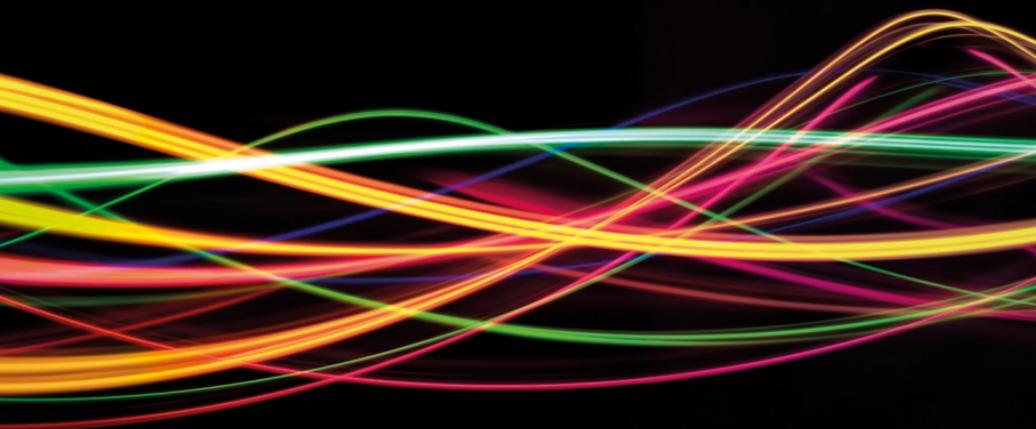


Christophe Basso



FONCTIONS DE TRANSFERT ET CIRCUITS LINÉAIRES

Introduction aux techniques
de calcul rapide

DUNOD

Christophe Basso

FONCTIONS DE TRANSFERT ET CIRCUITS LINÉAIRES

Introduction aux techniques
de calcul rapide

DUNOD

Illustration de couverture : budgetstockphoto / istockphoto.com

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique</p>	 <p>DANGER LE PHOTOCOPIAGE TUE LE LIVRE</p>	<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2017
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-076457-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Au sujet de l'auteur	V
Avant-propos	VII
Remerciements	XI
1 Analyse électrique – terminologie et théorèmes	1
1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle	1
1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés	14
1.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?	35
1.4 Annexe du chapitre 1	37
2 Fonctions de transfert	39
2.1 Systèmes linéaires	39
2.2 Constantes de temps	44
2.3 Formes polynomiales	51
2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre	90
2.5 Que dois-je retenir de ce chapitre ?	120
2.6 Annexe du chapitre 2	122
3 Superposition et le théorème de l'extra-élément	123
3.1 Le théorème de superposition	123
3.2 Le théorème de l'extra-élément	135
3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre	169
3.4 Que dois-je retenir de ce chapitre ?	199
3.5 Annexe du chapitre 3	204

4 Fonctions de transfert du deuxième ordre	205
4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois	205
4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre	251
4.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?	281
4.4 Annexe du chapitre 4	283
Conclusion	285
Index	287

Au sujet de l'auteur

Christophe Basso est « Technical Fellow » au sein de la société ON Semiconductor où il développe des circuits de contrôle pour alimentations à découpage. Il est à l'origine de nombreux circuits intégrés parmi lesquels la série des NCP120X qui a permis de réduire considérablement la puissance de veille des convertisseurs à découpage connectés au réseau électrique.

Après son livre *Switch-Mode Power Supplies: SPICE Simulations and Practical Designs*, paru en 2008, il a publié un nouveau titre en 2012 avec Artech House, *Designing Control Loops for Linear and Switching Power Supplies: a Tutorial Guide*. Il possède 17 brevets en conversion de puissance et publie fréquemment des articles dans des magazines comme How2Power.com et *Power Electronics and Technology* (PET) par exemple.

Christophe possède plus de 20 ans d'expérience dans le domaine de la conversion de puissance. Avant de rejoindre ON Semiconductor en 1999, Christophe était ingénieur applications chez Motorola à Toulouse. Avant 1997, il a travaillé à l'European Synchrotron Radiation Facility (ESRF) de Grenoble pendant près de 10 ans. Christophe possède un DUT délivré par l'université de Montpellier en 1985 et un master II obtenu avec l'Institut national polytechnique de Toulouse en 2007. Il est *Senior Member* de l'IEEE.

Quand il n'écrit pas, Christophe apprécie la pratique de la raquette dans les Pyrénées enneigées.

Avant-propos

L'analyse des réseaux linéaires électriques et électroniques utilise des méthodes éprouvées basées sur la mise en équations des mailles et nœuds caractéristiques des circuits étudiés. Associée à la transformée de Laplace, cette approche permet de prédire le comportement d'un circuit passif ou actif en régime harmonique : un *stimulus* sinusoïdal est appliqué sur une entrée qui, après cheminement dans les différents éléments constitutifs du circuit, produit une *réponse* observée sur la sortie. La relation mathématique liant la *réponse* au *stimulus* se nomme *fonction de transfert*. Il en existe six types différents comme nous le découvrirons plus tard.

De nombreux moyens permettent de déterminer cette fonction de transfert. Si tous conduisent au résultat exact, aucun n'offre un parcours simple vers une forme polynomiale factorisée. Or ce format reste indispensable si l'on souhaite identifier les éléments impliqués dans la production de zéros, de pôles ou de gains. En effet, ces termes sont associés à des composants dont la variabilité (tolérance, température, vieillissement par exemple) affecte la fonction de transfert et sa réponse en fréquence : dans un système bouclé, la stabilité peut pâtir d'une dispersion trop importante de l'un des éléments du compensateur, un filtre souffrira d'une perte de sélectivité si un condensateur ou une résistance dérivent en température ou encore, un oscillateur cessera toute activité car une résistance de moindre qualité dérèglera l'accord. On comprend dès lors la nécessité d'identifier les composants participant à la position des pôles et des zéros afin de prendre des mesures neutralisant leur variabilité.

Parmi les méthodes analytiques généralement enseignées à l'université, aucune ne représente la panacée en termes d'efficacité. Que l'on évoque un système d'équations à plusieurs inconnues, une approche purement matricielle par les variables d'état ou encore la réduction de complexité par les théorèmes de Thévenin et Norton, le nombre d'étapes et l'énergie nécessaires à l'obtention du résultat ne varient quasiment pas. Bien adaptées à une étude purement numérique, ces méthodes perdent en efficacité lorsqu'il s'agit d'établir un résultat symbolique, c'est-à-dire, sous une forme capable de révéler l'influence de chacun des composants du circuit sur les pôles, les zéros ou le gain. Pire, selon le parcours adopté, la

complexité des équations peut interdire la factorisation et engendre le blocage : c'est la paralysie algébrique.

La simulation par des logiciels spécialisés de type SPICE débouche, dans la plupart des cas, sur la représentation graphique de la fonction de transfert. Les diagrammes de Bode, Nyquist ou Black décrivent l'évolution du module et de la phase d'une fonction de transfert lors d'un balayage fréquentiel. Cependant, en dépit de sa rapidité de calcul, le simulateur ne révèle pas explicitement les éléments qui modifient le comportement du circuit considéré. Bien sûr, les études de sensibilité ou autre Monte Carlo peuvent pallier ce manque de compréhension du système et identifier des failles de conception ou des faiblesses dans des conditions particulières. Ce processus itératif engendrera des temps de simulation conséquents sans toutefois délivrer de réponse analytique sur l'origine du problème.

Les techniques de calculs rapides présentées dans ce livre ne remplacent pas les techniques traditionnelles mais en étendent la portée. Elles s'appuient sur l'élément qui régit le comportement dynamique de tout circuit électrique organisé autour d'un condensateur ou d'une bobine et d'une ou plusieurs résistances : *la constante de temps*. Cette constante de temps – unique pour un système du premier ordre – apparaît dans l'expression de la réponse temporelle d'un circuit linéaire. En étudiant l'organisation de la fonction de transfert autour de la constante de temps, il est possible d'établir une forme canonique caractéristique de tout système du premier ordre, étendue ensuite aux systèmes d'ordre n . L'identification des pièces constitutives de cette expression se fait pas à pas. Chaque élément est obtenu par la résolution d'un circuit élémentaire simple pour lequel il est souvent inutile de poser la moindre équation. On parle alors de résolution par *inspection*, simplement en observant l'agencement des composants dans l'architecture étudiée afin d'en déduire une caractéristique particulière. La méthode fonctionne pour des circuits passifs mais également actifs, incluant des transistors et amplificateurs opérationnels. En déterminant ses coefficients par le biais de schémas intermédiaires simples puis en les combinant naturellement sous une forme factorisée, la fonction de transfert apparaît suivant un format ordonné dit à *faible entropie*, ne nécessitant aucune énergie complémentaire pour révéler ses termes caractéristiques. Enfin, si une erreur apparaît lors de l'assemblage final, il est aisé de corriger le coefficient erroné en se concentrant uniquement sur l'étape qui a mené à sa détermination. Il n'est donc pas nécessaire de reprendre le calcul dans son intégralité comme c'est le cas avec les méthodes traditionnelles.

Basée sur des travaux d'Hendrik Bode datant des années 40, puis améliorée et formalisée au cours des années, cette méthode peine à trouver le succès qu'elle

mérite malgré l'éclairage apporté par les travaux du professeur David Middlebrook sous la forme de son théorème de l'extra-élément (*EET, Extra Element Theorem*) documenté en 1990. Je pense que le formalisme mathématique alors utilisé et associé à des exemples souvent complexes a pu intimider le lecteur désireux de maîtriser l'approche. Le présent ouvrage offre un regard résolument différent, basé sur l'expérience de l'auteur dans l'utilisation des techniques de calculs rapides (*Fast Analytical Circuits Techniques, FACTs*) sur des cas d'ingénierie concrets. En évoquant des circuits simples et appliquant des procédés connus tels que Thévenin ou Norton, le livre propose une approche didactique et simple dans l'apprentissage de cette méthode. Les quatre chapitres comportent de nombreux exemples documentés et se terminent tous par l'étude de cas pratiques résolus.

Ce livre s'adresse aux étudiants en électronique, électricité ou mesures physiques (IUT, BTS, masters I et II, écoles d'ingénieurs) à l'aise avec les méthodes traditionnelles et qui souhaitent découvrir un cheminement différent et original dans la résolution des problèmes posés. Il intéressera également les ingénieurs concevant des circuits électriques ou électroniques (puissance, communication, radiofréquences, filtrage) et désireux d'acquérir une méthode efficace immédiatement applicable aux projets en cours.

Je serai heureux de lire par email – cbasso@wanadoo.fr – vos commentaires et suggestions sur le contenu de cet ouvrage. Vous trouverez des documents complémentaires en anglais sur ma page personnelle et notamment un séminaire professionnel conduit en 2016 sur ces techniques de calculs rapides appliquées à la modélisation des convertisseurs à découpage : <http://cbasso.pagesperso-orange.fr/Spice.htm>. Bonne lecture à vous toutes et tous !

Christophe Basso
Septembre 2016

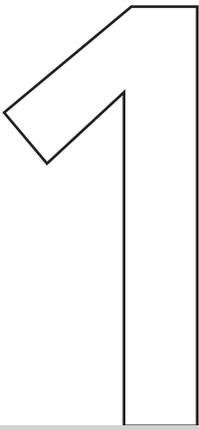
Remerciements

J'ai eu la chance de pouvoir discuter de mes travaux avec mes collègues et amis de ON Semiconductor qui ont joué un rôle crucial dans la relecture des pages et notamment des formules. Stéphanie Cannenterre a relu et pratiqué de nombreux exercices du livre. Elle maîtrise à présent la méthode. Dr. José Capilla m'a souvent opposé des résultats obtenus avec sa méthode Driving Point Impedance et je reconnais l'efficacité de son approche. Je remercie tout particulièrement mon ami Joël Turchi avec qui j'ai débattu de nombreuses heures sur la méthode et la façon de présenter les résultats. Merci Joël pour ta gentillesse et ton soutien indéfectible lors de la rédaction de ce livre.

Deux personnes m'ont également accompagné depuis le démarrage du projet. Mon ami canadien Alain Laprade de ON Semiconductor à East Greenwich qui a développé une relation passionnée avec les techniques de calculs rapides et a gentiment relu mon travail. Dennis Feucht d'Innovatia a également effectué un énorme travail de relecture et de correction. Je les remercie tous les deux chaleureusement.

Les personnes suivantes ont également participé à la relecture de ce livre, merci à elles : Frank Wiedmann (Rohde & Schwarz), Thierry Bordignon, Doug Osterhout (tous les deux sont avec ON Semiconductor), Tomas Gubek (FEI), Didier Balocco (Fairchild), Jochen Verbrugge, Bart Moeneclaey (les deux sont avec l'université de Ghent), Bruno Allard (INSA Lyon), Vatché Vorpérian (JPL) et Luc Lasne (université de Bordeaux).

Je tiens à remercier particulièrement Patrick Rousset de ON Semiconductor et Bruno Estibals maître de conférence à l'université Paul Sabatier pour le temps passé à relire la version française de ce livre.



Analyse électrique – terminologie et théorèmes

Ce premier chapitre peut être lu comme un rappel ou un rafraichissement sur les définitions et termes de base que vous devez connaître avant d'entreprendre l'analyse d'un réseau électrique linéaire. Pour exceller dans ce domaine, comme dans tout travail, vous devez maîtriser quelques outils. De toute évidence, ils sont innombrables et je suis sûr que vous avez appris pléthore de théorèmes au cours de votre vie d'étudiant. Certains semblent désormais lointains simplement parce que vous n'avez jamais eu la chance de les utiliser. Ou lorsqu'un cas pratique s'est présenté, la mise en œuvre était si complexe que vous avez laissé un assez grand nombre d'entre eux de côté. Cette situation arrive souvent dans la vie d'un ingénieur où l'expérience réelle se confronte à l'application des connaissances théoriques. Un tri naturel s'opère alors et vous ne retenez que les techniques qui fonctionnent. Parfois, quand vos connaissances ne vous mènent pas au résultat, l'occasion se présente d'apprendre une nouvelle technique, mieux adaptée à la résolution de votre problème actuel. Dans ce chapitre, je vais passer en revue quelques-uns des théorèmes importants que j'utilise beaucoup dans ce livre. Cependant, avant d'aborder les définitions et les exemples, voyons d'abord ce que le terme *fonction de transfert* désigne.

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

Supposons que vous êtes au laboratoire pour tester un circuit encapsulé dans une boîte avec deux connecteurs : l'un pour l'entrée et le second pour la sortie. Vous ne savez pas ce que la boîte contient, en dépit de la transparence du boîtier utilisé pour l'illustration de la Figure 1.1 ! Vous injectez un signal avec un générateur de fonctions via le connecteur d'entrée et observez la forme d'onde de sortie avec un oscilloscope. En utilisant la bonne terminologie, vous *commandez* l'entrée du circuit et

observez sa réponse à un *stimulus*. La forme d'onde d'entrée représente l'*excitation* notée u et elle génère une *réponse* notée y . En d'autres termes, la variable d'excitation se propage à travers le circuit, subit des changements de phase, d'amplitude, induit de la distorsion etc. puis l'oscilloscope reproduit la réponse sur l'écran.

La forme d'onde affichée par l'oscilloscope décrit un événement temporel dans lequel l'axe horizontal x est gradué en secondes tandis que l'axe vertical indique l'amplitude du signal (positive ou négative). Sa dimension dépend de la variable observée (volts, ampères, ohms etc.). Le signal d'entrée $u(t)$ est noté en minuscules car il s'agit d'un signal instantané fonction du temps t . Une notation similaire s'applique au signal de sortie, $y(t)$.

Dans la Figure 1.1, on observe que l'injection d'un signal carré à faible rapport cyclique produit une forme d'onde en sortie assez distordue.

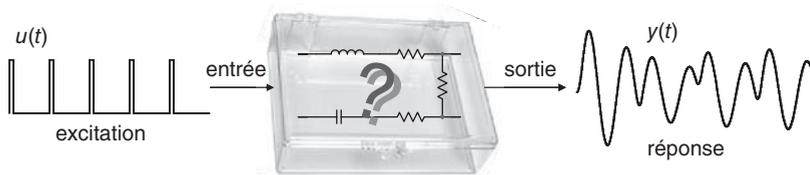


Figure 1.1 Une boîte renferme un circuit électrique et comprend deux connecteurs : une entrée et une sortie. Quelle relation relie la sortie à l'entrée ; la réponse à l'excitation ?

Cette forme d'onde oscillatoire nous indique que la boîte pourrait contenir un circuit résonant, formé de condensateurs et de bobines, mais pas beaucoup plus que cela. Si nous modifions l'excitation, quelle forme d'onde allons-nous obtenir ? Connaître les éléments constitutifs de la boîte nous permettra de prédire sa réponse à différents types de signaux d'excitation.

Plusieurs méthodes existent afin de caractériser un circuit électrique linéaire. L'une d'entre elles se nomme l'analyse harmonique. Le signal d'entrée est remplacé par une forme d'onde sinusoïdale et vous observez la propagation du stimulus à travers la boîte pour former la réponse en sortie. C'est que montre la Figure 1.2 :

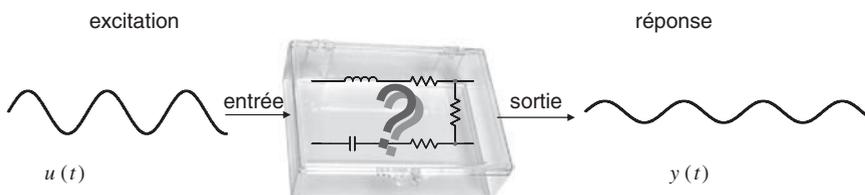


Figure 1.2 La boîte est maintenant excitée par un stimulus sinusoïdal dans le cadre d'une analyse en petit signal.

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

Le signal d'entrée doit présenter une amplitude raisonnable de telle sorte que l'onde en sortie ne soit pas distordue. La composante continue est choisie afin de respecter les contraintes électriques imposées par la boîte : il faut éviter toute saturation positive ou négative du signal de sortie lors de la modulation. Par exemple, en supposant que votre circuit soit alimenté par un rail 5 V, il sera intéressant de polariser la sortie vers 2.5 V continu afin de bénéficier de la dynamique maximale dans les deux sens. L'absence de distorsion en sortie confirme que le circuit fonctionne en mode *linéaire* et n'est pas saturé. On parle alors d'une étude en petit signal : le signal de modulation est de faible amplitude et maintient le circuit en régime linéaire. Dans le domaine de Laplace, le régime d'étude harmonique est obtenu lorsque $s = j\omega$ dans lequel $\omega = 2\pi f$ représente la fréquence angulaire exprimée en radians par seconde (rads/s). L'analyse de Laplace avec $s = j\omega$ ne s'applique qu'aux circuits linéaires¹.

Si vous augmentez l'amplitude du signal d'entrée ou déplacez le point de polarisation, une limitation en vitesse de balayage (*slew-rate*) ou un écrêtage peuvent apparaître. Dans ce cas, on explore la réponse *large signal* du circuit et l'on observe un comportement non-linéaire. Il s'agit d'un mode de caractérisation différent de celui apporté par l'analyse petit signal et offre d'autres caractéristiques. Restons en mode linéaire et une fois le bon niveau d'excitation trouvé, c'est-à-dire un signal d'amplitude suffisamment grande pour que la sortie soit observée confortablement à l'oscilloscope, la fréquence augmente point par point. Par exemple, on fait varier la fréquence par pas logarithmique de 10 Hz à 100 kHz avec 100 ou 1000 points par décade. Pour chaque fréquence, on enregistre le couple amplitude/phase dans un tableau de points. À chaque point de fréquence, on stocke le rapport entre l'amplitude de la réponse $Y(f)$ en volts et l'amplitude de l'excitation d'entrée, $U(f)$, également en volts dans cet exemple. En plus du rapport d'amplitude, on sauve l'information de phase liant la sortie à l'entrée. Comme U et Y sont des variables complexes affectées par un module et une phase, on peut écrire

$$A_v(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.1)$$

A_v représente la *fonction de transfert*. C'est une relation mathématique liant une réponse Y à un signal d'excitation U . Veuillez noter que la fonction d'excitation U réside au dénominateur de la fonction de transfert alors que la réponse Y se trouve au numérateur. Il en sera ainsi tout au long de cet ouvrage.

¹ Veuillez remarquer que nous utiliserons la notation anglaise s pour la variable de Laplace plutôt que p afin de rester compatible avec les fonctions de transfert exprimées dans les documents cités en référence.

La fonction de transfert est une variable complexe caractérisée par un module (*magnitude*) $|A_v(f)|$ et un argument $\angle A_v(f)$ également noté $\arg A_v(f)$. Les rapports $Y(f)/U(f)$ que nous avons sauvegardés correspondent au module de la fonction de transfert à une fréquence donnée f alors que la différence de phase entre Y et U caractérise la phase de la fonction de transfert à la fréquence considérée. La dimension du module calculé dépend des variables observées. Dans le cas évoqué, puisque les variables d'entrée et sortie sont exprimées en volts, leur rapport conduit à une expression sans dimension ou sans unité, parfois exprimée en $[V]/[V]$. De plus, le module de la fonction de transfert noté $|A_v|$ ne peut être que supérieur ou égal à zéro, comme une distance en mètre par exemple. C'est la différence avec l'amplitude qui peut être nulle ou prendre toute valeur négative ou positive. Si le module est égal à 0, il n'y a pas de signal de sortie. Si $|A_v|$ est plus petit que 1, on parle d'*atténuation*. Si $|A_v|$ est supérieur à 1, on parle d'*amplification* ou de *gain*. Si le module ne peut être que nul ou positif, quid d'un gain égal à -2 alors ? Il indique une amplification de 2, avec une avance ou retard de phase de 180° .

- ▶ On dit qu'un signal est atténué de 3 dB et non pas atténué de -3 dB.
- ▶ Un signal est affecté par un retard de phase de 45° et non pas retardé de -45° .
- ▶ En anglais, une avance de phase se dit *phase lead* alors qu'un retard s'exprime par le terme *phase lag*.
- ▶ En anglais, le module est désigné par le terme *magnitude*. *Modulus* existe également mais reste peu usité.

1.1.1 Ports d'entrée et sortie

Il est pratique de représenter notre boîte comme un circuit à deux *ports*. Un port est une paire de connexions qui peuvent servir de points d'entrée pour un courant ou une tension. La Figure 1.3 illustre ce principe. On observe deux ports de connexion, l'un pour l'entrée (on applique le stimulus) et l'autre pour la sortie (on observe la réponse).

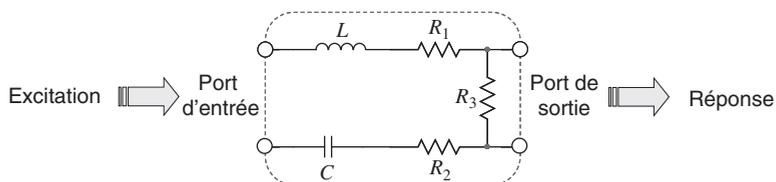


Figure 1.3 Le port d'entrée reçoit le signal d'excitation alors que le port de sortie véhicule la réponse.

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

Dans certains cas, un port peut jouer le rôle d'entrée et sortie en même temps. Imaginez que vous souhaitez mesurer l'impédance de sortie de la boîte présentée en Figure 1.3. De façon classique, vous allez mettre en œuvre le câblage de la Figure 1.4 dans lequel une source de courant excite le port de sortie alors qu'aux bornes des mêmes connexions vous observerez la tension produite. C'est ce que l'on appelle une injection unique (*single injection*) : un stimulus et une réponse. Dans cette mesure d'impédance, le port d'entrée de la boîte est court-circuité (voir l'annexe 1.4.1). L'excitation est le courant $I_{out}(s)$ injecté dans le port alors que la réponse $V_{out}(s)$ est observée aux bornes du port d'injection. L'impédance de sortie Z est obtenue en calculant le rapport de la tension présente aux bornes du port de sortie avec le courant injecté dans ce même port. Cette impédance est une fonction de transfert exprimée en ohms :

$$Z_{out}(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{out}(s)} \quad (1.2)$$

I_{out} , le signal d'excitation, se trouve au dénominateur alors que la réponse, V_{out} , apparaît au numérateur. Nous reviendrons sur ce point important plus tard.

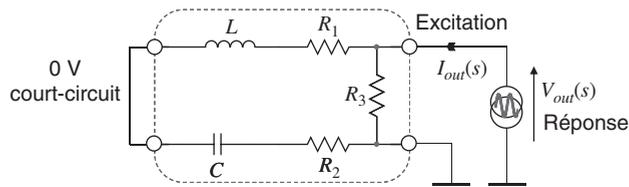


Figure 1.4 Un port peut être simultanément utilisé en sortie et en entrée. Ici, une mesure d'impédance de sortie.

Si les connecteurs d'entrée et sortie sont des ports physiques qui permettent l'injection de l'excitation et l'observation de la réponse, rien ne vous empêche de créer d'autres ports d'observation ou d'injection. Retirez temporairement une résistance, un condensateur ou une bobine et ses points de connexion deviennent un nouveau port. Ce port nouvellement créé peut servir à l'injection d'un signal ou à l'observation d'une réponse. Il peut également jouer les deux rôles comme précédemment indiqué. Dans ce cas, la boîte qui contenait originellement une entrée et une sortie, devient un système à deux entrées et deux sorties comme dessiné en Figure 1.5. Dans cet exemple, la bobine est retirée et l'on branche une source de courant à ses connexions. En utilisant la terminologie adéquate, on analyse le système en pratiquant une injection double (*double injection*) : deux stimuli – entrées 1 et 2 – délivrant deux réponses, sorties 1 et 2.

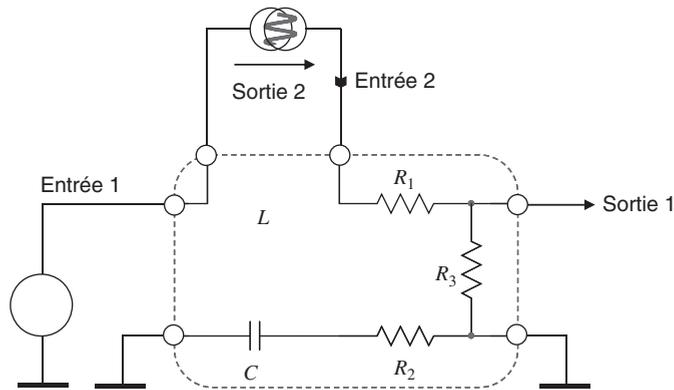


Figure 1.5 Si vous retirez un élément de ce circuit, ses points de connexion deviennent un port. Vous pouvez alors polariser ce port et le considérer comme une entrée, une sortie ou les deux à la fois.

Dans cet exemple, la réponse correspond à la tension mesurée aux bornes des connexions de la bobine alors que le courant injecté représente le signal d'excitation. En divisant la tension aux bornes du port par le courant injecté, on obtient la résistance offerte par le port lorsque l'élément initialement connecté a été retiré. En d'autres termes, on « regarde » la résistance offerte par le port comme indiquée en Figure 1.6 dans laquelle le symbole $R?$ et la flèche désignent cet exercice. Exprimée d'une façon différente, nous déterminons la résistance équivalente de sortie présentée par le port qui « attaque » ou « pilote » l'élément retiré, ici la bobine. En anglais on parle de résistance en un point donné, *driving point resistance*, ou d'impédance en un point donné, *driving point impedance* abrégé DPI. En combinant une résistance R avec une inductance L , on obtient une constante de temps τ (tau) associée avec l'élément inductif considéré :

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (1.3)$$

Pour réaliser cet exercice et déterminer la valeur de R , vous pouvez directement observer le schéma électrique et déduire la valeur recherchée sans résoudre une seule équation. Cet exercice est appelé *inspection* : vous observez le réseau linéaire dans certaines conditions (par exemple en statique ou lorsque la source V_{in} est réduite à 0 V dans cet exemple) et vous trouvez la résistance en observant la manière dont les éléments sont connectés ensemble. En Figure 1.6, quelle est la résistance « vue » par les points de connexion du port de la bobine L lorsque celle-ci est retirée temporairement ainsi que le condensateur C ? R_1 apparaît en premier et R_3 en série va à la masse puis retourne à la connexion gauche de la

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

bobine au travers de la source d'entrée court-circuitée (0 V). R_2 est ouverte et ne joue aucun rôle :

$$R = R_1 + R_3 \quad (1.4)$$

Si l'on applique (1.3) avec (1.4), on obtient la définition d'une constante de temps impliquant L :

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_3} \quad (1.5)$$

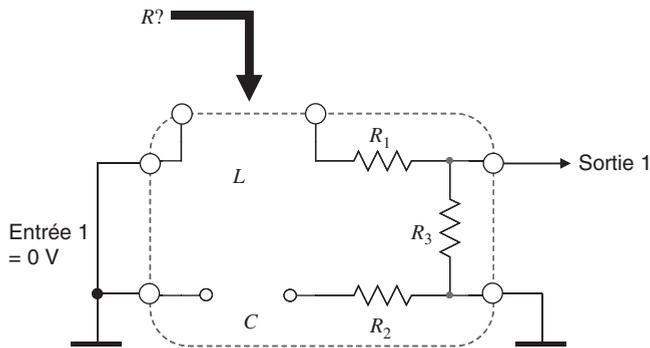


Figure 1.6 En retirant la bobine de ses points de connexion, vous pouvez déterminer la résistance équivalente qui l'attaque. Associer cette résistance à l'inductance révèle alors la constante de temps impliquant L . Dans le cas présent, la résistance vue du port est $R_1 + R_3$.

Un exercice similaire peut être conduit avec le condensateur C dans le but de révéler la résistance équivalente qui le pilote. Dans ce cas, la constante de temps associée au condensateur est simplement

$$\tau = RC \quad (1.6)$$

En supposant une bobine court-circuitée dans cet exemple particulier, quelle résistance « voyez-vous » en Figure 1.7 lorsque vous regardez dans le port du condensateur une fois celui-ci retiré du circuit ? La connexion de gauche est reliée directement à la masse alors que celle de droite retourne à la masse par l'intermédiaire de R_2 . R_1 et R_3 ne jouent aucun rôle puisque leur combinaison en série relie deux points de masse. Ainsi

$$R = R_2 \quad (1.7)$$

La constante de temps impliquant ce condensateur est définie par

$$\tau_2 = R_2 C \quad (1.8)$$

Le circuit contient deux éléments de stockage d'énergie, C et L . On dénombre alors deux constantes de temps. Pour chaque élément de stockage, il existe une constante de temps associée.

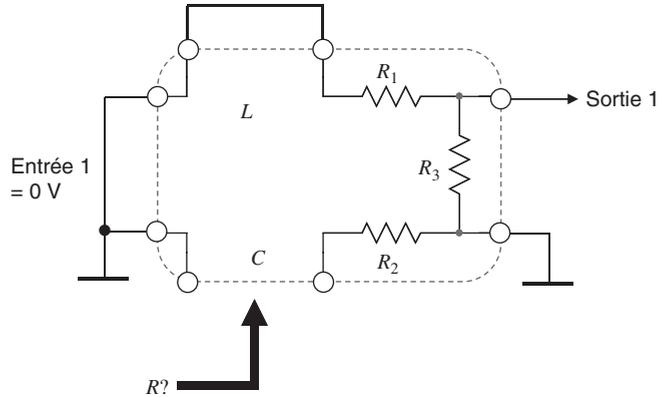


Figure 1.7 En retirant temporairement le condensateur, on peut effectuer un exercice similaire à celui conduit en Figure 1.6. Dans ce cas, la résistance vue des connexions du condensateur est R_2 .

Plutôt que de s'occuper de ports inductifs ou capacitifs, on pourrait très bien considérer un port purement résistif et s'intéresser à la résistance équivalente qui attaque une résistance donnée. L'exercice reste le même. Très souvent, déterminer par inspection la résistance équivalente offerte par un port est impossible, notamment si des éléments actifs sont impliqués comme des sources contrôlées. Dans ce cas, il est nécessaire d'ajouter un générateur de test comme montré en Figure 1.5 aux bornes duquel on définit une tension. La résistance offerte par le port est alors la tension mesurée aux bornes du port divisée par le courant de test. Ce générateur de test est habituellement étiqueté I_T et la tension à ses bornes désignée par V_T .

Ce que nous venons de décrire constitue une partie des fondations sur laquelle s'appuient les techniques de calculs rapides : déterminer les résistances offertes par les ports de connexions des résistances, condensateurs et bobines composant le circuit étudié et temporairement déconnectés pour permettre cette opération. Scinder un circuit compliqué en une succession de configurations simples dans lesquelles nous calculerons les constantes de temps va nous aider à caractériser un réseau comprenant des pôles et des zéros. Le théorème de l'extra élément (*Extra-Element Theorem* ou EET) plus tard étendu à des réseaux d'ordre n (n EET) fait un usage intensif de cette méthode. À cet effet, il est important de comprendre et maîtriser ces premiers pas dans la détermination des constantes de temps. L'annexe 1.4.1 rafraichira votre mémoire sur les méthodes disponibles

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

afin de calculer des résistances de sortie. L'annexe 1.4.2 propose ensuite quelques exemples qui vont permettre de tester votre capacité à trouver rapidement ces résistances dans des circuits simples.

1.1.2 Différents types de fonctions de transfert

En fonction du point d'injection de l'excitation puis du nœud auquel la réponse est observée, on peut définir 6 types de fonctions de transfert comme détaillé dans [1]. Pour des questions de simplicité, les ports d'entrée-sortie sont référencés à la masse mais pourraient également être de type différentiel. La première fonction de transfert est le gain en tension A_v , déjà rencontré dans les lignes précédentes. Il apparaît en Figure 1.8 avec un amplificateur opérationnel (*operational amplifier* ou *op amp*) monté en configuration inverseuse. Veuillez noter que l'amplificateur est parfait (gain et impédance d'entrée infinis, impédance de sortie nulle). On balaye l'entrée avec une tension sinusoïdale, le stimulus, et l'on observe la réponse en sortie de l'amplificateur. En notation Laplace, vous calculez A_v par

$$A_v(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} \quad (1.9)$$

Le gain A_v est sans dimension, parfois exprimé en [V]/[V].

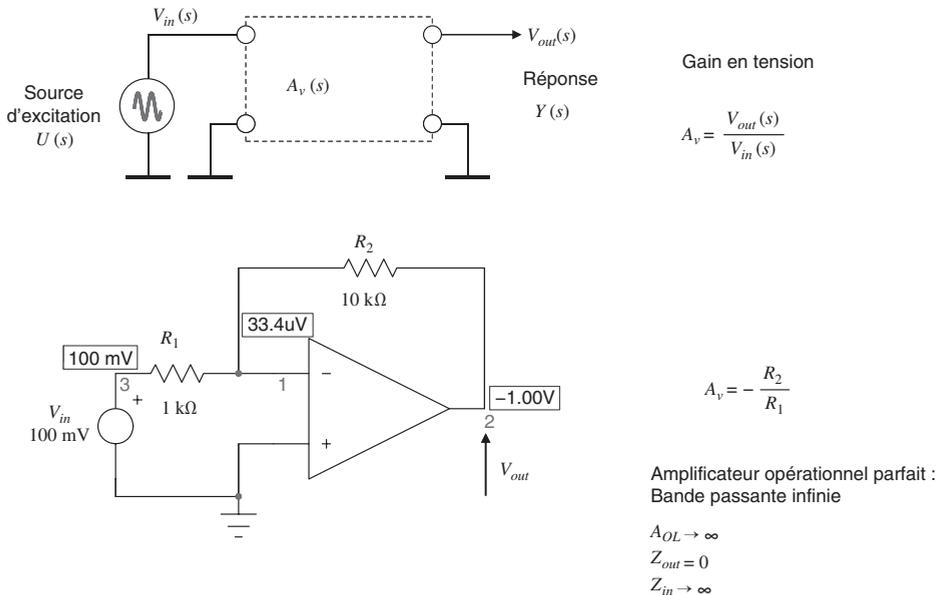


Figure 1.8 Le gain en tension A_v est notre première fonction de transfert et relie les tensions d'entrée-sortie.

La seconde fonction de transfert est illustrée par le gain en courant, A_i , cette fois impliquant les courants d'entrée-sortie comme indiqué en Figure 1.9. Le signal d'excitation est maintenant le courant d'entrée I_{in} alors que la variable de sortie est le courant I_{out} :

$$A_i(s) = \frac{I_{out}(s)}{I_{in}(s)} \quad (1.10)$$

Le gain A_i est sans dimension, parfois exprimé en [A]/[A].

