force par rapport à  $(Oz)$  est ainsi  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_g) = \frac{GMml}{2r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$ , et le moment total par rapport à  $(Oz)$  des deux forces gravitationnelles s'exerçant sur le système {tige+deux sphères} s'écrit  $\mathcal{M}_{Oz} = \frac{GMml}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$ .  
On applique alors la loi du moment cinétique par rapport à  $(Oz)$  au système :  $\frac{ml^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{GMml}{r^2}\left(1 + \frac{l}{r}\theta\right)$ . À l'équilibre, on obtient  $\theta_{eq} = \frac{GMmlr}{Cr^3 - GMml^2}$ .
- $\theta_{eq} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$  : Cavendish avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian.

# Champ de force centrale

## L'essentiel du cours

### Contexte

Les planètes du système solaire tournent autour du Soleil sur une trajectoire et avec une période propre à chacune d'elles. Les trois lois de Kepler, déduites historiquement d'observations astronomiques, permettent de décrire leurs mouvements.

Comment la théorie de la mécanique newtonienne justifie-t-elle ces lois empiriques ? Ces lois sont-elles transposables aux satellites terrestres et aux autres corps célestes ?

Le référentiel d'étude sera galiléen et noté  $\mathcal{R}$ . Nous lui associerons le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

### ■ 1 Point matériel soumis à une force centrale conservative

#### □ Qu'est-ce qu'une force centrale ?

Considérons un point matériel  $M$ , défini en coordonnées sphériques par son vecteur position  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ .

Le point  $M$  est soumis de la part du point  $O$  à une **force centrale**  $\vec{F}$  si la direction de cette force passe toujours par ce point  $O$ , appelé **centre de force**.

Exemples :

- une force de rappel élastique rappelant le point  $M$  vers  $O$  :  $\vec{F} = -kr\vec{u}_r$  ;
- une force de frottement fluide radiale :  $\vec{F} = -h\dot{r}\vec{u}_r$  ;
- une force gravitationnelle :  $\vec{F} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{u}_r$ .

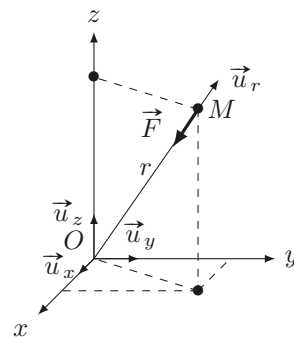


Figure 15.1. Force centrale.

#### □ Qu'est-ce qu'une force centrale conservative ?

Le travail élémentaire d'une force centrale  $\vec{F} = F\vec{u}_r$  a pour expression :  $\delta W(\vec{F}) = F\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = Fdr$ .

Cette force est conservative si elle dérive d'une **énergie potentielle**, définie par  $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$ .

On en déduit :

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} \implies E_p(r) = -\int F(r)dr + \text{cste}$$



Une force centrale conservative et son énergie potentielle ne dépendent que de la première coordonnée sphérique  $r$  du point  $M$ .

Exemples :

- la **force de rappel élastique** d'un ressort, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , reliant  $M$  à  $O$  :  $\vec{F} = -k(r - \ell_0)\vec{u}_r$  et son **énergie potentielle élastique** :  $E_p = \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2 + \text{cste}$  ;
- la **force gravitationnelle** exercée par un point matériel de masse  $m_0$  placé en  $O$  sur le point matériel  $M$  de masse  $m$  :  $\vec{F} = -\frac{Gm_0m}{r^2}\vec{u}_r$  et son **énergie potentielle gravitationnelle** :  $E_p = -\frac{Gm_0m}{r} + \text{cste}$  ;
- la **force électrostatique** exercée par une particule ponctuelle de charge  $q_0$  placée en  $O$  sur la particule ponctuelle de charge  $q$  située en  $M$  :  $\vec{F} = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$  et son **énergie potentielle électrique** :  $E_p = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$ .

## ■ 2 Conservation du moment cinétique

La loi du moment cinétique appliquée en  $O$  au point  $M$ , dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , conduit à :

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge F\vec{u}_r = \vec{0}$$

Nous en déduisons que le **moment cinétique, calculé au centre de force** :  $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$  est **une constante du mouvement**.

□ **Quelle est la conséquence sur le mouvement du point  $M$  ?**

Compte tenu des propriétés du produit vectoriel,  $\vec{L}_O$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$ . Le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est donc à tout instant contenu dans le plan passant par  $O$  et perpendiculaire à la direction constante de  $\vec{L}_O$ . Nous en concluons que le **mouvement de  $M$  se fait dans le plan contenant le centre de force  $O$  et normal à la direction constante de  $\vec{L}_O$** .



Dans le cas où  $\vec{L}_O = \vec{0}$  alors  $\overrightarrow{OM}$  est colinéaire à  $\vec{v}$  à chaque instant. C'est le cas particulier d'un mouvement rectiligne.

Le mouvement étant plan nous pouvons choisir les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  de sorte que le plan  $(Oxy)$  soit le plan du mouvement. Le vecteur  $\vec{u}_z$ , normal à ce plan, est alors colinéaire à  $\vec{L}_O$ . Dans le plan  $(Oxy)$  nous pouvons utiliser les **coordonnées polaires**  $(r, \theta)$  pour repérer le point  $M$ .

Dans ces conditions les vecteurs position et vitesse de  $M$  s'écrivent respectivement  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$  et  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ . L'expression du moment cinétique en  $O$  est alors :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$\vec{L}_O$  étant constant, nous en déduisons que le terme  $r^2\dot{\theta}$  est également une constante. Cette constante porte le nom de **constante des aires**.

**Définition : Constante des aires**

Pour un mouvement à force centrale, étudié dans le plan du mouvement en coordonnées polaires, l'origine étant prise au centre de force, on définit la constante des aires par :

$$C = r^2 \dot{\theta} \quad (\text{en } \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

$C$  est **une constante du mouvement**. Sa valeur dépend des conditions initiales.



Dans le cas d'une **trajectoire circulaire** de rayon  $R$  :  $C = R^2 \dot{\theta}$ . Nous en déduisons que  $\dot{\theta}$  est constant et donc que le **mouvement circulaire est uniforme**.

□ **Quelle interprétation géométrique peut-on donner à la constante des aires ?**

Notons  $S(t)$  la surface balayée par le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  entre la date  $t = 0$  et la date  $t$ . Un développement de Taylor permet d'écrire :  $S(t + dt) = S(t) + \frac{dS}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 S}{dt^2} (dt)^2 + o(dt)^2$ .

Soient  $M(t)$  et  $M(t + dt)$  les positions du point matériel étudié aux dates  $t$  et  $t + dt$ . Entre ces deux dates,  $r$  varie de  $dr = r(t + dt) - r(t)$ ,  $\theta$  varie de  $d\theta = \theta(t + dt) - \theta(t)$  et le vecteur position balaye la surface :  $S(t + dt) - S(t) = \delta S_1 + \delta S_2$  (figure 15.2).

$\delta S_1$  est la surface d'une portion de disque de rayon  $r$  et d'angle au centre  $d\theta$ . Elle vaut  $\delta S_1 = \pi r^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ . C'est un infiniment petit d'ordre 1.

La surface  $\delta S_2$  est assimilable en première approximation à un triangle rectangle dont les cotés de l'angle droit valent  $dr$  et  $r d\theta$ . D'où  $\delta S_2 \simeq \frac{1}{2} r dr d\theta$ . C'est un infiniment petit d'ordre 2.

$\delta S_1$  correspond donc au terme d'ordre 1 du développement de Taylor. Par identification :

$$\frac{dS}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} dt$$

Nous pouvons en déduire que la surface balayée par unité de temps vaut  $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ . Cette expression porte le nom de **vitesse aréolaire**. Elle est égale à  $C/2$  et c'est une constante du mouvement. Elle se mesure en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

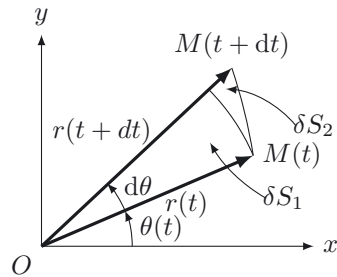


Figure 15.2. Surface balayée entre  $t$  et  $t + dt$ .

**Loi des aires**

Dans un mouvement à force centrale, la vitesse aréolaire représente la surface balayée par unité de temps par le rayon vecteur. Elle est égale à la moitié de la constante des aires :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

### ■ 3 Conservation de l'énergie mécanique

Par hypothèse, la force centrale est la seule force subie par le point matériel. Si cette force est **conservative**, alors d'après la loi de l'énergie mécanique, **l'énergie mécanique du système est une constante du mouvement**.

Elle a pour expression :  $E_m = E_c + E_p$  avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$  et  $E_p = E_p(r)$ . D'où :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

La constante des aires nous permet de remplacer  $r^2\dot{\theta}^2$  par  $\frac{C^2}{r^2}$  et de mettre  $E_m$  sous la forme :

$$(15.1) \quad E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

$E_m$  apparaît comme fonction uniquement de  $r$  et de  $\dot{r}$ . D'un point de vue énergétique le problème plan à 2 degrés de liberté,  $r$  et  $\theta$ , se ramène ainsi à un problème à 1 seul degré de liberté,  $r$ .

Par ailleurs, nous pouvons définir une fonction, que nous noterons  $E_{p,e}$ , appelée **énergie potentielle effective** qui regroupe les deux termes de l'énergie mécanique fonction de  $r$  :

$$E_{p,e}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Cela nous permet de mettre l'énergie mécanique du point matériel sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,e}(r)$$

#### Définition : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective d'un point matériel soumis à une force centrale conservative est la somme de son énergie cinétique orthoradiale et de son énergie potentielle :

$$E_{p,e}(r) = E_{c\theta}(r) + E_p(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$



L'énergie potentielle effective permet de mener l'étude qualitative du mouvement radial d'un point matériel soumis à une force centrale conservative comme celle du mouvement d'un système conservatif à une dimension (voir chapitre 12).

#### Illustrons cette remarque par un exemple.

Considérons un point matériel  $M$ , de masse  $m = 0,20$  kg, relié à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur  $k = 19 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , de longueur à vide  $\ell_0 = 15$  cm et contraint à se déplacer dans le plan horizontal ( $Oxy$ ). En négligeant les frottements nous supposons que la réaction du plan sur le point matériel est verticale et compense son poids. La résultante des forces appliquées s'identifie alors à la tension du ressort, qui est une force conservative dont la direction passe toujours par le point  $O$ . C'est bien une force centrale conservative.

Nous repérons le point  $M$  par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et prenons comme conditions initiales, à  $t = 0$ ,  $r(0) = r_0 = 20 \text{ cm}$ ,  $\theta(0) = \theta_0 = 30^\circ$ ,  $\alpha_0 = 130^\circ$  et  $v_0 = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (figure 15.3).

Commençons par calculer les constantes du mouvement et l'énergie potentielle effective à  $t = 0$  :

- $C = r^2(0)\dot{\theta}(0) = r(0)(r(0)\dot{\theta}(0)) = r_0(v_0 \sin(\alpha_0)) = 77 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- $E_m(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}k(r_0 - l_0)^2 = 49 \cdot 10^{-3} \text{ J}$  ;
- $E_{p,e}(0) = E_p(0) + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_0^2} = \frac{1}{2}k(r_0 - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_0^2} = 38 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

Puis superposons les courbes de l'énergie potentielle effective  $E_{p,e}(r) = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$  et de l'énergie mécanique  $E_m$  (figure 15.4).

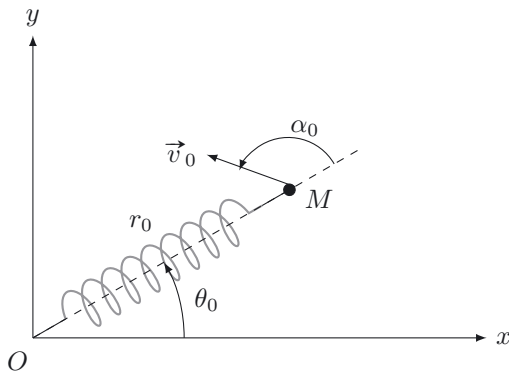


Figure 15.3. Conditions initiales.

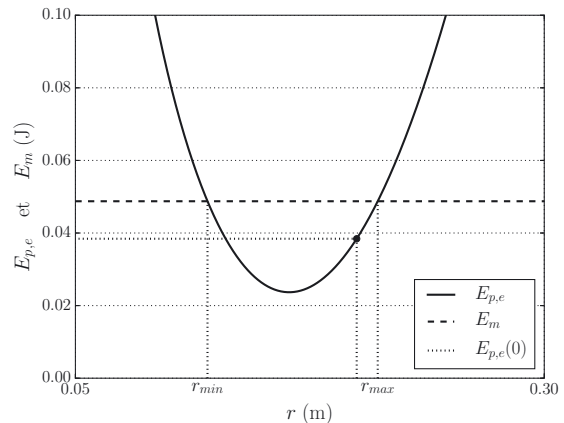


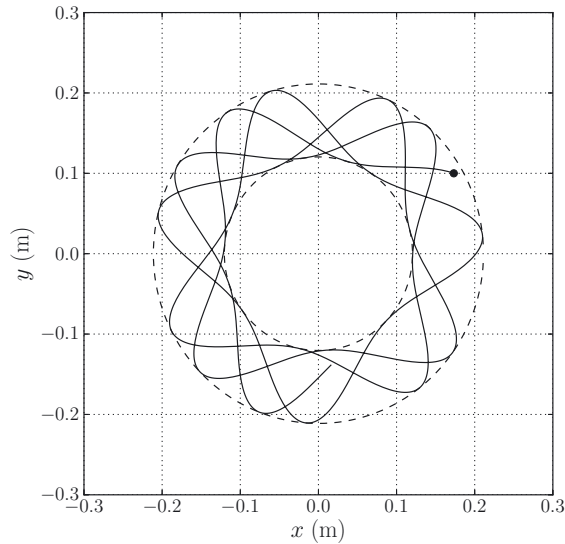
Figure 15.4. Énergie potentielle effective.

□ **Quelle analyse qualitative du mouvement pouvons-nous faire ?**

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,e}(r)$ , avec  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$ . Les valeurs accessibles pour  $r$  sont donc celles pour lesquelles  $E_{p,e}(r) \leq E_m$ . Elles sont encadrées par deux valeurs  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  (figure 15.4).

Une approche numérique nous a permis de tracer la trajectoire du point  $M$  (figure 15.5). La position de départ marquée d'un point noir correspond aux conditions initiales  $(r_0, E_{p,e}(0))$  portées sur le diagramme énergétique (figure 15.4).

Avec un angle initial  $\alpha_0 > 90^\circ$  on sait que  $\dot{r}(0) < 0$ . Donc au début du mouvement  $r$  diminue. Comme  $C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ , on en déduit que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  augmente : le point  $M$  se rapproche de  $O$  en tournant de plus en plus vite dans le sens trigonométrique. Lorsque  $r = r_{\min}$ ,  $\dot{\theta}$  est maximale. La vitesse de  $M$  ne s'annule donc pas pour  $r = r_{\min}$ . Tout en continuant à tourner dans le sens trigonométrique, le point  $M$ , après être passé au plus près de  $O$ , s'en éloigne,  $r$  augmentant de  $r_{\min}$  jusqu'à  $r_{\max}$ . Pendant cette phase  $\dot{\theta}$  diminue et devient minimale en  $r_{\max}$  et ainsi de suite...

Figure 15.5. Trajectoire du point  $M$ .

Ainsi les oscillations de  $r$  entre les deux valeurs extrêmes  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  s'accompagnent d'un mouvement de rotation autour du centre de force  $O$  avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  liée à  $r$  par la constante des aires  $C$ . Plus le point  $M$  est proche du centre de force, plus sa vitesse angulaire est grande, plus il en est loin, plus elle est faible et cela de sorte que la vitesse aréolaire demeure constante.

Enfin  $r$  restant compris entre  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ , la trajectoire de  $M$  autour de  $O$  est **bornée** par les cercles de centre  $O$  et de rayons  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  (figure 15.5). Le point matériel est dans un **état lié**.

#### Méthode 15.1 : Étude qualitative d'un mouvement à force centrale conservatif

- Calculer les constantes du mouvement  $C$  et  $E_m$  à partir des conditions initiales.
- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective  $E_{p,e}(r)$  du système.
  - Exprimer l'énergie mécanique  $E_m$  à une date quelconque.
  - Éliminer  $\dot{\theta}$  dans l'expression de  $E_m$  en introduisant la constante des aires  $C$ .
  - Identifier  $E_{p,e}(r)$  comme étant la partie de  $E_m$  dépendant de  $r$ .
- Étudier l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$  et tracer son graphe.
- Comparer  $E_{p,e}(r)$  à  $E_m$ . Les valeurs permises de  $r$  sont telles que  $E_{p,e}(r) \leq E_m$ .

➔ Exercice (15.1)



Lorsque  $r$  est encadré entre deux valeurs extrêmes, **la trajectoire est bornée**. La particule se trouve dans **un état lié**. Lorsque  $r$  n'a pas de borne maximale, **la trajectoire n'est pas bornée**. La particule se trouve dans un **état de diffusion**.



## ■ 4 Champ newtonien

### Définition : Champ newtonien

Un champ de force newtonien est un champ de force centrale de la forme :

$$\vec{F} = -k \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{où } k \text{ est une constante}$$

Il est dit attractif lorsque  $k$  est positive, et répulsif lorsque  $k$  est négative.



Un tel champ dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  définie par  $F = -\frac{dE_p}{dr}$ .

En prenant cette énergie potentielle nulle à l'infini :  $E_p = -\frac{K}{r}$ .

### Retour au contexte du système solaire

Étudions le mouvement d'un corps céleste en interaction avec le Soleil dans le référentiel héliocentrique  $\mathcal{R}_s$ , supposé galiléen, auquel on associe le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Le point  $O$  est confondu avec le centre de masse du Soleil et les 3 axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  sont dirigés vers 3 étoiles lointaines supposées fixes.

Le Soleil exerce sur le centre de masse  $M$  du corps céleste de masse  $m$  une force gravitationnelle  $\vec{F} = -\frac{Gmm_s}{r^2} \vec{u}_r$  avec  $\vec{OM} = r\vec{u}_r$ . Nous négligerons le mouvement de rotation propre du corps céleste, s'il en a un, devant le mouvement de son centre de masse autour du Soleil. Cela revient à assimiler le corps céleste à un point matériel  $M$  plongé dans un **champ newtonien attractif**.

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons affirmer que le mouvement de  $M$  est plan et qu'il a **deux constantes** : la **constante des aires** et son **énergie mécanique**. Nous pouvons écrire :

- La constante des aires :  $C = r^2 \dot{\theta} = \text{cste}$ .
- L'énergie mécanique :  $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,e}(r) = \text{cste}$ .
- L'énergie potentielle effective :  $E_{p,e}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{Gmm_s}{r}$ .

### □ Que pouvons-nous déduire de l'étude qualitative du mouvement ?

Nous devons comparer  $E_m$  à  $E_{p,e}$  de façon à déterminer les valeurs accessibles à  $r$ , comme cela a été vu dans la méthode 15.1.

L'étude de la fonction  $E_{p,e}(r)$  montre qu'elle tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers 0, vers 0 lorsque  $r$  tend vers l'infini et qu'elle admet un minimum pour une valeur de  $r$  que nous noterons  $r_1$ .

Nous avons tracé son graphe (figure 15.6), en prenant pour  $C$  et  $m$  des valeurs numériques correspondant à la Terre ( $C = 4,46 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $m = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ). Pour tous les corps célestes en interaction gravitationnelle avec le Soleil, nous trouverions une allure de  $E_{p,e}$  similaire, seules les valeurs numériques changeraient.

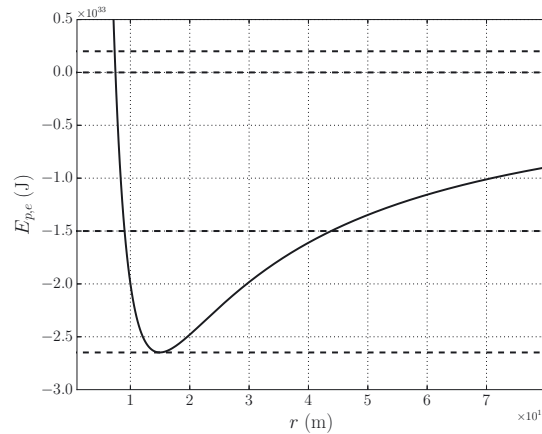


Figure 15.6. Énergie potentielle effective.

Selon la valeur de  $E_m$  nous pouvons distinguer quatre cas.

- **1<sup>er</sup> cas** :  $E_{m1} = E_{p,e}(r_1)$ .  
Seule la valeur  $r = r_1$  est possible et l'énergie cinétique radiale du système est nulle. La trajectoire est donc circulaire. De plus, la constante des aires impose une vitesse angulaire constante. Il s'agit donc d'un **mouvement circulaire uniforme**. C'est un **état lié**.
- **2<sup>e</sup> cas** :  $E_{m1} < E_{m2} < 0$ .  
 $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ . C'est un **état lié**. Une étude complète montre que **la trajectoire est une ellipse** dont le Soleil occupe un foyer.
- **3<sup>e</sup> cas** :  $E_{m3} = 0$ .  
 $r \in [r'_{\min}, +\infty[$ . C'est un **état de diffusion**. Une étude complète montre que **la trajectoire est une parabole** dont le Soleil occupe le foyer.
- **4<sup>e</sup> cas** :  $E_{m4} > 0$ .  
 $r \in [r''_{\min}, +\infty[$ . C'est un **état de diffusion**. Une étude complète montre que **la trajectoire est un arc d'hyperbole** dont le Soleil occupe un foyer.

L'ensemble de ces trajectoires (cercle, ellipse, parabole et hyperbole) constitue la famille des coniques. L'étude complète des trajectoires elliptiques, paraboliques et hyperboliques est hors-programme.

Sur les figures 15.7 et 15.8 sont représentées les trajectoires des planètes du système Soleil et celle de la comète de Halley.

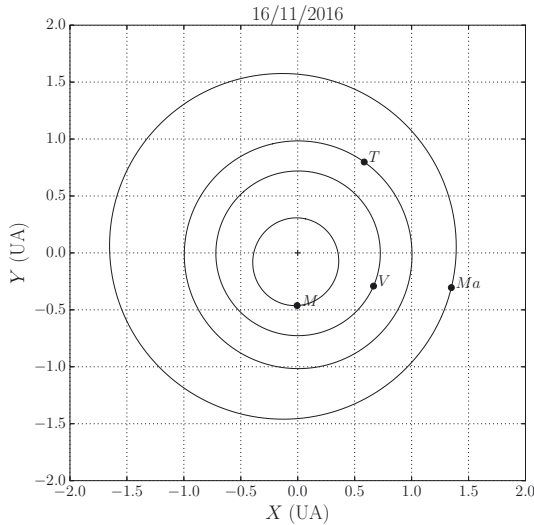


Figure 15.7. Planètes internes.

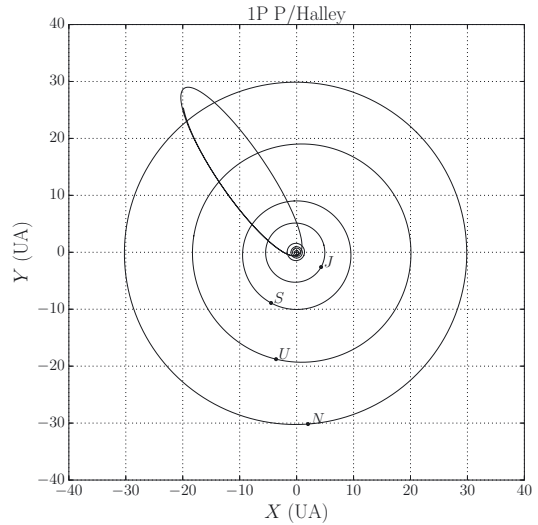


Figure 15.8. Planètes externes et comète Halley.

Pour certaines planètes comme par exemple la Terre, nous pouvons remarquer que les trajectoires sont quasi-circulaires autour du Soleil. Cela signifie que l'énergie mécanique de ces planètes est très proche de leur énergie potentielle effective minimale. Pour les autres, comme par exemple Mars et encore plus pour Mercure, nous pouvons noter que les trajectoires ne sont plus circulaires mais elliptiques. La trajectoire de la comète de Halley est une ellipse très excentrée.

Toutes ces trajectoires correspondent aux **états liés** décrits précédemment et correspondent à des cas où l'énergie mécanique du système est négative.

### Étude du cas particulier de la trajectoire circulaire

En notant  $r_1$  le rayon de la trajectoire, la force gravitationnelle exercée par le Soleil est de la forme :  $\vec{F} = -\frac{Gmm_s}{r_1^2} \vec{u}_r$  et l'énergie potentielle gravitationnelle du corps céleste :  $E_p(r) = -\frac{Gmm_s}{r_1}$ .

□ **Quelle est l'expression de la vitesse du système ?**

La loi de la quantité de mouvement appliquée au corps céleste dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen conduit à :

$$m\vec{a} = m(r_1\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r_1\dot{\theta}^2\vec{u}_r) = -\frac{Gmm_s}{r_1^2}\vec{u}_r$$

Sur  $\vec{u}_\theta$  :  $mr_1\ddot{\theta} = 0$ , soit  $\dot{\theta} = \text{cste}$ . Nous retrouvons le caractère uniforme du mouvement circulaire.

Sur  $\vec{u}_r$  :  $-mr_1\dot{\theta}^2 = -\frac{Gmm_s}{r_1^2}$ . Or  $\vec{v} = v\vec{u}_\theta = r_1\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  donc  $r_1\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r_1}$ . Nous en déduisons

$$\frac{v^2}{r_1} = \frac{Gm_s}{r_1^2}. \text{ D'où : } v = \sqrt{\frac{Gm_s}{r_1}}.$$



▮ La vitesse  $v$  est fonction de  $r_1$ . Plus  $r_1$  est grand et plus la vitesse  $v$  est faible.

□ **Quelle est l'expression de l'énergie mécanique du système ?**

La définition de l'énergie mécanique et l'expression précédente de la vitesse conduisent à :

$$(15.2) \quad E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_s}{r_1} = \frac{1}{2}m \frac{Gm_s}{r_1} - \frac{Gmm_s}{r_1} = -\frac{Gmm_s}{2r_1}$$



■ L'énergie mécanique est négative, ce qui correspond bien à un état lié.

□ **Quelle est l'expression de la période de révolution du système ?**

Le mouvement étant circulaire uniforme, la période  $T$  est la durée mise par le système pour faire un tour complet à la vitesse  $v$  :  $T = \frac{2\pi r_1}{v}$ . Avec  $v = \sqrt{\frac{Gm_s}{r_1}}$ , nous obtenons :

$$(15.3) \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{Gm_s} r_1^3}$$



Nous pouvons en déduire  $\frac{T^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s}$  et remarquer que le rapport  $\frac{T^2}{r_1^3}$  ne dépend que de la masse du centre attracteur. Nous en concluons que pour tout corps céleste en mouvement circulaire de rayon  $r$  autour du Soleil :  $\frac{T^2}{r^3} = \text{cste.}$

#### Méthode 15.2 : Étude d'une trajectoire circulaire

- **Détermination de l'expression de la vitesse du système.**  
Appliquer la loi de la quantité de mouvement en utilisant les coordonnées polaires et projeter l'équation du mouvement sur le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$ .
- **Détermination de l'expression de l'énergie mécanique du système.**  
Exprimer  $E_m$  sous la forme  $E_m = E_c + E_p$  et remplacer la vitesse  $v$  par l'expression obtenue précédemment.
- **Détermination de la période de révolution du système.**  
 $T = \frac{2\pi r_1}{v}$ . Réutiliser ensuite l'expression précédente de la vitesse.

➔ Exercice (15.2)

#### Étude du cas particulier d'une trajectoire elliptique

Nous nous proposons maintenant de reprendre l'étude précédente réalisée pour une trajectoire circulaire, dans le cadre plus général d'une trajectoire elliptique de demi grand-axe  $a$ .



■ Certaines méthodes nécessaires à cette étude étant hors programme, nous ne pourrions toutefois pas établir tous les résultats.

Ce qu'il faut savoir pour commencer.

- On peut montrer (démonstration hors programme) que le Soleil, placé en  $O$ , occupe l'un des deux foyers de l'ellipse.
- $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  étant les valeurs de  $r$  au périhélie  $P$  et à l'aphélie  $A$ , le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse est défini par :  $r_{\min} + r_{\max} = 2a$ .
- Propriété géométrique d'une ellipse :  $F \equiv O$  et  $F'$  étant les foyers et  $a$  le demi-grand axe, tout point  $M$  de l'ellipse satisfait à la relation  $FM + F'M = 2a$ .

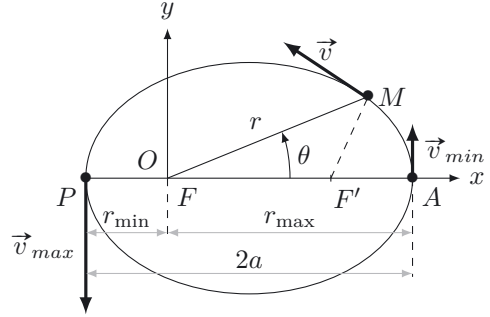


Figure 15.9. Trajectoire elliptique.

□ **Quelle est l'expression de l'énergie mécanique du système ?**

Reprenons l'expression 15.1 de l'énergie mécanique d'un système dans un champ à force centrale conservatif :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r).$$

Avec  $E_p(r) = -\frac{Gmm_s}{r}$  nous obtenons : 
$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gmm_s}{r}.$$

En  $A$  et  $P$ ,  $\dot{r} = 0$  et donc  $E_m = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{Gmm_s}{r}$ . Ainsi  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  sont solutions de l'équation

$$E_m r^2 + Gmm_s r - \frac{1}{2}mC^2 = 0 \text{ et satisfont à la relation } r_{\min} + r_{\max} = 2a = -\frac{Gmm_s}{E_m}.$$

(15.4) 
$$E_m = -\frac{Gmm_s}{2a}$$



▮ Cette expression 15.4 généralise au cas d'un mouvement elliptique le résultat 15.2 concernant un mouvement circulaire, pour lequel  $r_1 = a$ .

□ **Quelle est l'expression de la vitesse  $v$  du système ?**

L'énergie mécanique du système a pour expression : 
$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm_s}{r} = -\frac{Gmm_s}{2a}.$$

Nous pouvons en déduire que  $v$ , la norme du vecteur vitesse, s'écrit : 
$$v = \sqrt{Gm_s \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$



- Au plus près du Soleil, en  $P$ , cette vitesse est maximale, au plus loin, en  $A$ , elle est minimale. Ceci est en accord avec la loi des aires.
- En  $A$  et  $P$ ,  $\dot{r} = 0$ . Le vecteur vitesse a donc pour expression en ces points  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ . Au niveau de la constante des aires cela se traduit par  $C = r^2\dot{\theta} = r_{\min}v_P = r_{\max}v_A$ . Nous en déduisons :  $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$ .

□ Quelle est l'expression de la période de révolution du système ?

Une démonstration hors programme permet d'établir l'expression :

$$(15.5) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s}$$

Nous pouvons constater une analogie avec l'expression 15.3 de la période d'un mouvement circulaire dans laquelle il suffit de remplacer le rayon  $r_1$  du cercle par le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse.

### Méthode 15.3 : Étude d'une trajectoire elliptique

- **Détermination de l'expression de l'énergie mécanique du système.**

Traduire la conservation de  $E_m$  à l'apogée et au périhélie. En déduire une équation du second degré satisfaite par  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  puis de la somme des racines de cette équation extraire la relation entre  $E_m$  et le demi-grand axe  $a$ .

- **Détermination de l'expression de la vitesse du système.**

$E_m$  étant exprimée en fonction du demi-grand axe de l'ellipse, exploiter sa conservation pour en déduire l'expression de  $v$  en un point quelconque de la trajectoire.

- **Détermination de l'expression de la période de révolution du système.**

Procéder par analogie en remplaçant, dans l'expression de la période d'un mouvement circulaire, le rayon du cercle par le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse.

➔ Exercice (15.3)

Les résultats que nous venons d'établir concernant les trajectoires circulaires et elliptiques illustrent les trois lois régissant le mouvement des planètes autour du Soleil. Kepler les énonça vers 1610 à partir d'observations astronomiques réalisées par Nicolas Copernic et Tycho Brahé.

### Les lois de Kepler

- **1<sup>re</sup> loi : loi de la trajectoire.**

Chaque planète décrit, selon un mouvement périodique dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

- **2<sup>e</sup> loi : loi des aires.**

L'aire balayée par le rayon vecteur Soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.

- **3<sup>e</sup> loi : loi de la période.**

Le rapport  $\frac{T^2}{a^3}$  du carré de la période de révolution  $T$  au cube du demi-grand axe  $a$  de l'ellipse trajectoire a même valeur pour toutes les planètes du système solaire.



C'est en s'appuyant sur ces lois déduites de l'observation que Newton fut conduit, vers 1687, à énoncer la loi de la gravitation universelle.

## ■ 5 Étude des satellites terrestres

L'étude du mouvement d'un satellite terrestre peut être menée dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , supposé galiléen, auquel on associe le repère cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . Le point  $O$  est confondu avec le centre de masse de la Terre et les 3 axes  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  sont dirigés vers 3 étoiles lointaines supposées fixes.

Si on ne tient compte que de l'attraction gravitationnelle de la Terre sur le satellite, le mouvement du centre de masse  $G$  de celui-ci s'apparente au mouvement d'un point matériel de masse  $m$  soumis à la force centrale conservative  $\vec{F} = -\frac{Gmm_t}{r^2}\vec{u}_r$  où  $m_t$  est la masse de la Terre.

Son étude est identique à celle du mouvement d'un corps céleste soumis à l'attraction solaire.

En particulier dans le cas d'un **satellite placé sur une orbite circulaire** de rayon  $R$  nous pouvons reprendre les résultats précédents :

- le centre de l'orbite circulaire est confondu avec le centre de la Terre et le mouvement circulaire est uniforme ;
- la constante des aires du satellite est  $C = R^2\dot{\theta} = Rv$  ;
- la vitesse du satellite est liée au rayon de son orbite par la relation :  $v = \sqrt{\frac{Gm_t}{R}}$  ;
- l'énergie mécanique du satellite est constante et vaut  $E_m = -\frac{Gmm_t}{2R}$  ;
- la période de révolution du satellite autour de la Terre est  $T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{Gm_t}R^3}$ .

□ **Quelle vitesse doit-on communiquer à un satellite pour le placer sur une orbite circulaire basse ?**

Une orbite basse est une orbite dont l'altitude  $h$  est faible, comme celle par exemple de la station spatiale internationale qui est égale à  $3,5 \cdot 10^2$  km.

Nous savons que la vitesse d'un satellite placé sur une orbite circulaire de rayon  $R$  vaut  $v = \sqrt{\frac{Gm_t}{R}}$ .

Lorsque  $h$  est suffisamment faible devant le rayon  $R_t$  de la Terre ( $R_t \simeq 6,4 \cdot 10^3$  km), nous pouvons poser  $R = R_t + h \simeq R_t$ . Nous en déduisons la vitesse recherchée :

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_t}{R_t}}$$

Cette vitesse porte le nom de 1<sup>re</sup> vitesse cosmique ou de **vitesse en orbite basse**. Elle vaut  $v = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  (avec  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $m_t = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$  et  $R_t = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ ).

□ **Quelle vitesse minimale doit-on communiquer à un satellite au niveau de la surface terrestre pour qu'il puisse échapper au champ gravitationnel terrestre ?**

Pour échapper au champ gravitationnel terrestre le satellite doit être placé dans un état de diffusion. Il faut donc que son énergie mécanique satisfasse à la condition  $E_m \geq 0$ . Or au niveau de la surface terrestre l'énergie mécanique du satellite a pour expression :  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_t}{R_t}$ . Ainsi la vitesse

minimale recherchée est telle que  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gm_t}{R_t} = 0$ . D'où :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_t}{R_t}}$$

Cette vitesse porte le nom de 2<sup>e</sup> vitesse cosmique ou de **vitesse de libération**. Elle vaut  $v_2 = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Étude du cas particulier des satellites géostationnaires

#### Définition : Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste en permanence à la verticale d'un même point de la Terre.

Les télécommunications constituent une application importante des satellites géostationnaires.

#### □ Quel est le plan d'une orbite géostationnaire ?

Les trajectoires, dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , du satellite géostationnaire et du point  $M$  de la Terre considéré doivent être dans le même plan. Celle du satellite est dans un plan contenant le centre  $O$  de la Terre. Celle du point  $M$  est dans le plan normal à l'axe de rotation de la Terre et contenant la projection orthogonale de  $M$  sur cet axe. Ces deux plans ne sont confondus qu'à l'équateur. Ainsi **un satellite géostationnaire est nécessairement équatorial**.

#### □ Quelle est le rayon d'une orbite géostationnaire ?

La Terre met un jour sidéral pour faire un tour complet sur elle-même, soit  $T_{sid} = 86\,164 \text{ s}$ . En utilisant la relation 15.3 entre la période d'un satellite circulaire et le rayon de sa trajectoire nous

obtenons :  $T_{sid} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{Gm_t}} R_g^3$ , d'où :  $R_g = \sqrt[3]{\frac{Gm_t T_{sid}^2}{4\pi^2}}$ . Soit, en notant  $h_g$  l'altitude de l'orbite géostationnaire :

$$h_g = \sqrt[3]{\frac{Gm_t T_{sid}^2}{4\pi^2}} - R_t$$

Numériquement :  $h_g = 36 \cdot 10^3 \text{ km}$  (avec  $R_t = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ ).



Il n'existe qu'une orbite géostationnaire. Elle est de ce fait très encombrée. Son altitude est élevée, ce qui rend coûteuse la mise en orbite d'un satellite géostationnaire.

## ■ 6 Interaction entre deux particules chargées

Considérons deux particules ponctuelles, l'une de charge  $q_0$  et immobile en  $O$ , l'autre de charge  $q$ , en  $M$  et pouvant se déplacer dans l'espace. La particule placée en  $M$  subit de la part de celle placée en  $O$  la force électrique  $\vec{F} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ . L'interaction gravitationnelle entre les deux particules est négligeable devant leur interaction électrique. L'étude, dans un référentiel galiléen, du mouvement de la particule  $M$  dans le champ électrostatique de la particule  $O$  est formellement analogue à celle d'un objet céleste dans le champ gravitationnel solaire. Dans les deux cas la force est une force



centrale conservative de la forme  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r$  avec  $k = -\frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0}$  pour la force électrique au lieu de  $k = Gm_0m$  pour la force gravitationnelle.



Pour la force électrique  $k$  peut être positif ou négatif, la force étant attractive si  $qq_0 < 0$  et répulsive si  $qq_0 > 0$ . Pour la force gravitationnelle, toujours attractive,  $k$  est positif.

On distingue alors 2 cas en fonction du signe de  $q_0q$ .

- Si  $q_0q < 0$ , les deux études sont similaires. Selon la valeur de son énergie mécanique  $E_m$ , la particule  $M$  pourra suivre différentes trajectoires : un cercle ou une ellipse si  $E_m < 0$ , une parabole si  $E_m = 0$ , une branche d'hyperbole si  $E_m > 0$ . Toutes les expressions établies dans le cas de la force gravitationnelle peuvent être reprises en remplaçant  $Gm_0m$  par  $\frac{-q_0q}{4\pi\epsilon_0}$ .
- Si  $q_0q > 0$ , la force électrique est répulsive et l'énergie potentielle  $E_p = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0 r}$  de  $M$  est positive. Son énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est donc obligatoirement positive. La seule trajectoire possible pour la particule  $M$ , repoussée par celle placée en  $O$ , est une **branche d'hyperbole**.

Un exemple de force centrale électrique est traité dans l'exercice 15.8.

## Interro de cours

Identifier la (ou les) affirmation(s) exacte(s).

1. Le mouvement d'un système est plan si la seule force qu'il subit est :
  - (a) conservative ;
  - (b) centrale ;
  - (c) centrale et conservative.
2. Un point matériel soumis à une seule force centrale conservative :
  - (a) suit une trajectoire conique (cercle, ellipse, parabole ou arc d'hyperbole) ;
  - (b) possède un moment cinétique constant ;
  - (c) possède une énergie mécanique qui diminue.
3. Une force newtonienne :
  - (a) est forcément attractive ;
  - (b) dérive d'une énergie potentielle en  $1/r^2$  ;
  - (c) est à l'origine d'un mouvement circulaire ou elliptique pour un système dans un état lié.
4. L'énergie potentielle effective  $E_{p,e}$  d'un point matériel :
  - (a) définit une position d'équilibre stable du point matériel lorsqu'elle est minimale ;
  - (b) est définie par  $E_m = E_{p,e} + \frac{1}{2}mv^2$  ;
  - (c) contient l'énergie potentielle et une partie de l'énergie cinétique du point matériel.
5. Un satellite en mouvement circulaire possède une vitesse :
  - (a) constante ;
  - (b) dépendant de sa masse ;
  - (c) dépendant de la masse de l'astre autour duquel il tourne.
6. Pour un satellite géostationnaire, on peut choisir librement :
  - (a) l'altitude à laquelle il tourne autour de la Terre ;
  - (b) le point de l'équateur à la verticale duquel il est positionné ;
  - (c) la vitesse à laquelle il se déplace.
7. La vitesse de libération d'un objet terrestre est de l'ordre :
  - (a) du kilomètre par seconde ;
  - (b) de la dizaine de kilomètres par seconde ;
  - (c) de la centaine de kilomètres par seconde.
8. Dans cette question on assimile les trajectoires des corps célestes à des ellipses. On note  $T_T$ ,  $T_M$  les périodes de révolution de la Terre et de Mars autour du soleil et  $T_L$  celle de la Lune autour de la Terre. On note  $a_T$ ,  $a_M$  et  $a_L$  les demi-grands axes des trajectoires de ces corps célestes. On peut affirmer que :
  - (a)  $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_L^2}{a_L^3}$  ;
  - (b)  $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3}$  ;
  - (c) la vitesse de la Terre est plus grande à son aphélie qu'à son périhélie.

# Exercices

## Exercice 15.1 Armageddon

➔ Méthode (15.1)

Un astéroïde de masse  $m = 1,0 \cdot 10^{18}$  kg s'approche dangereusement de la Terre. Il possède une vitesse  $v_0 = 10$  km  $\cdot$  s<sup>-1</sup> dans le référentiel géocentrique ( $\mathcal{R}_g$ ) supposé galiléen avec un paramètre d'impact  $b = 8,0 \cdot 10^3$  km défini sur la figure. À cet instant, l'attraction terrestre peut encore être négligée.

La Terre est supposée sphérique, de centre  $O$ , de rayon  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km et de masse  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg. Nous assimilerons l'astéroïde à un point matériel  $M$  pour étudier son mouvement.



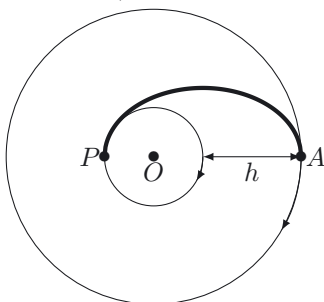
La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>  $\cdot$  kg<sup>-1</sup>  $\cdot$  s<sup>-2</sup>.

1. Montrer que le moment cinétique par rapport à  $O$  de l'astéroïde se conserve. Quelle(s) conséquence(s) tirer de cette conservation ? Calculer la constante des aires  $C$  exprimée en coordonnées polaires par  $C = r^2\dot{\theta}$ .
2. Définir l'énergie potentielle effective  $E_{p,e}$  de l'astéroïde puis tracer son allure en fonction de  $r$ , distance de l'astéroïde au centre de la Terre.
3. Calculer l'énergie mécanique de l'astéroïde. S'agit-il d'un état de diffusion ou d'un état lié ?
4. Déduire de l'expression de  $E_{p,e}$  la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport à la Terre. Conclure.

## Exercice 15.2 Grandeur et décadence d'un satellite

➔ Méthode (15.2)

Les satellites de télécommunication, en orbite géostationnaire, sont transférés sur une orbite dite de rebut (parfois appelée orbite-poubelle) lorsqu'ils sont en fin de vie active.



Nous étudions le changement d'orbite d'un satellite de masse  $m = 3,500 \cdot 10^3$  kg depuis son orbite géostationnaire circulaire de rayon  $R_g$  jusqu'à son orbite de rebut circulaire de rayon  $R_r$  supérieure à  $R_g$  de  $h = 3,0 \cdot 10^2$  km.

Données sur la Terre supposée sphérique de centre  $O$  :

Rayon  $R_T = 6371$  km, masse  $M_T = 5,972 \cdot 10^{24}$  kg, jour sidéral  $T = 23$  h 56 min.

La constante de gravitation est :

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

1. Calculer le rayon  $R_g$  de l'orbite du satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial de la Terre.
2. Calculer alors la vitesse  $v_g$  du satellite.

3. Le satellite utilise le reliquat de carburant pour modifier sa vitesse au point  $P$  de son orbite indiqué sur la figure (échelles non respectées). Il parcourt alors une demi-ellipse dite de transfert jusqu'au point  $A$  où l'usage de son moteur permet de modifier de nouveau sa vitesse pour rejoindre son orbite de rebut.
- Déterminer le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse de transfert. En déduire une expression de l'énergie mécanique du satellite sur cette orbite elliptique.
  - En déduire la vitesse  $v_p$  que doit communiquer le moteur au satellite en  $P$  puis l'énergie fournie par le moteur.
  - Calculer alors la vitesse du satellite lorsqu'il arrive en  $A$ , puis la vitesse au même point après modification par le moteur.
  - Calculer la durée du transfert de  $A$  à  $P$ .

### Exercice 15.3 XMM-NEWTON

➔ Méthode (15.3)

XMM-NEWTON (XMM pour X-ray Multi-Mirror) est un observatoire spatial d'astrophysique européen mis en orbite en 1999. Son orbite de travail est une ellipse passant de 7 000 km à 114 000 km au dessus de la Terre.

- Déterminer le demi-grand axe  $a$  de l'orbite du satellite.
- Calculer la période de révolution d'XMM-NEWTON.
- Exprimer puis calculer l'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire elliptique.
- Calculer la vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique à son apogée et à son périégée.

Données : la masse de la Terre est  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg, celle du satellite  $m = 3,8$  tonnes. La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

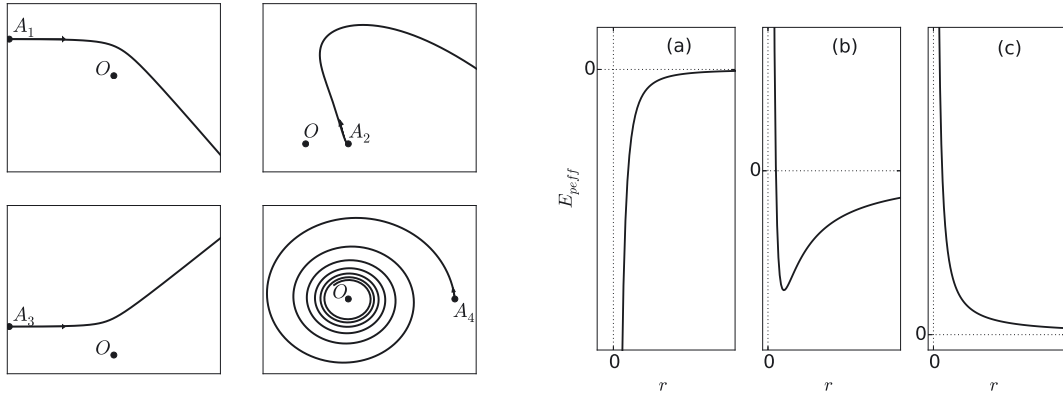
### Exercice 15.4 Libéré, satellisé

Le Petit Prince réside sur un astéroïde de rayon  $R = 30$  m et de masse  $m = 2,0 \cdot 10^8$  kg. La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Calculer la vitesse de satellisation  $v_s$ , c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il parcoure une orbite basse autour de l'astéroïde.
- Calculer la vitesse de libération  $v_l$ , c'est-à-dire la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction de l'astéroïde. Conclure.
- Plus sérieusement, qu'en est-il sur Terre? La masse de la Terre est  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg et son rayon  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km.

### Exercice 15.5 *Errare humanum est*

Des simulations ont été réalisées afin d'illustrer la notion de trajectoire dans un champ de force centrale (de centre  $O$ ). La position initiale de la trajectoire (i) est notée  $A_i$ .



1. L'une des trajectoires simulées est présente par erreur puisqu'elle ne peut pas correspondre à une force centrale. Laquelle? Justifier la réponse.
2. Pour les trajectoires restantes, justifier le caractère attractif ou répulsif de l'interaction.
3. Attribuer chaque énergie potentielle effective  $E_{p,e}$  dont le diagramme est tracé sur la figure de droite à sa trajectoire.
4. Situer de façon approchée l'énergie mécanique de la particule sur le diagramme d'énergie potentielle effective dans chaque cas.

### Exercice 15.6 Un objet volant non identifié

Dans « *Autour de la Lune* » de Jules Verne, les voyageurs à destination de la Lune croisent un bolide qu'ils identifient à un deuxième satellite de la Terre. L'extrait ci-dessous donne des informations sur ce bolide.

#### « *Autour de la Lune* », Jules Verne (extrait)

C'est en tenant compte de certaines perturbations qu'un astronome français, M. Petit, a su déterminer l'existence de ce second satellite et en calculer les éléments. D'après ses observations, ce bolide accomplirait sa révolution autour de la Terre en trois heures vingt minutes seulement, ce qui implique une vitesse prodigieuse... Au point où nous l'avons rencontré, nous étions exactement à huit mille cent quarante kilomètres de la surface du globe terrestre.

La masse de la Terre est  $m_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg, son rayon  $R_T = 6,37 \cdot 10^3$  km. La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. On considère un satellite en orbite circulaire autour de la Terre. Énoncer puis démontrer la troisième loi de Kepler appliquée à ce satellite.

2. Le bolide observé par les voyageurs de Jules Verne peut-il être un satellite de la Terre en orbite circulaire ?

### Exercice 15.7 Le jour d'après

La Lune est percutée par un énorme astéroïde de masse  $m_a = 1,0 \cdot 10^{20}$  kg se déplaçant à la vitesse  $v_a = 50 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le référentiel géocentrique. Les vitesses  $\vec{v}_L$  de la Lune et  $\vec{v}_a$  de l'astéroïde ont même direction et un sens opposé au moment de l'impact :  $\vec{v}_L = v_L \vec{u}_x$  et  $\vec{v}_a = -v_a \vec{u}_x$ .

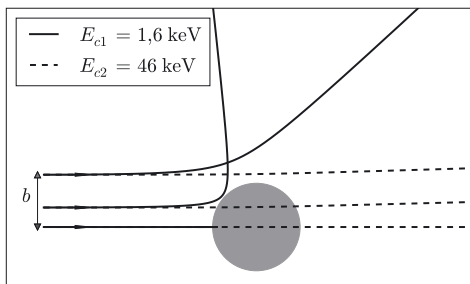
L'orbite lunaire est supposée circulaire de rayon  $R_L = 3,8 \cdot 10^5$  km et sa période de révolution est  $T = 27,32$  j. La Lune possède une masse  $m_L = 7,3 \cdot 10^{22}$  kg, la Terre une masse  $m_T = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg. La constante de gravitation vaut  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Écrire  $\vec{p}_{\text{avant}}$ , somme des quantités de mouvement de l'astéroïde et de la Lune juste avant l'impact.
2. Juste après l'impact, nous supposons que la Lune possède une masse  $m_a + m_L$  et que sa vitesse s'écrit  $\vec{v}'_L$ . Déterminer  $\vec{v}'_L$  en supposant que la quantité de mouvement de la Lune juste après impact est égale à  $\vec{p}_{\text{avant}}$  (conservation de la quantité de mouvement). Calculer  $v'_L$ .
3. Déterminer le demi-grand axe  $a$  de la nouvelle orbite lunaire. Estimer sa nouvelle période de révolution  $T'$ . Conclure.

### Exercice 15.8 Un pudding repoussant

L'expérience de diffusion des particules alpha par des atomes d'or réalisée par Geiger et Marsden en 1909 a montré que des particules alpha étaient fortement déviées, voire rétro-diffusées, amenant à la remise en cause du modèle de Thomson de l'atome au profit de celui de Rutherford en 1911.

Nous étudions dans cet exercice la déviation d'une particule alpha de masse  $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$  kg et de charge  $+2e$  par un atome d'or en utilisant le modèle de Thomson. Dans ce modèle, aussi appelé modèle de plum pudding, les électrons se déplacent dans une sorte de gelée sphérique chargée positivement et uniformément. Le rayon de cette « gelée » est le rayon atomique  $R$  et sa charge  $+Ze$  avec  $Z = 79$ .



Le champ électrique créé par la « gelée » chargée positivement s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ pour } r > R \text{ et } \frac{Ze}{4\pi R^3 \epsilon_0} r \vec{u}_r \text{ si } r \leq R.$$

$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ . On rappelle que  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

Seule l'interaction électrique entre charges est prise en compte.

- La présence des électrons est totalement ignorée dans un premier temps. Exprimer l'énergie potentielle  $E_p(r)$  à laquelle est soumise la particule alpha à l'intérieur et à l'extérieur de l'atome. On pourra poser  $k = \frac{Ze^2}{2\pi R^3 \epsilon_0}$  et on prendra  $E_p(\infty) = 0$ . Dessiner  $E_p$  en fonction de  $r$ .
- Les trajectoires de la particule alpha ont été simulées pour deux valeurs d'énergie cinétique ( $E_{c1} = 1,6 \text{ keV}$  et  $E_{c2} = 46 \text{ keV}$  à grande distance du noyau) et trois paramètres d'impact  $b$  différents : 0 nm, 0,062 nm et 0,17 nm.
  - Pour  $b = 0$ , les particules alpha d'énergie cinétique  $E_{c1}$  arrivent à la limite de l'atome de Thomson ( $r = R$ ) et sont rétro-diffusés. En déduire une évaluation de  $R$ .
  - Comparer les déviations obtenues avec les deux énergies cinétiques.
  - Le modèle de Thomson semble-il adapté pour interpréter l'expérience de Geiger et Marsden dans laquelle les particules alpha fortement déviées ont une énergie cinétique de l'ordre de 5 MeV ?
  - Nous tenons maintenant compte des  $Z$  électrons se trouvant dans l'atome. Comment la particule alpha est-elle déviée lorsque  $b > R$ ? Lorsque  $b < R$ , la présence des électrons a-t-elle tendance à augmenter ou à diminuer la déviation des particules alpha ?

### Exercice 15.9 Le monde du Tho Punh

#### Les secrets du monde fantastique du Tho Punh (extrait)

Le monde du Tho Punh est un système planétaire de la galaxie MPSI essentiellement constitué d'une étoile, le Baudueil et de trois planètes confirmées : Jossenix, Manassander et Cousidit. Le  $3/2$  y joue un rôle majeur : la force de gravitation attirant deux corps est ainsi inversement proportionnelle à la distance entre les corps élevée à la puissance  $3/2$ . Le grand astronome et mathématicien Almeirius énonce les trois lois éponymes caractérisant le mouvement des planètes :

- Première loi d'Almeirius : le mouvement de chaque planète  $P$  autour du Baudueil  $B$  est plan et quasi-circulaire.
- Deuxième loi d'Almeirius : l'aire balayée par unité de temps par le segment  $BP$  est une constante.
- Troisième loi d'Almeirius : le carré de la période sidérale d'une planète est proportionnel au rayon de son orbite élevé à la puissance  $5/2$ .

Les caractéristiques importantes des planètes sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Planète	Masse (kg)	Rayon de l'orbite (km)	Période orbitale (années terrestres)
Manassander	$6,0 \cdot 10^{24}$	$1,5 \cdot 10^8$	1,0
Jossenix	$6,4 \cdot 10^{23}$	$2,3 \cdot 10^8$	1,7
Cousidit	$2,0 \cdot 10^{27}$	$7,8 \cdot 10^8$	7,9

Dans ce monde imaginaire, le Baudueil  $B$  de masse  $M_B$  exerce sur une planète  $P$  de masse  $m$  la force  $\vec{F} = -\frac{kM_B m}{r^{3/2}} \vec{u}_r$  où  $r = BP$ ,  $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{BP}}{BP}$  et  $k = 1,7 \cdot 10^{-16}$  USI. Nous nous placerons dans le référentiel bauduicentrique  $\mathcal{R}$  supposé galiléen constitué du centre du Baudueil et de trois axes pointant vers des étoiles suffisamment lointaines pour être considérées comme fixes.

- Justifier que le mouvement d'une planète est plan comme la première loi d'Almeirius l'affirme.

2. Démontrer la deuxième et la troisième loi d'Almeirius. Déduire des données orbitales des planètes la masse  $M_B$  du Baudueil.
3. Comparer les lois imaginaires d'Almeirius aux lois de Kepler.
4. Exprimer l'énergie potentielle dont dérive la force  $\vec{F}$  exercée sur une planète  $P$  de masse  $m$ . Quelle est l'unité de la constante  $k$  ?
5. Définir et exprimer une énergie potentielle effective  $E_{p,e}$  de la planète  $P$ . Représenter l'allure de  $E_{p,e}$  en fonction de  $r$ .
6. Utiliser le graphe précédent pour discuter de la nature liée ou de diffusion de l'état du système planète-Baudueil selon l'énergie mécanique de  $P$ . Trouver graphiquement la condition pour que la trajectoire de la planète soit circulaire.



# Corrections

## Interro de cours

1. Il suffit que la seule force subie soit centrale pour que le mouvement soit plan. Réponses **b** et **c**.
2. Le caractère central de la force implique un moment cinétique constant et donc un mouvement plan. Le caractère conservatif de la force implique une énergie mécanique constante. Les caractères central et conservatif ne suffisent pas à imposer une trajectoire conique. Il manque le caractère newtonien c'est-à-dire une force en  $1/r^2$ . Réponse **(b)**.
3. Une force newtonienne peut être attractive (comme la force d'attraction gravitationnelle) mais aussi répulsive (comme la force électrostatique pour des charges de même signe). Elle dérive d'une énergie potentielle en  $1/r$  et impose une trajectoire conique (soit un cercle ou une ellipse pour les systèmes dans un état lié). Réponse **(c)**.
4. L'énergie potentielle effective  $E_{p,e}$  est définie par  $E_m = E_{p,e} + \frac{1}{2}mr^2$  donc elle contient l'énergie potentielle et une partie de l'énergie cinétique. Quand  $E_m = E_{p,e_{\min}}$ , il existe une seule valeur de  $r$  possible mais comme  $\theta$  varie, cela correspond à une trajectoire circulaire et non à une position d'équilibre. Réponse **(c)**.
5. La vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire de rayon  $r$  s'écrit  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$  où  $M$  est la masse de l'astre autour duquel tourne le satellite. Réponses **(a)** et **(c)**.
6. Pour un satellite géostationnaire, l'altitude à laquelle il tourne autour de la Terre et la vitesse à laquelle il se déplace sont imposées. Seul le point de l'équateur à la verticale duquel il est positionné peut être choisi librement. Réponse **(b)**.
7.  $v = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Réponse **(b)**.
8. La troisième loi de Kepler indique  $\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$  pour des systèmes tournant autour du même astre (ce qui est le cas de la Terre et de Mars mais pas de la Terre et de la Lune!). La constante des aires  $C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$  implique  $v_a r_a = v_p r_p$ , donc  $v_a < v_p$  puisque  $r_a > r_p$ . Réponse **(b)**.

## Exercice 15.1

1. L'astéroïde est soumis uniquement à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{F} = -\frac{GM_T m}{OM^3} \vec{OM}, \text{ force centrale dont le moment par rapport } O \text{ est nul.}$$

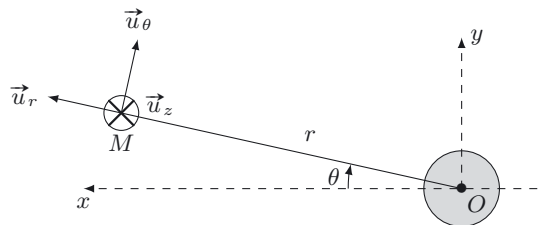
L'application de la loi du moment cinétique par rapport à  $O$  appliquée à  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_g$  conduit

ainsi à  $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{0}$  : le moment cinétique par rapport à  $O$  de l'astéroïde se conserve.

On en déduit que la trajectoire de  $M$  s'effectue dans le plan contenant  $\vec{OM}_\infty$  et  $\vec{v}_0$ , perpendiculaire au moment cinétique et qu'en utilisant le système de coordonnées polaires de centre  $O$  :

$mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \vec{L}_O(M) = \text{cste}$  (Loi des aires). On calcule la valeur du moment cinétique lorsque l'astéroïde est très loin ( $d \gg b$ ) :

$$\vec{L}_O(M) = m(d\vec{u}_x + b\vec{u}_y) \wedge (-v_0\vec{u}_x) = mbv_0\vec{u}_z = mC\vec{u}_z : \text{ on en déduit donc } C = r^2\dot{\theta} = bv_0.$$



2. La force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p = -\frac{GM_T m}{r}$ , et l'énergie cinétique de  $M$  est :

$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$ . Le système est conservatif, il y a conservation de l'énergie mécanique. Cette dernière s'écrit :

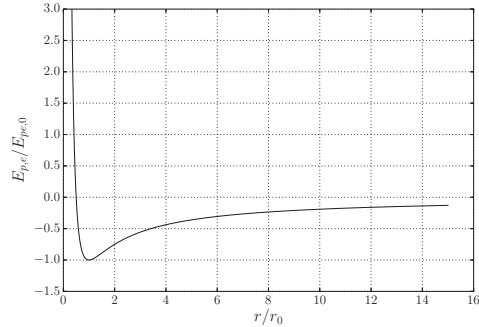
$$E_m = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - \frac{GM_T m}{r}.$$

Or  $\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^4}$ , soit  $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}$ . On peut donc écrire l'énergie mécanique sous la forme suivante :

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m}{r}$ . On définit l'énergie potentielle effective de l'astéroïde par :

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM_T m}{r}.$$

La figure ci-contre montre l'allure de l'évolution de l'énergie potentielle effective divisée par l'opposé de la valeur de son minimum (il est négatif) en fonction du rapport  $r/r_0$  avec  $r_0$  correspondant au minimum de  $E_{p,e}$ .



3. On obtient la valeur de l'énergie mécanique en se plaçant très loin de la Terre :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 = 5,0 \cdot 10^{25} \text{ J} > 0 : \text{ il s'agit clairement d'un état de diffusion.}$$

4. La distance minimum d'approche correspond à la distance  $r_{\min}$  tel que  $E_m = E_{p,e}(r_{\min})$ . On obtient pour  $r_{\min}$  l'équation suivante :  $r_{\min}^2 + 2\frac{GM_T}{v_0^2} - b^2 = 0$ , ce qui se résout en :

$$r_{\min} = \frac{GM_T}{v_0^2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{bv_0^2}{GM_T} \right)^2} - 1 \right) = 4,9 \cdot 10^3 \text{ km} < R_T : \text{ le choc avec la Terre sera inévitable...}$$

### Exercice 15.2

1. D'après la troisième loi de Kepler :  $\frac{R_g^3}{T^2} = \frac{M_T G}{4\pi^2}$ . On trouve ainsi  $R_g = 42,16 \cdot 10^3 \text{ km}$ . Le satellite doit avoir le même axe de rotation qu'un observateur terrestre (axe des pôles) pour être stable par rapport à ce dernier, d'où sa localisation dans le plan équatorial de la Terre.

2. La vitesse du satellite est donnée par  $v_g = \frac{2\pi R_g}{T} = \sqrt{\frac{M_T G}{R_g}} = 3,075 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. a.  $a = R_g + h/2 = 42,31 \cdot 10^3 \text{ km}$ . L'énergie mécanique s'écrit alors  $E_m = -\frac{GM_T m}{2a} = -\frac{GM_T m}{2R_g + h}$ .

b. L'énergie mécanique se conserve, et l'énergie potentielle en  $P$  du satellite est  $E_p(P) = -\frac{GM_T m}{R_g}$ ,

d'où  $E_m = -\frac{GM_T m}{2R_g + h} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{GM_T m}{R_g}$ . On en déduit  $v_P = \sqrt{2GM_T \frac{R_g + h}{R_g(2R_g + h)}}$ . Numériquement :  $v_P = 3,080 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'énergie fournie par le moteur est :

$$W_m = E_{m,f} - E_{m,i} = -\frac{GM_T m}{2R_g + h} + \frac{GM_T m}{2R_g} = 59 \text{ MJ.}$$

c. En utilisant la même méthode que précédemment :  $E_m = -\frac{GM_T m}{2R_g + h} = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_T m}{R_g + h}$ , soit

$$v_A = \sqrt{2GM_T \frac{R_g}{(2R_g + h)(R_g + h)}} = 3,058 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Après modification par le moteur, le satellite est sur une orbite circulaire, donc on peut reprendre le résultat de la question 2 :  $v'_g = \sqrt{\frac{M_T G}{R_g + h}} = 3,064 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- d. La durée du transfert de  $A$  à  $P$  correspond à la moitié de la période  $T'$  du satellite sur sa trajectoire de transfert, laquelle est donnée par la troisième loi de Kepler :  $T'^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_g + h/2)^3$ . On obtient ainsi  $T'/2 = 12 \text{ h } 1 \text{ min } 47 \text{ s}$

**Exercice 15.3**

- On note  $r_P$  le rayon du périégée,  $r_A$  celui de l'apogée.  $a = (r_A + r_P)/2 = 60,5 \cdot 10^3 \text{ km}$ .
- On applique la troisième loi de Kepler :  $\frac{a^3}{T^2} = \frac{M_T G}{4\pi^2}$ , soit  $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{M_T G}} = 41 \text{ h } 3 \text{ min}$ .
- $E_m = -\frac{M_T G m}{2a} = -13 \text{ GJ}$ .
- L'énergie mécanique se conservant et l'énergie potentielle d'XMM en  $P$  étant  $E_p(P) = -\frac{M_T G m}{r_P}$ , il vient :  $E_m = -\frac{M_T G m}{2a} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{M_T G m}{r_P}$ , soit  $v_P = \sqrt{2M_T G \frac{r_A}{r_P(r_P + r_A)}} = 10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Par le même raisonnement,  $v_A = \sqrt{2M_T G \frac{r_P}{r_A(r_P + r_A)}} = 0,64 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

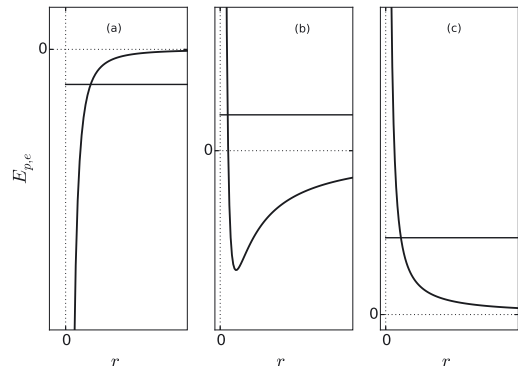
**Exercice 15.4**

- En appliquant la loi de la quantité de mouvement à l'objet, et en la projetant sur le vecteur polaire  $\vec{u}_r$ , on obtient  $m' \frac{v_s^2}{R} = m' \frac{Gm}{R^2}$ , soit  $v_s = \sqrt{\frac{Gm}{R}} = 0,021 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- La vitesse de libération correspond au cas particulier de la trajectoire parabolique, pour laquelle l'énergie mécanique est nulle. On aura donc  $0 = \frac{1}{2} m' v_l^2 - m' \frac{Gm}{R}$ , soit  $v_l = \sqrt{\frac{2Gm}{R}} = 0,030 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : il faut donc aller à la vitesse d'un escargot si on ne veut pas être libéré sur la planète du Petit Prince!!!
- En reprenant les mêmes expressions sur la Terre, on obtient  $v_s = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $v_l = 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Exercice 15.5**

- Il s'agit de la trajectoire 2; en effet, nous constatons qu'en prenant par exemple comme référence des angles l'axe  $OA_2$ , l'angle  $\theta$  repérant la position du point commence par croître, puis décroît ce qui correspond à un changement de signe de  $\dot{\theta}$  incompatible avec la loi des aires.

- Trajectoire 1 : attractif. Trajectoire 3 : répulsif.  
Trajectoire 4 : attractif.
- Trajectoire 1 : associée à la courbe (b).  
Trajectoire 3 : associée à la courbe (c).  
Trajectoire 4 : associée à la courbe (a).
- Voilà les énergies mécaniques (traits horizontaux) correspondant aux trajectoires ci-dessus.



**Exercice 15.6**

1. Troisième loi de Kepler : le rapport  $\frac{a^3}{T^2}$  avec  $T$  période de révolution et  $a$  demi-grand axe de l'ellipse est une constante pour tous les corps subissant l'attraction gravitationnelle d'une même planète ou d'une même étoile.

Ici, la planète concernée est la Terre. Le satellite étant en orbite circulaire de rayon  $R$  autour du centre  $T$  de la Terre, on peut lui associer une base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , et son accélération dans le référentiel géocentrique galiléen est donnée par  $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ . Il est soumis à la force d'attraction terrestre  $\vec{F} = -\frac{Gm_T m}{R^2} \vec{u}_r$ . L'application de la loi de la quantité de mouvement à ce satellite s'écrit  $m\vec{a} = \vec{F}$  ;

ce qui conduit par projection à :  $\ddot{\theta} = 0$ , soit  $\dot{\theta} = \text{cste} = \omega$  et  $R\omega^2 = \frac{Gm_T}{R^2}$ , soit  $\omega^2 R^3 = Gm_T = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2}$ ,

et par conséquent  $\frac{R^3}{T^2} = \frac{Gm_T}{4\pi^2}$ .

2. On fait l'application numérique pour la constante :  $\frac{Gm_T}{4\pi^2} = 1,0 \cdot 10^{13} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . D'après les données du texte,  $R = 14,511 \cdot 10^3 \text{ km}$  et  $T = 12 \cdot 10^3 \text{ s}$ . On calcule alors  $\frac{R^3}{T^2} = 2,1 \cdot 10^{13} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ . Le bolide observé par les voyageurs ne peut donc être un satellite de la Terre en orbite circulaire.

**Exercice 15.7**

1.  $\vec{p}_{\text{avant}} = m_a \vec{v}_a + m_L \vec{v}_L = (-m_a v_a + m_L v_L) \vec{u}_x$ .

2. La Lune « absorbe » l'astéroïde : sa quantité de mouvement après l'impact est ainsi :

$$\vec{p}_{\text{après}} = (m_a + m_L) \vec{v}'_L = m_a \vec{v}_a + m_L \vec{v}_L. \text{ On obtient donc } \vec{v}'_L = \frac{-m_a v_a + m_L v_L}{m_a + m_L} \vec{u}_x.$$

La Lune avant l'impact est sur une trajectoire circulaire, dont nous connaissons le rayon et la période.

Nous avons donc  $v_L = \frac{2\pi}{T} R_L = 1,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , d'où  $v'_L = 9,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. L'énergie mécanique se conservera sur la nouvelle trajectoire, nous pouvons donc écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} (m_L + m_a) v'_L{}^2 - \frac{GM_T (m_L + m_a)}{R_L} = -\frac{GM_T (m_L + m_a)}{2a}.$$

Nous en déduisons ainsi  $a = \frac{R_L GM_T}{2GM_T - R_L v'_L{}^2} = 3,3 \cdot 10^5 \text{ km}$ . La nouvelle période de révolution sera,

d'après la loi de Kepler :  $T' = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_T}} \simeq 22 \text{ jours}$  : cette variation est donc relativement importante

par rapport à l'ajout de masse inférieur à 1% de la masse de la Lune et ne serait pas sans conséquence sur le climat terrestre !

**Exercice 15.8**

1. On commence par déterminer l'expression de l'énergie potentielle.

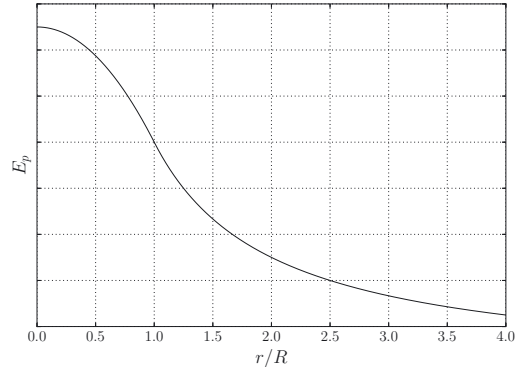
$$\vec{F}(r > R) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r \text{ d'où :}$$

$$E_p(r > R) = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{kR^3}{r}.$$

$$\vec{F}(r < R) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r \text{ d'où en utilisant la continuité de l'énergie potentielle en } r = R, \text{ on obtient :}$$

$$E_p(r < R) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) = \frac{k}{2} (3R^2 - r^2).$$

L'allure de cette énergie potentielle est tracée sur le graphe ci-contre.



2. a. Nous écrivons la conservation de l'énergie mécanique :  $E_m = E_{c1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{kR^3}{r}$ , et pour  $b = 0$ ,  $v = 0$  pour  $r = R$ . On obtient ainsi  $E_{c1} = kR^2 = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 R}$  soit  $R = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 E_{c1}} = 1,4 \cdot 10^{-10}$  m.
- b. La déviation est d'autant plus importante que l'énergie cinétique initiale des particules alpha est faible. Lorsque cette énergie devient trop élevée, les particules alpha ne sont presque pas déviées.
- c. À 5 MeV, d'après ce modèle, les particules alpha ne doivent pas être déviées et traversent le pudding comme s'il n'existait pas, ce qui n'est pas ce qui a été constaté expérimentalement. Ce modèle paraît donc trop simpliste.
- d. L'atome étant neutre, il n'y a pas de déviation si  $b > R$ . Lorsque la particule  $\alpha$  pénètre dans le « pudding », la présence des électrons va tendre à diminuer la force de répulsion électrostatique et donc les déviations éventuelles. Les conclusions tirées précédemment ne sont pas remises en cause par la présence des électrons.

**Exercice 15.9**

1. La planète  $P$  est soumise uniquement à la force d'attraction du Bauduel  $\vec{F}$ , force centrale dont le moment par rapport  $B$  est nul. L'application de la loi du moment cinétique par rapport à  $B$  appliquée à cette planète dans le référentiel  $\mathcal{R}$  conduit ainsi à  $\frac{d\vec{L}_B}{dt} = \vec{0}$  : le moment cinétique par rapport à  $B$  de la planète  $P$  se conserve. On en déduit que la trajectoire de  $P$  s'effectue dans le plan perpendiculaire au moment cinétique : le mouvement est donc plan comme l'affirme la première loi d'Almeirius.
2. On se place en coordonnées polaires de centre  $B$  :  $\vec{L}_B = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \text{cste}$ , on obtient donc la loi des aires  $r^2\dot{\theta} = 2\frac{d\mathcal{A}}{dt} = C$ ,  $C$  constante et  $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$  aire balayée par  $BP$  par unité de temps. On en déduit donc que l'aire balayée par unité de temps par le segment  $BP$  est une constante.

En appliquant la loi de la quantité de mouvement à  $P$  dans  $\mathcal{R}$ , il vient :  $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{kM_B m}{r^{3/2}}$ , soit avec

$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ ,  $\frac{r^{5/2}}{T^2} = \frac{kM_B}{4\pi^2}$ , ce qui correspond à la troisième loi d'Almeirius. En utilisant cette loi pour les trois planètes, on obtient  $M_B = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg.

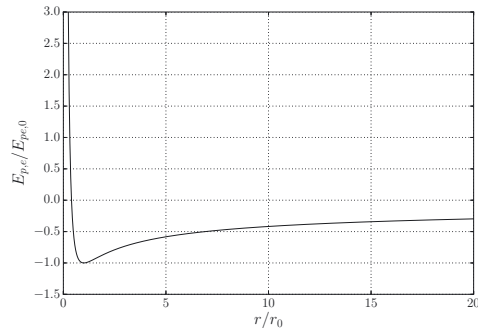
3. La première et la seconde lois sont les mêmes que les lois de Kepler, seule la troisième est différente, de part la présence de la puissance 5/2 dans la loi en  $r$ , qui remplace le 3 de la troisième loi de Kepler.
4.  $\vec{F} = -\frac{kM_B m}{r^{3/2}} \vec{u}_r = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_r$  avec  $E_p = -\frac{2kM_B m}{\sqrt{r}}$ . L'unité de  $k$  est le  $m^{5/2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ .

5. La force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p$ , et l'énergie cinétique de  $P$  est  $E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2)$ . Le système est conservatif, il y a conservation de l'énergie mécanique  $E_m = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + E_p(r)$ .

Or  $\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^4}$ , soit  $r^2\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^2}$ . On peut donc écrire l'énergie mécanique sous la forme suivante :

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$ . On définit l'énergie potentielle effective de  $P$  par :

$E_{p,e} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{2kM_B m}{\sqrt{r}}$ . La figure ci-contre montre l'allure de l'évolution de l'énergie potentielle effective divisée par l'opposé de la valeur de son minimum (car celui-ci est négatif) en fonction du rapport  $r/r_0$  avec  $r_0$  correspondant au minimum de  $E_{p,e}$ .



6. D'après le graphe ci-dessus, nous voyons que si  $E_m \geq 0$ , la nature de la trajectoire de  $P$  autour de  $B$  aura une nature diffusive, alors que si  $E_m < 0$ , la trajectoire de la planète correspondra à un état lié. Nous remarquons de plus que cette énergie potentielle effective présente une cuvette de potentiel : lorsque l'énergie mécanique sera égale à l'énergie potentielle effective minimum, le mouvement sera donc circulaire.

**Partie 3**

# **Thermodynamique**





# Systeme thermodynamique à l'équilibre

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi le temps de cuisson d'un aliment dans de l'eau en ébullition augmente-t-il lorsqu'on est en altitude ?

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les bases de la thermodynamique à partir d'une expérience de cuisson d'un aliment. On considère une casserole en cuivre cylindrique de rayon  $R_c = 8,0$  cm et de hauteur  $h_c = 10$  cm. La contenance de cette casserole est  $V_c = 2,0$  L et sa masse à vide est  $m_c = 1,3$  kg. La masse volumique du cuivre est  $\rho_{Cu} = 8,96 \cdot 10^3$  kg  $\cdot$  m<sup>-3</sup>. On place dans un premier temps un volume  $V_e = 1,0$  L d'eau dans la casserole.

## ■ 1 Définitions et ordres de grandeur

Comme en mécanique, aborder un problème de thermodynamique nécessite de définir le système.

### Définition : Système thermodynamique

Un système thermodynamique comporte un ou plusieurs corps. Il est délimité par une surface de contrôle fermée qui en constitue la frontière, qui peut être matérielle (par exemple une paroi d'un récipient) ou bien non matérielle. Des transferts d'énergie ou de matière peuvent se produire à travers la surface de contrôle. Le nombre de particules (atomes ou molécules) à l'intérieur d'un système thermodynamique est très grand.

Par exemple l'eau liquide contenue dans la casserole définit un système thermodynamique, dont la surface de contrôle est constituée de la surface du liquide en contact avec la casserole et de celle en contact avec l'air.

**Définition : Système ouvert, système fermé et système isolé**

- **Système ouvert** : système à la frontière duquel les échanges de matière et d'énergie avec l'extérieur sont possibles.
- **Système fermé** : système à la frontière duquel les échanges d'énergie avec l'extérieur sont possibles mais pas les échanges de matière.
- **Système isolé** : système à la frontière duquel aucun échange avec l'extérieur n'est possible, ni d'énergie ni de matière.

□ **Quel(s) adjectif(s) associer à l'eau contenue dans notre casserole ?**

L'eau liquide de la casserole constitue un système ouvert puisque de la vapeur d'eau peut s'échapper par la surface du liquide en contact avec l'air. Néanmoins, tant que cette évaporation est négligeable, on peut l'assimiler à un système fermé. Par ailleurs, le système reçoit une énergie par transfert thermique à travers les parois de la casserole lorsqu'on pose celle-ci sur une plaque chauffante. Il n'est donc pas isolé. Un exemple de système fermé isolé est le contenu d'une bouteille thermos hermétiquement fermée et parfaitement calorifugée, ne permettant pas de transfert thermique.

**Définition : Échelles d'étude**

- **Échelle macroscopique** : échelle correspondant au domaine observable expérimentalement à l'œil nu. À cette échelle la matière paraît continue. Distance caractéristique : supérieure au millimètre.
- **Échelle microscopique** : échelle correspondant aux particules (atomes et molécules) constituant la matière. À cette échelle la matière est discontinue. Distance caractéristique : le nanomètre.

Un système macroscopique, qu'il soit solide, liquide ou gazeux, contient un très grand nombre de particules.

□ **Quel est le nombre de particules contenues dans la casserole de cuivre, dans 1 L d'eau liquide et dans 1 L d'air, dans les conditions de température et de pression usuelles ? Quel est alors pour chaque cas le nombre de particules par unité de volume ?**

- Pour la casserole de cuivre : on connaît sa masse  $m_c = 1,3 \text{ kg}$  et la masse molaire du cuivre  $M_{Cu} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Elle comporte donc  $N_{cu} = \mathcal{N}_A m_c / M_{Cu} = 1,2 \cdot 10^{25}$  atomes. Sa densité atomique est alors  $n_{Cu}^* = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .
- Pour l'eau liquide : sa masse molaire et sa masse volumique valent  $M_e = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\rho_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Un volume  $V_e = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$  contient  $N_e = \rho_e V \mathcal{N}_A / M_e = 3,3 \cdot 10^{25}$  molécules. Sa densité moléculaire vaut alors  $n_e^* = 3,3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .
- Pour l'air contenu dans un volume de 1,0 L et assimilé à un gaz parfait constitué de 80% de diazote et de 20% de dioxygène, en prenant  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et  $T = 25^\circ \text{C} = 298 \text{ K}$ , on obtient  $N = \mathcal{N}_A \frac{P_0 V}{RT} = 2,4 \cdot 10^{22}$  molécules et une densité moléculaire  $n_a^* = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ .

Quel que soit l'état physique de la matière, le nombre de particules dans un système macroscopique est donc extrêmement grand. À cette échelle, l'hypothèse de continuité de la matière est donc très largement vérifiée.

**Méthode 16.1 : Déterminer le nombre de particules d'un système macroscopique**

Pour un système de volume  $V$  et comportant  $N$  particules :

- Dans le cas d'un liquide ou d'un solide, on utilise le nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$ , la masse molaire  $M$  et la masse volumique  $\rho$ . On a alors  $N = \rho V \mathcal{N}_A / M$ .
- Dans le cas d'un gaz, on utilise le volume molaire  $V_m$  ou la loi des gaz parfaits. Connaissant la pression  $P$  et la température  $T$  on obtient :  $N = \mathcal{N}_A \frac{V}{V_m} = \mathcal{N}_A \frac{PV}{RT}$ .

On rappelle la constante d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et la constante des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

➔ Exercices (16.1) (16.2)

□ **Quelles sont les principales caractéristiques des différents états de la matière ?**

D'après les applications numériques précédentes, on remarque que le solide et le liquide sont beaucoup plus denses que le gaz (3 ordres de grandeurs).

État physique	Caractéristiques microscopiques	Caractéristiques macroscopiques
Solide	État compact et ordonné	Volume propre mais impossibilité de s'écouler
Liquide	État compact et désordonné	Volume limité mais pas de forme propre et possibilité de s'écouler
Gaz	État dispersé et désordonné, les particules se déplacent quasiment librement	Le gaz occupe tout l'espace qui lui est offert

L'**état condensé** regroupe l'état solide et l'état liquide, qui sont quasiment incompressibles. L'**état fluide** caractérise une matière qui peut s'écouler, soit un liquide soit un gaz.

□ **Quels sont les paramètres permettant de définir l'état macroscopique du système ?**

L'expérience montre qu'il est nécessaire et suffisant de connaître un petit nombre de grandeurs pour décrire un système simple à l'échelle macroscopique : ces grandeurs sont appelées **paramètres d'état du système**.

**Définition : Grandeurs extensives et intensives**

- Une grandeur **extensive** est une grandeur additive liée aux dimensions du système et proportionnelle à la quantité de matière du système (masse, volume, énergie, etc.).
- Une grandeur **intensive** est définie en chaque point du système; elle est indépendante de la quantité de matière du système (pression, température, masse volumique, concentration, etc.).



▮ Le rapport de deux grandeurs extensives est une grandeur intensive.

**Définition : Équilibre macroscopique d'un système**

Un système est dit en équilibre macroscopique si, à la fois :

- tous ses paramètres d'état sont constants au cours du temps ;
- il n'échange ni énergie ni matière avec l'extérieur à l'échelle macroscopique.

À l'échelle microscopique, les particules d'un système à l'équilibre sont en permanence en mouvement (agitation moléculaire). Bien que les échanges avec l'extérieur soient nuls à l'échelle macroscopique, il peut y avoir des échanges à l'échelle microscopique, lorsque ceux-ci sont permis par les conditions aux frontières.

**Définition : Équation d'état**

L'équation d'état d'un système en équilibre macroscopique est l'équation reliant ses différents paramètres d'état.

Par exemple, un système constitué d'un gaz parfait en équilibre vérifie l'équation d'état  $PV = nRT$  où  $V$  est son volume en  $\text{m}^3$ ,  $P$  la pression en Pa,  $T$  la température en K,  $n$  la quantité de matière en mol et  $R$  la constante des gaz parfaits.

**■ 2 Changement d'état**

Reprenons notre contexte et imaginons qu'un montagnard chauffe un bloc de glace pour obtenir son eau de cuisson et la porter ensuite à ébullition.

Nous avons réalisé l'expérience présentée sur la figure 16.1, dans laquelle une masse de 35 g de glace pilée est chauffée à la pression atmosphérique. La colonne réfrigérante provoque la condensation de la vapeur d'eau qui s'échappe du ballon. L'eau contenue dans le ballon constitue donc pratiquement un système fermé à la pression  $P = 1,0 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

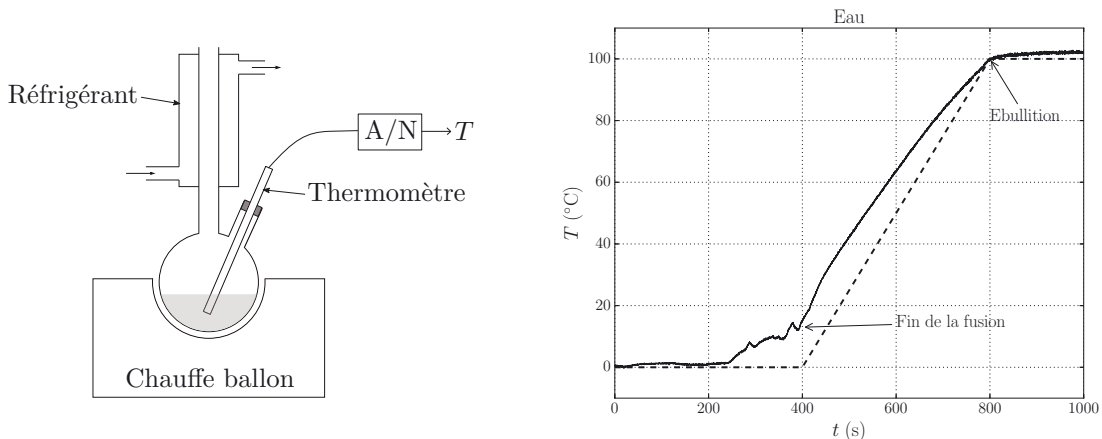


Figure 16.1. Expérience permettant d'obtenir la courbe d'évolution temporelle de la température lors d'un chauffage à puissance constante.

Pendant une grande partie de la fusion ( $t < 200 \text{ s}$ ), la température de l'eau reste égale à  $0 \text{ °C}$ . Lorsqu'elle est en ébullition ( $t > 800 \text{ s}$ ), sa température reste égale à  $100 \text{ °C}$ . Dans le cas idéal où le système resterait en permanence très proche de l'équilibre pendant les changements d'état, on

aurait la courbe en pointillé caractérisée par une température constante pendant ces changements d'état. **À pression constante, un changement d'état d'un corps pur au cours duquel le système reste très proche de l'équilibre se fait à une température constante**, appelée température de changement d'état. Dans cette expérience, pendant le changement d'état, une énergie est échangée avec l'extérieur sous forme de transfert thermique.

**La température de changement d'état d'un corps pur dépend de la pression.** Un diagramme pression-température d'un corps pur permet de représenter la pression en fonction de la température de changement d'état. Ce diagramme est aussi appelé **diagramme de phase du corps pur**. Chaque domaine délimité par les courbes correspond à un état physique. Le diagramme de phase de l'eau est représenté sur la figure 16.2.

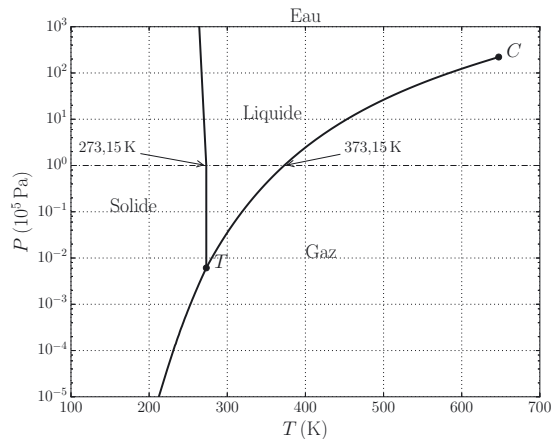


Figure 16.2. Diagramme de phase de l'eau.

#### Définition : Point triple et point critique

- Le point triple est le point du diagramme de phase ( $P, T$ ) où les phases solide, liquide et gaz coexistent **à l'équilibre**.
- Le point critique  $C$  est le point du diagramme de phase au delà duquel le changement d'état liquide/gaz n'est plus observable. On parle alors de fluide hypercritique ou supercritique.

#### Méthode 16.2 : Positionner les phases dans un diagramme ( $P, T$ )

- En partant d'une faible température et d'une pression supérieure à la pression du point triple, une élévation progressive de température à pression constante fait parcourir successivement les domaines d'équilibre des phases solide, liquide puis gazeuse.
- Pour un système constitué de deux phases en équilibre, le point représentatif de son état est sur la courbe de coexistence de ces deux phases. Pour un tel système, la valeur de la pression détermine celle de la température.

➔ Exercice (16.3)



Les pentes des courbes de changement d'état des corps purs usuels sont positives mais celle du changement d'état solide-liquide de l'eau est négative.

### Définition : Pression de vapeur saturante

Pour une température donnée, la pression de vapeur saturante d'un corps pur est la pression d'équilibre entre une phase condensée, liquide ou solide et la phase gazeuse.

Par exemple, la pression de vapeur saturante de l'eau liquide à 300 K est 0,035 bar.

### Retour au contexte

La pression dans l'eau est égale à celle de l'atmosphère la surmontant (équilibre mécanique des phases liquide et gazeuse). L'ébullition est un changement d'état qui se produit à l'intérieur de l'eau, sous forme de bulles. Il se déclenche lorsque sa température est égale à la température de changement d'état à la pression considérée. Par exemple, pour  $P = 1,0 \cdot 10^5$  Pa, la température d'ébullition est  $T = 100$  °C. En altitude, la pression est plus faible qu'au niveau de la mer. À 2000 m elle est d'environ  $0,8 \cdot 10^5$  Pa. D'après le diagramme de phase de l'eau, sa température d'ébullition est alors de 366 K, soit 93 °C. Une cuisson à cette altitude dans une eau en ébullition se fait donc à une température moins élevée qu'à une pression égale à  $1,0 \cdot 10^5$  Pa, ce qui implique un temps de cuisson plus long. Inversement, la température d'ébullition est plus élevée lorsque la pression est plus importante (principe de la cocotte minute).

□ Dans un équilibre liquide-vapeur d'un corps pur, comment connaître la masse des phases en présence ?

Pour répondre à cette question, on utilise le **diagramme de Clapeyron** du corps pur qui représente, à l'équilibre, sa pression en fonction de son volume massique.

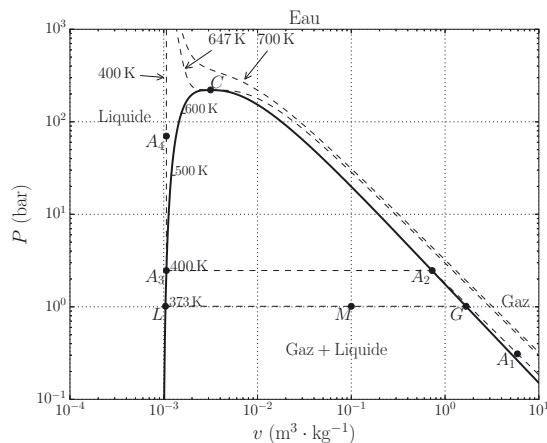


Figure 16.3. Diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) de l'eau.

Sur ce diagramme on distingue trois domaines : celui correspondant à la phase liquide (à gauche), celui correspondant à la phase gazeuse, à droite et celui correspondant aux équilibres entre les deux phases, liquide et gazeuse. Ces domaines sont séparés par les courbes de saturation : courbe d'ébullition et courbe de rosée.

**Définition : Courbes de saturation**

- **Courbe d'ébullition** : elle sépare le domaine du liquide de celui des équilibres liquide-gaz. C'est le lieu des points représentant les états de liquide saturant c'est-à-dire d'équilibres diphasés entre 1 kg de corps pur sous forme liquide et une trace de gaz.
- **Courbe de rosée** : elle sépare le domaine du gaz de celui des équilibres liquide-gaz. C'est le lieu des points représentant des états de vapeur saturante c'est-à-dire d'équilibres diphasés entre 1 kg de corps pur sous forme vapeur et une trace de liquide.

**Méthode 16.3 : Positionner les phases dans le diagramme de Clapeyron**

À partir d'un point  $A_1$  dans la phase gazeuse, on parcourt l'isotherme passant par ce point en réduisant le volume massique à température constante (isotherme).

- Au point  $A_2$ , une première goutte de liquide apparaît (**vapeur saturante**). Le point  $A_2$  appartient à la **courbe de rosée**.
- De  $A_2$  à  $A_3$  la pression reste constante, on parcourt un **palier de changement d'état**. Le système est diphasé et les phases liquide et gazeuse sont en équilibre.
- Au point  $A_3$  la dernière bulle de gaz disparaît (**liquide saturant**). Le point  $A_3$  appartient à la **courbe d'ébullition**.
- De  $A_3$  à  $A_4$ , le volume ne varie quasiment plus, le système est liquide et incompressible.

➔ Exercice (16.4)

Les courbes d'ébullition et de rosée se rejoignent au point critique (point  $C$ ). Entre la courbe d'ébullition et celle de rosée, la composition du système peut être obtenue à l'aide du **théorème des moments**.

Soit  $M$  un point du diagramme de Clapeyron appartenant au domaine des équilibres diphasés. Traçons le palier de changement d'état  $LG$  passant par ce point. Les points  $L$  et  $G$  correspondent respectivement au liquide saturant, de volume massique  $v_\ell$  et au gaz saturant, de volume massique  $v_g$ . Le volume étant un paramètre d'état extensif :  $V_M = V_g + V_\ell = m_g v_g + m_\ell v_\ell$ . En divisant par la masse du système :  $v_M = \frac{m_g}{m} v_g + \frac{m_\ell}{m} v_\ell$ , puis en introduisant le titre massique en gaz ( $x = \frac{m_g}{m}$ ) :  $v_M = x v_g + (1 - x) v_\ell$ . Nous en déduisons finalement  $x = \frac{v_M - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{LM}{LG}$ . Cette expression constitue le théorème des moments.

**Méthode 16.4 : Déterminer la composition d'un système diphasé**

Soit  $M$  un point du diagramme de Clapeyron appartenant au domaine des équilibres diphasés, d'abscisse  $v_M$ .

- Tracer le palier de changement d'état passant par  $M$  et déterminer ses extrémités  $L$  et  $G$  appartenant respectivement aux courbes d'ébullition et de rosée.
- Introduire le titre massique  $x$  en gaz dans l'état représenté par le point  $M$ .
- Écrire le théorème des moments :  $x = \frac{v_M - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{LM}{LG}$ .

➔ Exercice (16.5)



Le raisonnement est transposable à tout paramètre d'état extensif.

### ■ 3 Système gazeux

On s'intéresse dans cette partie à la phase gazeuse d'un corps pur, caractérisée par une densité moléculaire beaucoup plus faible qu'une phase condensée. Les molécules ont une taille finie (de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-10}$  m), sont animées de mouvements complexes de vibrations et de rotations et interagissent entre elles par l'intermédiaire de forces à distances.

Lorsque la densité moléculaire est suffisamment faible, on peut utiliser le **modèle du gaz parfait**.

#### Définition : Modèle et équation d'état du gaz parfait

Le modèle du gaz parfait est défini à partir de deux hypothèses :

- les molécules sont supposées ponctuelles ;
- les forces d'interaction entre les molécules sont négligées.

L'équation d'état d'un gaz parfait s'écrit  $PV = nRT$  où  $P$  est la pression (Pa),  $V$  le volume ( $\text{m}^3$ ),  $T$  la température (K),  $n$  la quantité de matière (mol) et  $R$  la constante des gaz parfaits ( $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ).



Ces hypothèses sont vérifiées lorsque la distance entre deux molécules du gaz est grande devant la taille des molécules et devant la portée de la force d'interaction.

#### □ Quand peut-on utiliser le modèle du gaz parfait ?

Pour savoir si l'on peut utiliser le modèle du gaz parfait, on utilise le diagramme d'Amagat qui représente le produit  $PV_m$  en fonction de  $P$ . Pour un gaz parfait le produit  $PV_m = RT$  est indépendant de  $P$  et on doit donc obtenir pour différentes températures des droites horizontales.

#### Méthode 16.5 : Analyser les diagrammes d'Amagat et de Clapeyron

- Dans le diagramme d'Amagat ( $PV_m, P$ ) : identifier la plage de pression où la courbe est horizontale. Le modèle du gaz parfait est utilisable dans cette plage.
- Dans le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) : comparer une courbe isotherme réelle avec l'hyperbole  $P = \frac{RT}{Mv}$  où  $M$  est la masse molaire et  $v$  le volume massique.

Dans les deux diagrammes, l'équation d'état du gaz réel diffère de celle du gaz parfait dans les zones de faibles volumes et de fortes pressions. Dans ces zones on ne peut plus négliger la distance intermoléculaire devant la portée des forces entre molécules.

➔ Exercice (16.6)

Le diagramme d'Amagat du diazote et du dioxygène, ainsi que le diagramme de Clapeyron du diazote sont présentés sur la figure 16.4. Pour des pressions inférieures à 10 bar ces deux gaz sont très proches du gaz parfait. Pour des pressions supérieures à 10 bar l'écart entre le gaz réel et le gaz parfait est bien visible. L'écart est d'autant plus grand que la température est faible et la pression élevée.



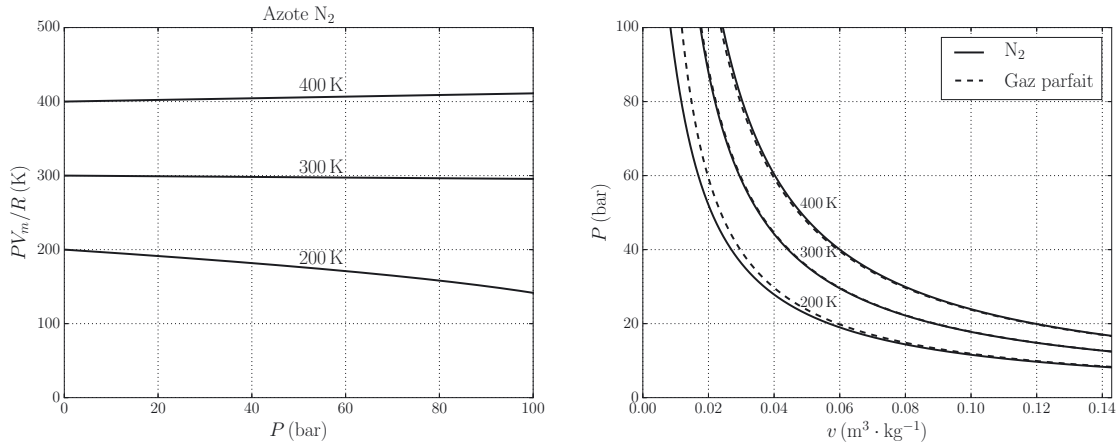


Figure 16.4. Diagrammes d'Amagat et de Clapeyron du diazote (mise en évidence des limites du modèle du gaz parfait).

#### □ Comment déterminer une pression à partir d'un équilibre mécanique ?

La pression qu'exerce un fluide sur une paroi est définie comme le rapport de la force qu'exerce le fluide divisée par l'aire de la paroi. À l'échelle microscopique, la force de pression est causée par les collisions entre les molécules du fluide et la paroi.

Supposons que l'on chauffe de l'eau contenue dans une casserole de section  $S$  recouverte par un couvercle de masse  $m$ . Au bout d'un certain temps, on constate que le couvercle se soulève. Supposons qu'il soit à l'équilibre mécanique. En utilisant un axe  $(Oz)$  ascendant, les forces exercées sur le couvercle sont :

- le poids du couvercle :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  ;
- la force de pression exercée par l'air extérieur à la pression  $P_0$  :  $\vec{F}_{ext} = -P_0S\vec{u}_z$  ;
- la force de pression exercée par l'air intérieur et la vapeur d'eau à la pression  $P$  présents à l'intérieur de la casserole :  $\vec{F}_{int} = PS\vec{u}_z$ .

L'équilibre mécanique du couvercle ( $\vec{P} + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int} = \vec{0}$ ) se traduit par l'équation :

$$P = P_0 + \frac{mg}{S}$$

Avec  $m = 0,20 \text{ kg}$ ,  $S = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  et  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , on obtient  $mg/S = 98 \text{ Pa} \simeq 10^{-3} \text{ bar}$ . Comme  $P_0 \simeq 1,0 \text{ bar}$ , l'influence du poids du couvercle sur la pression est négligeable et  $P \simeq P_0$ . Pour que la pression dans la casserole reste égale à 1 bar malgré la vaporisation de l'eau, il faut que la vapeur puisse s'échapper par les bords du couvercle.

Dans une cocotte minute, la vapeur ne peut s'échapper que par une petite soupape de sécurité au débit insuffisant pour éviter une augmentation de la pression (elle ne fait que la limiter pour des raisons de sécurité) qui engendre une augmentation de la température de cuisson à ébullition.

## ■ 4 Énergie interne

### Définition : Énergie interne

L'énergie interne  $U$  d'un système est l'énergie microscopique des molécules contenues dans le système. Elle peut être la somme de différentes contributions.

- Énergie cinétique microscopique de translation des molécules.
- Énergie cinétique de rotation des molécules sur elles-mêmes.
- Énergie cinétique de vibration des molécules.
- Énergie potentielle des interactions intermoléculaires.
- Énergie des liaisons chimiques.

En général l'énergie interne d'un corps pur dépend de deux variables d'état, par exemple la température et le volume.

### □ Que vaut l'énergie interne d'un gaz parfait ?

Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique  $U = \frac{3}{2}nRT$ . Dans le cas général, on doit ajouter les contributions liées aux vibrations et rotations :  $U \geq \frac{3}{2}nRT$ .



■ L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.

### □ Que dire de l'énergie interne d'une phase condensée indilatable et incompressible ?

Une phase condensée est qualifiée d'incompressible lorsque son volume  $V$  peut être considéré comme indépendant de la pression et d'indilatable lorsqu'il peut être considéré comme indépendant de la température. Pour une phase condensée incompressible et indilatable, le volume peut donc être considéré comme constant.

L'état d'un corps pur peut être décrit par trois paramètres  $(P, V, T)$ . Ces trois paramètres étant liés par une équation d'état, seuls deux sont indépendants. L'énergie interne d'un tel système peut alors être considérée comme fonction de deux paramètres, par exemple  $T$  et  $V$ .

Pour une phase condensée indilatable et incompressible,  $V$  pouvant être considéré comme constant, **l'énergie interne  $U$  peut être considérée comme fonction uniquement de  $T$ .**

### □ Comment déterminer l'énergie nécessaire pour faire évoluer la température d'un système ?

Nous considérerons uniquement les cas où l'énergie interne du système ne dépend que de sa température (gaz parfait ou phase condensée indilatable et incompressible).

### Définition : Capacité thermique à volume constant

La capacité thermique à volume constant d'un système dont l'énergie interne ne dépend que de la température est définie par :  $C_V = \frac{dU}{dT}$ . Elle se mesure en  $J \cdot K^{-1}$ .

$$C_V = \frac{dU}{dT} \implies \int_{T_1}^{T_2} C_V dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dU}{dT} dT \implies U(T_2) - U(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT$$

Dans un domaine où  $C_V$  peut être considéré constant :  $U(T_2) - U(T_1) = C_V(T_2 - T_1)$ .



On définit également la capacité thermique molaire à volume constant  $C_{V_m}$  et la capacité thermique massique à volume constant  $c_v$  par  $C_V = nC_{V_m} = mc_v$  où  $n$  et  $m$  sont le nombre de moles et la masse du système.

#### □ Comment évolue la capacité thermique à volume constant des gaz ?

La figure 16.5 présente l'évolution de  $C_{V_m}$  en fonction de la température de différents gaz.

- Pour un gaz parfait monoatomique comme l'Argon on constate que  $C_V = \frac{3}{2}nR$  sur la plage de température étudiée.
- Pour des gaz diatomiques :  $C_V \approx \frac{5}{2}nR$ .
- De façon générale, plus la structure des molécules est complexe, plus les contributions des rotations et des vibrations interviennent dans l'expression de l'énergie interne du gaz et plus la capacité thermique à volume constant augmente avec la température.

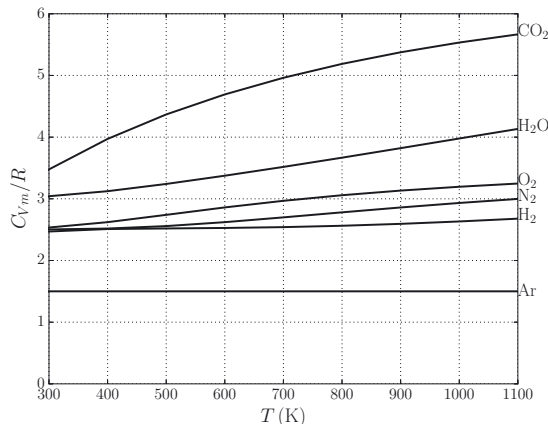


Figure 16.5. Capacités thermiques molaires à volume constant de quelques gaz.

## Interro de cours

- Parmi les grandeurs suivantes indiquer la ou les grandeurs extensives.
  - L'énergie cinétique.
  - Le vecteur quantité de mouvement.
  - La température.
  - Le volume massique.
- On considère le diagramme pression-température de l'eau de la figure 16.2. Indiquer les affirmations justes.
  - Si on ajoute un glaçon d'eau solide dans un système comprenant de l'eau liquide et de la vapeur d'eau, la pression et la température correspondent au point triple.
  - Pour une température  $T > T_C$  et pour une pression  $P > P_C$ , on parle de fluide hypercritique.
  - Tous les corps purs ont un diagramme pression-température semblable à celui de l'eau.
  - La pression de vapeur saturante augmente lorsque la température augmente.
- On considère le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) de l'eau de la figure 16.3 et on s'intéresse plus particulièrement aux points d'équilibre suivants :  $B$  ( $P_B = 1 \text{ bar}$ ,  $v_B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ) et  $D$  ( $P_D = 1 \text{ bar}$ ,  $v_D = 0,5 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ). Indiquer les affirmations justes.
  - Pour des raisons de sécurité, il est préférable de stocker de l'eau dans un récipient dont le volume est tel que  $v = v_B$  au lieu de  $v = v_D$ .
  - La proportion de liquide au point  $B$  est plus importante qu'au point  $D$ .
  - En partant du point  $D$  et en augmentant progressivement le volume massique, on constate l'apparition de la première bulle de gaz.
- Indiquer les affirmations justes.
  - Dans un gaz à température constante, la vitesse des particules est d'autant plus grande que leur masse est grande.
  - L'ordre de grandeur de la vitesse d'une molécule de diazote à 300 K sous une pression de 1 bar est de  $5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - À une température donnée, toutes les particules d'un même gaz ont la même vitesse.
- Indiquer les affirmations justes.
  - L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique ne prend en compte que l'énergie cinétique microscopique de translation des atomes constituant le gaz.
  - L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température.
  - L'énergie interne d'un gaz parfait polyatomique tient compte de l'énergie potentielle d'interaction intermoléculaire du gaz.
  - Plus la capacité thermique d'un système est importante, plus sa température évolue rapidement.

# Exercices

## Exercice 16.1 L'argent part en fumée ?

### ➔ Méthode (16.1)

C'est un jour de chance pour Jo le chasseur de vampires : il vient de trouver sur la route deux belles pièces identiques en métal blanc, de rayon  $R = 1,5$  cm et d'épaisseur  $e = 1,5$  mm. Ne sachant pas de quel métal il s'agit et hésitant entre l'aluminium, l'argent ou le platine, Jo décide de peser une des pièces et trouve une masse  $m = 11$  g. Reentrant dans sa cabane, il décide de fondre cette pièce pour en faire une balle destinée à sa chasse aux vampires. Il la chauffe jusqu'à la température  $T_1 = 1,25 \cdot 10^3$  °C et coule aussitôt le métal liquide dans un moule à balle, formé par une partie cylindrique de 9 mm de diamètre et de 20 mm de hauteur. Il décide alors de réitérer l'expérience avec la seconde pièce, mais, dérangé au cours de l'opération, s'absente en laissant lentement refroidir le métal liquide. La température moyenne de la cabane est de 20 °C et son volume de 40 m<sup>3</sup>.

On considère les données du tableau ci-dessous :

Élément	M	$\rho$	$T_f$	$T_e$
Pt	195	21,5 à 20 °C	1768	3825
Ag	108	10,5 à 20 °C	961,8	2162
		9,05 à 1250 °C		
Al	27	2,7	660	2519

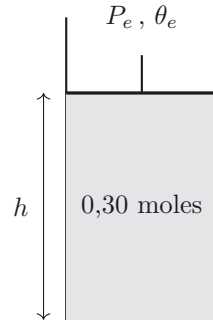
M représente la masse molaire ( $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ),  $\rho$  la masse volumique à température ambiante ( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ),  $T_f$  la température de fusion (°C) et  $T_e$  la température d'ébullition (°C) sous  $P = 1$  bar. On donne également la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et le nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

1. De quel métal est faite la pièce ?
2. Combien y a-t-il de moles de métal dans la pièce ? Combien d'atomes métalliques ?
3. Combien de balles Jo pourra-t-il couler ?
4. Sachant que la pression de vapeur saturante de l'argent liquide est inférieure à  $1,0 \cdot 10^{-6}$  Pa à 20 °C et qu'elle vaut environ  $10^{-2}$  Pa à  $1,0 \cdot 10^3$  °C, estimer la quantité de matière en moles d'argent susceptible d'être vaporisée dans la cabane. L'argent part-il en fumée ?

**Exercice 16.2 Gaz comprimé**

➔ Méthode (16.1)

On considère  $n = 0,30$  moles d'un gaz parfait diatomique enfermé à l'intérieur d'un récipient cylindrique vertical, de base circulaire de rayon  $a = 5,0$  cm, de grande hauteur, fermé sur sa partie supérieure par un piston de masse négligeable supposé se mouvoir verticalement sans frottement (voir figure ci-contre). Les parois du cylindre sont perméables aux transferts thermiques et on suppose que la température du gaz à l'équilibre thermodynamique est égale à la température extérieure  $\theta_e = 20^\circ\text{C}$ . Le piston est surmonté d'air à la pression  $P_e = 1,0$  bar.



1. Combien y a-t-il de particules de gaz enfermées dans le récipient ?
2. Quelle est la pression dans le gaz à l'équilibre ? Déterminer la hauteur  $h_0$  occupée par le gaz dans le cylindre.
3. Déterminer l'énergie interne du gaz enfermé dans le cylindre.
4. On place un corps de masse  $m = 10$  kg sur le piston. Déterminer la hauteur  $h_f$  occupée par le gaz dans le cylindre. L'énergie interne a-t-elle varié ?

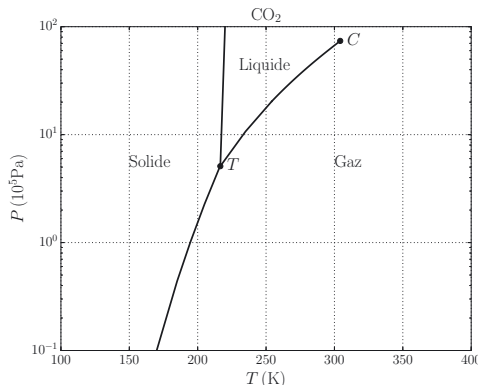
Données : accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**Exercice 16.3 Diagramme ( $P, T$ ) et changement d'état**

➔ Méthode (16.2)

La figure ci-contre montre le diagramme ( $P, T$ ) du dioxyde de carbone.

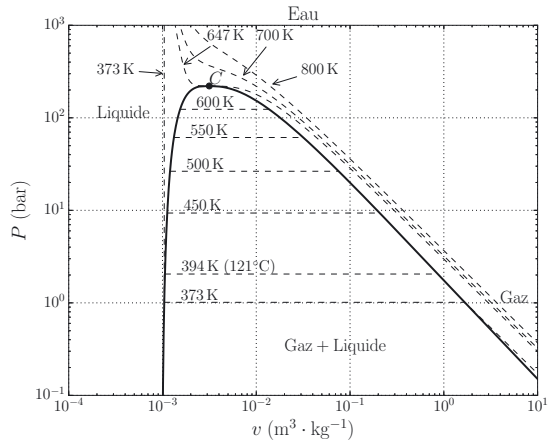
1. Rappeler les caractéristiques des points  $T$  et  $C$ .
2. On se place à la pression  $P_i = 1,0$  bar et dans l'état  $\text{CO}_2$  gazeux. Donner la plage de température correspondant à ces contraintes.
3. À partir de quelle température  $T_1$  obtiendra-t-on par compression à température fixée du  $\text{CO}_2$  liquide ? Que se passerait-il si la température initiale était supérieure à  $T_C$ , température du point  $C$  ?
4. On se place dans les conditions initiales suivantes :  $P_i = 1,0$  bar et  $T_i = 200$  K. Décrire les phénomènes observés lors d'un refroidissement à pression fixée, amenant le  $\text{CO}_2$  à la température finale  $T_f = 150$  K.
5. Tracer l'allure du graphe qui représente la température du  $\text{CO}_2$  en fonction du temps, lors de ce refroidissement à pression constante.



### Exercice 16.4 Chauffage isobare

➔ Méthode (16.3)

On considère une masse  $m = 0,50$  kg d'eau sous forme de liquide saturant, enfermée dans un cylindre vertical fermé à son extrémité supérieur par un piston sans masse, pouvant coulisser le long des parois du cylindre sans frottement. La pression extérieure  $P_e$  est constante, égale à 2 bar, et la surface de base du cylindre de  $5,0$  cm<sup>2</sup>. La figure ci-contre montre le diagramme de Clapeyron de l'eau, de masse molaire  $M_{eau} = 18$  g · mol<sup>-1</sup>.



La température d'équilibre liquide-vapeur de l'eau sous 2 bar est  $T_0 = 121$  °C.

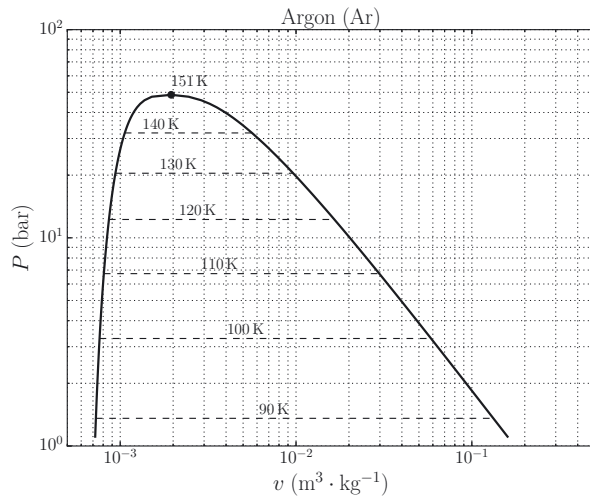
1. Quel est le volume occupé par la masse  $m$  d'eau ? Placer le point  $I$  correspondant à l'état initial sur le diagramme de Clapeyron.
2. On chauffe ensuite lentement le contenu du récipient, en maintenant la pression extérieure constante, jusqu'à ce que le volume occupé par le contenu du récipient soit de  $0,9$  m<sup>3</sup>. Placer le point  $F$  correspondant à l'état final sur le graphe et estimer l'ordre de grandeur de la température finale atteinte.
3. Dessiner l'allure du diagramme  $(P, T)$  de l'eau et y placer les points  $I$  et  $F$ .

### Exercice 16.5 Règle des moments

➔ Méthode (16.4)

On considère une masse  $m = 1,0$  kg d'argon enfermée dans une enceinte indéformable de volume  $V_0 = 1,0 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup>, à la température  $T_i = 90$  K. La figure ci-contre montre le diagramme de Clapeyron de l'argon, de masse molaire  $M_{Ar} = 40$  g · mol<sup>-1</sup>.

1. Indiquer sur ce diagramme les zones correspondant à l'argon liquide, gazeux, et diphasé.
2. Compléter ce diagramme en traçant l'allure des isothermes  $T = 90\text{ K}$  et  $T = 120\text{ K}$ .
3. Placer sur le graphe le point  $I$  correspondant aux conditions de température et de volume données ci-dessus. En déduire la fraction massique  $x_{l,I}$  en argon liquide présent initialement dans l'enceinte, ainsi que la pression de vapeur saturante de l'argon à  $90\text{ K}$ .

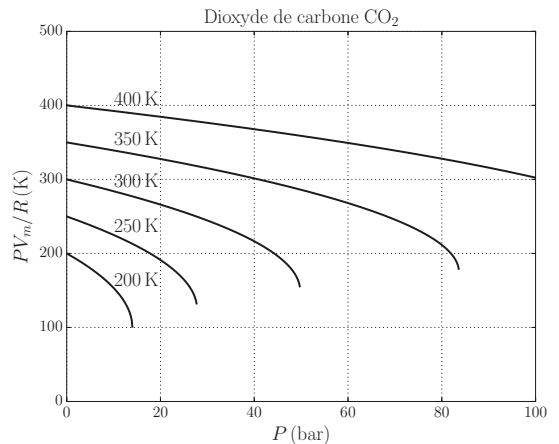


4. On chauffe à présent l'enceinte jusqu'à la température de  $120\text{ K}$ . Indiquer sur le graphe la position du point final  $F$ , et le chemin suivi pour aller de  $I$  à  $F$ . Déterminer la fraction massique  $x_{l,F}$  en argon liquide présent dans l'enceinte dans l'état final, ainsi que la valeur de la pression de vapeur saturante de l'argon à  $120\text{ K}$ . Le mélange s'est-il appauvri ou enrichi en liquide ?
5. Déduire du graphe la température minimale à imposer à l'enceinte pour que l'argon soit entièrement sous forme gazeuse. À quelle pression cela correspond-il ?

**Exercice 16.6 Dur d'être parfait!**

➔ Méthode (16.5)

Un récipient cylindrique vertical, de base circulaire de rayon  $R = 5,0\text{ cm}$ , de grande hauteur, fermé sur sa partie supérieure par un piston de masse négligeable, contient une mole de  $\text{CO}_2$ . Les parois du cylindre sont perméables aux transferts thermiques et on supposera que la température du gaz à l'équilibre thermodynamique est égale à la température extérieure  $T_e$ . En poussant sur le piston, on comprime le gaz contenu dans le cylindre. On notera  $P$  la pression du gaz et  $V_m$  le volume occupé par la mole de  $\text{CO}_2$  (volume molaire). En notant pour chaque pression  $P$  la valeur de  $V_m$ , et en faisant varier la température, on peut tracer le diagramme d'Amagat ci-contre.



1. Le dioxyde de carbone se comporte-t-il comme un gaz parfait ? On justifiera la réponse et on commentera l'effet de la température et de la pression.
2. On se place à la température de  $300\text{ K}$ . En exploitant le schéma ci-dessus, tracer le graphe d'évolution de  $V_m$  avec  $1/P$ , pour  $P < 40\text{ bar}$ . Sur le même graphe, représenter l'évolution du volume molaire d'un gaz parfait à la même température. Commenter.

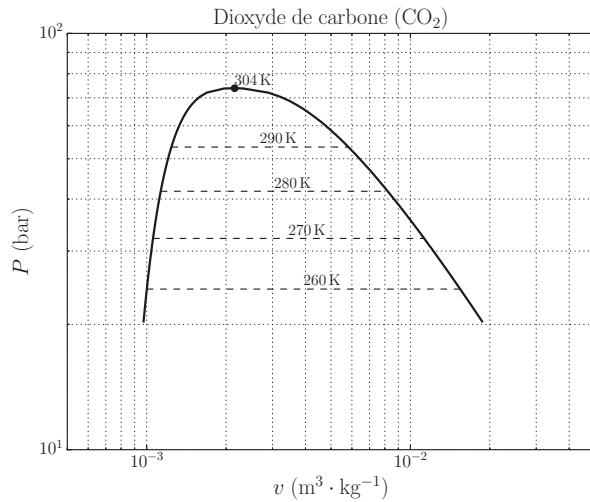


On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 16.7 Stockage sous contrôle

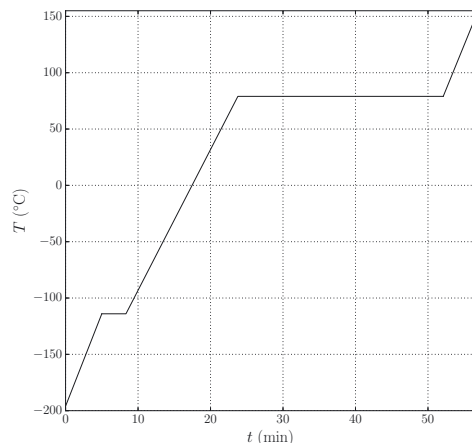
On cherche à stocker avec un maximum de sûreté un kilogramme de dioxyde de carbone sous forme d'un mélange liquide-vapeur, enfermé dans une enceinte indéformable de volume  $V_0$ , à la température  $T_i = 260 \text{ K}$ . Le récipient contenant le fluide est prévu pour résister jusqu'à une pression de 50 bar. La figure suivante montre le diagramme de Clapeyron du dioxyde de carbone, de masse molaire  $M_{\text{CO}_2} = 44 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Indiquer sur ce diagramme les zones correspondant au dioxyde de carbone liquide, gazeux, et diphasé.
2. Compléter ce diagramme en traçant l'allure des isothermes  $T = 260 \text{ K}$  et  $T = 290 \text{ K}$ .
3. Déduire de la lecture de ce diagramme la valeur de la pression de vapeur saturante à la température  $T_i$ , ainsi que les volumes massiques du liquide saturant et de la vapeur saturante à cette température.
4. Le récipient subit une élévation accidentelle de température l'amenant à  $290 \text{ K}$ . Comment choisir  $V_0$  pour que le récipient n'explose pas ? Dans quelle zone faut-il absolument éviter de se placer ?



### Exercice 16.8 Rouler vert

Alain est un homme prévoyant : croyant en la chimie verte et en l'usage de biocarburant et ayant accès à de l'azote liquide et à du bioéthanol, il a congelé et stocké ce dernier sous forme solide. Il décide cependant un jour d'utiliser une partie de son biocarburant et le décongèle en utilisant une puissance de chauffe constante de  $500 \text{ W}$ . La masse de l'éthanol utilisé est  $m = 1,0 \text{ kg}$ . Comme c'est un homme curieux, il profite de l'occasion pour suivre l'évolution de la température du kilogramme d'éthanol au cours de son réchauffement à la pression atmosphérique ambiante. Il reporte sur un graphe l'évolution de la température avec le temps et obtient la courbe ci-contre.



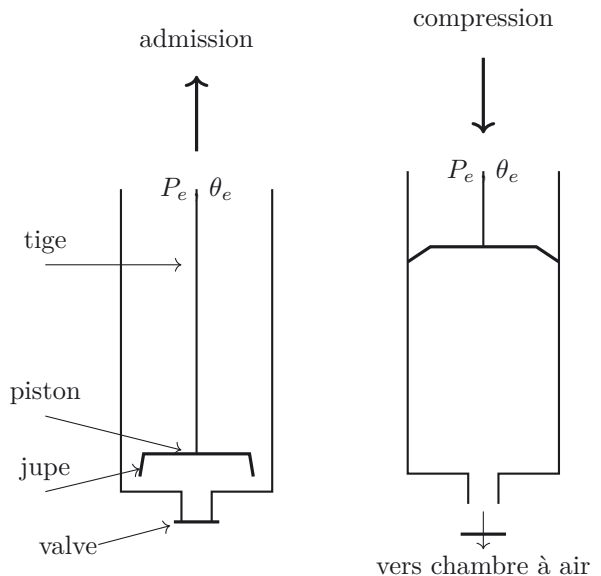
1. Expliquer la présence de paliers au sein de cette courbe. Quelles caractéristiques de l'éthanol peut-on en tirer ?
2. Estimer à partir de cette courbe la quantité d'énergie à fournir pour faire fondre le kilogramme d'éthanol à température fixée, puis le vaporiser de façon isotherme. Commenter.
3. Déduire du graphe les valeurs des capacités thermiques massiques à pression constante de l'éthanol liquide et gazeux.

On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 16.9 Coup de Pompe

Michel est un cycliste chevronné, qui sillonne régulièrement les petites routes de campagne. Un beau matin, voulant prendre son vélo pour faire son tour hebdomadaire, il se rend compte que sa roue avant est crevée ! Michel la répare et s'apprête à la gonfler. Pour cela, il utilise une pompe à vélo, dont le schéma est représenté ci-contre. Le fonctionnement de cette dernière comprend deux étapes :

- phase d'admission : lorsqu'on tire sur la poignée, le piston remonte, créant une légère dépression sous le piston : la valve se ferme, la jupe s'abaisse, ce qui permet à l'air extérieur à la pression atmosphérique  $P_e = 1,0 \text{ bar}$  de venir remplir le corps de pompe, de surface  $S = 3,0 \text{ cm}^2$  et de hauteur  $L = 10 \text{ cm}$  ;
- phase de compression : on pousse le piston vers le bas, ce qui crée une légère surpression sous le piston : la jupe se plaque contre les parois du corps de pompe. Le piston continuant sa descente, l'air enfermé est comprimé, jusqu'à ce qu'il atteigne la pression nécessaire à l'ouverture de la valve, ce qui permet à l'air d'être chassé dans la chambre à air.



Les pneus de Michel ont un volume interne de 1,0 L, qu'on supposera constant, et il cherche à les gonfler à une pression de  $P_f = 5,0 \text{ bar}$ . L'air sera considéré comme étant un gaz parfait.

1. Quelle est la pression initiale de l'air dans le pneu avant qu'on le gonfle ? Quelle est la quantité en moles d'air,  $n_i$ , présente dans le pneu ? On supposera la température extérieure égale à  $20^\circ \text{C}$ .
2. Le système constitué du pneu relié à la pompe et de l'air qu'il contient est-il un système ouvert ? Un système fermé ?
3. Quel volume d'air est admis dans la phase d'admission ? À combien de moles d'air cela correspond-il ?
4. Combien de coups de pompe Michel devra-t-il effectuer avant d'arriver à la pression de 5 bar ? Pourquoi lui est-il de plus en plus difficile de pousser le piston ?

On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ainsi que la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

# Corrections

## Interro de cours

1. Réponses (a) et (b). La température est une grandeur intensive et le volume massique étant le rapport de deux grandeurs extensives, il est intensif.
2. L'affirmation (a) est fausse puisque le point triple correspond à un **équilibre** entre les trois phases. L'affirmation (c) est également fausse puisque pour la majorité des corps purs, la courbe représentant l'équilibre solide/liquide possède une pente positive alors qu'elle est négative dans le cas de l'eau. Les affirmations (b) et (d) sont vraies puisqu'en observant la courbe d'équilibre liquide-vapeur, la pression de changement d'état augmente avec la température. Réponses (b), (d).
3. L'affirmation (a) est fausse puisqu'une augmentation de température au niveau du point B entraînerait une forte augmentation de la pression, qui serait susceptible de faire exploser le récipient. Au point D, l'augmentation de la pression serait beaucoup plus limitée. L'affirmation (b) est vraie puisque l'application du théorème des moments nous dit que plus le point d'équilibre est proche de la courbe d'ébullition (où se trouve le liquide saturant), plus la masse de liquide est importante. La réponse (c) est fausse puisqu'en augmentant le volume massique, on se rapproche de la courbe de rosée où disparaît la dernière goutte de liquide. Réponse (b).
4. La vitesse quadratique moyenne s'écrit pour un gaz parfait :  $v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  ; la proposition (a) est donc fausse. En revanche, l'application numérique pour une molécule de diazote de masse molaire  $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  donne l'ordre de grandeur donné dans la proposition (b). Ces calculs nous donnent la vitesse quadratique moyenne, les particules n'ont pas toutes la même vitesse. Réponse (b).
5. L'affirmation (a) est juste puisque dans un gaz parfait, on néglige l'extension des molécules (pas de rotation) et les interactions intermoléculaires (pas d'énergie potentielle d'interaction). L'énergie cinétique microscopique d'un gaz parfait dépend de la température, ce qui implique la véracité de l'affirmation (b). Pour un gaz parfait polyatomique, l'énergie interne peut prendre en compte des mouvements de vibration ou de rotation mais en aucun cas d'énergie potentielle d'interaction (gaz parfait). Plus la capacité thermique d'un système est importante, plus il faut de l'énergie pour faire varier sa température. L'affirmation (d) est donc fausse. Réponses (a) et (b).

## Exercice 16.1

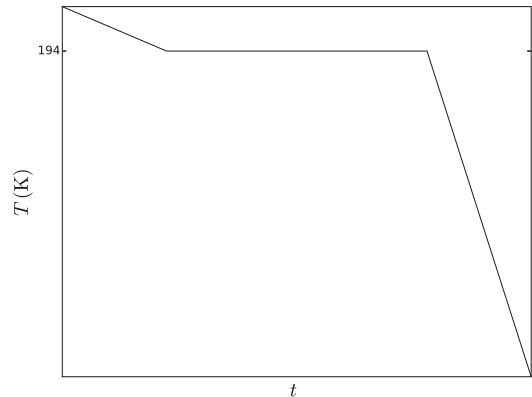
1. Le volume de la pièce est  $V = \pi R^2 e$  et sa masse volumique est donc  $\rho = \frac{m}{V} = 10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  : il s'agit bien de pièces en argent.
2. La masse d'une mole est  $M$ , il y a donc  $n = \frac{m}{M} = 0,10$  mole de métal dans la pièce, ce qui correspond à  $N = \mathcal{N}_A n = 6,1 \cdot 10^{22}$  atomes.
3. Calculons le volume  $V_l$  occupé par les deux balles fondues :  $V_l = \frac{2m}{\rho_{\text{liq}}} = 2,4 \text{ cm}^3$ . Or le volume d'une balle est  $2\pi(0,45)^2 = 1,3 \text{ cm}^3$ . Jo ne pourra couler qu'une balle.
4. En estimant qu'il s'établit un équilibre liquide-vapeur à la température  $T_1$ , la quantité d'argent (en mole) dans l'air de la cabane serait  $n_{Ag} = \frac{P_{\text{sat}}(T_1)V_c}{RT_1}$  où  $P_{\text{sat}}(T_1)$  est la pression de vapeur saturante à la température  $T_1$  et  $V_c$  le volume de la cabane. Numériquement :  $n_{Ag} \simeq 4 \cdot 10^{-5}$  mol, ce qui correspond à une masse d'argent de 4 mg. En réalité, l'argent sera redevenu solide avant qu'un équilibre liquide-vapeur n'ait le temps de s'établir : très peu d'argent est perdu dans l'opération.

**Exercice 16.2**

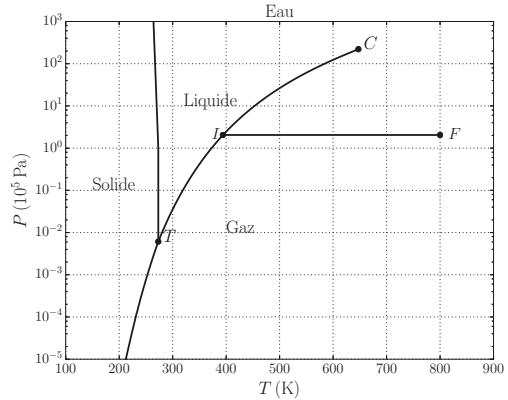
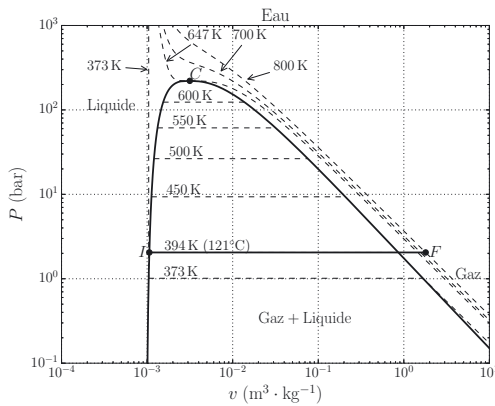
- Il y a  $n\mathcal{N}_A = 18 \cdot 10^{22}$  particules de gaz,  $\mathcal{N}_A$  étant la constante d'Avogadro.
  - À l'équilibre, la pression du gaz est égale à la pression extérieure. Comme le volume  $V$  occupé par le gaz parfait est  $V = \pi a^2 h_0$ , la hauteur  $h_0$  est  $h_0 = \frac{nRT_e}{\pi a^2 P_e} = 0,93$  m.
  - Pour  $n$  moles d'un gaz parfait diatomique à la température  $T_e$ , l'énergie interne s'écrit  $U = \frac{5}{2}nRT_e$ . Dans notre cas,  $U = 1,8$  kJ.
  - À l'équilibre, les forces exercées sur le piston se compensent. En notant  $P_f$  la pression du gaz :  $P_e \pi a^2 + mg = P_f \pi a^2$  d'où  $P_f = P_e + \frac{mg}{\pi a^2}$ . Par ailleurs, d'après la loi du gaz parfait,  $P_f = \frac{nRT_e}{\pi a^2 h_f}$ . Nous en déduisons donc  $h_f = \frac{nRT_e}{\pi a^2 \left(P_e + \frac{mg}{\pi a^2}\right)} = 0,83$  m.
- L'énergie interne du gaz parfait ne dépend que de sa température et n'a donc pas varié.

**Exercice 16.3**

- $T$  est le point triple : les trois phases liquide, solide et gaz y coexistent à l'équilibre dans des proportions quelconques.  $C$  correspond au point critique. C'est le point du diagramme où s'arrête la courbe d'équilibre liquide-gaz. Au delà de ce point, les phases liquide et gazeuse se confondent et le changement d'état liquide/gaz n'est plus observable.
- Le point correspondant à l'état gazeux se trouve sur l'isobare  $P = 1,0$  bar, à droite de la courbe d'équilibre solide-gaz, c'est-à-dire dans la plage de température  $T > 195$  K.
- La plus petite température  $T_1$  à partir de laquelle on peut obtenir du liquide par compression isotherme est la température du point triple  $T_1 = T_T = 217$  K. Si la température initiale est supérieure à  $T_C$ , le  $\text{CO}_2$  passe continûment de l'état gazeux à l'état liquide (sans discontinuité du volume massique).
- Nous observons le refroidissement du  $\text{CO}_2$  gazeux jusqu'à la température de 195 K. À cette température a lieu la condensation du  $\text{CO}_2$  (palier de changement de phase), puis le  $\text{CO}_2$  solide est refroidi jusqu'à la température  $T_f$ .
- L'allure du graphe représentant la température du  $\text{CO}_2$  en fonction du temps est représenté ci-contre.

**Exercice 16.4**

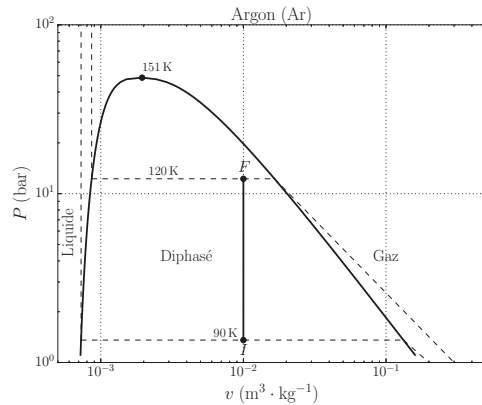
- Le volume massique du liquide saturant est de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  d'après le diagramme. Le volume occupé par la masse  $m$  d'eau est donc de l'ordre de 0,5 L. Le point  $I$  est placé sur le diagramme ci-dessous.



2. Par lecture du diagramme, nous trouvons une température de l'ordre de  $8 \cdot 10^2$  K.
3. L'allure du diagramme  $(P, T)$  est proposée ci-dessus.

**Exercice 16.5**

1. Les zones correspondant à l'argon liquide, gazeux et diphasé sont indiquées sur le diagramme ci-dessous.
2. L'allure des isothermes est tracée sur le diagramme ci-contre.
3. Le théorème des moments permet de calculer la fraction massique  $x_{l,I} = \frac{v_V - v_0}{v_V - v_L} = 0,93$  en argon liquide. La pression de vapeur saturante est la pression du palier soit  $P_s(90\text{ K}) \simeq 1,5$  bar.
4. Nous pouvons utiliser de nouveau le théorème des moments pour déterminer  $x_{l,F} \simeq 0,4$  : le mélange s'est appauvri en liquide. La pression du palier est la pression de vapeur saturante  $P_s(120\text{ K}) \simeq 12$  bar.



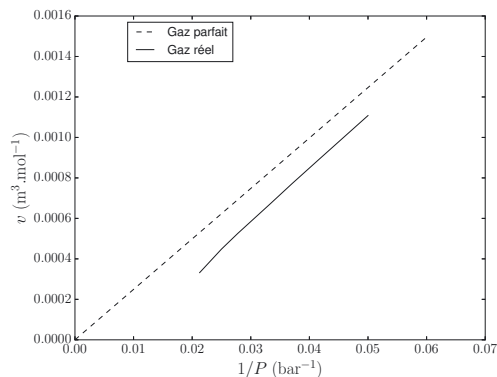
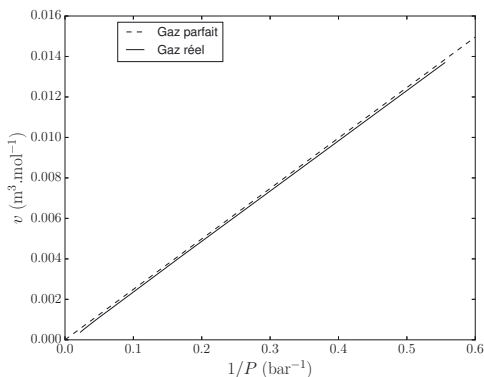
5. Pour le volume  $V_0$ , la courbe de saturation est atteinte pour une température d'environ 130 K. La pression de vapeur saturante est alors de l'ordre de 20 bar.

**Exercice 16.6**

1. Pour le gaz parfait,  $PV_m = RT$  et le diagramme d'Amagat est donc constitué de droites horizontales : le dioxyde de carbone ne se comporte pas comme un gaz parfait. Le comportement du gaz tend cependant vers celui d'un gaz parfait pour des hautes températures et de faibles pressions.
2. Nous relevons des valeurs sur le diagramme d'Amagat :

P en bar	1,8	6,0	15	20	24	27	30	36	40	44	47
$PV_m/R$ en K	297	292	275	267	258	251	243	228	216	200	188

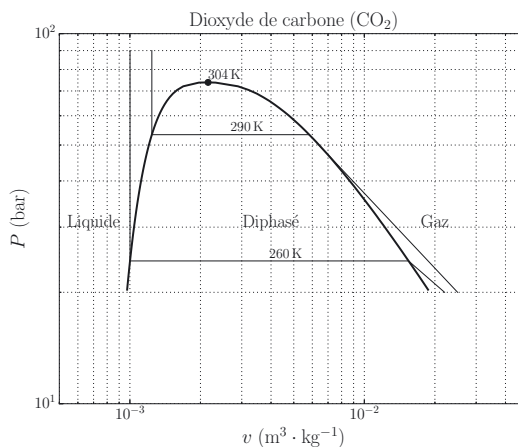
Il est alors simple de tracer  $V_m$  en fonction de  $1/P$  pour le gaz réel. Pour un gaz parfait :  $V_m = 300R/P$ .



L'écart n'est pas très important mais la figure de droite, qui se concentre sur les plus hautes pressions, montre que l'écart entre le comportement réel et le comportement du gaz parfait augmente lorsque la pression augmente. *A contrario*, le gaz réel se comporte comme un gaz parfait lorsque la pression est faible.

### Exercice 16.7

1. Les zones correspondant au dioxyde de carbone liquide, gazeux et diphasé sont indiquées sur le diagramme ci-dessous.
2. Les isothermes sont tracées sur la figure ci-dessus. Pour un gaz parfait, l'isotherme est une courbe  $PV = \text{cste}$ , soit une branche d'hyperbole.
3. La projection du palier sur l'axe des ordonnées donne la pression de vapeur saturante à  $T_i$ ,  $P_s(T_i) = 25 \text{ bar}$ . Le volume massique du liquide saturant se lit sur l'axe des ordonnées (extrémité gauche du palier) :  $v_L = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et le volume massique de la vapeur saturante  $v_V = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  à cette même température (extrémité droite du palier de changement d'état).
4. La pression de vapeur saturante est supérieure à 50 bar à 290 K : il faut choisir le volume  $V_0$  de façon à ce que le dioxyde de carbone se trouve à la fin sous forme de vapeur sèche, de pression inférieure à 50 bar, ce qui revient à imposer  $V_0 > 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Évidemment, il convient d'éviter que le volume soit inférieur au volume du liquide saturant. Dans ce cas, l'état final serait liquide et la pression augmenterait beaucoup trop pour être supportée par la bouteille.



### Exercice 16.8

1. Le premier palier correspond à la fusion de l'éthanol, le second à sa vaporisation. Nous pouvons déduire la température de fusion  $T_f = -115 \text{ °C}$  et celle de vaporisation  $T_v = 79 \text{ °C}$ .
2. En multipliant la durée d'un palier par la puissance de chauffe, nous obtenons la quantité d'énergie à dépenser pour réaliser le changement d'état :  $9,7 \cdot 10^4 \text{ J}$  et  $8,6 \cdot 10^5 \text{ J}$  respectivement pour faire fondre

et vaporiser le kilogramme d'éthanol. Il apparait que la vaporisation demande beaucoup plus d'énergie que la fusion.

3. L'énergie nécessaire pour chauffer le liquide de  $T_f$  à  $T_v$  est  $c_l(T_v - T_f)$  où  $c_l$  est la capacité thermique massique à pression constante de l'éthanol liquide. La mesure sur le graphe de la durée du chauffage permet d'évaluer cette énergie à  $4,6 \cdot 10^5$  J. Nous en déduisons  $c_l = 2,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

En procédant de même pour  $T > 79^\circ\text{C}$ , nous obtenons la capacité thermique massique à pression constante de l'éthanol gazeux  $c_v = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### Exercice 16.9

1. Initialement, l'air dans le pneu est à la pression atmosphérique  $P_e$  et à la température  $T = 293 \text{ K}$ . Le volume interne du pneu étant  $V_i = 1,0 \text{ L}$ , la quantité d'air en moles dans le pneu est  $n_{\text{air}} = \frac{P_e V_i}{RT}$  soit  $n_{\text{air}} = 0,041 \text{ mol}$ .
2. Le système est ouvert puisqu'il y a admission d'air extérieur.
3. Le volume du corps de pompe est  $SL = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ L}$ , ce qui correspond à une quantité d'air en moles obtenue à l'aide de l'équation d'état :  $n = \frac{P_e SL}{RT} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ .
4. La pression finale souhaitée correspond à une quantité d'air de  $\frac{P_f V_i}{RT} = 0,21 \text{ mol}$ .

Chaque coup de pompe amenant la quantité d'air  $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ , il faut donc  $\frac{0,21}{1,2 \cdot 10^{-3}} = 1,7 \cdot 10^2$  coups de pompes pour gonfler le pneu à 5 bar. La force qu'il faut exercer pour comprimer l'air dans le corps de pompe est de plus en plus grande au fur et à mesure que la pression dans le pneu augmente.





# Échanges d'énergie – Premier principe

## L'essentiel du cours

### Contexte

Quelles sont les causes d'une variation d'énergie interne d'un système thermodynamique ?

On considère dans ce chapitre un récipient contenant une masse  $m = 1,00 \text{ kg}$  de vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait. Ce récipient est fermé par un piston mobile qu'un opérateur peut pousser pour comprimer le gaz ou tirer pour le détendre. Le piston peut aussi être bloqué pour que le volume reste constant. Des capteurs permettent de déterminer la pression, la température et le volume du gaz lorsqu'il est à l'équilibre. Le système étudié est le gaz contenu dans le récipient. Son état initial est noté  $A$  ( $P_A = 1,00 \text{ bar}$ ,  $T_A = 400 \text{ K}$  et  $v_A = 1,85 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

Afin d'élever la température de la vapeur d'eau, on envisage trois expériences.

- **Expérience 1 :** on isole thermiquement le récipient et on comprime le gaz en poussant le piston jusqu'à atteindre l'état  $B$  ( $P_B = 1,50 \text{ bar}$ ,  $T_B = 441 \text{ K}$ ,  $v_B = 1,36 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ).
- **Expérience 2 :** on bloque le piston pour que le volume du gaz reste constant et on introduit le récipient dans un four préchauffé à  $600 \text{ K}$ . On note  $C$  ( $P_C = 1,50 \text{ bar}$ ,  $T_C = 600 \text{ K}$  et  $v_C = 1,85 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ) l'état du système à la fin de l'expérience.
- **Expérience 3 :** on place le récipient à proximité d'un chauffage rayonnant et on laisse le piston évoluer librement dans une atmosphère à la pression atmosphérique  $P_{atm} = 1,00 \text{ bar}$  jusqu'à l'état  $D$  ( $P_D = 1,00 \text{ bar}$ ,  $T_D = 600 \text{ K}$ ,  $v_D = 2,77 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ).

L'objectif de ce chapitre est de modéliser ces expériences et de déterminer les transferts énergétiques de l'extérieur vers le système.

## ■ 1 Transformations et transferts énergétiques

### Définition : Transformation thermodynamique

Un système subit une transformation s'il passe d'un état d'équilibre (état initial  $I$ ) à un autre état d'équilibre (état final  $F$ ). La transformation est déclenchée par une modification d'une contrainte extérieure qui entraîne une rupture d'équilibre.

Par exemple dans l'expérience 1, la transformation est déclenchée par le mouvement du piston effectué par l'opérateur, qui place le système hors d'équilibre. Dans l'expérience 2, le système est placé hors d'équilibre dès qu'on l'introduit dans le four.

La durée  $\tau$  de la transformation doit être comparée au temps  $t_h$  d'homogénéisation du gaz, c'est-à-dire le temps qu'il faut au gaz pour retrouver un état d'équilibre si on le perturbe légèrement. Si  $\tau \gg t_h$ , la transformation est très lente et peut être modélisée par une transformation infiniment lente.

**Définition : Transformation infiniment lente**

Dans une transformation infiniment lente, le système passe par une succession continue d'états d'équilibre, dans laquelle toutes les variables d'état du système (pression, température...) sont à tout instant définies.



Seules les transformations infiniment lentes peuvent être représentées dans le diagramme de Clapeyron  $(P, v)$ . Sinon, on ne peut représenter que les états initial et final car alors les variables d'état ne sont pas définies au cours de la transformation.

Lorsque  $\tau$  n'est pas très grand devant  $t_h$ , la transformation comporte des états hors d'équilibre pour lesquels les variables internes au système ne sont pas définies.

Dans l'expérience 1, la compression du gaz peut être considérée infiniment lente si l'opérateur pousse le piston très lentement. Dans l'expérience 2, la transformation est assimilable à une transformation infiniment lente si la taille du récipient est assez faible pour que la température et la pression du gaz restent homogènes pendant tout l'échauffement. Il en est de même pour l'expérience 3. La figure 17.1 représente dans le diagramme de Clapeyron les trois transformations, dans l'hypothèse où elles sont infiniment lentes.

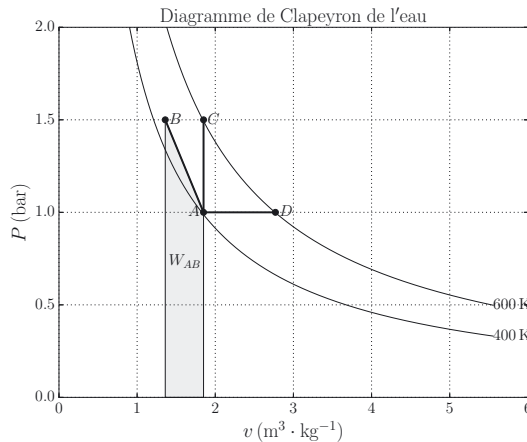


Figure 17.1. Représentations des trois transformations dans le diagramme de Clapeyron.

□ **Comment calculer le travail des forces de pression lors du mouvement du piston ?**

L'action de l'opérateur sur le piston peut être assimilée à une force de pression  $\vec{F} = -P_{ext}S\vec{u}$  qui s'exerce sur la surface du piston (d'aire  $S$ ), où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire orienté vers l'extérieur du système. Si l'on suppose que le piston a une masse négligeable et qu'il se déplace sans frottement, cette force est aussi celle exercée par le piston lui-même sur le gaz. Pour un déplacement  $d\vec{\ell} = d\ell\vec{u}$  du piston, le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$(17.1) \quad \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -P_{ext} S d\ell = -P_{ext} dV$$

où  $dV = S d\ell$  est la variation élémentaire de volume du système.  $\delta W$  correspond au **travail élémentaire reçu** par le système.



Ce travail reçu est **algébrique**. Lors d'une compression ( $dV < 0$ ) le système reçoit de l'énergie de l'opérateur. Lors d'une détente ( $dV > 0$ ) il en fournit à l'opérateur.

Le travail reçu lors de la transformation est la somme des travaux élémentaires.

#### Méthode 17.1 : Calcul du travail des forces de pression

- **Dans le cas général** : le travail s'écrit  $W_{I \rightarrow F} = - \int_I^F P_{ext} dV$  où  $P_{ext}$  est la pression qui s'exerce sur la surface extérieure du système.
- **Pour une transformation infiniment lente** : l'équilibre mécanique se traduit par  $P_{ext} = P$  où  $P$  est la pression au sein du système au cours de la transformation. L'expression du travail est alors  $W_{I \rightarrow F} = - \int_I^F P dV$ .

➔ Exercices (17.1) (17.2)



Pour une transformation infiniment lente  $W_{I \rightarrow F}$  a une interprétation géométrique dans le diagramme de Clapeyron : il est représenté par l'opposé de l'aire sous la courbe lorsque le volume augmente, par l'aire sous la courbe lorsque le volume diminue.

Calculons le travail reçu par le système lors de nos trois expériences, en supposant les transformations infiniment lentes (figure 17.1).

- **Expérience 1** : assimilons en première approximation la courbe de la transformation à un segment de droite. La surface sous cette courbe est alors un trapèze. Le volume diminue, le travail reçu est positif et égal à l'aire de cette surface :  $W_{AB} = (P_A + P_B)(V_A - V_B)/2 = 61 \text{ kJ}$ . Un calcul exact du travail reçu donnerait  $W_{AB} = 60 \text{ kJ}$ .
- **Expérience 2** : le volume du système n'évolue pas. Le travail reçu par le système au cours de cette transformation est donc nul :  $W_{AC} = 0$ .
- **Expérience 3** : la transformation est infiniment lente et isobare ( $P = P_{atm}$ ). Le travail reçu vaut  $W_{AD} = - \int_A^D P dV = -P(V_D - V_A) = -92 \text{ kJ}$ . C'est l'opposé de l'aire du rectangle présent sous le segment  $AD$ .

□ **Sous quelle autre forme l'énergie peut-elle être échangée avec le système ?**

#### Définition : Transfert thermique

Un système peut recevoir de l'énergie par un autre type de transfert d'énergie qu'un travail, le **transfert thermique**. On le note  $Q$ , il est algébrique et s'exprime en joule.

Il existe trois modes de transferts thermiques.

- **La conduction thermique** : c'est un mode de transfert direct d'énergie au sein d'un milieu matériel, en absence de mouvement macroscopique de matière. Ce transfert s'effectue dans le sens des températures décroissantes et tend à homogénéiser la température dans le système.
- **La convection thermique** : un fluide en mouvement reçoit de l'énergie d'un système chaud et cède de l'énergie au système froid.
- **Le transfert par rayonnement thermique** : tout corps émet, d'une part, un rayonnement thermique ayant pour origine l'agitation thermique de ses atomes de surface et absorbe, d'autre part, plus ou moins le rayonnement qu'il reçoit. Il en résulte un transfert d'énergie par rayonnement, des corps chauds vers les corps froids. Ce transfert se fait aussi dans le vide car l'énergie est transportée par une onde électromagnétique.

□ **Quels sont les modes de transferts thermiques dans nos trois expériences ?**

Dans l'expérience 1, les parois du récipient sont **calorifugées** (ou **athermanes**). Il n'y a donc pas de transfert thermique avec l'extérieur. La transformation est dite **adiabatique**. L'homogénéisation de la température au sein du gaz se fait par conduction et par convection thermique.

Dans l'expérience 2, les parois du récipient sont perméables au transfert thermique (ou **diathermanes**). Il y a un transfert thermique, par conduction et convection, entre l'air du four et le système. Au cours de ce transfert, la température de l'air dans le four reste pratiquement constante. L'air du four se comporte comme un **thermostat**.

**Définition : Thermostat**

Un thermostat est un système dont la température reste constante et uniforme quelque soit le transfert thermique avec l'extérieur.



|| C'est un modèle théorique. Un système réel s'en approchera si sa capacité thermique est très grande devant celle du système avec lequel il échange de l'énergie.

Dans l'expérience 3, il s'agit d'un transfert thermique par rayonnement entre le dispositif de chauffage rayonnant et le système.

□ **Comment modéliser les différentes transformations ?**

Les transformations subies par un système sont caractérisées par l'absence d'échange par transfert thermique ou par une variable d'état qui reste constante.

- Transformation **adiabatique** : transformation au cours de laquelle le transfert thermique entre l'extérieur et le système est nul.
- Transformation **isochore** : transformation au cours de laquelle le volume du système reste constant.
- Transformation **isobare** : transformation infiniment lente au cours de laquelle la pression du système reste constante.
- Transformation **monobare** : le système est en équilibre mécanique avec l'extérieur dans ses états initial et final et la pression extérieure, c'est-à-dire la **pression au niveau de ses parois mobiles**, reste constante au cours de la transformation.
- Transformation **isotherme** : transformation infiniment lente au cours de laquelle la température du système reste constante.

- Transformation **monotherme** : le système est en équilibre thermique avec l'extérieur dans ses états initial et final et la température extérieure, c'est-à-dire la **température au niveau de ses parois diathermanes**, reste constante au cours de la transformation.



Les transferts thermiques par conduction et par convection avec l'extérieur étant relativement lents il se peut qu'ils n'aient pas le temps de se faire lorsque la transformation est très rapide. On peut alors la supposer adiabatique.

Dans l'expérience 1, les parois du système étant calorifugées, on peut modéliser la transformation par une transformation adiabatique. La transformation de l'expérience 2 peut être modélisée par une transformation isochore et celle de l'expérience 3 par une transformation isobare ou monobare.

Dans cette partie, nous avons vu comment déterminer le travail des forces de pression mais nous n'avons pas encore d'outil pour évaluer les transferts thermiques entre le système et l'extérieur.

## ■ 2 Premier principe de la thermodynamique

Au cours de nos trois expériences, nous avons déterminé le travail reçu par le système. En outre, en assimilant la vapeur d'eau à un gaz parfait de capacité thermique à volume constant massique  $c_V$ , la variation d'énergie interne du système lors de chaque transformation vaut :  $\Delta U_{IF} = mc_V(T_F - T_I)$  avec  $c_V = 1,48 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

	Travail reçu $W_{IF}$	Variation d'énergie interne $\Delta U_{IF}$
Expérience 1	$W_{AB} = 60 \text{ kJ}$	$\Delta U_{AB} = 60 \text{ kJ}$
Expérience 2	$W_{AC} = 0$	$\Delta U_{AC} = 295 \text{ kJ}$
Expérience 3	$W_{AD} = -92 \text{ kJ}$	$\Delta U_{AD} = 295 \text{ kJ}$

Dans l'expérience 1, le travail est responsable de la variation d'énergie interne. Dans l'expérience 2, un transfert thermique fait varier l'énergie interne. Dans l'expérience 3, un travail et un transfert thermique interviennent.

### □ Comment déterminer le transfert thermique ?

Le transfert thermique s'obtient en appliquant au système étudié le **premier principe de la thermodynamique**, qui exprime la conservation de l'énergie.

#### Premier principe dans le cas d'un système macroscopiquement au repos

Soit un système fermé, macroscopiquement au repos et subissant une transformation  $I \rightarrow F$  au cours de laquelle il reçoit un travail algébrique  $W_{IF}$  et un transfert thermique algébrique  $Q_{IF}$ . Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Delta U_{IF} = U_F - U_I = W_{IF} + Q_{IF}$$



La variation d'énergie interne  $\Delta U_{IF}$  ne dépend que de l'état initial et de l'état final de la transformation ( $U$  est une fonction d'état) alors que le travail et le transfert thermique dépendent du chemin suivi lors de la transformation.



Dans le cas d'une transformation isochore  $\Delta U_{IF} = Q_{IF} = Q_V$

**Expression du premier principe dans le cas général**

Dans le cas où le système subit une variation d'énergie mécanique  $\Delta E_{mIF}$  (énergies cinétique et potentielle macroscopiques), le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Delta U_{IF} + \Delta E_{mIF} = \Delta U_{IF} + \Delta E_{cIF} + \Delta E_{pIF} = W_{IF} + Q_{IF}$$

Déterminons maintenant le transfert thermique dans nos trois expériences :  $Q_{IF} = \Delta U_{IF} - W_{IF}$ .

	Modélisation	$W_{IF}$	$\Delta U_{IF}$	$Q_{IF}$
Expérience 1	adiabatique	$W_{AB} = 60 \text{ kJ}$	$\Delta U_{AB} = 60 \text{ kJ}$	$Q_{AB} = 0$
Expérience 2	isochore	$W_{AC} = 0$	$\Delta U_{AC} = 295 \text{ kJ}$	$Q_{AC} = 295 \text{ kJ}$
Expérience 3	isobare	$W_{AD} = -92 \text{ kJ}$	$\Delta U_{AD} = 295 \text{ kJ}$	$Q_{AD} = 387 \text{ kJ}$



On vérifie avec les expériences 2 et 3 qu'une même variation d'énergie interne peut être obtenue avec des valeurs de travail et de transfert thermique différentes.

**Méthode 17.2 : Calcul du transfert thermique au cours d'une transformation**

- Déterminer la variation d'énergie interne au cours de la transformation, connaissant la fonction d'état  $U$ , l'état initial et l'état final.
- Calculer le travail reçu par le système au cours de la transformation, connaissant la nature de celle-ci (Méthode 17.1).
- Appliquer le premier principe de la thermodynamique pour en déduire le transfert thermique :  $Q_{IF} = \Delta U_{IF} - W_{IF}$ .

➔ Exercice (17.3)

### ■ 3 Enthalpie – Transformations monobares ou isobares

On a vu que le transfert thermique est égal à la variation d'énergie interne lorsque la transformation est isochore. Un grand nombre de transformations (notamment en chimie) étant isobares ou monobares, on souhaite disposer d'une fonction d'état dont la variation serait égale au transfert thermique pour ce type de transformations. On définit pour cela l'**enthalpie** d'un système.

**Définition : Enthalpie**

L'enthalpie d'un système à la pression  $P$ , de volume  $V$  et d'énergie interne  $U$ , est la fonction d'état extensive définie par :

$$H = U + PV \quad (\text{en joules})$$



Pour un corps pur,  $H$  est fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$ .

**Lors d'une transformation monobare :**

$W_{IF} = -P_{ext}(V_F - V_I)$ . Par ailleurs,  $P_I = P_F = P_{ext}$  donc  $W_{IF} = -(P_F V_F - P_I V_I)$ . D'où  $Q_{IF} = Q_P = \Delta U_{IF} - W_{IF} = (U_F + P_F V_F) - (U_I + P_I V_I) = \Delta H_{IF}$ . Ce résultat s'applique aussi à une transformation isobare, qui est un cas particulier de transformation monobare.

**Transfert thermique lors d'une transformation monobare ou isobare**

Lors d'une transformation monobare ou isobare le transfert thermique reçu par un système est égal à sa variation d'enthalpie :

$$Q_P = \Delta H$$

□ **Que dire de l'enthalpie d'un gaz parfait ou d'un système condensé indilatable et incompressible ?**

- **Gaz parfait** : en combinant équation d'état  $PV = nRT$  et définition de l'enthalpie, on obtient  $H = U + PV = U + nRT$ . Tout comme son énergie interne, **l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température**.
- **Système condensé indilatable et incompressible** : lors d'une transformation d'un tel système, l'énergie interne peut être considérée comme fonction uniquement de la température et les variations du produit  $PV$  sont souvent négligeables devant celles de l'énergie interne. On pourra donc considérer que  $H$  ne dépend que de la température.

**Définition : Capacité thermique à pression constante**

La capacité thermique à pression constante d'un système dont l'enthalpie ne dépend que de la température est définie par :  $C_P = \frac{dH}{dT}$ . Elle se mesure en  $J \cdot K^{-1}$ .

$$C_P = \frac{dH}{dT} \implies \int_{T_1}^{T_2} C_P dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dH}{dT} dT \implies H(T_2) - H(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} C_P dT$$

Dans un domaine où  $C_P$  peut être considéré constant :  $H(T_2) - H(T_1) = C_P(T_2 - T_1)$ .



On définit également la capacité thermique molaire à pression constante  $C_{Pm}$  et la capacité thermique massique à pression constante  $c_P$  par  $C_P = nC_{Pm} = mc_P$  où  $n$  et  $m$  sont le nombre de moles et la masse du système.

□ **Existe-t-il une relation entre les capacités thermiques  $C_V$  et  $C_P$  d'un gaz parfait ?**

**Transformations d'un gaz parfait**

Au cours d'une transformation d'une masse  $m$  de gaz parfait :

$$\Delta U = C_V \Delta T = mc_V \Delta T \quad \text{et} \quad \Delta H = C_P \Delta T = mc_P \Delta T$$

La relation  $H = U + nRT$  conduit à  $\Delta H = \Delta U + nR\Delta T = C_V \Delta T + nR\Delta T$ . On obtient ainsi la **relation de Mayer** :

$$C_P - C_V = nR$$

En introduisant le rapport des capacités thermiques  $\gamma = C_P/C_V$ , on obtient l'expression des capacités thermiques en fonction de  $\gamma$ .

**Expressions de  $C_V$  et de  $C_P$  dans le cas d'un gaz parfait**

Pour un système de  $n$  moles de gaz parfait, de masse molaire  $M$  et de coefficient  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  :

$$\bullet C_V = \frac{1}{\gamma - 1} nR \quad ; \quad C_{Vm} = \frac{1}{\gamma - 1} R \quad \text{et} \quad c_V = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{M} ;$$

$$\bullet C_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} nR \quad ; \quad C_{Pm} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R \quad \text{et} \quad c_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} .$$

- Pour un gaz parfait monoatomique :  $\gamma = \frac{5}{3}$  et  $C_V = \frac{3}{2} nR$ ,  $C_P = \frac{5}{2} nR$ .
- Pour un gaz parfait diatomique :  $\gamma = \frac{7}{5}$  et  $C_V = \frac{5}{2} nR$ ,  $C_P = \frac{7}{2} nR$ .

□ **Qu'en est-il pour un système condensé incompressible et indilatable ?**

Pour un système condensé incompressible et indilatable  $\Delta(PV) \approx V\Delta P$  est très faible devant  $\Delta U$ . On a donc  $\Delta H \approx \Delta U$ . En conséquence, on peut assimiler les capacités thermiques à volume constant et à pression constante ( $C_P \approx C_V = C$ ).

**Transformations d'une phase condensée**

Pour un système condensé incompressible et indilatable de masse  $m$ , de capacité thermique  $C$  et de capacité thermique massique  $c = C/m$  :

$$\Delta H \approx \Delta U = C\Delta T = mc\Delta T$$

□ **Comment mesurer la capacité thermique d'un solide ?**

Une expérience de calorimétrie permet de mesurer la capacité thermique d'un solide (figure 17.2). Le calorimètre est constitué d'un vase en verre, de capacité thermique  $C_{\text{cal}}$ , placé dans une enceinte calorifugée. Une masse  $m_1$  d'eau liquide, de capacité thermique massique  $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , est initialement dans le calorimètre, en équilibre avec lui à la température  $T_1$ . Une pièce métallique de masse  $m_2$ , de capacité thermique massique inconnue  $c$  et portée à une température  $T_2$  est plongée dans l'eau. La température de l'eau est enregistrée lors de l'évolution du système. Après quelques secondes, l'eau atteint une température d'équilibre  $T_F$ . Les transferts thermiques entre le vase et l'extérieur sont négligeables si l'expérience est assez brève (de l'ordre de la minute).