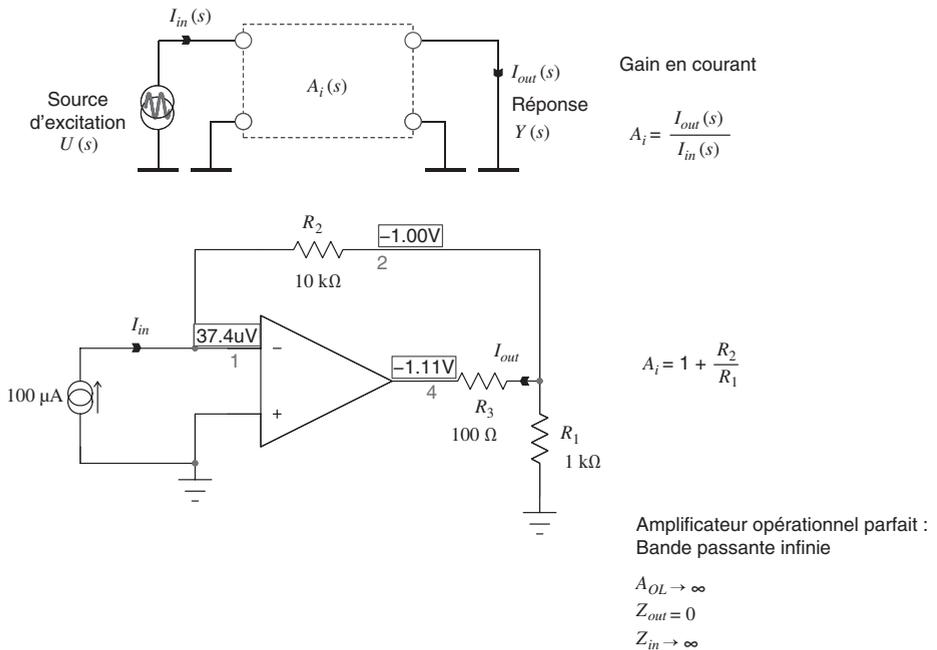


Figure 1.9 Le gain en courant A_i est notre seconde fonction de transfert et lie les courants d'entrée-sortie.

La troisième fonction de transfert est appelée *transadmittance* – un raccourci anglais pour *transfer admittance* – et notée Y_t . Vous observez le courant de sortie pendant que l'entrée reçoit un stimulus en tension. La configuration de mesure apparaît en Figure 1.10. La définition de la transadmittance est la suivante :

$$Y_t(s) = \frac{I_{out}(s)}{V_{in}(s)} \quad (1.11)$$

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

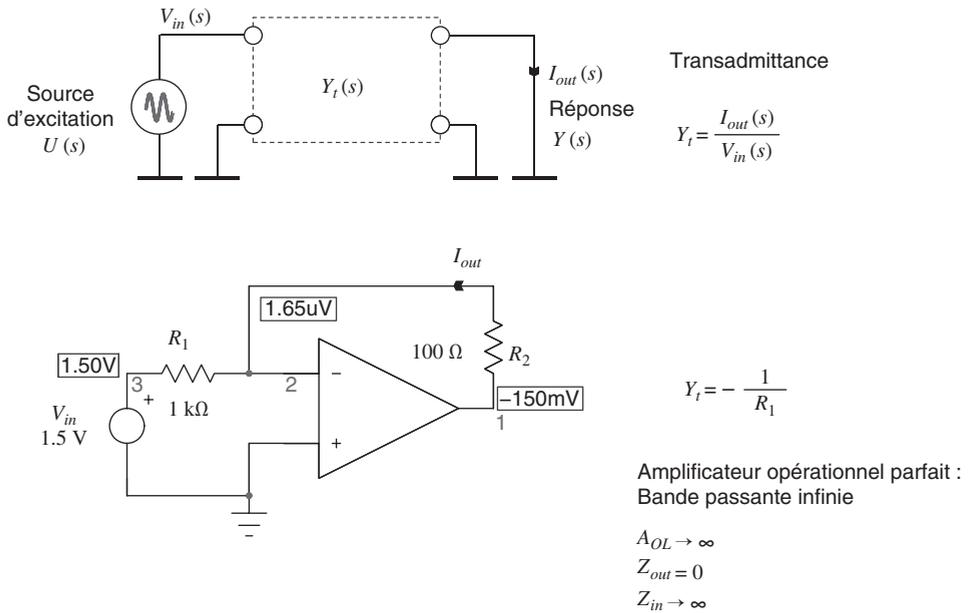


Figure 1.10 La transadmittance Y_t lie le courant de sortie à la tension d'entrée. Ici, le courant dans R_2 est imposé par V_{in} et atteint 1.5 mA. La transadmittance vaut alors $-0.001 A/V$ or $-1 mS$.

Si les deux précédents gains étaient sans dimension, la transadmittance est exprimée en ampère par volt, $[A]/[V]$ ou en siemens $[S]$. De façon équivalente, nous pouvons définir la quatrième fonction de transfert dans laquelle, cette fois, l'entrée subit une excitation en courant et l'on observe la réponse en tension sur la sortie du circuit (Figure 1.11). Le ratio de ces deux variables est symbolisé par la *transimpédance* – un autre raccourci anglais pour *transfer impedance* – notée Z_t et exprimée en volt par ampère, $[V]/[A]$ ou ohm $[\Omega]$:

$$Z_t(s) = \frac{V_{out}(s)}{I_{in}(s)} \quad (1.12)$$

Les montages à transimpédance sont souvent utilisés dans le cas d'amplificateurs pour photodiode par exemple. Vous trouverez dans [2] un exemple pour ce type d'application.

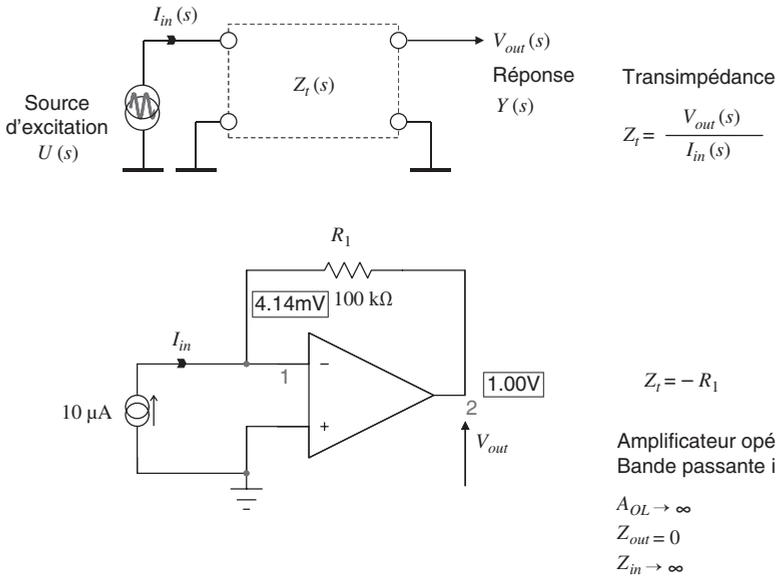


Figure 1.11 La transimpédance Z_t associe la tension de sortie au courant d’entrée. Dans cet exemple à base d’op amp, la résistance R_1 produit une transimpédance de -100 kV/A.

Dans les quatre exemples précédents, les quantités en jeu – excitation et réponse – apparaissent à des endroits différents du circuit. Nous avons considéré les connecteurs d’entrée-sortie du montage mais les définitions peuvent s’appliquer à n’importe quels ports du circuit. Pour les deux fonctions de transfert restantes, l’impédance Z et l’admittance Y , les signaux d’excitation et réponse sont observés au même endroit, aux bornes de connexions communes comme déjà illustré par la Figure 1.4. Il est ainsi important de définir la façon dont le signal d’excitation est appliqué et quel signal résultant produit la réponse. Vous pouvez objecter que l’inversion de l’excitation et de la réponse ne pose pas de problème car l’admittance est la réciproque de l’impédance. Cependant, si nous souhaitons respecter notre définition de la fonction de transfert – excitation au dénominateur et réponse au numérateur – alors pour déterminer une fonction impédance $Z(s)$, l’excitation est une source de courant alors que la réponse est la tension aux bornes de cette source. Dans le cas d’une admittance, l’excitation devient une source de tension et la réponse, le courant produit par cette source. La cinquième fonction de transfert est l’impédance d’un port $Z(s)$ dont la définition généralisée est

$$Z_{dp}(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} \tag{1.13}$$

1.1 Fonctions de transfert, une approche informelle

L'indice *dp* désigne une *driving point impedance* (DPI) et implique une excitation et une réponse observées sur un port commun. Si vous considérez V_{in} et I_{in} ou V_{out} et I_{out} , vous mesurez respectivement les impédances d'entrée et sortie du réseau en injectant un courant de test dans le port et en mesurant la tension résultante à ses bornes. La Figure 1.12 illustre comment la source est connectée pour cette mesure spécifique. La dimension d'une impédance est l'ohm, $[\Omega]$.

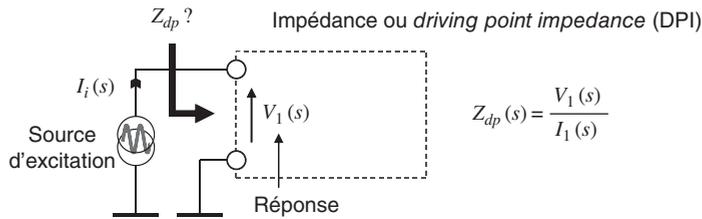


Figure 1.12 Une impédance s'exprime en ohms. La variable d'excitation est le courant injecté dans le port.

Enfin, la sixième fonction de transfert est l'*admittance*, l'inverse de l'impédance. On évalue une admittance en appliquant une tension d'excitation aux bornes du port considéré avec une source de tension et elle produit un courant, la réponse (Figure 1.13). La fonction de transfert généralisée d'une admittance est la suivante :

$$Y_{dp}(s) = \frac{I_1(s)}{V_1(s)} \quad (1.14)$$

Si vous considérez I_{in} et V_{in} ou I_{out} et V_{out} , vous mesurez respectivement les admittances d'entrée et de sortie du réseau analysé.

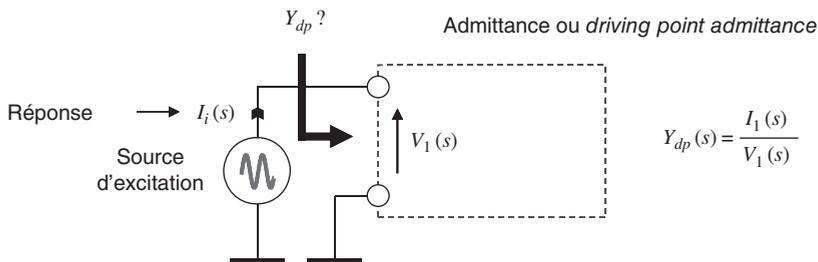


Figure 1.13 Une admittance s'exprime en siemens. Le signal d'excitation est une tension.

L'unité de l'admittance est le siemens, abrégé [S]. Les anciennes notations comme *mhos*, ou Ω^{-1} ne sont plus en vigueur dans le système international d'unités (SI).

Comme expliqué, lorsque l'on détermine l'impédance d'un port, on applique une source de courant comme signal d'excitation. Parfois, il est plus pratique d'appliquer une tension aux bornes du circuit étudié plutôt que d'injecter un courant. Dans ce cas, on prendra simplement l'inverse du résultat trouvé. La Figure 1.14 résume les six fonctions de transfert que nous venons de décrire.

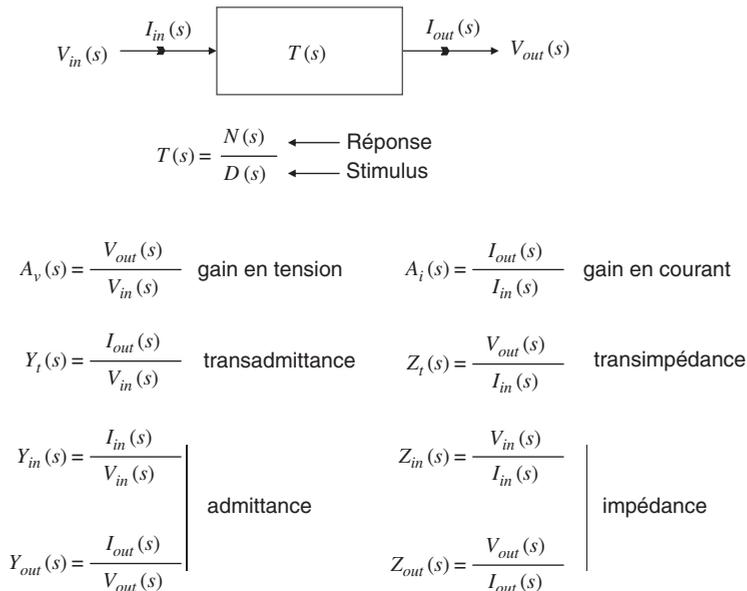


Figure 1.14 Il existe six fonctions de transfert. Quatre d'entre elles possèdent un stimulus et une réponse observés à des endroits différents – des ports différents – alors que deux d'entre elles, Z_{dp} et Y_{dp} , relient un stimulus et une réponse observés aux bornes d'un port commun.

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

Parmi la myriade de théorèmes et outils d'analyse que j'ai appris durant mes années d'université, il en est certains que je n'ai pas oubliés. En effet, je les utilise de façon quasi quotidienne dans mon travail d'ingénieur concepteur. Les diviseurs de tension et courant occupent la première place dans la liste. Ils représentent une aide précieuse lorsqu'il s'agit de simplifier des circuits et un bref rappel est

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

donné ci-après. Le théorème de Charles Léon Thévenin (1883) et son dual, le théorème d'Edward Lawry Norton (1926), sont deux outils que vous devez absolument comprendre et maîtriser pour la suite de cet ouvrage. Enfin, on ne peut pas se passer du théorème de superposition dont l'extension nous conduira au théorème de l'extra-élément (EET) et plus tard au n EET. Superposition et le théorème de l'extra-élément font l'objet d'une description complète dans le chapitre 3.

Découvrons à présent quelques exemples nous montrant comment Thévenin et Norton peuvent simplifier l'étude de réseaux électriques.

1.2.1 Le diviseur de tension

Il s'agit à mon sens de l'outil le plus utile parmi ceux que j'emploie fréquemment dans l'analyse des circuits électriques. Il fonctionne avec tous les éléments passifs, tant sous polarisation continue qu'alternative. La Figure 1.15 illustre son utilisation dans une configuration simple.

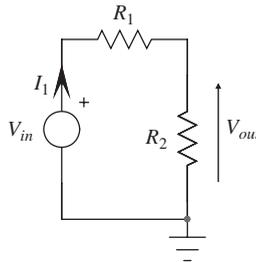


Figure 1.15 Le diviseur résistif est un bon outil pour simplifier les circuits.

Le courant qui circule I_1 est la tension d'entrée V_{in} divisée par le chemin résistif total, $R_1 + R_2$:

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2} \quad (1.15)$$

La tension aux bornes de R_2 est la résistance multipliée par le courant I_1 :

$$V_{out} = I_1 R_2 \quad (1.16)$$

Si l'on substitue (1.15) dans (1.16), on obtient

$$V_{out} = V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.17)$$

Si l'on divise à présent les deux côtés de l'équation par V_{in} , on trouve la fonction de transfert liant V_{out} à V_{in} :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.18)$$

Lorsque vous observez des réseaux tels ceux dessinés en Figure 1.16, vous pouvez immédiatement appliquer (1.18) sans écrire une ligne d'algèbre. Dans cet exemple, on considère des impédances plutôt que des résistances :

$$A_v(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \quad (1.19)$$

Veuillez noter que (1.18) et (1.19) s'appliquent pour une configuration dans laquelle R_2 ou Z_2 ne sont pas chargées. À supposer qu'un autre circuit est connecté aux bornes de R_2 ou Z_2 respectivement dans les figures Figure 1.15 et Figure 1.16, les équations (1.18) and (1.19) ne sont plus valides.

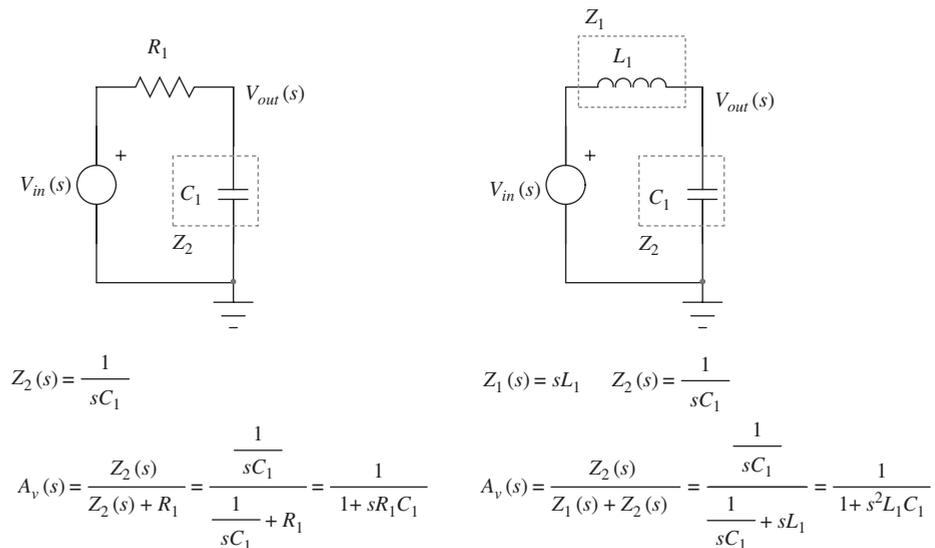


Figure 1.16 L'équation du diviseur de tension fonctionne avec des éléments passifs tels que des condensateurs et des bobines.

1.2.2 Le diviseur de courant

Voici un autre exemple d'un outil utile et souvent sollicité dans l'analyse de circuits électriques. Considérez la Figure 1.17a dans laquelle vous devez déterminer le courant qui traverse R_3 .

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

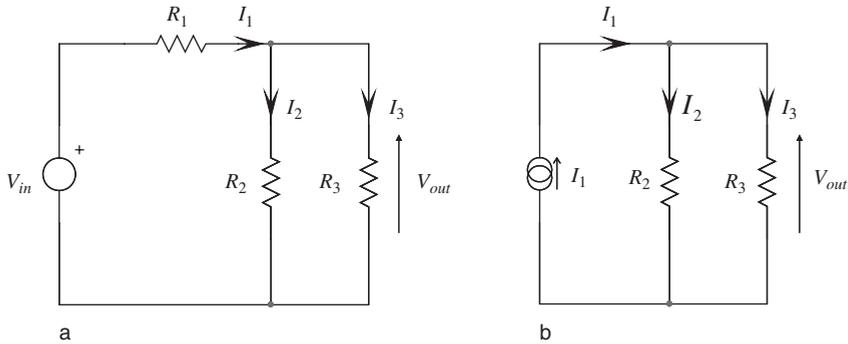


Figure 1.17 Le diviseur de courant est un outil simple et efficace.

Le courant total I_1 est la tension V_{in} divisée par le chemin résistif branché à la source :

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + R_2 \parallel R_3} \quad (1.20)$$

Dans cette expression, le symbole “ \parallel ” représente symboliquement la mise en parallèle de R_2 et R_3 :

$$R_2 \parallel R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (1.21)$$

Mathématiquement, l'opérateur parallèle est prioritaire sur l'addition : $R_2 \parallel R_3$ est calculé en premier puis le résultat additionné à R_1 .

Le schéma originel peut être simplifié comme celui présenté en Figure 1.17b. La loi des nœuds (*Kirchhoff's current law*, ou *KCL*) nous indique que la somme des courants arrivant à un nœud égale la somme des courants qui en repartent. Ainsi

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1.22)$$

Les courants I_2 et I_3 sont définis par la tension présente à leurs bornes, V_{out}

$$I_3 = \frac{V_{out}}{R_3} \quad (1.23)$$

$$I_2 = \frac{V_{out}}{R_2} \quad (1.24)$$

En extrayant V_{out} de (1.23) et (1.24) puis en égalant les deux résultats, nous obtenons une nouvelle relation liant I_3 et I_2

$$R_3 I_3 = R_2 I_2 \quad (1.25)$$

Définissant I_2 à partir de (1.22) puis en le remplaçant dans (1.25), nous avons

$$R_3 I_3 = R_2 (I_1 - I_3) \quad (1.26)$$

Si l'on arrange l'expression en factorisant I_1 , nous obtenons la relation liant I_3 à I_1

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad (1.27)$$

Cette expression représente le diviseur de courant qui définit immédiatement le courant dans R_2 ou R_3 lorsque I_1 se partage entre ces deux éléments. Figure 1.18 offre une autre représentation. Le courant qui traverse R_2 est égal au courant principal I_1 multiplié par la résistance « face » à R_2 (donc R_3) et divisée par la somme des résistances, $R_2 + R_3$. La partie droite de la Figure 1.18 généralise le concept dans lequel plusieurs résistances sont connectées en parallèle avec R_3 . Si $R_{eq} = R_3 \parallel R_4 \parallel R_5$ alors le courant dans R_2 est simplement

$$I_2 = I_1 \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_2} \quad (1.28)$$

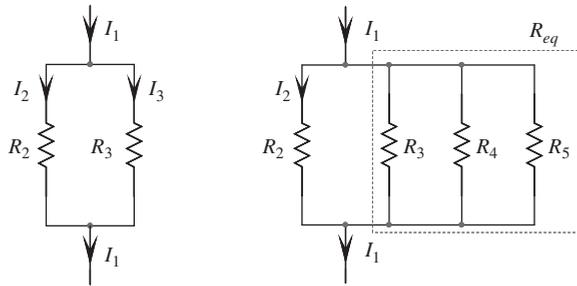


Figure 1.18 Le diviseur de courant est facilement généralisé à des réseaux résistifs en parallèle.

Cette technique marche également avec des composants stockant l'énergie (bobines et condensateurs) comme le représente la Figure 1.19. Il s'agit d'un filtre interposé entre le réseau d'alimentation et un convertisseur à découpage. Le filtre évite la remontée de parasites de découpage qui pollueraient les circuits partageant la même source d'alimentation que le convertisseur. On parle de filtre CEM pour Compatibilité Electromagnétique ou *EMI filter* en anglais

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

(*ElectroMagnetic Interference*). I_1 représente la signature haute-fréquence du convertisseur, C_1 est le condensateur de tête et L_1 la bobine de filtrage. En présence d'un filtre parfait, tout le courant alternatif haute-fréquence absorbé par le convertisseur passerait par C_1 et seul du courant continu traverserait L_1 . Dans ce scénario, aucun courant polluant ne remonte vers la source d'alimentation. La réalité diffère et ce que vous souhaitez déterminer, c'est le courant traversant effectivement L_1 : est-ce que son amplitude reste inférieure à ce qu'impose la norme ? Appliquons le diviseur de courant au circuit à la gauche de la Figure 1.19 et nous avons immédiatement

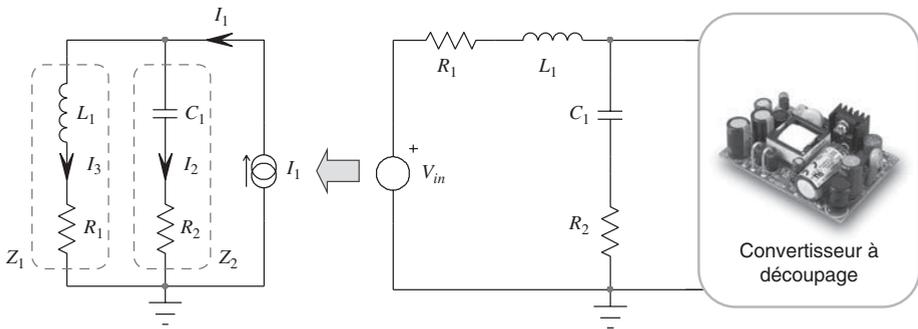


Figure 1.19 Dans ce circuit constitué d'éléments passifs, quelle quantité de courant circule dans L_1 ?

$$\frac{I_3(s)}{I_1(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \frac{1}{sC_1} + R_1 + sL_1} = \frac{1 + sR_2C_1}{1 + sC_1(R_1 + R_2) + s^2L_1C_1} \quad (1.29)$$

Nous n'avons pas écrit une seule ligne d'algèbre pour déterminer la relation entre I_1 et I_3 . Nous avons juste *inspecté* la figure et appliqué la loi du diviseur de courant. Cette technique est appelée détermination d'une fonction de transfert par *inspection*.

1.2.3 Le théorème de Thévenin à l'œuvre

Tout système linéaire à 2 ports et constitué de résistances, condensateurs, bobines, sources de courant/tension, contrôlées ou pas, peut être représenté par un modèle équivalent de Thévenin. Ce circuit assemble un générateur de tension V_{th} associé à une impédance de sortie Z_{th} . Lorsque l'on travaille sur des réseaux électriques compliqués et que l'on souhaite déterminer une fonction de

transfert, le théorème de Thévenin permet de scinder le schéma électrique en plusieurs sous-circuits simplifiés que l'on étudie séparément. Pour ce faire, on retire temporairement la charge du circuit et l'on modélise la source équivalente qui la pilote, affectée par une impédance/résistance de sortie. Thévenin permet ainsi de modéliser la caractéristique courant-tension « vue » par la charge. Attention, les circuits équivalents de Thévenin et Norton ne caractérisent pas la puissance dissipée par le réseau qu'ils remplacent. Il faut les utiliser avec précaution lorsque l'on désire évaluer des puissances ou des courants en certains points du circuit.

Supposons que l'on doive calculer la fonction de transfert $V_{out}(s)/V_{in}(s)$ du circuit de Figure 1.20. Il s'agit d'un cas classique auquel j'ai ajouté des résistances. Le but de Thévenin est de réduire la complexité en transformant le montage pour ensuite déterminer la fonction qui nous intéresse par inspection. La première option consiste à utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles (*Kirchhoff's voltage law, KVL*) pour écrire des équations utiles. Il est très possible que vous obteniez le résultat du premier coup, mais des erreurs peuvent également être commises lors de ce processus. C'est ce que l'on appelle l'analyse par la force brutale (*brute-force analysis*). La seconde approche possible passe par l'utilisation de Thévenin et représente déjà un pas vers les techniques de calculs rapides ou FACTs pour *fast analytical circuit techniques* en anglais. Nous devons trouver une place dans le circuit à laquelle nous pourrions insérer le modèle équivalent recherché. Nous coupons d'abord le circuit après R_2 comme indiqué en Figure 1.21 afin d'isoler le premier générateur équivalent.

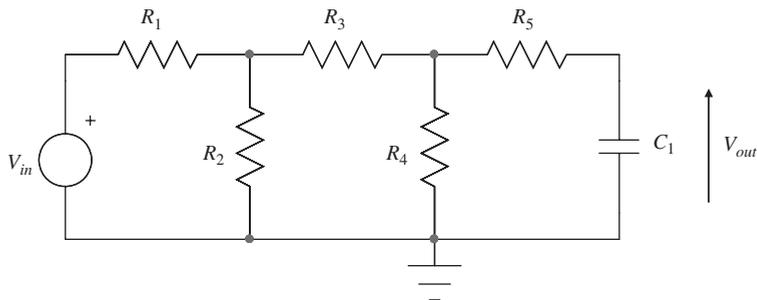


Figure 1.20 Dans ce circuit, 5 résistances attaquent le condensateur C_1 . Plutôt que d'utiliser les lois des nœuds et des mailles, identifions des générateurs de Thévenin afin de simplifier l'analyse.

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

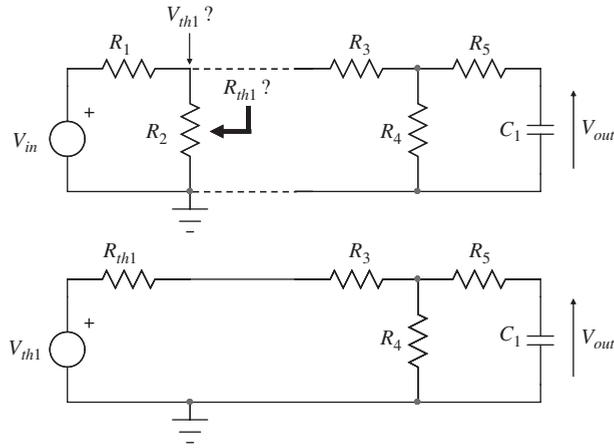


Figure 1.21 Vous devez trouver une place dans le circuit afin d'identifier un générateur équivalent de Thévenin.

La tension de Thévenin est celle qui apparaît aux bornes de R_2 lorsque celle-ci se trouve isolée du circuit aval. On peut appliquer la loi du diviseur résistif puisque R_2 n'est plus chargée après sa séparation du reste du circuit. En observant la partie supérieure de la Figure 1.21, cette tension est simplement

$$V_{th1}(s) = V_{in}(s) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.30)$$

Maintenant, quelle est la résistance de sortie dans ce cas ? La résistance de sortie, comme expliqué dans l'annexe 1.4.1, est déterminée en réduisant la tension d'entrée à 0 V (on remplace la source de tension V_{in} par un fil alors qu'une source de courant réduite à 0 A cèderait la place à un circuit ouvert) puis en calculant la résistance vue des connexions de R_2 (Figure 1.22).

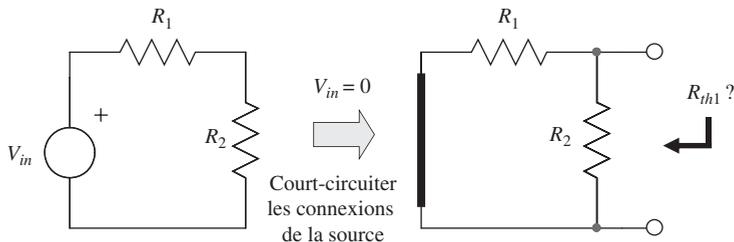


Figure 1.22 La résistance équivalente de Thévenin est déterminée en regardant par le port qui connecte R_2 au circuit alors que la source d'entrée est réduite à 0 V.

La résistance est obtenue immédiatement

$$R_{th1} = R_1 \parallel R_2 \tag{1.31}$$

On peut maintenant remplacer la source d'entrée associée à R_1 et R_2 par son générateur équivalent de Thévenin. Il apparaît dans la partie supérieure de la Figure 1.23. Nous obtenons un circuit équivalent qui reproduit la caractéristique I-V et pilote le circuit constitué de R_3 avec le reste des éléments. Revenons un instant sur le commentaire formulé lors de l'utilisation de Thévenin (ou Norton) dans les calculs de puissance. Vous pouvez observer que le générateur de la Figure 1.22 dissipe une puissance $V_{in}^2 / (R_1 + R_2)$ lorsqu'il n'est pas chargé alors que ce n'est pas le cas pour le modèle équivalent impliquant V_{th} et R_{th} . Utiliser Thévenin pour un calcul de dissipation engendrerait ici un calcul faux.

En simplifiant plus en avant, un autre diviseur résistif apparaît avant d'arriver au condensateur. On peut adapter le générateur équivalent précédent en tenant compte de la présence de ces éléments. L'approche du diviseur de tension est toujours utile :

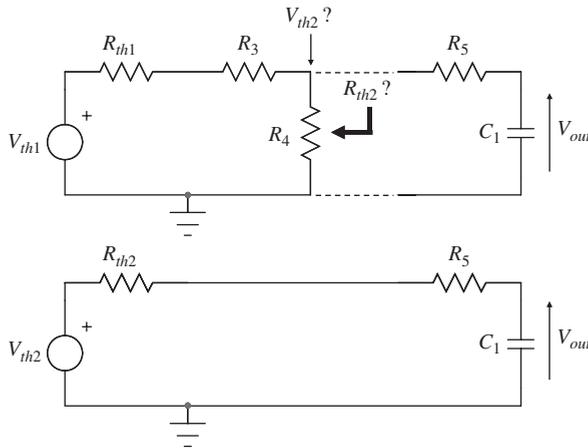


Figure 1.23 La résistance équivalente de Thévenin est obtenue en regardant la résistance « vue » aux bornes de R_4 alors que la source V_{th1} est réduite à 0 V.

$$V_{th2}(s) = V_{th1}(s) \frac{R_4}{R_4 + R_3 + R_{th1}} = V_{in}(s) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_4}{R_4 + R_3 + R_{th1}} \tag{1.32}$$

On détermine la résistance de sortie en réduisant V_{th1} à 0 V et en calculant la résistance « vue » aux bornes de R_4 alors que celle-ci reste en place (Figure 1.24).

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

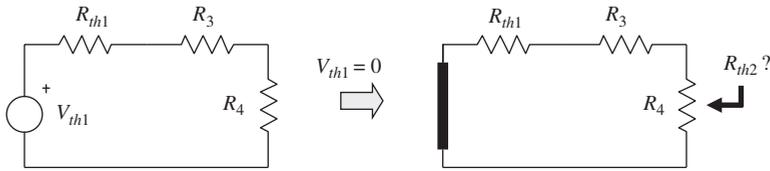


Figure 1.24 Le premier générateur de Thévenin est enrichi de la présence de R_3 et R_4 .

$$R_{th2} = (R_{th1} + R_3) \parallel R_4 \quad (1.33)$$

Le circuit final apparaît dans la partie inférieure de la Figure 1.23 dans laquelle un simple diviseur de tension est représenté. La fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas dessiné dans la partie gauche de la Figure 1.16 et dans lequel la résistance qui attaque le condensateur est la somme de R_{th2} et R_5 :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{th2}(s)} = \frac{1}{1 + s(R_{th2} + R_5)C_1} \quad (1.34)$$

V_{th2} peut être remplacée par sa définition exprimée par (1.32) avec les expressions de V_{in} et $R_{th1/2}$ insérées dans (1.34). Finalement, l'expression revêt la forme

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_4}{R_4 + R_3 + R_1 \parallel R_2} \cdot \frac{1}{1 + s[(R_1 \parallel R_2 + R_3) \parallel R_4 + R_5]C_1} \quad (1.35)$$

C'est une expression plutôt compliquée mais on ne sait pas encore si elle est correcte. Essayons une approche différente. Si l'on observe le dénominateur de (1.34), on repère un terme dans lequel C_1 est multiplié par une résistance, $R_{th2} + R_5$. Le terme RC résultant est une *constante de temps*. Si l'on se réfère à nos premiers pas lorsque nous déterminions les résistances « vues » par un condensateur ou une bobine (Figure 1.7), nous pouvons dire que la résistance « vue » par le condensateur et associée ensuite avec ce dernier forme une constante de temps notée τ (tau). Voyons si nous pouvons articuler ce principe autour de notre circuit compliqué de la Figure 1.20. Lorsque l'on calcule une impédance ou une résistance de sortie, la source d'excitation V_{in} ne joue aucun rôle et peut être réduite ou « éteinte » à 0 V. Éteindre (ou rendre passive) une source de tension revient à la remplacer par un court-circuit. Nous verrons plus tard une explication rigoureuse mais acceptons ce fait pour l'instant. Une fois V_{in} remplacée par un fil et le condensateur retiré du circuit, la Figure 1.25 apparaît.

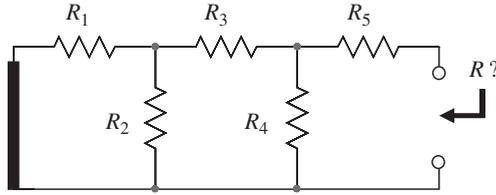


Figure 1.25 Quelle est la résistance qui attaque le condensateur C_1 ?

Avec un tel dessin, l'inspection devient un jeu d'enfant. Si l'on part de la gauche, R_1 vient en parallèle sur R_2 puis en série avec R_3 , le tout en parallèle avec R_4 . Cette résistance totale est en série avec R_5 . Finalement, nous avons

$$R = R_5 + (R_1 \parallel R_2 + R_3) \parallel R_4 \tag{1.36}$$

Si vous relisez l'équation (1.35), (1.36) n'est rien d'autre que la portion résistive associée à C_1 . Pas de Thévenin ou de manipulation compliquée pour en arriver là.

Dans (1.35), lorsque s égale 0, nous parlons de gain statique (*static gain*), la réponse à une tension d'excitation à la fréquence de 0 Hz, une tension continue. Dans certaines des fonctions de transfert que nous rencontrerons dans cet ouvrage, des gains statiques pourront être nuls, infinis ou finis comme dans notre cas. Dans (1.35), si l'on remplace s par 0, la partie droite du dénominateur devient 1 et la partie gauche de l'équation reste seule : il s'agit du terme continu dont l'unité doit refléter celle de la fonction de transfert étudiée. Ici, nous calculons un gain exprimé en $[V]/[V]$ et, par conséquence, celui-ci est sans dimension. Si nous calculions une impédance, sa dimension serait exprimée en ohms. On indique souvent ce terme continu par l'ajout d'un 0 indicé. Il est habituel d'associer à ce gain statique la même lettre que celle utilisée pour la fonction de transfert recherchée : A_0 pour $A(s)$, H_0 pour $H(s)$, G_0 pour $G(s)$ et ainsi de suite. Une exception existe pour R_0 qui désigne la résistance de l'impédance $Z(s)$ pour $s = 0$. La Figure 1.26 illustre cette notation, valide quel que soit l'ordre du circuit.

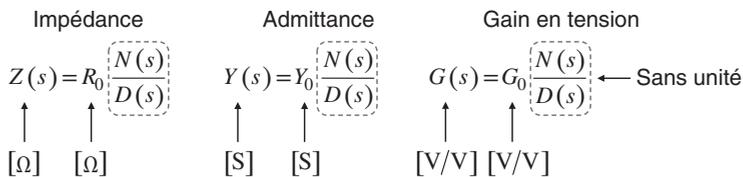


Figure 1.26 Dans une fonction transfert écrite convenablement, le terme de tête porte l'unité (s'il y en a une) alors que le numérateur et le dénominateur sont sans unité.

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

Il apparaît ci-dessous la première forme généralisée de la fonction de transfert du circuit décrite par (1.35) et que nous désignons par H :

$$H(s) = H_0 \frac{1}{1 + s\tau} \quad (1.37)$$

dans laquelle

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_4}{R_4 + R_3 + (R_1 \parallel R_2)} \quad (1.38)$$

et

$$\tau = (R_5 + ((R_1 \parallel R_2) + R_3) \parallel R_4) C_1 \quad (1.39)$$

Que se passe-t-il physiquement lorsque l'on observe un circuit en tension ou courant continu ? Un condensateur présente une résistance infinie et devient un circuit ouvert. Une bobine se comporte comme un court-circuit et peut être remplacée par un fil. Lorsque vous analysez un circuit en continu, vous pouvez ouvrir tous les condensateurs et court-circuiter toutes les bobines. C'est ce que fait le simulateur SPICE lorsque vous lui demandez de calculer un point de polarisation continue (*dc operating bias*) ou lorsqu'il démarre une analyse alternative (.AC) ou transitoire (.TRAN). Le corolaire existe en haute fréquence ou lorsque s approche l'infini : les condensateurs deviennent des courts circuits et les bobines qui présentent une résistance infinie peuvent être physiquement retirées du circuit. Nous reviendrons sur ces points importants plus tard mais concentrons-nous sur la Figure 1.20 dans laquelle C_1 a été retiré pour l'analyse du gain statique. Le nouveau circuit apparaît en Figure 1.27.

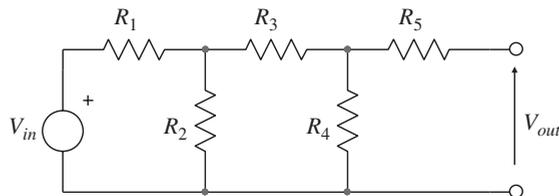


Figure 1.27 Sous une polarisation continu, le condensateur C_1 devient un circuit ouvert et peut être retiré du circuit puisqu'aucun courant ne le traverse.

Dans ce circuit, R_5 ne joue aucun rôle. La fonction de transfert en continu est celle déjà dérivée en (1.32) en appliquant Thévenin deux fois. C'est H_0 dans l'équation (1.38). En conclusion préliminaire, nous aurions pu dériver (1.35) en deux étapes : premièrement en considérant le circuit étudié pour

$s = 0$ et en obtenant H_0 , puis, deuxièmement, en réduisant la source à 0 V et en regardant au travers des connexions du condensateur pour déterminer la résistance qui le pilote. Celle-ci, associée à C_1 , détermine la constante de temps du circuit.

Dans cette approche, nous avons calculé un simple gain impliquant uniquement des résistances (le condensateur ou la bobine ont été respectivement retirés ou remplacés par un fil), suivi par la détermination de la résistance pilotant le condensateur lorsque la source de tension est réduite à 0 V (remplacée par un fil). Ce sont nos premiers pas vers les techniques d'analyses rapides, abrégées FACTs en anglais.

1.2.4 Le théorème de Norton en action

Tout circuit linéaire fait de résistances, capacitances, inductances, de sources dépendantes ou indépendantes en courant ou tension peut être représenté par un modèle équivalent de Norton. Ce modèle est constitué d'un générateur de courant I_{th} associé à une impédance de sortie Z_{th} . Thévenin et Norton sont interchangeables selon le circuit analysé. Avec une impédance/résistance de sortie similaire Z_{th} dans les deux cas, I_{th} et V_{th} sont liés par la formule simple $I_{th} = V_{th}/Z_{th}$.

Considérons le filtre de la Figure 1.28 dans lequel vous distinguez une bobine associée à trois résistances. r_L symbolise la résistance équivalente de la bobine (*Equivalent Series Resistance*, ESR), ses pertes ohmiques.

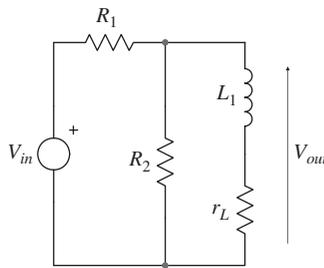


Figure 1.28 Le théorème de Norton s'applique à ce circuit pour déterminer rapidement la fonction de transfert.

Pour obtenir la fonction de transfert liant V_{out} à V_{in} , sectionnons le circuit après R_2 et transformons la source d'entrée impliquant R_1 et R_2 en un générateur de Norton. Le résultat apparaît en Figure 1.29. Tout d'abord, le courant de Norton est déterminé. Ce courant est égal à V_{th}/R_{th} ou au courant de court-circuit lorsqu'un

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

fil shunte R_2 . Dans ce cas, le courant I_{th} est simplement V_{in}/R_1 . La résistance de sortie a été déjà calculée dans les exemples précédents et est égale à la mise en parallèle de R_1 et R_2 . Une fois la transformation de Norton effectuée, vous pouvez placer le générateur équivalent dans le circuit tel que proposé en Figure 1.30. Dans ce cas, la tension de sortie est simplement

$$V_{out}(s) = I_{th}(s)Z_1(s) = \frac{V_{in}(s)}{R_1} [R_{th} \parallel (r_L + sL_1)] \quad (1.40)$$

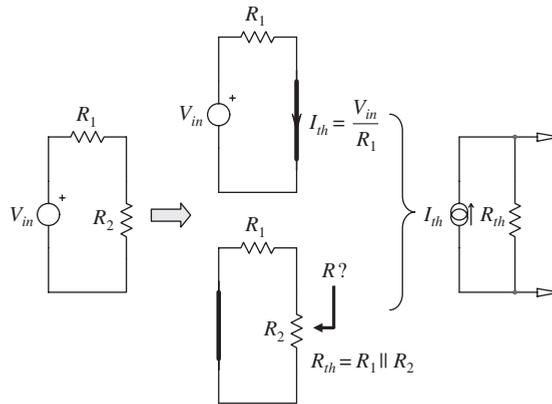


Figure 1.29 Le générateur de Norton débite du courant dans la combinaison série-parallèle incluant la bobine L_1 .

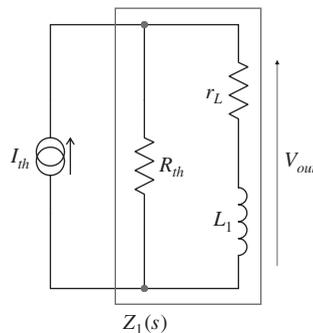


Figure 1.30 La tension de sortie V_{out} est simplement la source de courant fois l'impédance Z_1 .

Si l'on développe à présent cette expression et que l'on arrange les termes, on obtient l'expression de l'équation (1.41)

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{r_L R_2}{R_1 R_2 + r_L (R_1 + R_2)} \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L}}{1 + s \frac{L_1 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + r_L (R_1 + R_2)}} \quad (1.41)$$

On peut distinguer deux constantes de temps : l'une est au numérateur et l'autre au dénominateur. On peut alors récrire cette fonction de transfert en s'appuyant sur la notation introduite par (1.37) :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} \quad (1.42)$$

Le terme de tête représente le gain statique

$$H_0 = \frac{r_L R_2}{R_1 R_2 + r_L (R_1 + R_2)} \quad (1.43)$$

Deux constantes de temps sont définies par

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_L} \quad (1.44)$$

et

$$\tau_2 = \frac{L_1}{R_{eq}} \quad \text{où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2 + r_L (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} \quad (1.45)$$

Maintenant, plutôt que d'appliquer la loi d'ohm comme dans l'équation (1.40), voyons si nous pouvons déjà capitaliser sur ce que nous avons appris avec l'exemple du théorème de Thévenin. En premier, on remplace s par 0 et l'on détermine la fonction de transfert en continu notée H_0 . Si un condensateur est un circuit ouvert en continu, une bobine devient un court-circuit dans des conditions similaires. En Figure 1.30, on court-circuite la bobine et la Figure 1.31 apparaît. À partir de là, le gain statique est immédiat.

$$\frac{V_{out}(0)}{I_{th}(0)} = R_{th} \parallel r_L \quad (1.46)$$

Si l'on substitue maintenant R_{th} et I_{th} dans (1.46), on obtient

$$H_0 = \frac{(R_1 \parallel R_2) \parallel r_L}{R_1} \quad (1.47)$$

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

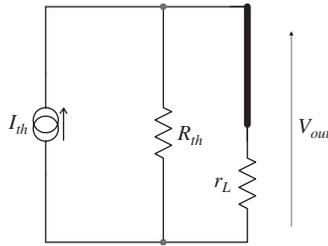


Figure 1.31 En continu, la bobine est remplacée par un fil, c'est un court-circuit.

Nous n'avons rien fait de compliqué ici. Si vous vérifiez, (1.47), elle est identique à (1.43). Si maintenant l'on part de la Figure 1.28 et que l'on court-circuite la bobine en continu, nous obtenons une nouvelle définition pour H_0 , identique à celle définie par (1.47) mais exprimée différemment :

$$H_0 = \frac{r_L \parallel R_2}{r_L \parallel R_2 + R_1} \quad (1.48)$$

Dans ces expressions, (1.47) et (1.48), les résistances sont proprement organisées dans des combinaisons séries- parallèles. Ce n'est pas le cas pour l'équation (1.43) dans laquelle les éléments sont combinés indistinctement sans relation évidente entre eux. Le fait d'exprimer des fonctions de transfert sous une forme intelligible permet de distinguer immédiatement des points particuliers comme des racines, des gains ou la sensibilité à un élément particulier. Par exemple, dans (1.47), si la résistance r_L approche l'infini, le gain en continu se transforme en celui d'un simple diviseur résistif impliquant R_1 et R_2 . Encore plus simple dans (1.48) où H_0 se simplifie immédiatement à $R_2 / (R_1 + R_2)$. (1.43) n'offre pas la même visibilité ; il faudrait factoriser r_L et la rendre infinie pour simplifier la formule. En d'autres termes, il faudrait dépenser plus d'énergie pour arranger la formule compliquée et obtenir la réponse désirée. Selon ce critère, (1.47) et (1.48) sont des équations dites à *faible entropie* (*low-entropy equations*) si l'on s'autorise une analogie avec les lois de la thermodynamique.

L'entropie d'un système qualifie son degré de désordre interne. Dans une équation à *faible entropie*, les termes sont bien factorisés, placés au bon endroit, mis en parallèle etc. et il est aisé d'identifier un gain, un pôle, un zéro ou encore une résonance. À l'inverse, une équation à *forte entropie* (*high-entropy equation*), c'est-à-dire présentée sous une forme non canonique, réclamera plus d'efforts, plus d'énergie, pour révéler un gain ou d'autres relations clés. Nous verrons que les FACTs conduisent naturellement à des équations *faible entropie* alors que la force brute produit souvent des résultats abscons numériquement justes mais inexploitable en notation symbolique.

Maintenant que le gain statique H_0 est déterminé, retournons à l'équation (1.42). En comparaison avec (1.37), cette fois, nous pouvons identifier deux constantes de temps. L'une se trouve au numérateur et l'autre au dénominateur. Dans le chapitre 2, nous verrons que des fonctions de transfert associent des gains, des pôles et des zéros. Sans dévoiler trop de détails maintenant, les zéros apparaissent au numérateur N de la fonction de transfert alors que les pôles prennent place au dénominateur D . En d'autres termes, τ_1 dans (1.42) correspond à la constante de temps du zéro alors que τ_2 caractérise la constante de temps du pôle. Comme déjà souligné, les deux termes impliquent un terme résistif R qui se combine avec la réactance ou la capacitance considérée (C ou L). Parfois, si le circuit étudié s'y prête, il est possible de déterminer par inspection les termes résistifs sans écrire une ligne d'algèbre.

La définition mathématique d'un zéro dans une fonction $f(x)$ est la valeur x pour laquelle f retourne 0. Dans une fonction de transfert du premier ordre, un zéro noté s_z représente la racine du numérateur N . Lorsqu'un réseau comportant un zéro est évalué à une valeur de s égale à s_z , le numérateur N de la fonction transfert s'annule :

$$N(s_z) = 0 \tag{1.49}$$

Par exemple, dans (1.41), lorsque $s = -\frac{r_L}{L}$, une valeur réelle dans le plan complexe, le numérateur égale 0. Dans ces conditions, la fonction de transferts reliant la réponse à l'excitation retourne également 0 :

$$\frac{V_{out}(s_z)}{V_{in}(s_z)} = \frac{N(s_z)}{D(s_z)} = \frac{0}{D(s_z)} = 0 \tag{1.50}$$

Si le module de la fonction de transfert est 0 pour $s = s_z$, alors, en dépit de la présence d'un signal V_{in} , la réponse V_{out} est égale à 0. De cette simple observation, nous pouvons en déduire que la présence d'un zéro dans une fonction de transfert implique que la réponse s'annule lorsque le réseau transformé est étudié pour $s = s_z$. La Figure 1.32 illustre ce principe au travers d'un dessin simple.

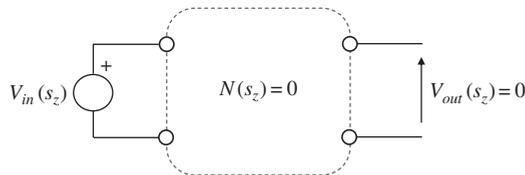


Figure 1.32 Pour $s = s_z$, le numérateur de la fonction de transfert s'annule et la réponse disparaît.

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

Le mot réseau transformé (*transformed network*) implique que tous les éléments de stockage d'énergie (L et C) sont remplacés par leur impédance exprimée dans le domaine de Laplace comme en témoigne la Figure 1.33. Si la réponse a disparu, cela signifie que l'excitation n'atteint pas la sortie et se perd quelque part dans le réseau transformé examiné pour $s = s_z$. Les Figures 1.34a et b illustrent deux cas entraînant la disparition de la réponse dans cette condition d'observation particulière ($V_{out} = 0$ V).

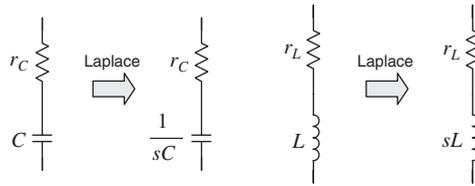


Figure 1.33 Dans un réseau transformé, les termes capacitifs et inductifs sont remplacés par leur impédance complexe.

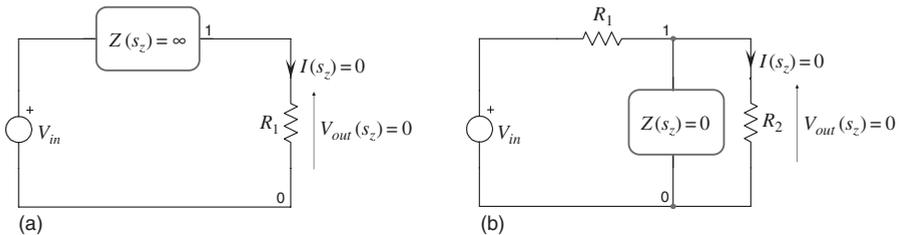


Figure 1.34 Dans le réseau transformé, lorsque s égale s_z , un circuit série peut présenter une impédance infinie ou alors un réseau peut court-circuiter un nœud à la masse. Chacune de ces deux conditions empêche que l'excitation se propage à la sortie, entraînant alors la disparition de la réponse : $V_{out}(s_z) = 0$.

Une réponse nulle, implique l'absence de courant circulant dans la résistance R_1 d'où le commentaire $I_{out}(s_z) = 0$. Si vous observez la Figure 1.34a, la disparition du courant dans R_1 est due au réseau série Z qui devient un réseau ouvert (*a transformed open*) pour $s = s_z$. La présence de ce circuit ouvert dans le circuit bloque toute circulation du courant et entraîne la disparition de la réponse pour $s = s_z$. Dans la Figure 1.34b, un courant circule dans les résistances R_1 et R_2 mais un court-circuit transformé (*a transformed short*) dévie le courant de R_2 en shuntant le nœud 1 à la masse. Cet effet annule la réponse observée aux bornes de R_2 . Ainsi, en observant la ou les conditions pour lesquelles la réponse peut disparaître dans le circuit transformé, la possibilité existe de déterminer les zéros de la fonction de transfert en inspectant le réseau étudié.

Revenons à la Figure 1.30 ou la Figure 1.28 : quelle association d'éléments pourrait engendrer une disparition de la réponse lorsque le circuit est étudié à $s = s_z$? R_{th} est fixe et son module ne dépend pas de la fréquence. Cependant, l'association en série de L_1 et r_L pourrait peut-être devenir un court-circuit transformé pour une certaine valeur de s ? L'impédance de ce réseau est :

$$Z(s) = r_L + sL_1 \quad (1.51)$$

Pour quelle valeur de s cette expression égale-t-elle 0 ? En d'autres termes, quelle est la racine de l'équation :

$$0 = r_L + sL_1 \quad (1.52)$$

La solution est simple,

$$s_z = -\frac{r_L}{L_1} \quad (1.53)$$

Il s'agit d'une racine réelle dont le module est

$$\omega_z = |s_z| = \frac{r_L}{L_1} \quad (1.54)$$

Dans les prochains chapitres, nous apprendrons que

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_z} = \frac{L_1}{r_L} \quad (1.55)$$

Si, à présent, vous vous rendez au laboratoire et soudez une résistance en série avec une bobine puis excitez le dipôle obtenu par une source de courant alternatif (pour en déterminer l'impédance), vous n'annulerez jamais la réponse (la tension aux bornes du dipôle) pour une certaine valeur de fréquence. En fait, comme (1.53) le suggère avec ce zéro réel, la seule façon de rendre le dipôle un court-circuit transformé est de considérer s dans l'intégralité du plan complexe et non pas uniquement le long de l'axe imaginaire comme on le fait lorsque l'on étudie uniquement le régime harmonique $s = j\omega$.

La méthode proposée est une abstraction qui traduit la définition mathématique du zéro dans le monde transformé de Laplace. Malgré son manque de signification physique (on l'a vu en essayant d'annuler la réponse au laboratoire), l'approche est extrêmement utile et efficace pour identifier le ou les zéros. Elle sera abondamment utilisée lorsque ce que nous étudierons la double injection nulle (*Null Double Injection* ou NDI). Au fait, il est physiquement possible d'annuler une réponse lorsque le zéro se trouve à l'origine. En effet, l'origine

1.2 Les quelques outils et théorèmes que vous n'avez pas oubliés

est commune aux axes vertical (imaginaire) et horizontal (réel). C'est le cas lorsqu'un condensateur coupe le continu (il est en série avec le signal d'entrée, filtre CR) ou lorsqu'une bobine parfaite (sans ESR) est placée en parallèle avec la réponse (filtre RL). Dans ce cas, si vous appliquez une tension continue quelconque à l'entrée du filtre CR ou RL (0 Hz), vous observez vraiment 0 V en sortie. Le second cas dans lequel une réponse nulle peut être observée implique un filtre de réjection du second ordre faiblement amorti. Lorsque le facteur d'amortissement est quasiment nul (pas de pertes dans le filtre), la paire de zéros s'approche de l'axe vertical pour devenir une paire imaginaire conjuguée. Lorsque ce filtre est excité à sa fréquence de réjection, fréquence à laquelle les deux zéros sont positionnés, vous observez vraiment une réponse extrêmement faible au laboratoire.

Pour évaluer la seconde constante de temps τ_2 , on peut appliquer ce que nous avons déjà étudié : l'excitation disparaît (pas de rôle dans la définition des résistances de sortie) et on détermine la résistance qui attaque l'inductance L_1 . Si l'on applique ce concept à la Figure 1.30, la résistance observée par les connexions de la bobine ne dépend pas de la source de courant I_{th} : elle peut être réduite à 0 A. Couper une source de courant indépendante – ou l'éteindre – revient à la retirer physiquement du circuit. C'est ce que la Figure 1.35 suggère.

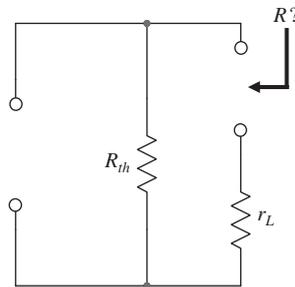


Figure 1.35 Quand le signal d'excitation est une source de courant, réduire le courant délivré à 0 A ou éteindre la source revient à la retirer du circuit étudié.

Quelle résistance apparaît alors entre les connecteurs de la bobine ? r_L est en série avec R_{th} . Si l'on remplace R_{th} par sa définition de la Figure 1.29, on obtient

$$R = r_L + R_{th} = r_L + (R_1 \parallel R_2) \quad (1.56)$$

La seconde constante de temps est donc

$$\tau_2 = \frac{L_1}{r_L + (R_1 \parallel R_2)} \quad (1.57)$$

Si l'on suit un cheminement similaire avec la Figure 1.28 mais si l'on court-circuite V_{in} plutôt (l'excitation est à 0 V, la source est éteinte) et que l'on détermine la résistance vue des connecteurs de la bobine, on retrouve (1.56).

Maintenant, si l'on associe (1.48), (1.55) et (1.57), on peut écrire la fonction de transfert décrivant la Figure 1.28 sous une forme normalisée : il s'agit vraiment d'une forme à *faible entropie* :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{r_L \parallel R_2}{(r_L \parallel R_2) + R_1} \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L}}{1 + s \frac{L_1}{(R_1 \parallel R_2) + r_L}} \quad (1.58)$$

On peut également arranger l'expression sous une forme canonique dans laquelle un pôle et zéro font leur apparition

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z1}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (1.59)$$

avec

$$H_0 = \frac{r_L \parallel R_2}{(r_L \parallel R_2) + R_1} \quad (1.60)$$

$$\omega_{z1} = \frac{1}{\tau_1} = \frac{r_L}{L_1} \quad (1.61)$$

$$\omega_{p1} = \frac{1}{\tau_2} = \frac{(R_1 \parallel R_2) + r_L}{L_1} \quad (1.62)$$

Pour vérifier nos calculs, nous avons capturé ces équations dans une feuille Mathcad® et tracé la réponse dynamique en Figure 1.36.

1.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

$$R_1 := 5\text{k}\Omega \quad R_2 := 10\text{k}\Omega \quad r_L := 10\Omega \quad L_1 := 10000\mu\text{H}$$

$$\|(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$H_1(s) := \frac{r_L \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + r_L \cdot (R_1 + R_2)} \cdot \frac{1 + s \cdot \frac{L_1}{r_L}}{1 + s \cdot \frac{L_1 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 \cdot R_2 + r_L \cdot (R_1 + R_2)}}$$

$$H_0 := \frac{r_L \parallel R_2}{(r_L \parallel R_2) + R_1} \quad \tau_2 := \frac{L_1}{(R_1 \parallel R_2) + r_L} \quad \tau_1 := \frac{L_1}{r_L}$$

$$H_2(s) := H_0 \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2} \quad H_0 = 1.994 \times 10^{-3}$$

$$\frac{r_L \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2 + r_L \cdot (R_1 + R_2)} = 1.994 \times 10^{-3}$$

Résultats identiques

$$\frac{(R_1 \parallel R_2) \parallel r_L}{R_1} = 1.994 \times 10^{-3}$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2 + r_L \cdot (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)} = 3.343\text{k}\Omega$$

$$r_L + (R_1 \parallel R_2) = 3.343\text{k}\Omega$$

$$f_0 := \frac{1}{2\pi \cdot \tau_2} = 53.211\text{kHz}$$

$$f_p := \frac{1}{2\pi \cdot \tau_1} = 159.155\text{Hz}$$

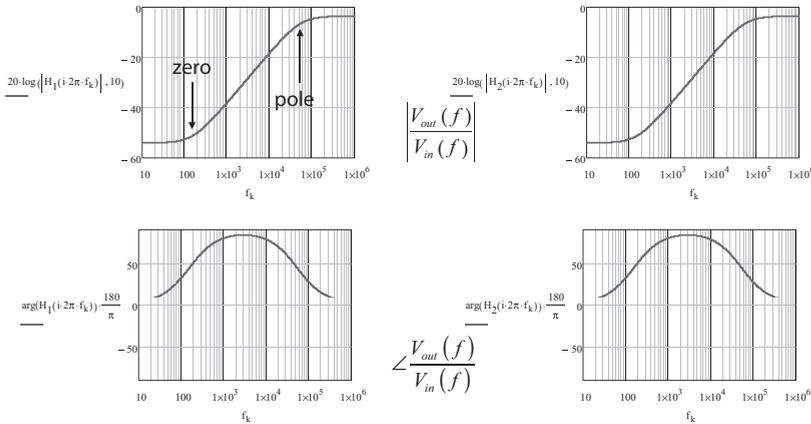


Figure 1.36 Les réponses dynamiques des formes basse et haute entropie sont identiques.

Dans le coin supérieur gauche apparaît la fonction de transfert dans sa version brute avec sa réponse harmonique en dessous. La version droite décrit la version à faible entropie et qui implique les constantes de temps déterminées par inspection. Les valeurs et réponses obtenues avec ces deux approches sont identiques.

1.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

Dans ce premier chapitre, nous avons appris des informations importantes résumées ci-dessous :

1. Une fonction de transfert est une relation mathématique liant un signal d'excitation, l'entrée, à un signal de sortie, la réponse. L'excitation et la réponse peuvent apparaître à des points de connexion séparés (un connecteur d'entrée, un connecteur de sortie) mais également aux bornes d'un connecteur

commun. C'est le cas par exemple lors de calculs d'impédances ou d'admittances.

2. Une fonction de transfert est constituée d'un numérateur N et d'un dénominateur D mais pas toujours. Dans le cas d'une écriture sous la forme d'une fraction $N(s)/D(s)$, les zéros de la fonction de transfert sont les racines du numérateur alors que les pôles sont les racines du dénominateur.
3. Un réseau comprenant des éléments qui stockent l'énergie tels que des condensateurs et des bobines impliquent des constantes de temps associées à ce circuit. Ces constantes de temps combinent un terme résistif R qui « pilote » ou « attaque » l'élément de stockage concerné, L ou C . Cette résistance peut être observée dans certaines conditions en « regardant » dans les connexions de l'élément une fois celui-ci retiré. Une constante de temps impliquant un terme capacitif revêt la forme $\tau = RC$ alors qu'une constante de temps associant un terme inductif s'écrit selon la forme $\tau = L/R$.
4. Lorsque l'on regarde la résistance vue des éléments de connexion d'un condensateur ou d'une bobine, nous avons vu que la source d'excitation ne jouait aucun rôle : il convient alors de « l'éteindre ». Une source de tension éteinte voit sa tension de sortie réduite à 0 V ce qui revient à la remplacer par un court-circuit. Une source de courant éteinte ne délivre plus de courant (0 A) et devient un circuit ouvert.
5. Le terme « regarder » la résistance peut être assimilée à la conduite de l'exercice suivant : la source est éteinte et vous retirez temporairement le condensateur ou la bobine de ces points de connexion. Puis vous prenez un ohm-mètre et mesurez la résistance « vue » des bornes de connexion. Cette résistance R forme la constante de temps avec C ou L . Électriquement, cette manipulation est l'équivalent de l'application d'un générateur de courant constant I_T aux bornes de connexion de L ou C et l'on mesure la tension V_T obtenue aux bornes du générateur : $R = V_T / I_T$. Avec un peu d'habitude et si le circuit n'est pas trop compliqué, on peut déduire la valeur de R en *inspectant* visuellement le circuit.
6. Les techniques de calculs rapides ou Fast Analytical Circuits Techniques (FACTs) consistent en l'expression d'une fonction de transfert sous une forme intelligible impliquant des constantes de temps et des gains arrangés de façon concise et ordonnée. Cette forme particulière est appelée *faible entropie* par analogie avec les lois de la thermodynamique. Son écriture doit permettre de distinguer immédiatement des pôles, des zéros ou des gains sans passer par de nouvelles manipulations algébriques.

7. Il existe certaines techniques importantes que vous devez connaître si vous souhaitez développer votre habileté dans la manipulation des réseaux complexes : le diviseur résistif, le diviseur de courant et les théorèmes de Norton et Thévenin. Le théorème de l'extra élément participe du théorème de superposition que nous découvrirons dans un prochain chapitre.
8. En appliquant certaines de techniques simples évoquées, nous avons pu déterminer des fonctions de transfert facilement sans écrire une ligne d'algèbre. En d'autres termes, nous avons écrit la fonction de transfert en « inspectant » le schéma. Lorsque le circuit étudié n'est pas trop compliqué, la détermination des fonctions de transfert par inspection devient un réel plaisir !

Références

- [1] V. Vorpérian, « Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits », Cambridge 2002, 0-521-62442-8
- [2] « Understand and apply the transimpedance amplifier », Planet Analog blog, http://www.planetanalog.com/document.asp?doc_id=527534&site=planetanalog

1.4 Annexe du chapitre 1

Compléments en ligne



À consulter sur le site Dunod.com :

- ▶ Déterminer une impédance/résistance de sortie
- ▶ Exemples documentés

2

Fonctions de transfert

Dans le premier chapitre, nous avons appris comment une fonction de transfert liait une réponse à un stimulus. Alors que la forme d'onde appliquée à l'entrée du circuit électrique se propage, elle subit des amplifications, des atténuations et des distorsions de phase. Ces caractéristiques peuvent être mathématiquement décrites en organisant des gains, des pôles et des zéros au sein d'une fonction dépendant de la fréquence. Si des outils et des méthodes existent pour déterminer rapidement une telle expression, nous devons apprendre comment organiser les résultats sous une forme intelligible afin d'inférer une réponse par la simple lecture de l'équation. C'est le principe de l'écriture canonique à *faible entropie* dans laquelle les pôles et les zéros sont factorisés et donnent immédiatement une idée de la réponse fréquentielle. Ce chapitre explore les fonctions de transfert en définissant un système linéaire puis en expliquant comment les constantes de temps régissent la réponse d'un circuit linéaire.

2.1 Systèmes linéaires

Un système est *linéaire* s'il satisfait les propriétés *d'additivité* et de *proportionnalité*. Supposons un système encapsulé dans une boîte comme celle décrite en Figure 2.1. Un stimulus u_1 est appliqué et délivre une réponse y_1 . Puis un stimulus u_2 possédant une amplitude différente est appliqué et produit la réponse y_2 . Si maintenant on injecte en entrée la somme des deux stimuli, $u_1 + u_2$ et que l'on observe le signal de sortie y , la propriété *d'additivité* est respectée si le signal de sortie est égal à $y_1 + y_2$.

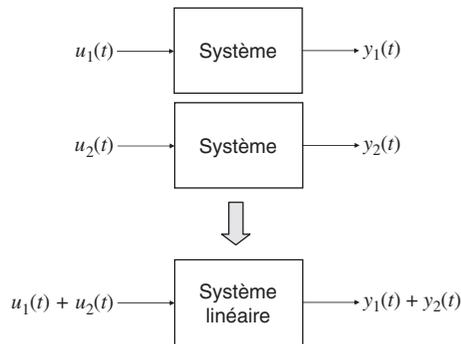


Figure 2.1 La propriété de l'additivité suppose que la somme des réponses à deux stimuli différents u_1 et u_2 est égale à la réponse obtenue par un stimulus d'amplitude $u_1 + u_2$.

Mathématiquement, vous pouvez écrire

$$y(u_1 + u_2) = y(u_1) + y(u_2) \quad (2.1)$$

La seconde propriété est la *proportionnalité* ou l'*homogénéité* comme illustré en Figure 2.2. Si un stimulus u_1 est appliqué à l'entrée du système et délivre une amplitude y_1 , alors si l'on augmente l'amplitude du stimulus par un facteur k , le système délivrera un signal d'amplitude égale à $k \cdot y_1$. Mathématiquement, vous décrivez ce principe par :

$$y(k \cdot u) = k \cdot y(u) \quad (2.2)$$

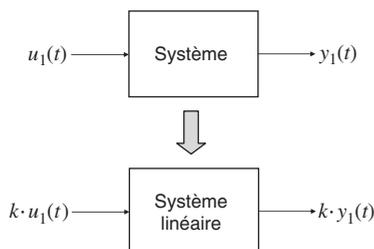


Figure 2.2 La propriété d'homogénéité ou de *proportionnalité* indique que si l'on mesure la réponse à un stimulus puis que l'on augmente ensuite celui-ci d'un facteur k , la nouvelle réponse est k fois la réponse originelle.

Ces deux propriétés forment le principe de *superposition* et doivent être satisfaites par le système avant d'appliquer la transformée de Laplace ou l'un des outils étudiés au premier chapitre (les théorèmes de Norton ou Thévenin par exemple).

2.1 Systèmes linéaires

Quel type de fonction satisfait ce principe ? Supposons un système qui divise la tension d'entrée u par 2 et ajoute un décalage fixe (*offset*) de 2 V. La fonction y qui décrit ce circuit pourrait s'écrire

$$y(u) = 0.5u + 2 \quad (2.3)$$

C'est la droite décalée de la Figure 2.3. Cette fonction caractérise-t-elle un système selon les propriétés décrites ?

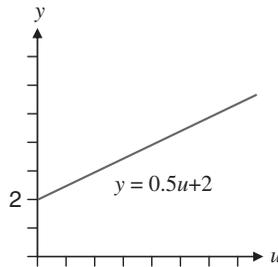


Figure 2.3 Ce circuit divise la tension d'entrée u par 2 et ajoute un décalage de 2 V.

Testons d'abord le principe de proportionnalité. Quelle valeur est retournée par (2.3) pour deux u ?

$$y(2u) = u + 2 \quad (2.4)$$

Ensuite, quel est le résultat $2 \cdot y(u)$?

$$2 \cdot y(u) = u + 4 \quad (2.5)$$

La réponse de (2.5) est différente de celle retournée par (2.4). On peut donc dire que le système décrit en Figure 2.3 est non-linéaire : vous avez reconnu une fonction affine. Vérifions maintenant l'additivité avec deux niveaux d'entrée différents :

- ▶ $u = u_1$ alors $y_1 = 0.5u_1 + 2$
- ▶ $u = u_2$ alors $y_2 = 0.5u_2 + 2$

Si nous ajoutons y_1 et y_2 pour former y , nous trouvons $y = 0.5(u_1 + u_2) + 4$. Maintenant, si le stimulus est constitué de deux stimuli indépendants et additionnés, $u = u_1 + u_2$, alors $y = 0.5(u_1 + u_2) + 2$ ce qui, à nouveau, ne satisfait pas le principe d'additivité. En conclusion, le graphique dessiné en Figure 2.3 n'est pas linéaire au sens des définitions données.

2.1.1 Un système linéaire invariant dans le temps

En plus du principe de superposition, une seconde caractéristique est nécessaire pour définir un système linéaire invariant dans le temps (*Linear Time-Invariant* LTI). Si nous appliquons un signal u à notre système et obtenons une réponse y , alors appliquer u affecté d'un retard de δ secondes produira la même réponse y mais retardée de δ .

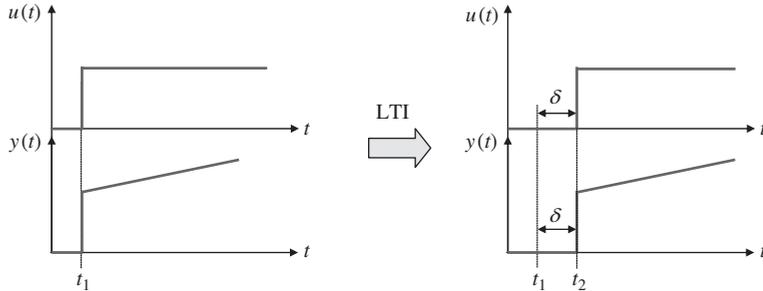


Figure 2.4 Si un signal d'entrée u est appliqué à un système et délivre une réponse y , le même stimulus appliqué avec un retard δ , donnera une réponse similaire mais retardée de δ .

Ce principe est illustré en Figure 2.4 dans laquelle vous voyez que le stimulus u appliqué à deux instants différents t_1 ou t_2 délivre la même réponse y mais décalée dans le temps d'un retard δ .

Est-ce que (2.3) décrit un système LTI ? Commençons par injecter un stimulus retardé $u(t - \delta)$ et calculons la réponse correspondante y :

$$y_1(t) = 0.5u(t - \delta) + 2 \quad (2.6)$$

Si l'on calcule à présent la réponse $y_2(t)$ à $u(t)$ mais décalée par le délai δ :

$$y_2(t - \delta) = 0.5u(t - \delta) + 2 \quad (2.7)$$

Les deux équations retournent la même valeur, ainsi, le système décrit par l'équation (2.3) est invariant dans le temps. Cependant, comme il ne satisfait pas le principe de superposition, il reste non-linéaire. Vous trouverez des détails sur les systèmes LTI dans [1].