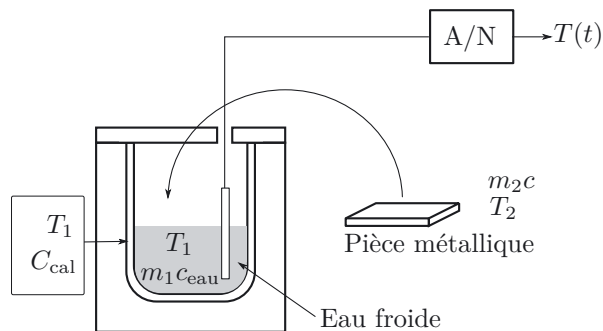


Figure 17.2. Expérience de calorimétrie.



Le système { vase + liquide (1) + solide (2) } subit une transformation monobare puisque la pression extérieure reste constante et pratiquement adiabatique. Le premier principe, appliqué à ce système, conduit à  $\Delta H = Q = 0$ .

### Méthode 17.3 : Exploiter l'extensivité de l'énergie interne ou de l'enthalpie

Lorsqu'un système  $\mathcal{S}$  est constitué de sous-systèmes disjoints  $\mathcal{S}_i$  son énergie interne et son enthalpie sont égales à la somme de celles de ses sous-systèmes. Leurs variations sont donc égales à la somme des variations de celles de ses sous-systèmes.

$$U = \sum_i U_i \Rightarrow \Delta U = \sum_i \Delta U_i \quad \text{et} \quad H = \sum_i H_i \Rightarrow \Delta H = \sum_i \Delta H_i$$

➔ Exercice (17.4)

En exploitant la méthode précédente nous obtenons :

$$\Delta H = \Delta H_{\text{cal}} + \Delta H_1 + \Delta H_2 = C_{\text{cal}}(T_F - T_1) + m_1 c_{\text{eau}}(T_F - T_1) + m_2 c(T_F - T_2) = 0$$

Nous en déduisons :  $c = \frac{C_{\text{cal}}(T_F - T_1) + m_1 c_{\text{eau}}(T_F - T_1)}{m_2(T_2 - T_F)}$ .

Pour déterminer la capacité thermique  $C_{\text{cal}}$  du calorimètre, nous avons réalisé une seconde expérience en y introduisant une masse  $m'_1$  d'eau. Une fois l'équilibre thermique atteint avec le calorimètre (température  $T'_1$ ), nous avons ajouté une masse  $m'_2$  d'eau à la température  $T'_2$  et suivi l'évolution de la température jusqu'à ce que s'établisse un nouvel équilibre thermique à la température  $T'_F$ . Le bilan enthalpique pour cette seconde expérience conduit à :

$$\Delta H' = \Delta H'_{\text{cal}} + \Delta H'_1 + \Delta H'_2 = C_{\text{cal}}(T'_F - T'_1) + m'_1 c_{\text{eau}}(T'_F - T'_1) + m'_2 c_{\text{eau}}(T'_F - T'_2) = 0.$$

D'où nous déduisons :  $C_{\text{cal}} = \frac{m'_1(T'_1 - T'_F) + m'_2(T'_2 - T'_F)}{T'_F - T'_1} c_{\text{eau}}$ .

Les enregistrements de la température en fonction du temps sont donnés pour les deux expériences par la figure 17.3 (à gauche pour la première expérience, à droite pour la seconde). Les valeurs numériques des différents paramètres sont indiquées au-dessus de chaque graphe.

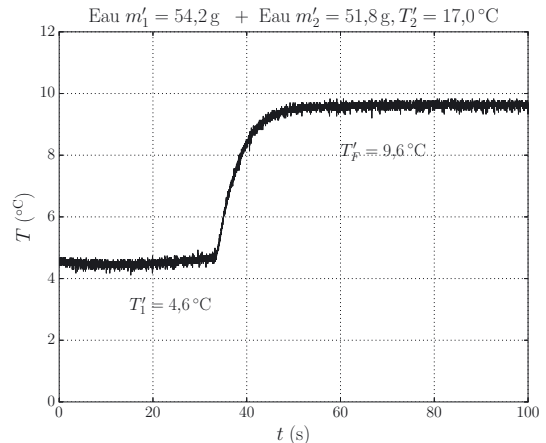
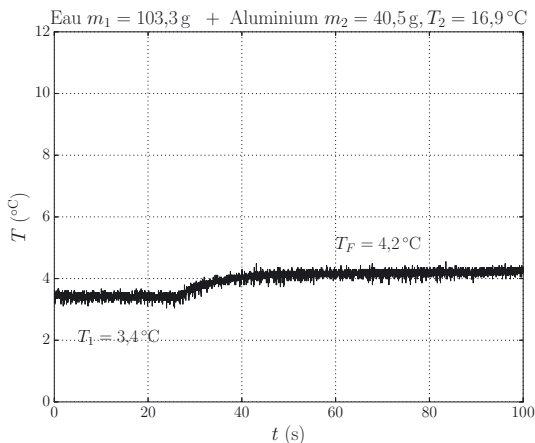


Figure 17.3. Calorimétrie : immersion d'une pièce d'aluminium dans de l'eau froide (à gauche), mélange de deux masses d'eau de températures différentes (à droite).

Nous en avons déduit la capacité thermique du vase du calorimètre :  $C_{cal} = 94 \pm 10 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  puis la capacité thermique massique de l'aluminium :  $c = 0,82 \pm 0,12 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

On remarque que l'aluminium a une capacité thermique massique bien plus faible que l'eau, ce qui explique la faible augmentation de température lors de la première expérience.

## ■ 4 Changement d'état

La variation d'enthalpie d'un fluide peut être visualisée sur un diagramme enthalpique, qui représente la pression en fonction de l'enthalpie massique (figure 17.4).

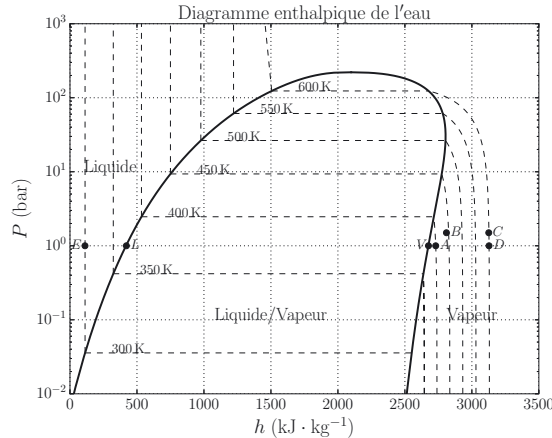


Figure 17.4. Représentations des trois transformations dans le diagramme enthalpique.

Les courbes en traits pointillés sont des isothermes. Les points A, B, C et D correspondent aux états du système dans nos expériences contextuelles présentées en début de chapitre.

On distingue sur ce diagramme les courbes de saturation : courbe d'ébullition à gauche séparant le liquide et le mélange liquide-vapeur et courbe de rosée à droite séparant le mélange liquide-vapeur et la vapeur d'eau. On observe également les paliers de changement d'état que présentent les isothermes dans le domaine correspondant aux états d'équilibre diphasés liquide-vapeur.

Lors d'une transformation isobare ou monobare, le transfert thermique est directement lisible en abscisse. Par exemple, lors de l'expérience 3, on retrouve que  $Q_{AD} = m(h_D - h_A) \approx 340 \text{ kJ}$ .

□ **Comment utiliser le diagramme enthalpique pour déterminer l'énergie à fournir pour faire changer d'état un kilogramme de corps pur ?**

Pour une masse  $m = 1 \text{ kg}$  d'eau subissant une transformation isobare à  $P = 1,0 \text{ bar}$  entre l'état L (liquide saturant) et l'état V (vapeur saturante), nous lisons  $\Delta H = m(h_V - h_L)$ . Cela correspond à l'énergie qu'il faut fournir sous forme de transfert thermique, pour effectuer, à pression et température constantes, le changement de phase liquide-vapeur de cette masse unité d'eau.

### Définition : Enthalpie massique de changement d'état

L'enthalpie massique de changement d'état  $\Delta_{1 \rightarrow 2} h$  à la température  $T$  est la différence, à cette température, entre les enthalpies massiques des phases 1 et 2 :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2} h(T) = h_2(T) - h_1(T)$$



C'est l'énergie qu'il faut fournir sous forme de transfert thermique à un kilogramme de corps pur pour le faire passer de la phase 1 à la phase 2, à la température  $T$  et sous la pression correspondant à l'équilibre diphasé à cette température.

On remarque que plus la température augmente, plus l'enthalpie massique de changement d'état diminue, jusqu'à s'annuler à la pression critique. Pour une pression de 1 bar, l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau est égale à  $\Delta h_{vap} = h_V - h_L = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

□ **Comment exploiter l'enthalpie pour étudier une transformation dans laquelle intervient un changement d'état ?**

Nous souhaitons par exemple déterminer le transfert thermique nécessaire pour faire passer un kilogramme d'eau de l'état liquide  $E$  ( $T_E = 300 \text{ K}$ ,  $P = 1,0 \text{ bar}$ ) à l'état gazeux  $D$  ( $T_D = 600 \text{ K}$ ,  $P = 1,0 \text{ bar}$ ) par voie monobare :  $Q = \Delta H_{ED}$ . (Les états sont portés sur la figure 17.4).

La variation de l'enthalpie entre les états  $E$  et  $D$  étant indépendante du chemin suivi entre ces deux états nous pouvons, pour la calculer, définir le chemin imaginaire présenté par la figure 17.5.

- Étape 1 : On amène par voie isobare le système de l'état liquide  $E$  à l'état de liquide saturant  $L$ .
- Étape 2 : On effectue le changement d'état par voie isobare et isotherme, à la température  $T_c$  de l'équilibre diphasé à la pression  $P$ , pour amener le système dans l'état de vapeur saturante  $V$ .
- Étape 3 : On amène par voie isobare le système de l'état de vapeur saturante  $V$  à l'état de vapeur sèche  $D$ .

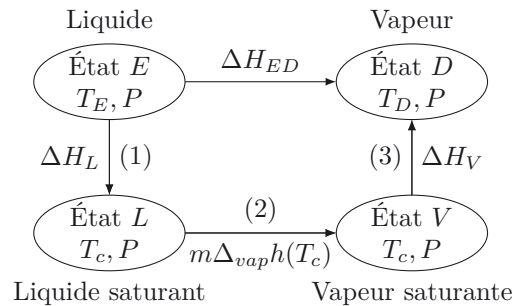


Figure 17.5. Chemin imaginaire.

$$Q = \Delta H_{ED} = \Delta H_L + m\Delta_{vap}h(T_c) + \Delta H_V = mc_{liq}(T_c - T_E) + m\Delta_{vap}h(T_c) + mc_P(T_D - T_c)$$

Sachant que :  $T_c = 373 \text{ K}$  ,  $\Delta_{vap}h(T_c) = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  ,  $c_{liq} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

et  $c_P = 1,94 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  on obtient  $Q = 3,0 \text{ MJ}$ . Ce résultat se retrouve par lecture directe du diagramme enthalpique  $Q = m(h_D - h_E)$  (figure 17.4).

#### Méthode 17.4 : Exploitation de l'enthalpie lors d'un changement d'état

- Définir un chemin imaginaire menant de l'état initial à l'état final dont une étape correspond au changement d'état, réalisé par voie isobare et isotherme.
- Écrire que la variation d'enthalpie entre l'état initial et l'état final est égale à la somme des variations d'enthalpie lors de chaque étape.
- Utiliser l'enthalpie massique de changement d'état pour exprimer la variation d'enthalpie lors de l'étape correspondant au changement d'état.

➔ Exercice (17.5)

## Interro de cours

1. On considère un système thermodynamique ( $\Sigma$ ). Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Travail et transfert thermique sont des fonctions d'états, au même titre que l'énergie interne ou l'enthalpie.
  - (b) Si ( $\Sigma$ ) subit une transformation adiabatique, sa température reste constante.
  - (c) La pression de ( $\Sigma$ ) reste constante au cours d'une transformation monobare.
  - (d) Le volume de ( $\Sigma$ ) reste constant au cours d'une transformation isochore.
2. On considère comme système ( $\Sigma$ )  $n$  moles d'un gaz parfait diatomique.  $R$  est la constante des gaz parfaits. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) La capacité thermique à pression constante de ( $\Sigma$ ) est  $C_P = \frac{7}{2}nR$  dans les conditions usuelles.
  - (b) Lors d'une compression isotherme infiniment lente entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B, V_B, T_B)$  avec  $T_B = T_A$ , le travail des forces de pression reçu par ( $\Sigma$ ) est  $W_{A \rightarrow B} = nRT_A \ln(V_B/V_A)$ .
  - (c) Lors d'une transformation monobare entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B = P_A, V_B, T_B)$ , le transfert thermique reçu par ( $\Sigma$ ) est  $Q = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A)$ .
  - (d) Lors d'une transformation isochore entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B, V_B = V_A, T_B)$ , le transfert thermique reçu par ( $\Sigma$ ) est  $Q = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A)$ .
  - (e) Lors d'une transformation adiabatique entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B, V_B, T_B)$ , le travail reçu par ( $\Sigma$ ) est  $W_{A \rightarrow B} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A)$ .
3. Un système ( $\Sigma$ ) constitué de 2 kilogrammes d'eau sous forme de vapeur saturante à la pression  $P_0 = 1,0$  bar et à la température  $T_0 = 100$  °C subit une liquéfaction totale isotherme isobare. On donne l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à  $T_0$  :  $\Delta h_v = 2,3 \cdot 10^3$  kJ · kg<sup>-1</sup>. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) La variation d'enthalpie de ( $\Sigma$ ) au cours de la transformation est  $\Delta H = -4,6 \cdot 10^3$  kJ · kg<sup>-1</sup>.
  - (b) La variation d'énergie interne ( $\Sigma$ ) au cours de la transformation est  $\Delta U = -4,6 \cdot 10^3$  kJ · kg<sup>-1</sup>.
  - (c) Le travail des forces de pression est nul.
  - (d) Le transfert thermique reçu par ( $\Sigma$ ) est  $Q = -2,3 \cdot 10^3$  kJ · kg<sup>-1</sup>.
4. Dans un calorimètre de capacité thermique  $C_c = 1,0 \cdot 10^2$  J · K<sup>-1</sup> dont la température initiale est  $T_1 = 20$  °C, on mélange une masse  $m_1 = 100$  g d'eau liquide de température initiale  $T_1$  et de capacité thermique massique  $c_{eau} = 4,18$  kJ · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup> avec une pièce métallique de masse  $m_2 = 50$  g de température initiale  $T_2 = 100$  °C, dont la capacité thermique massique est  $c_s = 0,90$  kJ · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>. On note  $T_f$  la température finale atteinte. La pression extérieure est  $P_e$  maintenue constante. Répondre aux questions suivantes.
  - (a) Quel système faut-il considérer pour déterminer cette température finale ?
  - (b) Quelle est la nature de la transformation subie par ce système ? Quelle grandeur thermodynamique est alors pertinente pour l'étude ?
  - (c) Cette transformation peut-elle être considérée comme infiniment lente ?
  - (d) Déterminer la valeur numérique de  $T_f$ . Restera-t-elle constante au cours du temps ?

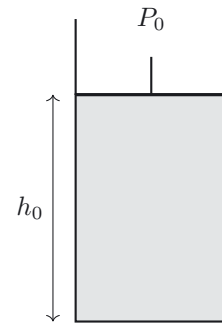
# Exercices

## Exercice 17.1 À la poursuite du diamant jaune

### ➔ Méthode (17.1)

Lancée depuis quelques mois à la poursuite de l'inestimable diamant jaune, l'aventurière Diana Jones touche à son but : ce diamant se trouve dans une cache creusée dans la paroi d'un trou vertical, au fond d'une galerie souterraine. Ce trou, rempli d'air, est surmonté d'un couvercle rendant la cache inaccessible. À côté de ce trou se trouve un monticule de gravier, dont la masse totale est  $M = 100 \text{ kg}$ . Diana Jones, quand à elle, pèse avec tout son matériel exactement le même poids que le tas de gravier.

Deux options s'offrent alors à elle : soit elle saute sur le couvercle, en espérant que celui-ci va descendre suffisamment pour lui permettre de récupérer le trésor (option 1), soit elle ajoute sur le couvercle de façon régulière et en petites quantités le gravier (option 2). Les caractéristiques du trou sont les suivantes : sa section est  $S = 0,0630 \text{ m}^2$ , la hauteur initiale du couvercle par rapport au fond du trou est  $h_0 = 100 \text{ m}$ . La température initiale de l'air enfermé dans le trou est  $T_0 = 293 \text{ K}$ , et la pression de l'air surmontant le couvercle est  $P_0 = 1,00 \text{ bar}$ . La cache se trouve à une hauteur  $h_1 = 90,2 \text{ m}$  du fond du trou. On supposera que la terre et le couvercle sont imperméables aux transferts thermiques, et que le mouvement du couvercle est vertical et sans frottements. On néglige aussi la masse de ce couvercle. On admettra qu'au cours d'une transformation adiabatique très lente, au cours de laquelle l'équilibre mécanique du système avec l'extérieur est réalisé, un gaz parfait obéit à la loi de Laplace :  $PV^\gamma = \text{constante}$ ,  $\gamma$  coefficient adiabatique de l'air.



1. Quelle est, en moles, la quantité d'air enfermée dans ce cylindre ?
2. Étude de l'option 1.
  - a. Qualifier le plus précisément possible l'évolution subie par l'air dans le cas de l'option 1.
  - b. En notant  $h_{f1}$  la hauteur finale atteinte par le couvercle, déterminer le travail reçu par l'air intérieur au cours de cette transformation.
  - c. En utilisant le premier principe et la loi des gaz parfaits, déterminer la hauteur finale  $h_{f1}$  atteinte par le couvercle, en fonction de  $M$ ,  $P_0$ ,  $g$ ,  $S$ ,  $h_0$  et  $\gamma$ . Calculer sa valeur numérique.
3. Étude de l'option 2.
  - a. Qualifier le plus précisément possible l'évolution subie par l'air dans le cas de l'option 2.
  - b. Déterminer la hauteur finale  $h_{f2}$  atteinte par le couvercle, en fonction de  $M$ ,  $P_0$ ,  $g$ ,  $S$ ,  $h_0$  et  $\gamma$ . Calculer sa valeur numérique.
4. Tracer les courbes  $h_{f1}$  et  $h_{f2}$  en fonction de  $M$  et conclure sur l'influence de cette dernière.
5. Que conseillez-vous à Diana ?

Le coefficient adiabatique de l'air considéré comme un gaz parfait est  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = 1,40$  et on donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , et l'accélération de la pesanteur,  $g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Exercice 17.2** Pete bulle

→ Méthode (17.1)

Le petit Peter aime beaucoup faire des bulles de savon. Il utilise pour cela de l'eau savonneuse dont le coefficient de tension superficielle est  $\gamma = 25 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ . Pour que la bulle de savon puisse être stable, il faut que la pression  $P_{\text{int}}$  de l'air intérieur à la bulle, qu'on supposera assimilable à un gaz parfait, soit plus élevée que la pression extérieure  $P_{\text{ext}} = 1,0 \text{ bar}$ . On admettra la loi de Laplace :  $P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{a}$  avec  $a$  le rayon de la bulle supposée sphérique.

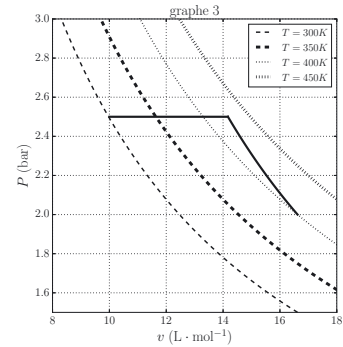
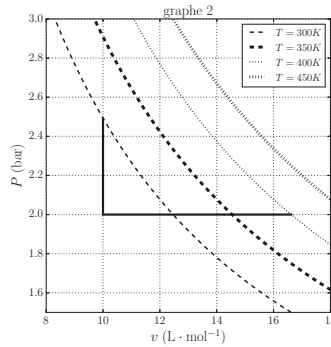
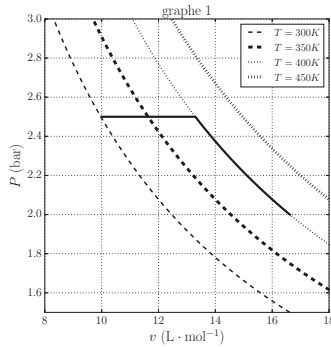
1. Quelle est la différence de pression  $P_{\text{int}} - P_{\text{ext}}$  pour  $a = 1,0 \text{ cm}$  ? Si la température est supposée être identique à l'intérieur et à l'extérieur, égale à  $T_0 = 293 \text{ K}$ , quelle quantité  $n$  en mole d'air renferme cette bulle ?
2. Déterminer la loi reliant le rayon  $a$  de la bulle à la température  $T$  et à  $n$ .
3. Cette bulle s'approche d'une lampe électrique allumée. Que se passe-t-il alors ?
4. Cette évolution se faisant très lentement, on arrive à un état final où la différence de pression est  $P_{\text{int,f}} - P_{\text{ext}} = 9 \text{ Pa}$ . Déterminer le rayon final de la bulle  $a_f$  et la température finale  $T_f$ .
5. Exprimer le travail élémentaire des forces de pression s'exerçant sur le gaz enfermé dans la bulle, en fonction du rayon  $a$  et de son évolution élémentaire  $da$ . Calculer le travail reçu par le gaz interne à la bulle au cours de cette transformation. Faire l'application numérique.
6. Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U$  de ce gaz. On donne la capacité thermique molaire de l'air,  $c_V = 780 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et la masse molaire de l'air  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
7. En déduire le transfert thermique reçu par ce gaz lors de cette transformation. Faire l'application numérique.
8. Calculer littéralement et numériquement le travail fourni à la bulle par l'air extérieur. Commenter.

On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Exercice 17.3** Les malheurs de Sophie

→ Méthode (17.2)

Sophie, étudiante un peu étourdie, a bien des malheurs. Voulant réviser ses exercices de thermodynamique en vue de son examen, elle s'aperçoit qu'il lui manque la figure correspondant à l'énoncé suivant : « une mole de gaz parfait monoatomique ( $n = 1,0 \text{ mol}$ ) subit une détente constituée de deux étapes très lentes, la première isobare, la seconde isotherme, l'amenant d'un état initial ( $P_1 = 2,5 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ) à l'état final ( $P_2 = 2,0 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 400 \text{ K}$ ), comme indiqué sur la figure ci-jointe... ». En fouillant dans ses notes, elle retrouve quelques figures qui pourraient faire l'affaire :



1. Aider Sophie en retrouvant pour elle le graphe correspondant à son exercice et continuer avec elle en répondant aux questions suivantes.
2. Quelle est la capacité thermique molaire à volume constant de ce gaz, dans les conditions de l'expérience ?
3. Calculer le travail puis le transfert thermique reçus par la mole de gaz au cours de la première étape.
4. Calculer le travail puis le transfert thermique reçus par la mole de gaz au cours de la seconde étape.
5. En déduire le travail total reçu par le gaz au cours de cette détente. Commenter son signe.

On donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 17.4 Coup de chaud

#### ➔ Méthode (17.3)

Les expériences de calorimétrie sont menées dans une enceinte (le calorimètre) suffisamment isolée pour éviter les échanges thermiques avec l'extérieur et elles sont réalisées sous pression atmosphérique constante. L'enceinte intérieure du calorimètre et ses accessoires (agitateur et thermomètre, par exemple) interviennent dans les échanges thermiques, puisque leur température varie au cours des expériences. On note  $C = 130 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  la capacité thermique du calorimètre, c'est-à-dire de l'enceinte intérieure du calorimètre et ses accessoires.

On réalise l'expérience de calorimétrie dont le protocole est le suivant :

- Réaliser un circuit série comprenant : un générateur de tension continue 6/12V, un rhéostat ( $33 \Omega$ , 2 A), un ampèremètre, le conducteur ohmique à plonger dans le calorimètre.
- Dans le calorimètre, verser une masse  $m_1$  d'eau préalablement pesée et à la température ambiante  $T_1$ .
- Dans le calorimètre, plonger le résistor, de résistance  $R$  inconnue.
- Déclencher le chronomètre en allumant le générateur et régler rapidement l'intensité à la valeur souhaitée  $I$ . Agiter.
- Attendre  $\Delta t = 4 \text{ min}$ , relever la température de l'eau,  $T_2(I)$  et ajuster rapidement l'intensité pour la mesure suivante.
- Refaire de nouveau une mesure de  $T_2$  au bout de  $\Delta t$ , et ainsi de suite.

Les mesures réalisées avec ce protocole ont permis d'aboutir, avec  $m_1 = 148 \text{ g}$ , au tableau suivant :

$I(\text{A})$	0	0,28	0,50	0,71	0,99	1,22	1,36
$\Delta T(I)(^\circ\text{C})$	0	0,15	0,50	1,0	1,9	2,8	3,6

où  $\Delta T(I)$  représente la variation de la température  $T_2$  pendant le temps  $\Delta t$ , sous l'intensité  $I$ .

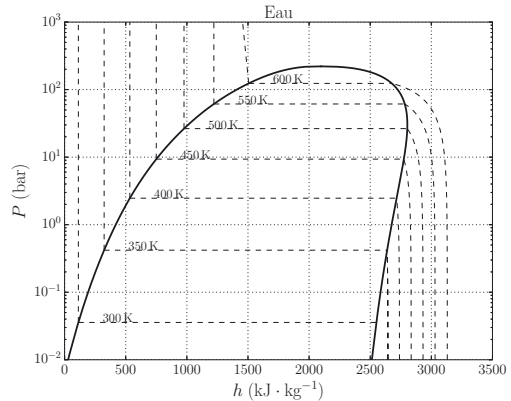
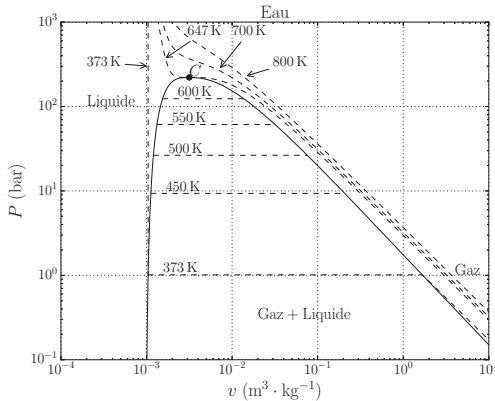
1. En considérant comme système fermé le calorimètre et son contenu et en notant  $H$  son enthalpie, faire un bilan énergétique au cours d'une étape de l'expérience.
2. Sachant que l'on veut déterminer la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique, quelle courbe vous paraît-il astucieux de tracer ?
3. Commenter alors la courbe obtenue. En déduire la valeur expérimentale de  $R$ .

On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide  $c_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Exercice 17.5 Vaporisation d'eau liquide**

➔ Méthode (17.4)

3,0 kg d'eau sous forme liquide saturant à la pression  $P_e = 1,0 \text{ bar}$  (état  $I$ ) sont enfermés dans un récipient cylindrique, surmonté par un piston sans masse et pouvant coulisser sans frottement le long des parois du cylindre. Ce cylindre et le piston sont supposés être diathermanes. La pression extérieure est constante, égale à  $P_e = 1,0 \text{ bar}$ . On donne la masse molaire de l'eau  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



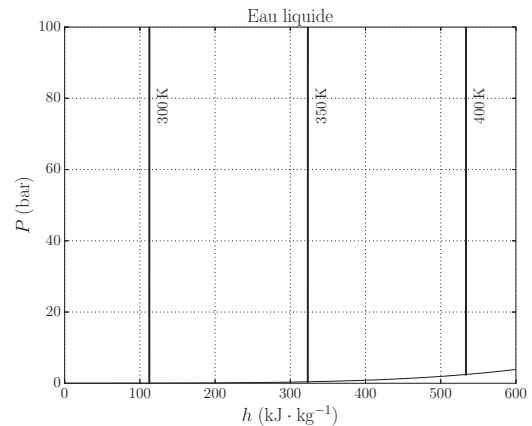
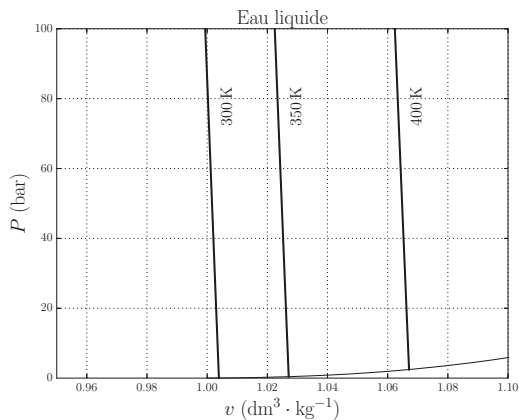
1. Placer ce point initial  $I$  sur le diagramme de Clapeyron et sur le diagramme  $(P, h)$  ci-dessus.
2. On chauffe très lentement le piston et son contenu, jusqu'à ce que l'eau soit entièrement sous forme de vapeur saturante, sous la pression  $P_e$ . Placer le point final  $F$  sur les deux diagrammes, et caractériser la transformation subie par l'eau.
3. Déterminer la variation  $\Delta V$  du volume occupé par l'eau ainsi que sa variation d'enthalpie  $\Delta H$ .
4. Quel est le transfert thermique reçu par l'eau au cours de cette transformation ? Quel est le travail des forces de pression ?
5. En déduire la variation d'énergie interne de l'eau au cours de cette transformation.



### Exercice 17.6 Chauffage sous pression

2,0 kg d'eau liquide sont comprimés à la température  $T_i = 300 \text{ K}$  et maintenus à la pression constante  $P = P_{ext} = 20 \text{ bar}$ . On chauffe ensuite cette eau pour l'amener à la température  $T_f = 350 \text{ K}$ , sous la pression  $P_{ext}$ .

Les deux graphes suivants montrent l'évolution de la pression avec le volume massique et l'enthalpie massique de l'eau liquide.



1. Qualifier la transformation subie par cette masse d'eau.
2. Déterminer le volume occupé par cette masse d'eau dans l'état initial ( $V_i$ ) et dans l'état final ( $V_f$ ), ainsi que son enthalpie dans l'état initial ( $H_i$ ) et dans l'état final ( $H_f$ ).
3. En déduire la valeur numérique de  $\Delta H$  et du transfert thermique  $Q$  reçu par le liquide au cours de ce réchauffement.
4. Donner la relation liant  $U$  à  $H$ ,  $P$  et  $V$ . En déduire l'expression de  $\Delta U$ . Quelle erreur commet-on en confondant  $\Delta H$  et  $\Delta U$  ?
5. Comment évolue  $h$  avec  $T$  ? En déduire la capacité thermique massique  $c$  de l'eau liquide.
6. Comment évolue  $v$  avec  $P$  à  $T$  fixé ? Estimer l'ordre de grandeur du coefficient de compressibilité isotherme de l'eau liquide,  $\chi_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T$ .
7. Comment évolue  $v$  avec  $T$  à  $P$  fixé ? Estimer l'ordre de grandeur du coefficient de dilatation isobare de l'eau liquide,  $\alpha = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$  au voisinage de la température  $T = 325 \text{ K}$ .

### Exercice 17.7 La star trekke

Une star du monde sportif, grand adepte de la randonnée, part faire un trek en Alaska. Un jour où les conditions météo sont particulièrement défavorables, transi par le froid, il décide d'utiliser pour se réchauffer une bouillotte « magique ». Il sort de son sac une pochette remplie d'une solution d'acétate de sodium trihydraté, et tord une plaquette métallique à l'intérieur de cette dernière. La solution se solidifie quasi-instantanément, ce qui s'accompagne d'un dégagement de chaleur permettant à notre star de se réchauffer les mains et le visage.

On donne les caractéristiques physiques de l'acétate de sodium trihydraté :

- température de fusion sous pression atmosphérique :  $T_f = 58^\circ\text{C}$
- enthalpie massique de fusion à  $T_f$  :  $L_f(T_f) = 242,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- capacité thermique massique du solide :  $c_{P,s} = 3,31 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- capacité thermique massique du liquide  $c_{P,l} = 3,06 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1. Le fait que la solution soit liquide à la température extérieure  $T_0 = -10^\circ\text{C} < T_f$  est appelé phénomène de surfusion. L'état obtenu peut-il être qualifié de stable ? de métastable ?
2. Que se passe-t-il lorsque la star tord la plaquette métallique ?
3. En imaginant deux chemins différents permettant, pour une masse unité d'acétate de sodium, de passer du liquide à  $T_0$  au solide à  $T_f$  sous la pression atmosphérique, déterminer l'enthalpie massique de fusion à  $T_0$ .
4. Sachant qu'on obtient juste après la torsion de la plaquette un mélange liquide-solide sous la pression atmosphérique, déterminer la température de ce mélange et la fraction  $x$  de solide dans ce mélange, en fonction de  $c_{P,l}$ ,  $L_f(T_f)$ ,  $T_0$  et  $T_f$ .
5. En dessous de quelle température extérieure  $T_c$  toute la masse de solution se solidifie-t-elle ?

### Exercice 17.8 La cloche de Quad Imodo

Quad Imodo, jeune étudiant enthousiaste, décide de réaliser une expérience nécessitant un vide poussé et une absence quasi-totale de transferts thermiques. Il utilise pour ce faire une cloche à vide de volume  $V = 3,0 \text{ L}$  qu'il a isolé thermiquement. Cette cloche est équipée d'une sonde de température et d'un manomètre permettant à Quad de suivre l'évolution de la température et de la pression intérieures au cours de l'opération de pompage. Une fois le « vide » réalisé, il le rompt brutalement en permettant à de l'air extérieur ( $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 290 \text{ K}$ ) de pénétrer par une soupape. Dès que la pression intérieure à la cloche atteint  $P_0$ , il ferme la soupape, et note la température  $T_1$  de l'air dans la cloche. À sa grande surprise, il constate que  $T_1 > T_0$ .

1. En considérant un système gazeux fermé *ad hoc*, caractériser l'évolution de ce dernier et déterminer la température  $T_1$ .
2. Calculer la variation d'énergie interne de ce système.
3. Quad abandonne la cloche dans cet état et part se coucher. Le lendemain, quand il retourne observer l'état du gaz enfermé dans la cloche hermétique, il constate que la température de ce dernier est égale à la température extérieure, maintenue à  $T_0$  (local climatisé).

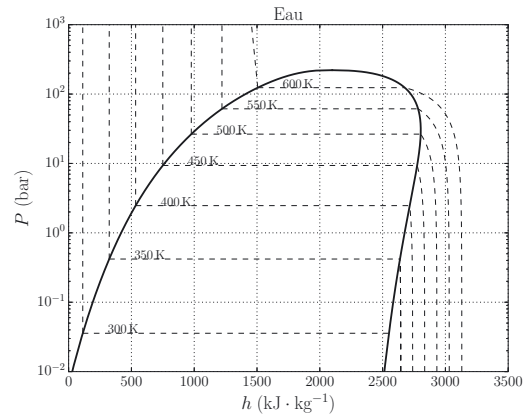
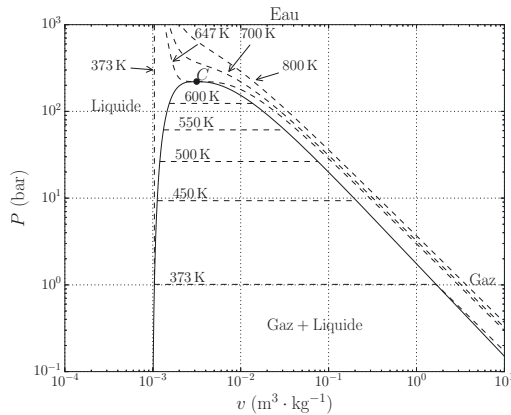
Expliquer pourquoi cette température a évolué. Déterminer la pression régnant dans la cloche.

Le coefficient adiabatique de l'air considéré comme un gaz parfait est  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = 1,4$  et on donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 17.9 Compressions variées

1,0 kg de vapeur d'eau (supposée être un gaz parfait) est initialement à la température  $T_I = 373 \text{ K}$  et occupe le volume  $V_I = 2,0 \text{ m}^3$  (état  $I$ ). On comprime très lentement cette vapeur de façon isotherme pour l'amener dans l'état  $K$  caractérisé par une pression  $P_K = 1,0 \text{ bar}$  et un volume occupé  $V_K = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}^3$ .

On donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , la capacité thermique massique à volume constante de l'eau vapeur,  $c_V = 1,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ainsi que la masse molaire de l'eau,  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



1. Placer les points représentatifs des états  $I$  et  $K$  sur le diagramme  $(P, v)$  et tracer le trajet suivi par l'eau entre  $I$  et  $K$ . Caractériser entièrement l'état  $K$ .
2. Placer les points  $I$  et  $K$  sur le diagramme  $(P, h)$ .
3. Calculer le travail reçu par l'eau au cours de la transformation  $IK$ .
4. Déterminer la variation d'énergie interne entre  $I$  et  $K$  (on pourra utiliser les données du diagramme  $(P, h)$ ). En déduire le transfert thermique reçu par l'eau entre  $I$  et  $K$ .
5. On réalise alors une compression isochore amenant le système à 450 K (état  $F$ ). Placer le point représentatif de  $F$  sur le diagramme  $(P, v)$  et le caractériser entièrement. Le placer ensuite sur le diagramme  $(P, h)$  et en déduire la variation d'enthalpie entre  $K$  et  $F$ .
6. Calculer le travail des forces de pression reçu par l'eau au cours de la transformation  $KF$ .
7. Déterminer la variation d'énergie interne entre  $K$  et  $F$ . En déduire le transfert thermique reçu par l'eau entre  $K$  et  $F$ .

## Corrections

### Interro de cours

1. Contrairement à l'énergie et à l'enthalpie qui sont des fonctions d'état et dont la variation au cours d'une transformation quelconque ne dépend que des états initial et final, travail et transfert thermique dépendent explicitement de la façon dont on réalise la transformation : **(a)** est faux. Une transformation adiabatique est telle que le transfert thermique est nul : la température du système peut tout de même évoluer, notamment lorsque que le système reçoit du travail : **(b)** est faux. Une transformation monobare est telle que  $P_{ext} = \text{cste}$  et  $P_i = P_f = P_{ext}$  : la pression du système peut donc varier au cours de cette transformation : **(c)** est faux. Par contre, **(d)** est bien vrai.
  
2. **(a)** est juste. Pour une compression isotherme très lente,  $P = \frac{nRT_A}{V}$ ,  $\delta W = -PdV$ , il vient donc
 
$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_A}{V} dV = -nRT_A \ln(V_B/V_A) : \text{ (b) est faux.}$$
 Lors d'une transformation monobare,  $Q = \Delta H = C_P(T_B - T_A) : \text{ (c) est faux.}$  Lors d'une transformation isochore,  $Q = \Delta U = C_V(T_B - T_A)$  et  $C_V = \frac{5}{2}nR$  dans les conditions usuelles : **(d)** est juste. Lors d'une transformation adiabatique,  $W_{A \rightarrow B} = \Delta U = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A) : \text{ (e) est juste.}$
  
3. La variation d'enthalpie de  $(\Sigma)$  est  $\Delta H = -2\Delta h_v$  : **(a)** est juste. La variation d'énergie interne est  $\Delta U = \Delta H - P_0\Delta V \neq \Delta H$  : **(b)** est faux. Le système subissant un changement de volume monobare au cours de ce changement d'état, le travail des forces de pression n'est pas nul : **(c)** est faux. Le transfert thermique reçu par le système est  $Q = \Delta H$  car la transformation est monobare : **(d)** est faux.
  
4. **(a)** Il faut considérer comme système l'ensemble formé par l'intérieur du calorimètre (isolé thermiquement de l'extérieur) et tout son contenu.  
**(b)** La transformation subie par ce système est monobare et adiabatique : la variation d'enthalpie de ce système est donc nulle.  
**(c)** Non, le contact thermique est brutal.  
**(d)** On a, par extensivité de  $H$  :  $\Delta H = C_c(T_f - T_1) + m_1c_{eau}(T_f - T_1) + m_2c_s(T_f - T_2) = 0$ . Il vient donc  $T_f = \frac{(C_c + m_1c_{eau})T_1 + m_2c_sT_2}{C_c + m_1c_{eau} + m_2c_s} = 26^\circ\text{C}$ . Le dispositif présentant forcément des fuites thermiques, cette température diminuera progressivement au cours du temps, pour finir par se stabiliser à la température extérieure.

### Exercice 17.1

1. En appliquant l'équation d'état :  $n = \frac{P_0Sh_0}{RT_0} = 2,6 \cdot 10^2 \text{ mol}$ .
2. Option 1 :
  - a. À partir du moment où Diana a sauté sur le couvercle, l'air subit une pression extérieure constante : son évolution est monobare, mais sans équilibre mécanique à l'état initial. Notons que l'évolution est ici brutale : il n'y a pas a priori équilibre mécanique entre l'air et le milieu extérieur.
  - b. Le présence de Diana sur le couvercle revient à ajouter une pression supplémentaire  $\frac{Mg}{S}$  : la pression extérieure imposée au cours de l'évolution est donc  $P_e = P_0 + \frac{Mg}{S}$ . Le travail élémentaire reçu par le gaz lorsque son volume varie de  $dV$  s'écrit  $\delta W_1 = -P_e dV$ . La transformation menant l'air d'un volume initial  $Sh_0$  à un volume final  $Sh_{f1}$ , le travail reçu par le gaz est finalement :
 
$$W_1 = - \left( P_0 + \frac{Mg}{S} \right) S(h_{f1} - h_0).$$

- c. La transformation étant adiabatique, le premier principe appliqué à l'air contenu dans le trou s'écrit :  $\Delta U_1 = W_1$  soit  $nC_{Vm}(T_{f1} - T_0) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) S(h_{f1} - h_0)$  où  $T_{f1}$  est la température de l'air dans l'état final. Utilisons l'équation d'état pour exprimer  $T_{f1}$  :

$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) Sh_{f1} = nRT_{f1} \quad \text{d'où} \quad nC_{Vm} \left[ \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \frac{Sh_{f1}}{nR} - T_0 \right] = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) S(h_{f1} - h_0)$$

$$\text{Finalement, avec } C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1} : h_{f1} = \frac{nC_{Vm}T_0 + \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) Sh_0}{\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) S \left(1 + \frac{C_{Vm}}{R}\right)} = \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{P_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}} \right) h_0.$$

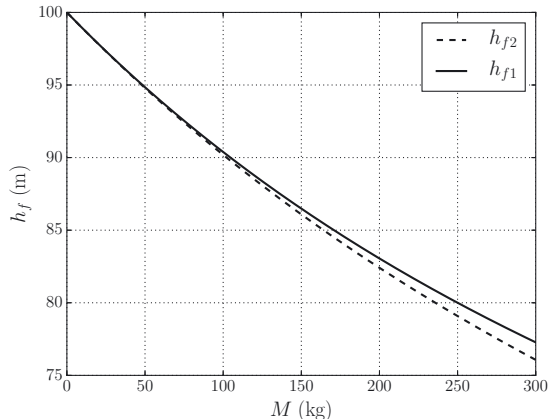
Numériquement,  $h_{f1} = 90,4 \text{ m}$  : Diana arrive juste au-dessus de la cache !

3. Option 2 :

- a. En ajoutant lentement le gravier sur le couvercle, Diana augmente progressivement la pression imposée à l'air dans le trou. Nous pouvons alors considérer que la transformation est une suite d'états d'équilibre du système constitué par l'air dans le trou. La transformation subie reste par ailleurs adiabatique.
- b. Nous pouvons alors utiliser la loi de Laplace entre l'état initial et l'état final de hauteur  $h_{f2}$ . Notons que la pression finale est la même que dans l'option 1.  $\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) (Sh_{f2})^\gamma = P_0(Sh_0)^\gamma$

$$\text{soit } h_{f2} = h_0 \left( \frac{P_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}} \right)^{1/\gamma} = 90,2 \text{ m. Diana arrive à la bonne hauteur.}$$

4. Les courbes demandées sont tracées ci-contre. Il apparaît que l'écart entre les hauteurs finales augmente lorsque  $M$  augmente, ce qui est logique : de petites masses posées sur le couvercle modifient modestement la pression subie par l'air à l'intérieur. Avec  $M = 100 \text{ kg}$ ,  $\frac{Mg}{S} = 0,16 \text{ bar} \ll P_0$  : les deux façons de procéder conduisent à des hauteurs finales qui ne diffèrent que de quelques centimètres, mais ceux-ci font toute la différence dans la quête du diamant jaune !
5. En prenant son temps (option 2), Diana arrivera juste à la bonne hauteur !



**Exercice 17.2**

- Appliquons la loi de Laplace :  $P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{a} = 10 \text{ Pa}$ . L'air est assimilé à un gaz parfait à la température  $T_0$  occupant le volume  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ . Ainsi,  $n = \frac{P_{\text{int}}V}{RT_0} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ .
- La loi de Laplace montre que la pression extérieure et la pression intérieure sont très voisines. Ainsi  $a \simeq \left(\frac{3nRT}{4\pi P_{\text{ext}}}\right)^{1/3} = (nT)^{1/3} \left(\frac{3R}{4\pi P_{\text{ext}}}\right)^{1/3}$ . En supposant la pression extérieure imposée, la loi reliant  $a$  à la température  $T$  et à  $n$  peut s'écrire :  $\frac{a}{(nT)^{1/3}} = \text{cste}$ .
- Lorsque la bulle s'approche de la lampe électrique, sa température va s'élever et son rayon va donc augmenter puisque la quantité d'air  $n$  dans la bulle est constante.

4. Utilisons la loi liant  $a$  à la température  $T$  et à  $n$  entre l'état initial de rayon  $a$  et de température  $T_0$  et l'état final de rayon  $a_f = \frac{4\gamma}{\Delta P} = 1,1 \text{ cm}$  et de température  $T_f : \frac{a_f}{T_f^{1/3}} = \frac{a}{T_0^{1/3}}$ . Nous en déduisons la température finale  $T_f = T_0 \left(\frac{a_f}{a}\right)^3 = 4,0 \cdot 10^2 \text{ K}$ .
5. Le volume de la bulle varie de  $4\pi a^2 da$  lorsque son rayon évolue de  $da$ . Le travail élémentaire des forces de pression s'exerçant sur le gaz interne est donc  $\delta W = -P_{\text{int}} 4\pi a^2 da$ . Le travail reçu au cours de la transformation est alors :  $W = - \int_a^{a_f} P_{\text{int}} 4\pi a^2 da = -P_{\text{ext}} \frac{4\pi}{3} (a_f^3 - a^3) - \int_a^{a_f} \frac{4\gamma}{a} 4\pi a^2 da$ . Finalement :  $W = -P_{\text{ext}} \frac{4\pi}{3} (a_f^3 - a^3) - 8\pi\gamma(a_f^2 - a^2) = -0,15 \text{ J}$ .
6. La variation d'énergie interne du gaz interne s'écrit  $\Delta U = nM_{CV}(T_f - T_0) = 0,42 \text{ J}$  en l'assimilant à un gaz parfait.
7. En appliquant le premier principe à l'air contenu dans la bulle :  $\Delta U = W + Q$ . Nous en déduisons le transfert thermique reçu par le gaz :  $Q = 0,57 \text{ J}$ .
8. Le travail fourni à la bulle par l'air extérieur s'écrit  $-P_{\text{ext}} \frac{4\pi}{3} (a_f^3 - a^3) = -0,15 \text{ J}$ . Notons qu'il est quasiment identique au travail calculé dans la question 5. car  $P_{\text{ext}} \simeq P_{\text{int}}$ . Ce travail est par ailleurs négatif : la bulle voit son volume augmenter ; c'est donc bien elle qui fournit du travail au milieu extérieur.

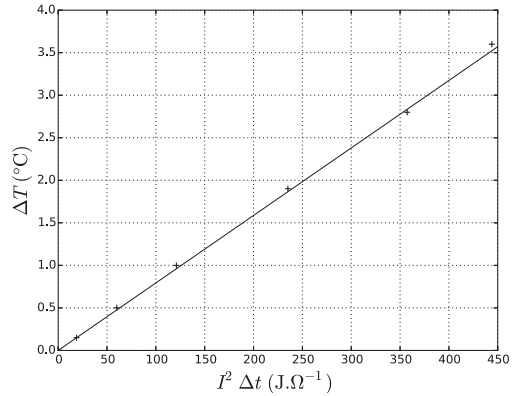
### Exercice 17.3

- Seul le graphe 1 convient : la première étape est bien une isobare (segment de droite horizontale) et la deuxième une isotherme.
- Il s'agit d'un gaz parfait monoatomique :  $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$  dans les conditions de l'expérience.
- Nous lisons les volumes initial  $V_1 = 10 \text{ L}$  et intermédiaire  $V' = 13,3 \text{ L}$  (à la fin de la première étape). Le travail reçu par la mole de gaz est alors  $W_1 = -P_1(V' - V_1) = -8,3 \cdot 10^2 \text{ J}$ . La variation d'énergie interne se calcule facilement :  $\Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T' - T_1) = 1,25 \cdot 10^3 \text{ J}$ ,  $T'$  étant la température à la fin de cette étape soit  $T' = T_2 = 400 \text{ K}$ . L'application du premier principe de la thermodynamique à la mole de gaz permet d'obtenir  $Q : Q = \Delta U_1 - W_1 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J}$ .
- La deuxième étape est une isotherme. L'énergie interne ne dépendant que de la température, le premier principe donne :  $\Delta U_2 = 0 = W_2 + Q_2$ .  
Calculons alors le travail  $W_2 : W_2 = \int_{V'}^{V_2} -PdV = - \int_{V'}^{V_2} \frac{RT_2}{V} dV = -RT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V'}\right)$ . Le volume final se lit sur le graphe :  $V_2 = 16,6 \text{ L}$ . Nous en déduisons :  $W_2 = -Q_2 = -7,4 \cdot 10^2 \text{ J}$ .
- Le travail total reçu par le gaz est alors  $W = W_1 + W_2 = -1,6 \text{ kJ} < 0$  : au cours de la détente, c'est le gaz qui fournit un travail positif au milieu extérieur.

### Exercice 17.4

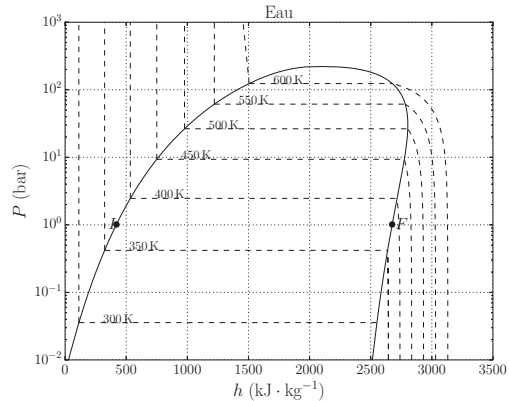
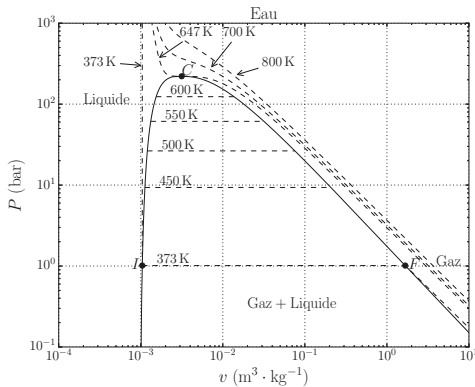
- Le système fermé évolue sous pression extérieure constante. Lors de l'évolution monobare d'un système fermé entre un état initial et un état final d'équilibre mécanique ( la pression initiale et la pression finale du système sont égales à la pression extérieure imposée)  $\Delta H = Q$ , où  $Q$  est le transfert thermique reçu par le système. Le résistor de résistance  $R$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  pendant une durée  $\Delta t$  fournit le transfert thermique  $Q = RI^2\Delta t$  au système. Finalement :  $\Delta H = RI^2\Delta t$ . La variation d'enthalpie s'exprime par ailleurs comme  $\Delta H = (C + m_1 c_1)\Delta T$  où  $\Delta T$  est la variation de la température du système au cours de la transformation. Finalement :  $(C + m_1 c_1)\Delta T = RI^2\Delta t$ .

- Le transfert thermique reçu au cours de chaque intervalle de temps  $\Delta t = 4$  min séparant deux mesures successives est  $RI^2\Delta t$ . Il est alors judicieux de tracer  $\Delta T$  en fonction de  $I^2\Delta t$ .
- Nous constatons que les mesures sont compatibles avec l'évolution linéaire de  $\Delta T$  avec  $I^2\Delta t$  prévue par l'approche théorique. La pente de la courbe est  $p = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \Omega \cdot \text{J}^{-1} = R/(C + m_1c_l)$ . Nous en déduisons  $R = 6,0 \Omega$ .



### Exercice 17.5

- Le point  $I$  se trouve à l'extrémité gauche du palier de changement d'état à la pression  $P_e$  sur les deux diagrammes.



- Le point  $F$  se trouve à l'extrémité droite du palier de changement d'état à la pression  $P_e$  sur les deux diagrammes : la transformation est isobare donc également isotherme.
- La variation de volume massique se lit sur le diagramme de Clapeyron. Comme le système est constitué de 3,0 kg d'eau :  $\Delta V = 3(v_F - v_I) \simeq 3v_F = 5,1 \text{ m}^3$ .  
La variation d'enthalpie massique  $\Delta h = h_F - h_I = 2,3 \cdot 10^3 \text{ kJ}$  se lit sur le diagramme  $(P, h)$ . Nous en déduisons la variation d'enthalpie de l'eau :  $\Delta H = 3\Delta h = 6,9 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .
- La transformation étant isobare, le premier principe peut s'écrire  $\Delta H = Q$ . Nous en déduisons que le transfert thermique reçu par l'eau est  $Q = 6,9 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . Le travail des forces de pression se calcule facilement pour une transformation isobare :  $W = -P_I(V_F - V_I) = -5,1 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .
- La variation d'énergie interne s'obtient en appliquant le premier principe à l'eau entre les états  $I$  et  $F$  :  $\Delta U = W + Q = 6,4 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .

**Exercice 17.6**

1. La transformation peut être qualifiée d'isobare puisque la pression de l'eau reste constante et égale à la pression extérieure.
2. L'isobare  $P = 20$  bar et les isothermes  $T = T_i$  et  $T = T_f$  se coupent en deux points du diagramme de Clapeyron dont les abscisses correspondent aux volumes massiques initial  $v_i = 1,003 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  et final  $v_f = 1,026 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . Nous en déduisons les volumes occupés par les 2 kg d'eau :  $V_i = 2v_i = 2,006 \text{ dm}^3$  et  $V_f = 2v_f = 2,052 \text{ dm}^3$ . De la même manière, l'isobare  $P = 20$  bar et les isothermes  $T = T_i$  et  $T = T_f$  se coupent en deux points du diagramme  $(P, h)$  dont les abscisses correspondent aux enthalpies massiques initiale  $h_i = 113 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et finale  $h_f = 323 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Nous en déduisons les enthalpies des 2 kg d'eau :  $H_i = 2h_i = 226 \text{ kJ}$  et  $H_f = 2h_f = 646 \text{ kJ}$ .
3. La variation d'enthalpie est alors  $\Delta H = H_f - H_i = 420 \text{ kJ}$ . La transformation étant isobare,  $\Delta H = Q$ . Le transfert thermique est  $Q = 420 \text{ kJ}$ .
4. Par définition,  $U = H - PV$ . On en déduit  $\Delta U = \Delta H - P_{\text{ext}}[V_f - V_i] \simeq 420 \text{ kJ}$ . L'erreur relative commise en confondant  $\Delta H$  et  $\Delta U$  est  $\frac{\Delta H - \Delta U}{\Delta H} = \frac{P_{\text{ext}}[V_f - V_i]}{\Delta H} = 0,022\%$ .
5. La lecture du diagramme  $(P, h)$  nous apprend que  $h$  augmente lorsque  $T$  augmente. La capacité thermique massique de l'eau liquide est définie par la relation  $dh = cdT$ . En utilisant par exemple les isothermes  $T_i$  et  $T_f$  :  $c \simeq \frac{h_f - h_i}{T_f - T_i} = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .
6. La pente négative des isothermes dans le diagramme de Clapeyron nous indique que  $v$  diminue lorsque  $P$  augmente à  $T$  fixée.

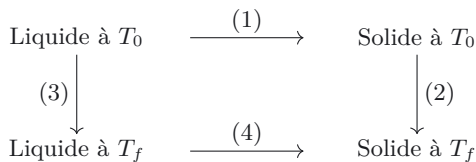
La pente des isothermes peut être évaluée :  $\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = -\frac{0,005}{100} = -5 \cdot 10^{-5} \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{bar}^{-1}$ . Comme le volume massique est de l'ordre de  $v = 1 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\chi_T \simeq 5 \cdot 10^{-5} \text{ bar}^{-1} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ .

7. Le diagramme de Clapeyron montre que  $v$  augmente lorsque  $T$  augmente sur une isobare. Estimons  $\alpha$  pour une pression  $P = P_{\text{ext}}$  pour une température voisine de 325 K. On peut écrire :  $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \simeq \frac{v_f - v_i}{T_f - T_i} \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Le volume massique étant de l'ordre de  $v = 1 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\alpha \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

Notons que ce coefficient dépend apparemment fortement de la température : la différence de volume massique entre les isothermes 400 K et 350 K est très supérieure à celle entre les deux isothermes 350 K et 400 K.

**Exercice 17.7**

1. L'état le plus stable de l'acétate de sodium trihydraté à  $-10^\circ\text{C}$  est l'état solide. L'état liquide, dans ces conditions de pression et de température, est métastable.
2. En tordant la plaquette métallique, la star apporte l'énergie nécessaire au changement d'état et à l'évolution du système vers son état le plus stable.
3. Proposons les deux chemins suivants :



Le chemin (a) est constitué de deux étapes successives :

- (1) est la solidification à la température  $T_0$  sous la pression atmosphérique ; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_1 = -L_f(T_0)$ .
- (2) est le chauffage du solide de  $T_0$  à  $T_f$  sous la pression atmosphérique ; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_2 = c_{P,s}(T_f - T_0)$ .

Le chemin (b) est constitué de deux étapes successives :

- (3) est le chauffage du liquide de  $T_0$  à  $T_f$  sous la pression atmosphérique ; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_3 = c_{P,l}(T_f - T_0)$ .

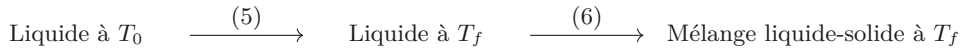


- (4) est la solidification à la température de  $T_f$  sous la pression atmosphérique; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_4 = -L_f(T_f)$ .

L'enthalpie étant une fonction d'état, la variation d'enthalpie  $\Delta H$  ne dépend pas du chemin suivi :  $\Delta H_a = \Delta H_b$  soit  $\Delta H_1 + \Delta H_2 = \Delta H_3 + \Delta H_4$ .

Nous en déduisons :  $L_f(T_0) = L_f(T_f) + (c_{P,s} - c_{P,l})(T_f - T_0) = 2,6 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

4. Nous obtenons quasi-instantanément un mélange liquide-solide : la transformation peut être considérée comme adiabatique. La transformation étant par ailleurs isobare, la variation d'enthalpie du système est égale au transfert thermique reçu, nul dans le cas adiabatique : l'enthalpie du système est constante. Imaginons, en raisonnant sur l'unité de masse, le chemin suivant en deux étapes (5) et (6) :



— (5) est le chauffage du liquide de  $T_0$  à  $T_f$  sous la pression atmosphérique; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_5 = c_{P,l}(T_f - T_0)$ .

— (6) est la solidification partielle à la température de  $T_f$  sous la pression atmosphérique; la variation d'enthalpie du système est  $\Delta H_6 = -xL_f(T_f)$ .

Or  $\Delta H = \Delta H_5 + \Delta H_6 = 0$ . Nous en déduisons  $x = \frac{c_{P,l}(T_f - T_0)}{L_f(T_f)} = 0,86$ .

5. Nous cherchons la température extérieure  $T_c$  pour laquelle  $x = 1 = \frac{c_{P,l}(T_f - T_c)}{L_f(T_f)}$ . On obtient ainsi :

$$T_c = T_f - \frac{L_f(T_f)}{c_{P,l}} = -21 \text{ }^\circ\text{C}.$$

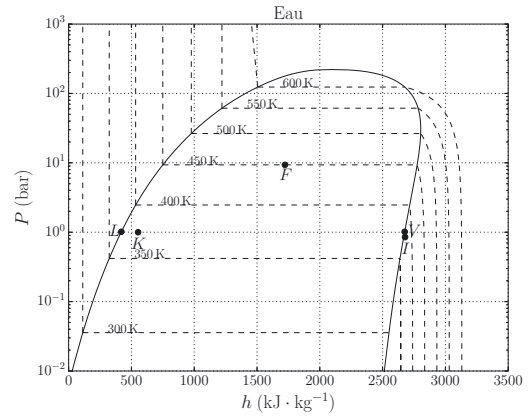
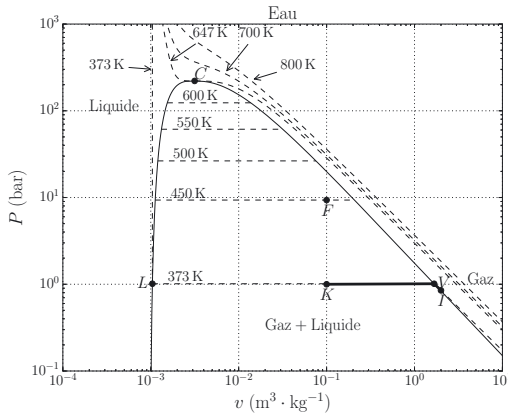
### Exercice 17.8

1. Considérons le système fermé constitué des  $n$  moles d'air extérieur qui vont pénétrer dans la cloche au cours de l'expérience. La transformation est brutale et à ce titre, nous pourrions supposer que les transferts thermiques n'ont pas le temps de se réaliser; en d'autres termes, nous considérerons l'évolution adiabatique. Par ailleurs, le système est soumis à une pression extérieure  $P_0$  constante : l'évolution est monobare. Le travail reçu par l'air est le travail des forces de pression nécessaire pour faire rentrer le volume d'air  $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$  dans la cloche vide, soit  $W = P_0V_0$ . Appliquons alors le premier principe de la thermodynamique au système fermé :  $\Delta U = W$  soit  $nC_{V,m}(T_1 - T_0) = P_0V_0 = nRT_0$ . Finalement :  $T_1 = T_0 + \frac{R}{C_{V,m}}T_0 = \gamma T_0 = 4,1 \cdot 10^2 \text{ K}$ .
2. Sachant que  $P_0V = nRT_1$ , la variation d'énergie interne s'écrit :  $\Delta U = nC_{V,m}(T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = \frac{P_0V}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) = 2,1 \cdot 10^2 \text{ J}$ .
3. La cloche n'était pas parfaitement calorifugée et des transferts thermiques ont donc conduit l'air intérieur vers un état d'équilibre thermique avec l'extérieur. Notons  $P$  la pression régnant dans la cloche. En supposant que celle-ci soit parfaitement étanche, la quantité  $n$  n'a pas varié et l'équation d'état du gaz parfait donne alors :  $n = \frac{PV}{RT_0} = \frac{P_0V}{RT_1}$  d'où  $P = \frac{T_0}{T_1}P_0 = 0,71 \text{ bar}$ .

### Exercice 17.9

1. Notons tout d'abord que le système est constitué d'un kilogramme d'eau : le volume d'eau est égal au volume massique multiplié par un. Les points  $I$  et  $K$  se placent aisément sur le diagramme de Clapeyron puisque les volumes sont connus et qu'ils figurent tous deux sur l'isotherme 373 K. La pression  $P_I$  de l'état initial se lit sur l'axe des ordonnées :  $P_I = 0,85 \text{ bar}$ . Nous pouvions aussi obtenir  $P_I$  en supposant que la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait :  $P_I = \frac{RT_I}{MV_I} = 0,86 \text{ bar}$ .

Dans l'état  $K$ , l'eau est en équilibre liquide-vapeur. Le titre en vapeur  $x_K$  s'obtient à l'aide du théorème des moments :  $x_K = \frac{v_K - v_L}{v_V - v_L} = 0,06$ .



2. Le point  $I$  se place sur le diagramme  $(P, h)$  sur l'isotherme 373 K à la pression  $P_I$ . Le point  $K$  se trouve sur le palier de pression 1,0 bar de sorte que  $LK = x_K LV$ . Notons que l'enthalpie massique de l'eau est alors  $h_K = 5,5 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
3. La transformation  $IK$  se fait en deux étapes :

- Étape 1 : compression isotherme de la vapeur d'eau jusqu'à l'état  $V$  (vapeur saturante). La vapeur d'eau étant assimilée à un gaz parfait, le travail reçu s'écrit :

$$W_1 = - \int_{V_I}^{V_V} P dV = - \frac{RT_I}{M} \int_{V_I}^{V_V} \frac{dV}{V} = - \frac{RT_I}{M} \ln \left( \frac{V_V}{V_I} \right) = - \frac{RT_I}{M} \ln \left( \frac{P_I}{P_K} \right) = 28 \text{ kJ}.$$

- Étape 2 : compression isobare avec changement d'état partiel. Le travail reçu par l'eau est alors :  $W_2 = -P_K(V_K - V_V)$ , avec  $V_V = 1,7 \text{ m}^3$  (lecture sur le diagramme de Clapeyron ou utilisation de l'équation d'état du gaz parfait). Ainsi  $W_2 = 1,6 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .

Le travail reçu par l'eau au cours de la transformation  $IK$  est donc  $W = W_1 + W_2 = 1,9 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .

4. Le diagramme  $(P, h)$  nous permet de lire la variation d'enthalpie de l'eau entre  $I$  et  $K$  :  $\Delta H = (h_K - h_I) = -2,2 \cdot 10^3 \text{ kJ}$  puisque  $h_I = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_K = 5,5 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Or par définition,  $u = h - Pv$ . Nous en déduisons la variation d'énergie interne :  $\Delta U = \Delta u = \Delta h - \Delta(Pv)$  soit  $\Delta U = \Delta h - (P_K v_K) + (P_I v_I) = -2,0 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . L'application du premier principe à l'eau entre les états  $I$  et  $K$  nous permet d'obtenir le transfert thermique reçu :  $Q = \Delta u - W$  soit  $Q = -2,2 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .

5. Le chemin de  $K$  à  $F$  se trace facilement sur le diagramme de Clapeyron, l'isochore étant représentée par un segment de droite vertical menant au palier de température 450 K (voir figure ci-dessus). Le théorème des moments permet alors de déterminer le titre en vapeur  $x_F = 0,48$ .

Le point  $F$  se place alors sur le diagramme  $(P, h)$  : c'est le point du palier de changement d'état à 450 K pour lequel le titre est  $x_F = 0,48$ . L'enthalpie de l'eau est alors  $h_F = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kJ}$  et la variation d'enthalpie entre  $K$  et  $F$  est  $\Delta H' = h_F - h_K = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .

6. La transformation  $KF$  étant isochore, le travail  $W'$  reçu par l'eau est nul.
7. La variation d'énergie interne de l'eau s'écrit :  $\Delta U' = (u_F - u_K) = (h_F - h_K - [P_F v_F - P_K v_K])$ . Nous lisons la pression de vapeur saturante à 450 K sur le diagramme  $(P, v)$  :  $P_F = 9 \text{ bar}$ . Finalement :  $\Delta U' = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . L'application du premier principe à l'eau entre les états  $K$  et  $F$  nous donne alors le transfert thermique reçu par l'eau :  $Q' = \Delta U' - W' = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .

# Second principe

## L'essentiel du cours

### Contexte

Une transformation est-elle toujours possible ? Peut-on toujours en inverser le sens ?

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le premier principe de la thermodynamique nous permet de déterminer l'origine de la variation d'énergie interne d'un système au cours d'une transformation ainsi que les transferts thermiques entre le système et l'extérieur.

En revanche, il ne nous permet pas de déterminer si une transformation est possible et, si elle l'est, il n'interdit pas qu'elle puisse se faire en sens inverse. Autrement dit il ne nous renseigne pas sur les caractères possible ou impossible, réversible ou irréversible d'une transformation.

Pour introduire la notion d'irréversibilité, nous considérons les trois expériences suivantes :

- **Expérience 1** : un calorimètre, de capacité thermique négligeable, contient initialement une masse d'eau liquide  $m_1$  à la température  $T_1 = 300$  K. À l'instant  $t = 0$ , on ajoute une masse d'eau liquide  $m_2$  à la température  $T_2 = 350$  K, puis on agite. On suit l'évolution de la température et on constate qu'elle finit par se stabiliser sur une valeur finale  $T_f$ .
- **Expérience 2** : de la vapeur d'eau est contenue dans un cylindre calorifugé et fermé par un piston mobile. Initialement elle se trouve dans un état d'équilibre  $A$  de paramètres d'état ( $P_A = 1,00$  bar,  $T_A = 400$  K et  $v_A = 1,83$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>). On déstabilise le système en poussant brutalement le piston qui se met à exercer instantanément sur le gaz une pression extérieure constante  $P_{ext} = 5,00$  bar. Après des oscillations du piston, le système se stabilise dans l'état d'équilibre  $B$  de paramètres d'état ( $P_B = 5,00$  bar,  $T_B = 680$  K,  $v_B = 0,62$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>).
- **Expérience 3** : de la vapeur d'eau est contenue dans un cylindre non calorifugé, en contact avec un thermostat de température  $T_C = 500$  K et fermé par un piston mobile. Initialement elle se trouve dans un état d'équilibre  $C$  ( $P_C = 1,00$  bar,  $T_C = 500$  K et  $v_C = 2,30$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>). On déstabilise le système en poussant brutalement le piston qui se met à exercer instantanément sur le gaz une pression extérieure constante  $P_{ext} = 5,00$  bar constante. Après des oscillations du piston, le système se stabilise dans l'état d'équilibre  $D$  ( $P_D = 5,00$  bar,  $T_D = 500$  K,  $v_D = 0,45$  m<sup>3</sup> · kg<sup>-1</sup>).

□ **Comment caractériser ces expériences ?**

- **Expérience 1** : c'est une transformation **monobare adiabatique**. Au cours de la transformation le système n'échange pas d'énergie par transfert thermique avec l'extérieur et il reste en équilibre mécanique avec l'atmosphère dont la pression est constante.
- **Expérience 2** : c'est une **compression adiabatique**.

- **Expérience 3** : c'est une **compression monotherme**. Le système reste en contact thermique avec un thermostat et les états extrêmes sont des états d'équilibre thermique.

Aucune de ces transformations n'est infiniment lente ; le système n'est en équilibre qu'à l'état initial et à l'état final.

## ■ 1 Notions de réversibilité et d'irréversibilité

La notion de réversibilité est liée à la faculté pour le système et son extérieur, c'est-à-dire finalement l'Univers, de pouvoir revenir à chaque instant, lors de son évolution, dans son état immédiatement antérieur, sous l'effet d'une modification infinitésimale des contraintes extérieures.

Une transformation qui ne satisfait pas à ce critère est qualifiée d'irréversible.

### Méthode 18.1 : Identifier des causes physiques de l'irréversibilité

Une transformation est irréversible si elle présente au moins une des propriétés suivantes :

- transformation non infiniment lente ;
- inhomogénéité de température, de pression ou de concentration au sein du système ;
- déséquilibre entre le système et l'extérieur pendant la transformation ;
- phénomènes de mélange ;
- phénomènes de dissipation d'énergie (électrique ou mécanique) ;
- réaction chimique au sein du système lors de la transformation.

➔ Exercices (18.1) (18.2) (18.4)

- Quelles sont les causes d'irréversibilité des trois expériences présentées ?

Dans l'expérience 1, la rapidité de la transformation, la différence de température entre les deux masses d'eau et le phénomène de mélange sont causes d'irréversibilité.

Dans les expériences 2 et 3, les transformations ne sont pas infiniment lentes et le système n'est pas à l'équilibre mécanique avec l'extérieur pendant la transformation.

- Est-il possible de modifier les conditions de nos expériences contextuelles pour les rendre réversibles ?

### Définition : Transformation idéale réversible

Une transformation est réversible si elle vérifie chacun des trois points suivants :

- elle est infiniment lente : le système passe par une succession continue d'états d'équilibres ;
- aucune cause d'irréversibilité n'intervient au cours de la transformation ;
- à chaque instant de la transformation, on peut en inverser le sens par une modification infinitésimale des contraintes extérieures.

Il n'est pas possible de rendre réversible la transformation de l'expérience 1 en raison du phénomène de mélange. Dans l'expérience 2 on peut imaginer se rapprocher d'une transformation réversible en poussant **très lentement** le piston et en augmentant très progressivement la pression extérieure afin que le système soit à chaque instant très proche d'un état d'équilibre mécanique avec l'extérieur

( $P = P_{ext}$ ). Dans l'expérience 3 il faudrait procéder de même, en veillant en outre à être très proche d'un état d'équilibre thermique avec le thermostat ( $P = P_{ext}$  et  $T = T_C$ ).



Aucune transformation réelle ne peut être rendue parfaitement réversible, car pour que le système soit à chaque instant en équilibre il faudrait qu'elle soit infiniment lente. En outre il a besoin de déséquilibres avec l'extérieur pour évoluer.



La transformation réversible est un modèle qui nous permet de déterminer le transfert énergétique optimal que l'on peut obtenir lors d'une transformation.

## ■ 2 Second principe de la thermodynamique

Alors que le premier principe exprime la conservation de l'énergie, le second principe permet de prévoir le sens des transformations possibles et de quantifier l'irréversibilité.

### Second principe de la thermodynamique

À tout système fermé est associée une fonction d'état extensive appelée **entropie**, notée  $S$  et dont la variation lors d'une transformation d'un état  $I$  à un état  $F$  s'écrit :

$$\Delta S_{IF} = S_F - S_I = S_e + S_c \quad (S, S_e \text{ et } S_c \text{ en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1})$$

- $S_e$  est l'**entropie échangée** avec l'extérieur au cours de la transformation :
  - $S_e = 0$  dans le cas d'une transformation adiabatique ;
  - $S_e = \frac{Q}{T_s}$  dans le cas où le système reçoit un transfert thermique  $Q$  d'un thermostat de température  $T_s$ .
- $S_c$  est l'**entropie créée au sein du système** au cours de la transformation :
  - $S_c = 0$  pour une transformation réversible ;
  - $S_c > 0$  pour une transformation irréversible.



- La variation d'entropie  $\Delta S_{IF} = S_F - S_I$  ne dépend que des états  $I$  et  $F$  car l'entropie est une fonction d'état. En revanche, **les entropies échangée et créée dépendent de la transformation entre ces deux états.**
- L'énoncé du second principe donne les moyens du calcul de l'entropie échangée mais pas ceux de l'entropie créée.

### □ En quoi le second principe est-il un principe d'évolution ?

L'énoncé du second principe nous permet de préciser la notion d'irréversibilité.

Considérons un système fermé isolé, c'est-à-dire ne pouvant échanger aucune énergie avec l'extérieur, à l'équilibre. Le relâchement d'une contrainte extérieure permet de déclencher une évolution de ce système. Au cours de la transformation,  $Q = 0$  et donc  $\Delta S_{IF} = S_c$ . Pour une transformation réelle  $S_c > 0$  donc  $\Delta S_{IF} > 0$ . Il s'en suit que ce système isolé ne peut revenir spontanément à son état initial car on aurait pour cette transformation inverse une variation d'entropie  $\Delta S_{FI} < 0$ , en contradiction avec le second principe. D'après le second principe, **une transformation d'un système isolé ne se fait jamais en réduisant l'entropie**, c'est pourquoi ce principe détermine le sens d'évolution des systèmes.

Dans l'expérience 1, le système constitué des deux masses d'eau est isolé et ne revient pas spontanément à son état initial après la transformation.

□ Comment quantifier l'irréversibilité d'une transformation ?

C'est en calculant l'entropie créée lors d'une transformation qu'on peut quantifier son degré d'irréversibilité. Plus l'entropie créée est importante plus la transformation est irréversible.

**Méthode 18.2 : Calcul de l'entropie créée au cours d'une transformation**

- Appliquer le second principe au système étudié :  $\Delta S_{IF} = S_e + S_c$ .
- Déterminer  $\Delta S_{IF}$  à partir d'une relation fournie, à l'aide d'une table ou d'un diagramme.
- Calculer l'entropie échangée au cours de la transformation :  $S_e = \frac{Q_{IF}}{T_s}$  où  $T_s$  est la température du thermostat avec lequel se fait le transfert thermique.
- En déduire  $S_c = \Delta S_{IF} - S_e$ .

➔ Exercices (18.3) (18.4)

💡 |  $Q_{IF}$  se calcule en appliquant la méthode 17.2

**Retour aux expériences contextuelles**

La figure 18.1 représente deux diagrammes de l'eau : le diagramme enthalpique à gauche, sur lequel sont représentées des courbes isentropiques ( $s = cste$ ) et le diagramme entropique à droite, sur lequel sont représentées des courbes isobariques ( $P = cste$ ).

Sur ces diagrammes nous avons porté les points A, B, C et D représentatifs des états d'équilibre du système dans les expériences 2 et 3. Nous avons également porté le point B' représentatif de l'état d'équilibre qui serait atteint si la transformation de l'expérience 2 était rendue réversible.

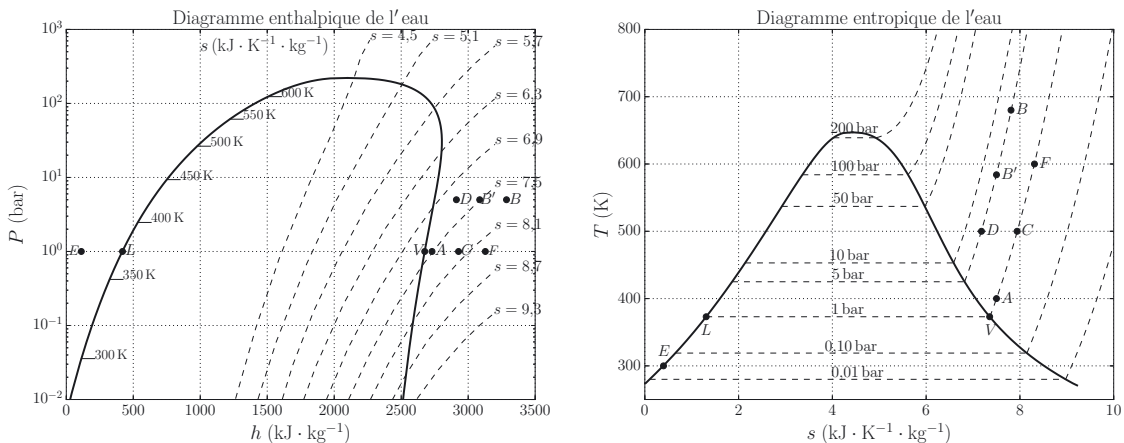


Figure 18.1. Représentation des états d'équilibre des expériences 2 et 3 dans les diagrammes enthalpique et entropique.



La transformation ( $AB'$ ) est adiabatique réversible donc  $\Delta S_{AB'} = 0$ . C'est ce qui permet de placer le point  $B'$ . Nous constatons que la transformation adiabatique réversible ne mène pas au même état final que la transformation adiabatique irréversible.

Nous déterminons les variations d'entropie au cours des deux transformations par lecture du diagramme entropique :  $\Delta S_{AB} = 0,32 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\Delta S_{CD} = -0,74 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Pour le calcul des échanges par transferts thermiques, appliquons le premier principe. En prenant une masse  $m = 1 \text{ kg}$  de vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait de masse molaire  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  :

- Compression adiabatique  $AB$  :  $Q_{AB} = 0$ .
- Compression monotherme  $CD$  lors laquelle la pression extérieure reste égale à  $P_D$  :  
 $\Delta U_{CD} = W_{CD} + Q_{CD}$ ,  $\Delta U_{CD} = C_V(T_D - T_C) = 0$  et  $W_{CD} = -P_D(V_D - V_C)$ .  
 Donc :  $Q_{CD} = -W_{CD} = P_D \left( \frac{nRT_D}{P_D} - \frac{nRT_C}{P_C} \right) = \frac{m}{M} RT_C \left( 1 - \frac{P_D}{P_C} \right) = -9,2 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .
- Compression isotherme infiniment lente  $CD'$  (pour laquelle  $D' \equiv D$ ) :  
 $Q_{CD'} = -W_{CD'}$  et  $W_{CD'} = - \int_{V_C}^{V_D} P dV = nRT_C \int_{P_C}^{P_D} \frac{dP}{P} = \frac{m}{M} RT_C \ln \left( \frac{P_D}{P_C} \right) = 3,7 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .  
 Donc :  $Q_{CD'} = -3,7 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ .

Nous en déduisons les valeurs des entropies échangées puis des entropies créées :

Transformation	$AB$	$AB'$	$CD$	$CD'$
Modélisation	adiabatique brutale	adiabatique infiniment lente	monotherme brutale	isotherme infiniment lente
$\Delta S$	$0,32 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$0,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,74 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,74 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$
$Q$	$0,00 \text{ kJ}$	$0,00 \text{ kJ}$	$-9,2 \cdot 10^2 \text{ kJ}$	$-3,7 \cdot 10^2 \text{ kJ}$
Temp. du thermostat			$T_C = 500 \text{ K}$	$T_C = 500 \text{ K}$
Expression de $S_e$			$Q_{CD}/T_C$	$Q_{CD'}/T_C$
Valeur de $S_e$	$0,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$0,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$-1,8 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$-0,74 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$
$S_c = \Delta S - S_e$	$0,32 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$0,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$1,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$	$0,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$

Les transformations  $AB$  et  $CD$  sont irréversibles puisque l'entropie créée est positive, alors que les transformations  $AB'$  et  $CD'$  sont réversibles puisqu'elles ne créent pas d'entropie.

### ■ 3 Entropie d'un corps pur

La variation d'entropie d'un corps pur peut s'écrire en fonction d'un couple de variables d'état  $(T, V)$ ,  $(T, P)$  ou  $(P, V)$ .

□ **Comment s'exprime la variation d'entropie d'un gaz parfait ?**

Pour un gaz parfait, on peut établir les relations suivantes :

$$(18.1) \quad \Delta S_{IF} = C_V \ln \frac{T_F}{T_I} + nR \ln \frac{V_F}{V_I}$$

$$(18.2) \quad \Delta S_{IF} = C_P \ln \frac{T_F}{T_I} - nR \ln \frac{P_F}{P_I}$$

$$(18.3) \quad \Delta S_{IF} = C_P \ln \frac{V_F}{V_I} + C_V \ln \frac{P_F}{P_I}$$



L'une quelconque de ces trois expressions permet de retrouver les deux autres en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits  $PV = nRT$  et la relation de Mayer  $C_P - C_V = nR$ .

### Retour aux expériences contextuelles

En considérant la vapeur d'eau ( $c_P = 1,55 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) comme un gaz parfait, la relation 18.2 permet de déterminer par le calcul les variations de son entropie lors de nos expériences 2 et 3. On obtient respectivement  $\Delta S_{AB} = 0,32 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\Delta S_{CD} = -0,74 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ . On retrouve ainsi les valeurs déterminées en utilisant le diagramme entropique de l'eau, ce qui permet de vérifier, qu'aux pressions et températures de ces expériences, la vapeur d'eau se comporte bien comme un gaz parfait.

#### □ Que peut-on dire d'une transformation isentropique d'un gaz parfait ?

Dans le cas d'une transformation isentropique,  $\Delta S_{IF} = 0$ . L'équation 18.3 conduit alors à :

$$\frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \frac{V_F}{V_I} + \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{P_F}{P_I} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{P_F V_F^\gamma}{P_I V_I^\gamma} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_F V_F^\gamma = P_I V_I^\gamma$$

#### Loi de Laplace

Au cours d'une transformation isentropique d'un gaz parfait :  $PV^\gamma = \text{cste}$  avec  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$

#### Méthode 18.3 : Utilisation de la loi de Laplace

Lors d'une transformation isentropique d'un gaz parfait de coefficient  $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$  on peut écrire :

$$P_I V_I^\gamma = P_F V_F^\gamma$$

En utilisant la loi des gaz parfaits  $PV = nRT$  on peut obtenir des expressions équivalentes :

$$T_I V_I^{\gamma-1} = T_F V_F^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad P_I^{1-\gamma} T_I^\gamma = P_F^{1-\gamma} T_F^\gamma$$

➔ Exercice (18.4)

#### □ Comment s'exprime la variation d'entropie d'un système condensé incompressible et indilatable ?

On montre que dans le cas d'un système condensé incompressible et indilatable de masse  $m$  et de capacité thermique massique  $c$ , la variation d'entropie au cours d'une transformation  $IF$  s'écrit :

$$(18.4) \quad \Delta S = mc \ln \frac{T_F}{T_I}$$



## Retour aux expériences contextuelles

Revenons cette fois sur l'expérience 1.

Considérons le système fermé **isolé** composé du calorimètre et de ses instruments (supposés de capacités thermiques négligeables) ainsi que des masses  $m_1$  et  $m_2$  d'eau liquide. L'application du second principe à ce système, entre les états extrêmes de la transformation conduit à :

$$\Delta S_{IF} = S_e + S_c$$

Le système étant supposé calorifugé, l'entropie échangée est nulle :  $S_e = 0$  et donc :  $S_c = \Delta S_{IF}$ . Pour déterminer  $\Delta S_{IF}$ , nous utilisons l'extensivité de l'entropie.

### Méthode 18.4 : Exploiter l'extensivité de l'entropie

Lorsqu'un système  $\mathcal{S}$  est constitué de sous-systèmes disjoints  $\mathcal{S}_i$  son entropie est égale à la somme de celles de ses sous-systèmes. Sa variation est donc égale à la somme des variations de celles de ses sous-systèmes.

$$S = \sum_i S_i \Rightarrow \Delta S = \sum_i \Delta S_i$$

### ➔ Exercices (18.2) (18.5)

Ainsi, pour notre système :  $\Delta S_{IF} = \Delta S_{1,IF} + \Delta S_{2,IF} + \Delta S_{\text{cal},IF}$  avec  $\Delta S_{1,IF} = m_1 c \ln \frac{T_f}{T_1}$ ,  $\Delta S_{2,IF} = m_2 c \ln \frac{T_f}{T_2}$  et  $\Delta S_{\text{cal},IF} = 0$  puisqu'on néglige la capacité thermique du calorimètre.

En considérant  $m_1 = m_2 = m$ , nous obtenons  $S_c = \Delta S_{IF} = mc \ln \left( \frac{T_f^2}{T_1 T_2} \right)$ .

L'application du premier principe au même système lors de cette transformation monobare adiabatique conduit à :

$$\Delta H_{IF} = Q_p = 0 \Rightarrow \Delta H_{1,IF} + \Delta H_{2,IF} = mc(T_f - T_1) + mc(T_f - T_2) = 0 \Rightarrow T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

L'entropie créée s'écrit finalement :  $S_c = mc \ln \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \right) = mc \ln \left( 1 + \frac{(T_2 - T_1)^2}{4T_1 T_2} \right)$ .

L'argument du logarithme népérien étant toujours strictement supérieur à 1, l'entropie créée est strictement positive, ce qui montre que la transformation est irréversible. On remarque aussi que l'entropie créée est d'autant plus grande que l'écart initial des températures ( $T_2 - T_1$ ) est grand.



L'entropie créée est d'autant plus grande que le système isolé est initialement loin d'un état d'équilibre.

### □ Quelle est la variation d'entropie d'un corps pur lors d'un changement d'état ?

La variation d'entropie d'une masse  $m$  d'eau au cours du changement d'état qui la fait passer, à la température  $T$ , de l'état de liquide saturant  $L$  à l'état de vapeur saturante  $V$ , s'obtient directement à partir du diagramme entropique de la figure 18.1 :  $\Delta S_{LV} = m(s_V - s_L)$ . On définit l'entropie massique de vaporisation en la ramenant à l'unité de masse :  $\Delta_{\text{vap}}s = s_V - s_L$ .

En appliquant le second principe à une masse  $m$  d'eau lors d'une **transformation isotherme réversible**  $LV$ , on obtient :  $m\Delta_{vap}s = S_e = \frac{Q_{LV}}{T} = \frac{m\Delta_{vap}h}{T}$ . Ainsi l'entropie massique de vaporisation est liée à l'enthalpie massique de vaporisation par la relation :  $\Delta_{vap}s = \frac{\Delta_{vap}h}{T}$ .

**Définition : Entropie massique de changement d'état**

L'entropie massique de changement d'état  $\Delta_{1 \rightarrow 2}s$  à la température  $T$  est la différence entre les entropies massiques des phases saturantes 1 et 2, à cette température :

$$\Delta_{1 \rightarrow 2}s = s_2(T) - s_1(T)$$

Elle est reliée à l'enthalpie massique de changement d'état par la relation :  $\Delta_{1 \rightarrow 2}s = \frac{\Delta_{1 \rightarrow 2}h}{T}$ .



▮  $\Delta_{1 \rightarrow 2}s$  se lit directement sur le diagramme entropique du corps pur considéré.

□ **Comment déterminer une variation d'entropie dans une transformation dans laquelle intervient un changement d'état ?**

À titre d'exemple, cherchons à déterminer la variation d'entropie d'une masse  $m = 1,0$  kg d'eau passant de l'état liquide  $E$  ( $T_E = 300$  K,  $P = 1,0$  bar) à l'état gazeux  $F$  ( $T_F = 600$  K,  $P = 1,0$  bar) par voie monobare. Les états sont portés sur le diagramme enthalpique de la figure 18.1.

La température d'un équilibre liquide-vapeur à la pression  $P = 1,0$  bar est  $T_c = 373$  K.

La variation d'entropie entre les états  $E$  et  $F$  étant indépendante du chemin suivi entre ces deux états nous pouvons, pour la calculer, définir le chemin imaginaire présenté par la figure 18.2.

- Étape 1 : On amène par voie isobare le système de l'état liquide  $E$  à l'état de liquide saturant  $L$ .
- Étape 2 : On effectue le changement d'état par voie isobare et isotherme, à la température  $T_c$  de l'équilibre diphasé à la pression  $P$ , pour amener le système dans l'état de vapeur saturante  $V$ .
- Étape 3 : On amène par voie isobare le système de l'état de vapeur saturante  $V$  à l'état de vapeur sèche  $F$ .

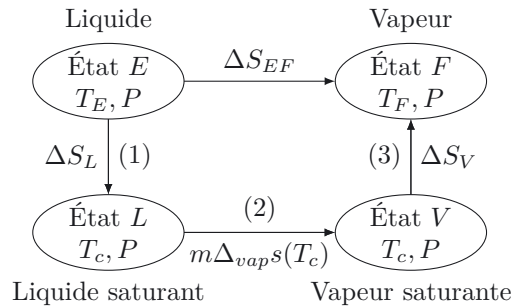


Figure 18.2. Chemin imaginaire.

La variation d'entropie entre les états  $E$  et  $F$  se met sous la forme :  $\Delta S_{EF} = \Delta S_{EL} + \Delta S_{LV} + \Delta S_{VF}$ .

En utilisant la relation 18.4 (variation d'entropie d'un système condensé) :  $\Delta S_{EL} = mc_{liq} \ln \frac{T_c}{T_E}$ ,

la définition de l'entropie massique de vaporisation :  $\Delta S_{LV} = m\Delta_{vap}s = m \frac{\Delta_{vap}h}{T_c}$  et la relation

18.2 (variation d'entropie d'un gaz parfait) :  $\Delta S_{VF} = mc_P \ln \frac{T_F}{T_c}$ . Nous en déduisons :

$$\Delta S_{EF} = mc_{liq} \ln \frac{T_c}{T_E} + m \frac{\Delta_{vap}h}{T_c} + mc_P \ln \frac{T_F}{T_c}$$

En prenant  $c_{liq} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\Delta_{vap}h(T_c) = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $c_P = 1,94 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , on obtient  $\Delta S_{EF} = 7,89 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ . On retrouve ce résultat en utilisant le diagramme entropique de la figure 18.1 :  $\Delta S_{EF} = m(s_F - s_E)$ .

**Méthode 18.5 : Calcul d'une variation d'entropie avec changement d'état**

- Définir un chemin imaginaire menant de l'état initial à l'état final dont une étape correspond au changement d'état, réalisé par voie isobare et isotherme.
- Écrire que la variation d'entropie entre l'état initial et l'état final est égale à la somme des variations d'entropie lors de chaque étape.
- Utiliser l'entropie massique de changement d'état ou l'enthalpie massique de changement d'état pour exprimer la variation d'entropie lors de l'étape correspondant au changement d'état.

➔ Exercice (18.2)

## Interro de cours

1. Dans toute la suite, on notera  $(\Sigma)$  un système thermodynamique fermé. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Si  $(\Sigma)$  subit une transformation telle que l'équilibre mécanique entre  $(\Sigma)$  et l'extérieur est réalisé à chaque étape de cette transformation, alors cette dernière est réversible.
  - (b) Pour qu'une transformation soit irréversible, il suffit qu'elle ne soit pas infiniment lente.
  - (c) Le mélange de deux gaz identiques est toujours une opération réversible.
  - (d) On peut inverser le sens d'une transformation réversible en modifiant les contraintes extérieures.
  
2. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) L'entropie est une fonction d'état intensive.
  - (b) L'entropie se conserve, au même titre que l'énergie interne.
  - (c) Lors d'une transformation de  $(\Sigma)$  entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B, V_B, T_B)$ , le second principe amène à  $\Delta S_{AB} - S_e = S_c$  avec  $S_e$  l'entropie échangée avec l'extérieur et  $S_c$  l'entropie créée au sein du système.
  - (d) L'entropie créée n'est nulle que si la transformation est réversible.
  - (e) Au cours d'une transformation monotherme, l'entropie échangée s'écrit  $S_e = \frac{Q}{T}$  avec  $Q$  transfert thermique reçu par  $(\Sigma)$  et  $T$  température du système.
  
3. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Pour un gaz en évolution isentropique entre  $A(P_A, V_A, T_A)$  et  $B(P_B = P_A, V_B, T_B)$ , on peut écrire :  $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$  avec  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$ .
  - (b) Pour un gaz parfait, la loi de Laplace peut se ramener à  $TV^{\gamma-1} = \text{cste}$ .
  - (c) Pour un gaz parfait, la loi de Laplace peut se ramener à  $VT^{\gamma-1} = \text{cste}$ .
  - (d) Pour une transformation adiabatique d'un gaz parfait :  $P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ .
  
4. On considère  $m = 2,00 \text{ kg}$  d'eau liquide dans l'état initial  $I(P_I = 2,00 \text{ bar}, T_I = 100^\circ\text{C})$ . On porte ce système dans l'état final  $F(P_F = 1,00 \text{ bar}, T_F = 140^\circ\text{C})$ . On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide :  $c_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à  $(P_0 = 1,00 \text{ bar}, T_0 = 100^\circ\text{C})$  :  $\Delta h_v = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , la masse molaire de l'eau :  $M = 18,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , le coefficient isentropique de la vapeur d'eau considérée comme un gaz parfait :  $\gamma = 1,40$  et la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Pendant cette transformation, le système est en contact avec un thermostat de température  $T_e = 140^\circ\text{C}$ . La variation d'entropie massique d'un gaz parfait entre deux états  $A$  et  $B$  caractérisés par  $(T_A, P_A, V_A)$  et  $(T_B, P_B, V_B)$  s'écrit  $s_B - s_A = \frac{R\gamma}{(\gamma-1)M} \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$ . Indiquer les affirmations justes.
  - (a) L'état final est un état diphasé liquide-vapeur.
  - (b) L'état final est un état de vapeur sèche.
  - (c) L'évolution est monotherme et réversible.
  - (d) La variation d'entropie du système entre  $I$  et  $F$  est :  $\Delta S_{IF} = 12,4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .
  - (e) La variation d'entropie du système entre  $I$  et  $F$  est :  $\Delta S_{IF} = 13,6 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .

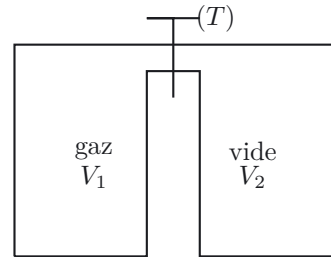
# Exercices

## Exercice 18.1 Entre Hopy et Nergy

➔ Méthode (18.1)

Passionnés par l'histoire des sciences, les deux jumeaux Hopy et Nergy s'intéressent aux dispositifs expérimentaux qui ont joué un rôle important dans les déterminations des propriétés des fluides mais aussi dans la course au refroidissement extrême, en particulier l'expérience de la détente de Joule-Gay-Lussac.

Cette expérience, menée pour la première fois en 1806 par Louis Gay-Lussac, est reprise en 1845 par James Joules. Le principe en est le suivant (cf. figure ci-contre) : deux récipients de volume  $V_1 = 1,0 \text{ L}$  et  $V_2 = 1,0 \text{ L}$ , aux parois parfaitement calorifugées et indéformables, sont reliés par l'intermédiaire d'un robinet ( $T$ ) qui est initialement fermé. Le récipient de gauche contient  $n_1 = 5,0 \text{ mol}$  d'un gaz à la température  $T_i$  et à la pression  $P_i$ , et on a fait un vide poussé dans le compartiment de droite. Des sondes permettent la détermination de la température et de la pression dans le compartiment de gauche.



À  $t = 0$ , on ouvre le robinet : le gaz se détend dans le vide et finit par occuper l'ensemble des deux récipients. On atteint un nouvel état d'équilibre où la température du gaz est  $T_f$ . On suppose que l'ouverture de ( $T$ ) ne s'accompagne d'aucun travail reçu par le gaz. La pression extérieure est  $P_e$ , constante.

1. En considérant comme système fermé le contenu des deux compartiments, caractériser la transformation subie par ce système.
2. Montrer que cette détente est iso-énergétique et conserve ainsi l'énergie interne du gaz. Quelle sera la température finale de ce gaz parfait ? sa pression ?
3. Calculer la variation d'entropie du gaz. La transformation est-elle réversible ? Si non, identifier la ou les causes d'irréversibilité.

La variation d'entropie molaire d'un gaz parfait entre deux états  $I$  et  $F$  caractérisés par  $(T_I, P_I, V_I)$  et  $(T_F, P_F, V_F)$  s'écrit  $S_{m,F} - S_{m,I} = C_{Pm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) - R \ln \left( \frac{P_F}{P_I} \right) = C_{Vm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + R \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$ .

On donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## Exercice 18.2 Glaçons fondus

➔ Méthodes (18.1) (18.4) (18.5)

Les expériences de calorimétrie sont menées dans une enceinte (le calorimètre) suffisamment isolée pour éviter les échanges thermiques avec l'extérieur et elles sont réalisées sous pression atmosphérique constante. L'enceinte intérieure du calorimètre et ses accessoires (agitateur et thermomètre, par exemple) interviennent dans les échanges thermiques, puisque leur température varie au cours des expériences. On appelle  $C$  la capacité thermique du calorimètre, c'est-à-dire de l'enceinte intérieure du calorimètre et ses accessoires.

On réalise l'expérience de calorimétrie dont le protocole est le suivant :

- Peser au préalable une quantité d'eau liquide à température ambiante, noter la masse  $m_1$  obtenue et verser cette eau dans le calorimètre, en mesurant sa température  $T_1$ .
- Peser ensuite un ou plusieurs glaçons sortant du congélateur, noter la masse  $m_2$  obtenue et la température  $T_2$  des glaçons et verser rapidement ces glaçons dans le calorimètre.
- Fermer le calorimètre et agiter jusqu'à ce que la glace soit complètement fondue. Noter la valeur de température d'équilibre,  $T_3$ .

On a au préalable déterminé  $C = 130 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . On donne les capacités thermiques massiques de l'eau liquide :  $c_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et de la glace :  $c_g = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

Les mesures réalisées grâce à ce protocole ont permis d'obtenir les valeurs suivantes :  $m_1 = 203 \text{ g}$ ,  $m_2 = 26 \text{ g}$ ,  $T_1 = 20,4 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = -13,0 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 9,5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

1. En considérant comme système fermé le calorimètre et son contenu, montrer qu'au cours de cette expérience l'enthalpie  $H$  de ce système vérifie  $\Delta H = 0$ .
2. Expliquer en quoi cette expérience permet de déterminer l'enthalpie massique  $L_f$  de fusion de la glace sous la pression atmosphérique  $P = 1,0 \text{ bar}$ .
3. Déterminer alors la valeur de  $L_{f,\text{exp}}$  donnée par cette expérience.
4. Calculer la variation d'entropie du système au cours de son évolution. Commenter, en identifiant si besoin est les causes d'irréversibilité.

Pour une phase condensée de capacité thermique massique  $c$  et de masse  $m$ , la variation d'entropie entre deux états de température  $T_A$  et  $T_B$  s'écrit :  $S(T_B) - S(T_A) = mc \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$ .

### Exercice 18.3 Mission impossible

#### ➔ Méthode (18.2)

Une mole d'un gaz parfait monoatomique ( $n = 1,0 \text{ mol}$ ), initialement dans l'état  $I$  caractérisé par  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ , subit une évolution monotherme (température extérieure  $T_{\text{ext}} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ), au cours de laquelle elle reçoit le transfert thermique  $Q = 5,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ . Deux états finaux sont alors proposés au grand spécialiste de la thermodynamique, Evan Und : l'état  $F_1$ , caractérisé par  $P_1 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 5,0 \text{ }^\circ\text{C}$ , et l'état  $F_2$ , caractérisé par  $P_2 = 1,0 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 95 \text{ }^\circ\text{C}$ . Sa mission, s'il l'accepte, est d'éliminer par des considérations thermodynamiques un de ces deux états.

1. Evan commence par calculer le travail reçu par cette mole de gaz parfait au cours des transformations  $I \rightarrow F_1$  et  $I \rightarrow F_2$ . Qu'obtient-il ? cela lui permet-il de procéder à l'élimination de l'un des deux processus ?
2. Il continue son enquête en calculant la variation d'entropie de cette mole dans les deux cas. Qu'obtient-il ?
3. En utilisant les résultats précédents, Evan réussit à éliminer un de ces deux états finaux. Lequel, et pourquoi ?

La variation d'entropie molaire d'un gaz parfait entre deux états  $I$  et  $F$  caractérisés par  $(T_I, P_I, V_I)$  et  $(T_F, P_F, V_F)$  s'écrit  $S_{m,F} - S_{m,I} = C_{Pm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) - R \ln \left( \frac{P_F}{P_I} \right) = C_{Vm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + R \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$ .

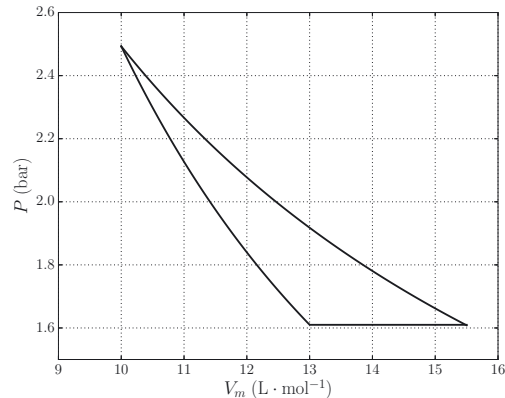
On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et la capacité thermique molaire à volume constant est  $C_{Vm} = \frac{3}{2}R$  pour un gaz parfait monoatomique.

### Exercice 18.4 Isotherme versus adiabatique

➔ Méthodes (18.1) (18.2) (18.3)

Une mole d'un gaz parfait ( $n = 1,0$  mol) de coefficient isentropique  $\gamma$  subit un cycle de transformation représenté sur le diagramme ci-contre : partant de l'état (1) de pression  $P_1 = 2,5$  bar, une détente adiabatique réversible l'amène à l'état (2), elle subit ensuite une évolution isobare l'amenant dans l'état (3), puis retourne dans l'état (1) par une compression isotherme mécaniquement réversible. Les deux dernières transformations ont lieu en contact thermique avec un thermostat à la température  $T_e = 295$  K.

1. En justifiant soigneusement, placer les points (1), (2), (3) sur le diagramme.
2. En déduire la valeur du coefficient  $\gamma$ . Le gaz parfait est-il diatomique ou monoatomique ?
3. Pour chacune des transformations ( $i$ )  $\rightarrow$  ( $j$ ), calculer la variation d'énergie interne  $\Delta U_{ij}$ , le travail  $W_{ij}$ , le transfert thermique reçu  $Q_{ij}$  et la variation d'entropie  $\Delta S_{ij}$  du gaz.
4. Pour chacune des transformations, faire un bilan entropique et calculer l'entropie créée. Identifier si nécessaire les causes d'irréversibilité (pour les applications numériques dans les bilans, on s'efforcera de revenir aux expressions littérales).



La variation d'entropie molaire d'un gaz parfait entre deux états  $I$  et  $F$  caractérisés par  $(T_I, P_I, V_I)$  et  $(T_F, P_F, V_F)$  s'écrit  $S_{m,F} - S_{m,I} = C_{Pm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) - R \ln \left( \frac{P_F}{P_I} \right) = C_{Vm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + R \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$ .

On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 18.5 Le coup de Bélier

➔ Méthode (18.4)

Dans le film Islandais « Béliers », Kiddi tente de réchauffer son frère Gummi, en pleine tempête de neige. Il creuse un tunnel dans la neige, dans lequel il transporte Gummi et, après avoir déshabillé son frère et avoir fait un matelas de leurs vêtements, s'allonge nu contre ce dernier et le prend dans ses bras, pour tenter (vainement) de le réchauffer.

La température interne initiale de Kiddi est  $T_K = 37,5^\circ\text{C}$ , celle de Gummi  $T_G = 31^\circ\text{C}$ , celle de l'air dans le tunnel  $T_a = 0,0^\circ\text{C}$ . On considérera que l'ensemble {tunnel + contenu} est isolé thermiquement de l'extérieur et que Gummi et Kiddi se comportent comme deux corps solides dont la température est homogène, égale à la température interne. La pression dans le tunnel est égale à la pression extérieure  $P = 1,0$  bar.

1. En considérant comme système fermé le tunnel et son contenu et en notant  $H$  son enthalpie, montrer que  $\Delta H = 0$ .
2. Déterminer alors la température d'équilibre  $T_f$  à l'intérieur du tunnel. Que pensez-vous du modèle adopté ?

- Calculer alors la variation de l'entropie du système fermé considéré.
- En faisant un bilan entropique, conclure sur la nature réversible ou irréversible de la transformation subie par le système (on veillera pour les applications numériques à repartir de l'expression littérale de  $T_f$ ).
- Dans le cas d'une transformation irréversible, identifier la ou les causes d'irréversibilité.

On donne la capacité thermique massique moyenne d'un corps humain :  $c_h = 3,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , la capacité thermique massique à pression constante de l'air,  $c_{P,a} = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , la masse de Gummi :  $m_G = 80 \text{ kg}$ , la masse de Kiddi :  $m_K = 110 \text{ kg}$ , le volume d'air dans le tunnel :  $V = 0,80 \text{ m}^3$ , la masse molaire de l'air  $M_{air} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , et la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Pour une phase condensée de capacité thermique massique  $c$  et de masse  $m$ , la variation d'entropie entre deux états de température  $T_A$  et  $T_B$  s'écrit :  $S(T_B) - S(T_A) = mc \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$ .

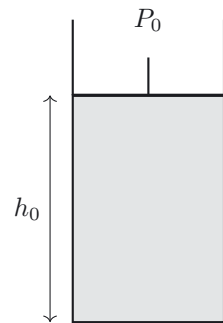
La variation d'entropie molaire d'un gaz parfait entre deux états  $I$  et  $F$  caractérisés par  $(T_I, P_I, V_I)$  et  $(T_F, P_F, V_F)$  s'écrit  $S_{m,F} - S_{m,I} = C_{Pm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) - R \ln \left( \frac{P_F}{P_I} \right) = C_{Vm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + R \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$ .

### Exercice 18.6 Sésame ouvre toi

À la recherche du fabuleux trésor de Jas Mina, Al Adain arrive au bout d'une galerie au fond de laquelle se trouve un trou vertical. Ce trou, rempli d'air, est surmonté d'un couvercle. À côté de ce trou se trouvent un monticule de gravier, de masse totale  $M = 100 \text{ kg}$ , et une énorme pierre de  $100 \text{ kg}$ .

Pour pouvoir ouvrir la porte lui permettant d'accéder au trésor fabuleux qu'il convoite, Al doit résoudre l'énigme entropique suivante, inscrite sur le fronton de la porte : « Sur le couvercle,  $100 \text{ kg}$  tu déposeras, l'entropie créée minimale tu obtiendras, et Sésame alors s'ouvrira ».

Deux options s'offrent alors à lui. Les caractéristiques du trou sont les suivantes : sa section est  $S = 0,063 \text{ m}^2$ , la hauteur initiale du couvercle par rapport au fond du trou est  $h_0 = 100 \text{ m}$ . La température initiale de l'air enfermé dans le trou est  $T_0 = 293 \text{ K}$  et la pression de l'air surmontant le couvercle est  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ . On supposera que la terre et le couvercle sont imperméables aux transferts thermiques et que le mouvement du couvercle est vertical et sans frottements. On néglige aussi la masse de ce couvercle.



- Quelle est, en moles, la quantité d'air enfermée dans ce cylindre ?
- Quelles sont les options qui s'offrent à Al ?
- En étudiant chacune de ces options, aider Al à résoudre l'énigme entropique.

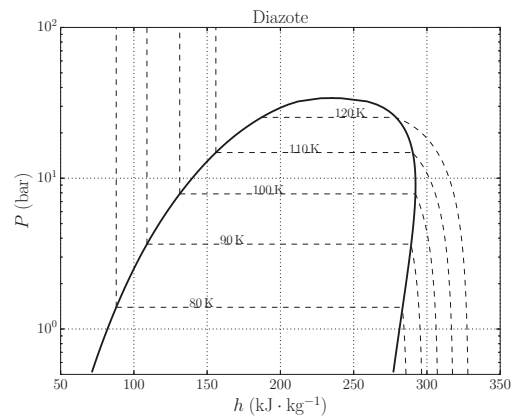
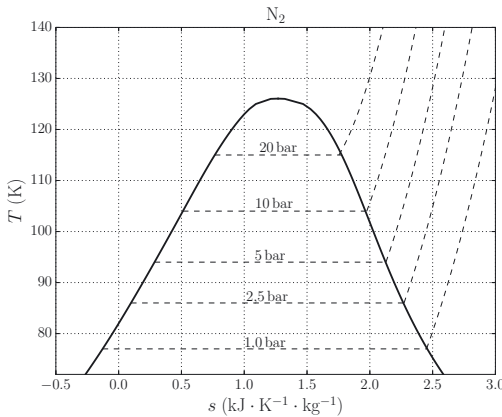
La variation d'entropie molaire d'un gaz parfait entre deux états  $I$  et  $F$  caractérisés par  $(T_I, P_I, V_I)$  et  $(T_F, P_F, V_F)$  s'écrit  $S_{m,F} - S_{m,I} = C_{Pm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) - R \ln \left( \frac{P_F}{P_I} \right) = C_{Vm} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right) + R \ln \left( \frac{V_F}{V_I} \right)$ .

On donne la constante des gaz parfaits,  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , le coefficient adiabatique pour l'air (gaz parfait)  $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} = 1,4$  et l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



### Exercice 18.7 Les aventures de Lazare Ott

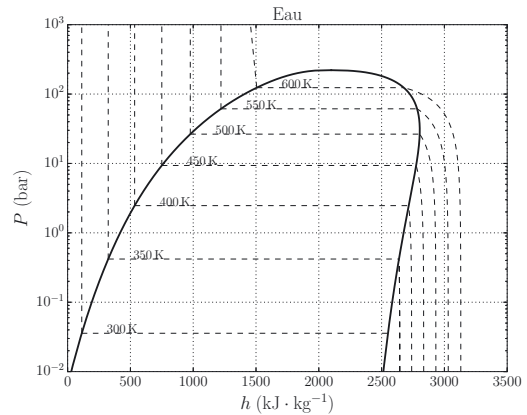
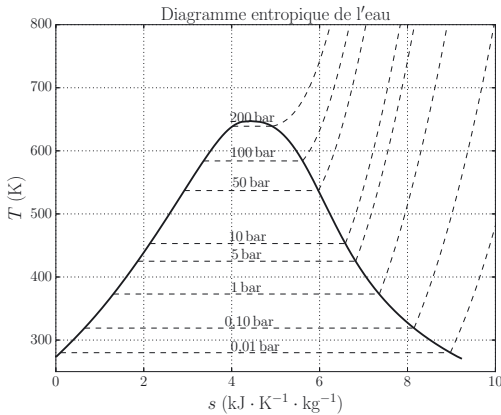
Lazare Ott, jeune physicien prodige, décide de faire subir à une masse  $m = 0,5 \text{ kg}$  d'azote diverses transformations, en vue d'étudier son comportement. Partant d'azote liquide dans un état de liquide saturant à  $90 \text{ K}$  (état (1)), il réalise une détente isenthalpique de ce liquide saturant, amenant ainsi l'azote dans l'état (2), avec  $P_2 = 1,0 \text{ bar}$ . Par contact avec une source « chaude » à la température  $T_c = 95 \text{ K}$ , il réalise une évolution isobare amenant l'azote dans l'état (3) de vapeur saturante, puis, par une compression isentropique, amène l'azote dans l'état (4) de pression  $P_4 = 2,5 \text{ bar}$ .



1. Placer les quatre points (1), (2), (3), (4) sur les diagrammes  $(P, h)$  et  $(T, s)$  ci-dessus et tracer les différentes transformations subies par l'azote. On déterminera, si besoin est, le titre en vapeur des différents états.
2. Pour chacune des transformations  $(i) \rightarrow (j)$ , calculer la variation d'enthalpie  $\Delta H_{ij}$  et la variation d'entropie  $\Delta S_{ij}$  de l'azote.
3. Pour l'étape  $(2) \rightarrow (3)$ , effectuer un bilan entropique et conclure sur le caractère réversible ou non de cette transformation. Identifier les éventuelles causes d'irréversibilité.

### Exercice 18.8 Histoires d'eau

René, jeune physicien prodige, décide de faire subir à une masse  $m = 2,0 \text{ kg}$  d'eau un cycle de transformations, en vue d'étudier son comportement. Partant d'un mélange liquide-vapeur à la température  $T_1 = 300 \text{ K}$  (état (1)), il comprime adiabatiquement et de façon réversible ce mélange pour l'amener dans un état de liquide saturant sous la pression  $P_2 = 10 \text{ bar}$  (état (2)). Il place ensuite le liquide saturant obtenu en contact thermique avec une source chaude à  $T_c = 600 \text{ K}$  et chauffe l'eau de manière isobare jusqu'à ce qu'elle atteigne la température  $T_3 = 600 \text{ K}$  (état (3)). Il réalise alors une détente adiabatique réversible ramenant l'eau à  $300 \text{ K}$  (état (4)), puis ramène par contact thermique avec une source froide à la température  $T_f = 290 \text{ K}$  le système dans l'état (1), de façon isobare.



1. Placer les quatre points (1), (2), (3) et (4) sur les diagrammes ( $P, h$ ) et ( $T, s$ ) ci-dessus et tracer l'allure du cycle réalisé par René. On déterminera, si besoin est, le titre en vapeur des différents états.
2. Pour chacune des transformations ( $i$ )  $\rightarrow$  ( $j$ ), calculer la variation d'enthalpie  $\Delta H_{ij}$ , le transfert thermique reçu  $Q_{ij}$  et la variation d'entropie  $\Delta S_{ij}$  de l'eau.
3. Que valent la variation d'enthalpie et d'entropie sur le cycle ainsi réalisé ?
4. Pour chacune des transformations, faire un bilan entropique et calculer l'entropie créée. Identifier si nécessaire les causes d'irréversibilité.

### Exercice 18.9 Complètement givrée, la bouteille !

C'est jour de fête chez Théo : un de ses invités arrive avec une bouteille de vin blanc, que Théo s'empresse de mettre dans le congélateur, afin de la faire refroidir plus vite. Mais, la soirée passant, Théo oublie cette bouteille. Le lendemain, il s'aperçoit de sa méprise et constate que la bouteille est complètement gelée. Il la sort alors du congélateur, dont la température est  $T_c = -18,0^\circ\text{C}$ , et la met à décongeler dans sa cuisine, de température  $T_e = 19,0^\circ\text{C}$ .

On donne les capacités thermiques massiques de l'eau liquide :  $c_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , de la glace :  $c_g = 2,06 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , et l'enthalpie massique de fusion de l'eau  $L_f = 3,33 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  à  $T_0 = 0,00^\circ\text{C}$ . On néglige la capacité thermique du verre et la masse du liquide contenu dans la bouteille est  $m = 0,75 \text{ kg}$ . On considère pour simplifier que la glace et l'eau liquide ont même volume massique. La pression extérieure est  $P_e = 1,00 \text{ bar}$  et la bouteille est supposée indéformable.

1. Caractériser précisément la nature de l'évolution subie par la bouteille et son contenu (le système dans la suite).
2. Quel sera l'état final de ce système ?
3. Calculer la variation d'énergie interne du système. En déduire le transfert thermique qu'il reçoit au cours de son évolution.
4. Calculer la variation d'entropie de ce système.
5. En faisant un bilan entropique, conclure sur la nature réversible ou irréversible de la transformation subie par la bouteille et son contenu (on veillera à revenir systématiquement aux expressions littérales des différentes grandeurs pour faire les applications numériques dans les bilans entropiques).

6. Dans le cas d'une transformation irréversible, identifier la ou les causes d'irréversibilité.

Pour une phase condensée de capacité thermique massique  $c$  et de masse  $m$ , la variation d'entropie entre deux états de température  $T_A$  et  $T_B$  s'écrit :  $S(T_B) - S(T_A) = mc \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$ .

## Corrections

### Interro de cours

1. (a) est fausse : il ne suffit pas que l'équilibre mécanique soit réalisé pour que la transformation soit réversible ; il faudrait aussi que le système soit à l'équilibre thermique avec l'extérieur, qu'il soit homogène... (b) est juste : les transformations brutales sont toutes irréversibles. (c) est fausse : le mélange de deux gaz même identiques est irréversible. (d) est juste, c'est même une définition de la réversibilité.
2. (a) est fausse :  $S$  est bien une fonction d'état, mais elle est extensive. (b) est fausse, il y a dans le second principe un terme de création d'entropie. (c) est juste, c'est l'expression mathématique du second principe. (d) est juste : l'entropie créée est nécessairement supérieure ou égale à 0, l'égalité correspondant à une transformation réversible. (e) est fausse : dans le cas d'une évolution monotherme, c'est la température  $T_{\text{ext}}$  du thermostat qui intervient :  $S_e = \frac{Q}{T_{\text{ext}}}$ .
3. (a) est fausse : il faut que le gaz soit parfait. (b) est juste, (c) est fausse (on part de  $PV^\gamma = \text{cste}$ , et on utilise la loi des gaz parfaits). (d) est fausse, il faut que la transformation soit de plus réversible pour appliquer la loi de Laplace.
4. L'état final est à la pression de 1,00 bar qui correspond à la pression de vapeur saturante de l'eau à  $T_I = 100^\circ\text{C}$ , mais la température est supérieure à  $T_I$  : on est donc dans un état de vapeur sèche, (a) est fausse, (b) est juste. (c) est fausse, l'évolution est monotherme car la température extérieure est maintenue constante, mais non réversible car l'équilibre thermique n'est pas réalisé au cours de cette évolution.  $S$  étant une fonction d'état, pour aller de  $I$  à  $F$ , on imagine le chemin suivant : chemin isotherme de  $I$  à  $K$  avec  $K$  état de liquide saturant ( $P_K = 1,00 \text{ bar}$ ,  $T_K = 100^\circ\text{C}$ ), puis vaporisation jusqu'à  $K'$  vapeur saturante à la même température et la même pression et enfin transformation isobare jusqu'à  $F$ . De  $I$  à  $K$ , l'état de l'eau est liquide et la transformation isotherme, la variation d'entropie est nulle. De  $K$  à  $K'$  :  $\Delta S_{KK'} = m \frac{\Delta h_v}{T_0}$ . De  $K'$  à  $F$ , transformation isobare d'un gaz parfait :  $\Delta S_{K'F} = m \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M} \ln \left( \frac{T_F}{T_I} \right)$ . Les applications numériques amènent à  $\Delta S = 12,4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  : (d) est juste, (e) est fausse.

### Exercice 18.1

1. Le contenu des deux compartiments subit une transformation adiabatique et isochore.
2. Les parois étant indéformables, le système ne reçoit aucun travail de la part de l'extérieur. Comme la transformation est par ailleurs adiabatique, l'application du premier principe montre que l'énergie interne du système (donc du gaz) se conserve.  
L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température (première loi de Joule) : La température finale  $T_f$  est égale à la température initiale :  $T_f = T_i$ . En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :  $P_f = P_i \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \frac{P_i}{2}$ .
3. Exprimons la variation d'entropie des  $n_1 = 5,0 \text{ mol}$  de gaz parfait :  
 $\Delta S = n_1 R \ln \left( \frac{V_2 + V_1}{V_1} \right) = n_1 R \ln(2) = 29 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Appliquons alors le second principe au gaz entre l'état initial et l'état final :  $\Delta S = S_e + S_c$ , où  $S_e$  est l'entropie échangée et  $S_c$  l'entropie créée. Les récipients étant parfaitement calorifugés,  $S_e = 0$ . L'entropie créée est strictement positive : la transformation est irréversible. La non uniformité initiale de la répartition des molécules dans les compartiments est ici la cause de l'irréversibilité de la transformation.

**Exercice 18.2**

- Le système fermé évolue sous pression extérieure constante. Lors de l'évolution monobare d'un système fermé entre un état initial et un état final d'équilibre mécanique ( la pression initiale et la pression finale du système sont égales à la pression extérieure imposée)  $\Delta H = Q$ , où  $Q$  est le transfert thermique reçu par le système. L'enceinte étant supposée calorifugée, l'évolution est par ailleurs adiabatique. Ainsi  $Q = 0$  et par suite  $\Delta H = 0$ .
- Notons en premier lieu que l'enthalpie est une fonction d'état : sa variation entre l'état initial et l'état final ne dépend pas de la transformation subie mais uniquement de ces deux états. Il s'agit par ailleurs d'une fonction d'état extensive. Nous pouvons alors écrire que l'enthalpie  $H$  est la somme des enthalpies de trois sous-systèmes :  $H = H_1 + H_2 + H_3$ , où  $H_1$  est l'enthalpie de la masse  $m_1$  d'eau liquide,  $H_2$  celle de la masse  $m_2$  de glace et  $H_3$  celle du calorimètre. Calculons alors les variations de ces trois enthalpies.
  - La masse  $m_1$  d'eau liquide se refroidit de  $T_1$  à  $T_3$  :  $\Delta H_1 = m_1 c_l (T_3 - T_1)$ .
  - Le calorimètre se refroidit de  $T_1$  à  $T_3$  :  $\Delta H_3 = C(T_3 - T_1)$ .
  - La fusion de la glace à la pression atmosphérique est réalisée à la température de  $T_0 = 0,0^\circ\text{C}$ . La variation d'enthalpie ne dépendant pas de la transformation, considérons que la glace subit une transformation en trois étapes : réchauffement de  $T_2$  à  $T_0$ , fusion à  $T_0$  puis réchauffement de  $T_0$  à  $T_3$  (les glaçons sont alors devenus liquides). Nous pouvons donc écrire :  
 $\Delta H_2 = m_2 c_g (T_0 - T_2) + m_2 L_f + m_2 c_l (T_3 - T_0)$ . Ainsi :  
 $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = m_1 c_l (T_3 - T_1) + m_2 c_g (T_0 - T_2) + m_2 L_f + m_2 c_l (T_3 - T_0) + C(T_3 - T_1)$   
 Comme  $\Delta H = 0$ , nous pouvons en déduire l'enthalpie massique  $L_f$  :

$$L_f = - \frac{(C + m_1 c_l)(T_3 - T_1) + m_2 c_g (T_0 - T_2) + m_2 c_l (T_3 - T_0)}{m_2}$$

- Nous obtenons  $L_{f,\text{exp}} = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
- Nous utilisons pour le calcul de la variation d'entropie  $\Delta S$  la même méthode que pour le calcul de  $\Delta H$  puisque  $S$  est également une fonction d'état extensive. Ainsi :  
 $\Delta S = (m_1 c_l + C) \ln \left( \frac{T_3}{T_1} \right) + m_2 c_g \ln \left( \frac{T_0}{T_2} \right) + m_2 \frac{L_{f,\text{exp}}}{T_0} + m_2 c_l \ln \left( \frac{T_3}{T_0} \right) = 2,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .  
 L'entropie échangée avec l'extérieur est nulle puisque le calorimètre est parfaitement calorifugé. Le second principe s'écrit donc  $\Delta S = S_c$ , où  $S_c$  est l'entropie créée. L'évolution est ici irréversible ( $S_c > 0$ ) car des transferts thermiques ont lieu entre des corps de températures différentes.

**Exercice 18.3**

- Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système dans les deux cas proposés afin de déterminer les travaux  $W_1$  et  $W_2$  associés :
  - Transformation  $I \rightarrow F_1$  :  $\Delta U_1 = \frac{3R}{2} (T_1 - T_0) = -5,6 \cdot 10^2 \text{ J} = W_1 + Q$  d'où  $W_1 = -1,1 \text{ kJ}$ .
  - Transformation  $I \rightarrow F_2$  :  $\Delta U_2 = \frac{3R}{2} (T_2 - T_0) = 5,6 \cdot 10^2 \text{ J} = W_2 + Q$  d'où  $W_2 = 61 \text{ J}$ .
 On n'obtient pas de contradiction à ce niveau ni de résultats aberrants : aucun état final ne peut donc être éliminé à ce stade.
- Calculons la variation d'entropie pour chaque proposition :
  - Transformation  $I \rightarrow F_1$  :  $\Delta S_1 = \frac{5R}{2} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) = -3,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .
  - Transformation  $I \rightarrow F_2$  :  $\Delta S_2 = \frac{5R}{2} \ln \left( \frac{T_2}{T_0} \right) = 2,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .
- L'entropie échangée dans le cas  $i$  s'écrit  $S_{i,e} = \frac{Q_i}{T_{\text{ext}}}$ . Le second principe permet alors d'obtenir l'entropie créée dans chaque cas  $S_{i,c} = \Delta S_i - S_{i,e}$ . Distinguons les cas :

- Transformation  $I \rightarrow F_1$  :  $S_{1,e} = 1,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  d'où  $S_{1,c} = -4,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} < 0$  : cette évolution est impossible car en contradiction avec le second principe!
- Transformation  $I \rightarrow F_2$  :  $S_{2,e} = 1,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  d'où  $S_{2,c} = 1,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$  : cette évolution est possible et irréversible.

Evan valide ainsi la proposition 2 : c'est bien le champ de la thermodynamique!

### Exercice 18.4

1. L'état (1) est le seul point à la pression  $P_1$ , c'est donc le point de pression la plus élevée. L'équation de l'isotherme est  $PV = \text{cste}$  alors que celle de l'isentropique est  $PV^\gamma = \text{cste}$ . Les pentes de l'isotherme et de l'isentropique sont donc respectivement  $\left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\frac{P}{V}$  et  $\left(\frac{dP}{dV}\right)_S = -\gamma\frac{P}{V}$ . La pente de l'isentropique est supérieure à celle de l'isotherme en valeur absolue car  $\gamma > 1$  : nous pouvons alors identifier les états (2) et (3), (2) étant le point de plus petit volume massique.
2. Appliquons la loi de Laplace entre les états (1) et (2) :  $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ . Nous en déduisons :

$$\gamma = \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1,7. \text{ Il s'agit d'un gaz monoatomique } (\gamma = \frac{5}{3}).$$

3. Considérons chaque transformation :

- Transformation  $1 \rightarrow 2$  : la transformation est adiabatique donc  $Q_{12} = 0$ . Appliquons le premier principe au gaz :  $\Delta U_{12} = \frac{R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma-1} = W_{12} = -6,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ . La transformation étant adiabatique et réversible,  $\Delta S_{12} = 0$ .

- Transformation  $2 \rightarrow 3$  : le travail reçu par le gaz est simple à calculer dans ce cas de transformation isobare :  $W_{23} = -P_2(V_3 - V_2) = -4,0 \cdot 10^2 \text{ J}$ . Par ailleurs, la variation d'énergie interne est :

$$\Delta U_{23} = \frac{P_3V_3 - P_2V_2}{\gamma-1} = 5,7 \cdot 10^2 \text{ J car } P_3 = P_2.$$

Dans le cas d'une transformation isobare, le transfert thermique reçu est égale à la variation d'enthalpie du système :  $Q_{23} = \Delta H_{23} = \gamma\Delta U_{23} = 9,7 \cdot 10^2 \text{ J}$ . Enfin, la variation d'entropie s'écrit :

$$\Delta S_{23} = \frac{R\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = \frac{R\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 3,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

- Transformation  $3 \rightarrow 1$  : la transformation est isotherme donc  $\Delta U_{31} = 0$ . Le premier principe nous donne donc  $W_{31} = -Q_{31}$ . Calculons le travail reçu par le gaz au cours de cette transformation isotherme :  $W_{31} = -\int_{V_3}^{V_1} P dV = -RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_3}\right) = P_1V_1 \ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) = 1,1 \text{ kJ}$ . Calculons enfin la

$$\text{variation d'entropie : } \Delta S_{31} = -R \ln\left(\frac{P_1}{P_3}\right) = -3,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

4. Appliquons le second principe  $\Delta S_{ij} = S_{ij,e} + S_{ij,c}$  pour chaque transformation.  $S_{ij,e}$  est l'entropie échangée avec l'extérieur et  $S_{ij,c}$  l'entropie créée au cours de la transformation  $i \rightarrow j$ .

- Transformation  $1 \rightarrow 2$  : la transformation est réversible, donc l'entropie créée  $S_{12,c}$  est nulle, et elle est adiabatique donc l'entropie échangée  $S_{12,e}$  est nulle également.

- Transformation  $2 \rightarrow 3$ . L'entropie échangée est  $S_{23,e} = \frac{Q_{23}}{T_e} = 3,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Nous en déduisons d'après le second principe  $S_{23,c} = 0,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$ .

- Transformation  $3 \rightarrow 1$ . L'entropie échangée est  $S_{31,e} = \frac{Q_{31}}{T_e} = -3,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Nous en déduisons d'après le second principe  $S_{31,c} = 0,005 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$ , presque nulle.

Les deux dernières transformations sont irréversibles (l'entropie créée est strictement positive), la seconde étant plus proche de la réversibilité que la première. Les échanges thermiques entre corps de températures différentes sont cause d'irréversibilité.

**Exercice 18.5**

1. Le système fermé évolue à pression constante  $P$ . Lors de l'évolution isobare du système fermé,  $\Delta H = Q$ , où  $Q$  est le transfert thermique reçu par le système. Le tunnel et son contenu étant supposés isolés thermiquement de l'extérieur, l'évolution est par ailleurs adiabatique. Ainsi  $Q = 0$  et par suite  $\Delta H = 0$ .
2. Le système est constitué de trois sous-systèmes, Kiddi, Gummi et l'air contenu dans le tunnel. Nous écrivons la variation d'enthalpie de chaque sous-système entre l'état initial et l'état final puis utilisons l'extensivité de  $H$  :  $\Delta H = m_G c_h (T_f - T_G) + m_K c_h (T_f - T_K) + \frac{M_{\text{air}} P V}{R T_a} c_{p,a} (T_f - T_a)$  où  $T_f$  est la température finale d'équilibre du système. Ainsi :

$$T_f = \frac{m_G c_h T_G + m_K c_h T_K + \frac{M_{\text{air}} P V}{R T_a} c_{p,a} T_a}{(m_G + m_K) c_h + \frac{M_{\text{air}} P V}{R T_a} c_{p,a}} \simeq \frac{m_G c_h T_G + m_K c_h T_K}{(m_G + m_K) c_h} = 35^\circ \text{C}$$

car la capacité thermique de l'air contenue dans le tunnel est très faible devant celle des deux hommes. Le modèle très simple ne prend notamment pas en compte le métabolisme de Gummi et Kiddi et les pertes d'énergie des deux hommes au contact de la glace, le « matelas » étant peu isolant. De plus, il néglige totalement l'inhomogénéité de température au sein des deux hommes.

3. Calculons la variation d'entropie du système en utilisant l'extensivité de  $S$  et en ignorant la variation d'entropie de l'air :  $\Delta S \simeq m_G c_h \ln \left( \frac{T_f}{T_G} \right) + m_K c_h \ln \left( \frac{T_f}{T_K} \right) = 5,5 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .
4. Le système étant thermiquement isolé, l'entropie échangée avec l'extérieur est nulle. Ainsi, d'après le second principe, l'entropie créée  $S_c$  est  $S_c = \Delta S > 0$  : l'évolution est irréversible.
5. Les échanges thermiques entre corps de températures différentes sont irréversibles.

**Exercice 18.6**

1. L'équation d'état donne :  $n = \frac{P_0 S h_0}{R T_0} = 2,6 \cdot 10^2 \text{ mol}$ .
2. Envisageons les deux options suivantes : l'option (1) consiste à placer la grosse pierre sur le couvercle ; dans l'option (2), Al dépose  $M$  très lentement sur le couvercle, gravier par gravier, le monticule de 100 kg. Dans les deux cas, la pression finale est  $P_f = P_0 + \frac{Mg}{S} = 1,2 \text{ bar}$ .
3. • Option (1) : l'évolution est brutale et monobare, mais sans équilibre mécanique à l'état initial. Le travail reçu par l'air dans le cylindre est alors  $W_1 = -P_f S (h_f - h_0)$  où  $h_f$  est la hauteur finale atteinte par le couvercle. En appliquant le premier principe :

$$\Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0) = -P_f S (h_f - h_0). \text{ Nous en déduisons, en utilisant l'équation d'état dans}$$

l'état final  $P_f S h_f = n R T_f$  que  $h_f = \frac{(\gamma - 1) P_f + P_0}{\gamma P_f} h_0 = 90 \text{ m}$ . La température finale est donc

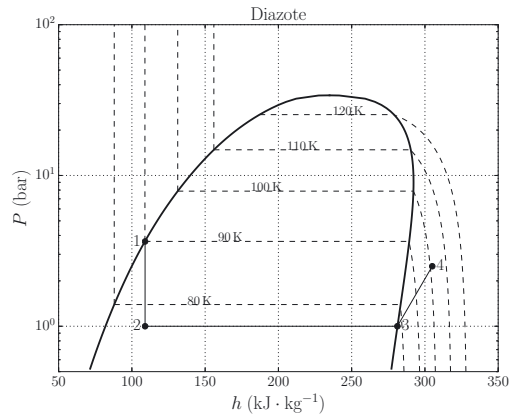
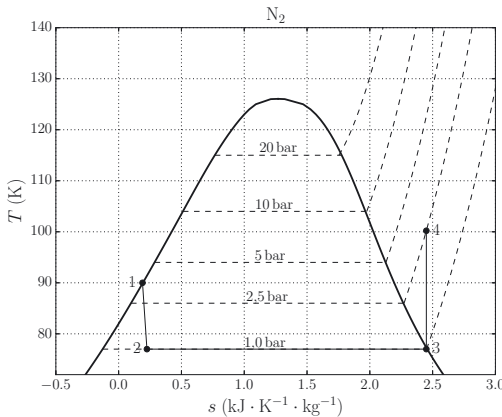
$$T_f = \frac{P_f S h_f}{n R} = 3,1 \cdot 10^2 \text{ K}.$$

Calculons alors la variation d'entropie :  $\Delta S_1 = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_f}{T_0} \right) - nR \ln \left( \frac{P_f}{P_0} \right) = 16 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . Cette variation d'entropie correspond à l'entropie créée  $S_{1,c}$  au cours de cette transformation irréversible.

- Option (2) : en procédant ainsi, la transformation est une suite d'états d'équilibre de l'air avec l'extérieur. La transformation est adiabatique et réversible :  $\Delta S_3 = 0 = S_{3,c}$  car l'entropie échangée est nulle. L'entropie créée est alors nulle, c'est-à-dire minimale. Al a résolu l'énigme entropique ; sa mise en pratique (transformation infiniment lente) ne lui laissera malheureusement pas beaucoup de temps pour jouir de son trésor...

**Exercice 18.7**

1. Le point (1) se place aisément puisqu'il s'agit de liquide saturant à 90 K. La détente isenthalpique est représentée par un segment de droite vertical sur le diagramme  $(P, h)$ , menant à l'état (2) d'équilibre liquide-vapeur avec un titre en vapeur  $x_2 = 0,14$ . Grâce à ce titre en vapeur, nous pouvons placer par la règle des moments le point (2) sur le diagramme  $(T, s)$ . L'évolution isobare qui suit mène au point (3) à l'extrémité droite du palier de changement d'état (vapeur saturante). Enfin, une transformation isentropique, représentée par un segment vertical sur le diagramme  $(T, s)$ , mène au point (4) correspondant à une vapeur sèche de pression  $P_4$  à la température de 100 K, ce qui permet de placer le point (4) sur le diagramme  $(P, h)$ .

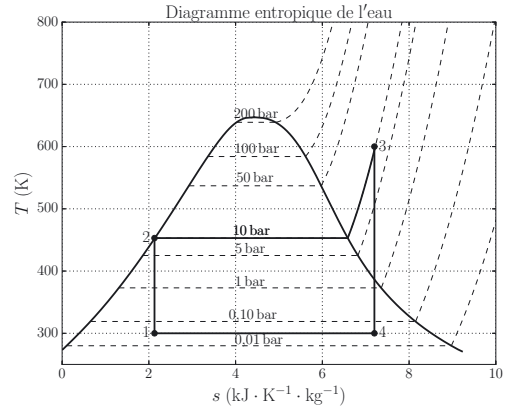
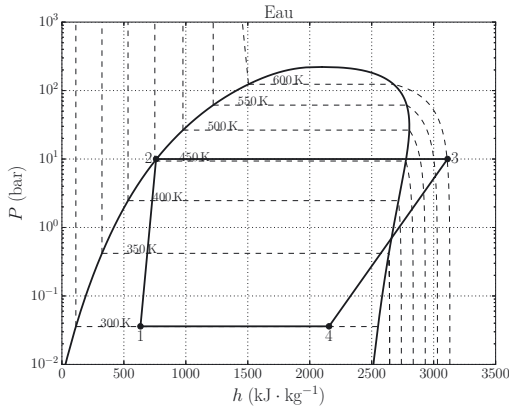


2. Les variations d'enthalpie massique et d'entropie massique peuvent se lire sur les diagrammes.
- Transformation (1) → (2) :  $\Delta H_{12} = m\Delta h_{12} = 0$  (isenthalpique) et  $\Delta S_{12} = m\Delta s_{12} = 0,02 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .
  - Transformation (2) → (3) :  $\Delta H_{23} = m(h_3 - h_2) = 86 \text{ kJ}$  et  $\Delta S_{23} = m(s_3 - s_2) = 1,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .
  - Transformation (3) → (4) :  $\Delta H_{34} = m(h_4 - h_3) = 12 \text{ kJ}$  et  $\Delta S_{34} = m(s_4 - s_3) = 0$  (isentropique).
3. Le transfert thermique  $Q_{23}$  reçu par le fluide lors de la transformation isobare (2) → (3) est égal à la variation d'enthalpie  $Q_{23} = m(h_3 - h_2)$ . Nous en déduisons l'entropie échangée par le fluide avec la source chaude :  $S_{e23} = \frac{Q_{23}}{T_c} = 0,91 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ . L'application du second principe à l'azote donne alors l'entropie créée  $S_{c23} = \Delta S_{23} - S_{e23} = 0,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ . Cette transformation est bien irréversible puisque  $S_{c23} > 0$  : les transferts thermiques s'effectuent entre deux systèmes de températures différentes, ce qui est source d'irréversibilité.

**Exercice 18.8**

1. Le point (2) correspond au liquide saturant à la pression  $P_2$ . La transformation de (1) à (2) étant isentropique, elle est représentée par un segment de droite vertical sur le diagramme  $(T, s)$ . L'état (1) est donc un état d'équilibre liquide-vapeur de température  $T_1$  et dont le titre en vapeur  $x_1$  peut être obtenu à l'aide du théorème des moments :  $x_1 = 0,21$ . La connaissance de ce titre nous permet alors d'inscrire (1) sur le diagramme  $(P, h)$ . L'état (3) s'inscrit facilement puisqu'il s'agit de l'intersection de l'isotherme  $T = T_c$  et de l'isobare  $P = P_2$ . L'évolution suivante est isentropique : il s'agit d'un segment de droite vertical menant à l'état (4) d'équilibre liquide-vapeur de titre en vapeur  $x_4 = 0,84$  d'après le théorème des moments. Nous pouvons alors placer (4) sur le diagramme  $(P, h)$ . La dernière transformation, isobare, ramène le système à l'état initial.





2. Envisageons les transformations successives subies par la masse  $m$  d'eau.

- Transformation (1)  $\rightarrow$  (2) : nous lisons sur le diagramme  $(P, h)$   $\Delta h_{12} = h_2 - h_1 = 1,3 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  nous en déduisons  $\Delta H_{12} = m\Delta h_{12} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ kJ}$ . La transformation est adiabatique donc  $Q_{12} = 0$  et réversible :  $\Delta S_{12} = 0$ .
- Transformation (2)  $\rightarrow$  (3) : par lecture sur le diagramme  $(P, h)$  :  $\Delta H_{23} = m(h_3 - h_2) = 4,7 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . Le chauffage est isobare donc  $Q_{23} = \Delta H_{23} = 4,7 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . Le diagramme  $(T, s)$  permet de lire  $\Delta S_{23} = m(s_3 - s_2) = 10 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .
- Transformation (3)  $\rightarrow$  (4) : la transformation est adiabatique donc  $Q_{34} = 0$  et réversible :  $\Delta S_{34} = 0$ . La variation d'enthalpie se lit sur le diagramme  $(P, h)$  :  $\Delta H_{34} = m(h_4 - h_3) = -1,9 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ .
- Transformation (4)  $\rightarrow$  (1) : à l'aide du diagramme  $(P, h)$ ,  $\Delta H_{41} = m(h_1 - h_4) = -3,0 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ . La transformation étant isobare,  $Q_{41} = \Delta H_{41}$ .  
Le diagramme  $(T, s)$  permet de lire  $\Delta S_{41} = m(s_1 - s_4) = -10 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .

3. Les variations de l'enthalpie et de l'entropie sont nulles sur un cycle puisqu'il s'agit de fonctions d'état.

4. Le second principe s'écrit  $\Delta S_{ij} = \frac{Q_{ij}}{T_{source}} + S_{c,ij}$  pour la transformation  $i \rightarrow j$ , où  $T_{source}$  est la température de la source auquel le système prélève le transfert thermique  $Q_{ij}$  et  $S_{c,ij}$  l'entropie créée au cours de la transformation. Effectuons un bilan d'entropie pour chaque transformation.

- Transformation (1)  $\rightarrow$  (2) : la transformation est adiabatique donc  $Q_{12} = 0$  et réversible :  $\Delta S_{12} = 0$ . Tous les termes du bilan sont nuls.
- Transformation (2)  $\rightarrow$  (3) :  $\Delta S_{23} = 10 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ , l'entropie échangée est  $S_{e,23} = \frac{Q_{23}}{T_c} = 7,8 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ .  
Nous en déduisons l'entropie créée  $S_{c,23} = 2,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  : la transformation est irréversible, les échanges thermiques ayant lieu entre systèmes à des températures différentes.
- Transformation (3)  $\rightarrow$  (4) : la transformation est adiabatique donc  $Q_{34} = 0$  et réversible :  $\Delta S_{34} = 0$ . Tous les termes du bilan sont nuls.
- Transformation (4)  $\rightarrow$  (1) :  $\Delta S_{41} = -10,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $S_{e,41} = \frac{Q_{41}}{T_f} = -10,5 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  (nous sommes ici obligés de garder plus de chiffres significatifs dans les calculs intermédiaires). Nous en déduisons l'entropie créée  $S_{c,41} = 0,4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$  : la transformation est irréversible, les échanges thermiques ayant lieu entre systèmes à des températures différentes.

**Exercice 18.9**

1. L'évolution est monotherme (l'extérieur impose une température  $T_e$ ) et isochore, la bouteille étant fermée et indéformable.
2. À la fin, le vin sera liquide à température ambiante  $T_e$ .
3. Calculons tout d'abord la variation d'enthalpie  $\Delta H$  du système en imaginant une succession de trois étapes.

- Réchauffement du système solide jusqu'à la température  $T_0$  de fusion : la variation d'enthalpie lors de cette étape est  $\Delta H_1 = mc_g(T_0 - T_c)$ .
- Changement d'état à  $T_0$  :  $\Delta H_2 = mL_f(0^\circ\text{C})$ .
- Réchauffement du système liquide jusqu'à  $T_e$  :  $\Delta H_3 = mc_l(T_e - T_0)$ .

Nous avons alors  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J}$ . Par définition, l'énergie interne  $U$  est liée à  $H$  par la relation  $U = H - PV$ . Ainsi,  $\Delta U = \Delta H - V(\Delta P)$  puisque l'évolution est isochore. La variation de pression dans la bouteille étant très faible, nous pouvons en déduire que  $\Delta U \simeq \Delta H = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

Par application du premier principe au contenu de la bouteille, nous déduisons le transfert thermique  $Q$  reçu :  $Q = \Delta U = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J}$ .

4. Pour calculer la variation de l'entropie, nous utilisons la même succession d'étapes et obtenons alors :

$$\Delta S = m \left[ c_g \ln \left( \frac{T_0}{T_c} \right) + \frac{L_f}{T_0} + c_l \ln \left( \frac{T_e}{T_0} \right) \right] = 1,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}.$$

5. Le second principe nous permet d'écrire :  $\Delta S = \frac{Q}{T_e} + S_c$ , où  $S_c$  est l'entropie créée. Ainsi, nous obtenons  $S_c = 77 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > 0$  : l'évolution est irréversible.
6. Il y a ici transfert thermique entre un corps chaud et un corps froid : ce transfert est irréversible.

# Machines thermiques

## L'essentiel du cours

### Contexte

Comment fonctionne un moteur thermique, une machine frigorifique ou une pompe à chaleur ?

Un **moteur thermique** effectue une conversion d'énergie interne en énergie mécanique en prélevant de l'énergie à une source chaude. Une **machine frigorifique** ou une **pompe à chaleur** prélèvent de l'énergie d'une source froide pour la transférer à une source chaude.

Le premier principe permet de faire les bilans énergétiques concernant ces conversions d'énergie, le second principe impose des contraintes à leur rendements ou efficacités.

### Définition : Machine thermique

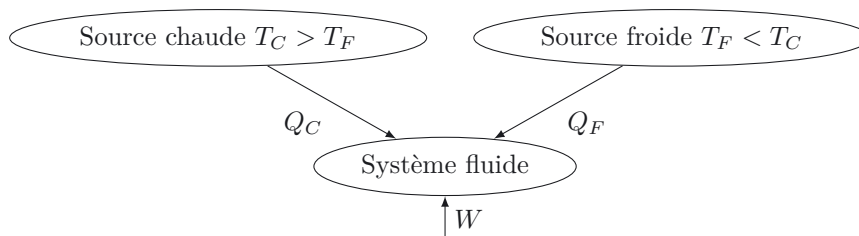
Dispositif dans lequel un système fluide subit une succession de transformations qui forment un **cycle** permettant une conversion continue d'énergie.

Au cours d'un cycle, le système fluide échange de l'énergie sous forme de travail avec le milieu extérieur et de transferts thermiques avec des thermostats.



La variation d'une fonction d'état (énergie interne, enthalpie, entropie) est nulle sur un cycle.

Nous nous limiterons aux **machines thermiques dithermes**, dans lesquelles le système échange de l'énergie sous forme de transferts thermiques avec deux thermostats (**sources chaude et froide**) et sous forme de travail mécanique avec l'extérieur lors d'une compression ou d'une détente.



Les quantités  $Q_F$ ,  $Q_C$  et  $W$  échangées au cours d'un cycle sont algébriques, positives si elles sont reçues par le système, négatives si elles sont fournies par le système.

- **Cas  $W < 0$**  : La machine fournit du travail à l'extérieur au cours d'un cycle. Elle est qualifiée de **motrice** (moteurs).
- **Cas  $W > 0$**  : La machine doit recevoir du travail de l'extérieur au cours d'un cycle pour fonctionner. Elle est qualifiée de **réceptrice** (machines frigorifiques, pompes à chaleur).

## ■ 1 Application des principes de la thermodynamique

□ **Comment calculer les différents transferts énergétiques au cours d'un cycle ?**

L'étude d'une machine thermique repose sur l'application, sur un cycle complet, des principes de la thermodynamique au système fluide sachant que sur un cycle les variations des différentes fonctions d'état du système sont nulles.

**Application du premier principe sur un cycle :**

On a à la fois  $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_C + Q_F$  et  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$ . On en déduit :

$$(19.1) \quad W + Q_C + Q_F = 0$$

**Application du second principe sur un cycle :**

On a à la fois  $\Delta S_{\text{cycle}} = S_{c,\text{cycle}} + S_{e,\text{cycle}}$  et  $\Delta S_{\text{cycle}} = 0$ . On en déduit  $S_{c,\text{cycle}} + S_{e,\text{cycle}} = 0$ .

Par ailleurs  $S_{e,\text{cycle}} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$  et  $S_{c,\text{cycle}} \geq 0$ . On aboutit finalement à :

$$(19.2) \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

### Méthode 19.1 : Application des principes sur un cycle ditherme

L'application des principes de la thermodynamique sur un cycle ditherme conduit à :

- **Premier principe** :  $W_{\text{cycle}} + Q_C + Q_F = 0$ .
- **Second principe** :
  - pour un **cycle réversible** :  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$  (**Égalité de Clausius**);
  - pour un **cycle irréversible** :  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} < 0$  (**Inégalité de Clausius**).

➔ Exercices (19.1) (19.2)

## ■ 2 Moteur thermique ditherme

Dans le cas d'un cycle moteur on a  $W < 0$ . La relation 19.1 et l'inégalité de Clausius 19.2 permettent alors d'établir les inégalités  $Q_C > 0$  et  $Q_F < 0$ .

Ainsi, un moteur thermique ditherme **prélève de l'énergie à la source chaude**, sous forme d'un transfert thermique ( $Q_C > 0$ ) afin de fournir un travail positif à l'extérieur ( $W < 0$ ). Dans le même temps il cède une partie de cette énergie à la source froide, sous forme d'un transfert thermique ( $Q_F < 0$ ), puisque  $Q_C = -W - Q_F$ .

La source chaude est généralement une chambre de combustion (chimique ou nucléaire) que l'on modélise par un thermostat ou bien une résistance électrique chauffée par effet Joule. La source froide est l'air ambiant.

À titre d'exemple nous allons étudier le **moteur de Stirling** dont une vue en coupe est représentée sur la figure 19.1.

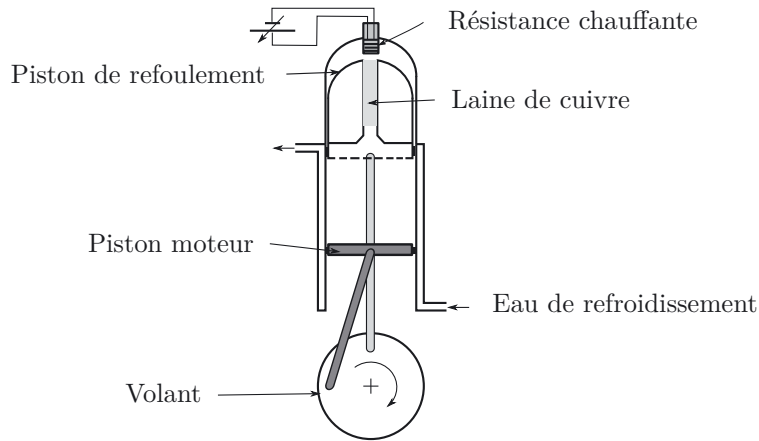


Figure 19.1. Vue en coupe du moteur de Stirling étudié.

Le moteur est constitué d'un **cylindre en verre**, d'un **piston moteur**, d'un **piston de refoulement** et d'un **volant**. Le cylindre en verre comporte deux parties : une partie chaude haute au sommet de laquelle se trouve une résistance chauffante et une partie froide basse autour de laquelle circule l'eau de refroidissement. Le piston moteur effectue, à la montée, la compression de l'air intérieur au cylindre et récupère, à la descente, le travail fourni lors de la détente de celui-ci. Le piston de refoulement est entraîné par le volant, avec un déphasage de  $90^\circ$  par rapport au piston moteur. Il s'agit d'un piston creux qui sert à faire passer l'air de la partie chaude vers la partie froide et inversement. Lorsque l'air traverse ce piston, il passe à travers un régénérateur constitué de laine de cuivre. Celle-ci récupère de l'énergie du gaz chaud par transfert thermique, puis la restitue au gaz froid. Lorsque le piston moteur est en position haute ou basse, le piston de refoulement est en mouvement, et réciproquement.

Les quatre étapes du cycle sont représentées sur la figure 19.2 et développées ci-dessous :

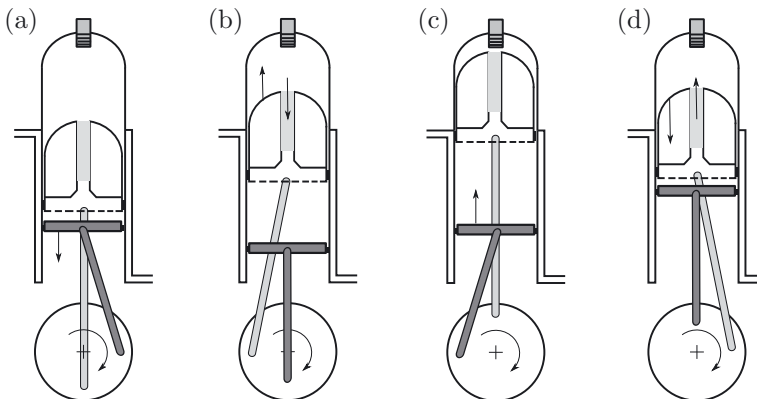


Figure 19.2. Fonctionnement du moteur de Stirling.

- (a) **Détente.** Le piston de refoulement est en position basse et presque tout l'air se trouve dans la zone chaude haute. Cet air se détend en transférant du travail au piston moteur, en mouvement vers le bas.
- (b) **Refroidissement.** Le piston moteur est en position basse. Le piston de refoulement se déplace vers le haut, ce qui a pour effet de faire passer l'air de la zone chaude haute vers la zone froide basse, en passant au travers de la laine de cuivre.
- (c) **Compression.** Le piston moteur, entraîné par le volant d'inertie, est en mouvement vers le haut et comprime l'air dans la zone froide. Le piston de refoulement est en position haute.
- (d) **Échauffement.** Le piston moteur est en position haute. Le piston de refoulement se déplace vers le bas, ce qui a pour effet de faire passer l'air de la zone froide basse vers la zone chaude haute.

Un dispositif expérimental non représenté sur la figure 19.1 nous a permis d'enregistrer l'évolution temporelle de la pression et du volume occupé par l'air au cours du temps. Les courbes correspondantes ainsi que le diagramme de Watt (pression en fonction du volume) sont représentés sur les figures 19.3 et 19.4.

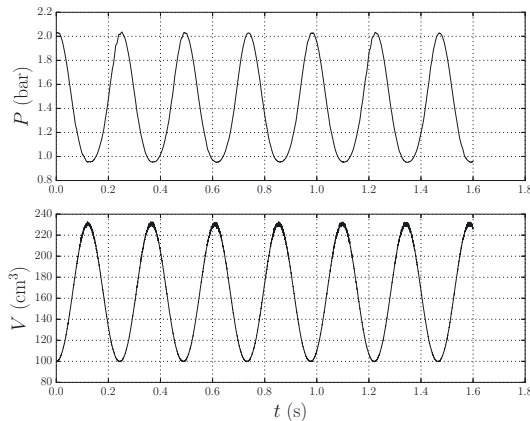


Figure 19.3. Évolution temporelle de la pression et du volume au cours de plusieurs cycles.

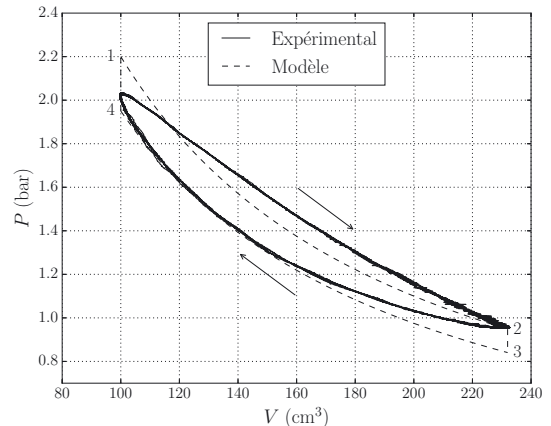


Figure 19.4. Cycle expérimental et modèle du moteur de Stirling dans le diagramme  $(P, V)$ .

Ce moteur fonctionne de manière cyclique, avec une période  $\tau = 0,24$  s. Le travail mécanique (négligé) reçu par l'air au cours d'un cycle est l'opposé de l'aire du cycle dans le diagramme  $(P, V)$ . Un calcul d'intégrale par la méthode des rectangles, appliquée sur un nombre de points correspondant à une période, nous a permis d'en déterminer la valeur :  $W_{\text{cycle}} = -2,2$  J. La puissance mécanique est  $P_m = -W_{\text{cycle}}/\tau = 9,1$  W. La puissance électrique fournie à la résistance est le produit de la tension à ses bornes par l'intensité du courant qui la traverse. La mesure de ces grandeurs électriques nous a conduit à la valeur  $P_e = 1,3 \cdot 10^2$  W.

□ **Comment modéliser ce cycle par des transformations successives ?**

On prend comme système **l'air présent dans le cylindre**. On l'assimile à un gaz parfait de coefficient isentropique  $\gamma = 1,4$ . On le considère proche de l'équilibre lors du fonctionnement du moteur et on suppose qu'on peut modéliser le cycle à l'aide de transformations infiniment lentes. La résistance chauffante est modélisée par un thermostat de température  $T_C$  (source chaude) et le circuit de refroidissement par un thermostat de température  $T_F$  (source froide).

**Modélisation du cycle**

- (a) Détente (12) : un transfert thermique a lieu avec la source chaude. Cette transformation est modélisée par une **détente isotherme infiniment lente** à la température  $T_C$ .
- (b) Refroidissement (23) : le fluide se déplace mais son volume reste quasiment constant. Cette transformation est modélisée par une **transformation isochore infiniment lente**.
- (c) Compression (34) : un échange thermique a lieu avec la source froide. Cette transformation est modélisée par une **compression isotherme infiniment lente** à la température  $T_F$ .
- (d) Échauffement (41) : le fluide se déplace sans que le volume du système n'évolue. Cette transformation est modélisée par une **transformation isochore infiniment lente**.

Les valeurs numériques du modèle sont obtenues en partant de l'état 4 et en ajustant les isothermes de sorte que le travail du cycle modèle corresponde au travail du cycle réel. Les différents états du cycle modèle sont reportés dans le tableau ci-dessous :

état	1	2	3	4
$P$ (bar)	2,20	0,95	0,84	1,94
$V$ (cm <sup>3</sup> )	100	232	232	100
$T$ (K)	344	344	303	303

La détente isotherme (12) se fait à la température  $T_C = 344$  K de la source chaude et la compression isotherme (34) à la température  $T_F = 303$  K de la source froide.

□ **Quels sont les échanges d'énergie lors d'un fonctionnement moteur ?**

Le caractère moteur d'une machine thermique est déterminé par le signe du travail sur le cycle. Sachant que le travail des forces de pression au cours d'une transformation  $IF$  infiniment lente s'écrit  $W = - \int_{V_I}^{V_F} P dV$ , on constate que le système libère plus de travail lors de la détente 12 qu'il n'en reçoit lors de la compression 34.

**Méthode 19.2 : Identification des échanges énergétiques dans un moteur**

Dans un moteur, le système reçoit de l'énergie de la source chaude et fournit de l'énergie à la source froide sous forme de transfert thermique. Il fournit un travail mécanique à l'extérieur.

- Le transfert thermique de la source chaude vers le système est positif :  $Q_C > 0$ .
- Le transfert thermique de la source froide vers le système est négatif :  $Q_F < 0$ .
- Le travail reçu par le système sur un cycle est négatif :  $W < 0$ .
- $W = -\int_{\text{cycle}} PdV = -\mathcal{A}_{\text{cycle}}$  où  $\mathcal{A}_{\text{cycle}}$  est l'aire du cycle ( $\mathcal{A}_{\text{cycle}} > 0$ ).  $W < 0$  correspond à un **cycle parcouru dans le sens horaire**.

➔ Exercices (19.1) (19.2) (19.3)

**Retour au contexte du moteur de Stirling**

Lors de l'isochore 41 la pression augmente, donc la température également ; le système se réchauffe au contact de la source chaude. Au cours de la détente 12, si le système ne se refroidit pas c'est parce qu'il reçoit de l'énergie de la source chaude par transfert thermique. Au total, le transfert thermique en provenance de la source chaude s'écrit :  $Q_C = Q_{41} + Q_{12} > 0$ .

Lors de l'isochore 23 la pression diminue, donc la température également ; le système se refroidit au contact de la source froide. Au cours de la compression 34, si le système ne se réchauffe pas c'est parce qu'il cède de l'énergie à la source froide par transfert thermique. Au total, le transfert thermique avec la source froide s'écrit :  $Q_F = Q_{23} + Q_{34} < 0$ .



Dans notre modèle du moteur de Stirling, le cycle n'est pas réversible puisque dans les transformations (23) (refroidissement) et (41) (réchauffement) il y a une différence de température entre le système et le thermostat avec lequel il est en contact.

Calculons les valeurs des travaux et transferts thermiques échangés au cours des différentes transformations composant le cycle modélisé.

- Pour une transformation isotherme d'un gaz parfait :

$$W_{IF} = -\int_{V_I}^{V_F} PdV = -nRT \int_{V_I}^{V_F} \frac{dV}{V} = -P_I V_I \ln \frac{V_F}{V_I} \quad \text{et} \quad \Delta U_{IF} = 0 \Rightarrow Q_{IF} = -W_{IF}$$

- Pour une transformation isochore :  $W_{IF} = 0$ .

$$\Rightarrow Q_{IF} = \Delta U_{IF} = C_V(T_F - T_I) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_I) \Rightarrow Q_{IF} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P_I V_I}{T_I}(T_F - T_I)$$

Ces relations nous permettent de calculer les transferts énergétiques, portés dans le tableau suivant :

Transformations	12	23	34	41
Modélisation	isotherme	isochore	isotherme	isochore
Travail $W$ (J)	-19	0	16	0
Transfert thermique $Q$ (J)	19	-6,6	-16	6,6

Nous obtenons ainsi les transferts thermiques reçus de la source chaude :  $Q_C = Q_{12} + Q_{41} = 25$  J et de la source froide :  $Q_F = Q_{23} + Q_{34} = -23$  J ainsi que le travail reçu de l'extérieur  $W = -2,2$  J, au cours d'un cycle. En divisant ce travail par la durée du cycle, nous obtenons la puissance mécanique fournie par ce moteur  $P_m = \frac{-W}{\tau} = 9,2$  W.

Avec ces valeurs numériques de  $W$ ,  $Q_C$  et  $Q_F$  nous pouvons vérifier que :



- $W + Q_C + Q_F = 0$ , en accord avec le premier principe ;
- l'inégalité de Clausius :  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \approx -3 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} < 0$ , ce qui confirme que le cycle n'est pas parcouru de façon réversible.

□ **Comment chiffrer l'efficacité d'un moteur thermique ?**

Dans un moteur, une partie seulement de l'énergie prélevée à la source chaude par transfert thermique est convertie en travail. Par exemple dans le moteur de Stirling  $-W = 2,2 \text{ J}$  n'est qu'une petite partie de  $Q_C = 25 \text{ J}$ . Pour chiffrer l'efficacité de cette conversion, on définit le rendement du cycle moteur.

**Définition : Rendement d'un moteur ditherme**

De façon générale un rendement est défini comme le rapport de la grandeur « utile » sur la grandeur qui « coûte ». Pour un moteur thermique ditherme, le rendement est :

$$\eta = \frac{-W}{Q_C}$$

Le moteur de Stirling étudié ici fonctionne grâce à l'alimentation électrique de la résistance chauffante. La grandeur qui coûte est donc bien le transfert thermique de la source chaude vers le système. En appliquant la relation précédente nous obtenons  $\eta = \frac{-W}{Q_C} = 8,8 \%$ .