2.1.2 La linéarisation du système

Si l'on associe le dessin de la Figure 2.3 à un système électrique, on pourrait dire que la sortie y est liée à l'entrée u par un facteur de 0.5 à laquelle une tension de décalage de 2 V est ajoutée. Pour linéariser ce système, (afin de pouvoir appliquer les théorèmes de Thévenin, Norton, superposition ou la transformée de Laplace), une méthode largement adoptée est appelée *perturbation*. Chaque variable (u et y) est perturbée en ajoutant une petite modulation alternative autour de sa valeur moyenne. L'amplitude de la perturbation est supposée suffisamment faible afin d'éviter toute saturation ou distorsion dans le réseau analysé. Cette composante alternative est désignée par un petit chapeau (^) placé sur la variable considérée écrite en minuscule (\hat{v}_{out} par exemple). La composante continue (si elle existe) est habituellement écrite en majuscule et parfois identifiée par un 0 indicé comme ci-dessous. Dans (2.3) nous avons deux variables, y and u , alors perturbons-les :

$$y = \hat{y} + y_0 \quad (2.8)$$

$$u = \hat{u} + u_0 \quad (2.9)$$

Si l'on substitue (2.8) et (2.9) dans (2.3), nous avons :

$$\hat{y} + y_0 = 0.5(\hat{u} + u_0) + 2 \quad (2.10)$$

Nous développons et regroupons les termes alternatif et continu (*ac and dc terms*) pour former un ensemble de deux équations. Tous les termes continus multipliés par un terme alternatif (^) deviennent des composantes alternatives alors que les produits croisés (c'est-à-dire $\hat{y}\hat{u}$) sont éliminés car ce sont des éléments non-linéaires de contribution négligeable. Ici, l'expression est assez simple et il n'y a pas de problème pour trier les composantes alternatives et continues (ac et dc) :

- ▶ Ac : $\hat{y} = 0.5\hat{u}$ il s'agit de la fonction de transfert en petit signal ou *incrémentale*
- ▶ Dc : $y_0 = 0.5u_0 + 2$ c'est la valeur du point de polarisation (*bias point*)

La somme des définitions ci-dessus forme la réponse *large-signal*. Pour étudier la réponse en fréquence d'un système, seule nous intéresse la réponse petit-signal \hat{y} et pas le décalage statique y_0 qui est invariable, indépendant de la fréquence. Cette composante continue serait utilisée pour calculer un point de fonctionnement par exemple. Nous pouvons maintenant redessiner la Figure 2.3 en séparant les composantes continue et alternative comme indiqué en Figure 2.5 pour $u_0 = 0$.

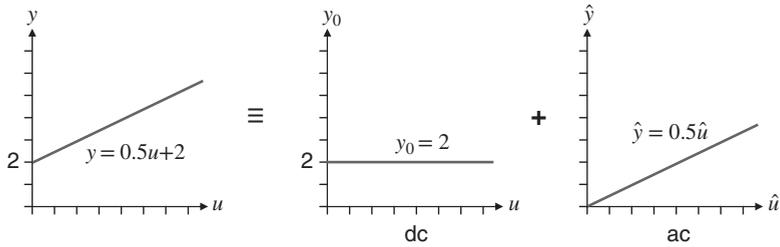


Figure 2.5 On perturbe une équation non-linéaire puis l'on sépare les réponses alternative et continue. L'expression alternative est linéaire.

La fonction décrivant cette courbe s'écrit $\hat{y} = 0.5\hat{u}$ et si vous vérifiez, elle satisfait le principe de superposition et reste invariante dans le temps.

2.2 Constantes de temps

2.2.1 Le réseau RC

La Figure 2.6 décrit un simple réseau associant deux éléments linéaires, une résistance R et un condensateur C . Calculons la relation qui lie y (la réponse) à u (le stimulus). En appliquant les lois des mailles et nœuds, nous pouvons immédiatement écrire que u égale y plus la chute de tension aux bornes de R :

$$u(t) = Ri(t) + y(t) \quad (2.11)$$

Le courant i circulant dans le condensateur dépend de la tension instantanée aux bornes de ses armatures, v_C

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (2.12)$$

En substituant (2.12) dans (2.11) nous avons

$$y(t) = u(t) - RC \frac{dy(t)}{dt} \quad (2.13)$$

2.2 Constantes de temps

Pour résoudre cette équation différentielle du 1^{er} ordre, on peut appliquer la transformée de Laplace à (2.13) en se souvenant qu'une différentiation est une multiplication par s alors qu'une intégration implique une division par s .

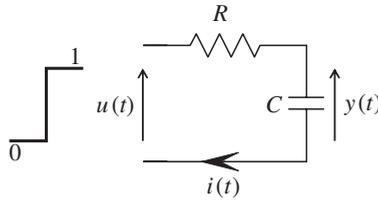


Figure 2.6 Un simple réseau RC.

En appliquant ce principe, nous obtenons la transformée de Laplace suivante, considérant une tension initiale aux bornes du condensateur notée V_0 :

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = U(s) - RC(sY(s) - V_0) \quad (2.14)$$

Si l'on arrange cette expression en factorisant certains de ces termes, nous obtenons

$$Y(s) = \frac{U(s)}{1 + sRC} + \frac{RCV_0}{1 + sRC} \quad (2.15)$$

Supposons que l'on applique à l'entrée du circuit un échelon de tension caractérisé par une impulsion partant de 0 V et montant immédiatement à V_1 . Pour extraire la réponse temporelle (*time-domain response*) de (2.15) à cet échelon, on remplace $U(s)$ par V_1/s (la transformée de Laplace d'un échelon possédant une valeur V_1) et l'on calcule la transformée inverse de Laplace du résultat :

$$\mathcal{L}_s^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}_s^{-1}\left\{\frac{V_1}{s} \frac{1}{1 + sRC}\right\} + \mathcal{L}_s^{-1}\left\{\frac{RCV_0}{1 + sRC}\right\} \quad (2.16)$$

En appliquant les tables de transformées inverses de Laplace, on trouve un résultat constitué de deux termes

$$y(t) = V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.17)$$

Dans chacun de ces termes, il y a τ , la constante de temps, égale à RC . Ces deux termes forment la réponse totale du système étudié. Mathématiquement, (2.17) peut être écrite

$$y(t) = r_f(t) + r_n(t) \quad (2.18)$$

dans laquelle r_f représente la réponse forcée (*the forced or steady-state response*) et r_n la réponse naturelle ou transitoire (*the natural or transient response*).

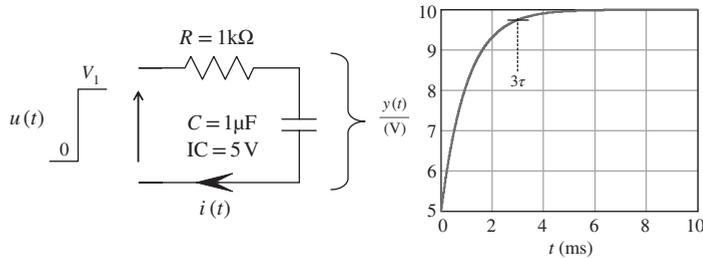


Figure 2.7 La réponse temporelle révèle une forme exponentielle qui atteint une valeur forcée alors que t approche l'infini. Le terme $IC = 5\text{ V}$ indique au simulateur d'initialiser la tension V_0 aux bornes du condensateur à 5 V pour $t = 0$: c'est une condition initiale.

$$r_f(t) = V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (2.19)$$

$$r_n(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.20)$$

La réponse forcée, $r_f(t)$, est le résultat d'un stimulus externe, la *force*, V_1 dans notre cas qui vaut 10 V . Lorsque t approche l'infini, la sortie atteint la valeur finale de 10 V . Cependant, on considère habituellement que la sortie est proche de la valeur forcée – ou que le condensateur est pleinement chargé – après un retard égal à 3 fois la constante de temps du circuit ou 3τ . Dans cet exemple, la constante de temps est de 1 ms donc le condensateur sera considéré chargé après 3 ms comme indiqué sur la Figure 2.7. La réponse forcée dépend du stimulus d'entrée.

D'un autre côté, la réponse naturelle $r_n(t)$ est seulement due aux conditions initiales, V_0 dans notre cas. Il n'y a pas de contribution de la source ou l'excitation à cette réponse naturelle. Pour l'obtenir, on réduit l'excitation à 0 (on éteint la source de tension à 0 V en court-circuitant ses connexions sur le schéma ou l'on réduit à 0 A le générateur de courant ce qui revient à le retirer du circuit étudié). Le nouveau circuit apparaît en Figure 2.8 avec sa réponse individuelle tracée à droite.

2.2 Constantes de temps

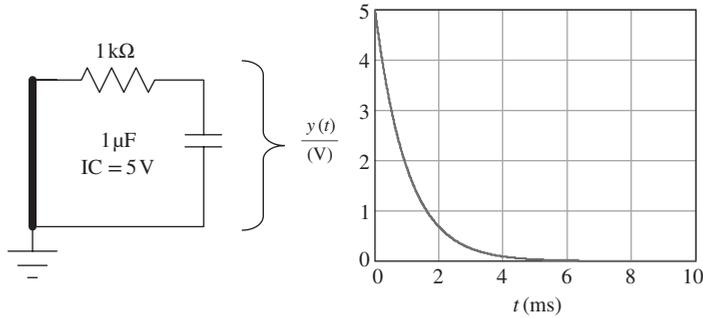


Figure 2.8 La réponse naturelle du réseau est étudiée avec une source d'excitation réduite à 0. Avec un générateur de tension, son extinction revient à le remplacer par un court-circuit.

En Figure 2.8, si vous retirez temporairement le condensateur et regardez la résistance vue de ses connexions (vous imaginez brancher un ohm-mètre aux bornes des points de connexion), vous voyez la résistance de $1 \text{ k}\Omega$. La constante de temps est $RC = 1 \text{ }\mu\text{F} \times 1 \text{ k}\Omega = 1 \text{ ms}$.

Dans (2.15), si l'on considère le condensateur complètement déchargé à $t = 0$, $v_c(0) = 0$, alors l'équation se simplifie :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+sRC} = \frac{1}{1+s\tau} \quad (2.21)$$

Pour $s = 0$, la fonction de transfert retourne 1. Lorsque s augmente, la fonction de transfert diminue en magnitude jusqu'à atteindre 0 lorsque s approche l'infini : c'est un filtre passe-bas dont le pôle ω_p est l'inverse de la constante de temps :

$$\omega_p = \frac{1}{\tau} \quad (2.22)$$

En utilisant cette notation, on peut récrire (2.21) afin de révéler ce pôle au dénominateur :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.23)$$

C'est de cette façon qu'il faut écrire la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre.

2.2.2 La constante de temps avec une bobine

De façon équivalente à ce que nous avons fait avec le réseau RC , on peut écrire les équations des mailles et nœuds pour le réseau RL dessiné en Figure 2.9. On peut écrire que la tension u égale la tension y plus la chute de tension aux bornes de la bobine L :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \quad (2.24)$$

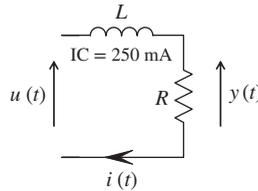


Figure 2.9 Un simple réseau RL .

En récrivant (2.24), nous obtenons

$$y(t) = u(t) - L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.25)$$

En considérant un courant initial dans la bobine I_0 , on peut résoudre cette équation différentielle du 1^{er} ordre en appliquant la transformée de Laplace à l'équation (2.25) :

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = U(s) - L(sI(s) - I_0) \quad (2.26)$$

Le courant $I(s)$ est la tension de sortie $Y(s)$ divisée by R d'où

$$Y(s) = U(s) - L \left(s \frac{Y(s)}{R} - I_0 \right) \quad (2.27)$$

En factorisant et en arrangeant, nous obtenons l'équation finale de Laplace caractérisant notre réseau RL :

$$Y(s) = \frac{U(s)}{1 + s \frac{L}{R}} + \frac{LI_0}{1 + s \frac{L}{R}} \quad (2.28)$$

2.2 Constantes de temps

En considérant maintenant une fonction échelon similaire à celle que nous avons utilisée, de 0 à 10 V, alors la réponse de réseau RL à l'échelon d'entrée est obtenue de la manière suivante

$$\mathcal{L}_s^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}_s^{-1}\left\{\frac{V_1}{s} \frac{1}{1+s\frac{L}{R}}\right\} + \mathcal{L}_s^{-1}\left\{\frac{LI_0}{1+s\frac{L}{R}}\right\} \quad (2.29)$$

La réponse temporelle est :

$$y(t) = V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.30)$$

Elle est également constituée de deux termes, une réponse forcée qui impose V_1 alors que t approche l'infini et une réponse naturelle considérant uniquement la condition initiale :

$$r_f(t) = V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (2.31)$$

$$r_n(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.32)$$

Dans ces expressions, la constante de temps est maintenant définie par $\tau = \frac{L}{R}$.

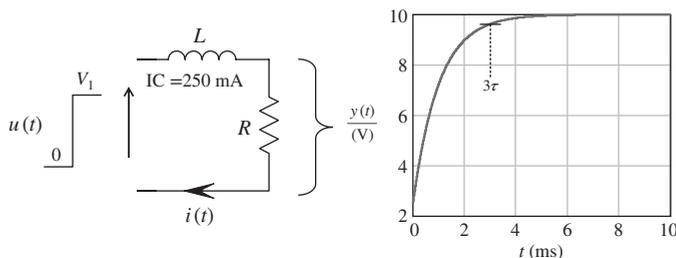


Figure 2.10 La réponse temporelle révèle une forme exponentielle atteignant la valeur *forcée* lorsque t approche l'infini. L'instruction IC = 250 mA indique au simulateur d'utiliser la condition initiale (au moment du calcul du point de polarisation) à $t = 0$.

La réponse forcée dépend de l'excitation (la source 10 V) comme décrit par (2.31). La réponse naturelle dépend exclusivement de la condition initiale, le courant de 250 mA imposé à la bobine à $t = 0$. Ce courant crée une chute de 2.5 V aux bornes de la résistance de 10Ω qui tombe à 0 V au fur et à mesure que le temps s'écoule. Pour tracer cette réponse, on réduit l'excitation à 0 V et l'on calcule la tension selon (2.32). Le résultat apparaît en Figure 2.11.

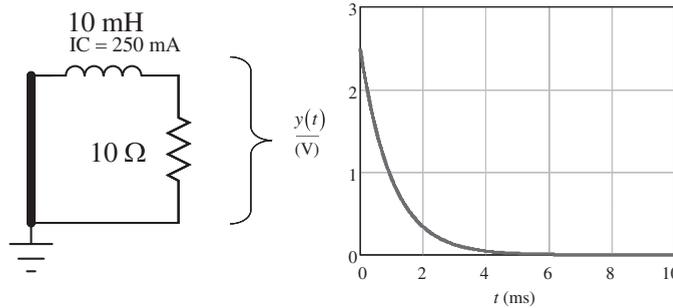


Figure 2.11 La réponse naturelle dépend uniquement de la condition initiale puisque l'excitation est réduite à 0 V. Ici, la source d'entrée est éteinte et remplacée par un fil.

Si l'on éteint la source d'excitation et que l'on retire temporairement la bobine, on peut voir entre ses connexions la résistance qui l'attaque : 10Ω . La constante de temps est simplement $\tau = \frac{10 \text{ mH}}{10 \Omega} = 1 \text{ ms}$.

Dans (2.28), si nous considérons la bobine complètement démagnétisée à $t = 0$, $i_L(0) = 0$, alors l'équation se simplifie à :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + s \frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + s\tau} \quad (2.33)$$

Le format est identique à celui adopté dans l'équation (2.21) avec le filtre RC et dans laquelle la constante de temps apparaît au dénominateur. Il s'agit également d'un filtre passe-bas.

À partir des exemples ci-dessus, nous avons vu que la réponse naturelle d'un réseau électrique linéaire ne dépend pas du signal d'excitation. En plus des conditions initiales, la réponse naturelle dépend uniquement de la structure du réseau, comment les éléments de stockage d'énergie, C and L , sont agencés avec les termes résistifs pour produire des constantes de temps. Ainsi, nous confirmons le point déjà abordé au chapitre 1 et maintenant formellement

défini : pour déterminer les constantes de temps naturelles d'un circuit électrique linéaire, il faut supprimer l'excitation. Si le stimulus est une source de tension, on la réduit à 0 V et l'on court-circuite ses connexions sur le schéma électrique. Si le stimulus est une source de courant, son extinction entraîne sa réduction à 0 A et elle disparaît du schéma. La Figure 2.12 illustre ce principe.

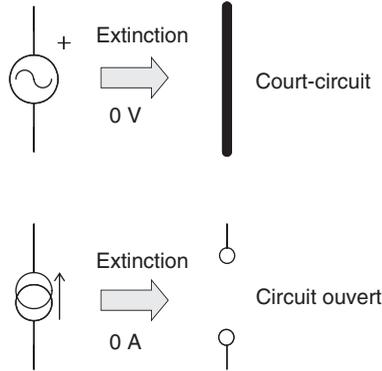


Figure 2.12 On éteint un générateur de tension en réduisant sa tension de sortie à 0 V. On le remplace alors dans le circuit par un fil. Un générateur de courant est éteint en réduisant son intensité à 0 A. Il devient un circuit ouvert et disparaît physiquement du circuit étudié.

Les sources d'excitation en tension et courant ne peuvent pas être appliquées de n'importe quelle façon sur le circuit étudié : une source de tension doit s'insérer en série avec un élément existant alors qu'une source de courant doit être connectée en parallèle avec un composant. De cette manière, lorsque les sources sont éteintes (court-circuit pour la source de tension, circuit ouvert pour le générateur de courant), le circuit retourne à sa structure originelle et les constantes de temps naturelles restent inchangées. Nous reviendrons sur cette notion après introduction des pôles et zéros.

2.3 Formes polynomiales

L'étude des fonctions de transfert a fait l'objet de nombreuses publications et sont notamment explorées en détail dans [2] et [3] par exemple. Dans ce paragraphe, nous allons brièvement passer en revue les éléments importants d'une fonction de transfert. Cependant, le point essentiel reste la détermination et l'écriture d'une fonction de transfert rapidement et efficacement, satisfaisant ainsi le concept de *faible entropie* décrit au chapitre 1 : pouvoir immédiatement identifier des pôles

et des zéros en lisant l'expression, sans passer par une phase de réorganisation des coefficients présents au numérateur et dénominateur.

La fonction de transfert d'un système LTI sans retard pur peut être définie comme le rapport de deux expressions polynomiales :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.34)$$

Le numérateur $N(s)$ accueille les *zéros* de la fonction de transfert alors que les *pôles* sont présents dans le dénominateur $D(s)$. Les zéros sont les racines de l'équation $N(s)=0$ alors que les pôles sont les racines de l'équation *caractéristique*, $D(s)=0$. Mathématiquement, un zéro dans la fonction $y = f(x)$ est la valeur de x pour laquelle $y = 0$. Alternativement, le pôle d'une fonction est un point auquel le module de la fonction devient infini. C'est une singularité. Comme discuté au chapitre 1, un réseau transformé de Laplace possédant un zéro et examiné à la valeur $s = s_z$ entraîne la nullification du signal de sortie, impliquant que le signal d'entrée – le stimulus – ne produit pas de réponse. Quelque part dans le circuit, un court-circuit transformé ou un circuit ouvert dans le chemin électrique bloque le stimulus et la réponse en sortie est nulle : $\hat{v}_{out} = 0 \text{ V}$ ou $V_{out}(s_z) = 0$. Dans le circuit transformé et analysé pour $s = s_p$, la valeur du pôle, le dénominateur de la fonction de transfert s'annule à 0 et la réponse devient infinie.

Un zéro du 1^{er} ordre au numérateur d'une fonction de transfert impliquant un condensateur et une résistance suivrait la forme ci-après :

$$N(s) = 1 + sR_1C_1 = 1 + s\tau_1 \quad (2.35)$$

Pour obtenir la position du zéro, on résout $N(s_z) = 0$ ce qui engendre la racine suivante :

$$s_z = -\frac{1}{R_1C_1} = -\frac{1}{\tau_1} \quad (2.36)$$

Parfois, le zéro peut apparaître à l'origine, impliquant une tension de sortie nulle pour une excitation en tension continue, $s = 0$.

$$N(s) = s\tau_1(1 + \dots) \quad (2.37)$$

2.3 Formes polynomiales

La racine ici est $s_z = 0$, d'où le nom « à l'origine ». Avec un zéro à l'origine, le gain à 0 Hz est nul. Parfois, il peut y avoir plus d'un zéro à l'origine. s^2 dans (2.37) indiquerait un double zéro, s^3 un triple zéro et ainsi de suite. Lorsqu'un condensateur se trouve en série avec le stimulus ou se trouve en série quelque part dans le chemin électrique menant à la sortie du circuit, la composante continue est bloquée et il est possible que vous identifiez un ou plusieurs zéros à l'origine. Une situation similaire existe lorsqu'une bobine court-circuitée en continu le cheminement électrique du stimulus à la masse.

Dans l'analyse harmonique, s est égal à $j\omega$, une fréquence purement imaginaire. s_z est également un nombre complexe mais affecté d'une partie réelle et imaginaire. Dans (2.36), il n'y a pas de partie imaginaire et l'on dit que la racine est *réelle* et *négative*. Il s'agit d'un zéro placé dans la partie gauche du plan complexe (aussi appelé plan d'Argand). On parle en anglais de LHPZ, *left half-plane zero*. Si la racine est positive, le zéro se trouve dans la partie droite du plan complexe. En anglais, on évoque alors un *right half-plane zero*, RHPZ. Ce type de zéro présente des propriétés différentes de celles d'un LHPZ. La fréquence angulaire ω_z à laquelle le zéro apparaît est obtenue en calculant le module de (2.36) :

$$\omega_z = \left| -\frac{1}{R_1 C_1} + 0j \right| = \frac{1}{R_1 C_1} \quad (2.38)$$

Avec cette définition et (2.36) à l'esprit, on peut récrire (2.35) d'une façon différente :

$$N(s) = 1 + \frac{s}{\omega_z} \quad (2.39)$$

C'est la forme normalisée d'un numérateur du 1^{er} ordre. La Figure 2.13 trace la réponse en fréquence d'un zéro placé à 1.6 kHz et d'un dénominateur unitaire (pas de pôle) :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = 1 + \frac{s}{\omega_z} \quad (2.40)$$

Il s'agit de la réponse typique d'un zéro situé dans le demi-plan gauche (LHPZ) pour lequel l'avance de phase augmente avec la fréquence avant de toucher l'asymptote 90° à l'infini. Si nous tracions la réponse de ce même zéro mais situé cette fois dans le demi-plan gauche, $N(s) = 1 - \frac{s}{\omega_z}$, le module resterait identique mais la phase indiquerait un retard (plutôt qu'une avance) augmentant jusqu'à

90°. Un zéro dans le demi-plan gauche (RHPZ) est souvent désigné dans la littérature technique comme un zéro *instable*.

Si l'on observe la réponse du zéro, nous n'observons pas un module nul au point où le zéro survient, 1.6 kHz. Est-ce que cela s'oppose à notre définition mathématique du zéro? La racine de $N(s)=0$ est un réel négatif dont la valeur est définie par (2.36). Lorsque nous écrivons $s = j\omega$, nous considérons uniquement les valeurs situées sur l'axe vertical imaginaire puisque σ est réduit à zéro en analyse harmonique. Dans cette approche, il est impossible d'annuler le numérateur puisque s ne prend jamais la valeur définie par (2.36). Il existe deux cas, cependant, pour lesquels le numérateur s'annule vraiment et entraîne une réponse égale à 0. Le premier cas concerne un zéro à l'origine, comme c'est le cas avec un simple différentiateur RC dans lequel un condensateur série bloque la propagation du continu. Le zéro est situé à l'origine, un point commun aux deux axes imaginaire et réel. Lorsque s égale 0 – vous polarisez l'entrée du différentiateur avec une tension continue par exemple – alors la réponse est vraiment 0 également. Le second cas apparaît avec une paire de zéros non-amortis. Lorsque le facteur de qualité approche l'infini (pas de pertes), alors les deux zéros deviennent complexes conjugués et pour $s = s_{z1} = s_{z2}$, le numérateur s'annule et engendre une sortie égale à 0. Au laboratoire, cela reviendrait à câbler un réjecteur (*notch filter*) affecté d'un fort facteur de qualité. Malgré une excitation injectée à l'entrée du filtre, on n'observerait qu'un niveau infiniment faible en sortie sur l'oscilloscope, témoignant de l'action des zéros.

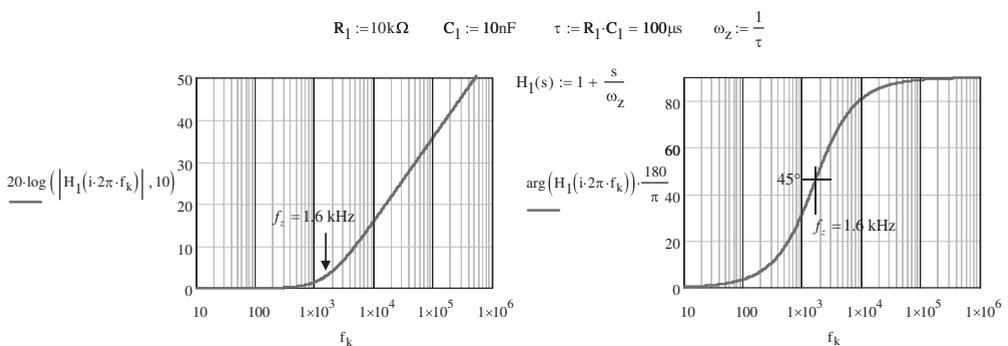


Figure 2.13 La réponse d'un zéro situé dans le demi-plan gauche montre un gain qui augmente et une phase approchant 90° au-delà de la position du zéro.

2.3 Formes polynomiales

Pour un pôle du premier ordre, l'écriture est similaire. En s'inspirant des expressions (2.21) et (2.33), le dénominateur $D(s)$ pour un système du 1^{er} ordre s'écrit d'une façon similaire, ici avec un simple réseau RC :

$$D(s) = 1 + sR_2C_2 = 1 + s\tau_2 \quad (2.41)$$

Pour obtenir la position du pôle, on résout $D(s_p) = 0$ ce qui nous conduit à l'expression suivante de la racine :

$$s_p = -\frac{1}{R_2C_2} = -\frac{1}{\tau_2} \quad (2.42)$$

Parfois, le pôle se situe à l'origine, impliquant que pour le continu, $s = 0$, le module de la fonction de transfert s'approche de l'infini puisque son dénominateur s'annule :

$$D(s) = s\tau_1(1 + \dots) \quad (2.43)$$

La racine est ici $s_p = 0$ d'où le terme à l'origine. Un système comportant un pôle à l'origine offre un gain statique infini. En réalité, ce gain est borné par le gain en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel ou de tout autre amplificateur présent. Quelques fois, il peut y avoir plusieurs pôles à l'origine. s^2 dans (2.43) indiquerait un double pôle, s^3 un triple pôle et ainsi de suite.

Le signe négatif dans (2.42) indique une racine placée dans le demi-plan gauche. On parle en anglais de LHPP, *left half-plane pole*. Si la racine est positive, le pôle est situé dans la partie droite du plan complexe. En anglais, on évoque alors une *right half-plane pole*, RHPP. Comme nous l'avons fait pour le zéro, on peut calculer le module de (2.42) et obtenir

$$\omega_p = \left| -\frac{1}{R_2C_2} + 0j \right| = \frac{1}{R_2C_2} \quad (2.44)$$

Si l'on réarrange (2.41) sous une forme familière, nous avons

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_p} \quad (2.45)$$

La Figure 2.14 trace la réponse en fréquence typique d'un pôle seul placé à 1.6 kHz (pas de zéro) :

$$H(s) = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \tag{2.46}$$

Il s'agit de la réponse d'un LHPP pour lequel le retard de phase augmente avec la fréquence pour asymptotiquement atteindre -90° . Si nous avons tracé la réponse du même pôle mais situé dans le demi-plan droit, $D(s) = 1 - \frac{s}{\omega_p}$, le module serait similaire mais la phase n'afficherait plus un retard mais une avance jusqu'à 90° . Un pôle de type RHPP, dans la littérature, est souvent désigné comme un pôle instable.

Une fois encore, nous ne pouvons pas physiquement observer au laboratoire la manifestation d'un pôle par une amplitude de signal de sortie qui grossirait à l'infini à la fréquence du pôle. L'explication donnée pour le zéro est valide également pour le pôle : avec $s = j\omega$ il est impossible d'annuler le dénominateur pour $s = s_p$ qui est une valeur réelle et négative définie par (2.42). Le premier cas dans lequel le dénominateur pourrait vraiment être annulé pour $s = j\omega$ est un circuit qui possède un pôle à l'origine. Un intégrateur construit avec un op amp par exemple possède ce pôle à l'origine. Pour $s = 0$, le gain n'est pas infini bien sûr, mais très élevé, limité électriquement par le gain en boucle ouverte de l'op amp. Le second cas se présente avec un circuit possédant un dénominateur non amorti : un filtre LC parfait, sans pertes ohmiques. Si le facteur de qualité approche l'infini, les pôles sont deux imaginaires conjugués et $D(s)$ s'annule vraiment lorsque s approche la résonance à $s_{p1} = s_{p2}$. Un filtre LC passe-bas non amorti peut être assemblé au laboratoire et produire une tension de sortie élevée à la résonance.

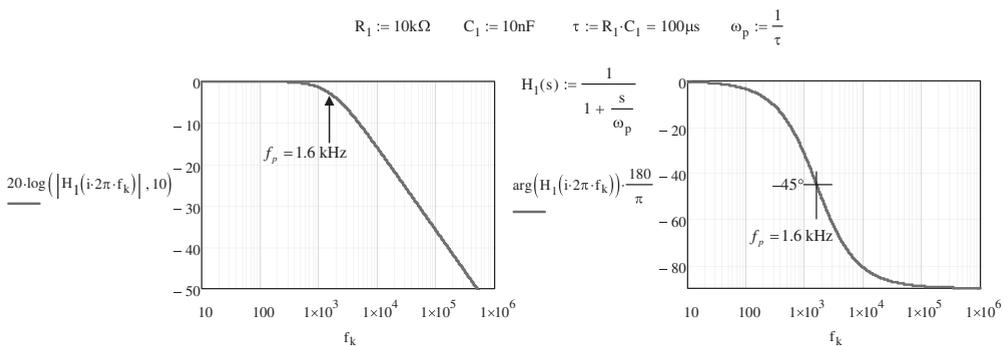


Figure 2.14 La réponse d'un pôle situé dans le demi-plan gauche montre un gain qui baisse et une phase approchant -90° au-delà de la position du pôle.

2.3 Formes polynomiales

Si l'on combine maintenant la réponse en fréquence d'un zéro avec celle d'un pôle, la fonction de transfert devient

$$H(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.47)$$

Figure 2.15 représente les module et phase d'un zéro et d'un pôle distant d'un rapport k égal à 20. Lorsque le zéro se manifeste, la phase augmente et veut tendre vers 90° . Le pôle apparaît plus tard et rabat la phase vers zéro à nouveau.

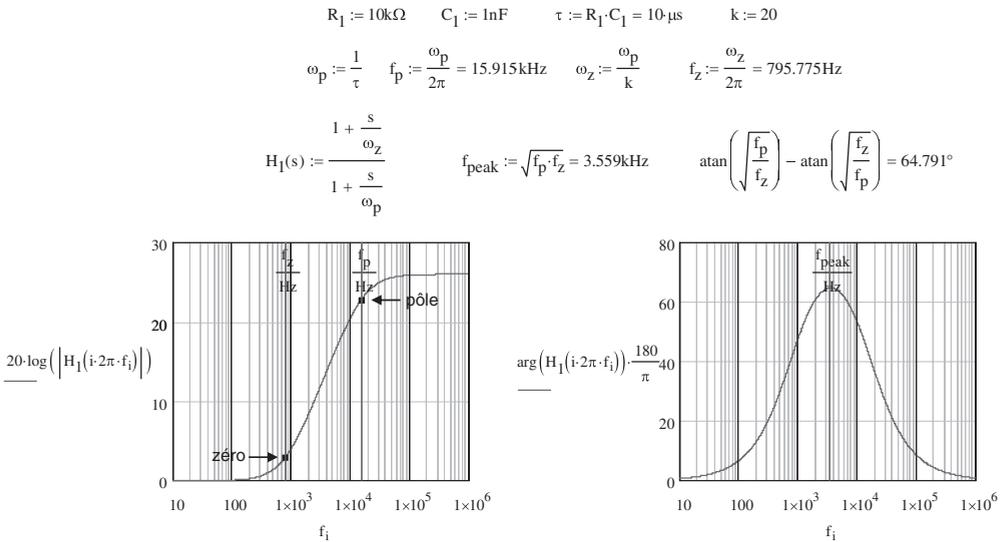


Figure 2.15 La réponse combinée d'un pôle et d'un zéro montre une avance de phase qui passe par un maximum puis retombe.

Comme indiqué en [4], l'avance de phase est maximale à une fréquence égale à $\sqrt{f_z f_p}$. Cette bosse, également appelée *phase boost*, est typique des circuits de compensation utilisés dans les systèmes bouclés.

2.3.1 Expressions à faible entropie

En s'appuyant sur les notations que nous avons vues, il est possible d'étendre le concept à des fonctions d'ordre plus élevé en factorisant les pôles et les zéros. Vous trouverez ci-dessous une fonction de transfert comportant des pôles et des zéros représentés sous une forme factorisée, utilisée notamment par Dr. Middlebrook [5].

$$H(s) = H_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z3}}\right) \dots}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p3}}\right) \dots} \quad (2.48)$$

Dans cette expression, H_0 représente le gain continu ou statique obtenu pour s égale 0. Cependant, comme nous allons le voir dans différentes expressions, le terme de tête peut aussi être un gain calculé pour s approchant l'infini ou une résonance. Pourquoi réorganiser les pôles et les zéros selon cette architecture particulière? Pour toujours la même motivation : nous voulons une expression à *faible entropie* dans laquelle les pôles, zéros et gains seront immédiatement identifiés. Supposons que vous ayez déterminé la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = -\frac{R_4 + sR_2 R_4 C_1}{R_3 + sR_6 R_3 (C_1 + C_3)} \quad (2.49)$$

Est-il possible de dire immédiatement si cette fonction possède un gain statique, des pôles, des zéros? Personnellement, je ne sais pas. Retravajlons le numérateur en factorisant R_4 et en réarrangeant le dénominateur par la factorisation de R_3 :

$$H(s) = -\frac{R_4 (1 + sR_2 C_1)}{R_3 [1 + sR_6 (C_1 + C_3)]} \quad (2.50)$$

Maintenant, séparons R_4/R_3 de la fraction principale pour obtenir

$$H(s) = -\frac{R_4}{R_3} \frac{1 + sR_2 C_1}{1 + sR_6 (C_1 + C_3)} \quad (2.51)$$

Il est désormais possible de récrire l'expression selon la forme familière

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.52)$$

dans laquelle nous avons identifié

$$H_0 = -\frac{R_4}{R_3} \quad (2.53)$$

2.3 Formes polynomiales

un zéro positionné à

$$\omega_z = \frac{1}{R_2 C_1} \quad (2.54)$$

et enfin un pôle placé à

$$\omega_p = \frac{1}{R_6 (C_1 + C_3)} \quad (2.55)$$

Veillez noter que lorsque l'on écrit une fonction de transfert, le terme de tête (identifié par un 0 ou un terme infini ∞ indicés, respectivement pour signaler une asymptote basse ou haute fréquence) et la fonction de transfert elle-même doivent être de dimension ou d'unité similaire. Cela signifie que la fraction restante $N(s)/D(s)$ est sans dimension. Si nous supposons que $H(s)$ décrit une fonction de transfert en tension, alors sa dimension sera des [V] par [V] et H_0 (si différent de 0) sera sans unité. Supposons que vous déterminiez une impédance $Z(s)$, sa dimension sera en [Ω]. Ainsi, la bonne façon d'écrire la fonction de transfert sera la suivante :

$$Z(s) = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \dots \quad (2.56)$$

dans laquelle R_0 est la résistance offerte par le circuit lorsque $s = 0$ et possède une dimension en ohm. Si l'on déterminait plutôt une admittance, $Y(s)$, alors Y_0 serait exprimée en siemens, [S], et ainsi de suite.

Des expressions à *faible entropie* sont naturellement obtenues par inspection. Observons la Figure 2.16 par exemple.

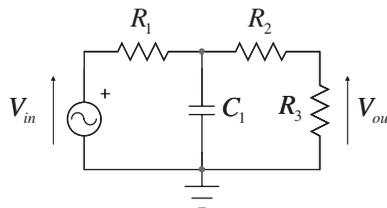


Figure 2.16 Un simple circuit du premier ordre impliquant 3 résistances et un condensateur.

Si nous utilisons la force brutale, on peut calculer la fonction de transfert V_{out}/V_{in} en coupant le circuit à la connexion gauche de R_2 puis en appliquant

Thévenin comme montré en Figure 2.17. La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_3 \frac{1}{sC_1}}{R_2 + \left(\frac{\frac{1}{sC_1} R_1}{\frac{1}{sC_1} + R_1} \right) + R_3} R_1 + \frac{1}{sC_1} \quad (2.57)$$

Si l'on développe cette expression, on obtient une forme sans grand intérêt comme celle de (2.58) : on observe des termes en s^2 et de nombreux éléments non factorisés. Bonne chance pour déceler un pôle ou un zéro !

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_3}{R_2 + R_3 + sC_1 R_1 (R_2 + R_3) + \frac{sR_1 C_1}{R_1 C_1 s^2 + sC_1} + \frac{sR_1^2 C_1}{1 + sR_1 C_1}} \quad (2.58)$$

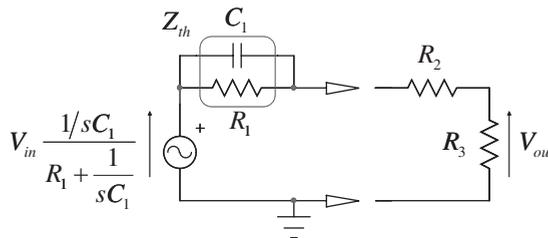


Figure 2.17 En appliquant Thévenin, on peut utiliser le diviseur résistif.

Plutôt que d'appliquer la méthode traditionnelle, utilisons ce que nous avons vu au chapitre 1. Quelle est la fonction de transfert H_0 que l'on peut déduire en regardant la Figure 2.16 ? C_1 disparaît du dessin en excitation continue (le condensateur offre une impédance infinie à 0 Hz, alors qu'une bobine serait remplacée par un court-circuit dans des conditions similaires) et il reste un simple diviseur résistif constitué de la combinaison série de R_1 et R_2 pilotant R_3 :

$$H_0 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.59)$$

Ensuite, en présence d'un circuit du 1^{er} ordre, calculons la constante de temps impliquant C_1 : quelle est la résistance vue de ses connexions lorsque la source

2.3 Formes polynomiales

d'excitation est réduite à 0 ? Ici, le stimulus est une tension et nous court-circuitons les connexions de la source comme montré en Figure 2.18.

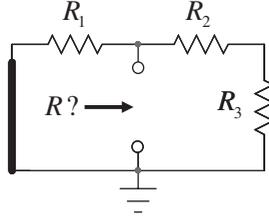


Figure 2.18 La constante de temps est obtenue en réduisant l'excitation à 0 V et en déterminant la résistance vue par les connexions du condensateur dans ces conditions.

Si vous regardez dans les connexions de C_1 , vous voyez R_1 en parallèle avec la mise en série de R_2 avec R_3 :

$$R = R_1 \parallel (R_2 + R_3) \quad (2.60)$$

La constante de temps est immédiate : $\tau = C_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) \right]$.

Ce circuit comporte-t-il un zéro ? En d'autres termes, peut-on identifier une condition dans le circuit qui empêcherait le stimulus de produire une réponse ? A part court-circuiter C_1 (qui advient lorsque s approche l'infini, cependant, $s \rightarrow \infty$ ne compte pas comme un point particulier pour déterminer un zéro par inspection), les éléments restants sont constants donc il n'y a pas de zéro dans ce circuit. La fonction de transfert suit la forme développée en (2.33) et possède un terme statique, H_0 :

$$H(s) = H_0 \frac{1}{1+s\tau} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{1}{1+sC_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) \right]} = H_0 \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.61)$$

H_0 a été défini par (2.59). Le pôle ω_p est immédiat, c'est l'inverse de la constante de temps naturelle du circuit :

$$\omega_p = \frac{1}{C_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) \right]} \quad (2.62)$$

Les expressions (2.61) et (2.58) sont cependant identiques. (2.58) n'éclaire en aucun cas la réponse fréquentielle de la fonction de transfert. Non seulement aller de (2.57) à (2.58) peut conduire à des erreurs mais réarranger l'ensemble sous une forme factorisée réclamera un nouvel effort de calcul. D'un autre côté, nous avons

obtenu (2.61) en moins d'une minute et le résultat fait sens du premier coup ! La présence de combinaisons d'éléments en parallèle vous permet immédiatement d'apprécier si un élément particulier domine l'expression ou, si cet élément devient nul ou infini, quelle sera la réponse résultante. Dans (2.62) si R_2 est bien plus petite que R_3 , le pôle va principalement dépendre de R_1 en parallèle avec R_3 et le gain statique H_0 va augmenter. Je ne pourrais pas observer cette dépendance dans (2.58) sans passer plus de temps à reformuler l'expression différemment.

Au fait, comme sait-on si les deux expressions sont équivalentes ? On peut saisir ces expressions dans un programme mathématique tel que Mathcad[®] et tracer les réponses fréquentielles pour les comparer entre elles. Si les équations sont égales, les modules et phases se superposent parfaitement. Vous pouvez également tracer la différence des deux équations (en module et en phase) en analyse harmonique et vérifier une réponse quasi-nulle (la résolution du logiciel mathématique). La moindre différence notable indiquera la présence d'une erreur dans l'une des formules.

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 10\text{nF} \quad R_2 := 1\text{k}\Omega \quad R_3 := 150\Omega$$

$$\|(\cdot, \cdot)\| := \frac{x \cdot y}{x + y} \quad \text{Définit ce que \| signifie}$$

$$H_1(s) := \frac{R_3}{R_2 + R_3 + C_1 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot s + C_1 \cdot R_1 \cdot R_3 \cdot s + \frac{C_1 \cdot R_1 \cdot s}{R_1 \cdot C_1 \cdot s^2 + C_1 \cdot s} + \frac{C_1 \cdot R_1^2 \cdot s}{C_1 \cdot R_1 \cdot s + 1}} \quad \text{Expression brute}$$

$$H_0 := \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad \omega_p := \frac{1}{C_1 [R_1 \| (R_2 + R_3)]} \quad H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad \text{Expression faible entropie}$$

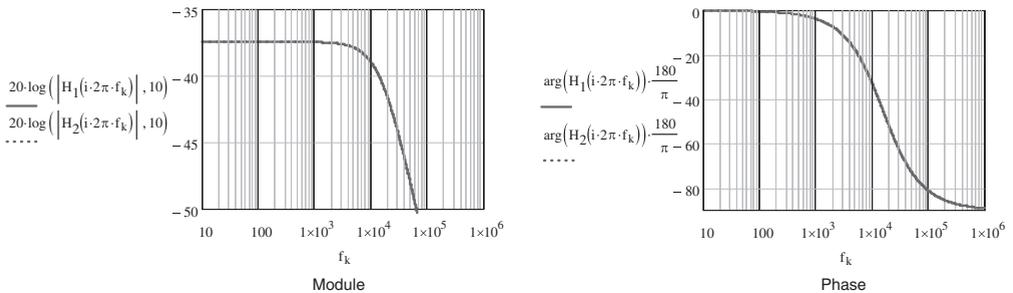


Figure 2.19 Mathcad[®] ou SPICE permettent de tracer les courbes et vérifier l'intégrité des équations dérivées.

La Figure 2.19 représente la façon dont les deux courbes se superposent. Si vous découvrez une erreur lors de la détermination de H_0 ou d'une constante de

2.3 Formes polynomiales

temps, vous pouvez apprécier la facilité de la correction portant uniquement sur le terme incriminé. Si cela arrivait avec (2.58), vous devriez repartir du début.

À propos de Mathcad[®], je recommande que vous associiez des unités aux éléments que vous manipulez. Le programme vérifie l'homogénéité des formules obtenues et pointe immédiatement des incohérences dans les unités. Pour définir la mise en parallèle de deux composants, j'utilise le symbole || que vous trouverez dans la barre d'outils « Custom characters ». Vous affichez ce symbole dans le sous-menu « View » et définissez ce que mettre x et y en parallèle signifie. L'opération || utilise l'opérateur « xfy » disponible dans le sous-menu « Evaluation ». Il peut ainsi être utilisé pour associer plusieurs éléments en parallèle d'une façon rapide et efficace. J'utilise également les indices lorsque je désigne un composant afin d'améliorer la lisibilité de l'équation finale : R_1 plutôt que R1 par exemple. Vous ajoutez un indice en pressant la touche « . » après avoir tapé la lettre du composant, R ou C par exemple. Finalement, dans tous les graphiques présentés, la graduation de l'axe des x suit une échelle logarithmique. Pour distribuer un certain nombre de points par décade, (comme SPICE le fait en analyse .AC), j'utilise une simple routine développée par mon collègue Dr. Capilla. Ce petit programme distribue les points le long de l'axe en relation avec le nombre total de points sélectionnés par décade. Pour un diagramme de Bode standard, 100 points par décade sont souvent suffisants. Cependant, si vous ne souhaitez pas rater une résonance pointue, il faut augmenter la résolution à 1000 ou plus par décade. Dans le script décrit ci-dessous, l'indice de la variable k n'est pas réalisé en tapant sur « . ». Comme il désigne un pointeur sur une matrice de stockage f , il faut presser « [» après avoir tapé la lettre.

```
Start_Freq:= 101
```

```
Stop_Freq:= 106
```

```
Points_per_decade:= 1000
```

```
Number_of_decades:= (log(Stop_Freq) — log(Start_Freq))
```

```
Number_of_points:= Number_of_decades · Points_per_decade + 1
```

```
k:= 0.. Number_of_points
```

```
fk:= 10 · log(Start_Freq) + k ·  $\frac{\text{Number\_of\_decades}}{\text{Number\_of\_points}}$  · Hz
```

Il existe une fonction native que l'on peut appeler par *logspace*. Vous passez les fréquences de départ et d'arrivée plus le nombre de points. Une routine utilisant *logspace* pourra s'écrire comme cela :

```
Number_of_points:= 1000
```

```
k:= 0.. Number_of_points
```

```
f:= logspace (10, 106, Number_of_points)-Hz
```

Et maintenant, la cerise sur le gâteau : que se passe-t-il si nous ajoutons une petite résistance r_C en série avec le condensateur C_1 comme l'indique la Figure 2.20 ? Peut-on réutiliser ce que nous avons déjà obtenu avec (2.61) sans repartir de zéro ? Mais bien sûr !

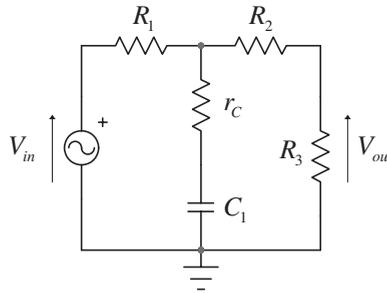


Figure 2.20 Ajouter une petite résistance r_C en série n'est pas un problème avec une approche *faible entropie*.

Est-ce que H_0 est affecté ? Non, comme C_1 disparaît de la figure en continu, rajouter une résistance en série comme r_C ne modifie en rien le gain H_0 . Maintenant, considérons la constante de temps τ . Sans r_C , si l'on regarde au travers des connexions de C_1 une fois la source court-circuitée, nous voyons une organisation résistive série/parallèle. Maintenant que r_C est ajoutée, il suffit de l'additionner au terme précédent :

$$\tau = C_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) + r_C \right] \quad (2.63)$$

et la nouvelle définition du pôle devient

$$\omega_p = \frac{1}{C_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) + r_C \right]} \quad (2.64)$$

2.3 Formes polynomiales

Avec C_1 tout seul (sans r_C), nous avons dit qu'à part un court-circuit à l'infini de ce dernier, l'excitation produisait toujours une réponse. Maintenant que nous avons inséré une résistance en série, est-ce toujours vrai ? En d'autres termes, l'agencement en série de r_C et C_1 (considérant un circuit transformé dans lequel C_1 est remplacé par $1/sC_1$) peut-il produire un court-circuit à une certaine valeur de s , le zéro ?

$$r_C + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sr_C C_1}{sC_1} = 0 \quad (2.65)$$

Si l'on résout cette équation, on trouve un zéro positionné à $\omega_z = \frac{1}{r_C C_1}$. On peut à présent rapidement mettre (2.61) à jour en réutilisant ce que nous avons trouvé en ajoutant r_C :

$$H(s) = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{1 + sr_C C_1}{1 + sC_1 \left[R_1 \parallel (R_2 + R_3) + r_C \right]} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.66)$$

dans lequel H_0 est toujours défini par (2.59) et le pôle par (2.64). Le zéro est exprimé par :

$$\omega_z = \frac{1}{r_C C_1} \quad (2.67)$$

Il eût été impossible de déterminer si rapidement la fonction de transfert de ce second exemple sans passer par les techniques de calculs rapides.

2.3.2 Expressions d'ordre supérieur

Le degré du dénominateur définit l'ordre du réseau étudié. Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des expressions du premier ordre dans lesquelles le degré du dénominateur était 1. Ainsi, nous pouvons combiner (2.35) ou (2.45) sous une forme polynomiale et exprimer une fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{b_0 + b_1 s} \quad (2.68)$$

En factorisant a_0 et b_0 , nous avons :

$$H(s) = \frac{a_0}{b_0} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}s}{1 + \frac{b_1}{b_0}s} \quad (2.69)$$

Dans cette expression linéaire, tous les coefficients sont réels et a_0/b_0 représente le gain statique basse fréquence ($s = 0$) que nous notons H_0 . Après le remaniement de (2.69) nous obtenons :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + s \frac{a_1}{a_0}}{1 + s \frac{b_1}{b_0}} \quad (2.70)$$

Nous avons dit précédemment que l'écriture convenable de l'équation réclamait que H_0 et $H(s)$ partagent une dimension commune. Si $H(s)$ est un gain en courant ou en tension alors, clairement, H_0 est sans unité. Si $Z(s)$ est obtenue (une impédance), alors le terme de tête doit être une résistance notée R_0 . Si le terme de tête possède une unité, alors le numérateur et le dénominateur sont sans dimension. Dans ce cas, sa_1/a_0 et sb_1/b_0 sont également sans dimension dans (2.70). Comme s possède la dimension d'une fréquence en Hz, a_1/a_0 ou b_1/b_0 doivent présenter une dimension en Hz^{-1} ou en seconde : ce sont des constantes de temps, celles qui apparaissent dans (2.35) et dans (2.41). Pour un système du 1^{er} ordre, b_1/b_0 est la constante de temps du circuit évaluée lorsque le stimulus d'entrée est supprimé : RC ou L/R respectivement dans la Figure 2.6 et la Figure 2.9. De façon équivalente, a_1/a_0 est également une constante de temps mais évaluée dans une condition différente comme nous allons le voir plus tard.

On peut décrire des réseaux d'ordre supérieur simplement en augmentant le degré des polynômes :

$$H(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + \dots + b_ns^n} \quad (2.71)$$

(2.71) représente une façon d'écrire (2.48). En fait, des expressions d'ordre élevé obtenues par les FACTs se présenteront toujours sous une forme organisée comme celle de l'équation (2.71). Ce résultat peut être déjà exploité pour tracer une réponse fréquentielle mais il ne satisfait toujours pas le format présenté par (2.48) dans lequel les pôles et les zéros sont organisés dans une forme claire et ordonnée. Après lecture de cet ouvrage, vous saurez

2.3 Formes polynomiales

comment reprendre une fraction de polynômes telles celle de (2.71) afin de la mettre en forme sous une expression à *faible entropie*.

Le degré du dénominateur, n , indique l'ordre du circuit. Il fixe également le nombre de pôles : si vous étudiez un réseau d'ordre 3, il existe trois pôles (trois racines pour un polynôme du troisième ordre). Même remarque pour le numérateur : dans le cas d'une forme du second ordre, il existe deux zéros. Ces pôles et zéros peuvent être réels, imaginaires ou conjugués. Ainsi, si a_0/b_0 est factorisé, on obtient une expression légèrement différente :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{a_1}{a_0}s + \frac{a_2}{a_0}s^2 + \frac{a_3}{a_0}s^3 + \dots + \frac{a_m}{a_0}s^m}{1 + \frac{b_1}{b_0}s + \frac{b_2}{b_0}s^2 + \frac{b_3}{b_0}s^3 + \dots + \frac{b_n}{b_0}s^n} \quad (2.72)$$

Pour maintenir le numérateur et le dénominateur sans unité, a_1/a_0 et b_1/b_0 doivent posséder la dimension d'un temps ou des Hz^{-1} comme dans (2.70). Pour des réseaux d'ordre supérieur à 1, a_1/a_0 et b_1/b_0 sont les *sommes* des constantes de temps du circuit obtenues dans certaines conditions. Si b_1/b_0 rassemble les constantes de temps naturelles dévoilées lorsque l'excitation est réduite à 0, a_1/a_0 sera obtenu en considérant une tension de sortie nullifiée malgré la présence de l'excitation. a_2/a_0 et b_2/b_0 seront multipliés par s^2 qui possède la dimension de Hz^2 . Dès lors, a_2/a_0 et b_2/b_0 additionnent le produit de deux constantes de temps pour former la dimension de temps² ou Hz^{-2} . Si l'on continue, a_3/a_0 et b_3/b_0 sont multipliés par s^3 qui possède la dimension de Hz^3 . Ainsi, a_3/a_0 et b_3/b_0 additionneront des produits de trois constantes de temps pour former une dimension en temps³ ou Hz^{-3} . Vous continuez ensuite jusqu'à l'élément n . Ces explications peuvent apparaître obscures pour le moment mais les exemples détaillés dans les chapitres suivants devraient éclairer ces principes importants.

2.3.3 Formes polynomiales du deuxième ordre

Il n'est pas aisé d'identifier des pôles et des zéros dans (2.71). Supposons que le dénominateur D de notre fonction de transfert d'ordre 2 apparaisse une forme dans laquelle b_0 égale 1

$$D(s) = 1 + b_1s + b_2s^2 \quad (2.73)$$

C'est l'expression que les techniques de calculs rapides vous permettront de déterminer extrêmement rapidement. Pour obtenir la position des pôles, vous devez

vous rappeler quelques formes typiques. L'une des plus populaires est celle d'un filtre passe-bas du deuxième ordre. Son dénominateur est caractérisé par un facteur de qualité Q (ou un facteur d'amortissement ζ) et une fréquence de résonance ω_0 :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.74)$$

Lorsque vous obtenez une formule comme celle décrite par (2.73), que celle-ci soit présente au numérateur ou au dénominateur (vous avez deux zéros dans ce cas), vous devez l'arranger pour qu'elle satisfasse le format de (2.74). Pour ce faire, on peut identifier les termes en considérant égales (2.73) et (2.74)

$$1 + b_1 s + b_2 s^2 = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (2.75)$$

puis en identifiant les coefficients

$$b_1 = \frac{1}{\omega_0 Q} \quad (2.76)$$

$$b_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (2.77)$$

À partir de (2.77), nous avons

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \quad (2.78)$$

qui, une fois substituée dans (2.76) donne la définition du facteur de qualité :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \quad (2.79)$$

Cette fonction du deuxième ordre peut être écrite sous différentes formes comme la Figure 2.21 l'illustre. Supposons que vous déterminez une fonction du deuxième ordre comme celle décrite par (2.71) mais vous ne savez pas de quel type de filtre il s'agit. Dans ce cas, il suffit de saisir l'expression sous Mathcad[®] et de tracer sa réponse en fréquence. On compare ensuite la réponse à celles données en Figure 2.21 et Figure 2.22. Puis l'on identifie Q et ω_0 exactement comme nous l'avons fait avec (2.76) et (2.77).

2.3 Formes polynomiales

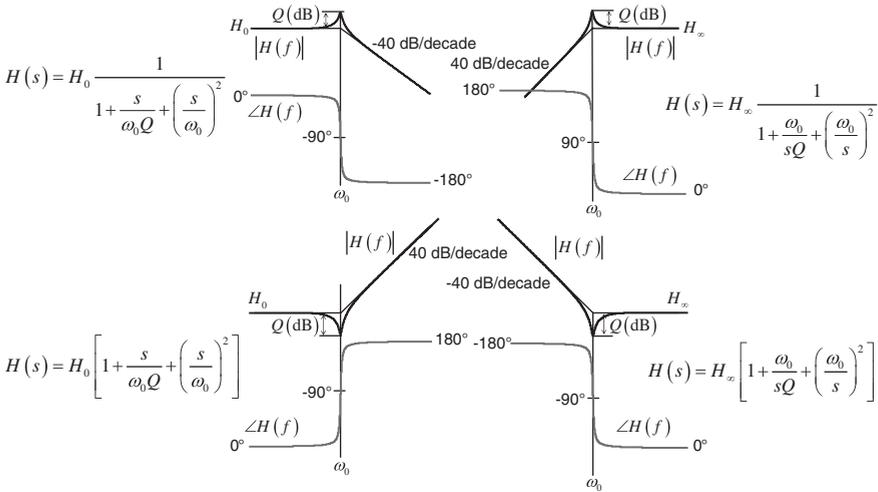


Figure 2.21 Différentes réponses de réseaux du deuxième ordre. L'axe horizontal est $\text{Log}(f)$.

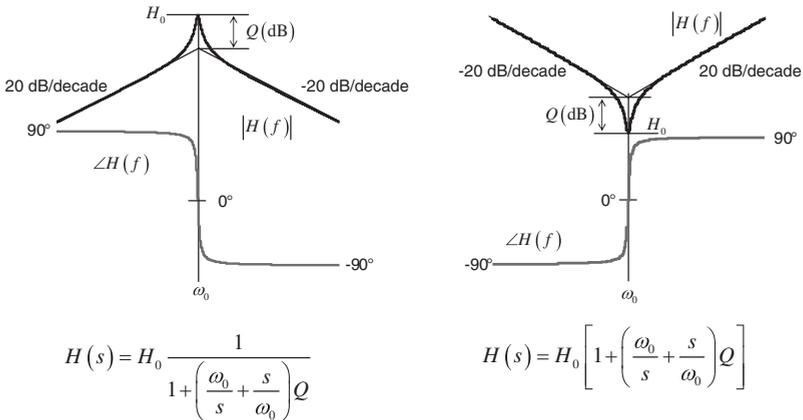


Figure 2.22 Réponses en fréquences de réseaux du deuxième ordre. Ici, nous avons un filtre passe-bande (gauche) et un réjecteur (droite).

2.3.4 Approximation d'un réseau du deuxième ordre

Dans (2.74), si vous cherchez les racines du dénominateur – la position des pôles – vous devez résoudre

$$1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 = 0 \quad (2.80)$$

ce qui vous conduira à une paire de racines définies par

$$s_{p_1}, s_{p_2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\pm \sqrt{1 - 4Q^2} - 1 \right) \quad (2.81)$$

Selon la valeur du facteur de qualité, les racines peuvent être réelles (pas de partie imaginaire), conjuguées (réelles avec parties imaginaires) ou imaginaires conjuguées (pas de parties réelles). Pour Q inférieur à 0.5, les racines sont réelles et la réponse à un échelon est non-oscillatoire. Pour Q égale à 0.5, les racines sont réelles et confondues. La réponse est plus rapide que précédemment mais il n'y a pas de dépassement et d'oscillations en sortie. Pour Q supérieur à 0.5, les racines deviennent conjuguées et l'on observe une réponse oscillatoire à un échelon d'entrée. Cependant, les parties réelles procurent de l'amortissement (dissipation d'énergie) et les oscillations disparaissent finalement. Alors que le facteur de qualité Q augmente, les parties réelles se réduisent et la réponse devient de plus en plus oscillatoire. Lorsque Q approche l'infini, il n'y a plus de pertes dans le circuit (les parties réelles sont nulles) et les oscillations sont permanentes : les racines sont des imaginaires purs. Ces différentes réponses transitoires apparaissent en Figure 2.23 pour quelques valeurs de Q . Elles ont été obtenues à l'aide d'un simple filtre RLC excité par un échelon d'1 V. La résistance R est calculée pour ajuster l'amortissement du circuit.

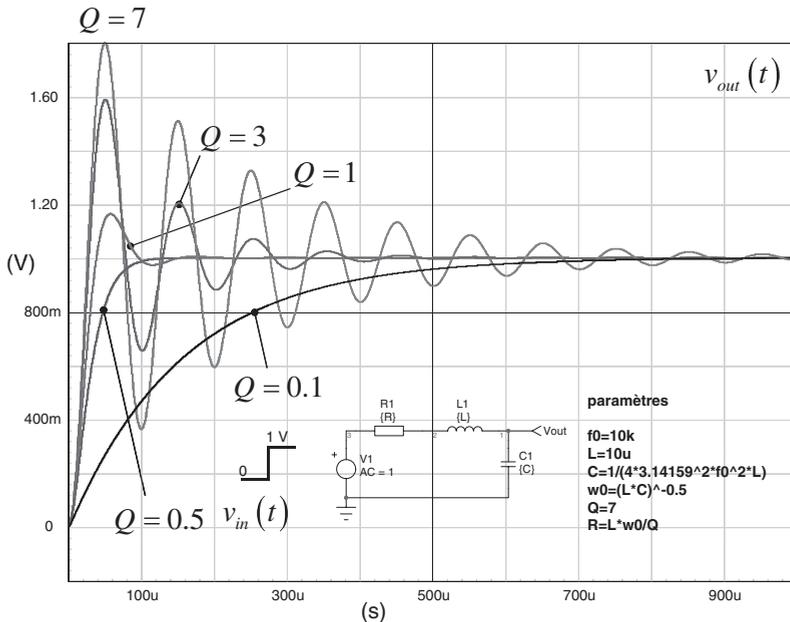


Figure 2.23 La réponse transitoire d'un filtre du deuxième ordre varie selon la valeur du facteur de qualité Q .

2.3 Formes polynomiales

Si vous placez à présent les racines s_1 et s_2 obtenues en (2.81) pour les différentes valeurs de Q dans le plan complexe, vous obtenez un graphique tel celui proposé en Figure 2.24. Dans le croquis (a), Q est faible, bien en dessous de 0.5 et les pôles sont éloignés l'un de l'autre. La racine s_{p1} est proche de l'origine et domine la réponse basse fréquence alors que s_{p2} va plutôt dominer la réponse dans le haut du spectre. En (b), Q égale 0.5 et les racines sont confondues : les pôles sont positionnés à la même fréquence mais la réponse transitoire est dépourvue de tout dépassement et oscillations car il n'y a pas de parties imaginaires dans s_{p1} et s_{p2} . Alors que Q augmente au-delà de 0.5 comme représenté en (c), les racines deviennent conjuguées et la réponse est oscillatoire amortie. Les parties réelles représentent les pertes qui dissipent de l'énergie et amortissent le système. En (d), aucune énergie n'est dissipée cycle par cycle et le facteur de qualité Q approche l'infini. Le système est non-amorti et oscille librement. Veuillez noter que les racines en (a), (b) et (c) sont toutes situées dans le demi-plan gauche (*LHP poles*) : la réponse dans le domaine temporel combine des termes exponentiels décroissant. En d'autres termes, la réponse est bornée et ne diverge pas. Si l'un de ces pôles était situé dans le demi-plan droit et devenait ainsi une racine positive (*RHP pole*), la réponse divergerait et deviendrait non bornée.

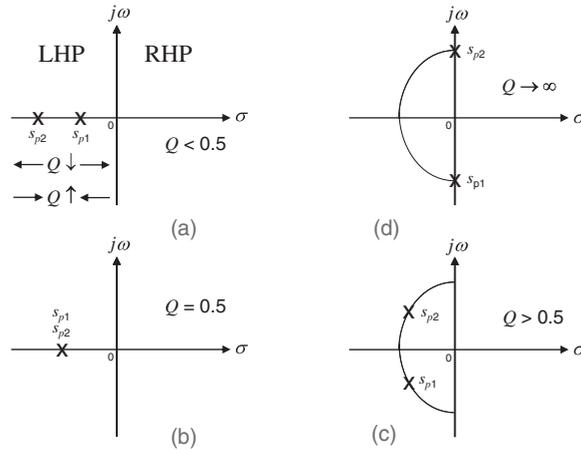


Figure 2.24 Les racines peuvent être placées dans le plan complexe (diagramme d'Argand). Ici, nous avons des pôles situés dans le demi-plan gauche. La position des racines change avec l'évolution du facteur de qualité Q . Les pôles sont représentés par des croix (\times). Si vous deviez placer des zéros, vous utiliseriez des cercles (o).

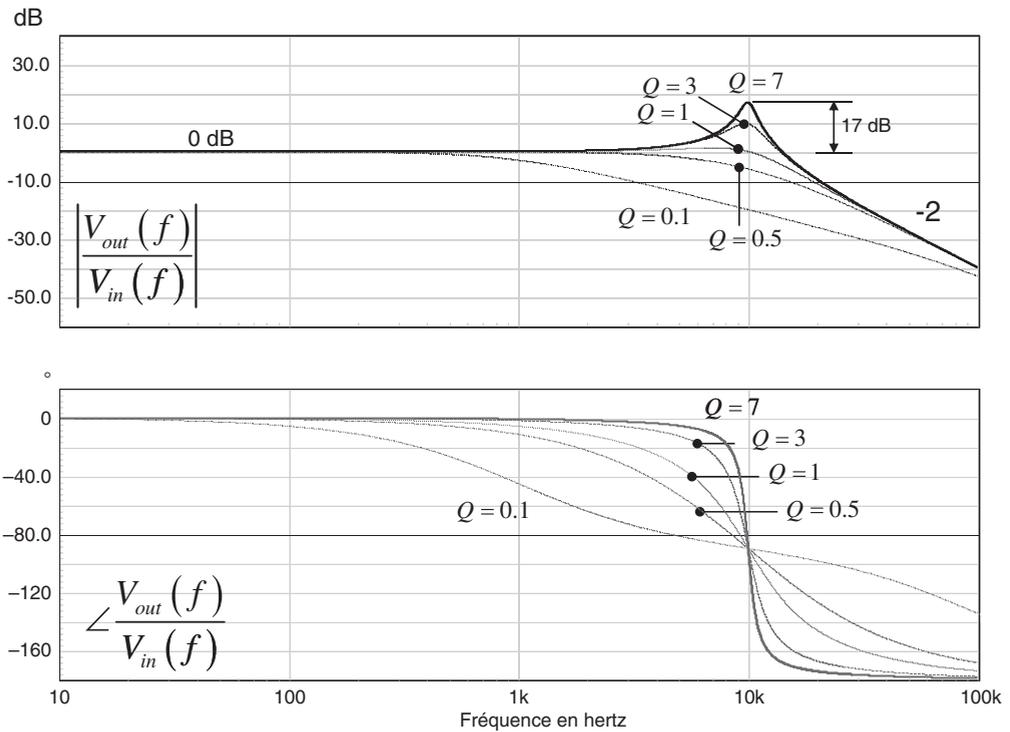


Figure 2.25 La réponse en fréquence d'un réseau RLC affecté de différents facteurs de qualité.

Si l'on trace maintenant la réponse en fréquence d'un réseau *RLC* pour différentes valeurs de Q , on obtient le dessin de la Figure 2.25. Pour des Q élevés, la réponse passe par une résonance : un Q de 7 correspond à une excursion de 17-dB comme représenté sur la figure. Veuillez noter que le module d'un réseau du second ordre passe-bas décroît avec une pente de 40 dB par décade (pente -2) au-delà du pic. La phase chute rapidement pour de forts Q et atteint l'asymptote -180° en haute fréquence. Lorsque le facteur de qualité diminue, la résonance faiblit et disparaît lorsque Q passe sous 0.5. La phase diminue alors plus doucement. Pour des systèmes fortement amortis (faible Q) la réponse en fréquence diffère véritablement de celles précédemment décrites : la phase décroît lentement et il semblerait qu'elle marque une pause à -90° pour reprendre ensuite sa chute vers l'asymptote -180° . Comme expliqué, pour un faible Q , les deux pôles sont bien distincts l'un de l'autre et celui qui est le plus proche de l'origine (dans le plan complexe, Figure 2.24a) domine la réponse basse fréquence. Le second pôle sera actif dans le haut du spectre. Ainsi, la première pente du module sera du premier ordre (-1 or -20 dB par décade) et lorsque le second pôle entrera en action, la pente passera à -2 comme avec tout système du deuxième ordre.

2.3 Formes polynomiales

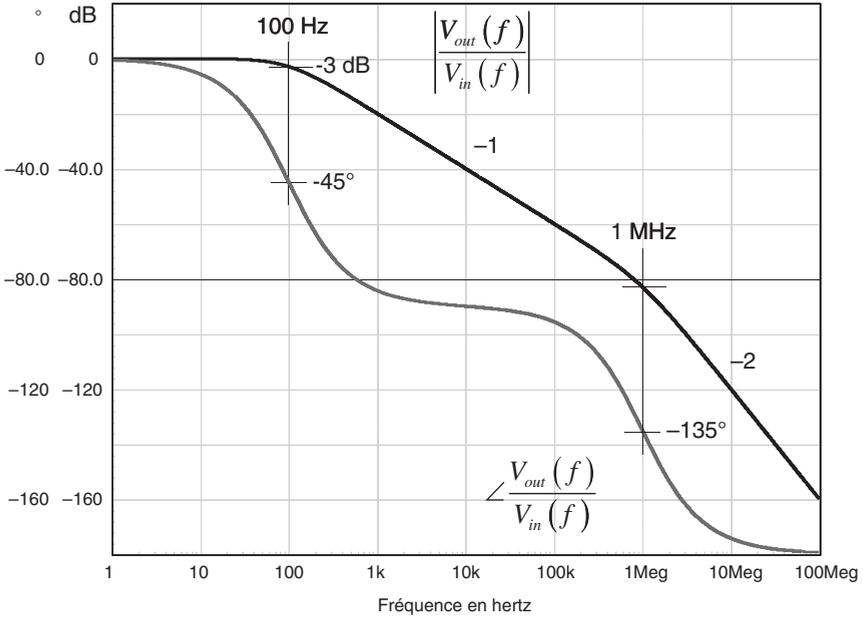


Figure 2.26 La réponse en fréquence d'un système *RLC* du deuxième ordre pour un faible facteur de qualité ($Q = 0.01$).

La Figure 2.26 représente la réponse dynamique du filtre *RLC* affecté par un faible facteur de qualité, bien inférieur à 1 (0.01 dans l'exemple). On peut clairement observer un pôle à 100 Hz et l'autre à 1 MHz, respectivement identifiés aux points de phase -45° et -135° . En conclusion, lorsque le facteur de qualité est faible, bien en deçà de 1, on peut assimiler le dénominateur d'un système du deuxième ordre (ou le numérateur si l'on évoque des zéros) à un système cascasant deux filtres du premier ordre.

Pour calculer la position de ces racines et remplacer la forme complexe du deuxième ordre décrite par l'équation (2.75) par deux pôles (ou deux zéros), on peut utiliser un développement limité pour la racine carrée de l'équation (2.81) en supposant $Q \ll 1$:

$$(1+x)^n \approx 1+nx \tag{2.82}$$

ce qui induit

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x \tag{2.83}$$

Si l'on introduit à présent ce terme dans (2.81) et que l'on simplifie l'expression finale, nous obtenons la définition pour les pôles séparés :

$$\omega_{p_1} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 - \sqrt{1 - 4Q^2}}{2} \approx \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 - (1 - 2Q^2)}{2} = Q\omega_0 \quad (2.84)$$

$$\omega_{p_2} = \frac{\omega_0}{Q} \frac{1 + \sqrt{1 - 4Q^2}}{2} \approx -\frac{\omega_0}{Q} (Q^2 - 1) \approx \frac{\omega_0}{Q} \quad (2.85)$$

Dans ce cas, pour Q bien plus petit que 1, l'expression complexe décrite par (2.75) peut être remplacée par le produit de deux pôles dont la position est décrite par (2.84) et (2.85) :

$$\text{Pour } Q_D \ll 1 \rightarrow D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q_D} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_1}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_2}} \right) \quad (2.86)$$

Veuillez noter que deux zéros peuvent être réarrangés de façon similaire

$$\text{Pour } Q_N \ll 1 \rightarrow N(s) = 1 + \frac{s}{\omega_{0N} Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2 \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_1}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_2}} \right) \quad (2.87)$$

Si l'expression polynomiale est toujours sous sa forme brute, alors la simplification pour un système à faible facteur de qualité utilise (2.78)/(2.79) :

$$\omega_{p_1} = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{1}{b_1} \quad (2.88)$$

$$\omega_{p_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2}}} = \frac{b_1}{b_2} \quad (2.89)$$

et mène à

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 \approx (1 + b_1 s) \left(1 + \frac{b_2}{b_1} s \right) \quad (2.90)$$

2.3 Formes polynomiales

On parle, en anglais, de *low-Q approximation*. Pour deux zéros, on peut également écrire :

$$\omega_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} = \frac{1}{a_1} \quad (2.91)$$

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}}} = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.92)$$

ce qui conduit à :

$$N(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 \approx (1 + a_1 s) \left(1 + \frac{a_2}{a_1} s \right) \quad (2.93)$$

Pour $Q_D = 0.5$, les pôles sont coïncidents et (2.86) se réduit à :

$$\text{Pour } Q_D = 0.5 \rightarrow D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q_D} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 = \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right)^2 \quad (2.94)$$

Expression dans laquelle

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{b_2}} \quad (2.95)$$

Considérant le numérateur, pour $Q_N = 0.5$, les zéros sont coïncidents et (2.87) devient

$$\text{Pour } Q_N = 0.5 \rightarrow N(s) = 1 + \frac{s}{\omega_{0N} Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2 = \left(1 + \frac{s}{\omega_z} \right)^2 \quad (2.96)$$

Expression dans laquelle

$$\omega_z = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \quad (2.97)$$

Nous nous référerons assez souvent à ces formules quand il s'agira de réarranger les expressions dans les parties à venir du livre. Les Figure 2.27 et Figure 2.28 offrent une vue résumée de ce que nous venons de discuter.