La puissance électrique fournie par l'alimentation est  $P_e = 1,3 \cdot 10^2 \text{ W}$ . Un rendement global, défini par  $P_m/P_e = 7,1 \%$ , est inférieur au rendement  $\eta$  en raison de transferts thermiques entre la résistance et l'extérieur de la machine. En tenant compte de l'énergie électrique fournie à la pompe pour faire circuler l'eau de refroidissement, le rendement serait encore plus faible.

□ **Peut-on obtenir un meilleur rendement avec les mêmes sources ?**

Sur un cycle, le premier principe conduit à :  $W = -Q_F - Q_C$  et le second à :  $S_e + S_c = 0$  avec  $S_c \geq 0$  (entropie créée) et  $S_e = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F}$  (entropie échangée). Ces relations conduisent à l'expression suivante du rendement :

$$\eta = \frac{Q_F + Q_C}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} - \frac{T_F S_c}{Q_C}$$

Or  $Q_C > 0$  et  $S_c \geq 0$  donc  $\eta \leq \eta_{\text{rev}}$  où  $\eta_{\text{rev}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$  est le rendement obtenu lorsque toutes les transformations du cycle sont réversibles ( $S_c = 0$ ). On voit ainsi que **le second principe impose une limite supérieure au rendement** d'un moteur, limite atteinte pour un cycle réversible.

**Définition : Rendement et cycle de Carnot**

Le rendement maximal que l'on peut obtenir d'un moteur ditherme fonctionnant entre deux thermostats de températures  $T_C$  et  $T_F$  est appelé **rendement de Carnot** et s'écrit :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Ce rendement de Carnot est obtenu lorsque le système suit un **cycle de Carnot** constitué de **deux transformations adiabatiques réversibles** et de **deux transformations isothermes réversibles** au contact des thermostats de températures  $T_C$  et  $T_F$ .



Le cycle de Carnot est le seul cycle réversible de moteur ditherme.

Dans notre modélisation du moteur de Stirling, les températures des sources sont  $T_C = 344\text{ K}$  et  $T_F = 303\text{ K}$ . Le rendement de Carnot est donc  $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 12\%$ , qui est bien supérieur au rendement du cycle modèle (8,8 %). L'écart s'explique par la création d'entropie au cours des deux transformations isochores (23) et (41), lors desquelles le fluide n'est pas à l'équilibre thermique avec les sources.

**Ordre de grandeur du rendement d'un moteur thermique**

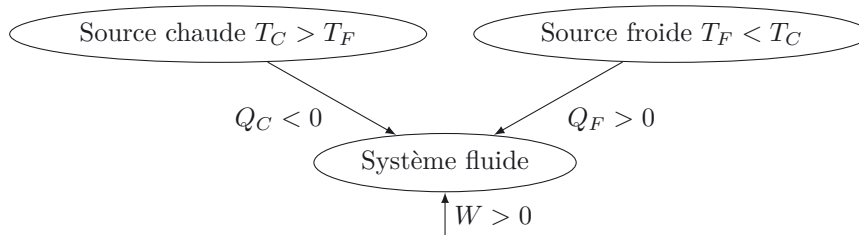
Les rendements des moteurs thermiques actuels (moteurs à essence ou diesel) sont inférieurs à 50%, alors que ceux des moteurs électriques peuvent être supérieurs à 80%.

Le rendement du moteur de Stirling étudié ici est très faible car c'est un moteur pédagogique qui n'est pas conçu pour être performant. Les moteurs de Stirling industriels ont un rendement pouvant aller jusqu'à 40 %. Ils ont l'avantage d'être silencieux puisqu'ils n'utilisent pas d'explosion, et la source chaude peut être réalisée de différentes façons (Soleil, bougie, etc.).

### ■ 3 Machine réceptrice ditherme

Rappelons qu'une machine thermique réceptrice est une machine qui doit recevoir de l'énergie sous forme de travail pour fonctionner. C'est le cas d'une **machine frigorifique** ou d'une **pompe à chaleur**.

Une machine réceptrice ditherme prélève de l'énergie à une source froide, par transfert thermique  $Q_F > 0$ . Elle reçoit un travail  $W > 0$  et fournit de l'énergie à une source chaude, par transfert thermique  $Q_C < 0$ . Le schéma de principe d'un récepteur ditherme est donné ci-dessous :





Par rapport au cas d'un cycle ditherme moteur, les sens des transferts énergétiques sont inversés puisque le système prélève de l'énergie à la source froide pour en donner à la source chaude alors que l'extérieur lui fournit du travail.

### Définition : Machine frigorifique et pompe à chaleur

La machine frigorifique et la pompe à chaleur sont deux machines réceptrices qui se distinguent par leur fonction.

- Dans une machine frigorifique la source froide est l'intérieur de l'enceinte réfrigérée que l'on cherche à refroidir (ou à maintenir froide malgré les pertes thermiques) et la source chaude est généralement l'air extérieur.
- Dans une pompe à chaleur, la source chaude est l'air de l'habitation à chauffer (ou à maintenir chaud), alors que la source froide est généralement l'air extérieur.



L'enceinte réfrigérée de la machine frigorifique et l'intérieur de l'habitation chauffée par la pompe à chaleur, constituent en régime permanent des thermostats dans la mesure où les pertes vers l'extérieur sont exactement compensées par le transfert thermique  $Q_F$ , dans le cas de la machine frigorifique et  $Q_C$  dans le cas de la pompe à chaleur.

### Méthode 19.3 : Identification des échanges énergétiques dans un récepteur

Dans une machine réceptrice, le système reçoit du travail pour prélever de l'énergie à la source froide et en donner à la source chaude, par transfert thermique.

- Le transfert thermique de la source chaude vers le système est négatif :  $Q_C < 0$ .
- Le transfert thermique de la source froide vers le système est positif :  $Q_F > 0$ .
- Le travail reçu par le système est positif :  $W > 0$ .
- $W_{\text{cycle}} = - \int_{\text{cycle}} P dV = \mathcal{A}_{\text{cycle}}$  où  $\mathcal{A}_{\text{cycle}}$  est l'aire du cycle ( $\mathcal{A}_{\text{cycle}} > 0$ ).  
 $W > 0$  correspond à un **cycle parcouru dans le sens trigonométrique**.

➡ Exercice (19.4)

□ Peut-on définir un rendement pour une machine réceptrice ?

Dans un récepteur thermique, de l'énergie est prélevée à la source froide pour en donner à la source chaude, en fournissant un travail mécanique. Le procédé n'a d'intérêt que si l'énergie intéressante est plus importante que celle dépensée sous forme de travail mécanique pour faire fonctionner la machine. On parle alors d'**efficacité** de la machine.

**Définition : Efficacité d'une machine réceptrice**

On définit l'efficacité  $e$  comme le rapport de la grandeur souhaitée sur la grandeur qui coûte.

- Pour une pompe à chaleur  $e = \frac{-Q_C}{W}$  car on souhaite fournir une énergie égale à  $-Q_C$  à la source chaude (l'habitation).
- Pour une machine frigorifique  $e = \frac{Q_F}{W}$  car on souhaite prélever une énergie égale à  $Q_F$  à la source froide (l'enceinte frigorifique).



L'efficacité est une grandeur positive supérieure à 1. Pour les pompes à chaleur, on parle aussi de coefficient de performance (COP).

□ **Quelles sont les efficacités maximales obtenues lors de cycles réversibles.**

L'application des deux premiers principes de la thermodynamique au système décrivant le cycle donne  $W = -Q_F - Q_C$  et  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_c = 0$ . Sachant que l'entropie créée  $S_c$  est positive ou nulle, on obtient à partir de ces deux relations l'inégalité  $e \leq e_c$ , où  $e_c$  est l'efficacité de Carnot. Le second principe impose donc une valeur maximale à l'efficacité, le maximum étant atteint pour un cycle dont toutes les transformations sont réversibles.

**Définition : Efficacités de Carnot**

L'efficacité maximale que l'on peut obtenir d'une machine réceptrice fonctionnant entre deux thermostats de températures  $T_C$  et  $T_F$  est appelée **efficacité de Carnot** et s'écrit :

- $e_c = \frac{-Q_C}{W} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$  pour une pompe à chaleur ;
- $e_c = \frac{Q_F}{W} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$  pour une machine frigorifique.

L'efficacité de Carnot est obtenue lorsque le système suit un **cycle de Carnot** constitué de **deux transformations adiabatiques réversibles** et de **deux transformations isothermes réversibles** au contact des thermostats de températures  $T_C$  et  $T_F$ .

À titre d'exemple, considérons une pompe à chaleur chauffant un local (source chaude) à la température  $T_C = 293$  K et fonctionnant avec l'air extérieur (source froide) à la température  $T_F = 278$  K. Son efficacité de Carnot est  $e_c = 19,5$ . L'énergie fournie au local par transfert thermique est donc au maximum environ vingt fois plus importante que l'énergie fournie à la pompe à chaleur sous forme de travail.

**Ordre de grandeur de l'efficacité d'une machine réceptrice**

L'ordre de grandeur de l'efficacité réelle d'une machine thermique réceptrice est généralement compris entre 3 et 5.

## ■ 4 Machine avec écoulement de fluide

Intéressons-nous maintenant aux machines dans lesquelles un fluide subit un cycle en s'écoulant au travers de différents organes (compresseurs, échangeurs thermiques, turbines, etc.). C'est le cas dans une machine à vapeur, une turbine à gaz, un réacteur d'avion, une machine frigorifique. Ce n'est pas le cas dans la machine de Stirling étudiée précédemment ou dans les moteurs à essence ou diesel puisque dans ces machines toutes les transformations ont lieu dans un même cylindre.

À titre d'exemple, étudions plus particulièrement une installation à vapeur d'eau avec turbine, constituant une machine motrice. Dans les centrales électriques (à combustion chimique ou nucléaire) ce type de machine thermique est utilisé pour entraîner un alternateur, qui convertit l'énergie mécanique fournie par la machine en énergie électrique distribuée via le réseau électrique.

La figure 19.5 présente le principe de fonctionnement d'une machine à vapeur qui suit le **cycle de Rankine avec surchauffe** de la vapeur (appelé aussi **cycle de Hirn**), dans lequel l'eau s'écoule à travers différents organes (turbine, pompe, échangeurs thermiques), en passant alternativement de l'état liquide à l'état gazeux.

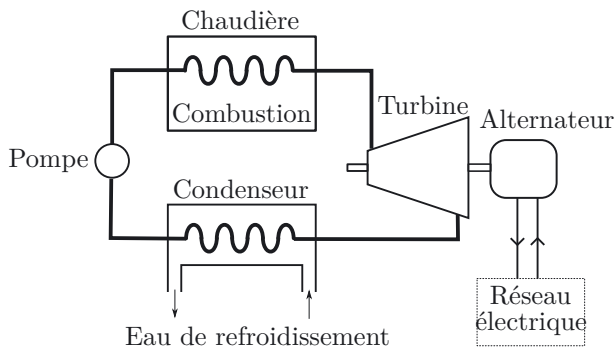


Figure 19.5. Principe de fonctionnement d'une machine à vapeur.

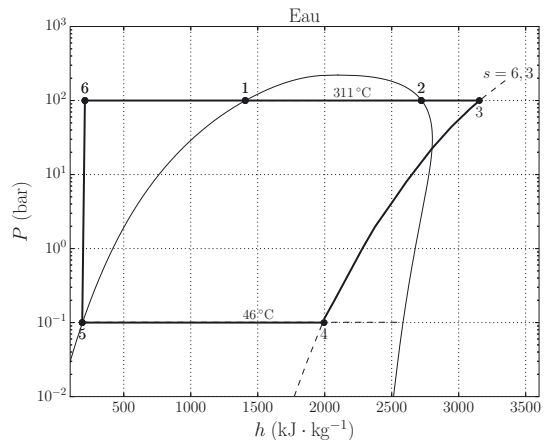


Figure 19.6. Cycle de Hirn dans le diagramme  $(P, h)$ .

Le cycle suivi par le système est représenté sur la figure 19.6 dans le diagramme  $(P, h)$ . Il est composé de différentes étapes.

- Transformation 12 : l'eau est vaporisée à température et pression constante dans la chaudière. Dans l'état 2, l'eau est sous forme de vapeur saturante.
- Transformation 23 : la vapeur d'eau est chauffée à pression constante (surchauffe) dans la chaudière.
- Transformation 34 : le fluide se détend dans la turbine suivant une transformation adiabatique réversible (isentropique). L'état 4 est alors un mélange diphasé liquide-vapeur.
- Transformation 45 : l'eau est refroidie dans le condenseur au contact de la source froide. Dans l'état 5 l'eau est sous forme de liquide saturant.
- Transformation 56 : le liquide est comprimé par la pompe, de manière adiabatique.
- Transformation 61 : l'eau liquide est chauffée à pression constante dans la chaudière jusqu'à l'état de liquide saturant.



L'application du théorème des moments (méthode 16.4) permet de trouver la composition de l'état diphasé au point 4 :  $x_4 = \frac{h_4 - h_\ell}{h_v - h_\ell} = 0,75$ .

□ **Comment peut-on définir un système fermé pour appliquer les principes de la thermodynamique lorsque le fluide est en écoulement ?**

Le fluide étant en écoulement, le système fermé doit le suivre dans son mouvement. Pour le définir on est amené à définir plusieurs sous-systèmes, comme le montre la figure 19.7.

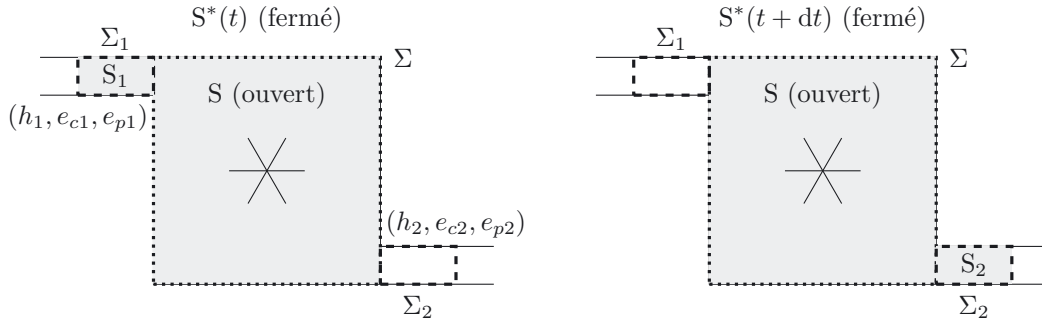


Figure 19.7. Système fermé  $S^*$  aux dates  $t$  (à gauche) et  $t + dt$  (à droite).

On commence par définir le **système ouvert**  $S$  constitué du fluide intérieur à une surface de contrôle fixe  $\Sigma$ , à travers laquelle il est susceptible d'échanger de l'énergie avec l'extérieur par transfert thermique ou par travail mécanique, au moyen de parties mobiles (par exemple les aubes dans une turbine).

On définit ensuite deux autres systèmes ouverts : le **système**  $S_1$  constitué du fluide entrant dans la machine entre  $t$  et  $t + dt$  et intérieur à la date  $t$  à la surface  $\Sigma_1$  ; le **système**  $S_2$  constitué du fluide sortant de la machine entre  $t$  et  $t + dt$  et intérieur à la date  $t + dt$  à la surface  $\Sigma_2$ .

Le **système fermé**  $S^*$  est le système qui à est l'union, à la date  $t$ , des systèmes ouverts  $S$  et  $S_1$  et, à la date  $t + dt$ , des systèmes ouverts  $S$  et  $S_2$ .

L'écoulement étant stationnaire, les masses de  $S$ , de  $S_1$  et de  $S_2$  ne dépendent pas du temps et les masses de  $S_1$  et de  $S_2$  sont égales.

#### Méthode 19.4 : Définir un système fermé dans le cas d'un écoulement stationnaire

- Définir le système ouvert  $S$  intérieur à une surface de contrôle fixe  $\Sigma$  et à travers laquelle le fluide est susceptible d'échanger de l'énergie avec l'extérieur par transfert thermique ou par travail mécanique.
- Définir les systèmes ouverts  $S_1$  et  $S_2$  constitués respectivement du fluide entrant dans la surface  $\Sigma$  et du fluide sortant de cette même surface entre  $t$  et  $t + dt$ .
- Définir le système fermé  $S^*$  tel que  $S^*(t) = S \cup S_1$  et  $S^*(t + dt) = S \cup S_2$ .

➔ Exercice (19.5)

Les échanges d'énergie entre le système fermé  $S^*$  et l'extérieur sont ramenés à l'unité de masse du fluide en écoulement. Ce sont :

- le transfert thermique massique  $q$  reçu par le fluide, au travers de la surface  $\Sigma$  ;
- le travail utile massique  $w_u$  reçu par le fluide de la part des parties mobiles (par exemple les aubes d'une turbine), au travers de la surface  $\Sigma$  ;
- le travail massique des forces de pression de la part du fluide situé en amont de  $\Sigma_1$  et du fluide situé en aval de  $\Sigma_2$ , aussi appelé travail de transvasement.

On note  $(h_1, e_{c1}, e_{p1})$  l'enthalpie massique, l'énergie cinétique macroscopique massique et l'énergie potentielle macroscopique massique du fluide à l'entrée de la surface de contrôle et  $(h_2, e_{c2}, e_{p2})$  ces mêmes grandeurs à la sortie de la surface de contrôle.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système fermé  $\Sigma^*$ , on obtient une nouvelle écriture du premier principe appelée **premier principe industriel** ou premier principe des systèmes en écoulement, dont la démonstration figure au programme de seconde année.

### Premier principe des systèmes en écoulement stationnaire

Pour un système en écoulement stationnaire, le premier principe s'écrit :

$$(h_2 - h_1) + (e_{c2} - e_{c1}) + (e_{p2} - e_{p1}) = w_u + q$$

En multipliant par le débit massique  $D_m$  (en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ), cette relation devient :

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_m + P_{th}$$

où  $P_{th}$  est la puissance thermique reçue par le système et  $P_m$  la puissance mécanique utile reçue par le système de la part des parties mobiles.



Dans la majorité des cas on peut négliger la variation d'énergie mécanique macroscopique devant la variation d'enthalpie. On écrit alors  $\Delta h = w_u + q$ .

### □ Comment calculer les différents transferts énergétiques et le rendement de la machine à partir du diagramme de la figure 19.6 ?

La lecture de ce diagramme nous permet de lire, pour chacun des points du cycle, l'enthalpie massique et la pression. L'utilisation du premier principe industriel nous permet ensuite de caractériser entièrement les échanges énergétiques avec la machine.

- Transfert thermique avec la source chaude :  
Il a lieu dans la chaudière, lors des transformations 61, 12 et 23. Il n'y a pas de travail échangé avec des parties mobiles dans la chaudière ( $w_c = 0$ ). L'application du premier principe industriel conduit alors à :  $q_c = h_3 - h_6 = 2,94 \text{ kJ/kg}$ .
- Transfert thermique avec la source froide :  
Il a lieu dans le condenseur, lors de la transformation 45. Il n'y a pas de travail échangé avec des parties mobiles dans le condenseur ( $w_f = 0$ ). L'application du premier principe industriel conduit alors à :  $q_f = h_5 - h_4 = -1,80 \text{ kJ/kg}$ . On vérifie que le fluide cède de l'énergie à la source froide pour se liquéfier.
- Travail mécanique :  
L'échange énergétique par travail mécanique se fait dans la pompe ( $w_{56}$ ) et la turbine ( $w_{34}$ ). En supposant que le travail mécanique  $-w_{34}$  fourni par le fluide à la turbine sert à faire tourner à la fois l'alternateur et la pompe, on a :  $w_a = w_{\text{cycle}} = w_{34} + w_{56} = -q_f - q_c$ . Numériquement, on obtient :  $w_a = -1,14 \text{ kJ/kg}$ .

**Méthode 19.5 : Exploiter un cycle pour calculer le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique**

- Identifier le caractère moteur ou récepteur en fonction du sens de parcours du cycle (machine motrice : sens horaire ; machine réceptrice : sens trigonométrique).
- Identifier les transformations au contact des sources chaude et froide et les signes des transferts thermiques à partir des méthodes 19.2 et 19.3.
- Appliquer le premier principe industriel pour déterminer à partir des données fournies par le diagramme les différents termes énergétiques (travaux et transferts thermiques).
- Calculer le rendement ou l'efficacité de la machine thermique.

➔ Exercice (19.6)

□ **Quel est alors le rendement de cette machine à vapeur ?**

Le rendement de cette machine est  $\eta = \frac{-w_a}{q_c} = 38,8\%$ . Pour le comparer au rendement maximal (rendement de Carnot), il faut connaître les températures des sources. Celle de la source froide, c'est-à-dire de l'eau de refroidissement, est de l'ordre de  $20^\circ\text{C}$ , soit  $T_F = 293\text{ K}$ . Celle de la source chaude, c'est-à-dire celle des gaz chauds provenant du foyer de la chaudière, est de l'ordre de  $550^\circ\text{C}$ , soit  $T_C = 823\text{ K}$ . Le rendement de Carnot est donc  $64\%$ . Le rendement réel est inférieur au rendement de Carnot en raison de l'irréversibilité des transformations dans la chaudière et dans le condenseur, où la différence de température avec la source est importante.



## Interro de cours

1. Dans toute la suite, on notera  $(\Sigma)$  un système thermodynamique fluide fermé, qui décrit une évolution cyclique ditherme, en recevant algébriquement le travail  $W$ , et les transferts thermiques  $Q_C$  et  $Q_F$  de la part respectivement d'une source chaude (température  $T_C$ ) et d'une source froide (température  $T_F$ ). Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Pour un moteur ditherme,  $Q_F > 0$  et  $W < 0$ .
  - (b) Pour un moteur ditherme,  $Q_C > 0$  et  $W < 0$ .
  - (c) Pour un moteur ditherme, le cycle tracé en diagramme  $(P, V)$  est parcouru dans le sens horaire.
  - (d) L'aire de ce cycle nous renseigne sur le transfert thermique total reçu.
2. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Le premier et le second principe appliqués à  $(\Sigma)$  sur un cycle réel donnent  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$  et  $\Delta S_{\text{cycle}} > 0$  à cause de la présence d'irrégularités dans le cycle réel.
  - (b) L'application du second principe sur un cycle amène à :  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \geq 0$ .
  - (c) Lorsque le cycle est parcouru de manière réversible,  $\frac{Q_C}{T_C} = -\frac{Q_F}{T_F}$ .
  - (d) Lors d'un cycle ditherme,  $W + Q_C + Q_F = 0$ .
3. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Pour un moteur ditherme, le rendement s'écrit  $\eta = \frac{-W}{Q_F}$ .
  - (b) Un cycle de Carnot est constitué de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes.
  - (c) Pour un moteur ditherme, le rendement de Carnot s'écrit  $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ .
  - (d) Le rendement d'un moteur ditherme est toujours supérieur ou égal au rendement de Carnot correspondant.
4. On considère une machine réceptrice. Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Pour une telle machine,  $Q_C < 0$ ,  $Q_F > 0$  et  $W > 0$ .
  - (b) Cette machine peut fonctionner soit en machine frigorifique, soit en pompe à chaleur.
  - (c) Le cycle en diagramme  $(P, V)$  est parcouru dans le sens horaire.
  - (d) L'efficacité pour une pompe à chaleur est  $e = \frac{Q_C}{W}$ .
  - (e) L'efficacité pour une machine frigorifique est  $e = \frac{Q_F}{W}$ .
5. On considère une machine ditherme réversible, avec  $Q_C = -32,0 \text{ J}$ ,  $T_C = 293 \text{ K}$ ,  $T_F = 277 \text{ K}$ . Indiquer les affirmations justes.
  - (a) Il s'agit d'un moteur ditherme.
  - (b) Il peut s'agir d'une machine frigorifique.
  - (c)  $Q_F = 40,2 \text{ J}$
  - (d)  $W = 1,7 \text{ J}$
  - (e) Dans le cas d'une machine frigorifique, l'efficacité est  $e = 17$ .

## Exercices

### Exercice 19.1 Quel beau cycle !

➔ Méthodes (19.1) (19.2)

La plupart des moteurs à explosion à allumage commandé (moteur à essence) présentent un cycle thermodynamique réel qui peut être modélisé par un cycle à quatre temps théorique : le cycle de Beau de Rochas. Ces moteurs comprennent plusieurs cylindres, dans lesquels coulisse un piston en un mouvement rectiligne alternatif, entre deux positions extrêmes : le point mort haut PMH (volume interne minimal  $V_{\min}$ ) et le point mort bas PMB (volume interne maximal  $V_{\max}$ ). Chaque cylindre est fermé par une culasse munie de deux soupapes : la soupape d'admission, permettant l'alimentation en mélange air/essence du cylindre et la soupape d'échappement, permettant l'évacuation des gaz brûlés. Le cycle théorique de beau de Rochas peut être décrit par les étapes suivantes.

- De (0) à (1) : phase d'admission d'un mélange d'air/essence. Le piston est initialement au PMH, la soupape d'admission s'ouvre, le piston descend alors en aspirant le mélange sous une pression  $P_1$ , jusqu'au PMB de volume  $V_1 = V_{\max}$ .
- De (1) à (2) : compression adiabatique réversible. La soupape d'admission se ferme, le piston remonte en comprimant le mélange jusqu'à la pression  $P_2$  et le volume  $V_2 = V_{\min}$ .
- De (2) à (3) : une étincelle provoque l'explosion du mélange, modélisée par une compression isochore amenant le système à la pression  $P_3$ .
- De (3) à (4) : les gaz chauds en surpression repoussent alors le piston, initiant son mouvement (temps moteur). Cette phase peut être considérée comme adiabatique réversible, et le piston retourne au PMB, avec  $V_4 = V_{\max}$ .
- De (4) à (0) : l'ouverture de la soupape d'échappement commence par ramener les gaz brûlés à la pression atmosphérique de façon isochore (de (4) à (1)), puis le piston remonte au PMH en chassant les gaz de façon isobare.

On considère que le mélange se comporte comme un gaz parfait de coefficient isentropique  $\gamma$ , de masse molaire  $M$  et que tout se passe comme si le système fermé constitué des  $n$  moles de mélange admises décrivait continûment le cycle (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  (1). La pression initiale en (1) est  $P_1 = 1,0$  bar, le volume  $V_1$ , la température  $T_1 = 293$  K. On note  $a = \frac{V_1}{V_2} = 10$  et  $\delta = \frac{P_3}{P_2}$ . La cylindrée unitaire de ce moteur est  $C = V_1 - V_2 = 0,50$  L et on prend  $\gamma = 1,33$ . La température à la fin de la combustion est  $T_3 = 2,0 \cdot 10^3$  °C.

1. Pour un moteur tournant à 3000 tours/min, commenter le caractère adiabatique des compressions et des détenteurs utilisés dans ce cycle théorique. Que pensez-vous du modèle isentropique ?
2. À partir des données précédentes, déterminer les valeurs de  $V_1$  et  $V_2$ . En déduire la valeur de  $n$ , de la pression  $P_2$ , de la pression  $P_3$  et donc du rapport  $\delta$ .
3. Caractériser entièrement les états (1), (2), (3), (4) en donnant les volumes, pressions et températures correspondant. On pourra présenter les résultats dans un tableau.
4. Placer les points (0), (1), (2), (3), (4) correspondant à cette évolution sur un diagramme de Watt ( $P, V$ ). Le cycle est-il un cycle moteur ? On justifiera la réponse.
5. Pour chacune des transformations correspondant au cycle (1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (4)  $\rightarrow$  (1), déterminer les expressions du travail  $W_{ij}$  et du transfert thermique  $Q_{ij}$  reçus par les  $n$  moles de gaz. On exprimera les résultats en fonction des données.

6. Définir le rendement  $\eta$  de ce moteur et l'exprimer en fonction de  $\gamma$  et de  $a$ . Faire l'application numérique. Comment évolue  $\eta$  avec  $\gamma$ ? Sachant que  $\gamma$  décroît lorsque la richesse du carburant augmente, a-t-on intérêt d'augmenter ou de diminuer la richesse du carburant pour augmenter le rendement ?

On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 19.2 Appliquer les bons principes

➔ Méthodes (19.1) (19.2)

On considère un système fermé fluide parcourant des cycles thermodynamiques dithermes, au cours desquels il reçoit algébriquement le travail  $W = -53 \text{ J}$ , le transfert thermique  $Q_F = -70 \text{ J}$  de la part de la source froide de température  $T_F = 278 \text{ K}$  et le transfert thermique  $Q_C$  de la part de la source chaude de température  $T_C = 500 \text{ K}$ .

1. S'agit-il d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur ?
2. En appliquant le premier principe au fluide sur un cycle, déterminer le transfert thermique  $Q_C$  qu'il reçoit algébriquement de la part de la source chaude. Faire l'application numérique.
3. Appliquer ensuite le second principe à ce système. Le fonctionnement est-il réversible ?

### Exercice 19.3 Moteur et monotherme : mariage impossible ?

➔ Méthode (19.2)

En mobilisant vos connaissances de thermodynamique, commenter l'énoncé suivant, dit énoncé de Kelvin-Planck : « il est impossible de réaliser un processus dont le seul résultat serait de convertir intégralement en travail une quantité de chaleur fournie par une source unique ».

Remarque : la transformation envisagée est cyclique et le système est fermé.

### Exercice 19.4 Donner ou recevoir

➔ Méthode (19.3)

Cinq moles d'un gaz parfait de coefficient adiabatique  $\gamma = 1,4$  subissent le cycle de transformation suivant : partant de l'état (1) ( $P_1 = 2,5 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ), une détente adiabatique réversible les amène à l'état (2) ( $P_2 = 1,5 \text{ bar}$ ), elles subissent ensuite une évolution isobare les amenant dans l'état (3), puis retournent dans l'état (1) par une compression isotherme réversible.

1. Caractériser entièrement les états (1), (2), (3), en donnant les volumes, pressions et températures correspondant. On pourra présenter les résultats dans un tableau.
2. Placer les points correspondant à cette évolution cyclique sur un diagramme de Watt ( $P, V$ ). Le cycle est-il un cycle moteur ? On justifiera la réponse.
3. Pour chacune des transformations ( $i$ )  $\rightarrow$  ( $j$ ), déterminer le travail  $W_{ij}$ , le transfert thermique  $Q_{ij}$  reçus par le gaz. Quel est le travail total reçu par le gaz au cours d'un cycle ? Commenter son signe.

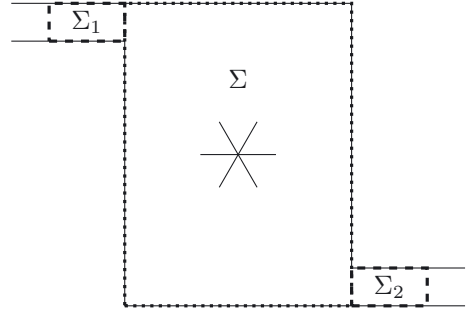
On donne la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Exercice 19.5 Fluide en écoulement

➔ Méthode (19.4)

Dans la plupart des machines utilisées de façon industrielle, on utilise un fluide en écoulement, qui va traverser différents organes (compresseur, échangeur....) qui vont fournir à l'unité de masse de fluide les traversant un travail massique dit « utile »  $w_u$  et un transfert thermique massique  $q$ . Ce fluide sera susceptible de changer d'état au cours de son écoulement. On notera (1) la partie amont (fluide n'ayant pas encore traversé la machine) et (2) la partie aval (fluide sortant de la machine) de l'écoulement. Nous introduirons ainsi la vitesse  $c_i$ , l'énergie potentielle massique  $e_{pi}$ , le volume massique  $v_i$ , l'énergie interne massique  $u_i$ , l'enthalpie massique  $h_i$ , la pression  $P_i$ , la surface  $S_i$  (surface droite de la canalisation) avec  $i = 1, 2$  pour décrire l'état du fluide amont et aval.

On considère que cet écoulement est stationnaire : les grandeurs considérées sont toutes indépendantes du temps. On considère à l'instant  $t$  comme système fermé  $\Sigma^*$  le fluide compris dans la machine ( $\Sigma$ ) et le fluide qui va entrer dans la machine entre  $t$  et  $t + dt$  ( $\Sigma_1$ ). On notera  $m$  la masse du fluide compris dans la machine.



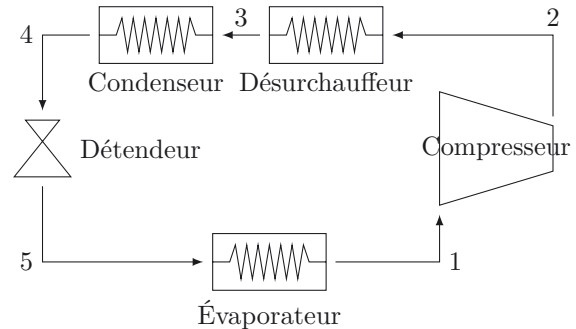
1. Que devient ce système fermé à l'instant  $t + dt$ ? On notera  $\Sigma_2$  le fluide qui est sorti de la machine entre  $t$  et  $t + dt$ .
2. Quelle est la masse  $dm_1$  du fluide compris dans  $\Sigma_1$ ? Quelle est la masse  $dm_2$  du fluide compris dans  $\Sigma_2$ ? On exprimera ces masses en fonction de  $c_i$ ,  $v_i$ ,  $S_i$  et  $dt$ . Sachant que  $\Sigma^*$  est un système fermé, donner la relation existant entre  $dm_1$  et  $dm_2$ . On introduit le débit massique  $D_m$  de l'installation. Relier  $D_m$  à  $dm_1$  et  $dm_2$ .
3. Exprimer les travaux élémentaires des forces de pression reçus par  $\Sigma^*$  de la part du fluide amont  $\delta W_{p,1}$  et aval  $\delta W_{p,2}$ , en fonction de  $S_i$ ,  $c_i$ ,  $P_i$  et  $dt$ , puis en fonction de  $v_i$ ,  $D_m$ ,  $P_i$  et  $dt$ , avec  $i = 1, 2$ .
4. Exprimer le travail utile élémentaire  $\delta W_u$  et le transfert thermique élémentaire  $\delta Q$  reçus par le fluide traversant la machine pendant  $dt$ , en fonction de  $dt$ ,  $D_m$ ,  $q$ ,  $w_u$ .
5. Déterminer la variation d'énergie cinétique  $dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t)$ , d'énergie potentielle  $dE_p = E_p(t + dt) - E_p(t)$ , d'énergie interne  $dU = U(t + dt) - U(t)$  de  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  en fonction de  $c_i$ ,  $D_m$ ,  $dt$ ,  $e_{pi}$ ,  $u_i$  (on considère que les grandeurs relatives à  $\Sigma$  sont constantes au cours du temps).
6. Appliquer le premier principe à  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$ . En déduire après simplification la formule suivante :  $h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + e_{p2} - e_{p1} = w_u + q$ .
7. Dans le cas d'une détente dite de Joule-Thomson, on considère que le fluide traverse un « obstacle » (paroi poreuse, rétrécissement, pointeau...), sans recevoir de travail utile et de façon adiabatique. De plus, on néglige ses variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (écoulement lent et horizontal). Déduire de l'étude précédente le caractère isenthalpique d'une telle détente.

### Exercice 19.6 Un écoulement rafraîchissant

#### ➔ Méthode (19.5)

Les nouvelles machines frigorifiques à compression reposent toutes sur un principe unique : un fluide frigorigène, comme par exemple le R134a, parcourt des cycles récepteurs au cours desquels il va, en se condensant ou en se vaporisant, soutirer une quantité importante d'énergie thermique à une source froide (la partie à refroidir) et en céder au milieu extérieur.

Nous allons ici étudier le principe d'une machine frigorifique à R134a, dont le schéma-bloc est indiqué ci-contre.



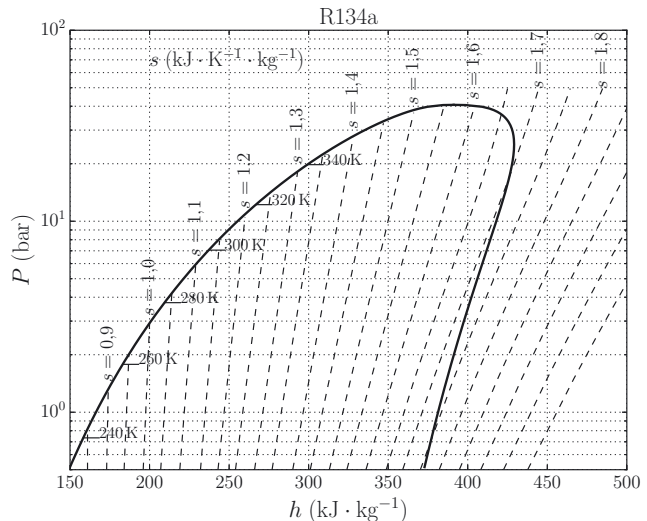
Dans l'état (1), le fluide est à la pression  $P_1 = 1,0$  bar dans l'état de vapeur saturante. Il traverse le compresseur où il subit une compression isentropique l'amenant dans l'état (2) à la pression  $P_2 = 10$  bar.

Le passage dans le désurchauffeur l'amène de façon isobare à l'état de vapeur saturante (état (3)), puis le passage dans le condenseur l'amène de façon isobare à l'état de liquide saturant (état (4)).

Il passe ensuite dans un détendeur dans lequel il subit une détente isenthalpique l'amenant dans l'état (5) à la pression  $P_5 = P_1 = 1,0$  bar. Il s'évapore ensuite de façon isobare dans l'évaporateur.

On rappelle que pour un fluide en écoulement lent et permanent dans une machine, nous avons la relation  $\Delta h = w_u + q$ , avec  $\Delta h$  la variation d'enthalpie massique entre l'aval et l'amont de la machine,  $w_u$  le travail utile massique reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine et  $q$  le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée de cette machine.

1. Placer les points (1), (2), (3), (4), (5) sur le diagramme ( $P, h$ ) ci-dessus.
2. Caractériser ces cinq états, en indiquant pour chacun leurs pression, enthalpie et entropie massique, titre en vapeur si nécessaire et, si possible, leur température. On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau.
3. La machine étant une machine frigorifique, au niveau de quel(s) organe(s) le fluide est-il en contact avec la source froide ? la source chaude ? Ces organes présentent-ils des pièces mobiles ?
4. En vous servant de la relation donnée en introduction, déterminer numériquement le transfert thermique massique  $q_c$  reçu par le fluide de la part de la source chaude, le transfert thermique massique  $q_f$  reçu par le fluide de la part de la source froide, ainsi que le travail utile reçu par



le fluide lors de la traversée du compresseur. Lors du passage à travers le détendeur, le fluide reçoit-il un travail utile ? un transfert thermique ?

5. Définir l'efficacité  $e$  de cette machine frigorifique et la calculer numériquement.
6. Sachant que la température de la source froide est  $T_f = -18^\circ\text{C}$  et que celle de la source chaude est  $T_c = 20^\circ\text{C}$ , quelle serait l'efficacité de Carnot  $e_c$  correspondante ? Commenter.

### Exercice 19.7 Les pompes de Thierry

Thierry veut investir dans une pompe à chaleur (PAC) air/eau pour chauffer sa maison. Le principe en est le suivant : un fluide caloporteur, comme le R410A, parcourt des cycles au cours desquels il est en contact avec une source froide (air extérieur, température  $T_f$ ) à qui il prélève la puissance thermique  $\mathcal{P}_f > 0$  et avec une source chaude (eau du système de chauffage, température  $T_c$ ) à qui il cède la puissance thermique  $\mathcal{P}'_c = -\mathcal{P}_c > 0$ ,  $\mathcal{P}_c$  étant la puissance thermique algébrique qu'il reçoit de cette source. La PAC a besoin d'une alimentation électrique de puissance  $\mathcal{P}_e$  pour fonctionner. Il consulte alors les notices de deux PAC, qui indiquent le coefficient de performance ( $COP$ ) de la PAC et la puissance nominale  $\mathcal{P}'_c$  (en kW) en fonction de la température extérieure  $T_f$ , pour une température  $T_c = 20^\circ\text{C}$  :

Pompe n°1

$T_f = -7^\circ\text{C}$		$T_f = +2^\circ\text{C}$		$T_f = +7^\circ\text{C}$		$T_f = +12^\circ\text{C}$	
$\mathcal{P}'_c = 4,6$	$COP = 2,7$	$\mathcal{P}'_c = 2,8$	$COP = 4,2$	$\mathcal{P}'_c = 2,3$	$COP = 6,0$	$\mathcal{P}'_c = 2,3$	$COP = 8,3$

Pompe n°2

$T_f = -7^\circ\text{C}$		$T_f = +2^\circ\text{C}$		$T_f = +7^\circ\text{C}$		$T_f = +12^\circ\text{C}$	
$\mathcal{P}'_c = 7,5$	$COP = 2,4$	$\mathcal{P}'_c = 4,5$	$COP = 3,8$	$\mathcal{P}'_c = 3,5$	$COP = 5,7$	$\mathcal{P}'_c = 4,0$	$COP = 7,2$

1. Donner la définition du  $COP$  d'une pompe à chaleur, en fonction des données.
2. Comment évolue le coefficient de performance avec  $T_f$  ? A-t-on intérêt, au niveau consommation électrique, à avoir un grand ou un petit  $COP$  ?
3. Mener une étude comparative de ces deux PAC. Les utilisera-t-on pour le même type de logement ?
4. Thierry habite en Bretagne une petite maison bien isolée. Laquelle de ces deux PAC lui conseillez-vous ?

### Exercice 19.8 Réfrigérer sans comprimer !

Le réfrigérateur à absorption est une machine frigorifique utilisant trois thermostats, une source de chaleur remplaçant le compresseur pour faire tourner le cycle. Ce type de dispositif est particulièrement indiqué dans des situations où l'accès à l'électricité est chère ou compliquée, ou lorsqu'on dispose d'un fort ensoleillement ou de gaz ou liquide chauds. Ce réfrigérateur fonctionne généralement à partir du couple ammoniac/eau (l'ammoniac étant le fluide frigorifique, et l'eau le solvant) et ne reçoit pas de travail. Voici de façon simplifiée le principe de son fonctionnement :

- Le bouilleur (alimenté par la source chaude de température  $T_c$ ) chauffe la solution ammoniac/eau. Une partie de l'ammoniac se vaporise et élimine l'eau entraînée (renvoyée dans le bouilleur) dans le séparateur.
- L'ammoniac, gazeux et sous haute pression, passe ensuite dans un condenseur, en contact thermique avec l'extérieur de température  $T_e$ . Il se condense par contact thermique avec l'extérieur.

- Le fluide haute pression sortant du condenseur traverse ensuite un détendeur, qui régule et abaisse sa pression, avant de traverser un évaporateur, où il s'évapore par contact thermique avec la source froide à la température  $T_f$ .
- Il sort de l'évaporateur sous forme gazeuse et est acheminé vers l'absorbeur où il est absorbé par la solution appauvrie eau/ammoniac, issue du bouilleur après avoir été détendue. L'ensemble est pompé vers le bouilleur, où le cycle recommence.

On a bien entendu  $T_f < T_e < T_c$ . On note  $Q_f$ ,  $Q_e$ ,  $Q_c$  les transferts thermiques algébriquement reçus par l'ammoniac de la part respectivement de la source froide, de l'extérieur et de la source chaude. On négligera le transfert thermique dû à l'absorption.

1. Indiquer les signes des trois grandeurs  $Q_f$ ,  $Q_e$ ,  $Q_c$ . La fonction de refroidissement est-elle assurée ?
2. Définir le coefficient d'efficacité  $e$  de ce réfrigérateur en fonction des données.
3. En appliquant le premier et le second principe à l'ammoniac sur un cycle, montrer que  $e$  reste inférieur à une efficacité maximale  $e_{\max}$  qu'on exprimera en fonction des températures des trois sources.
4. Calculer numériquement  $e_{\max}$  avec  $T_c = 100^\circ\text{C}$ ,  $T_e = 25^\circ\text{C}$  et  $T_f = 4,0^\circ\text{C}$ .

### Exercice 19.9 Centrale d'échange

Dans une centrale nucléaire dite en circuit ouvert, l'énergie dégagée par la fission des noyaux d'uranium est évacuée en permanence de la cuve du réacteur par la circulation d'eau sous pression qui constitue le circuit primaire. La température moyenne de l'eau sortant du réacteur est de  $T_c = 305^\circ\text{C}$  et sa pression voisine de 150 bar. Cette eau sous pression traverse un échangeur, qui la met en contact thermique avec le circuit secondaire, parcouru aussi par de l'eau. Elle fournit la puissance thermique  $\mathcal{P}_c$  à ce circuit secondaire, ce qui provoque la vaporisation de l'eau du circuit secondaire à la température de  $270^\circ\text{C}$  sous la pression de 56 bar. La vapeur d'eau ainsi formée entraîne la turbine, produisant ainsi la puissance électrique  $\mathcal{P}_e$ . À la sortie de la turbine, cette eau traverse un condenseur, lequel la met en contact thermique avec l'eau du circuit de refroidissement pompée dans la mer ou dans un fleuve, dont la température à l'entrée du condenseur est  $T_f = 10^\circ\text{C}$  en moyenne (notons que selon les saisons, la température de cette eau peut fluctuer d'environ  $7^\circ\text{C}$  autour de cette valeur moyenne). En cédant la puissance thermique  $\mathcal{P}_f$  à l'eau du circuit de refroidissement, l'eau du circuit secondaire se condense et ressort du condenseur à l'état liquide et à la température de  $30^\circ\text{C}$  et une pompe la renvoie à l'entrée de l'évaporateur.

Le rendement énergétique de la centrale est  $\eta = \frac{\mathcal{P}_e}{\mathcal{P}_c} = 35\%$  et la centrale produit la puissance électrique  $\mathcal{P}_e = 1,1 \cdot 10^3 \text{ MW}$ . On considère que la puissance non transformée dans la turbine est évacuée vers l'extérieur dans le condenseur. L'eau du fleuve ou de la mer est pompée avec un débit volumique  $D_V = 100 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide  $c_l = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  et la masse volumique de l'eau liquide  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , au voisinage de  $10^\circ\text{C}$  et à la pression de 1,0 bar.

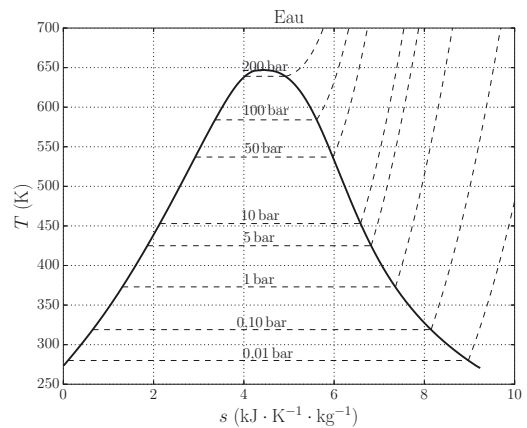
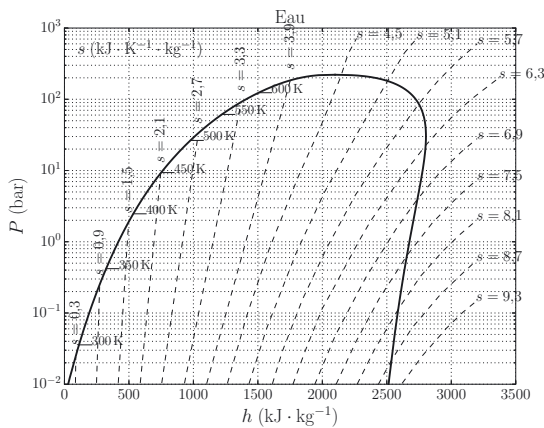
1. Déterminer les valeurs de  $\mathcal{P}_c$  et de  $\mathcal{P}_f$ .
2. Quel serait le rendement de Carnot du circuit secondaire ? Commenter.
3. En supposant que la puissance  $\mathcal{P}_f$  sert à chauffer l'eau du circuit de refroidissement, déterminer la variation de la température de l'eau du fleuve entre l'entrée du condenseur et sa sortie.
4. Sachant que les centrales nucléaires françaises possèdent en moyenne trois réacteurs ayant un circuit de refroidissement commun et qu'on considère qu'un rejet loin des berges de l'eau de



refroidissement n'est possible que si la température de l'eau n'excède pas 30 °C, un tel rejet sera-t-il toujours possible ?

### Exercice 19.10 Rankine ou Carnot ?

Les machines à vapeur sont présentes dans de très nombreuses applications industrielles (centrale électrique ou nucléaire...). Le cycle le plus simple permettant de réaliser une machine à vapeur est le cycle de Rankine en vapeur humide. Ce cycle comporte deux isobares (changement d'état total ou partiel) et deux adiabatiques réversibles (pompe et turbine). Nous allons décrire le cycle de Rankine en vapeur humide de l'eau entre deux températures extrêmes,  $T_1 = 450 \text{ K}$  et  $T_3 = 350 \text{ K}$ . Dans l'état (1), le fluide est à la température  $T_1$  dans l'état de liquide saturant. Il subit une évaporation totale isobare l'amenant dans l'état (2) de vapeur saturante, puis une détente isentropique l'amenant dans l'état (3) à la température  $T_3$ . Une liquéfaction partielle l'amène ensuite de manière isobare dans l'état (4) et une compression isentropique le ramène à l'état (1).



On rappelle que pour un fluide en écoulement lent et permanent dans une machine, nous avons la relation  $\Delta h = w_u + q$ , avec  $\Delta h$  la variation d'enthalpie massique entre l'aval et l'amont de la machine,  $w_u$  le travail utile massique reçu par le fluide de la part des parties mobiles de la machine et  $q$  le transfert thermique massique reçu par le fluide à la traversée de cette machine.

1. Les organes de base constituant cette machine thermique sont les suivants : une pompe (P), une turbine (T), un évaporateur (E) et un condenseur (C). En analysant les données, réaliser le schéma-bloc correspondant au cycle moteur, en faisant intervenir les organes pertinents.
2. Placer les points (1), (2), (3), (4) sur les deux diagrammes ci-dessus.
3. Quelle différence voyez-vous entre le cycle de Rankine et le cycle de Carnot ?
4. Caractériser entièrement ces quatre états, en indiquant pour chacun leurs pression, température, enthalpie et entropie massique et titre en vapeur si nécessaire. On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau.
5. Au niveau de quel organe le fluide est-il en contact avec la source chaude ? avec la source froide ?
6. En utilisant la relation donnée en introduction, déterminer numériquement le transfert thermique massique  $q_c$  reçu par le fluide de la part de la source chaude, le transfert thermique massique  $q_f$  reçu par le fluide de la part de la source froide, ainsi que le travail utile total reçu algébriquement par le fluide
7. Définir le rendement  $\eta$  de cette machine à vapeur et le calculer numériquement.



# Corrections

## Interro de cours

1. Un moteur ditherme fonctionne en prélevant de l'énergie thermique à une source chaude ( $Q_C > 0$ ), il cède alors de l'énergie thermique à la source froide ( $Q_F < 0$ ) et cède du travail à l'extérieur ( $W < 0$ ) : (a) est fausse et (b) est vraie.

$W = -\int_{\text{cycle}} PdV = -\mathcal{A}_{\text{cycle}} < 0$ , d'où  $\mathcal{A}_{\text{cycle}} > 0$  avec  $\mathcal{A}_{\text{cycle}}$  l'aire du cycle, qui doit donc être parcouru dans le sens horaire : (c) et (d) sont vraies, l'aire du cycle nous renseignant sur le travail  $W = -Q_{\text{total}}$  (premier principe écrit sur un cycle).

2. Le premier principe sur un cycle conduit bien à  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0$  mais le second principe amène également à  $\Delta S_{\text{cycle}} = 0$  : (a) est fausse.

Le second principe s'écrit :  $\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{c,\text{cycle}}$ , avec  $S_{c,\text{cycle}} \geq 0$  d'où  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$  : (b) est fausse.

D'après ce qui précède, lorsque la transformation est réversible,  $S_{c,\text{cycle}} = 0$  donc  $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$  : (c) est vraie.

L'application du premier principe donne  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_C + Q_F$  pour un cycle ditherme : (d) est vraie.

3. La grandeur qui «coûte» dans un moteur ditherme est l'énergie thermique  $Q_C$  prélevée à la source chaude et la grandeur souhaitée est  $-W$ . Le rendement est ainsi  $\eta = \frac{-W}{Q_C}$  : (a) est fausse.

Un cycle de Carnot est constitué de deux adiabatiques réversibles et de deux isothermes réversibles : (b) est fausse.

Pour un moteur ditherme réversible,  $Q_F = -\frac{Q_C T_F}{T_C}$  et  $-W = Q_C + Q_F$ . On obtient donc :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C} : \text{(c) est juste.}$$

À cause des irréversibilités, en réalité,  $Q_F \leq -\frac{Q_C T_F}{T_C}$  et par conséquent,  $\eta \leq \eta_{\text{Carnot}}$  : (d) est fausse.

4. Une machine réceptrice reçoit du travail ( $W > 0$ ), cède de l'énergie thermique à la source chaude ( $Q_C < 0$ ) et prélève de l'énergie thermique à la source froide ( $Q_F > 0$ ) : (a) est juste.

On peut par conséquent soit choisir la fonction refroidissement (grandeur souhaitée  $Q_F > 0$ ), soit choisir la fonction chauffage (grandeur souhaitée  $-Q_C > 0$ ) : (b) est juste.

Pour une machine réceptrice,  $W = -\int_{\text{cycle}} PdV = -\mathcal{A}_{\text{cycle}} > 0$ , d'où  $\mathcal{A}_{\text{cycle}} < 0$  avec  $\mathcal{A}_{\text{cycle}}$  l'aire du cycle, qui doit donc être parcouru dans le sens trigonométrique : (c) est fausse.

Pour les machines réceptrices, la grandeur qui «coûte» est  $W > 0$ ; dans le cas d'une pompe à chaleur, d'après ce qui précède,  $e = -\frac{Q_C}{W}$  et pour une machine frigorifique,  $e = \frac{Q_F}{W}$  : (d) est fausse, (e) est vraie.

5. D'après ce qui précède,  $Q_C < 0$  indique qu'il s'agit d'une machine réceptrice : (a) est fausse.

Sachant qu'il s'agit d'une machine réceptrice, elle peut fonctionner en machine frigorifique : (b) est vraie.

En utilisant  $Q_F = -\frac{Q_C T_F}{T_C}$ , on obtient  $Q_F = 30,3 \text{ J}$  : (c) est fausse.

Par  $W = -(Q_F + Q_C)$ , on aboutit à  $W = 1,7 \text{ J}$  : (d) est vraie.

On calcule  $e = \frac{Q_F}{W} = 17$  : (e) est vraie.

**Exercice 19.1**

1. Pour un moteur tournant à 3000 tours/min, les transferts thermiques n'ont pas le temps de se réaliser et les compressions et détentes pourront donc être considérées comme adiabatiques. L'hypothèse de la réversibilité est plus audacieuse, les frottements notamment étant inévitables.

2.  $V_1 - V_2 = C$  et  $a = \frac{V_1}{V_2}$  d'où  $V_2 = \frac{C}{a-1} = 0,056 \text{ L}$   
 et  $V_1 = \frac{aC}{a-1} = 0,56 \text{ L}$ . L'équation d'état nous permet de déduire  $n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = 0,023 \text{ mol}$ . La compression de (1) vers (2) étant isentropique, la loi de Laplace peut être utilisée :  $P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = 21 \text{ bar}$ .

État	(1)	(2)	(3)	(4)
$P$ (bar)	1,0	21	78	3,6
$V$ (L)	0,56	0,056	0,056	0,56
$T$ (K)	293	$6,3 \cdot 10^2$	$2,3 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$

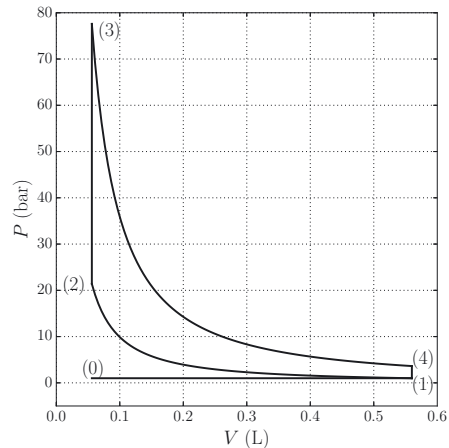
L'équation d'état donne enfin  $P_3 = \frac{nRT_3}{V_2}$ . Numériquement :  $P_3 = 78 \text{ bar}$  et  $\delta = 3,6$ .

3.  $T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} T_1$  et  $V_3 = \frac{nRT_3}{P_3}$ .  
 La loi de Laplace peut être utilisée entre (3) et (4) et amène à  $P_4 = P_3 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = 3,6 \text{ bar}$ . Sachant que

$$V_4 = V_1, \text{ on en déduit } T_4 = \frac{P_4 V_4}{nR}.$$

Les différentes valeurs numériques sont regroupées dans le tableau ci-contre.

4. Le cycle est décrit dans le sens horaire : il s'agit d'un moteur.



5. Précisons les échanges énergétiques.

- Transformation (1) → (2) :  $Q_{12} = 0$  puisque la transformation est adiabatique. L'application du premier principe donne alors  $W_{12} = \Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = \frac{P_2 V_2}{\gamma-1} (1 - a^{1-\gamma}) = 1,9 \cdot 10^2 \text{ J}$ .
- Transformation (2) → (3) : la transformation étant isochore,  $W_{23} = 0$ . Le premier principe donne alors  $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2) = \frac{(P_3 - P_2)V_2}{\gamma-1} = 9,5 \cdot 10^2 \text{ J}$
- Transformation (3) → (4) :  $Q_{34} = 0$  puisque la transformation est adiabatique. L'application du premier principe donne alors  $W_{34} = \Delta U_{34} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_4 - T_3) = \frac{P_3 V_2}{\gamma-1} (a^{1-\gamma} - 1) = -6,9 \cdot 10^2 \text{ J}$ .
- Transformation (4) → (1) : la transformation étant isochore,  $W_{41} = 0$ . Le premier principe donne alors  $Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_4) = -4,4 \cdot 10^2 \text{ J}$

6. Le rendement du moteur est le rapport du travail fourni au cours d'un cycle sur le transfert thermique

$$\text{reçu au cours de la phase (2) → (3) : } \eta = \frac{-W}{Q_{23}} = \frac{-W_{12} - W_{34}}{Q_{23}} = -\frac{\frac{P_2 V_2}{\gamma-1} (1 - a^{1-\gamma}) + \frac{P_3 V_2}{\gamma-1} (a^{1-\gamma} - 1)}{\frac{(P_3 - P_2)V_2}{\gamma-1}}$$

soit finalement  $\eta = 1 - a^{1-\gamma} = 0,53$ . Nous remarquons que  $\eta$  augmente lorsque  $\gamma$  augmente, c'est-à-dire lorsque la richesse du carburant diminue.

**Exercice 19.2**

1.  $W < 0, Q_F < 0$  : il s'agit d'un cycle moteur.

2. L'application du premier principe sur un cycle amène à  $\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = W + Q_F + Q_C$ , soit à  $Q_C = 123 \text{ J}$ .

3. L'application du second principe donne  $\Delta S_{\text{cycle}} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{e,\text{cycle}} = 0$ , soit  $S_{e,\text{cycle}} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  qui est positive : le fonctionnement de ce moteur est irréversible.

**Exercice 19.3**

Imaginons une transformation cyclique et monotherme d'un système fournissant un travail  $W' > 0$  et prélevant un transfert thermique  $Q$  à une unique source de température  $T_e$ . Appliquons les principes de la thermodynamique à un tel système sur un cycle :

- Premier principe :  $\Delta U = 0 = -W' + Q$ , d'où  $Q = W' > 0$  ;
- Second principe :  $\Delta S = 0 > S_e = \frac{Q}{T_e}$ .

Le premier principe implique  $Q > 0$  si le cycle est moteur, ce qui est en contradiction avec l'écriture du second principe : on ne peut donc pas concevoir de moteur cyclique monotherme.

**Exercice 19.4**

1. L'équation d'état donne  $V_1 : V_1 = \frac{5RT_1}{P_1} = 50 \text{ L}$ .

Nous avons  $T_3 = T_1$  et  $P_3 = P_2$ .

La loi de Laplace entre (1) et (2) permet d'obtenir

$$V_2 = V_1 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{1/\gamma} = 72 \text{ L}.$$

L'équation d'état permet enfin d'obtenir :

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{5R} = 2,6 \cdot 10^2 \text{ K} \text{ et } V_3 = \frac{5RT_1}{P_2} = 83 \text{ L}.$$

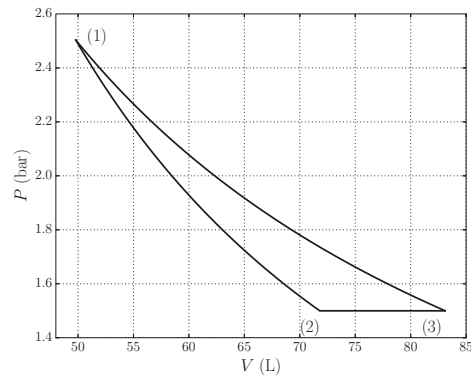
Résumons dans un tableau :

État	(1)	(2)	(3)
P (bar)	2,5	1,5	1,5
T (K)	300	$2,6 \cdot 10^2 \text{ K}$	300
V (L)	50	72	83

2. Le cycle est décrit dans le sens trigonométrique : le gaz reçoit du travail et le cycle est donc récepteur.
3. Précisons les échanges énergétiques.

- Transformation (1)  $\rightarrow$  (2) :  $Q_{12} = 0$  puisque la transformation est adiabatique. En appliquant le premier principe :  $W_{12} = \Delta U_{12} = \frac{5R}{\gamma-1}(T_2 - T_1) = -4,2 \text{ kJ}$ .
- Transformation (2)  $\rightarrow$  (3) : calculons le travail reçu par le gaz lors de cette transformation isobare :  $W_{23} = -P_2(V_3 - V_2) = -1,7 \text{ kJ}$ . Par ailleurs  $Q_{23} = \Delta H_{23} = \frac{5R\gamma}{\gamma-1}(T_3 - T_2) = 5,9 \text{ kJ}$ .
- Transformation (3)  $\rightarrow$  (1) : pour cette transformation isotherme :  $W_{31} = -5RT_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_3} \right) = 6,4 \text{ kJ}$ . En appliquant le premier principe, nous obtenons alors  $\Delta U_{31} = 0 = W_{31} + Q_{31}$  et en déduisons  $Q_{31} = -W_{31} = -6,4 \text{ kJ}$ .

Le travail reçu par le gaz au cours du cycle est  $W = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 0,5 \text{ kJ} > 0$  : il s'agit bien d'un cycle récepteur.

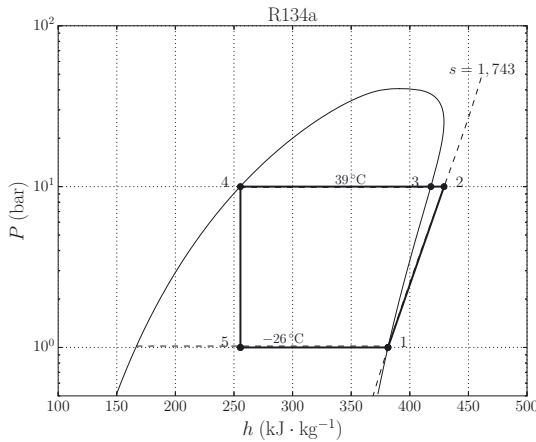


## Exercice 19.5

- À l'instant  $t + dt$ , le système fermé est constitué du fluide compris dans la machine ( $\Sigma$ ) et de  $\Sigma_2$ .
- La masse  $dm_1$  se trouve dans le volume  $S_1c_1dt$  en entrée puisque le fluide peut parcourir la distance  $c_1dt$  pendant  $dt$ . Le volume massique étant  $v_1$ , nous pouvons donc écrire que  $dm_1 = \frac{S_1c_1dt}{v_1}$ . De même en sortie,  $dm_2 = \frac{S_2c_2dt}{v_2}$ . La masse du système fermé  $\Sigma^*$  est la même aux deux instants  $t$  et  $t + dt$  donc :  $dm_1 + m = dm_2 + m$ , soit  $dm_1 = dm_2$ . Par définition, le débit massique correspond à la masse de fluide traversant le détendeur par unité de temps :  $D_m = \frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt}$ .
- La puissance des forces de pression en entrée est égale au produit scalaire de la force de pression par la vitesse d'écoulement soit  $P_1S_1c_1$  puisque la force de pression exercée sur  $\Sigma^*$  et la vitesse d'écoulement ont même direction et même sens.  
Le travail reçu en amont pendant  $dt$  est donc  $\delta W_{p,1} = P_1S_1c_1dt = P_1v_1D_mdt$ . En sortie, la force de pression s'oppose à l'écoulement :  $\delta W_{p,2} = -P_2S_2c_2dt = -P_2v_2D_mdt$ .
- Le travail utile reçu par une unité de masse de fluide est  $w_u$ . Une masse  $D_mdt$  de fluide traverse le compresseur pendant  $dt$ ; le travail utile reçu par cette masse est donc  $\delta W_u = w_uD_mdt$ . De même nous pouvons exprimer le transfert thermique élémentaire  $\delta Q = qD_mdt$ .
- Écrivons l'énergie cinétique de  $\Sigma^*$  aux instants  $t$  et  $t + dt$  :
  - À  $t$  :  $E_c(t) = \frac{1}{2}dm_1c_1^2 + E_{c,\Sigma}$  où  $E_{c,\Sigma}$  est l'énergie cinétique du fluide dans  $\Sigma$ .
  - À  $t + dt$  :  $E_c(t + dt) = \frac{1}{2}dm_2c_2^2 + E_{c,\Sigma}$ .
 Notons que l'énergie cinétique de  $\Sigma$  est la même aux instants  $t$  et  $t + dt$ . La variation d'énergie cinétique est donc  $dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2}dm_1(c_2^2 - c_1^2) = \frac{1}{2}D_m(c_2^2 - c_1^2)dt$ .  
Par le même raisonnement :  $dE_p = D_m(e_{p2} - e_{p1})dt$  et  $dU = D_m(u_2 - u_1)dt$ .
- Appliquons alors le premier principe au système fermé  $\Sigma^*$  entre  $t$  et  $t + dt$  :  
 $d(U + E_c + E_p) = \delta W_{p,1} + \delta W_{p,2} + \delta W_u + \delta Q$ . Nous en déduisons :  

$$\left[ (u_2 - u_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + (e_{p2} - e_{p1}) \right] D_mdt = (P_1v_1 - P_2v_2)D_mdt + w_uD_mdt + qD_mdt.$$
 En remarquant que l'enthalpie massique  $h_i$  vaut par définition  $h_i = u_i + P_iv_i$ , nous obtenons bien la relation  $(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(c_2^2 - c_1^2) + (e_{p2} - e_{p1}) = w_u + q$ .
- Dans le cas d'une détente de Joule-Thomson, la relation devient  $h_2 - h_1 = 0$  : la détente est isenthalpique.

**Exercice 19.6**



1. Le diagramme  $(P,h)$  est tracé ci-contre.
2. Les cinq états sont précisés dans le tableau ci-dessous. Le titre en vapeur est noté  $x$ . Notons que la température  $T_2$  du fluide dans l'état (2) ne peut pas être déduite directement du diagramme proposé.
3. Le fluide est en contact avec la source froide au niveau de l'évaporateur et avec la source chaude au niveau du condenseur et du désurchauffeur. Ces organes permettent les transferts thermiques et ne contiennent pas de pièces mobiles.

État	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$P$ (bar)	1,0	10	10	10	1
$T$ (K)	247		312	312	247
$h$ ( $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	$3,8 \cdot 10^2$	$4,3 \cdot 10^2$	$4,2 \cdot 10^2$	$2,6 \cdot 10^2$	$2,6 \cdot 10^2$
$s$ ( $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )	1,74	1,74	1,71	1,18	1,23
$x$	1		1	0	0,41

4. Utilisons la relation proposée (premier principe industriel) :  
 $h_4 - h_2 = q_c = -1,7 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h_1 - h_5 = q_f = 1,2 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h_2 - h_1 = w_u = 50 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Le fluide ne reçoit ni travail, ni transfert thermique lors de son passage à travers le détendeur.
5. L'énergie utile est ici  $q_f$  prélevée à la source froide, l'énergie « coûteuse » étant celle dépensée dans le compresseur  $w_u$ . L'efficacité  $e$  de la machine est donc  $e = \frac{q_f}{w_u} = 2,4$ .
6. Le cycle de Carnot est décrit de façon réversible. Appliquons les principes sur un cycle au fluide recevant le travail  $W$ , le transfert thermique  $Q_c$  de la part de la source chaude à la température  $T_c$  et le transfert thermique  $Q_f$  de la part de la source froide à  $T_f$  :
  - Premier principe :  $\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0$ .
  - Second principe :  $\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ .

Nous en déduisons l'efficacité de Carnot :  $e_c = \frac{Q_f}{W} = \frac{-Q_f}{Q_c + Q_f} = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 6,7 > e$  : l'efficacité du cycle réel est logiquement inférieure à celle du cycle idéal de Carnot ; le fonctionnement n'est pas réversible .

**Exercice 19.7**

1. La puissance « utile » est ici  $\mathcal{P}'_c$  qui sert à chauffer la maison. Le  $COP$  s'écrit donc  $COP = \frac{\mathcal{P}'_c}{\mathcal{P}_e}$ ,  $\mathcal{P}_e$  étant la puissance électrique consommée.
2. Le coefficient de performance diminue lorsque la température extérieure  $T_f$  diminue : la consommation électrique augmente alors. On a intérêt à avoir un grand  $COP$  pour diminuer la puissance électrique fournie, à puissance de chauffe identique.
3. La PAC n°1 est moins puissante que la PAC n° 2 mais son  $COP$  est légèrement supérieur ; elle sera très avantageuse pour un petit logement bien isolé. Si les besoins en chauffage sont plus grands, il faudra privilégier la deuxième PAC, même si son  $COP$  est plus faible.

4. La première PAC doit être privilégiée. Le climat tempéré permettra à Thierry de bénéficier d'un  $COP$  élevé. La température moyenne à Rennes par exemple se situe en effet entre  $3^\circ\text{C}$  et  $9^\circ\text{C}$  l'hiver. Si sa maison est petite et bien isolée, la puissance de chauffe sera suffisante.

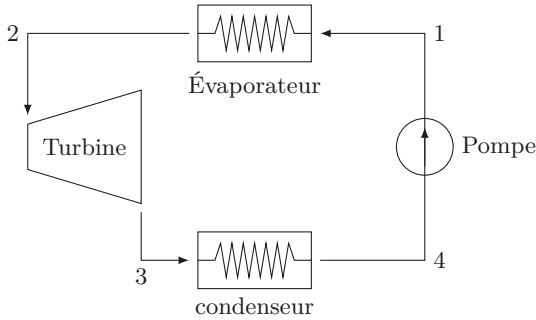
### Exercice 19.8

- Le fluide s'évapore au contact de la source froide, lui prélevant ainsi de l'énergie :  $Q_f > 0$ . Le fluide se condensant au contact thermique de l'extérieur, il lui donne de l'énergie :  $Q_e < 0$ . Le fluide reçoit par ailleurs de l'énergie dans le bouilleur :  $Q_c > 0$ . La fonction de refroidissement est assurée puisque  $Q_f > 0$ .
- La grandeur utile est  $Q_f$  puisqu'il s'agit de refroidir. Le bouilleur apporte l'énergie nécessaire donc nous pouvons définir l'efficacité du réfrigérateur par  $e = \frac{Q_f}{Q_c}$ .
- Appliquons les principes de la thermodynamique sur un cycle :
  - Premier principe :  $\Delta U = 0 = Q_c + Q_e + Q_f$ .
  - Second principe :  $\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_e}{T_e} + \frac{Q_f}{T_f} + S_c$ , où l'entropie créée  $S_c$  est positive ou nulle.
 Nous en déduisons  $Q_c \left( \frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_e} \right) + Q_f \left( \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_e} \right) \leq 0$ . Or  $e = \frac{Q_f}{Q_c}$  d'où  $e \leq \frac{T_c - T_e}{T_c} \frac{T_f}{T_e - T_f} = e_{\max}$ .
- Numériquement :  $e_{\max} = 2,7$ .

### Exercice 19.9

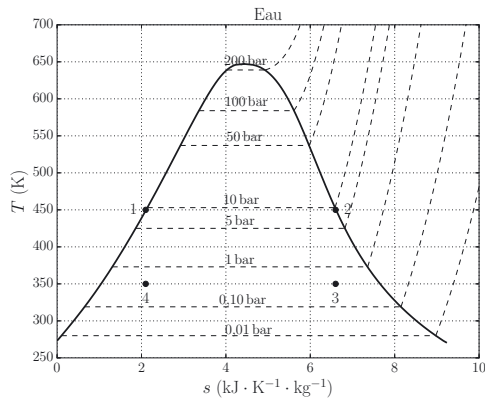
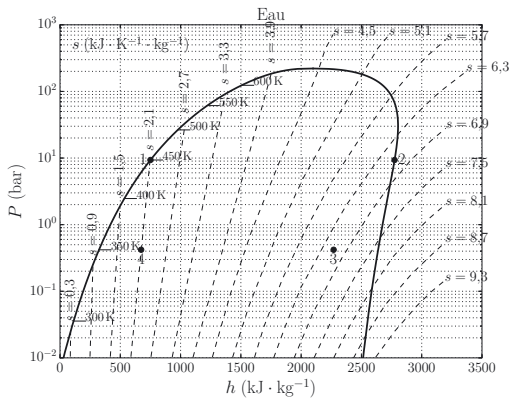
- $\mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}_e}{\eta} = 3,1 \cdot 10^3 \text{ MW}$ . Lors d'un cycle, l'eau du circuit secondaire reçoit la puissance  $\mathcal{P}_c$  et fournit les puissances  $\mathcal{P}_e$  et  $\mathcal{P}_f$ . L'application du premier principe conduit alors à la relation  $0 = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_c + \mathcal{P}_f$ . Nous en déduisons  $\mathcal{P}_f = 2,0 \cdot 10^3 \text{ MW}$ .
- Le rendement de Carnot d'une machine cyclique ditherme fonctionnant entre une source chaude à la température  $T_c$  et une source froide à la température  $T_f$  est  $\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,51$ . Le rendement énergétique est inférieur au rendement théorique de Carnot obtenu dans les conditions idéales de réversibilité.
- Utilisons le premier principe industriel  $\Delta h = q + w_u$ , où  $\Delta h$  est la variation d'enthalpie massique de l'eau du fleuve lors du passage dans le condenseur,  $q$  et  $w_u$  respectivement le transfert thermique massique et le travail utile massique reçus par l'eau du fleuve. Il n'y a pas de travail utile mis en jeu au cours de cette phase de refroidissement :  $w_u = 0$ . En multipliant cette relation par le débit massique de l'eau du fleuve, soit  $D_m = \mu D_v$ , nous obtenons :  $D_v \mu \Delta h = P_f$ . Par ailleurs,  $\Delta h = c_l \Delta T$ , où  $\Delta T$  est la variation de température demandée. Finalement,  $\Delta T = \frac{P_f}{\mu D_v c_l} = 4,9^\circ\text{C}$ .
- Avec trois réacteurs, l'élévation de température de l'eau du fleuve est de l'ordre de  $15^\circ\text{C}$ . Si la température de l'eau du fleuve est en moyenne de  $10^\circ\text{C}$  dans l'année, elle peut être plus élevée notamment l'été; le rejet n'est alors plus possible.

**Exercice 19.10**



1. L'évaporation a lieu dans l'évaporateur et la liquéfaction partielle dans le condenseur. La compression est ici réalisée avec une pompe, les compresseurs étant réservés à un usage en phase vapeur. La détente a lieu dans la turbine, permettant de fournir du travail. Le schéma-bloc de la machine est représenté ci-contre.

2. Le cycle est particulièrement simple à tracer dans le diagramme  $(T,s)$  puisqu'il s'agit d'un rectangle. Les points (1) et (2) sont sur les extrémités respectivement gauche et droite du palier de changement d'état à la température  $T_1$ . La détente isentropique de (2) vers (3) est un segment de droite vertical sur le diagramme, menant à un état d'équilibre liquide-vapeur de titre en vapeur  $x_3 = 0,84$  (utilisation du théorème des moments). Le point (4) est sur le palier de température  $T_3$ , à la verticale du point (1) puisque la compression est isentropique. Le titre en vapeur s'obtient à l'aide du théorème des moments :  $x_4 = 0,16$ . Les isentropes tracées sur le diagramme  $(P,h)$  permettent alors facilement de placer les points sur ce diagramme.



3. Le cycle de Carnot est constitué de deux isothermes réversibles et de deux isentropiques. Le cycle de Rankine présenté est constitué de deux isentropiques et de deux isobares. Les transformations isobares sont nécessairement isothermes puisqu'il s'agit de changements d'état. En revanche ces deux transformations ne sont pas réversibles *a priori*.

État	(1)	(2)	(3)	(4)
$P$ (bar)	9,35	9,35	0,42	0,42
$T$ (K)	450	450	350	350
$h$ ( $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	750	2775	2269	673
$s$ ( $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ )	2,10	6,60	6,60	2,10
$x$	0	1	0,84	0,16

4. Les données, lues sur les diagrammes, sont présentées dans le tableau ci-contre.  
 5. Le fluide prend de l'énergie à la source chaude dans l'évaporateur et en cède à la source froide dans le condenseur.

6. Les transferts thermiques reçus de la part des sources chaude et froide sont respectivement :  $q_c = h_2 - h_1 = 2,03 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $q_f = h_4 - h_3 = -1,60 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Le travail utile massique total reçu par le fluide au cours d'un cycle peut s'obtenir en remarquant que  $h$  est une fonction d'état :  $w_u + q_c + q_f = 0$ . Nous en déduisons  $w_u = -4,3 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

7. Le rendement de cette machine est le rapport de l'énergie massique utile  $|w_u|$  (travail fourni par le moteur) sur l'énergie « coûteuse » c'est-à-dire le transfert thermique massique reçu de la part de la source chaude  $q_c$  :  $\eta = \frac{-w_u}{q_c} = 0,21$ .



**Partie 4**

# **Induction et forces de Laplace**



# Champ magnétique et ses actions

## L'essentiel du cours

### Contexte

Quel est le rôle du champ magnétique dans le fonctionnement d'un moteur ?

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le champ magnétique et ses propriétés, de mettre en évidence son action sur les aimants ou les circuits parcourus par des courants et son utilisation dans les machines tournantes.

### ■ 1 Sources et cartes de champ magnétique

Précisons dans ce paragraphe les caractéristiques essentielles du champ magnétique déjà introduit dans le chapitre 13.

### Définition : Champ magnétique

Le champ magnétique noté  $\vec{B}$  est défini par la force magnétique s'exerçant sur une particule chargée de charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel d'étude :  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ .  
Son unité est le tesla (T).



Le champ  $\vec{B}$  étant défini avec un produit vectoriel, son sens dépend de la convention d'orientation du repère. On parle de vecteur axial ou de pseudovecteur.

Le tableau ci-dessous donne quelques ordres de grandeur de champ magnétique.

Champ magnétique terrestre	$5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Champ au voisinage d'un aimant	de 0,01 T à 1 T
Champ dans un appareil d'IRM	quelques teslas

### □ Quelles sont les sources de champ magnétique ?

Les matériaux ferromagnétiques (fer, nickel, cobalt...) avec lesquels on réalise les aimants permanents sont sources de champ magnétique, au même titre que des courants dans les conducteurs (expérience d'Ørsted en 1820).

## □ Comment observer les variations spatiales du champ magnétique ?

On visualise l'évolution spatiale du champ magnétique grâce aux cartes de champ magnétique.

**Définition : Lignes de champ et carte de champ**

- Les lignes de champ magnétique sont tangentes en chaque point au vecteur champ magnétique en ce point et sont orientées dans le sens de ce champ.
- Une carte de champ est un ensemble de lignes de champ.

La méthode suivante nous donne les outils d'analyse d'une carte de champ magnétique.

**Méthode 20.1 : Analyser une carte de champ magnétique**

- Deux lignes de champ magnétique ne peuvent se croiser qu'en un point où  $\vec{B}$  est nul.
- Les lignes de champ magnétique peuvent être fermées et tournent autour des courants qui le créent.
- Quand deux lignes de champ voisines s'éloignent l'une de l'autre, l'intensité du champ magnétique diminue.
- Le champ magnétique est uniforme dans toute zone où les lignes de champ sont parallèles.
- Les lignes de champ d'un aimant sortent par sa face nord et rentrent par sa face sud.

➔ Exercices (20.1) (20.2)

Les figures 20.1 et 20.2 présentent les cartes de champ d'un aimant permanent droit, d'une spire circulaire parcourue par un courant, d'une bobine longue (solénoïde) où le fil parcouru par un courant est bobiné sur un cylindre d'axe  $(Oz)$  et d'un dispositif appelé bobines de Helmholtz, constitué de deux bobines plates de rayon  $R$ , distantes de  $R$  et parcourues par le même courant. Ces trois derniers systèmes présentent une symétrie de révolution autour de l'axe  $(Oz)$ . Les lignes de champ représentées sont inscrites dans un plan contenant l'axe  $Oz$ .

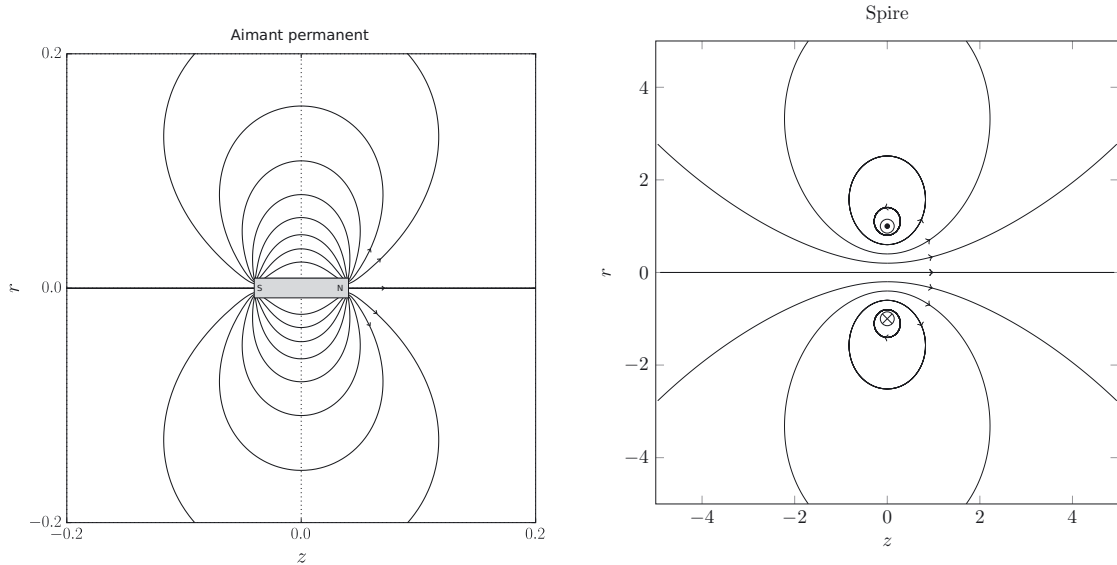


Figure 20.1. Carte de champ d'un aimant permanent (gauche) et d'une spire circulaire d'axe ( $Oz$ ) parcourue par un courant (droite).

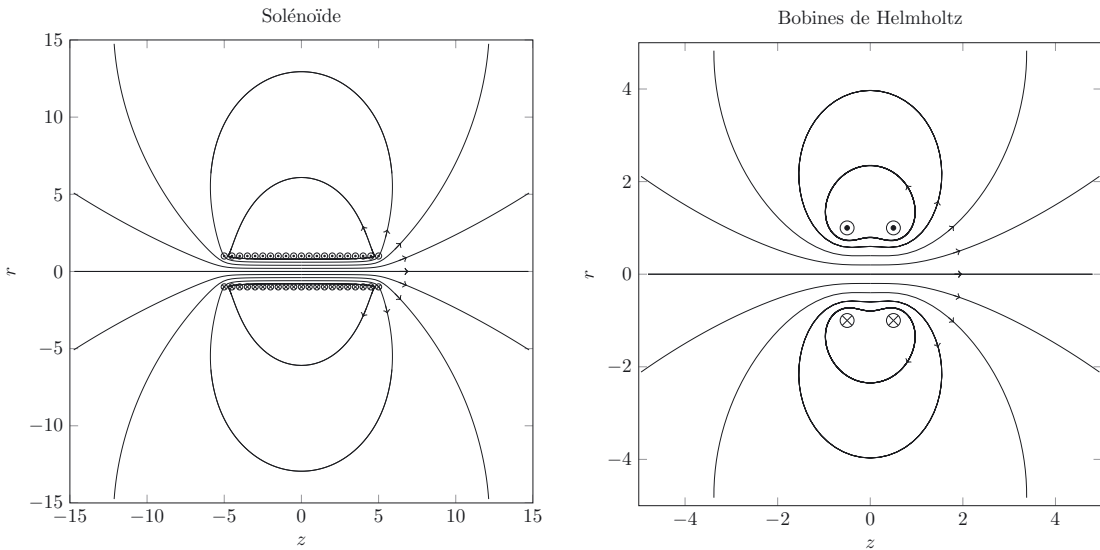


Figure 20.2. Carte de champ d'une bobine longue (solénoïde) d'axe ( $Oz$ ) (gauche) et des bobines de Helmholtz d'axe ( $Oz$ ) (droite).

En utilisant les propriétés de la méthode 20.1, voici quelques commentaires.

- Aimant permanent droit : les lignes de champ s'espacent lorsqu'on s'éloigne de l'aimant, ce qui correspond à une diminution de la norme du champ magnétique.

- Spire circulaire :
  - les lignes de champ s'espacent lorsqu'on s'éloigne de la spire, ce qui correspond à une diminution de la norme du champ magnétique ;
  - les lignes de champ entourent les points où le courant traverse le plan et sont presque circulaires au voisinage de ces points ;
  - le sens du champ magnétique sur l'axe est donné par le pouce de la main droite lorsque les doigts refermés représentent le sens du courant dans la spire.
- Bobine longue ou solénoïde :
  - à l'intérieur de la bobine les lignes de champ sont parallèles, ce qui montre que le champ  $y$  est uniforme ;
  - la carte de champ est similaire à celle d'un aimant permanent droit, on peut donc modéliser un aimant droit par une bobine ;
  - le sens du champ magnétique sur l'axe est donné par le pouce de la main droite lorsque les doigts refermés représentent le sens du courant dans les spires.
- Bobines de Helmholtz : entre les deux bobines, les lignes de champ sont quasiment parallèles, ce qui montre que le champ est uniforme.

#### Dispositifs permettant de réaliser un champ magnétique quasi-uniforme

Les dispositifs suivants permettent de réaliser un champ magnétique quasi-uniforme.

- Bobine longue (solénoïde) : zone de champ uniforme à l'intérieur de la bobine.
- Les deux bobines de Helmholtz : zone de champ uniforme entre les deux bobines.
- Aimant permanent en U : zone de champ uniforme dans le U de l'aimant.

#### □ De quels paramètres dépend la norme du champ magnétique ?

Nous avons réalisé l'expérience présentée figure 20.3, consistant à mesurer le champ magnétique à l'aide d'un capteur de champ magnétique appelé sonde à effet Hall, au voisinage et à l'intérieur d'une bobine, tout en modifiant l'intensité du courant circulant dans cette bobine.

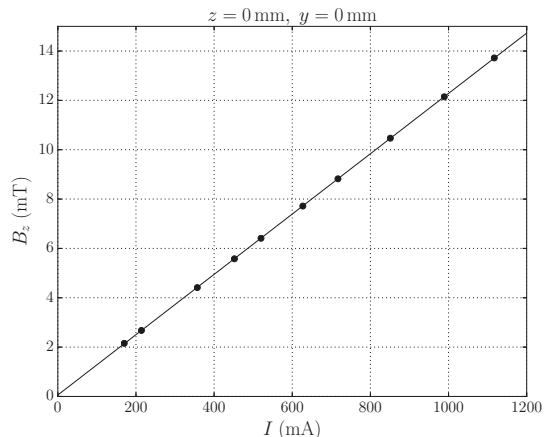
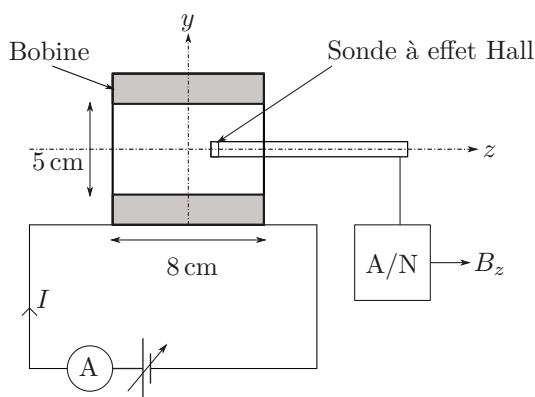


Figure 20.3. Dispositif expérimental permettant la mesure du champ magnétique créé par une bobine (gauche) et évolution du champ au centre en fonction de l'intensité (droite).

On remarque sur la figure 20.3 que le champ magnétique au centre de la bobine est proportionnel au courant qui circule dans la bobine. La figure 20.4 présente l'évolution de la composante  $B_z$  du champ magnétique sur l'axe ( $Oz$ ) de la bobine (à gauche) et sur une droite parallèle à l'axe ( $Oz$ ) et située juste au-dessus de la bobine à l'extérieur de cette dernière (à droite).

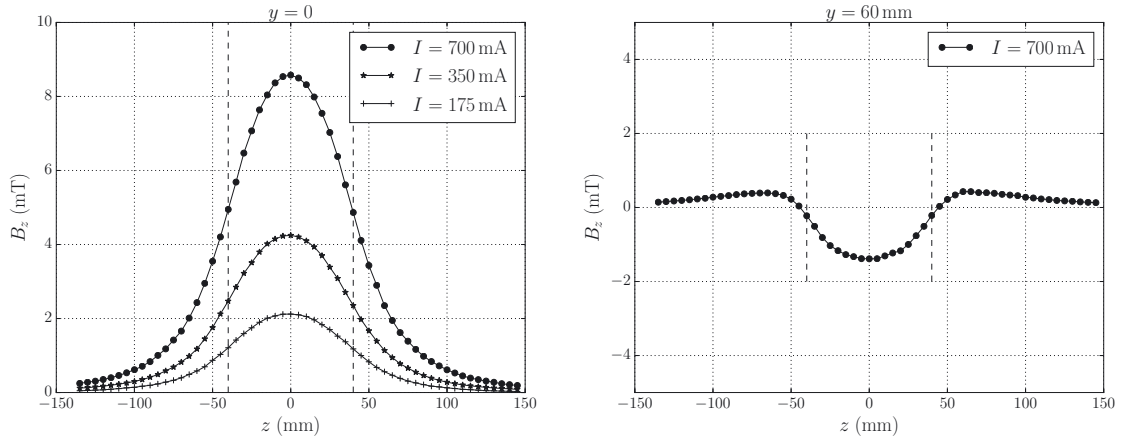


Figure 20.4. Champ magnétique sur l'axe de la bobine pour trois courants différents (gauche) et champ magnétique à l'extérieur de la bobine à  $y = 60$  mm de son axe (droite parallèle à  $Oz$ ).

On constate que le champ magnétique est maximal au centre de la bobine, décroît lorsqu'on s'approche d'un bord, puis tend vers zéro très rapidement lorsqu'on s'éloigne de la bobine. D'autre part, le champ à 60 mm de l'axe est plus faible que le champ sur l'axe.

#### Dépendance de la norme du champ magnétique

La norme du champ magnétique créé par un circuit filiforme comportant  $N$  spires parcourues par un courant d'intensité  $I$  augmente lorsque :

- l'intensité  $I$  augmente,
- le nombre de spires  $N$  augmente,
- on se rapproche de la distribution de courants.



En augmentant l'intensité du courant, on augmente la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur ; pour augmenter le champ magnétique dans une bobine, il est donc préférable d'augmenter le nombre de spires.

#### □ Comment caractériser les sources de champ magnétique ?

L'étude des cartes de champ des figures 20.1 et 20.2 montre qu'un aimant permanent droit peut être modélisé par un circuit filiforme.

**Définition : Moment magnétique**

Soit un circuit filiforme plan constitué d'une boucle de courant parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Le moment magnétique  $\vec{m}$  du circuit (en  $A \cdot m^2$ ) est défini par :

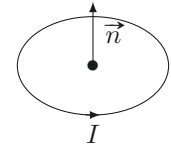
$$\vec{m} = I\vec{S}$$

où  $\vec{S} = S\vec{n}$  est le vecteur surface de norme  $S$  (aire du circuit) et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire :

- orthogonal au plan contenant le circuit,
- orienté par le sens d'orientation du courant : lorsque le courant tourne dans le sens des doigts refermés, le sens de  $\vec{n}$  est donné par le pouce (« règle de la main droite »).

Exemples :

- dans le cas d'une spire circulaire de rayon  $a$  on a :  $\vec{m} = I\pi a^2 \vec{n}$  ;
- pour une bobine comportant  $N$  spires jointives de même surface  $S$ , le moment magnétique s'écrit  $\vec{m} = NIS\vec{n}$  ;
- le moment magnétique d'un aimant permanent est le moment magnétique d'une bobine qui produirait la même carte de champ à grande distance.



Le tableau suivant donne quelques ordres de grandeur de moment magnétique :

Boussole	$1 \cdot 10^{-2} A \cdot m^2$
Aimant permanent	$1 A \cdot m^2$
Terre	$7,5 \cdot 10^{22} A \cdot m^2$

Pour comprendre l'implication du champ magnétique dans le fonctionnement d'un moteur, il nous faut à présent étudier les effets d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant.

## ■ 2 Forces de Laplace

Lorsqu'un conducteur parcouru par un courant est soumis à un champ magnétique, il subit une force appelée force de Laplace. L'expérience des rails de Laplace présentée sur la figure 20.5 permet de mettre en évidence l'existence de cette force.

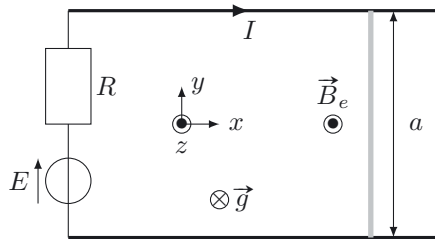


Figure 20.5. Expérience des rails de Laplace.

Deux rails métalliques horizontaux distants de  $a$  sont alimentés par un générateur continu de force électromotrice  $E > 0$ . Le circuit est fermé par un barreau métallique posé sur les deux rails et libre de se déplacer dans la direction  $(Ox)$ . La résistance  $R$  modélise l'association de la résistance du générateur et des résistances des rails et du barreau. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_e$  créé par un aimant permanent en U.



Constatations expérimentales :

- lorsque le générateur est connecté, le barreau est mis en mouvement dans le sens des  $x$  décroissants ;
- en inversant la polarité du générateur (par rapport à la figure 20.5), le barreau se déplace dans le sens des  $x$  croissants ;
- en inversant le sens du champ magnétique (par rapport à la figure 20.5), le barreau se déplace dans le sens des  $x$  croissants ;
- si on enlève l'aimant ou le générateur, le barreau reste immobile.

Cette expérience montre qu'il existe une force qui s'exerce sur le barreau et que le sens de cette force dépend à la fois du sens du champ magnétique et du sens du courant dans le dispositif.

### Définition : Force de Laplace

On considère un conducteur filiforme ( $\Gamma$ ) parcouru par un courant d'intensité  $i$  et on note  $d\vec{\ell}$  le vecteur déplacement élémentaire le long du circuit, orienté dans le sens choisi pour la définition de l'intensité du courant. La force élémentaire de Laplace qui s'exerce sur une portion du circuit de longueur  $d\ell$  s'écrit :

$$d\vec{F}_{La} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La force de Laplace s'exerçant sur l'ensemble du conducteur s'écrit :

$$\vec{F}_{La} = \int_{(\Gamma)} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Pour une portion de conducteur rectiligne de longueur  $L$  dans un champ magnétique uniforme :

$$\vec{F}_{La} = i \vec{L} \wedge \vec{B}$$

où le vecteur  $\vec{L}$  est orienté dans le sens choisi pour la définition de l'intensité du courant.

La force de Laplace qui s'exerce sur le barreau des rails de Laplace s'écrit donc  $\vec{F}_{La} = I \vec{a} \wedge \vec{B}_e$ , soit  $\vec{F}_{La} = -IaB_e \vec{u}_x$ . Cette force est perpendiculaire au conducteur et au champ magnétique (propriété du produit vectoriel), sa norme est proportionnelle à  $I$  et à  $B_e$ .

La puissance de la force de Laplace s'écrit  $\mathcal{P}_{La} = \vec{F}_{La} \cdot \vec{v} = -IaB_e v$  avec  $\vec{v} = v \vec{u}_x$ .

Comment la force de Laplace peut-elle mettre en rotation le rotor d'un moteur ?

## ■ 3 Moment des forces de Laplace et réalisation d'un moteur

Pour étudier le moment des forces de Laplace, nous avons réalisé une expérience avec une bobine rectangulaire faite d'un fil de cuivre émaillé enroulé sur un cadre rectangulaire (plaque de bois). La bobine comporte  $N = 50$  spires rectangulaires de hauteur  $a = 65$  mm et de largeur  $b = 30$  mm. Le cadre est suspendu par les deux fils qui amènent le courant  $I_c$ , ce qui permet d'avoir un pendule de torsion. La partie inférieure du cadre est plongée dans un mélange eau-glycérine afin d'amortir les oscillations. Le cadre est soumis à un champ magnétique uniforme créé par des bobines de Helmholtz. La déviation d'un faisceau laser par un miroir fixé sur le cadre est mesurée sur un écran, ce qui permet d'accéder à l'angle  $\alpha$  de rotation du cadre et de mettre en évidence l'existence du moment des forces de Laplace. Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 20.6.

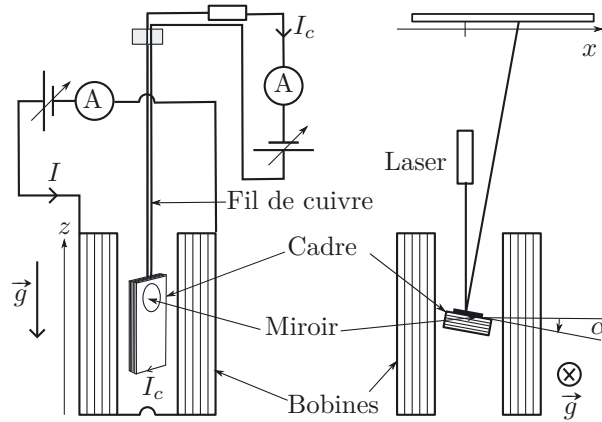


Figure 20.6. Dispositif expérimental permettant d'étudier le moment des forces de Laplace qui s'exerce sur  $N$  spires rectangulaires.

Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, on choisit comme système le cadre comportant les  $N$  spires rectangulaires, de masse  $m_c$  et de moment d'inertie  $J$  par rapport à l'axe vertical ( $Oz$ ). Les actions qui s'exercent sur ce système sont :

- le poids du cadre, de moment nul par rapport à ( $Oz$ ) ;
- la tension des deux fils de cuivre, de moment nul par rapport à ( $Oz$ ) ;
- le couple de torsion, de moment  $\vec{\Gamma}_t = -C\alpha\vec{u}_z$  où  $C$  est la constante de torsion des fils ;
- le couple de frottement fluide, de moment  $\vec{\Gamma}_f = -k\frac{d\alpha}{dt}\vec{u}_z$  où  $k$  est une constante ;
- le moment des forces de Laplace que l'on cherche à exprimer :  $\vec{\Gamma}_{La} = \Gamma_{La}\vec{u}_z$ .

La loi du moment cinétique projeté sur l'axe ( $Oz$ ) donne :

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -k\frac{d\alpha}{dt} - C\alpha + \Gamma_{La}$$

À l'équilibre, on a  $\Gamma_{La} = C\alpha_{eq}$ . Le moment des forces de Laplace est donc proportionnel à l'angle d'équilibre. Les valeurs expérimentales de l'angle d'équilibre sont données figure 20.7, pour différentes valeurs du champ magnétique et pour différentes valeurs de l'intensité  $I_c$  du courant dans le bobinage du cadre.

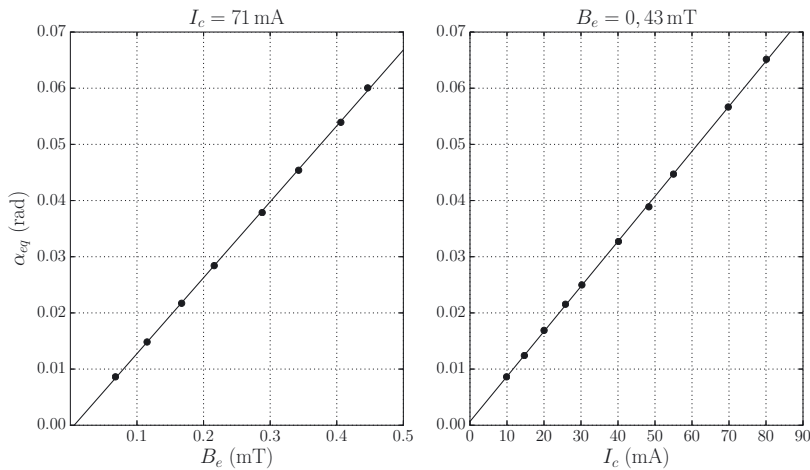


Figure 20.7. Évolution de la position d'équilibre du pendule de torsion en fonction du champ magnétique extérieur  $B_e$  et du courant dans le cadre  $I_c$ .

Cette expérience, réalisée pour des angles  $\alpha_{eq}$  très petits, montre la proportionnalité entre le moment des forces de Laplace et :

- la norme du champ magnétique ;
- l'intensité du courant.

De façon générale, le moment résultant des forces de Laplace s'écrit  $\vec{\Gamma}_{La} = NI_c B_e ab \cos \alpha \vec{u}_z$  et s'exprime en fonction du moment magnétique du cadre  $\vec{m} = NI_c ab \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur normal orienté par la « règle de la main droite ». On obtient ainsi  $\vec{\Gamma}_{La} = NI_c B_e ab \cos \alpha \vec{u}_z = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$ . Dans l'expérience présentée ci-dessus, l'angle  $\alpha$  est très petit et on a donc  $\vec{\Gamma}_{La} \approx NI_c B_e ab \vec{u}_z$ . Le moment est proportionnel à  $B_e$  et à  $I_c$  conformément aux résultats expérimentaux.

#### Moment résultant des forces de Laplace

Une distribution de courants de moment magnétique  $\vec{m}$  plongée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_e$  est soumise au moment résultant des forces de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$$



Pour un système en rotation autour d'un axe fixe de vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , la puissance des forces de Laplace s'écrit  $P_{La} = \vec{\Gamma}_{La} \cdot \vec{\omega}$ .

Les actions exercées par un champ magnétique sur une distribution de courants de moment magnétique  $\vec{m}$  sont rappelées dans la méthode ci-dessous.

**Méthode 20.2 : Calculer les actions d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant  $i$**

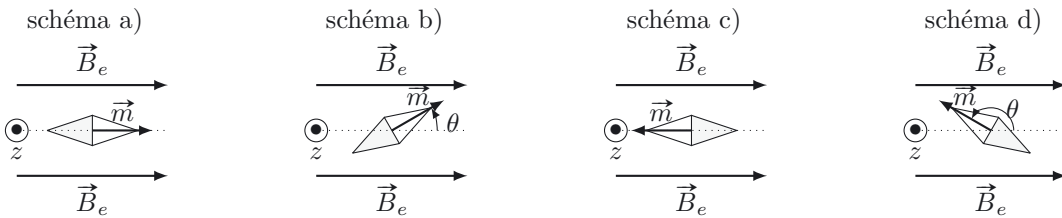
- La force élémentaire de Laplace qui s'exerce sur une portion de conducteur  $d\ell$  dans un champ  $\vec{B}_e$  s'écrit  $d\vec{F}_{La} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_e$  où  $d\vec{\ell}$  est orienté dans le sens choisi pour définir l'intensité du courant.
- La force de Laplace qui s'exerce sur une portion de conducteur rectiligne de longueur  $L$  dans un champ  $\vec{B}_e$  uniforme s'écrit  $\vec{F}_{La} = i \vec{L} \wedge \vec{B}_e$  où  $\vec{L}$  est orienté dans le sens choisi pour définir l'intensité du courant.
- Le moment résultant des forces de Laplace s'exerçant sur une distribution de courants de moment magnétique  $\vec{m}$  s'écrit :  $\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$ .

➡ Exercice (20.3)

Pour résumer, l'action des forces de Laplace sur un cadre bobiné parcouru par un courant prend, dans un champ uniforme, la forme d'un couple (ensemble de forces de résultante nulle et de moment non nul). Il s'agit à présent de voir comment ce couple peut mettre en rotation le cadre. Pour cela, nous allons plutôt envisager l'action d'un champ magnétique sur un aimant permanent.

□ **Comment faire tourner un aimant grâce moment des forces de Laplace ?**

L'expression  $\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$  s'applique également à un aimant permanent de moment magnétique  $\vec{m}$ . Lorsqu'on plonge cet aimant dans un champ magnétique uniforme, le moment des forces de Laplace tend à aligner le moment magnétique sur le champ magnétique extérieur et il s'annule lorsque  $\vec{m}$  est parallèle à  $\vec{B}_e$ . Cela est illustré par les quatre schémas ci-dessous :



- Schéma a) :  $\vec{m}$  et  $\vec{B}_e$  sont alignés, le moment des forces de Laplace est nul.  $\theta = 0$  est une position d'équilibre.
- Schéma b) : on écarte légèrement l'aimant de la position d'équilibre  $\theta = 0$ . Le moment des forces de Laplace  $\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e = -mB_e \sin \theta \vec{u}_z$  a tendance à ramener l'aimant vers sa position initiale :  $\theta = 0$  est donc une position d'équilibre stable.
- Schéma c) :  $\vec{m}$  et  $\vec{B}_e$  sont de mêmes directions mais de sens opposés. Le moment des forces de Laplace est nul.  $\theta = \pi$  est donc une position d'équilibre.
- Schéma d) : on écarte légèrement l'aimant de la position d'équilibre  $\theta = \pi$ . Le moment des forces de Laplace  $\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e = -mB_e \sin \theta \vec{u}_z$  a tendance à éloigner l'aimant de sa position initiale :  $\theta = \pi$  est donc une position d'équilibre instable.



L'alignement du moment magnétique sur le champ magnétique extérieur explique pourquoi une aiguille de boussole s'oriente dans le sens du champ magnétique terrestre : le pôle nord de l'aiguille aimantée pointe vers le pôle sud magnétique de la Terre, c'est-à-dire à peu près vers le pôle nord géographique.

Un aimant libre de tourner s'aligne donc avec le champ magnétique extérieur. Pour faire tourner cet aimant, il suffit de faire tourner le champ magnétique. Par exemple, si l'on tourne lentement un aimant autour d'une aiguille aimantée, l'aiguille aimantée se met en rotation en suivant le mouvement de l'aimant.

□ **Comment réaliser un champ magnétique extérieur tournant ?**

Pour que l'extrémité du vecteur champ magnétique décrive un cercle, il faut que ses composantes  $B_x$  et  $B_y$  (sur une base orthonormée) varient dans le temps de façon sinusoïdale et qu'elles soient déphasées de  $\pi/2$ . Par exemple pour un champ magnétique tournant à la vitesse  $\omega$  dans le plan  $(O, x, y)$ , on a :  $\vec{B}_e = B_e(t) \vec{u}_r = B_e \cos(\omega t) \vec{u}_x + B_e \sin(\omega t) \vec{u}_y$ .

Nous avons réalisé l'expérience présentée sur la figure 20.8. Le champ magnétique tournant est engendré par deux paires de bobines disposées perpendiculairement, l'une d'axe  $x$ , l'autre d'axe  $y$ , alimentées par un double onduleur piloté par un microcontrôleur (carte Arduino). Celui-ci délivre deux signaux de commande en quadrature, ce qui permet d'alimenter les deux paires de bobines avec deux courants sinusoïdaux déphasés de  $\pi/2$ .

Un barreau aimanté posé sur une pointe est placé au centre des bobines. Deux photodiodes sont placées sous le barreau. Une lampe LED est fixée à une vingtaine de centimètre au dessus, de telle manière que l'ombre du barreau passe sur les photodiodes. On utilise deux photodiodes pour obtenir le sens de rotation et la vitesse du barreau. L'amplificateur des photodiodes comporte un comparateur qui délivre deux signaux binaires  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$ . Le signal de commande  $u(t)$  généré par le microcontrôleur est aussi récupéré.

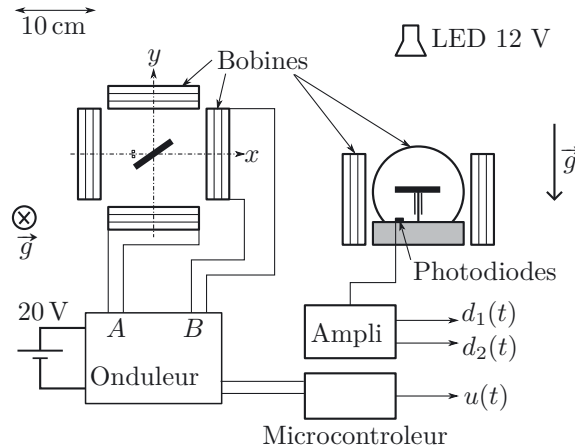


Figure 20.8. Dispositif expérimental permettant de mettre en œuvre un champ magnétique tournant et faire tourner un aimant.

Dans un premier temps, les composantes  $B_x(t)$  et  $B_y(t)$  du champ au centre des bobines sont obtenues avec une sonde à effet Hall et représentées à gauche de la figure 20.9, avec le signal de commande. On constate que les composantes du champ magnétique sont sinusoïdales et que  $B_y$  est en retard par rapport à  $B_x$  de  $\pi/2$ , ce qui correspond à un champ magnétique qui tourne dans le sens trigonométrique.

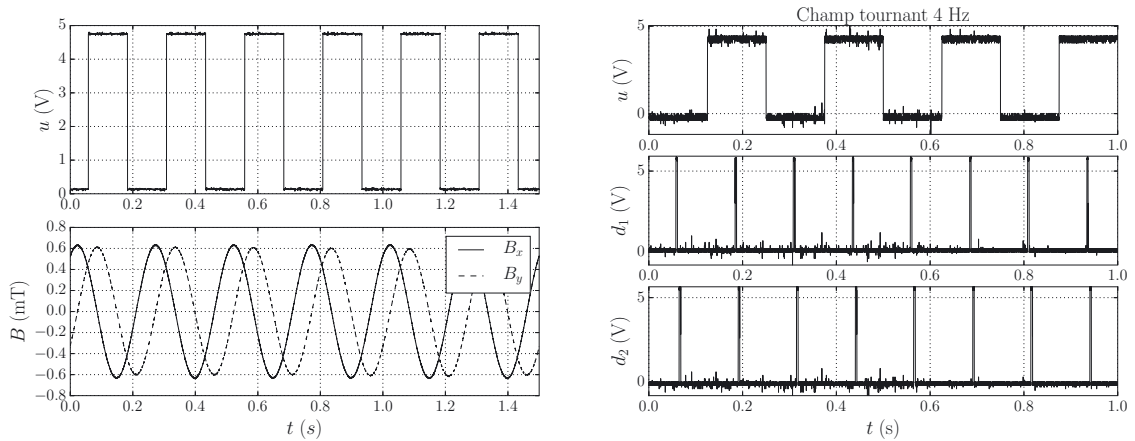


Figure 20.9. Signal de commande  $u(t)$  et champ magnétique généré (à gauche) ; signal de commande et mouvement de rotation du barreau aimanté (à droite).

Le signal de commande  $u(t)$  est synchrone avec le champ tournant. Sur la figure 20.9 à droite, chaque impulsion de  $d_1$  correspond au passage de l'ombre du barreau sur la photodiode  $D_1$ . On constate que les impulsions de la photodiode  $D_1$  sont synchrones avec le signal de commande et donc synchrones avec le champ tournant. Les impulsions de la diode  $D_2$  sont toutes très légèrement retardées par rapport à celles de  $D_1$ , ce qui montre que le barreau tourne toujours dans le même sens. Nous en concluons que le barreau tourne en synchronisme avec le champ.

Par cette expérience, nous venons de mettre évidence le principe d'un moteur synchrone.

#### Principe du moteur synchrone

Un moteur synchrone est constitué :

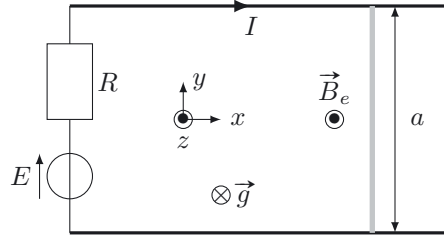
- d'un stator qui crée un champ magnétique tournant à l'aide de plusieurs bobines alimentées par des courants sinusoïdaux déphasés les uns par rapport aux autres ;
- d'un rotor constitué d'un aimant permanent ou d'un bobinage alimenté en continu pour engendrer un moment magnétique  $\vec{m}$ .

La vitesse de rotation du rotor est la même que la vitesse de rotation du champ tournant créé par le stator (synchronisme).

## Interro de cours

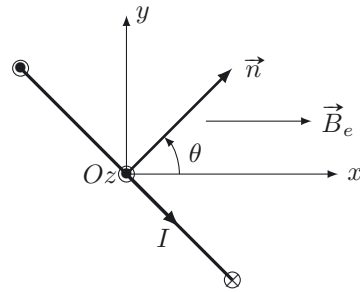
1. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est inexacte ?
  - (a) Si deux lignes de champ magnétique se croisent en un point  $M$ , alors le champ magnétique est nul en  $M$ .
  - (b) L'intensité du champ magnétique garde une valeur constante le long d'une ligne de champ.
  - (c) Les zones de champ magnétique uniforme sont des zones dans lesquelles les lignes de champ sont parallèles.
  
2. Associer les ordres de grandeur des normes de champs magnétiques  $B_1 = 1 \text{ T}$ ,  $B_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  et  $B_3 \simeq$  quelques teslas aux cas suivants :
  - (a) champ magnétique terrestre ;
  - (b) champ au voisinage d'un aimant ;
  - (c) champ dans un appareil d'IRM.
  
3. Le champ magnétique créé par un fil très long parcouru par un courant d'intensité  $I$  a pour norme  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  à une distance  $r$  du fil. On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ . Que vaut  $B$  pour  $r = 1,0 \text{ cm}$  et  $I = 1,0 \text{ kA}$  ?
  - (a) 2,0 T.
  - (b) 20 mT.
  - (c)  $2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ .
  
4. Une aiguille aimantée utilisée par exemple dans une boussole :
  - (a) présente forcément un pôle nord et un pôle sud ;
  - (b) peut présenter un pôle nord et un pôle sud ;
  - (c) présente un pôle unique, nord ou sud.
  
5. Une boucle de courant circulaire de rayon  $R = 1,0 \text{ cm}$  est parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On souhaite que la norme du moment magnétique  $m$  de la boucle de courant soit de l'ordre de  $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ . L'expression de  $m$  et la valeur approchée de  $I$  sont alors données par :
  - (a)  $m = I\pi R^2$  avec  $I = 3 \text{ A}$  ;
  - (b)  $m = I2\pi R$  avec  $I = 3 \text{ A}$  ;
  - (c)  $m = I\pi R^2$  avec  $I = 3 \text{ kA}$ .
  
6. Les pôles nord de deux aimants :
  - (a) se repoussent ;
  - (b) s'attirent ;
  - (c) ne s'influencent pas.

7. Le dispositif des rails de Laplace est schématisé sur la figure ci-contre. La tige posée sur les rails distants de  $a$  peut glisser sur ces derniers avec une vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ . Quelles sont les expressions de la force de Laplace  $\vec{F}_{La}$  subie par la tige puis de la puissance  $\mathcal{P}_{La}$  de cette force ?



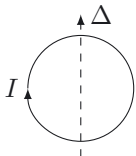
- (a)  $\vec{F}_{La} = IaB_e\vec{u}_x$  et  $\mathcal{P}_{La} = IaB_ev$ .
- (b)  $\vec{F}_{La} = -IaB_e\vec{u}_x$  et  $\mathcal{P}_{La} = -IaB_ev$ .
- (c)  $\vec{F}_{La} = -IaB_e\vec{u}_x$  et  $\mathcal{P}_{La} = IaB_ev$ .

8. Un cadre carré de côté  $a$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$  et possède un moment magnétique  $\vec{m} = m\vec{n}$  ( $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à la surface du cadre). Quelle est l'expression du moment  $\vec{\mathcal{M}}_{La}$  du couple subi par le cadre plongé dans le champ magnétique  $\vec{B}_e = B_e\vec{u}_x$  ?

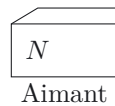
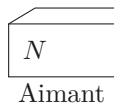


- (a)  $\vec{\mathcal{M}}_{La} = IaB_e \cos(\theta)\vec{u}_z$ .
- (b)  $\vec{\mathcal{M}}_{La} = Ia^2B_e \sin(\theta)\vec{u}_z$ .
- (c)  $\vec{\mathcal{M}}_{La} = -Ia^2B_e \sin(\theta)\vec{u}_z$ .

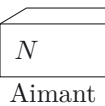
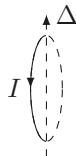
9. Une spire circulaire parcourue par un courant d'intensité  $I > 0$  peut tourner autour d'un axe  $\Delta$ . Comment s'orientera-t-elle devant un aimant présentant son pôle nord ( $N$ ) ?



(a)



(b)



(c)

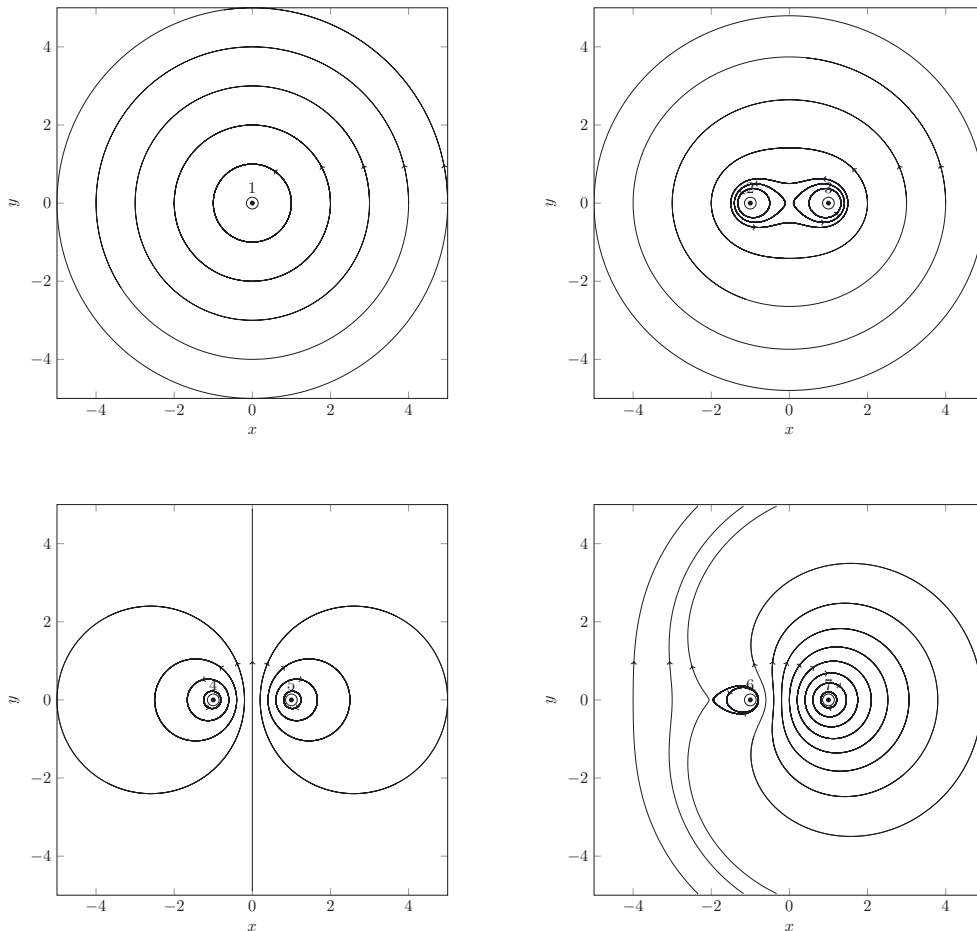


# Exercices

## Exercice 20.1 Les petits fils modèles

### ➔ Méthode (20.1)

Les cartes de champs magnétiques proposées sur la figure ci-dessous sont générées par des fils rectilignes numérotés de 1 à 7 perpendiculaires au plan de la figure. La convention d'orientation précisée sur la figure est la même pour tous les fils. Le fil  $i$  est ainsi parcouru par un courant d'intensité  $I_i$  de signe à déterminer.



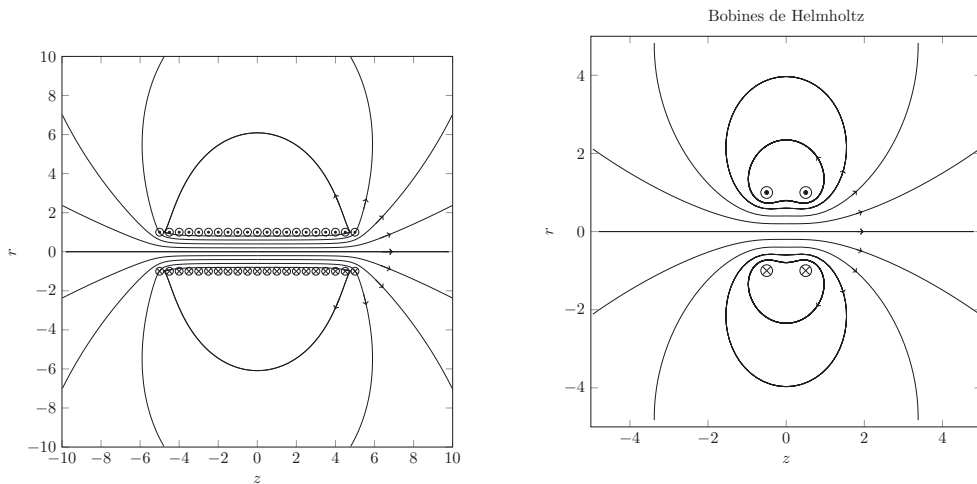
1. Déterminer les signes des courants.
2. Comparer les intensités des courants  $I_2$  et  $I_3$ ,  $I_4$  et  $I_5$  puis  $I_6$  et  $I_7$ .

**Exercice 20.2** Le prestige de l'uniforme

➔ Méthode (20.1)

Lors d'examen IRM, il est nécessaire d'assurer une grande uniformité du champ magnétique afin d'afficher des images avec une très bonne résolution spatiale.

Les cartes de champ magnétique proposées sur la figure ci-dessous ont été obtenues à l'aide d'un solénoïde (à gauche) et de deux spires (à droite). Ce dernier dispositif est dans la pratique constitué de deux bobines plates de rayon  $R$  distantes de  $R$  (bobines de Helmholtz). Ces dispositifs étant invariants par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), les cartes de champs sont dressées dans un plan contenant l'axe ( $Oz$ ) et dans lequel la première coordonnée cylindrique  $r$  a été algébrisée. Le demi-plan  $r > 0$  correspondant à une valeur  $\theta_0$  de la deuxième coordonnée cylindrique  $\theta$ , le demi-plan  $r < 0$  correspond à la valeur  $\theta_0 + \pi$  de celle-ci.

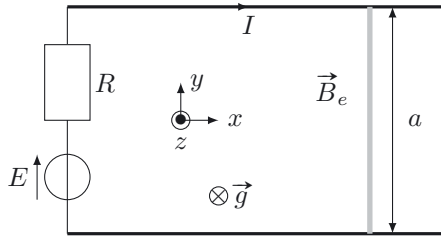


1. Déterminer le signe de l'intensité du courant circulant dans les deux dispositifs, la convention d'orientation du courant étant précisée sur la figure.
2. Identifier les zones de champ uniforme et de champ faible.
3. Quels sont les avantages et inconvénients du solénoïde par rapport aux bobines de Helmholtz ?

**Exercice 20.3** Le déraillement

➔ Méthode (20.2)

Une tige conductrice de masse  $m = 5,0\text{ g}$  et de longueur  $a = 5,0\text{ cm}$  est posée sur des rails de Laplace alimentés par un générateur de tension continue de f.e.m  $E$ . La résistance électrique totale du circuit est  $R = 4,0\ \Omega$ .

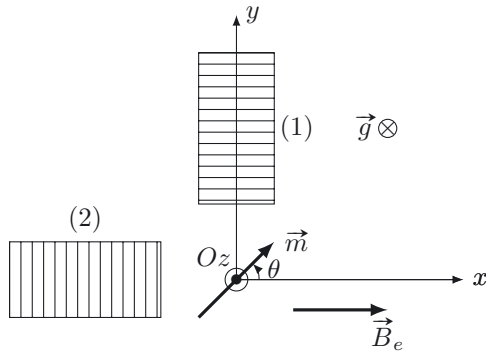


Un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_e$  est appliqué, avec  $B_e = 50 \text{ mT}$ .  
La valeur de l'accélération de la pesanteur est prise égale à  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- Déterminer la direction et le sens de  $\vec{B}_e$  pour lesquels la force de Laplace exercée sur la tige est verticale ascendante.
- Calculer la f.e.m minimale  $E_{\min}$  pour que la tige quitte le rail.

### Exercice 20.4 Le bon moment

L'aiguille aimantée d'une boussole peut tourner librement autour de son axe  $Oz$ .



Son moment magnétique  $\vec{m}$  appartient au plan  $xOy$ ; il est repéré par l'angle  $\theta$ . L'aiguille est soumise à un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_x$  avec  $B_e = 1,0 \text{ mT}$ .  
Les deux bobines (1) et (2) génèrent dans la région de l'aiguille respectivement les champs magnétiques :  
 $\vec{B}_1 = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$  et  $\vec{B}_2 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$ .

L'aiguille possède un moment d'inertie  $J = 3,0 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  par rapport à  $Oz$  et ne subit aucun frottement.

- Dans un premier temps, les bobines (1) et (2) ne sont parcourues par aucun courant. Exprimer le moment du couple  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$  subi par l'aiguille aimantée en fonction de  $B_e$ ,  $m$ ,  $\theta$  et d'un vecteur unitaire à préciser. Déterminer les valeurs de  $\theta$  correspondant aux positions d'équilibre et préciser la stabilité de ces dernières.
- L'aiguille est écartée de sa position d'équilibre stable d'un petit angle  $\theta_0$  sans vitesse angulaire initiale. Appliquer la loi du moment cinétique à l'aiguille et en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ . On posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mB_e}{J}}$ .
- Résoudre l'équation différentielle.
- Les deux bobines sont maintenant branchées. Montrer que le champ magnétique créé par ces deux bobines est un champ magnétique tournant que l'on caractérisera.
- Une résonance est observée lorsque  $\omega = \omega_0$ . La fréquence du courant circulant dans les bobines est alors  $f = 4,6 \text{ Hz}$ . Calculer  $m$ .

**Exercice 20.5 Ces champs-là...**

... méritent d'être connus.

- Le champ magnétique dans un appareil d'IRM de l'ordre de quelques teslas. L'aimant principal est réalisé sous forme de solénoïde, constituant un tunnel dans lequel le patient prend place. Le champ magnétique  $\vec{B}$  à l'intérieur d'une bobine longue d'axe  $Ox$  constituée de  $n$  spires par unité de longueur et parcourues par un courant d'intensité  $I$  s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_x$ .
  - Quelle intensité  $I$  est-elle nécessaire pour obtenir un champ magnétique de 3 T dans le tunnel si  $n = 3 \cdot 10^3$  spires par mètre? On rappelle que  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .
  - Comment peut-on imposer de telles intensités de courants électriques?
- Le champ magnétique terrestre  $B_T$  dont l'intensité est de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  à la surface de la Terre.
  - Nous considérons en première approximation que ce champ magnétique est généré par un moment magnétique  $\vec{m}$  situé au centre de la Terre. Le lien entre  $B_T$  et sa source peut alors être cherché sous la forme  $B_T = \alpha \mu_0^a m^b R_T^c$  où  $R_T$  est le rayon de la Terre et  $\alpha$  une constante sans dimension. Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  par analyse dimensionnelle. On pourra s'aider de l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde.
  - En déduire l'ordre de grandeur de  $m$ . On prendra  $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$  et  $\alpha \simeq 0,1$ .

**Exercice 20.6 L'aimant**

La carte de champ magnétique obtenue avec un petit aimant au néodyme est très semblable à grande distance à celle générée par une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

- Exprimer le moment magnétique  $\vec{m}$  associé à la boucle de courant. Le calculer avec  $I = 1,0 \text{ A}$  et  $R = 1,0 \text{ cm}$ .
- L'intensité du champ magnétique à une grande distance donnée de sa source est environ 1 000 fois plus grande dans le cas du petit aimant que de la spire. En déduire un ordre de grandeur du moment magnétique de l'aimant.

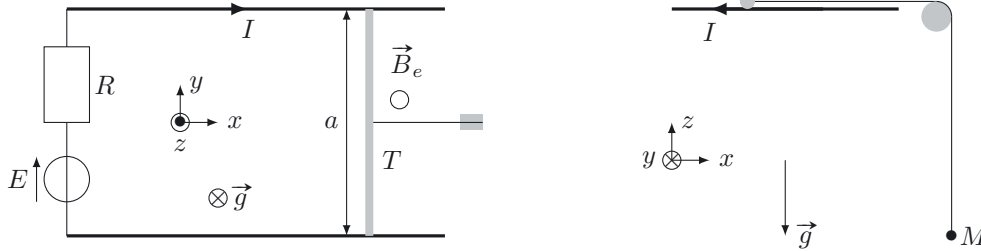
**Exercice 20.7 Le champ suspend son vol**

Une tige conductrice  $T$  de masse  $m = 3,0 \text{ g}$  et de longueur  $a = 5,0 \text{ cm}$  est posée sur des rails de Laplace alimentés par un générateur de tension continue de f.e.m  $E = 24 \text{ V}$ . La résistance électrique totale du circuit est  $R = 1,0 \Omega$ .

La tige est reliée à un petit objet  $M$  de masse  $m' = 3,0 \text{ g}$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible enroulé autour d'une poulie. Les masses du fil et de la poulie sont négligées.

Un champ magnétique  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_z$  uniforme et stationnaire est appliqué à partir de l'instant  $t = 0$ . À ce moment,  $T$  se trouve à l'abscisse  $x(0) = 0$  et se déplace à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  avec  $v_0 = 0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  $M$  se trouve quant à lui à une hauteur  $H = 70 \text{ cm}$  du sol.

Nous négligeons les phénomènes d'induction électromagnétique et supposons donc que le générateur impose l'intensité  $I$  du courant circulant dans le circuit.



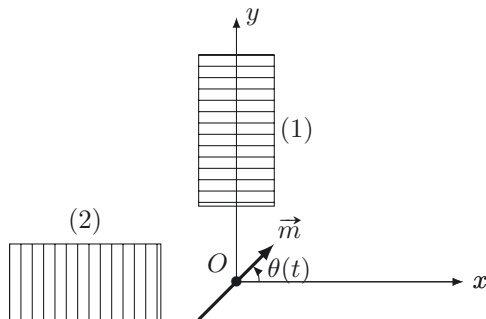
On notera  $x(t)$  l'abscisse de la tige à l'instant  $t$ .

Tous les frottements sont négligés. L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Calculer l'intensité  $I$  du courant circulant dans la tige.
2. Quel est le signe de  $B_e$  pour que l'application du champ magnétique ralentisse la chute de  $M$  ?
3. Exprimer la force de Laplace subie par la tige, puis la puissance de cette force.
4. Appliquer la loi de l'énergie cinétique entre les instants 0 et  $t$  au système constitué de  $T$ ,  $M$  et du fil. On rappelle que l'énergie cinétique des deux masses  $m$  et  $m'$  est la somme des énergies cinétiques de chacune d'elles.
5. Déterminer la valeur minimale de  $B_e$  qui permet de suspendre le vol de  $M$  (c'est-à-dire d'annuler sa vitesse avant qu'il ne touche le sol). Que pensez-vous de cette valeur de  $B_e$  ?

### Exercice 20.8 Autant en emporte le champ

Le moteur synchrone est notamment utilisé dans la motorisation des ascenseurs.



Nous le modélisons de façon très simplifiée par un aimant (rotor) tournant autour de l'axe  $Oz$ , de moment magnétique  $\vec{m}$  constant et situé dans le plan  $xOy$ ; il est repéré par l'angle  $\theta(t)$  et nous n'envisageons que la possibilité d'une rotation à vitesse angulaire constante  $\omega'$ , de sorte que  $\theta(t) = \omega't - \theta_0$ , où  $\theta_0$  est une constante. Les deux bobines (1) et (2) (stator) génèrent dans la région de l'aimant respectivement les champs magnétiques  $\vec{B}_1 = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$  et  $\vec{B}_2 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$ .

On rappelle qu'un aimant de moment magnétique  $\vec{m}$  subit un couple de moment  $\vec{m} \wedge \vec{B}$  lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}$ .

1. Montrer que le champ magnétique créé par le stator est de norme constante et peut être qualifié de champ tournant. Préciser son sens de rotation.
2. Calculer le moment du couple instantané  $\vec{\Gamma}(t)$  exercé par le champ sur l'aimant puis sa moyenne temporelle  $\vec{\Gamma}_m$ . Pourquoi parle-t-on de moteur synchrone ?  
On rappelle que  $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$ .
3. Le moteur peut-il démarrer spontanément ?
4. Compte tenu de l'inertie importante du moteur, nous utilisons dans cette question la valeur moyenne  $\vec{\Gamma}_m$  du couple  $\vec{\Gamma}(t)$ . Le moteur sert à soulever une charge de masse  $M$ . Le moment

du couple que doit exercer le rotor pour soulever la charge en régime quasi-stationnaire est  $\vec{\Gamma}_c = \alpha M \vec{u}_z$ , où  $\alpha$  est une constante positive. Quelle est la masse maximale que le moteur peut porter ?

# Corrections

## Interro de cours

1. Réponse (b) : les lignes de champ magnétique sont tangentes en chaque point au vecteur champ magnétique mais la norme de celui-ci peut évoluer le long d'une ligne de champ (voir par exemple une ligne de champ sortant d'un solénoïde).
2. (a) :  $B_2$  ; (b) :  $B_1$  ; (c) :  $B_3$ .
3. Réponse (b).
4. Réponse (a).
5. Réponse (c) : la réponse (b) ne peut pas convenir (homogénéité) et la réponse (a) ne donne pas le bon ordre de grandeur pour  $m$ .
6. Réponse (a).
7. Réponse (b) : la règle de la main droite montre que  $\vec{F}_{La}$  est suivant  $-\vec{u}_x$  et  $\mathcal{P}_{La} = \vec{F}_{La} \cdot \vec{v}$ .
8. Réponse (c) :  $\vec{\mathcal{M}}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e$  avec  $\vec{m} = I a^2 \vec{n}$ . Notons que la réponse (a) n'a pas la dimension d'un moment de force.
9. Réponse (c) : l'équilibre stable correspond à la situation dans laquelle le moment magnétique  $\vec{m}$  de la spire est dirigé dans la direction et le sens du champ magnétique créé par l'aimant. La situation (b) correspond à un équilibre instable (les pôles nord de l'aimant et de la spire se repoussent).

## Exercice 20.1

1. On détermine le signe des intensités en regardant l'orientation des lignes de champ magnétique, liée à ceux des courants par la règle du tire-bouchon. Au voisinage des fils, le champ magnétique est de plus quasiment le champ d'un fil unique. Ainsi, il vient immédiatement  $I_1 > 0$ ,  $I_2 > 0$ ,  $I_3 > 0$ ,  $I_4 > 0$ ,  $I_5 < 0$ ,  $I_6 > 0$ ,  $I_7 < 0$ .
2. Pour le couple (2,3), le plan  $z = 0$  est un plan d'antisymétrie des lignes de champ magnétique, donc de symétrie des courants :  $I_2 = I_3$ . Pour le couple (4,5), le plan  $z = 0$  est un plan de symétrie des lignes de champ magnétique, donc d'antisymétrie des courants :  $I_4 = -I_5$ . L'influence de  $I_7$  se fait sentir à plus grande distance que pour  $I_6$  :  $-I_7 > I_6$ .

## Exercice 20.2

1. Le sens du champ magnétique est lié à celui des courants par la règle du tire-bouchon ou de la main droite. Nous déduisons donc de l'étude des deux figures que le courant circulant dans les deux dispositifs est positif dans le sens choisi pour l'orientation.
2. Les zones de champ uniforme sont situées entre les deux spires pour les bobines de Helmholtz et à l'intérieur du solénoïde, suffisamment loin des bords de ce dernier. Comme le flux du champ magnétique doit se conserver et que les systèmes proposés présentent une invariance par rotation autour de l'axe horizontal, lorsque les lignes de champs se resserrent, la norme du champ magnétique augmente. Les zones de champ faible sont donc situées pour le solénoïde à l'extérieur de ce dernier et plus particulièrement dans les zones situées au dessus et en dessous (voisinage du plan  $z = 0$ , pour  $r > R$ ). Pour les bobines, ces zones sont globalement les zones situées en dehors de l'espace inter-spires.
3. Le solénoïde permet d'obtenir facilement en laboratoire un champ plus intense dans une zone plus étendue, mais l'accès à cette zone de champ uniforme est plus difficile et on ne pourra pas visualiser le comportement des objets qu'on y place, contrairement aux bobines de Helmholtz où la zone de champ uniforme est en espace « libre ».

**Exercice 20.3**

1. La force de Laplace sur la tige est  $\vec{F}_{La} = -Ia\vec{u}_y \wedge \vec{B}_e$ , et elle doit être selon  $+\vec{u}_z$  pour être verticale ascendante. Il faut donc que  $\vec{B}_e = B_e\vec{u}_x$ , d'où  $\vec{F}_{La} = IaB_e\vec{u}_z$ .
2. La tige quitte le rail si la force de Laplace devient supérieure en norme au poids de la tige, donc si  $IaB_e > mg$ . Or  $I = \frac{E}{R}$ , d'où  $E > E_{\min} = \frac{Rmg}{aB_e} = 78 \text{ V}$ .

**Exercice 20.4**

1. On introduit  $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$ .  $\vec{\Gamma} = -mB_e \sin(\theta)\vec{u}_z$ . Les valeurs de  $\theta$  correspondant aux positions d'équilibre sont celles annulant ce moment, soit  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . L'équilibre sera stable pour  $\theta = 0$  (position où le dipôle est orienté dans la direction et le sens du champ magnétique) car, si on l'écarte un peu de cette position, le couple l'y ramènera. Pour  $\theta = \pi$ , l'équilibre est instable.
2. L'aiguille est soumise au couple  $\vec{\Gamma} = -mB_e \sin(\theta)\vec{u}_z \approx -mB_e\theta\vec{u}_z$  et à son poids et la liaison d'axe dont les moments par rapport à  $Oz$  sont nuls. Le moment cinétique de l'aiguille par rapport à  $Oz$  est  $L_z = J\dot{\theta}$ . L'application de la loi du moment cinétique scalaire par rapport à  $Oz$  conduit à :  $J\ddot{\theta} = -mB_e\theta$ , soit  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ .
3. Ceci est l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est :  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . La prise en compte des conditions initiales amène à  $A = \theta_0$  et  $B\omega_0 = 0$ , soit finalement :  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ .
4. Le champ magnétique total créé par ces deux bobines est  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  c'est-à-dire :  $\vec{B} = B_0(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y) = B_0\vec{u}(t)$  avec  $\vec{u}(t)$  un vecteur unitaire tournant autour de  $+\vec{u}_z$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . Le champ magnétique est donc un champ tournant autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$  et sa norme est constante, égale à  $B_0$ .
5.  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{mB_e}{J}} = 2\pi f$ , soit  $m = 4\pi^2 f^2 \frac{J}{B_e} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ .

**Exercice 20.5**

1. a.  $I = \frac{B}{\mu_0 n} = 8 \cdot 10^2 \text{ A}$ .  
b. De tels courants dans des enroulements résistifs feraient fondre les fils. On utilise des matériaux supraconducteurs, de résistance nulle, pour obtenir de telles intensités.
2. a. On part de la formule précédente  $B = \mu_0 nI$ . En considérant les dimensions, nous voyons ainsi que  $[B] = [\mu_0][L^{-1}][I]$ . Or la dimension d'un moment magnétique est  $[m] = [I]L^2$ . Nous en déduisons  $[B] = [\mu_0][m]L^{-3}$ . En comparant avec la formule donnée, nous identifions donc  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -3$ .  
b.  $m = \frac{B_T R_T^3}{\alpha \mu_0} \approx 1 \cdot 10^{23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .

**Exercice 20.6**

1.  $\vec{m} = I\pi R^2 \vec{n}$  avec  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à la spire et dont l'orientation est donnée par celle de  $I$  grâce à la règle du tire-bouchon.  $m = 3,1 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .
2. Le champ magnétique d'un dipôle est proportionnel à son moment magnétique. Le champ magnétique de l'aimant à grande distance étant 1 000 fois supérieur à celui de la spire à la même distance, cela implique que le moment magnétique de l'aimant est aussi 1 000 fois supérieur à celui de la spire, soit  $m \approx 0,3 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ .



**Exercice 20.7**

1. On applique la loi des mailles dans le circuit et on aboutit à  $E = RI$ , soit  $I = 24 \text{ A}$ .
2. La barre sera soumise à la force de Laplace  $\vec{F}_{La} = -Ia\vec{u}_y \wedge B_e\vec{u}_z = -IaB_e\vec{u}_x$ . Cette force devant s'opposer au mouvement de la barre, elle doit être selon  $-\vec{u}_x$ , donc  $B_e > 0$ .
3. D'après la question précédente,  $\vec{F}_{La} = -IaB_e\vec{u}_x$  et  $\mathcal{P}_{La}(t) = \vec{F}_{La} \cdot \vec{v}(t) = -IaB_e\dot{x}(t) = -\frac{d(IaB_ex)}{dt}$ .
4. Les deux masses ont la même vitesse linéaire  $\dot{x}(t) = v(t)$ . L'énergie cinétique à l'instant  $t$  de l'ensemble des deux masses est  $E_c(t) = \frac{1}{2}(m + m')v^2(t)$ .

Le système des deux masses est soumis à la force de Laplace ci-dessus, qui dérive de l'énergie potentielle  $E_{p,La} = IaB_ex$ , au poids de  $T$  qui ne travaille pas, à la réaction des rails qui ne travaille pas (absence de frottements), et au poids de  $M$  qui dérive de l'énergie potentielle  $E_{p,p} = m'gz_M$  avec  $z_M = (H - x)$ . L'application de la loi de l'énergie cinétique entre  $t = 0$  et  $t$  amène à :

$$\frac{1}{2}(m + m')(v^2(t) - v_0^2) + IaB_ex(t) + m'g(H - x(t) - H) = 0, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{2}(m + m')(v^2(t) - v_0^2) = (m'g - IaB_e)x(t), \text{ ce qui sous-entend que } B_e > \frac{m'g}{Ia}.$$

5. On tire de l'équation précédente la relation  $v^2(t) = v_0^2 + 2\frac{m'g - IaB_e}{m + m'}x(t)$ . On cherche  $B_e$  pour que cette vitesse s'annule pour  $x_f = \frac{1}{2}(m + m')\frac{v_0^2}{IaB_e - m'g} < H$ , soit  $B_e > \frac{m'g}{Ia} + \frac{1}{2}\frac{(m + m')v_0^2}{IaH} = 25 \text{ mT}$ . Cette valeur de  $B_e$  est facilement réalisable à partir d'un aimant permanent.

**Exercice 20.8**

1. Le champ magnétique total créé par le stator s'écrit  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ , c'est-à-dire :  
 $\vec{B} = B_0(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y) = B_0\vec{u}(t)$  avec  $\vec{u}(t)$  un vecteur unitaire tournant autour de  $+\vec{u}_z$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . Le champ magnétique est donc un champ tournant autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $\omega$ , et sa norme est constante, égale à  $B_0$ .
2.  $\vec{\Gamma}(t) = m(\cos(\omega't - \theta_0)\vec{u}_x + \sin(\omega't - \theta_0)\vec{u}_y) \wedge B_0(\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y)$ .  
 $\vec{\Gamma}(t) = mB_0(\cos(\omega't - \theta_0)\sin(\omega t) - \sin(\omega't - \theta_0)\cos(\omega t))\vec{u}_z = mB_0\sin((\omega - \omega')t + \theta_0)\vec{u}_z$ .  
 Sa valeur moyenne temporelle est nulle si  $\omega' \neq \omega$  et vaut  $\vec{\Gamma}_m = mB_0\sin(\theta_0)\vec{u}_z$  si  $\omega' = \omega$  : ce moteur ne peut fonctionner que si le mouvement du rotor est synchrone avec le champ tournant du stator, d'où l'appellation moteur synchrone.
3. Sachant qu'initialement,  $\omega' = 0$  et  $\omega \neq 0$ , le couple moyen étant nul, le moteur synchrone ne peut pas démarrer spontanément : il faut le lancer grâce à un moteur auxiliaire, à une vitesse angulaire initiale plus grande que  $\omega$ , de façon à ce que l'accrochage puisse avoir lieu.
4. L'inertie d'un moteur étant très importante, on est amené à raisonner sur le couple moyen moteur  $\vec{\Gamma}_m = mB_0\sin(\theta_0)\vec{u}_z$ . En régime permanent, la vitesse du rotor est constante, ce qui signifie que  $mB_0\sin(\theta_0) = \alpha M$ , soit  $\sin(\theta_0) = \frac{\alpha M}{mB_0} \leq 1$ , d'où  $M \leq \frac{mB_0}{\alpha} = M_{\max}$ .



# Circuit fixe dans un champ variable

## L'essentiel du cours

### Contexte

Comment transférer de l'énergie électrique sans « contact » ?

Les stations de recharge sans contact de téléphones portables, les plaques à induction introduites au chapitre 8 ainsi que les transformateurs présents dans les alimentations électriques ou dans le réseau de transport de l'électricité transfèrent de l'énergie électrique sans « contact ». Le point commun entre ces dispositifs est qu'ils fonctionnent en utilisant le phénomène d'induction électromagnétique.

### ■ 1 Lois de l'induction

Nous avons vu au chapitre précédent que le passage d'un courant électrique dans un circuit entraîne la création d'un champ magnétique. Dans ce chapitre se pose la question inverse :

- Un champ magnétique peut-il être à l'origine d'un signal électrique ?

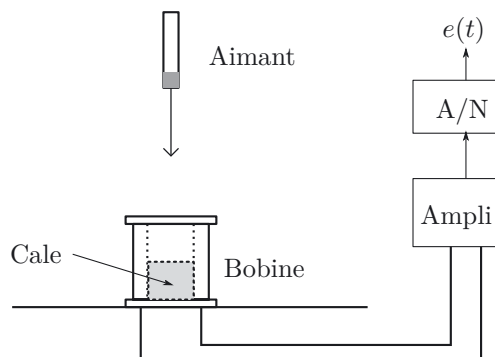


Figure 21.1. Dispositif expérimental permettant de mettre en évidence l'induction.

Dans l'expérience présentée figure 21.1, une bobine de section carrée comportant 1000 spires est posée verticalement sur une table. Un aimant permanent droit est déplacé à la main dans l'axe de la bobine. Une cale en bois permet l'arrêt de la tête de l'aimant au milieu de la bobine, toujours

dans la même position. La tension aux bornes de la bobine est amplifiée avec un gain de 10, puis numérisée.

Au cours d'un enregistrement, on rapproche rapidement l'aimant jusqu'à arriver en butée sur la cale, puis on le retire tout aussi rapidement. Après quelques secondes, on refait le même mouvement beaucoup plus lentement. La tension  $e(t)$  aux bornes de la bobine en fonction du temps est donnée figure 21.2, avec l'aimant orienté dans un sens puis retourné.

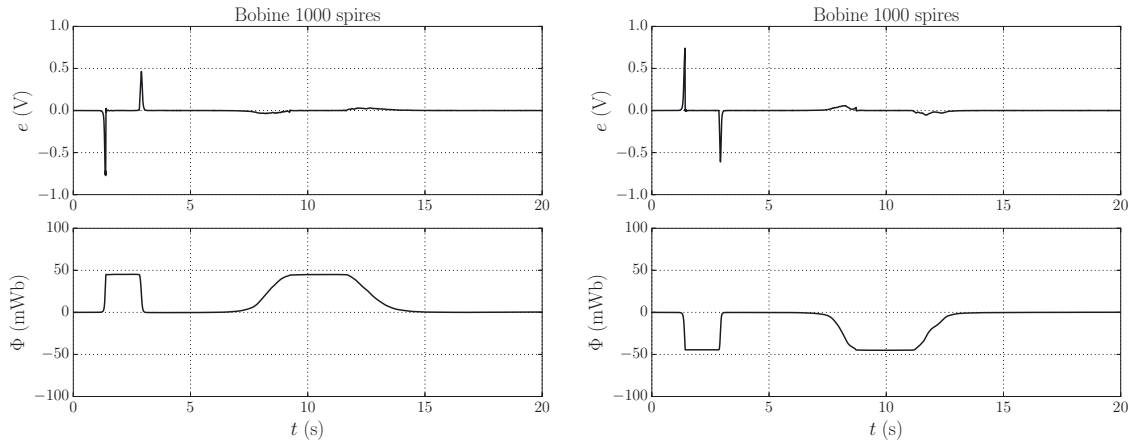


Figure 21.2. Enregistrement de la tension aux bornes de la bobine et du flux magnétique au cours de deux expériences d'approche de l'aimant, orienté dans un sens (figures de gauche) puis retourné (figures de droite).

Constatations expérimentales :

- lorsque l'aimant s'approche, une tension  $e$  apparaît aux bornes de la bobine ;
- la tension  $e$  est nulle lorsque l'aimant est immobile contre la cale ;
- lorsqu'on retire l'aimant, une tension apparaît, de signe opposé à celui de la tension lors de l'approche ;
- plus le mouvement est rapide, plus la tension est grande ;
- en inversant le sens de l'aimant, le signe de la tension est inversé.

On peut déduire de cette expérience que la variation du champ magnétique au cours du temps, et non la seule présence de ce champ, est responsable de l'apparition d'une tension aux bornes de la bobine. Cette tension est la **force électromotrice induite** par la variation du champ.

□ **Quelle est l'influence du nombre de spires sur la force électromotrice induite ?**

Nous refaisons l'expérience avec une bobine de 500 spires au lieu de 1000 spires et constatons alors une diminution de la force électromotrice d'un facteur 2 pour la même vitesse de déplacement : le nombre de spires a donc une influence sur la force électromotrice induite. Afin d'expliquer ces différents phénomènes, nous devons commencer par définir le flux du champ magnétique créé par l'aimant à travers les spires de la bobine.

**Définition : Flux d'un champ magnétique à travers un circuit plan**

Soit un circuit électrique orienté arbitrairement et son vecteur surface  $\vec{S} = S\vec{n}$  avec  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à la surface, déterminé à partir de l'orientation du circuit par « la règle de la main droite ».

- Dans le cas d'un champ magnétique uniforme sur la surface du circuit, le flux  $\Phi$  du champ magnétique, exprimé en weber (Wb ou  $T \cdot m^2$ ), s'écrit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

- Dans le cas d'un champ magnétique non uniforme, on doit écrire une intégrale sur la surface :

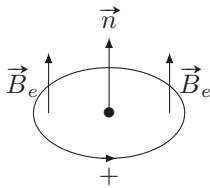
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où  $d\vec{S} = dS\vec{n}$  est le vecteur surface élémentaire.



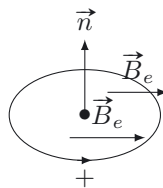
Le flux du champ magnétique est une grandeur algébrique dont le signe dépend du sens de l'orientation du circuit.

Voici quelques exemples de calcul de flux sur une spire circulaire de rayon  $R$  dans un champ uniforme extérieur  $\vec{B}_e$  :



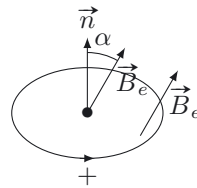
$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}$$

$$\Phi = B_e \pi R^2$$



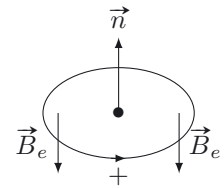
$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}$$

$$\Phi = 0$$



$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}$$

$$\Phi = B_e \pi R^2 \cos \alpha$$



$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}$$

$$\Phi = -B_e \pi R^2$$

**Méthode 21.1 : Calculer le flux d'un champ magnétique uniforme**

Soit un circuit filiforme plan plongé dans un champ magnétique uniforme. Pour calculer le flux du champ magnétique, on doit :

- orienter le circuit en choisissant un sens de parcours ;
- définir le vecteur surface  $\vec{S} = S\vec{n}$  où  $S$  est l'aire du circuit et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface orienté à partir du sens du circuit par « la règle de la main droite » ;
- calculer le produit scalaire  $\vec{B} \cdot \vec{S}$  ;
- pour une bobine constituée de  $N$  spires, le flux à travers la bobine est le produit du nombre de spires et du flux à travers une spire.

➡ Exercice (21.1)

La force électromotrice induite mesurée aux bornes de la bobine dépend de la variation du flux selon la loi de Faraday.

**Loi de Faraday**

On considère un circuit électrique filiforme fermé orienté arbitrairement. Toute variation temporelle du flux magnétique à travers le circuit est responsable de l'apparition d'une **force électromotrice induite**  $e$  exprimée en volt (V) donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où  $e$  est orientée dans le sens choisi pour l'orientation du circuit. Notons que le flux magnétique ne peut donc pas présenter de discontinuités.



Si l'on change la convention d'orientation du circuit, le signe de  $e$  change car celui de  $\Phi$  change.

La loi de Faraday peut aussi s'exprimer sous la forme  $\Phi(t) - \Phi(0) = -\int_0^t e(t) dt$ . Expérimentalement, on obtient donc le flux à travers la bobine en faisant une intégration numérique de la force électromotrice. L'évolution du flux calculé de cette manière est présentée sur la figure 21.2. La valeur du flux magnétique lorsque l'aimant est en butée est indépendante de la façon dont a été réalisée l'approche de l'aimant et l'augmentation de la vitesse de déplacement de l'aimant se traduit par une force électromotrice induite plus importante en valeur absolue, car le flux magnétique varie plus rapidement, ce qui est conforme à la loi de Faraday.

**Loi de Lenz**

Les phénomènes d'induction tendent à s'opposer, par leurs effets, aux causes qui leur ont donné naissance.



Cette loi traduit le signe « moins » présent dans la loi de Faraday.

La loi de Lenz permet de prédire et d'interpréter les phénomènes d'induction de manière qualitative.

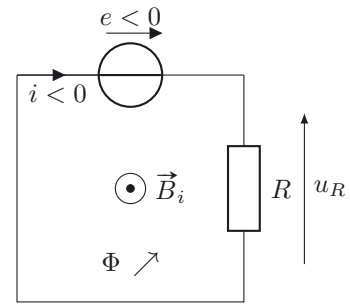
**Méthode 21.2 : Utiliser la loi de Lenz pour prédire le sens du courant induit**

Lors de l'existence d'un phénomène d'induction dans un circuit fermé, la force électromotrice induite entraîne l'apparition d'un courant induit ayant deux effets :

- création d'un champ magnétique propre qui s'oppose à la variation du flux ;
- création d'une force de Laplace dans le circuit qui tend à s'opposer à la variation du flux, dans le cas de circuits mobiles (voir chapitre suivant).

➔ Exercice (21.2)

Pour illustrer la loi de Lenz, reprenons l'expérience précédente en plaçant une résistance  $R$  aux bornes de la bobine, de manière à former une maille constituée de la bobine et de cette résistance. La tension mesurée est alors  $u_R = Ri$ . Lorsqu'on approche l'aimant de manière à obtenir un flux positif croissant dans la bobine, d'après la loi de Lenz, l'augmentation de ce flux entraîne la création d'un courant induit et d'un champ magnétique propre  $\vec{B}_i$  qui doit s'opposer à l'augmentation du flux. Pour ce faire, ce courant doit être négatif (« règle de la main droite »), ce qui est vérifié expérimentalement par l'observation du signe de  $u_R$ .



Une dissipation d'énergie électrique dans la résistance est associée à ce courant induit. Lors du déplacement de l'aimant au voisinage de la bobine, il y a donc une conversion d'énergie mécanique (mouvement de l'aimant) en une énergie électrique sans le moindre contact entre l'aimant et la bobine.

Voyons à présent comment transférer de l'énergie en remplaçant l'aimant par une première bobine alimentée par un courant variable, ce qui modifie le flux magnétique dans la seconde bobine.

## ■ 2 Inductance mutuelle

Nous avons réalisé l'expérience présentée figure 21.3, dans laquelle un champ magnétique dépendant du temps est créé par un courant variable d'intensité  $i_1(t)$  circulant dans une bobine.

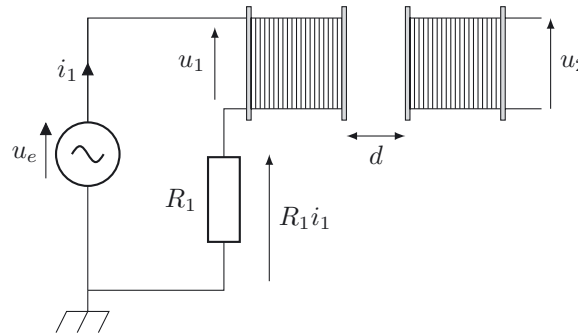


Figure 21.3. Dispositif expérimental permettant de mettre en évidence l'inductance mutuelle.

On utilise deux bobines identiques comportant  $N = 500$  spires approximativement carrées et de résistance interne  $r = 2,8\Omega$ . La première bobine (1) est alimentée par un GBF tandis que la seconde bobine (2) reste en circuit ouvert. Une résistance  $R_1$  est ajoutée dans le circuit primaire (circuit comprenant la première bobine) pour visualiser une image du courant dans ce circuit et ainsi connaître la variation temporelle du champ magnétique  $\vec{B}_1(t)$  créé par le circuit primaire. Les évolutions temporelles de  $i_1(t)$  et de  $u_2(t)$  sont représentées sur la figure 21.4 dans le cas d'un signal délivré par le GBF sinusoïdal puis créneau.

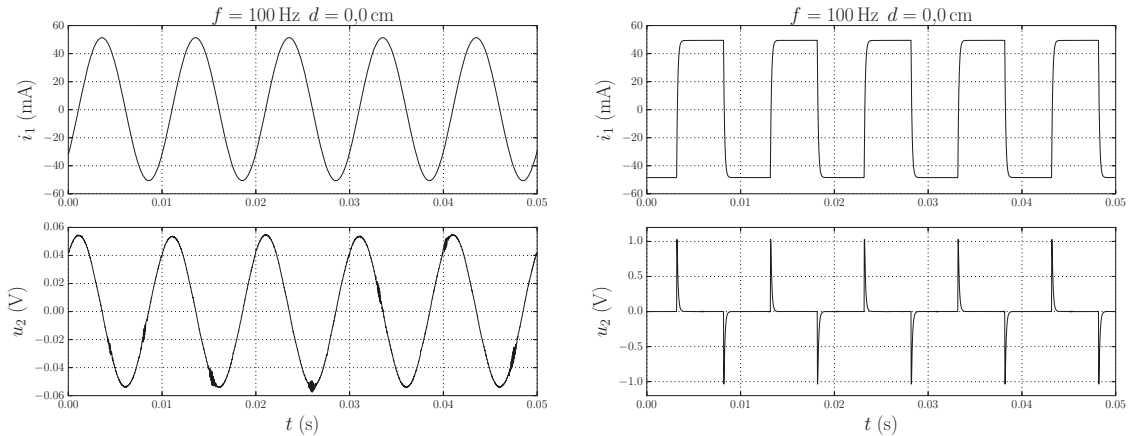


Figure 21.4. Observation de la force électromotrice induite dans la seconde bobine dans le cas d'un champ magnétique variant de façon sinusoidale (à gauche) et dans le cas où le champ magnétique prend deux valeurs opposées (à droite).

La tension  $u_2$  est la force électromotrice dans le circuit 2.

D'après la loi de Faraday,  $u_2 = e_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$ , où  $\Phi_{12}$  est le flux du champ magnétique  $\vec{B}_1$  à travers le circuit 2.

□ **Comment quantifier le couplage entre les deux circuits ?**

Nous avons réalisé l'expérience en régime sinusoidal pour différentes fréquences et différentes distances  $d$ . Le rapport de la valeur efficace de  $u_2$  sur celle de  $i_1$ , courant dans le circuit 1, est tracé figure 21.5 en fonction de la fréquence  $f$  et pour différentes distances.

Nous constatons que, quelle que soit la distance  $d$  entre les deux bobines,  $U_2/I_1 = Kf$  où  $K$  est une constante qui diminue quand  $d$  augmente. Pour expliquer ce résultat expérimental, remarquons que le flux magnétique créé par la bobine 1 à travers la bobine 2 est proportionnel à la norme du champ magnétique  $\vec{B}_1$  et donc au courant  $i_1$ . On a ainsi  $\Phi_{12} = Mi_1$  et d'après la loi de Faraday :  $u_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$ . Dans le cas d'un courant  $i_1$  sinusoidal, on obtient la relation entre les valeurs efficaces :  $U_2 = 2\pi fMI_1$ , conformément aux résultats expérimentaux. La pente de  $U_2/I_1$  en fonction de  $f$  donne donc accès au coefficient  $M$ .



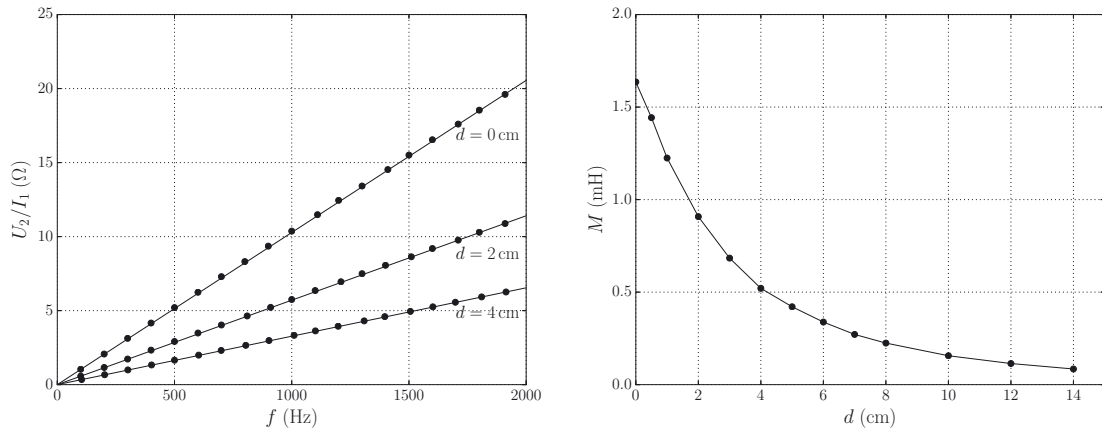


Figure 21.5. Évolution du rapport entre les grandeurs efficaces  $U_2$  et  $I_1$  en fonction de la fréquence et de la distance  $d$  (à gauche) et évolution du coefficient d'inductance mutuelle en fonction de la distance (à droite).

### Définition : Coefficient d'inductance mutuelle entre deux circuits

Soient deux circuits électriques proches l'un de l'autre, parcourus par des courants  $i_1$  et  $i_2$ . Le circuit 1 crée un champ magnétique  $\vec{B}_1$  proportionnel à  $i_1$  et le circuit 2 un champ  $\vec{B}_2$  proportionnel à  $i_2$ . On note :

- $\Phi_{12}$  le flux magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2.  $\Phi_{12}$  est proportionnel à  $B_1$  et donc à  $i_1$  :  $\Phi_{12} = M i_1$ .
- $\Phi_{21}$  le flux magnétique créé par le circuit 2 à travers le circuit 1.  $\Phi_{21}$  est proportionnel à  $B_2$  et donc à  $i_2$  :  $\Phi_{21} = M i_2$ .

$M$ , **coefficient d'inductance mutuelle** entre les deux circuits, s'exprime en henry (H).



- Dans l'expérience précédente, le circuit secondaire est ouvert :  $i_2 = 0$  et  $\Phi_{21} = 0$ .
- En fonction de l'orientation relative des circuits,  $M$  peut être positif ou négatif.
- On peut aussi écrire  $\Phi_{12} = M_{12} i_1$  et  $\Phi_{21} = M_{21} i_2$  avec  $M = M_{12} = M_{21}$ .

#### □ Comment évolue ce coefficient d'inductance mutuelle avec la distance ?

L'évolution du coefficient d'inductance mutuelle avec la distance  $d$  entre les deux bobines est représentée figure 21.5. Lorsqu'on augmente la distance  $d$ , le flux du champ magnétique  $\vec{B}_1$  à travers la bobine 2 diminue, ce qui se traduit par une diminution du coefficient d'inductance mutuelle.