2.3 Formes polynomiales

polynôme du deuxième ordre. Ainsi, nous pourrions immédiatement repérer la position des différents pôles (ou zéros) :

$$D(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right) \quad (2.99)$$

Si l'on développe (2.99) et que l'on identifie les coefficients de (2.98), il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{s}{\omega_p} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right) &= 1 + s \left(\frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_0 Q} \right) + s^2 \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q \omega_0 \omega_p} \right) + \frac{s^3}{\omega_0^2 \omega_p} \\ &+ s^2 \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q \omega_0 \omega_p} \right) + \frac{s^3}{\omega_0^2 \omega_p} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Alors

$$b_1 = \frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_0 Q} \approx \frac{1}{\omega_p}, \text{ if } \omega_0 Q \gg \omega_p \quad (2.101)$$

$$b_2 = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q \omega_0 \omega_p} \quad (2.102)$$

$$b_3 = \frac{1}{\omega_0^2 \omega_p} \quad (2.103)$$

À partir des équations ci-dessus, si l'on extrait ω_p , Q et ω_0 , on devrait trouver :

$$\omega_p = \frac{1}{b_1} \quad (2.104)$$

$$Q = \frac{b_1 b_3 \sqrt{b_1}}{b_1 b_2 - b_3} \quad (2.105)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} \quad (2.106)$$

Dans (2.99), nous voyons que le terme $Q\omega_0$ est le produit de (2.105) par (2.106). Si l'on développe ce produit, nous obtenons

$$Q\omega_0 = \frac{b_1^2}{b_1 b_2 - b_3} \quad (2.107)$$

Si l'on considère $b_3 \ll b_1 b_2$ alors (2.107) peut se simplifier :

$$Q\omega_0 \approx \frac{b_1}{b_2} \quad (2.108)$$

En combinant (2.106) et (2.108), on peut reprendre la forme polynomiale du deuxième ordre de (2.99) :

$$1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \approx 1 + s \frac{b_2}{b_1} + s^2 \frac{b_3}{b_1} \quad (2.109)$$

Si les deuxième et troisième pôles ne sont pas séparés, (par exemple il existe une résonance impliquant deux pôles coïncidents, comme des pôles subharmoniques dans un convertisseur à découpage en mode courant), alors (2.98) peut être approximée à l'expression suivante :

$$1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \approx (1 + b_1 s) \left(1 + s \frac{b_2}{b_1} + s^2 \frac{b_3}{b_1} \right) \quad (2.110)$$

Ici, la réponse est dominée en basse fréquence par $1/b_1$ avant que le double pôle n'entre en action. Si vous travaillez sur un dénominateur du troisième ordre dans lequel un pôle séparé apparaît au-delà des doubles pôles, l'approximation de (2.110) ne tient plus. Maintenant, si le polynôme du deuxième ordre dans (2.110) présente un faible facteur de qualité Q (les pôles sont bien séparés), alors on peut encore simplifier l'expression en appliquant les recommandations de l'équation (2.90) :

$$\left(1 + s \frac{b_2}{b_1} + s^2 \frac{b_3}{b_1} \right) \approx \left(1 + s \frac{b_2}{b_1} \right) \left(1 + s \frac{b_3}{b_2} \right) \quad (2.111)$$

En considérant l'équation complète de (2.98), il est possible de la mettre sous la forme suivante :

$$1 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 \approx (1 + b_1 s) \left(1 + \frac{b_2}{b_1} s \right) \left(1 + \frac{b_3}{b_2} s \right) \quad (2.112)$$

2.3 Formes polynomiales

Il s'agit de l'expression d'un polynôme du troisième ordre décrivant un système constitué de pôles parfaitement distincts les uns des autres.

La Figure 2.29 montre une fonction de transfert du troisième ordre assemblée avec tous les coefficients b sous le nom H_1 . Une première simplification utilisant (2.110) est faite dans l'expression H_2 . Enfin, une troisième simplification basée sur les recommandations de (2.112) est appliquée avec H_3 . Lorsque toutes les réponses en fréquence sont tracées, elles sont très similaires en amplitude et phase. Veuillez noter les dimensions particulières pour les différents coefficients b comme nous l'avons évoqué quelques paragraphes auparavant. En l'absence de ces unités dans les coefficients b , Mathcad® pointerait un problème d'homogénéité.

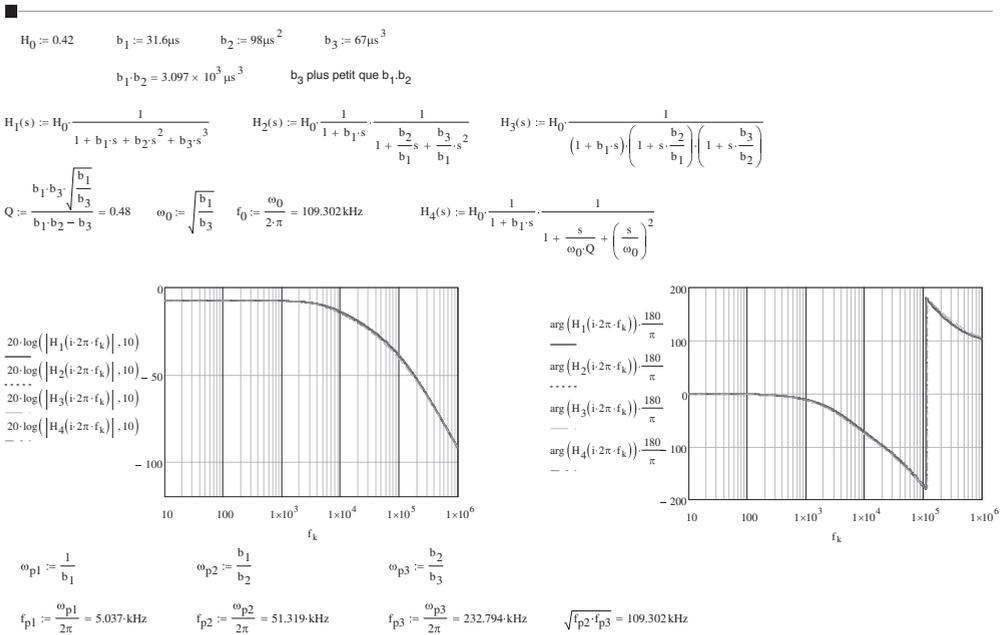


Figure 2.29 Un système d'ordre trois – en supposant que ces racines sont bien séparées et de signe identique – peut être remanié sous la forme de 3 pôles cascades.

En s'appuyant sur (2.112), il est possible de généraliser l'expression d'un polynôme d'ordre n possédant des racines séparées selon la formule ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 & 1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + \dots + a_n s^n \\
 & \approx (1 + a_1 s) \left(1 + \frac{a_2}{a_1} s\right) \left(1 + \frac{a_3}{a_2} s\right) \left(1 + \frac{a_4}{a_3} s\right) \dots \left(1 + \frac{a_n}{a_{n-1}} s\right) \quad (2.113)
 \end{aligned}$$

Un résumé de ces calculs apparaît en Figure 2.30 et Figure 2.31.

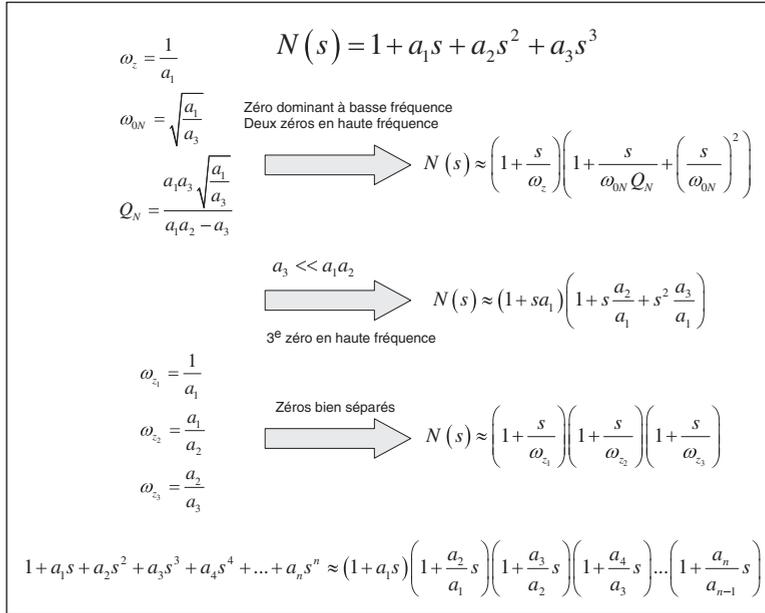


Figure 2.30 Résumé des approximations pour un numérateur du troisième ordre et au-delà.

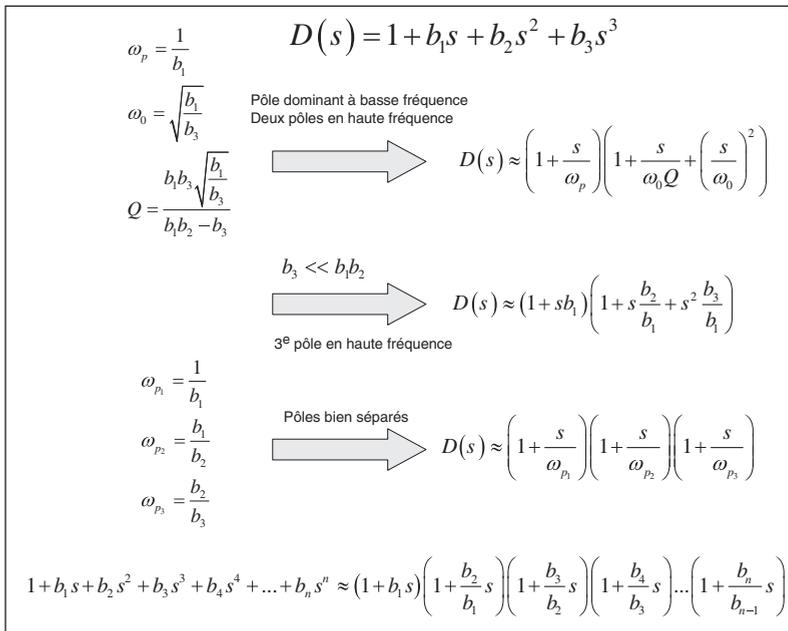


Figure 2.31 Résumé des approximations pour un dénominateur du troisième ordre et au-delà.

2.3.6 Comment déterminer l'ordre d'un système?

L'ordre d'une fonction de transfert dépend du degré de son dénominateur. Ce degré dépend lui-même du nombre de *variables d'état* indépendantes. Une variable d'état est associée à un élément qui stocke l'énergie comme un condensateur et une bobine. Ces variables d'état sont désignées par la lettre minuscule x comme x_1 pour le courant dans la bobine et x_2 pour la tension aux bornes du condensateur. Si vous connaissez l'état du circuit pour $t = 0$ – c'est ce que les conditions initiales décrivent (la directive IC dans SPICE) – alors vous pouvez prédire l'état du circuit pour tout temps différent de 0. C'est ce que nous avons montré avec (2.17) et (2.30) dans lesquelles la tension V_0 et le courant I_0 sont respectivement les variables d'état pour le condensateur et la bobine pour t égale 0. Pour déterminer l'ordre d'un circuit, vous comptez le nombre de condensateurs et bobines présents dans le circuit étudié.

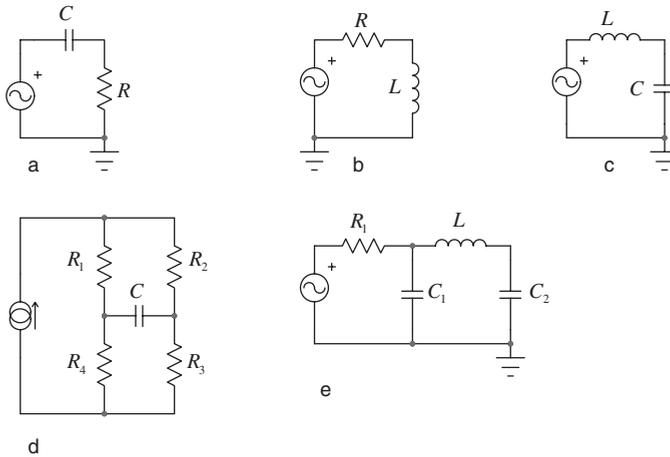


Figure 2.32 Pour obtenir l'ordre d'un circuit, il suffit de compter le nombre de variables d'état indépendantes.

La Figure 2.32 représente quelques exemples de réseaux dans lesquels des éléments de stockage d'énergie sont présents. Comptez leur nombre et vous obtenez l'ordre du circuit. En Figure 2.32a, b and d, il y a un seul élément de stockage, un condensateur ou une bobine : ce sont tous des réseaux du 1^{er} ordre. En Figure 2.32c, vous avez un condensateur et une bobine : il s'agit d'un circuit du deuxième ordre. En Figure 2.32e, deux condensateurs avec une bobine forment un réseau du troisième ordre.

Dans les lignes précédentes, j'ai dit que vous deviez compter les variables d'état *indépendantes*. On considère une variable d'état indépendante lorsque sa valeur

ne dépend pas uniquement d'autres variables d'état. Cette situation est typique d'une boucle impliquant uniquement des condensateurs ou encore d'une maille associant des condensateurs et une source de tension. Le commentaire s'applique également à un nœud purement inductif ou encore un circuit dans lequel une bobine est en série avec une source de courant. Dans ces configurations, l'une des variables d'état est une combinaison linéaire des autres ou bien n'est pas indépendante (par exemple, la bobine est en série avec une source de courant ou la tension du condensateur dépend directement d'une source de tension). Une telle configuration est un cas *dégénéré*, au sens mathématique du terme. Les exemples évidents sont des condensateurs ou bobines montés en série ou parallèle pour former un unique élément de stockage. Lorsqu'un cas dégénéré est identifié dans un circuit, par exemple une maille avec trois condensateurs ou un nœud avec trois bobines, l'ordre dénominateur est réduit à 2 (un circuit à trois condensateurs devrait être d'ordre trois mais à cause du cas dégénéré, il devient un circuit du deuxième ordre). Si un nouveau cas dégénéré est identifié dans le circuit avec un nœud inductif, alors un degré supplémentaire est perdu. La formule générique définissant l'ordre n d'un réseau possédant n_{LC} éléments de stockage et dans lequel vous avez repéré n_C cas dégénérés capacitifs ou n_L cas dégénérés inductifs est donné par :

$$n = n_{LC} - n_C - n_L \quad (2.114)$$

La Figure 2.33a représente un cas dégénéré classique pour une maille à trois condensateurs. La tension aux bornes de C_2 est exprimée par

$$x_2 = x_1 - x_3 \quad (2.115)$$

et illustre une boucle capacitive dans laquelle la variable d'état x_2 est uniquement définie par les variables x_3 et x_1 . Dans ce cas précis, le réseau perd un ordre : il y a 4 éléments de stockage mais le dénominateur sera de degré 3. Si maintenant vous ajoutez une résistance en série avec C_2 comme dessiné en Figure 2.33b, la boucle est rompue et l'équation (2.115) devient

$$x_2 = x_1 - x_3 - I_1 R_2 \quad (2.116)$$

La variable d'état x_2 n'est plus uniquement définie par les autres variables car R_2 introduit une chute de tension. Le réseau possède à présent quatre variables indépendantes et représente un circuit d'ordre quatre.

2.3 Formes polynomiales

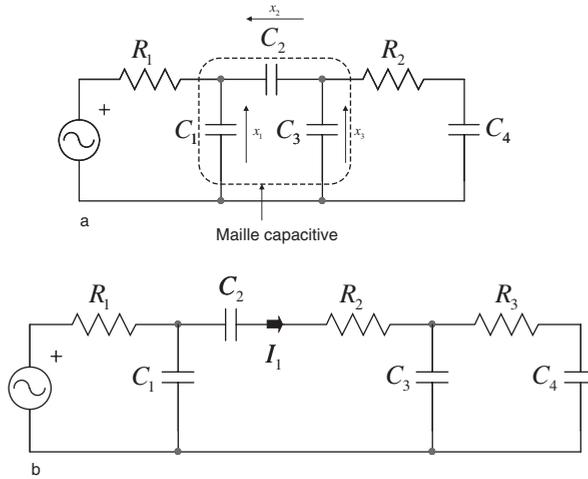


Figure 2.33 Lorsque les variables d'état ne pas indépendantes, le polynôme du dénominateur perd un degré comme dans le croquis (a). Si une résistance R_2 est insérée en série avec C_2 , le degré du dénominateur décrivant ce réseau repasse à quatre.

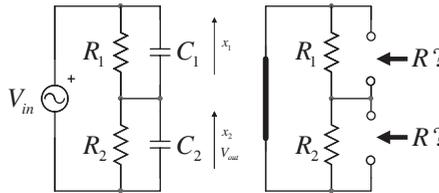


Figure 2.34 Lorsque les condensateurs sont en parallèle alors que la source est éteinte, ils se combinent en un seul condensateur : il s'agit d'un cas dégénéré.

La Figure 2.34 décrit un circuit dans lequel une source de tension polarise une maille capacitive :

$$x_1 = V_{in} - x_2 \quad (2.117)$$

Cette boucle illustre un cas dégénéré car la source de tension fixe le potentiel de C_1 et C_2 connectés en série : leurs variables d'état ne sont pas indépendantes et, en dépit de la présence de deux éléments de stockage, un ordre est perdu. Il est facile de déterminer le dénominateur si l'on calcule la constante de temps associée à chaque condensateur : vous court-circuitez V_{in} et regardez les résistances pilotant C_1 et C_2 . Dans ce cas, vous voyez que R_1 vient en parallèle avec R_2 pour les deux condensateurs. La constante de temps de circuit est simplement

$$\tau = (R_1 \parallel R_2)(C_1 + C_2) \quad (2.118)$$

et le dénominateur est $D(s) = 1 + s\tau_1$. C'est bien un circuit du premier ordre comme montré dans le problème 8.

En Figure 2.35a, nous avons trois bobines connectées à un nœud. Il s'agit d'un cas dégénéré car le courant dans la bobine L_2 dépend exclusivement des deux autres variables d'état :

$$x_2 = x_1 - x_3 \quad (2.119)$$

Malgré 5 éléments de stockage, il s'agit d'un réseau du quatrième ordre. Maintenant, si vous ajoutez une résistance en parallèle avec L_2 , (2.119) est modifiée :

$$x_2 = x_1 - x_3 - I_4 \quad (2.120)$$

Le courant circulant dans L_2 ne dépend plus exclusivement des autres variables d'état x_1 et x_3 . Nous avons maintenant un système du cinquième ordre.

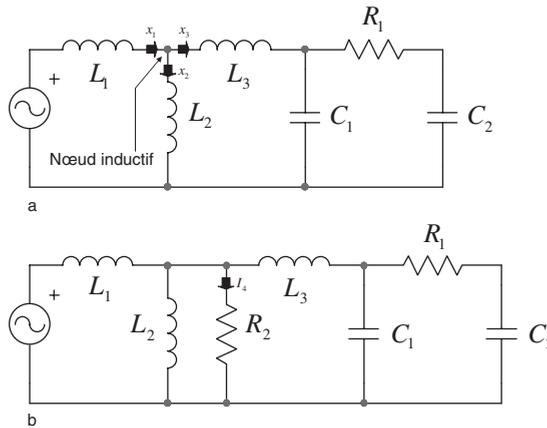


Figure 2.35 Dans cet exemple, les trois bobines connectées à un nœud commun forment un cas dégénéré. Il s'agit d'un réseau du quatrième ordre malgré la présence de cinq éléments de stockage. Dans le croquis (b), la résistance R_2 est ajoutée en parallèle avec L_2 et le courant traversant cette bobine n'est plus exclusivement dépendant des courants de L_1 ou L_3 .

Le circuit redevient un cinquième ordre.

En Figure 2.36, vous voyez un réseau réalisé avec deux bobines et une résistance. Vous souhaitez calculer l'impédance offerte aux bornes de connexion. Pour obtenir cette impédance (même si le résultat est évident dans ce cas précis), vous

2.3 Formes polynomiales

connectez une source de courant – le stimulus I_T – et calculez la réponse. Ici, la réponse est la tension V_T mesurée aux bornes des bornes de connexion. Il s'agit de déterminer une impédance en un point donné ou en anglais, *driving point impedance* (DPI). Deux éléments stockent l'énergie et vous pouvez en déduire qu'il s'agit d'un réseau d'ordre deux. Cependant, la première bobine est en série avec la source de courant qui rend sa variable d'état x_1 dépendante. Une seule variable d'état est indépendante, c'est le courant dans L_2 désigné par x_2 . Il s'agit d'un cas dégénéré et le dénominateur perd un degré.

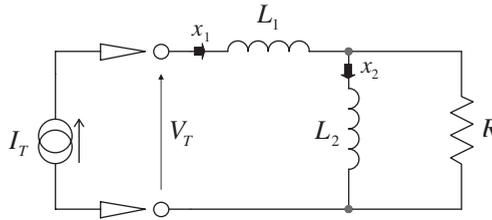


Figure 2.36 Ici, nous souhaitons calculer l'impédance offerte par ce réseau en utilisant une source de courant. On voit une maille impliquant la connexion de deux bobines dont l'une est en série avec une source de courant : c'est un cas dégénéré comme illustré en Figure 2.35a.

Nous avons ainsi un circuit du premier ordre dont l'impédance est rapidement obtenue en considérant l'impédance série constituée de L_1 et L_2 en parallèle avec R . Le dénominateur est du premier ordre comme attendu.

$$Z(s) = sL_1 + sL_2 \parallel R = \frac{sL_1R + sL_2R + s^2L_1L_2}{R + sL_2} \quad (2.121)$$

Est-ce fini pour autant ? Certainement pas, le résultat ne se conforme pas au modèle défini en (2.56) pour une impédance. Tout d'abord, on peut factoriser R au dénominateur et au numérateur :

$$Z(s) = \frac{R}{R} \frac{s(L_1 + L_2) + s^2 \frac{L_1L_2}{R}}{1 + s \frac{L_2}{R}} = \frac{s(L_1 + L_2) + s^2 \frac{L_1L_2}{R}}{1 + s \frac{L_2}{R}} \quad (2.122)$$

Le numérateur peut encore être arrangé si l'on multiplie et divise tous les termes par R :

$$Z(s) = R \frac{s \frac{L_1 + L_2}{R} + s^2 \frac{L_1 L_2}{R^2}}{1 + s \frac{L_2}{R}} = R_0 \frac{\frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.123)$$

Dans cette expression, après identification des différents coefficients, nous avons

$$R_0 = R \quad (2.124)$$

$$\omega_0 = \frac{R}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (2.125)$$

$$Q = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1 + L_2} \quad (2.126)$$

$$\omega_p = \frac{R}{L_2} \quad (2.127)$$

(2.123) peut encore être modifiée en factorisant $\frac{s}{\omega_0 Q}$

$$Z(s) = R_0 \frac{\frac{s}{\omega_0 Q} \left(1 + \frac{sQ}{\omega_0} \right)}{1 + \frac{s}{\omega_p}} = R_0 \frac{\frac{s}{\omega_{z_1}} \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_2}} \right)}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.128)$$

et en définissant $\omega_{z_1} = \omega_0 Q = \frac{R}{L_1 + L_2}$ et $\omega_{z_2} = \frac{\omega_0}{Q} = R \frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2}$. Dans (2.128), nous voyons un zéro à l'origine, ω_{z_1} , suivi d'un zéro ω_{z_2} et d'un pôle ω_p . Dans le cas où nous avons $L_2 \ll L_1$, alors $\omega_{z_2} \approx \omega_p$ et (2.128) se simplifie à :

$$Z(s) \approx R_0 \frac{s}{\omega_{z_1}} \quad (2.129)$$

(2.128) nous indique que lorsque le pôle et le zéro sont bien éloignés l'un de l'autre, l'impédance n'augmente plus avec la fréquence : le pôle casse la première pente +1 – donnée par le zéro à l'origine – en une pente 0. Le module marque une

2.3 Formes polynomiales

pause à la valeur de R_0 jusqu'à ce que le second zéro apparaisse. La Figure 2.37 confirme ce comportement pour R qui fait $100\ \Omega$ ou $40\ \text{dB}\Omega$. Il serait impossible de déduire un tel plateau résistif à partir de (2.121).

Parfois, il n'est pas évident d'identifier un cas dégénéré notamment si le réseau est compliqué ou dessiné d'une façon désordonnée. Dans ce cas, on associe une constante de temps à chaque élément de stockage (cas dégénéré ou pas d'ailleurs) mais à la fin de l'exercice, vous trouverez simplement que le terme b_n dans (2.71) est égal à zéro. Par exemple, vous identifiez quatre constantes de temps dans un circuit comportant un cas dégénéré mais vous ne l'avez pas détecté en première approche. Vous déroulez toutes les étapes de calcul pour déterminer $D(s)$ en combinant toutes les constantes de temps et, à la fin, le terme b_4 sera égal à 0.

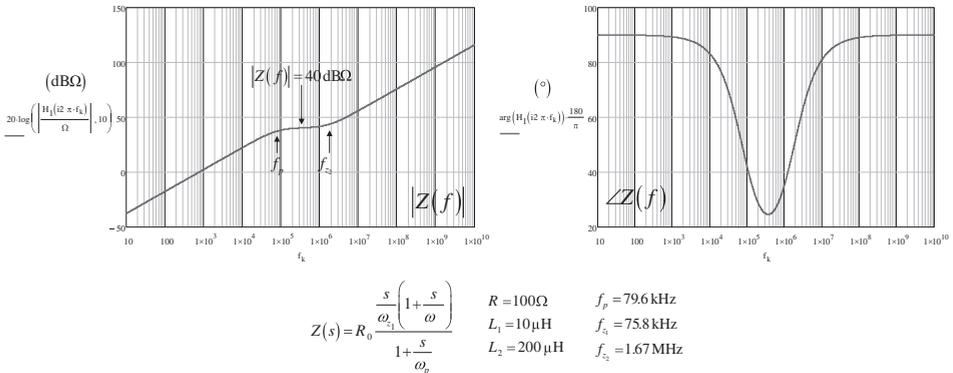


Figure 2.37 Pour un pôle et zéro bien séparés, l'impédance marque une pause à R_0 jusqu'à ce que le second zéro se manifeste.

2.3.7 Des zéros dans le circuit

Comme expliqué au chapitre 1, les zéros d'une fonction de transfert correspondent aux conditions créées par le circuit transformé pour lesquelles une réponse nulle est observée malgré la présence d'une excitation. Lorsque le circuit est observé à une valeur $s = s_z$, la réponse disparaît car un circuit transformé ouvert (impédance série infinie) s'oppose à la propagation du stimulus ou parce qu'une branche devient un court-circuit transformé qui tire un nœud à la masse et shunte le stimulus.

Il existe plusieurs méthodes qui vous permettent de déterminer les zéros lors de l'analyse d'un réseau. La méthode la plus simple est l'inspection. Pour apprendre le cheminement, regardez la Figure 2.38. Quelle combinaison dans le circuit transformé – c'est-à-dire C remplacé par $1/sC$ et L par sL – examiné pour $s = s_z$ pourrait empêcher le stimulus d'atteindre la sortie et former une réponse? Commençons par la gauche où le stimulus est placé. Est-ce que R_1 peut devenir

infinie ? Surement pas ; c'est un élément fixe, indépendant de la fréquence. Que se passe-t-il si le nœud 1 est mis à la masse par un court-circuit transformé ? Dans ce cas, le signal d'entrée ne peut plus créer de réponse. Le réseau qui pourrait tirer le nœud 1 à la masse est constitué du condensateur C_1 en série avec son ESR r_C . L'impédance du réseau ainsi constitué est simplement :

$$Z_1(s) = r_C + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sr_C C_1}{sC_1} \tag{2.130}$$

Quelle est la condition qui pourrait provoquer $Z_1(s_{z_1}) = 0$? Il suffit de trouver la racine de (2.130) lorsque $1 + sr_C C_1 = 0$. Il s'agit d'un zéro qui apparaît à une fréquence angulaire égale à

$$s_{z_1} = -\frac{1}{r_C C_1} \text{ ou } \omega_{z_1} = \frac{1}{r_C C_1} \tag{2.131}$$

Pas de maths ni d'équations compliquées, il suffit d'observer la figure.

Un exemple rapide va aider à mieux comprendre le concept de l'inspection. Regardez Figure 2.39 dans laquelle une source de courant I_T – l'excitation – balaie en alternatif un simple réseau. Pour s différent de s_z , le courant \hat{i}_1 existe et produit une réponse \hat{v}_{out} aux bornes de R_1 . Lorsque $s = s_z$, la connexion série de r_C et $1/sC$ forme un court-circuit transformé aux bornes de la source de courant. La réponse \hat{v}_{out} disparaît car tout le courant d'excitation I_T circule maintenant dans le shunt rendant \hat{i}_1 nul.

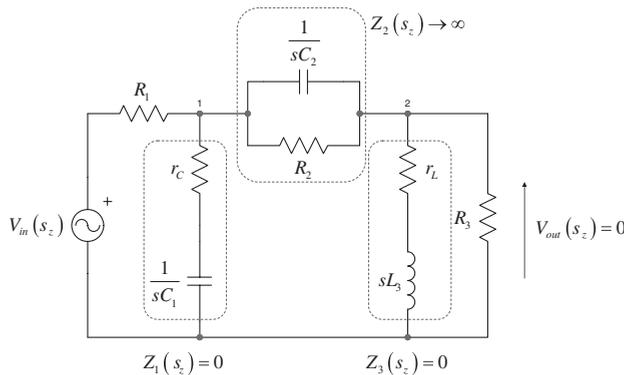


Figure 2.38 Des conditions existent dans le réseau transformé examiné à $s = s_z$ pour lesquelles la réponse disparaît.

2.3 Formes polynomiales

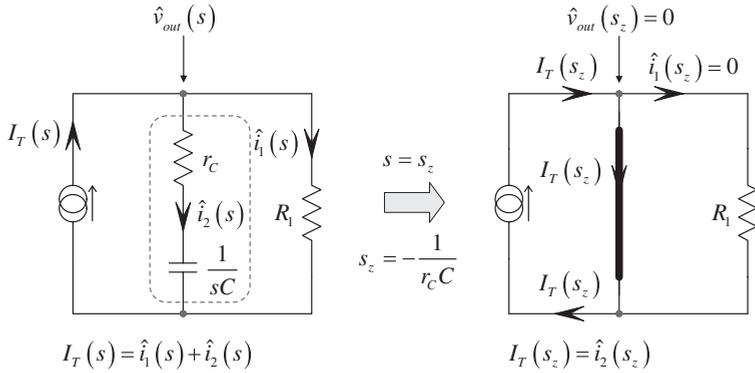


Figure 2.39 Lorsque le réseau transformé est analysé à $s = s_z$, le courant dans R_1 est zéro et la réponse disparaît.

Continuons notre exploration en Figure 2.38. Le nœud 1 est connecté au nœud 2 au travers de la mise en parallèle de C_2 et R_2 . Pour bloquer la propagation du signal, il faudrait que l'impédance Z_2 évaluée à $s = s_{z2}$ devienne infinie. Est-ce possible ? L'impédance de ce réseau est définie par

$$Z_2(s) = R_2 \parallel \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2} \quad (2.132)$$

R_2 est fixée et ne peut devenir infinie. En revanche, si l'on annule le dénominateur, nous avons un autre zéro pour lequel Z_2 devient infinie :

$$1 + sR_2C_2 = 0 \quad (2.133)$$

Impliquant que :

$$s_{z2} = -\frac{1}{R_2C_2} \text{ ou } \omega_{z2} = \frac{1}{R_2C_2} \quad (2.134)$$

Dans cette étape intermédiaire, le pôle de (2.132) devient le zéro de la fonction de transfert. Terminons à présent puisque nous sommes au nœud 2. En parallèle avec la charge, nous voyons la connexion série de L_3 et de son ESR étiquetée r_L . Cette association de composants peut-elle conduire à un court-circuit transformé pour $s = s_{z3}$? Vérifions :

$$Z_3(s) = sL_3 + r_L = 0 \quad (2.135)$$

la solution est simplement :

$$s_{z_3} = -\frac{r_L}{L_3} \text{ ou } \omega_{z_3} = \frac{r_L}{L_3} \quad (2.136)$$

Et voilà, nous avons déterminé nos trois zéros dans ce circuit du troisième ordre uniquement en inspectant le réseau. En utilisant (2.131), (2.134) et (2.136), on peut immédiatement écrire le polynôme du numérateur :

$$N(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_2}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_3}}\right) \quad (2.137)$$

Il s'agit d'une forme à *faible entropie* obtenue sans analyse compliquée du circuit. La méthode fonctionne parfaitement lorsque le réseau se prête à ce genre d'exercice. Si l'on regarde la Figure 2.38, on peut immédiatement identifier des associations de composants qui vont se transformer en circuits ouverts ou fermés et annuler la réponse. C'est souvent simple et rapide sur des circuits passifs, en l'absence de sources contrôlées. Lorsque l'inspection est impossible, une nouvelle approche est nécessaire.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

En présence de circuits compliqués, quand des sources contrôlées ou dépendantes sont impliquées, trouver les zéros par inspection devient un exercice très difficile sinon impossible. À part l'inspection, comment identifier des zéros dans le réseau étudié et quel élément de stockage contribue à leur présence ? Dans un circuit du premier ordre incluant un condensateur ou une bobine, la constante de temps τ associée avec l'élément de stockage est RC ou L/R , avec R la résistance équivalente qui pilote C ou L dans certaines conditions. Dans toutes les fonctions de transfert simples que nous avons dérivées jusqu'à présent, L ou C apparaissent toujours combinés avec s au dénominateur et au numérateur en présence de zéros [6]. Supposant un réseau possédant un condensateur et considérons b_0 égal à 1, nous pouvons récrire (2.68) selon la forme

$$H(s) = \frac{H_0 + \alpha_1 C_1 s}{1 + \beta_1 C_1 s} \quad (2.138)$$

Dans cette expression, α_1 et β_1 possède la dimension de l'ohm pour former une constante de temps avec C_1 . Ces coefficients représentent respectivement

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

la résistance offerte par les connexions du condensateur lorsque la réponse est nulle ($\hat{v}_{out} = 0$ qui survient lorsque le zéro se manifeste) et lorsque l'excitation est éteinte à zéro pour déterminer le pôle (voir Figure 2.12).

Lorsque nous calculons H_0 , nous considérons le circuit en condition statique, à une fréquence de 0 Hz. Dans ce mode, un condensateur offre un chemin haute impédance et disparaît de l'analyse alors que la bobine, dans des conditions identiques, devient un court-circuit. Retirer un condensateur revient à réduire sa capacitance à 0 F. De façon identique, remplacer une bobine par un court-circuit est similaire à la réduction de son inductance à 0 H. Condensateur et bobine peuvent ainsi être placés dans différents états selon ce que l'on désire analyser. Les points ci-dessous décrivent ces différents états et formalisent la terminologie :

- ▶ L'état continu (*dc state*) ou la réduction à zéro de la capacitance transforme un condensateur en circuit ouvert. Si dans le texte vous lisez que le condensateur C_1 doit être placé dans son état continu ou doit être réduit à 0 F, vous pouvez simplement retirer le condensateur du circuit et redessiner le réseau sans cet élément.
- ▶ Pour une bobine, la placer dans son état continu ou bien réduire son inductance à 0 henry revient à remplacer la bobine par un fil : c'est un court-circuit.
- ▶ Pour s approchant l'infini, le condensateur est placé dans son état haute fréquence (*HF state*) et peut être remplacé par un fil. C'est l'équivalent de considérer une capacitance infinie.
- ▶ Une bobine en état haute fréquence (son inductance est infinie) équivaut à un circuit ouvert : vous retirez la bobine du circuit et redessinez le réseau sans ce composant.

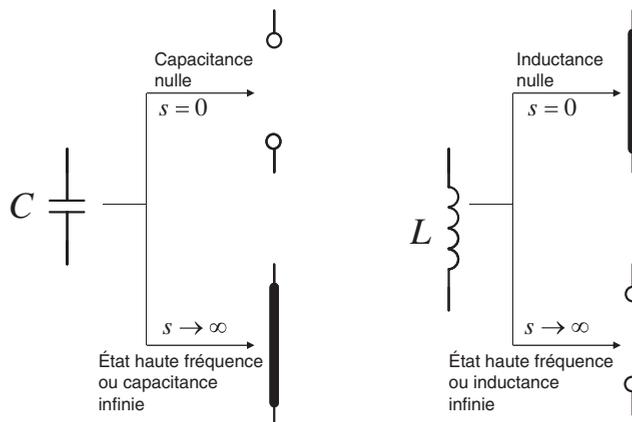


Figure 2.40 Les différents états que peuvent prendre un condensateur ou une bobine pour $s = 0$ (conditions statiques, courant ou tension continus) ou lorsque s approche l'infini (état haute fréquence).