## ■ 3 Auto-induction

#### □ Le champ magnétique propre créé par un circuit est-il lui-même responsable d'un phénomène d'induction dans ce circuit ?

Pour répondre à cette question, on reprend le montage expérimental de la figure 21.3 en observant la tension  $u_1$  aux bornes de la bobine 1 et le courant  $i_1$  (à partir de la tension aux bornes de  $R_1$ ).

On observe alors que la tension  $u_1$  est en avance de  $\pi/2$  par rapport au courant  $i_1$ . Le rapport entre la tension efficace  $U_1$  et le courant efficace  $I_1$  (impédance de la bobine) est représenté figure 21.6, en fonction de la fréquence  $f$ .

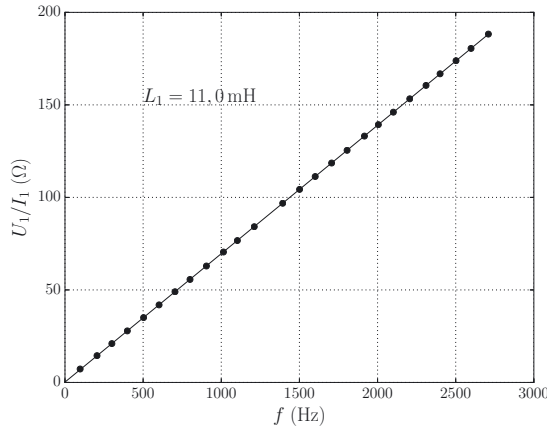


Figure 21.6. Impédance de la bobine et coefficient d'auto-inductance.

Le rapport est proportionnel à la fréquence :  $U_1/I_1 = K'f$ . La ressemblance avec la relation  $U_2/I_1 = Kf$  suggère la présence d'un phénomène d'induction dans la bobine 1.

#### Définition : Coefficient d'auto-inductance

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité  $i$  crée à travers lui-même un flux magnétique (flux propre) proportionnel à  $i$  :

$$\Phi_p = Li$$

L'orientation du circuit doit être la même que celle de  $i$ . Le coefficient  $L$  est appelé coefficient d'auto-inductance, ou inductance propre du circuit. Il s'exprime en henry (H).



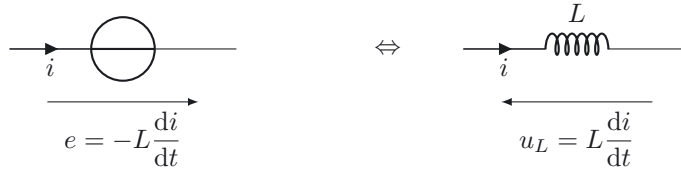
■  $L$  est positif et dépend uniquement de la géométrie du circuit.

Notons  $L_1$  le coefficient d'auto-inductance de la bobine 1 de notre expérience. La variation du flux propre dans la bobine 1 entraîne une force électromotrice d'induction dans la bobine, donnée par la loi de Faraday  $e_1 = -\frac{d\Phi_{1p}}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$ . Par ailleurs, la résistance interne de la bobine ( $2,8 \Omega$ ) étant négligeable devant son impédance,  $u_1 \approx -e_1$ . Pour un courant  $i_1$  sinusoïdal, il en découle une relation entre les grandeurs efficaces :  $U_1 = 2\pi f L_1 I_1$ , soit  $U_1/I_1 = 2\pi L_1 f$ , conformément aux résultats expérimentaux. La pente de  $U_1/I_1$  en fonction de  $f$  donne donc accès au coefficient  $L_1$ . Pour la bobine 1, nous obtenons ainsi  $L_1 = 11,0 \text{ mH}$ .

□ **La loi de Faraday permet-elle de retrouver la relation courant-tension d'une bobine ?**

Lorsque le courant est constant dans une bobine, le flux propre est également constant et la force électromotrice induite est nulle : une bobine se comporte comme un fil en régime stationnaire. Lorsque le courant dans la bobine varie, le flux propre varie également et la bobine est le siège

d'une force électromotrice induite  $e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$ . Dans cette relation  $e$  et  $i$  sont définis en convention générateur. La relation courant-tension dans une bobine s'écrit donc en convention récepteur :  $u_L = L\frac{di}{dt}$  comme l'indique la représentation ci-dessous.



□ **Comment s'applique la loi de Lenz ?**

L'augmentation du courant  $i_1$  dans la bobine 1 génère une force électromotrice qui doit, d'après la loi de Lenz, s'opposer à cette augmentation, c'est-à-dire être négative.

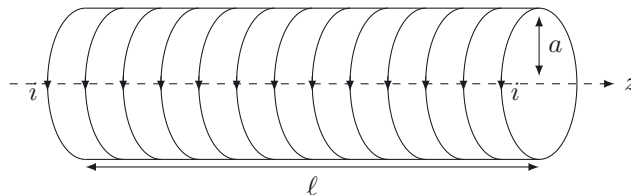


Dans tout circuit comportant une inductance propre, il est difficile d'imposer des variations brutales de courant (manifestation de la loi de Lenz).

□ **De quoi dépend l'inductance propre d'une bobine ?**

Nous avons déterminé expérimentalement l'inductance propre de la bobine du circuit primaire :  $L_1 = 11,0$  mH. Nous souhaitons à présent exprimer cette inductance propre en fonction des caractéristiques de la bobine.

On considère une bobine longue comportant  $N$  spires enroulées sur un cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $\ell$ . On suppose que  $\ell \gg a$  et que le champ magnétique au sein de la bobine est uniforme et s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u}_z$  où  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la perméabilité magnétique du vide.



Le flux du champ magnétique à travers une spire s'écrit :  $\Phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S}$  où  $\vec{S} = \pi a^2 \vec{u}_z$  d'après l'orientation du courant  $i$  sur les spires de la figure ci-dessus. On a alors  $\Phi_1 = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \pi a^2$  et le flux total à travers les  $N$  spires s'écrit  $\Phi_p = N\Phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 i$ . Sachant que  $\Phi_p = Li$ , on en déduit  $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$ .



L'inductance propre dépend des caractéristiques géométriques de la bobine ; elle est proportionnelle au nombre de spires au carré.

Pour augmenter significativement l'inductance propre d'une bobine sans augmenter le nombre de spires, on peut insérer au centre de la bobine un noyau de fer doux. On remplace alors dans l'expression ci-dessus  $\mu_0$  par  $\mu_0 \mu_r$  où  $\mu_r$  est perméabilité relative du fer doux.

□ **Transmet-on de l'énergie du circuit primaire au circuit secondaire ?**

En appliquant la loi des mailles au circuit de la bobine 1 de la figure 21.3 et en négligeant la résistance interne de la bobine, on aboutit à :  $u_e = u_1 + R_1 i_1$  avec  $u_1 = L \frac{di_1}{dt}$ . En multipliant cette équation par  $i_1$ , on obtient le bilan de puissance suivant :

$$u_e i_1 = R_1 i_1^2 + L i_1 \frac{di_1}{dt} = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i_1^2 \right)$$

Cette équation fait apparaître l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_1^2$$

La puissance fournie par le générateur est donc égale à la somme de la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance  $R_1$  et de la puissance stockée dans la bobine.

Dans le circuit de la bobine 2, aucune puissance n'est consommée car le courant est nul. Pour transférer de l'énergie entre le circuit primaire et le circuit secondaire, il est donc nécessaire de fermer le circuit secondaire.

## ■ 4 Circuits couplés

On reprend le montage précédent qu'on alimente en régime sinusoïdal, le circuit secondaire étant fermé par une résistance  $R_2$  comme présenté sur la figure 21.7.

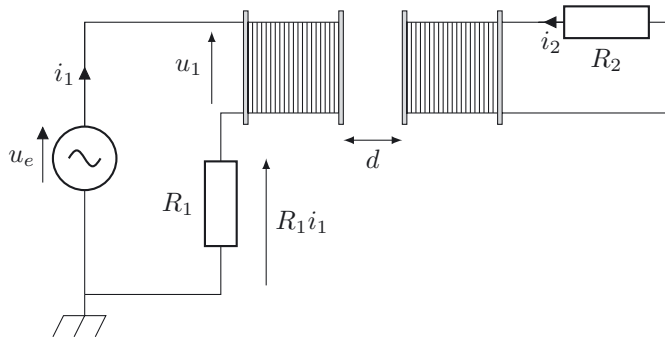


Figure 21.7. Dispositif expérimental permettant de mettre en évidence le couplage entre deux circuits.

□ **Comment s'applique la loi de Faraday ?**

Le flux magnétique total à travers le circuit primaire est la somme du flux propre  $\Phi_{1p}$  et du flux magnétique  $\Phi_{21}$  créé par la bobine 2 (circuit secondaire) dans la bobine 1. Il vient alors :

$$\Phi_1 = \Phi_{1p} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M i_2$$

D'après la loi de Faraday, la force électromotrice induite dans le circuit primaire s'écrit :

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

De la même façon, pour le circuit secondaire, le flux magnétique total à travers la bobine 2 est la somme du flux propre  $\Phi_{2p}$  créé par la bobine 2 et du flux  $\Phi_{12}$  créé par le circuit primaire dans la bobine 2. Le flux à travers la bobine 2 est alors :

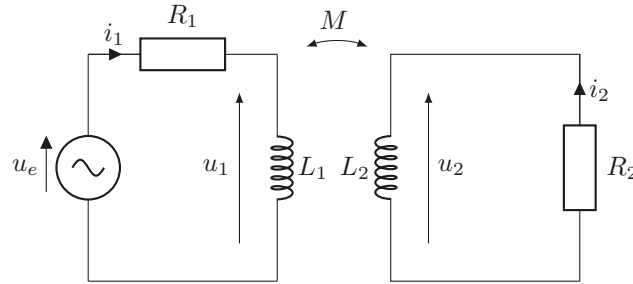
$$\Phi_2 = \Phi_{2p} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M i_1$$

La loi de Faraday s'écrit ainsi :

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

□ Quelles sont les équations électriques de ce circuit ?

On suppose que la résistance interne de chaque bobine est négligeable devant son impédance. Le schéma électrique du système complet est donc le suivant :



avec  $u_1 = -e_1$  et  $u_2 = -e_2$ .

La loi des mailles appliquée au circuit primaire puis au circuit secondaire conduisent aux équations suivantes :

$$(21.1) \quad u_e = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$(21.2) \quad R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

Nous obtenons ainsi un système de deux équations couplées vérifiées par  $i_1$  et  $i_2$ .

### Méthode 21.3 : Établir le système d'équations de deux circuits couplés

- Pour chaque circuit, distinguer le flux propre et le flux produit par un circuit extérieur.
- Utiliser les définitions des coefficients d'auto-inductance et d'inductance mutuelle pour exprimer ces flux en fonction des courants dans les circuits.
- Appliquer la loi de Faraday (attention à la convention générateur).
- Appliquer la loi des mailles pour obtenir le système d'équations couplées.

➔ Exercice (21.3)

□ Comment découpler ce système d'équations en régime sinusoïdal ?

On constate que ce système d'équations est linéaire. Si l'on considère un signal  $u_e$  sinusoïdal, les amplitudes et les impédances complexes peuvent être utilisées. En suivant la méthode introduite dans le chapitre 8, nous utilisons l'amplitude complexe  $\underline{U}_e$  de la tension d'entrée et les amplitudes complexes  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  des courants dans les deux circuits. Les équations 21.1 et 21.2 deviennent alors :

$$(21.3) \quad \underline{U}_e = R_1 \underline{I}_1 + jL_1 \omega \underline{I}_1 + jM \omega \underline{I}_2$$

$$(21.4) \quad R_2 \underline{I}_2 + jL_2 \omega \underline{I}_2 + jM \omega \underline{I}_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \underline{I}_2 = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{I}_1$$

En reportant la seconde équation dans la première, on peut exprimer l'amplitude complexe de la tension  $\underline{U}_e$  en fonction du courant  $\underline{I}_1$  et ainsi définir une impédance équivalente  $\underline{Z}_{eq}$  pour l'ensemble du circuit vu par la source de tension :

$$\underline{U}_e = \left( R_1 + jL_1\omega - \frac{(jM\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega} \right) \underline{I}_1 \text{ soit } \underline{Z}_{eq} = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega}$$



Lorsque le couplage diminue,  $M$  diminue et l'impédance équivalente tend vers l'impédance du circuit primaire.

□ **De l'énergie est-elle transférée sans « contact » au circuit secondaire ?**

Les équations 21.1 et 21.2 sont multipliées respectivement par  $i_1$  et  $i_2$  pour obtenir un bilan de puissance instantanée :

$$u_e i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt}$$

$$0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

En sommant membre à membre ces deux équations, on obtient :

$$u_e i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

Cette équation exprime un bilan de puissance instantanée :

- $u_e i_1$  est la puissance instantanée fournie par le générateur.
- $R_1 i_1^2$  et  $R_2 i_2^2$  sont les puissances dissipées par effet Joule dans les circuits primaire et secondaire.
- $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$  est la puissance magnétique reçue par le circuit. On déduit de cette expression l'énergie magnétique stockée dans les circuits couplés :

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

En considérant une tension  $u_e(t)$  sinusoïdale de période  $T$  et en intégrant le bilan de puissance sur une période  $T$  on obtient le bilan d'énergie suivant :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_e i_1 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} R_1 i_1^2 dt + \int_{t_0}^{t_0+T} R_2 i_2^2 dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) dt$$

$i_1(t)$  et  $i_2(t)$  étant périodiques de période  $T$ , la dernière intégrale est nulle. Il vient donc :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} u_e i_1 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} R_1 i_1^2 dt + \int_{t_0}^{t_0+T} R_2 i_2^2 dt$$

L'énergie fournie par le générateur sur une période est donc dissipée par effet Joule dans la résistance  $R_1$  et dans la résistance  $R_2$ . La part de l'énergie fournie par le générateur qui n'est pas dissipée dans  $R_1$  est donc transférée au circuit secondaire où elle est consommée dans  $R_2$  : il y a bien transfert d'énergie sans contact entre le circuit primaire et le circuit secondaire.

**Transfert d'énergie sans contact**

Le circuit précédent a mis en évidence le transfert énergétique sans contact entre une source de tension et la résistance  $R_2$  du circuit secondaire. La résistance  $R_2$  modélise la charge du circuit secondaire comme par exemple :

- le fond d'une casserole posée sur **une plaque à induction** ;
- l'accumulateur d'un téléphone portable posé sur **une base de recharge sans contact** ;
- un ensemble de dispositifs électriques placé au secondaire d'**un transformateur** qui joue le rôle d'abaisseur de tension entre la tension de transport de l'électricité et la tension d'utilisation domestique.

## Interro de cours

1. Soumis à un flux magnétique  $\Phi(t)$  dépendant du temps, un circuit est le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique qui se traduit par une force électromotrice induite  $e(t)$  donnée par la loi :

(a)  $e(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$  ;

(b)  $e(t) = -\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2}$  ;

(c)  $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$ .

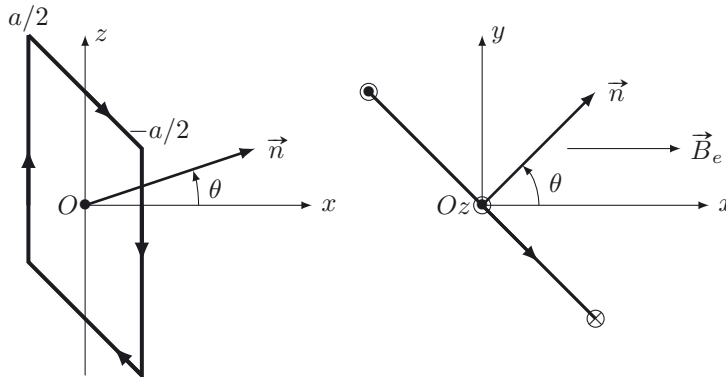
2. Un circuit électrique d'inductance propre  $L$  parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  est le siège d'un phénomène d'auto-induction qui se traduit par une force électromotrice induite  $e(t)$  :

(a)  $e(t) = L\frac{di(t)}{dt}$  ;

(b)  $e(t) = -\frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)}{dt}$  ;

(c)  $e(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$ .

Pour les questions 3. et 4., on considère une spire carrée de côté  $a$ , plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme et dépendant du temps  $\vec{B}_e(t) = B_e(t)\vec{u}_x = B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\vec{u}_x$  avec  $\tau$  constante positive.



La position angulaire de la spire est repérée par l'angle  $\theta$  que fait le vecteur unitaire  $\vec{n}$  (normal à la spire) avec l'axe  $Ox$ .

3. Comment s'écrit le flux  $\Phi(t)$  de  $\vec{B}_e(t)$  à travers la spire orientée ?

(a)  $\Phi(t) = a^2 B_e(t)$ .

(b)  $\Phi(t) = a^2 B_e(t) \cos(\theta)$ .

(c)  $\Phi(t) = a^2 B_e(t) \sin(\theta)$ .



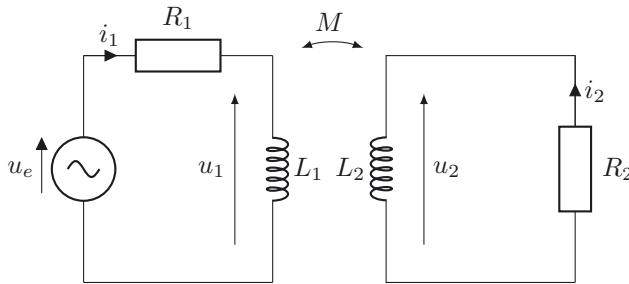
4. La spire possède une résistance  $R$  et le phénomène d'auto-induction est négligé. Dans le cas  $\theta = 0$ , la spire est parcourue par un courant induit d'intensité :

- (a)  $i(t) = \frac{B_0 a^2}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) > 0$  conformément à la loi de Lenz ;
- (b)  $i(t) = -\frac{B_0 a^2}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) < 0$  conformément à la loi de Lenz ;
- (c)  $i(t) = -\frac{B_0 a^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) < 0$  conformément à la loi de Lenz.

5. Une bobine longue d'axe  $Ox$  constituée de  $N = 500$  spires enroulées sur un cylindre de rayon  $a = 2,0$  cm et de longueur  $\ell = 20$  cm est parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$ . Le champ magnétique propre au sein de la bobine s'écrit  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u}_x$  avec  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H  $\cdot$  m $^{-1}$ . L'inductance propre  $L$  de la bobine est :

- (a)  $L = \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi a^2 = 3,9$   $\mu$ H ;
- (b)  $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 = 2,0$  mH ;
- (c)  $L = \mu_0 N^2 \pi a^2 = 0,39$  mH.

Deux circuits électriques sont couplés par mutuelle induction (questions 6. et 7.).



Le circuit primaire (à gauche sur la figure) est constitué d'un générateur de f.e.m  $u_e(t)$ , d'une résistance  $R_1$  et d'une bobine d'inductance propre  $L_1$ , le circuit secondaire (à droite) d'une bobine d'inductance propre  $L_2$  et d'une résistance  $R_2$ . Le coefficient d'inductance mutuelle est noté  $M$ .

6. Le bilan de puissance peut s'écrire :

- (a)  $u_e i_1 + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) = 0$  ;
- (b)  $u_e i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$  ;
- (c)  $u_e i_1 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ .

7. En régime sinusoïdal forcé, le système d'équations liant  $\underline{U}_e$ ,  $\underline{I}_1$  et  $\underline{I}_2$  s'écrit :

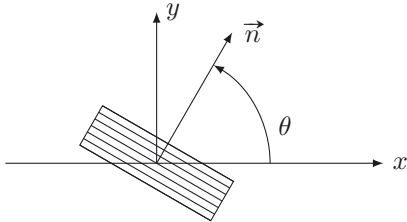
- (a)  $\underline{U}_e + (R_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 = 0$  et  $(R_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 = 0$  ;
- (b)  $\underline{U}_e = (R_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 = 0$  et  $(R_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 = jM\omega \underline{I}_1$  ;
- (c)  $\underline{U}_e = (R_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2$  et  $(R_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 + jM\omega \underline{I}_1 = 0$ .

## Exercices

### Exercice 21.1 Fabricando fit faber

➔ Méthode (21.1)

Les bornes d'une bobine plate sont reliées à l'entrée d'un oscilloscope permettant d'observer la f.e.m induite dans la bobine lorsque celle-ci est soumise à un champ magnétique extérieur dépendant du temps.



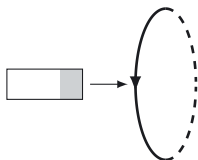
La bobine est constituée de  $N = 50$  spires circulaires de rayon  $R = 5,0$  cm. Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  est dirigé suivant l'axe de la bobine. L'angle  $\theta$  que fait  $\vec{n}$  avec l'axe  $Ox$  vaut  $60^\circ$ .

1. Le champ extérieur imposé est  $\vec{B}_1(t) = B_0 \frac{t}{\tau} \vec{u}_x$  entre  $t = 0$  et  $t = \tau$ , puis  $\vec{B}_1(t) = B_0 \vec{u}_x$  pour  $t > \tau$ , avec  $B_0 = 50$  mT et  $\tau = 10$  ms.
  - a. Exprimer le flux magnétique à travers le cadre en précisant l'orientation choisie.
  - b. Exprimer la f.e.m induite  $e_1(t)$  apparaissant dans la bobine. On distinguera les phases :  $0 \leq t \leq \tau$  et  $t > \tau$ . Tracer  $e_1(t)$  en fonction du temps.
2. Le champ extérieur imposé est maintenant  $\vec{B}_2(t) = B_0 \exp(-t/\tau) \vec{u}_y$  où  $\tau$  et  $B_0$  conservent les valeurs précédentes.
  - a. Calculer le flux magnétique à travers le cadre en conservant l'orientation choisie dans le premier cas.
  - b. Exprimer la f.e.m induite  $e_2(t)$  apparaissant dans la bobine et tracer  $e_2(t)$  en fonction du temps. Quelle est sa valeur maximale ?

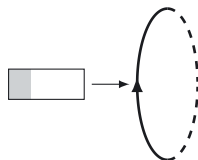
### Exercice 21.2 Flux et reflux

➔ Méthode (21.2)

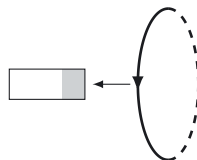
En approchant ou en éloignant un aimant droit d'une spire conductrice fermée, nous notons l'apparition d'un courant induit dans la spire. Dans la représentation ci-dessous, le pôle nord de l'aimant est grisé.



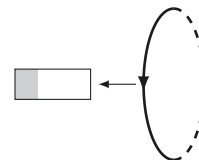
Cas (a)



Cas (b)



Cas (c)



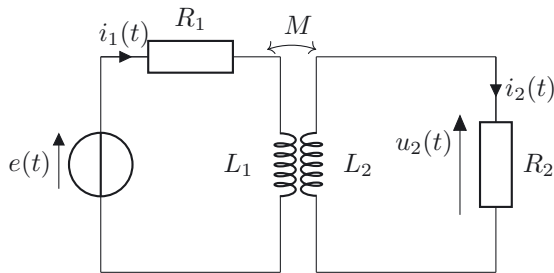
Cas (d)

1. Expliquer qualitativement l'apparition d'un courant induit dans la spire lors d'un déplacement de l'aimant. La vitesse de déplacement de l'aimant importe-t-elle dans ce phénomène ?
2. Prévoir dans chaque cas le signe de l'intensité du courant induit circulant dans la spire orientée.

### Exercice 21.3 Transformateur

➔ Méthode (21.3)

Un transformateur réalise le couplage entre deux circuits électriques par mutuelle induction.



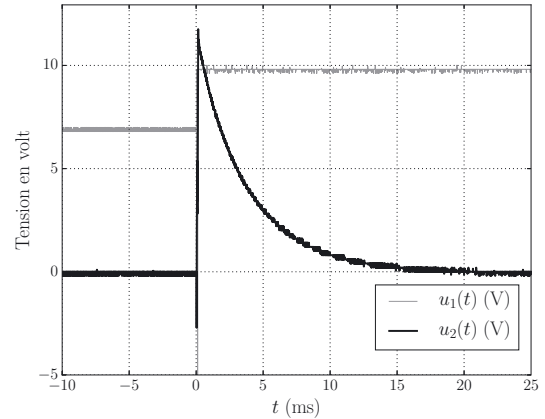
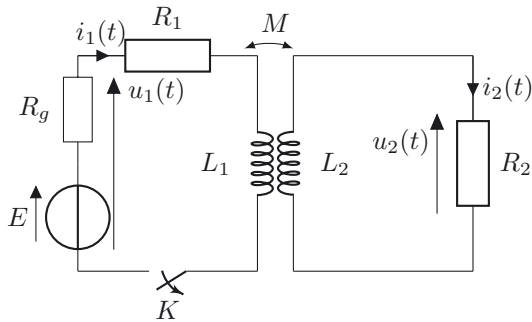
Il est constitué d'une bobine (1) d'inductance propre  $L_1$  située dans le circuit primaire (à gauche) et d'une bobine (2) d'inductance propre  $L_2$  située dans le circuit secondaire (à droite). L'inductance mutuelle entre les deux bobines est idéalement  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  et leurs résistances sont négligées.

Le générateur idéal situé dans le circuit primaire délivre une tension  $e(t) = E \cos(\omega t)$ .

1. Exprimer le flux magnétique  $\Phi_1(t)$  à travers la bobine (1) en fonction de  $L_1$ ,  $M$  et des intensités  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  puis le flux magnétique  $\Phi_2(t)$  à travers la bobine (2) en fonction de  $L_2$ ,  $M$ ,  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
2. Le phénomène d'induction électromagnétique dans les bobines se traduit par l'apparition de deux f.e.m  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  respectivement dans les circuits primaire et secondaire. Exprimer  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ .
3. Dessiner alors les deux circuits électriques équivalents.
4. En déduire deux équations différentielles couplées vérifiées par  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .
5. Nous nous plaçons en régime forcé.
  - a. Écrire les équations en notation complexe.
  - b. Le circuit secondaire est ouvert ( $R_2$  infini) et nous supposons que la résistance  $R_1$  est négligeable. Exprimer alors le rapport des tensions complexes  $\frac{u_2(t)}{e(t)}$ . L'inductance propre  $L_i$  étant proportionnelle au carré du nombre de spires  $N_i$  constituant la bobine ( $i$ ), en déduire le rapport des tensions en fonction de  $N_1$  et  $N_2$ . On suppose que les surfaces des spires des deux bobinages sont identiques.
  - c. Citer une application du transformateur dans la vie courante.

### Exercice 21.4 Transformateur 2 : l'âge de l'extinction

Sam utilise le transformateur présenté dans l'exercice 21.3 qu'il alimente par un générateur de résistance de sortie  $R_g$  délivrant une tension continue  $e = E$  (voir schéma ci-dessous). Déçu de ne rien observer dans le circuit secondaire, il ouvre l'interrupteur  $K$  à un instant  $t = 0$  et observe alors la furtive apparition d'une tension  $u_2(t)$  aux bornes de la résistance  $R_2$  du circuit secondaire.

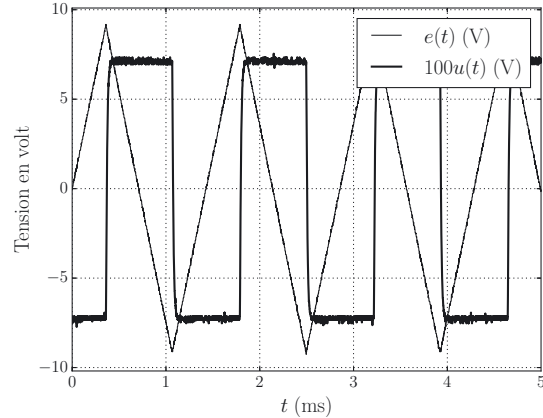
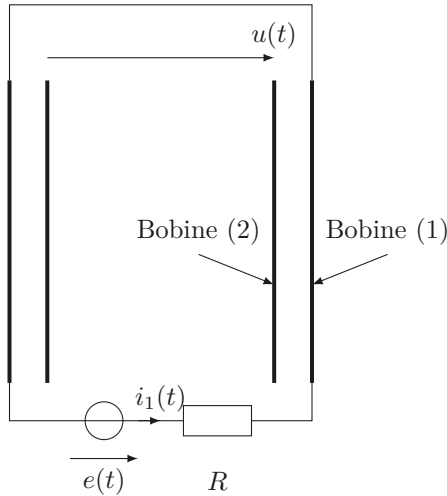


Les résistances utilisées sont  $R_1 = R_2 = 100 \Omega$ .

1. Déterminer les expressions des intensités théoriques  $i_1$  et  $i_2$  en régime permanent quand l'interrupteur  $K$  est fermé. Est-il pertinent de faire fonctionner le transformateur en régime permanent ?
2. De la même manière, déterminer les intensités théoriques  $i_1$  et  $i_2$  en régime permanent quand l'interrupteur  $K$  est ouvert.
3. Relever les valeurs de  $u_1$  observées pour  $K$  ouvert et  $K$  fermé. En déduire les valeurs de  $E$  et  $R_g$ .
4. Justifier la continuité du flux magnétique  $\Phi_2(t)$  à travers la bobine (2) à l'ouverture de  $K$  et en déduire l'expression de l'intensité  $i_2(0^+)$  juste après l'ouverture de  $K$  en fonction de  $M$ ,  $L_2$  et de l'intensité  $i_1(0^-)$  dans le circuit primaire juste avant l'ouverture de  $K$ .
5. Écrire puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $i_2(t)$ . Utiliser le tracé expérimental de  $u_2(t)$  pour proposer une estimation de  $L_2$ ,  $M$  et  $L_1$ . On admettra que  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ .

### Exercice 21.5 La bonne mutuelle

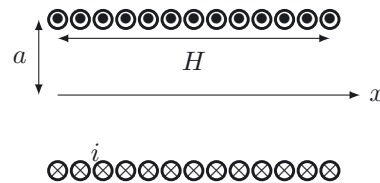
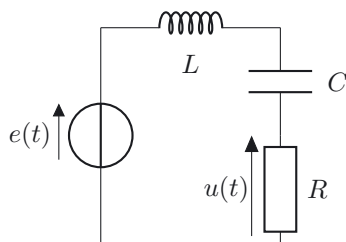
Étudiante en MPSI, Sophie recherche une bonne mutuelle. À cette fin, elle place une bobine (2) dans une bobine (1) de même axe, même longueur et de rayon légèrement supérieur. La bobine (1) possède une inductance propre  $L_1 = 0,53 \text{ mH}$  et sa résistance est négligeable. Elle est reliée à un générateur de tension de f.e.m  $e(t)$  triangulaire associé en série à une résistance  $R = 500 \Omega$  formant ainsi le circuit primaire. Sophie utilise un oscilloscope pour suivre sur une voie la tension  $u(t)$  aux bornes de la bobine (2) et sur une autre voie la tension aux bornes du générateur. Elle récupère alors les données de l'oscilloscope et utilise Python pour tracer les tensions  $e(t)$  et  $100u(t)$ .



- Déduire de l'oscillogramme la fréquence  $f$  du signal d'entrée.
- Dessiner le schéma électrique équivalent au circuit primaire. La bobine (2) étant branchée sur l'une des voies de l'oscilloscope, nous admettrons qu'elle constitue un circuit ouvert.
- La tension  $u(t)$  peut s'écrire  $u(t) = -M \frac{di_1}{dt}$ . Commenter cette expression. Pourquoi l'inductance propre de la bobine du secondaire n'intervient-elle pas ?
- Comparer les valeurs de  $R$  et de  $2\pi f L_1$  et en déduire que  $u(t)$  peut s'écrire de façon simplifiée sous la forme  $u(t) = -\frac{M}{R} \frac{de}{dt}(t)$ . Expliquer alors la forme du signal observé à l'oscilloscope.
- En remarquant que la tension  $u(t)$  est constante sur une demi-période, montrer que la mutuelle inductance  $M$  entre les circuits peut s'écrire  $M = \frac{R U_{cc}}{4f E_{cc}}$  où  $U_{cc}$  et  $E_{cc}$  sont respectivement les tensions crête à crête du signal de sortie et du signal d'entrée. Calculer  $M$ .

### Exercice 21.6 Les erreurs de Sophie

Sophie souhaite proposer une valeur théorique  $L_{th}$  de l'inductance propre d'une bobine à l'aide d'un modèle simple et confronter la valeur obtenue à la valeur  $L_{ex}$  mesurée.



La bobine possède  $N = 600$  spires, sa longueur est  $H = 13$  cm et son rayon  $a = 2,5$  cm. On rappelle que la perméabilité magnétique du vide est  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

- Dans un premier temps, Sophie utilise le modèle de la bobine très longue pour calculer son inductance propre théorique et trouve  $L_{th} = \mu_0 N \pi a^2$ , soit numériquement  $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ .

- a. L'ordre de grandeur de l'inductance propre obtenue par Sophie vous paraît-il acceptable?
  - b. Que penser de la dépendance en  $N$  trouvée par Sophie?
  - c. Vérifier enfin la dimension de l'expression trouvée par Sophie.
  - d. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par une bobine infinie d'axe  $Ox$ , comportant  $n$  spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité  $i$  :  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_x$  à l'intérieur et  $\vec{B} = \vec{0}$  à l'extérieur de la bobine. Trouver l'expression de  $L_{th}$  en considérant la bobine très longue. Calculer  $L_{th}$ .
2. Dans un second temps, Sophie associe la bobine à une résistance  $R = 100 \Omega$  et un condensateur de capacité  $C = 1,1 \mu\text{F}$  selon le montage présenté sur la figure ci-dessus (à gauche). Le générateur délivre une tension  $e(t) = E_0 \cos(2\pi f t)$  et Sophie observe une résonance d'intensité pour une fréquence  $f = f_0 = 1,85 \text{ kHz}$ .
- a. Sophie déduit alors la valeur expérimentale  $L_{ex} = 6,8 \text{ H}$ . Que pensez-vous de l'ordre de grandeur obtenu? Rappeler le lien entre  $f_0$ ,  $L$  et  $C$  puis calculer  $L_{ex}$ .
  - b. Comparer les valeurs  $L_{ex}$  et  $L_{th}$ .

### Exercice 21.7 Alarme fatale

Un portique de sécurité de magasin est constitué de deux bobines placées face à face. Une des bobines (l'émetteur) est alimentée par un générateur de courant alternatif à la fréquence de  $1,0 \text{ MHz}$ . On mesure la tension aux bornes de la deuxième bobine (le récepteur). L'antivol, attaché aux objets du magasin, est constitué d'un petit bobinage en cuivre en série avec un condensateur.

Le modèle est le suivant :

- l'émetteur est un enroulement de  $N = 50$  spires circulaires (constituant une « bobine plate ») de rayon  $a = 25 \text{ cm}$ . Il est parcouru par un courant d'intensité  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ , où  $I_0 = 1,0 \text{ A}$ .
- Le récepteur est identique à l'émetteur, en face de celui-ci, et de même axe. Il n'est alimenté par aucun courant. La distance entre le récepteur et l'émetteur est  $D = 80 \text{ cm}$ .
- L'antivol sera modélisé par un enroulement de  $n = 10$  spires circulaires de rayon  $b = 1,0 \text{ cm}$ , de coefficient d'auto-induction  $L = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ H}$ , et de résistance  $R = 1,0 \Omega$  en série avec un condensateur de capacité  $C$ . L'axe de cet enroulement est confondu avec l'axe des deux bobines et l'étiquette se trouve à égale distance de l'émetteur et du récepteur.

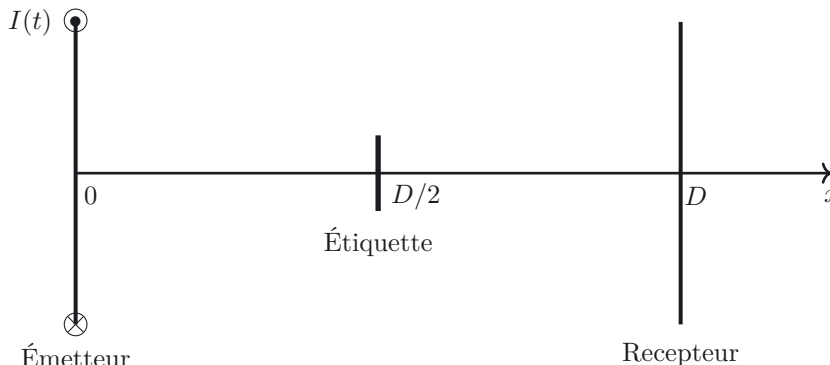


Figure 21.8. Modélisation du système de sécurité.

L'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice sur son axe, à mi-distance de l'émetteur et du récepteur s'écrit :  $\vec{B}_e(t) = \alpha I(t) \vec{u}_x$  avec  $\alpha = \frac{\mu_0 N a^2}{2 \left( a^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{3/2}}$ .

1. Expliquer qualitativement pourquoi il apparaît une force électromotrice  $e$  dans l'étiquette. La déterminer en tenant compte de la petite dimension de l'étiquette. Calculer sa valeur efficace.
2. Dessiner le circuit électrique équivalent du circuit de l'étiquette en tenant compte de la f.e.m  $e$ .
3. On se place en régime forcé. En utilisant la notation complexe, exprimer l'intensité complexe du courant dans le circuit de l'antivol. Quel phénomène se produit lorsque  $LC\omega^2 = 1$  ? Préciser la valeur numérique de  $C$  pour que cette condition soit vérifiée.
4. Expliquer pourquoi, lorsque l'étiquette antivol traverse les portiques, le champ magnétique au niveau du portique récepteur diminue, et par conséquent la tension. C'est cette chute de tension qui déclenche l'alarme.

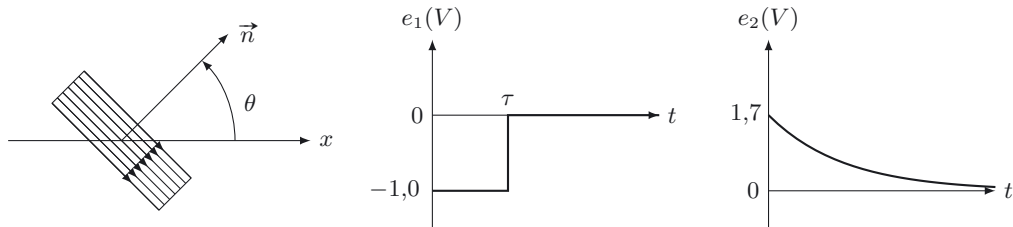
# Corrections

## Interro de cours

1. Réponse (c) : il s'agit de la loi de Faraday.
2. Réponse (c) : le flux propre à travers le circuit s'écrit  $\Phi_p = Li(t)$ . La loi de Faraday donne :
 
$$e(t) = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt}.$$
3. Réponse (b) :  $\Phi(t) = \vec{B}_e \cdot a^2 \vec{n} = B_e(t)a^2 \vec{u}_x \cdot \vec{n} = B_e(t)a^2 \cos(\theta)$ .
4. Réponse (a) : la loi de Faraday donne  $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{a^2}{\tau} B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  puis la loi des mailles dans le circuit :  $e(t) = Ri(t)$ . Le signe de  $i(t)$  était prévu par la loi de Lenz :  $i(t)$  s'oppose par ses effets à la diminution du flux magnétique à travers le circuit.
5. Réponse (b) : le flux de  $\vec{B}$  à travers une spire est  $\varphi = B\pi a^2$ . Le flux propre est alors  $\Phi_p = N\varphi = Li$ .
6. Réponse (b) : écrire la loi des mailles dans chaque circuit, multiplier l'équation du primaire par  $i_1$ , celle du secondaire par  $i_2$  puis combiner les deux équations. La puissance  $u_e i_1$  fournie par le générateur sert à compenser la puissance perdue  $R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$  dans les résistances et à stocker l'énergie magnétique  $(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2)$ .
7. Réponse (c) : on reprend le système d'équations obtenu en utilisant la loi des mailles. En notation complexe :  $\frac{dx}{dt} = j\omega x$ .

## Exercice 21.1

1. a. On choisit l'orientation ci-dessous.  $\Phi_1 = N\pi R^2 \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = N\pi R^2 B_1(t) \cos(\theta)$ .



- b. D'après la loi de Faraday,  $e_1(t) = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ . On a donc :
- pour  $t \in [0, \tau]$ ,  $e_1(t) = -N\pi R^2 \frac{B_0}{\tau} \cos(\theta) = -1,0 \text{ V}$  ;
  - pour  $t > \tau$ ,  $e_1(t) = 0$ .
- Le graphe est tracé ci-dessus.
2. a.  $\Phi_2 = N\pi R^2 B_0 \exp(-t/\tau) \sin(\theta)$ .
- b. D'après la loi de Faraday,  $e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = N\pi R^2 \frac{B_0}{\tau} \exp(-t/\tau) \sin(\theta)$ . Le tracé de  $e_2(t)$  est réalisé ci-dessus.  $e_{2,\max} = N\pi R^2 \frac{B_0}{\tau} \sin(\theta) = 1,7 \text{ V}$ .

## Exercice 21.2

1. Lorsque l'aimant se déplace, le champ magnétique ressenti au niveau de la spire évolue avec le temps et le flux  $\Phi$  de ce champ magnétique à travers la surface de la spire aussi. D'après la loi de Faraday, si



le flux varie temporellement, il apparaît dans le circuit une f.e.m induite  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  et le circuit étant fermé, un courant induit  $i(t)$ .

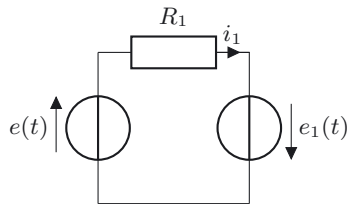
Le flux varie d'autant plus rapidement avec le temps que la vitesse de déplacement de l'aimant est grande. Il en résulte une modification de la valeur de la f.e.m et du courant induit, qui sera en valeur absolue d'autant plus grand que la vitesse de déplacement de l'aimant sera importante.

- D'après la loi de Lenz, le courant induit doit être tel que le champ magnétique propre créé par ce courant tend à s'opposer à la variation du flux magnétique externe. On en déduit donc, en prenant garde aux orientations choisies, que dans le cas (a),  $i < 0$ , dans le cas (b),  $i < 0$ , dans le cas (c),  $i > 0$ , dans le cas (d),  $i < 0$ .

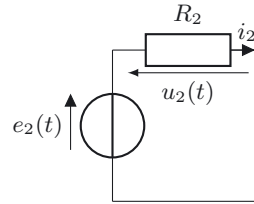
**Exercice 21.3**

- $\Phi_1(t) = L_1 i_1(t) + M i_2(t)$  et  $\Phi_2(t) = L_2 i_2(t) + M i_1(t)$ .
- D'après la loi de Faraday :  $e_1(t) = -\frac{d\Phi_1(t)}{dt} = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$ .  
De même :  $e_2(t) = -\frac{d\Phi_2(t)}{dt} = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt}$ .
- Les circuit équivalents sont alors les suivants :

Pour le circuit primaire :



Pour le circuit secondaire :



- Dans le primaire, l'application de la loi des mailles conduit à  $e(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$  et dans le secondaire à  $0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$ .
- En notation complexe, il vient :  $\underline{e}(t) = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1(t) + jM\omega\underline{i}_2(t)$  et  $0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{i}_2(t) + jM\omega\underline{i}_1(t)$ .
  - Lorsque le circuit secondaire est ouvert, la deuxième équation ne peut pas s'écrire ainsi. Nous aurons donc  $i_2(t) = 0$ , soit  $i_1(t) = \frac{\underline{e}(t)}{jL_1\omega}$  et  $\underline{e}_2(t) = \underline{u}_2(t) = -Mj\omega\underline{i}_1(t) = -\frac{M}{L_1}\underline{e}(t)$ . On aboutit donc à  $\frac{\underline{u}_2(t)}{\underline{e}(t)} = -\frac{M}{L_1} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{N_2}{N_1}$ .
  - Transformateur haute tension, transformateur pour lampe basse tension, ou appareil basse tension...

**Exercice 21.4**

- D'après les calculs menés dans l'exercice précédent,  $e(t) = (R_g + R_1)i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$  et dans le secondaire  $0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$ . En régime permanent, nous avons donc  $E = (R_g + R_1)i_1$  et  $i_2 = 0$  : comme il n'y a pas variation de champ magnétique induit par le primaire dans le secondaire, il n'y a pas de phénomène d'induction et donc pas de terme de source dans le secondaire.
- Lorsque  $K$  est ouvert,  $i_1 = 0$  et  $i_2 = 0$  en régime permanent.
- Pour  $K$  fermé,  $u_1 = 7,2 \text{ V} = \frac{R_1}{R_1 + R_g} E$ , pour  $K$  ouvert,  $u_1 = 10 \text{ V} = E$ . Nous pouvons donc en déduire que  $E = 10 \text{ V}$  et  $\frac{R_1 + R_g}{R_1} = \frac{10}{7,2}$ , soit  $R_g = 39 \Omega$ .

4.  $\Phi_2(t)$  est nécessairement continu, car une discontinuité de  $\Phi_2(t)$  conduirait à une f.e.m  $e_2(t)$  infinie.  $\Phi_2(0^-) = Mi_1(0^-) = \Phi_2(0^+) = L_2i_2(0^+)$ , soit  $i_2(0^+) = \frac{M}{L_2}i_1(0^-)$ .

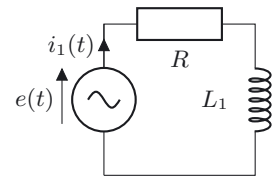
5. Pour  $t > 0$ , l'équation satisfaite par  $i_2(t)$  est celle de l'intensité dans un simple circuit  $RL$ , l'intensité du primaire étant nulle (on remarque que  $u_1$  bascule quasi-instantanément  $t = 0$ ), il n'y a plus de couplage par mutuelle. On a donc  $L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + R_2i_2(t) = 0$ .

Cette équation se résout en  $i_2(t) = i_2(0^+) \exp(-t/\tau_2)$  avec  $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$  et  $i_2(0^+) = \frac{M}{L_2} \frac{E}{R_1 + R_g}$ . Nous avons  $u_{2,\max} = \frac{M}{L_2} \frac{R_2E}{R_1 + R_g} = 11,7\text{V}$  et pour  $t = \tau_2$ ,  $u_2(\tau_2) = u_{2,\max}/e$ , soit par lecture graphique,  $\tau_2 = 3,3\text{ms}$ , d'où  $L_2 = 0,33\text{H}$  et  $M = 0,54\text{H}$ . Nous en déduisons donc  $L_1 = 0,87\text{H}$ .

### Exercice 21.5

1. On détermine d'après l'oscillogramme la période utilisée par Sophie :  $T = 1,4\text{ms}$ . La fréquence est donc  $f = 7,1 \cdot 10^2\text{Hz}$ .

2. La bobine (2) étant un circuit ouvert, il n'y a pas de courant la parcourant et pour le circuit primaire, tout se passe comme si il n'y avait pas de circuit secondaire. Le schéma électrique équivalent au circuit primaire est représenté ci-contre :



3. Le flux  $\Phi_2(t)$  à travers le secondaire s'écrit de façon générale  $\Phi_2 = L_2i_2 + Mi_1$ . La bobine (2) étant en circuit ouvert,  $i_2 = 0$ , soit  $\Phi_2 = Mi_1$  et par suite,  $u(t) = e_2(t) = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$  : l'inductance  $L_2$  n'intervient pas dans cette expression car le courant  $i_2$  est nul.

4.  $R = 500\Omega$  et  $2\pi fL_1 = 2,4\Omega$ . Nous voyons donc qu'à la fréquence de travail, l'influence de l'inductance  $L_1$  dans le circuit primaire est négligeable ; on peut donc écrire  $i_1(t) \approx \frac{e(t)}{R}$ . Il vient par conséquent :

$u(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} \approx -\frac{M}{R} \frac{de(t)}{dt}$ . Le circuit secondaire réalise donc une dérivation de la tension d'entrée, ce qui est bien vérifié sur l'oscillogramme, puisque la dérivée d'un signal triangle est un signal créneau.

5. Sur une demi-période,  $u = u_{\max} = \frac{M}{R} \frac{\Delta e}{T/2} = 2f \frac{M}{R} E_{cc} = \frac{U_{cc}}{2}$ , d'où  $M = \frac{RU_{cc}}{4fE_{cc}} = 1,4\text{mH}$ .

### Exercice 21.6

1. a. L'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine est quelques millihenry, voir dizaines de millihenry. La valeur trouvée par Sophie nous paraît donc beaucoup trop faible.

b. L'inductance propre d'un circuit possédant  $N$  spires est proportionnelle à  $N^2$ . La dépendance en  $N$  donnée par Sophie n'est donc pas bonne.

c. L'unité de  $\mu_0$  étant le  $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ , l'expression trouvée par Sophie est homogène à des  $\text{H} \cdot \text{m}$ , et non à des  $\text{H}$  comme elle devrait l'être. Sophie a donc commis beaucoup d'erreurs !

d. On calcule le flux propre du champ magnétique à travers les  $N$  spires de la bobine :

$$\Phi_p = N\Phi_{\text{spire}} = N\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{H} i = L_{th} i, \text{ soit } L_{th} = \mu_0 \frac{N^2}{H} \pi a^2 = 6,8\text{mH}.$$

2. a. L'ordre de grandeur obtenue par Sophie est cette fois-ci beaucoup trop grand ! Sophie s'est encore trompée ! On doit avoir  $f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC}$ , soit  $L_{ex} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C} = 6,7\text{mH}$ .

b. Les deux valeurs sont très proches, ce qui veut dire que le modèle de la bobine très longue est pertinent dans ce cas.

**Exercice 21.7**

1. Le circuit émetteur est parcouru par un courant électrique dépendant du temps, le champ magnétique perçu par l'antivol dépendra donc aussi du temps, il y aura une variation temporelle du flux magnétique  $\Phi$  à travers le circuit de l'antivol et d'après la loi de Faraday, apparition d'une f.e.m  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  dans ce circuit.

Comme l'étiquette est de petite dimension, on peut considérer que le champ magnétique  $\vec{B}_e(t)$  est quasiment uniforme au niveau de cette étiquette, et il est de plus parallèle à la normale  $\vec{n}$  aux spires de l'enroulement. Il vient donc  $\Phi(t) = n\pi b^2 \frac{\mu_0 N I_0 \cos(\omega t) a^2}{2 \left(a^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{3/2}} = n\pi b^2 \alpha I_0 \cos(\omega t)$

$$e(t) = \omega n \pi b^2 \frac{\mu_0 N I_0 \sin(\omega t) a^2}{2 \left(a^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{3/2}} = n \pi b^2 \omega \alpha I_0 \sin(\omega t).$$

La valeur efficace de cette f.e.m est  $E_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega n \pi b^2 \frac{\mu_0 N I_0 a^2}{2 \left(a^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{3/2}}$ , soit  $E_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} n \pi b^2 \omega \alpha I_0$ .

L'application numérique conduit à  $E_{\text{eff}} = 0,26 \text{ V}$ .

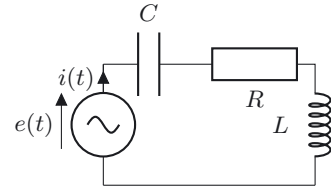
2. Le schéma équivalent est représenté ci-dessus.
3. L'impédance complexe du circuit est  $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$ . On pose de plus  $e(t) = \text{Im}(\underline{e}(t))$  avec

$$\underline{e}(t) = \omega n \pi b^2 \frac{\mu_0 N I_0 a^2}{2 \left(a^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{3/2}} \exp(j\omega t) = \sqrt{2} E_{\text{eff}} \exp(j\omega t), \text{ et } i(t) = \text{Im}(\underline{i}(t)). \text{ On obtient donc :}$$

$$\underline{i}(t) = \frac{\sqrt{2} E_{\text{eff}}}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \exp(j\omega t). \text{ La valeur efficace de cette intensité est } I_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Lorsque  $LC\omega^2 = 1$ , on observe un phénomène de résonance d'intensité dans le circuit de l'antivol. Ceci correspond à  $C = 5,1 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ .

4. Le courant apparaissant dans l'étiquette est source d'un champ magnétique propre, qui va tendre à s'opposer au champ magnétique créé par l'émetteur (loi de Lenz). Le champ magnétique ressenti au niveau du portillon sera donc plus faible, et la f.e.m induite au niveau du portillon diminuera aussi.





# Circuit mobile dans un champ stationnaire

## L'essentiel du cours

### Contexte

Quels dispositifs convertissent de l'énergie mécanique en énergie électrique ou vice versa ?

Dans le chapitre 21, nous avons étudié l'apparition d'une force électromotrice d'induction dans un circuit fixe soumis à un champ magnétique variable. Nous allons voir à présent qu'un phénomène d'induction similaire se produit lorsque le flux magnétique varie à cause du déplacement d'un circuit plongé dans un champ magnétique stationnaire. Ce phénomène d'induction est à l'origine de conversions électromécaniques d'énergie.

## ■ 1 Conversion d'énergie mécanique en énergie électrique

L'alternateur est un dispositif qui permet de convertir une énergie mécanique en énergie électrique. L'expérience décrite figure 22.1 en montre le principe : un cadre comportant une bobine de  $N$  spires, plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  stationnaire, est entraîné en rotation par un moteur autour d'un axe  $Oz$ . Le champ  $\vec{B}$  est créé par deux bobines d'axe  $Ox$ , distantes de  $d$ , alimentées par un courant d'intensité  $I$  constante. Un système de collecteurs-balais permet de mesurer la tension  $u(t)$  aux bornes de la bobine. Une résistance  $R$ , appelée résistance de charge, peut être ajoutée pour fermer le circuit. Le moteur tourne à une vitesse angulaire constante  $\omega = 2\pi f$ .

Avant la mise en place du cadre, le champ magnétique stationnaire est mesuré avec une sonde à effet Hall (figure 22.1), sur l'axe des bobines. Nous voyons que le cadre tourne dans une zone où le champ magnétique n'est pas uniforme :  $B_x$  est compris entre 1,1 mT et 2,1 mT (pour  $I = 2,0$  A).

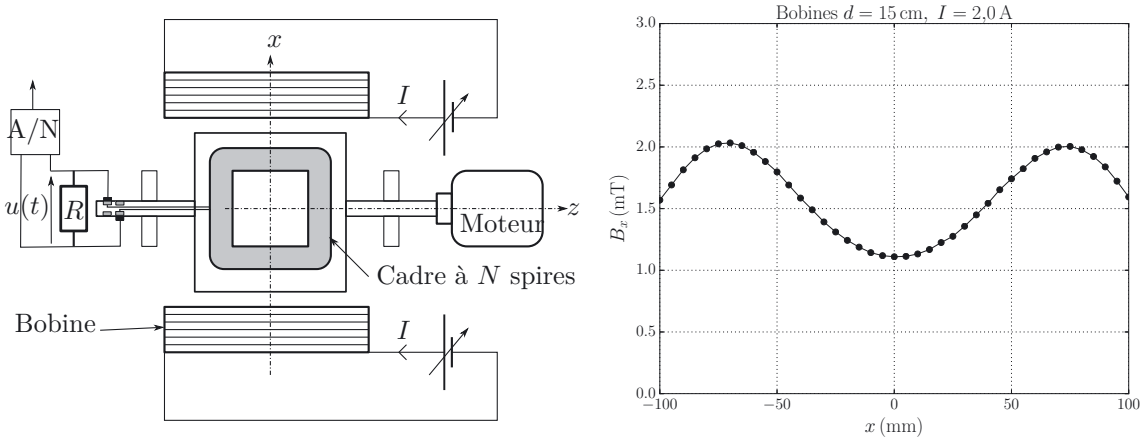


Figure 22.1. Alternateur (gauche) et évolution spatiale du champ magnétique stationnaire créé par les bobines (droite).

La figure 22.2 montre, pour deux fréquences  $f$  de rotation, la tension aux bornes de la bobine du cadre lorsque la résistance  $R$  est celle de l'appareil de mesure (carte de conversion A/N), de l'ordre de  $10\text{ M}\Omega$ . Cette tension est donc pratiquement la force électromotrice d'induction aux bornes de la bobine (tension à courant nul).

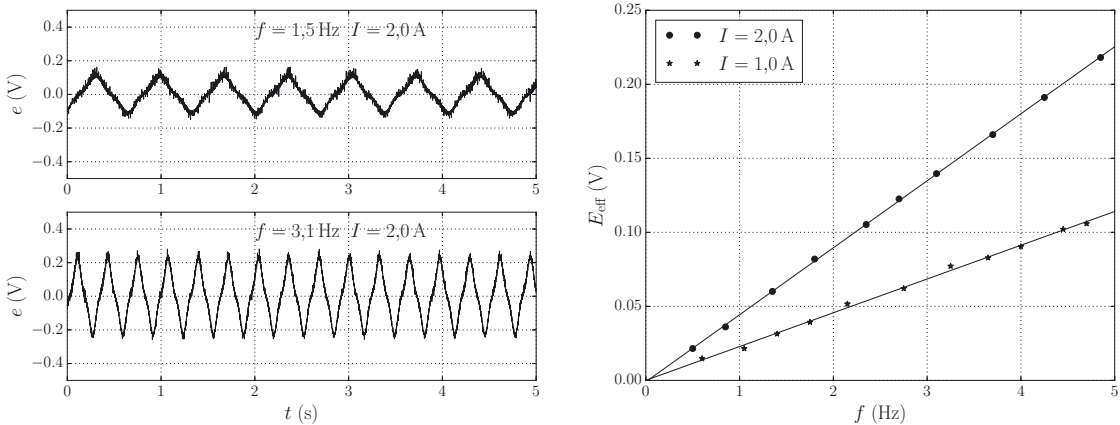


Figure 22.2. Force électromotrice en fonction du temps (gauche) et valeur efficace en fonction de la fréquence (droite).

Constatations expérimentales :

- la fréquence de la force électromotrice est identique à la fréquence de rotation du cadre ;
- la valeur efficace de la force électromotrice est proportionnelle à la fréquence de rotation et à l'intensité du champ magnétique.

En présence d'une résistance  $R$ , cette force électromotrice engendre un courant induit dans le circuit fermé constitué de la bobine du cadre et de la résistance. Cependant, si la résistance est faible, la tension  $u$  aux bornes de la bobine du cadre n'est plus égale à la force électromotrice.

□ Peut-on interpréter qualitativement ces observations ?

Le cadre étant mobile, le flux du champ magnétique à travers les spires de la bobine varie au cours du temps, ce qui entraîne, d'après la loi de Faraday dont on admet la généralité, l'apparition d'une force électromotrice induite. Le courant induit qui en résulte engendre des forces de Laplace qui s'opposent à la rotation de la bobine, conformément à la loi de Lenz.

□ Comment mettre en équation ce dispositif ?

On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le champ magnétique créé par les bobines est quasiment uniforme :  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_x$ , d'intensité  $B_e = 1,5 \text{ mT}$  d'après la courbe à droite de la figure 22.1 ;
- la résistance de la bobine est négligée devant la résistance de charge  $R$ . L'inductance propre des  $N$  spires est notée  $L$  ;
- $J_z$  est le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe  $(Oz)$  ;
- les frottements mécaniques sont négligés.

Chaque spire du cadre est modélisée selon le schéma représenté figure 22.3. Le circuit fermé est équivalent à une association série d'une force électromotrice  $e$  associée au champ magnétique extérieur  $\vec{B}_e$ , d'une auto-inductance  $L$  et d'une résistance  $R$ .

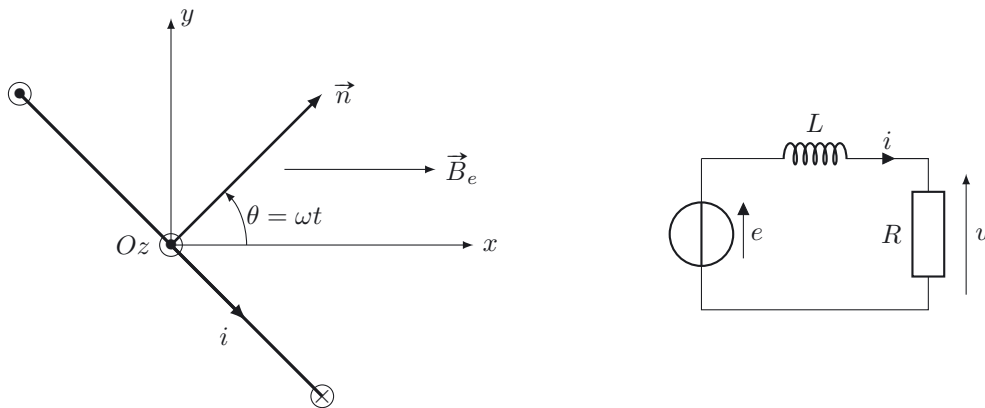


Figure 22.3. Modélisation d'une spire rectangulaire présente sur le cadre et schéma électrique équivalent des  $N$  spires reliées à la résistance de charge.

**Méthode 22.1 : Écrire les équations mécanique et électrique en précisant les conventions**

- Équation mécanique :
  - faire le bilan des actions qui s'exercent sur le système ;
  - orienter le circuit pour exprimer la résultante des forces de Laplace  $\vec{F}_{La}$  sur le système ou le moment résultant des forces de Laplace  $\vec{\Gamma}_{La}$  ;
  - appliquer la loi de la quantité de mouvement pour un système en translation ou la loi du moment cinétique pour un système en rotation.
- Équation électrique :
  - calculer le flux magnétique à partir de la convention d'orientation définie pour l'obtention de l'équation mécanique ;
  - appliquer la loi de Faraday pour déterminer la force électromotrice induite dans le circuit ;
  - dessiner un schéma électrique équivalent et appliquer la loi des mailles pour déterminer le courant dans le circuit.

➔ Exercice (22.1)

Appliquons cette méthode au système constitué du cadre et des  $N$  spires dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Ce cadre est soumis :

- à son poids et aux forces de la liaison pivot (parfaite), qui ont un moment nul par rapport à l'axe  $(Oz)$  ;
- au moment du couple exercé par le moteur  $\vec{\Gamma}_{mo} = \Gamma_{mo} \vec{u}_z$  ;
- au moment des forces de Laplace :  $\vec{\Gamma}_{La} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e = -NiSB_e \sin(\omega t) \vec{u}_z$ .

La loi du moment cinétique projetée sur l'axe  $(Oz)$  s'écrit :

$$(22.1) \quad J_z \frac{d\omega}{dt} = -NSiB_e \sin(\omega t) + \Gamma_{mo}$$

Le flux de  $\vec{B}_e$  à travers les  $N$  spires du cadre est  $\Phi = N\vec{B}_e \cdot \vec{S} = NB_e S \cos(\omega t)$ . La loi de Faraday donne :  $e = -\frac{d\Phi}{dt} = N\omega B_e S \sin(\omega t)$ . Cette force électromotrice est sinusoidale, de fréquence égale à celle de rotation du cadre et la valeur efficace  $E_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} N2\pi f B_e S$  est proportionnelle à la fréquence  $f$  et au champ  $B_e$ , ce qui est conforme aux résultats expérimentaux (figure 22.2). Notons que la tension expérimentale n'est pas sinusoidale mais seulement périodique, car le champ magnétique réel n'est pas uniforme.

L'application de la loi des mailles au circuit équivalent s'écrit :

$$(22.2) \quad e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

La tension mesurée aux bornes de la résistance est  $u = Ri$ .

□ **Quelle proportion d'énergie mécanique est-elle convertie en énergie électrique ?**

Pour obtenir un bilan de puissance à partir des équations électrique et mécanique, on doit multiplier l'équation électrique par l'intensité du courant électrique et l'équation mécanique par la vitesse angulaire de rotation  $\omega$ .



**Méthode 22.2 : Effectuer un bilan de puissance**

- Multiplier l'équation électrique par l'intensité du courant  $i$  pour établir un bilan de puissance électrique.
- Multiplier scalairement l'équation mécanique par  $\vec{v}$  si elle est issue de la loi de la quantité de mouvement ou par  $\vec{\omega}$  si elle provient de la loi du moment cinétique, afin de faire apparaître un bilan de puissance mécanique.
- Combiner ces deux équations en remarquant que la somme de la puissance de la force électromotrice d'induction et de la puissance des forces de Laplace est nulle (couplage électromécanique).

➔ Exercice (22.2)

En appliquant cette méthode, les deux équations électrique et mécanique deviennent :

$$(22.3) \quad ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} \Rightarrow N i \omega B_e S \sin(\omega t) = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

et

$$(22.4) \quad J_z \omega \frac{d\omega}{dt} = -N S i B_e \omega \sin(\omega t) + \Gamma_{mo} \omega \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_z \omega^2 \right) = -N S i B_e \omega \sin(\omega t) + \Gamma_{mo} \omega$$

On remarque que la puissance de la force électromotrice induite  $\mathcal{P}_e = ei = N S i \omega B_e \sin(\omega t)$  et la puissance des forces de Laplace  $\mathcal{P}_{La} = -N S i B_e \omega \sin(\omega t)$  sont opposées.

**Équation de couplage électromécanique**

Lorsque le couplage est réalisé en présence d'un champ magnétique extérieur indépendant du temps, il vient :

$$\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{La} = 0$$

En sommant les deux équations 22.3 et 22.4 on obtient le bilan de puissance suivant :

$$\Gamma_{mo} \omega = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_z \omega^2 \right) + Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

La puissance mécanique délivrée par le moteur  $\Gamma_{mo} \omega$  est donc à la fois convertie en énergie cinétique pour le cadre et en énergie magnétique stockée dans la bobine, le reste étant dissipé par effet Joule dans la résistance  $R$ .

En régime sinusoïdal forcé, l'intégration de ce bilan de puissance sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  donne le bilan d'énergie :

$$\int_0^T \Gamma_{mo} \omega dt = \int_0^T Ri^2 dt$$

En régime sinusoïdal forcé, l'énergie moyenne fournie par le moteur est intégralement dissipée dans la résistance de charge : nous obtenons une conversion de puissance mécanique en puissance électrique avec un rendement égal à 1. En pratique, le rendement obtenu est toujours inférieur à 1 à cause des frottements mécaniques et de la résistance électrique de la bobine, négligés dans notre modèle.

**Principe de l'alternateur**

L'expérience réalisée montre le principe de l'alternateur, qui permet de convertir la puissance mécanique fournie par une turbine (éolienne, centrale nucléaire, hydraulique, etc.) en puissance électrique. Les dynamos fonctionnent sur le même principe.

□ **Quelles autres applications utilisent le même principe ?**

Un autre exemple de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique est le freinage électromagnétique, utilisé afin de convertir l'énergie cinétique d'un véhicule en énergie électrique. L'énergie ainsi récupérée peut être envoyée sur le réseau électrique (train) ou contribuer à la recharge de l'accumulateur (voiture électrique). Dans les camions, le freinage par induction est utilisé pour limiter l'usure des plaquettes de freins.

L'expérience présentée figure 22.4 montre le principe du freinage par induction. Un pendule pesant est constitué de deux tiges reliées à un pivot horizontal, avec un disque en cuivre (conducteur électrique) fixé à leur autre extrémité. Au cours du mouvement pendulaire, le disque passe dans l'entrefer d'un électroaimant où règne un champ magnétique  $\vec{B}_e$ , proportionnel au courant  $I$  injecté dans l'électroaimant, et perpendiculaire au disque. Nous disposons de deux disques de même diamètre fabriqués dans le même matériau mais le disque 1 est plein alors que le disque 2 est rainuré comme l'indique la figure 22.4.

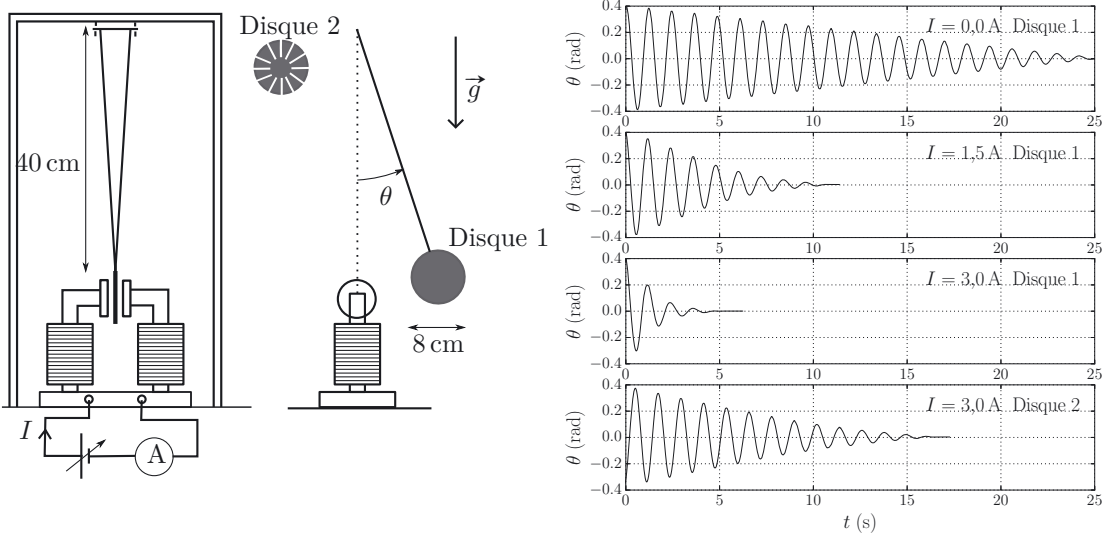


Figure 22.4. Dispositif expérimental mettant en évidence les forces de freinage par courants de Foucault et évolution temporelle de l'angle du pendule pesant.

L'angle de rotation du pendule est obtenu par analyse d'une vidéo prise à 30 images par seconde, pour des valeurs de  $I$  comprises entre 0 et 3 A. On observe figure 22.4 l'évolution temporelle de l'angle  $\theta$ . L'amortissement du mouvement du pendule augmente avec le courant  $I$  dans l'électroaimant et donc avec l'intensité du champ magnétique. On constate que le mouvement avec disque

rainuré est beaucoup moins amorti que celui avec le disque plein, pour un même champ magnétique dans l'électroaimant.

□ **Comment expliquer la présence des forces de freinage ?**

Lors du mouvement du pendule, le disque conducteur est en mouvement dans un champ magnétique stationnaire. Des courants induits sont ainsi créés dans le disque. Les forces de Laplace qui en résultent s'opposent au mouvement du disque. Dans le disque plein, les courants induits forment des boucles de grandes dimensions. Dans le disque rainuré, seules des boucles de courant de petites dimensions peuvent se développer, ce qui réduit fortement l'efficacité du freinage.

**Courants de Foucault**

Pour des circuits non filiformes, les courants induits sont répartis dans tout le volume du conducteur et sont appelés courants de Foucault.



Afin de limiter les courants de Foucault (causes de perte énergétique), les noyaux en fer utilisés dans les transformateurs sont feuilletés pour éviter la formation de grandes boucles de courant.

## ■ 2 Conversion d'énergie électrique en énergie mécanique

La conversion d'énergie électrique en énergie mécanique est réalisée dans les moteurs électriques et dans différentes applications nécessitant un mouvement de translation ou de rotation. Nous allons étudier l'exemple du haut-parleur électrodynamique (figure 22.5), dans lequel une tension électrique est convertie en un déplacement d'une membrane qui engendre une onde acoustique.

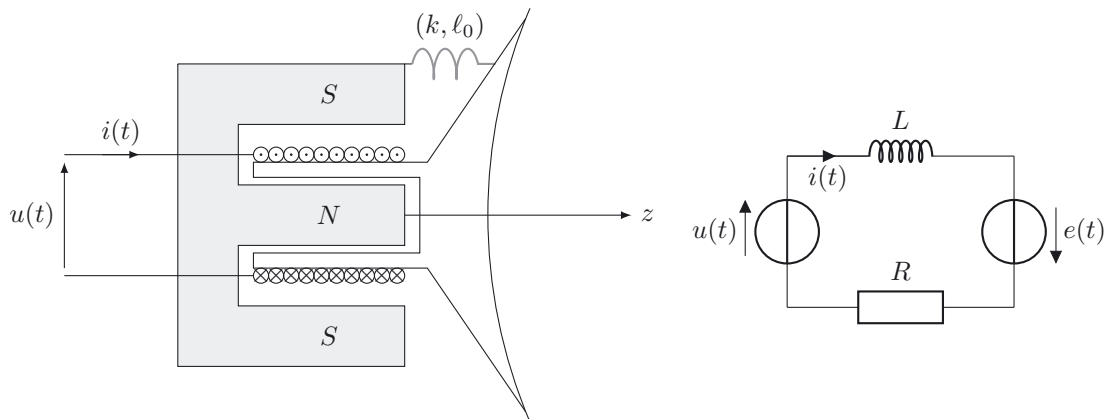


Figure 22.5. Schéma en coupe d'un haut-parleur et schéma électrique équivalent de la bobine.

Un haut-parleur est constitué d'une bobine cylindrique comportant  $N$  spires identiques solidaires d'une membrane susceptible de se translater suivant l'axe ( $Oz$ ). L'élasticité de la membrane est modélisée par un ressort de raideur  $k$ . La bobine est emmanchée dans un aimant cylindrique constitué d'un pôle nord dans sa partie centrale et d'un pôle sud sur la couronne extérieure. Cet aimant crée un champ magnétique radial  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_r$  stationnaire dans l'entrefer où la bobine se déplace. La composante radiale  $B_e$  est la même pour tous les points de la bobine.

La bobine, de résistance  $R$  et d'inductance propre  $L$ , est reliée à la sortie d'un amplificateur audio modélisé par une source qui impose une tension  $u(t)$ . L'intensité du courant circulant dans la bobine est notée  $i(t)$ , conformément au schéma de la figure 22.5.

□ **Quel est le principe de fonctionnement de ce haut-parleur ?**

La bobine étant parcourue par un courant  $i(t)$  et plongée dans un champ  $\vec{B}_e$  stationnaire, elle est soumise à des forces de Laplace qui la mettent en mouvement. Les oscillations de la membrane engendrent une onde acoustique dans l'air. La bobine se déplace dans un champ magnétique stationnaire et est donc le siège d'un phénomène d'induction.

□ **Comment mettre en équation ce système ?**

On étudie le système rigide bobine + membrane dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Ce système est soumis :

- à son poids et aux forces de liaison de la bobine par rapport à l'aimant, qui n'ont pas de composante suivant l'axe  $(Oz)$  ;
- à la force de rappel du ressort  $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z = -kz\vec{u}_z$  ( $z = 0$  correspond à la position d'équilibre de la bobine en l'absence de tension  $u(t)$ ) ;
- à la force de frottement qu'exerce l'air sur la membrane que l'on modélise par une force de frottement fluide  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$  ;
- à la force résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur la bobine :  $\vec{F}_{La} = \int i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_e$  avec  $d\vec{\ell} = d\ell\vec{u}_\theta$  et  $\vec{B}_e = B_e\vec{u}_r$ , soit  $\vec{F}_{La} = \int -id\ell B_e\vec{u}_z = -Ni2\pi a B_e\vec{u}_z$  en notant  $a$  le rayon d'une spire.

La loi de la quantité de mouvement projetée sur l'axe  $(Oz)$  conduit à l'équation mécanique suivante :

$$(22.5) \quad m \frac{dv}{dt} = -kz - \alpha v - 2\pi N i a B_e$$

Pour obtenir la force électromotrice d'induction  $e$ , on utilise l'équation de couplage électromécanique obtenue dans la partie précédente :  $\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_{La} = 0$  avec  $\mathcal{P}_e = ei$  et  $\mathcal{P}_{La} = \vec{F}_{La} \cdot \vec{v}$  ou encore  $\mathcal{P}_{La} = -Ni2\pi a B_e v$ , ce qui permet d'obtenir  $e(t) = 2\pi N a B_e v$ . La loi des mailles conduit à l'équation électrique :

$$(22.6) \quad u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - 2\pi N a B_e v$$

On obtient alors un système d'équations couplées (équations 22.5 et 22.6) faisant intervenir des grandeurs électriques et mécaniques.

□ **Comment découpler ces équations ?**

Les équations différentielles obtenues étant linéaires, on cherche à résoudre ces équations pour une tension  $u(t)$  sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ , en utilisant la notation complexe (régime sinusoïdal).

L'impédance du haut-parleur en fonctionnement est  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$  et le déplacement de la bobine est relié à la vitesse  $\underline{v}$  de cette dernière par  $\underline{z} = \frac{\underline{v}}{j\omega}$ . Les deux équations couplées deviennent :

$$\left( \alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} + 2\pi N a B_e \underline{I} = 0$$

$$(R + jL\omega) \underline{I} - 2\pi N a B_e \underline{v} = \underline{U}$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$\underline{v} = -\frac{2\pi NaB_e}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jL\omega + \frac{4\pi^2 N^2 a^2 B_e^2}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$$

Cette impédance comporte deux termes :  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$  qui représente l'impédance électrique en l'absence de mouvement, et  $\underline{Z}_m = \frac{4\pi^2 N^2 a^2 B_e^2}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$  appelée impédance motionnelle, qui rend compte du couplage électromécanique en présence de mouvement. Le module de l'impédance motionnelle admet un maximum pour la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , qui n'est autre que la pulsation de résonance du système masse-ressort. La figure 22.6 montre le module et l'argument de l'impédance  $\underline{Z}$  en fonction de la fréquence pour  $m = 10 \text{ g}$ ,  $k = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 1,0 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $L = 0,20 \text{ mH}$ ,  $R = 4 \Omega$ ,  $B_e = 0,9 \text{ T}$  et  $2\pi Na = 5,0 \text{ m}$ . La résonance se manifeste à 70 Hz. L'effet inductif ( $jL\omega$ ) se manifeste pour des fréquences supérieures à 2 kHz.

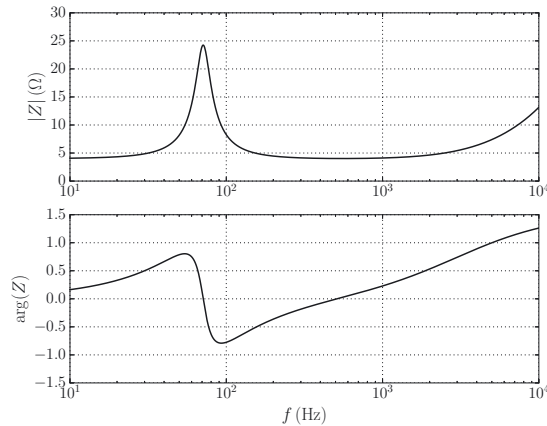


Figure 22.6. Module et argument de l'impédance électrique d'un haut-parleur, en fonction de la fréquence.

□ **Que devient l'énergie électrique transmise au haut parleur ?**

En multipliant l'équation mécanique (équation 22.5) par  $v$  et l'équation électrique (équation 22.6) par  $i$  on obtient les deux relations suivantes.

$$-kz \frac{dz}{dt} - \alpha v^2 - 2\pi N i a B_e v = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)$$

$$u i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right) - 2\pi N a B_e v i$$

En sommant ces deux équations on obtient un bilan global de puissance :

$$u i = R i^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k z^2 \right)$$

L'intégration de cette relation sur une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  conduit au bilan d'énergie suivant :

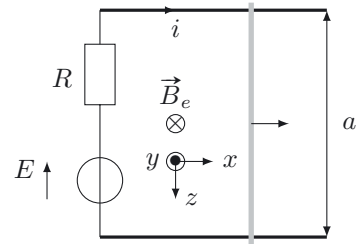
$$\int_0^T ui \, dt = \int_0^T Ri^2 \, dt + \int_0^T \alpha v^2 \, dt$$

L'énergie électrique fournie au haut parleur par l'amplificateur audio est d'une part dissipée dans la résistance de la bobine, d'autre part convertie en énergie acoustique par l'intermédiaire de la force de frottement fluide.

## Interro de cours

1. Un circuit fermé est mis en mouvement dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_e$  indépendant du temps. Il y apparaît une force électromotrice induite  $e$  et un courant induit d'intensité  $i$ . La puissance de la force électromotrice induite  $\mathcal{P}_e = ei$  est :
  - (a) égale à la puissance  $\mathcal{P}_{La}$  des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit ;
  - (b) opposée à la puissance  $\mathcal{P}_{La}$  des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit ;
  - (c) toujours inférieure à la puissance  $\mathcal{P}_{La}$  des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit.
  
2. On reprend l'expérience du cadre à  $N$  spires mis en mouvement de rotation par un moteur et plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_e$  (voir figure 22.3). Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Les corriger dans le cas contraire.
  - (a) La puissance fournie par le moteur est intégralement dissipée dans la résistance de charge.
  - (b) Le dispositif réalise une conversion de puissance mécanique en puissance électrique.
  - (c) D'après la loi de Faraday, un courant induit continu circule dans le circuit lorsque le cadre tourne à une vitesse angulaire constante.

Pour les questions 3. à 8., nous considérons une tige de masse  $m$  posée sur les rails horizontaux de Laplace distants de  $a$  et reliés entre eux par un générateur de tension continue de f.e.m  $E$  mis en série avec une résistance  $R$ . Le champ magnétique uniforme et indépendant du temps  $\vec{B}_e = -B_e \vec{u}_y$  est imposé (avec  $B_e > 0$ ). La tige d'abscisse  $x(t)$  peut glisser sans frottement le long des rails en restant perpendiculaire à ceux-ci. Le phénomène d'auto-induction est négligé.



Dans un premier temps, le générateur n'est pas présent dans le montage (les rails sont reliés par la résistance  $R$ ). Initialement,  $x(0) = 0$  et  $\dot{x} = v_0$  avec  $v_0 > 0$ .

3. En utilisant la loi de Faraday, nous montrons qu'il apparaît dans le circuit :
  - (a) un courant induit d'intensité  $i = \frac{B_e a \dot{x}}{R} > 0$  tendant à freiner la tige ;
  - (b) un courant induit d'intensité  $i = -\frac{B_e a v_0}{R} > 0$  tendant à accélérer la tige ;
  - (c) un courant induit d'intensité  $i = -\frac{B_e a \dot{x}}{R} < 0$  tendant à freiner la tige.
  
4. L'équation mécanique s'écrit :
  - (a)  $m\ddot{x} = iaB_e$  ;
  - (b)  $m\ddot{x} = i\dot{x}B_e$  ;
  - (c)  $m\ddot{x} = -iaB_e$ .

5. Indiquer les affirmations exactes.

- (a) À l'issue du régime transitoire, la tige se déplace à une vitesse constante et  $i = 0$ .
- (b) À l'issue du régime transitoire, la tige s'arrête, l'énergie cinétique initiale ayant été intégralement dissipée par effet Joule.
- (c) La puissance de la force de Laplace est reliée à la puissance dissipée dans la résistance par :  $\mathcal{P}_{La} = -Ri^2$ .

Le générateur de f.e.m  $E > 0$  est dorénavant branché, la tige étant initialement immobile.

6. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Les corriger dans le cas contraire.

- (a) L'intensité  $i$  vaut  $\frac{E}{R}$  et la tige se met en mouvement dans le sens des  $x$  croissants.
- (b) Il s'agit d'un convertisseur électromécanique transformant toute l'énergie électrique fournie par le générateur en énergie cinétique.
- (c) En utilisant la loi de Faraday, nous pouvons écrire que  $i = -\frac{B_e a \dot{x}}{R}$ .
- (d) Si on néglige les frottements subis par la tige, rien ne s'oppose à l'augmentation de la vitesse de la tige, hormis la longueur des rails !

7. La tige exerce une force de traction  $\vec{F} = F\vec{u}_x$  sur un objet non représenté. Quel système d'équations est-il correct ?

- (a)  $m\ddot{x} = F + iaB_e$  et  $E = Ri - B_e a \dot{x}$ .
- (b)  $m\ddot{x} = -F + iaB_e$  et  $E = Ri + B_e a \dot{x}$ .
- (c)  $m\ddot{x} = -F - iaB_e$  et  $E = Ri + B_e a \dot{x}$ .

8. En régime stationnaire, le dispositif se comporte comme un moteur tractant l'objet à la vitesse constante  $v_0$ . Est-il exact d'affirmer que :

- (a) l'intensité  $i$  est nulle et la puissance fournie par le générateur est égale à la puissance  $\mathcal{P}$  de la force de traction ?
- (b) la puissance de la force de traction  $\vec{F}$  est égale à la puissance de la force de Laplace exercée sur la tige ?
- (c) la puissance fournie par le générateur est égale à la somme de la puissance de la force de traction et de la puissance dissipée par effet Joule dans  $R$  ?

9. On considère un haut-parleur électrodynamique (voir la modélisation simplifiée figure 22.5). Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Les corriger dans le cas contraire.

- (a) La puissance des forces de Laplace appliquées à la bobine vaut  $e(t)i(t)$  où  $e(t)$  est la force électromotrice d'induction.
- (b) En régime permanent, la puissance moyenne fournie par le générateur est intégralement dissipée dans les forces de frottement exercées par l'air sur la membrane.
- (c) L'impédance du haut-parleur est indépendante de  $\omega$ . Il est courant d'utiliser un unique haut-parleur restituant fidèlement toute la gamme de fréquence d'un son.

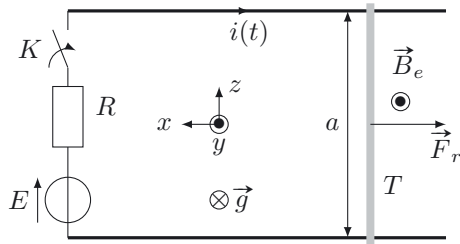


## Exercices

### Exercice 22.1 RTT

➔ Méthode (22.1)

Le dispositif des rails de Laplace permet de modéliser un moteur à courant continu servant à tracter une charge. Nous nous intéressons au régime transitoire de traction (RTT).



La tige conductrice  $T$  de masse  $m$  est posée sur les rails distants de  $a$ , plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}_e$  uniforme et stationnaire.

Le moteur est alimenté par un générateur de tension continue de f.e.m  $E$ . La résistance totale du montage est notée  $R$ .

Le phénomène d'auto-induction est négligé.

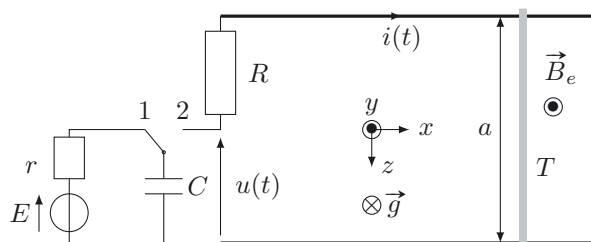
L'interrupteur  $K$  est fermé à l'instant  $t = 0$ ; la tige initialement immobile commence à tracter une charge (non représentée sur la figure). Cette dernière exerce sur  $T$  la force résistante  $\vec{F}_r = -F_r \vec{u}_x$  supposée constante. Cette force comprend les éventuels frottements subis par  $T$ .

1. On note  $\vec{v}(t) = v(t) \vec{u}_x$  la vitesse de  $T$  à l'instant  $t$ . Appliquer la loi de la résultante cinétique à  $T$  et en déduire une équation différentielle liant  $i(t)$  et  $v(t)$  (équation mécanique).
2. En exprimant la conversion de puissance lors du couplage électromécanique, déduire une expression de la f.e.m  $e(t)$  qui apparaît dans le circuit. Représenter le schéma électrique équivalent au dispositif et en déduire une deuxième équation couplant  $i(t)$  et  $v(t)$  (équation électrique).
3. Déterminer  $v(t)$  et  $i(t)$  et préciser leurs valeurs à l'issue du régime transitoire.

### Exercice 22.2 Coup de frein

➔ Méthode (22.2)

Nous souhaitons utiliser l'énergie stockée dans un condensateur pour donner un « coup de frein » au déplacement d'une tige conductrice posée sur des rails de Laplace distants de  $a = 5,0$  cm.



La tige conductrice  $T$  de masse  $m = 5,0$  g se déplace à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ . Le champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_y$  est imposé, avec  $B_e = 50$  mT. La résistance électrique totale du circuit est  $R = 1,0 \Omega$ .

Le condensateur de capacité  $C = 1,0$  mF est préalablement relié à un circuit (1) constitué d'un générateur de tension continue de f.e.m  $E = 20$  V et d'une résistance  $r = 1,0 \Omega$ .

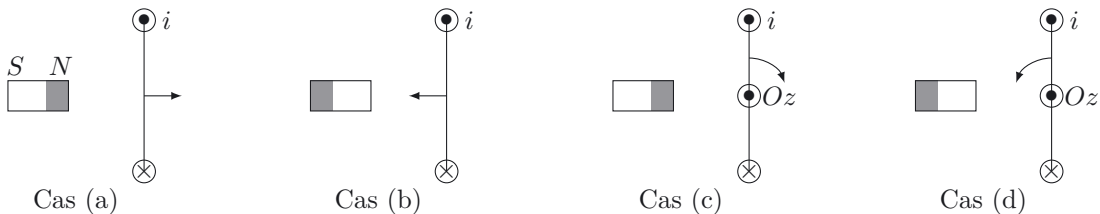
À l'instant initial  $t = 0$ , l'interrupteur à deux voies bascule instantanément en position 2. À cet instant, la vitesse de la tige est  $v_0 = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On néglige tout frottement ainsi que le phénomène d'auto-induction. L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Quelle est la tension  $u(0^+)$  aux bornes du condensateur juste après la bascule de l'interrupteur ?
2. Exprimer la f.e.m induite dans le circuit en fonction de  $B_e$ ,  $a$  et de la vitesse  $v(t)$  de la tige. Représenter le schéma électrique équivalent au dispositif et en déduire une équation différentielle reliant  $i(t)$  et  $v(t)$  (équation électrique).
3. Exprimer la force de Laplace s'exerçant sur la tige puis appliquer à celle-ci la loi de la résultante cinétique. En déduire une deuxième équation différentielle couplant  $i(t)$  et  $v(t)$  (équation mécanique).
4. Déduire du système couplé une équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  et mettre en évidence un temps caractéristique  $\tau$  que l'on exprimera en fonction des données. Résoudre l'équation différentielle après avoir précisé la valeur initiale  $i(0)$ . Montrer que  $i(t)$  tend vers une valeur limite  $i_{\text{lim}}$  que l'on précisera.
5. En déduire l'expression de  $v(t)$ . Montrer que la vitesse de la tige tend vers une valeur limite  $v_{\text{lim}}$  que l'on calculera.
6. Faire un bilan énergétique de l'opération « coup de frein ».

### Exercice 22.3 Le sens de la modulation

Une spire conductrice carrée est mise en mouvement en présence d'un aimant permanent dont le pôle nord est grisé sur la figure.

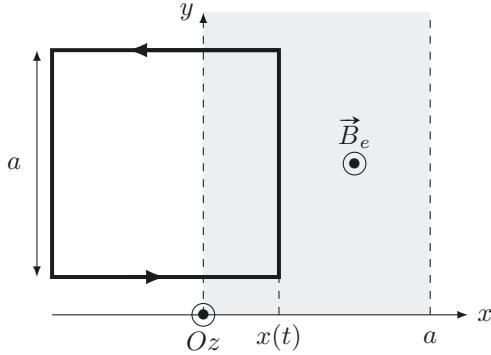


Le plan de la spire est perpendiculaire au plan de la figure, son orientation étant précisée :  $i$  représente l'éventuel courant circulant dans la spire et dont le signe reste à déterminer. Dans les cas (a) et (b), un opérateur déplace la spire en translation dans le sens de la flèche. Dans les cas (c) et (d), l'opérateur fait subir une rapide rotation de la spire autour de l'axe  $Oz$  d'un angle inférieur à  $90^\circ$  et dans le sens de la flèche (voir figure).

1. Expliquer qualitativement l'apparition d'un courant induit  $i$  dans la spire mise en mouvement.
2. Préciser le signe de  $i$  dans les quatre cas.

### Exercice 22.4 Couper à travers champ

Une spire conductrice carrée de côté  $a$ , de résistance  $R$  et de masse  $m$  glisse dans le plan horizontal  $xOy$  sur un dispositif à coussin d'air de telle sorte que sa vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  est constante : la spire ne subit aucun frottement.



Elle rentre alors à l'instant  $t = 0$  dans une région comprise entre  $x = 0$  et  $x = a$  où règne un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_z$  (région en gris sur la figure).

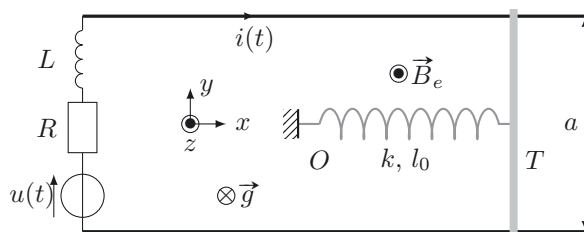
La position de la spire est repérée par l'abscisse  $x(t)$  définie sur la figure. Initialement,  $x(0) = 0$ .

L'inductance propre de la spire est négligée.

1. Prévoir sans calcul l'évolution du mouvement de la spire lorsqu'elle pénètre dans la région de champ magnétique  $\vec{B}_e$ .
2. Calculer le flux  $\Phi(t)$  de  $\vec{B}_e$  à travers la spire dans les cas  $0 \leq x \leq a$  et  $a < x \leq 2a$ .
3. Exprimer la f.e.m induite  $e(t)$  dans la spire en fonction de  $a$ ,  $B_e$  et  $v(t) = \dot{x}(t)$ .  
Représenter alors le schéma électrique équivalent à la spire partiellement plongée dans le champ magnétique  $\vec{B}_e$  et en déduire une équation liant l'intensité  $i(t)$  du courant induit dans la spire à la vitesse  $v(t)$  de déplacement de celle-ci. Que se passe-t-il lorsque  $x > 2a$  ?
4. Calculer la force de Laplace qui s'exerce sur la spire. Appliquer alors la loi de la résultante cinétique à la spire et en déduire une nouvelle équation différentielle liant  $i(t)$  et  $v(t)$ .
5. En déduire une équation différentielle vérifiée par  $v(t)$ . On pourra poser  $\tau = \frac{Rm}{B_e^2 a^2}$ . Déterminer  $v(t)$  puis  $x(t)$ . À quelle condition la spire sort-elle de la zone de champ magnétique ? À quelle vitesse se déplace-t-elle alors après être sortie totalement de la zone de champ magnétique ?
6. Proposer un bilan énergétique de la traversée. Qu'est devenue l'énergie cinétique perdue par la spire ?

### Exercice 22.5 #Haut-Parleur

Étudiante en PTSI, Bianca réalise un montage de principe de son tweeter (haut-parleur restituant les sons aigus) en s'inspirant des rails de Laplace.



La tige  $T$  de masse  $m$  est posée sur les rails distants de  $a$  et reliée à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Sa position est repérée par son abscisse  $x(t)$  par rapport à  $O$ .  $T$  subit donc une force de rappel  $-k(x(t) - l_0) \vec{u}_x$ .

Nous négligerons tout frottement solide de la tige sur les rails mais tenons compte des frottements fluides en introduisant la force  $-\alpha \dot{x} \vec{u}_x$  subie par  $T$ .

Un GBF impose une tension sinusoïdale  $u(t) = E \cos(\omega t)$  ; il est associé en série avec une résistance électrique  $R$  et une bobine d'inductance propre  $L$  qui représentent ici la résistance et l'inductance propre du circuit complet.

Le signal électrique sinusoïdal  $u(t) = E \cos(\omega t)$  imposé provoque les oscillations de la tige modélisant la membrane du haut-parleur.

1. Expliquer brièvement le principe de fonctionnement du haut-parleur.
2. Montrer que le mouvement de la tige provoque l'apparition d'une f.e.m. induite  $e(t)$  que l'on précisera. Représenter le schéma électrique équivalent du circuit et en déduire une équation différentielle liant notamment  $i(t)$  et  $v(t) = \dot{x}(t)$  (équation électrique).
3. Appliquer la loi de la résultante cinétique à la tige et en déduire une équation différentielle couplant  $i(t)$  et  $x(t)$  (équation mécanique).
4. En multipliant l'équation électrique par  $i(t)$  et l'équation mécanique par  $v(t)$ , on fait apparaître deux équations liant des puissances. Interpréter chaque terme intervenant dans ces équations.
5. Comparer la puissance de la force de Laplace et le terme  $e(t)i(t)$ . Commenter.
6. Faire un bilan énergétique global. À quoi est employée l'énergie fournie par le générateur ? Quel terme correspond à une puissance « utile » dans le cas du haut-parleur ?
7. Le régime étant sinusoïdal forcé, que devient ce bilan énergétique en moyenne ? Définir et exprimer le rendement énergétique du haut-parleur.
8. Nous utilisons maintenant la notation complexe, le régime étant sinusoïdal forcé. Ainsi  $e(t) = \text{Re}(\underline{e}(t))$  avec  $\underline{e}(t) = E \exp(j\omega t)$ .

a. Écrire les équations électrique et mécanique en notation complexe.

b. L'impédance équivalente  $\underline{Z}$  du haut-parleur est définie par la relation  $\underline{u}(t) = \underline{Z}i(t)$ . Montrer que  $\underline{Z}$  peut se mettre sous la forme  $\underline{Z}_e + \underline{Z}_m$ ,  $\underline{Z}_e$  s'exprimant de façon simple en fonction de  $R$ ,

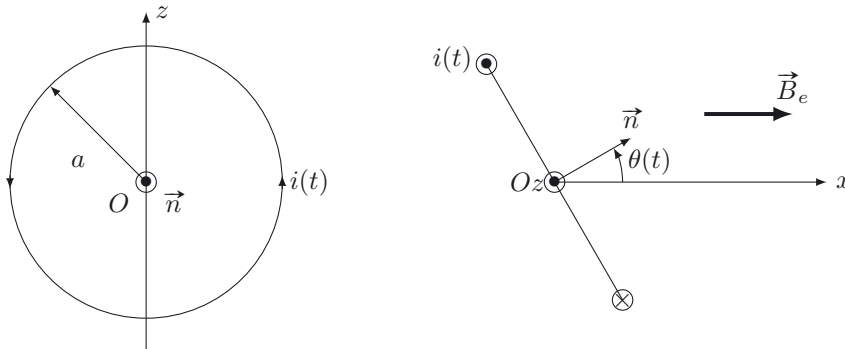
$L$  et  $\omega$ , tandis que  $\underline{Z}_m$  s'écrit sous la forme  $\frac{1}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega}$ . Préciser les expressions

de  $R_m$ ,  $L_m$  et  $C_m$ .  $\underline{Z}_e$  est appelée l'impédance électrique du haut-parleur,  $\underline{Z}_m$  son impédance motionnelle.

c. Montrer que l'impédance motionnelle correspond à une association en parallèle de trois composants que l'on précisera. Représenter alors le circuit électrique équivalent au haut-parleur.

### Exercice 22.6 GRS

Un fil conducteur est enroulé sur un cerceau de rayon  $a$ , constituant ainsi un circuit fermé de résistance électrique  $R$  et d'inductance propre négligeable. Le cerceau est entraîné par un moteur et tourne à vitesse angulaire constante  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{u}_z$  autour de l'axe  $Oz$ .



La spire circulaire ainsi réalisée est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_x$  et sa normale est définie par le vecteur unitaire  $\vec{n}$  repéré par l'angle  $\theta(t)$  qui sera supposé nul à l'instant  $t = 0$ . La figure ci-dessus la représente vue de face (à gauche) et vue de dessus.

Le moment d'inertie par rapport à  $Oz$  du cerceau avec sa spire est notée  $J$ . Nous négligeons tout frottement, fluide ou solide.

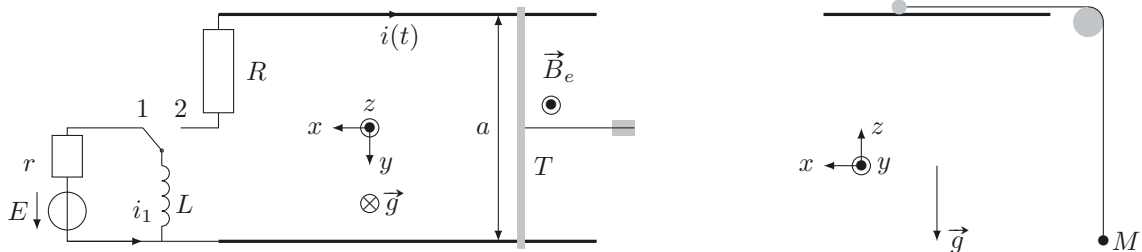
1. Expliquer l'apparition d'un courant  $i(t)$  dans la spire en mouvement de rotation.
2. Déterminer la f.e.m induite  $e(t)$  apparaissant dans la spire puis représenter le schéma électrique équivalent à la spire tournante. En déduire une expression de  $i(t)$ . Montrer que l'on a ainsi réalisé un générateur en régime sinusoïdal (GRS).
3. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans la spire puis sa moyenne temporelle. On rappelle la valeur moyenne  $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$ .
4. Montrer que le moteur doit exercer un couple  $\vec{\Gamma}_m$  sur la spire pour maintenir le mouvement de rotation à vitesse angulaire constante. Préciser la moyenne temporelle  $\langle \vec{\Gamma}_m \rangle$  du moment de ce couple.  
On rappelle qu'un moment magnétique  $\vec{m}$  plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  subit un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ .
5. Effectuer un bilan énergétique.

### Exercice 22.7 Voler de ses propres L

Nous souhaitons utiliser l'énergie stockée dans une bobine pour « faire voler » un petit objet  $M$  de masse  $m = 20 \text{ g}$  à l'aide du dispositif des rails de Laplace représenté sur le schéma ci-dessous.

Une tige conductrice  $T$  de masse négligeable est posée sur des rails de Laplace distants de  $a = 10 \text{ cm}$  et subit un champ magnétique  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_z$  uniforme et stationnaire, avec  $B_e = 150 \text{ mT}$ . La résistance électrique totale du circuit est  $R = 1,0 \Omega$ .

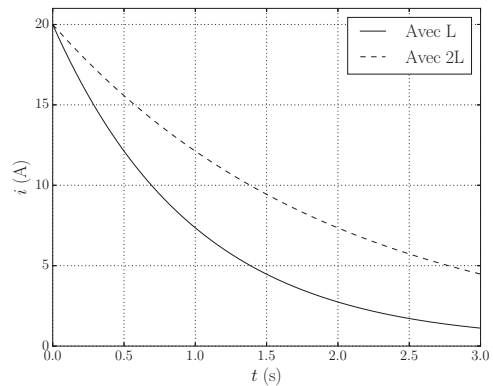
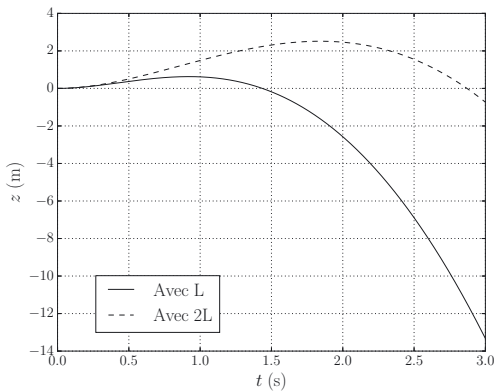
$M$  est soulevé grâce à un fil inextensible enroulé autour d'une poulie et rattaché à  $T$ . Les masses du fil et de la poulie sont négligées et le fil sera supposé toujours tendu.



La bobine d'inductance propre  $L = 1,0 \text{ H}$  est préalablement reliée à un circuit (1) constitué d'un générateur de tension continue de f.e.m  $E = 20 \text{ V}$  et d'une résistance  $r = 1,0 \Omega$ .  $M$  est repéré par sa cote  $z(t)$  à l'instant  $t$ , initialement immobile en  $z(0) = 0$ . À cet instant initial  $t = 0$ , l'interrupteur à deux voies bascule instantanément en position 2.

Tous les frottements sont négligés. L'inductance propre du circuit sera négligée devant celle de la bobine. L'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

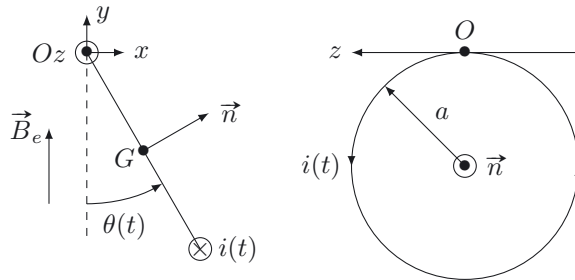
1. Quelle intensité  $i_1$  circule dans la bobine placée dans le circuit (1) ? Quelle énergie y est stockée ? De quelle hauteur cette énergie permet-elle *a priori* de soulever  $M$  ? Commenter.
2. On note  $i(t)$  l'intensité du courant circulant dans les rails. Quelle est la valeur initiale  $i(0)$  de cette intensité ?
3. Montrer qu'il apparaît une f.e.m induite  $e(t)$  dans le circuit dès que la tige se met en mouvement. Représenter le schéma électrique équivalent au circuit et en déduire une équation différentielle reliant  $i(t)$  et la vitesse  $v(t) = \dot{z}(t)$  de  $M$ .
4. Écrire la force de Laplace  $\vec{F}_{La} = F_{La} \vec{u}_x$  s'exerçant sur  $T$ . Quelle intensité minimale  $I_{\min}$  permet de soulever  $M$  ?
5. La masse de  $T$  étant négligeable devant  $m$ , la tension du fil exercée sur  $M$  s'écrit  $F_{La} \vec{u}_z$ . Appliquer la loi de la résultante cinétique à  $M$  et en déduire une deuxième équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  et  $i(t)$ .
6. La résolution du système d'équation ayant été réalisée, les solutions  $z(t)$  et  $i(t)$  sont tracées en fonction du temps. Le tracé est également effectué en utilisant deux bobines en série au lieu d'une, soit une inductance propre  $2L$ .



- a. Commenter l'allure des courbes. On distinguera notamment deux phases de fonctionnement pour le dispositif. Quel est l'intérêt d'utiliser deux bobines ?
- b. Reprendre les équations couplées et en déduire un bilan énergétique global. On indiquera comment est utilisée l'énergie préalablement stockée dans la bobine.

### Exercice 22.8 Amortissement critique

Arthur enroule un fil conducteur très fin autour d'une couronne de rayon  $a = 2,5$  cm, réalisant ainsi une très fine bobine de  $N = 20$  spires de résistance  $R = 0,10 \Omega$  et d'inductance propre négligeable. L'enroulement constitue un circuit fermé.



La couronne peut osciller autour de l'axe  $Oz$  sans aucun frottement, notamment au niveau de l'axe.

L'ensemble couronne-fil conducteur possède une masse  $m = 10$  g et un moment d'inertie  $J = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  par rapport à l'axe  $Oz$ . Son centre de masse est  $G$ .

L'accélération de la pesanteur est  $\vec{g} = -g\vec{u}_y$  avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

En l'absence de champ magnétique, la couronne oscille de façon quasi-harmonique avec une faible amplitude  $\theta_0$  et une pulsation  $\omega_0$ .

Arthur établit à l'instant initial  $t = 0$  un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}_e = B_e \vec{u}_y$ .

1. Appliquer à la couronne la loi du moment cinétique par rapport à l'axe  $Oz$  en l'absence de champ magnétique. En déduire une équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  que l'on simplifiera dans le cadre des oscillations de faible amplitude. Exprimer  $\omega_0$  en fonction des données puis la calculer.
2. Expliquer sans calcul pourquoi le pendule va rapidement s'amortir lors de l'établissement du champ magnétique.
3. Exprimer la f.e.m induite  $e(t)$  apparaissant dans l'enroulement puis l'intensité  $i(t)$  du courant induit en fonction notamment de  $\theta(t)$  et  $\dot{\theta}(t)$ .
4. Exprimer le moment du couple supplémentaire s'exerçant sur la couronne en fonction de  $i(t)$ ,  $\theta(t)$  et des données. On rappelle qu'un circuit de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B}$  subit un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$ . Appliquer alors la loi du moment cinétique et en déduire une nouvelle équation différentielle liant  $i(t)$  et  $\theta(t)$ .
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  que l'on simplifiera dans le cadre des oscillations de faible amplitude.
6. Quel champ magnétique  $B_{e,c}$  doit être appliqué pour un retour le plus rapide de la couronne vers sa position d'équilibre ?

# Corrections

## Interro de cours

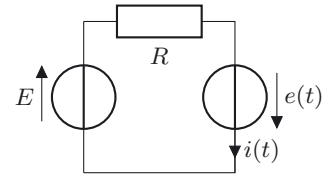
1. Réponse (b) : l'équation de couplage électromécanique s'écrit  $\mathcal{P}_{La} + ei = 0$ .
2. Réponse (a) : fausse en général. Il faudrait notamment une absence de frottements. Réponse (b) : vraie. Réponse (c) : fausse, un courant induit alternatif circule dans le circuit.
3. Réponse (c) :  $e = -B_e a \dot{x} = Ri$ .
4. Réponse (a) : on applique la loi de la quantité de mouvement à la barre avec  $\vec{F}_{La} = iB_e a \vec{u}_x$ .
5. Réponses (b) et (c).
6. Réponse (a) : fausse, l'intensité ne vaut  $\frac{E}{R}$  qu'à l'instant initial. Réponse (b) : fausse, une partie de l'énergie électrique est dissipée par effet Joule dans la résistance. Réponse (c) : fausse, la loi de Faraday donne  $e = -B_e a \dot{x}$ , puis  $E + e = Ri$ . Réponse (d) : fausse, les courants induits apparaissant dans le circuit freinent la tige (loi de Lenz).
7. Réponse (b).
8. Réponse (a) : fausse. Réponse (b) : vraie, en régime stationnaire,  $\ddot{x} = 0$  donc  $F = iaB_e$  puis en multipliant par  $v_0$ ,  $Fv_0 = iaB_e v_0$ . Réponse (c) : vraie,  $Ei = Ri^2 + B_e a v_0 i = Ri^2 + Fv_0$ .
9. Réponse (a) : fausse, l'équation de couplage électromécanique s'écrit  $\mathcal{P}_{La} + ei = 0$ . Réponse (b) : fausse, il ne faut pas oublier les pertes par effet Joule. Réponse (c) : fausse, l'impédance du haut-parleur dépendant de  $\omega$ , il est nécessaire d'utiliser plusieurs haut-parleurs pour restituer fidèlement le son sur une large gamme de fréquences.

## Exercice 22.1

1.  $T$  est soumise à son poids et la réaction des rails qui se compensent, à la force résistance  $-F_r \vec{u}_x$  et à la force de Laplace  $\vec{F}_{La}(t) = i(t)aB_e \vec{u}_x$ . L'application de la loi de la quantité de mouvement à  $T$  projetée sur  $Ox$  amène à :  $m \frac{dv(t)}{dt} = i(t)aB_e - F_r$ .

2. On note  $\mathcal{P}_{La}$  la puissance de la force de Laplace et  $\mathcal{P}_e = e(t)i(t)$  la puissance électrique de la f.e.m induite  $e(t)$ . La relation énergétique traduisant la conversion de puissance s'écrit :  $\mathcal{P}_{La} + \mathcal{P}_e = 0$ . On obtient ainsi :  $e(t) = -aB_e v(t)$ .

Le schéma électrique équivalent est représenté ci-contre. La loi des mailles amène ainsi à  $E - aB_e v(t) = Ri(t)$ .



3. On peut donc écrire  $i(t) = \frac{E - aB_e v(t)}{R}$ , et le réinjecter dans l'équation différentielle :

$$m \frac{dv(t)}{dt} = aB_e \frac{E - aB_e v(t)}{R} - F_r, \text{ soit } \frac{dv(t)}{dt} + \frac{a^2 B_e^2}{mR} v(t) = \frac{aB_e E}{mR} - \frac{F_r}{m}. \text{ On pose alors } \tau = \frac{mR}{a^2 B_e^2}. \text{ La}$$

$$\text{solution est alors } v(t) = \left( \frac{E}{aB_e} - \frac{F_r R}{a^2 B_e^2} \right) (1 - \exp(-t/\tau)) \rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{E}{aB_e} - \frac{F_r R}{a^2 B_e^2} \text{ pour } t \gg \tau.$$

$$\text{On obtient pour l'intensité : } i(t) = \frac{E}{R} \exp(-t/\tau) + \frac{F_r}{aB_e} (1 - \exp(-t/\tau)) \rightarrow i_{\text{lim}} = \frac{F_r}{aB_e} \text{ pour } t \gg \tau.$$



**Exercice 22.2**

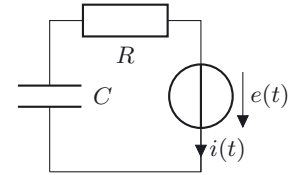
- Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur. Pour  $t = 0^-$ ,  $u(0^-) = E$ , soit par continuité,  $u(0^+) = E$ .
- Entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + dt$ , la tige s'est déplacée de  $v(t)dt$ , ce qui induit une variation du flux magnétique à travers le circuit de :  $d\Phi(t) = -B_e av(t)dt$  (le signe moins provenant des orientations respectifs de la surface du circuit, selon  $-\vec{u}_y$  et du champ magnétique selon  $+\vec{u}_z$ ). D'après la loi de Faraday, la f.e.m  $e(t)$  induite dans le circuit s'écrit  $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = +B_e av(t)$ .

Le schéma électrique équivalent est représenté ci-contre.

L'application de la loi des mailles amène alors à :

$$e(t) = +B_e av(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \text{ avec } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$

En dérivant cette équation, on aboutit à  $B_e a \frac{dv(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt}$ .



- La force de Laplace s'exerçant sur la tige s'écrit  $\vec{F}_{La} = ia\vec{u}_z \wedge B_e\vec{u}_y = -iaB_e\vec{u}_x$ . La loi de la quantité de mouvement appliquée à la tige et projetée sur  $Ox$  amène ainsi à :  $m \frac{dv(t)}{dt} = -i(t)aB_e$ .
- On aboutit alors à :  $\frac{di(t)}{dt} + i \left( \frac{1}{RC} + \frac{(aB_e)^2}{mR} \right) = 0$ .

En considérant l'équation électrique  $e(t) = +B_e av(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$  pour  $t = 0^+$ , il vient :

$B_e av_0 = Ri(0^+) - E$ , soit  $i(0^+) = \frac{B_e av_0 + E}{R}$ . On introduit le temps caractéristique  $\tau$  de l'évolution temporelle de  $i(t)$  par  $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{(aB_e)^2}{mR}$ . La résolution de l'équation vérifiée par  $i(t)$  amène donc à  $i(t) = i(0^+) \exp(-t/\tau) \rightarrow i_{lim} = 0$  pour  $t \gg \tau$ .

- $m \frac{dv(t)}{dt} = -i(0^+)aB_e \exp(-t/\tau)$ , soit, en prenant en compte les conditions initiales :  $v(t) = B_e a \frac{B_e av_0 + E}{mR} \tau (\exp(-t/\tau) - 1) + v_0 \rightarrow v_{lim} = v_0 - B_e a \frac{B_e av_0 + E}{mR} \tau$  pour  $t \gg \tau$ . L'application numérique amène à  $v_{lim} = 9 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- On multiplie l'équation électrique par  $i$  :  $e(t)i(t) = +B_e av(t)i(t) = Ri^2(t) + i(t) \frac{q(t)}{C}$ . Il vient donc  $e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{1}{2C} \frac{dq^2(t)}{dt}$ .

On multiplie l'équation mécanique par  $v(t)$  :  $mv(t) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2(t)}{dt} = -aB_e i(t)v(t)$ .

Grâce à ces deux équations, on obtient le bilan de puissance suivant :  $\frac{d(mv^2/2 + q^2/(2C))}{dt} + Ri^2 = 0$ .

Le terme  $q^2/(2C)$  représente l'énergie électrique  $E_{el}$  stockée dans la capacité. Ce bilan de puissance intégré entre  $t = 0$  et l'infini donne :  $E_c(0) + E_{el}(0) = E_c(\infty) + E_{el}(\infty) + E_{Joule}$  avec  $E_{Joule} = \int_0^\infty Ri^2 dt$  l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance : l'énergie totale initiale est partiellement dissipée par effet Joule dans la résistance.

**Exercice 22.3**

- La spire va être en mouvement dans le champ magnétique de l'aimant, ce qui fait varier le flux de ce champ à travers la spire et entraîne, d'après la loi de Faraday, l'apparition d'une f.e.m induite  $e(t)$  et d'un courant induit dans la spire.

2. Le courant induit va créer un champ magnétique propre dont l'action sera de compenser la variation du champ ressenti par la spire. On en déduit donc, par la loi de Lenz,  $i > 0$  dans le cas (a), idem pour le cas (b),  $i > 0$  dans le cas (c) (le flux diminue si on tourne le circuit, d'où la nécessité pour le champ induit d'être dans la même direction que le champ de l'aimant), et  $i < 0$  dans le cas (d) (le flux change de signe par rapport au cas précédent).

### Exercice 22.4

1. Lorsque la spire va pénétrer dans la région où règne le champ magnétique, elle subira un phénomène d'induction dû à son mouvement dans  $\vec{B}_e$  : une f.e.m apparaîtra aux bornes de cette spire et le courant induit qui en résultera tendra par ses effets à contrer ce qui lui a donné naissance (loi de Lenz), c'est-à-dire à freiner la spire.

2. Pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $\Phi(t) = \iint_{\text{gris}} \vec{B}_e \cdot d\vec{S} = B_e x(t)a$ . Pour  $a < x \leq 2a$ ,  $\Phi(t) = B_e a(2a - x)$ .

3. D'après la loi de Faraday, pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_e a v(t)$

et pour  $a < x \leq 2a$ ,  $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = B_e a v(t)$ . Le schéma électrique équivalent est donné ci-contre.

On peut donc en déduire l'équation suivante :

pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $e(t) = Ri(t) = -B_e a v(t)$  ;

pour  $a < x \leq 2a$ ,  $e(t) = Ri(t) = B_e a v(t)$ .

Pour  $x > 2a$ ,  $i(t) = 0$  : il n'y a plus de phénomène d'induction, la spire continuera son chemin sans n'être plus freinée.

4. La force de Laplace est donnée par  $\vec{F}_{La} = \oint_{\text{spire}} Id\vec{OM} \wedge \vec{B}_e$ . Par symétrie, les deux côtés parallèles à  $Ox$  auront des contributions qui s'annuleront. Ne restera plus que les contributions des deux parties verticales, sachant que l'une d'entre elle sera nulle, car située en dehors du champ.

Il vient ainsi : pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $\vec{F}_{La} = iaB_e \vec{u}_x$ , et pour  $a < x \leq 2a$ ,  $\vec{F}_{La} = -iaB_e \vec{u}_x$

5. Pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $\vec{F}_{La} = iaB_e \vec{u}_x$ , soit  $\vec{F}_{La} = -\frac{B_e^2 a^2}{R} v(t) \vec{u}_x$ , et pour  $a < x \leq 2a$ ,  $\vec{F}_{La} = -iaB_e \vec{u}_x$  soit

$\vec{F}_{La} = -\frac{B_e^2 a^2}{R} v(t) \vec{u}_x$ . En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la spire et en la projetant

selon  $Ox$ , il vient pour  $0 \leq x \leq 2a$  :  $m \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B_e^2 a^2}{R} v(t)$ , soit  $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{B_e^2 a^2}{mR} v(t) = 0$ .

On résout cette équation, en posant  $\tau = \frac{mR}{B_e^2 a^2}$  :  $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$ .

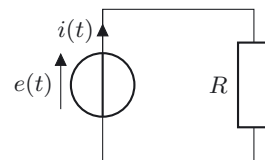
$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 \exp(-t/\tau)$ , d'où  $x(t) = v_0 \tau (1 - \exp(-t/\tau))$ .

$x(t)$  tend donc asymptotiquement vers  $v_0 \tau = \frac{mRv_0}{B_e^2 a^2}$ . Si  $\frac{mRv_0}{B_e^2 a^2} < 2a$ , c'est-à-dire si  $B_e^2 > \frac{v_0 mR}{2a^3}$ , la spire s'arrêtera avant de sortir complètement de la zone de champ.

Dans le cas où la spire sort de cette zone, elle en sort pour  $t_1$  tel que  $v_0 \tau (1 - \exp(-t_1/\tau)) = 2a$ , soit  $\exp(-t_1/\tau) = 1 - \frac{2a}{v_0 \tau}$ . La vitesse à cet instant est  $v_f = v(t_1) = v_0 \left(1 - \frac{2a}{v_0 \tau}\right)$ .

6. On multiplie l'équation électrique par  $i$  :  $e(t)i(t) = Ri(t)^2 = \mp B_e a v(t)i(t)$ , et l'équation mécanique par  $v(t)$  :  $mv(t) \frac{dv(t)}{dt} = \pm iaB_e v(t) = -Ri(t)$ , soit  $\frac{dE_c}{dt} + Ri^2 = 0$ , avec  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  énergie cinétique de la spire. Si on intègre cette équation entre  $t = 0$  et  $t = t_1$ , on obtient  $E_c(t_1) - E_c(0) = -\int_0^{t_1} Ri^2 dt$ , soit  $E_c(0) = E_c(t_1) + E_J$ , avec  $E_J$  l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.

L'énergie initiale se répartit donc entre l'énergie cinétique à l'instant  $t_1$  et l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.



**Exercice 22.5**

1. Le GBF crée au sein du circuit un courant électrique variable qui, grâce à la présence du champ magnétique et de la force de Laplace en découlant, va mettre en mouvement la barre  $T$ . Le mouvement de cette barre va engendrer un phénomène d'induction qui viendra modifier le courant : existence d'un couplage électromécanique. Le mouvement de la membrane couplée à la tige engendre des ondes sonores, via la force de frottement fluide.

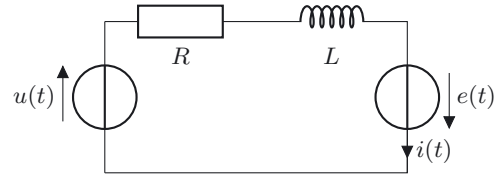
2. Le mouvement de la tige est responsable d'une variation du flux magnétique. Entre  $t$  et  $t + dt$ ,  $d\Phi(t) = -B_e av(t)$  (attention au sens du vecteur normal à la spire). D'où

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = B_e av(t).$$

Le schéma électrique équivalent est donné ci-contre.

La loi des mailles dans ce circuit équivalent conduit à :

$$u(t) + B_e av(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}.$$



3. La tige est soumise, selon l'axe horizontal  $Ox$ , à la force de Laplace  $\vec{F}_{La} = -i(t)aB_e \vec{u}_x$ , à la force de rappel  $\vec{R} = -k(x(t) - l_0) \vec{u}_x$  et à la force de frottement fluide  $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$ .

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la tige et projetée sur  $Ox$  conduit à :

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha \dot{x} - k(x(t) - l_0) - i(t)aB_e.$$

4. Pour l'équation électrique, on obtient :  $u(t)i(t) + e(t)i(t) = Ri^2(t) + Li(t) \frac{di(t)}{dt}$ , soit finalement :

$$u(t)i(t) + e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{d\left(\frac{Li^2(t)}{2}\right)}{dt}.$$

$u(t)i(t) = \mathcal{P}_g$  représente la puissance fournie par le générateur,  $e(t)i(t) = \mathcal{P}_e$  la puissance fournie par la f.e.m induite,  $Ri^2(t) = \mathcal{P}_J$  la puissance dissipée par effet Joule et  $\frac{Li^2(t)}{2} = E_{mag}$  l'énergie magnétique stockée dans la bobine.

Pour l'équation mécanique, on obtient :  $mv(t) \frac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t)^2 - kv(t)(x(t) - l_0) - v(t)i(t)aB_e$ , soit finalement :

$$\frac{d\left(\frac{mv^2(t)}{2} + \frac{k(x(t) - l_0)^2}{2}\right)}{dt} = -\alpha v(t)^2 - v(t)i(t)aB_e.$$

$E_m = \frac{mv^2(t)}{2} + \frac{k(x(t) - l_0)^2}{2}$  représente l'énergie mécanique de la tige,  $-\alpha v(t)^2 = \mathcal{P}_f$  la puissance dissipée par les forces de frottement (qui correspond à celle fournie à l'air et qui est donc responsable de la puissance sonore) et  $-v(t)i(t)aB_e = \mathcal{P}_{La}$  la puissance des forces de Laplace.

5. Nous remarquons que  $\mathcal{P}_{La} + \mathcal{P}_e = 0$  : cette équation est traduit l'existence du couplage électromécanique.

6. En combinant les deux bilans de puissance de façon à éliminer le terme  $v(t)i(t)aB_e$ , on obtient :

$$u(t)i(t) = Ri^2 + \alpha v^2 + \frac{d}{dt}(E_m + E_{mag}).$$

Pour obtenir un bilan énergétique, on intègre entre  $t = 0$  et  $t$ . En notant  $E_g(t)$  l'énergie fournie par le générateur entre ces deux instants,  $E_J(t)$  et  $E_f(t)$  les énergies dissipées par effet joule et frottement entre ces deux instants :

$$E_g(t) = E_J(t) + E_f(t) + \Delta(E_m + E_{mag}).$$

L'énergie fournie par le générateur est partiellement dissipée par effet Joule et dans les frottements fluides, ce qui reste correspond à la variation de l'énergie mécanique et électromagnétique.

La puissance utile correspond à la puissance dissipée dans les frottements fluides.

7. En moyenne sur une période :  $\langle u(t)i(t) \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle$ . On pourrait définir un rendement énergétique moyen pour ce haut-parleur :  $\eta = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle u(t)i(t) \rangle}$ .

8. a. Équation électrique :  $\underline{u} = (R + jL\omega)\underline{i} - B_e \alpha \underline{v}$ .

Équation mécanique :  $(mj\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha)\underline{v} = -aB_e \underline{i}$ .

b. On déduit de la seconde équation  $\underline{v} = \frac{-aB_e \underline{i}}{mj\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha}$ , qu'on réinjecte dans la première. On obtient

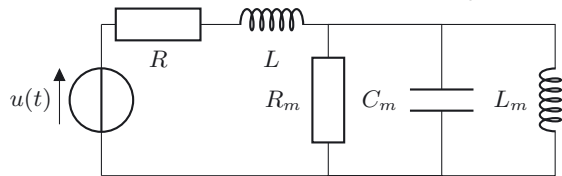
alors finalement :

$$\underline{u} = \left( R + jL\omega + \frac{a^2 B_e^2}{mj\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha} \right) \underline{i}.$$

Nous voyons ainsi que  $\underline{Z}_e = R + jL\omega$ , et  $\underline{Z}_m = \frac{a^2 B_e^2}{mj\omega + \frac{k}{j\omega} + \alpha}$ . En identifiant l'expression de  $\underline{Z}_m$

avec celle donnée dans l'énoncé, nous aboutissons à :  $R_m = \frac{a^2 B_e^2}{\alpha}$ ,  $L_m = \frac{a^2 B_e^2}{k}$  et  $C_m = \frac{m}{B_e^2 a^2}$ .

c.  $\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jL_m\omega} + jC_m\omega$  est l'admittance d'un circuit ( $R_m, C_m, L_m$ ) parallèle. Le schéma équivalent au haut-parleur est alors représenté sur le circuit ci-contre.



### Exercice 22.6

1. À cause du mouvement de la spire, le flux du champ magnétique à travers cette spire varie au cours du temps. D'après la loi de Faraday, il y a donc apparition d'une f.e.m et d'un courant induits dans cette spire.

2. Le flux magnétique s'écrit :  $\Phi(t) = \vec{B}_e \cdot \vec{n} = B_e \pi a^2 \cos(\theta(t))$ . La loi de Faraday amène à :

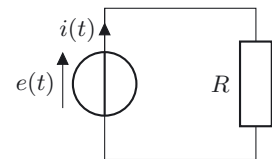
$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = B_e \pi a^2 \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) = B_e \pi a^2 \omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Le circuit équivalent est représenté ci-contre.

On déduit de la loi de maille l'expression de  $i(t)$  :

$$i(t) = \frac{B_e \pi a^2 \omega_0}{R} \sin(\omega_0 t).$$

La f.e.m variant de façon sinusoïdale, on a effectivement bien réalisé un GRS.



3. La puissance dissipée par effet Joule dans la spire est  $\mathcal{P}_J(t) = Ri^2(t) = \frac{(B_e \pi a^2 \omega_0)^2}{R} \sin^2(\omega_0 t)$ .

Sa valeur moyenne temporelle est alors  $\langle \mathcal{P}_J \rangle = \frac{(B_e \pi a^2 \omega_0)^2}{2R}$ .

4. La spire en rotation dans ce champ magnétique uniforme peut être assimilée à un dipôle magnétique  $\vec{m} = i\pi a^2 \vec{n}$  plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_e$ .

Elle subit un couple de moment  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_e = -i\pi a^2 B_e \sin(\omega_0 t) \vec{u}_z = -\frac{(B_e \pi a^2)^2 \omega_0}{R} \sin^2(\omega_0 t) \vec{u}_z$ , qui tendra à freiner sa rotation. Pour maintenir sa vitesse constante, le moteur doit donc exercer sur cette

spire le couple moteur  $\vec{\Gamma}_m = -\vec{\Gamma} = \frac{(B_e \pi a^2)^2 \omega_0}{R} \sin^2(\omega_0 t) \vec{u}_z$ .

La valeur moyenne de ce couple est  $\langle \vec{\Gamma}_m \rangle = \frac{(B_e \pi a^2)^2 \omega_0}{2R} \vec{u}_z = \langle \Gamma_m \rangle \vec{u}_z$ .

5. Nous voyons donc aisément d'après ce qui précède que  $\langle \Gamma_m \rangle \omega_0 = \langle \mathcal{P}_m \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle$  : la puissance mécanique fournie par le couple moteur à la spire sera entièrement dissipée par effet Joule dans la spire.

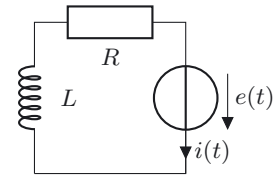
**Exercice 22.7**

1. En régime permanent établi, la bobine se comporte comme un fil, et ainsi  $i_1 = \frac{E}{r}$ . L'énergie stockée dans cette bobine est alors  $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{L E^2}{2 r^2}$ . Si on considère que toute cette énergie permet l'élevation de la charge, alors  $mgh = \frac{L E^2}{2 r^2}$ , soit  $h = \frac{L E^2}{2 mgr^2} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ m}$ , ce qui bien sûr n'est pas réaliste !

2. Il y a continuité de l'intensité du courant circulant dans une bobine, donc  $i(0) = \frac{E}{r} = 20 \text{ A}$ .

3. L'intensité circulant dans la tige y crée une force de Laplace qui la déplace. Ceci est responsable d'une variation du flux magnétique à travers le circuit et, d'après la loi de Faraday, de l'apparition d'une f.e.m induite  $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_e a v(t)$ .

Le circuit électrique équivalent est représenté ci-contre. La loi des mailles permet d'obtenir :  $Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = -B_e a v(t)$



4. La force de Laplace s'exerçant sur  $T$  est  $\vec{F}_{La}(t) = i(t) B_e a \vec{u}_x$ . Pour que  $M$  puisse être soulevé, il faut que  $i B_e a > mg$ , soit  $i > I_{\text{min}} = \frac{mg}{a B_e} = 13 \text{ A}$ . Le courant initial  $i(0)$  respecte bien cette condition.

5.  $M$  est soumis à son poids et à la tension du fil. Il vient par application de la loi de la quantité de mouvement :  $m \frac{dv(t)}{dt} = -mg + i(t) B_e a$ .

6. a. Courbe  $z(t)$  : nous remarquons que les hauteurs maximales atteintes sont de l'ordre du mètre, ce qui semble déjà plus raisonnable que la hauteur initialement prévue. De plus, ces graphes montrent clairement l'influence de l'inductance : plus cette dernière est importante, plus longue est la montée (on peut noter que le temps d'évolution varie presque proportionnellement à  $L$ ). La hauteur atteinte croît également avec  $L$ .

On observe dans une première phase une augmentation de  $z$ , puis dans une seconde phase,  $z$  diminue, alors que l'intensité, partant de  $i(0)$ , ne fait que décroître. Dans la première phase le régime est moteur et dans la seconde phase, générateur.

Courbe  $i(t)$  : L'intensité décroît plus rapidement avec le temps pour les faibles inductances.

La présence de deux bobines permet d'augmenter la hauteur et le temps de vol.

- b. On multiplie l'équation électrique par  $i(t)$  :  $Ri^2 + \frac{L}{2} \frac{di^2}{dt} = -B_e a v i$ .

On multiplie l'équation mécanique par  $v(t)$  :  $\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = -mgv + i B_e a v$ .

On obtient en faisant la somme de ces deux expressions :  $Ri^2 + \frac{L}{2} \frac{di^2}{dt} + \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = -mg \frac{dz}{dt}$ , soit, par intégration entre l'instant initial et l'instant  $t$  :

$E_J(t) + \frac{1}{2} L (i^2(t) - i^2(0)) + \frac{1}{2} (m v^2(t) - 0) + mg(z(t) - 0) = 0$  avec  $E_J(t)$  l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance pendant cet intervalle de temps. On peut aussi écrire :

$\frac{1}{2} L i^2(0) = E_{\text{mag}}(0) = E_J(t) + E_{\text{mag}}(t) + E_m(t)$  avec  $E_m$  l'énergie mécanique de  $M$  à  $t$ . L'énergie initialement stockée dans la bobine est partiellement dissipée par effet Joule dans la résistance et

aussi partiellement convertie en énergie mécanique  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$  et en énergie magnétique résiduelle  $E_{\text{mag}}(t)$ .

### Exercice 22.8

1. En l'absence de champ magnétique, la couronne est soumise à son poids  $\vec{P}$  qui s'applique en  $G$ , dont le moment par rapport à l'axe de rotation est  $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mga \sin(\theta)$ , à la réaction au niveau de l'axe de moment nul par rapport à ce dernier (absence de frottement). Le moment cinétique de cette couronne par rapport à  $Oz$  étant  $L_{Oz} = J\dot{\theta}$ , l'application de la loi du moment cinétique scalaire par rapport à  $Oz$  conduit à :  $J\ddot{\theta} + mga \sin(\theta) = 0$ .

Dans l'hypothèse des petits mouvements, cette équation devient  $\ddot{\theta} + \frac{mga}{J}\theta = 0$ . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{J}} = 16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. La couronne va se mouvoir dans le champ magnétique uniforme, il en résultera une variation du flux de ce champ à travers les  $N$  spires de cette couronne, d'où l'apparition d'une f.e.m et d'un courant induits, dont l'effet sera de s'opposer à ce qui leur donne naissance, c'est-à-dire au mouvement de la spire : il y aura donc apparition de forces de Laplace dont le moment sera résistant et freinera le pendule.
3. 
$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NB_e\pi a^2 \vec{u}_y \cdot \vec{n})}{dt} = -\frac{d[NB_e\pi a^2 \sin(\theta(t))]}{dt} = -NB_e\pi a^2 \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)).$$

La spire étant uniquement résistive, cette f.e.m est responsable de l'apparition de l'intensité induite suivante :  $i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{NB_e\pi a^2}{R} \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t))$ .

4.  $\vec{\Gamma} = i(t)N\pi a^2 \vec{n} \wedge B_e \vec{u}_y = NB_e\pi a^2 i(t) \cos(\theta(t)) \vec{u}_z$ .

L'application de la loi du moment cinétique scalaire par rapport à  $Oz$  conduit à :

$$J\ddot{\theta}(t) + mga \sin(\theta(t)) - NB_e\pi a^2 i(t) \cos(\theta(t)) = 0.$$

5. En remplaçant  $i(t)$  par son expression dans l'expression ci-dessus, on obtient :

$$J\ddot{\theta}(t) + mga \sin(\theta(t)) + \frac{N^2 B_e^2 \pi^2 a^4}{R} \dot{\theta}(t) \cos^2(\theta(t)) = 0.$$

La linéarisation de cette équation dans le cadre des mouvements de faible amplitude amène à :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{mga}{J}\theta(t) + \frac{N^2 B_e^2 \pi^2 a^4}{RJ} \dot{\theta}(t) = 0.$$

6. Nous reconnaissons l'équation d'un oscillateur amorti. Le retour le plus rapide de la couronne vers sa position d'équilibre correspond au régime critique, soit à  $\Delta = \left(\frac{N^2 B_e^2 \pi^2 a^4}{RJ}\right)^2 - 4\frac{mga}{J} = 0$ . On en

déduit donc  $B_{e,c} = \frac{1}{N\pi a^2} \sqrt{2RJ\omega_0} = 0,14 \text{ T}$ .

**Partie 5**

# **Architecture de la matière**





# Atomes et éléments

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi Mendeleïev a-t-il dû inverser les positions du tellure et de l'iode dans son tableau périodique proposé en 1869 ?

Afin de répondre à cette question, nous allons présenter la description quantique de l'atome et énoncer les règles permettant la mise en place de la configuration électronique d'un atome et la détermination de sa valence. Nous pourrions ainsi justifier la structure du tableau périodique utilisé actuellement et vérifier les positions du tellure et de l'iode.

### ■ 1 Quelques définitions

Même si le mot atome vient du grec « atomos » signifiant indivisible, nous savons qu'un atome n'est pas une particule élémentaire et qu'il est composé d'un noyau entouré d'un nuage électronique. Le noyau représente la quasi-totalité de la masse atomique, concentrée dans une infime partie de l'atome : le rayon d'un atome est environ  $10^{-10}$  m, alors que celui du noyau est environ  $10^{-15}$  m. Le noyau est composé de protons et de neutrons. Ces particules, appelées nucléons, sont quant à elles composées de quarks.

	proton	neutron	électron
masse (en kg)	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	$1,6749 \cdot 10^{-27}$	$9,1094 \cdot 10^{-31}$
charge (en C)	$+1,602 \cdot 10^{-19}$	0	$-1,602 \cdot 10^{-19}$

On note :

- $Z$  le nombre de protons dans le noyau et d'électrons dans l'atome.  $Z$  représente le nombre de charges de l'atome. Il est aussi appelé numéro atomique.
- $N$  le nombre de neutrons dans le noyau.
- $A = Z + N$  le nombre total de nucléons.  $A$  est aussi appelé nombre de masse.

#### □ Pourquoi $A$ s'appelle-t-il nombre de masse ?

Le nombre de masse peut nous renseigner sur la masse d'un atome et sur la masse d'une mole d'atomes. Pour l'expliquer, commençons par préciser l'unité de masse atomique (uma) et rappeler la définition de la mole.

L'unité de masse atomique est une unité de masse relative au carbone-12 (isotope du carbone contenant  $A = 12$  nucléons) pris comme référence, telle que  $1 \text{ uma} = \frac{1}{12}$ (masse d'un atome de carbone-12) :

$$1 \text{ uma} = 1,6606 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

La masse d'un proton et la masse d'un neutron valent environ une unité de masse atomique. Les électrons ont une masse beaucoup plus faible (de l'ordre de  $\frac{1}{1840}$  uma). Nous pouvons alors retenir qu'en négligeant la masse des électrons et la variation de masse survenant lors de la constitution du noyau, **la masse d'un atome vaut environ  $A$  uma.**

Une mole est la quantité de matière d'un système qui contient autant d'entités élémentaires (atomes, ions, électrons...) qu'il y a d'atomes dans exactement 12 g de carbone-12. Une mole contient un nombre d'entités égal à la constante d'Avogadro, dont la valeur expérimentale approchée est :

$$\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

La masse molaire d'un atome quelconque de masse  $m$  est  $M = m \mathcal{N}_a$ .

Cet atome étant composé de  $A$  nucléons, on peut dire d'après ce qui précède que  $m \simeq A$  en uma, soit  $m \simeq A \frac{1}{12}$  (masse d'un atome de carbone-12) en g. On en déduit que sa masse molaire  $M \simeq A \frac{1}{12}$  (masse d'une mole de carbone-12)  $\simeq A$  en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Nous pouvons alors retenir que **la masse molaire atomique vaut environ  $A \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .**

Attardons-nous maintenant sur quelques définitions essentielles pour la description de la matière.

#### Définition : Nucléide

Un nucléide est un ensemble d'atomes et d'ions dont les noyaux contiennent le même nombre de protons et le même nombre de neutrons, soit les mêmes  $Z$  et  $N$ . En pratique, pour identifier un nucléide, on utilise le nombre de masse  $A = Z + N$ . Son symbole est :



Exemples : le carbone-12 :  ${}^{12}_6\text{C}$ , le fer-56 :  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ , l'hydrogène-1 :  ${}^1_1\text{H}$ .

#### Définition : Élément chimique

Un élément chimique est l'ensemble des atomes et des ions ayant le même numéro atomique  $Z$ . Son symbole est :



Exemples : le carbone :  ${}_6\text{C}$ , le fer :  ${}_{26}\text{Fe}$ , l'hydrogène :  ${}_1\text{H}$ .

**Comment appelle-t-on deux nucléides différents d'un même élément chimique ?**

Ce sont des isotopes.

#### Définition : Isotopes

Les isotopes d'un même élément chimique sont caractérisés par le même numéro atomique  $Z$  mais se différencient par leur nombre de masse. Ils possèdent donc un même nombre de protons mais un nombre différent de neutrons.

Nous pouvons citer par exemple les principaux isotopes de l'élément carbone : le carbone-12 ( ${}^{12}_6\text{C}$ ), le carbone-13 ( ${}^{13}_6\text{C}$ ) et le carbone-14 ( ${}^{14}_6\text{C}$ ). Tous les isotopes d'un même élément chimique portent

le même nom à l'exception de l'élément chimique hydrogène. Ses trois principaux isotopes sont l'hydrogène-1 ( ${}^1_1\text{H}$ ), le deutérium ( ${}^2_1\text{H}$  ou  ${}^2_1\text{D}$ ) et le tritium ( ${}^3_1\text{H}$  ou  ${}^3_1\text{T}$ ).

Parmi les isotopes d'un même élément chimique, certains sont stables mais d'autres sont instables et sont radioactifs. Les noyaux radioactifs se transforment spontanément en émettant l'excès d'énergie sous forme de particule(s). Par exemple, le carbone-14 se transforme par une désintégration  $\beta^-$  et l'oxygène-15 par une désintégration  $\beta^+$ .

Lors d'une désintégration  $\beta^-$ , un neutron du noyau se transforme en proton et deux particules sont émises : un électron  $e^-$  et un anti-neutrino électronique  $\bar{\nu}_e$ . Dans le cas du carbone-14, la réaction nucléaire est la suivante :  ${}^{14}_6\text{C} \longrightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ .

De même, lors d'une désintégration  $\beta^+$ , au cours de laquelle un proton du noyau se transforme en neutron et deux particules sont émises : un positron  $e^+$  et un neutrino électronique  $\nu_e$ . Dans le cas de l'oxygène-15, la réaction nucléaire est la suivante :  ${}^{15}_8\text{O} \longrightarrow {}^{15}_7\text{N} + e^+ + \nu_e$ .

Nous remarquons qu'une réaction nucléaire modifie le nucléide.



Un électron est parfois noté  ${}^0_{-1}\text{e}$  et un positron  ${}^0_1\text{e}$  dans une équation bilan de réaction nucléaire. Il s'agit d'un symbole pratique permettant de réaliser des bilans de nucléons simples mais les chiffres ne doivent pas être interprétés comme des numéros atomiques ou des nombres de masse. Par exemple :  ${}^{14}_6\text{C} \longrightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^0_{-1}\text{e} + \bar{\nu}_e$ .

La désintégration  $\beta^-$  est due à un excès de neutrons (ou un défaut de protons) des isotopes radioactifs par rapport aux isotopes stables, en gris foncé dans la figure 23.1, tandis que la désintégration  $\beta^+$  est due à un excès de protons (ou un défaut de neutrons) des isotopes radioactifs par rapport aux isotopes stables.

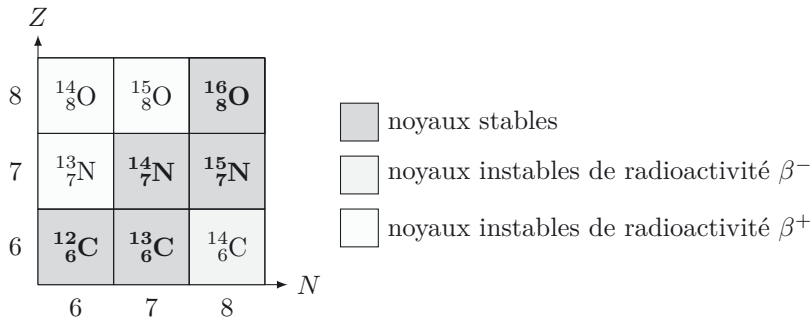


Figure 23.1. Diagramme (N, Z).

Il existe par ailleurs deux autres réactions nucléaires spontanées : la radioactivité  $\alpha$  au cours de laquelle un noyau d'hélium  ${}^4_2\text{He}$  est éjecté par le noyau qui se désintègre, et la radioactivité  $\gamma$  au cours de laquelle un rayonnement électromagnétique hautement énergétique est émis. Enfin, il existe des réactions de fission nucléaire (exploitées dans les réacteurs nucléaires) et de fusion nucléaire (dans les étoiles).

#### Définition : Abondance isotopique naturelle

L'abondance isotopique d'un isotope d'un élément chimique (observée dans la nature) est la proportion d'atomes de cet isotope par rapport au nombre total d'atomes de cet élément.

Nous pouvons citer l'exemple de l'élément fer qui est constitué de 28 isotopes, dont les plus abondants sont :  ${}_{26}^{54}\text{Fe}$ ,  ${}_{26}^{56}\text{Fe}$ ,  ${}_{26}^{57}\text{Fe}$  et  ${}_{26}^{58}\text{Fe}$ . En notant  $x$  l'abondance isotopique d'un isotope, nous pouvons préciser :  $x({}_{26}^{54}\text{Fe}) = 5,845\%$ ,  $x({}_{26}^{56}\text{Fe}) = 91,754\%$ ,  $x({}_{26}^{57}\text{Fe}) = 2,119\%$  et  $x({}_{26}^{58}\text{Fe}) = 0,282\%$ .



■ L'abondance isotopique correspond à un titre molaire (ou fraction molaire).

Dans la nature, un élément chimique se présente généralement comme un mélange de ses isotopes.

**La masse molaire d'un élément chimique** est par conséquent définie comme étant la **moyenne des masses molaires de chaque isotope pondérée par son abondance isotopique**. Soit pour l'élément fer cité précédemment :

$$M({}_{26}\text{Fe}) = x({}_{26}^{54}\text{Fe})M({}_{26}^{54}\text{Fe}) + x({}_{26}^{56}\text{Fe})M({}_{26}^{56}\text{Fe}) + x({}_{26}^{57}\text{Fe})M({}_{26}^{57}\text{Fe}) + x({}_{26}^{58}\text{Fe})M({}_{26}^{58}\text{Fe})$$

$$M({}_{26}\text{Fe}) = 0,05845 \times 53,9 + 0,91754 \times 55,9 + 0,02119 \times 56,9 + 0,00282 \times 57,9$$

$$M({}_{26}\text{Fe}) = 55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

### Définition : Corps simple

Un corps simple est une substance composée d'atomes d'un seul élément chimique. Il peut être monoatomique ou polyatomique. On le distingue des corps composés qui sont constitués d'atomes appartenant à des éléments chimiques différents.

Exemples : Fe(s), C(graphite), H<sub>2</sub>(g) sont des corps simples alors que FeO(s) et CO<sub>2</sub>(g) sont des corps composés.

### Définition : Espèce chimique

Une espèce chimique est un ensemble d'entités chimiques (atomes, molécules, ions ou radicaux libres) identiques. Une espèce chimique est caractérisée par son nom et sa formule chimique.

Exemples : les ions ferreux : Fe<sup>2+</sup>(aq), le sulfate de fer(II) : FeSO<sub>4</sub>(s), le fer solide : Fe(s), le dioxyde de carbone CO<sub>2</sub>(g), l'ion carbonate : CO<sub>3</sub><sup>2-</sup>(aq).

## ■ 2 Modèle quantique de l'atome

### Cas de l'atome d'hydrogène

L'électron de l'atome d'hydrogène est en interaction électromagnétique avec le noyau composé d'un unique proton. Dans le cadre de la mécanique classique, la position et la vitesse d'une particule seraient parfaitement déterminées à partir des conditions initiales, mais dans le modèle quantique de l'atome **l'électron doit être vu comme une onde**, une onde de matière ou une **onde de Broglie**. Il n'est plus possible de localiser l'électron en un point  $M$  de l'espace. L'électron est décrit par une fonction d'onde  $\psi(M, t)$  (voir chapitre 4), qui doit vérifier une équation différentielle fondamentale : l'équation de Schrödinger. Des solutions particulières, appelées états stationnaires, correspondant à une énergie  $E$  déterminée, sont recherchées sous la forme :

$$\psi(M, t) = \psi(M) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

$\psi(M)$  est la fonction d'onde indépendante du temps. On utilise les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  par rapport au noyau (l'axe  $Oz$  est *a priori* arbitraire). La fonction d'onde prend alors la forme suivante :  $\psi(M) = R(r)Y(\theta, \phi)$ , produit d'une fonction de  $r$  par une fonction des deux angles  $\theta$  et  $\phi$ .

De manière analogue à la particule confinée à une dimension (chapitre 4), l'électron confiné à trois dimensions dans l'atome, avec une force attractive de la part du noyau, a une fonction d'onde  $\psi(M)$  paramétrée par 3 nombres quantiques  $n, l, m_l$ . **Son énergie  $E$  est quantifiée**, c'est-à-dire qu'elle ne peut prendre que des valeurs discrètes dépendant du nombre quantique  $n$ . Plus précisément, la fonction d'onde  $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$  correspond à une énergie :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{où} \quad E_0 = 13,6 \text{ eV}$$



L'électron-volt (eV) est une unité d'énergie utilisée à l'échelle atomique. Elle correspond à l'énergie cinétique acquise par un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 V, soit  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

### Définition : Nombres quantiques

Les fonctions d'onde  $\psi_{n,l,m_l}$  sont déterminées par trois nombres quantiques :

- **$n$  est le nombre quantique principal :**  
 $n \in \mathbb{N}^*$  et détermine la couche de l'électron ainsi que son énergie.
- **$l$  est le nombre quantique secondaire ou azimutal :**  
 $l \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq l \leq n - 1$  et détermine la sous-couche de la couche considérée.
- **$m_l$  est le nombre quantique magnétique :**  
 $m_l \in \mathbb{Z}$  tel que  $-l \leq m_l \leq +l$ .



Le nombre quantique  $n$  détermine la valeur de l'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène, alors que le nombre quantique  $l$  détermine la norme de son moment cinétique orbital, et le nombre quantique  $m_l$  quantifie la projection du vecteur moment cinétique orbital de l'électron sur l'axe du champ magnétique appliqué.

### □ Quelle est l'allure du diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène ?

Le diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène est représenté sur la figure 23.2 : la couche  $n = 1$  correspond au niveau d'énergie  $E_1 = -E_0 = -13,6 \text{ eV}$ , la couche  $n = 2$  au niveau  $E_2 = -E_0/4 = -3,40 \text{ eV}$ ... Tant que l'électron est lié au noyau son énergie est négative. L'énergie la plus basse  $E_1 = -E_0$  correspond à l'**état fondamental**, c'est-à-dire l'**état stable de l'atome d'hydrogène**. Si l'atome est excité (par collision ou par absorption d'un photon), l'énergie absorbée fera passer l'électron de son niveau d'énergie  $E_1$  à un niveau énergétique plus élevé. Cependant, cet **état excité** est éphémère et l'électron retombe rapidement sur un niveau d'énergie plus bas en émettant son excès d'énergie sous forme d'un photon dont l'énergie est égale à la différence d'énergie des deux niveaux.

Par ailleurs, on appelle  $E_{\text{ion}} = -E_1 = E_0$  l'**énergie d'ionisation** de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour donner à l'électron une énergie positive et ainsi l'arracher de l'interaction attractive du noyau.

Pour finir, nous remarquons que dans l'état lié, plus  $n$  augmente, plus  $E_n$  augmente. Ainsi, pour les **couches supérieures** ( $n$  élevé), l'**électron est moins lié au noyau**. Nous verrons que la **probabilité** de trouver l'électron loin du noyau est, dans ce cas, plus importante.

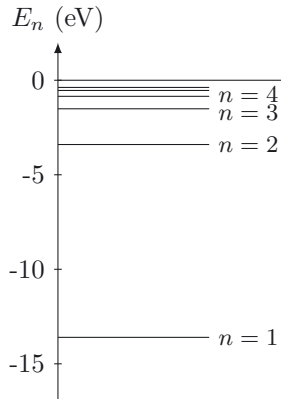


Figure 23.2. Diagramme énergétique de l'atome d'hydrogène.

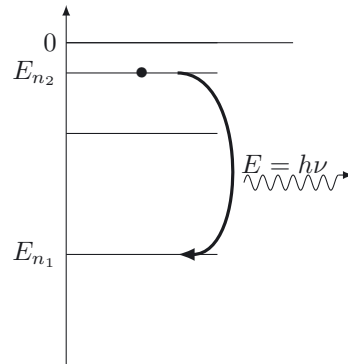


Figure 23.3. Désexcitation.

□ **Quelle est l'énergie du photon émis lors d'une désexcitation ? Quelle est la longueur d'onde du rayonnement associé ?**

Étudions le cas général où l'électron, ayant initialement un état de nombre quantique principal  $n_2$  et d'énergie  $E_{n_2}$ , subit une transition vers un état de nombre quantique  $n_1 < n_2$  et d'énergie  $E_{n_1} < E_{n_2}$  (figure 23.3). On rappelle la relation de Planck-Einstein précisant l'expression de l'énergie d'un photon :  $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$  (où  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ).

L'énergie du photon émis lors de la transition est égale à la différence des deux énergies :

$$E = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{-E_0}{n_2^2} - \frac{-E_0}{n_1^2}, \text{ soit } E = h\frac{c}{\lambda} = -E_0 \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right).$$

nement associé est donc :  $\lambda = \left( \frac{E_0}{hc} \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \right)^{-1}$

Voyons quelques transitions :

- Transition  $n_2 = 2$  vers  $n_1 = 1$  :  $\lambda_{2 \rightarrow 1} = 122 \text{ nm}$ . C'est un rayonnement dans l'ultraviolet.
- Transition  $n_2 = 3$  vers  $n_1 = 1$  :  $\lambda_{3 \rightarrow 1} = 103 \text{ nm}$ . C'est un rayonnement dans l'ultraviolet.
- Transition  $n_2 = 4$  vers  $n_1 = 2$  :  $\lambda_{4 \rightarrow 2} = 487 \text{ nm}$ . C'est un rayonnement dans le visible.

Cette expression de la longueur d'onde s'applique aussi à un rayonnement absorbé par l'atome. Par exemple, le rayonnement d'ionisation correspond à la transition de  $n_1 = 1$  vers  $n_2 \rightarrow +\infty$  soit  $\lambda_{\text{ion}} = hc/E_0 = 91 \text{ nm}$ .

□ **Quelles sont les fonctions d'onde décrivant l'électron dans l'atome d'hydrogène ?**

Une couche de l'atome d'hydrogène est définie par un nombre quantique principal  $n$ . À chaque couche est donc associée une énergie  $E_n$ . Une sous-couche est définie par le nombre quantique  $l$ , et identifiée par une lettre :

$l$	0	1	2	3	4	...
Sous-couche	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	...

Figure 23.4. Nomenclature des sous-couches.



L'origine des lettres caractérisant les sous-couches est historique et provient de la nomenclature spectroscopique : *s* pour *sharp*, *p* pour *principal*, *d* pour *diffuse*, *f* pour *fundamental*... La suite est obtenue par ordre alphabétique.

Lorsque l'atome est dans son état fondamental,  $n = 1$  et l'énergie de l'électron vaut  $E_1 = -E_0$ . Dans ce cas, le seul état possible de l'électron est décrit par la fonction d'onde  $\psi_{1,0,0}$ . L'électron se trouve alors sur la sous-couche *s* de la couche  $n = 1$ . Dans l'état excité  $n = 2$  l'électron est sur le niveau d'énergie  $E_2 = -E_0/4$  et il peut être décrit par plusieurs fonctions d'onde car plusieurs doublets  $(l, m_l)$  sont possibles. (Voir le tableau de la figure 23.5). On en déduit que l'électron peut se trouver sur la sous-couche *s* ( $l = 0$ ) ou la sous-couche *p* ( $l = 1$ ).

Dans la pratique, il est très courant de parler d'**orbitale atomique** plutôt que de fonction d'onde, avec une nomenclature spécifique qui précise la valeur du nombre quantique  $n$  et la lettre correspondant à la sous-couche. Ainsi, dans les états étudiés précédemment, nous aurions pu dire qu'à l'état fondamental ( $n = 1$ ), l'électron occupe l'orbitale atomique  $1s$ , et dans l'état excité ( $n = 2$ ), il occupe soit l'orbitale  $2s$  soit une orbitale  $2p$ .

Dans le tableau ci-dessous sont précisés quelques triplets  $(n, l, m_l)$  définissant la fonction d'onde  $\psi_{n,l,m_l}$  ou l'orbitale atomique.

$n$	1	2				3								
$l$	0	0	1	1	1	0	1	1	1	2	2	2	2	2
$m_l$	0	0	-1	0	1	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2
Orbitale	$1s$	$2s$	$2p$	$2p$	$2p$	$3s$	$3p$	$3p$	$3p$	$3d$	$3d$	$3d$	$3d$	$3d$
$E_n$	$E_1 = -\frac{E_0}{1^2}$	$E_2 = -\frac{E_0}{2^2}$				$E_3 = -\frac{E_0}{3^2}$								

Figure 23.5. Nombres quantiques et orbitales.

Nous pouvons faire deux remarques.

- Une sous-couche *s* ne contient qu'une seule orbitale atomique alors qu'une sous-couche *p* en contient trois, une sous-couche *d* en contient cinq. Plus généralement, une sous-couche de nombre quantique secondaire  $l$  contient  $2l + 1$  orbitale(s) atomique(s).
- La couche  $n = 1$  ne contient qu'une orbitale atomique alors que la couche  $n = 2$  en contient quatre, la couche  $n = 3$  en contient neuf. De manière générale, une couche de nombre quantique principal  $n$  contient  $n^2$  orbitale(s) atomique(s).



Lorsque plusieurs orbitales atomiques (ou fonctions d'onde) ont la même énergie, ces orbitales sont dites dégénérées. C'est le cas des orbitales d'une couche  $n$  pour  $n > 1$ .

## □ Quelles informations pouvons-nous déduire de ces fonctions d'onde ?

Avec le modèle quantique, l'électron est décrit par une fonction d'onde  $\psi(M) = R_{n,l}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ . Dans le cours de physique quantique (chapitre 4), nous avons vu que le module au carré de la fonction d'onde est une densité de probabilité de présence de l'électron dans l'espace. Plus précisément, la probabilité  $dP$  de trouver l'électron dans un petit volume  $d\tau$  autour d'un point  $M$  est  $dP(M) = |\psi(M)|^2 d\tau$ .

À partir de  $R_{n,l}(r)$ , la partie radiale de la fonction d'onde, on définit la fonction de distribution radiale  $P(r) = r^2 R_{n,l}(r)^2$ . La probabilité de trouver l'électron à une distance du noyau comprise entre  $r$  et  $r + dr$  est  $P(r)dr$ . La figure 23.6 montre  $P(r)$  en fonction de  $r/a_0$ , où  $a_0$  est le rayon de Bohr (52,8 pm).

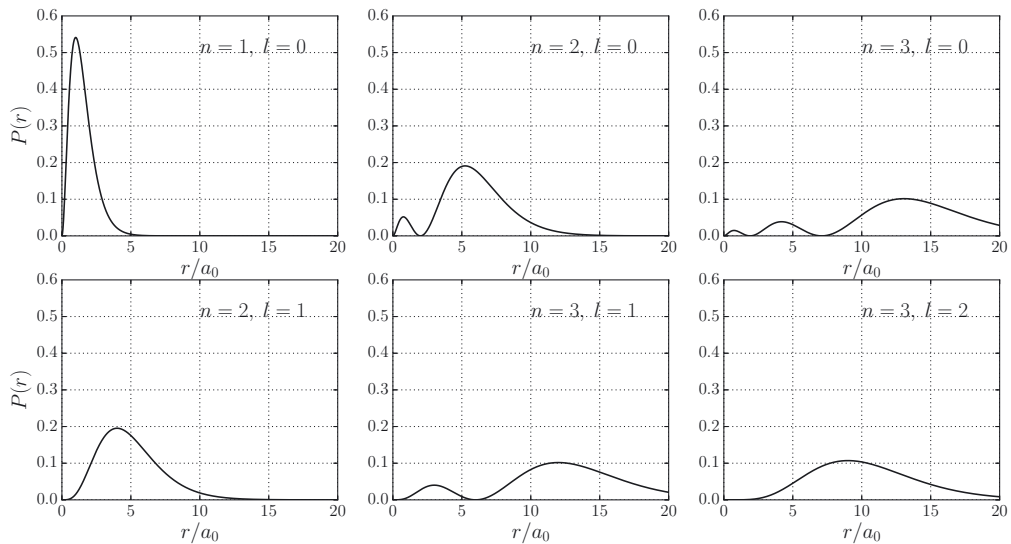


Figure 23.6. Distribution radiale pour les trois premiers niveaux d'énergie, avec  $a_0 = 52,8$  pm.

Nous remarquons que la probabilité de trouver l'électron est plus ou moins importante en fonction de la valeur de la distance  $r$  au noyau. On repère en particulier la distance  $r$  la plus probable, correspondant au maximum de la fonction de distribution radiale. De plus, nous remarquons que **plus l'électron a une énergie importante ( $n$  grand), plus la probabilité de le trouver loin du noyau est grande (moins il est lié au noyau)**.

Pour voir la dépendance angulaire de la densité de probabilité de présence de l'électron, il faut considérer le module au carré de la fonction  $Y_{l,m_l}(\theta, \phi)$ . La figure 23.7 montre  $|Y_{l,m_l}(\theta, \phi)|^2$  représenté sous la forme d'une surface en coordonnées sphériques  $(\rho, \theta, \phi)$  avec  $\rho = |Y_{l,m_l}(\theta, \phi)|^2$ .

Nous remarquons des géométries très différentes en fonction des valeurs de  $l$  et de  $m_l$ . Par exemple dans le cas de l'atome dans son état fondamental, l'électron est décrit par la fonction d'onde  $\psi_{0,0,0}$  dont la représentation angulaire montre une symétrie sphérique autour du noyau. Cette symétrie sphérique se retrouve dans toutes les orbitales  $s$ .



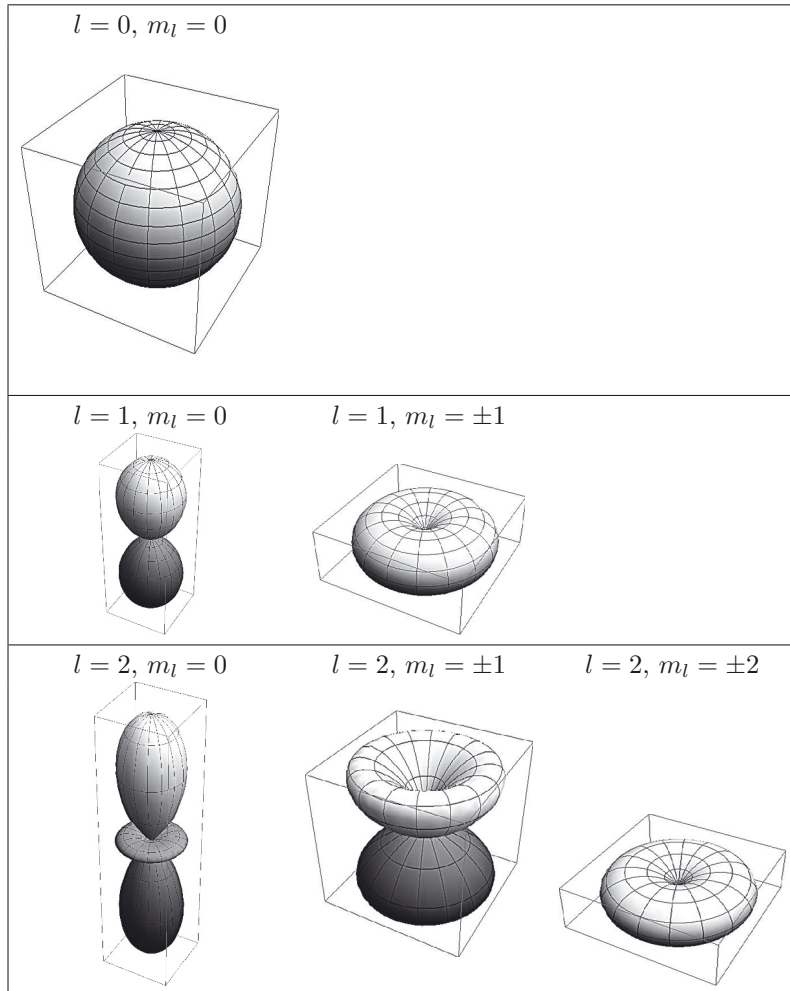


Figure 23.7. Distribution angulaire pour les sous-couches  $s$ ,  $p$  et  $d$  (échelles non respectées).

### Cas des ions hydrogéoïdes

Comme l'atome d'hydrogène, un ion hydrogéoïde ne possède qu'un seul électron dans son cortège électronique (un tel ion est obtenu à partir d'un atome ayant perdu tous ses électrons sauf un). Cependant, avec un noyau de charge  $+Ze$  ( $Z$  étant le numéro atomique et  $e$  la charge élémentaire) l'interaction électron-noyau est plus forte, et la résolution de l'équation de Schrödinger donne des niveaux d'énergie similaires à ceux de l'atome d'hydrogènes, mais plus bas (de valeur absolue plus grande) :

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

### Cas des atomes polyélectroniques

La résolution de l'équation de Schrödinger pour un électron dans un atome polyélectronique est beaucoup plus difficile que sa résolution pour l'atome d'hydrogène, à cause des interactions répulsives entre les électrons qui viennent s'ajouter à l'interaction attractive électron-noyau. Les orbitales de l'atome d'hydrogène sont encore approximativement valables pour un électron dans un atome polyélectronique, mais leur énergie est modifiée. Nous présentons ici les principaux résultats.

- Comme pour l'électron de l'atome d'hydrogène, la fonction d'onde d'un électron d'un atome polyélectronique est paramétrée par les trois nombres quantiques  $n$ ,  $l$  et  $m_l$  et les orbitales atomiques sont toujours notées  $ns$ ,  $np$ ,  $nd$ , etc.
- L'énergie d'un électron dépend des deux nombres quantiques  $n$  et  $l$ , et pas seulement de  $n$ . Deux orbitales de la même sous-couche (même  $l$ ) ne sont plus dégénérées. C'est ce qu'on appelle une levée de dégénérescence.
- Il n'existe pas d'expression analytique simple pour déterminer les niveaux d'énergie dans un atome polyélectronique.

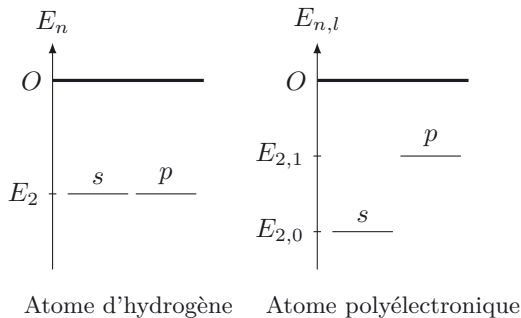


Figure 23.8. Levée de dégénérescence.

Étudions par exemple le cas de la couche  $n = 2$  : celle-ci est composée de deux sous-couches  $s$  et  $p$  correspondant aux nombres quantiques  $l = 0$  et  $l = 1$ . Dans l'atome d'hydrogène, ces deux sous-couches sont au même niveau d'énergie car elles appartiennent à la même couche (même  $n$ ). Ce n'est plus le cas dans un atome polyélectronique car les nombres quantiques  $l$  sont différents. Les orbitales  $2p$  ont une énergie supérieure à celle de l'orbitale  $2s$ .

Ce problème soulève alors deux questions : comment classer les niveaux d'énergie ? Comment affecter les différents électrons à ces niveaux d'énergie pour déterminer l'état fondamental de l'atome ?

## ■ 3 Principe d'élaboration des configurations électroniques

Nous devons tout d'abord préciser une nouvelle notion : le **spin de l'électron**. En effet, si on se limite à la fonction d'onde  $\psi_{n,l,m_l}$  décrivant l'électron autour du noyau, il n'est pas possible d'interpréter certains résultats expérimentaux. C'est le cas de l'expérience de Stern et Gerlach (expérience de déviation d'atomes d'argent dans un champ magnétique non uniforme) mais aussi de l'existence de dédoublement de raies spectrales (comme par exemple le doublet jaune du sodium). Pour y remédier, il est alors nécessaire de prendre en compte le spin de l'électron. **Ce spin  $s$  est une caractéristique intrinsèque de l'électron au même titre que sa masse  $m$  et sa charge  $-e$ .** Ainsi, l'électron est une particule quantique de la famille des fermions, dont le spin est  $s = 1/2$ . Ce spin ne possède pas d'équivalent en physique classique : il quantifie le moment cinétique intrinsèque de l'électron, et il est à l'origine d'un quatrième nombre quantique nécessaire pour décrire un électron : le nombre quantique magnétique de spin.

**Définition : Nombre quantique magnétique de spin**

Le nombre quantique magnétique de spin de l'électron  $m_s$  peut prendre deux valeurs :

$$m_s = +\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m_s = -\frac{1}{2}$$



On dit parfois abusivement qu'un électron possède un spin  $1/2$  ou un spin  $-1/2$  lorsque  $m_s = 1/2$  ou  $m_s = -1/2$  respectivement.

Il faut savoir que deux électrons d'un même atome et de même nombre quantique magnétique de spin ne peuvent être dans le même état quantique  $(n, l, m_l)$ . C'est le principe d'exclusion de Pauli, applicable à tout fermion :

**Principe d'exclusion de Pauli**

Il est impossible d'avoir, au sein d'un même atome, deux électrons avec les quatre nombres quantiques  $(n, l, m_l, m_s)$  identiques.

On en déduit que seuls deux électrons de nombres quantiques magnétiques de spin opposés peuvent être décrits par la même fonction d'onde  $\psi_{n,l,m_l}$ . Il ne peut donc y avoir que **deux électrons au maximum par orbitale atomique**. Ces deux électrons sont dits appariés. Dans le cas où un seul électron occupe une orbitale atomique, celui-ci est dit célibataire. Par convention, on utilise une flèche vers le haut pour un électron de nombre quantique  $m_s = +1/2$  et une flèche vers le bas pour un électron de nombre quantique  $m_s = -1/2$ . Sur la figure 23.9, une orbitale atomique d'énergie  $E_{n,l}$  (représentée par un trait horizontal) est remplie avec un ou deux électrons.

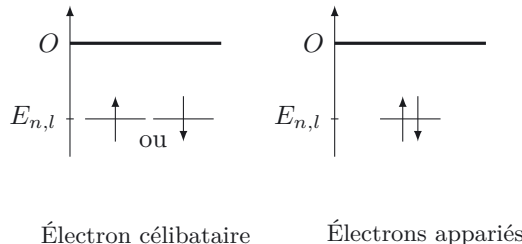


Figure 23.9. Représentation des électrons dans une orbitale.

□ **Comment déterminer la configuration électronique d'un atome polyélectronique dans son état fondamental ?**

Déterminer la configuration électronique d'un atome consiste à répartir les électrons de l'atome sur les différentes orbitales. Cette répartition, qui peut être quelconque dans un état excité, est au contraire unique dans l'état fondamental.

Dans l'état fondamental, les électrons occupent des états quantiques tels que l'énergie de l'atome soit minimale. Nous allons donc classer les orbitales atomiques par ordre croissant d'énergie.

**Règle de Klechkowski**

- L'énergie d'une orbitale atomique est une fonction croissante de la somme  $(n + l)$ .
- En cas d'égalité, l'orbitale atomique de plus basse énergie est celle correspondant au nombre quantique  $n$  le plus petit.

Étudions quelques exemples.

- La somme  $(n + l)$  de l'orbitale  $1s$  vaut 1 ( $1+0$ ), alors qu'elle vaut 2 ( $2+0$ ) pour l'orbitale  $2s$ . Ainsi l'énergie de l'orbitale  $1s$  est plus faible que celle de l'orbitale  $2s$ .
- La somme  $(n + l)$  de l'orbitale  $2s$  vaut 2 ( $2+0$ ), alors qu'elle vaut 3 ( $2+1$ ) pour une orbitale  $2p$ . Ainsi l'énergie de l'orbitale  $2s$  est plus faible que celle d'une orbitale  $2p$ .
- En étudiant les orbitales  $3d$  et  $4s$ , nous pouvons remarquer que la somme  $(n + l)$  vaut 5 pour une orbitale  $3d$ , alors qu'elle vaut 4 pour l'orbitale  $4s$ . Ainsi, l'orbitale  $4s$  a une énergie plus basse que l'orbitale  $3d$  (mais la différence d'énergie est très faible).

Afin de faciliter la détermination de ce classement, nous pouvons utiliser un outil graphique, comme présenté ci-contre : le nom de l'orbitale atomique est précisé pour chaque couple  $(n, l)$  et la somme  $(n + l)$  est indiquée entre parenthèses. La flèche en pointillés donne l'ordre des orbitales atomiques d'après la règle de Klechkowski.

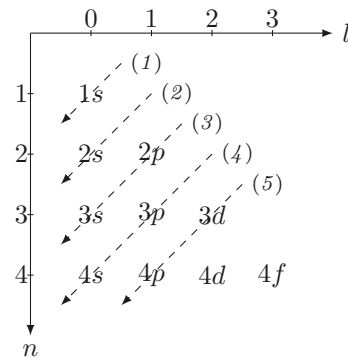


Figure 23.10. Méthode graphique de classement des orbitales atomiques.

Nous en déduisons un classement des premières orbitales atomiques par ordre croissant d'énergie :  $1s - 2s - 2p - 3s - 3p - 4s - 3d - 4p \dots$

Pour placer des électrons dans des orbitales d'une même sous-couche, par exemple dans les trois orbitales  $2p$ , on doit appliquer la règle de Hund :

**Règle de Hund**

Lorsque le nombre d'électrons est insuffisant pour remplir une sous-couche, l'état de plus basse énergie de l'atome est obtenu en utilisant le maximum d'orbitales atomiques, les électrons non appariés ayant le même nombre quantique magnétique de spin.

Étudions l'exemple de deux électrons situés dans la sous-couche  $2p$  composée de trois orbitales atomiques ( $n = 2$ ,  $l = 1$  et  $m_l = -1, 0, 1$ ). D'après la règle de Hund, dans l'état fondamental, les deux électrons occupent deux orbitales atomiques différentes avec un même nombre quantique magnétique de spin, par exemple :  $m_s = +1/2$ . Les cas où les deux électrons sont appariés sur la même orbitale atomique, ou avec deux spins opposés sur deux orbitales atomiques différentes, correspondent à des états plus hauts en énergie. Ce sont des états excités de l'atome.

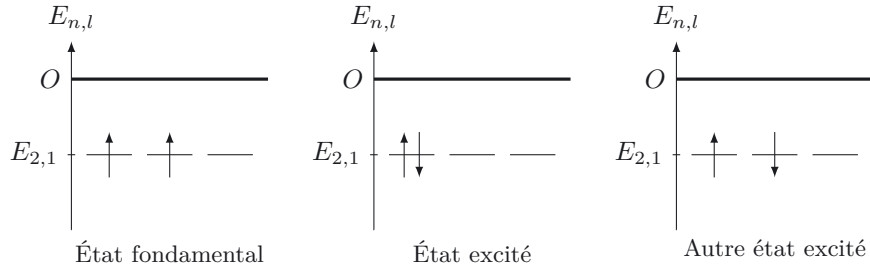


Figure 23.11. Illustration de la règle de Hund.



La règle de Hund est essentielle pour compléter la règle de Klechkowski. En effet, cette dernière nous précise comment classer les orbitales atomiques par ordre croissant d'énergie lorsqu'elles sont vides. Cependant en fonction du nombre d'électrons occupant le niveau d'énergie et de leurs répartitions sur les différentes orbitales atomiques, les niveaux d'énergie sont légèrement modifiés.

### Méthode 23.1 : Déterminer la configuration électronique d'un atome

- Utiliser la règle de Klechkowski afin de classer les orbitales atomiques par ordre d'énergie croissante.
- Remplir les orbitales atomiques par énergie croissante, en respectant le principe d'exclusion de Pauli (pas plus de deux électrons par orbitale atomique).
- Utiliser la règle de Hund si la dernière sous-couche n'est pas remplie.

➔ Exercices (23.1) (23.2)



Une sous-couche  $s$ , étant composée d'une orbitale  $ns$ , ne peut contenir que deux électrons au maximum. Une sous-couche  $p$ , étant composée de trois orbitales  $np$ , peut en contenir jusqu'à six. Une sous-couche  $d$ , composée de cinq orbitales  $nd$ , peut en contenir jusqu'à dix.

□ Quelles sont les configurations électroniques des atomes de bore, carbone, azote et oxygène dans leur état fondamental ?

L'atome de bore contient  $Z = 5$  électrons :

- Deux électrons occupent le niveau d'énergie le plus bas, c'est-à-dire l'orbitale  $1s$ .
- Deux autres se situent au niveau supérieur et remplissent l'orbitale  $2s$ .
- Le dernier électron se situe sur le troisième niveau, c'est-à-dire celui de la sous-couche  $p$  de la couche  $n = 2$ , qui est constituée de trois orbitales atomiques ( $n = 2, l = 1$  et  $m_l = -1, 0, 1$ ). L'électron est donc sur l'une des trois orbitales  $2p$ .

Dans le cas de l'atome de carbone ( $Z = 6$ ), il faut placer deux électrons sur la sous-couche  $p$  de la couche  $n = 2$  en respectant la règle de Hund, c'est-à-dire en plaçant les électrons sur deux orbitales  $2p$  différentes avec le même nombre quantique  $m_s$ .

Pour l'atome d'azote ( $Z = 7$ ), les trois électrons sur la sous-couche  $2p$  occupent les trois orbitales atomiques avec là-aussi un même nombre quantique magnétique de spin.

À partir de l'atome d'oxygène ( $Z = 8$ ), on peut commencer à appairer les électrons.

Ces exemples sont illustrés par les diagrammes énergétiques présentés figure 23.12 où chaque trait horizontal correspond à une orbitale atomique. Nous retrouvons ainsi l'orbitale  $1s$  au niveau d'énergie le plus bas, puis l'orbitale  $2s$  et les trois orbitales  $2p$ .

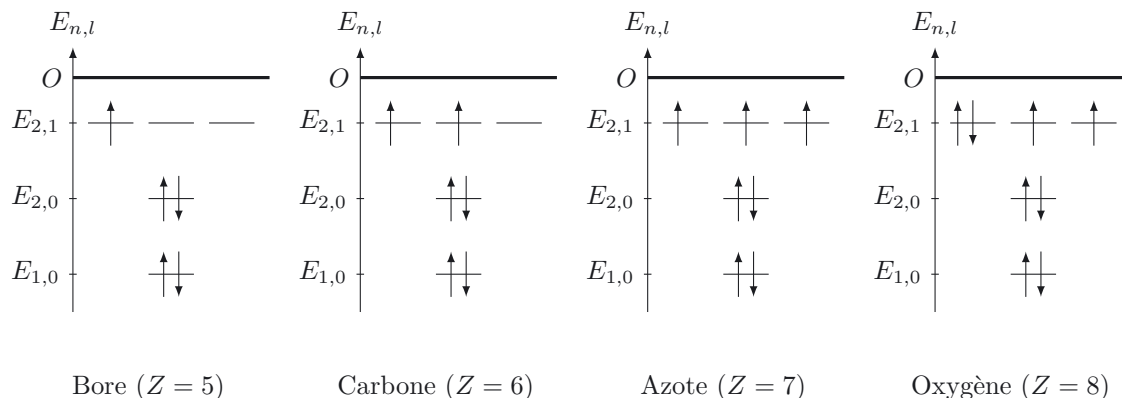


Figure 23.12. Exemples de remplissage d'orbitales atomiques.

Lors de l'élaboration de la configuration électronique d'un atome, il est courant de ne préciser que les sous-couches par ordre croissant d'énergie en notant en exposant le nombre d'électrons présents par sous-couche, sans préciser le détail du remplissage de chaque sous-couche :

- Bore :  $1s^2 2s^2 2p^1$ .
- Carbone :  $1s^2 2s^2 2p^2$ .
- Azote :  $1s^2 2s^2 2p^3$ .
- Oxygène :  $1s^2 2s^2 2p^4$ .

Sont précisées ci-dessous les configurations électroniques des atomes dans leur état fondamental jusqu'à  $Z = 54$ . Les expressions de ces configurations sont encore allégées en remplaçant les électrons de cœur par le gaz noble qui précède l'atome étudié (ces notions d'électrons de cœur et de gaz noble seront précisées plus loin).

1	H	$1s^1$	19	K	$[\text{Ar}] 4s^1$	37	Rb	$[\text{Kr}] 5s^1$
2	He	$1s^2$	20	Ca	$[\text{Ar}] 4s^2$	38	Sr	$[\text{Kr}] 5s^2$
3	Li	$[\text{He}] 2s^1$	21	Sc	$[\text{Ar}] 3d^1 4s^2$	39	Y	$[\text{Kr}] 4d^1 5s^2$
4	Be	$[\text{He}] 2s^2$	22	Ti	$[\text{Ar}] 3d^2 4s^2$	40	Zr	$[\text{Kr}] 4d^2 5s^2$
5	B	$[\text{He}] 2s^2 2p^1$	23	V	$[\text{Ar}] 3d^3 4s^2$	41	Nb	$[\text{Kr}] 4d^4 5s^1$
6	C	$[\text{He}] 2s^2 2p^2$	24	Cr	$[\text{Ar}] 3d^5 4s^1$	42	Mo	$[\text{Kr}] 4d^5 5s^1$
7	N	$[\text{He}] 2s^2 2p^3$	25	Mn	$[\text{Ar}] 3d^5 4s^2$	43	Tc	$[\text{Kr}] 4d^5 5s^2$
8	O	$[\text{He}] 2s^2 2p^4$	26	Fe	$[\text{Ar}] 3d^6 4s^2$	44	Ru	$[\text{Kr}] 4d^7 5s^1$
9	F	$[\text{He}] 2s^2 2p^5$	27	Co	$[\text{Ar}] 3d^7 4s^2$	45	Rh	$[\text{Kr}] 4d^8 5s^1$
10	Ne	$[\text{He}] 2s^2 2p^6$	28	Ni	$[\text{Ar}] 3d^8 4s^2$	46	Pd	$[\text{Kr}] 4d^{10}$
11	Na	$[\text{Ne}] 3s^1$	29	Cu	$[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^1$	47	Ag	$[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1$
12	Mg	$[\text{Ne}] 3s^2$	30	Zn	$[\text{Ar}] 3d^{10} 4s^2$	48	Cd	$[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^2$
13	Al	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^1$	31	Ga	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^1$	49	In	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^1$
14	Si	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^2$	32	Ge	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^2$	50	Sn	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^2$
15	P	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^3$	33	As	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^3$	51	Sb	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^3$
16	S	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^4$	34	Se	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^4$	52	Te	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^4$
17	Cl	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^5$	35	Br	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^5$	53	I	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^5$
18	Ar	$[\text{Ne}] 3s^2 3p^6$	36	Kr	$[\text{Ar}] 4s^2 4p^6$	54	Xe	$[\text{Kr}] 5s^2 5p^6$

Figure 23.13. Exemples de configurations électroniques.



Les règles de remplissage fournissent une méthode simple de détermination des configurations électroniques mais il existe des exceptions à ces règles, dues aux variations d'énergie en fonction du taux de remplissage d'une sous-couche. Ces exceptions sont déduites de l'expérience.

Ces exceptions se trouvent principalement en bas du tableau périodique, c'est-à-dire à partir de la quatrième période, car les niveaux d'énergie (vides) sont très proches. On peut citer par exemple le cas de la famille des métaux nobles :  $_{29}\text{Cu}$ ,  $_{47}\text{Ag}$  et  $_{79}\text{Au}$ , dont les configurations sont de la forme  $[\text{X}]ns^1(n-1)d^{10}$  au lieu de  $[\text{X}]ns^2(n-1)d^9$ . La configuration où la sous-couche  $(n-1)d$  est remplie et la sous-couche  $ns$  est demi-remplie a une énergie plus basse que la configuration donnée par la règle de Klechckowski. Ce genre d'exception existe aussi dans le cas d'une sous-couche  $(n-1)d$  demi-remplie. Ainsi, le chrome dont la configuration devrait être  $[\text{Ar}]4s^2 3d^4$  a une configuration à l'état fondamental de la forme  $[\text{Ar}]4s^1 3d^5$ . La connaissance des exceptions n'est pas exigible.

Les règles de Klechckowski, de Pauli et de Hund restent valables pour déterminer la configuration électronique des ions monoatomiques d'un élément.

### Méthode 23.2 : Déterminer la configuration d'un ion monoatomique

Pour déterminer la configuration électronique d'un ion monoatomique dans son état fondamental, il faut :

- déterminer la configuration de l'atome d'après les règles citées précédemment ;
- dans le **cas d'un anion** : ajouter les électrons supplémentaires ;
- ou dans le **cas d'un cation** : retirer les électrons de la sous-couche correspondant au nombre quantique  $n$  le plus élevé (ce sont les électrons les moins liés au noyau).



Exercice (23.2)

□ **Quelles sont les configurations électroniques des ions sodium, calcium, et fluorure ?**

- Cas de l'ion sodium  ${}_{11}\text{Na}^+$  : la configuration électronique de l'atome est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ . C'est donc l'électron  $3s$  qui est arraché lors de l'ionisation du sodium. On en déduit la configuration électronique de l'ion sodium :  $1s^2 2s^2 2p^6$  (configuration du néon).
- De même pour l'ion calcium  ${}_{20}\text{Ca}^{2+}$  : la configuration électronique de l'atome est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$ . Les deux électrons arrachés sont les électrons  $4s$  et la configuration électronique de l'ion calcium est  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$  (configuration de l'argon).
- Dans le cas de l'ion fluorure  ${}_{9}\text{F}^-$ , l'ajout d'un dixième électron permet le remplissage de la sous-couche  $2p$ . Ainsi, la configuration de l'ion fluorure est  $1s^2 2s^2 2p^6$  (configuration du néon).

Nous remarquons sur ces trois exemples que les ions stables ont tous des sous-couches remplies. Ce n'est pas une règle générale.

□ **Quelles sont les configurations électroniques des ions argent, cuivre et fer ?**

Ces trois exemples se trouvent parmi les éléments de transition (c'est-à-dire les éléments situés dans les colonnes 3 à 12 du tableau périodique). Étudions les états d'ionisation stables de ces éléments :  ${}_{47}\text{Ag}^+$ ,  ${}_{29}\text{Cu}^{2+}$ ,  ${}_{26}\text{Fe}^{2+}$  et  ${}_{26}\text{Fe}^{3+}$ .

- La configuration électronique de l'argent étant  $[\text{Kr}]4d^{10}5s^1$ , celle de l'ion argent(I) est donc  $[\text{Kr}]4d^{10}5s^0$ .
- Le cuivre a une configuration électronique similaire  $[\text{Ar}]3d^{10}4s^1$ . Pourtant, l'état d'ionisation le plus stable n'est pas le cuivre(I) mais le cuivre(II), dont la configuration électronique est  $[\text{Ar}]3d^9 4s^0$ . La stabilisation par sous-couche remplie ou demi-remplie n'est donc pas généralisable.

## ■ 4 Électrons de cœur et électrons de valence

Les **électrons de valence** sont les électrons qui interviennent dans les **liaisons chimiques** et qui sont à l'origine des **propriétés chimiques** des différents éléments chimiques. On les distingue ainsi des autres électrons, plus liés au noyau, qu'on appelle les **électrons de cœur**.

### Définition : Électrons de valence

Les électrons de valence sont les électrons de la couche ayant le nombre quantique  $n$  le plus élevé ainsi que les électrons de la sous-couche  $(n-1)d$  si elle est en cours de remplissage.

Cette définition s'étend aux atomes lourds : les électrons de la sous-couche  $(n-2)f$  sont des électrons de valence si cette sous-couche est en cours de remplissage.

□ **Quels sont les électrons de valence de l'azote, du magnésium, du fer et de l'arsenic ?**

Dans tous les cas, il faut commencer par donner les configurations électroniques des atomes dans leur état fondamental. Les électrons de valence sont soulignés dans les configurations suivantes :

- Azote  ${}_{7}\text{N}$  :  $1s^2 2s^2 2p^3$ .
- Magnésium  ${}_{12}\text{Mg}$  :  $1s^2 2s^2 2p^6 \underline{3s^2}$ .
- Fer  ${}_{26}\text{Fe}$  :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \underline{4s^2} 3d^6$ .
- Arsenic  ${}_{33}\text{As}$  :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 \underline{4s^2} 3d^{10} \underline{4p^3}$ .



## ■ 5 Architecture du tableau périodique

Le tableau périodique que nous utilisons aujourd'hui (figure 23.16) est le descendant du tableau proposé en 1869 par Dmitri Mendeleïev (1834-1907). Dans la version historique, D. Mendeleïev avait classé les atomes par masses atomiques croissantes, en les regroupant en colonne lorsqu'ils avaient des propriétés chimiques similaires.

### Retour au contexte

Avant de commencer ce chapitre, nous nous demandions pourquoi D. Mendeleïev avait dû faire des inversions d'atomes dans son tableau. Nous pouvons désormais répondre à cette question. Les propriétés chimiques étant dues aux électrons de valence, les atomes ayant des propriétés chimiques similaires sont ceux ayant une configuration électronique de valence similaire. Dans le tableau périodique actuel, les éléments chimiques sont classés par numéro atomique  $Z$  croissant, avec une disposition en colonne pour les éléments ayant des configurations de valence similaires. Le tellure ( $_{52}\text{Te}$ ) doit être placé avant l'iode ( $_{53}\text{I}$ ) car il possède un électron de moins, et cela malgré les masses atomiques qui valent respectivement 127,6 uma et 126,9 uma.

### Le tableau périodique actuel

Le tableau (figure 23.16) est composé de **118 cases** correspondant aux **118 éléments chimiques** connus aujourd'hui. Chaque élément chimique pouvant être composé de nombreux isotopes, il existe aujourd'hui plus de 3000 nucléides connus dont 250 environ sont stables et naturels. Les autres sont radioactifs (naturels ou artificiels). À partir de l'uranium ( $Z = 92$ ), tous les éléments chimiques sont radioactifs.

Les éléments chimiques sont classés de gauche à droite par numéro atomique  $Z$  croissant, et on change de ligne lorsqu'on commence à remplir une nouvelle sous-couche  $ns$ . Le tableau est alors composé de **sept lignes appelées périodes** et de 18 colonnes (ou groupes). On parle de période, et donc de tableau périodique, car les propriétés chimiques se retrouvent (approximativement) périodiquement lorsqu'on passe d'une ligne à l'autre. Cette périodicité est due à la similitude des configurations de valence des éléments situés sur une même colonne. Par exemple, l'oxygène (ligne 2) a une configuration de valence  $2s^2 2p^4$ , similaire à la configuration  $3s^2 3p^4$  du soufre, situé sur la même colonne mais sur la ligne 3.

On distingue aussi **quatre blocs** :  $s$ ,  $p$ ,  $d$  et  $f$  en référence à la dernière sous-couche en cours de remplissage. Chaque bloc est constitué d'autant de colonnes que la sous-couche peut accueillir d'électrons, soit  $2(2l + 1)$  colonnes. La structure en blocs est donnée figure 23.16 où sont aussi précisés les numéros atomiques et les masses molaires de chaque élément chimique (en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Pour finir, chaque **colonne** correspond à une **famille chimique**, l'élément hydrogène et le bloc  $f$  étant placés à part.

Nous décrivons ci-dessous quelques familles chimiques. Les états physiques stables des corps purs cités sont précisés à  $25^\circ\text{C}$  sous une pression de 1 bar.

### La famille des gaz nobles (située colonne 18)

Les éléments chimiques de la famille des gaz nobles ont une configuration électronique en  $ns^2 np^6$  (sauf l'hélium dont la configuration électronique est  $1s^2$ ). Leur couche de valence complètement remplie leur confère une grande stabilité. Ils ne cherchent donc pas à changer d'environnement électronique et sont très peu réactifs. Ils sont stables sous forme de gaz monoatomiques.

### L'hydrogène ${}_1\text{H}$

C'est élément chimique le plus petit. De configuration électronique  $1s^1$ , cet élément peut facilement

perdre son électron pour donner l'ion oxonium  $H^+$  ou en gagner un pour former un hydruure  $H^-$ . Le corps pur stable est le dihydrogène gazeux  $H_2(g)$ .

#### La famille des alcalins (située colonne 1)

Les éléments chimiques de la famille des alcalins ont une configuration électronique de la forme  $[X]ns^1$ . Ils sont facilement oxydés (perte de leur unique électron de valence) et acquièrent ainsi la configuration électronique du gaz noble de la période précédente. Se sont des métaux peu denses de couleur argentée à bas point de fusion et plutôt mous à température ambiante. Ils réagissent violemment avec l'eau.

#### La famille des alcalino-terreux (située colonne 2)

Les éléments chimiques de la famille des alcalino-terreux ont une configuration électronique en  $[X]ns^2$ . Pour la même raison que les alcalins, ils sont facilement oxydés (perte de leurs deux électrons de valence). Ce sont des métaux un peu plus durs et plus denses que les alcalins, et ils réagissent violemment avec l'eau.

#### La famille des halogènes (située colonne 17)

Les éléments chimiques de la famille des halogènes ont une configuration électronique en  $[X]ns^2np^5$ . Ils se réduisent facilement (gain d'un électron de valence) pour acquérir la configuration électronique du gaz noble situé à leur droite dans le tableau périodique. Les halogènes sont stables sous forme de dihalogènes :  $F_2(g)$ ,  $Cl_2(g)$ ,  $Br_2(l)$ ,  $I_2(s)$  et  $At_2(s)$ .

#### Les éléments du bloc d

Dans le bloc  $d$ , les éléments sont appelés **métaux de transitions** car ils correspondent au remplissage de la sous-couche  $(n-1)d$  intermédiaire entre la sous-couche  $ns$  et la sous-couche  $np$ . Ce sont des métaux généralement durs et résistants d'un point de vue mécanique.

#### Les éléments du bloc f

Dans le bloc  $f$ , on ne distingue pas les familles mais plutôt les périodes. Ce bloc  $f$  est normalement intercalé à l'intérieur du bloc  $d$  après le lanthane ( $_{57}La$ ) et l'actinium ( $_{89}Ac$ ), mais il est placé en dessous pour plus de clarté.

Les éléments chimiques situés après le lanthane sont appelés **les lanthanides (ou terres rares)**, et ceux situés après l'actinium sont appelés **les actinides**. Le lecteur attentif remarquera que le lanthane et l'actinium ne respectent pas l'ordre de remplissage de la règle de Klechkowski. En effet, dans le cas du lanthane, la configuration à l'état fondamental est  $[Xe]6s^25d^1$  au lieu de  $[Xe]6s^24f^1$ . Il en est de même pour l'actinium situé juste en dessous. C'est pourquoi ces éléments ont été placés dans le bloc  $d$ .

#### Les métaux et les non-métaux

Un **métal** est par définition un élément chimique dont le corps simple (solide ou liquide) est un bon conducteur électrique. En effet, dans un solide métallique, chaque atome libère un ou plusieurs électrons (le cuivre libère par exemple un électron par atome). Les électrons libres forment alors un gaz mobile dans le métal, à l'origine de sa conduction. Au contraire, dans un non-métal, les électrons de valence sont liés aux noyaux et la conduction est très faible. Il faut savoir que les métaux constituent les éléments des blocs  $s$  et  $d$  et une partie du bloc  $p$  : ils se situent donc plutôt à gauche et au centre du tableau périodique. Les **non-métaux** sont les éléments en haut à droite du bloc  $p$  (sans oublier l'hydrogène). Par ailleurs, la frontière entre les deux n'est pas franche : les **métalloïdes**, qui se comportent comme des **semi-conducteurs**, sont situés entre les métaux et les non-métaux. Ils ne sont pas conducteurs électriques à température ambiante, mais si la température augmente ou si on dope le semi-conducteur avec des impuretés (atomes ayant un

électron de plus ou un électron de moins), ils deviennent conducteurs. Ces métalloïdes sont à la base des composants électroniques tels que les diodes et les transistors. Ces catégories sont mises en évidence dans le tableau présenté figure 23.16.

□ **Quelle est la configuration électronique de valence des atomes situés sur les quatre premières périodes du tableau périodique ?**

Ces configurations de valence sont représentées sur la figure 23.14. Pour plus de lisibilité nous avons représenté les éléments du bloc *d* en dessous des blocs *s* et *p*.

Comme cela a déjà été évoqué dans la partie de ce cours concernant la configuration électronique, il y a de nombreuses exceptions aux règles de remplissage pour les atomes les plus lourds (voir les différents cas dans les périodes 4 et 5).

	1	2				13	14	15	16	17	18	
1	${}^1_1\text{H}$ $1s^1$										${}^2_{18}\text{He}$ $1s^2$	
2	${}^3_{3}\text{Li}$ $2s^1$	${}^4_{4}\text{Be}$ $2s^2$				${}^5_{5}\text{B}$ $2s^2 2p^1$	${}^6_{6}\text{C}$ $2s^2 2p^2$	${}^7_{7}\text{N}$ $2s^2 2p^3$	${}^8_{8}\text{O}$ $2s^2 2p^4$	${}^9_{9}\text{F}$ $2s^2 2p^5$	${}^{10}_{10}\text{Ne}$ $2s^2 2p^6$	
3	${}^{11}_{11}\text{Na}$ $3s^1$	${}^{12}_{12}\text{Mg}$ $3s^2$				${}^{13}_{13}\text{Al}$ $3s^2 3p^1$	${}^{14}_{14}\text{Si}$ $3s^2 3p^2$	${}^{15}_{15}\text{P}$ $3s^2 3p^3$	${}^{16}_{16}\text{S}$ $3s^2 3p^4$	${}^{17}_{17}\text{Cl}$ $3s^2 3p^5$	${}^{18}_{18}\text{Ar}$ $3s^2 3p^6$	
4	${}^{19}_{19}\text{K}$ $4s^1$	${}^{20}_{20}\text{Ca}$ $4s^2$				${}^{31}_{31}\text{Ga}$ $4s^2 4p^1$	${}^{32}_{32}\text{Ge}$ $4s^2 4p^2$	${}^{33}_{33}\text{As}$ $4s^2 4p^3$	${}^{34}_{34}\text{Se}$ $4s^2 4p^4$	${}^{35}_{35}\text{Br}$ $4s^2 4p^5$	${}^{36}_{36}\text{Kr}$ $4s^2 4p^6$	
5	${}^{37}_{37}\text{Rb}$ $5s^1$	${}^{38}_{38}\text{Sr}$ $5s^2$				${}^{49}_{49}\text{In}$ $5s^2 5p^1$	${}^{50}_{50}\text{Sn}$ $5s^2 5p^2$	${}^{51}_{51}\text{Sb}$ $5s^2 5p^3$	${}^{52}_{52}\text{Te}$ $5s^2 5p^4$	${}^{53}_{53}\text{I}$ $5s^2 5p^5$	${}^{54}_{54}\text{Xe}$ $5s^2 5p^6$	
			3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	${}^{21}_{21}\text{Sc}$ $3d^1 4s^2$	${}^{22}_{22}\text{Ti}$ $3d^2 4s^2$	${}^{23}_{23}\text{V}$ $3d^3 4s^2$	${}^{24}_{24}\text{Cr}$ $3d^5 4s^1$	${}^{25}_{25}\text{Mn}$ $3d^5 4s^2$	${}^{26}_{26}\text{Fe}$ $3d^6 4s^2$	${}^{27}_{27}\text{Co}$ $3d^7 4s^2$	${}^{28}_{28}\text{Ni}$ $3d^8 4s^2$	${}^{29}_{29}\text{Cu}$ $3d^{10} 4s^1$	${}^{30}_{30}\text{Zn}$ $3d^{10} 4s^2$		
5	${}^{39}_{39}\text{Y}$ $4d^1 5s^2$	${}^{40}_{40}\text{Zr}$ $4d^2 5s^2$	${}^{41}_{41}\text{Nb}$ $4d^4 5s^1$	${}^{42}_{42}\text{Mo}$ $4d^5 5s^1$	${}^{43}_{43}\text{Tc}$ $4d^5 5s^2$	${}^{44}_{44}\text{Ru}$ $4d^7 5s^1$	${}^{45}_{45}\text{Rh}$ $4d^8 5s^1$	${}^{46}_{46}\text{Pd}$ $4d^{10}$	${}^{47}_{47}\text{Ag}$ $4d^{10} 5s^1$	${}^{48}_{48}\text{Cd}$ $4d^{10} 5s^2$		

Figure 23.14. Tableau périodique : configurations des électrons de valence.

## ■ 6 Électronégativité

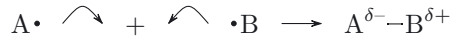
Lorsque deux atomes d'éléments chimiques différents sont en liaison covalente, les électrons de valence ne restent pas répartis équitablement entre les deux atomes. Ils sont plus attirés par l'un ou par l'autre des deux atomes, ce qui crée un déséquilibre des charges au niveau de chaque atome. La liaison covalente acquiert ainsi un caractère ionique partiel : on dit qu'elle se polarise (voir chapitre 24).

La grandeur qui quantifie cette capacité à attirer les électrons d'une liaison est l'électronégativité.

**Définition : Électronégativité**

L'électronégativité  $\chi$  est une grandeur relative qui caractérise l'aptitude d'un atome A à attirer vers lui le doublet électronique qui l'associe à un autre atome B par liaison covalente.

Étudions le cas d'une molécule AB formée à partir des atomes A et B porteurs d'un électron de valence chacun :  $A \cdot \curvearrowright + \curvearrowleft \cdot B \rightarrow A-B$ . Si l'atome A est plus électronégatif que l'atome B, alors les électrons de la liaison sont plus attirés par A et la liaison se polarise : il y a un excès de charge négative au niveau de l'atome A et un défaut de charge négative au niveau de l'atome B. Ces charges, appelées charges partielles, sont notées  $\delta^-$  et  $\delta^+$  sur la molécule AB :



La charge partielle  $\delta^-$ , représentant l'excès de charge négative, vaut  $-q$  et la charge partielle  $\delta^+$  vaut  $+q$ , la charge  $q$  étant comprise entre 0 et  $e$ . La valeur de  $q$  dépend de la différence d'électronégativité entre A et B.

Dans le tableau périodique ci-dessous sont précisées les valeurs d'électronégativité des éléments chimiques selon l'échelle de Pauling.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	H 2,2																	He
2	Li 0,98	Be 1,57											B 2,04	C 2,55	N 3,04	O 3,44	F 3,98	Ne
3	Na 0,93	Mg 1,31											Al 1,61	Si 1,90	P 2,19	S 2,58	Cl 3,16	Ar
4	K 0,82	Ca 1,00	Sc 1,36	Ti 1,54	V 1,63	Cr 1,66	Mn 1,55	Fe 1,83	Co 1,88	Ni 1,91	Cu 1,90	Zn 1,81	Ga 2,01	Ge 2,18	As 2,55	Se 2,55	Br 2,96	Kr 2,9
5	Rb 0,82	Sr 0,95	Y 1,22	Zr 1,33	Nb 1,6	Mo 2,16	Tc 1,9	Ru 2,2	Rh 2,28	Pd 2,20	Ag 1,93	Cd 1,69	In 1,78	Sn 1,96	Sb 2,05	Te 2,1	I 2,66	Xe 2,6
6	Cs 0,79	Ba 0,89	La 1,1	Hf 1,3	Ta 1,5	W 2,36	Re 1,9	Os 2,2	Ir 2,2	Pt 2,28	Au 2,54	Hg 2,00	Tl 2,04	Pb 2,33	Bi 2,02	Po 2,0	At 2,2	Rn
7	Fr 0,7	Ra 0,9	Ac 1,1	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn						

Figure 23.15. Tableau périodique : électronégativité selon l'échelle de Pauling.

□ **Comment évolue l'électronégativité dans le tableau périodique ?**

Nous remarquons sur ce tableau que l'électronégativité augmente beaucoup lorsqu'on se déplace de gauche à droite dans une période. Elle augmente aussi de bas en haut dans une colonne. Ainsi, l'élément le plus électronégatif est le fluor situé en haut à droite du tableau périodique avec une électronégativité  $\chi = 3,98$  et le moins électronégatif est le francium situé en bas à gauche avec une électronégativité  $\chi = 0,7$ . Nous remarquons que la différence d'électronégativité maximale est  $\Delta\chi_{\max} = 3,3$ .

□ **Comment évoluent les caractères oxydant et réducteur dans le tableau périodique ?**

À gauche du tableau périodique, les éléments chimiques ont une faible électronégativité. Ils perdent donc facilement un ou plusieurs électrons par oxydation. Les alcalins et les alcalino-terreux

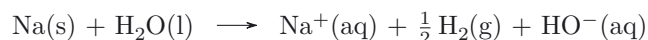
sont donc de bons réducteurs. De plus, l'électronégativité diminuant de haut en bas dans une colonne, plus on descend, plus les réducteurs sont forts.

**À droite de la classification périodique**, c'est l'inverse, les éléments chimiques ont une forte électronégativité. Ils gagnent donc facilement un ou plusieurs électrons par réduction. Les halogènes sont donc de bons oxydants. Et plus on monte dans une colonne du tableau périodique, plus les oxydants sont forts.

□ **Des réactions chimiques peuvent-elles confirmer ces évolutions ?**

### Réactivité du sodium avec l'eau

Lorsqu'on place un morceau de sodium dans l'eau, celui-ci réagit violemment et on observe une augmentation du pH de l'eau. Au cours de cette réaction, le sodium s'est oxydé en  $\text{Na}^+$  et l'eau s'est réduite en  $\text{H}_2(\text{g})$  produisant des ions hydroxyde. L'équation-bilan de la réaction chimique est la suivante :



### Réactivité des dihalogènes

*Première réaction étudiée* : on ajoute de l'eau de chlore ( $\text{Cl}_2(\text{aq})$ ) dans une solution de sulfate de fer(II) ( $\text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + \text{SO}_4^{2-}(\text{aq})$ ). Un léger changement de couleur est observé (la solution de sulfate de fer(II) initialement verdâtre jaunit légèrement). Un test au thiocyanate de potassium confirme la présence d'ions fer(III) dans le mélange. On en déduit que le fer(II) a été oxydé en fer(III) par le dichlore, lequel a été réduit en  $\text{Cl}^-$ . L'équation-bilan de la réaction chimique est la suivante :



*Deuxième réaction étudiée* : on ajoute du thiosulfate de sodium ( $2\text{Na}^+(\text{aq}) + \text{S}_2\text{O}_3^{2-}(\text{aq})$ ) dans une solution de diiode ( $\text{I}_2(\text{aq})$ ), ce qui provoque une décoloration de la solution. On en déduit que le diiode s'est réduit en  $\text{I}^-$  et que le thiosulfate s'est oxydé en tétrathionate  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ . L'équation-bilan de la réaction chimique est la suivante :



### Compétition entre les dihalogènes

Si nous mélangeons une solution de iodure de potassium avec de l'eau de chlore, nous observons l'apparition d'une coloration jaune-brun caractéristique de la présence de diiode. Nous en déduisons que l'eau de chlore a oxydé les ions iodure.

De la même manière, nous mélangeons une solution de diiode et une solution aqueuse de chlorure de sodium. Aucun changement de couleur n'est observé, ce qui montre que le diiode n'oxyde pas les ions chlorure.

En comparant ces deux réactions, nous pouvons confirmer l'évolution du pouvoir oxydant dans une colonne : plus on monte dans la colonne, plus l'électronégativité augmente, et plus l'élément chimique a tendance à se réduire en gagnant un électron. Le meilleur oxydant se trouve donc en haut de la famille des halogènes ; c'est le fluor.

1	$^1_1\text{H}$ 1,0																$^2_2\text{He}$ 4,0	
2	$^3_3\text{Li}$ 6,9	$^4_4\text{Be}$ 9,0															$^9_9\text{F}$ 19,0	$^{10}_{10}\text{Ne}$ 20,2
3	$^{11}_{11}\text{Na}$ 23,0	$^{12}_{12}\text{Mg}$ 24,3														$^{17}_{17}\text{Cl}$ 35,5	$^{18}_{18}\text{Ar}$ 39,9	
4	$^{19}_{19}\text{K}$ 39,1	$^{20}_{20}\text{Ca}$ 40,1	$^{21}_{21}\text{Sc}$ 45,0	$^{22}_{22}\text{Ti}$ 47,9	$^{23}_{23}\text{V}$ 50,9	$^{24}_{24}\text{Cr}$ 52,0	$^{25}_{25}\text{Mn}$ 54,9	$^{26}_{26}\text{Fe}$ 55,8	$^{27}_{27}\text{Co}$ 58,9	$^{28}_{28}\text{Ni}$ 58,7	$^{29}_{29}\text{Cu}$ 63,5	$^{30}_{30}\text{Zn}$ 65,4	$^{31}_{31}\text{Ga}$ 69,7	$^{32}_{32}\text{Ge}$ 72,6	$^{33}_{33}\text{As}$ 74,9	$^{34}_{34}\text{Se}$ 79,0	$^{35}_{35}\text{Br}$ 79,9	$^{36}_{36}\text{Kr}$ 83,8
5	$^{37}_{37}\text{Rb}$ 85,5	$^{38}_{38}\text{Sr}$ 87,6	$^{39}_{39}\text{Y}$ 88,9	$^{40}_{40}\text{Zr}$ 91,2	$^{41}_{41}\text{Nb}$ 92,9	$^{42}_{42}\text{Mo}$ 95,9	$^{43}_{43}\text{Tc}$ 98,9	$^{44}_{44}\text{Ru}$ 101,1	$^{45}_{45}\text{Rh}$ 102,9	$^{46}_{46}\text{Pd}$ 106,4	$^{47}_{47}\text{Ag}$ 107,8	$^{48}_{48}\text{Cd}$ 112,4	$^{49}_{49}\text{In}$ 114,8	$^{50}_{50}\text{Sn}$ 118,7	$^{51}_{51}\text{Sb}$ 121,8	$^{52}_{52}\text{Te}$ 127,6	$^{53}_{53}\text{I}$ 126,9	$^{54}_{54}\text{Xe}$ 131,3
6	$^{55}_{55}\text{Cs}$ 132,9	$^{56}_{56}\text{Ba}$ 137,3	$^{57}_{57}\text{La}$ 138,9	$^{72}_{72}\text{Hf}$ 178,5	$^{73}_{73}\text{Ta}$ 180,9	$^{74}_{74}\text{W}$ 183,8	$^{75}_{75}\text{Re}$ 186,2	$^{76}_{76}\text{Os}$ 190,2	$^{77}_{77}\text{Ir}$ 192,2	$^{78}_{78}\text{Pt}$ 195,1	$^{79}_{79}\text{Au}$ 197,0	$^{80}_{80}\text{Hg}$ 200,6	$^{81}_{81}\text{Tl}$ 204,4	$^{82}_{82}\text{Pb}$ 207,2	$^{83}_{83}\text{Bi}$ 209,0	$^{84}_{84}\text{Po}$ 210,0	$^{85}_{85}\text{At}$ 210,0	$^{86}_{86}\text{Rn}$ 222,0
7	$^{87}_{87}\text{Fr}$ 223,0	$^{88}_{88}\text{Ra}$ 226,0	$^{89}_{89}\text{Ac}$ 227,0	$^{104}_{104}\text{Rf}$ 104,9	$^{105}_{105}\text{Db}$ 105,1	$^{106}_{106}\text{Sg}$ 106,1	$^{107}_{107}\text{Bh}$ 107,1	$^{108}_{108}\text{Hs}$ 108,1	$^{109}_{109}\text{Mt}$ 109,1	$^{110}_{110}\text{Ds}$ 110,1	$^{111}_{111}\text{Rg}$ 111,1	$^{112}_{112}\text{Cn}$ 112,1						

$^{58}_{58}\text{Ce}$ 140,1	$^{59}_{59}\text{Pr}$ 140,9	$^{60}_{60}\text{Nd}$ 144,2	$^{61}_{61}\text{Pm}$ 146,9	$^{62}_{62}\text{Sm}$ 150,4	$^{63}_{63}\text{Eu}$ 152,0	$^{64}_{64}\text{Gd}$ 157,2	$^{65}_{65}\text{Tb}$ 158,9	$^{66}_{66}\text{Dy}$ 162,5	$^{67}_{67}\text{Ho}$ 164,9	$^{68}_{68}\text{Er}$ 167,3	$^{69}_{69}\text{Tm}$ 168,9	$^{70}_{70}\text{Yb}$ 173,0	$^{71}_{71}\text{Lu}$ 175,0
$^{90}_{90}\text{Th}$ 232,0	$^{91}_{91}\text{Pa}$ 231,0	$^{92}_{92}\text{U}$ 238,0	$^{93}_{93}\text{Np}$ 237,0	$^{94}_{94}\text{Pu}$ 239,1	$^{95}_{95}\text{Am}$ 241,1	$^{96}_{96}\text{Cm}$ 244,1	$^{97}_{97}\text{Bk}$ 249,1	$^{98}_{98}\text{Cf}$ 252,1	$^{99}_{99}\text{Es}$ 252,1	$^{100}_{100}\text{Fm}$ 257,1	$^{101}_{101}\text{Md}$ 256,1	$^{102}_{102}\text{No}$ 259,1	$^{103}_{103}\text{Lr}$ 260,1

Figure 23.16. Tableau périodique : structure en blocs.

## Interro de cours

1. On souhaite étudier l'élément azote dont l'isotope majoritaire est l'azote-14. Sachant que l'abondance isotopique de  $^{14}_7\text{N}$  est d'environ 99,6%, quelle est la valeur de la masse molaire de l'élément chimique ?
  - (a)  $M = 7 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
  - (b)  $M = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
  - (c) Impossible de le savoir car il manque une donnée.
2. Le noyau de fluor-20 n'est pas stable et se désintègre suivant une radioactivité  $\beta^-$ . Quelle est l'équation-bilan de la réaction nucléaire ?
  - (a)  $^{20}_9\text{F} \rightarrow ^{20}_8\text{O} + e^- + \nu_e$ .
  - (b)  $^{20}_9\text{F} \rightarrow ^{20}_{10}\text{F} + e^- + \bar{\nu}_e$ .
  - (c)  $^{20}_9\text{F} \rightarrow ^{20}_{10}\text{Ne} + e^- + \bar{\nu}_e$ .
3. Parmi les quadruplets suivants  $(n, l, m_l, m_s)$ , quels sont ceux susceptibles de définir une fonction d'onde ? Justifier.
  - (a) (3,2,1,0).
  - (b) (3,1,1,1/2).
  - (c) (1,1,0,1/2).
  - (d) (2,1,-1,-1/2).
4. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?
  - (a) Dans l'atome d'hydrogène les niveaux d'énergie permis varient en  $1/n$ .
  - (b) Dans un atome polyélectronique, les sous-couches d'une même couche ont la même énergie.
  - (c) Dans un atome polyélectronique, les orbitales atomiques d'une même sous-couche ont la même énergie.
5. Quelle(s) configuration(s) ne respecte(nt) pas les règles de remplissage ? Justifier.
  - (a)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1 4d^{10}$ .
  - (b)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^{10} 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^5$ .
  - (c)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^9$ .
6. L'argent  $_{47}\text{Ag}$  est une exception à la règle de Klechkowski. Parmi des configurations électroniques précédentes, quelle est celle correspondant à l'état fondamental de l'argent ? Justifier.
7. On donne les configurations électroniques de différents atomes dans leur état fondamental. En déduire leur position dans le tableau périodique (période, numéro de colonne et bloc).
  - (a)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ .
  - (b)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$ .
  - (c)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^2$ .
  - (d)  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^2$ .

## Exercices

### Exercice 23.1 Carbone

#### ➔ Méthode (23.1)

Le carbone est l'élément chimique de numéro atomique 6. Il est très abondant sur Terre, particulièrement dans la matière organique. Les isotopes connus du carbone sont  ${}^6_6\text{C}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{13}_6\text{C}$  et  ${}^{14}_6\text{C}$ . Seuls le carbone-12 et le carbone-13 sont présents en quantité notable dans la nature. Le carbone-12 a été retenu comme isotope pour définir la mole. La masse molaire du carbone est  $M = 12,01074 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Le carbone-11 est radioactif; sa durée de demi-vie est de 20 minutes. Le carbone-14 est aussi radioactif mais avec une durée de demi-vie de 5730 ans.

1. Préciser les nombres de neutron et de proton dans les quatre isotopes du carbone.
2. Quelle est la masse molaire du carbone-12? Estimer celle du carbone-13.
3. Calculer les abondances isotopiques naturelles du carbone-12 et du carbone-13.
4. Donner la configuration électronique du carbone dans son état fondamental. Préciser les électrons de valence.
5. Faire un diagramme énergétique et placer les électrons avec leur état de spin. Pour chaque orbitale, préciser les valeurs des nombres quantiques.
6. À l'aide des distributions radiales représentées figure 23.6, donner une estimation de la distance au noyau la plus probable pour les électrons de cœur et pour les électrons de valence. Comparer et conclure.

### Exercice 23.2 Fer

#### ➔ Méthodes (23.1) (23.2)

Le fer, élément de numéro atomique 26, est très abondant sur Terre, surtout dans le noyau de la planète. Dans la croûte terrestre, il est surtout présent sous forme d'oxydes ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{FeO}$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Par exemple la magnétite ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) est un solide ionique contenant des ions  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{O}^{2-}$ .

1. Donner la configuration électronique du fer (Fe) dans l'état fondamental. Préciser les électrons de valence. Situer le fer dans le tableau périodique des éléments.
2. Faire un diagramme énergétique des orbitales, et placer les électrons avec leur état de spin. On utilisera le fait que les orbitales  $4s$  et  $3d$  sont presque dégénérées, les orbitales  $4s$  ayant une énergie légèrement inférieure à celle des orbitales  $3d$ .
3. Pour la configuration électronique de l'ion  $\text{Fe}^{3+}$  dans l'état fondamental, proposer deux possibilités.
4. Expérimentalement, des mesures magnétiques montrent que le spin total de l'ion  $\text{Fe}^{3+}$ , c'est-à-dire la somme des nombres quantiques magnétiques de spin de ses électrons, est égal à  $\frac{5}{2}$ . En déduire la configuration électronique de cet ion dans l'état fondamental.



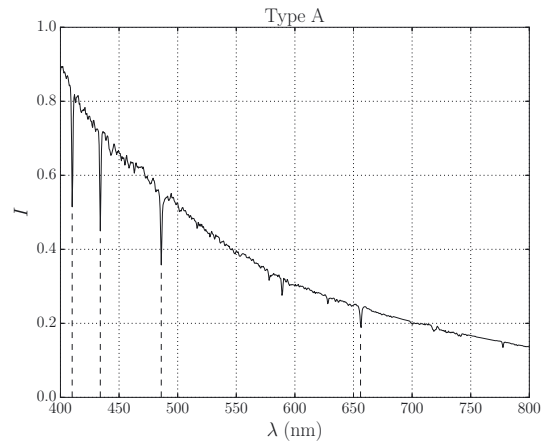
### Exercice 23.3 Spectre d'absorption stellaire

Le spectre de la lumière émise par une étoile fournit des informations sur sa température de surface et sur les éléments chimiques présents dans sa couche externe (photosphère). Par exemple, la figure ci-dessous montre le spectre d'une étoile de type A (température d'environ 10000 K) dans le domaine des longueurs d'onde du visible. Ce spectre est essentiellement continu mais on repère 4 raies d'absorption, indiquées par des traits en pointillés. On se propose de vérifier que ces raies sont attribuables à la présence d'hydrogène atomique dans la photosphère de l'étoile. On rappelle l'expression théorique des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6 \text{ eV} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Données : constante de Planck  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Peut-on attribuer ces raies au passage de l'électron de l'état fondamental à un état excité? Justifier quantitativement.
2. Montrer que les quatre raies observées s'expliquent par le passage de l'électron d'un niveau d'énergie excité ( $n = 2$ ) vers un autre niveau d'énergie. Préciser, pour chaque raie, le changement de niveau d'énergie effectué par l'électron.
3. La raie rouge de l'hydrogène (raie H $\alpha$ ) est attribuable au passage de l'électron d'une orbitale  $s$  à une orbitale  $p$ . Préciser ces deux orbitales, en donnant les valeurs possibles des nombres quantiques.

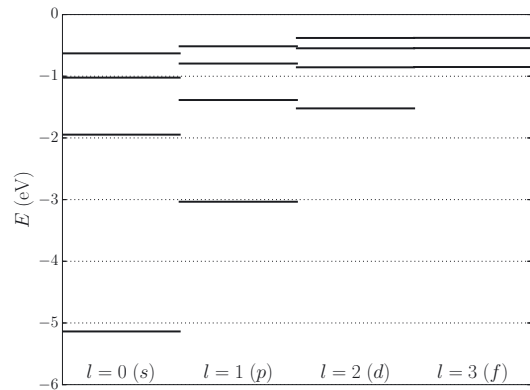


### Exercice 23.4 Sodium

Le sodium est un métal alcalin, de numéro atomique 11. Il émet dans le visible une raie jaune très intense de longueur d'onde  $\lambda = 589,6 \text{ nm}$  (en réalité une raie double). Des lampes à vapeur de sodium sont d'ailleurs utilisées pour l'éclairage public. Les niveaux d'énergie accessibles à l'électron de valence sont représentés ci-après, sous forme de quatre colonnes correspondant respectivement aux nombres quantiques  $l = 0$ ,  $l = 1$ ,  $l = 2$  et  $l = 3$ . Pour chaque valeur de  $l$ , l'énergie est croissante avec  $n$ .

Données : constante de Planck  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , vitesse de la lumière dans le vide  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

1. Donner la configuration électronique de l'atome de sodium à l'état fondamental. Quelle est l'orbitale occupée par son électron de valence ?
2. Compléter le diagramme énergétique en indiquant les niveaux d'énergie des orbitales  $3s$ ,  $3p$ ,  $4s$ ,  $3d$ ,  $4p$ ,  $5s$ ,  $4d$ ,  $5p$  et  $6s$ .
3. Ce diagramme est-il en accord avec la règle de Klechkowski ?
4. La raie d'émission jaune est due à la transition d'un état excité de l'électron de valence vers son état fondamental. Quel est cet état excité ? Préciser l'orbitale correspondante.

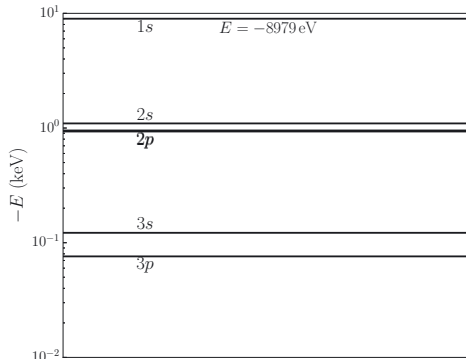


### Exercice 23.5 Cuivre et spectroscopie X

Lorsqu'on bombarde un bloc de cuivre avec des électrons fortement accélérés (plusieurs keV), la surface du métal émet un rayonnement électromagnétique dans le domaine des rayons X. En plus d'un rayonnement dont le spectre est continu, on observe deux raies caractéristiques de l'atome de cuivre, la raie  $K_\alpha$  de longueur d'onde  $\lambda_\alpha = 0,15418 \text{ nm}$  et la raie  $K_\beta$  de longueur d'onde  $\lambda_\beta = 0,13922 \text{ nm}$ . L'explication de ces raies est la suivante : lorsqu'un électron très énergétique entre en collision avec l'atome de cuivre, il peut éjecter un électron de cœur ; un électron d'un niveau d'énergie supérieur vient alors occuper la place vacante, une transition qui s'accompagne d'un rayonnement X. Plus généralement, ce phénomène est utilisé pour obtenir des informations sur les niveaux d'énergie des électrons de cœur. La figure suivante montre quelques niveaux d'énergie des électrons de cœur. L'opposée de l'énergie est reportée en ordonnée, en échelle logarithmique. La valeur de l'énergie de l'orbitale  $1s$  est indiquée sur la figure.

Données :  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , constante de Planck  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ , vitesse de la lumière dans le vide  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Position du cuivre dans le tableau périodique : période 4, colonne 11.

1. Donner la configuration électronique du cuivre dans l'état fondamental, en appliquant la règle de Klechkowski. Quels sont les électrons de valence ?
2. En réalité, le cuivre à l'état fondamental ne possède qu'un seul électron de valence. Donner alors la structure électronique du cuivre et préciser l'électron de valence.
3. Les raies  $K_\alpha$  et  $K_\beta$  sont émises après l'éjection d'un électron de cœur situé dans une orbitale  $1s$ . Calculer, pour chaque raie, l'énergie initiale de l'électron qui vient prendre sa place. Indiquer sur le diagramme énergétique la transition responsable de l'émission de ces raies.



# Corrections

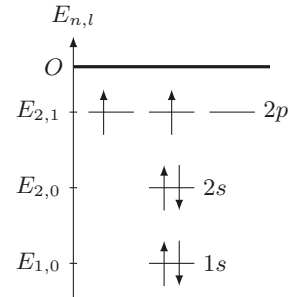
## Interro de cours

- L'abondance isotopique de l'azote-14 étant très proche de 100%, on peut assimiler la masse molaire de l'élément à celle de son isotope majoritaire. Le symbole d'un nucléide est de la forme  ${}^A_Z X$ . On en déduit le nombre de masse  $A = 14$  pour l'azote-14. Ce nombre de masse donne approximativement la masse molaire du nucléide donc ici de l'élément. Réponse (b).
- Lors d'une désintégration  $\beta^-$ , un neutron se transforme en proton dans le noyau. Un électron ainsi qu'un anti-neutrino électronique sont éjectés. Le noyau de fluor voit donc son nombre de protons passer de 9 à 10. Or  $Z = 10$  est le numéro atomique du néon. Réponse (c).
- Se référer au cours pour les définitions des quatre nombres quantiques.
  - (3,2,1,0) est impossible car  $m_s$  ne peut prendre que deux valeurs  $+1/2$  ou  $-1/2$ .
  - (3,1,1,1/2) est correct.
  - (1,1,0,1/2) est impossible car  $l$  doit être inférieur ou égal à  $n - 1$ .
  - (2,1,-1,-1/2) est correct.
- L'énergie de l'atome d'hydrogène vaut  $E_n = -E_0/n^2$  et varie donc en  $1/n^2$ . L'énergie d'un atome polyélectronique dépend des nombres quantiques  $n$  et  $l$ . Ainsi, les sous-couches d'une même couche ne sont pas au même niveau d'énergie : il y a une levée de dégénérescence par rapport à l'atome d'hydrogène. Réponse (c).
- Dans la configuration (a), l'orbitale  $5s$  n'est pas remplie alors que des électrons occupent la sous-couche  $4d$ . Ce n'est pas correct. Dans la configuration (b), il y a une erreur de remplissage de la sous-couche  $3p$  qui ne peut accueillir que 6 électrons soit  $2(2l + 1)$  électrons et non 10. Réponse (c).
- La configuration électronique de l'argent est une exception car les sous-couches  $5s$  et  $4d$  sont proches en énergie. Ainsi, avec la sous-couche  $4d$  remplie, la configuration  $[\text{Kr}]5s^1 4d^{10}$  est plus basse en énergie que la configuration  $[\text{Kr}]5s^2 4d^9$ . Réponse (a).
- Troisième période, colonne 2 du bloc p (ou colonne 14 du tableau).
  - Quatrième période, colonne 6 du bloc p (ou colonne 18 du tableau).
  - Cinquième période, colonne 2 du bloc d (ou colonne 4 du tableau).
  - Sixième période, colonne 2 du bloc s (ou colonne 2 du tableau).

## Exercice 23.1

- Carbone-11 : 6 protons et 5 neutrons. Carbone-12 : 6 protons et 6 neutrons. Carbone-13 : 6 protons et 7 neutrons. Carbone-14 : 6 protons et 8 neutrons.
- Par définition de la mole, la masse molaire du carbone-12 est exactement  $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Celle du carbone-13 peut être estimée à  $13 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  en remarquant que proton et neutron ont à peu près la même masse.
- Soit  $x$  l'abondance du carbone-12. On a  $M = x \times 12 + (1 - x) \times 13$ . On a donc  $x = 13 - M = 0,9893$ . L'abondance du carbone-12 est donc 98,93%, celle du carbone-13 1,07%.
- Avec la règle de Klechkowski, on attribue les orbitales aux 6 électrons du carbone :  $1s^2 2s^2 2p^2$ . Les 4 électrons de valence sont  $2s^2$  et  $2p^2$ .

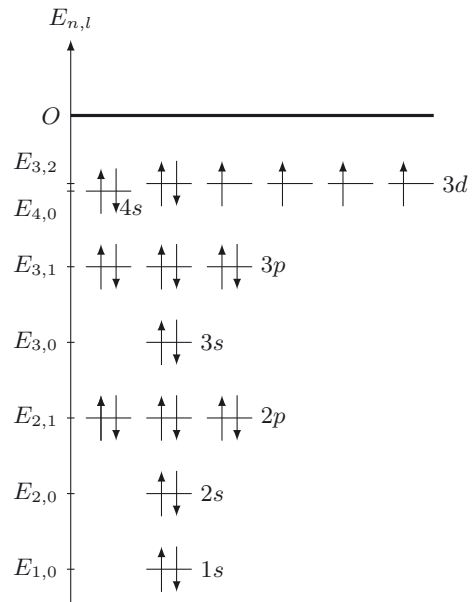
5. On place par énergie croissante les orbitales  $1s$ ,  $2s$  et  $2p$  (l'échelle n'est pas correcte). L'orbitale  $1s$  contient deux électrons de nombres quantiques de spin opposés. Les nombres quantiques sont ( $n = 0$ ,  $l = 0$ ,  $m_l = 0$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ). L'orbitale  $2s$  contient deux électrons de spins opposés ( $n = 1$ ,  $l = 0$ ,  $m_l = 0$ ,  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ). Pour le remplissage des 3 orbitales  $2p$ , on doit utiliser la règle de Hund : on remplit d'abord le maximum d'orbitales avec des spins de même sens. On a donc deux électrons de nombres quantiques ( $n = 1$ ,  $l = 1$ ,  $m_l = 0$ ,  $m_s = \frac{1}{2}$ ) et ( $n = 1$ ,  $l = 1$ ,  $m_l = 1$ ,  $m_s = \frac{1}{2}$ ). Remarque : le choix de  $m_l$  parmi les trois valeurs ( $-1, 0, 1$ ) est arbitraire.



6. Pour les électrons de cœur ( $n = 1$ ,  $l = 0$ ), la distance la plus probable est environ  $r = a_0 = 53$  pm. Pour les électrons de valence  $2s$  ( $n = 2$ ,  $l = 0$ ), la distance la plus probable est environ  $r = 5a_0 = 265$  pm. Pour les électrons de valence  $2p$  ( $n = 2$ ,  $l = 1$ ), la distance la plus probable est  $r = 4a_0 = 212$  pm. Les électrons de valence sont beaucoup plus éloignés du noyau que les électrons de cœur.

### Exercice 23.2

1. On remplit les orbitales par énergie croissante, en utilisant la règle de Klechkowski :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^6$ . La dernière couche est  $n = 4$  donc le fer est sur la période 4. Il a 8 électrons de valence (sur les orbitales  $4s$  et  $3d$ ). Le fer est dans la colonne 8.
2. La couche de valence se remplit avec la règle de Hund. On remplit tout d'abord l'orbitale  $4s$  avec deux électrons de spins opposés car l'énergie de cette orbitale est légèrement inférieure à celle des orbitales  $3d$ . Pour placer les 6 électrons restants sur les 5 orbitales  $3d$ , on place d'abord 5 électrons avec leur nombre quantique magnétique de spin  $m_s = \frac{1}{2}$  dans les 5 orbitales différentes puis le dernier avec  $m_s = -\frac{1}{2}$ , apparié avec un autre électron.
3. Il y a deux configurations possibles pour l'ion  $\text{Fe}^{3+}$ . Dans la première, on retire les deux électrons  $4s$  et un électron  $3d$ , ce qui donne pour la couche de valence  $4s^0 3d^5$ . Dans la seconde, on retire 3 électrons  $3d$ , ce qui donne  $4s^2 3d^3$ .
4. La première configuration a un spin total égal à  $\frac{5}{2}$ . La seconde a un spin total égal à  $\frac{3}{2}$ . La configuration de l'ion  $\text{Fe}^{3+}$  dans l'état fondamental est donc  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5$ .



**Exercice 23.3**

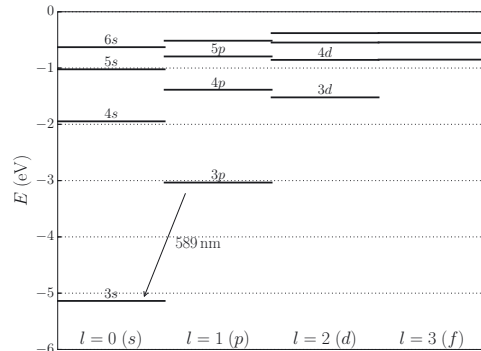
- L'atome d'hydrogène à l'état fondamental a son électron dans l'orbitale 1s, dont l'énergie est  $E_1 = -E_0$ . Le passage à un état  $n = 2$ , d'énergie  $E_2 = -E_0/4$ , se fait en absorbant une lumière de fréquence  $\nu$  telle que  $h\nu = E_2 - E_1 = -E_0 \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{4}E_0$ .  
La longueur d'onde de cette lumière est  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{4hc}{3E_0} = 122 \text{ nm}$ . Cette raie d'absorption est dans le domaine ultraviolet. Pour des transitions vers des niveaux  $n > 2$ , l'énergie absorbée est encore plus grande et la longueur d'onde encore plus petite. En conséquence, les raies dans le visible ne peuvent être attribuées à une transition à partir de l'état fondamental.
- En partant du niveau d'énergie  $n = 2$ , les raies d'absorption ont des fréquences  $\nu_n$  telles que  $h\nu_n = E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$  avec  $n = 3, 4, 5, 6$ . Les longueurs d'onde correspondantes sont  $\lambda_n = \frac{hc}{E_0 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)}$   
soit  $\lambda_n = \frac{91,2 \text{ nm}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}}$ . On en déduit les valeurs suivantes :
 

$n$	3	4	5	6
$\lambda_n$ (nm)	657	486	434	410

 Ce sont bien les 4 raies d'absorption observées dans le visible. Par exemple, la raie rouge vient du passage du niveau  $n = 2$  au niveau  $n = 3$ .
- La raie rouge est attribuable au passage d'une orbitale 2s à une orbitale 3p. Pour la première, les nombres quantiques sont ( $n = 2, l = 0, m_l = 0$ ). Pour la seconde, les nombres quantiques sont ( $n = 3, l = 1, m_l = -1, 0, 1$ ).

**Exercice 23.4**

- On place les 11 électrons en utilisant la règle de Klechkowski :  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$ . L'électron de valence occupe donc l'orbitale 3s, soit  $n = 3$  et  $l = 0$ .
- Pour chaque valeur de  $l$ , l'énergie est croissante avec  $n$ . Sur la colonne  $l = 0$ , on place donc par énergie croissante les orbitales 3s, 4s, 5s, 6s. Dans la colonne  $l = 1$ , on place par énergie croissante les orbitales 3p, 4p, 5p. Dans la colonne  $l = 2$ , on place les orbitales 3d et 4d.
- La règle de Klechkowski nous donne l'ordre des orbitales par énergie croissante : 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p et 6s. C'est bien cet ordre que l'on retrouve sur le diagramme énergétique.
- L'émission de la raie jaune du sodium correspond à une variation d'énergie d'un électron valant  $h\frac{c}{\lambda} = 3,37 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,11 \text{ eV}$ . La transition de l'électron de valence d'un état excité vers son état fondamental (orbitale 3s) correspondant à cette différence d'énergie est la transition 3p → 3s.



**Exercice 23.5**

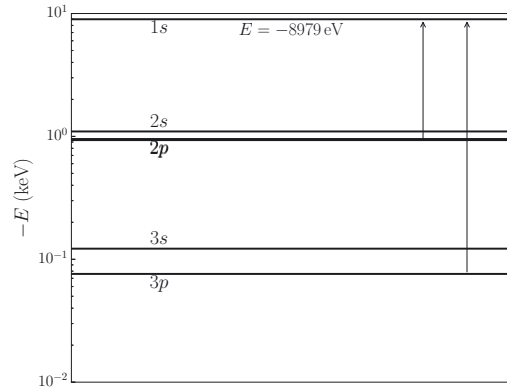
1. On attribue tout d'abord les orbitales aux électrons de cœur, correspondant aux trois premières périodes du tableau :  $1s^2$ ,  $2s^2$ ,  $2p^6$ ,  $3s^2$ ,  $3p^6$ , puis aux électrons de valence  $4s^2$  et  $3d^9$ .
2. Les orbitales  $d$  sont toutes remplies :  $3d^{10}$ . Il reste donc  $4s^1$  pour la couche de valence.

3. L'énergie d'un photon émis correspond à la variation d'énergie de l'électron au cours de sa transition. Soit :  $E_\alpha - E = h \frac{c}{\lambda_\alpha} = 8,043 \text{ keV}$  et

$E_\beta - E = h \frac{c}{\lambda_\beta} = 8,907 \text{ keV}$ . Pour la première raie,

l'énergie de l'électron qui descend au niveau  $1s$  est  $E_\alpha = h \frac{c}{\lambda_\alpha} + E = 8,043 - 8,979 = -0,936 \text{ keV}$  ;

il s'agit d'un électron  $2p$  et la transition associée à la raie  $K_\alpha$  est donc  $2p \rightarrow 1s$ . Pour la seconde raie, l'énergie de l'électron qui descend au niveau  $1s$  vaut  $E_\beta = 8,907 - 8,979 = -0,072 \text{ keV}$  ; il s'agit d'un électron  $3p$  et la transition associée à la raie  $K_\beta$  est donc  $3p \rightarrow 1s$ .



# Molécules et solvants

## L'essentiel du cours

### Contexte

Intéressons-nous aux composés hydrogénés qui se forment à partir des éléments du tableau périodique des colonnes 14 à 17 et caractérisons-les par leur température d'ébullition (figure 24.1). Pourquoi de telles molécules  $XH_n$  existent ? Pourquoi les températures de changement d'état évoluent-elles ainsi ?

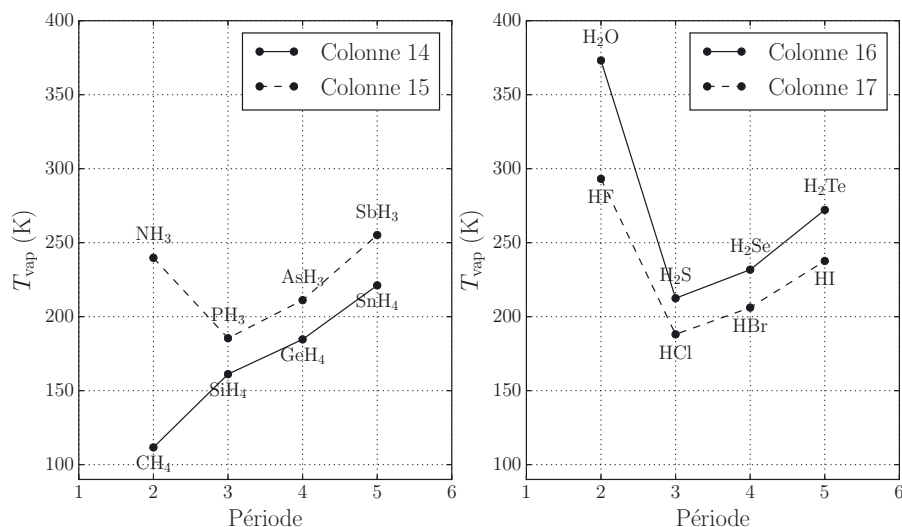


Figure 24.1. Températures d'ébullition des molécules  $XH_n$ .

## ■ 1 Les liaisons intramoléculaires

Nous pouvons observer qu'en fonction de la colonne du tableau périodique à laquelle l'élément X appartient, ce dernier ne s'associe pas au même nombre d'atomes d'hydrogène.

□ Pourquoi le nombre d'atomes d'hydrogène H de la molécule  $XH_n$  dépend-il de la colonne de l'élément X mais pas de sa période ?

Les électrons d'un atome forment deux groupes : les électrons de cœur fortement liés au noyau et les électrons de valence, de plus haute énergie, responsables des liaisons chimiques.

La caractéristique commune des éléments d'une même colonne est leur configuration électronique de valence. Ainsi, les molécules formées dépendent de la configuration électronique de valence de X.

### Définition : Théorie de Lewis et liaison covalente

Gilbert Lewis décrit en 1916 la liaison chimique comme la mise en commun de deux électrons de valence par les atomes formant la liaison. De cet appariement d'électrons, il résulte un doublet d'électrons liant appelé **doublet liant** ou **liaison covalente**.

Il existe des liaisons simples constituées d'un seul doublet liant, des liaisons doubles constituées de deux doublets liants et enfin des liaisons triples constituées de trois doublets liants.



Pour décrire de manière approfondie la liaison covalente, il faut faire appel à la mécanique quantique, avec la notion de recouvrement d'orbitales atomiques et en définissant des orbitales moléculaires. Le modèle de Lewis a l'avantage d'être simple et de constituer un outil pratique pour les molécules courantes, mais il ne peut décrire correctement toutes les situations.

□ **Pourquoi les éléments de la colonne 17 s'associent-ils à un atome d'hydrogène ? ceux de la colonne 16 à deux ? ceux de la colonne 15 à trois ? ceux de la colonne 14 à quatre ?**

Les éléments de la famille des gaz nobles (colonne 18 du tableau périodique) sont très stables et peu réactifs. Cette stabilité est due à la saturation de leur couche de valence ( $ns^2np^6$ ) à 8 électrons. Les éléments de la colonne 17 ont une configuration électronique de valence en  $ns^2np^5$ . Il leur manque donc un électron pour saturer leur couche de valence et auront tendance à former une liaison avec un atome d'hydrogène pour gagner cet électron. Des raisonnements analogues peuvent être réalisés pour les éléments des colonnes 14 à 16. L'ensemble est résumé ci-dessous :

Colonne	17	16	15	14
Configuration électronique de valence	$ns^2np^5$	$ns^2np^4$	$ns^2np^3$	$ns^2np^2$
Nombre d'électrons manquants	1	2	3	4
Nombre de liaisons formées	1	2	3	4
Molécule	XH	XH <sub>2</sub>	XH <sub>3</sub>	XH <sub>4</sub>

Nous pouvons en tirer une règle pour la formation des liaisons covalentes.

### Définition : Règle du duet et de l'octet

Les éléments tendent à former des édifices chimiques (molécules ou ions) dans lesquels ils sont entourés de :

- 2 électrons (1 doublet) pour l'hydrogène,
- 8 électrons (4 doublets) pour les éléments des périodes  $n \geq 2$ , afin de saturer leur couche de valence et gagner en stabilité.

Les doublets d'électrons entourant un atome peuvent être :

- liants, correspondant à des paires d'électrons formant des liaisons covalentes ;
- non liants, correspondant à des électrons appariés dans une orbitale atomique de l'atome.



□ Comment représenter la répartition des électrons de valence ?

Un électron célibataire dans une orbitale atomique est représenté par  $X\cdot$

Les électrons appariés dans une orbitale atomique (doublet non liant) sont représentés par  $X|$

Les électrons appariés dans une liaison (doublet liant) sont représentés par  $X—$

Une orbitale atomique vide est représentée par  $X\uparrow$

L'utilisation de ces conventions aboutit à la représentation de Lewis.

**Définition : Représentation de Lewis**

La représentation des électrons de valence répartis au sein d'un édifice chimique est appelée **représentation ou formule de Lewis** de l'édifice (atome, molécule ou ion).

□ Comment déterminer la formule de Lewis d'un édifice chimique ?

Nous devons :

- établir les configurations électroniques de valence des atomes constitutifs de l'édifice ;
- en déduire la formule de Lewis de chaque atome ;
- associer les électrons deux à deux pour former les liaisons covalentes entre atomes, jusqu'à comptabiliser un ou quatre doublet(s) autour de chaque atome.

Les résultats obtenus avec les composés hydrogénés sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Molécule	XH	XH <sub>2</sub>	XH <sub>3</sub>	XH <sub>4</sub>
Élément X	F, Cl, Br, I	O, S, Se, Te	N, P, As, Sb	C, Si, Ge, Sn
Structure de valence de X	$ns^2np^5$	$ns^2np^4$	$ns^2np^3$	$ns^2np^2$
Formule de Lewis des atomes	$H\cdot \quad \cdot\bar{X} $	$H\cdot \quad \cdot\bar{X}\cdot \quad \cdot H$	$H\cdot \quad \cdot\bar{X}\cdot \quad \cdot H$	$H\cdot \quad \cdot\bar{X}\cdot \quad \cdot H$
Formule de Lewis de l'édifice	$H - \bar{X} $	$H - \bar{X} - H$	$\begin{array}{c} H - \bar{X} - H \\   \\ H \end{array}$	$\begin{array}{c} H \\   \\ H - \bar{X} - H \\   \\ H \end{array}$



Les électrons de valence des éléments X de configuration  $ns^2np^2$  subissent une hybridation lors de la constitution des liaisons. En effet, avec deux électrons célibataires sur les orbitales  $np$ , on devrait s'attendre à des molécules de la forme  $XH_2$ , or ce n'est pas le cas. L'élément X est entouré de quatre liaisons X-H identiques, soit d'un octet.

Nous venons de montrer que les règles de l'octet et du duet permettent de comprendre l'existence des molécules  $XH_n$ .

□ **Y a-t-il des exceptions à la règle de l'octet et du duet ?**

Oui, il y a des exceptions parmi lesquelles on distingue :

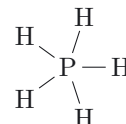
- Les composés radicalaires ou radicaux qui présentent un ou plusieurs électrons célibataires.  
Par exemple, nous pouvons citer le radical méthyle  $\text{CH}_3$  de forme de Lewis  $\text{H}-\overset{\cdot}{\text{C}}-\text{H}$

- Les acides de Lewis qui présentent une orbitale atomique inoccupée.

Par exemple, nous pouvons citer le borane  $\text{BH}_3$  de forme de Lewis  $\text{H}-\overset{\bar{\bar{}}}{\text{B}}-\text{H}$

- Les édifices constitués d'un élément appartenant à la période 3 (et au delà) du tableau périodique qui peut être sujet au phénomène d'hypervalence.

Par exemple, nous pouvons citer le phosphorane  $\text{PH}_5$  de forme de Lewis



**Définition : Hypervalence**

Les éléments à partir de la 3<sup>e</sup> période du tableau périodique peuvent s'entourer d'un nombre de doublets supérieur à 4 (sans dépasser leur nombre d'électrons de valence).



La justification théorique de ce phénomène ne peut pas être précisée sans la théorie des orbitales moléculaires. Nous pouvons cependant souligner qu'à partir de la 3<sup>e</sup> période les atomes centraux sont suffisamment gros pour permettre la constitution de plus de 4 liaisons covalentes.

□ **Existe-t-il différentes façons de créer une liaison covalente ?**

Dans les exemples traités jusqu'ici, la formation des liaisons covalentes s'est faite de manière symétrique (monoélectronique) :



Mais elle se fait parfois de manière asymétrique (biélectronique) :



Il apparaît alors une charge formelle sur chaque atome, due au fait que le doublet est apporté par un seul atome. Les charges électroniques ne sont donc plus compensées par la charge du noyau.

**Méthode 24.1 : Déterminer les charges formelles d'une forme de Lewis**

- Compter les électrons des doublets non liants de l'atome étudié.
- Ajouter au décompte un électron par doublet liant associé à l'atome.
- En déduire le nombre  $N$  d'électrons attribués à l'atome.
- Comparer  $N$  au nombre d'électrons de valence  $N_v$  de l'atome isolé et calculer la charge formelle  $CF = N_v - N$ .

□ Peut-il exister différentes formules de Lewis pour un même édifice chimique ?

La détermination de la formule de Lewis d'une molécule à partir de celle des atomes est adaptée pour les édifices simples. Cependant il existe des cas où il peut exister plusieurs représentations de Lewis possibles. Il convient alors d'identifier la forme la plus probable c'est-à-dire celle représentant l'état le plus stable soit le plus bas en énergie.

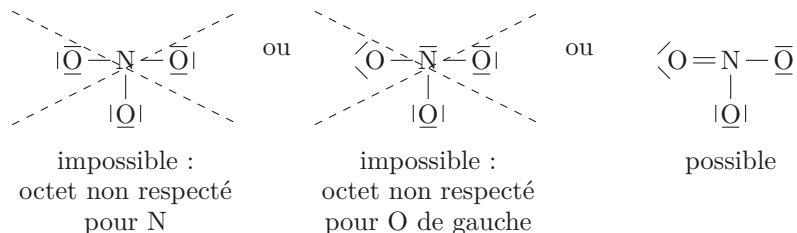
**Méthode 24.2 : Déterminer la formule de Lewis la plus probable d'un édifice**

- Déterminer la configuration électronique des atomes constitutifs de l'édifice.
- Déterminer le nombre d'électrons à répartir sur l'édifice  $N = \sum_{i=1}^n N_{v_i} - q$   
où  $N_{v_i}$  est le nombre d'électrons de valence de l'atome  $i$  constituant l'édifice et  $q$  la charge de l'édifice ( $q > 0$  pour un cation,  $q < 0$  pour un anion).
- Déterminer le nombre de doublets  $N_D$  à répartir sur l'édifice.
  - Si  $N$  est pair, il faudra répartir  $N_D = \frac{N}{2}$  doublets.
  - Si  $N$  est impair, il faudra répartir  $N_D = \frac{N-1}{2}$  doublets et un électron célibataire.
- Identifier l'atome central comme étant l'atome auquel il manque le plus d'électrons.
- Placer l'atome central au centre et les autres atomes autour.
- Répartir les doublets de façon à faire :
  - respecter la règle de l'octet pour les éléments C, N, O et F,
  - apparaître le moins possible de charges formelles,
  - répartir les charges formelles en fonction des électronégativités des atomes si possible.
- Vérifier que la somme des charges formelles coïncide avec la charge de l'édifice.

➔ Exercices (24.1) (24.2) (24.3) (24.4) (24.5)

Appliquons cette méthode à l'ion nitrate  $\text{NO}_3^-$  :

- Commençons par étudier les atomes constitutifs de l'ion : l'atome d'azote de configuration électronique  $1s^2 2s^2 2p^3$  possède 5 électrons de valence donc il lui en manque 3 pour saturer sa couche de valence, tandis que l'atome d'oxygène de configuration électronique  $1s^2 2s^2 2p^4$  possède 6 électrons de valence donc il lui en manque 2 pour saturer sa couche de valence.
- Calculons  $N$  :  $N = 1 \times 5 + 3 \times 6 - (-1) = 24$ .
- Calculons  $N_D$  :  $N_D = 24/2 = 12$ .
- Déterminons l'atome central : N puisqu'il lui manque 3 électrons (à comparer à 2 pour O).
- Plaçons N au centre et O autour puis complétons avec les 12 doublets pour relier les atomes et les entourer de 4 doublets chacun :





La charge  $q$  est comprise entre 0 et  $e$  (dans le cas d'une liaison simple).

En notant  $N$  le barycentre des charges négatives centré au niveau du noyau de A et  $P$  le barycentre des charges positives centré au niveau du noyau de B, le doublet de charges  $(-q, +q)$  attribuées aux points  $N$  et  $P$  distants de  $d$  (égal à la longueur de la liaison A–B) constitue un dipôle électrostatique. La molécule A–B est donc équivalente à un dipôle électrostatique qui peut être caractérisé par un moment dipolaire.

### Définition : Moment dipolaire d'un dipôle électrostatique

Deux charges ponctuelles  $-q$  et  $+q$  placées en  $N$  et  $P$  distants de  $d$  tel que  $\overrightarrow{NP} = d\vec{u}_{N \rightarrow P}$  constituent un dipôle électrostatique, caractérisé par un moment dipolaire  $\vec{\mu}$  tel que :

$$\vec{\mu} = q\overrightarrow{NP} = qd\vec{u}_{N \rightarrow P}$$



L'unité du moment dipolaire (coulomb.mètre (C · m)) n'est pas adaptée au cas des liaisons intramoléculaires. L'unité usuelle est le debye (D) telle que :

$$1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

La charge  $q$  variant de 0 à  $e$  (dans le cas d'une liaison simple) en fonction de la différence d'électronégativité entre les deux atomes liés, il est possible de définir un taux d'ionocité  $\frac{q}{e}$  de la liaison.

Étudions le cas des halogénures d'hydrogène pour lesquels nous avons calculé le taux d'ionocité à partir des données de longueurs de liaison et de moments dipolaires.

Nature de la liaison	H–F	H–Cl	H–Br	H–I
Longueur de liaison $d$	91,7 pm	127,5 pm	141,5 pm	160,9 pm
Moment dipolaire $\mu$	1,826 D	1,109 D	0,827 D	0,448 D
Charge $q = \frac{\mu}{d}$	$6,63 \cdot 10^{-20} \text{ C}$	$2,90 \cdot 10^{-20} \text{ C}$	$1,95 \cdot 10^{-21} \text{ C}$	$9,27 \cdot 10^{-20} \text{ C}$
Taux d'ionocité $\frac{q}{e}$	41,4 %	18,1 %	12,1 %	5,79 %
Différence d'électronégativité $\Delta\chi$	1,78	0,96	0,76	0,46

Nous remarquons que plus la différence d'électronégativité  $\Delta\chi$  est élevée, plus la liaison est polarisée (plus les électrons de la liaison sont attirés par l'atome le plus électronégatif).

Un taux d'ionocité nul correspond au cas d'une liaison homonucléaire. Un taux d'ionocité égal à 1 correspond au cas où l'atome le plus électronégatif a récupéré l'électron de l'atome le moins électronégatif. Dans ce cas, il se forme deux ions  $A^-$  et  $B^+$ . Une liaison de type A–B est un cas intermédiaire et, en fonction de la valeur de  $\Delta\chi$ , différents modèles sont proposés (en gardant à l'esprit que les valeurs ne sont qu'indicatives) :

- la liaison est **covalente** pour  $\Delta\chi < 0,4$ ,
- la liaison est **polarisée ou iono-covalente** pour  $0,4 < \Delta\chi < 2$ ,
- la liaison est **ionique** pour  $\Delta\chi > 2$ .

Ainsi, une liaison C–H pour laquelle  $\Delta\chi = 0,35$  est dite covalente alors que dans un cristal de chlorure de sodium, la liaison NaCl pour laquelle  $\Delta\chi = 2,2$  est considérée comme ionique (voir le chapitre 25).



On retiendra que la longueur des liaisons intramoléculaires est de l'ordre de la **centaine de picomètres**, une liaison double étant plus courte qu'une liaison simple et une liaison triple plus courte qu'une double.

□ **Comment déterminer le moment dipolaire d'une molécule comportant plusieurs liaisons ?**

Le moment dipolaire d'une molécule comportant plusieurs liaisons se calcule à partir des moments dipolaires des liaisons.

**Définition : Molécule polaire ou apolaire**

Le moment dipolaire d'une molécule comportant  $n$  liaisons est égal à la somme vectorielle des moments dipolaires de chaque liaison :

$$\vec{\mu}_{\text{molécule}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mu}_i$$

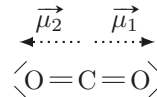
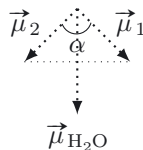
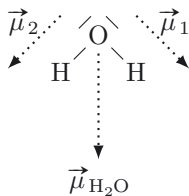
Si  $\vec{\mu}_{\text{molécule}} \neq \vec{0}$ , la molécule est **polaire** et possède un **moment dipolaire permanent**.  
Au contraire, si  $\vec{\mu}_{\text{molécule}} = \vec{0}$ , la molécule est **apolaire**.

Le caractère polaire d'une molécule dépend donc du caractère polarisé des liaisons mais aussi de la géométrie de la molécule.

La méthode VSEPR pour Valence Shell Electron Pair Repulsion que l'on peut traduire par la répulsion des paires d'électrons de valence est une méthode reposant sur un principe simple : l'agencement géométrique des molécules tend à minimiser les répulsions entre les doublets d'électrons (liants et non liants). Cette théorie sortant du cadre du programme, nous retiendrons le principe sur lequel elle repose : la structure géométrique stable est celle pour laquelle les doublets d'électrons sont éloignés au maximum les uns des autres.

**Cas de la molécule d'eau**

La molécule d'eau est coude de sorte que  $\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_{\text{H}_2\text{O}} \neq \vec{0}$  :



La molécule d'eau est donc polaire avec un moment dipolaire  $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 2\mu_{\text{OH}} \cos(\frac{\alpha}{2}) = 1,85 \text{ D}$ , où  $\alpha$  représente l'angle entre les deux liaisons O–H et  $\mu_{\text{OH}} = \mu_1 = \mu_2$ . La relation précédente permet, par exemple, de calculer  $\alpha$  à partir de  $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $\mu_{\text{OH}}$  s'ils sont connus.

**Cas de la molécule de dioxyde de carbone**

Il faut procéder de la même manière mais, cette fois-ci, la molécule est linéaire et la molécule apolaire :  $\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_{\text{CO}_2} = \vec{0}$ .

**Méthode 24.3 : Déterminer le caractère polaire d'un édifice chimique**

- Déterminer l'existence de moments dipolaires des liaisons constitutives de l'édifice :
  - à l'aide de la différence d'électronégativité des atomes engagés dans la liaison,
  - à l'aide de leur place respective dans le tableau périodique.
- Identifier les symétries de la géométrie de l'édifice.
- Déterminer le moment dipolaire résultant.
- Conclure sur le caractère polaire ou apolaire de l'édifice chimique étudié.

➔ Exercice (24.6)



Dans les molécules symétriques, les moments dipolaires des liaisons peuvent se compenser de sorte que la molécule est apolaire malgré l'existence de ces moments.

Existe-t-il d'autres types de moments dipolaires ?

La réponse est affirmative car, même en l'absence de moment dipolaire permanent, une molécule peut se polariser de manière transitoire en formant un dipôle induit ou un dipôle instantané.

- La proximité d'un ion, ou même d'une molécule polaire, engendre des forces électriques qui provoquent un déplacement des charges au sein de la molécule et donc un **dipôle induit**, caractérisé par un **moment dipolaire induit**.
- Le nuage électronique d'une molécule est en constante fluctuation : le système est dynamique. Ainsi, même avec un moment dipolaire nulle en moyenne, il peut apparaître un **dipôle instantané** dû à une déformation brève du nuage. Il est alors caractérisé par un **moment dipolaire instantané**.

Ces moments dipolaires instantanés et induits sont d'autant plus importants que le nuage électronique des molécules est déformable, autrement dit que la molécule est **polarisable**. Plus un atome est gros et plus ses électrons de valence sont éloignés du noyau et faiblement liés. De même, plus une molécule est grosse (grand nombre d'atomes), plus le nuage électronique est déformable. Nous retiendrons que **la polarisabilité d'une molécule est directement liée à sa taille**.

## ■ 2 Les liaisons intermoléculaires

Pour expliquer l'évolution des températures d'ébullition décrite en introduction de ce chapitre, il faut commencer par comprendre ce qu'il se passe à l'échelle microscopique lors d'une ébullition : l'apport d'énergie, par transfert thermique par exemple, permet de rompre les interactions attractives existantes entre les molécules de la phase liquide. Libérées de ces interactions, les molécules peuvent s'éloigner les unes des autres et se répandre dans l'espace qui leur est offert suivant un désordre caractéristique de l'état gazeux.

Quelle est la nature des interactions entre molécules  $XH_n$  ?

Nous avons vu qu'une molécule même globalement neutre peut présenter une répartition de charges non homogène se manifestant par l'existence d'un moment dipolaire. Les moments dipolaires des différentes molécules en interaction sont à l'origine des liaisons intermoléculaires appelées interactions de van der Waals.

**Définition : Interactions de van der Waals**

Les interactions de van der Waals sont les interactions électrostatiques attractives qui s'établissent entre les charges dipolaires de deux édifices chimiques. On distingue les interactions :

- de **type Keesom** : interaction entre deux dipôles permanents,
- de **type Debye** : interaction entre un dipôle permanent et un dipôle induit,
- de **type London** : interaction entre un dipôle instantané et le dipôle qu'il induit.

Une interaction faisant intervenir un **dipôle permanent** (de type Keesom et Debye) est d'autant plus intense que le **moment dipolaire** est important. Une interaction faisant intervenir un dipôle induit (de type Debye et London) est d'autant plus intense que la **polarisabilité** de la molécule où apparaît ce dipôle induit est importante. Ceci est résumé dans les deux tableaux suivants :

Nature de l'interaction	Keesom	Debye	London
Couples de dipôles mis en jeu	dipôle permanent dipôle permanent	dipôle permanent dipôle induit	dipôle instantané dipôle induit
Grandeurs d'influence	moment dipolaire	moment dipolaire polarisabilité	polarisabilité

	Molécule polaire	Molécule apolaire
Molécule polaire	Keesom - Debye - London	Debye - London
Molécule apolaire	Debye - London	London

Lors d'une interaction entre deux édifices chimiques, les différents types d'interaction possibles s'ajoutent.



Les interactions de van der Waals sont **attractives** à moyenne distance (quelques centaines de picomètres) mais, à très courte distance, il existe une interaction **répulsive** due aux nuages électroniques qui ne peuvent pas s'interpénétrer. Ainsi il existe une **position d'équilibre stable** entre deux édifices chimiques en interaction pour une distance de l'ordre de la longueur d'une liaison covalente soit une centaine de picomètres.

□ **Comment expliquer l'interaction de London ?**

L'interaction de London s'exerce entre deux molécules qui peuvent être apolaires. La figure 24.2 en montre le mécanisme, dans le cas de molécules apolaires de type A—A. Le nuage électronique est représenté en ligne pointillée. Suite à une fluctuation du nuage électronique dans une molécule, un dipôle instantané apparaît et engendre un dipôle induit dans l'autre molécule.

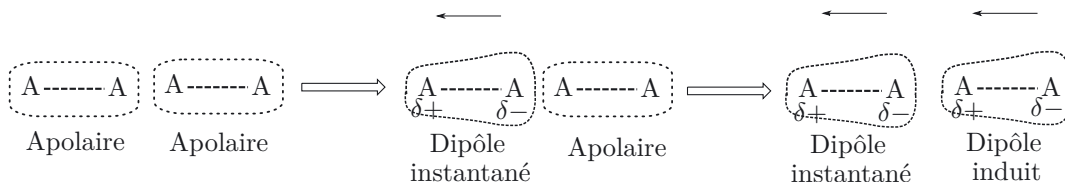


Figure 24.2. Étapes lors d'une interaction de London.



□ **Comment expliquer l'évolution de la température d'ébullition dans une colonne du tableau périodique ?**

D'après la figure 24.1 donnée en introduction, nous observons que pour la colonne 14 du tableau périodique, plus l'élément X appartient à une période de numéro élevé, plus la température d'ébullition de la molécule correspondante augmente. Pour commencer, il faut remarquer que les molécules sont apolaires, il n'y a donc pas d'interaction de type Keesom entre deux molécules. De plus, en descendant dans la colonne, la taille de l'élément X augmente. On en déduit que la polarisabilité de  $\text{XH}_n$  augmente et que les interactions de Debye et London sont de plus en plus intenses. En descendant dans la colonne 14, il est donc nécessaire d'apporter plus d'énergie pour rompre les liaisons intermoléculaires, ce qui se traduit par une température d'ébullition plus élevée.

L'évolution de cette température dans les colonnes 15 à 17 est similaire sauf pour les éléments de la deuxième période qui ont une température d'ébullition exceptionnellement grande.

□ **Comment expliquer la haute température d'ébullition des molécules de HF, H<sub>2</sub>O et NH<sub>3</sub> ?**

Dans les colonnes 15 à 17, les molécules hydrogénées sont polarisées et des interactions intermoléculaires de type Keesom existent. Cependant ces interactions ne sont pas suffisantes pour expliquer cette singularité. Il faut chercher une interaction supplémentaire. C'est la liaison hydrogène.

**Définition : Liaison hydrogène**

La liaison hydrogène est l'interaction attractive qui s'établit entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif A et un doublet non liant d'électrons porté par un atome électronégatif B.



A et B étant le plus souvent des atomes de fluor (F), d'oxygène (O) ou d'azote (N).  
B peut aussi être un anion, comme  $\text{Cl}^-$ .

L'atome d'hydrogène est porteur d'une charge partielle positive à cause de sa liaison avec l'atome A électronégatif. Il interagit de manière attractive avec l'atome B électronégatif (ou l'anion).

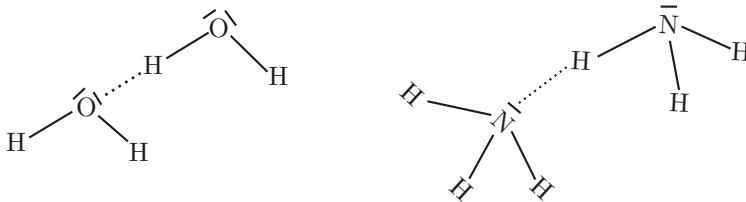


Figure 24.3. Liaisons hydrogène dans l'eau et dans l'ammoniac.

En plus des liaisons de van der Waals, des liaisons hydrogène existent entre les molécules de HF, de H<sub>2</sub>O ou de NH<sub>3</sub>. Sachant que la liaison hydrogène est environ 10 fois plus forte qu'une liaison de van der Waals, le passage de la phase liquide à la phase vapeur nécessite un apport d'énergie plus important pour rompre ces liaisons et la température d'ébullition est plus élevée.



■ En l'absence de liaisons hydrogène, l'eau serait à l'état gazeux à température ambiante.

Il faut savoir que les interactions intermoléculaires permettent d'expliquer ou de prévoir de nombreuses propriétés physiques de corps purs (état physique, température de changement d'état, solubilité...). La méthode ci-dessous en résume les points importants à connaître :

#### Méthode 24.4 : Expliquer une observation macroscopique

- Identifier la nature des interactions : Liaison de van der Waals? Liaison hydrogène?
- Identifier l'intensité des interactions de van der Waals :
  - de type Keesom : les molécules sont-elles faiblement ou fortement polaires?
  - de type London ou Debye : sont-elles faiblement ou fortement polarisables?
- En raisonnant sur la nature et l'intensité des interactions, expliquer :
  - les températures de changement d'état,
  - la solubilité de différentes espèces dans un solvant,
  - l'état physique des espèces.

➔ Exercice (24.7)

#### □ Les liaisons covalentes sont-elles rompues lors d'un changement d'état ? Pourquoi ?

Non, elles restent intactes. Sinon la nature de l'espèce chimique serait changée et nous ne parlerions plus de changement d'état, qui est une transformation physique, mais de transformation chimique. En réalité, l'apport d'énergie n'est pas suffisant pour rompre les liaisons covalentes, qui sont beaucoup plus fortes que les interactions intermoléculaires. Caractérisons l'intensité des interactions par la notion d'énergie de liaison.

#### Définition : Énergie de liaison

L'énergie de liaison est l'énergie à fournir pour rompre une mole de liaisons entre deux atomes A et B suivant :  $A-B(g) \rightarrow A\cdot(g) + \cdot B(g)$ . Elle s'exprime en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Les ordres de grandeur ci-dessous confirment bien la rupture prioritaire des interactions de van der Waals (les plus faibles) puis des liaisons hydrogène, sans modification des liaisons covalentes.

Nature de la liaison	covalente	hydrogène	van der Waals
Énergie de liaison (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	quelques centaines	quelques dizaines	quelques unités

## ■ 3 Les solvants

Commençons par définir ce qu'est un solvant.

#### Définition : Solvant

Un solvant est une espèce chimique à l'état liquide à sa température d'utilisation, qui permet de dissoudre, diluer, extraire, nettoyer, créer un milieu réactionnel propice à une réaction, sans modifier sa nature chimique.

Au sein d'une phase liquide, l'espèce ultra-majoritaire sera qualifiée de solvant tandis que les autres espèces seront qualifiées de solutés. Dans le cas d'une solution aqueuse, le solvant est l'eau. Dans

le cas d'une solution organique, le solvant est constitué de molécules organiques dont les éléments principaux sont le carbone et l'hydrogène.

□ **Comment caractériser un solvant ?**

Un solvant est caractérisé par :

- Sa **permittivité électrique** relative  $\epsilon_r$ , en lien avec son **pouvoir dissociant**. L'interaction entre charges opposées  $q_1$  et  $q_2$  se manifeste par la force électrique :  $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \vec{u}_{12}$ .  
Un solvant de forte permittivité affaiblit la force d'interaction entre les charges et facilite la dissociation des paires d'ions en solution.
- Son **moment dipolaire**  $\mu$  en lien avec son **pouvoir ionisant** et solvatant. Un solvant de fort moment dipolaire polarise les molécules et favorise la ionisation et la solvatation.
- Sa **proticité** en lien avec son **pouvoir solvatant**. Un solvant protique est un solvant dont la molécule possède au moins un atome d'hydrogène susceptible d'intervenir dans une liaison hydrogène, par opposition au solvant aprotique. Un solvant protique favorise la solvatation des substances ioniques par établissement de liaisons hydrogène.

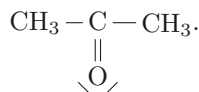


■ Le terme protique peut être remplacé par le terme protogène.

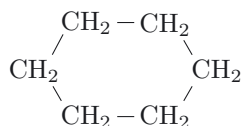
□ **Comment choisir un solvant pour dissoudre une espèce ?**

Pour dissoudre une substance dans un solvant, il faut rompre les interactions entre les molécules de l'espèce à dissoudre pour former des interactions entre ces molécules et les molécules du solvant. Nous pouvons distinguer trois grandes classes de solvant :

- Les **solvants protiques polaires**. Ils sont favorables à la dissolution des substances ioniques en interagissant plus particulièrement avec les anions (grâce aux interactions entre les charges des anions et les hydrogènes électropositifs du solvant ou encore les charges partielles négatives des dipôles permanents du solvant).  
Nous pouvons citer l'eau et les alcools, qui comportent le groupe  $\text{—O—H}$ .
- Les **solvants aprotiques polaires**. Ils sont favorables à la dissolution des substances ioniques en interagissant plus particulièrement avec les cations (grâce aux interactions entre les charges des cations et les charges partielles négatives des dipôles permanents du solvant).  
Nous pouvons citer la propanone encore appelée acétone :



- Les **solvants aprotiques apolaires**. Ils sont peu efficaces pour dissoudre des substances ioniques ou polaires. Ils peuvent établir des interactions de van der Waals de type London et Debye avec les substances moléculaires.  
Nous pouvons citer le cyclohexane :



□ **Quelles sont les étapes de dissolution d'une substance ?**

Commençons par décrire les étapes de dissolution d'une substance ionique.

- **Ionisation** : création de paires d'ions. Cette étape est favorisée par un solvant de grand moment dipolaire.
- **Dissociation** : séparation de la paire d'ions en un cation et un anion plus largement séparés. Cette étape est favorisée par un solvant de grande permittivité électrique.
- **Solvatation** de chaque ion séparément. Il s'agit de la formation d'une cage de solvatation constituée d'un ensemble de molécules de solvant entourant l'ion. Cette étape est favorisée par un solvant polaire ou protique.

Dans le cas d'une substance moléculaire, la dissolution se fait en une seule étape consistant en une solvatation et dispersion des molécules de substance à dissoudre.

□ **Comment choisir un solvant pour extraire une espèce ?**

Nous pouvons extraire une espèce d'une phase liquide en favorisant sa migration vers un autre solvant pour lequel elle a plus d'affinités, autrement dit avec lequel elle établit des interactions attractives plus fortes. Le solvant d'accueil doit être non miscible avec le solvant d'origine.

Deux solvants sont miscibles s'ils peuvent établir entre eux les mêmes interactions que celles existantes au sein de chacun des solvants, autrement dit s'il s'agit de deux solvants de même nature. Le vieil adage « qui se ressemblent s'assemblent » prend ici tout son sens.

La méthode de détermination de la miscibilité de deux solvants est résumée ci-dessous :

**Méthode 24.5 : Expliquer la miscibilité entre deux solvants**

- Identifier la nature des solvants : polaire ou apolaire ? protique ou aprotique ?
- Conclure à la :
  - miscibilité totale pour deux solvants de même nature,
  - miscibilité partielle pour deux solvants présentant une caractéristique commune,
  - miscibilité nulle pour deux solvants de nature opposée.

➔ Exercice (24.8)

## Interro de cours

1. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant les espèces suivantes :  $\text{NCl}_3$ ,  $\text{NCl}_5$ ,  $\text{NCl}_6$ .
  - (a) Toutes ces espèces existent.
  - (b) Une seule de ces espèces n'existe pas.
  - (c) Deux de ces espèces n'existent pas.
2. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant les espèces suivantes :  $\text{PCl}_3$ ,  $\text{PCl}_5$ ,  $\text{PCl}_6$ .
  - (a) Toutes ces espèces existent.
  - (b) Une seule de ces espèces n'existe pas.
  - (c) Deux de ces espèces n'existent pas.
3. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant les espèces suivantes : He, Ne, Ar.
  - (a) Il s'agit de gaz nobles.
  - (b) Il s'agit de gaz parfaits.
  - (c) Il s'agit de gaz rares à l'exception de l'espèce Ar qui un métal.
4. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant leur température d'ébullition.
  - (a) Les températures d'ébullition ne sont pas définies puisqu'ils sont toujours gazeux.
  - (b)  $T_{eb}(\text{He}) < T_{eb}(\text{Ne}) < T_{eb}(\text{Ar})$ .
  - (c)  $T_{eb}(\text{He}) > T_{eb}(\text{Ne}) > T_{eb}(\text{Ar})$ .
5. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant une molécule présentant au moins une liaison polarisée.
  - (a) Cette molécule est obligatoirement polaire.
  - (b) Cette molécule est obligatoirement apolaire.
  - (c) Cette molécule peut être polaire comme apolaire.
6. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant une molécule apolaire.
  - (a) Cette molécule ne possède pas de moment dipolaire.
  - (b) Cette molécule ne peut pas établir d'interaction de van der Waals.
  - (c) Cette molécule est plus soluble dans le cyclohexane que dans l'eau.
7. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant les molécules d'halogénure d'hydrogène (HF, HCl, HBr) en solution aqueuse.
  - (a) Toutes ces molécules établissent quatre types d'interaction avec le solvant.
  - (b) Toutes ces molécules établissent trois types d'interaction avec le solvant.
  - (c) Cela dépend de la nature de l'halogénure d'hydrogène.
8. Identifier la(ou les) affirmation(s) exacte(s) concernant la solubilité du fluorure d'hydrogène HF.
  - (a) solubilité dans le méthanol  $<$  solubilité dans l'acétone  $<$  solubilité dans le cyclohexane.
  - (b) solubilité dans le méthanol  $>$  solubilité dans l'acétone  $>$  solubilité dans le cyclohexane.
  - (c) solubilité dans l'acétone  $>$  solubilité dans le méthanol  $>$  solubilité dans le cyclohexane.

## Exercices

### Exercice 24.1 Carbone

➔ Méthode (24.2)

Établir la formule de Lewis la plus probable des composés suivants, qui contiennent les éléments  ${}_6\text{C}$ ,  ${}_1\text{H}$ ,  ${}_7\text{N}$ ,  ${}_8\text{O}$  et  ${}_{17}\text{Cl}$ .

1. Méthane  $\text{CH}_4$ , éthylène  $\text{C}_2\text{H}_4$ , acétylène  $\text{C}_2\text{H}_2$ .
2. Méthanal  $\text{CH}_2\text{O}$
3. Monoxyde de carbone  $\text{CO}$ .
4. Dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$ .
5. Ion cyanure  $\text{CN}^-$ .
6. Tétrachlorure de carbone  $\text{CCl}_4$ .
7. Chloroforme  $\text{CHCl}_3$ .

### Exercice 24.2 Oxygène

➔ Méthode (24.2)

Établir la formule de Lewis la plus probable des composés suivants qui contiennent l'élément  ${}_8\text{O}$ . Présenter éventuellement des formes mésomères.

1. Dioxygène  $\text{O}_2$ .
2. Eau  $\text{H}_2\text{O}$ .
3. Ion hydroxyde  $\text{OH}^-$ .
4. Ion oxonium  $\text{H}_3\text{O}^+$ .
5. Ozone  $\text{O}_3$  (molécule linéaire).

### Exercice 24.3 Azote

➔ Méthode (24.2)

Établir la formule de Lewis la plus probable des composés suivants, qui contiennent les éléments  ${}_7\text{N}$ ,  ${}_1\text{H}$  et  ${}_8\text{O}$ .

1. Diazote  $\text{N}_2$ .
2. Ammoniac  $\text{NH}_3$ .
3. Ion ammonium  $\text{NH}_4^+$ .
4. Ion amidure  $\text{NH}_2^-$ .
5. Monoxyde d'azote  $\text{NO}$ , avec liaison double et violation de la règle de l'octet.
6. Dioxyde d'azote  $\text{NO}_2$ , avec liaisons doubles et violation de la règle de l'octet.
7. Acide azothydrique, dont les formes mésomères données ci-dessous sont à compléter :



**Exercice 24.4 Chlore**

➔ Méthode (24.2)

Établir la formule de Lewis la plus probable des composés suivants, qui contiennent les éléments  $_{17}\text{Cl}$ ,  $_{1}\text{H}$  et  $_{8}\text{O}$ . Présenter éventuellement des formes mésomères.

1. Dichlore  $\text{Cl}_2$ .
2. Chlorure d'hydrogène  $\text{HCl}$ .
3. Ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ .
4. Ion perchlorate  $\text{ClO}_4^-$  pour lequel l'atome central  $_{17}\text{Cl}$  est hypervalent.

**Exercice 24.5 Soufre**

➔ Méthode (24.2)

Établir la formule de Lewis la plus probable des composés suivants, dont l'atome central est le soufre  $_{16}\text{S}$  et qui contiennent l'élément  $_{8}\text{O}$ . On veillera à identifier l'élément sujet à l'hypervalence.

1. Dioxyde de soufre  $\text{SO}_2$ .
2. Trioxyde de soufre  $\text{SO}_3$ .
3. Ion sulfate  $\text{SO}_4^{2-}$ .
4. Ion thiosulfate  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .

**Exercice 24.6 Moment dipolaire et géométrie d'une molécule**

➔ Méthode (24.3)

L'existence d'un moment dipolaire au sein d'une molécule est facilement observable à l'échelle macroscopique et permet dans certains cas d'obtenir des informations sur la géométrie de la molécule. Le tableau suivant donne les moments dipolaires de quelques molécules en debye.

$\text{H}_2\text{O}$	$\text{CO}_2$	$\text{CCl}_4$	$\text{CHCl}_3$	$\text{NH}_3$
1,8 D	0 D	0 D	1,1 D	1,5 D

Pour interpréter ces moments dipolaires, on donne aussi les électronégativités de l'échelle de Pauling :

H	C	N	Cl	O
2,2	2,55	3,04	3,16	3,44

1. Comment expliquer l'absence de moment dipolaire du dioxyde de carbone ?
2. Le chloroforme  $\text{CHCl}_3$  et le tétrachlorure de carbone  $\text{CCl}_4$  ont une géométrie tétraédrique : le carbone occupe le centre d'un tétraèdre régulier dont les quatre sommets sont occupés par les atomes liés au carbone. Expliquer l'existence d'un moment dipolaire pour l'un et l'absence de moment dipolaire pour l'autre.
3. L'ammoniac  $\text{NH}_3$  a aussi une géométrie tétraédrique : l'azote occupe le centre d'un tétraèdre régulier dont trois des sommets sont occupés par les atomes d'hydrogène. Expliquer le moment dipolaire de l'ammoniac.

**Exercice 24.7 Gaz diatomiques**

→ Méthode (24.4)

Le tableau suivant donne la température de fusion  $T_f$  et d'ébullition  $T_v$  de quelques corps simples diatomiques, à une pression de 1,0 bar.

Substance	H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	F <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	Cl <sub>2</sub>	Br <sub>2</sub>	I <sub>2</sub>
$T_f$ (K)	14,0	63,3	53,5	54,8	172	266	387
$T_v$ (K)	20,3	77,4	85,0	90,2	239	332	458

On rappelle les numéros atomiques des éléments :  ${}_1\text{H}$ ,  ${}_7\text{N}$ ,  ${}_8\text{O}$ ,  ${}_9\text{F}$ ,  ${}_{17}\text{Cl}$ ,  ${}_{35}\text{Br}$ ,  ${}_{53}\text{I}$ .

- Déterminer la configuration électronique de valence de ces éléments et les situer dans le tableau périodique.
- Quelles sont les forces intermoléculaires responsables de la cohésion de ces corps simples ?
- Expliquer les variations des températures de changement d'état.

**Exercice 24.8 Solvants**

→ Méthode (24.5)

On s'intéresse aux solvants suivants, dont on donne les moments dipolaires moléculaires en debye :

Eau	Méthanol	Hexane	DMF	Acétonitrile
$\begin{array}{c} \text{H} - \text{O} \\   \\ \text{H} \end{array}$	CH <sub>3</sub> - O - H	CH <sub>3</sub> - (CH <sub>2</sub> ) <sub>4</sub> - CH <sub>3</sub>	$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \\ \diagdown \\ \text{N} - \text{C} - \text{H} \\ \diagup \\ \text{CH}_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \text{O} \end{array}$	CH <sub>3</sub> - C ≡ N
1,8 D	1,65 D	0 D	3,8 D	3,9 D

DMF est l'abréviation de diméthylformamide

- Identifier les solvants polaires et apolaires.
- Identifier les solvants protiques et aprotiques.
- Identifier les solvants accepteurs de liaison hydrogène.
- Tous ces solvants sont miscibles à l'exception de l'hexane qui n'est miscible avec aucun des autres. Expliquer.



# Corrections

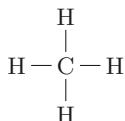
## Interro de cours

1. L'élément azote fait partie de la 2<sup>e</sup> ligne et de la 15<sup>e</sup> colonne du tableau. Il doit obligatoirement respecter la règle de l'octet en étant entouré de 4 doublets. Cela élimine la possibilité de  $\text{NCl}_5$  et  $\text{NCl}_6$ . Réponse (c).
2. L'élément phosphore fait partie de la 3<sup>e</sup> ligne et de la 15<sup>e</sup> colonne du tableau. Le phénomène d'hypervalence est donc possible. Possédant 5 électrons de valence, il sera entouré au maximum de 5 doublets. Cela élimine la possibilité de  $\text{PCl}_6$ . Réponse (b).
3. Ces éléments font partie de la famille des gaz nobles (ou gaz rares) parmi lesquels l'argon Ar qui ne doit pas être confondu avec l'argent Ag. Réponse (a).
4. Plus on descend dans la colonne du tableau périodique, plus l'atome est gros et plus il est polarisable. Ainsi les interactions de van der Waals augmentent quand on passe du He à Ar. Il est donc plus difficile de les rompre ce qui se traduit par une augmentation de la température d'ébullition. Réponse (b).
5. Une telle molécule peut être apolaire si elle présente plusieurs liaisons polarisées dont les moments dipolaires se compensent pour des raisons de symétrie. Réponse (c).
6. Une molécule apolaire ne possède pas de moment dipolaire permanent mais peut présenter des moments instantanés et induits permettant d'établir des interactions de van der Waals de type Debye et London. Cette molécule sera malgré tout plus soluble dans un solvant apolaire comme le cyclohexane qu'un solvant polaire comme l'eau. Réponse (c).
7. Les molécules polaires HF peuvent établir des liaisons hydrogène et des liaisons de van der Waals (de type Keesom, Debye et London) avec l'eau. Par contre, les molécules polaires HBr ne peuvent pas établir de liaisons hydrogène. Réponse (c).
8. La solubilité des molécules HF est plus grande dans un solvant polaire protique (comme le méthanol) que dans un solvant polaire aprotique (comme l'acétone) que dans un solvant apolaire aprotique (comme le cyclohexane). Réponse (b).

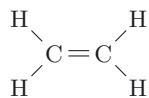
## Exercice 24.1

1. On établit tout d'abord les configurations électroniques de valence du carbone ( $2s^2 2p^2$ ), de l'azote ( $2s^2 2p^3$ ), de l'oxygène ( $2s^2 2p^4$ ), de l'hydrogène ( $1s^1$ ) et du chlore ( $3s^2 3p^5$ ). Il manque 4 électrons pour saturer la couche de valence du carbone, 3 pour saturer celle de l'azote, 2 pour saturer celle de l'oxygène et enfin 1 pour saturer celle du chlore.

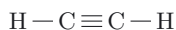
Dans le méthane, le carbone est donc l'atome central. Il partage un doublet liant avec chacun des 4 atomes d'hydrogène. L'atome de carbone est entouré de 4 doublets, soit 8 électrons, ce qui lui permet d'acquérir la configuration  $2s^2 2p^6$  (règle de l'octet). Chaque atome d'hydrogène est entouré d'un doublet, soit 2 électrons, ce qui leur permet d'acquérir la configuration  $1s^2$  (règle du duet).



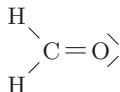
L'éthylène comporte une liaison double, qui est composée de deux doublets liants partagés entre les deux atomes de carbone. La règle de l'octet est vérifiée pour les atomes de carbone et la règle du duet est vérifiée pour les atomes d'hydrogène.



L'acétylène comporte une liaison triple, qui est composée de trois doublets liants partagés entre les deux atomes de carbone. La règle de l'octet est vérifiée pour les atomes de carbone et la règle du duet est vérifiée pour les atomes d'hydrogène.



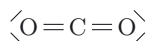
2. Dans le méthanal, le carbone est à placer au centre puisque c'est l'atome auquel il manque le plus d'électrons. Il faut répartir  $N_D = \frac{4+6+2}{2} = 6$  doublets. On commence par placer les doublets liants partagés avec l'atome d'oxygène d'une part et avec chacun des atomes d'hydrogène d'autre part. Ensuite, on répartit les doublets restants pour que la règle de l'octet soit vérifiée pour le carbone et l'oxygène. Une liaison double, qui est composée de deux doublets liants partagés entre le carbone et l'oxygène, s'avère nécessaire. On vérifie enfin que la charge formelle est nulle pour tous les atomes.



3. Pour le monoxyde de carbone, il y a  $N_D = \frac{4+6}{2} = 5$  doublets à répartir. Le respect de la règle de l'octet impose de faire apparaître une liaison triple, qui est composée de trois doublets liants partagés entre les atomes de carbone et d'oxygène. Il ne reste qu'à déterminer les charges formelles. Il y a 5 électrons attribués au carbone qui possède 4 électrons de valence ; sa charge formelle est donc  $CF = 4 - 5 = -1$ . Il y a aussi 5 électrons attribués à l'oxygène qui possède 6 électrons de valence, soit une charge formelle  $CF = 6 - 5 = +1$ . La somme des charges formelles est bien en cohérence avec la neutralité du monoxyde de carbone.



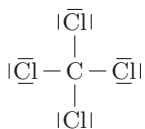
4. Pour le dioxyde de carbone, on place le carbone au centre puisque c'est l'atome auquel il manque le plus d'électrons. Ensuite, on répartit  $N_D = \frac{4+6 \times 2}{2} = 8$  doublets de manière à satisfaire la règle de l'octet pour le carbone et l'oxygène : deux liaisons doubles, composées de deux doublets liants partagés entre le carbone et l'oxygène, s'avèrent nécessaires. On vérifie enfin que les charges formelles sont nulles.



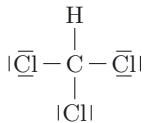
5. Pour l'ion cyanure, on répartit  $N_D = \frac{4+5+1}{2} = 5$  doublets de manière à satisfaire la règle de l'octet pour le carbone et l'azote : une liaison triple, composée de trois doublets liants partagés entre le carbone et l'azote, s'avère nécessaire. Enfin, on détermine les charges formelles. Il y a 5 électrons attribués au carbone alors qu'il possède 4 électrons de valence ; sa charge formelle est donc  $CF = 4 - 5 = -1$ . Pour l'azote, on lui attribue 5 électrons, autant que d'électrons de valence, donc sa charge formelle est nulle. La charge formelle totale est bien égale à la charge de l'ion.



6. Pour le tétrachlorure de carbone, l'atome central est le carbone. On répartit  $N_D = \frac{4+7 \times 4}{2} = 16$  doublets en faisant apparaître 4 liaisons simples. La règle de l'octet pour le carbone est respectée. Le chlore ayant 7 électrons de valence, on complète chaque atome de chlore avec 3 doublets non liants. La règle de l'octet pour les atomes de chlore est vérifiée.

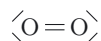


7. Pour le chloroforme, un atome de chlore avec trois doublets non liants est remplacé par un atome d'hydrogène qui respecte la règle du duet.



### Exercice 24.2

1. La configuration électronique de valence de l'oxygène est  $2s^2 2p^4$ . Une double liaison permet de satisfaire la règle de l'octet pour l'oxygène.



2. Dans l'eau, un doublet liant partagé avec chaque hydrogène et deux doublets non liants permettent à l'oxygène de satisfaire la règle de l'octet.



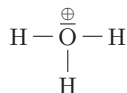
3. L'ion hydroxyde peut se déduire de l'eau en enlevant  $\text{H}^+$  et en laissant le doublet à l'oxygène, ce qui lui donne 7 électrons, et donc une charge formelle  $-1$ .

Une autre méthode consiste à répartir  $N_D = \frac{6+1+1}{2} = 4$  doublets pour faire respecter la règle de l'octet à l'oxygène et du duet à l'hydrogène puis à calculer la charge formelle.

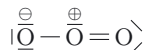


4. Pour obtenir l'ion oxonium à partir de l'eau, on forme un doublet liant avec l'hydrogène à partir d'un des doublets non liants, ce qui confère une charge formelle  $+1$  à l'oxygène.

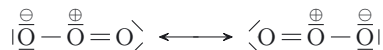
Une autre méthode consiste à identifier l'oxygène comme l'atome central puis à répartir les doublets ( $N_D = \frac{6+1 \times 3 - 1}{2} = 4$ ) pour faire respecter la règle du duet à l'hydrogène et de l'octet à l'oxygène. Il ne reste qu'à comparer les 6 électrons de valence de l'oxygène aux 5 électrons qui lui sont attribués pour obtenir sa charge formelle  $CF = 6 - 5 = +1$ . Cette charge formelle est en cohérence avec la charge de l'ion.



5. Pour l'ozone, il y a  $N_D = \frac{6 \times 3}{2} = 9$  doublets à répartir. La seule répartition possible respectant la règle de l'octet fait apparaître une liaison simple et une liaison double. On attribue 5 électrons à l'atome d'oxygène central portant un doublet non liant alors qu'il présente 6 électrons de valence : sa charge formelle est donc  $CF = 6 - 5 = +1$ . On attribue 7 électrons à l'atome d'oxygène entouré de 3 doublets non liants et d'une liaison simple alors qu'il présente 6 électrons de valence : sa charge formelle est donc  $CF = 6 - 7 = -1$ . La somme de ces charges formelles est bien nulle.



Cette formule ne respecte pas la symétrie de la molécule. Il faut donc plutôt considérer les deux formes mésomères suivantes :



**Exercice 24.3**

1. La configuration électronique de valence de l'azote est  $2s^2 2p^3$ . Dans la molécule de diazote, on place une triple liaison et un doublet non liant sur chacun des atomes d'azote pour que la règle de l'octet soit vérifiée.

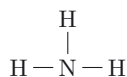


Théoriquement, on peut aussi envisager une double liaison, ce qui donne la forme de Lewis

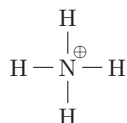


mais celle-ci ne vérifie pas la règle de l'octet. Expérimentalement, l'énergie de liaison très forte du diazote confirme l'existence d'une liaison triple.

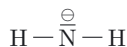
2. Pour l'ammoniac, après avoir placé 3 doublets liants pour les trois liaisons avec les hydrogènes, il reste un doublet non liant à placer sur l'azote.



3. Pour l'ion ammonium, la règle de l'octet est satisfaite en liant l'azote central aux quatre hydrogènes. Il y a alors 4 électrons attribués à l'azote qui possède 5 électrons de valence donc sa charge formelle est  $CF = 5 - 4 = +1$ , qui est bien la charge de l'ion.



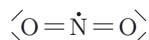
4. Pour l'ion amidure, on commence par placer les deux liaisons de l'azote avec les deux hydrogènes (deux doublets liants), puis on complète avec deux doublets non liants pour l'azote de manière à vérifier la règle de l'octet. Cela donne 6 électrons sur l'azote, soit une charge formelle  $CF = 5 - 6 = -1$ , égale à la charge de l'ion.



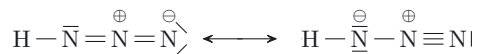
5. Pour le monoxyde d'azote, il y a  $N = 6 + 5 = 11$  électrons de valence à répartir, soit 5 doublets et un électron célibataire. On place tout d'abord deux doublets liants partagés entre l'azote et l'oxygène puis deux doublets non liants sur l'oxygène pour lui attribuer 6 électrons et respecter la règle de l'octet. Pour l'azote, il reste alors un doublet et un électron célibataire, ce qui lui attribue 5 électrons. Il n'y a donc pas de charge formelle et la règle de l'octet n'est pas vérifiée pour l'azote. Le monoxyde d'azote est un radical.



6. Pour le dioxyde d'azote, il y a  $N = 6 \times 2 + 5 = 17$  électrons de valence à répartir, soit 8 doublets et un électron célibataire. On place tout d'abord les 4 doublets liants puis les 2 doublets non liants autour de chaque oxygène (pour leur attribuer 6 électrons et respecter la règle de l'octet), après quoi il reste un seul électron à attribuer à l'azote, ce qui lui attribue 5 électrons. Le dioxyde d'azote est un radical.



7. Pour l'acide azoïque, on commence par ajouter des doublets non liants sur les atomes d'azote afin de satisfaire la règle de l'octet, puis on détermine les charges formelles.



**Exercice 24.4**

1. La configuration électronique de valence du chlore est  $3s^2 3p^5$ , celle de l'oxygène est  $2s^2 2p^4$ . Pour le dichlore, une liaison simple et trois doublets non liants sur chaque atome de chlore permettent de satisfaire la règle de l'octet. Il y a bien 7 électrons attribués à chaque chlore ce qui correspond bien à leur nombre d'électrons de valence.



2. Dans le chlorure d'hydrogène, un doublet liant partagé avec l'hydrogène et trois doublets non liants permettent au chlore de satisfaire la règle de l'octet.



3. Pour l'ion hypochlorite, il y a  $N_D = \frac{7+6+1}{2} = 7$  doublets à répartir. On essaye tout d'abord une liaison simple. Il reste alors 3 doublets non liants à placer sur le chlore et 3 autres sur l'oxygène pour respecter la règle de l'octet. 7 électrons sont attribués au chlore, autant que d'électrons de valence. 7 électrons sont attribués à l'oxygène, un de plus que d'électrons de valence, d'où une charge formelle  $-1$ .

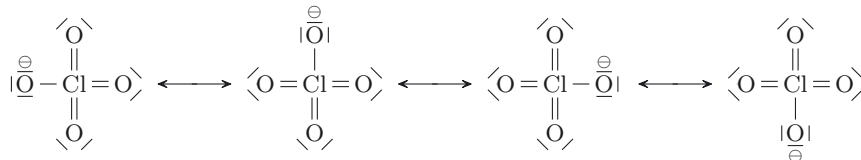


On peut aussi tester l'hypothèse d'une liaison double.



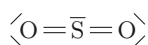
Dans cette forme, la règle de l'octet n'est pas satisfaite pour le chlore. On retiendra donc la première forme avec une liaison simple.

4. Pour l'ion perchlorate, il y a  $N_D = \frac{7+6 \times 4 + 1}{2} = 16$  doublets à répartir. On commence par relier l'atome central de chlore aux quatre atomes de chlore puis on répartit les autres doublets pour faire respecter la règle de l'octet à chaque oxygène et minimiser les charges formelles. L'hypervalence du chlore permet d'obtenir une seule charge formelle sur un oxygène entouré de trois doublets non liants :  $CF = 6 - 7 = -1$ . La symétrie de la molécule ne permet pas d'attribuer la charge négative à un atome d'oxygène en particulier. Il faut donc envisager quatre formes mésomères.

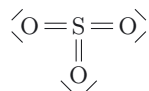


**Exercice 24.5**

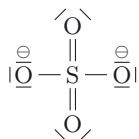
1. La configuration électronique de l'oxygène est  $2s^2 2p^4$ , celle du soufre est  $3s^2 3p^4$ . Le soufre et l'oxygène ont des couches de valence similaires, avec 6 électrons de valence. Cependant, le soufre, appartenant à la troisième période, est sujet à l'hypervalence à la différence de l'oxygène. Dans le dioxyde de soufre, il y a  $N_D = \frac{6 \times 3}{2} = 9$  doublets à répartir. La seule répartition permettant le respect de la règle de l'octet pour les atomes d'oxygène et la minimisation des charges formelles fait apparaître deux liaisons doubles et un doublet non liant sur le soufre : le nombre d'électrons qui lui est attribué correspond bien à son nombre d'électrons de valence. Le soufre a finalement 5 doublets associés.



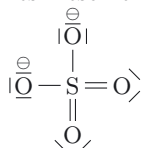
2. La formule de Lewis du trioxyde de soufre se construit de manière similaire avec un nombre de doublets à répartir  $N_D = \frac{6 \times 4}{2} = 12$ . On aboutit à 6 doublets associés au soufre.



3. Dans l'ion sulfate  $\text{SO}_4^{2-}$ , il y a  $N_D = \frac{6 \times 5 + 2}{2} = 16$  doublets à répartir. Les répartitions permettant le respect de la règle de l'octet pour les atomes d'oxygène et la minimisation des charges formelles font apparaître deux liaisons doubles. On peut aussi obtenir l'ion sulfate  $\text{SO}_4^{2-}$  à partir de  $\text{SO}_3$  en ajoutant une liaison avec un atome d'oxygène. Voici une formule de Lewis possible :

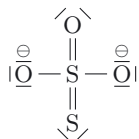


La symétrie de la molécule ne permet pas d'attribuer les charges négatives à deux atomes d'oxygène en particulier. Il faut donc envisager des formes mésomères équivalentes, par exemple :



On peut écrire ainsi 6 formes mésomères. La théorie quantique prédit en effet une délocalisation des électrons excédentaires sur les quatre atomes d'oxygène.

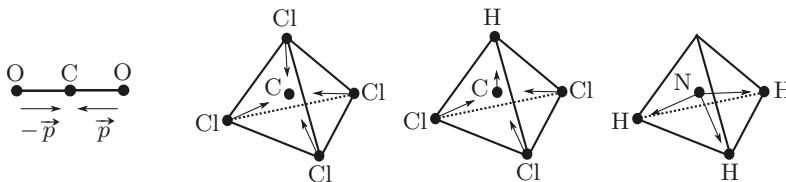
4. Le plus simple est de déduire l'ion thiosulfate de l'ion sulfate en remplaçant un atome d'oxygène par un atome de soufre. Voici une forme de Lewis :



Des formes mésomères se déduisent de celle-ci, si bien que les deux charges formelles  $-1$  sont en moyenne réparties sur les 3 atomes d'oxygène et l'atome de soufre périphérique.

### Exercice 24.6

- Dans le dioxyde de carbone, l'oxygène étant plus électronégatif que le carbone, chaque liaison C–O possède un moment dipolaire dirigé de l'oxygène vers le carbone. Ces deux moments sont égaux en norme. Un moment dipolaire total nul ne peut s'expliquer que par une géométrie linéaire : les trois atomes sont alignés si bien que les deux vecteurs moments dipolaires sont opposés (voir figure ci-après).
- Dans le tétrachlorure de carbone, le chlore étant plus électronégatif que le carbone, chacune des quatre liaisons C–Cl possède un moment dipolaire dirigé du chlore vers le carbone. Ces quatre moments sont égaux en norme. Le centre du tétraèdre (occupé par l'atome de carbone) étant le barycentre des quatre sommets, la somme des quatre vecteurs moments dipolaires est nulle. Pour cette raison, la molécule  $\text{CCl}_4$  ne possède pas de moment dipolaire (voir figure ci-après).  
Dans le chloroforme, la liaison C–H possède un faible moment dipolaire dirigé du carbone vers l'hydrogène (plus petit que le moment dipolaire chlore-carbone). La somme des trois vecteurs moments dipolaires est non nulle, dirigée du carbone vers l'hydrogène (voir figure ci-après).
- Dans l'ammoniac, chacune des trois liaisons N–H possède un moment dipolaire dirigé de l'azote vers l'hydrogène. La somme de ces trois vecteurs est non nulle, ce qui explique le moment dipolaire résultant de la molécule (voir figure ci-après).


**Exercice 24.7**

- H :  $1s^1$ , colonne 1, période 1.  
 N :  $2s^2 2p^3$ , colonne 15, période 2.  
 O :  $2s^2 2p^4$ , colonne 16, période 2.  
 F :  $2s^2 2p^5$ , colonne 17, période 2.  
 Cl :  $3s^2 3p^5$ , colonne 17, période 3.  
 Br :  $4s^2 4p^5$ , colonne 17, période 4.  
 I :  $5s^2 5p^5$ , colonne 17, période 5.
- Ces molécules diatomiques sont apolaires, en raison de leur symétrie. L'interaction de van der Waals attractive entre deux molécules diatomiques, par exemple  $N_2$ , est de type London, c'est-à-dire une interaction entre le dipôle instantané d'une molécule et le dipôle qu'il induit dans une autre.
- Les interactions de London sont d'autant plus fortes que la molécule du corps simple est polarisable. Or une molécule est d'autant plus polarisable que son nuage électronique est volumineux. On peut ainsi expliquer les très faibles températures de fusion et d'ébullition de  $H_2$ , une molécule très petite.  $N_2$ ,  $O_2$  et  $F_2$  ont des tailles très voisines car N, O et F sont situés sur la même ligne du tableau périodique, sur des colonnes voisines. Les températures de changement d'état de ces trois corps simples sont donc très voisines. La molécule  $Cl_2$  est beaucoup plus volumineuse que  $F_2$  car Cl est situé sur la même colonne que F mais une période plus loin. Cela explique les températures de changement d'état nettement plus élevées pour  $Cl_2$  que pour  $F_2$ . On explique de manière similaire les températures plus élevées pour  $Br_2$ , puis pour  $I_2$ . Ce dernier est d'ailleurs solide à température ambiante.

**Exercice 24.8**

- Un solvant polaire est un solvant dont la molécule possède un moment dipolaire permanent. Tous ces solvants sont polaires à l'exception de l'hexane, qui est donc apolaire.
- Un solvant protique est un solvant dont la molécule est donneuse de liaison hydrogène, c'est-à-dire possède un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif, typiquement O ou N. L'eau et le méthanol sont des solvants protiques. Les autres sont aprotiques.
- Un accepteur de liaison hydrogène possède un atome électronégatif (O, N ou F) avec au moins un doublet non liant. Tous ces solvants sont accepteurs de liaison hydrogène à l'exception de l'hexane.
- L'hexane n'est ni polaire, ni donneur ou accepteur de liaisons hydrogène, ce qui explique sa non miscibilité avec les autres solvants. Les autres solvants sont miscibles, d'une part à cause des interactions dipôle-dipôle qui s'établissent entre leurs molécules, d'autre part à cause des liaisons hydrogène. Par exemple, le méthanol est donneur et accepteur de liaison hydrogène alors que le DMF est accepteur.





# Solides cristallins

## L'essentiel du cours

### Contexte

Le carbone à l'état solide prend différentes formes ayant des propriétés physiques très variées. Ces différences ont-elles une explication dans la structure atomique de ces solides ?

Les différentes formes du carbone pur à l'état solide sont :

- le graphite ;
- le diamant ;
- les fullerènes, les nanotubes de carbone, le graphène ;
- les formes semi-cristallines (noir de carbone, fibres de carbone) ;
- le carbone amorphe vitreux.

Le diamant est un matériau très dur, transparent à la lumière et isolant électrique. Le graphite se rompt facilement par clivage, est opaque et de couleur noire, et conduit l'électricité. Les nanotubes de carbone et le graphène sont des nanomatériaux possédant des propriétés électriques et mécaniques remarquables.

Toutes ces formes du carbone ont comme point commun de comporter des liaisons covalentes carbone-carbone.



Figure 25.1. Liaisons covalentes dans des formes cristallines du carbone.

## ■ 1 Solides cristallins et amorphes

Dans un solide, les entités chimiques (atomes, molécules ou ions) ont des positions relatives fixes, du moins en l'absence de contrainte mécanique. Elles sont toutefois soumises à une agitation thermique, sous la forme de petits mouvements de vibration autour de leur position moyenne. On distingue les solides cristallins et amorphes.

**Définition : Solide cristallin**

Un solide cristallin est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) caractérisé par une structure se répétant périodiquement dans les trois directions de l'espace. Il est ordonné sur des distances très grandes par rapport à la distance interatomique.

Le graphite et le diamant sont des solides cristallins. À l'échelle macroscopique (de l'ordre du millimètre ou plus), les matériaux cristallins peuvent prendre la forme d'un mono-cristal (c'est le cas du diamant) mais sont le plus souvent formés d'un assemblage d'une multitude de petits cristaux (matériaux polycristallins). Le graphite et les métaux sont très souvent sous forme polycristalline.

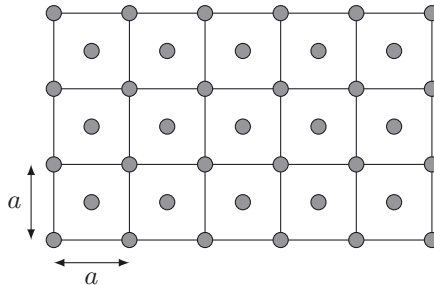
**Définition : Solide amorphe**

Un solide amorphe est un assemblage d'entités (atomes, molécules ou ions) ayant un ordre à courte distance seulement (quelques nanomètres) mais pas d'ordre à longue distance. Il ne comporte pas de structure périodique.

Le carbone vitreux amorphe (obtenu par synthèse) est un exemple. On peut aussi citer le verre ordinaire, une forme amorphe de la silice.

□ **Comment décrit-on un cristal parfait ?**

Dans ce chapitre, nous allons étudier les solides cristallins. D'une manière générale, un **cristal parfait** est décrit par une **maille** qui se répète périodiquement dans les trois directions de l'espace. Chaque maille contient une répartition parfaitement ordonnée d'atomes, d'ions ou de molécules. Nous limiterons notre étude au cas des mailles parallélépipédiques, dont la figure ci-dessous représente une version bidimensionnelle avec des mailles carrées.



Dans cet exemple, les disques représentent les positions des atomes d'un même élément chimique. La maille de ce réseau bidimensionnel est un carré de côté  $a$ . À trois dimensions, une maille parallélépipédique est définie par trois paramètres de maille ( $a, b, c$ ). Si  $a = b = c$ , la maille est **cubique** et un seul paramètre  $a$  est suffisant pour la définir. Certains atomes sont placés sur les sommets de la maille, d'autres pas. Le cristal entier est décrit par des translations de la maille dans les trois directions définies par les arêtes de la maille.

**Définition : Population de la maille**

La population de la maille est le nombre d'entités (atomes, molécules ou ions) que contient la maille.

Dans l'exemple bidimensionnel ci-dessus, il y a un atome appartenant en propre à la maille carrée. Les atomes situés sur les sommets de la maille appartiennent chacun à 4 mailles. La population est donc  $1 + \frac{4}{4} = 2$  atomes par mailles.



Lorsqu'une maille contient des atomes ou des ions d'éléments chimiques différents, on calcule la population pour chacun d'entre eux.

### Définition : Coordinence d'un atome

La coordinence d'un atome est le nombre de ses plus proches voisins.

Sur l'exemple ci-dessus, on remarque que tous les atomes ont le même voisinage. Les plus proches voisins sont situés sur la diagonale de la maille, à une distance  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ . La coordinence des atomes est donc 4.

#### □ Comment les structures cristallines sont-elles déterminées ?

La structure d'un cristal est déterminée expérimentalement par diffraction de rayons X. L'ordre de grandeur des distances interatomiques est 100 pm. La longueur d'onde du rayonnement électromagnétique utilisé doit être aussi de cet ordre ou un peu moins (chapitre 2). Des électrons accélérés sont aussi utilisés dans des expériences de diffraction. L'onde de matière associée à ces électrons (chapitre 4) doit avoir aussi une longueur d'onde de l'ordre de 100 pm ou moins. Les électrons interagissent plus fortement avec la matière que les rayons X, ce qui permet de faire des mesures sur des échantillons très petits (nanométriques).

#### □ Les cristaux réels sont-ils parfaits ?

Le cristal parfait représente en fait la structure moyenne d'un cristal. Dans la réalité, les atomes du cristal vibrent autour de leur position moyenne, avec une énergie proportionnelle à la température. Une onde acoustique engendre aussi un déplacement des atomes par rapport à leur position moyenne. Par ailleurs, il y a souvent des défauts qui apparaissent ici et là dans un cristal, comme de légères déviations par rapport à la structure cristalline moyenne, des lacunes ou des impuretés.

#### □ La structure cristalline est-elle unique pour un corps pur donné ?

Certains corps purs, comme le carbone ou le fer, peuvent adopter des structures cristallines différentes. Cette possibilité est appelée **polymorphisme**. Des structures différentes d'un même corps pur, par exemple le diamant et le graphite, sont des **variétés allotropiques**. La transformation physique permettant de passer d'une variété allotropique à une autre est appelée **transition allotropique**.

## ■ 2 Cristaux métalliques

Nous allons étudier en détail une structure cristalline métallique particulière dont la maille est cubique : la structure (ou le réseau) **cubique à faces centrées** (CFC). De nombreux métaux cristallisent avec cette structure, par exemple Al, Cu et Pt.

**Définition : Structure cubique à faces centrées**

Les centres des atomes du métal sont les 8 sommets de la maille cubique et les centres de ses 6 faces.

La maille CFC est représentée figure 25.2 où chaque petite sphère représente la position du centre d'un atome.

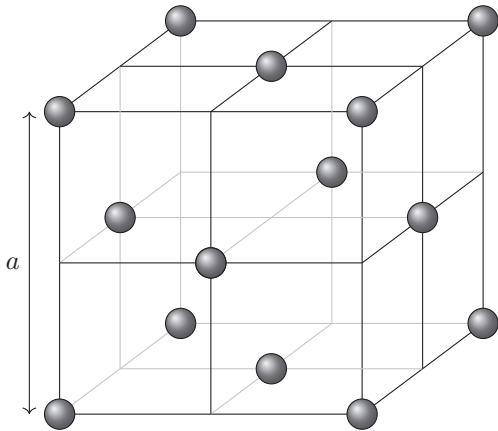


Figure 25.2. Structure CFC.

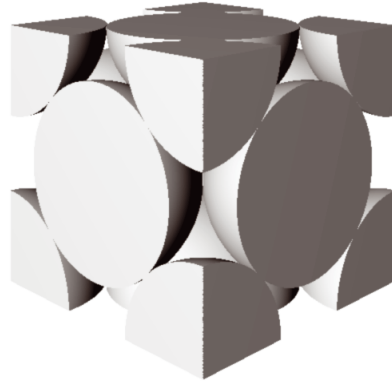


Figure 25.3. Structure CFC : modèle de sphères dures.



La longueur  $a$  de l'arête de la maille cubique est aussi appelée **paramètre de la maille**.

**Méthode 25.1 : Déterminer la population et la coordinnence d'une structure CFC**

- Compter les atomes situés aux sommets (8) et diviser par le nombre de mailles voisines qui partagent chacun de ces atomes (8).
- Compter les atomes situés aux centres des faces (6) et diviser par le nombre de mailles voisines qui partagent chacun de ces centres (2).
- Calculer la population :  $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ .
- Repérer et compter les plus proches voisins d'un atome situé au centre d'une face : les atomes situés à une distance égale à la demi-diagonale d'une face. La coordinnence est 12.

➔ Exercices (25.1) (25.5)

□ **En quoi consiste le modèle des sphères dures ?**

Dans un métal, chaque atome libère un ou plusieurs électrons et devient donc un ion positif. Le modèle des sphères dures consiste à représenter le nuage électronique de l'ion par une sphère dure. Ces sphères sont assemblées de manière à présenter des points de contact (figure 25.3). Chaque sphère est en contact avec ses 12 proches voisins. Par exemple, la sphère au centre de la face

supérieure est au contact des 4 sphères aux sommets supérieurs de la maille et des 4 sphères aux centres des faces verticales auxquelles il faut rajouter les 4 sphères aux centres des faces verticales de la maille supérieure non représentée. Nous obtenons bien une coordination de 12.



La connaissance du paramètre  $a$  de la maille permet de calculer le rayon des sphères  $r$  car le contact de 3 sphères sur une diagonale d'une face permet d'écrire  $4r = a\sqrt{2}$ .

Le modèle des sphères dures permet d'évaluer la compacité de la structure cristalline.

### Définition : Compacité

La compacité est le rapport du volume occupé par les atomes dans le modèle des sphères dures par le volume de la maille.

La figure 25.3 permet de visualiser le volume occupé par les sphères.

### Méthode 25.2 : Calculer la compacité d'une structure CFC

- Soit  $r$  le rayon des sphères. Exprimer le volume occupé par les sphères en multipliant le volume d'une sphère par la population :  $4 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ .
- Repérer le contact des sphères (sur la diagonale d'une face) pour établir la relation entre  $r$  et le paramètre  $a$  de la maille :  $a\sqrt{2} = 4r$ .

- Calculer la compacité  $C = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 = 0,74$ .

➔ Exercice (25.1)

### □ Peut-on décrire la structure CFC comme un empilement compact de sphères ?

La compacité 0,74 est la plus grande qu'on puisse obtenir en empilant des sphères dures identiques. Un empilement compact peut être obtenu en le construisant couche par couche (figure 25.4). La première couche ( $A$ ) est constituée de sphères agencées de manière compacte avec les centres de trois sphères en contact disposés sur un triangle isocèle. La deuxième couche ( $B$ ) est identique à la première mais les centres des sphères sont placés au dessus des creux de la première. La troisième couche, identique aux deux premières, peut être placée avec les centres en coïncidence avec les centres de la première (empilement  $ABA$ ) ou en coïncidence avec les creux de la première (empilement  $ABC$ ). L'empilement  $ABC$  est précisément la structure CFC, de compacité  $C = 0,74$ . L'empilement  $ABA$  a la même compacité mais correspond à une structure non cubique, la structure hexagonale compacte, que nous n'étudierons pas. Les couches compactes  $A, B, C$  sont aussi appelées **plans** car les centres des atomes d'une couche sont dans un plan.

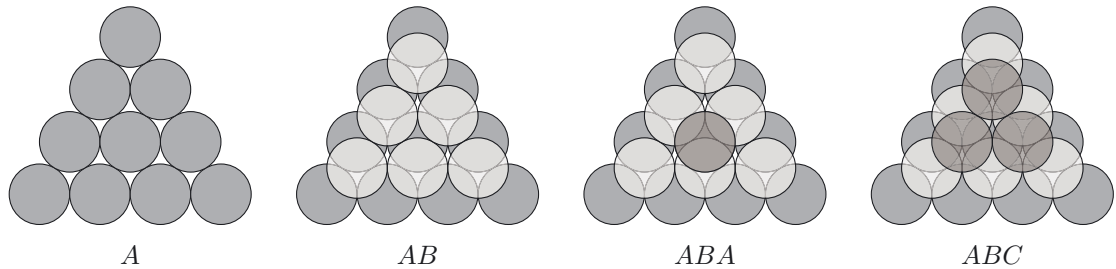
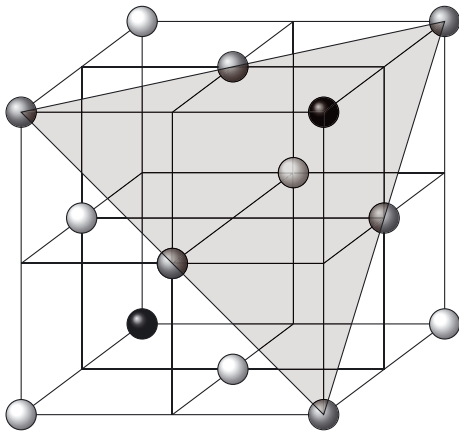
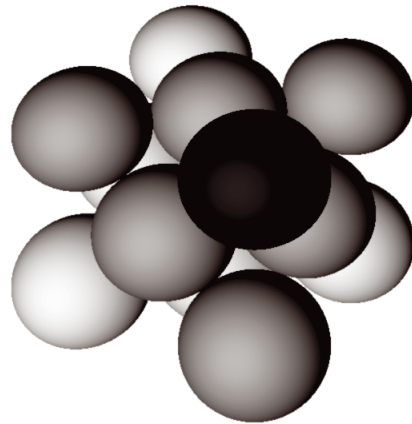


Figure 25.4. Empilement compact de sphères.

□ **Comment retrouver les plans *ABC* dans la structure CFC ?**

Le plan *B* est défini par les diagonales de trois faces adjacentes (figure 25.5) et coïncide avec les 6 sphères grises représentées dans la figure 25.6. Les sphères noires appartiennent à la couche *C* tandis que les sphères blanches appartiennent à la couche *A*.

Figure 25.5. Plan *B* dans une structure CFC.Figure 25.6. Couches *ABC* dans une structure CFC.

□ **Comment calculer la masse volumique d'un métal ?**

La connaissance de la structure cristalline d'un métal et des paramètres de la maille permet de calculer sa masse volumique. Prenons l'exemple du cuivre, dont la maille cubique CFC a une largeur  $a = 361,5 \text{ pm}$ , obtenue par diffraction de rayons X.

**Méthode 25.3 : Calculer la masse volumique d'un métal de structure CFC**

- Calculer la masse d'un atome à partir de sa masse molaire et de la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  :  $m = \frac{M}{\mathcal{N}_a}$ .
- Calculer la masse des atomes contenus dans la maille en multipliant la masse  $m$  par la population ( $4m$ ).
- Calculer la masse volumique en divisant la masse des atomes par le volume de la maille :  $\rho = \frac{4m}{a^3}$ .

➔ Exercice (25.5)

Pour le cuivre, dont la masse molaire est  $M = 63,55 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  (abondance isotopique naturelle), on obtient  $\rho = 8,935 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

□ **En quoi consiste la liaison métallique ?**

Dans un métal, chaque atome libère un ou plusieurs électrons, par exemple un électron pour le cuivre. Les électrons libres forment un nuage qui remplit l'espace entre les ions positifs et qui est à l'origine de la cohésion du métal. La liaison métallique est une liaison non directionnelle entre un ion et ses voisins.

**■ 3 Cristaux ioniques**

Deux éléments chimiques dont la différence d'électronégativité est grande peuvent former un composé cristallin ionique. Par exemple, le chlore (halogène, période 3 et colonne 17) peut prendre un électron au sodium (métal alcalin, période 3 et colonne 1) et former avec ce dernier un solide ionique, le chlorure de sodium NaCl, qui contient les ions  $\text{Cl}^-$  et  $\text{Na}^+$ .

Étudions la structure cristalline de NaCl. Les expériences de diffraction de rayons X révèlent une structure cubique mais ne disent rien sur les positions des deux ions dans cette structure. Il faut donc proposer un modèle pour décrire complètement ce cristal. Un modèle correct consiste à placer tout d'abord les ions  $\text{Cl}^-$  dans une structure cubique à faces centrées (CFC). Pour placer les ions  $\text{Na}^+$  dans cette structure, on introduit la notion de site interstitiel octaédrique.

**Définition : Sites octaédriques d'une structure cubique à faces centrées**

Un site octaédrique d'un réseau est un emplacement situé au centre d'un octaèdre régulier dont les 6 sommets sont des nœuds du réseau. Les sites octaédriques d'un réseau CFC sont les centres des arêtes de la maille CFC et le centre de la maille.

La figure 25.7 montre un site octaédrique, situé au centre d'une arête de la maille CFC.

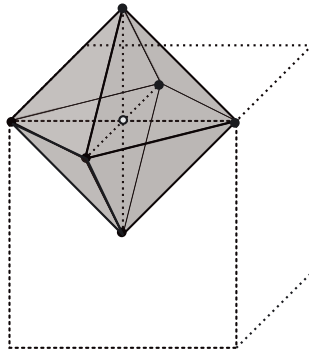


Figure 25.7. Site octaédrique d'une maille CFC.



Il existe aussi des sites tétraédriques qui seront décrits dans la partie suivante.

Dans un cristal NaCl, les ions  $\text{Na}^+$  occupent les sites octaédriques de la structure CFC occupée par les ions  $\text{Cl}^-$ . La figure 25.8 représente la structure de NaCl, où les centres des ions  $\text{Na}^+$  sont représentés par des petites sphères.

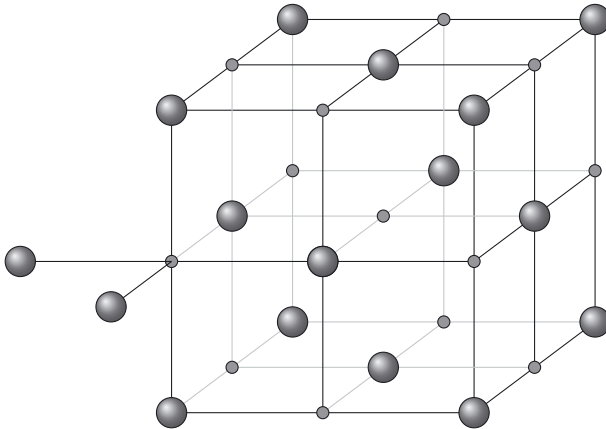


Figure 25.8. Structure NaCl.

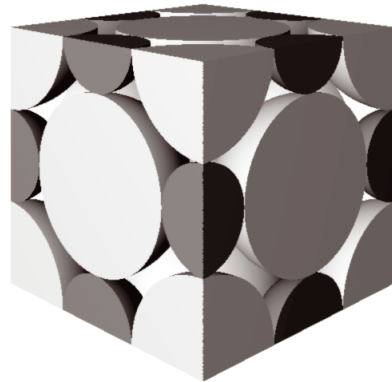


Figure 25.9. Structure NaCl : sphères dures.

On constate que les ions  $\text{Na}^+$  sont rangés dans une structure CFC, comme les ions  $\text{Cl}^-$ . L'ensemble forme bien une structure cubique, en accord avec les expériences de diffraction. Pour valider le modèle, il faut calculer la population de la maille afin de vérifier la stœchiométrie du composé.



**Méthode 25.4 : Vérifier la stœchiométrie d'une structure ionique**

- Calculer le nombre d'anions dans la maille. Dans la structure NaCl, il y a  $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$  ions  $\text{Cl}^-$  par maille.
- Calculer le nombre de cations dans la maille. Dans NaCl, il y a un site octaédrique appartenant en propre à la maille et 12 sites partagés chacun entre 4 mailles, soit au total  $1 + \frac{12}{4} = 4$  ions  $\text{Na}^+$  par maille.
- Vérifier la stœchiométrie. Pour NaCl, on a bien 4 ions  $\text{Cl}^-$  pour 4 ions  $\text{Na}^+$ .

➔ Exercices (25.3) (25.7)

**Définition : Coordinence d'un ion**

Dans un cristal ionique, la coordinence d'un ion est le nombre d'ions de charge opposée situés à la distance la plus courte de cet ion.

Pour la structure NaCl, les ions  $\text{Na}^+$  les plus proches d'un ion  $\text{Cl}^-$  sont situés à une distance  $\frac{a}{2}$  où  $a$  est le paramètre de la maille. La coordinence est donc 6 pour les ions  $\text{Cl}^-$ . Pour les ions  $\text{Na}^+$ , la coordinence est aussi 6.

□ **En quoi consiste la liaison ionique ?**

L'interaction électrostatique attractive entre chaque ion et ses 6 proches voisins de charge opposée assure la cohésion du cristal NaCl. Il y a aussi des forces répulsives entre les ions de même charge, mais elles sont plus faibles car les ions de même charge sont plus éloignés. Les forces attractives entre un ion et les ions de charge opposée situés plus loin que les proches voisins interviennent aussi dans la liaison ionique mais avec une contribution plus faible. La liaison ionique est partiellement directionnelle : par exemple pour NaCl, les forces attractives avec les 6 ions voisins sont dans 6 directions bien définies.

□ **Peut-on définir un modèle de sphères dures pour un cristal ionique ?**

Considérons le cas du cristal NaCl. Un modèle de sphères dures consiste à représenter les ions  $\text{Cl}^-$  et  $\text{Na}^+$  par des sphères de rayons  $r_-$  et  $r_+$ . L'ion  $\text{Cl}^-$  a 8 électrons de plus que l'ion  $\text{Na}^+$  ; il est donc beaucoup plus volumineux. On cherche à construire un assemblage de sphères avec un contact entre chaque ion et ses 6 proches voisins de charge opposée. Supposons que le rayon  $r_-$  soit connu. Pour déterminer les valeurs possibles de  $r_+$ , nous pouvons utiliser la notion d'habitabilité des sites octaédriques.


**Définition : Habitabilité d'un site interstitiel**

Dans le modèle des sphères dures, on considère une structure hôte dont les sphères sont en contact. L'habitabilité d'un site interstitiel est le rayon maximal de la sphère que l'on peut loger dans ce site sans déformer la structure hôte.

Par exemple pour les sites octaédriques d'une structure CFC, on considère des sphères en empilement compact CFC : l'habitabilité est alors le rayon maximal d'une sphère pouvant se loger dans un site sans écarter les sphères de la structure.

**Méthode 25.5 : Déterminer l'habitabilité d'un site**

- Identifier la distance la plus courte entre deux entités formant la structure CFC hôte.
- Écrire la relation traduisant la non-interpénétration sur cette distance des sphères modélisant ces entités.
- Identifier la distance la plus courte entre le site et les entités de la structure CFC.
- Écrire la relation traduisant le contact sur cette distance entre la sphère la plus grosse placée dans ce site et l'entité.
- Combiner ces deux relations pour déterminer le rayon  $r^{\max}$  de la sphère la plus grosse.

 Exercices (25.5) (25.6)

Le rayon d'un ion  $\text{Cl}^-$  est évalué à  $r_- = 181$  pm. Supposons que les sphères des anions forment un empilement CFC compact. On a alors  $4r_- = a\sqrt{2}$  (voir structure CFC métallique). L'habitabilité  $r^{\max}$  d'un site octaédrique est le rayon de la sphère qui est en contact avec les sphères de rayon  $r_-$  sur l'arête de longueur  $a$  :  $2r_- + 2r^{\max} = a$ . On obtient ainsi l'habitabilité d'un site octaédrique pour une structure CFC compacte :  $r^{\max} = (\sqrt{2} - 1)r_-$ .

Pour qu'une sphère représentant un cation soit en contact avec ses 6 sphères voisines représentant des anions, il faut que son rayon  $r_+$  soit supérieur ou égal à l'habitabilité :  $r_+ \geq r^{\max}$ . Le cas limite  $r_+ = r^{\max}$  correspond au cas où les sphères des anions sont en empilement compact.

Dans le cas de NaCl, on a  $r_+ = 102$  pm. L'habitabilité est  $r^{\max} = 75$  pm et on a bien  $r_+ > r^{\max}$ . Les grandes sphères de la figure 25.9, représentant les anions, ne sont pas en contact entre elles et ne forment donc pas un empilement compact. Par contre, les anions sont bien au contact des cations.

**Méthode 25.6 : Calculer la compacité d'une structure de type NaCl**

On suppose que les rayons ioniques  $r_+$  et  $r_-$  sont donnés.

- Calculer le paramètre  $a$  de la maille CFC avec la condition de contact entre les ions positifs et négatifs :  $a = 2(r_- + r_+)$ .
- Exprimer le volume occupé par les ions négatifs  $4 \times \frac{4}{3}\pi r_-^3$  et celui occupé par les ions positifs  $4 \times \frac{4}{3}\pi r_+^3$ .
- La compacité est la somme de ces volumes divisée par le volume de la maille :

$$C = \frac{16}{3} \pi \frac{r_-^3 + r_+^3}{a^3}$$

## ■ 4 Cristaux covalents

La **liaison covalente** provient de la mise en commun d'électrons entre deux atomes (voir chapitre 24). Certains solides, comme le diamant ou le silicium, sont des cristaux dont la cohésion est assurée uniquement par des liaisons covalentes. La liaison covalente est fortement directionnelle.

Nous allons détailler la structure cristalline du diamant, qui est constitué d'atomes de carbone. Chaque atome de carbone est en liaison covalente avec 4 atomes de carbone. Géométriquement, chaque atome de carbone est au centre d'un tétraèdre régulier dont les 4 sommets sont occupés par ces 4 atomes. Pour décrire la structure cristalline, nous allons là encore partir de la structure CFC avec des atomes de carbone occupant les 8 sommets de la maille cubique et les centres des 6 faces. Pour placer les autres atomes, nous avons besoin de la notion de site interstitiel tétraédrique.

**Définition : Sites tétraédriques d'une structure cubique à faces centrées**

Un site tétraédrique d'un réseau est un emplacement situé au centre d'un tétraèdre régulier dont les 4 sommets sont des nœuds du réseau. Les sites tétraédriques d'un réseau CFC sont les centres des 8 cubes d'arête de longueur  $a/2$  obtenus en divisant la maille en 8.

La figure 25.10 montre un site tétraédrique d'une maille CFC.

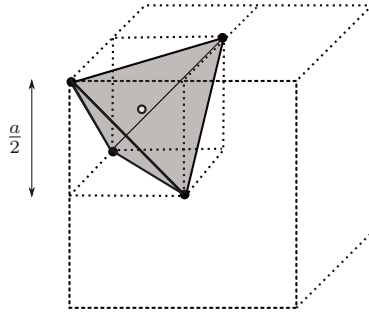


Figure 25.10. Site tétraédrique d'une maille CFC.