La Figure 2.40 illustre ce concept pour deux les cas, s est 0 ou approche l'infini.

Maintenant, comment (2.138) se simplifie-t-elle si l'on considère la capacitance de C_1 qui approche l'infini plutôt que de la considérer nulle comme lorsque nous avons calculé H_0 ?

$$\lim_{C_1 \rightarrow \infty} \frac{H_0 + \alpha_1 C_1 s}{1 + \beta_1 C_1 s} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (2.139)$$

Quand le condensateur C_1 devient un court-circuit – ou lorsque sa capacitance est infinie – il transforme le réseau du premier ordre en un circuit différent impliquant α_1 et β_1 . Le gain de ce nouveau circuit est changé et la notation H^1 est adoptée pour le décrire. Le « 1 » dans l'exposant ne désigne pas une puissance mais renvoie à l'élément impliqué dans l'écriture de $\tau_1 - C_1$ dans ce cas – et que l'on place dans son état haute fréquence :

$$H^1 \equiv H|_{C_1 \rightarrow \infty} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \quad (2.140)$$

Si une bobine L_2 est impliquée plutôt que le condensateur C_1 , (2.138) sera exprimée par

$$H(s) = \frac{H_0 + \frac{L_2}{\alpha_2} s}{1 + \frac{L_2}{\beta_2} s} \quad (2.141)$$

Comment (2.141) se simplifie-t-elle si la valeur de L_2 approche l'infini plutôt que 0 comme nous le faisons pour déterminer H_0 ?

$$\lim_{L_2 \rightarrow \infty} \frac{H_0 + \frac{L_2}{\alpha_2} s}{1 + \frac{L_2}{\beta_2} s} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad (2.142)$$

Lorsque L_2 présente une inductance infinie, elle transforme le réseau du premier ordre en un circuit différent qui implique également α et β mais dans une expression inversée si on la compare à (2.139). Le gain du nouveau circuit est changé et la notation H^2 désigne un gain obtenu en plaçant l'élément impliqué dans la constante de temps 2 (le terme de « l'exposant »). L_2 dans le cas présent

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

est placée dans son état haute impédance (l'état haute impédance d'une bobine est un circuit ouvert) :

$$H^2 \equiv H|_{L_2 \rightarrow \infty} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad (2.143)$$

Les équations (2.140) et (2.143) retournent des résultats sans unité. Les deux sont des gains obtenus lorsque L ou C (ou les deux dans des réseaux d'ordre supérieur) sont considérés dans leur état haute fréquence : C est remplacé par un fil alors que L est retirée du circuit. Ce nouveau gain est noté H^i dans lequel l'exposant i pointe vers l'élément impliqué dans la constante de temps i . Lorsque vous débutez l'analyse du circuit, c'est une bonne pratique que d'associer l'indice de la constante de temps avec la référence du composant. Par exemple, supposez que le circuit comporte les éléments C_1 , C_3 et L_6 . Dans ce cas, on choisira les constantes de temps $\tau_1 = f(C_1)$, $\tau_3 = f(C_3)$ et $\tau_6 = f(L_6)$. Si τ_1 implique C_1 , alors H^1 indique que C_1 est placé dans son état haute fréquence dans cette configuration (C_1 est remplacé par un fil). De façon équivalente, si τ_6 implique L_6 , alors H^6 désigne le circuit dans lequel L_6 sera placée temporairement en état haute fréquence (L_6 est remplacée par un circuit ouvert). Dans le cadre de circuits d'ordre supérieur, la notation H^{235} indique que les éléments de stockage associés avec τ_2 , τ_3 et τ_5 sont placés en état haute fréquence pour le calcul de ce gain. Les éléments de stockage d'énergie restants sont eux maintenus dans leur état continu (condensateurs et bobine respectivement remplacés par un circuit ouvert et un court circuit). Ce concept est important et il doit être acquis pour bien comprendre la suite du livre. La Figure 2.41 représente une illustration graphique de cette approche dans plusieurs exemples et des exercices en fin de chapitre vous permettront de tester vos connaissances.

Ce que nous calculons lorsque C ou L sont remplacés par leur modèle équivalent haute fréquence est un gain H^i qui diffère de H_0 : H_0 est obtenu pour $s = 0$ alors que H^i est déterminé pour $s \rightarrow \infty$. Parfois, ce gain peut être égal à 0 comme en Figure 2.41b par exemple. A partir de l'équation (2.140), on peut extraire la valeur de α_1 assez facilement et obtenir

$$\alpha_1 = H^1 \beta_1 \quad (2.144)$$

Si l'on substitue à présent (2.144) dans (2.138), nous avons

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 \beta_1 C_1 s}{1 + \beta_1 C_1 s} \quad (2.145)$$

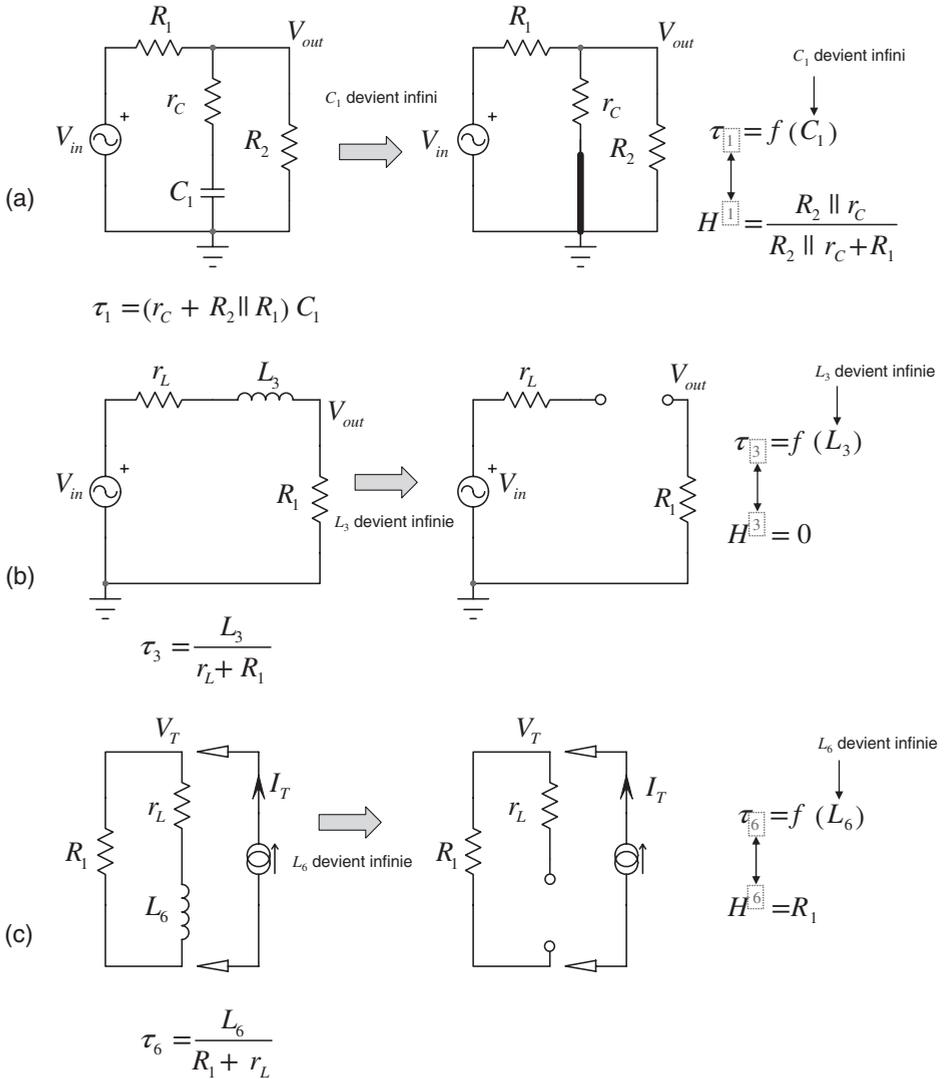


Figure 2.41 Le gain haute fréquence V_{out}/V_{in} est obtenu lorsque C ou L sont placés en état haute fréquence.

Dans l'équation (2.145), $\beta_1 C_1$ est la constante de temps τ_1 associée avec C_1 . (2.145) peut être réécrite selon

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 \tau_1 s}{1 + \tau_1 s} \quad (2.146)$$

Si H_0 est différent de 0, nous obtenons une fonction de transfert généralisée pour un circuit du premier ordre bâti autour d'un seul condensateur :

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{H^1}{H_0} \tau_1 s}{1 + \tau_1 s} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.147)$$

dans laquelle

$$\omega_z = \frac{H_0}{H^1 \tau_1} \quad (2.148)$$

et

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_1} \quad (2.149)$$

On peut recommencer l'exercice en extrayant α_2 de (2.143) et en le substituant dans (2.141) :

$$H(s) = \frac{H_0 + L_2 \frac{H^2}{\beta_2} s}{1 + \frac{L_2}{\beta_2} s} \quad (2.150)$$

Dans cette expression, L_2/β_2 représente la constante de temps associée avec la bobine L_2 . Si l'on substitue τ_2 dans (2.150), on obtient une formule similaire à celle obtenue avec (2.146)

$$H(s) = \frac{H_0 + H^2 \tau_2 s}{1 + \tau_2 s} \quad (2.151)$$

Considérant H_0 différent de 0 et en réarrangeant, on obtient

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{H^2}{H_0} \tau_2 s}{1 + s \tau_2} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.152)$$

Une équation dans laquelle

$$\omega_z = \frac{H_0}{H^2 \tau_2} \quad (2.153)$$

et

$$\omega_p = \frac{1}{\tau_2} \quad (2.154)$$

Les expressions (2.146) and (2.151) sont identiques. Ainsi, pour un réseau constitué d'un seul élément de stockage, ces équations délivrent la fonction de transfert en trois étapes :

1. on évalue la résistance vue des connexions du condensateur ou de la bobine pour une excitation réduite à 0 V ou 0 A.
2. le premier gain H_0 est déterminé lorsque le circuit est étudié en courant continu : si un condensateur C est présent, celui-ci est physiquement retiré. S'il s'agit d'une bobine L , celle-ci est remplacée par un court-circuit.
3. un second gain H^i est obtenu lorsque l'élément de stockage est considéré dans un état haute fréquence : C_i est remplacé par un court-circuit ou L_i est retirée du circuit.

2.4.1 Déterminez facilement trois fonctions de transfert du premier ordre

Voyons maintenant comment appliquer les formules étudiées au travers de quelques exemples simples. Le premier apparaît en Figure 2.42a. Quelle est la fonction de transfert liant V_{out} à V_{in} ? La première étape dans la liste ci-dessus est décrite par le croquis (b) dans lequel le stimulus est réduit à 0 V alors que l'on détermine la résistance R offerte par les connexions du condensateur lorsque celui-ci est temporairement retiré :

$$R = R_1 + R_2 \quad (2.155)$$

La constant de temps τ_1 associée à C_1 est

$$\tau_1 = (R_1 + R_2)C_1 \quad (2.156)$$

Le gain statique est obtenu avec C_1 retiré du circuit comme montré en Figure 2.42c. Dans ce cas particulier, le chemin du signal est interrompu, ainsi $H_0 = 0$. L'étape

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

finale est obtenue avec le croquis (d) pour $s \rightarrow \infty$ dans lequel C_1 est remplacé par un court-circuit. Quel est le gain du circuit de la Figure 2.42d ?

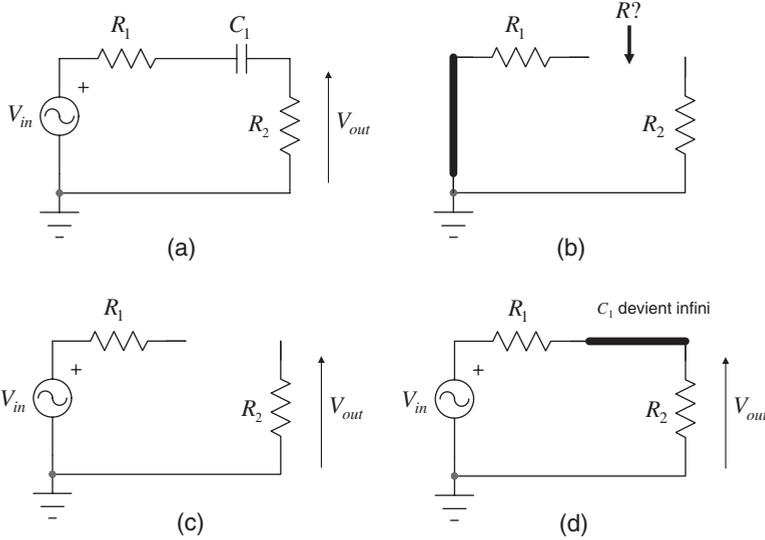


Figure 2.42 Quelle est la fonction de transfert de ce simple circuit du premier ordre ?

$$H^1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.157)$$

On peut désormais assembler les pièces selon (2.146) :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 \tau_1 s}{1 + s \tau_1} = \frac{0 + \frac{R_2}{R_1 + R_2} (R_1 + R_2) C_1 s}{1 + s (R_1 + R_2) C_1} \quad (2.158)$$

Après simplification, nous obtenons la formule suivante

$$H(s) = \frac{s R_2 C_1}{1 + s (R_1 + R_2) C_1} = \frac{\frac{s}{\omega_{zo}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (2.159)$$

dans laquelle

$$\omega_{z0} = \frac{1}{R_2 C_1} \quad (2.160)$$

et

$$\omega_{p1} = \frac{1}{(R_1 + R_2) C_1} \quad (2.161)$$

Dans (2.159), il y a un zéro à l'origine, impliquant un gain H nul pour un stimulus à 0 Hz. Ce que (2.160) décrit est ce que j'appelle le zéro de coupure à 0 dB. C'est la fréquence de coupure à laquelle le module de s/ω_{z0} est 1 ou 0 dB, d'où le nom.

Dans cet exemple, nous avons dérivé cette fonction de transfert simplement en dessinant trois petits schémas individuels, sans écrire une seule équation. Lorsque vous serez habitué aux techniques de calculs rapides, vous serez capable de dériver cette fonction de transfert dans votre tête, sans dessiner de schémas intermédiaires !

Continuons avec un autre exemple représenté en Figure 2.43. Cette fois, le circuit inclut une bobine. Déroulons la séquence précédente. La constante de temps est obtenue à l'aide du croquis (b) dans lequel la source éteinte à 0 V est remplacée par un court-circuit. La résistance vue des connexions de la bobine est

$$R = R_1 \parallel (R_2 + R_3) \quad (2.162)$$

Par conséquent, la constante de temps τ_4 associée à L_4 est

$$\tau_4 = \frac{L_4}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)} \quad (2.163)$$

Le gain statique est obtenu lorsque L_4 est remplacée par un court-circuit comme indiqué en Figure 2.43c. Dans ce cas particulier, le chemin du signal est mis à la masse à la connexion droite de R_1 impliquant $H_0 = 0$. L'étape finale est obtenue lorsque L_4 est placée en état haute impédance. Quel est le gain du circuit de la Figure 2.43d dans ce cas ?

$$H^4 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.164)$$

Nous y sommes, il est maintenant aisé de combiner les pièces selon les formules (2.146) ou (2.151):

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

$$H(s) = \frac{H_0 + H^4 \tau_4 s}{1 + s \tau_4} = \frac{0 + \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{L_4}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)} s}{1 + s \frac{L_4}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}} \quad (2.165)$$

Dans l'expression ci-dessus, il est possible de développer $R_1 \parallel (R_2 + R_3)$ dans le numérateur et d'opérer une simplification avec $R_1 + R_2 + R_3$. La fonction de transfert finale est alors :

$$H(s) = \frac{s \frac{L_4}{R_1 (R_2 + R_3)}}{1 + s \frac{L_4}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}} = \frac{\frac{s}{\omega_{zo}}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (2.166)$$

dans laquelle

$$\omega_{zo} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{L_4} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{L_4 R_3} \quad (2.167)$$

et

$$\omega_p = \frac{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}{L_4} \quad (2.168)$$

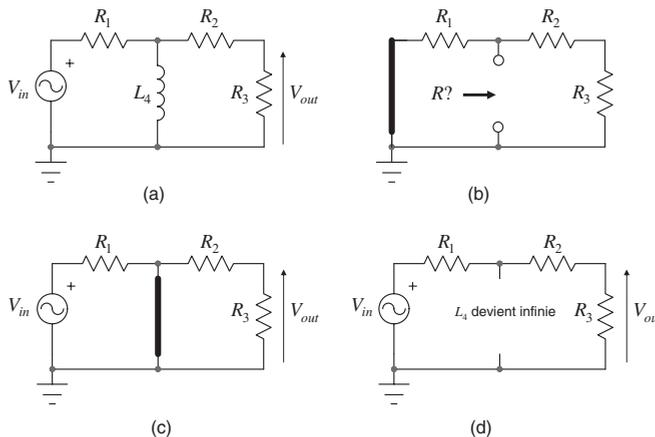


Figure 2.43 Quelle est la fonction de transfert de ce simple circuit inductif du premier ordre ?

Pour vérifier nos résultats, nous avons capturé les données dans une feuille Mathcad® et lancé en parallèle une simulation SPICE. Les courbes obtenues par le logiciel de calcul sont en Figure 2.44. Veuillez noter l'architecture générale de la page dans laquelle les constantes de temps et gains apparaissent clairement au sein de la fonction de transfert H . De cette façon, si vous détectez une erreur, il est aisé de ne modifier que le terme incriminé sans affecter l'exercice global. C'est l'un des points importants des techniques de calculs rapides qui gagnera en sens au fur et à mesure que la complexité des réseaux étudiés augmente.

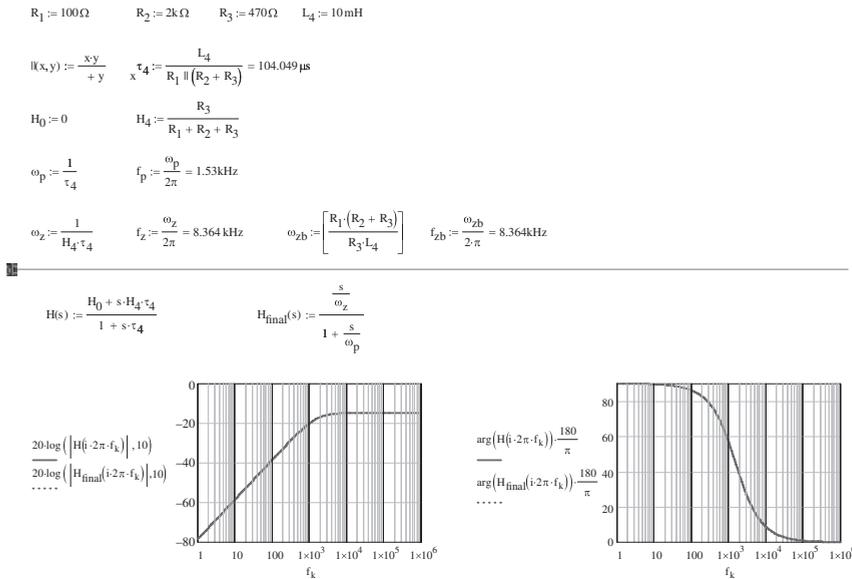


Figure 2.44 Mathcad® offre un moyen simple et rapide de vérifier les résultats pour les comparer ensuite avec SPICE.

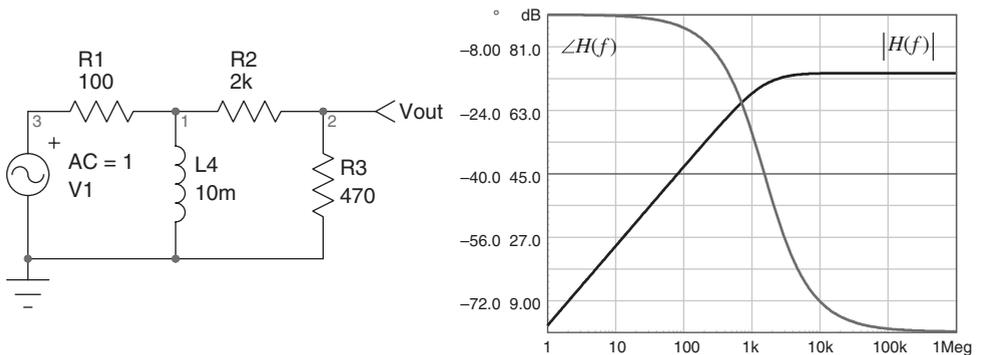


Figure 2.45 Une simulation SPICE offre également un moyen rapide de comparer les réponses harmoniques avec celles délivrées par Mathcad®.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

La simulation SPICE du circuit est donnée en Figure 2.45. Les résultats de simulation apparaissent dans la partie droite de la figure et ne présentent pas de différence avec ceux calculés par Mathcad®.

Le dernier exemple est représenté en Figure 2.46 et augmente sensiblement en complexité. Cependant, nous allons voir qu'en respectant les trois étapes décrites, la fonction de transfert apparaîtra rapidement et sous une forme ordonnée. Commençons par la constante de temps obtenue en déterminant la résistance vue par les connexions du condensateur lorsque l'excitation est éteinte à 0 V (Figure 2.46b). On peut voir que R_2 vient en parallèle avec les connexions du condensateur alors que R_1 est mise en parallèle avec R_4 . Si nécessaire, vous pouvez redessiner un petit croquis en déplaçant les éléments afin de présenter un circuit plus lisible. La résistance R est simplement

$$R = R_2 \parallel \left((R_3 + R_1) \parallel R_4 \right) \quad (2.169)$$

La constante de temps τ_5 associée au condensateur C_5 est donc

$$\tau_5 = \left[R_2 \parallel \left((R_3 + R_1) \parallel R_4 \right) \right] C_5 \quad (2.170)$$

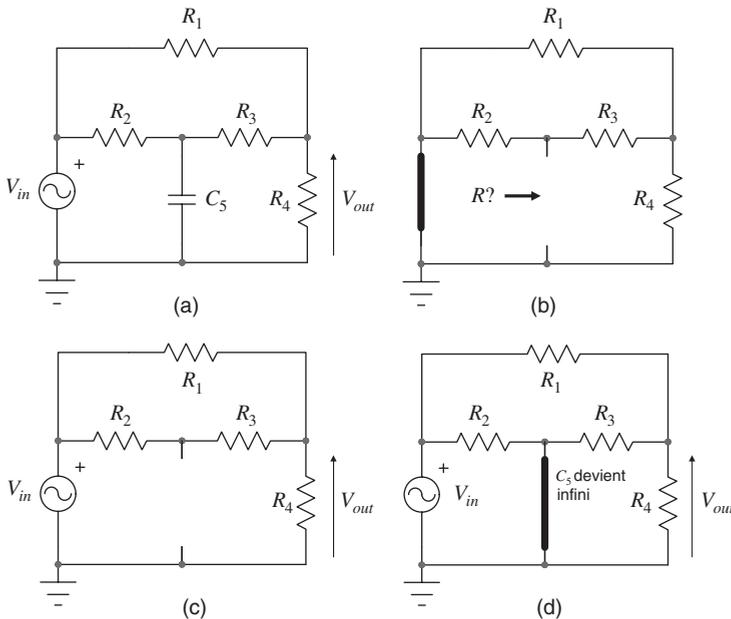


Figure 2.46 Dans ce circuit, un élément relie l'entrée et la sortie : R_1 . Comment peut-on simplement et rapidement obtenir la fonction de transfert de ce réseau passif du premier ordre ?

Étape suivante, déterminez le gain statique pour s égale 0. Dans cette configuration, le condensateur C_5 disparaît comme indiqué en Figure 2.46c. La fonction de transfert correspondante est obtenue en identifiant un diviseur de tension autour de R_4 et la connexion série-parallèle de R_2 , R_3 et R_1 :

$$H_0 = \frac{R_4}{R_4 + (R_2 + R_3) \parallel R_1} \quad (2.171)$$

La dernière étape réclame le calcul de H^5 avec le condensateur C_5 placé dans son état haute-fréquence et remplacé par un court-circuit (Figure 2.46d). Comme la connexion droite de R_2 est mise à la masse, cette résistance vient en parallèle sur la source et ne joue aucun rôle dans l'expression du gain. R_3 est en parallèle avec R_4 et forme un diviseur résistif avec R_1 :

$$H^5 = \frac{R_4 \parallel R_3}{R_4 \parallel R_3 + R_1} \quad (2.172)$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour construire la fonction de transfert en utilisant (2.146). Cette fois, H_0 n'est pas égal à zéro et peut avantageusement être factorisé pour former le terme de tête :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + s \frac{H^5}{H_0} \tau_5}{1 + s \tau_5} \quad (2.173)$$

Le pôle est situé à

$$\omega_p = \frac{1}{\left[R_2 \parallel (R_3 + R_1 \parallel R_4) \right] C_5} \quad (2.174)$$

et le zéro apparaît à

$$\omega_z = \frac{\frac{R_4}{R_4 + (R_2 + R_3) \parallel R_1}}{\frac{R_4 \parallel R_3}{R_4 \parallel R_3 + R_1} \left[R_2 \parallel (R_3 + R_1 \parallel R_4) \right] C_5} \quad (2.175)$$

On peut capturer ces expressions dans une feuille Mathcad® et vérifier les réponses en amplitude et phase. La feuille est copiée en Figure 2.47.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= 4.7\text{k}\Omega & R_2 &:= 680\Omega & R_3 &:= 2\text{k}\Omega & R_4 &:= 1\text{k}\Omega & C_5 &:= 0.22\mu\text{F} \\
 \parallel(x,y) &:= \frac{x \cdot y}{x + y} & \tau_5 &:= [R_2 \parallel [R_3 + (R_1 \parallel R_4)]] \cdot C_5 = 120.573\mu\text{s} \\
 H_0 &:= \frac{R_4}{R_4 + [(R_2 + R_3) \parallel R_1]} & H_5 &:= \frac{R_4 \parallel R_3}{R_1 + R_4 \parallel R_3} \\
 \omega_p &:= \frac{1}{\tau_5} & f_p &:= \frac{\omega_p}{2\pi} = 1.32\text{kHz} \\
 \omega_z &:= \frac{H_0}{H_5 \tau_5} & f_z &:= \frac{\omega_z}{2\pi} = 3.926\text{kHz} & f_{za} &:= \frac{R_4}{\frac{R_4 \parallel R_3}{R_1 + R_4 \parallel R_3} \cdot [(R_2 \parallel [R_3 + (R_1 \parallel R_4)]) \cdot C_5]} \cdot \frac{1}{2\pi} = 3.926\text{kHz}
 \end{aligned}$$

$$H(s) := H_0 \frac{1 + s \cdot \tau_5}{1 + s \cdot \tau_5}$$

$$H_{\text{final}}(s) := H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

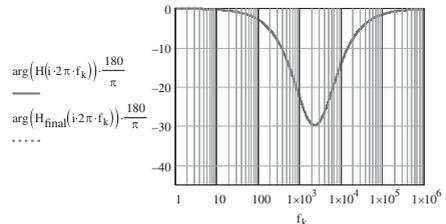
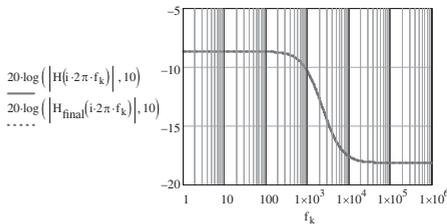


Figure 2.47 Mathcad[®] nous donne facilement les réponses dynamiques des expressions obtenues.

Ce circuit a également été simulé avec SPICE comme indiqué en Figure 2.48. Les résultats de simulation confirment ceux délivrés par Mathcad[®].

Dans ces exemples, en appliquant trois étapes individuellement illustrées par de petits croquis, nous avons pu déterminer les fonctions de transfert facilement et rapidement sans écrire une ligne. C'est la puissance de cette technique qui offre une vue différente du circuit étudié en calculant une constante de temps et deux gains.

Dans l'étape finale, on place l'élément qui stocke l'énergie dans état haute fréquence : le condensateur est remplacé par un court-circuit et la bobine est remplacée par un circuit ouvert. Cela nous donne le gain H^i qui, combiné plus tard avec la constante de temps, indique la position du zéro. Le numérateur $N(s)$ suit la forme

$$N(s) = H_0 + H^i \tau_i s \quad (2.176)$$

Dans le cas où ce gain H^i est nul, le terme de droite dans (2.176) disparaît et il n'y a pas de zéro dans le circuit étudié. En d'autres termes, par inspection, lorsque vous court-circuituez le condensateur ou ouvrez la bobine, si le stimulus ne produit pas de réponse – en d'autres termes, le gain est nul – alors il n'y a pas

de zéro associé au condensateur ou à la bobine. À l’opposé, si en court-circuitant le condensateur ou en ouvrant la bobine le signal d’excitation peut passer et produire une réponse, alors oui, il y a un zéro associé au condensateur ou la bobine.

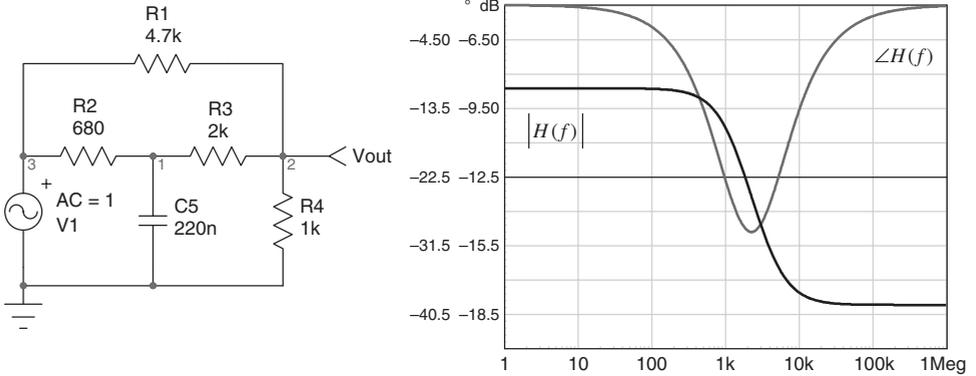


Figure 2.48 Une simulation SPICE est simple et rapide.

Ce point est important et utile pour vérifier la présence d’un zéro avant de se lancer dans l’étude du numérateur. La Figure 2.49 regroupe quelques exemples afin de vérifier ce fait. Dans le croquis (a), si l’on court-circuite C , la réponse existe : il y a un zéro associé à C . Dans l’exemple (b), si l’on retire L , il n’y a pas de réponse : pas de zéro dans ce circuit. En (c), si l’on retire L , il reste R_2 qui assure une réponse : il y a un zéro associé à L . Enfin, en (d), court-circuiter C annule la réponse et il n’y a pas de zéro dans le circuit.

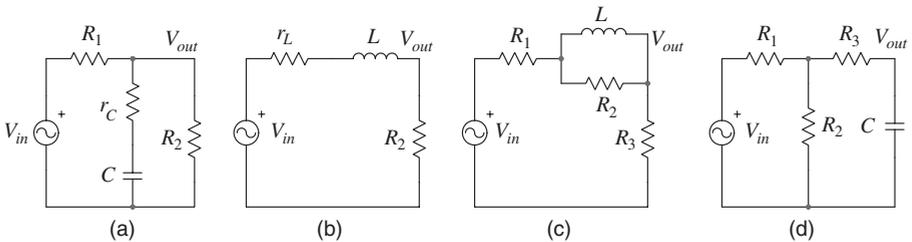


Figure 2.49 Court-circuiter le condensateur ou ouvrez la bobine et vérifiez l’existence de la réponse V_{out} . Si cette réponse existe dans cette condition, alors il y a un zéro associé avec l’élément considéré.

Si l’on considère rétrospectivement la Figure 2.34, si vous court-circuitez C_2 , la réponse est 0 donc C_2 ne contribue pas à la réalisation d’un zéro. Cependant, si vous remplacez C_1 par un fil, la réponse existe toujours impliquant la présence d’un zéro associé à ce condensateur.

2.4.2 Obtenir le zéro avec une double injection nulle

Pour déterminer le pôle du dénominateur, nous avons évalué la constante de temps du circuit lorsque la source d'excitation était éteinte à 0. Nous avons ensuite cherché la résistance pilotant le condensateur ou la bobine dans cette condition afin de déterminer la constante de temps du circuit. L'inverse de cette constante de temps forme le pôle du circuit. Le pôle du dénominateur est la racine $s = s_p$ pour laquelle le module de la fonction de transfert devient infini.

Le zéro, d'un autre côté, apparaît au numérateur de la fonction de transfert et annule cette dernière pour $s = s_z$. Lorsqu'un circuit *transformé* possédant un zéro est examiné à $s = s_z$, le stimulus d'entrée ne peut pas se propager et la réponse est nulle : on note $V_{out}(s) = 0$ ou $\hat{v}_{out} = 0$ pour une sortie en tension. On dit que le zéro *nullifie* (*nulls*) la réponse pour $s = s_z$. Ainsi, lorsque le circuit transformé est analysé à $s = s_z$, il est possible de déterminer la résistance R pilotant le condensateur ou la bobine et de définir la constante de temps obtenue dans cette configuration. Comme nous allons le voir plus loin dans le chapitre 3, la nouvelle constante de temps formée autour de la résistance obtenue pour une réponse nullifiée et l'élément passif associé (L ou C) représente l'inverse du zéro. Dans cette configuration, l'excitation est maintenue en place (alors qu'elle était éteinte auparavant pour la détermination du pôle) et l'on installe un générateur de courant I_T aux bornes de l'élément passif considéré, L ou C . Ceci dans le but de déterminer la résistance R offerte par ses connexions (voir Figure 1.4 par exemple). Comme on étudie le circuit avec deux sources d'excitation, V_{in} et I_T à $s = s_z$, la réponse alternative doit être nullifiée : c'est la raison pour laquelle cette technique se nomme la *double injection nulle* ou *Null Double Injection* abrégée NDI en anglais. Dans un circuit contenant un ou plusieurs zéros, pour une certaine combinaison de V_{in} et I_T , le signal de sortie disparaît et $V_{out}(s) = 0$. Nous démontrerons ce fait dans le chapitre 3 mais considérons qu'il est exact pour le moment. Il est important de noter la différence entre une sortie nullifiée pour $s = s_z$ et un court-circuit franc. La Figure 2.50 illustre cette différence. Lorsque la sortie est nullifiée à $s = s_z$, la réponse petit-signal est 0 V et le courant circulant dans la charge est également nul. Si à présent vous installez un fil en sortie, la tension de sortie est sûrement 0 V, mais vous n'obtenez pas les conditions pour lesquelles le zéro est défini : absence de réponse obtenue par absence de courant circulant dans la charge pour $s = s_z$. Par conséquent, nullifier la sortie est différent de la court-circuiter.

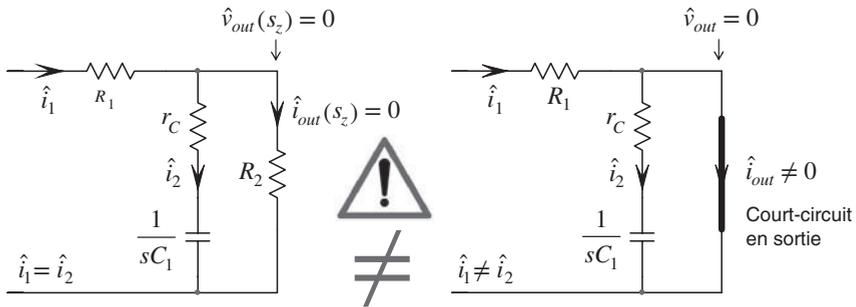


Figure 2.50 Nullifier la sortie ne signifie pas la court-circuiter.

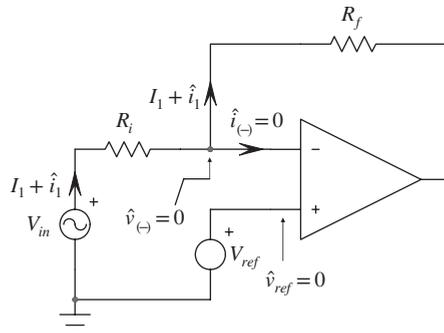


Figure 2.51 La masse virtuelle nullifie l'entrée inverseuse de l'op amp pour un modèle parfait : on mesure 0 V alternatif en l'absence de court-circuit.