La figure 25.11 montre les 8 sites tétraédriques. Sur l'un des sites, nous avons représenté 4 liaisons avec les sommets du tétraèdre. Dans le diamant, des atomes de carbone occupent un site tétraédrique sur deux et sont en liaison covalente avec les 4 atomes situés aux sommets du tétraèdre (figure 25.12). Pour ne pas alourdir la figure, nous avons représenté les quatre liaisons covalentes sur seulement un des sites. Il y a donc un atome de carbone au centre de 4 cubes de largeur  $\frac{a}{2}$ .

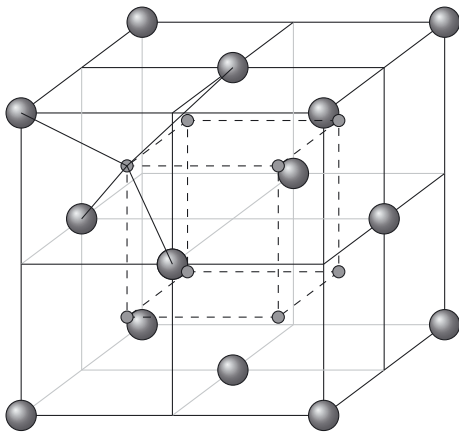


Figure 25.11. Sites tétraédriques d'une structure CFC.

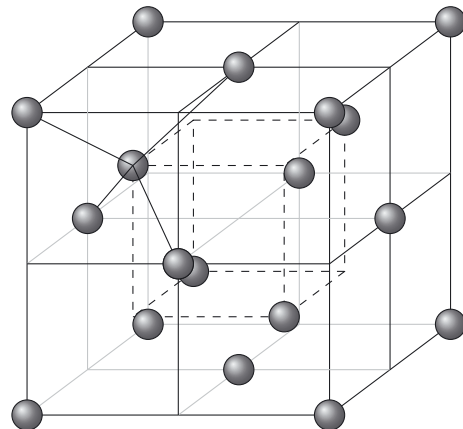


Figure 25.12. Structure du diamant.

En représentant aussi les mailles voisines, on peut montrer que tous les atomes de carbone sont en fait au centre d'un tétraèdre régulier dont les 4 sommets sont occupés par des atomes de carbone.

**Méthode 25.7 : Déterminer la population et la coordinnence du diamant**

- Déterminer la population de la structure CFC (4).
- Ajouter le nombre de sites tétraédriques occupés (4). La population est de 8 atomes de carbone par maille.
- Les voisins les plus proches d'un atome de carbone sont les 4 atomes aux sommets du tétraèdre dont il est le centre : la coordinnence est 4.

➔ Exercice (25.2)

□ Comment définir le modèle des sphères dures pour le diamant ?

Toutes les sphères ont le même rayon  $r$ . Les sphères placées dans les sites tétraédriques doivent toucher les sphères placées aux 4 sommets du tétraèdre car une liaison covalente est représentée par un contact. La figure 25.13 montre le cube d'arête de longueur  $a/2$  dont le centre est un site tétraédrique. Deux sphères représentant deux atomes en liaison covalente se touchent sur la diagonale du rectangle  $ABCD$ .

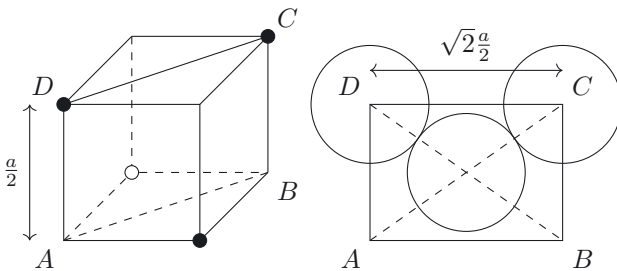


Figure 25.13. Site tétraédrique.



Figure 25.14. Structure diamant : sphères dures.

**Méthode 25.8 : Calculer le rayon des sphères dans la structure du diamant**

On cherche le rayon  $r$  des sphères en fonction du paramètre  $a$  de la maille CFC.

- Identifier un site tétraédrique dans la maille CFC.
- Repérer un rectangle  $ABCD$  contenant le centre du site et deux sommets du tétraèdre.

Calculer la longueur de sa diagonale :  $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

- Calculer le rayon sachant que les sphères se touchent sur la diagonale :  $r = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$ .

➔ Exercice (25.2)

Le paramètre de maille du diamant est  $a = 357$  pm, ce qui conduit à  $r = 77$  pm.

## ■ 5 Énergies des liaisons dans un cristal

Pour finir ce chapitre, faisons une comparaison des différents types de liaisons rencontrés dans les cristaux.

Les liaisons métallique, ionique et covalente sont des liaisons très fortes, donnant en général des solides très difficiles à rompre. Deux autres types de liaisons beaucoup plus faibles peuvent intervenir dans les solides, les interactions de van der Waals et la liaison hydrogène.

Les **interactions de van der Waals** sont des interactions attractives de faible intensité qui s'exercent entre deux atomes ou molécules, soit à cause de leur moment dipolaire, soit à cause de la redistribution des nuages électroniques lorsqu'ils sont assez proches (voir chapitre 24). Certains cristaux moléculaires, comme celui du méthane solide, tiennent leur cohésion des interactions de van der Waals. Certains cristaux, comme le graphite, comportent à la fois des liaisons covalentes et des interactions de van der Waals.

La **liaison hydrogène** s'exerce entre un atome d'hydrogène lié à un atome très électronégatif (le plus souvent O ou N) et le doublet non liant d'un atome électronégatif d'une autre molécule. Dans l'eau solide, la cohésion est assurée par des liaisons hydrogènes.

Le tableau ci-dessous permet de comparer les ordres de grandeur des énergies  $E$  de ces différents types de liaison. Les températures de fusion  $T_f$  sont aussi données.

Liaison	Substance	$E$ (kJ · mol <sup>-1</sup> )	$T_f$ (°C)
Métallique	Hg	68	-39
	Al	324	660
	Fe	406	1538
	W	849	3410
Ionique	NaCl	640	801
	MgO	1000	2800
Covalente	Si	450	1410
	C (diamant)	713	3550
De van der Waals	Ar	7,7	-189
	Cl <sub>2</sub>	31	-101
Hydrogène	NH <sub>3</sub>	35	-78
	H <sub>2</sub> O	51	0

On remarque que la température de fusion est d'autant plus élevée que l'énergie des liaisons est élevée. Les interactions de van der Waals et les liaisons hydrogènes sont beaucoup moins fortes que les liaisons métallique, ionique et covalente.

Pour revenir au graphite évoqué au début de ce chapitre, sa structure cristalline est constituée de plans dans lesquels les atomes de carbone sont en liaison covalente avec un arrangement hexagonal (figure 25.1). Ces plans sont empilés comme des feuillets, avec des interactions de van der Waals entre eux. La faiblesse des interactions entre feuillets explique que le cristal de graphite puisse facilement se rompre par clivage. Par ailleurs, une forme cristalline bidimensionnelle du carbone, le *graphène*, constituée précisément d'un seul feuillet, est aujourd'hui développée en tant que nanomatériau, notamment en raison de ses propriétés électriques remarquables.

## Interro de cours

Intéressons-nous à l'or Au. L'or cristallise dans une structure cubique à faces centrées. Il présente une masse volumique  $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et une masse molaire  $M(\text{Au}) = 197 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. La population de la maille vaut :
  - (a)  $p = 14$  ;
  - (b)  $p = 7$  ;
  - (c)  $p = 4$ .
2. La constante d'Avogadro valant  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , le paramètre de la maille vaut :
  - (a)  $a = 257 \text{ pm}$  ;
  - (b)  $a = 408 \text{ pm}$  ;
  - (c)  $a = 4,08 \text{ nm}$ .
3. Le rayon des sphères dures représentant les atomes d'or vaut :
  - (a)  $r = 204 \text{ pm}$  ;
  - (b)  $r = 144 \text{ pm}$  ;
  - (c)  $r = 1,44 \text{ nm}$ .
4. Dans une maille, il existe :
  - (a) 18 % de volume inoccupé ;
  - (b) 26 % de volume inoccupé ;
  - (c) 74 % de volume inoccupé.
5. Il existe des interstices vides au centre de la maille et au milieu de chaque arête. Il s'agit :
  - (a) de sites interstitiels tétraédriques ;
  - (b) de sites interstitiels hexaédriques ;
  - (c) de sites interstitiels octaédriques.
6. L'habitabilité de tels sites vaut :
  - (a)  $r_{\text{max}} = 60 \text{ pm}$  ;
  - (b)  $r_{\text{max}} = 120 \text{ pm}$  ;
  - (c)  $r_{\text{max}} = 209 \text{ pm}$ .
7. Certains ors blancs sont des alliages or-nickel. Les atomes de nickel de rayon 125 pm peuvent :
  - (a) s'insérer dans ces sites interstitiels pour former un alliage d'insertion ;
  - (b) se substituer à des atomes d'or pour former un alliage de substitution ;
  - (c) se substituer à des atomes d'or pour former un alliage d'insertion.
8. La population de la maille d'or blanc comprend 0,125 atome de nickel. Identifier la(ou les) affirmation(s) correcte(s).
  - (a) Le titre en nickel vaut  $x_{\text{Ni}} = 12,5 \%$ .
  - (b) Il y a 3,875 atomes d'or par maille d'or blanc.
  - (c) Il y a un atome de nickel à un sommet de la maille d'or blanc.
9. La masse molaire du nickel vaut  $M(\text{Ni}) = 58,7 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et le paramètre de la maille d'or blanc vaut  $a' = 417 \text{ pm}$ . La masse volumique de l'or blanc vaut :
  - (a)  $\rho = 19,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
  - (b)  $\rho = 19,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
  - (c)  $\rho = 17,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

## Exercices

### Exercice 25.1 Aluminium

➔ Méthodes (25.1) (25.2)

L'aluminium est un métal abondant sur Terre, très utilisé en raison de bonnes propriétés mécaniques, d'une masse volumique faible ( $\rho = 2,70 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ), et d'une quasi absence de corrosion.

Sa structure cristalline, déterminée par diffraction de rayons X, est cubique à faces centrées (CFC).

Données : la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et la masse molaire de l'aluminium  $M = 26,98 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Représenter la maille d'un cristal d'aluminium et calculer la population, puis la coordinence.
2. Calculer le paramètre  $a$  de la maille CFC (en picomètres).
3. Dans le cadre du modèle des sphères dures, calculer le rayon des sphères représentant un atome d'aluminium dans le solide.
4. Calculer la compacité de la structure.
5. Dans le modèle de l'empilement compact par plans ABC, calculer la distance entre deux plans. On donne la hauteur d'un tétraèdre régulier d'arête de longueur  $b$  :  $h = b\sqrt{2/3}$ .

### Exercice 25.2 Étain

➔ Méthodes (25.7) (25.8)

L'étain (Sb) est un élément métallique qui entre dans la composition du bronze, un alliage cuivre-étain fabriqué depuis l'antiquité. L'étain fond à  $232^\circ\text{C}$ , ce qui est très bas pour un métal. Il possède trois variétés allotropiques. On s'intéresse à la variété  $\text{Sb} - \alpha$ , stable en dessous de  $13^\circ\text{C}$ . Sa masse volumique est  $\rho = 5,75 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

L'étain  $\alpha$  possède la structure du diamant : les atomes Sb occupent les nœuds d'une maille cubique à faces centrées (CFC) et un site tétraédrique sur deux de la maille CFC.

Données : la constante d'Avogadro :  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  et la masse molaire de l'étain :  $M(\text{Sn}) = 118,7 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Représenter la maille en plaçant les atomes d'étain.
2. Déterminer la population de la maille.
3. Déterminer la coordinence des atomes d'étain.
4. Calculer le paramètre  $a$  de la maille CFC (en picomètres).
5. Calculer le rayon des atomes d'étain dans le modèle des sphères dures.
6. Calculer la compacité de la structure cristalline. Comparer à la compacité d'une structure métallique CFC.

**Exercice 25.3 Fluorine**

➔ Méthode (25.4)

La fluorine  $\text{CaF}_2$  est un solide ionique contenant des ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{F}^-$ . Les ions  $\text{Ca}^{2+}$  forment une maille cubique à faces centrées et les ions  $\text{F}^-$  occupent des sites tétraédriques de cette maille. Le paramètre de la maille, déterminé par diffraction de rayons X, est  $a = 546 \text{ pm}$ .

Données : les masses molaires du fluor :  $M(\text{F}) = 19,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et du calcium :  $M(\text{Ca}) = 40,1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  et la constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

1. Combien de sites tétraédriques sont occupés par les ions  $\text{F}^-$  ?
2. Représenter la maille en plaçant les anions et les cations.
3. Déterminer la coordinence des anions puis celle des cations.
4. Calculer la masse volumique de la fluorine.

**Exercice 25.4 Fer  $\alpha$** 

Le fer est un métal qui fond à  $1538 \text{ }^\circ\text{C}$ . Il présente deux variétés allotropiques. À température ambiante, il est sous la forme  $\alpha$ , de structure cristalline cubique centrée. Lorsqu'on chauffe lentement une pièce en fer, une transition allotropique se produit à  $910 \text{ }^\circ\text{C}$  : le fer adopte la forme  $\gamma$ , de structure cubique à faces centrées. À  $1400 \text{ }^\circ\text{C}$ , il retrouve la structure cubique centrée (forme  $\delta$ ).

On s'intéresse à la variété allotropique de structure cubique centrée, stable à température ambiante. Sa masse volumique est  $\rho = 7,87 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . La structure est cubique centrée : les atomes de fer occupent les 8 sommets d'une maille cubique et son centre.

Données : constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , masse molaire du fer  $M = 55,85 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

1. Dessiner la maille cubique centrée. Définir le paramètre de maille  $a$ .
2. Déterminer la population et la coordinence.
3. Calculer le paramètre de maille, en picomètres.
4. Dans le modèle des sphères dures, quel est le rayon des sphères représentant les atomes de fer ?
5. Calculer la compacité. Comparer à celle d'une structure cubique à faces centrées.
6. Quel est le rayon maximal d'une sphère que l'on peut loger au centre des arêtes du cube ?

**Exercice 25.5 Fer  $\gamma$** 

➔ Méthodes (25.1) (25.3) (25.5)

Dans le domaine de température comprise entre  $910 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $1400 \text{ }^\circ\text{C}$ , la variété allotropique stable du fer est la forme  $\gamma$ . Sa structure est cubique faces centrées (CFC). Pour une température inférieure à  $910 \text{ }^\circ\text{C}$ , la forme stable est le fer  $\alpha$  (voir exercice 25.4).

On se propose d'utiliser le rayon des atomes de fer obtenu lors de l'étude de la forme  $\alpha$ , soit  $r = 124 \text{ pm}$ , pour évaluer la masse volumique de la forme  $\gamma$ .

Données : constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , masse molaire du fer  $M = 55,85 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

1. Représenter la structure cristalline du fer  $\gamma$ .
2. Déterminer la population et la coordinence.
3. Calculer le paramètre de la maille.



4. Calculer la compacité.
5. Calculer la masse volumique. Comparer à celle du fer  $\alpha$  (exercice 25.4) et expliquer.
6. Déterminer l'habitabilité d'un site octaédrique.
7. Déterminer l'habitabilité d'un site tétraédrique.

### Exercice 25.6 Acier

➔ Méthode (25.5)

#### Alliage de fer et de carbone

Un acier est un alliage de fer et de carbone. Le carbone est ajouté en faible quantité, entre 0,2% et 2% en masse. Il confère à l'acier une très grande dureté.

Les atomes de carbone occupent des sites interstitiels de la structure cristalline du fer. Il existe deux variétés allotropiques stables de l'acier. Pour une température inférieure à environ 900 °C, la forme stable est la *ferrite*, qui est de structure cubique centrée, comme le fer  $\alpha$ . Pour une température supérieure à cette valeur, la forme stable est l'*austénite*, qui est de structure cubique à faces centrées, comme le fer  $\gamma$ .

La ferrite ne peut contenir que très peu de carbone (maximum 0,035%) en raison de la petite taille de ses sites interstitiels. Au contraire, le carbone est très soluble dans l'austénite car ses sites interstitiels sont beaucoup plus grands. Pour obtenir un acier à forte teneur en carbone, on utilise le procédé de *trempe*. La pièce en acier est chauffée lentement en présence de carbone, au delà de 900 °C, afin que les atomes de carbone aient le temps de diffuser vers les cristaux d'austénite qui se forment. La trempe consiste à refroidir subitement la pièce en la trempant dans l'eau, de manière à figer les atomes de carbone dans la structure cristalline, avant qu'ils n'aient eu le temps de sortir par diffusion. On obtient ainsi une forme riche en carbone à température ambiante (métastable), appelée *martensite*.

La structure cristalline de la martensite est proche de la structure cubique centrée du fer  $\alpha$  mais la maille moyenne est légèrement déformée dans une direction, ce qui lui donne une forme parallélépipédique à base carrée. Elle est donc caractérisée par deux paramètres de maille  $a$  et  $c$ . Le paramètre  $c$  augmente avec le pourcentage de carbone.

Données : masses molaires  $M(\text{Fe}) = 55,85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{C}) = 12,01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

1. La solubilité du carbone est-elle plus grande dans l'austénite ou dans la ferrite ? Justifier à l'aide des résultats des exercices 25.4 et 25.5.
2. Déterminer le nombre d'atomes de fer présents pour un atome de carbone dans une martensite comportant 0,5% de carbone (pourcentage massique).
3. En déduire la proportion de sites occupés pour une telle martensite.
4. La figure 25.15 page suivante montre la maille de martensite avec les atomes de fer et les sites interstitiels pouvant être occupés par des atomes de carbone. En considérant les paramètres moyens  $a = 287 \text{ pm}$  et  $c = 291 \text{ pm}$  et en supposant que le rayon des atomes de fer est  $r = 124 \text{ pm}$ , déterminer l'habitabilité des sites dans la maille moyenne.
5. Sachant que les atomes de carbone ont un rayon évalué à 77 pm, quels sites peuvent-ils occuper sans déformer la maille moyenne ?
6. Le paramètre  $c$  augmente avec la teneur en carbone. Proposer une explication.

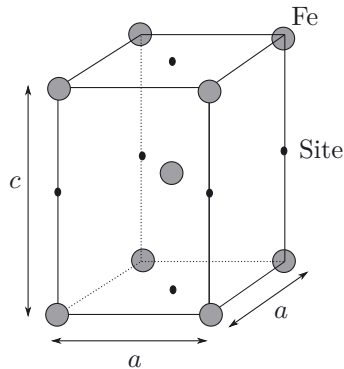


Figure 25.15. Maille de martensite.

### Exercice 25.7 Chlorure de césium

➔ Méthode (25.4)

Le chlore (halogène, colonne 17) et le césium (métal alcalin, colonne 1) forment ensemble un composé ionique, le chlorure de césium  $\text{CsCl}$ , qui cristallise sous une forme cubique différente du chlorure de sodium. Les ions  $\text{Cl}^-$  sont placés aux 8 sommets de la maille cubique et un ion  $\text{Cs}^+$  est placé au centre de cette maille.

Données : masse volumique de  $\text{CsCl}$  :  $\rho = 3,97 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , masses molaires  $M(\text{Cs}) = 132,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{Cl}) = 35,45 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , constante d'Avogadro  $\mathcal{N}_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

1. Dessiner la structure de  $\text{CsCl}$ .
2. Peut-on définir une maille cubique dont les cations occuperaient les sommets ?
3. Déterminer la population de la maille et vérifier la stœchiométrie. Déterminer la coordinence des anions et des cations.
4. Calculer le paramètre de maille  $a$ .
5. Dans le cadre d'un modèle de sphères dures, on note  $r_-$  le rayon des ions  $\text{Cl}^-$ , et  $r_+$  celui des ions  $\text{Cs}^+$ . On suppose que les sphères représentant les anions sont en contact avec les sphères représentant les cations voisins. Dans l'hypothèse où les sphères de rayon  $r_-$  sont empilées les unes sur les autres, quelle est la relation entre  $r_-$  et  $r_+$  ? En déduire  $r_-$  et  $r_+$ .
6. Le rayon ionique attribué à  $\text{Cl}^-$  est  $r_- = 181 \text{ pm}$ . En déduire  $r_+$  et commenter.

# Corrections

## Interro de cours

1. Il y a 8 atomes d'or aux sommets qui sont communs à 8 mailles et 6 atomes d'or aux centres des faces qui sont communs à 2 mailles d'où  $p = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ . Réponse (c).
2.  $\rho = \frac{4m(\text{Au})}{a^3} = \frac{4M(\text{Au})}{\mathcal{N}_a a^3}$  soit  $a = \left( \frac{4M(\text{Au})}{\rho \mathcal{N}_a} \right)^{1/3} = 408 \text{ pm}$  (avec  $M(\text{Au})$  en  $\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Réponse (b).
3. Deux sphères se touchent sur la demi-diagonale d'une face d'où  $r = \frac{a\sqrt{2}}{4} = 144 \text{ pm}$ . Réponse (b).
4. La compacité d'une structure cubique à faces centrées vaut 0,74 (empilement compact) et représente la proportion de volume occupé. Il y a donc 26% de volume vide. Réponse (b).
5. Le centre de tels interstices coïncident avec le centre d'octaèdres. Réponse (c).
6. La sphère la plus grosse occupant le site et la sphère dure modélisant l'or se touche le long d'une demi-arête d'où  $r_{\text{max}} = \frac{a}{2} - r = 60 \text{ pm}$ . Réponse (a).
7.  $r_{\text{Ni}} > r_{\text{max}}$  donc l'insertion est impossible mais la substitution l'est avec des rayons d'atome de nickel et d'or de même ordre de grandeur. Réponse (b).
8. La population vaut toujours 4 mais elle est répartie en 0,125 atome de nickel et 3,875 atomes d'or. Cette situation est compatible avec 1 atome de nickel placé à un sommet de la maille puisque  $\frac{1}{8} = 0,125$ . Cela correspond à un titre en nickel  $x_{\text{Ni}} = \frac{0,125}{4} = 3,125 \%$ . Réponses (b) et (c).
9.  $\rho = \frac{3,875m(\text{Au}) + 0,125m(\text{Ni})}{a^3} = \frac{3,875M(\text{Au}) + 0,125M(\text{Ni})}{\mathcal{N}_a a^3} = 17,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Réponse (c).

## Exercice 25.1

1. La structure CFC est représentée figure 25.2. Les atomes d'aluminium occupent les sommets et les centres des faces d'un cube de largeur  $a$ .  
Il y a 8 sommets partagés chacun entre 8 mailles et 6 centres de faces partagés chacun entre 2 mailles. Le nombre d'atomes d'aluminium par maille (population) est donc  $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 1 + 3 = 4$ .  
Les voisins les plus proches d'un atome d'aluminium, par exemple situé au centre d'une face, sont situés à une distance égale à la demi-diagonale d'une face, c'est-à-dire  $a\sqrt{2}/2$ . Il y a 12 atomes voisins situés à cette distance donc la coordination est 12.
2. La masse volumique est égale à la masse des atomes contenus dans une maille divisée par le volume de celle-ci, c'est-à-dire  $\rho = \frac{4M}{\mathcal{N}_a a^3}$ . La taille de la maille est donc  $a = \left( \frac{4M}{\mathcal{N}_a \rho} \right)^{1/3} = 405 \text{ pm}$ .
3. Dans le modèle des sphères dures, chaque atome d'aluminium est représenté par une sphère de rayon  $r$  qui touche ses 12 plus proches voisins. On a donc  $2r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ , soit  $r = \frac{a\sqrt{2}}{4} = 143 \text{ pm}$ .
4. La compacité est le volume occupé par les sphères dans une maille ( $4 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ ) divisée par le volume d'une maille ( $a^3$ ). Elle est donc  $C = \frac{16}{3}\pi \left( \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^3 = 0,74$ .
5. On considère 3 sphères adjacentes de la couche A (figure 25.4) et une sphère de la couche B située au dessus du creux de ces trois sphères. Ces 4 sphères forment un tétraèdre régulier dont l'arête a une longueur  $2r = 286 \text{ pm}$ .  
La distance entre les plans est la hauteur de ce tétraèdre :  $d = 2r \sqrt{2/3} = 234 \text{ pm}$ .

**Exercice 25.2**

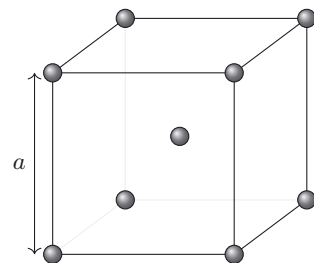
- Voir figure 25.12.
- On détermine tout d'abord la population de la maille CFC : 8 sommets partagés chacun entre 8 mailles et 6 centres de faces partagés chacun entre 2 mailles. Au total, on a donc  $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 1 + 3 = 4$  atomes par maille. Il y a 8 sites tétraédriques dans la maille CFC. Un site sur deux est occupé. La population est donc  $4 + 4 = 8$  atomes d'étain par maille.
- Les voisins les plus proches d'un atome sont aux sommets d'un tétraèdre régulier dont il est le centre. La distance la plus courte est la distance entre le centre et un sommet d'un cube de côté  $a/2$ . La coordinence est donc 4.
- Pour calculer  $a$ , on utilise la masse volumique donnée. La masse d'une maille est égale à la population multipliée par la masse d'un atome. La masse volumique est donc  $\rho = \frac{8M}{\mathcal{N}_a a^3}$ . La largeur de maille est  $a = \left(\frac{8M}{\rho \mathcal{N}_a}\right)^{\frac{1}{3}} = 6,50 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 650 \text{ pm}$ .
- Une sphère est en contact avec ses 4 voisins dont les centres sont situés aux sommets d'un tétraèdre. La figure 25.13 montre la ligne de contact joignant le centre de deux sphères : c'est la diagonale du rectangle de côtés  $\frac{a}{2}$  et  $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ . La longueur de cette diagonale est  $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Par ailleurs  $AC = 4r$  donc le rayon des sphères est  $r = \frac{a\sqrt{3}}{8} = 141 \text{ pm}$ .
- La compacité est le volume occupé par les sphères  $8 \times \frac{4}{3}\pi r^3$  divisé par le volume de la maille  $a^3$ . On obtient  $C = 0,34$ . C'est beaucoup moins que la compacité d'une structure métallique CFC (0,74).

**Exercice 25.3**

- La maille CFC contient 8 sites tétraédriques. Le nombre d'ions  $\text{Ca}^{2+}$  dans la maille CFC est égal au nombre de sommets (8) divisé par le nombre de mailles voisines qui partagent chaque sommet (8) plus le nombre de centres de faces (6) divisé par le nombre de mailles voisines qui partagent chaque centre (2), ce qui donne  $1 + 3 = 4$  ions  $\text{Ca}^{2+}$  par maille. La maille doit donc contenir 8 ions  $\text{F}^-$  par maille pour que la stoechiométrie du composé soit vérifiée ainsi que l'électronéutralité de la maille. Ainsi, tous les sites tétraédriques sont occupés par les anions.
- Voir figure 25.11.
- Les proches voisins  $\text{Ca}^{2+}$  d'un ion  $\text{F}^-$  sont aux 4 sommets du tétraèdre dont il est le centre. La coordinence des anions est donc 4. Les proches voisins  $\text{F}^-$  d'un cation  $\text{Ca}^{2+}$ , par exemple situé au centre d'une face, sont sur 4 sites tétraédriques de la maille et sur 4 sites tétraédriques de la maille voisine qui partage le cation. La coordinence des cations est donc 8.
- La masse volumique est  $\rho = \frac{4M(\text{Ca}) + 8M(\text{F})}{\mathcal{N}_a a^3} = 3,19 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

**Exercice 25.4**

- La structure cubique centrée est représentée ci-contre, avec le paramètre de maille  $a$ , qui est la longueur d'une arête du cube.
- La maille comporte 8 atomes de fer sur les sommets partagés chacun entre 8 mailles et un atome de fer au centre de la maille, soit au total  $1 + 1 = 2$  atomes par maille.  
Chaque atome de fer, par exemple celui placé au centre de la maille, a 8 proches voisins situés à une distance égale à la demi-diagonale du cube, c'est-à-dire  $a\sqrt{3}/2$ . La coordinence est donc 8 (à comparer à 12 pour une structure CFC).



- La masse volumique du fer est égale à la masse des atomes contenus dans une maille divisée par le volume de celle-ci :  $\rho = \frac{2 \times M}{\mathcal{N}_a a^3}$ . Le paramètre de maille est donc  $a = \left(\frac{2M}{\mathcal{N}_a \rho}\right)^{\frac{1}{3}} = 287 \text{ pm}$ .
- Les sphères de rayon  $r$  se touchent sur la diagonale du cube, dont la longueur est  $a\sqrt{3}$ . On a donc  $4r = a\sqrt{3}$ , soit  $r = a\sqrt{3}/4 = 124 \text{ pm}$ .
- La compacité est le volume occupé par les sphères ( $2 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ ) divisée par le volume de la maille ( $a^3$ ). Elle est donc égale à  $\frac{8}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3 = 0,68$ . La structure cubique centrée est donc moins compacte que la structure CFC (de compacité 0,74).
- Soit  $r_1$  le rayon maximal d'une sphère que l'on peut loger au centre des arêtes de la maille cubique centrée. On a  $2r + 2r_1 = a$  ce qui conduit à  $r_1 = \frac{a}{2} - r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)r = 19 \text{ pm}$ .

### Exercice 25.5

- La maille CFC est représentée figure 25.2.
- Il y a 8 atomes de fer sur les sommets de la maille cubique, partagés chacun entre 8 mailles, et 6 atomes aux centres des faces, partagés chacun entre 2 mailles. La population est donc  $8/8 + 6/2 = 4$  atomes de fer par maille.  
Soit  $a$  le paramètre de la maille. Les plus proches voisins d'un atome sont situés à une distance égale à la demi-diagonale d'une face, soit  $a\sqrt{2}/2$ . Il sont au nombre de 12. La coordinence est donc 12.
- Dans le modèle des sphères dures, les sphères de rayon  $r$  sont en contact sur les diagonales des faces. On a donc  $a\sqrt{2} = 4r$ , ce qui conduit à  $a = 351 \text{ pm}$ .
- La compacité est  $C = \frac{4 \times \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{16}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 = 0,74$ .
- La masse volumique est la masse des atomes contenus dans une maille divisée par le volume d'une maille, soit  $\rho = \frac{4M}{\mathcal{N}_a a^3} = 8,58 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . La masse volumique est 9% plus grande que celle du fer  $\alpha$ , qui a une structure cubique centrée. Cela est dû à la plus grande compacité de la structure CFC (le rapport des compacités est égal au rapport des masses volumiques).
- Le milieu d'une arête de la maille CFC est un site octaédrique. On peut donc y loger une sphère de rayon  $r_1$  tel que  $2r_1 + 2r = a$ . Par ailleurs  $a\sqrt{2} = 4r$ , d'où  $r_1 = (\sqrt{2} - 1)r = 51 \text{ pm}$ .
- Un site tétraédrique est au centre d'un cube de largeur  $a/2$  (figure 25.13). Il est donc au centre du rectangle  $ABCD$  de longueur  $\sqrt{2}a/2$  et de largeur  $a/2$ , dont la diagonale a une longueur  $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . La sphère pouvant être logée dans ce site a un rayon  $r_1$  tel que  $2r_1 + 2r = AC$ , ce qui conduit à  $r_1 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)r = 28 \text{ pm}$ .

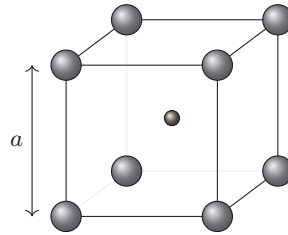
### Exercice 25.6

- La solubilité du carbone est plus grande dans l'austénite. Cela s'explique par la plus grande taille de ses sites interstitiels. Dans la ferrite, de structure cubique centrée, les sites ont un rayon de 19 pm. Dans l'austénite, de structure cubique à faces centrées, les sites octaédriques et tétraédriques ont respectivement un rayon de 51 pm et 28 pm.
- Le pourcentage en carbone vaut  $\frac{m_{\text{carbone}}}{m_{\text{carbone}} + m_{\text{fer}}} = \frac{1}{200} = 0,5 \%$ . Ainsi  $m_{\text{carbone}} + m_{\text{fer}} = 200m_{\text{carbone}}$  soit  $m_{\text{fer}} = 199m_{\text{carbone}}$ . Pour un atome de carbone de masse  $m_C$ , il y a donc une masse  $199m_C$  d'atomes de fer, c'est-à-dire un nombre d'atomes de fer  $N = 199m_C/m_{\text{Fe}} = 199M(C)/M(\text{Fe}) = 43$ .
- La maille comporte  $8/8 + 1 = 2$  atomes de fer et  $2/2 + 4/4 = 2$  sites. Il y a donc autant d'atomes de fer que de sites dans une maille. Ainsi, un atome de carbone pour 43 atomes de fer correspond à un atome de carbone pour 43 sites ce qui correspond à un taux d'occupation de  $\frac{1}{43}$ .

- Les sites situés aux centres des arêtes de longueur  $c$  ont un rayon  $r_1$  tel que  $2r_1 + 2r = c$ , soit  $r_1 = 21$  pm. Les sites situés aux centres des faces carrées ont un rayon  $r_2$  tel que  $2r_2 + 2r = a\sqrt{2}$ , soit  $r_2 = 79$  pm.
- Seuls les sites situés aux centres des faces carrées peuvent être occupés par des atomes de carbone sans déformer la maille moyenne.
- Plus le pourcentage en carbone augmente, plus le nombre de sites occupés augmente. Or l'occupation d'un site localisé au centre d'une arête de longueur  $c$  induit une déformation locale de la maille. L'effet moyen est donc l'accroissement du paramètre  $c$  par rapport à  $a$ .

### Exercice 25.7

- La structure de CsCl est représentée ci-contre.
- Les ions  $\text{Cl}^-$  sont placés aux sommets d'un cube de côté  $a$ , dont le centre est occupé par un ion  $\text{Cs}^+$ .
- Il y a un 1 ion  $\text{Cs}^+$  par maille et 8 ions  $\text{Cl}^-$  situés sur les 8 sommets, partagés chacun entre 8 mailles, ce qui fait  $8/8 = 1$  ion  $\text{Cl}^-$  par maille. On a bien 1 ion  $\text{Cs}^+$  pour 1 ion  $\text{Cl}^-$ . La coordinence est 8, aussi bien pour les cations que pour les anions. Les plus proches voisins sont à une distance  $a\sqrt{3}/2$  correspondant à une demie grande diagonale du cube.



- La masse volumique est  $\rho = \frac{M(\text{Cs}) + M(\text{Cl})}{\mathcal{N}_a a^3}$  et donc  $a = \left( \frac{M(\text{Cs}) + M(\text{Cl})}{\mathcal{N}_a \rho} \right)^{\frac{1}{3}} = 413$  pm.
- Si les sphères de rayon  $r_-$  sont empilées les unes sur les autres, on a  $2r_- = a$  et donc  $r_- = 206$  pm. La longueur de la diagonale du cube de côté  $a$  est  $a\sqrt{3} = 2r_- + 2r_+$ , car les anions et les cations sont en contact sur cette diagonale. On a donc  $r_+ = a\sqrt{3}/2 - r_- = 152$  pm.
- Si  $r_- = 181$  pm alors  $r_+ = a\sqrt{3}/2 - r_- = 177$  pm. Cette valeur, supérieure à 152 pm, montre que les sphères de rayons  $r_-$  ne se touchent pas.

**Partie 6**

# **Transformations chimiques**





# Équilibre thermodynamique d'un système chimique

## L'essentiel du cours

### Contexte

À l'heure où beaucoup d'espoirs sont fondés sur les piles à combustible à dihydrogène, comment produire en masse le dihydrogène pour les alimenter ? Comment prévoir le rendement de cette production et l'effet de réactions indésirables ?

## ■ 1 Différentes transformations

Pour produire du dihydrogène, les industriels exploitent la tendance naturelle du méthane  $\text{CH}_4$  à se casser en molécules plus petites en présence de vapeur d'eau et à haute température.

Plus généralement, tout système hors d'équilibre évolue spontanément vers un état plus stable d'énergie minimale et d'entropie maximale, en subissant des transformations que l'on classe en trois catégories :

- Les **transformations physiques**, au cours desquelles l'**état physique des espèces chimiques** mises en jeu est modifié, sans que les espèces elles-mêmes ne soient modifiées. Les **liaisons intermoléculaires**, comme les liaisons de van der Waals ou les liaisons hydrogène (voir chapitre 24), sont mises en jeu dans ces transformations. On distinguera les changements d'état, étudiés dans le chapitre 16 et les transitions allotropiques, évoquées dans le chapitre 25.
- Les **transformations chimiques**, au cours desquelles la **nature des espèces chimiques** est modifiée, avec conservation des éléments chimiques. Les **liaisons intramoléculaires**, principalement les liaisons covalentes et ioniques (voir chapitre 24), sont modifiées dans ces transformations. L'étude de ces transformations est au cœur de ce chapitre.
- Les **transformations nucléaires**, au cours desquelles la nature des éléments chimiques est modifiée. Ce sont les interactions au sein du noyau (interactions nucléaires fortes et faibles) qui sont mises en jeu. Ces transformations seront évoquées dans le chapitre 23.

## ■ 2 Description des systèmes physico-chimiques

Pour étudier les transformations chimiques, il faut tout d'abord décrire le système subissant ces transformations, par exemple le mélange de méthane  $\text{CH}_4$  et de vapeur d'eau  $\text{H}_2\text{O}$ .

### □ Comment décrire un système physico-chimique ?

Le système physico-chimique est un système thermodynamique, comme défini dans le chapitre 16. Il s'agit de tout ou partie du milieu réactionnel délimité par une paroi fictive ou réelle, comme la paroi d'un bécher ou celle d'un réacteur industriel.

Nous nous limitons au cas d'un système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur et qui présente une composition identique en tout point. Il s'agit donc d'un **système fermé** de **composition uniforme**, enfermé dans un récipient clos **parfaitement agité**.

### □ Comment décrire un corps pur ?

Un corps pur ne contient qu'une seule espèce chimique. Pour le décrire, nous devons préciser sa nature et son état physique.



L'indication des conditions de température et de pression renseigne sur l'état physique de l'espèce grâce à son diagramme d'état  $(P, T)$ .

Nous pouvons préciser sa taille à l'aide de grandeurs extensives, comme sa **masse**  $m$  (en kg), sa **quantité de matière**  $n$  (en mol) ou son **volume**  $V$  (en  $\text{m}^3$ ), ou le caractériser par des grandeurs intensives, comme sa **masse molaire**  $M = n/m$  (en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), sa **masse volumique**  $\rho = m/V$  (en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) ou encore sa **densité**  $d = \rho/\rho_{\text{eau}}$  pour les liquides et les solides et  $d = \rho/\rho_{\text{air}}$  pour les gaz, où l'air est pris dans les mêmes conditions de température et de pression que le système.



Pour un gaz modélisé par un **gaz parfait**, vérifiant  $PV = nRT$  par définition, on a :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \quad \text{et} \quad d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{PM}{RT} \frac{RT}{PM_{\text{air}}} = \frac{M}{M_{\text{air}}}$$

### □ Comment décrire un mélange ?

Un mélange contient plusieurs espèces chimiques  $A_i$ . Pour le décrire, nous devons indiquer sa composition en recensant les espèces présentes et en précisant leur état physique.

Le paramètre de composition le plus fréquent pour décrire l'espèce  $A_i$  est sa **concentration molaire** :

$$c_i = \frac{n_i}{V} \quad (\text{en mol} \cdot \text{L}^{-1})$$



On définit aussi la concentration massique :  $c_{mi} = \frac{m_i}{V} = \frac{n_i M_i}{V} = M_i c_i$  (en  $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ ).

La concentration molaire notée  $c_i$  est fréquemment utilisée pour les systèmes liquides et peut aussi se rencontrer pour les systèmes gazeux. Il faut cependant privilégier la notation  $[A_i]$  lorsque l'espèce  $A_i$  est dissoute dans un solvant.

Nous pouvons aussi indiquer la composition d'un mélange en précisant les proportions des différentes espèces à l'aide d'un **titre molaire** ou d'une **pression partielle**.

**Définition : Titre ou fraction molaire**

Le titre molaire  $x_i$  d'une espèce  $A_i$  correspond à sa proportion molaire au sein d'un système composé de  $N$  espèces représentant une quantité de matière totale  $n_{\text{sys}}$  :

$$x_i = \frac{n_i}{n_{\text{sys}}} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1$$

Cette grandeur adimensionnelle est souvent exprimée en %.

Calculons les titres molaires de méthane et de vapeur d'eau au sein d'un mélange équimolaire.

$$x_{\text{CH}_4} = \frac{n_{\text{CH}_4}}{n_{\text{CH}_4} + n_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{n_0}{n_0 + n_0} = 50,0\% \quad \text{et} \quad x_{\text{H}_2\text{O}} = 1 - x_{\text{CH}_4} = 50,0\%.$$



On peut aussi définir le titre massique  $w_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$  qui diffère de  $x_1$  mais en découle :

$$w_1 = \frac{n_1 M_1}{n_1 M_1 + n_2 M_2} = \frac{(n_1/n_{\text{gaz}})M_1}{(n_1/n_{\text{gaz}})M_1 + (n_2/n_{\text{gaz}})M_2} = \frac{x_1 M_1}{x_1 M_1 + x_2 M_2} \neq x_1.$$

Ainsi,  $w_{\text{CH}_4} = \frac{m_{\text{CH}_4}}{m_{\text{CH}_4} + m_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{x_{\text{CH}_4} M_{\text{CH}_4}}{x_{\text{CH}_4} M_{\text{CH}_4} + x_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}}} = 47,1\% \quad \text{et} \quad w_{\text{H}_2\text{O}} = 1 - w_{\text{CH}_4} = 52,9\%.$



Les titres molaires sont utiles pour caractériser le système par sa masse molaire :

$$M_{\text{sys}} = \frac{m_{\text{sys}}}{n_{\text{sys}}} = \frac{m_1 + m_2}{n_{\text{sys}}} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_{\text{sys}}} = \frac{n_1}{n_{\text{sys}}} M_1 + \frac{n_2}{n_{\text{sys}}} M_2 = x_1 M_1 + x_2 M_2$$

Il s'agit d'une masse molaire moyenne pondérée par les titres molaires.

Calculons la masse molaire du mélange précédent :  $M_{\text{sys}} = x_{\text{CH}_4} M_{\text{CH}_4} + x_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}} = 17,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$

Le dernier paramètre de composition est spécifique aux phases gazeuses. Il s'agit de la pression partielle, qui nécessite de modéliser le système gazeux comme un mélange de gaz parfaits.

**Définition : Pression partielle**

La pression partielle  $P_i$  d'une espèce gazeuse  $A_i$  au sein d'un mélange de gaz parfaits de volume  $V$  et de température  $T$  est égale à la pression qu'aurait le système si l'espèce  $A_i$  était seule à occuper tout le volume  $V$  à la température  $T$  :

$$P_i = \frac{n_i R T}{V}$$

où  $P_i$  est la pression partielle de l'espèce  $A_i$  (en Pa),  $n_i$  sa quantité de matière (en mol),  $V$  le volume du système (en  $\text{m}^3$ ),  $T$  sa température (en K) et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

Si  $P$  est la pression totale du mélange, l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit  $P = \frac{n_{\text{gaz}} R T}{V}$  avec

$$n_{\text{gaz}} = \sum_{i=1}^N n_i \quad (N : \text{nombre d'espèces}), \quad \text{ce qui conduit à} \quad \frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{n_{\text{gaz}}} \quad \text{ou} \quad P_i = \frac{n_i}{n_{\text{gaz}}} P.$$

**Loi de Dalton**

La loi de Dalton permet de relier la pression partielle d'une espèce gazeuse à la pression totale du système auquel elle appartient :  $P_i = x_i P$ .



Les pressions partielles vérifient :  $\sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N (x_i P) = \left(\sum_{i=1}^N x_i\right) P = P$ .

Pour le mélange équimolaire de méthane et de vapeur d'eau à la pression  $P = 10,0$  bar, la pression partielle de chacune des espèces vaut  $P_{\text{CH}_4} = x_{\text{CH}_4} P = 5,0$  bar et  $P_{\text{H}_2\text{O}} = P - P_{\text{CH}_4} = 5,0$  bar.

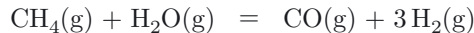
### ■ 3 Transformations chimiques

Une réaction chimique est définie par une **équation bilan** et est caractérisée par une constante thermodynamique  $K$  appelée **constante d'équilibre**, dont la valeur dépend de la **température** du système.



Dans cet ouvrage, nous utiliserons le symbole « = » pour écrire l'équation bilan d'une réaction chimique, qui traduit un bilan de matière sans préjuger du sens de la réaction.

Traisons le cas d'une réaction produisant du dihydrogène en phase gazeuse :



Les espèces du membre de gauche de l'équation sont les réactifs, ceux du membre de droite sont les produits. L'équation bilan comporte des coefficients stœchiométriques indiquant les proportions dans lesquels les produits se forment et les réactifs se consomment. Ainsi, pour produire une molécule de dihydrogène, une molécule de méthane doit réagir avec une molécule d'eau.

Formellement, l'équation peut aussi s'écrire  $\text{CO}(\text{g}) + 3 \text{H}_2(\text{g}) - \text{CH}_4(\text{g}) - \text{H}_2\text{O}(\text{g}) = 0$ , ce qui nous permet de définir des coefficients stœchiométriques algébriques.

**Définition : Coefficient stœchiométrique algébrique**

Notons  $\alpha_i$  le coefficient stœchiométrique d'une espèce  $A_i$  intervenant dans l'équation bilan d'une réaction. Le coefficient stœchiométrique algébrique correspondant  $\nu_i$  est défini par :

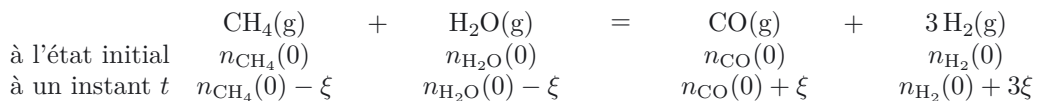
- si  $A_i$  est un réactif de la réaction :  $\nu_i = -\alpha_i$ ,
- si  $A_i$  est un produit de la réaction :  $\nu_i = +\alpha_i$ .



L'équation bilan doit aussi mentionner, entre parenthèses, l'état physique de chaque espèce, par exemple (g), (s) ou (l). Un soluté en solution aqueuse est noté (aq).

#### □ Comment décrire l'évolution d'un système ?

Un tableau d'avancement consiste à reporter les quantités de matière (en mol) à l'instant initial, et à un instant quelconque pendant la transformation.



**Définition : Avancement**

La quantité de matière d'une espèce mise en jeu dans une réaction s'écrit  $n_i(t) = n_i(0) + \nu_i \xi$  où  $\xi$  est l'avancement de la réaction (en mol) :

$$\xi = \frac{n_i(t) - n_i(0)}{\nu_i}$$



Lorsque le volume est constant, il est possible d'écrire un tableau d'avancement pour un volume de 1 L, ce qui revient à utiliser l'avancement volumique  $x = \xi/V$  (en mol · L<sup>-1</sup>).

Il peut être intéressant de comparer cet avancement à l'avancement maximal qui est atteint quand la quantité de matière d'au moins un réactif devient nulle.

**Définition : Taux d'avancement**

Le taux d'avancement  $\tau$  est défini par une grandeur adimensionnée exprimée en % :

$$\tau = \frac{\xi}{\xi_{\max}}$$



$\tau$  peut remplacer avantageusement  $\xi$  dans les tableaux d'avancement dans le cas d'un mélange stœchiométrique ou d'une réaction de dissociation :  $\alpha A = \beta B + \gamma C$ .

Pour suivre l'évolution d'un système susceptible de subir une réaction chimique identifiée, nous devons faire appel aux notions de quotient de réaction et d'activité chimique.

**Définition : Quotient de réaction ou quotient réactionnel**

Le quotient de réaction est une grandeur adimensionnelle instantanée définie par :  $Q = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i}$  où l'indice  $i$  fait référence à une espèce  $A_i$  intervenant dans l'équation bilan de la réaction,  $\nu_i$  son coefficient stœchiométrique algébrique et  $a_i$  son activité.

**Définition : Activité chimique**

L'activité chimique d'une espèce dépend de son état physique selon le tableau ci-dessous :

corps pur		mélange		
phase condensée (liquide ou solide)	phase gazeuse	solvant	soluté au sein d'une solution très diluée	gaz parfait au sein d'un mélange de gaz parfaits
$a_i = 1$	$a_i = \frac{P}{P^\circ}$	$a_i = 1$	$a_i = \frac{c_i}{c^\circ}$	$a_i = \frac{P_i}{P^\circ}$

où  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est une concentration de référence appelée concentration standard et  $P^\circ = 1 \text{ bar}$  est une pression de référence appelée pression standard.

□ **Jusqu'où le système évolue-t-il ?**

Un système physico-chimique évolue en principe jusqu'à un état stable appelé état d'équilibre.

**Définition : Équilibre thermodynamique**

Un système fermé est à l'équilibre thermodynamique quand sa température  $T$ , sa pression  $P$  et sa composition chimique n'évoluent plus.

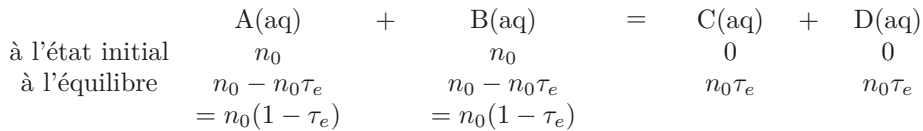
Un système à l'équilibre chimique est caractérisé par un quotient de réaction à l'équilibre  $Q_e$ .

**Définition : Loi de l'équilibre chimique**

Un système à l'équilibre chimique vérifie la **loi d'équilibre chimique** :  $Q_e = K$  où  $Q_e$  est le quotient de réaction à l'équilibre et  $K$  la constante d'équilibre de la réaction. Cette loi signifie que les activités des espèces intervenant dans la réaction prennent, à l'équilibre chimique, des valeurs telles que le quotient de réaction soit égal à la constante d'équilibre.

□ **Comment savoir si une réaction est intéressante à mettre en œuvre ?**

Traisons tout d'abord le cas d'une réaction se déroulant en solution aqueuse dans les conditions stœchiométriques. Pour cela, nous utilisons le taux d'avancement  $\tau = \frac{\xi}{\xi_{\max}} = \frac{\xi}{n_0}$  soit  $\xi = n_0\tau$ .



La loi de l'équilibre chimique impose à l'équilibre :  $\frac{a_C a_D}{a_A a_B} = K$  soit  $\frac{\frac{[C]}{c^\circ} \frac{[D]}{c^\circ}}{\frac{[A]}{c^\circ} \frac{[B]}{c^\circ}} = K$ .

$$\text{Ainsi, } K = \frac{\left(\frac{n_0\tau_e}{Vc^\circ}\right)^2}{\left(\frac{n_0(1-\tau_e)}{Vc^\circ}\right)^2} = \frac{\tau_e^2}{(1-\tau_e)^2} \text{ ce qui conduit à } \tau_e = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}}.$$

Testons différentes valeurs de constante d'équilibre  $K$  et analysons les résultats.

$K$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	1	$10^2$	$10^4$	$10^6$
$\tau_e$	0,10%	0,99%	9,09%	50%	90,9%	99,0%	99,9%

Plus  $K$  est grand, plus le taux d'avancement est élevé et la réaction est avancée.

- Cas où  $K > 1$  :  $\tau_e > 50\%$  c'est-à-dire qu'il y a plus de produits que de réactifs à l'équilibre. On dit alors que la réaction est thermodynamiquement favorisée dans le sens direct.
- Cas où  $K < 1$  :  $\tau_e < 50\%$  c'est-à-dire qu'il y a plus de réactifs que de produits à l'équilibre. On dit alors que la réaction est thermodynamiquement défavorisée dans le sens direct.

Nous pouvons généraliser la démarche précédente à tout type de réaction chimique.

**Définition : Réaction thermodynamiquement favorisée ou défavorisée**

Une réaction chimique caractérisée par une constante d'équilibre  $K$  est dite :

- favorisée dans le sens direct si  $K > 1$ ,
- défavorisée dans le sens direct si  $K < 1$ .



Une réaction favorisée dans le sens direct est défavorisée dans le sens indirect et réciproquement puisque  $K_{\text{indirect}} = 1/K_{\text{direct}}$ .

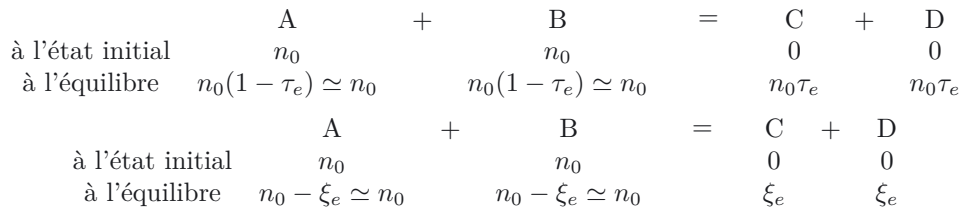


Une réaction peut être thermodynamiquement favorisée tout en étant lente, voire très lente (voir chapitre 27).

- Dans le cas où  $K \ll 1$ , le taux d'avancement est faible. On parle de réaction **très limitée** ou **très peu avancée**.

Quelle simplification pouvons-nous alors apporter ?

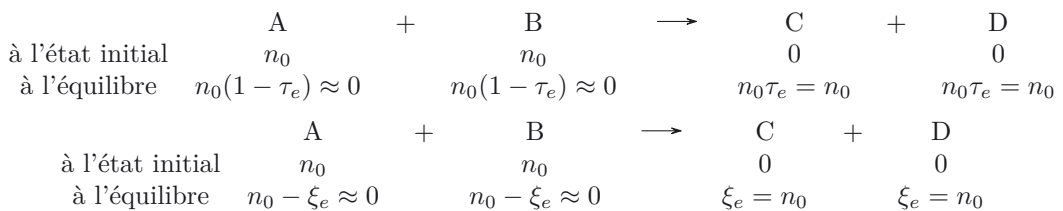
Le taux d'avancement étant très faible par rapport à 1, nous pouvons envisager de négliger  $\tau_e$  par rapport à 1 (et  $\xi_e$  par rapport à  $n_0$ ). Cela permet de simplifier les calculs en acceptant une baisse toute relative de la précision des résultats. Cette baisse est parfois même insignifiante du fait des incertitudes déjà existantes sur les données.



- Dans le cas où  $K \gg 1$ , le taux d'avancement est très proche de 1 de sorte que nous pouvons considérer qu'à l'état final il ne reste que des traces de réactifs. On parle alors de réaction **quantitative** ou **très avancée**.

Quelle simplification pouvons nous alors apporter ?

Nous pouvons envisager d'assimiler le taux d'avancement à 1. Cela revient à considérer que les réactifs ont été entièrement consommés. C'est le modèle de la réaction totale pour laquelle  $\tau_e = 1$  et  $K$  est infini. Son équation fait alors intervenir le symbole «  $\rightarrow$  ».

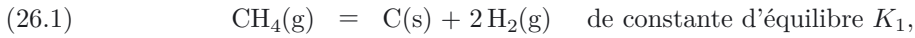
**Définition : Réaction totale**

Une réaction totale est une réaction qui a lieu jusqu'à ce que l'un (au moins) des réactifs appelé réactif limitant soit entièrement consommé.

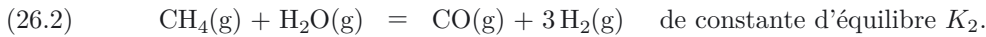


Aucune réaction n'est parfaitement totale : il s'agit d'une simplification valable lorsque  $K \gg 1$ . On considère souvent que  $K \gg 1$  à partir de  $10^4$  et que  $K \ll 1$  en deçà de  $10^{-4}$ . Mais ces valeurs sont à utiliser avec prudence puisque l'avancement dépend de la stœchiométrie de la réaction, de l'état physique des espèces et parfois de la composition initiale (voir exercice 26.4).

Industriellement, le dihydrogène peut être produit à partir du méthane soit par craquage direct :



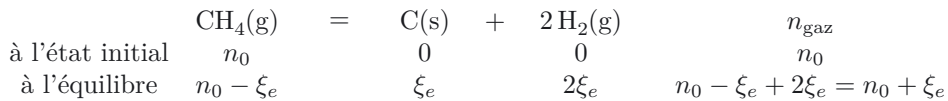
soit par vapocraquage :



Envisageons des conditions proches des conditions industrielles, soit une température de  $950^\circ\text{C}$  et une pression totale constante de  $P = 10$  bar. À cette température, les constantes d'équilibre valent respectivement  $K_1 = 11,3$  et  $K_2 = 10,6 \cdot 10^3$ . La réaction de vapocraquage semble donc beaucoup plus favorisée que la réaction de craquage direct.

□ **Peut-on aller plus loin en prévoyant la production de dihydrogène ?**

Commençons par le cas plus simple de la réaction 26.1 de craquage direct en partant d'une quantité  $n_0 = 100$  mol de méthane. L'exploitation de la loi de l'équilibre chimique permet de déterminer l'état final du système et donc les quantités de matière produites. En présence d'espèces à l'état gazeux, il faut compléter le tableau d'avancement par le nombre total de moles de gaz, que l'on notera  $n_{\text{gaz}}$ .



Le quotient de réaction à l'équilibre  $Q_e = \frac{a_{\text{C}} (a_{\text{H}_2})^2}{a_{\text{CH}_4}} = \frac{\left(\frac{P_{\text{H}_2}}{P^\circ}\right)^2}{\frac{P_{\text{CH}_4}}{P^\circ}}$  car  $a_{\text{C}(\text{s})} = 1$ .



Dans le cas d'un mélange gazeux, on doit écrire les pressions partielles sous la forme :

- $P_i = x_i P$  si la réaction se fait à pression constante  $P$ .
- $P_i = \frac{n_i RT}{V}$  si la réaction se fait à volume constant  $V$ .

$$\text{Ainsi, } Q_e = \frac{\left(\frac{x_{\text{H}_2} P}{P^\circ}\right)^2}{\frac{x_{\text{CH}_4} P}{P^\circ}} = \frac{\left(\frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{gaz}}}\right)^2 P}{\frac{n_{\text{CH}_4}}{n_{\text{gaz}}} P^\circ} = \frac{(n_{\text{H}_2})^2 P}{n_{\text{CH}_4} n_{\text{gaz}} P^\circ} = \frac{4\xi_e^2 P}{(n_0 - \xi_e)(n_0 + \xi_e) P^\circ} = \frac{4\xi_e^2 P}{(n_0^2 - \xi_e^2) P^\circ}$$

et la loi d'équilibre s'écrit  $\frac{4\xi_e^2 P}{(n_0^2 - \xi_e^2) P^\circ} = K_1$ .

Nous obtenons  $K_1 n_0^2 P^\circ - K_1 P^\circ \xi_e^2 = 4P\xi_e^2$  soit  $\xi_e = \sqrt{\frac{n_0^2 P^\circ K_1}{4P + K_1 P^\circ}} = 46,9$  mol pour  $n_0 = 100$  mol.

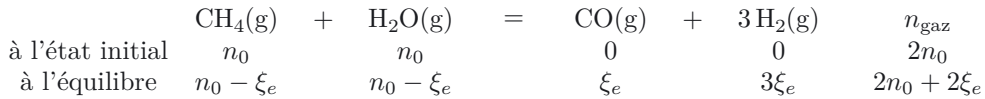
Cela représente un taux d'avancement  $\tau_e = 46,9\%$ .





Les applications numériques doivent être réalisées avec des valeurs prises dans les unités du système international : soit  $P = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et  $P^\circ = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Continuons avec le cas plus compliqué de la réaction 26.2 de vapocraquage en partant d'un mélange équiolaire de méthane et de vapeur d'eau (pour  $n_0 = 100 \text{ mol}$ ).



Le quotient de réaction à l'équilibre s'écrit : 
$$Q_e = \frac{a_{\text{CO}} (a_{\text{H}_2})^3}{a_{\text{CH}_4} a_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{\frac{P_{\text{CO}}}{P^\circ} \left( \frac{P_{\text{H}_2}}{P^\circ} \right)^3}{\frac{P_{\text{CH}_4}}{P^\circ} \frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P^\circ}} = \frac{\frac{x_{\text{CO}} P}{P^\circ} \left( \frac{x_{\text{H}_2} P}{P^\circ} \right)^3}{\frac{x_{\text{CH}_4} P}{P^\circ} \frac{x_{\text{H}_2\text{O}} P}{P^\circ}}$$

Ainsi : 
$$Q_e = \frac{\frac{n_{\text{CO}}}{n_{\text{gaz}}} \left( \frac{n_{\text{H}_2}}{n_{\text{gaz}}} \right)^3 P^2}{\frac{n_{\text{CH}_4}}{n_{\text{gaz}}} \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{gaz}}} (P^\circ)^2} = \frac{\xi_e (3\xi_e)^3 P^2}{(n_0 - \xi_e)(n_0 - \xi_e)(2n_0 + 2\xi_e)^2 (P^\circ)^2} = \frac{27\xi_e^4 P^2}{4(n_0^2 - \xi_e^2)^2 (P^\circ)^2}$$

À l'équilibre :  $Q_e = K_2$  donc  $\sqrt{K_2} 2n_0^2 P^\circ - \sqrt{K_2} 2P^\circ \xi_e^2 = \sqrt{27} P \xi_e^2$ . On en déduit :

$$\xi_e = \sqrt{\frac{2\sqrt{K_2} n_0^2 P^\circ}{\sqrt{27} P + 2\sqrt{K_2} P^\circ}} = 89,4 \text{ mol}$$

Ainsi, à l'équilibre de la réaction de vapocraquage, le taux d'avancement vaut  $\tau_e = 89,4\%$  et le système est composé de :  $n_{\text{CO}} = 89,4 \text{ mol}$ ,  $n_{\text{H}_2} = 268,2 \text{ mol}$ ,  $n_{\text{CH}_4} = n_{\text{H}_2\text{O}} = 10,6 \text{ mol}$ .



Si l'équation vérifiée par  $\xi_e$  est de degré supérieur à 2, une résolution numérique ou graphique peut être nécessaire.

Ces résultats confirment qu'il est plus avantageux de mettre en œuvre le vapocraquage du méthane que le craquage direct pour produire du dihydrogène. Résumons la méthode utilisée ci-dessus.

### Méthode 26.1 : Déterminer l'état final d'un système

Soit un système physico-chimique dans lequel une réaction chimique peut avoir lieu.

- Écrire l'équation bilan de la réaction et le tableau d'avancement correspondant.
- Exprimer le quotient  $Q_e$  de réaction à l'équilibre en fonction de  $\xi_e$  ou  $\tau_e$ .
- Écrire la loi de l'équilibre  $Q_e = K$  et en déduire l'équation vérifiée par  $\xi_e$  ou  $\tau_e$ .
- Résoudre l'équation pour déterminer  $\xi_e$  ou  $\tau_e$ .
- En déduire la composition du mélange à l'état final.



Exercices (26.1) (26.2) (26.3)



Dans le cas où il existe plusieurs réactions possibles, il faut commencer par considérer la réaction la plus favorisée (de plus grande constante d'équilibre) et vérifier le caractère négligeable des autres réactions. On parle alors de **réaction prépondérante**.

Le vapocraquage 26.2 est réalisé industriellement en présence d'un catalyseur d'oxyde de nickel qu'un dépôt de graphite C(s) lié au craquage direct 26.1 pourrait potentiellement encrasser.

□ **Y a-t-il effectivement risque d'encrassement du catalyseur ?**

Étudions le système obtenu précédemment, constitué du mélange gazeux de  $n_{\text{CO}} = 89,4$  mol,  $n_{\text{H}_2} = 268,2$  mol et  $n_{\text{CH}_4} = n_{\text{H}_2\text{O}} = 10,6$  mol. Ce système, susceptible de subir la réaction 26.1 de craquage direct de constante  $K_1$ , est donc caractérisé par le quotient de réaction initial :

$$Q_0 = \frac{a_{\text{C}} (a_{\text{H}_2})^2}{a_{\text{CH}_4}} = \frac{n_{\text{H}_2}^2 P}{n_{\text{CH}_4} n_{\text{gaz}} P^\circ}$$

- Si  $Q_0 < K_1$ , le système va évoluer pour que son quotient réactionnel augmente jusqu'à atteindre  $K_1$ . Pour cela, l'activité des produits de la réaction va augmenter tandis que l'activité des réactifs va diminuer. L'évolution, si elle a lieu, se fera donc dans le sens direct.
- Si  $Q_0 > K_1$ , le système va évoluer pour que son quotient réactionnel diminue jusqu'à atteindre  $K_1$ . Pour cela, l'activité des produits de la réaction va diminuer tandis que l'activité des réactifs va augmenter. L'évolution, si elle a lieu, se fera donc dans le sens indirect.

Numériquement, on trouve  $Q_0 = 179 > K_1$ . L'évolution du système devrait donc se faire dans le sens indirect, soit dans le sens de la consommation du graphite et non de son dépôt. Il n'y a donc pas de risque d'encrassement du catalyseur. En outre, en absence de graphite, le système n'évoluera pas.

#### Méthode 26.2 : Déterminer le sens d'évolution spontanée

Soit un système physico-chimique dans lequel des espèces sont susceptibles de réagir entre elles par une réaction identifiée.

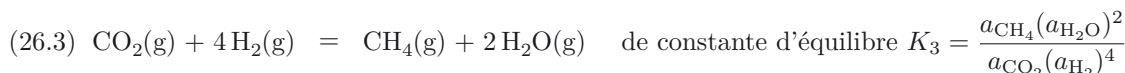
- Calculer le quotient de réaction à l'état initial  $Q_0$ .
- Comparer  $Q_0$  à  $K$ .
- Conclure à :
  - une évolution dans le sens direct si  $Q_0 < K$ ,
  - une absence d'évolution si  $Q_0 = K$  : l'équilibre est déjà atteint,
  - une évolution dans le sens indirect si  $Q_0 > K$ .

➔ Exercice (26.4)

Nous venons de voir que beaucoup d'informations sont issues de raisonnements reposant sur la constante d'équilibre de la réaction étudiée. Mais cette dernière n'est pas toujours connue.

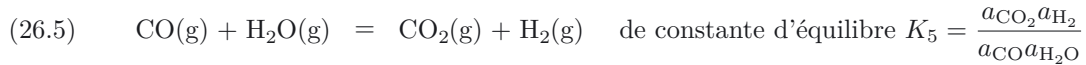
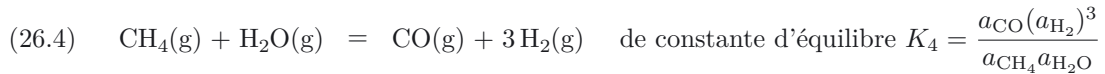
□ **Comment accéder à la valeur de la constante d'équilibre d'une réaction ?**

Intéressons-nous par exemple à la réaction suivante, de constante d'équilibre *a priori* inconnue :



Cette méthode d'hydrogénation des composés organiques a été découverte par le chimiste français Sabatier (prix Nobel en 1912). Elle se fait en présence de catalyseur métallique. Elle est encore utilisée pour produire de l'eau sur la Station Spatiale Internationale.

Supposons connues les constantes d'équilibre, à  $T = 1223 \text{ K}$ , des réactions suivantes :



Des expressions des constantes  $K_3$ ,  $K_4$  et  $K_5$  nous pouvons déduire la relation :

$$K_3 = \frac{a_{\text{CH}_4}(a_{\text{H}_2\text{O}})^2}{a_{\text{CO}_2}(a_{\text{H}_2})^4} = \frac{a_{\text{CH}_4}a_{\text{H}_2\text{O}}}{a_{\text{CO}}(a_{\text{H}_2})^3} \cdot \frac{a_{\text{CO}}a_{\text{H}_2\text{O}}}{a_{\text{CO}_2}a_{\text{H}_2}} = \frac{1}{K_4} \frac{1}{K_5}$$

La méthode adoptée ci-dessus se résume de la manière suivante :

### Méthode 26.3 : Déterminer la constante d'équilibre

- Exprimer la constante d'équilibre inconnue à l'aide de la loi de l'équilibre :  $K = Q_e$ .
- Faire apparaître, le cas échéant, l'activité d'espèces manquantes au numérateur et au dénominateur.
- Identifier, dans cette expression, les expressions des constantes d'équilibre fournies.
- En déduire l'expression de la constante d'équilibre cherchée à partir des constantes d'équilibre fournies.

➔ Exercice (26.5)

Quelque soit la réaction, nous sommes désormais capables de prévoir sa faisabilité d'un point de vue thermodynamique et son état d'équilibre final. Cependant cela ne présage en rien de la vitesse de réaction. **Cette étude thermodynamique est donc à compléter par une étude cinétique**, menée au prochain chapitre.

## Interro de cours

Étudions la réaction chimique :  $\text{HSO}_3^-(\text{aq}) + \text{NH}_3(\text{aq}) = \text{SO}_3^{2-}(\text{aq}) + \text{NH}_4^+(\text{aq})$ .

1. Déterminer sa constante d'équilibre  $K_3$  sachant que :  
 $\text{HSO}_3^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{SO}_3^{2-}(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$  a pour constante d'équilibre  $K_1 = 10^{-7,2}$ ,  
 $\text{NH}_4^+(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{NH}_3(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$  a pour constante d'équilibre  $K_2 = 10^{-9,2}$ .
  - (a)  $K_3 = K_1 - K_2$ ;
  - (b)  $K_3 = K_1 K_2$ ;
  - (c)  $K_3 = K_1 / K_2$ .
2. On mélange les volumes  $v_1$  de solution d'ions hydrogénosulfate  $\text{HSO}_3^-$ ,  $v_2$  de solution d'ions sulfite  $\text{SO}_3^{2-}$ ,  $v_3$  de solution d'ammoniac  $\text{NH}_3$  et  $v_4$  de solution d'ions ammonium  $\text{NH}_4^+$ . Toutes ces solutions sont à la concentration  $c = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  en espèces citées.

volume (en mL)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
mélange A	10,0	10,0	10,0	10,0
mélange B	2,0	10,0	1,0	20,0
mélange C	1,0	20,0	1,0	10,0

Associer, à chaque mélange, un type d'évolution.

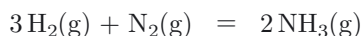
- (a) A : pas d'évolution ; B : évolution dans le sens direct ; C : évolution dans le sens indirect.
  - (b) A : pas d'évolution ; B : évolution dans le sens indirect ; C : évolution dans le sens direct.
  - (c) A : évolution dans le sens direct ; B : pas d'évolution ; C : évolution dans le sens indirect.
3. Déterminer l'avancement à l'équilibre pour le mélange qui évolue dans le sens direct.
    - (a)  $\xi_e = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ .
    - (b)  $\xi_e = 8,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ .
    - (c)  $\xi_e = -8,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ .
  4. Son taux d'avancement à l'équilibre vaut :
    - (a)  $\tau_e = 12\%$ ;
    - (b)  $\tau_e = 18\%$ ;
    - (c)  $\tau_e = 82\%$ .
  5. Déterminer l'avancement à l'équilibre pour le mélange qui évolue dans le sens indirect.
    - (a)  $\xi_e = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ .
    - (b)  $\xi_e = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$ .
    - (c)  $\xi_e = -3,7 \cdot 10^{-5} \text{ mol}$ .
  6. Une fois le mélange B effectué, on ajoute 10,0 mL d'eau. Que se passe-t-il ?
    - (a) Le système n'évolue pas.
    - (b) Le système évolue dans le sens direct.
    - (c) Le système évolue dans le sens indirect.
  7. Identifier la(les) affirmation(s) juste(s).
    - (a) Étant donnée sa constante d'équilibre, la réaction étudiée se déroule rapidement.
    - (b) Étant donnée sa constante d'équilibre, la réaction étudiée se déroule lentement.
    - (c) Nous ne pouvons pas conclure sur la cinétique de la réaction.

## Exercices

### Exercice 26.1 Synthèse de l'ammoniac

➔ Méthode (26.1)

L'ammoniac  $\text{NH}_3$  est fabriqué industriellement en très grande quantité. Sa principale application est la fabrication d'engrais azotés. Le procédé de Haber-Bosch consiste à faire réagir du diazote  $\text{N}_2$  avec du dihydrogène  $\text{H}_2$  (obtenu par vaporéformage du méthane issu du gaz naturel). La réaction est :



Elle est réalisée en système fermé, à une pression constante  $P = 100$  bar et une température constante de  $400^\circ\text{C}$ . La constante d'équilibre à cette température est  $K = 2,9 \cdot 10^{-4}$ . Initialement, on introduit dans le réacteur  $\text{N}_2$  et  $\text{H}_2$  en proportions stœchiométriques.

1. Soit  $n_0$  le nombre de moles initial de  $\text{N}_2$ . Écrire un tableau d'avancement.
2. Obtenir l'équation vérifiée par le taux de  $\text{N}_2$  restant, défini comme le rapport de la quantité de  $\text{N}_2$  à l'équilibre par la quantité initiale. Résoudre cette équation.
3. En déduire le taux de conversion de  $\text{N}_2$ . Quel serait ce taux pour une pression  $P = 1,0$  bar ?

### Exercice 26.2 Oxydation de l'ammoniac

➔ Méthode (26.1)

L'acide nitrique  $\text{HNO}_3$  est produit en grande quantité, principalement pour être utilisé dans la fabrication des engrais azotés. La première étape de la fabrication industrielle de l'acide nitrique est l'oxydation de l'ammoniac :



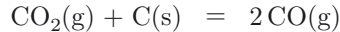
La réaction est réalisée à la température  $800^\circ\text{C}$  et à une pression constante  $P = 1,0$  bar. À cette température, le logarithme népérien de la constante d'équilibre de cette réaction est  $\ln K = 123$ . Dans un réacteur opérant en système fermé à pression constante, on mélange un volume d'air avec un volume d'ammoniac. L'air contient 20% de  $\text{O}_2$  et 80% de  $\text{N}_2$  (un gaz chimiquement inerte).

1. Si  $\text{NH}_3$  et  $\text{O}_2$  étaient apportés en proportions stœchiométriques, quelles seraient les proportions molaires des gaz  $\text{NH}_3$ ,  $\text{O}_2$  et  $\text{N}_2$  dans le mélange initial (à donner en % à 1% près) ?
2. Pour un mélange gazeux contenant initialement 100 moles, calculer les quantités de matière initiales si la fraction molaire de  $\text{NH}_3$  dans le mélange est 10%. Faire un tableau d'avancement et en déduire le réactif limitant.
3. Écrire l'équation vérifiée par l'avancement  $\xi_e$  à l'équilibre. Que vaut  $\xi_e$  ?
4. En déduire les pressions partielles des gaz dans le mélange à l'équilibre, avec une précision de 10 mbar.

**Exercice 26.3 Monoxyde de carbone**

→ Méthode (26.1)

Le monoxyde de carbone (un gaz très toxique) est utilisé en métallurgie pour réduire les oxydes métalliques. Il est produit directement dans un haut-fourneau, par la réaction entre le dioxyde de carbone (produit de la combustion du charbon) et le carbone :



À température ambiante  $T_1 = 298\text{ K}$ , cette réaction a une constante d'équilibre  $K_1 = 10^{-21}$ . Dans la zone à mi-hauteur d'un haut-fourneau, la température est  $T_2 = 1000\text{ K}$ , température à laquelle la constante d'équilibre est  $K_2 = 1,5$ .

Pour étudier cette réaction, on envisage un réacteur fermé à volume  $V$  et à température  $T$  constants, dans lequel on introduit initialement  $n$  moles de  $\text{CO}_2$  avec un excès de carbone. La pression initiale est  $P_i = 1,0\text{ bar}$ . On note  $\tau_e$  le taux de conversion de  $\text{CO}_2$  à l'équilibre, égal au nombre de moles de  $\text{CO}_2$  ayant réagi divisé par le nombre de moles initial.

1. Établir l'équation vérifiée par  $\tau_e$ , en fonction des constantes  $K$ ,  $P_i$  et  $P^\circ = 1,0\text{ bar}$ .
2. Calculer  $\tau_e$  aux températures  $T_1$  et  $T_2$ .

**Exercice 26.4 Dissociation d'un acide faible dans l'eau**

→ Méthode (26.2)

Lorsqu'on dissout un acide faible dans l'eau, il réagit avec l'eau en lui cédant un proton. Par exemple pour l'acide éthanoïque, la réaction est :



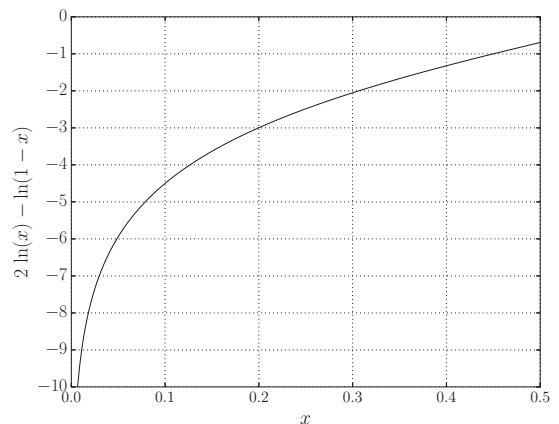
La constante d'équilibre de cette réaction est  $K = 1,7 \cdot 10^{-5}$  à  $25^\circ\text{C}$ . La masse molaire de l'acide éthanoïque est  $M = 60,0\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . À température ambiante, l'acide éthanoïque pur est liquide.

On prépare une solution aqueuse en dissolvant une masse  $m = 50\text{ mg}$  d'acide éthanoïque pur dans un volume total de  $1,00\text{ L}$ .

1. En faisant l'hypothèse que l'eau ne contient pas initialement d'ions  $\text{H}_3\text{O}^+$ , écrire un tableau d'avancement pour  $1\text{ L}$  de solution, puis établir l'équation vérifiée par l'avancement  $\xi_e$  à l'équilibre.
2. Il est intéressant de chercher plutôt le taux de dissociation de l'acide, égal au taux d'avancement de la réaction (noté  $\tau_e$ ), car c'est une grandeur intensive. Établir l'équation vérifiée par  $\tau_e$ .
3. La figure ci-contre donne la représentation graphique de la fonction :

$$f(x) = 2\ln(x) - \ln(1-x)$$

Utiliser ce graphique pour déterminer le taux d'avancement à l'équilibre.

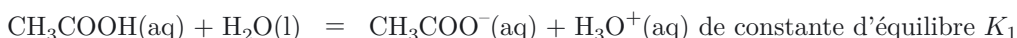


4. Que doit-on penser de l'affirmation suivante : si la constante d'équilibre est très faible alors l'avancement est négligeable ?
5. On prélève 20,0 mL de la solution, que l'on dilue dans un volume total de 100 mL. Que vaut le quotient réactionnel à l'équilibre juste avant la dilution, et juste après la dilution (avant toute évolution chimique) ? En déduire le sens de la réaction.
6. Confirmer le résultat précédent en déterminant le taux d'avancement  $\tau'_e$  après la dilution.

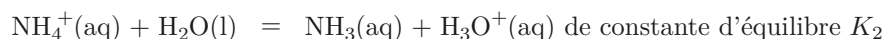
### Exercice 26.5 Réaction acide-base en solution aqueuse

#### ➔ Méthode (26.3)

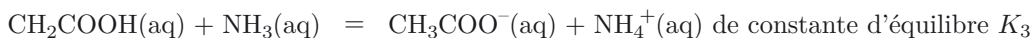
L'acide éthanóïque réagit avec l'eau pour donner l'ion éthanóate :



Le chlorure d'ammonium ( $\text{NH}_4\text{Cl}$ ) est un solide ionique soluble dans l'eau et donnant en solution aqueuse les ions chlorure  $\text{Cl}^-$  et ammonium  $\text{NH}_4^+$ . L'ion ammonium est un acide qui réagit avec l'eau pour donner l'ammoniac :



Les constantes d'équilibre des deux réactions précédentes sont  $K_1 = 1,7 \cdot 10^{-5}$  et  $K_2 = 5,7 \cdot 10^{-10}$ . On envisage la réaction entre l'acide éthanóïque et l'ammoniac :

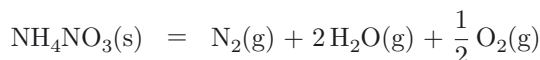


L'ammoniac  $\text{NH}_3$  est un gaz à température ambiante et pression atmosphérique. Il est très soluble dans l'eau (environ  $25 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ). Une solution aqueuse d'ammoniac (appelée ammoniaque) perd progressivement ses molécules de  $\text{NH}_3$  au contact de l'air. Il faut donc la doser pour contrôler sa concentration. L'ammoniac étant une base, l'acide éthanóïque est un candidat pour ce dosage, mais il faut pour cela que le taux d'avancement de la réaction soit supérieur à 99%, lorsque le réactif titrant et le réactif titré sont apportés en proportions stœchiométriques.

1. Calculer la constante d'équilibre  $K_3$ . La réaction envisagée est-elle thermodynamiquement favorisée ?
2. On considère un mélange stœchiométrique de  $\text{NH}_3$  et de  $\text{CH}_3\text{COOH}$ . Calculer le taux d'avancement à l'équilibre et conclure.

### Exercice 26.6 Nitrate d'ammonium

Le nitrate d'ammonium ( $\text{NH}_4\text{NO}_3$ ) est un composé utilisé principalement comme engrais, mais aussi comme explosif dans le domaine du génie civil. Il doit être manipulé avec beaucoup de précautions, car il peut se décomposer de manière explosive selon la réaction :



L'explosion d'un stock de nitrate d'ammonium peut être catastrophique, comme celle de Brest en 1947 ou de Toulouse en 2011.

Pour cette réaction, un calcul de thermodynamique permet d'obtenir le logarithme népérien de la constante d'équilibre à 600 K :  $\ln(K) = 86$ . L'explosion peut être déclenchée par une source de chaleur qui élève la température localement au delà de 300 °C.

Données : masses molaires  $M(\text{O}) = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{N}) = 14,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{H}) = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , constante des gaz parfaits  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Écrire la condition d'équilibre, en supposant que les gaz sont parfaits.
2. On suppose que la réaction se fait à volume  $V$  constant et à température  $T$  constante. Exprimer l'avancement de la réaction à l'équilibre, en fonction de  $K$ ,  $T$  et  $V$ .
3. Calculer l'avancement final, pour une masse  $m = 50 \text{ kg}$  de nitrate d'ammonium explosant dans un volume  $V = 1000 \text{ m}^3$  et à une température  $T = 600 \text{ K}$ . Quelle est la quantité de gaz libérée ?



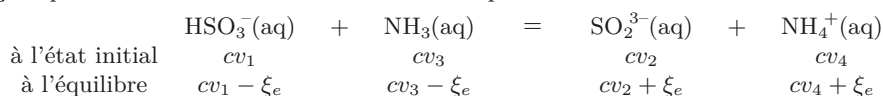
# Corrections

## Interro de cours

- D'après la loi de l'équilibre chimique :  $\frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{NH}_4^+]}{[\text{HSO}_3^-][\text{NH}_3]} = K_3$ . En faisant apparaître la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  dans l'expression précédente :  $\frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{NH}_4^+][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_3^-][\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_3^-]} \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]} = K_3$  nous remarquons que  $K_3 = K_1/K_2$ . Réponse (c).
- Le quotient réactionnel à l'instant initial vaut :  $Q_0 = \frac{[\text{SO}_3^{2-}]_0[\text{NH}_4^+]_0}{[\text{HSO}_3^-]_0[\text{NH}_3]_0} = \frac{v_{\text{total}} \frac{cv_2}{v_{\text{total}}} \frac{v_{\text{total}} \frac{cv_4}{v_{\text{total}}}}{v_{\text{total}} \frac{cv_1}{v_{\text{total}}} \frac{v_{\text{total}} \frac{cv_3}{v_{\text{total}}}}{v_{\text{total}} \frac{cv_3}{v_{\text{total}}}}} = \frac{v_2 v_4}{v_1 v_3}$ .  
Les calculs et conclusions sont regroupés dans le tableau ci-dessous. Réponse (c).

mélange	A	B	C
valeur de $Q_0$	$1,0 < K_3$	$1,0 \cdot 10^2 = K_3$	$2,0 \cdot 10^2 > K_3$
évolution	sens direct	aucune	sens indirect

- Commençons par établir un tableau d'avancement en quantité de matière :



À l'équilibre on a  $\frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{NH}_4^+]}{[\text{HSO}_3^-][\text{NH}_3]} = \frac{(cv_2 + \xi_e)(cv_4 + \xi_e)}{(cv_1 - \xi_e)(cv_3 - \xi_e)} = \frac{v_{\text{total}} \frac{v_{\text{total}}}{(cv_1 - \xi_e)} \frac{v_{\text{total}}}{(cv_3 - \xi_e)}}{v_{\text{total}} \frac{v_{\text{total}}}{(cv_2 + \xi_e)} \frac{v_{\text{total}}}{(cv_4 + \xi_e)}} = K_3$ .

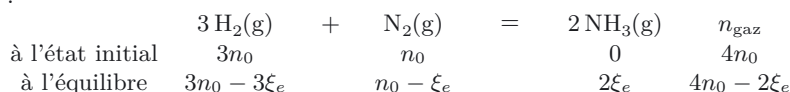
Cela se simplifie en  $K_3 = \frac{(cv + \xi_e)^2}{(cv - \xi_e)^2}$  d'où  $\xi_e = cv \frac{\sqrt{K_3} - 1}{\sqrt{K_3} + 1} = 8,2 \cdot 10^{-4}$  mol. Réponse (b).

Si vous avez résolu l'équation du second degré, il faut retenir la seule racine telle que  $0 < \xi_e < cv_1$ .

- Par définition,  $\tau_e = \frac{\xi_e}{\xi_{\text{max}}}$  où  $\xi_{\text{max}} = cv_1 = cv_3$  soit  $\tau_e = 82\%$ . Réponse (c).
- La loi de l'équilibre donne  $\frac{(cv_2 + \xi_e)(cv_4 + \xi_e)}{(cv_1 - \xi_e)(cv_3 - \xi_e)} = K_3$  et fournit une équation du second degré à résoudre à la calculatrice. On trouve  $\xi_e = 2,7 \cdot 10^{-4}$  mol ou  $\xi_e = -3,7 \cdot 10^{-5}$  mol. On conserve la racine négative (puisque l'évolution se fait dans le sens indirect). Réponse (c).
- Avant l'ajout d'eau, le mélange B est à l'équilibre puisque  $Q_0 = K_3$ . L'ajout de l'eau dilue la solution et modifie toutes les concentrations d'un facteur  $\frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_{\text{eau}}}$  ce qui ne modifie pas le quotient de la réaction. Ainsi, le système est toujours à l'équilibre et n'évolue pas. Réponse (a).
- La valeur de  $K_3$  renseigne sur la faisabilité thermodynamique de la réaction mais, en aucune manière, sur la cinétique de la réaction. Réponse (c).

## Exercice 26.1

- Dans les proportions stœchiométriques, le nombre de moles initial de  $\text{H}_2$  est  $3n_0$ . Voici le tableau d'avancement :



Le quotient de réaction est  $Q = \frac{a_{\text{NH}_3}^2}{a_{\text{H}_2}^3 a_{\text{N}_2}}$ . Lorsque la pression est constante, on écrit les activités de chaque composé gazeux sous la forme  $a_i = \frac{n_i}{n_{\text{gaz}}} \frac{P}{P^\circ}$ . On obtient ainsi la loi d'équilibre :

$$\frac{(2\xi_e)^2 (4n_0 - 2\xi_e)^2}{(3n_0 - 3\xi_e)^3 (n_0 - \xi_e)} \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2 = K$$

2. Par définition, le taux de  $\text{N}_2$  restant est  $\tau_e = \frac{n_0 - \xi_e}{n_0}$  d'où l'on déduit  $\xi_e = n_0(1 - \tau_e)$ . En reportant dans l'équation précédente, on obtient :  $\frac{16(1 - \tau_e)^2 (1 + \tau_e)^2}{27\tau_e^4} = K \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^2$ , soit encore :

$$\frac{1 - \tau_e^2}{\tau_e^2} = \frac{P}{P^\circ} \sqrt{\frac{27K}{16}} = 2,21 \text{ d'où l'on déduit le taux } \tau_e = 0,56.$$

3. Le taux de conversion de  $\text{H}_2$  est  $\tau_e' = 1 - \tau_e = 0,44$ . Pour une pression  $P = 1,0$  bar, on aurait  $\tau_e = 0,99$  et  $\tau_e' = 0,01$ . Il est donc intéressant d'augmenter la pression.

### Exercice 26.2

- Dans les proportions stœchiométriques, il y a 5 moles de  $\text{O}_2$  pour 4 moles de  $\text{NH}_3$ , avec  $5 \times 4 = 20$  moles de  $\text{N}_2$ . Les proportions molaires sont donc 17% de  $\text{O}_2$ , 14% de  $\text{NH}_3$  et 69% de  $\text{N}_2$ .
- Un mélange initial de 100 mol composé de 10% de  $\text{NH}_3$  contient  $n_0 = 10$  mol de  $\text{NH}_3$  et donc 90 mol d'air, c'est-à-dire  $n_1 = 18$  mol de  $\text{O}_2$  et  $n_2 = 72$  mol de  $\text{N}_2$ . Voici le tableau d'avancement :

	4 $\text{NH}_3(\text{g})$	+	5 $\text{O}_2(\text{g})$	=	4 $\text{NO}(\text{g})$	+	6 $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	$n_{\text{gaz}}$
à l'état initial	$n_0$		$n_1$		0		0	$n_0 + n_1 + n_2$
à l'équilibre	$n_0 - 4\xi_e$		$n_1 - 5\xi_e$		$4\xi_e$		$6\xi_e$	$n_0 + n_1 + n_2 + \xi_e$

Si  $\text{NH}_3$  est limitant :  $n_0 - 4\xi_{e1} = 0$  et  $\xi_{e1} = n_0/4 = 2,5$  mol.

Si  $\text{O}_2$  est limitant :  $n_1 - 5\xi_{e2} = 0$  et  $\xi_{e2} = n_1/5 = 3,6$  mol.

$\xi_{e1} < \xi_{e2}$  donc le réactif limitant est l'ammoniac.

3. Le quotient de réaction est  $Q = \frac{a_{\text{H}_2\text{O}}^6 a_{\text{NO}}^4}{a_{\text{NH}_3}^4 a_{\text{O}_2}^5}$ . La pression  $P$  est constante. On exprime donc l'activité de chaque composé gazeux de la manière suivante :  $a_i = \frac{n_i}{n_{\text{gaz}}} \frac{P}{P^\circ}$ . On obtient ainsi la loi d'équilibre :

$$\frac{(6\xi_e)^6 (4\xi_e)^4}{(n_0 - 4\xi_e)^4 (n_1 - 5\xi_e)^5 (n_0 + n_1 + n_2 + \xi_e)} \frac{P}{P^\circ} = K$$

La constante d'équilibre est extrêmement grande  $K = e^{123} \approx 10^{53}$ . Un des facteurs du dénominateur doit être pratiquement nul. Sachant que le réactif limitant est  $\text{NH}_3$ , il s'agit de  $n_0 - 4\xi_e = 0$ , et donc  $\xi_e = 2,5$  mol.

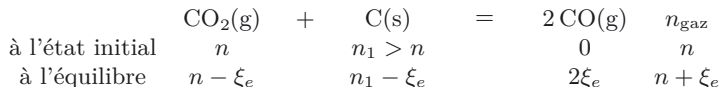
4. Pour calculer les pressions partielles à l'équilibre, on calcule tout d'abord les nombres de moles puis les fractions molaires (sans oublier  $\text{N}_2$  le gaz inerte) :

Composé	$n$ (mol)	$x$	$P_i$ (bar)
$\text{NH}_3$	0	0	0
$\text{O}_2$	5,5	0,054	0,05
$\text{NO}$	10	0,098	0,10
$\text{H}_2\text{O}$	15	0,146	0,15
$\text{N}_2$	72	0,702	0,70

Les arrondis de la dernière décimale doivent être tels que la somme des pressions partielles soit égale à 1 bar.

**Exercice 26.3**

1. On commence par écrire un tableau d'avancement :



Sachant que l'activité d'un solide est 1, la condition d'équilibre s'écrit  $\frac{a_{\text{CO}}^2}{a_{\text{CO}_2}} = K$ . À volume constant, on écrit les activités des gaz parfaits sous la forme :  $a_{\text{CO}} = 2\xi_e \frac{RT}{P^\circ V}$  et  $a_{\text{CO}_2} = (n - \xi_e) \frac{RT}{P^\circ V}$ . La loi des gaz parfaits s'écrit à l'état initial sous la forme  $P_i V = nRT$  et le taux de conversion  $\tau_e = \frac{\xi_e}{n}$ . On en

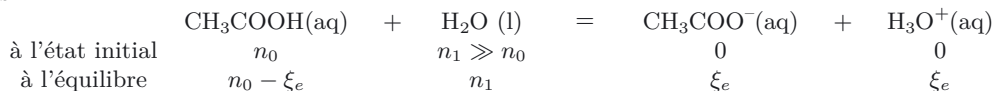
déduit la condition d'équilibre  $\frac{4\tau_e^2}{1 - \tau_e} \frac{P_i}{P^\circ} = K$ , soit  $\frac{\tau_e^2}{1 - \tau_e} = \frac{P^\circ K}{4P_i}$ .

2. Posons  $b = \frac{P^\circ K}{4P_i}$ . Il faut résoudre l'équation du second degré  $\tau_e^2 + b\tau_e - b = 0$ , dont le discriminant est  $\Delta = b^2 + 4b$ . On retient la solution positive :  $\tau_e = \frac{1}{2} \left( -b + \sqrt{b^2 + 4b} \right)$ .

Pour  $K = K_1 = 10^{-21}$  et  $P_i = P^\circ$  on a  $b = \frac{1}{4} 10^{-21}$  et donc  $\tau_e = 2 \cdot 10^{-11}$ . Pour  $K = K_2 = 1,5$  on a  $b = 0,375$  et donc  $\tau_e = 0,45$ . Une température haute favorise la réaction dans le sens direct ( $K$  plus élevée).

**Exercice 26.4**

1. Voici le tableau d'avancement, établi pour 1 L de solution en remarquant que le solvant est en très large excès :



La quantité initiale d'acide pour 1 L de solution est  $n_0 = m/M = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On suppose que la solution est assez diluée pour que les activités soient égales aux concentrations en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La loi de l'équilibre s'écrit alors :  $\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = K$ . En utilisant le tableau d'avancement, on obtient :

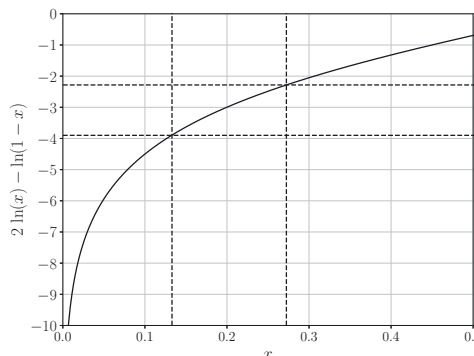
$$\frac{\xi_e^2}{n_0 - \xi_e} = K \text{ (avec } \xi_e \text{ l'avancement en mol pour 1 L de solution).}$$

2. On a  $\xi_e = n_0 \tau_e$  où  $\tau_e$  est le taux d'avancement.

L'équation est  $\frac{\tau_e^2 n_0}{1 - \tau_e} = K$ .

3. On a  $2 \ln(\tau_e) - \ln(1 - \tau_e) = \ln\left(\frac{K}{n_0}\right) = -3,9$ . Une résolution graphique (figure ci-contre) conduit à  $\tau_e = 0,13$ .

4. Cette affirmation, établie dans le cours pour des proportions stœchiométriques de deux réactifs en solution, n'est pas du tout valable ici : on a  $K \ll 1$  mais l'avancement n'est pas négligeable, puisqu'il vaut plus d'un dixième de la quantité initiale d'acide. Cela vient du fait que l'un des réactifs, le solvant, a une activité égale à 1.



5. Juste avant la dilution, d'après la loi de l'équilibre, le quotient réactionnel est  $Q_e = K = 1,7 \cdot 10^{-5}$ . L'effet instantané de la dilution est de diviser par 5 les concentrations des espèces en solution. Le

quotient  $Q = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$  est donc divisé par 5, ce qui fait que  $Q < K$ . La réaction chimique évolue donc dans le sens direct : la dissociation de l'acide augmente.

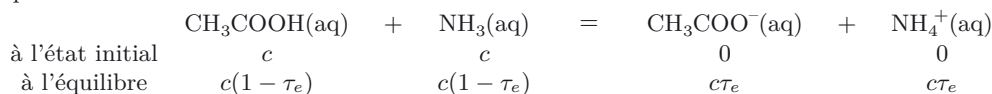
6. La dilution revient à diviser  $n_0$  par 5, soit  $n'_0 = n_0/5$ , et donc  $\ln(K/n'_0) = -2,3$ . La résolution graphique donne  $\tau'_e = 0,27$ . Le taux d'avancement est doublé, ce qui confirme le résultat précédent.

### Exercice 26.5

1. On écrit la condition d'équilibre pour les deux premières réactions, avec les concentrations (en mol·L<sup>-1</sup>) à l'équilibre :  $\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = K_1$  et  $\frac{[\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{NH}_4^+]} = K_2$ .

En divisant la première équation par la seconde on obtient :  $\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{NH}_4^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{NH}_3]} = \frac{K_1}{K_2}$ , ce qui montre que  $K_3 = \frac{K_1}{K_2} = 3,0 \cdot 10^4$ . La réaction est thermodynamiquement favorisée puisque  $K > 1$ .

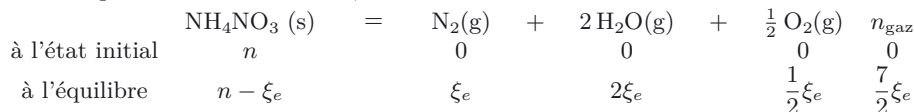
2. Voici un tableau d'avancement pour un mélange initial stœchiométrique, avec un taux d'avancement  $\tau_e$  et pour 1 L de solution :



La condition d'équilibre s'écrit :  $\frac{(c\tau_e)^2}{(c(1 - \tau_e))^2} = K_3$ , ce qui conduit à  $\tau_e = \frac{\sqrt{K_3}}{1 + \sqrt{K_3}} = 99,4\%$ . Ce taux est supérieur à 99% ; on peut utiliser l'acide éthanoïque pour doser l'ammoniaque.

### Exercice 26.6

1. La constante d'équilibre est  $K = e^{86} = 2,2 \cdot 10^{37}$ . Faisons un tableau d'avancement :



Dans l'hypothèse d'un mélange de gaz parfaits, la condition d'équilibre donne  $\frac{1}{(P^\circ)^{7/2}} P_{\text{N}_2} P_{\text{H}_2\text{O}}^2 P_{\text{O}_2}^{1/2} = K$ .

Pour une réaction se déroulant à volume constant, on écrit pour chaque gaz la pression partielle sous la forme  $P_i = n_i \frac{RT}{V}$ . La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$\xi_e (2\xi_e)^2 \left(\frac{1}{2}\xi_e\right)^{1/2} \left(\frac{RT}{VP^\circ}\right)^{7/2} = K, \text{ ce qui conduit à } \xi_e = \frac{VP^\circ}{RT} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} K\right)^{2/7}.$$

2. Pour  $V = 1000 \text{ m}^3$ ,  $T = 600 \text{ K}$  et  $P^\circ = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , on obtient  $\xi_e = 7,0 \cdot 10^{14} \text{ mol}$ .
3. La masse molaire du nitrate d'ammonium est  $M = 80,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Il y a donc  $n = m/M = 625 \text{ mol}$ . Cette valeur est très largement inférieure à  $\xi_e$ , ce qui signifie que l'équilibre est très lointain d'être atteint lorsque le nitrate d'ammonium est complètement consommé. La quantité de gaz libéré est  $n_{\text{gaz}} = \frac{7}{2}n = 2,2 \cdot 10^3 \text{ mol}$ .

# Évolution temporelle d'un système chimique

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi les pommes de terre nouvelles dorent-elles moins vite que les autres ? Pourquoi les pommes de terre prennent-elles une couleur dorée d'autant plus rapidement que la température de la cuisson est élevée ?

L'apparition de la couleur dorée est le résultat d'une réaction chimique entre les acides aminés et les sucres naturellement présents dans les aliments. La rapidité du brunissement dépend donc de la vitesse de la réaction. Contrairement à beaucoup d'autres, cette réaction de dégradation des aliments est recherchée puisqu'elle provoque un aspect et un goût appréciés.

Avant de répondre à ces interrogations, nous allons mettre en place les outils nécessaires à l'étude d'une cinétique de réaction chimique, dans le cas d'un milieu réactionnel ne comportant qu'une seule phase liquide ou gazeuse.

## ■ 1 Vitesse des réactions chimiques

Les systèmes étudiés sont des systèmes fermés composés de  $N$  espèces  $A_i$  susceptibles de réagir entre elles au cours d'une réaction chimique à la température  $T$ . De façon formelle nous pouvons noter

cette réaction  $\sum_{i=1}^N \nu_i A_i = 0$  où  $\nu_i$  est le **coefficient stœchiométrique algébrique** de l'espèce  $A_i$  ( $\nu_i > 0$  pour un produit,  $\nu_i < 0$  pour un réactif).

□ **Comment définir vitesse de formation d'un produit ou de disparition d'un réactif ?**

Au cours d'une réaction chimique, chaque constituant actif du système voit sa quantité de matière varier. En notant  $\xi$  (en mol) l'**avancement** de la réaction à l'instant  $t$ , la **quantité de matière** du constituant  $A_i$  s'écrit  $n_i(t) = n_{i0} + \nu_i \xi$  avec  $n_{i0}$  sa quantité de matière initiale. Cependant cette quantité de matière dépend de la taille du milieu réactionnel. Il est donc préférable de se ramener à un litre de milieu réactionnel pour faciliter les comparaisons. Soit  $[A_i] = n_i(t)/V$  la concentration molaire d'un constituant  $A_i$  à l'instant  $t$ ; elle s'écrit  $[A_i] = \frac{n_{i0}}{V} + \nu_i \frac{\xi}{V}$  soit  $[A_i] = [A_i]_0 + \nu_i x$  où  $x = \frac{\xi}{V}$  est l'**avancement volumique** de la réaction à l'instant  $t$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ).

Au cours de la réaction chimique, la concentration d'un produit augmente alors que celle d'un réactif diminue. On définit alors deux vitesses volumiques, l'une de formation, l'autre de disparition, toutes les deux positives.

**Définition : Vitesses volumiques de formation et de disparition**

La vitesse de formation d'un produit  $A_i$  est définie par  $v_{\text{form},i} = \frac{d[A_i]}{dt}$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

La vitesse de disparition d'un réactif  $A_i$  est définie par  $v_{\text{disp},i} = -\frac{d[A_i]}{dt}$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ).



Il s'agit de grandeurs intensives, indépendantes de la taille du milieu réactionnel et spécifiques à chaque constituant actif. Par ailleurs, ces vitesses sont indépendantes de l'écriture de l'équation bilan de la réaction.

□ **Comment quantifier la vitesse d'une réaction chimique ?**

L'avancement volumique  $x$  de la réaction augmente au cours du temps tant que la réaction a lieu.

On définit alors une vitesse volumique de réaction notée  $v$ , elle-aussi positive, par  $v = \frac{dx}{dt}$ . Sachant

que  $[A_i] = [A_i]_0 + \nu_i x$ , on en déduit  $x = \frac{[A_i] - [A_i]_0}{\nu_i}$  et  $v = \frac{1}{\nu_i} \frac{d[A_i]}{dt}$ .

**Définition : Vitesse volumique de réaction**

La vitesse volumique de réaction est définie par  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\nu_i} \frac{d[A_i]}{dt}$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ )

où  $x = \xi/V$  représente l'avancement volumique de la réaction.



La vitesse volumique de réaction dépend des coefficients stœchiométriques et donc de l'écriture de l'équation bilan de la réaction.

Les différentes vitesses introduites sont liées entre elles :  $v = \frac{1}{\nu_i} v_{\text{form},i} = -\frac{1}{\nu_i} v_{\text{disp},i}$ .

## ■ 2 Premier facteur cinétique : les concentrations des espèces

Pour qu'il y ait réaction chimique, les molécules des réactifs doivent se rencontrer. Or plus les molécules sont nombreuses, plus la probabilité de rencontre augmente. On comprend ainsi que la concentration des réactifs soit un facteur cinétique. La relation entre la vitesse d'une réaction et les concentrations des espèces intervenant dans cette réaction est appelé **loi de vitesse**.

**Définition : Ordre d'une réaction**

La réaction  $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C$  admet un ordre si la loi de vitesse se met sous la forme :

$$v = k[A]^p[B]^q$$

où  $k$  est le **coefficient de vitesse** et  $p$  (respectivement  $q$ ) est l'**ordre partiel** par rapport à A (respectivement B).

La somme des ordres partiels  $p + q = r$  est appelée **ordre global** de la réaction.

Le **coefficient de vitesse** est aussi appelé **constante de vitesse** bien qu'elle dépende de la température.



Certaines réactions n'admettent pas d'ordre, d'autres admettent un ordre initial mais pas d'ordre courant (à un instant quelconque). Parfois, la loi de vitesse fait intervenir la concentration en produit ou en catalyseur. Les ordres sont la plupart du temps des entiers naturels (comme 0, 1 ou 2) mais ils peuvent être fractionnaires ou négatifs.

La connaissance de l'unité de  $k$  permet de déterminer l'ordre global  $r = p + q$  de la réaction.

En effet :  $k = \frac{v}{[A]^p[B]^q}$  donc :  $[k] = \frac{[v]}{[\text{concentration}]^r}$  en  $\text{mol}^{(1-r)} \cdot \text{L}^{-(1-r)} \cdot \text{s}^{-1}$ .

avec  $N$  représente une quantité de matière,  $L$  une longueur et  $T$  un temps.

En résumé, on obtient :

Ordre global de la réaction	0	1	2
Unité usuelle de $k$	$\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$

□ **Peut-on prévoir l'ordre d'une réaction à l'aide de son équation bilan ?**

Non cela n'est pas possible. En réalité, la loi de vitesse d'une réaction dépend du processus microscopique par lequel la réaction a lieu. Il faudrait donc étudier le **mécanisme réactionnel**, qui est l'ensemble des étapes élémentaires microscopiques permettant de passer des réactifs aux produits.

Si le mécanisme de la réaction est inconnu, on doit faire une étude expérimentale pour déterminer la loi de vitesse. On pourra ensuite proposer un mécanisme qui soit en accord avec cette loi.

Dans la suite de ce cours, **nous allons exploiter les résultats expérimentaux** que nous avons obtenus lors de l'étude de la réaction totale de saponification de l'éthanoate d'éthyle :



La vitesse de réaction est définie par  $v = -\frac{d[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]}{dt} = -\frac{d[\text{OH}^-]}{dt}$ . Si nous faisons l'hypothèse qu'il existe un ordre partiel pour chacun des deux réactifs, la vitesse de la réaction s'écrit :

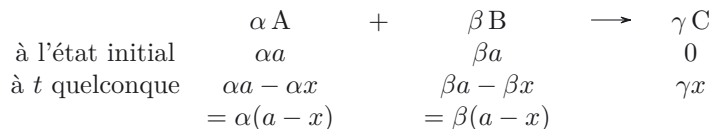
$$v = k[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]^p[\text{OH}^-]^q$$

□ **Comment déterminer l'ordre global d'une réaction ?**

Il faut choisir des conditions expérimentales permettant d'exprimer simplement une concentration en fonction de l'autre. Cela peut être réalisé en utilisant **un mélange stœchiométrique**, c'est-à-dire un mélange réactionnel contenant les réactifs dans les proportions données par la stœchiométrie

de la réaction.

Pour la réaction  $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C$ , les conditions stœchiométriques imposent  $\frac{[B]_0}{\beta} = \frac{[A]_0}{\alpha} = a$  :



### Méthode 27.1 : Utiliser un mélange stœchiométrique

On considère la réaction  $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C$  admettant la loi de vitesse  $v = k[A]^p[B]^q$ .

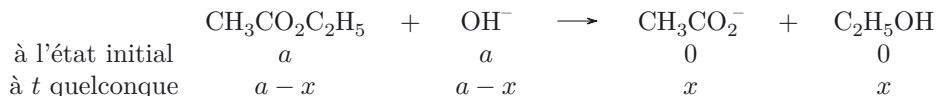
- Établir la relation entre  $[A]$  et  $[B]$  dans le cas d'un mélange stœchiométrique :

$$\frac{[B]}{\beta} = \frac{[A]}{\alpha}$$

- Simplifier la loi de vitesse en faisant apparaître l'ordre global de la réaction  $r = p + q$  :

$$v = k[A]^p \left( \frac{\beta}{\alpha} [A] \right)^q = k_{app} [A]^r \quad \text{où} \quad k_{app} = k \frac{\beta^q}{\alpha^q}$$

Reprenons notre réaction et établissons un tableau d'avancement dans le cas d'un mélange stœchiométrique en notant  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]_0 = [\text{OH}^-]_0 = a$  et  $x$  l'avancement volumique.



La loi de vitesse se simplifie alors en  $v = k[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{C}_2\text{H}_5]^p[\text{OH}^-]^q = k[\text{OH}^-]^{p+q}$ .

En suivant l'évolution temporelle de  $[\text{OH}^-]$ , l'étude cinétique permettra alors de déterminer l'ordre global  $r = p + q$  de la réaction de saponification.

#### □ Comment suivre la concentration d'une espèce lors d'une réaction ?

**Première méthode :** à intervalles de temps réguliers, un échantillon du milieu réactionnel est prélevé, dans lequel on stoppe la réaction (en faisant chuter sa vitesse) pour réaliser le dosage d'une espèce impliquée. La chute de la vitesse est réalisée en jouant sur les facteurs cinétiques (en diluant l'échantillon ou en réduisant subitement la température).

Cette méthode, longue et destructive, nécessite une grande quantité de mélange réactionnel.

**Seconde méthode :** une grandeur physique directement liée à la concentration que l'on cherche à suivre est mesurée *in situ*. La nature de cette grandeur dépend du type de l'espèce suivie.

espèce suivie	ionique	colorée	acido-basique
grandeur mesurée	conductivité	absorbance	pH
méthode physique	conductimétrie	spectrophotométrie	pH-métrie

Cette méthode est à privilégier lorsqu'elle est possible.

Dans le cas de notre expérience, la réaction de saponification met en jeu des ions. Nous avons donc réalisé un **suivi cinétique par conductimétrie**.



□ **Qu'est-ce qu'un suivi par conductimétrie ?**

La conductivité d'une solution est son aptitude à conduire un courant. Pour la mesurer on utilise un **conductimètre**, un appareil qui impose une tension alternative aux bornes des deux électrodes de la **sonde conductimétrique** qui plonge dans la solution. Cette tension génère un champ électrique qui provoque un déplacement des ions en solution sous l'effet de la force de Lorentz (voir le chapitre 13) donc un courant. Les mesures de l'intensité efficace  $I$  de celui-ci et de la tension efficace  $U$  imposée permettent d'accéder à la **conductance de la solution** définie par  $G = I/U$  puis à la **conductivité**  $\sigma$  proportionnelle à  $G$ . En effet,  $\sigma = KG$  où  $K = \ell/s$  est la **constante de cellule** (en  $\text{m}^{-1}$ ) de la sonde conductimétrique qui dépend de la surface  $s$  de ses électrodes et de la distance  $\ell$  les séparant.

**Définition : Conductimètre**

Le conductimètre associé à une sonde conductimétrique est un appareil affichant la conductivité  $\sigma$  (en  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) d'une solution électrolytique (contenant des ions).



L'étalonnage du conductimètre consiste à déterminer la constante de cellule à l'aide d'une solution étalon de concentration et de conductivité connues.

Chaque type d'ions présents dans la solution électrolytique contribue à la conductivité proportionnellement à sa concentration. Mais ces contributions diffèrent d'un type à un autre en fonction de la taille et de la charge des ions. Cela se traduit par des coefficients de proportionnalité différents appelés **conductivités molaires ioniques**. Dans les conditions usuelles d'expérience, les solutions sont suffisamment diluées pour qu'on puisse assimiler les conductivités molaires ioniques  $\lambda_i$  aux **conductivités molaires ioniques limites**  $\lambda_i^\circ$  (valeurs extrapolées pour une dilution infinie) :  $\lambda_i \simeq \lambda_i^\circ$ .

**Méthode 27.2 : Exprimer la conductivité d'une solution électrolytique**

La conductivité  $\sigma$  (en  $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ) d'une solution électrolytique s'exprime sous la forme :

$$\sigma = \sum_i |z_i| \lambda_i^\circ [\text{ion}_i]$$

où  $z_i$  est la charge de l'ion de type  $i$ ,  $[\text{ion}_i]$  sa concentration (en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ) et  $\lambda_i^\circ$  sa conductivité molaire ionique limite (en  $\text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$ ).



Pour l'expression de la conductivité, les concentrations doivent être en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$  et non pas en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

D'après le tableau d'avancement précédent, la concentration en ions éthanoate  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-$  (noté  $\text{Et}^-$ ) s'identifie à l'avancement volumique  $x$  de sorte que la méthode précédente fournit :

- à l'état initial :  $\sigma_0 = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_0 + \lambda_{\text{OH}^-} [\text{OH}^-]_0 = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{OH}^-})a$ ,
- à un instant  $t$  :  $\sigma = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{OH}^-} [\text{OH}^-] + \lambda_{\text{Et}^-} [\text{Et}^-] = (\lambda_{\text{Na}^+})a + (\lambda_{\text{OH}^-})(a-x) + (\lambda_{\text{Et}^-})x$ ,
- à l'état final :  $\sigma_\infty = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+]_\infty + \lambda_{\text{Et}^-} [\text{Et}^-]_\infty = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{Et}^-})a$ .



Il ne faut surtout pas oublier les ions spectateurs  $\text{Na}^+$  apportés en même quantité que les ions hydroxyde  $\text{OH}^-$ , car ils participent à la conductivité de la solution.

Des équations précédentes nous déduisons :

$$\sigma = (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{OH}^-})a + (\lambda_{\text{Et}^-} - \lambda_{\text{OH}^-})x \quad ; \quad (\lambda_{\text{Na}^+} + \lambda_{\text{OH}^-})a = \sigma_0 \quad ; \quad (\lambda_{\text{Et}^-} - \lambda_{\text{OH}^-}) = \frac{\sigma_\infty - \sigma_0}{a}.$$

$$\text{D'où : } x = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0 - \sigma_\infty}, \text{ puis : } [\text{OH}^-] = a - x = a \frac{\sigma - \sigma_\infty}{\sigma_0 - \sigma_\infty}.$$

Le suivi temporel de la conductivité au cours de la réaction permet donc de suivre l'évolution temporelle de la concentration en ions hydroxyde  $\text{OH}^-$ . Mettons en œuvre le suivi conductimétrique pour la réaction étudiée.

Pour cela, nous préparons une solution contenant  $a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'éthanoate d'éthyle et une solution contenant  $a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'hydroxyde de sodium  $\text{NaOH}$ . À l'instant  $t = 0$ , nous mélangeons 20 mL de chaque solution dans un bécher plongé dans un bain thermostaté puis nous mesurons la conductivité toutes les 10 secondes. La température est contrôlée pendant la durée de la réaction et vaut  $39,0^\circ\text{C}$ . L'évolution temporelle de la conductivité est donnée figure 27.1.

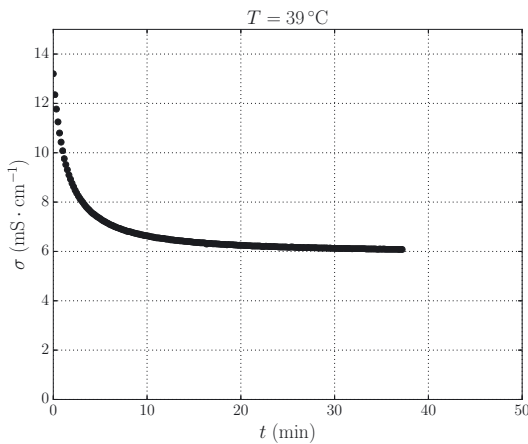


Figure 27.1. Évolution temporelle de la conductivité.

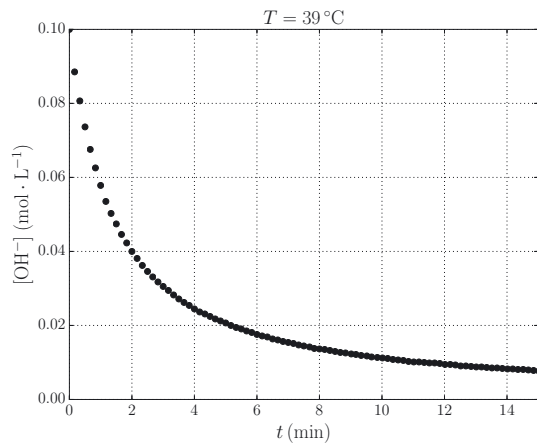


Figure 27.2. Évolution temporelle de  $[\text{OH}^-]$ .



$\sigma_0$  ne peut être mesurée car la première mesure de conductivité ne peut se faire qu'après avoir mélangé les deux solutions. La conductivité  $\sigma_0$  est obtenue par extrapolation. La conductivité  $\sigma_\infty$  est déterminée pour un temps très long.

#### □ Comment déterminer l'ordre de la réaction ?

L'idée est de comparer l'évolution temporelle expérimentale de la concentration d'un réactif à l'évolution temporelle théorique de ce même réactif correspondant à un ordre précis.

Supposons la réaction d'ordre global nul :  $r = p + q = 0$ .

$$v = k[\text{OH}^-]^0 = -\frac{d[\text{OH}^-]}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d[\text{OH}^-]}{dt} = -k$$

Soit, après intégration :  $[\text{OH}^-] = -kt + [\text{OH}^-]_0$ .

La figure 27.2 montre les points expérimentaux dans le plan  $(t, [\text{OH}^-])$ . Les points ne sont pas alignés ; il n'existe pas de relation affine entre  $[\text{OH}^-]$  et  $t$ , ce qui invalide l'hypothèse d'un ordre global nul.

**Supposons la réaction d'ordre global 1 :  $r = p + q = 1$ .**

$$v = k[\text{OH}^-]^1 = -\frac{d[\text{OH}^-]}{dt} \implies \frac{d[\text{OH}^-]}{dt} + k[\text{OH}^-] = 0$$

Soit, après intégration :  $[\text{OH}^-] = [\text{OH}^-]_0 \exp(-kt) \implies \ln[\text{OH}^-] = \ln[\text{OH}^-]_0 + kt$ .

La figure 27.3 montre les points expérimentaux dans le plan  $(t, \ln[\text{OH}^-])$ . Les points ne sont pas alignés ; il n'existe pas de relation affine entre  $\ln[\text{OH}^-]$  et  $t$ , ce qui invalide l'hypothèse d'un ordre global 1.

**Supposons la réaction d'ordre global 2 :  $r = p + q = 2$ .**

$$v = k[\text{OH}^-]^2 = -\frac{d[\text{OH}^-]}{dt} \implies \frac{d[\text{OH}^-]}{dt} + k[\text{OH}^-]^2 = 0$$

Quand on obtient une équation différentielle non linéaire, comme c'est le cas ici, on peut toujours mettre en œuvre une résolution numérique. Mais parfois, la méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation « à la main ». Cela consiste à répartir ce qui dépend du temps  $t$  d'un côté et ce qui dépend de  $[\text{OH}^-]$  de l'autre côté puis à intégrer :

$$\int_{[\text{OH}^-]_0}^{[\text{OH}^-]} -\frac{d[\text{OH}^-]}{[\text{OH}^-]^2} = \int_0^t k dt \implies \frac{1}{[\text{OH}^-]} - \frac{1}{[\text{OH}^-]_0} = kt$$

La figure 27.4 montre les points expérimentaux dans le plan  $(t, 1/[\text{OH}^-])$ . Les points sont alignés ; il existe donc une relation affine entre  $1/[\text{OH}^-]$  et  $t$ , ce qui **valide l'hypothèse d'un ordre global 2**. La pente fournit la valeur de la constante de vitesse :  $k = 8,0 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$  pour une température de  $39,0^\circ\text{C}$ .

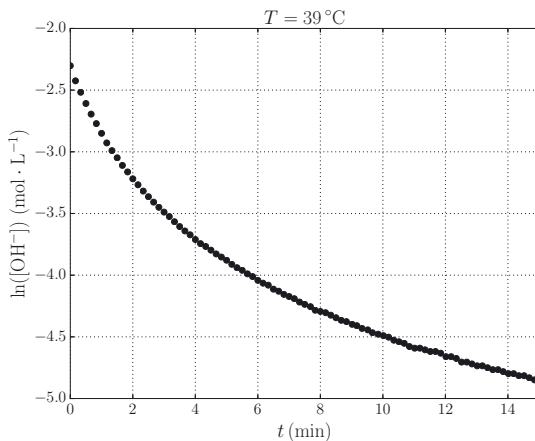


Figure 27.3. Évolution temporelle de  $\ln[\text{OH}^-]$ .

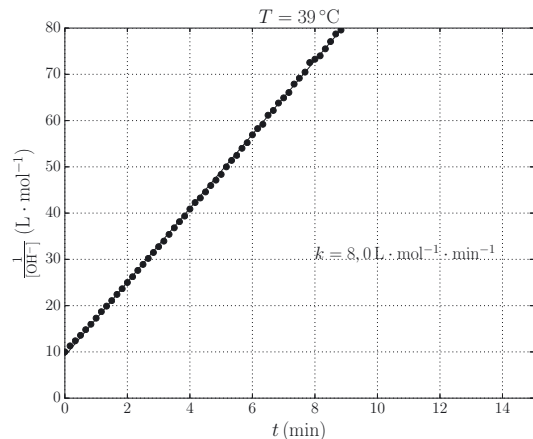


Figure 27.4. Évolution temporelle de  $1/[\text{OH}^-]$ .

La méthode mise en œuvre est appelée **méthode intégrale**.

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut disposer de valeurs expérimentales de la concentration  $[A]$  d'un réactif au cours du temps et que la vitesse de la réaction satisfasse à une relation de la forme  $v = k[A]^p$ , où  $p$  est l'ordre à déterminer.

### Méthode 27.3 : Déterminer l'ordre d'une réaction par la méthode intégrale

- Écrire l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\nu_A} \frac{d[A]}{dt} = k[A]^p \text{ où } \nu_A \text{ est le coefficient stoechiométrique algébrique de A.}$$

- Intégrer cette équation différentielle en faisant une hypothèse sur la valeur de  $p$  (0, 1, 2...).
- Déterminer l'expression de l'ordonnée  $y$  à utiliser pour que la représentation graphique  $y = f(t)$  de la solution de l'équation différentielle soit une droite.
- Reportez les points expérimentaux dans le plan  $(t, y)$ .
- Conclure sur la validité de l'hypothèse.
  - Les points sont alignés : l'hypothèse est validée. La régression linéaire de  $y$  en fonction de  $t$  permet d'obtenir la valeur de la constante de vitesse (pente).
  - Les points ne sont pas alignés : l'hypothèse est invalidée et il faut recommencer avec une autre hypothèse.

➔ Exercices (27.1) (27.2) (27.3) (27.5) (27.6)

La démarche précédente est valable dans le cas d'une réaction totale. Lorsque la constante d'équilibre n'est pas très grande, il faut considérer aussi la réaction dans le sens indirect :  $A \rightleftharpoons B + C$ .

Dans ce cas, la vitesse de disparition de A vaut :  $-\frac{d[A]}{dt} = v_{\text{direct}} - v_{\text{indirect}}$  puisque A est consommé par la réaction dans le sens direct et formé par la réaction dans le sens indirect. La résolution d'une telle équation différentielle est traitée dans l'exercice 27.5.

□ **Peut-on déterminer directement l'ordre sans tester différentes hypothèses ?**

Cette autre méthode existe mais nécessite la détermination expérimentale de la vitesse  $v = \frac{1}{\nu_A} \frac{d[A]}{dt}$  pour différentes valeurs de concentrations  $[A]$ . Cela se fait par un calcul numérique consistant à estimer la dérivée  $\frac{d[A]}{dt}$  par la valeur de la pente entre deux points expérimentaux successifs.

### Méthode 27.4 : Déterminer l'ordre d'une réaction par la méthode différentielle

Lorsque la vitesse d'une réaction est de la forme  $v = k[A]^p$ , où  $p$  est l'ordre à déterminer, on peut écrire :  $\ln v = \ln(k[A]^p) = \ln k + p \ln[A]$ . Si on dispose de valeurs expérimentales de  $v$  en fonction de  $[A]$ , on peut en déduire les valeurs de  $p$  et  $k$ .

- Reporter les points expérimentaux dans le plan  $(\ln[A], \ln v)$ .
- Réaliser une régression linéaire de la courbe obtenue.
- À l'aide des coefficients de la régression linéaire, identifier la pente de la droite à l'ordre  $p$  et l'ordonnée à l'origine à  $\ln k$ .

➔ Exercice (27.4)

Appliquons cette méthode à la réaction de saponification étudiée, pour laquelle la loi de vitesse dans les conditions de l'expérience s'écrit :  $v = k[\text{OH}^-]^r$  soit  $\ln v = r \ln[\text{OH}^-] + \ln k$ .

Calculons la vitesse de la réaction de saponification à différents instants pour lesquels a été mesurée la concentration en ions hydroxyde. Plaçons les points expérimentaux dans le plan  $(\ln[\text{OH}^-], \ln v)$  (figure 27.5). Les points sont alignés suivant une droite de pente  $r = 2,0$  et d'ordonnée à l'origine  $\ln k = -2,0$ .

Ainsi, la **méthode différentielle** permet de déterminer l'ordre global  $r = 2$  et la constante de vitesse  $k = e^{-2,0} \times 60 = 8,1 \text{ L} \cdot \text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$ . Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par la méthode intégrale.

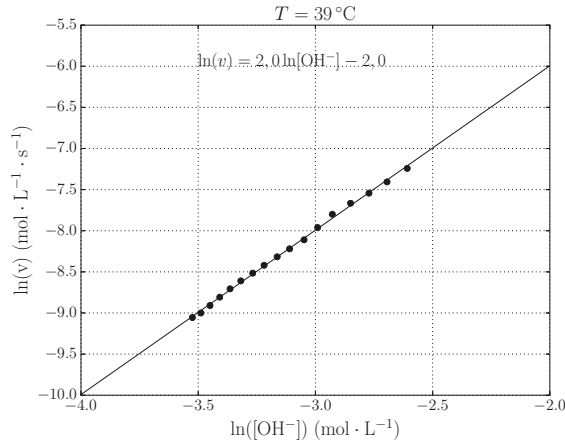


Figure 27.5. Méthode différentielle.

#### □ Comment déterminer un ordre partiel ?

Pour déterminer l'ordre partiel pour un réactif, on choisit des conditions expérimentales telles que les autres réactifs soient en large excès, ce qui rend leur concentration pratiquement constante. L'ordre global de la réaction diminue alors en apparence : il y a **dégénérescence de l'ordre**.

#### Méthode 27.5 : Utiliser la dégénérescence de l'ordre

On considère la réaction  $\alpha A + \beta B \rightarrow \gamma C$  admettant la loi de vitesse  $v = k[A]^p[B]^q$ .

- Calculer et comparer les concentrations initiales  $[A]_0$  et  $[B]_0$ .
- Identifier le réactif en large excès dont la concentration reste quasiment constante au cours de la réaction. Par exemple :  $[A] \simeq [A]_0$ .
- Simplifier la loi de vitesse en faisant apparaître une constante de vitesse apparente :

$$v = k[A]^p[B]^q = k_{\text{app}}[B]^q \quad \text{où} \quad k_{\text{app}} = k[A]^p \simeq k[A]_0^p$$

➔ Exercices (27.3) (27.4) (27.5) (27.6)

Avec le réactif A en excès et en suivant l'évolution temporelle de  $[B]$ , une étude cinétique comme celle réalisée précédemment permettra de déterminer l'ordre partiel  $q$  par rapport à B. Et réciproquement pour déterminer l'ordre partiel  $p$  par rapport à A.

□ Comment caractériser la durée de la réaction ?

On pourrait déterminer le temps nécessaire pour que le réactif limitant ne soit plus détectable, mais on lui préfère la notion de **temps de demi-réaction**.

**Définition : Temps de demi-réaction**

Le temps de demi-réaction (noté  $t_{1/2}$ ) est la durée nécessaire pour que la concentration du réactif limitant A soit divisée par deux par rapport à sa valeur initiale.

$$[A](t_{1/2}) = \frac{[A](0)}{2}$$



Le temps de demi-réaction est aussi appelé **temps de demi-vie** de A.

En remplacement  $t$  par  $t_{1/2}$  et  $[OH^-]$  par  $\frac{[OH^-]_0}{2}$  dans l'évolution temporelle obtenue pour les ordres 0, 1 et 2, on trouve l'expression du temps de demi-réaction correspondant.

**Pour la réaction d'ordre global nul :  $r = p + q = 0$  :**

$$\frac{[OH^-]_0}{2} = -kt_{1/2} + [OH^-]_0 \text{ soit } t_{1/2} = \frac{[OH^-]_0}{2k}$$

**Pour la réaction d'ordre global 1 :  $r = p + q = 1$  :**

$$\frac{[OH^-]_0}{2} = [OH^-]_0 \exp(-kt_{1/2}) \text{ soit } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

**Pour la réaction d'ordre global 2 :  $r = p + q = 2$  :**

$$\frac{2}{[OH^-]_0} - \frac{1}{[OH^-]_0} = kt_{1/2} \text{ soit } t_{1/2} = \frac{1}{k[OH^-]_0}$$

Ces expressions du temps de demi-réaction ne sont pas généralisables mais, pour une réaction donnée, **la dépendance de  $t_{1/2}$  vis-à-vis de la concentration initiale en réactif limitant  $[A]_0$  est caractéristique de l'ordre de la réaction**. Le tableau suivant résume ces résultats, qui ne sont pas à retenir :

ordre	0	1	2
$t_{1/2}$ est	proportionnel à $[A]_0$	indépendant de $[A]_0$	inversement proportionnel à $[A]_0$

□ Qu'en est-il de notre problématique initiale ?

Les pommes de terre nouvelles, comparées à des pommes de terre menées à maturité, présentent un taux de sucres inférieur. Ces sucres interviennent en tant que réactifs dans la réaction de brunissement. Leur concentration est donc un facteur de la cinétique de celle-ci. Lorsqu'elle est moindre, la vitesse est plus faible et l'appartion de la coloration est plus lente. À durée et température de cuisson identiques, les pommes de terre nouvelles dorent moins vite que les pommes de terre mures.

### ■ 3 Second facteur cinétique : la température

Nous avons déjà évoqué qu'une réaction chimique nécessite la rencontre entre les réactifs. Les molécules doivent donc posséder suffisamment d'énergie pour vaincre la répulsion entre les nuages électroniques et ainsi surmonter la barrière énergétique. Or plus la température augmente, plus l'agitation thermique augmente, plus l'énergie des molécules augmente. On comprend ainsi que la température soit un facteur cinétique.

#### Définition : Loi d'Arrhenius

Il s'agit d'une loi empirique donnant la dépendance du coefficient de vitesse vis-à-vis de la température  $T$  :

$$k(T) = A \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right)$$

où  $A$  est le facteur préexponentiel ou facteur d'Arrhenius (même unité que  $k$ ),  $E_A$  est l'énergie d'activation (en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante des gaz parfaits.

L'ordre de grandeur de l'énergie d'activation peut varier de quelques dizaines de kilojoules à quelques centaines de kilojoules par mole. Cela correspond à l'ordre de grandeur de la barrière énergétique. Pour déterminer sa valeur, il faut disposer de plusieurs valeurs de constantes de vitesse mesurées à différentes températures.

#### Méthode 27.6 : Déterminer l'énergie d'activation d'une réaction

- Déterminer ou disposer de valeurs de constante de vitesse  $k$  à différentes températures.
- Tracer la courbe de  $\ln k$  en fonction de  $1/T$ .
- Réaliser la régression linéaire de cette courbe.
- Comparer le résultat de la régression à l'équation :  $\ln k = -\frac{E_A}{R} \frac{1}{T} + \ln A$  et, à l'aide des coefficients de la régression linéaire, identifier :
  - la pente de la droite à  $-E_A/R$ ,
  - l'ordonnée à l'origine de la droite à  $\ln A$ .

➔ Exercice (27.2)



Une régression linéaire n'a de sens qu'à partir de trois points expérimentaux. Si on ne dispose que de deux valeurs, on peut déterminer  $E_A$  et  $A$  en résolvant un système de deux équations. L'incertitude sur le résultat est plus grande.

C'est ce que nous avons fait en exploitant nos résultats expérimentaux obtenus à deux températures différentes. Une première expérience réalisée à  $\theta_1 = 39,0^\circ\text{C}$  a fourni  $k_1 = 8,0 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$  (figure 27.6). Une deuxième expérience réalisée à  $\theta_2 = 24,5^\circ\text{C}$  a fourni  $k_2 = 4,0 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$  (figure 27.7).

Notons  $T_1 = \theta_1 + 273,15$  et  $T_2 = \theta_2 + 273,15$  les températures en Kelvin. En écrivant la loi d'Arrhenius aux deux températures :

$$k_1 = k(T_1) = A \exp\left(-\frac{E_A}{RT_1}\right) \quad \text{et} \quad k_2 = k(T_2) = A \exp\left(-\frac{E_A}{RT_2}\right)$$

Nous obtenons :  $\frac{k_2}{k_1} = \exp\left(-\frac{E_A}{RT_2} + \frac{E_A}{RT_1}\right) = \exp\left(\frac{E_A}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right)$ .

D'où :  $E_A = R \frac{\ln \frac{k_2}{k_1}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = 37 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Voici nos résultats expérimentaux aux températures  $\theta_1 = 39,0^\circ\text{C}$  et  $\theta_2 = 24,5^\circ\text{C}$  :

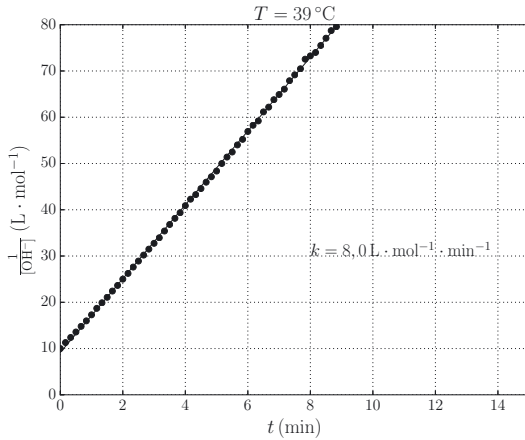


Figure 27.6. Expérience à  $\theta_1 = 39,0^\circ\text{C}$ .

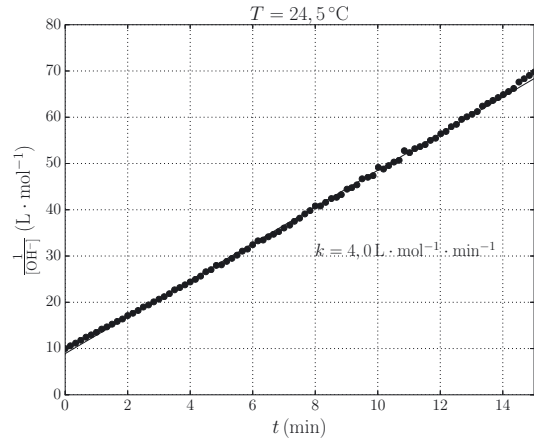


Figure 27.7. Expérience à  $\theta_2 = 24,5^\circ\text{C}$ .

La réaction de saponification est relativement lente à température ambiante. Lors de la fabrication industrielle du savon, le mélange est chauffé à environ  $90^\circ\text{C}$  pour accélérer la réaction. L'inconvénient de la saponification à chaud est le risque de dégrader les composants non saponifiables. Il existe aussi une méthode de fabrication à froid ( $30^\circ\text{C}$ ), d'une durée d'un mois environ.

#### □ Qu'en est-il de notre problématique initiale ?

La température étant un facteur cinétique influençant la vitesse de réaction de brunissement, l'apparition de la coloration dorée sera d'autant plus rapide que la température de cuisson des pommes de terre sera élevée.

Dans cet exemple, on cherche à accélérer la réaction en augmentant la température. Parfois, on cherche à ralentir les réactions en diminuant la température. C'est le cas quand on place les aliments au réfrigérateur pour ralentir les réactions de dégradation ou encore quand on réalise une trempe, c'est-à-dire une chute brutale de température, pour figer un système avant la réalisation d'un dosage.



## Interro de cours

Intéressons-nous à la réaction de désintégration radioactive de l'iode 131 :  ${}^{131}_{53}\text{I} \rightarrow {}^{131}_{54}\text{Xe} + e^{-} + \bar{\nu}_e$  dont la cinétique de réaction peut être étudiée comme une réaction chimique.

1. L'activité volumique d'un échantillon en becquerel par litre (en  $\text{Bq} \cdot \text{L}^{-1}$ ) est le nombre de désintégrations par unité de temps et par unité de volume de l'échantillon. Notons cette activité  $A_v(t)$  et  $C(t)$  la concentration en noyaux radioactifs dans l'échantillon (en nombre par  $\text{m}^3$ ). Identifier le(s) affirmation(s) correcte(s).
  - (a)  $A_v(t) = -\frac{dC(t)}{dt}$  est la vitesse volumique de la réaction de désintégration.
  - (b)  $A_v(t) = +\frac{dC(t)}{dt}$  est la vitesse volumique de la réaction de désintégration.
  - (c)  $A_v(t) = -\frac{dC(t)}{dt}$  est la vitesse volumique de la formation de  ${}^{131}_{54}\text{Xe}$ .
2. Quelque soit le nombre initial de noyaux de l'échantillon, la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux soit désintégrée est toujours la même. La désintégration radioactive suit :
  - (a) une cinétique d'ordre 0 ;
  - (b) une cinétique d'ordre 1 ;
  - (c) une cinétique d'ordre 2.
3. L'activité volumique  $A_v(t)$  d'un échantillon est :
  - (a) proportionnelle à  $C(t)$  ;
  - (b) indépendante de  $C(t)$  ;
  - (c) inversement proportionnelle à  $C(t)$ .
4. La grandeur qui varie avec le temps de façon affine est :
  - (a)  $C(t)$  ;
  - (b)  $1/C(t)$  ;
  - (c)  $\ln C(t)$ .
5. À l'hôpital, certains patients atteints de cancers sont traités à l'iode  ${}^{131}_{53}\text{I}$ . Les effluents issus de leurs sanitaires contenant un résidu d'iode  ${}^{131}_{53}\text{I}$  doivent être entreposés dans une cuve pendant une durée supérieure à dix fois le temps de demi-vie. Pendant la durée de stockage, la concentration en noyaux est divisée par au moins :
  - (a)  $2 \times 10$  ;
  - (b)  $2^{10}$  ;
  - (c) 10.
6. Depuis 2008, l'activité volumique en sortie de cuve doit être limitée à  $10 \text{Bq} \cdot \text{L}^{-1}$  pour envisager une vidange. Considérons une activité de  $1,0 \text{MBq} \cdot \text{L}^{-1}$  au moment de la mise en cuve. Sachant que la constante radioactive  $\lambda$ , analogue de la constante de vitesse  $k$ , vaut  $\lambda = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{jour}^{-1}$ , déterminer la durée du stockage nécessaire.
  - (a) 1,34 mois.
  - (b) 134 jours.
  - (c) 13,4 jours.

## Exercices

### Exercice 27.1 Réaction en phase gazeuse

➔ Méthode (27.3)

On s'intéresse à la réaction de décomposition du pentaoxyde d'azote en phase gazeuse, dont l'équation est :



Cette réaction admet un ordre et sa constante de vitesse est  $k = 1,69 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

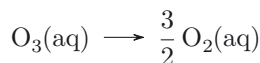
La réaction est réalisée dans un récipient de volume  $V$  constant, initialement rempli de  $\text{N}_2\text{O}_5$  à la pression de 1,0 bar. L'environnement du récipient constitue un thermostat de température  $25^\circ\text{C}$ . On suppose donc que la réaction se fait à cette température. Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits. Données :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ .

1. Exprimer la vitesse de disparition de  $\text{N}_2\text{O}_5$  en fonction de la vitesse  $v$  de la réaction. Exprimer de même la vitesse d'apparition de  $\text{NO}_2$ .
2. Calculer la concentration initiale  $[\text{N}_2\text{O}_5]_0$ , en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
3. Déterminer la concentration  $[\text{N}_2\text{O}_5]$  en fonction du temps après avoir déterminé l'ordre de la réaction. Calculer numériquement le temps de demi-vie de  $\text{N}_2\text{O}_5$ .
4. Calculer numériquement la vitesse d'apparition de  $\text{NO}_2$  à l'instant initial.
5. Déterminer la pression  $P(t)$  dans le récipient en fonction du temps.
6. On dispose d'un capteur de pression à l'intérieur du récipient. Proposer une méthode expérimentale pour obtenir la constante de vitesse  $k$ .

### Exercice 27.2 Décomposition de l'ozone

➔ Méthodes (27.3) (27.6)

L'ozonation est une méthode de traitement de l'eau potable consistant à dissoudre de l'ozone  $\text{O}_3$  dans l'eau. L'ozone est un oxydant puissant qui détruit les matières organiques et tue les bactéries. L'ozone en solution aqueuse est instable. Il se décompose selon un mécanisme complexe, en produisant en particulier des radicaux hydroxyles, dont le pouvoir oxydant permet la dégradation de matières organiques. Pour simplifier, on envisage une dégradation en dioxygène suivant l'équation :



Le tableau ci-contre donne le temps de demi-vie de l'ozone pour différentes températures (à  $\text{pH} = 7$ ). Le temps de demi-vie ne dépend pas de la concentration initiale en ozone. Soit  $c(0)$  la concentration initiale de  $\text{O}_3$  et  $c(t)$  sa concentration à un instant  $t$ . On suppose que la réaction admet un ordre  $\alpha$  par rapport à  $\text{O}_3$  et on note  $k$  sa constante de vitesse.

$T$ ( $^\circ\text{C}$ )	$t_{1/2}$ (min)
15	30
20	20
25	15
30	12
35	8

Données :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ .

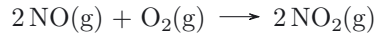
1. Dans l'hypothèse  $\alpha = 1$ , déterminer  $c(t)$  et en déduire l'expression du temps de demi-vie.
2. Dans l'hypothèse  $\alpha = 2$ , déterminer  $c(t)$  et en déduire l'expression du temps de demi-vie.

- Quelle hypothèse faut-il retenir? En déduire la constante de vitesse  $k$  pour les différentes températures.
- Déterminer l'énergie d'activation de la réaction.

### Exercice 27.3 Oxydation du monoxyde d'azote

➔ Méthodes (27.5) (27.3)

Le monoxyde d'azote, un gaz produit en grande quantité dans les moteurs à explosion, est oxydé par l'oxygène de l'air, ce qui conduit à la formation de dioxyde d'azote (un gaz nocif et irritant de couleur rousse) selon la réaction :



On s'intéresse à une expérience réalisée dans un récipient de volume  $V = 1 \text{ L}$  fixe, à la température  $T = 298 \text{ K}$ . Initialement, le récipient contient une concentration  $[\text{NO}]_0 = 10 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et un très large excès de dioxygène (à la pression de 1,0 bar). Le tableau ci-dessous donne la concentration de NO à différents instants :

$t$ (min)	0	1	2	4	8	14	20	30
$[\text{NO}]$ ( $\mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ )	10,0	7,44	5,93	4,21	2,67	1,72	1,27	0,88

On suppose que la réaction admet un ordre partiel  $\alpha$  par rapport à NO et un ordre partiel  $\beta$  par rapport à  $\text{O}_2$ . Les gaz sont supposés parfaits. Données :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ .

- Calculer la concentration initiale de  $\text{O}_2$  en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Exprimer la loi de vitesse en faisant apparaître une constante de vitesse apparente  $k_a$ .
- Dans l'hypothèse  $\alpha = 1$ , déterminer  $[\text{NO}]$  en fonction du temps.
- Dans l'hypothèse  $\alpha = 2$ , déterminer  $[\text{NO}]$  en fonction du temps.
- Utiliser le tableau donné ci-dessus pour déterminer l'ordre par rapport à NO.
- Calculer la constante de vitesse apparente.
- Sachant que la réaction est d'ordre  $\beta = 1$  par rapport à  $\text{O}_2$ , calculer la constante de vitesse  $k$  de la réaction à 298 K.

### Exercice 27.4 Suivi spectrophométrique d'une réaction d'oxydoréduction

➔ Méthodes (27.5) (27.4)

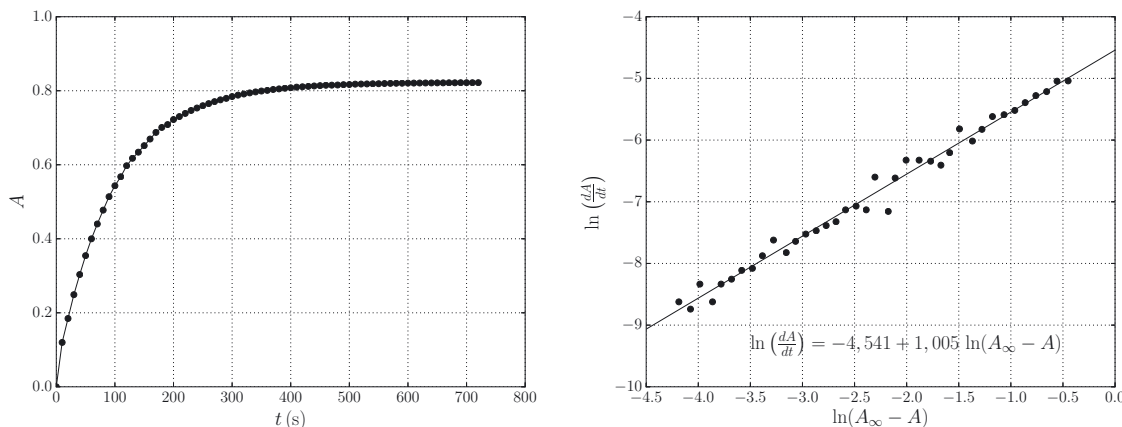
On s'intéresse à la réaction totale de réduction de l'ion iodure  $\text{I}^-$  par l'ion peroxodisulfate  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ . Les couples d'oxydoréduction sont  $\text{I}_3^-/\text{I}^-$  et  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}/\text{SO}_4^{2-}$ . Les ions iodure et peroxodisulfate sont incolores alors que l'ion triiodure  $\text{I}_3^-$  est de couleur jaune en solution aqueuse. On suit donc l'avancement de la réaction au cours du temps par spectrophotométrie.

L'expérience est réalisée à température ambiante ( $20^\circ\text{C}$ ) avec une solution (1) d'iodure de potassium ( $\text{K}^+, \text{I}^-$ ) de concentration  $c_1 = 1,00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et une solution (2) de peroxodisulfate de sodium ( $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}, 2\text{Na}^+$ ) de concentration  $c_2 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Au préalable, la cuve du spectrophotomètre est remplie de 3 mL de la solution (1) mélangée avec 1 mL d'eau, puis on procède au réglage du zéro.

Dans un tube à essai, on mélange  $v_1 = 3,0 \text{ mL}$  de la solution (1) avec  $v_2 = 1,0 \text{ mL}$  de la solution (2), en déclenchant simultanément l'acquisition de l'absorbance. Le mélange est versé immédiatement dans la cuve que l'on place dans le spectrophotomètre. La première absorbance mesurée (sans la

cuve) est fautive; on la remplace par la valeur nulle. La figure ci-dessous (à gauche) montre l'évolution de l'absorbance (mesurée à  $\lambda = 415 \text{ nm}$ ) au cours du temps. Par extrapolation, on obtient l'absorbance à l'équilibre  $A_\infty = 0,822$ . La figure ci-dessous (à droite) montre  $\ln\left(\frac{dA}{dt}\right)$  en fonction de  $\ln(A_\infty - A)$  et le résultat de la régression linéaire effectuée sur ces points.



L'absorbance étant seulement due à l'ion  $\text{I}_3^-$ , la loi de Beer-Lambert s'écrit  $A = \varepsilon \ell [\text{I}_3^-]$  où  $\varepsilon$  est le coefficient d'absorption molaire de  $\text{I}_3^-$  et  $\ell$  la largeur de la cuve.

1. Écrire l'équation de la réaction d'oxydation de  $\text{I}^-$  par  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ .
2. Comparer la quantité initiale  $n_1$  de  $\text{I}^-$  et la quantité initiale  $n_2$  de  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ . Commenter.
3. Faire un tableau d'avancement pour la réaction. Que peut-on dire de la concentration  $[\text{I}^-]$  ?
4. On suppose que la réaction admet un ordre  $\alpha$  par rapport à  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$  et un ordre  $\beta$  par rapport à  $\text{I}^-$ . Écrire la loi de vitesse et justifier la dégénérescence d'ordre, en définissant une constante de vitesse apparente. Écrire l'équation différentielle vérifiée par l'avancement  $x$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ).
5. Démontrer que  $\ln\left(\frac{dA}{dt}\right)$  est une fonction affine de  $\ln(A_\infty - A)$ , dont la pente est l'ordre  $\alpha$ .
6. En déduire  $\alpha$ . Déterminer l'expression de  $[\text{I}_3^-]$  en fonction du temps puis l'absorbance  $A(t)$ .
7. Relever sur la courbe expérimentale le temps de demi-réaction. En déduire la valeur de la constante de vitesse apparente.

### Exercice 27.5 Décoloration de la phénolphthaléine

➔ Méthodes (27.5) (27.3)

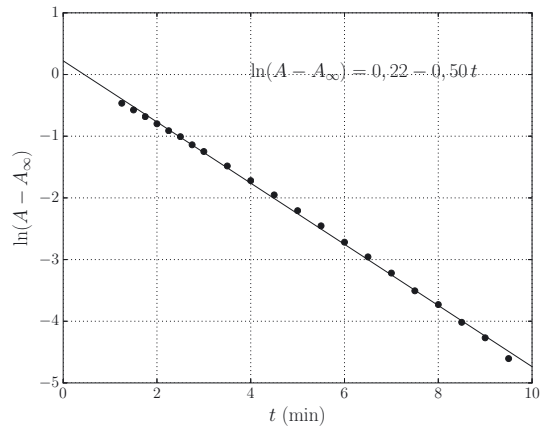
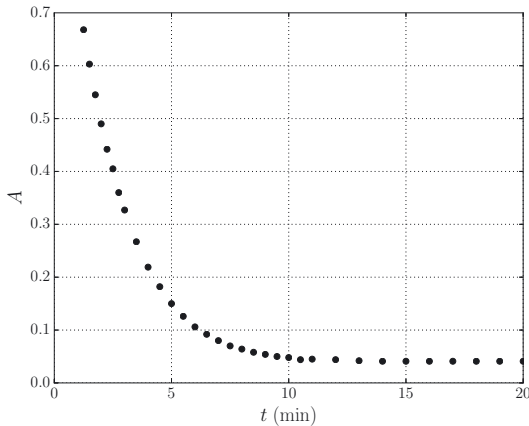
Lorsque la constante d'équilibre d'une réaction n'est pas très grande, son étude cinétique doit se faire en considérant la réaction en sens direct et la réaction en sens inverse. Nous considérons comme exemple la réaction de décoloration de la phénolphthaléine, un indicateur coloré acido-basique dont la forme acide est incolore et la forme basique de couleur rose. Sa zone de virage est  $8,2 < \text{pH} < 9,9$ . Cependant, en milieu très basique ( $\text{pH} > 12$ ), elle retrouve une forme incolore selon la réaction :



Le suivi de la réaction est fait par spectrophotométrie, à une longueur d'onde  $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ . On prépare une solution (1) de phénolphthaléine à 0,050% (en masse) dans un mélange eau-éthanol

(50%), et une solution (2) d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration  $0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . L'ion  $\text{OH}^-$  est donc en large excès par rapport à la phénolphtaléine.

À  $t = 0$ , on mélange 50 mL de chaque solution dans une fiole que l'on place dans un bain thermostaté à  $30^\circ\text{C}$ . On prélève régulièrement un échantillon pour mesurer son absorbance. L'absorbance en fonction du temps est donnée ci-dessous (à gauche).



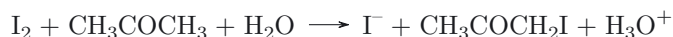
La valeur de l'absorbance lorsque l'équilibre est atteint est  $A_\infty = 0,040$ . Pour interpréter cette courbe, nous faisons les hypothèses suivantes : la réaction directe est d'ordre  $\alpha$  par rapport à  $\text{OH}^-$  et d'ordre 1 par rapport à Col, avec une constante de vitesse  $k_a$  ; la réaction inverse est d'ordre 1 par rapport à In, avec une constante de vitesse  $k_b$ .

1. Exprimer la vitesse  $v_a$  de la réaction directe en fonction de  $k_a$ ,  $[\text{Col}]$  et  $[\text{OH}^-]$ . Exprimer la vitesse  $v_b$  de la réaction inverse en fonction de  $k_b$  et de  $[\text{In}]$ . En déduire la vitesse de la réaction  $v = \frac{dx}{dt}$  où  $x$  est l'avancement volumique (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ).
2. Soit  $[\text{Col}](t)$  la concentration de la forme colorée à l'instant  $t$ . D'après la loi de Beer-Lambert, l'absorbance de la solution est  $A(t) = \varepsilon \ell [\text{Col}](t)$ . En appliquant la méthode de la dégénérescence de l'ordre, établir l'équation différentielle vérifiée par  $[\text{Col}](t)$  en faisant apparaître une constante de vitesse apparente  $k'_a$  et en notant  $c_0$  la concentration initiale de Col.
3. Résoudre cette équation.
4. Démontrer que  $\ln(A - A_\infty)$  est une fonction affine du temps, dont la pente est  $-(k'_a + k_b)$ . La courbe expérimentale correspondante est donnée ci-dessus (à droite), avec le résultat de la régression linéaire.
5. En déduire la valeur de  $k'_a + k_b$ .
6. Comparer les vitesses  $v_a$  et  $v_b$  lorsque l'équilibre est atteint.

### Exercice 27.6 Iodation de l'acétone

➡ Méthodes (27.5) (27.3)

On s'intéresse à la réaction entre le diiode et l'acétone en solution aqueuse :

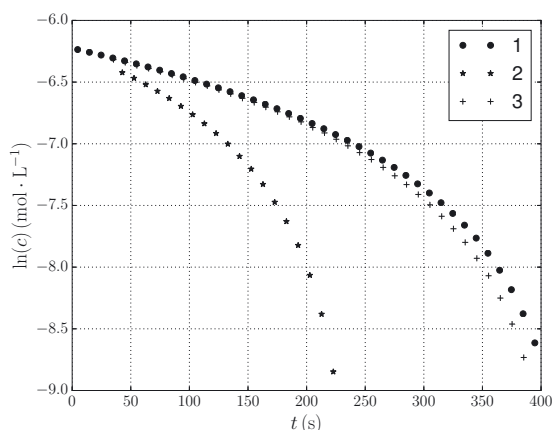
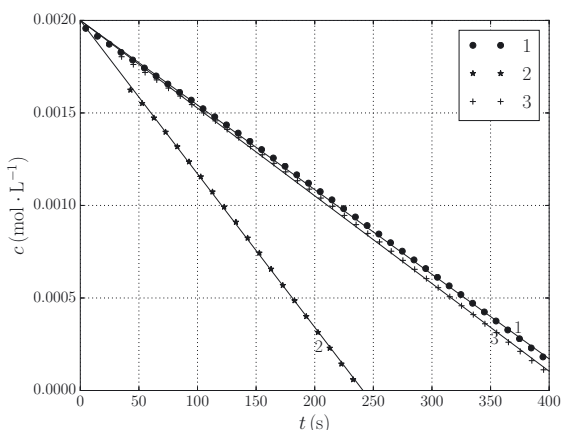


Cette réaction lente est catalysée par les ions oxonium  $\text{H}_3\text{O}^+$ . On la réalise donc en milieu acide. Le diiode (en réalité complexé par  $\text{I}^-$ , sous la forme  $\text{I}_3^-$ ) est de couleur jaune-brun alors que  $\text{I}^-$  et

incolor. On suit donc l'avancement de la réaction par spectrophotométrie, à une longueur d'onde proche du maximum d'absorption ( $\lambda = 520 \text{ nm}$ ). L'absorbance de la solution est  $A = \varepsilon \ell [I_2]$  (loi de Beer-Lambert). Un étalonnage avec quatre solutions de  $I_2$  de concentrations de  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $6,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  permet d'obtenir la constante  $\varepsilon \ell$ . Les trois mélanges suivants sont étudiés :

Mélange	n° 1	n° 2	n° 3
$[I_2]_0 \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-3}$
$[\text{CH}_3\text{COCH}_3]_0 \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	1,58	1,58	0,95
$[\text{H}_3\text{O}^+]_0 \text{ (mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$	0,12	0,24	0,24

La concentration  $c = [I_2]$  est calculée à partir de l'absorbance.  $c$  et  $\ln(c)$  en fonction du temps sont représentés ci-dessous :



Pour interpréter ces résultats, on suppose que la réaction admet un ordre partiel par rapport à  $\text{CH}_3\text{COCH}_3$ ,  $\text{H}_3\text{O}^+$  et  $\text{I}_2$  :

$$v = k[\text{CH}_3\text{COCH}_3]^\alpha [\text{H}_3\text{O}^+]^\beta [\text{I}_2]^\gamma$$

De plus, nous précisons les pentes des droites obtenues :

- pente 1 =  $-4,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- pente 2 =  $-8,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- pente 3 =  $-4,7 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Compte tenu des valeurs des concentrations initiales, montrer que l'expérience permet de déterminer l'ordre partiel  $\gamma$  par rapport à  $\text{I}_2$ .
2. Déduire  $\gamma$  des résultats expérimentaux.
3. Quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont-elles suggérées par ces résultats ?

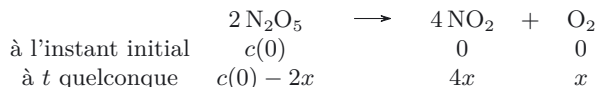
# Corrections

## Interro de cours

1. Par analogie avec la vitesse de réaction en chimie,  $A_v = \frac{1}{\nu_I} \frac{dC(t)}{dt} = v_{\text{form}}(\text{Xe})$  où  $\nu_I$  est le coefficient stœchiométrique de  $^{131}_{53}\text{I}$ . Réponses (a) et (c).
2. La durée nécessaire pour que la moitié des noyaux soit désintégrée correspond au temps de demi-vie  $t_{1/2}$ . L'affirmation indique que  $t_{1/2}$  est indépendant du nombre de noyaux initial ce qui est caractéristique d'une cinétique d'ordre 1. Réponse (b).
3. La loi de vitesse pour un ordre 1 en cinétique chimique s'écrit :  $v = kC(t)$ . Pour une réaction nucléaire on a par analogie :  $A_v(t) = -\frac{dC(t)}{dt} = \lambda C(t)$  où  $\lambda$  est la constante radioactive analogue à la constante de vitesse en chimie. Réponse (a).
4. En résolvant  $-\frac{dC(t)}{dt} = kC(t)$ , on obtient  $\ln C(t) = \ln C(0) - kt$ . Réponse (c).
5. La concentration  $C(t)$  est divisée par deux à chaque fois qu'une durée égale au temps de demi-vie s'écoule. Ainsi  $C(t_{\text{final}}) = \frac{C(t_{\text{initial}})}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ . Réponse (b).
6. Considérons l'instant de mise en cuve comme initial et  $t_{\text{vid}}$  le temps de stockage. On cherche  $t_{\text{vid}}$  pour lequel  $C(t_{\text{vid}}) = 10 \text{ Bq} \cdot \text{L}^{-1}$  avec  $C(0) = 1,0 \text{ MBq} \cdot \text{L}^{-1}$ . Ainsi,  $t_{\text{vid}} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{C(0)}{C(t_{\text{vid}})} \right) = 134$  jours. Réponse (b).

## Exercice 27.1

1. Si  $v$  est la vitesse de la réaction, la vitesse de disparition de  $\text{N}_2\text{O}_5$  est  $-\frac{d[\text{N}_2\text{O}_5]}{dt} = 2v$ . La vitesse d'apparition de  $\text{NO}_2$  est  $\frac{d[\text{NO}_2]}{dt} = 4v$ .
2. La concentration initiale est  $[\text{N}_2\text{O}_5]_0 = \frac{n_0}{V}$ . Or d'après l'équation d'état d'un gaz parfait  $P_0V = n_0RT$  donc  $[\text{N}_2\text{O}_5]_0 = \frac{P_0}{RT} = 40 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
3. L'unité de  $k$  montre que la réaction est d'ordre 1. La loi de vitesse s'écrit donc  $v = k[\text{N}_2\text{O}_5]$ . La concentration  $c(t) = [\text{N}_2\text{O}_5]$  vérifie donc l'équation différentielle  $\frac{dc}{dt} = -2kc$ . On en déduit la solution  $c(t) = c(0) \exp(-2kt)$  avec  $c(0) = [\text{N}_2\text{O}_5]_0$ . Le temps de demi-vie  $t_{1/2}$  est tel que  $c(t_{1/2}) = c(0)/2$ , ce qui donne  $t_{1/2} = \ln(2)/(2k) = 2,05 \cdot 10^4 \text{ s} = 5,7 \text{ h}$ .
4. La vitesse d'apparition de  $\text{NO}_2$  à  $t = 0$  est  $\frac{d[\text{NO}_2]}{dt} = 4k[\text{N}_2\text{O}_5]_0 = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .
5. La pression est  $P = \frac{nRT}{V}$ , où  $n$  est le nombre de moles de gaz, c'est-à-dire  $n = n(\text{N}_2\text{O}_5) + n(\text{NO}_2) + n(\text{O}_2)$ . Faisons un tableau d'avancement en concentrations :



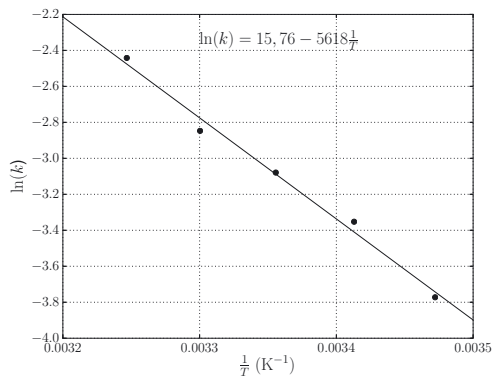
On a ainsi  $c(t) = c(0) - 2x$ , soit  $x(t) = \frac{c(0)-c(t)}{2} = \frac{c(0)}{2} (1 - \exp(-2kt))$ . Le nombre de moles total par unité de volume est  $\frac{n}{V} = c(t) + 4x + x = c(0) + 3x = \frac{c(0)}{2} (5 - 3 \exp(-2kt))$ . La pression totale est donc :  $P(t) = \frac{c(0)RT}{2} (5 - 3 \exp(-2kt))$ .

6. La pression est croissante. On enregistre la pression  $P(t)$  jusqu'à l'équilibre chimique, où sa valeur est  $P_\infty = \frac{5c(0)RT}{2}$ . On a ainsi  $\ln(P_\infty - P(t)) = \ln\left(\frac{3c(0)RT}{2}\right) - 2kt$ . La pente du tracé de  $\ln(P_\infty - P(t))$  en fonction de  $t$  donne donc  $2k$ , ce qui permet d'obtenir la constante de vitesse  $k$ .

### Exercice 27.2

- Pour une réaction d'ordre  $\alpha$ , la vitesse de la réaction de décomposition de l'ozone est  $v = -\frac{dc}{dt} = kc^\alpha$  où  $c = [\text{O}_3]$ . Dans le cas  $\alpha = 1$ , l'équation différentielle pour la concentration en ozone est donc  $\frac{dc}{dt} = -kc$  et la solution  $c(t) = c(0) \exp(-kt)$ . On en déduit le temps de demi-vie, défini par  $c(t_{1/2}) = c(0)/2$ , soit :  $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$ .
- Dans le cas  $\alpha = 2$ , l'équation différentielle est  $\frac{dc}{dt} = -kc^2$  et la solution est  $\frac{1}{c(t)} - \frac{1}{c(0)} = kt$ . Le temps de demi-vie de  $\text{O}_3$  est donc  $t_{1/2} = \frac{1}{kc(0)}$ .
- Le temps de demi-vie est indépendant de la concentration initiale. Il faut donc retenir l'hypothèse  $\alpha = 1$ . La constante de vitesse est donnée par  $k = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$ .
- La loi d'Arrhenius s'écrit  $k = A \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right)$ , ou encore  $\ln k = \ln A - \frac{E_A}{RT}$ . Pour obtenir l'énergie d'activation  $E_A$ , on trace donc  $\ln k$  en fonction de  $\frac{1}{T}$  puis on effectue une régression linéaire pour obtenir la pente. On obtient  $\frac{E_A}{R} = 5618 \text{ K}$  et donc  $E_A = 47 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

$T$ (K)	$k$ ( $\text{min}^{-1}$ )
288	$2,3 \cdot 10^{-2}$
293	$3,5 \cdot 10^{-2}$
298	$4,6 \cdot 10^{-2}$
303	$5,8 \cdot 10^{-2}$
308	$8,7 \cdot 10^{-2}$

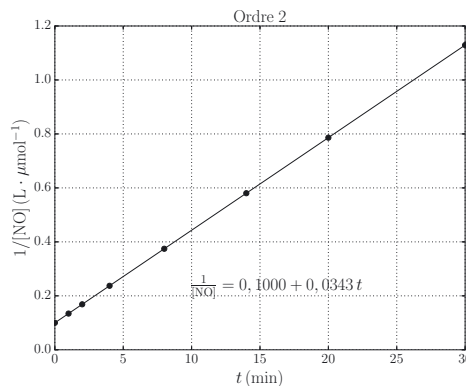
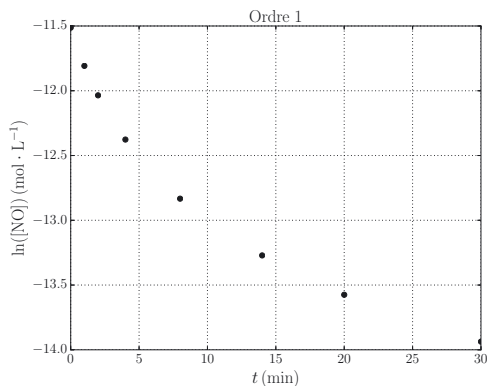


### Exercice 27.3

- D'après l'équation d'état du gaz parfait,  $[\text{O}_2]_0 = \frac{P}{RT} = 40 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . C'est plus de 1000 fois la concentration initiale de  $\text{NO}$ , donc  $\text{O}_2$  est en très large excès et sa concentration reste pratiquement constante au cours de la réaction.
- La vitesse de la réaction est  $v = k[\text{O}_2]^\beta [\text{NO}]^\alpha = k_a [\text{NO}]^\alpha$ , où  $k_a = k[\text{O}_2]^\beta$  est une constante de vitesse apparente, constante puisque  $[\text{O}_2]$  est pratiquement constante.
- Notons  $c(t) = [\text{NO}]$ . La vitesse de la réaction s'écrit  $v = -\frac{1}{2} \frac{dc}{dt} = k_a c^\alpha$ . Dans le cas  $\alpha = 1$ , l'équation vérifiée par  $c$  est donc  $\frac{dc}{dt} = -2k_a c$  et la solution est  $c(t) = c(0) \exp(-2k_a t)$ , qui s'écrit aussi sous la forme  $\ln(c(t)) = \ln(c(0)) - 2k_a t$ .
- Dans le cas  $\alpha = 2$ , la solution est  $\frac{1}{c(t)} = \frac{1}{c(0)} + 2k_a t$ .



5. On trace  $\ln(c(t))$  en fonction du temps, et  $1/c(t)$  en fonction du temps :



Les points sont alignés dans le tracé de  $1/c$  et pas dans celui de  $\ln(c)$ , ce qui montre que la réaction est d'ordre  $\alpha = 2$  par rapport à NO.

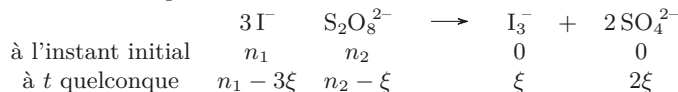
6. Une régression linéaire sur  $1/c$  en fonction de  $t$  donne  $2k_a = 0,0343 \text{ L} \cdot \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} = 572 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  et donc  $k_a = 286 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  (d'après la valeur de la pente).
7. Si  $\beta = 1$  on a  $k_a = k[\text{O}_2]$  ce qui conduit à  $k = 7,1 \cdot 10^3 \text{ L}^2 \cdot \text{mol}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Exercice 27.4

1. Les demi-équations d'oxydoréduction sont  $3\Gamma = \text{I}_3^- + 2e^-$  et  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2e^- = 2\text{SO}_4^{2-}$ . L'équation de la réaction d'oxydation de  $\Gamma$  est donc :



2. Initialement  $n_1 = c_1 v_1 = 3,0 \text{ mmol}$  de  $\Gamma$  et  $n_2 = c_2 v_2 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mmol}$  de  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ .  $n_1/3$  est beaucoup plus grand que  $n_2$  (d'un facteur supérieur à 1000), donc  $\Gamma$  est en très large excès par rapport à  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ .
3. Voici le tableau d'avancement en quantité de matière :



L'avancement maximal est  $\xi_e = n_2$  donc au cours de la réaction  $3\xi \ll n_1$  et  $n_1 - 3\xi \approx n_1$ . La concentration  $[\Gamma] = \frac{n_1 - 3\xi}{V}$  est donc quasiment constante :  $[\Gamma] \simeq [\Gamma]_0$ .

4. La vitesse de la réaction s'écrit  $v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} = k[\Gamma]^\beta [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\alpha$  où  $x = \xi/V$  est l'avancement volumique de la réaction. La concentration  $[\Gamma]$  étant quasiment constante, on définit une constante de vitesse apparente  $k_a = k[\Gamma]^\beta$ , ce qui permet d'écrire  $\frac{dx}{dt} = k_a [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\alpha$ . L'équation différentielle vérifiée par l'avancement volumique est donc :  $\frac{dx}{dt} = k_a \left( \frac{n_2}{V} - x \right)^\alpha$  avec  $V = 4,0 \text{ mL}$ .
5. L'absorbance est  $A = \varepsilon \ell [\text{I}_3^-] = \varepsilon \ell \frac{\xi}{V} = \varepsilon \ell x$ . La valeur à l'équilibre est  $A_\infty = \varepsilon \ell \frac{\xi_e}{V} = \varepsilon \ell \frac{n_2}{V}$ . En reportant ces expressions dans l'équation différentielle obtenue ci-dessus, il vient :  $\frac{1}{\varepsilon \ell} \frac{dA}{dt} = k_a \left( \frac{A_\infty - A}{\varepsilon \ell} \right)^\alpha$ .
- Le logarithme népérien de cette équation donne :  $\ln \left( \frac{dA}{dt} \right) = \alpha \ln(A_\infty - A) + B$  où  $B$  est une constante. On a bien une fonction affine dont la pente est égale à l'ordre  $\alpha$ .
6. Le tracé expérimental et la régression linéaire donnent  $\alpha = 1,0$ . La réaction est donc d'ordre 1 par rapport à  $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ . La concentration  $[\text{I}_3^-] = x$ . Donc d'après l'équation différentielle obtenue précédemment, on a avec  $\alpha = 1$ ,  $\frac{dx}{dt} = k_a \left( \frac{n_2}{V} - x \right)$  soit  $\frac{dx}{dt} + k_a x = k_a \frac{n_2}{V}$ . Sa solution est  $x(t) = \frac{n_2}{V} (1 - \exp(-k_a t))$ . L'absorbance est  $A(t) = \varepsilon \ell x(t)$ .

7. Le temps de demi-réaction relevé sur la courbe expérimentale  $A(t)$ , tel que  $A(t_{1/2}) = A_\infty/2 = 0,41$  est  $t_{1/2} = 62$  s. D'après la solution  $x(t)$ , le temps de demi-réaction est défini par  $1 - \exp(-k_a t_{1/2}) = \frac{1}{2}$ , ce qui donne  $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_a}$ . On a donc une constante de vitesse apparente  $k_a = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

### Exercice 27.5

- Vitesse de la réaction directe  $v_a = k_a[\text{OH}^-]^\alpha[\text{Col}]$ . Vitesse de la réaction inverse  $v_b = k_b[\text{In}]$ . Vitesse de la réaction :  $v = \frac{dx}{dt} = v_a - v_b$  car Col est consommé par la réaction directe, formé par la réaction inverse et  $x$  est d'avancement de la réaction. On en déduit  $v = k_a[\text{OH}^-]^\alpha[\text{Col}] - k_b[\text{In}]$ .
- $\text{OH}^-$  est en large excès donc sa concentration est quasiment constante au cours de la réaction. En posant  $k'_a = k_a[\text{OH}^-]^\alpha$  on obtient :  $v = k'_a[\text{Col}] - k_b[\text{In}]$ . De plus précisons le tableau d'avancement en concentrations :

	$\text{Col}$	$\rightleftharpoons$	$\text{OH}^-$	$+$	$\text{In}$
à l'instant initial	$c_0$		$0$		$0$
à $t$ quelconque	$c_0 - x$		$x$		$x$

On en déduit  $[\text{In}] = c_0 - [\text{Col}]$  et  $\frac{d[\text{Col}]}{dt} = -\frac{dx}{dt}$ . L'équation différentielle vérifiée par  $[\text{Col}](t)$  est donc de la forme :  $\frac{d[\text{Col}]}{dt} = k_b(c_0 - [\text{Col}]) - k'_a[\text{Col}]$ . On en déduit finalement :  $\frac{d[\text{Col}]}{dt} = k_b c_0 - (k'_a + k_b)[\text{Col}]$ .

- L'équation différentielle  $\frac{d[\text{Col}]}{dt} + (k'_a + k_b)[\text{Col}] = k_b c_0$  est linéaire à coefficients constants. On cherche tout d'abord la solution de l'équation sans second membre sous la forme  $[\text{Col}](t) = A \exp(rt)$ , ce qui conduit à  $r = -(k'_a + k_b)$ . En ajoutant la solution particulière constante  $k_b c_0 / (k'_a + k_b)$ , on obtient la solution générale  $[\text{Col}](t) = A \exp(-(k'_a + k_b)t) + \frac{k_b c_0}{k'_a + k_b}$ . La condition initiale  $[\text{Col}] = c_0$  permet de calculer  $A$  et finalement  $[\text{Col}](t) = \frac{c_0}{k'_a + k_b} (k'_a \exp(-(k'_a + k_b)t) + k_b)$ .
- L'absorbance est  $A(t) = \varepsilon \ell [\text{Col}](t)$ . L'absorbance à l'équilibre est  $A_\infty = \varepsilon \ell \frac{c_0 k_b}{k'_a + k_b}$ .  
On a donc  $A(t) - A_\infty = \frac{\varepsilon \ell c_0 k'_a}{k'_a + k_b} \exp(-(k'_a + k_b)t)$  et donc  $\ln(A(t) - A_\infty) = -(k'_a + k_b)t + B$  où  $B$  est une constante.
- La régression linéaire fournit  $k'_a + k_b = 0,50 \text{ min}^{-1} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ .
- À l'équilibre chimique la vitesse de la réaction est nulle. On a donc  $v_a = v_b$ . La vitesse de la réaction directe est égale à la vitesse de la réaction inverse.

### Exercice 27.6

- $\text{CH}_3\text{COCH}_3$  et  $\text{H}_3\text{O}^+$  sont en large excès donc la vitesse de réaction s'écrit :  $v = -\frac{dc}{dt} = k_a[\text{I}_2]^\gamma = k_a c^\gamma$  où  $k_a = k[\text{CH}_3\text{COCH}_3]^\alpha[\text{H}_3\text{O}^+]^\beta$  est une constante de vitesse apparente.
- La variation affine de  $c$  avec le temps suggère une réaction d'ordre 0. En effet, si  $v = k_a$  on a :  $c = c(0) - k_a t$ . Un ordre 1 donnerait  $\ln(c)$  fonction affine du temps, ce qui n'est pas du tout vrai. On peut donc conclure que  $\gamma = 0$ .
- Dans les solutions 1 et 2, la concentration initiale en acétone est inchangée. On en déduit :  
 $\frac{k_{a,2}}{k_{a,1}} = \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_2}{[\text{H}_3\text{O}^+]_1} \right)^\beta = \left( \frac{0,24}{0,12} \right)^\beta = \frac{8,3 \cdot 10^{-6}}{4,6 \cdot 10^{-6}}$ . En prenant le logarithme népérien, il vient  $\beta = 0,85$ .  
De même avec les solutions 2 et 3, où cette fois-ci c'est la concentration initiale en ions oxonium qui est inchangée. On en déduit  $\frac{k_{a,3}}{k_{a,2}} = \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_3}{[\text{H}_3\text{O}^+]_2} \right)^\beta = \left( \frac{0,95}{1,58} \right)^\alpha = \frac{4,7 \cdot 10^{-6}}{8,3 \cdot 10^{-6}}$  et donc  $\alpha = 1,1$ . Ces résultats expérimentaux nous laissent penser que  $\alpha = \beta = 1$ .

**Partie 7**

**Réactions chimiques en solution  
aqueuse**



# Réactions acido-basiques

## L'essentiel du cours

### Contexte

Comment expliquer l'acidité ou la basicité des produits du quotidien ? Qu'est-ce que le pH d'une solution ? Comment est fixée sa valeur ? Comment la mesurer ?

Avant de répondre à ces nombreuses questions, nous présentons dans les tableaux ci-dessous les résultats de nos mesures de pH réalisées au laboratoire :

Liquides alimentaires	pH
Eau du robinet	8,1
Lait stérilisé	6,6
Eau minérale gazeuse	6,5
Boisson au cola	2,6
Vinaigre d'alcool (8%)	2,6
Jus de citron	2,4

Liquides ménagers (5 g pour 100 mL)	pH
Déboucheur à la soude	12,3
Gel javel	11,4
Détartrant WC	1,5
Eaux de mer	pH
St Coulomb (Ille et Vilaine)	8,0
Baie de Quiberon	7,8

## ■ 1 Notions essentielles sur les acides et les bases

- Qu'est-ce qu'un acide ? Qu'est-ce qu'une base ?

### Définition : Acide

Un **acide** est une espèce chimique susceptible de céder un ou plusieurs protons  $H^+$ . On parlera de « monoacide » dans le premier cas et de « polyacide » dans le second cas.

Un monoacide  $AH$  peut ainsi **se dissocier** selon  $AH = A^- + H^+$  en se transformant en sa **base conjuguée**  $A^-$ . On définit alors le couple acide/base :  $AH/A^-$ .

### Définition : Base

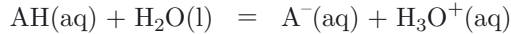
Une **base** est une espèce susceptible de capter un ou plusieurs protons  $H^+$ . On parlera de « monobase » dans le premier cas et de « polybase » dans le second cas.

Ainsi une monobase  $A^-$  peut **se protoner** selon  $A^- + H^+ = AH$  en se transformant en son **acide conjugué**  $AH$  avec lequel il forme le couple acide/base :  $AH/A^-$ .

Un proton  $H^+$  libéré par un acide est capté par une base, par exemple  $H_2O$  si le solvant est aqueux. En effet, un proton  $H^+$  ne reste jamais libre en solution.

□ **Qu'appelle-t-on constante d'acidité d'un couple acide/base ?**

La constante d'acidité d'un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  est la constante d'équilibre de la réaction :



Comme cela a été vu dans le chapitre 26, la loi d'équilibre chimique s'écrit  $Q_e = K$ . Nous devons donc expliciter le quotient réactionnel  $Q_e$  à partir des activités des constituants à l'équilibre :

$$Q_e = \frac{a_{\text{A}^-(\text{aq})} \cdot a_{\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})}}{a_{\text{AH}(\text{aq})} \cdot a_{\text{H}_2\text{O}(\text{l})}}$$

L'eau étant le solvant nous prendrons  $a_{\text{H}_2\text{O}(\text{l})} = 1$ . Nous considérerons en outre la solution suffisamment diluée pour que l'activité d'un soluté  $\text{A}_i$  soit identifiée à  $a_i = [\text{A}_i]/c^\circ$  avec  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{A}_i]$  en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Dans ces conditions :

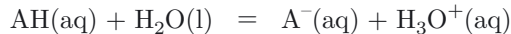
$$Q_e = \frac{[\text{A}^-]/c^\circ \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]/c^\circ}{[\text{HA}]/c^\circ \cdot 1} = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]c^\circ}$$



L'activité  $a_i$  d'un soluté  $\text{A}_i$  (grandeur sans dimension) s'identifie en solution suffisamment diluée à  $a_i = [\text{A}_i]/c^\circ$  avec  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{A}_i]$  en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Sa valeur est alors égale à celle de sa concentration  $[\text{A}_i]$  mesurée en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Par commodité d'écriture, dans la suite nous ne ferons pas figurer  $c^\circ$  dans les expressions faisant intervenir les activités des solutés et nous considérerons que les concentrations sont toutes exprimées en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

**Définition : Constante d'acidité**

On appelle constante d'acidité  $K_a$  d'un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  la constante d'équilibre de la réaction :



La condition d'équilibre s'écrit :

$$\frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} = K_a$$

On définit aussi :  $\text{p}K_a = -\log K_a$ .

□ **Quels sont les pouvoirs acido-basiques de l'eau ?**

L'eau est une **espèce amphotère** ou un **ampholyte**, car elle est à la fois la base du couple  $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$  et l'acide du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$ . Ces deux couples sont caractérisés par leur  $\text{p}K_a$ .

**Cas du couple  $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$  :**

La réaction entre l'acide  $\text{H}_3\text{O}^+$  et le solvant  $\text{H}_2\text{O}$  est :  $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ .

À l'équilibre chimique  $Q_e = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 1$ .

On en déduit la constante d'acidité du couple  $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$  :  $K_a(\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}) = 1$  et  $\text{p}K_a = 0$ .

**Cas du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$  :**

La réaction entre l'acide  $\text{H}_2\text{O}$  et le solvant  $\text{H}_2\text{O}$  est :  $\text{H}_2\text{O}(\text{l}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{OH}^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ .

Cette réaction particulière dans laquelle il y a un échange de proton entre deux molécules d'eau est appelée **autoprotolyse** de l'eau.

**Définition : Autoprotolyse de l'eau et produit ionique de l'eau**

L'autoprotolyse de l'eau est la réaction d'équation bilan :



Elle est caractérisée par une constante d'équilibre appelée produit ionique de l'eau  $K_e$ .

On précise qu'à 25 °C :  $K_e = 10^{-14,0}$ . On définit aussi  $\text{p}K_e = -\log K_e = 14,0$ .

Revenons à notre étude du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$ .

La loi de l'équilibre chimique s'écrit :  $\frac{[\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{1} = K_e = 10^{-14,0}$ .

On en déduit la constante d'acidité du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$  :  $K_a(\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-) = 10^{-14,0}$  et  $\text{p}K_a = 14,0$ .

**Couples de l'eau**

L'eau est une espèce amphotère qui intervient dans deux couples acido-basiques :  
le couple  $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$  dont le  $\text{p}K_a = 0$  et le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$  dont le  $\text{p}K_a = 14,0$ .

□ **Quelle est la force d'un acide ?**

Par définition **la force d'un acide est son pouvoir de dissociation**. Plus le  $K_a$  est grand ( $\text{p}K_a$  petit), plus la réaction de l'acide sur l'eau est thermodynamiquement favorisée dans le sens direct et plus l'acide est dissocié. Autrement dit, plus  $\text{p}K_a$  est faible, plus la force de l'acide est élevée.

Dans le cas où l'**acide** n'est que **partiellement dissocié**, on parle d'**acide faible**.

Dans le cas contraire où la réaction de l'acide avec l'eau est très favorisée, l'acide peut être considéré comme totalement dissocié :  $\text{AH}(aq) + \text{H}_2\text{O}(l) \longrightarrow \text{A}^-(aq) + \text{H}_3\text{O}^+(aq)$ .

On parle dans ce cas d'**acide fort** et sa **base** conjuguée, ne captant pas de proton, est dite **indifférente**.



Une solution aqueuse d'acide fort AH est composée exclusivement d'ions  $\text{A}^-$  et  $\text{H}_3\text{O}^+$  car l'acide est totalement dissocié.

□ **Quelle est la force d'une base ?**

Par définition **la force d'une base est son pouvoir à se protoner**. Étudions la réaction d'une base dans l'eau :  $\text{A}^-(aq) + \text{H}_2\text{O}(l) = \text{AH}(aq) + \text{OH}^-(aq)$ .

À l'équilibre chimique on a :  $K = \frac{[\text{AH}][\text{OH}^-]}{[\text{A}^-]} = \frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = \frac{K_e}{K_a}$ .

Ainsi, plus le  $K_a$  est petit ( $\text{p}K_a$  grand), plus la constante d'équilibre  $K$  est grande, plus la réaction de la base sur l'eau est thermodynamiquement favorisée dans le sens direct et plus la base est protonée. Autrement dit, plus  $\text{p}K_a$  est élevé, plus la force de la base est élevée.

Dans le cas où la **base** n'est que **partiellement protonée**, on parle de **base faible**.

Dans le cas contraire où la réaction de la base avec l'eau est très favorisée, la base peut être considérée comme totalement protonée :  $\text{A}^-(aq) + \text{H}_2\text{O}(l) \longrightarrow \text{AH}(aq) + \text{OH}^-(aq)$ .

On parle dans ce cas de **base forte** et son **acide** conjugué, ne cédant pas de proton, est dit **indifférent**.



Une solution aqueuse de base forte  $A^-$  est composée exclusivement de  $AH$  et  $OH^-$  car la base est totalement protonée.

□ Quel est l'acide (la base) le(la) plus fort(e) pouvant exister dans l'eau ?

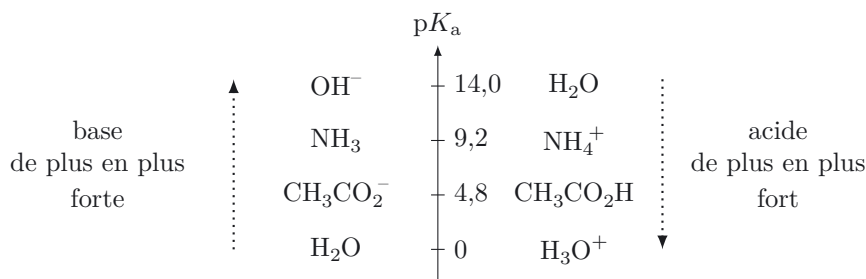
Tout acide  $AH$  dont le  $pK_a$  est inférieur au  $pK_a(H_3O^+/H_2O) = 0$  est considéré comme fort, c'est-à-dire comme totalement dissocié dans l'eau. À l'inverse, toute base  $A^-$  dont le  $pK_a$  est supérieur au  $pK_a(H_2O/OH^-) = 14,0$  est considérée comme forte, c'est-à-dire comme totalement protonée dans l'eau.



L'ion oxonium  $H_3O^+$  est l'acide le plus fort pouvant exister dans l'eau et l'ion hydroxyde  $OH^-$  la base la plus forte pouvant exister dans l'eau.

□ Qu'est-ce qu'une échelle de  $pK_a$  ?

Une échelle de  $pK_a$  est un axe vertical gradué de 0 à 14 sur lequel on précise les  $pK_a$  des couples  $(AH/A^-)$  étudiés en notant les bases à gauche de l'axe et les acides à droite :



Les acides et bases fortes ne sont pas représentés sur une échelle de  $pK_a$  car ils ont totalement disparu en solution aqueuse pour former  $H_3O^+$  et  $OH^-$ .

□ Quelles sont les espèces acido-basiques à connaître ?

Nom	Formule	Nature	Exemple
Acide chlorhydrique	$HCl$	Acide fort	Détartrant
Acide sulfurique	$H_2SO_4$	Diacide (1 <sup>re</sup> acidité forte)	Pluies acides
Acide nitrique	$HNO_3$	Acide fort	Pluies acides
Acide phosphorique	$H_3PO_4$	Triacide faible	Boisson au cola
Acide éthanóïque (ou acétique)	$CH_3CO_2H$	Acide faible	Vinaigre
Ion hydrogénocarbonate (ou bicarbonate)	$HCO_3^-$	Acide et base faible	Eau déminéralisée
Ammoniac	$NH_3$	Base faible	Déboucheur
Soude caustique	$NaOH$	Base forte	Déboucheur



□ **Qu'est-ce que le pH d'une solution ?**

**Définition : pH**

Le potentiel hydrogène (noté pH) est défini par  $\text{pH} = -\log a_{\text{H}_3\text{O}^+}$ . En solution très diluée :

$$\text{pH} = -\log \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ}$$

où  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  est la concentration de référence appelée concentration standard.



Il est courant d'utiliser l'expression simplifiée  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$  avec la concentration  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  exprimée en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

□ **Quel est le pH de l'eau pure ?**

Dans l'eau pure, la seule réaction acido-basique ayant lieu est l'autoprotolyse de l'eau. Ainsi, d'après le tableau d'avancement suivant en quantité de matière :

	$2 \text{H}_2\text{O}(\text{l})$	$=$	$\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$	$+$	$\text{OH}^-(\text{aq})$
à l'instant initial	$n_0$		0		0
à l'équilibre	$n_0 - 2\xi_e \simeq n_0$		$\xi_e$		$\xi_e$

On sait qu'elle produit autant d'ions oxonium que d'ions hydroxyde. La loi de l'équilibre chimique donne  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e$ , soit  $[\text{H}_3\text{O}^+]^2 = K_e$  et  $[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{K_e} = 10^{-7,0} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le pH de l'eau vaut 7,0. On parle dans ce cas de pH neutre.

□ **Qu'est-ce qu'une solution acide ? une solution basique ?**

Par définition, une solution acide a un  $\text{pH} < 7,0$ , alors qu'une solution basique a un  $\text{pH} > 7,0$ .

Parmi les solutions testées en laboratoire et dont les valeurs de pH ont été données en début de ce chapitre, on trouve des solutions acides : boisson au cola, vinaigre, détartrant WC... et des solutions basiques : l'eau de mer de St Coulomb, l'eau du robinet, le gel javel... .

□ **Quelles informations peut-on déduire de la connaissance du pH et du  $\text{p}K_a$  ?**

Repartons de la définition du  $\text{p}K_a$  et cherchons son lien avec le pH.

$$\text{p}K_a = -\log K_a = -\log \left( [\text{H}_3\text{O}^+] \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] - \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}, \text{ ce qui donne :}$$

$$(28.1) \quad \text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$$

Il est donc possible de distinguer les cas suivants :

- Si  $\text{pH} > \text{p}K_a$ , alors  $\log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} > 0$  donc  $[\text{A}^-] > [\text{AH}]$  :  $\text{A}^-$  prédomine.
- Si  $\text{pH} < \text{p}K_a$ , alors  $\log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} < 0$  donc  $[\text{AH}] > [\text{A}^-]$  : AH prédomine.
- Si  $\text{pH} = \text{p}K_a$ , alors  $\log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} = 0$  donc  $[\text{A}^-] = [\text{AH}]$ .

Plus l'écart entre pH et  $\text{p}K_a$  augmente, plus  $\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_a}$  augmente (et réciproquement).

— Ainsi pour  $\text{pH} > \text{p}K_a + 1$ ,  $\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$  > 10 :

$[\text{AH}]$  est alors couramment considérée comme négligeable par rapport à  $[\text{A}^-]$ .

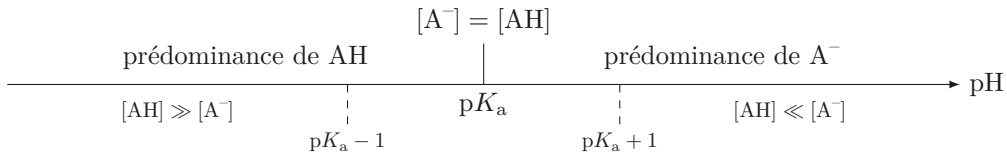
— Et pour  $\text{pH} < \text{p}K_a - 1$ ,  $\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} > \frac{1}{10}$  :

$[\text{A}^-]$  est alors couramment considérée comme négligeable par rapport à  $[\text{AH}]$ .

Ces conclusions peuvent se résumer sous la forme d'un diagramme : le diagramme de prédominance.

#### Définition : Diagramme de prédominance

Un diagramme de prédominance pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  est un axe gradué en  $\text{pH}$ , sur lequel on reporte le domaine de prédominance de chacune des espèces constitutives du couple et présentes au sein d'une solution à l'équilibre chimique.



Tout ce qui précède est généralisable au cas d'un polyacide ou d'une polybase. Considérons par exemple le cas d'un diacide ( $\text{AH}_2$ ). Pour chaque couple  $\text{AH}_2/\text{AH}^-$  et  $\text{AH}^-/\text{A}^{2-}$ , le raisonnement ci-dessus est valable. Les différents diagrammes peuvent être regroupés en un seul faisant apparaître les  $\text{p}K_a$  des différents couples.



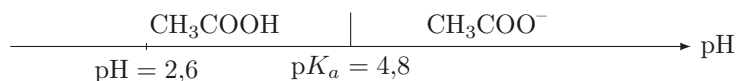
#### Méthode 28.1 : Tracer et exploiter un diagramme de prédominance

- Identifier le couple acide/base étudié.
- Tracer un axe horizontal de  $\text{pH}$  en plaçant la frontière à  $\text{p}K_a$ .
- Placer le domaine de prédominance de l'acide (la base) pour  $\text{pH} < \text{p}K_a$  ( $\text{pH} > \text{p}K_a$ ).
- Placer le point correspondant à la valeur du  $\text{pH}$  de la solution à l'équilibre.
- En déduire l'espèce prédominante.
- En déduire le caractère négligeable (ou non) des autres espèces présentes.

➔ Exercice (28.2)

□ Quelle espèce acido-basique prédomine dans le vinaigre testé à  $\text{pH} = 2,6$  ?

Le couple acido-basique mis en jeu ici est le couple ( $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$ ) dont le  $\text{p}K_a = 4,8$ . Son diagramme de prédominance est représenté ci-dessous.



Nous voyons que pour  $\text{pH} = 2,6$  nous sommes loin de la frontière dans le domaine de prédominance de l'acide acétique. Celui-ci est donc largement prédominant et sa base conjuguée est en quantité négligeable. Ce qui est confirmé par le calcul :

$$\frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = \frac{K_a}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = 10^{-\text{p}K_a + \text{pH}} = 10^{(-4,8+2,6)} = 10^{-2,2}$$

L'acide faible est dissocié à moins de 1%.

La connaissance du  $\text{pH}$  et du  $\text{p}K_a$  nous permet ainsi de déterminer le rapport des concentrations entre l'acide et la base d'un même couple.

#### □ Comment aller plus loin en déterminant les concentrations elles-mêmes ?

Pour réaliser une solution aqueuse d'un acide, on apporte une quantité de matière  $n$  d'acide AH dans un volume  $V$  d'eau. Cet acide réagissant avec l'eau, la solution contient à l'équilibre l'acide AH mais aussi sa base conjuguée  $\text{A}^-$ , de sorte que  $n = n_{\text{AH}} + n_{\text{A}^-}$ . Ainsi, la conservation de la matière s'écrit, en raisonnant :

— pour un volume  $V$  de solution et en notant  $c = n/V$  la concentration en acide apporté :

$$(28.2) \quad c = [\text{AH}] + [\text{A}^-] \text{ avec toujours } \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_a}$$

— pour un nombre de moles  $n$  apporté et en notant  $x_{\text{AH}} = n_{\text{AH}}/n$  et  $x_{\text{A}^-} = n_{\text{A}^-}/n$  les titres molaires en AH et en  $\text{A}^-$  :

$$(28.3) \quad 1 = x_{\text{AH}} + x_{\text{A}^-} \text{ avec cette fois-ci } \frac{x_{\text{A}^-}}{x_{\text{AH}}} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_a}$$

Les concentrations ou les titres molaires dépendent directement du  $\text{pH}$ , ce qui prend la forme d'un nouveau diagramme : le diagramme de distribution.

#### Définition : Diagramme de distribution

Un diagramme de distribution pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  est un graphique donnant le titre molaire (ou la concentration) de chacune des espèces constitutives du couple en fonction du  $\text{pH}$  de la solution à l'équilibre chimique.



Tout ce qui précède, valable pour un monoacide AH (comme l'acide éthanoïque présent dans le vinaigre), est généralisable au cas d'un polyacide (comme l'acide oxalique présent dans la rhubarbe noté  $\text{AH}_2$ ). Il y aura alors autant de courbes au sein du diagramme que d'espèces acido-basiques (par exemple  $\text{AH}_2$ ,  $\text{AH}^-$  et  $\text{A}^{2-}$ ).

Le diagramme de distribution vient compléter le diagramme de prédominance présenté précédemment. Deux exemples sont présentés ci-dessous.

#### Premier exemple : l'acide éthanoïque (figure 28.1)

Pour ce monoacide, le diagramme comporte deux courbes correspondant chacune à une des espèces du couple. Nous retrouvons :

— la frontière entre les domaines de prédominance des deux espèces :  $\text{pH} = \text{p}K_a$  lorsque  $[\text{A}^-] = [\text{AH}]$ , à l'intersection des courbes de distribution des deux espèces du couple ;

- une zone de prédominance pour chaque espèce, lorsque son titre massique est supérieur à celui de l'autre.

Sur la figure 28.1, il est possible de vérifier rapidement qu'à  $\text{pH} = 2,6$  (vinaigre) l'ion acétate  $\text{CH}_3\text{COO}^-$  est en quantité tout à fait négligeable dans la solution.

**Deuxième exemple :** l'acide oxalique (figure 28.2)

Pour ce diacide, le diagramme comporte trois courbes :

- la courbe la plus à gauche correspond à l'espèce acide  $\text{AH}_2$  du couple  $\text{AH}_2/\text{AH}^-$  ;
- la courbe la plus à droite correspond à l'espèce basique  $\text{A}^{2-}$  du couple  $\text{AH}^-/\text{A}^{2-}$  ;
- la courbe du milieu correspond à l'espèce amphotère  $\text{AH}^-$ , à la fois espèce basique du couple  $\text{AH}_2/\text{AH}^-$  et espèce acide du couple  $\text{AH}^-/\text{A}^{2-}$ .

Par exemple sur la figure 28.2, il est possible de déterminer les  $\text{p}K_a$  des deux couples à partir des points d'intersection de ces différentes courbes :  $\text{p}K_a(\text{AH}_2/\text{AH}^-) = 1,2$  et  $\text{p}K_a(\text{AH}^-/\text{A}^{2-}) = 4,3$ .

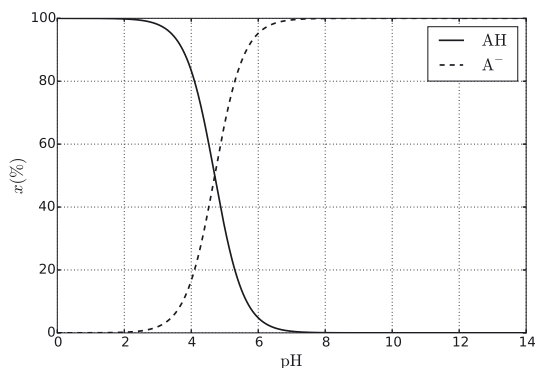


Figure 28.1. Acide éthanoïque.

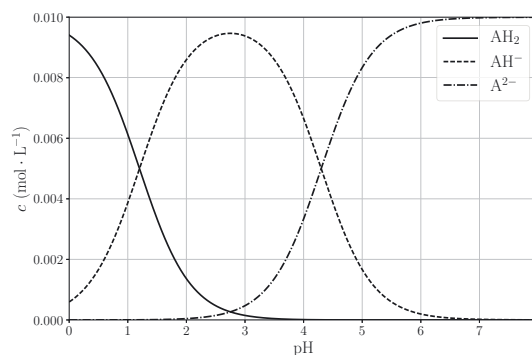


Figure 28.2. Acide oxalique.

### Méthode 28.2 : Exploiter un diagramme de distribution

- Identifier l'espèce associée à chacune des courbes.
- Déterminer la valeur du  $\text{p}K_a$  d'un couple en lisant l'abscisse de l'intersection des deux courbes de distribution du couple étudié.
- Déterminer la concentration (ou le pourcentage) des espèces pour une valeur de  $\text{pH}$ .

➔ Exercices (28.3) (28.9)

#### □ En manque d'équation ?

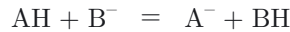
Si vous recherchez une équation supplémentaire entre les concentrations des différentes espèces mises en jeu dans le système étudié, il est possible d'écrire l'équation traduisant l'électroneutralité de la solution (égalité des concentrations des charges positives et négatives). Par exemple :

- si chaque ion n'est porteur que d'une seule charge :  $[\text{A}^-] + [\text{OH}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$  ;
- si certains ions sont porteurs de plusieurs charges :  $2[\text{A}^{2-}] + [\text{A}^-] + [\text{OH}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$ .

## ■ 2 Réactions entre acides et bases

### □ Comment déterminer la constante d'équilibre d'une réaction acide-base ?

Lorsqu'on met en présence l'espèce acide d'un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  et l'espèce basique d'un couple  $\text{BH}/\text{B}^-$ , le réactif acide  $\text{AH}$  cède un proton au réactif basique  $\text{B}^-$  selon l'équation bilan :



La loi de l'équilibre chimique permet d'écrire à l'aide des activités :

$$K = \frac{a_{\text{A}^-} \cdot a_{\text{BH}}}{a_{\text{AH}} \cdot a_{\text{B}^-}} = \frac{a_{\text{A}^-} \cdot a_{\text{H}_3\text{O}^+}}{a_{\text{AH}}} \frac{a_{\text{BH}}}{a_{\text{B}^-} \cdot a_{\text{H}_3\text{O}^+}} = \frac{K_a(\text{AH}/\text{A}^-)}{K_a(\text{BH}/\text{B}^-)}$$

Cela se résume de la manière suivante :

#### Méthode 28.3 : Écrire et déterminer la constante d'une réaction acido-basique

- Identifier le réactif acide  $\text{AH}$  et le couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  dont il fait partie.
- Identifier le réactif basique  $\text{B}^-$  et le couple  $\text{BH}/\text{B}^-$  dont il fait partie.
- Écrire l'équation bilan de la réaction  $\text{AH} + \text{B}^- = \text{A}^- + \text{BH}$ .
- Écrire la loi de l'équilibre chimique :  $K = Q_e$ .
- Introduire  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  au numérateur et au dénominateur pour identifier les expressions des constantes d'acidité des couples :

$$K = \frac{K_a(\text{AH}/\text{A}^-)}{K_a(\text{BH}/\text{B}^-)} = 10^{\text{p}K_a(\text{BH}/\text{B}^-) - \text{p}K_a(\text{AH}/\text{A}^-)}$$

➔ Exercices (28.1) (28.5)

### □ Comment prévoir le caractère favorisé ou non d'une réaction ?

Nous avons vu au chapitre 26 que la valeur de la constante d'équilibre  $K$  nous renseigne sur le caractère thermodynamiquement favorisé dans le sens direct ( $K > 1$ ) ou non ( $K < 1$ ) de la réaction.

$K$  pouvant s'exprimer en fonction de la différence des  $\text{p}K_a$  des deux couples intervenant dans la réaction, ce critère peut se décliner de deux autres manières en utilisant l'échelle de  $\text{p}K_a$  ou le diagramme de prédominance. Ceci est exposé dans l'en-cadré de la méthode 28.4.



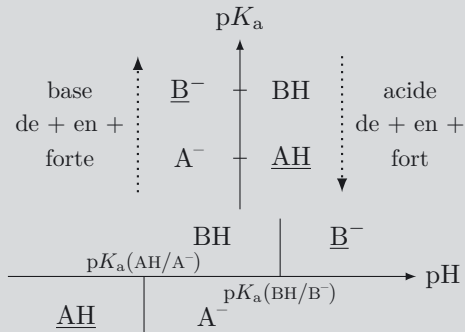
Un écart de  $\text{p}K_a$  supérieur à 4 unités suffit en général pour pouvoir considérer la réaction quantitative. En effet :

$$\text{p}K_a(\text{BH}/\text{B}^-) - \text{p}K_a(\text{AH}/\text{A}^-) > 4 \implies 10^{\text{p}K_a(\text{BH}/\text{B}^-) - \text{p}K_a(\text{AH}/\text{A}^-)} = K > 10^4$$

**Méthode 28.4 : Prévoir le caractère favorisé ou non d'une réaction**

Soient l'acide AH du couple AH/A<sup>-</sup> et la base B<sup>-</sup> du couple BH/B<sup>-</sup>.

**Premier cas :**  $pK_a(\text{BH}/\text{B}^-) > pK_a(\text{AH}/\text{A}^-)$  :

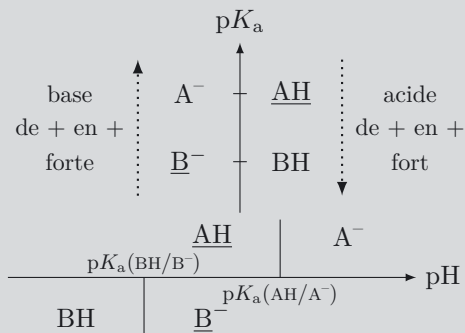


La réaction entre AH et B<sup>-</sup> est favorisée thermodynamiquement ( $K > 1$ ).

Elle est d'autant plus favorisée que :

- la différence  $pK_a(\text{BH}/\text{B}^-) - pK_a(\text{AH}/\text{A}^-)$  est grande,
  - l'acide et la base sont forts,
  - leurs domaines disjoints sont éloignés.
- (traduisant l'incompatibilité de AH et B<sup>-</sup>)

**Deuxième cas :**  $pK_a(\text{BH}/\text{B}^-) < pK_a(\text{AH}/\text{A}^-)$  :



La réaction entre AH et B<sup>-</sup> est défavorisée thermodynamiquement ( $K < 1$ ).

Elle est d'autant plus défavorisée que :

- la différence  $pK_a(\text{AH}/\text{A}^-) - pK_a(\text{BH}/\text{B}^-)$  est grande,
  - l'acide et la base sont faibles,
  - la zone commune à leurs domaines est grande.
- (traduisant la compatibilité de AH et B<sup>-</sup>)

➔ Exercice (28.1)

□ Comment déterminer la concentration des espèces acido-basiques à l'équilibre ?

**Une première méthode est théorique :**

À l'aide de la loi de l'équilibre chimique  $Q_e = K$  il est possible de déterminer l'avancement de la réaction à l'équilibre donc les concentrations recherchées.

**Une seconde méthode est expérimentale :**

Nous pouvons réaliser un dosage acido-basique qui consiste à mettre en œuvre **une réaction quantitative** entre l'espèce à titrer et une espèce titrante qui présente le caractère acido-basique complémentaire. Ainsi, on dose un acide avec une base et une base avec un acide en s'assurant au préalable du caractère quantitatif de la réaction.

Le suivi du dosage peut être réalisé par :

- **colorimétrie** (utilisation d'un indicateur coloré dont la couleur change lorsque le dosage est fini, c'est-à-dire à l'équivalence) ;
- **pH-métrie** : le pH de la solution est mesuré au cours du dosage à l'aide d'un pH-mètre ;
- **conductimétrie** : la conductivité de la solution est mesurée à l'aide d'un conductimètre (dont le principe de fonctionnement a été présenté dans le chapitre 27).

□ Comment fonctionne un pH-mètre ?

**Définition : pH-mètre**

Un pH-mètre est un voltmètre qui mesure la différence de potentiel entre une électrode de verre (dont le potentiel dépend du pH de la solution) et une électrode de référence dont le potentiel est fixe (par exemple l'électrode au calomel saturée ECS) plongeant dans la solution étudiée. Cette tension est convertie en valeur de pH (après étalonnage).

Il est ainsi possible de suivre l'évolution du pH d'une solution au cours d'un dosage.

□ Que se passe-t-il en solution au cours d'un dosage ?

Étudions une réaction de dosage du type  $AH + B^- = A^- + BH$ . Une telle réaction doit être **quantitative**, donc avoir une constante d'équilibre  $K \gg 1$ .

Plaçons-nous dans le cas où on souhaite doser un volume  $v_a$  d'acide AH (le titré) de concentration  $c_a$  indéterminée par une base  $B^-$  (le titrant) de concentration  $c_b$  connue.

Dans le tableau d'avancement suivant,  $c_a v_a$  représente la quantité d'acide dosé et  $c_b v$  la quantité de titrant apportée au cours du dosage lorsqu'un volume  $v$  a été versé.  $\xi_e$  est l'avancement (en mol) de la réaction à l'équilibre au cours du dosage.

	AH	+	B <sup>-</sup>	→	A <sup>-</sup>	+	BH
état initial	$c_a v_a$		$c_b v$		0		0
état d'équilibre	$c_a v_a - \xi_e$		$c_b v - \xi_e$		$\xi_e$		$\xi_e$

L'opération de dosage présente plusieurs étapes.

- Au début du dosage, le volume  $v$  de titrant versé n'est pas suffisant pour neutraliser tout l'acide. Le titré est en excès et le titrant est par conséquent le réactif limitant. À l'équilibre :  $\xi_e = c_b v$ .
- Lorsque le volume  $v$  versé est juste suffisant pour neutraliser l'acide, on dit qu'on a atteint l'équivalence. C'est le cas particulier où le titré et le titrant sont tous les deux limitants. Dans ce cas, en notant  $v_e$  le volume à l'équivalence, nous avons  $\xi_e = c_a v_a = c_b v_e$ .
- Après l'équivalence, le titrant versé est apporté en excès et le titré est désormais le réactif limitant. L'avancement  $\xi_e$  n'évolue plus et vaut  $\xi_e = c_a v_a$ .

**Définition : Équivalence**

À l'équivalence, le réactif titrant est versé en quantité juste suffisante pour consommer tout le réactif titré : les quantités de matière des réactifs titrant et titré sont donc apportées dans les proportions stœchiométriques. On dit aussi qu'à l'équivalence on change de réactif limitant :

- avant l'équivalence, le titrant est le réactif limitant ;
- après l'équivalence, le titré est le réactif limitant.

□ Comment exploiter le résultat d'un dosage ? Comment déterminer l'équivalence ?

Étudions le cas d'un dosage réalisé en laboratoire afin de vérifier l'information d'une étiquette de détartrant pour WC indiquant 6,75 g d'acide chlorhydrique (HCl) pour 100 g de solution.

Lors de la fabrication industrielle du détartrant, l'acide chlorhydrique (qui est un acide fort) a réagi totalement avec l'eau. La solution contient donc des ions chlorure  $Cl^-$  et des ions oxonium  $H_3O^+$ .

Nous avons réalisé le dosage des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  par une solution d'hydroxyde de sodium ( $\text{Na}^+ \text{OH}^-$ ), à l'aide d'un suivi pH-métrique. Rappelons que  $\text{OH}^-$  est une base forte. La réaction de dosage est quantitative :



Expérimentalement, nous avons introduit 5,00 g de détartrant dans une fiole jaugée de 100 mL complétée avec de l'eau déminéralisée. Un volume  $v_a = 10,0$  mL de cette solution a ensuite été placé dans un bécher tandis que la solution d'hydroxyde de sodium à  $c_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  a été placée dans une burette. Un volume d'eau a été rajouté dans le bécher afin d'immerger correctement les électrodes.

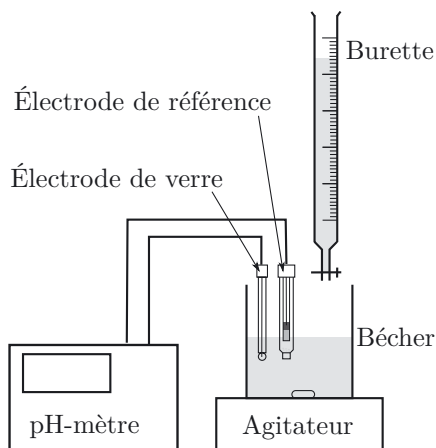


Figure 28.3. Montage de dosage acido-basique pH-métrique.

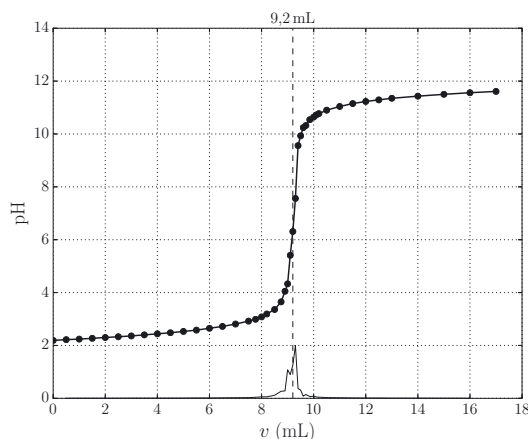


Figure 28.4. Dosage du détartrant.

À l'équivalence, la quantité d'ions hydroxyde versée a neutralisé tous les ions oxonium présents initialement dans la solution :  $n_{\text{OH}^-}(\text{versé à l'éq}) = n_{\text{H}_3\text{O}^+}(\text{initial}) \Leftrightarrow c_b v_e = c_a v_a = n_a$ .

Comment déterminer le volume  $v_e$  à l'équivalence ?

Il faut savoir que **le changement de réactif limitant à l'équivalence se traduit par une brutale variation de pH autour d'un point d'inflexion qui correspond à l'équivalence.**

Ainsi, en calculant et en traçant la dérivée  $\frac{dpH}{dv}$  en fonction de  $v$ , on trouve le volume  $v_e$  rendant maximale cette dérivée. (Il est aussi possible d'utiliser la méthode des tangentes vue en terminale.)

Dans le cas de notre dosage, nous pouvons lire sur la courbe (figure 28.4)  $v_e = 9,2$  mL et calculer la quantité de matière présente dans les 10 mL dosés :  $n_a = c_b v_e = 9,2 \cdot 10^{-4}$  mol. Nous en déduisons la quantité  $n'_a = 10n_a = 9,2 \cdot 10^{-3}$  mol présente dans la solution initiale de 100 mL contenant 5,00 g de détartrant.

Pour finir sachant que  $M(\text{HCl}) = 36,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , la masse  $m(\text{HCl})$  contenue dans 100 g de détartrant est :  $m(\text{HCl}) = 20n'_a M(\text{HCl}) = 6,7 \text{ g}$ . L'information de l'étiquette est validée !

□ Les courbes de dosage ont-elles toujours la même allure ?

La réponse est bien sûr négative. Dans la partie précédente, un monoacide a été dosé par une base forte. Le pH de la solution a donc augmenté au cours du dosage et un saut de pH a eu lieu à



l'équivalence. Dans le cas du dosage d'une monobase par un acide fort c'est l'inverse : le pH est décroissant. L'équivalence est quant à elle toujours repérée par un saut de pH.

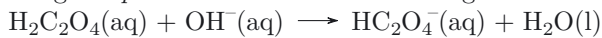
□ **Comment exploiter le résultat d'un dosage d'un polyacide ?**

Pour répondre à cette question, nous avons étudié expérimentalement le cas particulier de l'acide oxalique dihydraté ( $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ) de masse molaire  $M = 126,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Nous avons dissous une masse  $m$  d'acide oxalique dihydraté dans 100 mL d'eau déminéralisée.

Un volume  $v_a = 10,0 \text{ mL}$  de cette solution à la concentration  $c_a$  inconnue a été placé dans un bécher et la solution titrante ( $(\text{Na}^+\text{OH}^-)$  à  $c_b = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) a été placée dans une burette.

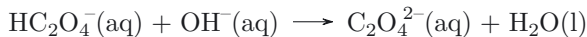
L'acide oxalique est un diacide dont les  $\text{p}K_a$  sont  $\text{p}K_{a1} = 1,2$  et  $\text{p}K_{a2} = 4,3$ .

L'acide oxalique étant un diacide, on peut envisager *a priori* deux réactions de dosage :



$$\text{avec } K_1 = \frac{K_a(\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4/\text{HC}_2\text{O}_4^-)}{K_a(\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-)} = \frac{K_{a1}}{K_e} \text{ soit}$$

$$K_1 = 10^{14,0-1,2} = 10^{12,8} \gg 1.$$



$$\text{avec } K_2 = \frac{K_a(\text{HC}_2\text{O}_4^-/\text{C}_2\text{O}_4^{2-})}{K_a(\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-)} = \frac{K_{a2}}{K_e} \text{ soit}$$

$$K_2 = 10^{14,0-4,3} = 10^{9,7} \gg 1.$$

Ces deux réactions sont bien quantitatives.

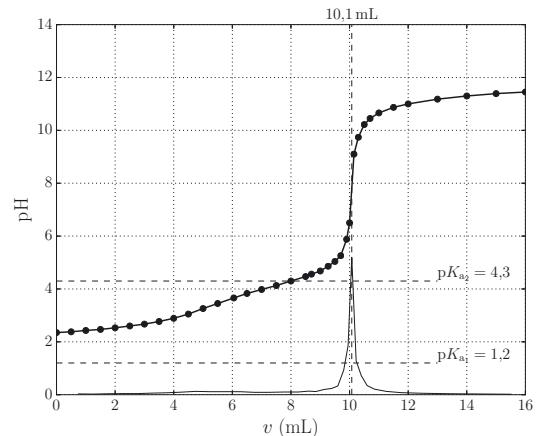
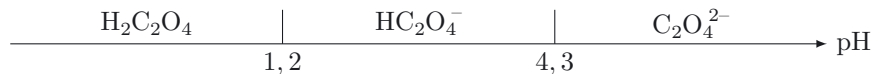


Figure 28.5. Dosage de l'acide oxalique.

La courbe de dosage obtenue par pH-métrie est donnée ci-dessus : un saut de pH est visible à  $v_e = 10,1 \text{ mL}$ . Comment exploiter ce saut de pH ?

Grâce à la mesure du pH, il est possible d'identifier les espèces présentes dans la solution au cours du dosage. Pour cela, utilisons le diagramme de prédominance de l'acide oxalique :



Dans la solution initiale d'acide oxalique  $\text{pH} = 2,3$ . Nous savons alors que l'acide oxalique est déjà très dissocié en réagissant avec le solvant :  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{HC}_2\text{O}_4^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ .

La solution initiale contient alors deux acides :  $\text{H}_3\text{O}^+$  et  $\text{HC}_2\text{O}_4^-$ .

À l'équivalence  $\text{pH} \simeq 8 > \text{p}K_{a2} + 2$ . On en déduit que la solution ne contient que la dibase  $\text{C}_2\text{O}_4^{2-}$ . Les deux acidités ont donc été dosées.

Il faut être prudent pour réaliser le bilan de matière au cours d'un tel dosage. En effet les ions  $\text{OH}^-$  ont d'abord réagi avec  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$  et les ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  issus de la dissociation du diacide, puis avec l'ampholyte  $\text{HC}_2\text{O}_4^-$ . La présence d'un unique saut de pH indique que les deux acidités de l'acide oxalique ont été dosées simultanément et que le saut de pH correspond à la fin du dosage.

La réaction globale du dosage est  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4(\text{aq}) + 2\text{OH}^-(\text{aq}) \longrightarrow \text{C}_2\text{O}_4^{2-}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ . Pour atteindre l'équivalence, il a donc fallu apporter deux fois plus d'ions hydroxyde que d'acide oxalique.

$$n_{\text{OH}^-}(\text{versé à l'éq}) = 2n_{\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4}(\text{initial}) \quad \text{soit} \quad c_b v_e = 2c_a v_a$$

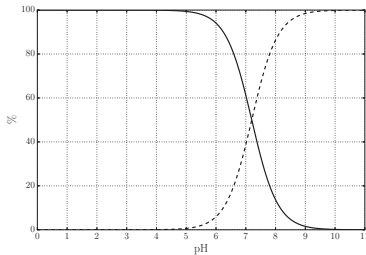
On en déduit la quantité d'acide oxalique apportée dans les 10 mL de solution titrés :  
 $c_a v_a = c_b v_e / 2 = 5,1 \cdot 10^{-4}$  mol, puis la masse  $m$  prélevée initialement :  $m = 10 c_a v_a M = 0,64$  g.



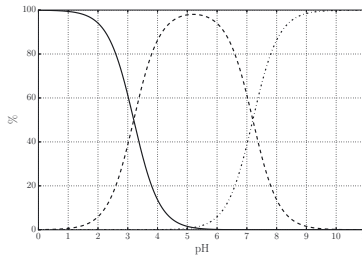
Lors du dosage d'un polyacide (ou d'une polybase) les différentes acidités (ou basicités) seront dosées simultanément si les  $pK_a$  sont trop proches. De manière générale, il faut  $\Delta pK_a > 4$  pour pouvoir séparer les dosages et observer différents sauts de pH.

# Interro de cours

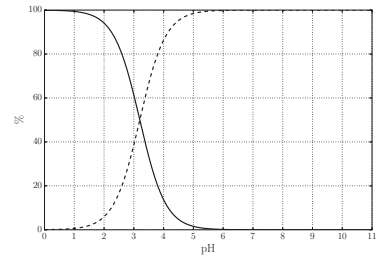
1. Le fluorure d'hydrogène HF est un gaz qui se dissout très bien en solution aqueuse. Le  $pK_a$  du couple associé vaut 3,2. HF en solution aqueuse se comporte comme :
  - (a) un acide fort ;
  - (b) un acide faible ;
  - (c) une base faible.
2. Identifier la(les) affirmation(s) exacte(s) si la solution obtenue a un  $pH = 4,0$ .
  - (a) L'espèce prédominante est HF.
  - (b) L'espèce prédominante est  $F^-$  et on peut négliger la présence de HF.
  - (c) La concentration en  $F^-$  est environ 6 fois plus importante que la concentration en HF.
3. Parmi les courbes de distribution ci-dessous, quelle est la courbe correspondant au(x) couple(s) dont fait partie l'acide fluorhydrique ?



courbe (a)



courbe (b)



courbe (c)

4. Pour doser une solution d'acide fluorhydrique, il faut utiliser une solution titrante :
  - (a) d'acide fort ;
  - (b) de base forte ;
  - (c) de base faible.
5. Une solution titrante de soude obtenue par dissolution de pastilles solides de  $NaOH(s)$  dans l'eau, contient de manière significative :
  - (a) des molécules  $NaOH(aq)$  ;
  - (b) des ions  $Na^+(aq)$  et  $OH^-(aq)$  ;
  - (c) des ions  $NaOH_2^+(aq)$  et  $OH^-(aq)$  ;
  - (d) des ions  $NaO^-(aq)$  et  $H_3O^+(aq)$ .
6. La réaction de dosage de HF par  $NaOH$  a pour constante d'équilibre :
  - (a)  $K = 10^{10,8}$  ;
  - (b)  $K = 10^{3,2}$  ;
  - (c)  $K = 10^{-10,8}$ .

## Exercices

### Exercice 28.1 Prévisions de réactions

➔ Méthodes (28.4) (28.3)

Soient les solutions aqueuses A,B,C,D et E, préparées avec  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  du corps pur donné dans le tableau suivant. On donne aussi les  $pK_a$  des couples acide/base associés.

A	$\text{NH}_4\text{Cl}$
B	$\text{NaOH}$
C	$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$
D	$\text{NaHCO}_3$
E	$\text{HCl}$

Acide/Base	$pK_a$
$\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$	9,25
$\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$	10,33
$\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$	6,35
$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CO}_2^-$	4,75

Acide/Base	$pK_a$
$\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$	0
$\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-$	14,0

On mélange 10 mL d'une des solutions avec 10 mL d'une autre, par exemple la solution A est mélangée avec la solution B.

- Déterminer les paires de solutions dont le mélange donne lieu à une réaction, avec une constante d'équilibre supérieure à 1. Écrire les équations de ces réactions.
- Parmi ces paires, déterminer celles dont la réaction a un avancement supérieur à 99% (réaction totale).

### Exercice 28.2 Diagramme de prédominance

➔ Méthode (28.1)

L'eau en contact avec l'atmosphère est souvent légèrement acide en raison du dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  dissous. La molécule de  $\text{CO}_2$  est solvatée sous la forme d'acide carbonique  $\text{H}_2\text{CO}_3$ , un diacide faible dont les  $pK_a$  sont donnés ci-dessous. Par ailleurs, le contact avec les roches calcaires peut apporter des ions basiques  $\text{CO}_3^{2-}$  (ions carbonate).

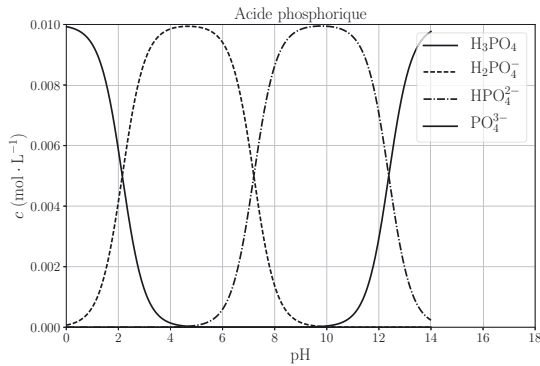
Acide/Base	$pK_a$
$\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$	6,4
$\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$	10,3

- Faire un diagramme de prédominance pour l'acide carbonique.
- Quelles sont les espèces prédominantes dans une eau gazeuse de  $\text{pH} = 6,5$  ?
- Même question pour une eau de mer de  $\text{pH} = 7,8$  (prélevée dans la baie de Quiberon) ?

### Exercice 28.3 Acide phosphorique

➔ Méthode (28.2)

L'acide phosphorique  $\text{H}_3\text{PO}_4$  est un triacide. La figure donnée page suivante montre le diagramme de distribution d'une solution aqueuse d'acide phosphorique.



1. Quelle est la concentration en acide phosphorique de cette solution ? Écrire l'équation traduisant la conservation de la matière.
2. Quels sont les  $pK_a$  de l'acide phosphorique ?
3. Pour une solution de  $pH = 4,0$ , quelles approximations peut-on faire pour les concentrations ? Calculer  $[H_3PO_4]$ .
4. Pour une solution de  $pH = 1,0$ , quel est le taux de dissociation de  $H_3PO_4$  ?

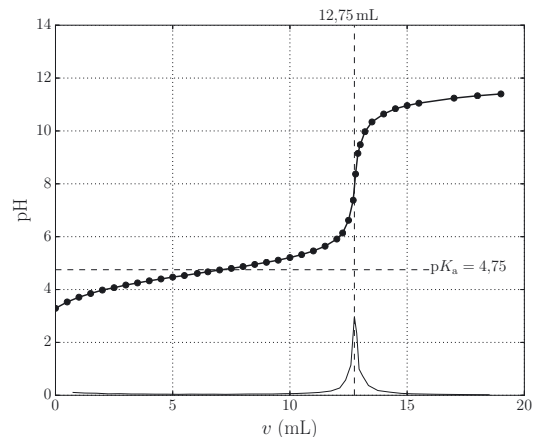
### Exercice 28.4 Acide acétique du vinaigre

Le vinaigre est obtenu par fermentation acétique soit d'une solution aqueuse d'éthanol (vinaigre d'alcool), soit d'un vin (vinaigre de vin). La fermentation acétique est effectuée par des bactéries, qui oxydent l'éthanol  $CH_3CH_2OH$  en acide éthanoïque  $CH_3CO_2H$ , appelé aussi acide acétique. Il peut arriver que cette fermentation se produise dans le vin de table, ce qui lui donne un goût aigre désagréable.

La base conjuguée de l'acide éthanoïque est l'ion éthanoate  $CH_3CO_2^-$ . Le  $pK_a$  de ce couple est  $pK_a = 4,75$ . On donne le produit ionique de l'eau  $[H_3O^+][OH^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

On étudie un vinaigre d'alcool du commerce, dont le  $pH$  mesuré est  $pH = 2,6$ . Afin de doser l'acidité de ce vinaigre, on prépare tout d'abord une solution aqueuse contenant 10,0 mL du vinaigre pour 200,0 mL.

Un volume  $v_1 = 20,0$  mL de cette solution diluée est placé dans un bécher dans lequel on place deux électrodes pour la mesure du  $pH$ . De l'eau est ajoutée pour obtenir l'immersion des électrodes. Une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium  $NaOH$  de concentration  $c = 0,10$  mol · L<sup>-1</sup> est placée dans une burette. Le dosage consiste à verser progressivement cette solution dans le bécher, tout en suivant l'évolution du  $pH$ . La figure ci-contre montre le  $pH$  en fonction du volume  $v$  de solution de  $NaOH$  versé.



L'équivalence est repérée par le saut de  $pH$ , qui se produit pour un volume versé  $v_{eq} = 12,75$  mL (volume pour lequel la dérivée de  $pH$  en fonction de  $v$  est maximale).

1. Écrire la réaction de  $CH_3CO_2H$  avec  $OH^-$ . Calculer sa constante d'équilibre et conclure.
2. Calculer le nombre de moles d'acide éthanoïque dans la solution diluée dosée, puis la concentration en acide éthanoïque dans le vinaigre (non dilué).

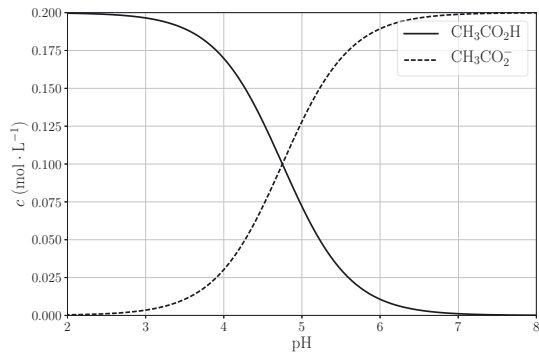
- Calculer la masse d'acide éthanóïque pour 100 g de vinaigre. On donne les masses molaires :  $M_C = 12,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_O = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_H = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Calculer les concentrations de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  et de  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-$  dans le vinaigre.

### Exercice 28.5 Tampon éthanóïque

#### ➔ Méthode (28.3)

Une solution tampon est une solution dont le pH varie très peu lorsqu'on lui ajoute un acide ou une base. Une manière simple de l'obtenir est de préparer une solution avec un acide faible et sa base conjuguée.

On considère un tampon éthanóïque, préparé en apportant  $c_a = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'acide éthanóïque ( $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$ ) et  $c_b = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'éthanóate de sodium ( $\text{CH}_3\text{CO}_2^-, \text{Na}^+$ ). Le  $\text{p}K_a$  de l'acide éthanóïque est  $\text{p}K_a = 4,75$ . La figure ci-contre montre les concentrations de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  et de  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-$  en fonction du pH (courbes de distribution).



On rappelle le produit ionique de l'eau :  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

- Écrire la réaction de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  avec  $\text{H}_2\text{O}$ . Calculer sa constante d'équilibre.
- Écrire la réaction de  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-$  avec  $\text{H}_2\text{O}$ . Calculer sa constante d'équilibre.
- Justifier que  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] \simeq c_a$  et  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] \simeq c_b$ . En déduire le pH de la solution tampon et placer son point représentatif sur les courbes de distribution.
- Soit un volume 100 mL de cette solution tampon, auquel on ajoute  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$  d'hydroxyde de sodium NaOH.
  - Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  avec  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  et calculer sa constante d'équilibre.
  - En déduire les nouvelles concentrations de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  et  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-$ , puis calculer le pH.
  - Placer les points représentatifs de la solution sur les courbes de distribution.
- En utilisant les courbes de distribution, montrer qu'il est possible de choisir de nouvelles concentrations  $c'_a$  et  $c'_b$  pour obtenir une solution tampon avec  $\text{pH} = 4,0$  (la concentration totale apportée reste égale à  $0,200 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ). Comment cette solution réagit-elle à un ajout de base forte? Comparer son pouvoir tampon à celui de la solution précédente.

### Exercice 28.6 Pluie acide

Le phénomène de pluies acides est observé dans de nombreuses régions du monde. Il est en partie causé par la présence de dioxyde de soufre ( $\text{SO}_2$ ) et d'oxydes d'azote ( $\text{NO}$  et  $\text{NO}_2$ ) dans l'atmosphère, gaz issus de la combustion du pétrole.  $\text{SO}_2$  est oxydé en  $\text{SO}_3$ , qui s'hydrate en acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  que l'on retrouve dans l'eau de pluie. Les oxydes d'azote conduisent de même à la présence d'acide nitrique  $\text{HNO}_3$  dans la pluie. On rencontre aussi de l'acide chlorhydrique  $\text{HCl}$ , issu de l'incinération des déchets, et de l'ammoniac  $\text{NH}_3$ , provenant des activités agricoles.

En l'absence de ces polluants, les pluies sont légèrement acides ( $\text{pH} = 5,6$ ) à cause de la présence d'acide carbonique dans l'eau. On parle de pluie acide lorsque  $\text{pH} < 5$ . Le tableau suivant donne un exemple de composition d'une pluie acide :

$\text{HNO}_3$	$2,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
$\text{H}_2\text{SO}_4$	$1,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
$\text{HCl}$	$0,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$
$\text{NH}_3$	$2,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

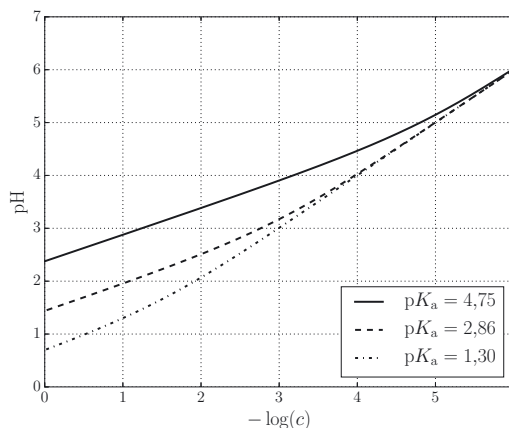
L'acide nitrique  $\text{HNO}_3$  et l'acide chlorhydrique  $\text{HCl}$  sont des acides forts dans l'eau. L'acide sulfurique  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est un acide fort libérant un  $\text{H}^+$ . Sa base conjuguée  $\text{HSO}_4^-$  est un acide faible de  $\text{p}K_a = 1,9$ . L'ammoniac  $\text{NH}_3$  est une base faible dont l'acide conjugué est l'ion ammonium  $\text{NH}_4^+$ . Le  $\text{p}K_a$  du couple est  $\text{p}K_a = 9,25$ .

1. Écrire les réactions des acides forts avec l'eau. En faisant l'hypothèse que  $\text{pH} > 4,0$ , montrer que  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est entièrement dissocié. Quel serait le pH en l'absence d'ammoniac ?
2. Écrire la réaction entre l'ion oxonium  $\text{H}_3\text{O}^+$  et  $\text{NH}_3$ . Calculer sa constante d'équilibre et conclure.
3. Calculer la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  et en  $\text{NH}_4^+$ . En déduire le pH.
4. Calculer la concentration résiduelle en  $\text{NH}_3$ .

### Exercice 28.7 Acides acétiques chlorés

L'acide éthanoïque (ou acide acétique) est un acide organique aux multiples applications, dont la production mondiale annuelle est de plusieurs millions de tonnes. Sa formule est  $\text{CH}_3\text{COOH}$ . En remplaçant un ou plusieurs atomes d'hydrogène liés au premier carbone par du chlore, on obtient un dérivé chloré dont l'acidité est renforcée. Le tableau ci-dessous donne les  $\text{p}K_a$  pour l'acide acétique et ses dérivées chlorés. On donne aussi le diagramme de Flood, représentant le pH en fonction de  $-\log(c)$ , où  $c$  est la concentration de l'acide.

Acide/Base	$\text{p}K_a$
$\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CO}_2^-$	4,75
$\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H}/\text{ClCH}_2\text{CO}_2^-$	2,86
$\text{Cl}_2\text{CHCO}_2\text{H}/\text{Cl}_2\text{CHCO}_2^-$	1,30



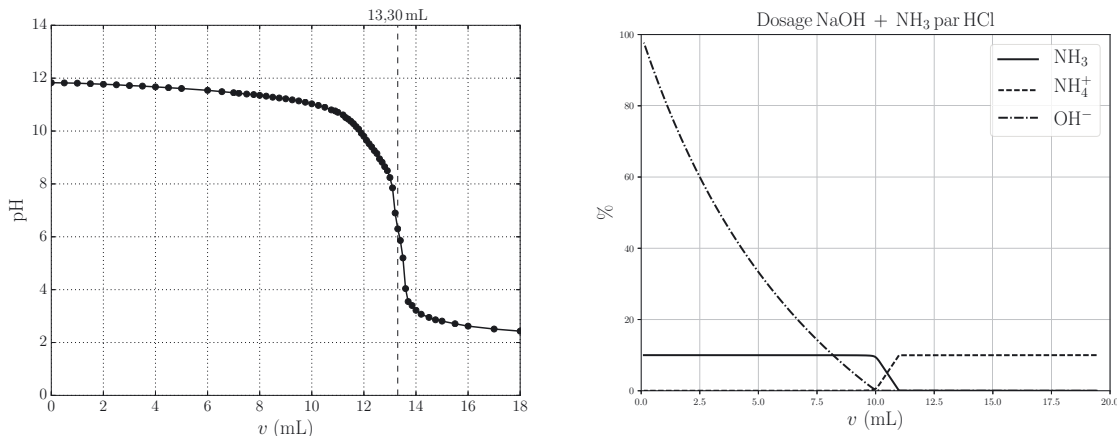
Pour chacun de ces acides, on prépare une solution aqueuse en diluant  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$  de l'acide pur dans un volume total de 100,0 mL. On obtient ainsi trois solutions  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  dont les pH sont lus sur le diagramme de Flood.

1. Pour chacun des trois acides, écrire la réaction avec l'eau et calculer sa constante d'équilibre.

- Pour chacune des trois solutions, donner le pH et calculer la proportion d'acide dissocié, par rapport à l'acide introduit initialement.
- Pour l'acide éthanóique  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$ , indiquer sur le diagramme de Flood dans quelle gamme de concentrations on a  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] < \frac{1}{10}[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]$ . Trouver alors l'expression approchée de pH en fonction de  $-\log(c)$ . Calculer le pH de la solution  $S_1$  avec cette expression.

### Exercice 28.8 Une solution très caustique

Les solutions aqueuses concentrées d'hydroxyde de sodium NaOH (aussi appelé soude caustique) sont très corrosives envers les matières organiques, et il faut donc les manipuler en se protégeant peau et yeux. Une application domestique de ce type de solution est le déboucheur de canalisation. On s'intéresse à un déboucheur vendu dans le commerce, qui en plus de NaOH contient une quantité notable d'ammoniac  $\text{NH}_3$ , une base dont le  $\text{p}K_a = 9,25$ . Afin de doser la basicité de ce produit, on en prélève 5,0 g que l'on dilue dans de l'eau, pour un volume total de 100 mL. On place un volume  $v_1 = 10$  mL de cette solution dans un bécher, où l'on plonge les deux électrodes pour mesurer le pH. La burette est remplie d'une solution d'acide chlorhydrique HCl de concentration  $c = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . La courbe ci-dessous (à gauche) montre le pH en fonction du volume  $v$  de solution de HCl versé. Pour interpréter cette courbe, on suppose que la concentration en ammoniac est égale à un dixième de la concentration en soude, et on fait une simulation du dosage. La courbe ci-dessous (à droite) montre les concentrations de  $\text{NH}_3$ ,  $\text{NH}_4^+$  et  $\text{OH}^-$  en fonction du volume  $v$  de solution de HCl versé.



On donne le produit ionique de l'eau  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

- D'après la courbe de simulation, quelle est la base réagissant en premier avec  $\text{H}_3\text{O}^+$  lorsque le volume  $v$  augmente? Écrire la réaction. Calculer sa constante d'équilibre.
- Lorsque cette base a entièrement réagi, quelle réaction se produit? Calculer sa constante d'équilibre.
- Justifier que le volume  $v_{eq} = 13,3 \text{ mL}$  versé lors du saut de pH correspond à la conversion complète des deux bases. En déduire la quantité molaire de base dans les 5,0 g de produit prélevé.

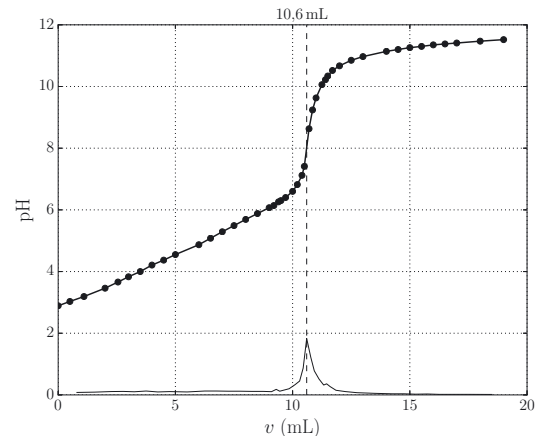
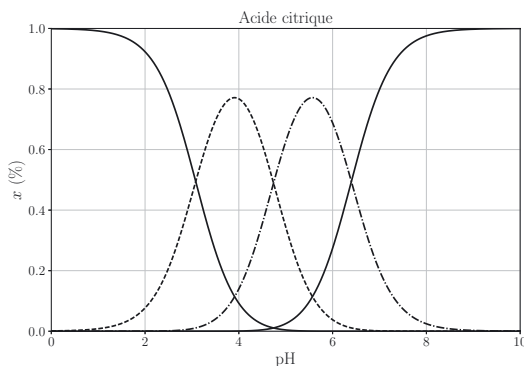


### Exercice 28.9 Acide citrique

#### ➔ Méthode (28.2)

L'acide citrique  $(\text{HOOC}-\text{CH}_2)_2-\text{C}(\text{OH})-\text{COOH}$  est présent en grande quantité dans le jus de citron. Il est utilisé dans l'alimentation comme exhausteur de goût, ou comme acidifiant. Il s'agit d'un triacide, pouvant libérer trois  $\text{H}^+$ . On le notera  $\text{AH}_3$ . La figure ci-dessous (à gauche) montre les proportions de  $\text{AH}_3$ ,  $\text{AH}_2^-$ ,  $\text{AH}^{2-}$  et  $\text{A}^{3-}$  en fonction du pH, pour une concentration totale de  $0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Pour déterminer la concentration en acide citrique d'un jus de citron, on effectue tout d'abord un prélèvement de  $10,0 \text{ mL}$  de jus que l'on dilue dans de l'eau déminéralisée, pour un volume total de  $100,0 \text{ mL}$ . Un volume  $v_1 = 10,0 \text{ mL}$  de ce jus de citron dilué est placé dans un bécher, dans lequel on place deux électrodes pour mesurer le pH. La burette contient une solution d'hydroxyde de sodium  $\text{NaOH}$  de concentration  $c = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La figure ci-dessous (à droite) représente le pH en fonction du volume  $v$  de la solution de  $\text{NaOH}$  versé. Le saut de pH a lieu pour un volume versé  $v_{eq} = 10,6 \text{ mL}$ .



On donne le produit ionique de l'eau  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

1. Sur le diagramme de distribution (titres molaires en fonction du pH), repérer les courbes correspondant à  $\text{AH}_3$ ,  $\text{AH}_2^-$ ,  $\text{AH}^{2-}$  et  $\text{A}^{3-}$ . En déduire les  $\text{p}K_a$  des acides successifs.
2. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  sur  $\text{AH}_3$ , avec échange d'un  $\text{H}^+$ . Calculer la constante d'équilibre  $K_1$  de cette réaction.
3. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  sur  $\text{AH}_2^-$ , avec échange d'un  $\text{H}^+$ . Calculer la constante d'équilibre  $K_2$  de cette réaction.
4. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  sur  $\text{AH}^{2-}$ , avec échange d'un  $\text{H}^+$ . Calculer la constante d'équilibre  $K_3$  de cette réaction.
5. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  sur  $\text{AH}_3$ , avec échange de trois  $\text{H}^+$ . Calculer la constante d'équilibre  $K$  de cette réaction.
6. Sur la courbe de dosage, justifier que la base se formant lors du saut de pH est  $\text{A}^{3-}$ . Quelle est alors la réaction bilan du dosage ?
7. Calculer la concentration en acide citrique du jus de citron.
8. Sachant que le pH du jus de citron est  $\text{pH} = 2,4$ , donner les proportions de  $\text{AH}_3$ ,  $\text{AH}_2^-$ ,  $\text{AH}^{2-}$  et  $\text{A}^{3-}$  présents dans le jus de citron.

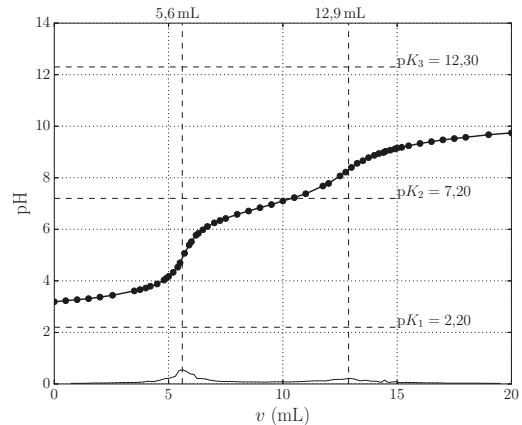
### Exercice 28.10 Une boisson gazeuse et acide

Une boisson au cola contient une grande quantité de  $\text{CO}_2$  dissous, qui se libère sous forme de bulles dès que la bouteille est ouverte. Le  $\text{CO}_2$  dissous solvaté est l'acide carbonique  $\text{H}_2\text{CO}_3$ , un diacide faible. La boisson contient aussi de l'acide phosphorique  $\text{H}_3\text{PO}_4$ , un triacide faible. Celui-ci permet d'obtenir  $\text{pH} = 2,6$ . Les  $\text{p}K_a$  des différents couples acide/base sont donnés ci-dessous :

$\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$	6,4
$\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$	10,3

$\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_2\text{PO}_4^-$	2,2
$\text{H}_2\text{PO}_4^-/\text{HPO}_4^{2-}$	7,2
$\text{HPO}_4^{2-}/\text{PO}_4^{3-}$	12,3

Afin de déterminer la concentration en acide phosphorique de cette boisson par un dosage acido-basique, on effectue tout d'abord un dégazage avec une pompe pour extraire le  $\text{CO}_2$  dissous. On prélève un volume  $v_1 = 10 \text{ mL}$  de la boisson que l'on complète avec assez d'eau pour que les deux électrodes de mesure du pH soient immergées. Le dosage est fait avec une solution d'hydroxyde de sodium  $\text{NaOH}$  (base forte) de concentration  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La figure ci-contre montre le pH en fonction du volume  $v$  de soude versée.



Le dosage consiste à déterminer la concentration  $c_1$  d'acide phosphorique introduite par le fabricant dans la boisson. On utilise pour cela le saut de pH ayant lieu pour  $v_{eq} = 5,6 \text{ mL}$ , qui correspond au dosage de la première acidité de  $\text{H}_3\text{PO}_4$ .

On donne le produit ionique de l'eau  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

1. Écrire la réaction de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  avec  $\text{H}_2\text{O}$ .
2. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  avec  $\text{H}_3\text{PO}_4$  et calculer sa constante d'équilibre.
3. Écrire la réaction de  $\text{OH}^-$  avec  $\text{H}_3\text{O}^+$  et calculer sa constante d'équilibre.
4. Justifier la proposition suivante : le nombre de moles de  $\text{OH}^-$  introduits pour  $v = v_{eq}$  est égal au nombre de moles de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  initialement présents dans le volume  $v_1$ , avant réaction de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  avec l'eau. En déduire que la réaction écrite en **2.** permet de résumer le bilan de matière.
5. Déterminer la concentration  $c_1$ .
6. Calculer les concentrations en  $\text{H}_3\text{PO}_4$  et en  $\text{H}_2\text{PO}_4^-$  dans la boisson ( $\text{pH} = 2,6$ ).
7. Expliquer pourquoi le pH acide apporté par l'acide phosphorique permet d'assurer la présence de bulles de  $\text{CO}_2$ .

# Corrections

## Interro de cours

1. L'espèce HF est susceptible de céder un proton. Sa réaction avec l'eau est :  
 $\text{HF}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{F}^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$  avec  $K = K_a(\text{HF}/\text{F}^-) = 10^{-3,2}$ . Cette réaction n'est donc pas totale et l'acide est faible. Réponse (b).
2. D'après le diagramme de prédominance, la base  $\text{F}^-$  prédomine pour  $\text{pH} > \text{p}K_a = 3,2$ .  
 Par ailleurs,  $\text{pH} = \text{p}K_a + \log \frac{[\text{F}^-]}{[\text{HF}]}$  donne  $\frac{[\text{F}^-]}{[\text{HF}]} = 10^{\text{pH} - \text{p}K_a} = 10^{0,8} \simeq 6$ . Réponse (c).
3. HF est un monoacide. Il n'y aura donc que 2 espèces différentes (HF et  $\text{F}^-$ ) et donc 2 courbes dans le diagramme de distribution. Il doit vérifier :  $\%_{\text{F}^-} = \%_{\text{HF}}$  pour  $\text{pH} = \text{p}K_a = 3,2$ . Réponse (c).
4. L'acide faible doit réagir avec une base suffisamment forte pour s'assurer d'une réaction quantitative. Choisir une base forte comme la soude est évident, mais il est possible de prendre une base plus faible comme  $\text{NH}_3$  par exemple. En effet,  $\text{p}K_a(\text{NH}_4^+/\text{NH}_3) = 9,2$  est suffisamment élevé pour que la réaction de dosage soit quantitative ( $K = 10^{(9,2-3,2)} = 10^{6,0}$ ). Réponses (b) et (c).
5. Lorsque  $\text{NaOH}(\text{s})$  se dissout dans l'eau, la réaction de dissociation est totale :  
 $\text{NaOH}(\text{s}) \rightarrow \text{Na}^+(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq})$ . Réponse (b).
6. La réaction  $\text{HF}(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{F}^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$  est de constante  $K = \frac{K_a(\text{HF}/\text{F}^-)}{K_a(\text{H}_2\text{O}/\text{OH}^-)} = 10^{10,8}$ . Réponse (a).

## Exercice 28.1

1. Considérons d'une manière générale la réaction d'un acide AH avec une base  $\text{B}^-$  :  
 $\text{AH} + \text{B}^- = \text{A}^- + \text{BH}$ . Sa constante d'équilibre est  $K = \frac{[\text{A}^-][\text{BH}]}{[\text{AH}][\text{B}^-]} = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} \frac{[\text{BH}]}{[\text{B}^-][\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_a}{K'_a}$   
 où  $K_a$  désigne la constante d'acidité de AH et  $K'_a$  celle de BH. On a donc  $K = 10^{-\text{p}K_a + \text{p}K'_a}$ . Finalement  $K > 1$  si  $\text{p}K_a < \text{p}K'_a$ . L'acide doit donc avoir un  $\text{p}K_a$  inférieur à celui de la base.  
 La **solution A** contient l'acide  $\text{NH}_4^+$  dont le  $\text{p}K_a = 9,25$ . La seule base avec laquelle il réagit (avec une constante d'équilibre supérieure à 1) est la base forte  $\text{OH}^-$  présente dans la solution B et dont le  $\text{p}K'_a = 14,0$  :  $\text{NH}_4^+ + \text{OH}^- = \text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O}$ .  
 La **solution C** contient l'acide  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  dont le  $\text{p}K_a = 4,75$ . Il réagit avec la base  $\text{HCO}_3^-$  de la solution D dont le  $\text{p}K'_a = 6,35$  :  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{HCO}_3^- = \text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_2\text{CO}_3$  et avec la base forte  $\text{OH}^-$  de la solution B dont le  $\text{p}K'_a = 14,0$  :  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{OH}^- = \text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_2\text{O}$ .  
 La **solution D** contient l'acide  $\text{HCO}_3^-$  de  $\text{p}K_a = 10,33$ . La seule base avec laquelle il réagit est  $\text{OH}^-$  de la solution B dont le  $\text{p}K'_a = 14,0$  :  $\text{HCO}_3^- + \text{OH}^- = \text{CO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O}$ .  
 La **solution E** contient l'acide fort  $\text{H}_3\text{O}^+$  car HCl se dissocie entièrement selon la réaction :  
 $\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$ . Il réagit avec deux bases : solution B :  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{OH}^- = 2\text{H}_2\text{O}$  et solution D :  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{HCO}_3^- = \text{H}_2\text{O} + \text{H}_2\text{CO}_3$ .
2. L'acide et la base sont introduits en proportions stœchiométriques (10 mL de chaque solution de concentration  $c$  sont prélevés). Faisons un tableau d'avancement en quantité de matière pour  $n_0$  moles apportées. On note  $\xi_e$  l'avancement de la réaction (en mol) et  $\tau_e = \xi_e/n_0$  le taux d'avancement qui doit être supérieur à 0,99 à l'équilibre.

	AH	B	$\text{A}^-$	BH
Initial	$n_0$	$n_0$	0	0
Final	$n_0 - \xi_e$ $n_0(1 - \tau_e)$	$n_0 - \xi_e$ $n_0(1 - \tau_e)$	$\xi_e$ $n_0\tau_e$	$\xi_e$ $n_0\tau_e$

D'après la loi de l'équilibre :  $Q_e = \frac{n_0^2 \tau_e^2}{n_0^2 (1 - \tau_e)^2} = 10^{-pK_a + pK'_a}$ . Or on souhaite que  $\tau_e > 0,99$ . Cette

condition impose :  $\frac{\tau_e^2}{(1 - \tau_e)^2} > \frac{(0,99)^2}{(0,01)^2}$ , soit  $10^{-pK_a + pK'_a} > 9,8 \cdot 10^3$  et  $-pK_a + pK'_a > 4$ . Il faut donc que le  $pK_a$  de l'acide soit inférieur à celui de la base moins 4.

L'acide  $\text{NH}_4^+$  de  $pK_a = 9,25$  de la solution A réagit avec la base  $\text{OH}^-$  de la solution B à plus de 99% puisque le  $pK_a$  de  $\text{OH}^-$  est  $pK'_a = 14,0$ .

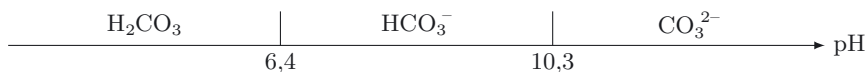
L'acide  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  de la solution C ( $pK_a = 4,75$ ) réagit avec  $\text{OH}^-$  de la solution B à plus de 99%.

L'acide  $\text{HCO}_3^-$  de la solution D ( $pK_a = 10,33$ ) réagit avec  $\text{OH}^-$  de la solution B mais à moins de 99% car le  $pK_a$  de  $\text{OH}^-$  est  $pK'_a = 14,0$  et  $10,33 > 14,0 - 4$ .

L'acide  $\text{H}_3\text{O}^+$ , de  $pK_a = 0$ , de la solution E réagit avec les deux bases  $\text{HCO}_3^-$  de la solution D et  $\text{OH}^-$  de la solution B à plus de 99% car ces bases ont un  $pK_a$  supérieur à 4.

### Exercice 28.2

- Voici le diagramme de prédominance de l'acide carbonique :



- Pour une eau à  $\text{pH} = 6,5 \approx pK_a$  l'acide carbonique et l'ion hydrogénocarbonate sont à peu près en concentrations égales :  $[\text{H}_2\text{CO}_3] \approx [\text{HCO}_3^-]$ . La concentration  $[\text{CO}_3^{2-}]$  est négligeable.
- Pour une eau de mer à  $\text{pH} = 7,8$ , l'ion  $\text{HCO}_3^-$  est prédominant, en concentration beaucoup plus grande que  $\text{H}_2\text{CO}_3$  et  $\text{CO}_3^{2-}$  (négligeables).

### Exercice 28.3

- D'après le diagramme, la concentration est  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La conservation de la matière s'écrit  $c = [\text{H}_3\text{PO}_4] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-] + [\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{PO}_4^{3-}]$ .
- Le  $pK_a$  d'un couple acide/base est la valeur du pH pour laquelle l'acide et la base ont la même concentration. En effet, on rappelle que  $\text{pH} = pK_a + \log\left(\frac{[\text{base}]}{[\text{acide}]}\right)$ . On lit donc sur le diagramme  $pK_a(\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_2\text{PO}_4^-) = 2,1$ ,  $pK_a(\text{H}_2\text{PO}_4^-/\text{HPO}_4^{2-}) = 7,2$  et  $pK_a(\text{HPO}_4^{2-}/\text{PO}_4^{3-}) = 12,4$ .
- Pour  $\text{pH} = 4,0$ , on voit sur le diagramme que  $[\text{H}_2\text{PO}_4^-] \approx c$ . La condition d'équilibre pour la première acidité s'écrit  $\frac{[\text{H}_2\text{PO}_4^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{PO}_4]} = K_{a1} = 10^{-2,1}$ , d'où l'on déduit  $[\text{H}_3\text{PO}_4] = \frac{c10^{-\text{pH}}}{K_{a1}} = 10^{-2,0-4,0+2,1}$  soit  $[\text{H}_3\text{PO}_4] = 10^{-3,9} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Pour  $\text{pH} = 1,0$ , on lit sur le diagramme  $[\text{H}_2\text{PO}_4^{2-}] = 7 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le taux de dissociation de l'acide est  $[\text{H}_2\text{PO}_4^{2-}]/c = 7\%$ .

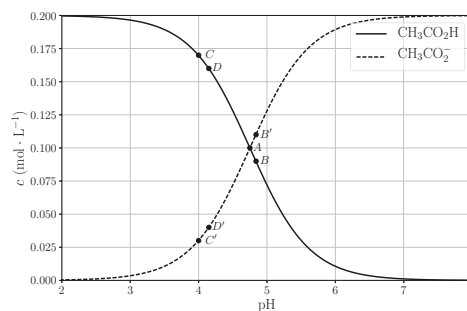
### Exercice 28.4

- $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \longrightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
Sa constante d'équilibre  $K = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]K_e} = \frac{K_a}{K_e} = 10^{-4,75+14,0} = 10^{9,25}$ . La réaction est donc totale ( $K \gg 1$ ).
- La quantité de  $\text{OH}^-$  versée à l'équivalence est  $n = c_{v_{eq}} = 1,275 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$ . D'après la réaction ci-dessus, la quantité de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  dans le volume  $v_1 = 20 \text{ mL}$  de vinaigre dilué est aussi  $n$ , soit une concentration analytique  $c_1 = 6,375 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le vinaigre a été dilué 20 fois, donc la concentration en acide éthanóïque dans le vinaigre est  $c'_1 = 20c_1 = 1,28 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

3. La masse molaire de l'acide éthanoïque est  $M = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Pour 100 g de vinaigre (environ 100 mL), on a donc une masse  $m = 0,128 \times 60 = 7,7 \text{ g}$  d'acide acétique, soit une proportion massique de 7,7%.
4. Dans le vinaigre  $\text{pH} = 2,6$ , valeur inférieure à  $\text{p}K_a - 2$ . On a donc une très large prédominance de la forme acide :  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = c'_1 = 1,28 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Par ailleurs, la condition d'équilibre de la réaction  $\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$  s'écrit  $\frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]} = K_a$  d'où l'on déduit  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = 10^{-4,75+2,6} c'_1 = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

### Exercice 28.5

1.  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ .  
 Constante d'équilibre  $K_1 = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]} = K_a = 10^{-4,75}$ .
2.  $\text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq})$ .  
 Constante d'équilibre  $K_2 = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{OH}^-]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]} = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]K_e}{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_e}{K_a} = 10^{-9,25}$ .
3. La réaction de dissociation de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  est très peu avancée car  $K_1 \ll 1$ . On a donc  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] \simeq c_a$ . La réaction de protonation de  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]$  est très peu avancée car  $K_2 \ll 1$  donc  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] \simeq c_b$ . On a donc  $\frac{c_b[\text{H}_3\text{O}^+]}{c_a} = K_a$  et donc  $\text{pH} = \text{p}K_a = 4,75$ . Le point  $A$  représentatif de la solution est à l'intersection des deux courbes puisque  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = [\text{CH}_3\text{CO}_2^-]$ .
4. a.  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{CH}_3\text{CO}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
 Constante d'équilibre  $K_3 = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]K_e} = \frac{K_a}{K_e} = 10^{9,25}$ .
- b. Par litre de solution, on a ajouté  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$  de  $\text{OH}^-$ , qui réagit complètement avec  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$  de  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  puisque  $K_3 \gg 1$ . On a donc à l'équilibre  $[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}] = 0,100 - 0,010 = 0,090 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{CH}_3\text{CO}_2^-] = 0,100 + 0,010 = 0,110 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .  
 D'où  $[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_a[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]}{[\text{CH}_3\text{CO}_2^-]} = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et donc  $\text{pH} = 4,84$ .  
 Les points  $B$  et  $B'$  représentatifs de la solution après ajout de  $\text{NaOH}$  sont placés en reportant les nouvelles concentrations.
5. Les concentrations  $c'_a$  et  $c'_b$  se lisent sur le diagramme de distribution pour  $\text{pH} = 4,0$ . Les points  $C$  et  $C'$  représentent cette solution. Si l'on ajoute  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$  de  $\text{Na}^+, \text{OH}^-$  par litre de solution, les concentrations sont données par les points  $D$  et  $D'$  construits en retranchant 0,010 à la concentration de  $\text{CH}_2\text{CO}_2\text{H}$  et en ajoutant 0,010 à la concentration de  $\text{CH}_2\text{CO}_2^-$ . La variation de  $\text{pH}$  qui en résulte est légèrement plus grande que pour la solution tampon de  $\text{pH} = 4,75$ , car la pente des courbes de concentration est un peu moins grande à cet endroit.



### Exercice 28.6

1. Pour  $\text{HNO}_3$  et  $\text{HCl}$  on a :  $\text{HNO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{NO}_3^- + \text{H}_3\text{O}^+$  et  $\text{HCl} + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{Cl}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ .  
 Si  $\text{pH} > 4,0$  alors  $\text{pH} > \text{p}K_a + 2 = 1,9 + 2$ . Dans ce cas  $\text{SO}_4^{2-}$  est largement prépondérant devant  $\text{HSO}_4^-$ , donc  $\text{H}_2\text{SO}_4$  est entièrement dissocié. On peut donc écrire :  $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{SO}_4^{2-} + 2 \text{H}_3\text{O}^+$ . La concentration des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  libérés est  $[\text{H}_3\text{O}^+] = (2,0 + 2 \times 1,5 + 0,5) \cdot 10^{-5} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le  $\text{pH}$  en l'absence d'ammoniac serait donc  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = 4,3$ .

- L'ion  $\text{H}_3\text{O}^+$  est un acide fort réagissant avec la base faible  $\text{NH}_3$  :  $\text{H}_3\text{O}^+ + \text{NH}_3 \longrightarrow \text{H}_2\text{O} + \text{NH}_4^+$ . La constante d'équilibre de cette réaction est  $K = 1/K_a = 10^{\text{p}K_a} = 10^{9,25}$ . La réaction est donc totale.
- Pour la réaction précédente,  $\text{NH}_3$  est le réactif limitant et  $\text{H}_3\text{O}^+$  est en excès. On a donc à l'équilibre :  $[\text{H}_3\text{O}^+] = (5,5 - 2,0) \cdot 10^{-5} = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $\text{pH} = 4,5$ . La concentration en ions ammonium formés est :  $[\text{NH}_4^+] = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- On écrit la condition d'équilibre :  $\frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]} = K$  d'où l'on déduit  $[\text{NH}_3] = 3,6 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

### Exercice 28.7

- $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O} = \text{CH}_3\text{CO}_2^- + \text{H}_3\text{O}^+$ .  $K_1 = 10^{-4,75} = 1,78 \cdot 10^{-5}$ .  
 $\text{ClCH}_2\text{CO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O} = \text{ClCH}_2\text{CO}_2^- + \text{H}_3\text{O}^+$ .  $K_2 = 10^{-2,86} = 1,38 \cdot 10^{-3}$ .  
 $\text{Cl}_2\text{CHCO}_2\text{H} + \text{H}_2\text{O} = \text{Cl}_2\text{CHCO}_2^- + \text{H}_3\text{O}^+$ .  $K_3 = 10^{-1,30} = 5,01 \cdot 10^{-2}$ .
- La concentration d'acide introduit initialement est  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , soit  $-\log(c) = -2,0$ . On lit sur le diagramme de Flood  $\text{pH}_1 = 3,4$ ,  $\text{pH}_2 = 2,5$  et  $\text{pH}_3 = 2,1$ .  
 Pour un couple acide/base  $\text{AH}/\text{A}^-$ , on écrit la condition d'équilibre de la réaction avec l'eau et la conservation de A :

$$\frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} = K_a \quad \text{et} \quad [\text{AH}] + [\text{A}^-] = c$$

La proportion d'acide dissocié est  $\alpha = [\text{A}^-]/c$ . Avec les deux équations précédentes on obtient :  
 $\frac{c\alpha[\text{H}_3\text{O}^+]}{c - c\alpha} = K_a$  d'où l'on déduit  $\alpha = \frac{K_a}{10^{-\text{pH}} + K_a}$ .

Pour chacune des trois solutions :  $\alpha_1 = 0,043$ ,  $\alpha_2 = 0,30$  et  $\alpha_3 = 0,86$ .

- La condition d'équilibre s'écrit  $\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} = 10^{-\text{p}K_a + \text{pH}}$ . La condition  $[\text{A}^-] < \frac{1}{10}[\text{AH}]$  est vérifiée lorsque  $\text{pH} < \text{p}K_a - 1$ . Pour l'acide  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  la condition est  $\text{pH} < 3,75$ , soit  $-\log(c) < 2,6$ .  
 Dans ce cas, on peut faire l'approximation  $[\text{AH}] \simeq c$ . On suppose de plus que pratiquement tous les ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  proviennent de la réaction  $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} = \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ , ce qui implique  $[\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$ .  
 La condition d'équilibre s'écrit alors  $\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{c} = K_a$  d'où l'on déduit  $\text{pH} \simeq \frac{1}{2}(\text{p}K_a - \log(c))$ . Pour la solution  $S_1$ , cette expression donne  $\text{pH} \simeq \frac{c}{2}(4,75 + 2,0) \simeq 3,4$ , ce qui est identique à la valeur lue sur le diagramme, au dixième de pH près.

### Exercice 28.8

- La solution d'acide chlorhydrique contient des ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  à une concentration  $c = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Jusqu'à environ  $v = 12,5 \text{ mL}$ , l'ammoniac ne réagit pratiquement pas. C'est donc  $\text{OH}^-$  qui réagit en premier :  
 $\text{OH}^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) \longrightarrow 2 \text{H}_2\text{O}(\text{l})$  avec une constante d'équilibre :  $K = \frac{1}{[\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{1}{K_e} = 10^{14,0}$ .
- Lorsque la quantité de  $\text{OH}^-$  devient très faible par rapport à la quantité initiale, les ions  $\text{H}_3\text{O}^+$  ajoutés réagissent avec l'ammoniac :  $\text{NH}_3(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) \longrightarrow \text{NH}_4^+(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ . La constante d'équilibre de cette réaction est  $K = \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{NH}_3]} = \frac{1}{K_a} = 10^{9,25}$ .
- À l'équivalence  $\text{pH}_e \simeq 6$  et  $\text{pH}_e < \text{p}K_a - 2 = 7,25$  correspond à la conversion complète de  $\text{NH}_3$  en  $\text{NH}_4^+$ . Le volume  $v_{eq}$  correspond donc à la conversion complète de  $\text{OH}^-$  et de  $\text{NH}_3$ . La quantité de  $\text{H}_3\text{O}^+$  versée à l'équivalence est  $n = cv_{eq} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le nombre de moles de base dans le volume  $v_1 = 10 \text{ mL}$  est aussi  $n$ , puisqu'une mole de  $\text{H}_3\text{O}^+$  réagit avec une mole de base ( $\text{NH}_3$  ou  $\text{OH}^-$ ). Ce volume représente un dixième de la solution diluée initiale, qui contient donc  $10n = 0,013 \text{ mol}$  de base, qui est aussi la quantité de base dans la masse  $m = 5,0 \text{ g}$  de liquide prélevé.

**Exercice 28.9**

- La courbe en trait plein de concentration maximale à  $\text{pH} = 0$  est celle de l'acide citrique  $\text{AH}_3$ . La courbe en pointillé dont la concentration devient notable à partir de  $\text{pH} = 1,5$  est celle de  $\text{AH}_2^-$ . Le  $\text{pH}$  pour lequel  $[\text{AH}_3] = [\text{AH}_2^-]$  est égal au  $\text{p}K_{a1}$  de la première acidité, soit  $\text{p}K_{a1} = 3,1$ . La courbe en pointillé dont la concentration devient notable à partir de  $\text{pH} = 2,5$  est celle de  $\text{AH}^{2-}$ . Le  $\text{pH}$  pour lequel  $[\text{AH}_2^-] = [\text{AH}^{2-}]$  est égal au  $\text{p}K_a$  de la deuxième acidité, soit  $\text{p}K_{a2} = 4,7$ . Enfin la courbe en trait plein dont la concentration devient notable à partir de  $\text{pH} = 4,5$  est celle de  $\text{A}^{3-}$ . Le  $\text{pH}$  pour lequel  $[\text{AH}^{2-}] = [\text{A}^{3-}]$  est le  $\text{p}K_a$  de la troisième acidité, soit  $\text{p}K_{a3} = 6,4$ .
- $\text{AH}_3(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{AH}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
Constante d'équilibre  $K_1 = \frac{[\text{AH}_2^-]}{[\text{AH}_3][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{AH}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}_3]K_e} = \frac{K_{a1}}{K_e} = 10^{-\text{p}K_{a1}+14,0} = 10^{10,9}$ .
- $\text{AH}_2^-(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{AH}^{2-}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
Constante d'équilibre  $K_2 = \frac{[\text{AH}^{2-}]}{[\text{AH}_2^-][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{AH}^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}_2^-]K_e} = \frac{K_{a2}}{K_e} = 10^{-\text{p}K_{a2}+14,0} = 10^{9,5}$ .
- $\text{AH}^{2-}(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{A}^{3-}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
Constante d'équilibre  $K_3 = \frac{[\text{A}^{3-}]}{[\text{AH}^{2-}][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{A}^{3-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}^{2-}]K_e} = \frac{K_{a3}}{K_e} = 10^{-\text{p}K_{a3}+14,0} = 10^{7,6}$ .
- $\text{AH}_3(\text{aq}) + 3 \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{A}^{3-}(\text{aq}) + 3 \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
Constante d'équilibre  $K = \frac{[\text{A}^{3-}][\text{H}_3\text{O}^+]^3}{[\text{AH}_3]K_e^3} = \frac{[\text{A}^{3-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}^{2-}]K_e} \frac{[\text{AH}^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}_2^-]K_e} \frac{[\text{AH}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}_3]K_e}$ ,  
ce qui donne  $K = K_1 K_2 K_3 = 10^{10,9+9,5+7,6} = 10^{28,0}$ .
- La zone de virage est entre  $\text{pH} = 8$  et  $\text{pH} = 10$ , ce qui correspond, d'après la courbe de distribution, à la conversion complète de l'acide citrique  $\text{AH}_3$  en  $\text{A}^{3-}$ . La réaction bilan du dosage est donc :  
 $\text{AH}_3(\text{aq}) + 3 \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{A}^{3-}(\text{aq}) + 3 \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .
- La quantité de  $\text{OH}^-$  versée à l'équivalence est  $n = cv_{eq} = 1,06 \cdot 10^{-3}$  mol. La quantité de  $\text{AH}_3$  ayant réagi est donc  $n_1 = n/3 = 0,353 \cdot 10^{-3}$  mol. La concentration analytique en acide citrique dans la solution de jus de citron dilué est donc  $c_1 = n_1/v_1 = 3,53 \cdot 10^{-2}$  mol  $\cdot$  L $^{-1}$ , soit une concentration dans le jus de citron  $c'_1 = 10c_1 = 0,35$  mol  $\cdot$  L $^{-1}$ .
- La lecture de la courbe de distribution à  $\text{pH} = 2,4$  montre que  $\text{AH}_3$  est présent à 80% et  $\text{AH}_2^-$  à 20%.  $\text{AH}^{2-}$  et  $\text{A}^{3-}$  sont en quantités négligeables.

**Exercice 28.10**

- $\text{H}_3\text{PO}_4(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{H}_2\text{PO}_4^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ .
- $\text{H}_3\text{PO}_4(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{H}_2\text{PO}_4^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .  
La constante d'équilibre est  $K = \frac{[\text{H}_2\text{PO}_4^-]}{[\text{H}_3\text{PO}_4][\text{OH}^-]} = \frac{[\text{H}_2\text{PO}_4^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{PO}_4]K_e} = \frac{K_a}{K_e} = 10^{-2,2+14,0} = 10^{11,8}$ .
- $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow 2 \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ . Constante d'équilibre  $K' = \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-]} = \frac{1}{K_e} = 10^{14,0}$ .
- La base forte  $\text{OH}^-$  introduite réagit avec  $\text{H}_3\text{PO}_4$  présent dans la solution et avec  $\text{H}_3\text{O}^+$  issu de la réaction de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  avec l'eau. Ces deux réactions sont totales puisque  $K \gg 1$  et  $K' \gg 1$ . La quantité d'acide dosée ( $\text{H}_3\text{PO}_4$  et  $\text{H}_3\text{O}^+$ ) est bien égale à la quantité de  $\text{H}_3\text{PO}_4$  avant sa réaction avec l'eau. On peut donc résumer le bilan de matière par :  $\text{H}_3\text{PO}_4(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{H}_2\text{PO}_4^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ , où  $\text{H}_3\text{PO}_4$  représente l'acide phosphorique introduit par le fabricant de la boisson.
- La quantité de  $\text{OH}^-$  introduite à l'équivalence est  $n = cv_{eq} = 5,6 \cdot 10^{-5}$  mol. On en déduit la concentration d'acide phosphorique :  $c_1 = n/v_1 = 5,6 \cdot 10^{-3}$  mol  $\cdot$  L $^{-1}$ .
- $\text{pH} < 7,2$  donc la dissociation de  $\text{H}_2\text{PO}_4^-$  est négligeable. On a donc  $c_1 = [\text{H}_3\text{PO}_4] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-]$ . On écrit la condition d'équilibre de la réaction écrite en 1. :  $\frac{[\text{H}_2\text{PO}_4^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{PO}_4]} = K_a = 10^{-2,2}$ . En reportant

$[\text{H}_2\text{PO}_4^-] = c_1 - [\text{H}_3\text{PO}_4]$  dans cette équation, on obtient  $[\text{H}_3\text{PO}_4] = \frac{c_1[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a + [\text{H}_3\text{O}^+]} = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,

puis  $[\text{H}_2\text{PO}_4^-] = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

7. Le  $\text{p}K_a$  du couple  $\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$  est  $\text{p}K_a = 6,4$ . On a  $\text{pH} < \text{p}K_a - 2$  donc la forme acide  $\text{H}_2\text{CO}_3$  (dioxyde de carbone dissous) est très largement prépondérante.



# Dissolution et précipitation

## L'essentiel du cours

### Contexte

Les eaux naturelles contiennent souvent des ions ( $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{CO}_3^{2-}$ , etc.). D'où viennent-ils ? Quels sont leurs effets ?

### ■ 1 Réactions de dissolution

Ces ions proviennent de la dissolution de roches calcaires dans les eaux naturelles. Le calcaire est une roche sédimentaire, constituée principalement de carbonate de calcium ( $\text{CaCO}_3$ ) et de carbonate de magnésium ( $\text{MgCO}_3$ ), qui sont deux solides ioniques.

### Définition : Dissolution d'un solide ionique et produit de solubilité

Un solide ionique est un assemblage neutre ordonné de cations  $\text{C}^{\text{P}+}$  et d'anions  $\text{A}^{\text{q}-}$ . Au contact d'un solvant, une partie du solide peut se dissoudre en se dissociant en cations et anions :



Il s'agit d'une réaction de dissolution. S'il reste du solide à l'équilibre, la solution est dite saturée et la condition d'équilibre s'écrit :

$$[\text{C}^{\text{P}+}]^m [\text{A}^{\text{q}-}]^n = K_s$$

La constante d'équilibre  $K_s$  est le produit de solubilité du solide  $\text{C}_m\text{A}_n$ . On définit aussi :  $\text{p}K_s = -\log K_s$ .

L'électroneutralité du solide impose  $mp = nq$ .



Il s'agit de l'application de la loi de l'équilibre chimique énoncée dans le chapitre 26 avec  $a_{\text{solide}} = 1$  et  $a_{\text{ion}} = [\text{ion}]/c^\circ$  où  $c^\circ = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{ion}]$  en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Ainsi, la condition d'équilibre  $[\text{C}^{\text{P}+}]^m [\text{A}^{\text{q}-}]^n = K_s$  est valable à l'équilibre donc **en présence du précipité** avec des concentrations exprimées en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Dans le cas des eaux naturelles, les réactions de dissolution et les produits de solubilité s'écrivent :  $\text{CaCO}_3(\text{s}) = \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + \text{CO}_3^{2-}(\text{aq})$  et  $\text{MgCO}_3(\text{s}) = \text{Mg}^{2+}(\text{aq}) + \text{CO}_3^{2-}(\text{aq})$  avec à l'équilibre  $[\text{Ca}^{2+}] [\text{CO}_3^{2-}] = K_s(\text{CaCO}_3) = 5,0 \cdot 10^{-9}$  ( $\text{p}K_s = 8,3$ ) et

$$[\text{Mg}^{2+}] [\text{CO}_3^{2-}] = K_s(\text{MgCO}_3) = 6,8 \cdot 10^{-6} \quad (\text{p}K_s = 5,2).$$

□ **Quel lien existe-il entre le produit de solubilité et la concentration des ions dans la solution saturée ?**

$K_s$  étant la constante d'équilibre de la réaction de dissolution d'un solide, plus  $K_s$  est grand ( $\text{p}K_s$  petit), plus l'équilibre de dissolution est déplacé dans le sens direct et plus la concentration en cations et en anions est grande.

#### Définition : Solubilité

La solubilité d'un solide est la quantité maximale de solide pouvant être dissoute par litre de solvant. Elle s'exprime souvent en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .



La solubilité molaire s'identifie à la concentration molaire en ions au sein d'une solution saturée uniquement si les coefficients stoechiométriques intervenant dans la réaction de dissolution valent 1.

On peut rencontrer des solubilités exprimées en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Dans ce cas, il suffira de convertir la concentration molaire en concentration massique à l'aide de la masse molaire.

Calculons la solubilité du carbonate de calcium dans de l'eau pure en ne tenant pas compte, dans un premier temps, du caractère basique de l'ion carbonate.

La dissolution du carbonate de calcium se traduit par le tableau d'avancement ci-dessous, établi pour un volume de solution de 1 L (tableau d'avancement en concentrations). L'avancement volumique s'identifie à la solubilité cherchée  $s = [\text{Ca}^{2+}] = [\text{CO}_3^{2-}]$  à l'équilibre.



La loi de l'équilibre chimique s'écrit  $[\text{Ca}^{2+}] [\text{CO}_3^{2-}] = K_s(\text{CaCO}_3)$ , soit  $s^2 = K_s(\text{CaCO}_3)$ .

Nous avons donc  $s = \sqrt{K_s(\text{CaCO}_3)} = 7,1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La masse molaire valant  $M(\text{CaCO}_3) = 100,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , la solubilité du carbonate de calcium est de  $7,1 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ .

De manière analogue pour le carbonate de magnésium,  $s = \sqrt{K_s(\text{MgCO}_3)} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La masse molaire étant  $M(\text{MgCO}_3) = 84,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , sa solubilité vaut  $0,22 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Nous pouvons remarquer que le carbonate de magnésium est plus soluble que le carbonate de calcium, ce qui est en accord avec les valeurs des  $K_s$ . Attention toutefois aux cas où les coefficients stoechiométriques sont différents dans les deux réactions de dissolution.

#### Méthode 29.1 : Déterminer la solubilité d'un solide

- Écrire la réaction de dissolution du solide.
- Écrire le tableau d'avancement pour 1 L de solution, où l'avancement volumique est la solubilité  $s$  cherchée.
- Appliquer la loi de l'équilibre chimique pour déterminer l'inconnue  $s$ .

➔ Exercice (29.1)

Les ions  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{Mg}^{2+}$  et  $\text{CO}_3^{2-}$  présents dans les eaux naturelles sont issus de la dissolution de roches calcaires avec lesquelles l'eau est entrée en contact. Cependant, les concentrations observées sont généralement inférieures à la solubilité car l'eau n'est pas saturée. Par ailleurs, l'ion  $\text{Ca}^{2+}$ , pour n'en citer qu'un, peut provenir aussi du sulfate de calcium  $\text{CaSO}_4$  (gypse).

□ **De quoi dépend la solubilité d'un solide ?**

(1) La solubilité dépend de la **température** du solvant dans lequel le solide est dissous.

La solubilité d'un solide dépend de la valeur du produit de solubilité  $K_s$ . Or, comme toute constante d'équilibre,  $K_s$  est une grandeur adimensionnelle dépendant de la température. Dans la plupart des cas, la solubilité augmente avec la température mais le carbonate de calcium est une exception.

(2) La solubilité dépend de la **composition de la solution en ions constitutifs du solide**.

Déterminons la solubilité  $s'$  du carbonate de calcium dans de l'eau contenant déjà des ions carbonate résultant, par exemple, d'une dissolution de carbonate de magnésium telle que  $[\text{CO}_3^{2-}]_0 = c = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .



La loi de l'équilibre chimique s'écrit  $[\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}] = K_s(\text{CaCO}_3)$  soit  $s'(c+s') = K_s(\text{CaCO}_3)$ . Si on néglige  $s'$  par rapport à  $c$  (ce qui est pertinent étant donné les ordres de grandeur), nous obtenons  $s'c \simeq K_s$  soit  $s' \simeq \frac{K_s}{c} = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , à comparer à  $7,1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  pour la solubilité dans l'eau pure. La présence des ions carbonate a fait chuter la solubilité du carbonate de calcium. C'est l'**effet d'ions communs**.

(3) La solubilité dépend du **pH de la solution aqueuse** si l'un des ions constitutifs du solide présente un caractère acido-basique.

Déterminons le lien entre la solubilité  $s$  du carbonate de calcium et le pH de la solution.

Précédemment, nous avons utilisé à l'équilibre :

$$s = [\text{Ca}^{2+}] = [\text{CO}_3^{2-}] \text{ avec } K_s = [\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]$$

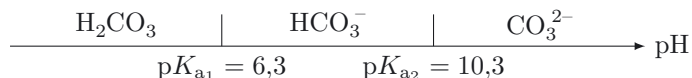
Cependant, si l'on considère le caractère basique de  $\text{CO}_3^{2-}$ , il faut prendre en compte le fait que certains ions carbonate peuvent se trouver transformés en ions hydrogénécarbonate  $\text{HCO}_3^-$  ou en acide carbonique  $\text{H}_2\text{CO}_3$  par le jeu des réactions acido-basiques avec l'eau.

Dorénavant, nous devons donc utiliser :

$$(29.1) \quad s = [\text{Ca}^{2+}] = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3]$$

$$(29.2) \quad \text{avec } K_s = [\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}] = s[\text{CO}_3^{2-}]$$

Or, d'après le chapitre 28, nous possédons l'outil diagramme de prédominance :



$$\text{avec } K_{a1} = \frac{[\text{HCO}_3^-]h}{[\text{H}_2\text{CO}_3]}, \quad K_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}]h}{[\text{HCO}_3^-]} \text{ et } K_{a1}K_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}]h^2}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \text{ où } h = [\text{H}_3\text{O}^+].$$

Ainsi, en fonction du pH, l'espèce prépondérante (et donc la solubilité) ne sera pas la même. Pour évaluer l'influence du pH sur la solubilité  $s$  il est intéressant d'exprimer  $ps = -\log s$  en fonction du pH.



Plus  $ps$  est faible, plus la solubilité est grande.

Si  $\text{pH} > \text{p}K_{a_2} + 1 = 11,3$  alors  $\text{CO}_3^{2-}$  prédomine et les concentrations des autres espèces sont négligeables de sorte que les équations 29.1 et 29.2 donnent :

$$s = [\text{Ca}^{2+}] \simeq [\text{CO}_3^{2-}] = \frac{K_s}{s} \Rightarrow s = \sqrt{K_s}$$

$$(29.3) \quad \Rightarrow ps = -\log s = \frac{1}{2}\text{p}K_s$$

Si  $\text{p}K_{a_1} + 1 = 7,3 < \text{pH} < \text{p}K_{a_2} - 1 = 9,3$ , alors  $\text{HCO}_3^-$  prédomine et les concentrations des autres espèces sont négligeables de sorte que les équations 29.1 et 29.2 donnent :

$$s = [\text{Ca}^{2+}] \simeq [\text{HCO}_3^-] = \frac{[\text{CO}_3^{2-}]h}{K_{a_2}} = \frac{K_s h}{K_{a_2} s} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{K_s h}{K_{a_2}}}$$

$$(29.4) \quad \Rightarrow ps = -\log s = \frac{1}{2}\text{p}K_s - \frac{1}{2}\text{p}K_{a_2} + \frac{1}{2}\text{pH}$$

Si  $\text{pH} < \text{p}K_{a_1} - 1 = 5,3$ , alors  $\text{H}_2\text{CO}_3$  prédomine et les concentrations des autres espèces sont négligeables de sorte que les équations 29.1 et 29.2 donnent :

$$s = [\text{Ca}^{2+}] \simeq [\text{H}_2\text{CO}_3] = \frac{[\text{CO}_3^{2-}]h^2}{K_{a_1}K_{a_2}} = \frac{K_s h^2}{K_{a_1}K_{a_2} s} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{K_s h^2}{K_{a_1}K_{a_2}}}$$

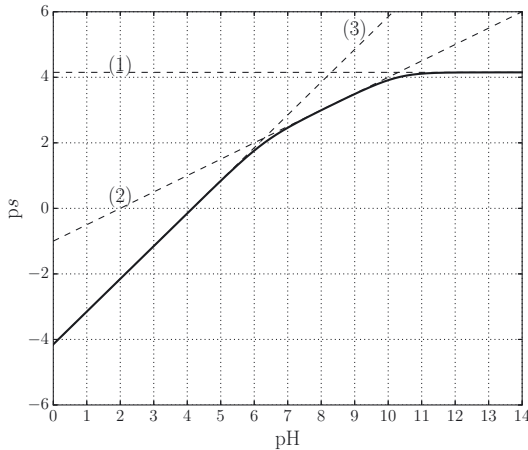
$$(29.5) \quad \Rightarrow ps = -\log s = \frac{1}{2}\text{p}K_s - \frac{1}{2}\text{p}K_{a_1} - \frac{1}{2}\text{p}K_{a_2} + \text{pH}$$

Dans le cas général, on considère les trois concentrations et donc les trois termes :

$$s = \frac{K_s}{s} + \frac{K_s h}{K_{a_2} s} + \frac{K_s h^2}{K_{a_1} K_{a_2} s} \Rightarrow s = \sqrt{K_s + \frac{K_s h}{K_{a_2}} + \frac{K_s h^2}{K_{a_1} K_{a_2}}}$$

La figure 29.1 permet de visualiser l'influence du pH sur  $ps = -\log s$ .

Pour revenir au contexte, remarquons que le pH a une influence sur la concentration des ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{CO}_3^{2-}$  dans l'eau naturelle : plus le pH de l'eau est faible et plus la solubilité du carbonate de calcium sera grande.

Figure 29.1.  $ps$  en fonction du  $pH$ .

Rappelons que plus  $ps$  est faible, plus la solubilité est grande.

On observe bien la diminution de la solubilité avec l'augmentation du  $pH$  ainsi que la présence de trois zones rectilignes :

- la droite (1) d'équation 29.3,
- la droite (2) d'équation 29.4,
- la droite (3) d'équation 29.5.

Toutefois, cette mise en équation n'est plus valable pour de faibles valeurs de  $ps$ . En effet, pour  $ps < 2$ , l'égalité  $a_i = c_i/c^\circ$  n'est plus vérifiée car la solution ne peut plus être considérée comme très diluée.

### Méthode 29.2 : Déterminer l'influence du $pH$ sur la solubilité d'un solide

On considère le solide  $CA$  constitué d'un cation  $C^+$  et d'un anion basique  $A^-$ .

- Donner l'expression de la solubilité  $s$  à l'aide d'une part de la concentration du cation, et d'autre part de la somme des concentrations des espèces acido-basiques associées à l'anion :  $s = [C^+] = [A^-] + [AH]$ .
- Écrire la loi de l'équilibre chimique :  $[C^+][A^-] = K_s$ , soit  $s[A^-] = K_s$ .
- En déduire l'expression de  $[A^-]$  :  $[A^-] = \frac{K_s}{s}$ .
- Écrire l'expression de la constante d'acidité :  $K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$ .
- En déduire l'expression de  $[AH]$  :  $[AH] = \frac{[A^-][H_3O^+]}{K_a} = \frac{K_s [H_3O^+]}{sK_a}$ .
- En déduire l'expression complète de la solubilité :  $s = [A^-] + [AH] = \frac{K_s}{s} + \frac{K_s [H_3O^+]}{sK_a}$ .
- Pour  $pH > pK_a + 1$ ,
  - identifier l'espèce acido-basique prédominante (la base) :  $s \simeq [A^-] = \frac{K_s}{s}$ ,
  - en déduire l'expression simplifiée de  $s$  :  $s \simeq \sqrt{K_s}$ ,
  - exprimer  $ps = -\log s$  en fonction de  $pK_s$  :  $ps \simeq \frac{1}{2}pK_s$ .
- Pour  $pH < pK_a - 1$ ,
  - identifier l'espèce acido-basique prédominante (l'acide) :  $s \simeq [AH] = \frac{K_s [H_3O^+]}{sK_a}$ ,
  - en déduire l'expression simplifiée de  $s$  :  $s \simeq \sqrt{\frac{K_s [H_3O^+]}{K_a}}$ ,
  - exprimer  $ps = -\log s$  en fonction de  $pH$ ,  $pK_a$  et  $pK_s$  :  $ps \simeq \frac{1}{2}pK_s - \frac{1}{2}pK_a + \frac{1}{2}pH$ .

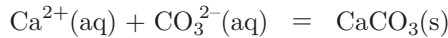
➔ Exercices (29.2) (29.5)

## ■ 2 Réactions de précipitation

Une eau dure contient beaucoup d'ions  $\text{Ca}^{2+}$  et  $\text{Mg}^{2+}$ , associés par exemple à des ions  $\text{CO}_3^{2-}$ . La présence de ces sels minéraux dans l'eau potable est favorable pour la santé. Cependant, dans le cas de l'eau distribuée pour un usage général, l'inconvénient est la possibilité de formation d'un dépôt calcaire  $\text{CaCO}_3(\text{s})$  et  $\text{MgCO}_3(\text{s})$  dans les conduites d'eaux chaudes (dans lesquelles la solubilité est moindre).

□ **À quelle condition y a-t-il précipitation et formation de solide ?**

Considérons une solution aqueuse contenant des ions calcium et carbonate aux concentrations apportées  $[\text{Ca}^{2+}]_0$  et  $[\text{CO}_3^{2-}]_0$ . Pour savoir si le système évolue spontanément dans le sens de la formation de précipité, il faut comparer le quotient de réaction à l'état initial  $Q_0$  à la constante d'équilibre  $K$  de la réaction de précipitation considérée :



comme cela a été vu dans le chapitre 26 :

- Si  $Q_0 = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{CO}_3^{2-}]_0} = K = \frac{1}{K_s}$ , alors le système est à l'équilibre et il n'évolue pas (la solution est saturée).
- Si  $Q_0 = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{CO}_3^{2-}]_0} < K = \frac{1}{K_s}$ , alors le système évolue dans le sens direct et la précipitation a lieu.
- Si  $Q_0 = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}]_0 [\text{CO}_3^{2-}]_0} > K = \frac{1}{K_s}$ , alors le système tend à évoluer dans le sens indirect de dissolution. Cependant, en l'absence de précipité le système n'évolue pas ; il est alors bloqué hors équilibre chimique.

### Méthode 29.3 : Déterminer les conditions de précipitations

On considère une solution aqueuse contenant des cations  $\text{C}^{\text{p}+}$  et des anions  $\text{A}^{\text{q}-}$  qui sont susceptibles de former un précipité selon :  $m\text{C}^{\text{p}+}(\text{aq}) + n\text{A}^{\text{q}-}(\text{aq}) = \text{C}_m\text{A}_n(\text{s})$ .

- Si  $[\text{C}^{\text{p}+}]_0^m [\text{A}^{\text{q}-}]_0^n > K_s$ , il y a précipitation et formation de  $\text{C}_m\text{A}_n(\text{s})$  jusqu'à atteindre l'équilibre chimique.
- Si  $[\text{C}^{\text{p}+}]_0^m [\text{A}^{\text{q}-}]_0^n < K_s$ , il n'y a pas précipitation et le système n'évolue pas, bien qu'il soit hors d'équilibre.



Il ne faut pas confondre le critère  $[\text{C}^{\text{p}+}]_0^m [\text{A}^{\text{q}-}]_0^n < K_s$  **applicable hors équilibre chimique** et l'égalité  $[\text{C}^{\text{p}+}]_0^m [\text{A}^{\text{q}-}]_0^n = K_s$  **applicable à l'équilibre en présence de précipité** et qui permet de déterminer les concentrations des ions dans la solution saturée.

□ Peut-on traduire la condition d'existence par un diagramme analogue au diagramme de prédominance acido-basique ? Quel serait alors l'analogue du pH ?

Dans le cas des réactions acido-basiques, l'acide est le donneur, la base l'accepteur et le proton  $H^+$  la particule échangée. Dans le cas des réactions de dissolution-précipitation, le cation peut être vu comme un accepteur d'anion  $A^-$  ou encore l'anion comme un accepteur de cation  $C^{P+}$ . L'analogue de  $pH = -\log [H_3O^+]$  est donc  $pA = -\log [A^-]$  ou encore  $pC = -\log [C^{P+}]$ .

Reformulons la condition d'existence appliquée à une solution aqueuse contenant des ions carbonate et calcium. On suppose la concentration en ions carbonate fixée  $[CO_3^{2-}]_0 = c_0$  et on étudie différents cas en fonction de la concentration apportée en calcium  $[Ca^{2+}]_0$  :

- Si  $[Ca^{2+}]_0 [CO_3^{2-}]_0 = [Ca^{2+}]_0 c_0 < K_s$ , le précipité est absent. Ceci restant valable, tant que  $[Ca^{2+}]_0 < K_s/c_0$  soit  $[Ca^{2+}]_0 < [Ca^{2+}]_{lim}$ , en posant  $[Ca^{2+}]_{lim} = K_s/c_0$ .
- Si  $[Ca^{2+}]_0 [CO_3^{2-}]_0 = [Ca^{2+}]_0 c_0 > K_s$ , la précipitation a lieu. Dans ce cas les concentrations des ions diminuent jusqu'à atteindre l'équilibre où :  $[CO_3^{2-}] < c_0$  et  $[Ca^{2+}] < [Ca^{2+}]_0$ . Avec  $[CO_3^{2-}] < c_0$  et la loi de l'équilibre chimique  $Q_e = [Ca^{2+}] [CO_3^{2-}] = K_s$  nous pouvons préciser que la concentration en ions calcium à l'équilibre vérifie :

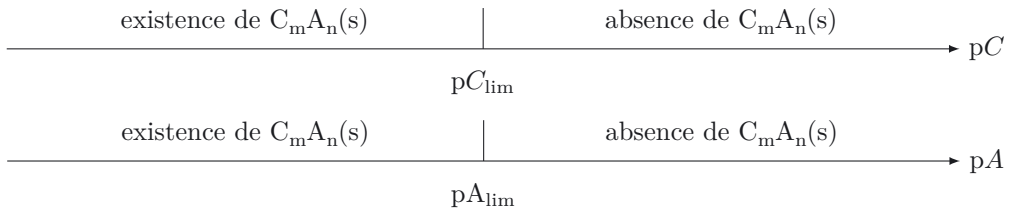
$$[Ca^{2+}]_{lim} < [Ca^{2+}] < [Ca^{2+}]_0.$$

Avec ce qui précède, nous pouvons calculer  $pCa_{lim} = -\log(K_s/c_0) = pK_s - pC_0$ , et dire que si  $pCa < pCa_{lim}$  le solide est formé alors que si  $pCa > pCa_{lim}$  il n'existe pas. On en déduit ainsi le diagramme d'existence de  $CaCO_3$  sur une échelle de  $pCa$ .

Dans un cadre plus général :

#### Définition : Diagramme d'existence

Le diagramme d'existence d'un précipité  $C_m A_n(s)$  est l'axe gradué en  $pC = -\log [C^+]$  (ou en  $pA = -\log [A^-]$ ) délimitant le domaine d'existence du précipité.



Par un raisonnement similaire à celui réalisé pour le carbonate de calcium, il est possible de montrer que  $pC_{lim} = \frac{1}{m}(pK_s - npA_0)$  et  $pA_{lim} = \frac{1}{n}(pK_s - mpC_0)$ .

Attention, il ne s'agit en aucun cas d'apprendre par cœur ces formules mais bien de savoir refaire le raisonnement.

## Interro de cours

1. Le produit de solubilité du précipité rouge de chromate d'argent  $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$  vaut  $10^{-11,9}$  à  $25^\circ\text{C}$  et s'écrit d'après la loi de l'équilibre :

(a)  $[\text{Ag}^+][\text{CrO}_4^{2-}] = K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$  ;

(b)  $[\text{Ag}^+]^2[\text{CrO}_4^{2-}] = K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$  ;

(c)  $[\text{Ag}^+][\text{CrO}_4^{2-}]^2 = K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$ .

2. Au sein d'une solution saturée à l'équilibre, la solubilité du chromate d'argent s'identifie à :

(a)  $s = [\text{Ag}^+] = [\text{CrO}_4^{2-}]$  ;

(b)  $s = 2[\text{Ag}^+] = [\text{CrO}_4^{2-}]$  ;

(c)  $s = \frac{1}{2}[\text{Ag}^+] = [\text{CrO}_4^{2-}]$ .

3. Identifier la(les) affirmation(s) correcte(s).

(a) La solubilité du chromate d'argent dans l'eau vaut  $6,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $25^\circ\text{C}$ .

(b) La solubilité du chromate d'argent dans une solution de nitrate d'argent est plus grande.

(c) La solubilité du chromate d'argent ne dépend pas de la température.

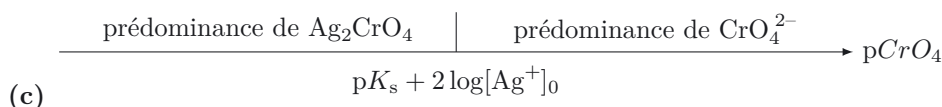
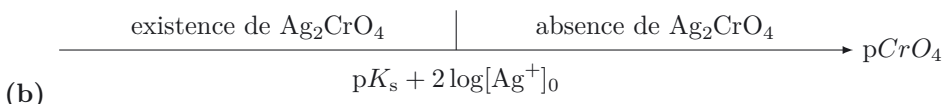
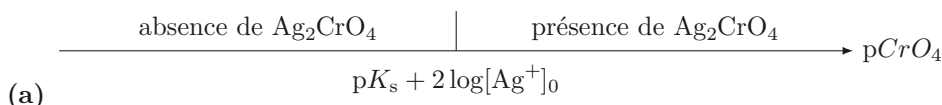
4. On mélange une solution de nitrate d'argent et une solution de chromate de potassium de sorte que  $[\text{Ag}^+]_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{CrO}_4^{2-}]_0 = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $25^\circ\text{C}$ .

(a) Il y a précipitation de chromate d'argent.

(b) Il y a précipitation de nitrate de potassium.

(c) Il n'y a pas précipitation.

5. Le diagramme du chromate d'argent s'écrit :



6. La méthode de Mohr est une méthode de titrage des ions chlorure  $\text{Cl}^-$  par les ions argent  $\text{Ag}^+$  en présence d'ions chromate  $\text{CrO}_4^{2-}$ . Avant l'équivalence, apparaît un précipité blanc. À partir de l'équivalence apparaît un précipité rouge. Identifier la(les) affirmation(s) correcte(s).

(a) Le précipité de chromate d'argent est plus soluble que le précipité de chlorure d'argent.

(b) Il s'agit d'un dosage colorimétrique dont les réactions sont des réactions quantitatives de précipitation.

(c)  $\text{p}K_s(\text{AgCl}) > \text{p}K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$ .



## Exercices

### Exercice 29.1 Solubilité d'un solide

➔ Méthode (29.1)

Le tableau ci-dessous présente des solides peu solubles avec leur  $pK_s = -\log K_s$ , où  $K_s$  est le produit de solubilité dans l'eau. Les ions contenus dans ces solides sont :

$\text{Ag}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ ,  $\text{CrO}_4^{2-}$ ,  $\text{I}^-$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{F}^-$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$ ,  $\text{PO}_4^{3-}$ ,  $\text{OH}^-$ ,  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$ .

- Calculer la solubilité (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) de chacun de ces solides dans l'eau pure.
- Comparer la solubilité de  $\text{AgCl}$  et de  $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$ , deux solides qui ont pratiquement le même produit de solubilité. Commenter.
- Pour  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ , calculer le pH de la solution saturée.

Solide	$pK_s$
$\text{AgCl}$	9,95
$\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$	10
$\text{AgI}$	16,08
$\text{CaF}_2$ (fluorine)	10,4
$\text{CaSO}_4$ (gypse)	5,04
$\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{OH}$ (hydroxy-apatite)	57,8
$\text{Fe}(\text{OH})_2$	15
$\text{Fe}(\text{OH})_3$	37,5

### Exercice 29.2 Solubilité du nitrite d'argent

➔ Méthode (29.2)

Le nitrite d'argent  $\text{AgNO}_2$  est un solide qui se dissout en ions  $\text{Ag}^+$  et  $\text{NO}_2^-$ . Son produit de solubilité est  $K_s = 10^{-3,8}$ .

L'ion nitrite  $\text{NO}_2^-$  est une base faible dont l'acide conjugué est l'acide nitreux  $\text{HNO}_2$ . La constante d'acidité de ce dernier est  $K_a = 10^{-3,5}$ .

- Écrire la réaction de dissolution du nitrite d'argent et la réaction de l'ion nitrite avec l'eau. Exprimer la solubilité  $s$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) en fonction des différentes concentrations.
- Dans quel domaine de pH la forme basique  $\text{NO}_2^-$  est-elle prépondérante ? Déterminer dans ce cas la solubilité  $s$  de  $\text{AgNO}_2$ .
- Déterminer la solubilité  $s$  lorsque la forme acide  $\text{HNO}_2$  est prépondérante, en fonction de la concentration en  $\text{H}_3\text{O}^+$  et des différentes constantes.
- En déduire  $p_s = -\log s$  en fonction du pH, et des constantes  $pK_s$  et  $pK_a$ . En donner une représentation graphique.
- On prépare à  $\text{pH} = 0$  une solution contenant  $[\text{Ag}^+] = [\text{HNO}_2] = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le pH est augmenté progressivement par ajout d'une base. À quel pH un précipité apparaît-il ?

### Exercice 29.3 Condition de précipitation

On mélange 10,0 mL de solution de sulfate de sodium ( $\text{SO}_4^{2-} + 2\text{Na}^+$ ) à  $c_1 = 8,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et 10,0 mL de solution de nitrate d'argent ( $\text{NO}_3^- + \text{Ag}^+$ ) à  $c_2 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Un précipité blanc de sulfate d'argent sera-t-il observé ? On précise  $pK_s(\text{Ag}_2\text{SO}_4) = 4,8$ .

**Exercice 29.4 Solubilité des hydroxydes de fer**

Certaines eaux souterraines circulent dans d'anciennes mines d'extraction de minerais métalliques, ce qui a pour conséquence de provoquer leur acidification et la présence d'une forte concentration de métaux : c'est le phénomène de *drainage minier acide*, qui constitue un sérieux problème de pollution.

On s'intéresse à la présence de fer dans l'eau, soit sous la forme d'ion ferreux  $\text{Fe}^{2+}$  et ferrique  $\text{Fe}^{3+}$ , soit sous la forme d'hydroxyde ferreux  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et d'hydroxyde ferrique  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ . Les hydroxydes sont solides. On note  $s_2$  et  $s_3$  leurs solubilités respectives en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On précise :  $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 15,0$ ,  $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_3) = 37,5$ , et le produit ionique de l'eau  $K_e = 10^{-14,0}$ .

1. Écrire la réaction de dissolution de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ . Déterminer  $\text{p}s_2 = -\log(s_2)$  en fonction de pH.
2. Écrire la réaction de dissolution de  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ . Déterminer  $\text{p}s_3 = -\log(s_3)$  en fonction de pH.
3. Tracer  $\text{p}s_2$  et  $\text{p}s_3$  en fonction de pH sur le même graphique. Comparer la solubilité des deux hydroxydes.
4. Calculer les solubilités  $s_2$  et  $s_3$  pour  $\text{pH} = 6,0$ . Commenter ces valeurs.
5. Pour chacun des hydroxydes de fer, dans quel domaine de pH la solubilité est-elle supérieure à  $0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ?

**Exercice 29.5 Élimination du fer dans l'eau potable**

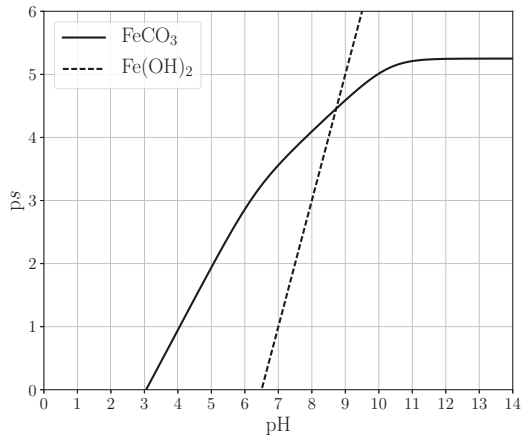
➔ Méthode (29.2)

Les eaux naturelles exploitées pour la distribution d'eau potable peuvent contenir du fer sous forme d'ions ferreux  $\text{Fe}^{2+}$  associés à des ions carbonates  $\text{CO}_3^{2-}$ , qui peuvent éventuellement précipiter sous forme de carbonate de fer(II)  $\text{FeCO}_3$ . Le produit de solubilité de ce dernier est  $K_s = 10^{-10,5}$ .

Bien qu'il ne soit pas nocif pour la santé, ce fer est éliminé en raison de son goût et de sa couleur. Une méthode d'élimination consiste à augmenter le pH afin de provoquer la précipitation du carbonate de fer, lequel est éliminé par filtrage. Après ce traitement, le pH de l'eau est ramené entre 6 et 8 pour la distribution.

On donne pour le couple acide-base  $\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$   $\text{p}K_{a2} = 10,3$  et pour le couple acide-base  $\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$   $\text{p}K_{a1} = 6,3$ .

1. Écrire la réaction de dissolution de  $\text{FeCO}_3$  et les réactions acido-basiques, puis exprimer la solubilité de  $\text{FeCO}_3$  en fonction des différentes concentrations.
2. Donner le diagramme de prédominance de  $\text{CO}_3^{2-}$ ,  $\text{HCO}_3^-$  et  $\text{H}_2\text{CO}_3$  en fonction du pH.
3. Pour chaque domaine de prédominance des espèces carbonées, déterminer la solubilité  $s$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) du carbonate de fer en fonction de  $[\text{H}_3\text{O}^+]$ , puis  $\text{p}s = -\log(s)$  en fonction du pH. La figure suivante représente  $\text{p}s$  en fonction du pH pour le carbonate de fer(II)  $\text{FeCO}_3$  et pour l'hydroxyde de fer(II)  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ . Les résultats précédents sont-ils en accord avec la courbe tracée pour le carbonate de fer ?



4. On considère le cas d'une eau de pH = 6,0 contenant  $c = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de carbonate de fer dissous. Le pH est augmenté progressivement par ajout d'une solution de base forte. Vérifier qu'initialement la solution n'est pas saturée et déterminer à partir de quel pH un précipité apparaît. Quel est ce précipité ?
5. Mêmes questions pour une eau de pH = 6,0 contenant  $c = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de carbonate de fer dissous.

### Exercice 29.6 Adoucissement de l'eau

La dureté de l'eau est déterminée par sa concentration en ions calcium  $\text{Ca}^{2+}$  et magnésium  $\text{Mg}^{2+}$ . Dans le réseau de distribution d'eau potable, une eau trop dure est néfaste en raison des dépôts de calcaire ( $\text{CaCO}_3$  et  $\text{MgCO}_3$ ) qui peuvent se produire, par exemple dans les machines à laver et les chaudières.

L'adoucissement consiste à réduire la dureté de l'eau avant de la distribuer. On s'intéresse au procédé d'adoucissement par décarbonatation. Pour simplifier, on considère seulement des ions  $\text{Ca}^{2+}$ . Le procédé fonctionne si ceux-ci sont associés à des ions hydrogénocarbonate  $\text{HCO}_3^-$ , ce qui leur permet de précipiter sous forme de carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3$ . Le produit de solubilité de ce dernier est  $K_{s1} = 10^{-8,3}$ .

Le réactif utilisé dans ce procédé est l'hydroxyde de calcium  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ , appelé aussi chaux éteinte. Il s'agit d'un solide dont le produit de solubilité est  $K_{s2} = 10^{-5,2}$ .

La réaction de décarbonatation est :



Les premiers ions ( $\text{Ca}^{2+} + 2 \text{OH}^{-}$ ) proviennent de la dissolution de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ .

Pour le couple acide-base  $\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$  on donne  $\text{p}K_a = 10,3$ . Le produit ionique de l'eau est  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ .

1. Calculer la solubilité de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ .
2. Calculer la constante d'équilibre de la réaction de décarbonatation et commenter.

3. On envisage le cas d'une eau dure, contenant une concentration  $c = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'hydrogencarbonate de calcium dissous, soit  $\text{Ca}^{2+} + 2\text{HCO}_3^-$ . Calculer la quantité de matière de chaux ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ ) nécessaire pour faire précipiter le maximum de carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3$ .

# Corrections

## Interro de cours

1. La réaction de dissolution s'écrit :  $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s}) = 2\text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{CrO}_4^{2-}(\text{aq})$  donc la loi de l'équilibre donne  $[\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}] = K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$ . Réponse (b).
2. Le tableau d'avancement permet d'obtenir à l'équilibre :  $[\text{Ag}^+] = 2s$  et  $[\text{CrO}_4^{2-}] = s$ . Réponse (c).
3. La loi de l'équilibre fournit  $(2s)^2 s = 4s^3 = K_s$  donc  $s = \left(\frac{K_s}{4}\right)^{1/3}$  et vaut  $6,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à  $25^\circ\text{C}$ . Cette solubilité peut dépendre de la température si  $K_s$  en dépend. (Dans le cas du chromate d'argent, la solubilité augmente si la température diminue.) En présence d'ions argent, la solubilité va chuter par effet d'ions communs. Seule la réponse (a) est exacte.
4.  $[\text{Ag}^+]_0^2 [\text{CrO}_4^{2-}]_0 = 1,0 \cdot 10^{-9} > K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$ . Réponse (a).
5. Il s'agit d'un diagramme d'existence (et non de prédominance). De plus, il faut une concentration forte en ions  $\text{CrO}_4^{2-}$  et donc un faible  $p\text{CrO}_4 = -\log [\text{CrO}_4^{2-}]$  pour qu'il y ait précipitation. Réponse (b).
6. D'après la question, les réactions de dosage sont, par ordre d'intervention :  
 $\text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{Cl}^-(\text{aq}) \rightarrow \text{AgCl}(\text{s})$  avec  $K_1 = \frac{1}{K_s(\text{AgCl})} = 10^{pK_s(\text{AgCl})}$   
 $\text{Ag}^+(\text{aq}) + \frac{1}{2}\text{CrO}_4^{2-}(\text{aq}) \rightarrow \frac{1}{2}\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{s})$  avec  $K_2 = \frac{1}{\sqrt{K_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)}} = 10^{\frac{1}{2}pK_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)} = 10^{5,95}$   
 Le précipité blanc  $\text{AgCl}$  apparaît en premier donc c'est le moins soluble et  $K_1 > K_2$  ce qui impose l'inégalité  $pK_s(\text{AgCl}) > \frac{1}{2}pK_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$  (et non  $pK_s(\text{AgCl}) > pK_s(\text{Ag}_2\text{CrO}_4)$ ). Réponses (a) et (b).  
 Remarque : il faut penser à comparer les constantes d'équilibre de réactions faisant intervenir le même coefficient stœchiométrique pour le réactif en commun (ici  $\text{Ag}^+$ ).

## Exercice 29.1

1.
  - $\text{AgCl} = \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$ . Équilibre :  $K_s = [\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]$ . Le tableau d'avancement conduit à  $[\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-] = s$ . On a  $K_s = s^2$  et donc  $s = \sqrt{10^{-9,95}} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7 = 2\text{Ag}^+ + \text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ . Équilibre :  $K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]$ . Le tableau d'avancement conduit à  $[\text{Ag}^+] = 2s$  et  $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = s$ . On a  $K_s = (2s)^2 s = 4s^3$  et donc  $s = (10^{-10}/4)^{1/3} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{AgI} = \text{Ag}^+ + \text{I}^-$ .  $K_s = s^2$  et donc  $s = \sqrt{10^{-16,08}} = 9,1 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{CaF}_2 = \text{Ca}^{2+} + 2\text{F}^-$ . On a  $K_s = [\text{Ca}^{2+}][\text{F}^-]^2$ . Le tableau d'avancement conduit à  $[\text{Ca}^{2+}] = s$  et  $[\text{F}^-] = 2s$ . On a  $K_s = (2s)^2 s = 4s^3$  et donc  $s = (10^{-10,4}/4)^{1/3} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{CaSO}_4 = \text{Ca}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$ . Solubilité  $s = \sqrt{10^{-5,04}} = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{OH} = 5\text{Ca}^{2+} + 3\text{PO}_4^{3-} + \text{OH}^-$ . Équilibre  $K_s = [\text{Ca}^{2+}]^5 [\text{PO}_4^{3-}]^3 [\text{OH}^-]$ . D'après le tableau d'avancement  $[\text{Ca}^{2+}] = 5s$ ,  $[\text{PO}_4^{3-}] = 3s$  et  $[\text{OH}^-] = s$ . On en déduit  $K_s = 5^5 3^3 s^9$  et donc  $s = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{Fe}(\text{OH})_2 = \text{Fe}^{2+} + 2\text{OH}^-$ . Équilibre  $K_s = [\text{Fe}^{2+}][\text{OH}^-]^2$ . D'après le tableau d'avancement on sait que  $[\text{Fe}^{2+}] = s$  et  $[\text{OH}^-] = 2s$ . On a  $K_s = 2^2 s^3$  et donc  $s = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
  - $\text{Fe}(\text{OH})_3 = \text{Fe}^{3+} + 3\text{OH}^-$ . Équilibre  $K_s = [\text{Fe}^{3+}][\text{OH}^-]^3$ . D'après le tableau d'avancement on sait que  $[\text{Fe}^{3+}] = s$  et  $[\text{OH}^-] = 3s$ . On a  $K_s = 3^3 s^4$  et donc  $s = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
2.  $\text{Ag}_2\text{Cr}_2\text{O}_7$  a une solubilité 26 fois plus grande que  $\text{AgCl}$  alors que son produit de solubilité est quasiment identique. L'écart vient de la stœchiométrie différente de la réaction.
3. Dans une solution saturée en  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  on a  $[\text{OH}^-] = 2s = 12,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . En utilisant la condition d'équilibre  $[\text{OH}^-][\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-14}$  on obtient  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 7,9 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et donc  $\text{pH} = 9,1$ .  
 Dans une solution saturée en  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  on a  $[\text{OH}^-] = 3s = 5,4 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Cette concentration est inférieure à la concentration  $[\text{OH}^-] = 1 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  dans l'eau pure. L'apport d'ions  $\text{OH}^-$  par

la dissolution de l'hydroxyde de fer est donc négligeable par rapport à la quantité initiale, et donc le pH reste très proche de 7.

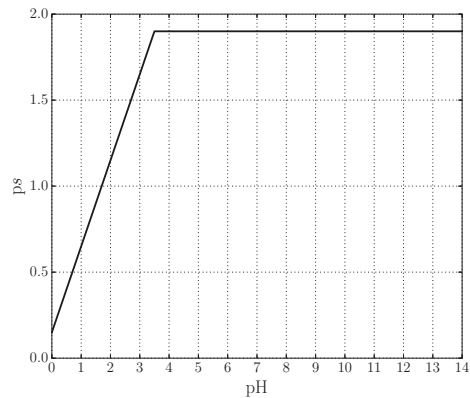
### Exercice 29.2

- La réaction de dissolution du nitrite d'argent est :  $\text{AgNO}_2(\text{s}) = \text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{NO}_2^-(\text{aq})$ .  
L'ion nitrite est une base qui réagit avec l'eau :  $\text{NO}_2^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{HNO}_2(\text{aq}) + \text{OH}^-(\text{aq})$ .  
La solubilité de  $\text{AgNO}_2$  est  $s = [\text{Ag}^+] = [\text{NO}_2^-] + [\text{HNO}_2]$ .
- Le  $\text{p}K_a$  du couple acide-base  $\text{HNO}_2/\text{NO}_2^-$  est  $\text{p}K_a = 3,5$ . La forme basique  $\text{NO}_2^-$  est donc prépondérante lorsque  $\text{pH} > \text{p}K_a + 1$  soit  $\text{pH} > 4,5$ . Dans ce cas, on a approximativement  $s = [\text{NO}_2^-]$ . La condition d'équilibre de dissolution en présence de solide s'écrit :  $K_s = [\text{Ag}^+][\text{NO}_2^-] = s^2$ , ce qui conduit à  $s = \sqrt{K_s}$ .
- La forme acide  $\text{HNO}_2$  est prépondérante lorsque  $\text{pH} < \text{p}K_a - 1$  soit  $\text{pH} < 2,5$ . Dans ce cas, la solubilité est approximativement  $s = [\text{HNO}_2]$ .

Il faut alors utiliser la condition d'équilibre acido-basique :  $\frac{[\text{NO}_2^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HNO}_2]} = K_a$  d'où l'on déduit

$$[\text{NO}_2^-] = \frac{K_a s}{[\text{H}_3\text{O}^+]}. \text{ La condition d'équilibre } K_s = [\text{Ag}^+][\text{NO}_2^-] \text{ conduit alors à } s = \sqrt{\frac{K_s [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a}}.$$

- Pour  $\text{pH} > 4,5$  on obtient  $ps = \frac{1}{2}\text{p}K_s = 1,9$ .  
Pour  $\text{pH} < 2,5$  on a  $ps = \frac{1}{2}(\text{p}K_s - \text{p}K_a + \text{pH})$ , donc  $ps = 0,15 + \frac{1}{2}\text{pH}$ . Ces deux droites sont représentées sur la figure ci-contre. La courbe réelle peut être considérée comme confondue avec ces deux droites sauf pour les pH proches du  $\text{p}K_a$ .
- Pour la concentration  $c = 0,10 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$ , on a bien  $pc > ps$  : la solution n'est pas saturée et elle ne contient pas de  $\text{AgNO}_2$  solide. L'égalité  $ps = pc$  est atteinte à  $\text{pH} = 1,7$ . À ce pH, le précipité  $\text{AgNO}_2$  apparaît.



### Exercice 29.3

Il faut vérifier la condition de précipitation. Pour cela, il faut calculer  $[\text{Ag}^+]_0^2[\text{SO}_4^{2-}]_0$  et le comparer à  $K_s$ . On mélange 10,0 mL de chaque solution. On en déduit les concentrations apportées :  $[\text{Ag}^+]_0 = c_2/2$  et  $[\text{SO}_4^{2-}]_0 = c_1/2$ , puis le produit  $[\text{Ag}^+]_0^2[\text{SO}_4^{2-}]_0 = (c_2/2)^2(c_1/2) = 1,0 \cdot 10^{-4}$ . Or  $K_s = 10^{-4,8} = 1,6 \cdot 10^{-5}$ . Donc  $[\text{Ag}^+]_0^2[\text{SO}_4^{2-}]_0 > K_s$ . Le sulfate d'argent va précipiter.

### Exercice 29.4

- La réaction de dissolution de l'hydroxyde ferreux est :  $\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s}) = \text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + 2 \text{OH}^-(\text{aq})$ .  
La condition d'équilibre en présence de solide s'écrit  $K_{s_2} = [\text{Fe}^{2+}][\text{OH}^-]^2$ . La concentration en  $\text{OH}^-$  est directement déterminée par le pH de la solution en raison de la relation d'équilibre  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = K_e$ .  
De plus, la solubilité de l'hydroxyde ferreux  $s_2 = [\text{Fe}^{2+}]$ . On en déduit :  $s_2 \frac{K_e^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} = K_s$ .  
En prenant le logarithme décimal de cette relation, et en utilisant  $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$ , on obtient :

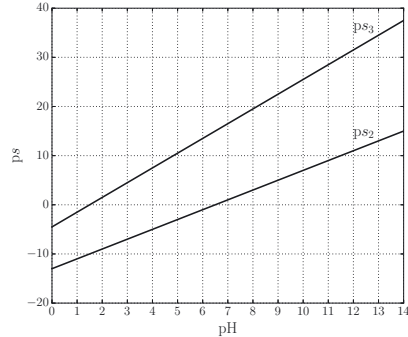
$$\text{ps}_2 = \text{p}K_{s_2} - 2\text{p}K_e + 2\text{pH} = -13 + 2\text{pH}$$

2. La réaction de dissolution de l'hydroxyde ferrique est :  $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s}) = \text{Fe}^{3+}(\text{aq}) + 3\text{OH}^-(\text{aq})$ .  
 La condition d'équilibre en présence de solide s'écrit  $K_{s_3} = [\text{Fe}^{3+}][\text{OH}^-]^3$  et sa solubilité est  $s_3 = [\text{Fe}^{3+}]$ .  
 On en déduit  $K_{s_3} = s_3[\text{OH}^-]^3$  et en passant au logarithme :

$$ps_3 = pK_{s_3} - 3pK_e + 3pH = -4,5 + 3pH$$

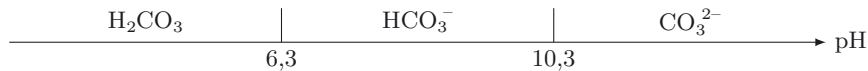
3.  $ps_3$  est supérieur à  $ps_2$ , avec une différence supérieure à 8 quelque soit le pH. En conséquence,  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  est beaucoup plus soluble que  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ , quelque soit le pH.

4. Pour  $\text{pH} = 6,0$  on calcule  $ps_2 = -1$  et  $ps_3 = 13,5$ . On a donc  $s_2 = 10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , ce qui signifie que  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  est parfaitement soluble à ce pH.  $s_3 = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  donc  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  est très insoluble à ce pH. Remarque : la valeur de  $s_2$  n'est pas valide dans le cadre d'une solution diluée, l'expression de  $ps$  n'étant plus valable pour des concentrations trop élevées.
5. La solubilité est supérieure à  $0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  lorsque  $ps < 2$ . Pour  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  il faut  $\text{pH} < 7,5$  et pour  $\text{Fe}(\text{OH})_3$   $\text{pH} < 2,2$ .



### Exercice 29.5

1. La réaction de dissolution est  $\text{FeCO}_3(\text{s}) = \text{Fe}^{2+}(\text{aq}) + \text{CO}_3^{2-}(\text{aq})$  et les réactions acido-basiques sont  $\text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{HCO}_3^-(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$  et  $\text{HCO}_3^-(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l}) = \text{CO}_3^{2-}(\text{aq}) + \text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ . La solubilité de  $\text{FeCO}_3$  est  $s = [\text{Fe}^{2+}] = [\text{CO}_3^{2-}] + [\text{HCO}_3^-] + [\text{H}_2\text{CO}_3]$ .
2. Pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  il existe la relation  $\text{pH} = pK_a + \log \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$ . Ainsi l'acide prédomine si  $\text{pH} < pK_a$  sinon c'est la base. On en déduit le diagramme de prédominance suivant :



3. Pour  $\text{pH} > 11,3$  ( $\text{pH} > pK_{a2} + 1$ ), on a approximativement  $s = [\text{CO}_3^{2-}]$ . La condition d'équilibre de la réaction de dissolution s'écrit  $K_s = [\text{Fe}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}] = s^2$  d'où l'on déduit  $s = \sqrt{K_s}$  et donc  $ps = \frac{1}{2}pK_s = 5,25$ .

Pour  $7,3 < \text{pH} < 9,3$  ( $pK_{a1} + 1 < \text{pH} < pK_{a2} - 1$ ), on a approximativement  $s = [\text{HCO}_3^-]$ . La condition d'équilibre de la réaction acido-basique de  $\text{HCO}_3^-$  avec l'eau s'écrit  $\frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCO}_3^-]} = K_{a2}$ .

On en déduit  $K_s = s[\text{CO}_3^{2-}] = s \frac{K_{a2}[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$  où  $[\text{HCO}_3^-] = s$  donc  $K_s = \frac{K_{a2}s^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$  et  $s = \sqrt{\frac{K_s[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a2}}}$ .

En prenant le logarithme décimal de  $s$  on obtient  $ps = \frac{1}{2}(pK_s - pK_{a1} + \text{pH}) = 0,1 + \frac{1}{2}\text{pH}$ .

Pour  $\text{pH} < 5,3$  ( $\text{pH} < pK_{a1} - 1$ ), on a approximativement  $s = [\text{H}_2\text{CO}_3]$ . La condition d'équilibre de la réaction acido-basique de  $\text{H}_2\text{CO}_3$  avec l'eau s'écrit  $\frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = K_{a1}$ . En multipliant cette

dernière par  $K_{a2}$ , on obtient  $\frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = K_{a1}K_{a2}$ .

La condition d'équilibre de la dissolution est  $K_s = s[\text{CO}_3^{2-}] = \frac{K_{a1}K_{a2}[\text{H}_2\text{CO}_3]}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}$ . On obtient finalement

$$s = \sqrt{\frac{K_s[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_{a1}K_{a2}}} \text{ et } ps = \frac{1}{2}(pK_s - pK_{a1} - pK_{a2}) + \text{pH} = -3,05 + \text{pH}.$$

En comparant les droites obtenues à la courbe réelle fournie, on peut remarquer que les droites sont quasiment confondues avec la courbe réelle sauf pour des pH proches des  $pK_a$  où il faudrait prendre en compte deux espèces prépondérantes et non une seule.

- Pour une concentration  $c = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  on a  $p_c = 4$ . On voit sur le graphique que  $p_c > p_s$ , ce qui signifie que le carbonate de fer est bien dissous à ce pH et que la solution n'est pas saturée. Lorsqu'on augmente de pH, on constate graphiquement qu'un précipité de  $\text{FeCO}_3$  apparaît lorsque  $p_s = p_c$ , c'est-à-dire lorsque  $0,1 + \frac{1}{2}pH = 4$  et donc  $pH = 7,8$ .
- Lorsque  $p_c = 5$ , on constate graphiquement que  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  précipite en premier, pour  $pH = 9,0$ .

### Exercice 29.6

- La dissolution de l'hydroxyde de calcium s'écrit :  $\text{Ca}(\text{OH})_2(\text{s}) = \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{OH}^{-}(\text{aq})$ . Si  $s$  est la solubilité en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , un tableau d'avancement nous donne  $[\text{Ca}^{2+}] = s$  et  $[\text{OH}^{-}] = 2s$ . L'équilibre de la réaction de dissolution s'écrit  $[\text{Ca}^{2+}][\text{OH}^{-}]^2 = K_{s2}$  soit  $4s^3 = K_{s2}$ , d'où l'on déduit  $s = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

- La réaction de décarbonatation est :  $\text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + \text{OH}^{-}(\text{aq}) + \text{HCO}_3^{-}(\text{aq}) = \text{CaCO}_3(\text{s}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$ .

La condition d'équilibre s'écrit :  $K = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}][\text{OH}^{-}][\text{HCO}_3^{-}]}$ .

On transforme le quotient de réaction à l'aide des conditions d'équilibre suivantes :  $[\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}] = K_{s1}$  pour la dissolution de  $\text{CaCO}_3$ ,  $\frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^{+}]}{[\text{HCO}_3^{-}]} = K_a$  pour l'équilibre acido-basique des carbonates, et  $[\text{H}_3\text{O}^{+}][\text{OH}^{-}] = K_e$  pour l'autoprotolyse de l'eau.

On a ainsi :  $K = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]} \frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}_3\text{O}^{+}]}{[\text{HCO}_3^{-}]} \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^{+}][\text{OH}^{-}]} = \frac{K_a}{K_{s1}K_e} = 10^{-10,3+8,3+14,0} = 10^{12,0}$ . La réaction de décarbonatation est donc supposée totale.

Remarque : en gardant les coefficients stoechiométriques à deux dans l'équation bilan, on trouve une constante d'équilibre  $K' = K^2 = 10^{24,0}$ .

- Pour faire précipiter tout le calcium (avec tout le carbonate), il faut apporter autant de calcium qu'il y a d'ions hydrogénocarbonate initialement présents, soit  $5,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de calcium, c'est-à-dire  $5,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $\text{Ca}(\text{OH})_2$ .



# Réactions d'oxydo-réduction

## L'essentiel du cours

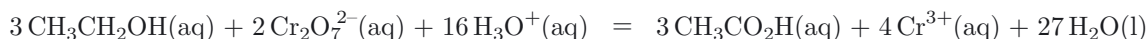
### Contexte

Comment fonctionne un éthylotest ? Comment est-il conçu ?

Commençons par lire sa notice d'utilisation. L'automobiliste voulant vérifier son taux d'alcoolémie doit souffler dans un sac gonflable avant d'expulser l'air à travers un tube en plastique rempli de cristaux de couleur orange qui virent au vert en présence d'alcool. Si le virage de couleur a lieu au delà du trait limite alors le taux d'alcoolémie dépasse la limite légale.

Quelle est la réaction responsable de ce changement de couleur ?

Les molécules d'éthanol expirées réagissent avec les cristaux de dichromate de potassium  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  de couleur orange pour donner des ions  $\text{Cr}^{3+}$  de couleur verte. La réaction équivalente en solution aqueuse s'écrit :

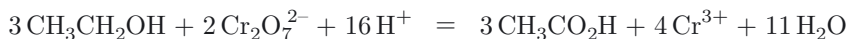


La présence de  $\text{H}_3\text{O}^+$  et de l'acide éthanoïque  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$  pourrait faire penser à une réaction acido-basique. Mais le couple acide/base est  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CO}_2^-$  et non  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ . Ce n'est donc pas une réaction acidobasique. Nous allons voir qu'il s'agit d'une **réaction d'oxydo-réduction**.

## ■ 1 Notions essentielles sur les oxydants et les réducteurs

Quelle est la particule échangée dans une réaction d'oxydo-réduction ? Qui est le donneur ? L'accepteur ?

Pour analyser la réaction se déroulant dans l'éthylotest, commençons par la simplifier en l'écrivant :



puis cherchons à écrire une première demi-équation faisant intervenir les espèces, que nous qualifierons de conjuguées,  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  et  $\text{Cr}^{3+}$ .



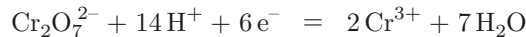
! L'écriture simplifiée ne doit pas faire oublier que les protons  $\text{H}^+$  sont solvatés.

**Méthode 30.1 : Écrire une demi-équation redox**

- Placer le réactif et sa forme conjuguée de chaque côté du signe « = ».
- Assurer la conservation de l'élément commun aux deux espèces.  
Exemple :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} = 2\text{Cr}^{3+}$ .
- Assurer la conservation de l'élément O à l'aide de molécules d'eau  $\text{H}_2\text{O}$ .  
Exemple :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$ .
- Assurer la conservation de l'élément H à l'aide de protons  $\text{H}^+$ .  
Exemple :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$ .
- Assurer la conservation de la charge à l'aide d'électrons  $e^-$ .  
Exemple :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14\text{H}^+ + 6e^- = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$ .

➔ Exercice (30.1)

Cette méthode appliquée aux espèces conjuguées  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  et  $\text{Cr}^{3+}$ , d'une part,  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  et  $\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}$ , d'autre part, permet d'aboutir à :



D'après ces deux demi-réactions la particule échangée est l'électron  $e^-$ , l'accepteur d'électrons est l'ion dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  et le donneur d'électrons est l'éthanol  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ .

Mettons en place le vocabulaire spécifique.

**Définition : Couple oxydant/réducteur, oxydation et réduction**

**Réducteurs** : espèces susceptibles de céder un ou plusieurs électrons.

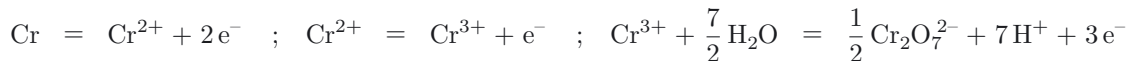
**Oxydants** : espèces susceptibles de capter un ou plusieurs électrons.

**Oxydation** : perte d'électron(s) par un réducteur. Au cours de cette oxydation, le réducteur se transforme en sa forme conjuguée qui est un oxydant :  $\beta \text{Red} = \alpha \text{Ox} + ne^-$ .

**Réduction** : gain d'électron(s) par un oxydant. Au cours de cette réduction, l'oxydant se transforme en sa forme conjuguée qui est un réducteur :  $\alpha \text{Ox} + ne^- = \beta \text{Red}$ .

On parle alors de **couple oxydant/réducteur** noté Ox/Red. Si une espèce constitue le réducteur d'un couple et l'oxydant d'un autre, elle est qualifiée d'**espèce amphotère** ou d'**ampholyte**.

Intéressons-nous au cas de l'élément chrome et recensons quelques demi-équations où il intervient :



L'élément chrome perd de plus en plus d'électrons. On dit qu'il est de plus en plus oxydé.

□ Existe-t-il une grandeur permettant de quantifier le degré d'oxydation ?

Si on prend comme référence le nombre d'électrons de l'élément à l'état atomique, on peut compter le nombre d'électrons perdus ou gagnés pour estimer le degré d'oxydation de l'élément à l'état ionique ou dans un édifice polyatomique.

**Définition : Nombre d'oxydation**

Le **nombre d'oxydation** (noté n.o. et écrit en chiffres romains) quantifie l'état d'oxydation d'un élément (perte ou gain d'électron(s)) par rapport à son état atomique.

Ainsi, une **oxydation** (perte d'électron(s)) se traduit par une **augmentation du n.o.** d'un élément tandis qu'une **réduction** (gain d'électron(s)) se traduit par une **diminution du n.o.** Le nombre d'électrons échangés correspond à la variation de n.o. de l'élément.

Les espèces oxydante et réductrice d'un couple présentent donc un **élément commun** dont le n.o. est **plus élevé** dans la forme **oxydante** et **moins élevé** dans la forme **réductrice**.



L'élément peut perdre des électrons jusqu'à vider sa couche de valence. Ainsi, le **nombre d'oxydation maximal** correspond au **nombre d'électrons de valence**.

L'élément peut gagner des électrons jusqu'à saturer sa couche de valence. Ainsi, le **nombre d'oxydation minimal** (qui sera négatif) correspond, **en valeur absolue**, au **nombre d'électrons nécessaire pour saturer la couche de valence**.



On ne rencontre pas toutes les valeurs possibles de l'intervalle  $[n.o._{min}; n.o._{max}]$ . Les espèces correspondantes ne sont pas toujours suffisamment stables pour exister.

□ **Comment déterminer un n.o. d'un élément au sein d'un édifice chimique stable ?**

Il s'agit de comptabiliser le nombre d'électrons en défaut ou en excès de cet élément par rapport à l'état atomique.

- Au sein d'un édifice monoatomique, le défaut (ou l'excès) d'électrons de l'élément se traduit par la charge de l'édifice donnant directement le nombre d'oxydation.  
Ex : n.o.(Cr) dans  $Cr^{3+} = +III$ .

- Au sein d'un édifice polyatomique, les électrons d'une liaison covalente sont attribués arbitrairement à l'élément le plus électronégatif intervenant dans la liaison. En cas d'égalité ou de symétrie, les électrons d'une liaison sont attribués à part égale aux deux éléments. On peut alors comptabiliser le nombre d'électrons gagnés ou perdus par rapport à l'état atomique pour chaque élément. Cela donne la valeur du n.o. pour chaque élément.

Ex : au sein de  $Cr_2O_7^{2-}$ , le chrome  $\cdot\ddot{C}r\cdot$  engage ses 6 électrons de valence dans 6 liaisons covalentes avec des oxygènes plus électronégatifs de sorte que n.o.(Cr) dans  $Cr_2O_7^{2-} = +VI$ . Certains éléments présentent quasiment toujours le même nombre d'oxydation.

L'oxygène divalent ( $O::X$  ou  $X\cdot\cdot O\cdot\cdot Y$ ) est le plus souvent lié à des atomes moins électronégatifs que lui. D'où n.o.(O) = - II. L'hydrogène monovalent ( $H\cdot\cdot X$ ) est le plus souvent lié à des atomes plus électronégatifs que lui. D'où n.o.(H) = + I.

Mais attention, ce n'est pas toujours ainsi. Dans  $H_2O_2$ , n.o.(H) = +I mais n.o.(O) = -I. De même dans les hydrures, l'hydrogène lié à un alcalin moins électronégatif que lui possède un n.o. = -I. Cela reste cependant exceptionnel pour ces éléments H et O.

La connaissance du n.o. d'un élément (H ou O par exemple) au sein d'un édifice permet de déterminer le n.o. des autres éléments.

- Les défauts (ou les excès) d'électrons des éléments se compensent totalement ou partiellement. Ainsi la somme des n.o. s'identifie à la charge portée par l'édifice.  
Ex : si  $x = n.o.(Cr)$  dans  $Cr_2O_7^{2-}$  alors  $2x + 7(-II) = -II$  d'où  $x = +VI$ .

**Méthode 30.2 : Déterminer un nombre d'oxydation**

- Attribuer  $n.o.(O) = -II$  et  $n.o.(H) = +I$  (sauf exceptions).
- Écrire et résoudre l'équation :  
somme des n.o. des éléments d'un édifice chimique = charge de l'édifice
- Pour les exceptions où  $n.o.(O) \neq -II$  et  $n.o.(H) \neq +I$ , écrire la formule de Lewis afin de visualiser les électrons de valence puis les répartir en fonction des électronégativités des éléments pour évaluer les nombres d'oxydation.

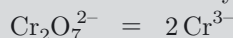
➔ Exercice (30.2)



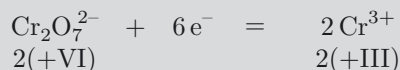
On peut rencontrer des n.o. non entiers. Cela traduit l'existence, au sein de l'édifice, d'un élément à différents états d'oxydation, la moyenne donnant un n.o. fractionnaire. Par exemple pour l'édifice  $Fe_3O_4$  (magnétite), l'équation au nombre d'oxydation  $x$  de l'élément fer est  $3x + 4(-II) = 0$  et conduit à  $x = +VIII/3$ . Sur trois Fe, deux sont au degré d'oxydation  $+III$  et un au degré d'oxydation  $+II$ .

**Méthode 30.3 : Écrire une demi-équation redox à l'aide des nombres d'oxydation**

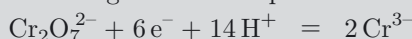
- Placer le réactif et sa forme conjuguée de chaque côté du signe « = ».
- Assurer la conservation de l'élément commun à l'oxydant et au réducteur.



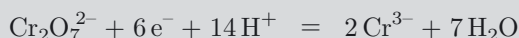
- Déterminer le n.o. de l'élément commun à l'oxydant et au réducteur.
- Assurer l'équilibrage des n.o. à l'aide d'électrons  $e^-$ .



- Assurer la conservation de la charge à l'aide de protons  $H^+$ .



- Assurer la conservation de l'élément O à l'aide de molécules d'eau  $H_2O$ .



➔ Exercice (30.1)

□ Parmi les oxydants et réducteurs classiques, quelles espèces doivent être connues ?

Nom	Formule	Couple	Exemple
Ion dichromate	$Cr_2O_7^{2-}$	$Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$	Ethylotest
Ion permanganate	$MnO_4^-$	$MnO_4^-/Mn^{2+}$	Traitement anti-fongique
Ion hypochlorite	$ClO^-$	$ClO^-/Cl^-$	Eau de javel
Peroxyde d'hydrogène	$H_2O_2$	$H_2O_2/H_2O$	Eau oxygénée
Ion thiosulfate	$S_2O_3^{2-}$	$S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$	Fixateur (développement photo)

## ■ 2 Piles et potentiels standard

Nous venons de voir qu'il existe des réactions d'oxydo-réduction consistant en un transfert spontané d'électrons entre deux espèces.

□ **Peut-on utiliser ces transferts d'électrons pour générer un courant dans un circuit électrique et transformer ainsi une énergie chimique en une énergie électrique ?**

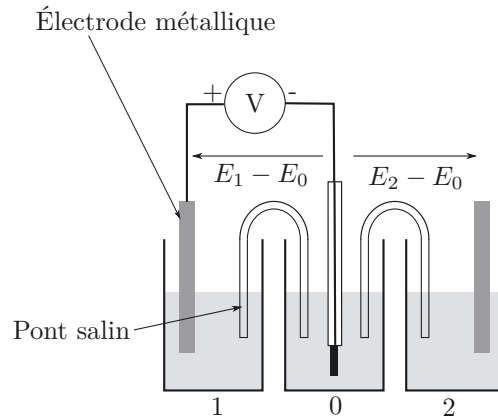
Oui, c'est le principe d'une **pile électrochimique**. L'idée est de faire en sorte que l'échange d'électrons ne se fasse pas directement entre l'oxydant et le réducteur mais par l'intermédiaire d'un circuit électrique. Pour cela on les place dans deux compartiments différents, appelés **demi-piles**, constitués chacun d'une **solution électrolytique** et d'une **électrode métallique**.

En reliant les solutions électrolytiques par une **jonction** (par exemple un pont salin) et les électrodes par un circuit électrique, le courant va pouvoir circuler sous forme d'un courant ionique dans les solutions et d'un courant d'électrons dans le circuit électrique.

### Définition : Anode et cathode

L'électrode où la réaction d'**oxydation** a lieu est appelée **anode** tandis que l'électrode où la réaction de **réduction** a lieu est appelée **cathode**.

Afin d'étudier différentes piles, nous avons préparé cinq solutions aqueuses, concernant des couples différents, à la concentration  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (les solutions 3 et 4 contiennent en outre de l'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ). Chaque solution est placée dans un bécher dans lequel plonge une électrode métallique. Les demi-piles 1, 2, 3 et 4 sont reliées chacune à la demi-pile 0 par un pont salin constitué d'un tube rempli d'un gel contenant  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de nitrate de potassium ( $\text{K}^+ \text{NO}_3^-$ ).



Solution	Composition	Ion	Électrode	Couple
0	$\text{AgNO}_3$	$\text{Ag}^+$	Ag	$\text{Ag}^+/\text{Ag}$
1	$\text{CuSO}_4$	$\text{Cu}^{2+}$	Cu	$\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}$
2	$\text{ZnSO}_4$	$\text{Zn}^{2+}$	Zn	$\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$
3	$(\text{NH}_4)_2\text{Fe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O} + \text{Fe}(\text{NO}_3)_3 \cdot 9 \text{H}_2\text{O}$	$\text{Fe}^{2+}, \text{Fe}^{3+}$	Pt	$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$
4	$(\text{NH}_4)_2\text{Fe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$	$\text{Fe}^{2+}$	Fe	$\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$

□ **Comment caractériser les piles ainsi formées ?**

Pour chaque pile ainsi formée, nous avons mesuré sa **tension à vide**, appelée **force électromotrice** (f.e.m.), à l'aide d'un potentiomètre (voltmètre à très haute résistance d'entrée) branché aux bornes de ses deux électrodes. On accède ainsi à la différence de potentiels entre les deux demi-piles la constituant. Le potentiel d'une demi-pile, appelé aussi **potentiel d'électrode**, est noté  $E$ . Nos résultats sont présentés ci-dessous.

F.e.m	Valeur mesurée
$E_1 - E_0$	-404 mV
$E_2 - E_0$	-1417 mV
$E_3 - E_0$	-54 mV
$E_4 - E_0$	-923 mV

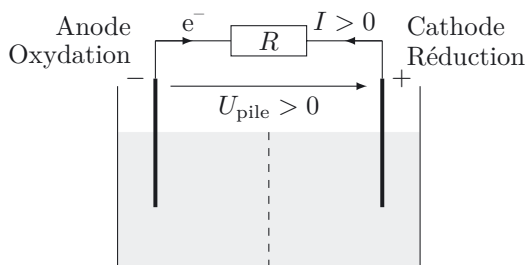
Oxydants	$E(V)$	Réducteurs
$Ag^+$	$E_0$	Ag
$Fe^{3+}$	$E_3$	$Fe^{2+}$
$Cu^{2+}$	$E_1$	Cu
$Fe^{2+}$	$E_4$	Fe
$Zn^{2+}$	$E_2$	Zn

Chaque demi-pile contenant un seul couple oxydant/réducteur, le potentiel d'électrode s'identifie au potentiel d'oxydoréduction du couple oxydant/réducteur. Ces mesures de f.e.m. faites en prenant le potentiel de la demi-pile 0 (couple  $Ag^+/Ag$ ) comme potentiel de référence permettent de classer les couples par ordre croissant de potentiel et de construire une l'échelle de potentiel.

□ Quelles informations sur les couples oxydant/réducteur peut-on déduire du classement de leur potentiel ?

Avec le signe de la f.e.m. ( $U_{pile}$ ), on peut identifier le pôle + (de potentiel plus élevé) et le pôle - (de potentiel plus bas).

Or quand la pile débite un courant, par exemple dans une résistance  $R$ , le courant positif y circule du pôle + vers le pôle - de sorte que les électrons sont émis au niveau de l'électrode du pôle - et consommés au niveau de l'électrode du pôle +.



On peut donc en conclure que :

- l'oxydation a lieu au niveau de l'électrode (et donc pour le couple) de potentiel plus bas ;
- la réduction a lieu au niveau de l'électrode (et donc pour le couple) de potentiel plus élevé.

Pour illustrer ce qui précède, nous avons associé les demi-piles 1, 2, 3 et 4. Les signes des tensions mesurées permettent donc de prévoir les réactions qui se produisent à chaque électrode. Par exemple pour la première pile du tableau ci-contre, le pôle + est l'électrode Cu et le pôle - est l'électrode Zn. La réduction se produit donc au niveau de l'électrode Cu et l'oxydation au niveau de l'électrode Zn. Lorsque la pile débite, la réaction qui a globalement lieu est :  $Cu^{2+}(aq) + Zn(s) \rightarrow Cu(s) + Zn^{2+}(aq)$ .

F.e.m.	Valeur mesurée
$E_1 - E_2$	1008 mV
$E_4 - E_2$	497 mV
$E_4 - E_1$	-512 mV
$E_3 - E_2$	1356 mV
$E_3 - E_1$	349 mV
$E_3 - E_4$	860 mV

#### Méthode 30.4 : Prévoir le sens d'une réaction d'oxydo-réduction

Une réaction d'oxydo-réduction a lieu entre :

- l'**oxydant** du couple de plus **fort potentiel**, qui se trouve réduit ;
- le **réducteur** du couple de plus **faible potentiel**, qui se trouve oxydé.



➔ Exercices (30.3) (30.4)

Pour définir les potentiels des couples de manière absolue il faut définir **un couple de référence**.

**Définition : Électrodes de référence**

On choisit des demi-piles particulières (appelées un peu abusivement « électrodes »).

**Électrode standard à hydrogène (ESH)**

L'électrode standard à hydrogène (ESH) fait intervenir le couple  $H^+/H_2$ . Elle est constituée d'une électrode en platine plongée dans une solution contenant des ions  $H^+$ , de pH nul, dans laquelle barbote du dihydrogène à la pression partielle  $P^\circ = 1$  bar. On lui attribue arbitrairement la valeur  $E = 0$  V afin qu'elle serve d'origine des potentiels.

**Électrode au calomel saturée (ECS)**

L'ESH étant peu pratique d'emploi, on lui privilégie souvent l'électrode au calomel saturée en KCl, de potentiel connu (par rapport à l'ESH) et constant. Elle fait intervenir le couple  $Hg_2Cl_2/Hg$  où  $Hg_2Cl_2$  est le précipité de chlorure mercureux appelé calomel.

**Définition : Potentiel d'oxydoréduction d'un couple**

Le potentiel d'oxydoréduction d'un couple, noté  $E_{Ox/Red}$ , est la force électromotrice d'une pile comportant d'une part la demi-pile dans laquelle le couple intervient, d'autre part l'électrode standard à hydrogène ( $U_{pile} = E_{Ox/Red} - E_{H^+/H_2} = E_{Ox/Red}$  car  $E_{H^+/H_2} = 0$  V).

□ **De quoi dépend le potentiel d'un couple ?**

Pour étudier expérimentalement le potentiel du couple  $Fe^{3+}/Fe^{2+}$ , nous avons préparé :

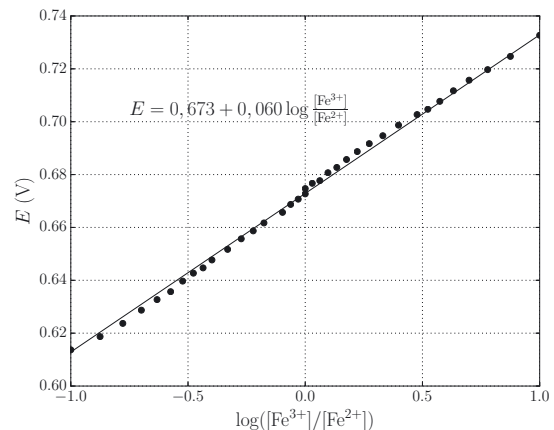
- une solution (1) d'alun de fer (II)  $((NH_4)_2Fe(SO_4)_2 \cdot 6 H_2O)$  (sel de Mohr) préparé dans de l'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  et contenant  $0,010 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  de  $Fe(II)$  ;
- une solution (2) de nitrate de fer (III)  $(Fe(NO_3)_3 \cdot 9 H_2O)$  préparé dans de l'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  et contenant  $0,010 \text{ mol} \cdot L^{-1}$  de  $Fe(III)$ .

Dans une première étape, nous avons placé 30 mL de la solution (1) dans un bécher. Nous y avons plongé une électrode de platine et une électrode de référence au calomel saturée. Nous avons relevé la différence de potentiel  $U = E_{Pt} - E_{ECS}$  pour différents volumes de la solution (2) versés à la burette de 30 mL. Dans une seconde étape, nous avons recommencé en inversant le rôle des solutions (1) et (2). L'expérience a été réalisée à  $20^\circ C$ , température à laquelle le potentiel de l'électrode ECS vaut  $0,2477$  V.

En notant simplement  $E$  le potentiel de l'électrode de platine par rapport à l'ESH, nous avons :

$$E = E_{Pt} = U + E_{ECS} = U + 0,2477 \text{ (en V)}.$$

Nous observons l'existence d'une relation affine de pente  $0,060$  entre le potentiel  $E$  et le logarithme du rapport des concentrations en  $Fe^{2+}$  et  $Fe^{3+}$ . Cela montre que le potentiel d'un couple en solution dépend des concentrations de l'oxydant et du réducteur par une relation logarithmique. C'est ce que précise la formule de Nernst.



**Définition : Formule de Nernst**

Soit un couple Ox/Red pour lequel la demi-équation redox s'écrit  $\alpha \text{Ox} + n e^- = \beta \text{Red}$ .  
La **formule de Nernst** donne l'expression du potentiel du couple Ox/Red :

$$E_{\text{Ox/Red}}(T) = E_{\text{Ox/Red}}^{\circ}(T) + \frac{RT}{n \cdot \mathcal{F}} \ln \left( \frac{a_{\text{Ox}}^{\alpha}}{a_{\text{Red}}^{\beta}} \right)$$

$E_{\text{Ox/Red}}^{\circ}$  est le potentiel standard du couple Ox/Red,  $a_{\text{Ox}}$  et  $a_{\text{Red}}$  sont respectivement les activités de l'oxydant et du réducteur.  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  (constante des gaz parfaits),  $\mathcal{F} = 96,5 \cdot 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$  (constante de Faraday).

$$\text{On retiendra : } E_{\text{Ox/Red}}(298 \text{ K}) \simeq E_{\text{Ox/Red}}^{\circ}(298 \text{ K}) + \frac{0,059}{n} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}}^{\alpha}}{a_{\text{Red}}^{\beta}} \right)$$

Le coefficient 0,059 vient du calcul approché de  $\frac{RT}{n \cdot \mathcal{F}} \ln(10) \simeq \frac{0,059}{n}$ , à la température  $T = 298 \text{ K}$ .  
Cette formule est valable quelque soit le sens d'écriture de la demi-équation mais **uniquement pour un couple Ox/Red à l'équilibre**, c'est-à-dire lorsque la pile ne débite aucun courant.



Si la demi-équation fait intervenir une autre espèce (comme  $\text{H}^+$ ), il faudra faire apparaître son activité au numérateur si l'espèce est du côté oxydant de l'équation et au dénominateur sinon. Exemple pour le couple  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$  dont la demi-réaction est :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 14 \text{H}^+ + 6 e^- = 2 \text{Cr}^{3+} + 7 \text{H}_2\text{O}$ , la formule de Nernst s'écrit :

$$E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}} = E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^{\circ} + \frac{0,059}{6} \log \frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2}$$

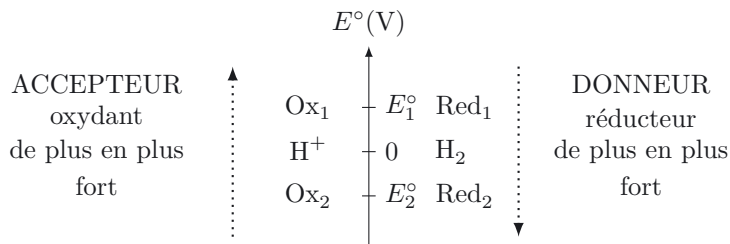


Pour l'écriture de la formule de Nernst, l'équation doit être écrite avec  $\text{H}^+$  et non pas  $\text{OH}^-$ , que le milieu soit acide ou basique, car les potentiels standard sont toujours donnés à  $\text{pH} = 0$ .

Le terme logarithmique est souvent faible par rapport au potentiel standard. Dans la plupart des cas, comparer les potentiels standard des couples peut suffire pour classer les potentiels des couples.

□ **Quelle analogie avec les acides et les bases ?**

Comme les forces des acides (donneurs de  $\text{H}^+$ ) et des bases (accepteurs de  $\text{H}^+$ ) dépendent des valeurs des  $\text{p}K_a$  des couples acide-base, les forces des réducteurs (donneurs de  $e^-$ ) et des oxydants (accepteurs de  $e^-$ ) dépendent des valeurs des potentiels standard  $E^{\circ}$  des couples oxydant-réducteur.





□ **Quel type de diagramme pouvons-nous mettre en place en oxydoréduction ?**

En s'appuyant sur la formule de Nernst, il est possible de construire des diagrammes faisant apparaître des domaines de prédominance ou des domaines d'existence de certaines espèces oxydantes ou réductrices. Pour cela il est nécessaire de définir une concentration dite de travail, notée  $c_{\text{tra}}$  et définie comme une valeur commune des concentrations des formes oxydante et réductrice du couple considéré :  $c_{\text{tra}} = [\text{ox}] = [\text{red}]$ .

**Premier exemple : couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  ( $\text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+}$ )**

La formule de Nernst s'écrit  $E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + 0,059 \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$ .

Lorsque  $[\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}] = c_{\text{tra}}$ , le potentiel à la frontière est  $E_{\text{front}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ}$ .

Lorsque le système est à l'équilibre, si  $E > E_{\text{front}}$  alors  $\text{Fe}^{3+}$ , qui est l'espèce oxydante, prédomine. Si au contraire  $E < E_{\text{front}}$  alors  $\text{Fe}^{2+}$ , qui est l'espèce réductrice, prédomine.

**Deuxième exemple : couple  $\text{I}_2/\text{I}^-$  ( $\text{I}_2 + 2e^- = 2\text{I}^-$ )**

La formule de Nernst s'écrit :  $E = E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log \frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2}$ .

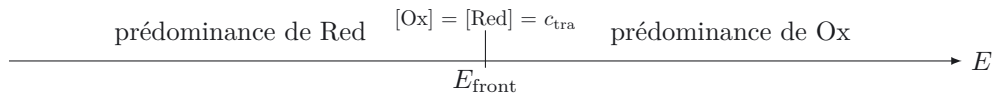
Cette fois-ci lorsque  $[\text{I}_2] = [\text{I}^-] = c_{\text{tra}}$ , le potentiel à la frontière prend la forme :

$$E_{\text{front}} = E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^{\circ} - \frac{0,059}{2} \log c_{\text{tra}}$$

Il dépend donc de  $c_{\text{tra}}$ . Comme précédemment lorsque le système est à l'équilibre, l'oxydant prédomine si  $E > E_{\text{front}}$  et le réducteur prédomine si  $E < E_{\text{front}}$ .

**Définition : Diagramme de prédominance**

Un diagramme de prédominance pour un couple Ox(aq)/Red(aq) est l'axe gradué en  $E$ , sur lequel on reporte le potentiel  $E_{\text{front}}$  et le domaine de prédominance de chacune des espèces constitutives du couple et présentes au sein d'une solution à l'équilibre chimique.



Le potentiel à la frontière peut dépendre de la concentration de travail  $c_{\text{tra}}$ .

**Troisième exemple : couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe(s)}$  ( $\text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe}$ )**

Dans ce cas un des éléments du couple (ici le réducteur) est solide. La formule de Nernst s'écrit

$$E = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log [\text{Fe}^{2+}].$$

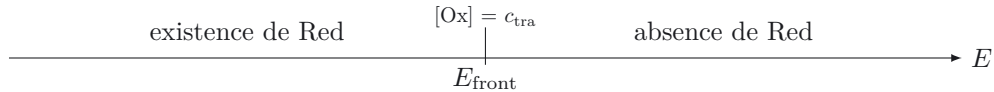
Le potentiel à la frontière est défini lorsque  $[\text{Fe}^{2+}] = c_{\text{tra}}$  avec une trace de solide dans le système :

$$E_{\text{front}} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log c_{\text{tra}}$$

Cette frontière est utile pour savoir si le solide existe ou non. En effet, si  $[\text{Fe}^{2+}] < c_{\text{tra}}$  cela signifie que du fer(II) s'est réduit en Fe(s) et que le solide existe. Dans ce cas,  $E < E_{\text{front}}$ . Si au contraire  $E > E_{\text{front}}$  alors  $[\text{Fe}^{2+}] = c_{\text{tra}}$  et le solide n'existe pas ; le potentiel redox du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe(s)}$  n'est pas défini dans ce cas.

**Définition : Diagramme d'existence**

Un diagramme d'existence pour un couple  $\text{Ox}(\text{aq})/\text{Red}(\text{s})$  est l'axe gradué en  $E$ , sur lequel on reporte le potentiel  $E_{\text{front}}$  et le domaine d'existence du réducteur solide du couple au sein d'une solution à l'équilibre chimique.



La valeur de la frontière  $E_{\text{front}}$  dépend du potentiel standard  $E_{\text{Ox}/\text{Red}}^\circ$  et de la concentration de travail  $c_{\text{tra}}$  en espèce oxydante.

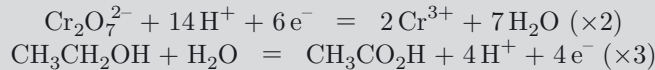
Dans le cas d'un couple  $\text{Ox}(\text{s})/\text{Red}(\text{aq})$ , les domaines d'existence et d'absence de l'espèce oxydante sont bien sûr inversés.

**■ 3 Réactions d'oxydo-réduction**

Reprenons l'étude de l'éthylotest, afin de retrouver l'équation bilan de la réaction à partir des deux demi-équations.

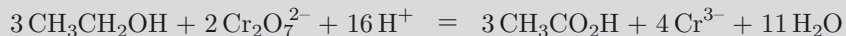
**Méthode 30.5 : Écrire une réaction d'oxydo-réduction**

- Écrire les deux demi-équations.
- Trouver le facteur multiplicatif de chaque demi-équation pour que le nombre d'électrons  $N$  cédés par le réducteur soit égal au nombre d'électrons captés par l'oxydant.



Dans ce cas  $N = 12$ .

- Sommer membre à membre les deux demi-équations.

**□ Comment caractériser la fin de la réaction ?**

Imaginons une pile hypothétique constituée des couples  $\text{Ox}_1/\text{Red}_1$  et  $\text{Ox}_2/\text{Red}_2$  branchée sur une résistance. Les potentiels redox de ces couples à 298 K s'écrivent sous la même forme :

$$E_{\text{Ox}_i/\text{Red}_i} = E_{\text{Ox}_i/\text{Red}_i}^\circ + \frac{0,059}{n} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}^{\alpha_i}}{a_{\text{Red}_i}^{\beta_i}} \right)$$

Dans le cas où  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1} > E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}$ ,  $\text{Ox}_1$  est réduit et  $\text{Red}_2$  est oxydé (voir méthode 30.4) entraînant une diminution de leur concentration et un rapprochement des potentiels des deux couples. Tant qu'il existe une différence de potentiels entre les deux demi-piles, la pile débite un courant dans la résistance. Elle cessera de fonctionner dès que les deux potentiels seront égaux.

**L'équilibre chimique est atteint lorsque les potentiels des deux couples sont égaux.**

**□ Comment savoir si la réaction est thermodynamiquement favorisée ?**

Reprenons l'étude de la réaction de l'éthylotest et déterminons sa constante d'équilibre en exploitant l'égalité des potentiels redox à l'équilibre. Notons  $E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^\circ = E_{\text{Ox}}^\circ$  le potentiel standard

du couple contenant le réactif oxydant et  $E_{\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}}^\circ = E_{\text{Red}}^\circ$  le potentiel standard du couple contenant le réactif réducteur.

### Méthode 30.6 : Déterminer la constante d'équilibre d'une réaction

- Écrire l'égalité des potentiels valable à l'équilibre chimique.

$$E_{\text{Ox}}^\circ + \frac{0,059}{6} \log \frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} = E_{\text{Red}}^\circ + \frac{0,059}{4} \log \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{H}^+]}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]}$$

- Regrouper les termes  $E_i^\circ$  et faire apparaître les mêmes facteurs devant le « log ».

$$\frac{0,059}{4 \times 3} \log \left( \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}][\text{H}^+]^4}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]} \right)^3 - \frac{0,059}{6 \times 2} \log \left( \frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}][\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)^2 = E_{\text{Ox}}^\circ - E_{\text{Red}}^\circ$$

- Faire apparaître la constante d'équilibre de la réaction d'oxydo-réduction.

$$\frac{0,059}{12} \log \left( \frac{[\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}]^3 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}]^3 [\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}]^2 [\text{H}^+]^{28}} \right) = \frac{0,059}{12} \log K = E_{\text{Ox}}^\circ - E_{\text{Red}}^\circ$$

- Déterminer l'expression de la constante d'équilibre.

$$K = 10^{\frac{N(E_{\text{Ox}}^\circ - E_{\text{Red}}^\circ)}{0,059}}$$

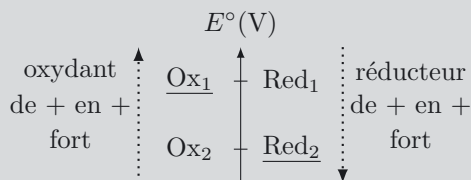
où  $N$  est le nombre de moles d'électrons échangées au niveau de l'équation bilan.

Ainsi la différence de potentiels standard entre les deux couples intervenant dans la réaction renseigne sur la constante d'équilibre et donc sur le caractère favorisé ou non de la réaction.

### Méthode 30.7 : Prévoir le caractère favorisé ou non d'une réaction

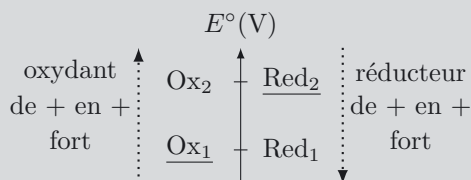
Soient deux couples oxydant/réducteur  $\text{Ox}_1/\text{Red}_1$  et  $\text{Ox}_2/\text{Red}_2$  intervenant dans la réaction :  
 $\alpha_1 \text{Ox}_1 + \beta_2 \text{Red}_2 = \beta_1 \text{Red}_1 + \alpha_2 \text{Ox}_2$ .

- Cas où  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^\circ > E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^\circ$  :



La réaction entre  $\text{Ox}_1$  et  $\text{Red}_2$  est favorisée thermodynamiquement ( $K > 1$ ). Elle est d'autant plus favorisée que  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^\circ - E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^\circ$  est grand.

- Cas où  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^\circ < E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^\circ$  :



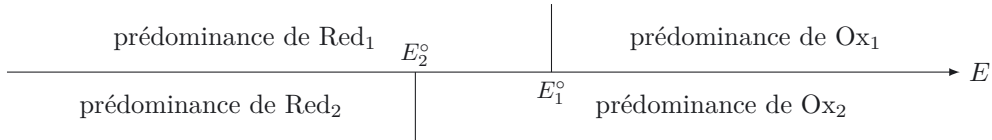
La réaction entre  $\text{Ox}_1$  et  $\text{Red}_2$  est défavorisée thermodynamiquement ( $K < 1$ ). Elle est d'autant plus défavorisée que  $E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^\circ - E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^\circ$  est grand.

➔ Exercices (30.4) (30.5)



■ Ce critère peut aussi se lire sur les diagrammes de prédominance.

Prenons par exemple le cas où  $E_{\text{Ox}_1/\text{Red}_1}^\circ > E_{\text{Ox}_2/\text{Red}_2}^\circ$  avec des espèces dissoutes :



La **zone commune** aux domaines de  $\text{Ox}_2$  et  $\text{Red}_1$  traduit une **réaction défavorisée** entre ces deux espèces. En effet, la prédominance simultanée de ces deux espèces est possible.

Les **domaines disjoints** de  $\text{Ox}_1$  et  $\text{Red}_2$  traduisent une **réaction favorisée** entre ces deux espèces. En effet, leur prédominance simultanée est impossible. Plus la différence des potentiels standard augmente, plus les domaines disjoints sont éloignés et plus la réaction entre  $\text{Ox}_1$  et  $\text{Red}_2$  est favorisée.



Un écart de potentiels standard supérieur à quelques dixièmes de volts suffit pour pouvoir considérer la réaction quantitative :

$$K = 10^{\frac{N(E_{\text{Ox}}^\circ - E_{\text{Red}}^\circ)}{0,059}} > 10^4 \iff E_{\text{Ox}}^\circ - E_{\text{Red}}^\circ > \frac{4 \times 0,059}{N} \simeq \frac{0,2}{N} \text{ (en V)}.$$

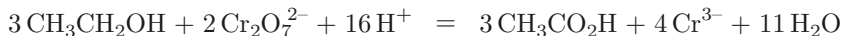
### Retour au contexte de l'éthylotest

Déterminons la masse de cristaux de dichromate de potassium à prévoir dans le tube de l'éthylotest pour pouvoir doser les 0,50 g d'éthanol par litre de sang au niveau du trait indiquant la limite légale ( $c_{\text{max}} = 0,50 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ). On précise que le volume du ballon est  $v_{\text{ballon}} = 1,0 \text{ L}$  et que l'air expiré est 2100 fois moins concentré que le sang.

La quantité d'éthanol maximale légale correspondant au volume du ballon de l'éthylotest est

$$n_{\text{max}} = \frac{1}{2100} \frac{c_{\text{max}}}{M_{\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}}} v_{\text{ballon}} = \frac{1}{2100} \frac{0,50}{46,0} \times 1,0 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ mol}.$$

Rappelons l'équation bilan :



Avec  $E_{\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}}^\circ = 1,33 \text{ V}$  et  $E_{\text{CH}_3\text{CO}_2\text{H}/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}}^\circ = 0,19 \text{ V}$ , la réaction entre les ions dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  et l'éthanol  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  est quantitative. C'est une condition nécessaire pour un dosage.

La quantité  $n_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7}$  de dichromate de potassium nécessaire pour faire réagir la quantité  $n_{\text{max}}$  d'éthanol est, compte tenu de l'équation bilan :  $n_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} = \frac{2}{3} n_{\text{max}}$ .

Ainsi, la masse de cristaux de dichromate de potassium à utiliser jusqu'au trait indiquant la limite légale est :  $m_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} = n_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} M_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} = \frac{2}{3} n_{\text{max}} M_{\text{K}_2\text{Cr}_2\text{O}_7} = \frac{2}{3} \times 5,2 \cdot 10^{-6} \times 294,2 = 1,0 \text{ mg}$ .

## ■ 4 Réactions de dismutation et de médiamutation

Certaines réactions ont lieu du fait de l'instabilité d'une espèce amphotère.

Lorsque l'ampholyte réagit sur lui-même en échangeant des électrons, la réaction porte le nom de **réaction de dismutation**. Cette réaction forme à la fois l'oxydant conjugué et le réducteur conjugué de l'espèce amphotère.

Dans l'autre sens, la réaction porte le nom de **réaction de médiamutation**. On peut citer par exemple celle de l'eau :  $\frac{1}{2}\text{O}_2(\text{g}) + \text{H}_2(\text{g}) \rightarrow \text{H}_2\text{O}(\text{g})$  l'eau étant une espèce amphotère redox (en plus d'être un ampholyte acido-basique). Cette réaction fait intervenir les deux couples de l'eau :  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  et  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ .

### Définition : Dismutation et médiamutation

Lors d'une **dismutation**, une espèce amphotère instable réagit sur elle-même en jouant le rôle à la fois d'oxydant et de réducteur. La réaction inverse est appelée une **médiamutation**.

## Interro de cours

On considère l'élément iode  ${}_{53}\text{I}$ .

1. Le nombre d'oxydation maximal de l'iode est :
  - (a) +VII;
  - (b) +V;
  - (c) +I.
2. Le nombre d'oxydation minimal de l'iode est :
  - (a) -VII;
  - (b) -V;
  - (c) -I.
3. Identifier le(ou les) couple(s) oxydant/réducteur.
  - (a)  $\text{HIO}/\text{IO}^-$ .
  - (b)  $\text{IO}_3^-/\text{I}^-$ .
  - (c)  $\text{IO}_3^-/\text{H}_5\text{IO}_6$ .
4. La demi-équation de réduction du couple  $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$  s'écrit :
  - (a)  $\text{I}_2 + 3\text{H}_2\text{O} = \text{IO}_3^- + 6\text{H}^+ + 5\text{e}^-$ ;
  - (b)  $\text{I}_2 + 6\text{H}_2\text{O} = 2\text{IO}_3^- + 12\text{H}^+ + 10\text{e}^-$ ;
  - (c)  $\text{I}_2 + 18\text{H}_2\text{O} + 10\text{e}^- = 2\text{IO}_3^- + 12\text{H}_3\text{O}^+$ .
5. La potentiel du couple  $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$  s'écrit :
  - (a)  $E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2} = E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2}^\circ + \frac{0,059}{10} \ln \left( \frac{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}_3\text{O}^+]^{12}}{[\text{I}_2]} \right)$ ;
  - (b)  $E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2} = E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2}^\circ + \frac{0,059}{10} \ln \left( \frac{[\text{IO}_3^-] [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2]} \right)$ ;
  - (c)  $E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2} = E_{\text{IO}_3^-/\text{I}_2}^\circ + \frac{0,059}{10} \ln \left( \frac{[\text{I}_2]}{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^{12}} \right)$ .
6. On considère une solution contenant à l'instant initial du diiode  $\text{I}_2$ , des ions iodure  $\text{I}^-$ , des ions thiosulfate  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  et des ions tétrathionate  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ . Les potentiels standard des couples associés valent :  $E_{\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}}^\circ = 0,09\text{ V}$  et  $E_{\text{I}_2/\text{I}^-}^\circ = 0,65\text{ V}$ . Identifier la (ou les) affirmation(s) exacte(s).
  - (a) L'oxydant le plus fort réagit avec le réducteur le plus fort.
  - (b) Les ions  $\text{I}^-$  réagissent avec les ions  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ .
  - (c) La réaction qui a lieu peut servir de réaction de dosage.
7. Identifier la (ou les) affirmation(s) exacte(s).
  - (a) Lors d'une réaction d'oxydo-réduction, l'oxydant est oxydé et réduit le réducteur.
  - (b) Lors d'une réaction d'oxydo-réduction, le réducteur est oxydé et réduit l'oxydant.
  - (c) L'oxydation correspond à une augmentation du n.o. et un gain d'électron(s).

## Exercices

### Exercice 30.1 Manganèse

➔ Méthodes (30.1) (30.3)

Le tableau ci-contre donne des couples d'oxydo-réduction comportant l'élément manganèse (Mn).

1. Pour chaque couple, déterminer le nombre d'oxydation du manganèse et en déduire l'oxydant du couple.
2. Pour chaque couple, écrire la demi-équation d'oxydo-réduction en solution aqueuse.

Mn	Mn <sup>2+</sup>
MnO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	MnO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
MnO <sub>2</sub>	MnO <sub>4</sub> <sup>-</sup>
MnO <sub>4</sub> <sup>-</sup>	Mn <sup>2+</sup>
MnO <sub>4</sub> <sup>3-</sup>	MnO <sub>4</sub> <sup>2-</sup>
MnO <sub>2</sub>	Mn <sup>2+</sup>

### Exercice 30.2 Oxygène

➔ Méthode (30.2)

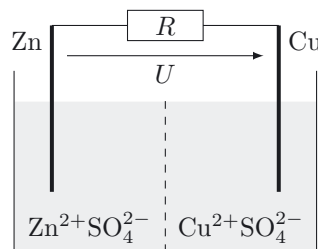
1. Écrire les formules de Lewis du dioxygène O<sub>2</sub>, de l'eau H<sub>2</sub>O et du peroxyde d'hydrogène H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, en représentant les électrons de valence. Déterminer le nombre d'oxydation de l'oxygène dans ces trois espèces.
2. Écrire les demi-équations d'oxydo-réduction des couples O<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O, et O<sub>2</sub>/H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>.
3. L'ozone est une molécule de formule O—O—O. Écrire sa formule de Lewis, sachant que l'oxygène doit toujours respecter la règle de l'octet. En déduire le nombre d'oxydation de chacun des trois atomes d'oxygène.
4. Écrire la demi-équation du couple O<sub>3</sub>/O<sub>2</sub>, au cours de laquelle l'ozone est réduit en dioxygène et en eau.

### Exercice 30.3 Pile Daniell

➔ Méthode (30.4)

John Daniell, chimiste britannique, a inventé en 1836 une pile qui a remplacé la pile de Volta et a été utilisée pendant plusieurs décennies.

Elle est constituée de deux compartiments séparés par une paroi poreuse. Le premier contient une électrode de zinc baignant dans une solution aqueuse de sulfate de zinc ZnSO<sub>4</sub>; le second contient une électrode de cuivre baignant dans une solution de sulfate de cuivre CuSO<sub>4</sub>. Les concentrations apportées en zinc et en cuivre sont [Zn<sup>2+</sup>] = [Cu<sup>2+</sup>] = 0,10 mol · L<sup>-1</sup>.



Données : potentiels standard  $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^{\circ} = -0,76 \text{ V}$  et  $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^{\circ} = 0,34 \text{ V}$ ,  $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,059 \text{ V}$ .

1. La tension à vide (ou force électromotrice) de cette pile est mesurée à l'aide d'un voltmètre de très grande résistance d'entrée. Utiliser la formule de Nernst pour calculer le potentiel de chacune des électrodes et en déduire la valeur de la tension à vide  $U_v$  mesurée.
2. Lorsqu'une résistance  $R$  est branchée sur la pile, celle-ci débite un courant d'intensité  $I$ . Compléter le schéma de la pile pour indiquer le sens du courant dans la résistance, le sens des réactions ayant lieu aux électrodes, puis le sens du déplacement des ions dans les deux compartiments.
3. Quel est le rôle de la paroi poreuse séparant les deux compartiments ?
4. Comment évolue la tension à vide  $U_v$  aux bornes de la pile lorsqu'elle débite pendant assez longtemps pour que les réactifs soient notablement consommés ?

### Exercice 30.4 Permanganate oxydant

➔ Méthodes (30.4) (30.7)

On s'intéresse à l'ion permanganate  $\text{MnO}_4^-$ , un oxydant couramment utilisé en chimie analytique. Il est généralement obtenu en dissolvant du permanganate de potassium dans une solution aqueuse d'acide sulfurique dont le pH est proche de 1. On donne  $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,059 \text{ V}$  et les potentiels standard à  $25^\circ\text{C}$  :

Couple	$E^\circ$ (V)
$\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$	1,51
$\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	1,23
$\text{CO}_2/\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$	-0,49
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	0,68

1. Écrire la demi-équation d'oxydo-réduction du couple  $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$ . Calculer son potentiel pour  $\text{pH} = 1$ , dans l'hypothèse où  $[\text{MnO}_4^-] = [\text{Mn}^{2+}]$ .
2. Écrire la demi-équation d'oxydo-réduction du couple  $\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ . Calculer son potentiel pour  $\text{pH} = 1$ , dans l'hypothèse d'une pression partielle de  $\text{O}_2$  égale à 1 bar.
3. Écrire la réaction d'oxydation de  $\text{Fe}^{2+}$  par l'ion  $\text{MnO}_4^-$ . Cette réaction est-elle thermodynamiquement favorisée ?
4. Montrer que l'ion  $\text{MnO}_4^-$  réagit avec l'eau et écrire la réaction.
5. La réaction précédente est très lente, et l'utilisation d'une solution de permanganate est donc possible malgré l'instabilité de celui-ci dans l'eau. Une solution stockée pendant plusieurs semaines doit cependant être étalonnée. On utilise pour cela une solution d'acide oxalique  $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ , qui peut être préparée avec une concentration très précise. Écrire la réaction de l'acide oxalique sur l'ion permanganate et justifier son utilisation en tant que réaction de dosage.



### Exercice 30.5 Titration de l'éthanol par chromimétrie

#### ➔ Méthode (30.7)

La détermination du titre alcoolique (concentration en éthanol) d'un liquide est faite par chromimétrie, une méthode qui consiste à oxyder l'éthanol ( $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ ) par l'ion dichromate ( $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ ) en excès, puis à doser le dichromate résiduel par l'ion ferreux ( $\text{Fe}^{2+}$ ).

La première étape, que nous n'étudierons pas, est la distillation du liquide, permettant d'isoler l'éthanol. On obtient ainsi une solution aqueuse (le distillat) comportant seulement l'éthanol en concentration  $c$ .

On prépare une solution de dichromate (solution (1)) en dissolvant une masse  $m_1 = 3,351 \text{ g}$  de dichromate de potassium ( $\text{Cr}_2\text{O}_7\text{K}_2$ ,  $M_1 = 294,1846 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) dans  $100,00 \text{ mL}$  d'eau déminéralisée. On prélève  $v = 5,00 \text{ mL}$  du distillat à titrer, auquel on ajoute  $v_1 = 10,0 \text{ mL}$  de la solution (1) et  $10 \text{ mL}$  d'acide sulfurique concentré, le tout dans un erlenmeyer (solution (2)). Après agitation, on laisse reposer environ  $30$  minutes.

On prépare une solution d'ions  $\text{Fe}^{2+}$  (solution (3)), avec une masse  $m_3 = 13,415 \text{ g}$  de sel de Mohr ( $\text{FeSO}_4(\text{NH}_2)_2\text{SO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ,  $M_3 = 392,14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) dans  $100,0 \text{ mL}$  d'une solution aqueuse d'acide sulfurique  $0,50 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

La totalité de la solution (2), complétée avec de l'eau, est dosée par la solution (3) versée à la burette. Les ions  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  sont de couleur orange, alors que les ions  $\text{Cr}^{3+}$  sont verts. On repère donc l'équivalence par le changement de couleur de la solution. Pour améliorer le contraste, on ajoute un indicateur coloré (diphénylamine sulfonate de baryum) qui est violet en milieu oxydant et devient incolore en milieu réducteur, lorsqu'il n'y a plus de dichromate. Le virage de couleur a lieu pour un volume versé  $v_{3,eq} = 14,8 \text{ mL}$ .

On donne les potentiels standard des couples d'oxydo-réduction à  $25^\circ\text{C}$  :

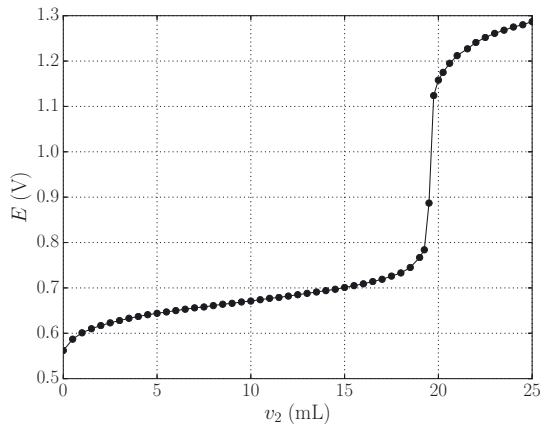
Couple	$E^\circ$ (V)
$\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	0,035
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$	1,33
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	0,68

1. Écrire la demi-équation d'oxydation de l'éthanol  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$  conduisant à l'acide éthanoïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$ , puis celle de réduction de l'ion dichromate  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ . En déduire la réaction d'oxydation de l'éthanol par le dichromate. Montrer que cette réaction est quantitative en milieu acide.
2. Écrire la réaction de réduction de  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  par  $\text{Fe}^{2+}$ . Montrer que cette réaction est quantitative.
3. Calculer la concentration  $c_1$  en  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  de la solution (1), et la concentration  $c_3$  en  $\text{Fe}^{2+}$  de la solution (3).
4. Déterminer la concentration en éthanol du distillat.

### Exercice 30.6 Dosage potentiométrique

Un dosage réalisé par une réaction d'oxydo-réduction peut être suivi par potentiométrie, c'est-à-dire en mesurant le potentiel de la solution. On considère le cas d'une solution de sulfate de fer(II)  $\text{FeSO}_4$  de concentration  $c_1$  inconnue, dont on place un volume  $v_1 = 20,0 \text{ mL}$  dans un bécher. Une solution de sulfate de cérium ( $\text{CeSO}_4 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ ,  $M = 404,29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) est préparée en dissolvant 1011 mg dans 250,0 mL d'une solution aqueuse d'acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Cette solution, dont la concentration en ions  $\text{Ce}^{4+}$  est  $c_2$ , est placée dans une burette. L'ion  $\text{Ce}^{4+}$  donne une couleur jaune à la solution, mais qui n'est pas assez intense pour permettre un dosage colorimétrique. On procède donc à un dosage potentiométrique.

Une électrode de platine et une électrode de référence au calomel saturé (ECS) sont plongées dans le bécher (de l'eau est ajoutée pour obtenir l'immersion). Un potentiomètre mesure la différence de potentiel  $U$  entre la première et la seconde, dont on déduit le potentiel de l'électrode de platine par rapport à l'électrode standard à hydrogène  $E = U + 0,244$ . La figure ci-dessous montre ce potentiel en fonction du volume de la solution de cérium versé avec la burette.



Couple	$E^\circ$ (V)
$\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}$	1,44
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	0,68

$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln(10) = 0,059 \text{ V}$

1. Pour chacun des deux couples, écrire la demi-équation d'oxydo-réduction puis le potentiel de Nernst.
2. Écrire la réaction d'oxydo-réduction ayant lieu au cours de ce dosage. Calculer sa constante d'équilibre et conclure.
3. Expliquer le saut de potentiel à l'équivalence.
4. Relever le volume versé  $v_{2,eq}$  à l'équivalence et en déduire la concentration  $c_1$  en ions  $\text{Fe}^{2+}$  de la solution de sulfate de fer.
5. Déterminer l'expression théorique du potentiel  $E$  en fonction du volume versé  $v_2$ , lorsque celui-ci est inférieur au volume d'équivalence  $v_{2,eq}$ . Exprimer ce potentiel en fonction de  $v_2$  et  $v_{2,eq}$ . Quelle est la valeur du potentiel lorsque  $v_2 = v_{2,eq}/2$  (demi-équivalence) ?

### Exercice 30.7 Couleur du permanganate

L'ion permanganate  $\text{MnO}_4^-$  en solution aqueuse est un oxydant couramment utilisé en chimie analytique, qui se réduit en ion  $\text{Mn}^{2+}$ . Il donne une couleur rose très intense à la solution, ce qui permet de l'utiliser pour faire des dosages d'oxydo-réduction colorimétriques (l'ion  $\text{Mn}^{2+}$  est incolore).

On considère une étude spectrophotométrique d'une solution de permanganate, réalisée à une longueur d'onde proche du maximum d'absorbance  $\lambda = 520 \text{ nm}$ . Une solution mère est préparée en dissolvant 158 mg de  $\text{KMnO}_4$  ( $M = 158,04 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) dans 200 mL d'eau. Cette solution est diluée 10 fois, pour donner une solution de concentration  $c_0 = 5,00 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , de couleur pourpre très intense, que l'on place dans une burette. Différents volumes  $v$  de cette solution sont versés à la burette dans une fiole jaugée de 50 mL que l'on complète avec de l'eau. On obtient ainsi des solutions de permanganate de différentes concentrations, comprises entre 0 et  $0,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

L'absorbance d'une solution est mesurée avec un spectrophotomètre. La solution est placée dans une cuve dont les parois sont transparentes. Soit  $I_0$  l'intensité de la lumière incidente et  $I$  l'intensité de la lumière après traversée de la cuve. L'absorbance est définie par :

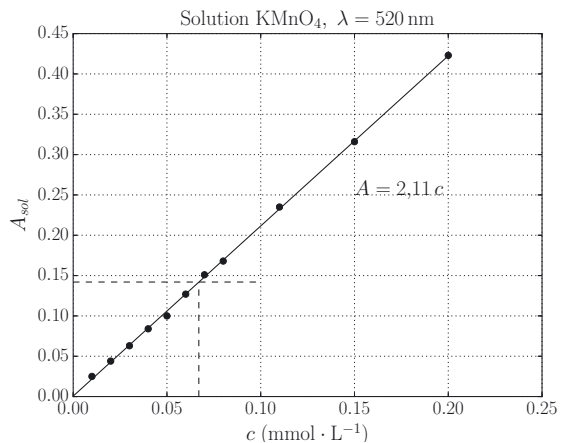
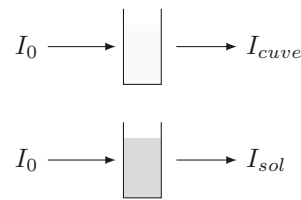
$$A = \log \left( \frac{I_0}{I} \right)$$

Afin de soustraire les effets d'absorption et de réflexion par la cuve, on mesure d'abord  $-\log(I_{cuve})$  avec la cuve remplie du solvant, puis on mesure  $-\log(I_{sol})$  avec la cuve remplie de la solution absorbante. L'absorbance de la solution est définie par :  $A_{sol} = \log \left( \frac{I_{cuve}}{I_{sol}} \right)$ .

En pratique, on place d'abord la cuve remplie du solvant et on active la fonction de zéro optique, qui consiste à ajouter une valeur constante pour annuler l'absorbance. On place ensuite la même cuve avec la solution ; la valeur lue est alors  $A_{sol}$ .

D'après la loi de Beer-Lambert, l'absorbance est proportionnelle à la largeur de la cuve ( $l = 1,00 \text{ cm}$ ), à la concentration  $c$  de l'espèce dissoute absorbante (ici l'ion  $\text{MnO}_4^-$ ) et à son coefficient d'absorption molaire  $\varepsilon$  :  $A_{sol} = \varepsilon lc$ .

1. Décrire l'opération réalisée par le spectrophotomètre lorsqu'on réalise le zéro optique, et montrer que la mesure avec la cuve remplie de la solution donne bien  $A_{sol}$ .
2. À partir de la courbe d'étalonnage donnée ci-dessus, et de la régression linéaire, donner la valeur de l'absorption molaire de  $\text{MnO}_4^-$  (avec son unité).
3. Un dosage par étalonnage spectrophotométrique consiste à utiliser la courbe d'étalonnage pour déterminer la concentration d'une solution de permanganate. Par exemple, on a mesuré l'absorbance d'une solution de Dakin® (désinfectant), qui contient du permanganate de potassium :  $A_{sol} = 0,142$  à  $\lambda = 520 \text{ nm}$ . En déduire la concentration de cette solution.

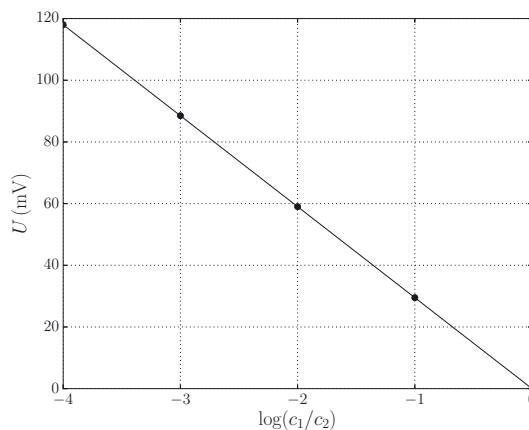
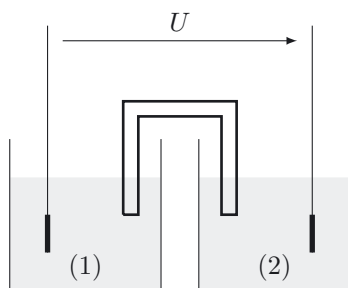


### Exercice 30.8 Ion mercureux

L'ion mercureux (Hg au degré d'oxydation +I) peut *a priori* se présenter sous deux formes différentes :  $\text{Hg}^+$  (monomère) ou  $\text{Hg}_2^{2+}$  (dimère). Cet ion est obtenu en dissolvant dans l'eau du nitrate mercureux de formule  $\text{Hg}_n^{n+}$ ,  $(\text{NO}_3^-)_n$ , avec  $n = 1$  ou  $n = 2$ .

Afin de connaître la valeur de  $n$ , on réalise une pile constituée de deux béchers reliés par un pont salin. Dans chacun, l'électrode est un fil d'or dont l'extrémité est recouverte d'un dépôt de mercure (Hg) amalgamé avec l'or. Le bécher (2) contient une solution de nitrate mercureux de concentration massique  $c_m$  (masse de sel dissous par litre). Dans le bécher (1), on place successivement des solutions de nitrate mercureux de concentrations massiques  $c_m$ ,  $10^{-1}c_m$ ,  $10^{-2}c_m$ ,  $10^{-3}c_m$  et  $10^{-4}c_m$ .

La différence de potentiel  $U$  (en circuit ouvert) est mesurée avec un potentiomètre (voltmètre de très haute résistance interne). La figure ci-dessous montre  $U$  en fonction du logarithme du rapport des concentrations massiques  $c_1/c_2$  des deux béchers.



Données :  $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,059 \text{ V}$ , masse molaire de  $\text{HgNO}_3$  :  $M = 262,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. On prépare les solutions de nitrate mercureux avec  $c_m = 20 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ . Calculer la concentration en ion mercureux dans le bécher (2), en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , dans les deux cas  $n = 1$  et  $n = 2$ .
2. Écrire la demi-équation d'oxydo-réduction du couple  $\text{Hg}(+I)/\text{Hg}(0)$ , dans les cas  $n = 1$  et  $n = 2$ .
3. Exprimer la tension  $U$  en fonction de  $c_2/c_1$ , dans les deux cas  $n = 1$  et  $n = 2$ . L'activité du mercure déposé sur le fil d'or est égale à 1.
4. Utiliser les résultats expérimentaux pour déduire la valeur de  $n$ .

# Corrections

## Interro de cours

- La structure électronique de l'iode à l'état fondamental est  $[\text{Kr}]4d^{10}5s^25p^5$ . L'iode peut donc perdre au maximum ses 7 électrons de valence. Réponse (a).
- Il manque un électron pour saturer la couche de valence de l'iode. Réponse (c).
- On précise que n.o.(O) = -II et n.o.(H) = +I.
  - n.o.(I) dans  $\Gamma^-$  = -I.
  - si  $x = \text{n.o.}(\text{I})$  dans  $\text{IO}^-$  alors  $x + (-\text{II}) = -\text{I}$  d'où  $x = +\text{I}$ .
  - si  $y = \text{n.o.}(\text{I})$  dans  $\text{IOH}$  alors  $y + (-\text{II}) + (+\text{I}) = 0$  d'où  $y = +\text{I}$ .
  - si  $w = \text{n.o.}(\text{I})$  dans  $\text{IO}_3^-$  alors  $w + 2(-\text{II}) = -\text{I}$  d'où  $w = +\text{V}$ .
  - si  $z = \text{n.o.}(\text{I})$  dans  $\text{H}_5\text{IO}_6$  alors  $5(+\text{I}) + z + 6(-\text{II}) = 0$  d'où  $z = +\text{VII}$ .
 Un couple oxydant/réducteur est un couple n.o.(I) élevé/n.o.(I) bas. Réponse (b).
- La demi-équation doit être équilibrée en charges et en éléments I, O, H. Réponse (b).
- La formule de Nernst impose la présence de l'activité de l'oxydant au numérateur et les coefficients stœchiométriques en exposant. Par ailleurs  $[\text{H}^+] = [\text{H}_3\text{O}^+]$ . Réponse (a).
- Pour déterminer le sens d'évolution du système, il faut normalement comparer les potentiels des deux couples redox présents initialement. Cependant, en l'absence de potentiels, on se contente de comparer les potentiels standard. La réaction a donc lieu entre l'oxydant le plus fort (plus fort potentiel standard) et le réducteur le plus fort (plus faible potentiel standard), soit entre  $\text{I}_2$  et  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  suivant une réaction de grande constante d'équilibre (étant donné l'écart important entre les potentiels standard). Réponses (a) et (c).
- Lors d'une réaction d'oxydo-réduction, l'oxydant oxyde le réducteur tandis que le réducteur réduit l'oxydant. L'oxydation correspond à une perte d'électron(s) entraînant une augmentation du défaut d'électrons (et donc du n.o.). Réponse (b).

## Exercice 30.1

- Pour calculer le nombre d'oxydation du manganèse, on attribue le degré +II à l'oxygène et la somme des nombres d'oxydation est égale à la charge de l'espèce. Dans un couple, l'oxydant a le nombre d'oxydation le plus élevé. On le place à gauche dans le tableau ci-dessous.
- Pour écrire la demi-réaction d'oxydo-réduction dans le sens de la réduction, on ajoute à l'oxydant un nombre d'électrons égal à la différence des nombres d'oxydation, puis on complète avec  $\text{H}_2\text{O}$  s'il manque de l'oxygène, et enfin on ajoute  $\text{H}^+$ .

$\text{Mn}^{2+}$ (+II)	$\text{Mn}$ (0)
$\text{MnO}_4^-$ (+VII)	$\text{MnO}_4^{2-}$ (+VI)
$\text{MnO}_4^-$ (+VII)	$\text{MnO}_2$ (+IV)
$\text{MnO}_4^-$ (+VII)	$\text{Mn}^{2+}$ (+II)
$\text{MnO}_4^{2-}$ (+VI)	$\text{MnO}_4^{3-}$ (+V)
$\text{MnO}_2$ (+IV)	$\text{Mn}^{2+}$ (+II)

$\text{Mn}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Mn}(\text{s})$
$\text{MnO}_4^- + \text{e}^- = \text{MnO}_4^{2-}$
$\text{MnO}_4^- + 3\text{e}^- + 4\text{H}^+ = \text{MnO}_2(\text{s}) + 2\text{H}_2\text{O}$
$\text{MnO}_4^- + 5\text{e}^- + 8\text{H}^+ = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$
$\text{MnO}_4^{2-} + \text{e}^- = \text{MnO}_4^{3-}$
$\text{MnO}_2(\text{s}) + 2\text{e}^- + 4\text{H}^+ = \text{Mn}^{2+} + 2\text{H}_2\text{O}$

**Exercice 30.2**

1. Dioxygène :



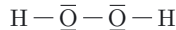
Compte tenu de la symétrie de cette molécule, l'oxygène a un nombre d'oxydation nul.

Eau :



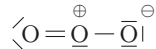
Dans chaque liaison covalente, les deux électrons sont attribués à l'atome le plus électronégatif, ici O. On obtient le nombre d'oxydation  $-II$  pour l'oxygène.

Peroxyde d'hydrogène :



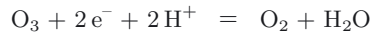
Chaque atome d'oxygène se voit attribuer l'électron de l'hydrogène auquel il est lié, ce qui lui donne un nombre d'oxydation  $-I$ .

2. Lors de la réduction de  $\text{O}_2$  en  $\text{H}_2\text{O}$ , chaque atome d'oxygène passe du degré 0 au degré  $-II$ , et donc acquiert 2 électrons :  $\text{O}_2 + 4\text{e}^- + 4\text{H}^+ = 2\text{H}_2\text{O}$ .  
 Lors de la réduction de  $\text{H}_2\text{O}_2$  en  $\text{H}_2\text{O}$ , chaque atome d'oxygène passe du degré  $-I$  au degré  $-II$ , et donc acquiert 1 électron :  $\text{H}_2\text{O}_2 + 2\text{e}^- + 2\text{H}^+ = 2\text{H}_2\text{O}$ .  
 Lors de la réduction de  $\text{O}_2$  en  $\text{H}_2\text{O}_2$ , chaque atome d'oxygène passe du degré 0 au degré  $-I$ , et donc acquiert 1 électron :  $\text{O}_2 + 2\text{e}^- + 2\text{H}^+ = \text{H}_2\text{O}_2$ .
3. Ozone :



Le premier atome a ses 6 électrons de valence et son nombre d'oxydation est donc 0. Le deuxième a un électron en moins donc son nombre d'oxydation est  $+I$ . Le troisième a un électron en plus donc son nombre d'oxydation est  $-I$ . Les charges formelles correspondent à ces degrés d'oxydation.

4. Lors de la réduction de l'ozone  $\text{O}_3$  en dioxygène  $\text{O}_2$  et en  $\text{H}_2\text{O}$ , l'atome au degré d'oxydation  $+I$  passe au degré 0 (dans  $\text{O}_2$ ) et l'atome au degré  $-I$  passe au degré  $-II$  (dans  $\text{H}_2\text{O}$ ) :

**Exercice 30.3**

1. Le potentiel de l'électrode de zinc est donné par la formule de Nernst appliquée au couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$ , dont la demi-équation rédox est  $\text{Zn(s)} = \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$ .

$$E_{\text{Zn}} = -0,76 + \frac{0,059}{2} \log ([\text{Zn}^{2+}]) = -0,79 \text{ V}$$

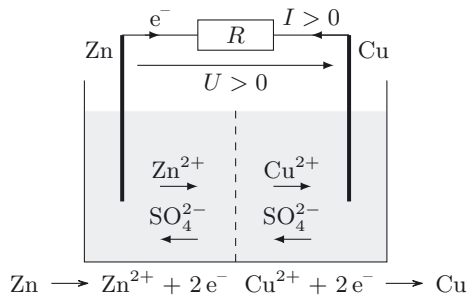
Le potentiel de l'électrode de cuivre est donné par la formule de Nernst appliquée au couple  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}$ , dont la demi-équation rédox est  $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Cu(s)}$ .

$$E_{\text{Cu}} = 0,34 + \frac{0,059}{2} \log ([\text{Cu}^{2+}]) = 0,31 \text{ V}$$

La tension à vide  $U_v$  est donnée par la différence des potentiels :

$$U_v = E_{\text{Cu}} - E_{\text{Zn}} = 1,10 \text{ V}$$

2. Le courant dans la résistance est positif de l'électrode de cuivre vers celle de zinc. Il y a donc apport d'électrons vers le cuivre et donc réduction des ions  $\text{Cu}^{2+}$  sur cette électrode. Inversement, des électrons sont prélevés à l'électrode de zinc, ce qui signifie que le zinc est oxydé. Dans la solution, il y a un courant ionique positif de l'électrode de zinc vers l'électrode de cuivre. Les ions positifs  $\text{Cu}^{2+}$  et  $\text{Zn}^{2+}$  se déplacent donc du zinc vers le cuivre. Les ions négatifs  $\text{SO}_4^{2-}$  se déplacent dans l'autre sens.



3. La paroi poreuse permet le passage d'un courant ionique entre les deux compartiments, tout en évitant que les ions  $\text{Cu}^{2+}$  ne parviennent en trop grande quantité vers l'électrode de zinc (lorsque la pile ne débite pas), où il seraient réduits selon la réaction :  $\text{Cu}^{2+} + \text{Zn(s)} \rightarrow \text{Cu(s)} + \text{Zn}^{2+}$ .
4. Lorsque la pile débite, la concentration en  $\text{Cu}^{2+}$  diminue donc  $E_{\text{Cu}}$  diminue ; la concentration en  $\text{Zn}^{2+}$  augmente donc  $E_{\text{Zn}}$  augmente. En conséquence, la tension  $U_v = E_{\text{Cu}} - E_{\text{Zn}}$  diminue.

### Exercice 30.4

1. Les nombres d'oxydation du manganèse sont +VII dans  $\text{MnO}_4^-$  et +II dans  $\text{Mn}^{2+}$ . La demi-équation d'oxydo-réduction est :  $\text{MnO}_4^- + 5e^- + 8\text{H}^+ = \text{Mn}^{2+} + 4\text{H}_2\text{O}$ . Le potentiel du couple est donné par la formule de Nernst :

$$E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = 1,51 + \frac{0,059}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]} \right)$$

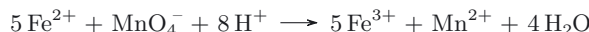
Lorsque  $[\text{MnO}_4^-] = [\text{Mn}^{2+}]$  et  $\text{pH} = 1$ , on a  $E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}} = 1,51 - \frac{8}{5}0,059 \text{pH} = 1,42 \text{V}$ .

2. L'oxygène est au degré d'oxydation 0 dans  $\text{O}_2$ , au degré -II dans  $\text{H}_2\text{O}$ . La demi-équation est :  $\text{O}_2(\text{g}) + 4e^- + 4\text{H}^+ = 2\text{H}_2\text{O}(\text{l})$ . Le potentiel du couple est :

$$E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = 1,23 + \frac{0,059}{4} \log (P_{\text{O}_2}[\text{H}^+]^4)$$

où  $P_{\text{O}_2}$  est la pression partielle de  $\text{O}_2$  exprimée en bar. Avec les hypothèses  $P_{\text{O}_2} = 1 \text{bar}$  et  $\text{pH} = 1$ , on obtient :  $E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = 1,23 - 0,059 \text{pH} = 1,17 \text{V}$ .

3. On écrit tout d'abord la demi-équation pour le fer :  $\text{Fe}^{2+} = \text{Fe}^{3+} + e^-$ . En la multipliant par 5 et en la combinant avec celle du permanganate, on obtient :



Le potentiel standard de l'oxydant ( $\text{MnO}_4^-$ ) est supérieur à celui du réducteur ( $\text{Fe}^{2+}$ ) de plus de 0,2V. La constante d'équilibre de cette réaction est donc très grande. La réaction est donc très largement favorisée.

4. Avec les hypothèses de concentration et de pression partielle faites, on a  $E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} < E_{\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}}$ . On en déduit que l'eau réduit le permanganate en  $\text{Mn}^{2+}$  :

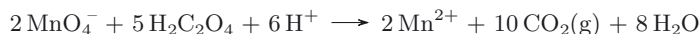


De plus, vu les potentiels standard ( $\Delta E^\circ > 0,2 \text{V}$ ), la constante d'équilibre est très grande.

5. La demi-équation d'oxydo-réduction pour l'acide oxalique est :



La réaction de réduction du permanganate par l'acide oxalique est :



Le potentiel standard de l'oxydant ( $\text{MnO}_4^-$ ) est très largement supérieur à celui du réducteur ( $\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4$ ). La constante d'équilibre est donc très grande et cette réaction est adaptée pour un dosage.

### Exercice 30.5

- Oxydation de l'éthanol en acide éthanóique :  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH} + \text{H}_2\text{O} = \text{CH}_3\text{COOH} + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^-$ .  
Réduction de l'ion dichromate :  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} + 6\text{e}^- + 14\text{H}^+ = 2\text{Cr}^{3+} + 7\text{H}_2\text{O}$ .  
Pour écrire la réaction d'oxydation de l'éthanol par le dichromate, on multiplie la première par 3 et la seconde par 2 (12 électrons échangés) :



L'oxydant (le dichromate) a un potentiel standard nettement plus grand que le réducteur (l'éthanol), avec une différence de potentiel supérieure à 0,2 V. La constante d'équilibre est donc très grande. On se place en milieu acide pour apporter assez d'ions  $\text{H}^+$ , et la réaction est alors quantitative, limitée par la quantité d'éthanol puisque le dichromate est en excès

- La demi-équation d'oxydation de l'ion ferreux est :  $\text{Fe}^{2+} = \text{Fe}^{3+} + \text{e}^-$   
On la multiplie par 6 pour la combiner avec la demi-équation de réduction du dichromate, ce qui donne :



Le potentiel standard de l'oxydant (le dichromate) est supérieur à celui du réducteur d'au moins 0,2 V, donc cette réaction est quantitative (en milieu acide).

- Solution d'ions dichromate :  $c_1 = 0,114 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Solution d'ions ferreux :  $c_3 = 0,342 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- À l'équivalence, on a versé  $c_3 v_{3,eq}$  moles d'ions  $\text{Fe}^{2+}$ , donc la quantité d'ions  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  en excès dosés est  $\frac{1}{6}c_3 v_{3,eq}$ . Or la quantité initiale de dichromate est  $c_1 v_1$ . La quantité de dichromate ayant oxydé l'éthanol est donc  $c_1 v_1 - \frac{1}{6}c_3 v_{3,eq}$ , ce qui correspond à une quantité d'éthanol  $n = \frac{3}{2} \left( c_1 v_1 - \frac{1}{6}c_3 v_{3,eq} \right)$  soit  $n = 4,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ . Cette quantité était contenue dans  $v = 5,00 \text{ mL}$  de distillat, d'où la concentration de ce dernier en éthanol  $c = 0,089 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

### Exercice 30.6

- Pour le fer, la demi-équation redox est :  $\text{Fe}^{2+} = \text{Fe}^{3+} + \text{e}^-$ . Le potentiel du couple est :

$$E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\circ + \frac{0,059}{1} \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$$

Pour le cérium, la demi-équation redox est :  $\text{Ce}^{4+} + \text{e}^- = \text{Ce}^{3+}$ . Le potentiel du couple est :

$$E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}} = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^\circ + \frac{0,059}{1} \log \frac{[\text{Ce}^{4+}]}{[\text{Ce}^{3+}]}$$

- La réaction du dosage est  $\text{Fe}^{2+} + \text{Ce}^{4+} = \text{Fe}^{3+} + \text{Ce}^{3+}$ . Pour obtenir sa constante d'équilibre, on écrit l'égalité des potentiels :  $E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}$ . On obtient après calcul :

$$\frac{[\text{Fe}^{3+}][\text{Ce}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{Ce}^{4+}]} = 10^{\frac{E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}^\circ - E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^\circ}{0,059}} = 10^{13}$$

La constante est extrêmement grande ; la réaction du dosage est donc quantitative. Lorsque  $\text{Ce}^{4+}$  est en défaut (avant l'équivalence), l'avancement (en mol) est égal à la quantité de  $\text{Ce}^{4+}$  versé.

- Le potentiel de l'électrode de platine est  $E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}} = E_{\text{Ce}^{4+}/\text{Ce}^{3+}}$ . À chaque équilibre avant l'équivalence, la concentration  $[\text{Fe}^{2+}]$  diminue alors que  $[\text{Fe}^{3+}]$  augmente, ce qui fait un peu augmenter le potentiel. À l'équivalence,  $\text{Fe}^{2+}$  disparaît complètement et  $[\text{Ce}^{4+}]$  augmente fortement, ce qui a pour conséquence une forte augmentation du potentiel.



4. On relève sur la courbe  $v_{2,eq} = 19,5$  mL. D'après l'équation de la réaction du dosage, la quantité de  $Ce^{4+}$  apportée à l'équivalence est égale à la quantité de  $Fe^{2+}$  initialement présente dans le volume  $v_1$  de la solution de sulfate de fer. On a donc  $c_1 v_1 = c_2 v_{2,eq}$ . La concentration de la solution de sulfate de cérium est  $c_2 = 1,011/409,29 \times 4 = 1,000 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On en déduit la concentration de la solution de sulfate de fer  $c_1 = 9,75 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
5. On fait un tableau d'avancement, en reportant les nombres de moles :

	$Fe^{2+}$	+	$Ce^{4+}$	$\rightarrow$	$Fe^{3+}$	+	$Ce^{3+}$
à l'état initial	$c_1 v_1$		0		0		0
à l'équilibre avant l'équivalence	$c_1 v_1 - c_2 v_2$		$\varepsilon$		$c_2 v_2$		$c_2 v_2$

Le potentiel est donc :

$$E = E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}} = E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}^\circ + 0,059 \log \left( \frac{c_2 v_2}{c_1 v_1 - c_2 v_2} \right) = E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}^\circ + 0,059 \log \left( \frac{v_2}{v_{2,eq} - v_2} \right)$$

Pour  $v_2 = v_{2,eq}/2$ , on a  $E = E_{Fe^{3+}/Fe^{2+}}^\circ = 0,68$  V. Ce qui est en accord avec la courbe de dosage.

### Exercice 30.7

- En présence de la cuve remplie du solvant, l'appareil mesure  $-\log(I_{cuve})$ . La mise à zéro consiste à ajouter  $+\log(I_{cuve})$  à la valeur mesurée, ce qui donne 0 avec cette cuve. Lorsqu'on place la même cuve (ou une cuve identique) remplie de la solution absorbante étudiée, l'appareil donne  $-\log(I_{sol}) + \log(I_{cuve}) = \log(I_{cuve}/I_{sol})$ , qui est bien l'absorbance de la solution.
- La régression linéaire des données expérimentales donne la relation  $A = 2,11c$ . Le coefficient d'absorption molaire de  $MnO_4^-$  est donc  $\varepsilon = 2,11 \text{ cm}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mmol}^{-1}$ .
- Pour  $A_{sol} = 0,142$ , la droite d'étalonnage donne  $c = 0,142/2,11 = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

### Exercice 30.8

- Dans le cas  $n = 1$ , la masse molaire du sel ( $HgNO_3$ ) est  $M_1 = M = 262,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On a alors  $[Hg^+] = c_m/M_1 = 0,076 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Dans l'hypothèse  $n = 2$ , la masse molaire du sel ( $Hg_2(NO_3)_2$ ) est  $M_2 = 2M$ . On a alors  $[Hg_2^{2+}] = c_m/(2M) = 0,038 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- Dans le cas  $n = 1$ , la demi-équation est  $Hg^+ + e^- = Hg$ . Dans le cas  $n = 2$ , la demi-équation est  $Hg_2^{2+} + 2e^- = 2Hg$ .
- Pour  $n = 1$ , la formule de Nernst donne le potentiel de l'électrode du bécher (2) :  $E_2 = E^\circ + \frac{0,059}{1} \log[Hg^+]_2$  où  $E^\circ$  est le potentiel standard du couple  $Hg(+I)/Hg(0)$  (à la température de l'expérience). Celui de l'électrode du bécher (1) est  $E_1 = E^\circ + \frac{0,059}{1} \log[Hg^+]_1$ . La force électromotrice de la pile est donc :

$$U = \frac{0,059}{1} \log \left( \frac{[Hg^+]_2}{[Hg^+]_1} \right) = 0,059 \log \left( \frac{c_2}{c_1} \right)$$

car le rapport des concentrations molaires est égal au rapport des concentrations massiques.

Pour  $n = 2$ , on obtient  $U = \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{c_2}{c_1} \right)$ .

- Les résultats expérimentaux sont compatibles avec la relation  $U = -0,0295 \log(c_1/c_2)$  qui correspond au cas  $n = 2$ . L'ion mercureux est donc le dimère  $Hg_2^{2+}$ .



# Diagrammes potentiel-pH

## L'essentiel du cours

### Contexte

Pourquoi le fer s'endommage-t-il au contact de l'eau ? Pourquoi est-il dangereux de mélanger acide et eau de Javel ?

Dans le chapitre 30 nous avons vu qu'en comparant les potentiels redox de deux couples oxydant/réducteur il était possible de prévoir le sens de la réaction spontanée. Cependant dans certains cas, le potentiel d'un couple oxydant/réducteur dépend du pH de la solution ce qui pourra influencer la réaction envisagée. Il est donc important de construire un outil graphique permettant de visualiser les différents potentiels mis en jeu en fonction du pH de la solution : c'est le **diagramme potentiel-pH**.

Pour tracer un diagramme potentiel-pH il convient de définir :

- les espèces à prendre en compte ;
- des conventions concernant les concentrations des espèces dissoutes ;
- des conventions concernant la pression partielle des espèces gazeuses.



Ces conventions sont précisées pour chaque diagramme de façon à adapter l'outil à la situation étudiée. Toutefois, la concentration et la pression partielle intervenant dans le terme logarithmique de la formule de Nernst, leurs valeurs influent peu sur l'allure du diagramme.

## ■ 1 Construction des diagrammes potentiel-pH

Commençons par le problème concernant le fer.

À titre d'exemple construisons son diagramme  $E - \text{pH}$ , en considérant les espèces  $\text{Fe(s)}$ ,  $\text{Fe}^{2+}(\text{aq})$ ,  $\text{Fe}^{3+}(\text{aq})$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_2(\text{s})$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{s})$ . Nous prendrons comme concentration de travail des espèces dissoutes :  $c_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

On précise :

- les  $\text{p}K_s$  des hydroxydes :  $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_2) = 15,0$  et  $\text{p}K_s(\text{Fe}(\text{OH})_3) = 37,2$  ;
- les potentiels standard des couples  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  et  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  :

$$E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} = -0,44 \text{ V}, E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} = 0,77 \text{ V}.$$

Afin que le lecteur puisse se faire une idée de l'allure d'un diagramme  $E - \text{pH}$ , nous présentons figure 31.1 celui du fer avant de détailler sa construction.

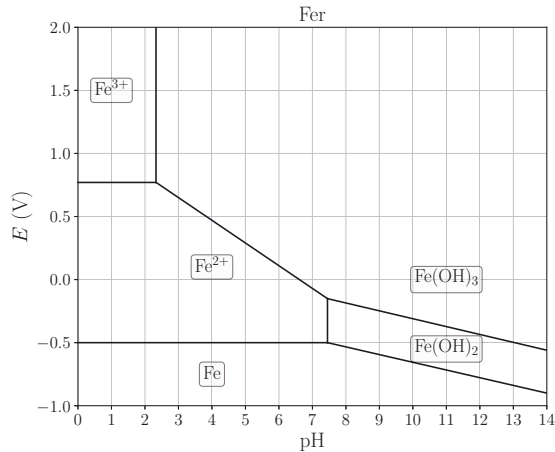


Figure 31.1. Diagramme  $E - pH$  théorique du fer.

□ **Comment identifier les couples oxydant/réducteur ?**

Il faut tout d'abord déterminer le nombre d'oxydation de l'élément fer dans chacune des espèces à considérer.

n.o.	Espèces	
+III	$Fe^{3+}$	$Fe(OH)_3$
+II	$Fe^{2+}$	$Fe(OH)_2$
0	Fe	

Puis il faut déterminer les couples redox sachant que l'oxydant du couple a un n.o. plus élevé que son réducteur conjugué.

D'après le tableau précédent, un potentiel peut être défini pour les couples fer(+III)/fer(+II) et les couples fer(+II)/fer(0). Par contre, les espèces  $Fe^{3+}$  et  $Fe(OH)_3$  ne peuvent pas constituer un couple oxydant/réducteur puisque l'élément fer y est au même degré d'oxydation. Il en va de même pour les espèces  $Fe^{2+}$  et  $Fe(OH)_2$ .

□ **À quelles conditions peut-on considérer le fer(II) sous la forme de  $Fe(OH)_2$  et le fer(III) sous la forme de  $Fe(OH)_3$  ?**

L'hydroxyde de fer(II) précipite selon la réaction :  $Fe^{2+} + 2 OH^- = Fe(OH)_2(s)$ .

Plus le pH est élevé, plus la solution contient d'ions  $OH^-$ . Pour une solution d'ions  $Fe^{2+}$  à la concentration  $c_{tra}$ , il existe donc une valeur de pH au dessus de laquelle un précipité d'hydroxyde de fer est présent.

En présence du précipité  $Fe(OH)_2$  la loi d'équilibre est :  $[Fe^{2+}][OH^-]^2 = [Fe^{2+}] \frac{K_e^2}{[H_3O^+]^2} = K_s$ .

À l'apparition du premier grain de précipité on a encore  $[Fe^{2+}] = c_{tra}$ . En notant  $[H_3O^+]_{app}$  la concentration en ions  $H_3O^+$  à l'apparition de ce premier grain on a alors :

$$[H_3O^+]_{app} = K_e \frac{[Fe^{2+}]^{1/2}}{K_s^{1/2}} = K_e \frac{c_{tra}^{1/2}}{K_s^{1/2}} \Rightarrow pH_{app} = pK_e - \frac{1}{2}pK_s - \frac{1}{2} \log c_{tra} = 7,5$$

On peut en tirer les conclusions suivantes :

- $\text{pH} < 7,5$  :  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  n'existant pas, on devra considérer le couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  ;
- $\text{pH} > 7,5$  : un précipité  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  étant présent, on utilisera le couple oxydant/réducteur  $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{Fe}$ .



■ Pour  $\text{pH} > 8,5$  la concentration  $[\text{Fe}^{2+}]$  devient négligeable devant  $c_{\text{tra}}$ .

Un raisonnement analogue pour le précipité d'hydroxyde de fer(III) aboutit à :

$$\text{pH}_{\text{app}} = \text{p}K_e - \frac{1}{3}\text{p}K_s - \frac{1}{3}\log c_{\text{tra}} = 2,3$$

On peut résumer la situation par le tableau ci-dessous :

	n.o.			
		2,3	7,5	pH
+III	$\text{Fe}^{3+}$		$\text{Fe}(\text{OH})_3$	
+II	$\text{Fe}^{2+}$		$\text{Fe}(\text{OH})_2$	
0	$\text{Fe}$			

Plus généralement, l'existence d'un couple précipité/ion se traduit par la présence d'une frontière verticale correspondant, par convention, à l'apparition du précipité au sein d'une solution ionique à la concentration de travail. De même, l'existence d'un couple acide/base se traduira par la présence d'une frontière verticale correspondant, par convention, à l'égalité des concentrations des formes acido-basiques.

### Méthode 31.1 : Déterminer une frontière verticale

- Écrire le produit de solubilité ou la constante d'acidité en fonction de  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  :
  - pour un couple  $\text{M}(\text{OH})_n/\text{M}^{n+}$  :  $K_s = [\text{M}^{n+}][\text{OH}^-]^n = [\text{M}^{n+}] \frac{K_e^n}{[\text{H}_3\text{O}^+]^n}$  ;
  - pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  :  $K_a = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{A}^-]}{[\text{AH}]}$ .
- En déduire la valeur de  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  à la frontière :
  - pour un couple  $\text{M}(\text{OH})_n/\text{M}^{n+}$  :  $[\text{M}^{n+}]_{\text{front}} = c_{\text{tra}} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{front}} = K_e \frac{c_{\text{tra}}^{1/n}}{K_s^{1/n}}$  ;
  - pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  :  $[\text{AH}]_{\text{front}} = [\text{A}^-]_{\text{front}} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{front}} = K_a$ .
- En déduire la valeur du pH à la frontière :
  - pour un couple  $\text{M}(\text{OH})_n/\text{M}^{n+}$  :  $\text{pH}_{\text{front}} = \text{p}K_e - \frac{1}{n}\text{p}K_s - \frac{1}{n}\log c_{\text{tra}}$  ;
  - pour un couple  $\text{AH}/\text{A}^-$  :  $\text{pH}_{\text{front}} = \text{p}K_a$ .

➔ Exercices (31.1) (31.2)

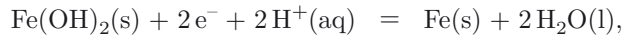


■ On retrouve les valeurs des pH à la frontière des diagrammes d'existence pour les précipités ou des diagrammes de prédominance pour les couples acide/base.

□ Pour chacun des couples oxydant/réducteur identifiés, quelle relation existe-t-il entre le potentiel redox et le pH ?

Pour les couples Fe(+II)/Fe(0) :

- À pH < 7,5 il faut considérer le couple Fe<sup>2+</sup>/Fe : Fe<sup>2+</sup>(aq) + 2 e<sup>-</sup> = Fe(s), pour lequel la formule de Nernst s'écrit :  $E = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log[\text{Fe}^{2+}]$ .  
À la frontière : [Fe<sup>2+</sup>] = c<sub>tra</sub> ⇒ E<sub>front</sub> = E<sub>Fe<sup>2+</sup>/Fe</sub><sup>°</sup> +  $\frac{0,059}{2} \log c_{\text{tra}} = -0,50 \text{ V}$ .
- À pH > 7,5, il faut considérer le couple Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe :



pour lequel la formule de Nernst s'écrit :

$$E = E_{\text{Fe(OH)}_2/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log[\text{H}^+]^2 = E_{\text{Fe(OH)}_2/\text{Fe}}^{\circ} - 0,059\text{pH}.$$

À la frontière : E<sub>front</sub> = E<sub>Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe</sub><sup>°</sup> - 0,059pH.

La continuité du potentiel en pH = 7,5 permet de calculer la valeur de E<sub>Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe</sub><sup>°</sup> :  
-0,50 = E<sub>Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe</sub><sup>°</sup> - 0,059 × 7,5 ⇒ E<sub>Fe(OH)<sub>2</sub>/Fe</sub><sup>°</sup> = -0,057 V.

Finalement, à la frontière : E<sub>front</sub> = 0,057 - 0,059pH.



On peut aussi utiliser le potentiel du couple Fe<sup>2+</sup>/Fe :  $E = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log[\text{Fe}^{2+}]$ .

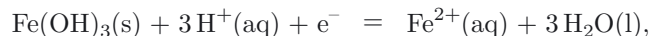
Or  $K_s = [\text{Fe}^{2+}][\text{OH}^-]^2 = [\text{Fe}^{2+}] \frac{K_e^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_s[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_e^2}$ .

D'où  $E = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + \frac{0,059}{2} \log \frac{K_s[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_e^2} = E_{\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}}^{\circ} + 0,059 \left( \text{p}K_e - \frac{\text{p}K_s}{2} \right) - 0,059\text{pH}$ .

Finalement : E<sub>front</sub> = 0,057 - 0,059pH.

Pour les couples Fe(+III)/Fe(+II) :

- À pH < 2,3 il faut considérer le couple Fe<sup>3+</sup>/Fe<sup>2+</sup> : Fe<sup>3+</sup>(aq) + e<sup>-</sup> = Fe<sup>2+</sup>(aq), pour lequel la formule de Nernst s'écrit :  $E = E_{\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + 0,059 \log \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$ .  
À la frontière : [Fe<sup>3+</sup>] = [Fe<sup>2+</sup>] ⇒ E<sub>front</sub> = E<sub>Fe<sup>3+</sup>/Fe<sup>2+</sup></sub><sup>°</sup> = 0,77 V.
- À 2,3 < pH < 7,5 il faut considérer le couple Fe(OH)<sub>3</sub>/Fe<sup>2+</sup> :

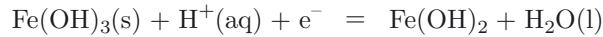


pour lequel la formule de Nernst s'écrit :

$$E = E_{\text{Fe(OH)}_3/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} + 0,059 \log \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} = E_{\text{Fe(OH)}_3/\text{Fe}^{2+}}^{\circ} - 0,059 \log[\text{Fe}^{2+}] - 0,18\text{pH}.$$

La valeur de [Fe<sup>2+</sup>] à la frontière : [Fe<sup>2+</sup>] = c<sub>tra</sub> et la continuité du potentiel à pH = 2,3 conduisent à : E<sub>front</sub> = 1,19 - 0,18pH.

- À  $\text{pH} > 7,5$  il faut considérer le couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2$  :



, pour lequel la formule de Nernst s'écrit :

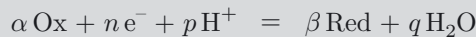
$$E = E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2}^\circ + 0,059 \log[\text{H}^+] = E_{\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2}^\circ - 0,059 \text{pH}.$$

La continuité du potentiel à  $\text{pH} = 7,5$  conduit à :  $E_{\text{front}} = 0,28 - 0,059 \text{pH}$ .

Plus généralement, pour chaque couple oxydant/réducteur, il existe une relation affine du type :  $E = a\text{pH} + b$  dont il faut savoir déterminer la pente  $a$  suivant la méthode ci-dessous.

### Méthode 31.2 : Déterminer la pente d'une frontière

- Écrire la demi-équation d'oxydation avec des ions  $\text{H}^+$  (et non pas  $\text{OH}^-$ ) :



- Écrire la formule de Nernst en isolant  $\log[\text{H}^+]$  :

$$E = E_{\text{Ox}/\text{Red}}^\circ + \frac{0,059}{n} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha [\text{H}^+]^p}{a_{\text{Red}}^\beta} \right) = E_{\text{Ox}/\text{Red}}^\circ + \frac{0,059}{n} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}}^\alpha}{a_{\text{Red}}^\beta} \right) + \frac{0,059p}{n} \log[\text{H}^+]$$

- Identifier la pente  $\frac{-0,059p}{n}$ .

➔ Exercice (31.4)

### □ Comment positionner les espèces par rapport aux différentes frontières ?

On reprend le principe de construction des diagrammes de prédominance ou d'existence présentés dans le chapitre 30 avec cette fois-ci l'axe des potentiels placé en ordonnée du diagramme  $E - \text{pH}$ . Il faut donc placer l'oxydant au dessus de la frontière horizontale ou inclinée ( $E > E_{\text{front}}$ ) et le réducteur en dessous de la frontière horizontale ou inclinée ( $E < E_{\text{front}}$ ).

De même pour une frontière verticale définie pour une valeur du  $\text{pH}$  égale à  $\text{pH}_{\text{front}}$ , en reprenant les principes de construction des diagrammes de prédominance ou d'existence présentés dans le chapitre 28 et 29. Il faut placer :

- l'acide  $\text{AH}$  à gauche de la frontière verticale ( $\text{pH} < \text{pH}_{\text{front}}$ ) et la base à droite de la frontière verticale ( $\text{pH} > \text{pH}_{\text{front}}$ ) ;
- l'ion métallique à gauche de la frontière verticale ( $\text{pH} < \text{pH}_{\text{front}}$ ) et le précipité à droite de la frontière verticale ( $\text{pH} > \text{pH}_{\text{front}}$ ).

Le diagramme théorique  $E - \text{pH}$  pour l'élément fer ainsi obtenu est représenté figure 31.1.

Plus généralement, il faut savoir attribuer les différents domaines d'un diagramme à des espèces prises en compte suivant la méthode ci-dessous.

**Méthode 31.3 : Attribuer les différents domaines d'un diagramme**

- Identifier les nombres d'oxydation de l'élément dans les espèces prises en compte.
- Placer les espèces de bas en haut dans le diagramme par n.o. croissant.
- Pour deux espèces de même nombre d'oxydation :
  - placer les acides à bas pH (à gauche de la frontière verticale) et les bases à haut pH (à droite de la frontière verticale) ;
  - placer les ions métalliques à bas pH (à gauche de la frontière verticale) et les précipités d'hydroxyde métallique à haut pH (à droite de la frontière verticale).

## ➔ Exercice (31.2)

Pour retrouver expérimentalement, au moins partiellement, ce diagramme du fer nous avons procédé de la façon suivante. Nous avons préparé une solution aqueuse équimolaire d'ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  contenant  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'alun de fer (II)  $((\text{NH}_4)_2\text{Fe}(\text{SO}_4)_2, 6 \text{ H}_2\text{O})$  (sel de Mohr) et  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de nitrate de fer (III)  $(\text{Fe}(\text{NO}_3)_3, 9 \text{ H}_2\text{O})$ . La solution a été acidifiée par environ  $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'acide sulfurique.

Nous avons fait varier le pH par ajout d'une solution de soude NaOH de concentration  $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  placée dans une burette.

Au cours de l'expérience, nous avons mesuré les valeurs :

- du pH à l'aide d'un pH-mètre exploitant la tension entre une électrode de verre et une électrode de référence au calomel saturée (ECS) ;
- de la tension  $U = E - 0,244 \text{ V}$  entre une électrode de platine et une électrode de référence au calomel saturée (ECS) à l'aide d'un potentiomètre.

Le résultat de cette étude expérimentale est représenté figure 31.2.

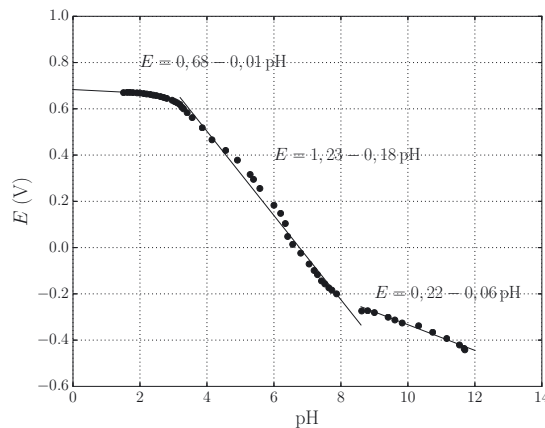


Figure 31.2. Diagramme  $E - \text{pH}$  expérimental pour les couples  $\text{Fe}(+III)/\text{Fe}(+II)$ .

Le diagramme  $E - \text{pH}$  expérimental confirme l'allure du diagramme théorique ainsi que les valeurs des pentes théoriques. La différence entre les valeurs des potentiels des diagrammes théorique et expérimental est due au milieu sulfaté au sein duquel les ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  peuvent se trouver sous la forme de complexes  $[\text{Fe}(\text{SO}_4)]$  et  $[\text{Fe}(\text{SO}_4)]^+$ . Ces réactions de complexation qui n'ont pas été prises en compte dans la partie théorique modifient les potentiels standard.



□ Quel est l'allure du diagramme potentiel-pH du chlore ?

Continuons avec l'élément chlore en considérant les espèces suivantes :  $\text{Cl}_2(\text{g})$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{HClO}$ ,  $\text{ClO}^-$  avec une concentration en espèces dissoutes  $c_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et une pression partielle en espèce gazeuse  $P_{\text{tra}} = 1,0 \text{ bar}$ . On précise  $\text{p}K_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) = 7,5$ .

Un raisonnement analogue permet d'obtenir le tableau et le diagramme potentiel-pH suivants :

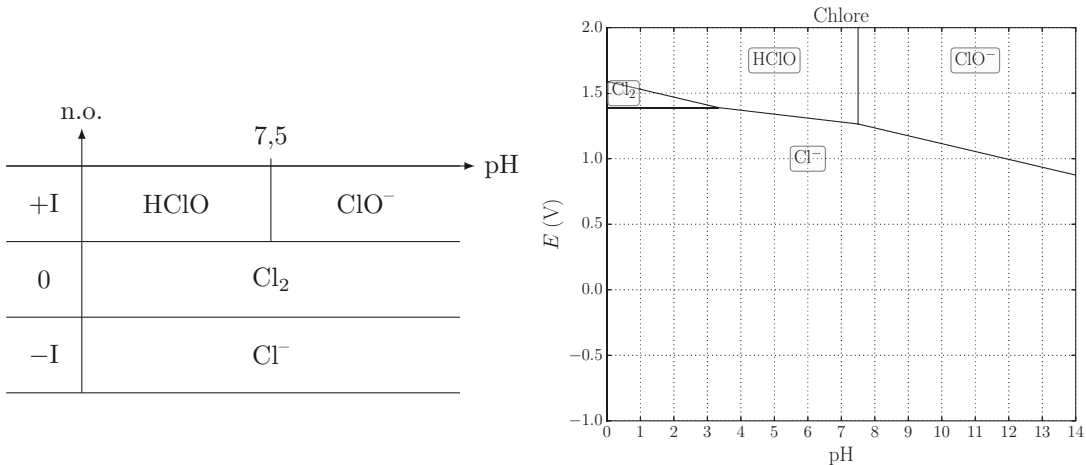


Figure 31.3. Diagramme  $E - \text{pH}$  du chlore.

□ Quelle particularité présente le diagramme potentiel-pH du chlore ?

On observe qu'au dessus d'un pH de 3,3 l'espèce  $\text{Cl}_2$  ne présente plus de domaine. Les frontières des couples  $\text{Cl}(+I)/\text{Cl}(0)$  et  $\text{Cl}(0)/\text{Cl}(-I)$  laissent place à la frontière  $\text{Cl}(+I)/\text{Cl}(-I)$ .

Zoomons sur cette partie en prolongeant en pointillés les frontières des couples  $\text{HClO}/\text{Cl}_2$  et  $\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$ , au delà de  $\text{pH} = 3,3$ .



Utilisons les conclusions du chapitre 30 pour commenter la figure de gauche.

- À  $\text{pH} < 3,3$  :  $E_{\text{HClO}/\text{Cl}_2} > E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-}$ .

$\text{HClO}$  oxyde  $\text{Cl}^-$  selon la **médiamutation** :  $2 \text{HClO} + 2 \text{Cl}^- + 2 \text{H}^+ = 2 \text{Cl}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}$ .

Cela se traduit par l'existence d'un domaine de stabilité de  $\text{Cl}_2$  commun aux deux couples.

- À  $\text{pH} > 3,3$  :  $E_{\text{Cl}_2/\text{Cl}^-} > E_{\text{HClO}/\text{Cl}_2}$ .

Il y a deux domaines disjoints pour  $\text{Cl}_2$  (en pointillés). Le dichlore  $\text{Cl}_2$  n'est pas stable et réagit avec lui-même selon la **dismutation** :  $2 \text{Cl}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} = 2 \text{HClO} + 2 \text{Cl}^- + 2 \text{H}^+$ .

Le dichlore ne possède donc plus de domaine de stabilité à partir de  $\text{pH} > 3,3$ .

Pour  $\text{pH} > 3,3$  il apparaît une frontière entre les deux espèces stables  $\text{Cl}^-$  et  $\text{HClO}$  (figure de droite).



Pour trouver l'équation bilan de la réaction ayant lieu entre deux espèces, il faut écrire les demi-équations des couples mis en jeu puis les combiner entre elles (voir chapitre 30).

## ■ 2 Utilisation des diagrammes potentiel-pH

Nous possédons maintenant l'outil graphique permettant de prévoir les réactions d'oxydoréduction par comparaison des potentiels. Rappelons que :

- une réaction d'oxydoréduction a lieu entre l'oxydant de plus fort potentiel et le réducteur de plus bas potentiel ;
- plus la différence des potentiels est grande, plus l'avancement de la réaction sera important pour atteindre l'équilibre du système, qui est caractérisé par l'égalité des potentiels.

### Méthode 31.4 : Prévoir le caractère thermodynamiquement favorisé d'une réaction entre deux espèces

- Superposer les diagrammes  $E - \text{pH}$  des deux éléments associés aux deux espèces.
- Comparer les potentiels des deux couples en jeu selon la valeur du pH de la solution.
- Ou repérer le domaine de chacune des deux espèces :
  - si les domaines sont disjoints, la réaction est favorisée thermodynamiquement (et d'autant plus favorisée que les domaines sont éloignés) ;
  - s'il existe une zone commune aux deux domaines, la réaction est défavorisée thermodynamiquement (et d'autant plus défavorisée que la zone commune est grande).

➔ Exercices (31.3) (31.5)



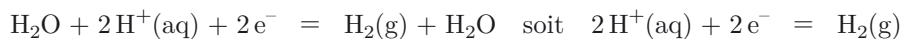
Cette méthode est utilisable pour étudier la **stabilité d'une espèce dans l'eau**. Si la réaction entre l'espèce considérée et l'eau est favorisée thermodynamiquement (domaines disjoints), cette espèce n'est pas stable dans l'eau. Dans le cas contraire, elle est stable.

### □ Quelle est l'allure du diagramme potentiel-pH de l'eau ?

L'eau est une espèce amphotère : c'est l'espèce oxydante du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  et l'espèce réductrice du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ . Les potentiels standard respectifs de ces couples ont pour valeurs  $E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2}^\circ = 0 \text{ V}$  et  $E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^\circ = 1,23 \text{ V}$ .

Le diagramme  $E - \text{pH}$  de l'eau est construit en prenant les pressions partielles des gaz en présence de la solution égales à 1,0 bar.

**Pour le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  correspondant à  $\text{H}(+\text{I})/\text{H}(0)$  :**

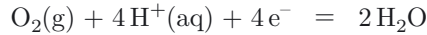


Le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  s'identifie au couple  $\text{H}^+/\text{H}_2$  de potentiel standard nul.

$$E = E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2(\text{g})}^\circ + \frac{0,059}{2} \log \frac{[\text{H}^+]^2}{P_{\text{H}_2}} = E_{\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2(\text{g})}^\circ - \frac{0,059}{2} \log P_{\text{H}_2} - 0,059\text{pH}$$

À la frontière :  $P_{\text{H}_{2\text{front}}} = 1,0 \text{ bar} \Rightarrow E = -0,059\text{pH}$ .

Pour le couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  correspondant à  $\text{O}(0)/\text{O}(-\text{II})$  :



$$E = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^\circ + \frac{0,059}{4} \log[\text{H}^+]^4 P_{\text{O}_2} = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}}^\circ + \frac{0,059}{4} \log P_{\text{O}_2} - 0,059\text{pH}.$$

À la frontière :  $P_{\text{O}_{2\text{front}}} = 1,0 \text{ bar} \Rightarrow E = 1,23 - 0,059\text{pH}$ .

Le diagramme de l'eau ainsi obtenu est représenté figure 31.4. Nous pouvons observer l'existence d'un domaine pour l'eau, commun aux deux couples. Il s'agit du **domaine d'inertie électrochimique de l'eau**.

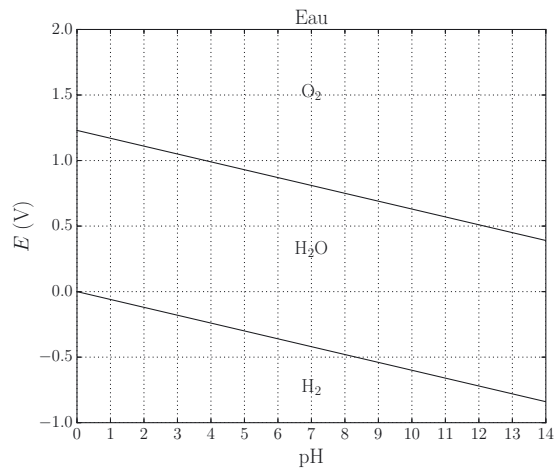
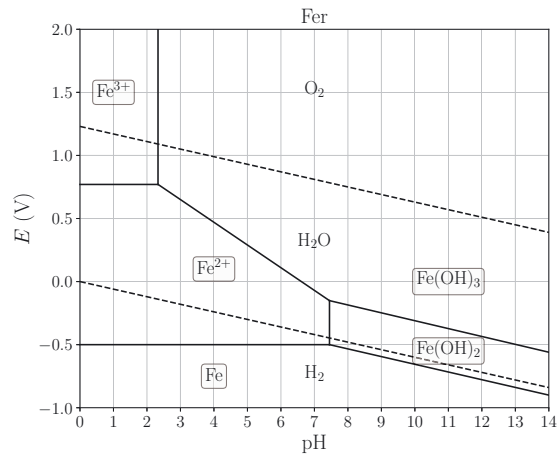


Figure 31.4. Diagrammes  $E - \text{pH}$  de l'eau.

Si un composé instable vis à vis de l'eau est mis en solution, soit il oxydera l'eau avec un dégagement de dioxygène, soit il la réduira avec un dégagement de dihydrogène. Il s'agit cependant d'une tendance thermodynamique. En réalité ces réactions peuvent être très lentes, voire extrêmement lentes, avec des temps de demi-vie de plusieurs mois. Dans ce cas, une espèce instable dans l'eau peut tout de même être présente en solution.

□ **Que nous apprend la superposition des diagrammes  $E - \text{pH}$  du fer et de l'eau ?**

Reprenons la problématique du fer, avec le diagramme  $E - \text{pH}$  du fer superposé à celui de l'eau (figure 31.5).

Figure 31.5. Diagrammes  $E - \text{pH}$  du fer et de l'eau superposés.

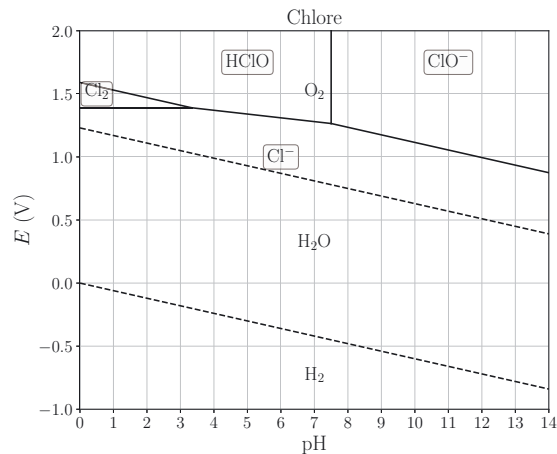
Les domaines de l'eau et du fer sont disjoints. La réaction entre ces deux espèces est donc favorisée : le fer est oxydé par l'eau avec dégagement de dihydrogène (phénomène de corrosion). Le réducteur Fe du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  ou  $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{Fe}$  réduit l'oxydant  $\text{H}_2\text{O}$  du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  (ou  $\text{H}^+/\text{H}_2$ ) d'après la réaction :

- si  $\text{pH} < 7,5$  :  $\text{Fe} + 2\text{H}^+ = \text{Fe}^{2+} + \text{H}_2$ ,
- si  $\text{pH} > 7,5$  :  $\text{Fe} + 2\text{H}_2\text{O} = \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2$ .

Par ailleurs, l'écart entre les potentiels des deux couples augmentant quand le pH diminue, la corrosion est plus importante en milieu acide.

□ Que nous apprend la superposition des diagrammes  $E - \text{pH}$  du chlore et de l'eau ?

Reprenons la problématique du chlore, avec le diagramme  $E - \text{pH}$  du chlore superposé à celui de l'eau (figure 31.6).

Figure 31.6. Diagrammes  $E - \text{pH}$  du chlore et de l'eau superposés.

Les domaines de l'eau et de l'acide hypochloreux  $\text{HClO}$ , ou de l'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ , sont dis-joints. Les réactions entre l'eau et ces deux espèces sont donc favorisées : l'acide hypochloreux et l'ion hypochlorite sont réduits par l'eau avec dégagement de dioxygène.

L'oxydant  $\text{Cl}(+I)$  ( $\text{HClO}$  ou  $\text{ClO}^-$ ) est réduit par le réducteur  $\text{H}_2\text{O}$  du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  selon une des réactions suivantes :

- si  $\text{pH} > 7,5$  :  $2\text{ClO}^- = 2\text{Cl}^- + \text{O}_2$ ;
- si  $3,3 < \text{pH} < 7,5$  :  $2\text{HClO} = 2\text{Cl}^- + \text{O}_2 + 2\text{H}^+$ ;
- si  $\text{pH} < 3,3$  :  $2\text{HClO} = 2\text{Cl}^- + \text{O}_2 + 2\text{H}^+$  et  $4\text{HClO} = 2\text{Cl}_2 + \text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ .

### Retour au contexte de l'eau de javel

L'eau de Javel est une solution aqueuse d'hypochlorite de sodium ( $\text{ClO}^-$ ,  $\text{Na}^+$ ) et de chlorure de sodium ( $\text{Cl}^-$ ,  $\text{Na}^+$ ) en concentrations égales. Elle est basique et oxydante.

Revenons à notre problématique initiale : « Pourquoi est-il dangereux de mélanger acide et eau de Javel ? ». Ajouter de l'acide à l'eau de Javel diminue le pH de la solution. D'après le diagramme potentiel-pH du chlore, nous voyons qu'à faible pH l'acide hypochloreux risque de réagir avec  $\text{Cl}^-$  (médiatisation) pour former du dichlore, qui est un gaz toxique.

Pour finir, nous avons vu que l'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$  (principe actif de l'eau de Javel) est instable dans l'eau et pourtant de l'eau de Javel est vendue dans le commerce !

#### Comment lever ce paradoxe ?

Les raisonnements menés précédemment permettent de déterminer si les réactions sont possibles du point de vue thermodynamique, c'est-à-dire sur le plan énergétique et entropique. Il ne nous renseigne pas sur les vitesses des réactions. Si la réaction entre l'espèce instable et l'eau est très lente, l'espèce sera observable et utilisable. C'est le cas de l'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$  dans l'eau, dont la concentration diminue très lentement, sur une échelle de temps de l'ordre de plusieurs mois.

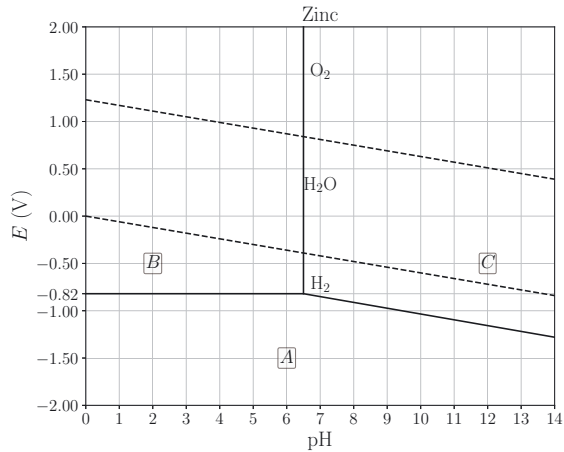


Une étude complète doit prendre en compte l'aspect thermodynamique (loi d'équilibre chimique, constante d'équilibre de la réaction) et l'aspect cinétique (vitesse de la réaction).

## Interro de cours

Étudions le diagramme  $E - \text{pH}$  de l'élément zinc donné ci-contre pour lequel on a considéré les espèces  $\text{Zn(s)}$ ,  $\text{Zn}^{2+}$ ,  $\text{Zn(OH)}_2(\text{s})$  et une concentration en espèces dissoutes :  $c_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Le diagramme  $E - \text{pH}$  de l'eau a été superposé en pointillés à celui du zinc.



- Attribuer à chaque domaine l'espèce chimique correspondante.
  - $A : \text{Zn}$  ;  $B : \text{Zn}^{2+}$  ;  $C : \text{Zn(OH)}_2$ .
  - $A : \text{Zn}$  ;  $B : \text{Zn(OH)}_2$  ;  $C : \text{Zn}^{2+}$ .
  - $A : \text{Zn}^{2+}$  ;  $B : \text{Zn}$  ;  $C : \text{Zn(OH)}_2$ .
- D'après le diagramme fourni, le potentiel standard du couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  vaut :
  - $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ = -0,82 \text{ V}$  ;
  - $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ = -0,76 \text{ V}$  ;
  - $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ = -1,28 \text{ V}$ .
- D'après le diagramme fourni, le  $\text{p}K_s$  du précipité d'hydroxyde de zinc  $\text{Zn(OH)}_2$  vaut :
  - $\text{p}K_s = 6,5$  ;
  - $\text{p}K_s = 17,0$  ;
  - $\text{p}K_s = 13,0$ .
- Le zinc solide  $\text{Zn(s)}$  est une espèce :
  - instable dans l'eau quelque soit le pH ;
  - stable dans l'eau quelque soit le pH ;
  - instable dans l'eau pour  $\text{pH} < 6,5$ .
- Identifier la (ou les) affirmation(s) exacte(s).
  - L'oxydation du zinc par l'eau est d'autant plus favorisée que le pH est faible.
  - L'eau est réduite par le zinc  $\text{Zn}$  en dioxygène  $\text{O}_2$ .
  - L'oxydation de l'eau produit du précipité d'hydroxyde de zinc  $\text{Zn(OH)}_2$  à  $\text{pH} > 6,5$ .
- La mesure simultanée du pH et du potentiel  $E$  nécessite l'utilisation :
  - d'une électrode ;
  - de deux électrodes ;
  - de trois ou quatre électrodes.

# Exercices

## Exercice 31.1 Contamination de l'eau par le chrome

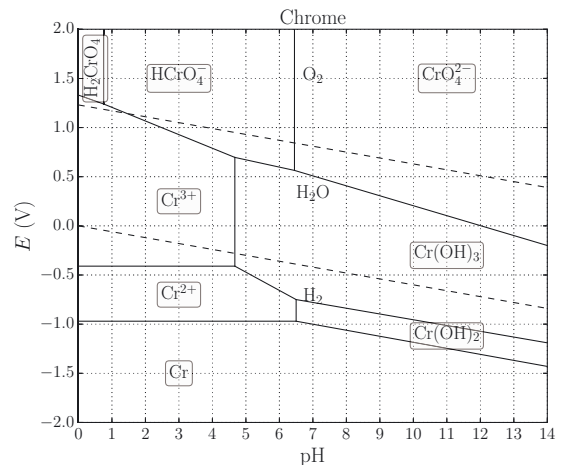
### ➔ Méthode (31.1)

Les eaux usées sont parfois contaminées par le chrome à cause de son utilisation industrielle (galvanoplastie, tannage du cuir, etc.). Le chrome se trouve alors dans l'eau au degré d'oxydation +VI (ion chromate  $\text{CrO}_4^{2-}$ ) ou +III (ion  $\text{Cr}^{3+}$ ). L'ion chromate est toxique, et probablement cancérigène. On donne ci-dessous le diagramme potentiel-pH du chrome, établi avec une concentration maximale des espèces dissoutes égale à  $0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , superposé à celui de l'eau, établi avec des pressions partielles de 1 bar.

Pour éliminer ce chrome, on utilise du sulfite de sodium  $\text{Na}_2\text{SO}_3$ .

Données : potentiel standard du couple  $\text{SO}_4^{2-}/\text{SO}_3^{2-}$  :  $E^\circ = -0,93 \text{ V}$ , produit ionique de l'eau à  $25^\circ\text{C}$  :  $K_e = 10^{-14,0}$ ,  $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,059 \text{ V}$ .

1. Utiliser le diagramme potentiel-pH pour calculer le produit de solubilité de  $\text{Cr}(\text{OH})_3$ .
2. Exprimer le potentiel du couple  $\text{SO}_4^{2-}/\text{SO}_3^{2-}$  en fonction du pH et placer la droite sur le diagramme.
3. Sous quelle forme le chrome se trouve-t-il en présence d'oxygène dissous dans l'eau et à pH neutre ?
4. Comment l'ion sulfite  $\text{SO}_3^{2-}$  agit-il sur ce composé ? Écrire l'équation de la réaction et évaluer sa faisabilité thermodynamique. Dans quelle gamme de pH faut-il procéder ?
5. Le pH de l'eau est ramené à une valeur proche de 7 après le traitement. Sous quelle forme le chrome se trouve-t-il ? Comment peut-il être éliminé ?

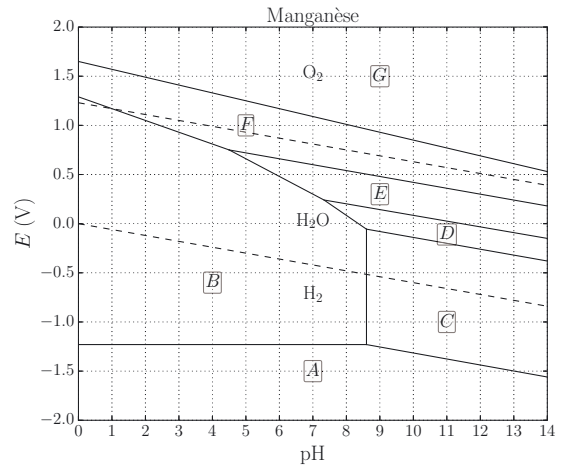


## Exercice 31.2 Manganèse

### ➔ Méthodes (31.1) (31.3)

La figure suivante donne le diagramme potentiel-pH du manganèse (en trait continu) superposé à celui de l'eau (en trait pointillé). Les espèces représentées sont  $\text{Mn}$ ,  $\text{MnO}_2$ ,  $\text{Mn}^{2+}$ ,  $\text{Mn}(\text{OH})_2$ ,  $\text{MnO}_4^-$ ,  $\text{Mn}_2\text{O}_3$  et  $\text{Mn}_3\text{O}_4$ . La concentration de travail est  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On donne le produit ionique de l'eau  $K_e = 10^{-14,0}$ .

- Placer les 7 espèces dans les domaines notés A, B, C, D, E, F et G.
- Déduire du diagramme le produit de solubilité de l'hydroxyde de manganèse  $\text{Mn}(\text{OH})_2$ .
- Calculer la pente de la frontière entre les domaines de  $\text{MnO}_2$  et  $\text{MnO}_4^-$ .
- Déterminer la stabilité de l'ion permanganate  $\text{MnO}_4^-$  dans l'eau. Le cas échéant, écrire l'équation de la réaction avec l'eau.
- L'ion permanganate est souvent utilisé comme oxydant en solution aqueuse. Est-ce en contradiction avec le résultat précédent ?
- Lorsqu'on introduit de la poudre de manganèse dans une solution aqueuse très acide, on observe un dégagement gazeux et la disparition du solide. Expliquer en écrivant l'équation de la réaction.



### Exercice 31.3 Déferrisation de l'eau potable

#### ➔ Méthode (31.4)

Le fer contenu dans l'eau (généralement au degré d'oxydation +II) doit être éliminé pour la distribution d'eau potable en raison de son goût désagréable et des précipités colorés qu'il peut générer. Le diagramme potentiel-pH du fer est donné ci-après, établi avec une concentration de travail  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Celui de l'eau (en ligne pointillée) est aussi représenté.

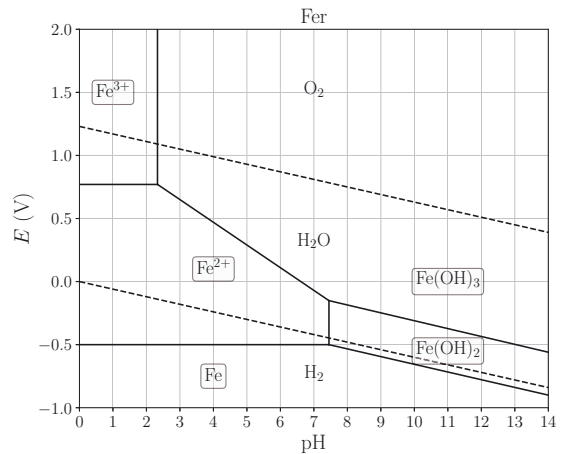
La déferrisation de l'eau se fait en trois étapes : l'aération, la décantation et le filtrage. Le fer est principalement au degré d'oxydation +II. Initialement, le pH de l'eau est proche de 6 ; il est augmenté à une valeur proche de 8. L'aération consiste à faire un brassage de l'eau par l'air, de manière à dissoudre le maximum de dioxygène. La décantation permet de laisser les précipités descendre au fond du bassin. Le filtrage consiste à faire passer l'eau dans un milieu poreux afin de retenir les précipités. Un filtre à sable est généralement utilisé pour cela.

En France, la limite acceptable de fer dissous ( $\text{Fe}^{2+}$ ) dans l'eau potable est fixée à  $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Données : masses molaires  $M(\text{O}) = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M(\text{Fe}) = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .



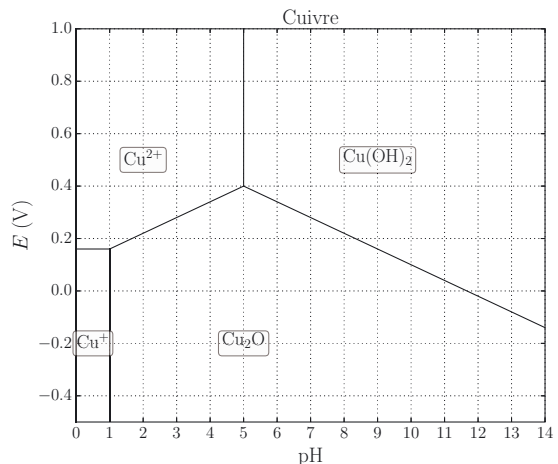
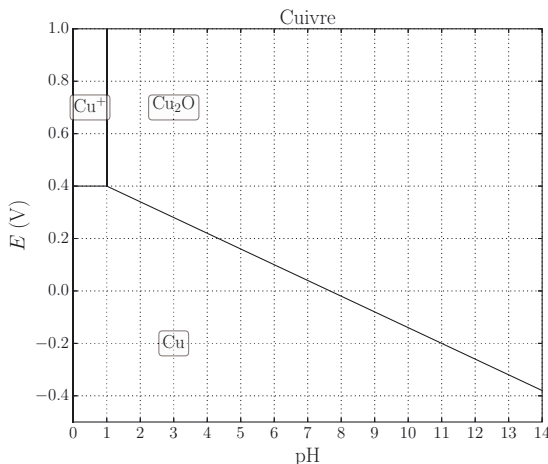
- Quelle est la réaction chimique se produisant lors de l'étape d'aération ?  
Pourquoi doit-on procéder en milieu légèrement basique (pH = 8) plutôt qu'à pH = 6 ?
- Quel est le rôle de la filtration ?
- On suppose que l'eau à traiter a une concentration en  $\text{Fe}^{2+}$  de  $3,0 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ . Calculer la concentration massique en oxygène dissous qu'il faut obtenir pour réduire la concentration à moins de  $200 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$  (pour une réaction en système fermé).
- À  $20^\circ\text{C}$ , la solubilité dans l'eau de  $\text{O}_2$  à pression atmosphérique vaut  $9,0 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ . Commenter.



### Exercice 31.4 Cuivre

#### ➔ Méthode (31.2)

On considère le diagramme potentiel-pH du cuivre aux degrés d'oxydation 0/+I d'une part, celui du cuivre aux degrés +I/+II d'autre part, établis avec une concentration de travail  $c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On se propose de tracer un diagramme potentiel-pH complet, avec les degrés 0, +I et +II.



Données : potentiels standard  $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+}^\circ = 0,16 \text{ V}$ ,  $E_{\text{Cu}^+/\text{Cu}}^\circ = 0,52 \text{ V}$ ,  $E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}}^\circ = 0,34 \text{ V}$ . Produit ionique de l'eau  $K_e = 10^{-14,0}$ .

- Écrire la réaction de dissolution de  $\text{Cu}_2\text{O}$ , en faisant intervenir  $\text{H}_2\text{O}$  comme second réactif. Déduire des diagrammes le produit de solubilité de l'oxyde de cuivre  $\text{Cu}_2\text{O}$ .
- Déterminer par le calcul les potentiels aux frontières pour les couples  $\text{Cu}^+/\text{Cu}$  et  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ . Ces résultats sont-ils en accord avec les diagrammes potentiel-pH fournis ?
- Déterminer la pente de la droite séparant les domaines de stabilité de  $\text{Cu}_2\text{O}$  et  $\text{Cu}$ . En déduire son équation sous forme numérique.

- Déterminer la pente de la droite séparant les domaines de stabilité de  $\text{Cu}^{2+}$  et  $\text{Cu}_2\text{O}$ . En déduire son équation sous forme numérique.
- Pour quel pH (noté  $\text{pH}_1$ ) les deux droites précédentes se coupent-elles ?
- Que peut-on dire de  $\text{Cu}^+$  et de  $\text{Cu}_2\text{O}$  pour  $\text{pH} < \text{pH}_1$  ? Quel couple faut-il considérer pour  $\text{pH} < \text{pH}_1$  ? Déterminer son potentiel en fonction du pH.
- Tracer le diagramme potentiel-pH du cuivre, avec les degrés 0, +I et +II.

### Exercice 31.5 Eau de Javel

#### ➔ Méthode (31.4)

Le procédé industriel standard de fabrication de l'eau de Javel consiste à dissoudre du dichlore  $\text{Cl}_2$  dans une solution aqueuse concentrée d'hydroxyde de sodium ( $\text{Na}^+, \text{OH}^-$ ) contenant 20 g de NaOH pour 100 g. L'eau de Javel est basique ( $\text{pH} \approx 11,5$ ) car NaOH est en large excès.

Le diagramme potentiel-pH du chlore est donné ci-dessous, avec celui de l'eau (en pointillé).

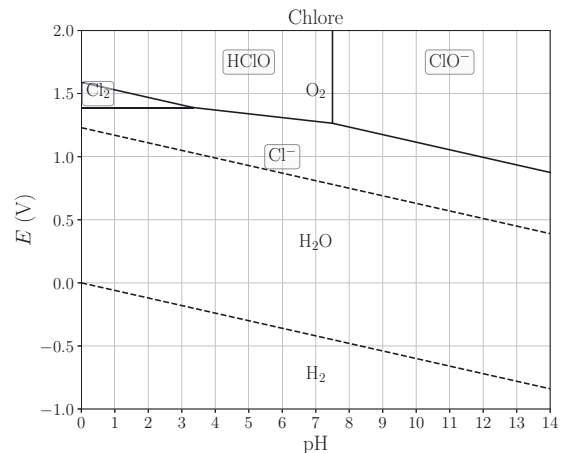
La concentration d'une eau de Javel peut être définie par le *titre chlorométrique*, égal au volume de dichlore gazeux dissous par litre de solution (sous 1 bar et à 293 K) et ayant réagi.

Le titrage d'une eau de Javel peut se faire par iodométrie. L'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$  est réduit par l'ion iodure  $\text{I}^-$  en large excès. Le diiode  $\text{I}_2$  formé (soluble sous forme complexée  $\text{I}_3^-$ ), de couleur jaune très intense, est dosée par colorimétrie avec une solution de thiosulfate de sodium ( $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}, 2\text{Na}^+$ ). L'équivalence est repérée par la disparition de la couleur jaune de la solution.

Données :  $M(\text{Cl}) = 35,45 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Potentiels standard :  $E^\circ(\text{I}_2/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V}$ ,  $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$ .

- Écrire la réaction du procédé de fabrication et utiliser le diagramme pour déterminer sa faisabilité thermodynamique.
- Montrer que l'eau de Javel est une solution basique d'hypochlorite de sodium ( $\text{ClO}^-, \text{Na}^+$ ) et de chlorure de sodium ( $\text{Cl}^-, \text{Na}^+$ ) en concentrations égales.
- Calculer la concentration des ions  $\text{ClO}^-$  dans une eau de Javel neuve, de titre chlorométrique 8,5.



- Une eau de Javel stockée pendant plusieurs mois est dosée par iodométrie. La première étape consiste à prélever  $v = 10,0 \text{ mL}$  de l'eau de Javel, puis à lui ajouter de l'iodure de potassium ( $\text{K}^+, \text{I}^-$ ) en large excès, avec quelques gouttes d'acide éthanóique concentré pour avoir  $\text{pH} \approx 4$ . Écrire la réaction et montrer qu'elle est quantitative.
- La seconde étape consiste à doser le diiode produit avec une solution de thiosulfate de sodium ( $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}, 2\text{Na}^+$ ) de concentration  $c = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Écrire la réaction et montrer qu'elle est quantitative.

6. Le dosage colorimétrique de  $I_2$  par  $S_2O_3^{2-}$  donne un volume versé à l'équivalence  $v_{eq} = 18,5$  mL. Calculer la concentration en ions  $ClO^-$  de l'eau de Javel. Comment expliquer l'écart avec l'eau de Javel neuve ? Écrire l'équation de la réaction.

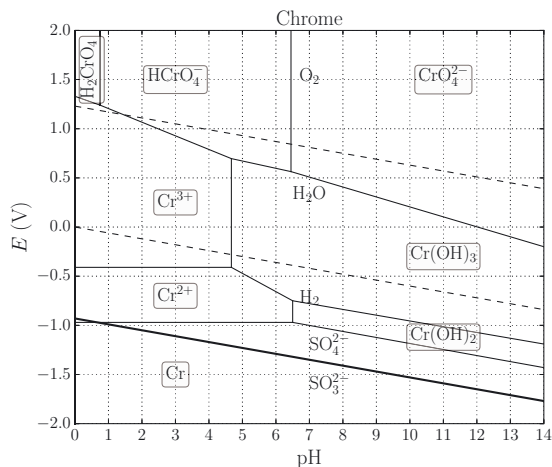
# Corrections

## Interro de cours

1. L'élément Zn présente des nombres d'oxydation valant 0 dans Zn et +II dans  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{Zn}(\text{OH})_2$ . On place donc le réducteur Zn dans le domaine inférieur (A), l'oxydant  $\text{Zn}^{2+}$  dans le domaine supérieur à bas pH (B) et l'oxydant  $\text{Zn}(\text{OH})_2$  dans le domaine supérieur à haut pH (C) (car son existence nécessite une concentration en ions  $\text{OH}^-$  élevée). Réponse (a).
2. La demi-équation du couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  est :  $\text{Zn}^{2+} + 2e^- = \text{Zn}$  donc  $E = E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ + \frac{0,059}{2} \log[\text{Zn}^{2+}]$ . À la frontière,  $[\text{Zn}^{2+}]_{\text{front}} = c_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'où  $E_{\text{front}} = E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ - 0,059$ . D'après le diagramme :  $E_{\text{front}} = -0,82 \text{ V}$  donc  $E_{\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}}^\circ = -0,76 \text{ V}$ . Réponse (b).
3.  $K_s = [\text{Zn}^{2+}][\text{OH}^-]^2 = [\text{Zn}^{2+}] \frac{K_e^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}$  et à la frontière,  $[\text{Zn}^{2+}]_{\text{front}} = c_{\text{tra}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .  
On en déduit :  $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{front}} = K_e \left( \frac{c_{\text{tra}}}{K_s} \right)^{1/2}$  soit  $\text{pH}_{\text{front}} = \text{p}K_e - \frac{1}{2}\text{p}K_s - \frac{1}{2} \log c_{\text{tra}} = \text{p}K_e - \frac{1}{2}\text{p}K_s + 1,0$ .  
D'après le diagramme :  $\text{pH}_{\text{front}} = 6,5$  donc  $\text{p}K_s = 17,0$ . Réponse (b).
4. Les domaines de Zn et  $\text{H}_2\text{O}$  sont disjoints quelque soit le pH. Réponse (a).
5. Le réducteur Zn du couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  ou  $\text{Zn}(\text{OH})_2/\text{Zn}$  réduit l'oxydant  $\text{H}_2\text{O}$  du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  (qui s'identifie au couple  $\text{H}^+/\text{H}_2$ ). Ainsi la réaction est  $\text{Zn} + 2\text{H}^+ = \text{Zn}^{2+} + \text{H}_2$  a lieu pour  $\text{pH} < 6,5$  et  $\text{Zn} + 2\text{H}_2\text{O} = \text{Zn}(\text{OH})_2 + \text{H}_2$  a lieu pour  $\text{pH} > 6,5$ . Par ailleurs, l'écart entre les potentiels des deux couples augmente quand le pH diminue. Réponse (a).
6. Pour accéder à la valeur du potentiel, il faut mesurer une tension entre deux électrodes (une électrode de travail et une électrode de référence). La mesure du pH est aussi basée sur une mesure de tension  $U = a\text{pH} + b$  entre deux électrodes (l'électrode de verre et une électrode de référence). L'électrode de référence pouvant être commune, la mesure de pH et  $E$  nécessite donc trois ou quatre électrodes. (Parfois, la sonde du pH-mètre combine les deux électrodes donnant l'illusion d'une unique électrode). Réponse (c).

## Exercice 31.1

1. La réaction de dissolution de l'hydroxyde de chrome(III) est :  $\text{Cr}(\text{OH})_3(\text{s}) = \text{Cr}^{3+} + 3\text{OH}^-$ . À l'équilibre et en présence de solide, on a  $[\text{Cr}^{3+}][\text{OH}^-]^3 = K_s$ . D'après le diagramme, le solide apparaît pour  $\text{pH} = 4,7$  lorsque  $[\text{Cr}^{3+}] = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Par ailleurs  $[\text{H}^+][\text{OH}^-] = K_e = 10^{-14,0}$ . On a donc  $K_s = 1,0 \cdot 10^{-2} \left( 10^{-14,0+\text{pH}} \right)^3 = 1,3 \cdot 10^{-30}$ , soit  $\text{p}K_s = 29,9$ .
2. La demi-équation d'oxydoréduction est :  $\text{SO}_3^{2-} + \text{H}_2\text{O} = \text{SO}_4^{2-} + 2e^- + 2\text{H}^+$ .  
Le potentiel est donc, d'après la formule de Nernst :  $E_{\text{SO}_4^{2-}/\text{SO}_3^{2-}} = -0,93 + \frac{0,059}{2} \log \frac{[\text{SO}_4^{2-}][\text{H}^+]^2}{[\text{SO}_3^{2-}]}$ . On place, sur le diagramme, le potentiel en fonction du pH lorsque  $[\text{SO}_4^{2-}] = [\text{SO}_3^{2-}] = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , soit :  $E = -0,93 - 0,059 \text{ pH}$ .



- À  $\text{pH} = 7$ , le potentiel du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  est au dessus de celui du couple  $\text{Cr}(+\text{VI})/\text{Cr}(+\text{III})$ , donc  $\text{O}_2$  oxyde le chrome au degré  $+\text{III}$ . Il se trouve donc principalement au degré  $+\text{VI}$ , sous forme de chromate  $\text{CrO}_4^{2-}$ , avec un peu de sa forme acide  $\text{HCrO}_4^-$ .
- L'ion sulfite  $\text{SO}_3^{2-}$  est un réducteur très fort pour le chrome au degré  $+\text{VI}$ , car son potentiel est bien en dessous de celui du couple  $\text{Cr}(+\text{VI})/\text{Cr}(+\text{III})$ . Pour obtenir la réaction, on écrit tout d'abord la demi-équation pour le chrome (en milieu acide) :



La réaction avec l'ion sulfite est donc :



La réaction nécessite des ions  $\text{H}^+$  ; il faut donc la réaliser en milieu acide.

- À  $\text{pH} = 7$ , le chrome au degré  $+\text{III}$  est sous forme d'hydroxyde de chrome  $\text{Cr}(\text{OH})_3$ . Il s'agit d'un solide, qui est éliminé par filtrage.

### Exercice 31.2

- On détermine tout d'abord les nombres d'oxydation de chaque élément manganèse dans les sept espèces, en attribuant le degré  $-\text{II}$  à l'oxygène et  $+\text{I}$  à l'hydrogène. On obtient  $\text{Mn}(0)$ ,  $\text{Mn}^{2+}(+\text{II})$ ,  $\text{Mn}(\text{OH})_2(+\text{II})$ ,  $\text{Mn}_3\text{O}_4(+\text{II}, +\text{III}, +\text{III})$ ,  $\text{Mn}_2\text{O}_3(+\text{III}, +\text{III})$ ,  $\text{MnO}_2(+\text{IV})$ ,  $\text{MnO}_4^-(+\text{VII})$ . Les espèces sont placées sur le diagramme par nombre d'oxydation croissant et par potentiel croissant. Pour le degré  $+\text{II}$ , la réaction  $\text{Mn}^{2+} + 2\text{OH}^- = \text{Mn}(\text{OH})_2$  montre que l'hydroxyde précipite à haut  $\text{pH}$ . On a finalement les domaines  $A : \text{Mn}^{2+}$ ,  $B : \text{Mn}^{2+}$ ,  $C : \text{Mn}(\text{OH})_2$ ,  $D : \text{Mn}_3\text{O}_4$ ,  $E : \text{Mn}_2\text{O}_3$ ,  $F : \text{MnO}_2$ ,  $G : \text{MnO}_4^-$ .
- La réaction de dissolution de l'hydroxyde de manganèse est  $\text{Mn}(\text{OH})_2 = \text{Mn}^{2+} + 2\text{OH}^-$ . On voit sur le diagramme que le précipité de  $\text{Mn}(\text{OH})_2$  apparaît pour  $\text{pH}_{\text{app}} = 8,6$ . Lorsque le précipité apparaît  $[\text{Mn}^{2+}] = c = 0,010 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et il y a équilibre donc  $[\text{OH}^-]^2[\text{Mn}^{2+}] = K_s$ . La condition d'équilibre de la réaction  $\text{H}^+ + \text{OH}^- = \text{H}_2\text{O}$  s'écrit  $[\text{OH}^-][\text{H}^+] = K_e$ . On obtient ainsi  $K_s = \frac{K_e^2[\text{Mn}^{2+}]}{[\text{H}^+]^2}$  et donc  $\text{p}K_s = 2\text{p}K_e - \log(c) - 2\text{pH}_{\text{app}} = 12,8$ .
- Il faut tout d'abord écrire la demi-équation redox pour le couple  $\text{MnO}_4^-(+\text{VII})/\text{MnO}_2(+\text{IV})$ , avec  $7 - 4 = 3$  électrons échangés :  $\text{MnO}_4^- + 3\text{e}^- + 4\text{H}^+ = \text{MnO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ . La formule de Nernst pour ce couple s'écrit :

$$E = E^\circ + \frac{0,059}{3} \log([\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^4) = E^\circ + \frac{0,059}{3} \log(c) - \frac{4 \times 0,059}{3} \text{pH}$$

La pente est donc  $-0,08 \text{ V}^{-1}$ .

- D'après le diagramme, le potentiel du couple  $\text{MnO}_4^-/\text{MnO}_2$  est supérieur à celui du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ , quel que soit le pH. L'ion permanganate  $\text{MnO}_4^-$  oxyde donc l'eau. La demi-équation redox pour l'eau est :  $2 \text{H}_2\text{O} = \text{O}_2 + 4 \text{H}^+ + 4 \text{e}^-$ . En multipliant cette équation par 3 et en la combinant avec celle du couple  $\text{MnO}_4^-/\text{MnO}_2$  multipliée par 4, on obtient :  $4 \text{MnO}_4^- + 4 \text{H}^+ \rightarrow 4 \text{MnO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} + 3 \text{O}_2$  que l'on peut aussi écrire  $4 \text{MnO}_4^- + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 4 \text{MnO}_2 + 4 \text{OH}^- + 3 \text{O}_2$ . Comme le montre le diagramme, la différence de potentiel est plus grande en milieu acide, ce qui signifie que la présence de  $\text{H}^+$  favorise la réaction.
- L'ion  $\text{MnO}_4^-$  est instable dans l'eau puisqu'il oxyde l'eau. Il s'agit néanmoins d'une tendance thermodynamique. En pratique, l'ion permanganate peut être utilisé en solution aqueuse car la vitesse de la réaction avec l'eau est extrêmement lente.
- D'après le diagramme, le potentiel du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  est supérieur à celui du couple  $\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}$  donc  $\text{H}_2\text{O}$  oxyde  $\text{Mn}$ . Les demi-équations redox sont  $\text{Mn} = \text{Mn}^{2+} + 2 \text{e}^-$  et  $2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- = \text{H}_2$ . L'équation de la réaction est donc  $\text{Mn} + 2 \text{H}^+ \rightarrow \text{Mn}^{2+} + \text{H}_2$ . Il se produit un dégagement d'hydrogène  $\text{H}_2$  et le métal se dissout dans l'eau, sous forme d'ions  $\text{Mn}^{2+}$ .

### Exercice 31.3

- D'après le diagramme potentiel-pH, le dioxygène dissous dans l'eau oxyde le fer(+II) en fer(+III). À  $\text{pH} = 8$ , il s'agit de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  oxydé en  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ . Écrivons tout d'abord les demi-équations redox :  $\text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{Fe}(\text{OH})_3 + \text{H}^+ + \text{e}^-$  et  $\text{O}_2 + 4 \text{e}^- + 4 \text{H}^+ = 2 \text{H}_2\text{O}$ . L'équation de la réaction d'oxydation est donc :  $4 \text{Fe}(\text{OH})_2 + \text{O}_2 + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 4 \text{Fe}(\text{OH})_3$ . Pour  $\text{pH} = 6$ , l'équation de la réaction serait  $4 \text{Fe}^{2+} + \text{O}_2 + 8 \text{OH}^- + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 4 \text{Fe}(\text{OH})_3$ . Cette réaction nécessite des ions  $\text{OH}^-$ , c'est pourquoi il est préférable de la réaliser en milieu basique.
- La filtration sert à éliminer le précipité d'hydroxyde de fer  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ .
- La concentration initiale en ions ferreux est  $[\text{Fe}^{2+}] = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Le potentiel du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  est largement supérieur à celui du couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2$ . La réaction est donc quantitative. Il faut oxyder  $2,8 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $\text{Fe}^{2+}$ , c'est-à-dire  $5,0 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ . Il faut pour cela 4 fois moins de  $\text{O}_2$ , soit une concentration massique de  $0,40 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $\text{O}_2$ .
- La solubilité de  $\text{O}_2$  est largement suffisante pour assurer cette concentration. Il faut néanmoins faire un brassage de l'eau par l'air pour apporter en continu l'oxygène nécessaire à la réaction.

### Exercice 31.4

- D'après le diagramme, pour une concentration de travail égale à  $c$ , le précipité de  $\text{Cu}_2\text{O}$  apparaît à  $\text{pH} = 1,0$ . La réaction de dissolution de l'oxyde de cuivre s'écrit :  $\text{Cu}_2\text{O} + \text{H}_2\text{O} = 2 \text{Cu}^{2+} + 2 \text{OH}^-$ . Le produit de solubilité est  $K_s = [\text{Cu}^{2+}]^2[\text{OH}^-]^2$ . Lorsque le précipité apparaît, il y a équilibre avec  $[\text{Cu}^{2+}] = c$  et  $[\text{OH}^-] = \frac{K_s}{[\text{H}^+]}$ . On a donc  $\text{p}K_s = -\log(K_s) = -2 \log(c) + 2 \text{p}K_e - 2 \text{pH} = 30,0$ .
- Pour le couple  $\text{Cu}^+/\text{Cu}$ , dont la demi-équation redox est  $\text{Cu}^+ + \text{e}^- = \text{Cu}$ , le potentiel à la frontière est  $E_{\text{Cu}^+/\text{Cu}} = 0,52 + 0,059 \log([\text{Cu}^+]) = 0,52 + 0,059 \log(c) = 0,40 \text{ V}$ .  
Pour le couple  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ , dont la demi-équation redox est  $\text{Cu}^{2+} + \text{e}^- = \text{Cu}^+$ , le potentiel à la frontière est  $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+} = 0,16 + \log\left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]}\right) = 0,16 \text{ V}$ .  
Ces deux résultats sont tout à fait en accord avec les diagrammes fournis.
- La demi-équation redox du couple  $\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}$  est :  $\text{Cu}_2\text{O} + 2 \text{e}^- + 2 \text{H}^+ = 2 \text{Cu} + \text{H}_2\text{O}$ . La pente de la droite se détermine en écrivant la formule de Nernst pour le potentiel de ce couple :

$$E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}} = E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}}^\circ + \frac{0,059}{2} \log([\text{H}^+]^2) = E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}}^\circ - 0,059 \text{ pH}$$

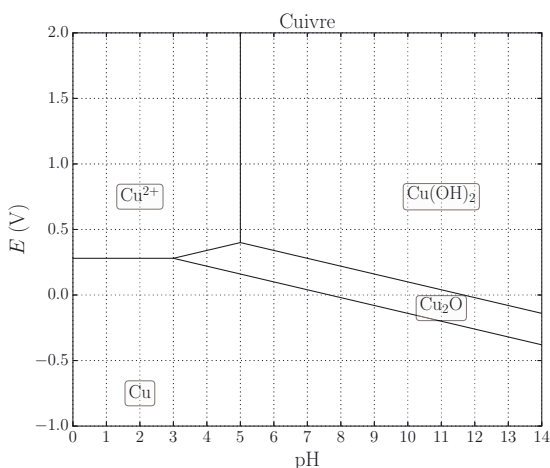
Connaissant la valeur du potentiel pour  $\text{pH} = 1,0$ , on a :  $E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}} = 0,40 = E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}}^\circ - 0,059 \times 1,0$ . On en déduit  $E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}}^\circ = 0,46 \text{ V}$  puis l'expression du potentiel à la frontière :  $E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}} = 0,46 - 0,059 \text{ pH}$ .

4. La demi-équation redox du couple  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}$  est :  $2\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- + \text{H}_2\text{O} = \text{Cu}_2\text{O} + 2\text{H}^+$ .  
La formule de Nernst s'écrit :

$$E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}} = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}}^\circ + \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]^2}{[\text{H}^+]^2} \right) = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}}^\circ + 0,059 \log(c) + 0,059 \text{pH}$$

Avec la valeur du potentiel pour  $\text{pH} = 1,0$ , on obtient l'équation :  $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}} = 0,10 + 0,059\text{pH}$ .

5. L'égalité  $E_{\text{Cu}_2\text{O}/\text{Cu}} = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_2\text{O}}$  se produit pour  $\text{pH} = \text{pH}_1 = 3,0$ .  
6. Pour  $\text{pH} < 3,0$ , le potentiel du couple  $\text{Cu}(+I)/\text{Cu}(0)$  est supérieur à celui du couple  $\text{Cu}(+II)/\text{Cu}(+I)$ . En conséquence,  $\text{Cu}(+I)$  du premier couple oxyde  $\text{Cu}(+I)$  du second couple (médiatisation). Le cuivre au degré d'oxydation +I est donc instable pour  $\text{pH} < 3,0$ . Pour ce domaine de  $\text{pH}$ , on doit considérer le couple  $\text{Cu}(+II)/\text{Cu}(0)$ . L'hydroxyde de cuivre(II) ne se forme que pour  $\text{pH} > 5,0$ . Le couple à considérer est donc  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}$ , dont la demi-équation redox est  $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Cu}$ . La formule de Nernst s'écrit :  $E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}} = E_{\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}}^\circ + \frac{0,059}{2} \log[\text{Cu}^{2+}] = 0,34 + \frac{0,059}{2} \log(c) = 0,28 \text{ V}$ .  
7. Le diagramme complet est obtenu en reportant ce potentiel pour  $\text{pH} < 3,0$  tout en conservant les diagrammes de  $\text{Cu}(+I)/\text{Cu}(0)$  et  $\text{Cu}(+II)/\text{Cu}(+I)$  pour  $\text{pH} > 3,0$ .



### Exercice 31.5

- NaOH est une base forte. La solution dans laquelle  $\text{Cl}_2$  est dissous est donc basique, ce qui fait que le dichlore se dismute selon l'équation :  $\text{Cl}_2 + 2\text{OH}^- \longrightarrow \text{ClO}^- + \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$ .
- En tenant compte des ions  $\text{Na}^+$ , l'équation bilan est :



La solution obtenue est bien équimolaire en  $(\text{ClO}^-, \text{Na}^+)$  et  $(\text{Cl}^-, \text{Na}^+)$ .

- Le volume dissous par litre de solution est  $V = 8,5 \text{ L} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . En utilisant l'équation d'état du gaz parfait, on obtient la quantité de  $\text{Cl}_2$  dissous par litre de solution :  $n = \frac{PV}{RT} = 0,35 \text{ mol}$ . D'après l'équation de la réaction, une mole de  $\text{Cl}_2$  conduit à une mole de  $\text{ClO}^-$ . En conséquence, la concentration vaut :  $[\text{ClO}^-] = 0,35 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- La demi-équation d'oxydation de l'ion iodure est  $2\text{I}^- = \text{I}_2 + 2\text{e}^-$ . La demi-équation de réduction de l'ion hypochlorite est  $\text{ClO}^- + 2\text{e}^- + 2\text{H}^+ = \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$ . On en déduit l'équation bilan de la réaction  $\text{ClO}^- + 2\text{H}^+ + 2\text{I}^- \longrightarrow \text{Cl}^- + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O}$ . Comme la réaction a lieu en milieu acide ( $\text{pH} \approx 4$ ), il est préférable d'écrire l'équation avec l'acide hypochloreux :  $\text{HClO} + \text{H}^+ + 2\text{I}^- \longrightarrow \text{Cl}^- + \text{I}_2 + \text{H}_2\text{O}$ . Le potentiel du couple  $\text{I}_2/\text{I}^-$ , de l'ordre de  $0,62 \text{ V}$ , est nettement inférieur à celui du couple  $\text{HClO}/\text{Cl}^-$ , d'environ  $1,3 \text{ V}$  à  $\text{pH} = 4$ . La constante d'équilibre est donc très

grande et des ions  $H^+$  sont apportés, ce qui fait que la réaction est quantitative.  $I^-$  est en excès donc la quantité de  $I_2$  produit est égale à la quantité initiale de  $ClO^-$ .

5. La demi-équation d'oxydation de l'ion thiosulfate est  $2S_2O_3^{2-} = S_4O_6^{2-} + 2e^-$ . Celle de réduction de  $I_2$  est  $I_2 + 2e^- = 2I^-$ . La réaction est donc  $2S_2O_3^{2-} + I_2 \rightarrow S_4O_6^{2-} + 2I^-$ . Le potentiel standard du couple  $S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}$  est nettement inférieur à celui du couple  $I_2/I^-$  donc la constante d'équilibre de cette réaction est très grande.
6. La quantité de diiode dosée est  $n(I_2) = \frac{cv_{eq}}{2}$ . La quantité de  $ClO^-$  dosée dans le volume  $v = 10$  mL est  $n(ClO^-) = n(I_2)$ . La concentration dans l'eau de Javel est donc  $[ClO^-] = \frac{cv_{eq}}{2v} = 0,185 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ . Cette concentration est inférieure à celle obtenue pour une eau de javel neuve ( $0,35 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ ). En effet, l'ion hypochlorite est instable dans l'eau. D'après le diagramme potentiel-pH,  $ClO^-$  et  $H_2O$  ont leur domaine de stabilité disjoints. Les demi-équations sont  $ClO^- + 2e^- + H_2O = Cl^- + 2OH^-$  et  $2OH^- = \frac{1}{2}O_2 + 2e^- + H_2O$ . L'équation bilan est  $2ClO^- \rightarrow O_2 + 2Cl^-$ . Cette réaction lente explique la diminution de la concentration en  $ClO^-$  après plusieurs mois de stockage.



# Index

## A

abondance isotopique, 613  
acide, 735  
  faible, 737  
  fort, 737  
activité chimique, 695  
acuité de résonance, 195  
amplitude complexe, 197, 198  
angle d'incidence, 64  
aplanétisme, 67  
approximation harmonique, 294, 329  
ARQS, 118

## B

bande passante, 220  
barrière de potentiel, 327  
base, 735  
  cylindrique, 262  
  faible, 737  
  forte, 737  
  polaire, 259  
  sphérique, 263  
bobine idéale, 121  
bras de levier, 372

## C

capacité thermique  
  à pression constante, 457, 458  
  à volume constant, 436, 458  
caractéristique courant-tension, 119, 129  
célérité, 28  
  de la lumière dans le vide, 98  
centre de masse, 286  
champ  
  électrique, 346  
  magnétique, 533  
  newtonien, 403  
  stationnaire, 346  
  uniforme, 346  
changement d'état, 431, 460  
charge  
  formelle, 644  
  partielle, 646

coefficient  
  d'auto-inductance, 121, 564  
  d'inductance mutuelle, 563  
condensateur, 121  
conditions de Gauss, 69  
constante  
  d'acidité, 736  
  d'Avogadro, 429, 612  
  de Planck, 98  
  de temps, 151  
  d'équilibre, 696  
  des aires, 399  
  des gaz parfaits, 429  
conventions récepteur et générateur, 119  
coordonnées  
  cartésiennes, 257  
  cylindriques, 262  
  sphériques, 263  
corps pur, 692  
corps simple, 614  
couple de forces, 373  
courants de Foucault, 588, 589  
courbe  
  de rosée, 432, 460  
  d'ébullition, 432, 460  
cristal  
  covalent, 676  
  ionique, 673  
  métallique, 669, 673  
  parfait, 668  
cycle de Carnot, 508

## D

demi-équation d'oxydo-réduction, 780, 782  
densité de probabilité, 103  
déphasage, 33, 219  
diagramme  
  d'Amagat, 434  
  de Bode, 220  
  de Clapeyron, 432, 452  
  de distribution, 741  
  de phase, 431

de prédominance, 740, 787  
d'existence, 788  
énergétique, 615  
enthalpique, 460, 480  
entropique, 480  
potentiel-pH, 805  
pression-température, 431  
différence de marche, 37  
diffraction, 43  
dioptre, 64  
dipôle, 117  
linéaire, 122  
distance focale, 69  
diviseur  
de courant, 128  
de tension, 126  
dualité onde-particule, 100

**E**  
échelle  
macroscopique, 428  
microscopique, 428  
écoulement stationnaire, 512  
effet photoélectrique, 97  
efficacité  
de Carnot, 510  
d'une machine ditherme, 510  
égalité de Clausius, 502  
électrode de référence, 785  
électronégativité, 630  
électrons de valence, 626  
élément chimique, 612  
énergie  
cinétique, 314, 382  
interne, 436  
mécanique, 321  
potentielle, 318, 321  
enthalpie, 456  
massique de changement d'état, 460  
entropie, 479, 481  
massique de changement d'état, 483  
équation  
d'état, 430  
du mouvement, 288  
horaire, 289  
équation différentielle  
de l'oscillateur harmonique, 10, 12, 13  
du deuxième ordre, 173  
du premier ordre, 150  
équilibre  
chimique, 696  
macroscopique, 430  
stable ou instable, 324, 325  
thermodynamique, 430  
état lié ou de diffusion, 326, 404

**F**  
facteur de qualité, 173, 194  
filtre, 219  
dérivateur, 227  
intégrateur, 227  
passe-bande, 229  
passe-bas, 221, 226  
passe-haut, 228  
flux d'un champ magnétique, 559  
fonction de transfert, 219  
fonction d'onde, 103, 614  
force  
centrale conservative, 397  
conservative, 318  
de frottement fluide, 172, 291  
de Laplace, 538  
de Lorentz, 352  
de rappel d'un ressort, 11  
de tension d'un fil, 294  
électrique, 320, 347  
électromotrice induite, 560, 565, 566  
magnétique, 349  
formule  
de conjugaison, 71  
de Lewis, 643  
de Nernst, 786  
foyer, 69  
fréquence  
de coupure, 220  
de résonance, 195  
propre, 42

**G**  
gain  
en décibel, 219  
linéaire, 219  
gaz parfait, 434  
grandeur  
extensive, 429  
intensive, 429  
grandissement, 71

**H**  
harmonique  
de rang n, 25, 218  
fondamental, 25, 218

**I**  
image  
réelle, 66, 71  
virtuelle, 66  
impédance complexe, 198  
indice de réfraction, 63  
inégalité de Clausius, 502  
intégrale première du mouvement, 323  
interactions de van der Waals, 650  
interférences, 33, 36

isotope, 612

## L

lentille mince

convergente, 69

divergente, 69

liaison

covalente, 642

hydrogène, 651

pivot, 374

limite relativiste, 352

liquide saturant, 433

loi

d'Arrhenius, 721

de Dalton, 694

de Faraday, 560

de la puissance cinétique, 315, 383

de la quantité de mouvement, 286

de Laplace, 482

de l'énergie cinétique, 317, 383

de l'énergie mécanique, 322

de Lenz, 560

de l'équilibre chimique, 696

de Snell-Descartes, 65

des actions réciproques, 287

des aires, 399

des mailles, 125

des nœuds, 127

du moment cinétique, 375, 377

longueur d'onde, 31, 62

## M

machine

ditherme, 501

réceptrice ditherme, 508

maille, 124

maille cristalline, 668

coordination, 669

population, 668

mélange de gaz parfaits, 693

mode propre, 42

modèle de Thévenin, 123

molécule polaire, 648

moment

cinétique par rapport à un axe, 368

cinétique par rapport à un point, 367

des forces de Laplace, 539

dipolaire électrostatique, 647

d'une force par rapport à un axe, 371

d'une force par rapport à un point, 370

magnétique, 538

moteur

synchrone, 544

thermique, 502

mouvement circulaire, 258, 259

## N

nombre de masse, 611

nombre d'oxydation, 781, 782

nombres quantiques, 615

nucléide, 612

nœud, 124

## O

objet

réel, 66

virtuel, 66

onde

de matière, 101

progressive, 27, 29

progressive harmonique, 30

stationnaire, 40

orbitale atomique, 617

oscillateur

amorti, 171

harmonique, 10, 294

oxydant, 780

## P

photon, 98

pile électrochimique, 783

plan

de phase, 149

d'incidence, 64

focal image, 69

focal objet, 69

point

critique, 431

triple, 431

portrait de phase, 149, 295, 327, 380

potentiel

d'oxydo-réduction, 785

hydrogène (pH), 739

standard, 786

poussée d'Archimède, 172, 288

premier principe, 455, 456

premier principe industriel, 513

pression de vapeur saturante, 432

pression partielle, 693

principe d'exclusion de Pauli, 621

principe d'inertie, 286

produit de solubilité, 763

produit ionique de l'eau, 737

produit vectoriel, 353

puissance

d'une force, 313, 382

électrique reçue, 118

puits de potentiel, 328

pulsation propre, 194

## Q

quantité de mouvement, 287

quotient de réaction, 695

**R**

réaction chimique  
acido-basique, 743  
avancement, 695  
constante de vitesse, 713  
de dissolution, 763  
de précipitation, 768  
d'oxydo-réduction, 780, 784, 788  
favorisée, 697  
loi d'Arrhenius, 721  
loi de vitesse, 712  
ordre, 713  
totale, 697  
vitesse, 712  
réducteur, 780  
référentiel, 255  
galiléen, 286  
réflexion totale, 66  
réfraction limite, 65  
régime  
apériodique, 174  
critique, 174  
forcé, 194  
permanent, 148  
pseudo-périodique, 174  
transitoire, 148, 174, 194  
règle  
de Hund, 622  
de Klechkowski, 622  
de la main droite, 353, 368, 372  
de l'octet, 642  
du duet, 642  
relation  
courant-tension, 123, 129  
de de Broglie, 101  
de Mayer, 457  
de Planck-Einstein, 98  
rendement  
de Carnot, 508  
d'un moteur ditherme, 507  
repère, 253  
représentation de Fresnel, 35, 36, 39, 196  
résonance, 195, 202

**S**

satellite géostationnaire, 410  
second principe, 479  
série de Fourier, 25, 218  
site interstitiel  
habitabilité, 675  
octaédrique, 673  
tétraédrique, 677  
solide  
amorphe, 668  
cristallin, 668  
solution diluée, 695  
solvant, 652

apolaire, 653  
aprotique, 653  
polaire, 653  
protique, 653  
source lumineuse, 61  
spectre d'un signal, 24  
spin de l'électron, 620  
stigmatisme, 67  
structure cristalline  
compacité, 671  
cubique à faces centrées, 670  
du chlorure de sodium, 674  
du diamant, 677  
système  
fermé, 428  
isolé, 428  
optique centré, 66  
ouvert, 428  
thermodynamique, 427

**T**

tableau périodique des éléments, 627  
théorème des moments, 433  
thermostat, 454  
trajectoire  
de phase, 149, 175, 295, 327  
d'un point, 255, 290  
transfert thermique, 453  
transformation  
chimique, 694  
infiniment lente, 452  
irréversible, 478  
isobare, 454  
isochore, 454  
isotherme, 454  
monobare, 454  
monotherme, 454  
réversible, 478  
thermodynamique, 451  
travail  
des forces de pression, 453  
d'une force, 313, 314, 383

**V**

valeur  
efficace, 218  
moyenne d'un signal, 25, 217  
vapeur saturante, 433  
variétés allotropiques, 669  
vecteur  
accélération, 257  
déplacement élémentaire, 263  
position, 257  
vitesse, 256