Ce concept est sûrement le plus difficile à appréhender dans les techniques de calculs rapides et le théorème de l'extra-élément. Des similarités existent avec l'amplificateur opérationnel comme dessiné en Figure 2.51. Lorsque la boucle est fermée par R_f impliquant que la sortie de l'op amp évolue dans sa zone linéaire (la sortie n'est pas bloquée à la masse ou au rail d'alimentation V_{cc}), l'op amp s'efforce d'égaliser ses entrées et maintient $V_{(-)} = V_{(+)}$. C'est vrai en continu, impliquant que la tension sur la broche inverseuse est égale à V_{ref} (en considérant un op amp parfait) mais également en alternatif. Comme V_{ref} est une source parfaitement stable, si V_{in} module le circuit, la tension en petit-signal de la référence est nulle, impliquant $\hat{v}_{ref} = 0$. Puisque les deux entrées sont au même potentiel, la tension alternative sur la broche inverseuse est également nulle : $\hat{v}_{(-)} = 0$. Enfin, comme les entrées d'un op amp idéal présentent une impédance infinie, le courant de polarisation est également nul : $\hat{i}_{(-)} = 0$. Le fonctionnement en boucle fermée de l'op amp nullifie la tension alternative sur la broche (-) : il s'agit de la masse virtuelle.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Appliquons cette technique à plusieurs exemples. Considérons le circuit du premier ordre dessiné en Figure 2.52a. Nous avons vu que la constante de temps est évaluée en réduisant l'excitation à 0. Par inspection, on peut remplacer V_{in} par un fil et regarder la résistance offerte par les connexions de la bobine dans cette condition. On trouve immédiatement que

$$\tau_1 = \frac{L}{r_L + R_1 \parallel R_2} \quad (2.177)$$

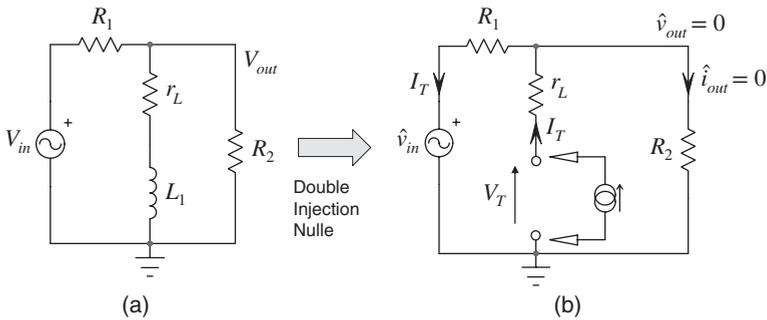


Figure 2.52 Ce circuit passe-haut implique un unique élément de stockage d'énergie : c'est un circuit du premier ordre. Le zéro peut être observé en regardant dans les connexions de la bobine alors que la sortie est nullifiée.

En considérant de circuit en continu, le gain H_0 est obtenu instantanément en considérant L_1 comme un court-circuit :

$$H_0 = \frac{R_2 \parallel r_L}{R_2 \parallel r_L + R_1} \quad (2.178)$$

Maintenant, y a-t-il un zéro dans ce circuit ? Si L_1 est mise dans son état haute-fréquence, (physiquement retirée du circuit), est-ce que l'excitation se propage vers la sortie ? Oui, le gain H^1 implique R_2 et R_1 sous la forme d'un simple diviseur résistif. Un zéro existe dans ce réseau et concerne L_1 . Pour appliquer notre double injection nulle, regardons la Figure 2.52b redessinée pour $s = s_z$: la source V_{in} reste en place mais la fonction de transfert est égale à zéro à cette fréquence particulière, $\hat{v}_{out} = 0$. Une sortie nullifiée signifie un courant nul circulant dans R_2 . Ainsi, tout le courant I_T traverse R_1 et la source V_{in} . Puisque la connexion supérieure de r_L est polarisée à 0 ($\hat{v}_{out} = 0$) alors le courant I_T circulant dans cet élément est simplement

$$I_T = \frac{V_T}{r_L} \quad (2.179)$$

Autrement dit

$$\frac{V_T}{I_T} = r_L \quad (2.180)$$

et la constante de temps impliquant L_1 lorsque $\hat{v}_{out} = 0$ est L/r_L . Le zéro est l'inverse de cette constante de temps et se trouve défini par

$$\omega_z = \frac{r_L}{L_1} \quad (2.181)$$

La fonction de transfert complète est alors exprimée par

$$H(s) = \frac{R_2 \parallel r_L}{R_2 \parallel r_L + R_1} \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L}}{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_1 \parallel R_2}} \quad (2.182)$$

et le zéro a été trouvé en utilisant la technique NDI. Si nous avons mis en œuvre la méthode en trois étapes décrite au dessus, la position brute du zéro aurait été

$$\omega_z = \frac{\frac{R_2 \parallel r_L}{R_2 \parallel r_L + R_1}}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{L_1}{r_L + R_1 \parallel R_2}} \quad (2.183)$$

Croyez-le ou non, (2.183) est identique à (2.181). Nous pouvons à présent conclure préliminairement qu'un zéro obtenu avec la technique NDI est toujours exprimé sous une forme plus simple que celle obtenue par la méthode en trois étapes décrite par (2.146). Parfois, les simplifications sont évidentes comme nous l'avons vu avec (2.165) mais je doute que vous voyiez immédiatement le résultat dans (2.183). Cependant – et il est important de le souligner – les deux expressions délivrent le même résultat et conduisent à une organisation claire et ordonnée. Maintenant, et cela dépend de votre appétence pour les calculs, vous pouvez choisir une NDI ou la méthode en trois étapes.

Testons la méthode NDI dans l'exemple de Figure 2.46a. Le zéro donné par (2.175) est plutôt compliqué mais correct cependant comme SPICE nous l'a confirmé. Appliquons une NDI à cet exemple en ajoutant un générateur de courant I_T alors que la source d'entrée est reconnectée (Figure 2.53b) : nous sommes en

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

configuration de double injection nulle. Le nouveau circuit est observé à $s = s_z$. Dans cette condition particulière, $\hat{v}_{out} = 0$. Aucun courant ne circule dans R_4 . Ainsi, le même courant i_1 traverse R_1 et R_3 . R_4 est naturellement éliminée du calcul.

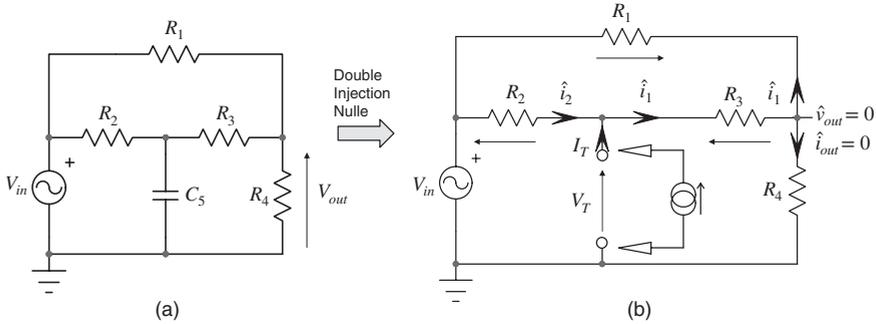


Figure 2.53 Le zéro peut être observé en regardant au travers des connexions du condensateur et en considérant une sortie nullifiée, $\hat{v}_{out} = 0$.

À partir de la Figure 2.53b, nous pouvons définir le courant circulant dans R_3 . Comme sa connexion de droite est polarisée à \hat{v}_{out} qui est égale à 0 V, alors V_T est appliqué aux bornes de R_3 :

$$i_1 = \frac{V_T}{R_3} \quad (2.184)$$

Ce courant circule également dans R_1 comme aucun courant ne traverse R_4 . Ainsi, la tension aux bornes de R_1 est définie par

$$V_{R_1} = i_1 R_1 = \frac{V_T}{R_3} R_1 \quad (2.185)$$

La tension aux bornes de R_2 est moins la somme de la tension sur R_1 plus celle de R_3 :

$$V_{R_2} = - \left(\frac{V_T}{R_3} R_1 + V_T \right) = -V_T \left(\frac{R_1}{R_3} + 1 \right) \quad (2.186)$$

La loi des nœuds nous indique que i_1 est la somme de i_2 avec I_T :

$$i_1 = i_2 + I_T = \frac{V_{R_2}}{R_2} + I_T \quad (2.187)$$

En substituant (2.186) et (2.184) dans (2.187) puis en réorganisant, nous obtenons

$$\frac{V_T}{R_3} = -\frac{V_T \left(\frac{R_1}{R_3} + 1 \right)}{R_2} + I_T \quad (2.188)$$

En factorisant V_T du côté gauche :

$$V_T \left(\frac{1}{R_3} + \frac{\frac{R_1}{R_3} + 1}{R_2} \right) = I_T \quad (2.189)$$

Finalement,

$$\frac{V_T}{I_T} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{\frac{R_1}{R_3} + 1}{R_2}} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2.190)$$

Cette expression définit la résistance vue des connexions du condensateur pendant la NDI. Le zéro est ainsi défini par

$$\omega_z = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2 R_3 C_5} \quad (2.191)$$

Cette expression est égale à celle donnée par (2.175) en dépit de la faible ressemblance. Pour vérifier que nos affirmations sont correctes, vous trouverez ci-dessous les calculs réalisés par Mathcad® en considérant la résistance vue des connexions de C_5 obtenue en appliquant une NDI. Il y a la première expression déterminée par la technique des trois étapes (voir [2.175]), puis celle obtenue par la NDI et, enfin, celle donnée par [2] en page 66.

$$\frac{\frac{R_4 \parallel R_3}{R_1 + R_4 \parallel R_3} \cdot [R_2 \parallel [R_3 + (R_1 \parallel R_4)]]}{\frac{R_4}{R_4 + [(R_2 + R_3) \parallel R_1]}} = 184.282 \Omega \quad \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 184.282 \Omega$$

$$R_3 \parallel \left(\frac{R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}} \right) = 184.282 \Omega$$

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Ces expressions sont identiques. Une fois de plus, comme nous l'avons mentionnée auparavant, l'approche NDI débouche sur l'expression la plus simple mais demande souvent une analyse utilisant les lois des nœuds et mailles impliquant une sortie nullifiée. Alors que les trois étapes n'ont pas besoin de cette complication puisque l'on réutilise la constante de temps du dénominateur combinée avec un gain. Les deux méthodes délivrent le même résultat bien que la technique des trois étapes puisse réclamer un effort supplémentaire pour simplifier le zéro. Par exemple, à partir de l'analyse NDI, on réalise que R_4 ne joue aucun rôle. Si R_4 approche l'infini dans l'équation de gauche ci-dessus, alors R se simplifie à $\frac{R_3}{R_1 + R_3} \left[R_2 \parallel (R_3 + R_1) \right]$. Une nouvelle expression mais qui donne toujours 184.282Ω !

Quelques remarques à présent : malgré sa présence dans le schéma, la source d'entrée V_{in} ne joue aucun rôle dans l'expression du zéro. Cela fait sens : pourquoi changer l'amplitude de la modulation ou le niveau de polarisation changerait la position du zéro ? À moins, bien sûr, qu'une ou plusieurs sources soient liées à la tension d'entrée V_{in} (ce n'est pas le cas ici). Mis à part ce cas particulier, V_{in} ne revêt aucun rôle dans la détermination de la résistance pilotant le condensateur ou la bobine lors d'une analyse NDI.

On peut aussi montrer que dans le cadre du calcul des constantes de temps naturelles (excitation réduite à 0), la résistance offerte par un port capacitif ou inductif est unique. Supposons que vous deviez trouver différentes fonctions de transfert affectant un circuit impliquant que la source d'excitation reste au même endroit mais des réponses à des nœuds différents sont considérées : les constantes de temps restent inchangées et le dénominateur $D(s)$ ne varie pas pour les différentes fonctions de transfert caractérisant le circuit étudié (voir la section excitation du réseau ci-dessus). Ce n'est plus vrai des coefficients du numérateur. Selon le nœud qui est désigné afin d'observer V_{out} (la réponse) pour une position inchangée de V_{in} , le numérateur sera modifié, impliquant différents zéros, s'ils existent. Ainsi, la résistance offerte par le port de connexion d'un condensateur ou d'une bobine lors d'une analyse NDI – pour obtenir les constantes de temps du numérateur – n'est pas unique. Dans la Figure 2.53a, si l'on observe V_{out} aux bornes de R_1 , alors $D(s)$ restera inchangé mais la résistance obtenue via (2.190) sera différente.

Dans les exemples abordés, nous avons concentré nos efforts sur des fonctions de transfert en tension, pour lesquelles le nul était observé aux bornes d'une résistance (R_4 in Figure 2.53). La Figure 2.50 nous a appris que nullifier la tension

aux bornes d'un composant n'était pas la même chose que court-circuiter ses bornes. Si nous étudions maintenant des impédances d'entrée ou de sortie, par exemple, l'excitation devient une source de courant et la réponse, la tension à ses bornes. Si l'on applique l'analyse NDI au circuit étudié, la réponse nullifiée est observée aux bornes de la source de courant. Si l'on nullifie cette réponse, il y a 0 V aux bornes du générateur et le courant qui circule est I . Si l'on remplace le générateur par un court-circuit alors un courant identique circule et la tension à ses bornes est toujours 0 V. La Figure 2.54 détaille un exemple lors de la détermination d'une impédance.

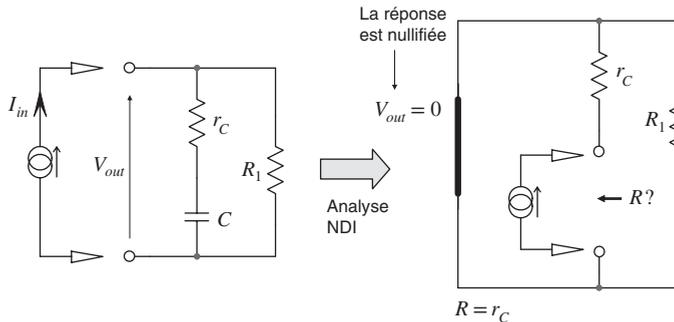


Figure 2.54 Dans ce simple calcul d'impédance, l'analyse NDI implique la nullification de la réponse aux bornes du générateur de courant. Dans ce cas *dégénéré*, on peut remplacer la source de courant par un court-circuit. Le zéro, ici, est classiquement imposé par r_C .

Il s'agit d'un cas *dégénéré*, très utile dans la détermination des constantes de temps du numérateur lors d'une étude d'impédance.

2.4.3 Comment confirmer les zéros obtenus avec la double injection nulle ?

Dans le chapitre 1, nous avons vu comment SPICE pouvait nous aider à vérifier les résultats de nos expressions analytiques. En polarisant les connexions des éléments de stockage avec une source continue de 1 A, il suffit de mesurer la tension aux bornes du générateur lorsque la source d'excitation est éteinte à 0. La tension obtenue est directement la résistance vue par le condensateur ou la bobine dans cette condition particulière. Cette approche est extrêmement utile en particulier pour confirmer des calculs menés sur des circuits d'ordre élevé et impliquant des sources contrôlées. J'ai pu, à plusieurs reprises, corriger une erreur commise lors d'un calcul en comparant la valeur retournée par Mathcad® et celle obtenue en simulation SPICE.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Pour une analyse NDI, c'est un peu plus compliqué puisqu'il faut nullifier la réponse. Il faut en effet recréer la condition qui annule la réponse alors que l'on mesure la résistance offerte par les connexions du condensateur ou de la bobine dans cette condition. Pratiquement, il faut ajuster la source de courant I_T afin d'amener V_{out} à zéro alors que l'excitation est toujours en place. Une structure de test telle que celle présentée en Figure 2.55 fonctionne très bien malgré sa simplicité. L'exemple est celui de la Figure 2.53.

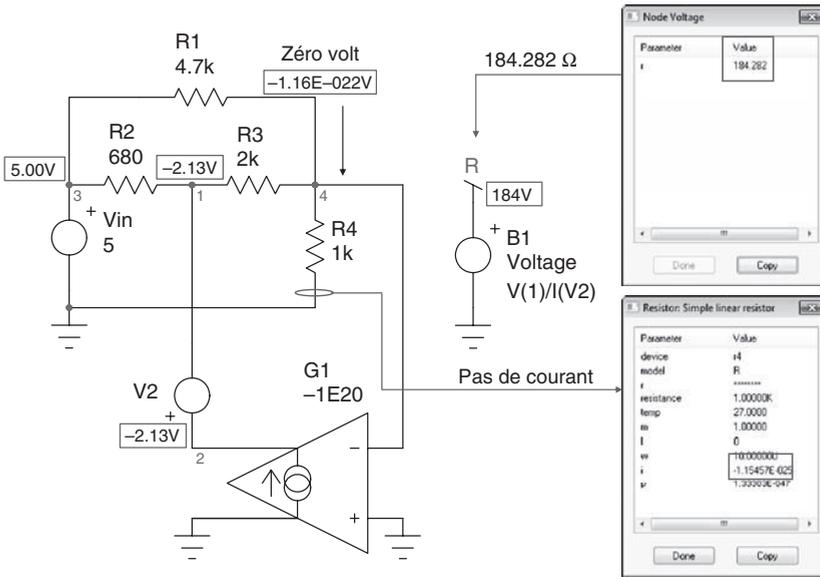


Figure 2.55 La source de courant commandée G_1 s'ajuste automatiquement pour créer les conditions d'annulation de la réponse et permet de mesurer la résistance offerte par les connexions du condensateur.

L'amplificateur de transconductance G_1 compare son entrée inverseuse à celle non-inverseuse et reliée à la masse. Ce système fonctionne en boucle fermée et G_1 ajuste le courant délivré de telle façon que les deux entrées soient égales. Comme le gain de l'amplificateur à transconductance est énorme, le nœud 4, qui est la sortie, est pratiquement à zéro. Le courant injecté par G_1 est mesuré par V_2 (une source muette de 0 V) et B_1 calcule la résistance vue au nœud 1, là où le condensateur est normalement connecté. Veillez à ce que la polarité des courant et tension mesurés soit respectée en considérant les nœuds de mesure. La source B_1 mesure exactement 184.282 Ω comme calculé par les différentes équations. C'est le résultat correct. Si V_{in} change à différentes valeurs, G_1 ajuste sa sortie pour maintenir une réponse nullifiée au nœud 4 mais le résultat calculé par B_1 reste inchangé : Comme indiqué précédemment, V_{in} ne joue aucune rôle dans la résistance offerte par le nœud 4 durant une NDI.

En Figure 2.56, nous avons scindé la détermination de la fonction de transfert en trois étapes de mesure. En (a), le gain statique est évalué et calculé par B_2 : V_4 injecte 1 V et 322 mV apparaissent aux bornes de R_{15} . Le gain est de 0.322 ou -9.84 dB. En (b), le générateur de test débite 1 A pour polariser le point de connexion du condensateur et obtenir la résistance qui le pilote lorsque l'excitation est réduite à 0 V. Une résistance de 408 Ω est obtenue et utilisée ensuite pour déterminer la position du pôle avec B_4 (1.77 kHz). En (c), la technique NDI est appliquée pour obtenir la résistance offerte par les connexions du condensateur alors que la sortie est nullifiée. L'amplificateur G_1 injecte un courant pour annuler la réponse, la tension aux bornes R_{11} . B_1 calcule la résistance mesurée dans cette condition qui s'élève à 81.6 Ω . B_5 calcule le zéro correspondant qui est évalué à 8.86 kHz. Finalement, le sous-circuit X_1 combine le gain, le pôle le zéro dans un block de Laplace dont la sortie est comparée à celle du circuit original (V_{out1}). Comme indiqué sous le schéma, toutes les réponses sont identiques.

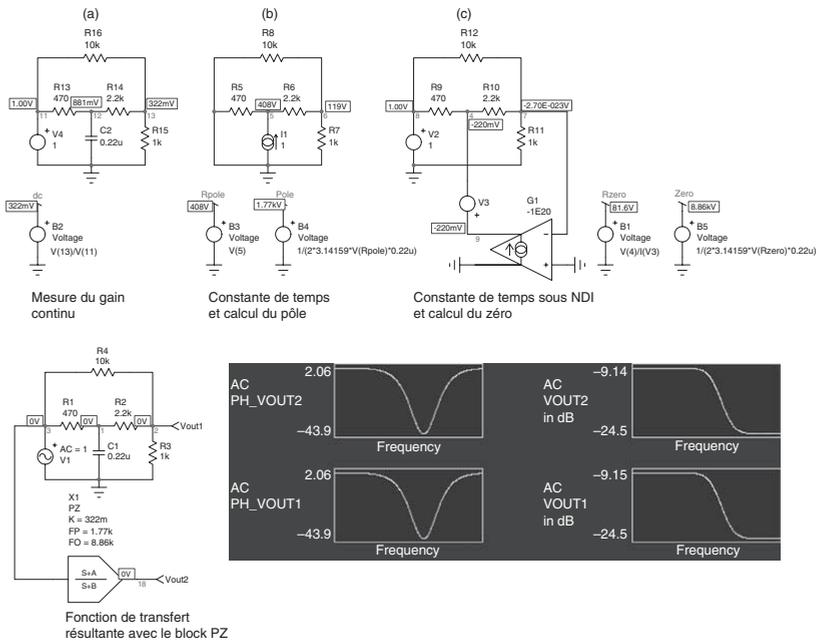


Figure 2.56 Dans cet exemple, le pôle, le zéro et le gain sont mesurés séparément en utilisant les techniques décrites puis combinés dans un bloc Laplace.

Le fait que nous puissions vérifier les résistances offertes par les ports de connexion de la bobine ou du condensateur dans les deux conditions d'analyse (source éteinte et NDI) représente une aide considérable afin de s'assurer de l'intégrité du résultat final. L'amplificateur de transconductance peut observer n'importe quels nœuds et injecter

du courant dans un port flottant (non référencé à la masse) sans problème. Nous verrons l'utilité de ces options lors d'études de réseaux d'ordre plus élevé.

2.4.4 Excitation du réseau

Avant de clôturer ce chapitre, il est important de réaliser le rôle joué par la source d'excitation et comment nous pouvons l'appliquer à un circuit donné. Nous avons vu dans de nombreux exemples comment le stimulus se propage dans le réseau étudié et produit la réponse. Ce stimulus peut être une source de tension ou de courant mais elle doit être appliquée de telle sorte que la structure du réseau soit inchangée lorsque la source est éteinte : une source de tension sera ainsi exclusivement introduite dans une branche *en série* avec un élément existant. Pour une source de courant, elle sera appliquée *en parallèle* avec un élément existant. Il en va ainsi afin qu'à l'extinction de la source considérée, le circuit retourne dans sa structure originelle. Bien sûr, rien ne vous empêche d'injecter une tension en parallèle d'un élément existant mais vous modifiez la structure du réseau lors de l'extinction de la source. En effet, une source de tension éteinte à 0 V devient un court-circuit et n'affecte pas le réseau si elle est placée quelque part en série dans une maille. Si vous la connectez en parallèle avec une résistance et que vous éteignez la source, la résistance est court-circuitée et la structure du réseau modifiée. Le problème se pose dans des termes similaires avec une source de courant placée en parallèle avec un élément du circuit qui ne perturbera pas le réseau lorsque vous la réduirez à 0 A. En revanche, si vous insérez cette source en série avec un composant, alors l'extinction à 0 A de la source (circuit ouvert) rendra le composant non connecté et modifiera le réseau étudié.

La Figure 2.57 représente un simple circuit du premier ordre dont le seul élément de stockage d'énergie est le condensateur C_1 . Il n'y a pas d'excitation et la sortie où observer la réponse n'est pas spécifiée. C'est ce que j'appelle la forme originelle ou la *structure* de ce réseau.

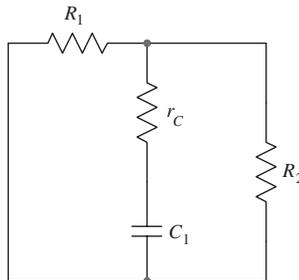


Figure 2.57 Les constantes de temps naturelles d'un réseau électrique, passif ou actif, dépendent de la structure de ce réseau et sont indépendantes de l'excitation.

Supposons que l'on veuille exciter ce réseau afin d'obtenir la fonction de transfert liant la tension aux bornes de R_2 , la réponse, à une excitation en tension, le stimulus. Afin de se conformer aux règles que nous venons d'édicter, on peut insérer le stimulus en série avec R_1 , C_1 ou R_2 par exemple. La Figure 2.58 montre toutes les options. Si vous décidez de réduire le signal d'excitation à 0, c'est-à-dire remplacer la source de tension par un court-circuit, vous rendez le circuit à sa structure originelle décrite dans le côté droit de la figure.

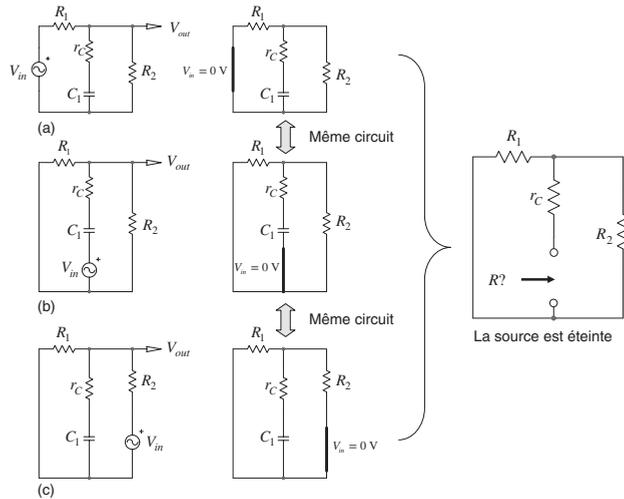


Figure 2.58 On peut insérer la source de tension en série avec R_1 , C_1 ou avec R_2 . Quand la source est éteinte, la structure du réseau demeure inchangée et la constante de temps reste identique.

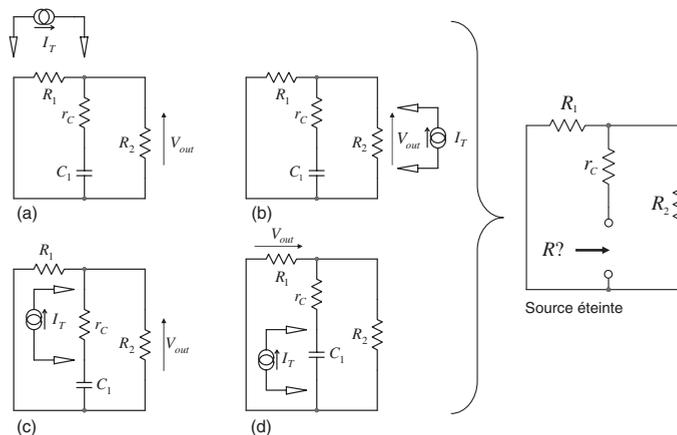


Figure 2.59 L'insertion d'une source de courant s'effectue en parallèle avec un élément existant. Ainsi, lorsque cette source est éteinte, la structure du circuit reste inchangée.

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Si l'excitation est maintenant une source de courant, vous pouvez l'appliquer aux bornes de différents éléments comme indiqué en Figure 2.59. Lorsque cette source est éteinte, elle disparaît du circuit et le réseau retrouve sa forme initiale. Une propriété remarquable affecte les constantes de temps naturelles : puisque la structure du réseau n'est pas affectée lors de l'extinction des sources (courant ou tension) dans toutes ces configurations, alors la constante de temps impliquant C_1 reste la même. Ainsi, le dénominateur $D(s)$ est le même pour toutes ces fonctions de transfert. Ce qui changera, bien sûr, c'est le numérateur puisque les zéros sont dépendants (s'il y en a) du nœud auquel on observe la réponse. La constante de temps associant C_1 est immédiate et égale à

$$\tau_2 = C_1 (r_C + R_1 \parallel R_2) \quad (2.192)$$

ce qui mène à

$$D(s) = 1 + sC_1 (r_C + R_1 \parallel R_2) \quad (2.193)$$

Cette propriété est intéressante si vous devez calculer les fonctions de transfert caractérisant un circuit comme un gain ou une impédance de sortie. Une fois le dénominateur déterminé, vous pouvez le conserver pour les fonctions de transfert dès lors que la source d'excitation utilisée dans cette optique ne change pas la structure du réseau lorsque vous l'éteignez à 0 V ou 0 A. Dans la Figure 2.58a, le gain continu H_0 liant V_{out} à V_{in} est

$$H_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (2.194)$$

Et par inspection, r_C et C_1 forment un zéro : vous obtenez la fonction de transfert en trois lignes :

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + sr_C C_1}{1 + sC_1 (r_C + R_1 \parallel R_2)} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z1}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (2.195)$$

Si maintenant vous désirez trouver l'impédance de sortie, regardez la Figure 2.59b. La source de courant est appliquée aux bornes de R_2 et quand vous l'éteignez à 0 A, le circuit retourne à sa forme originelle : les constantes de temps

sont inchangées, $D(s)$ in (2.193) est commun à deux fonctions de transfert. Dans la Figure 2.59b la résistance en continu est

$$R_0 = R_1 \parallel R_2 \quad (2.196)$$

et par inspection, le zéro est le même que celui de la Figure 2.58a. L'impédance de sortie est ainsi définie par :

$$Z_{out}(s) = (R_1 \parallel R_2) \frac{1 + sr_C C_1}{1 + sC_1 (r_C + R_1 \parallel R_2)} = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z1}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p1}}} \quad (2.197)$$

Supposons maintenant que l'on souhaite déterminer l'impédance d'entrée du circuit de la Figure 2.58a. Le signal d'excitation devient une source de courant et la réponse est la tension V_T à ses bornes (Figure 2.60). Insérer la source de courant en série avec R_1 change la structure de votre circuit et nous ne pouvons plus utiliser le dénominateur déterminé précédemment. Lorsque la source de courant est éteinte, la constante de temps impliquant C_1 devient

$$\tau_2 = C_1 (r_C + R_2) \quad (2.198)$$

et le dénominateur se transforme en

$$D(s) = 1 + sC_1 (r_C + R_2) \quad (2.199)$$

Pour $s = 0$, la résistance d'entrée est

$$R_0 = R_1 + R_2 \quad (2.200)$$

Le zéro est obtenu en nullifiant la réponse aux bornes de la source de courant. Le cas dégénéré d'une source de courant dont la tension à ses bornes est nulle peut être remplacée par un court-circuit comme expliqué en Figure 2.54. Si vous remplacez la source de courant par un fil et déterminez la résistance vue par les connexions de C_1 dans cette condition, vous trouvez

$$\tau_2 = C_1 (r_C + R_1 \parallel R_2) \quad (2.201)$$

et

$$N(s) = 1 + sC_1 (r_C + R_1 \parallel R_2) \quad (2.202)$$

2.4 Premiers pas vers une fonction de transfert généralisée du premier ordre

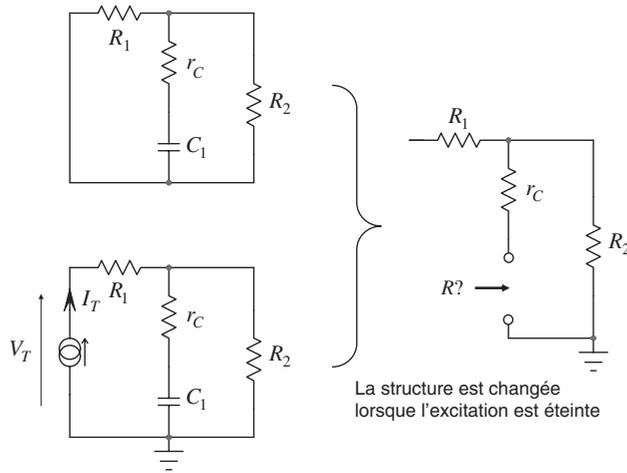


Figure 2.60 Lorsque l'on calcule l'impédance d'entrée de ce réseau, l'insertion de la source change la structure du réseau et le dénominateur précédemment obtenu ne peut plus être utilisé.

L'impédance d'entrée est alors égale à

$$Z_{in}(s) = (R_1 + R_2) \frac{1 + sC_1(r_C + R_1 \parallel R_2)}{1 + sC_1(r_C + R_2)} = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z2}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p2}}} \quad (2.203)$$

Dans cette expression, le dénominateur n'est plus celui calculé en (2.193) : l'insertion de la source de courant a changé la structure du circuit et donc ses constantes de temps. Si vous avez obtenu un dénominateur pour une fonction de transfert donnée et souhaitez le réutiliser pour déterminer, sur le même circuit, une deuxième ou une troisième fonction de transfert, alors vérifiez si la façon dont vous stimulez le réseau pour ce nouvel exercice modifie la structure originelle. S'il n'en est rien, alors vous pouvez reprendre l'expression de $D(s)$ déjà déterminée. Si la structure change, vous devez déterminer le nouveau dénominateur. Maintenant, plutôt que de calculer l'impédance d'entrée en Figure 2.60, nous aurions pu calculer l'admittance Y_{in} avec une source de tension V_T comme excitation et le courant d'entrée I_T comme réponse. Puisque le réseau retourne à sa structure originelle pour V_T égale 0 V, il eût été possible de reprendre $D(s)$ déterminé par (2.193), puis obtenir le zéro par analyse NDI par exemple (pour nullifier I_T dans ce cas, r_C en série avec C_1 et mis en parallèle avec R_2 présentent une impédance infinie pour $s = s_z$). À la fin, si l'on inverse Y_{in} on obtient Z_{in} . On le voit aisément en observant que $D(s)$ dans (2.197) devient $N(s)$ dans (2.203).

2.5 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

Dans ce deuxième chapitre, nous sommes entrés dans le monde des techniques de calculs rapides ou *Fast Analytical Techniques* (FACTs) et avons déjà obtenu des résultats intéressants avec des circuits du premier ordre. Vous trouverez ci-dessous un résumé de ce que nous avons appris dans ce chapitre :

1. Un système est considéré comme linéaire s'il satisfait le principe de superposition. Lorsque l'on veut étudier la réponse d'un circuit non-linéaire, il faut passer par une étape de linéarisation, préalable indispensable avec d'appliquer la transformée de Laplace ou tous autres théorèmes tels Thévenin et superposition.
2. Un circuit non-linéaire peut être linéarisé en analysant sa réponse à une excitation alternative de faible amplitude. Après le tri des termes alternatifs et continus présent dans la réponse obtenue, vous ne conservez que les termes alternatifs du 1^{er} ordre qui représentent la réponse linéaire ou petit signal du circuit considéré.
3. Les constantes de temps sont de la forme RC ou L/R et affectent la réponse naturelle du réseau. Comme ces constantes de temps sont liées uniquement à la structure du réseau étudié (comment R , L et C sont agencés dans le circuit), elles ne sont pas affectées par le signal d'excitation.
4. Pour déterminer les termes du dénominateur ou les constantes de temps naturelles, le générateur de stimulus est éteint. On exprime alors la résistance R qui attaque l'élément de stockage considéré dans cette condition particulière pour obtenir la constante de temps naturelle. La résistance combinée avec le condensateur ou la bobine – RC ou L/R – forme alors l'inverse du pole.
5. Si le stimulus est une source de tension, son extinction à 0 V implique le court-circuit de ses bornes de connexion : le symbole de la source est remplacé par un fil sur le schéma. Si l'excitation est une source de courant, l'extinction à 0 A implique que le générateur soit remplacé par un circuit ouvert.
6. Une fonction de transfert est dite à *faible entropie* si elle est exprimée dans une forme claire et ordonnée de façon à ce que vous puissiez immédiatement distinguer un ou des gains, des pôles et des zéros, sans investir plus de temps et d'énergie à retravailler l'équation.
7. Les formes polynomiales du deuxième ordre affectées par un facteur de qualité faible, bien plus petit que 1, peuvent être factorisées par des pôles (au dénominateur) ou des zéros (numérateur) bien séparés.

2.5 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

8. Les zéros sont les racines du numérateur et peuvent être identifiés en regardant les conditions dans le circuit examiné à $s = s_z$ qui pourraient empêcher que le stimulus ne donne naissance à une réponse. Si une impédance série offre un module infini pour $s = s_z$, alors il y a un zéro associé avec ce réseau. Si un réseau transformé shunte à la masse pour $s = s_z$ la branche par laquelle le stimulus se propage et nullifie la réponse, alors il y a un zéro associé avec cette impédance.
9. Une fonction de transfert généralisée du premier ordre a été dérivée et réclame 3 étapes simples de calcul pour obtenir le gain, le pôle et le zéro, s'il existe.
10. La double injection nulle – Null Double Injection (NDI) – est un moyen de calculer la résistance associée à L ou C lorsque la réponse est nullifiée. Cette résistance combinée avec l'élément considéré forme l'inverse du zéro. Les zéros dans une NDI sont obtenus en regardant la résistance qui attaque l'élément de stockage d'énergie lorsque la réponse est nullifiée.
11. Finalement, qu'il s'agisse de déterminer des pôles ou des zéros, l'exercice reste le même : on regarde la résistance qui attaque C ou L mais dans deux conditions différentes, excitation éteinte et réponse nullifiée.
12. Un zéro obtenu par une NDI est habituellement exprimé sous une forme plus simple que par l'approche en trois étapes. La méthode NDI réclame une analyse par les lois des nœuds et mailles quand la sortie est nullifiée. La méthode des trois étapes demande le calcul d'un simple gain pour $s = 0$ et lorsque l'élément qui stocke l'énergie (C ou L) est placé dans son état haute fréquence.
13. L'inspection, lorsqu'elle est possible, conduit toujours au numérateur le plus simple.
14. SPICE peut aussi être utilisé d'une manière très simple afin de vérifier l'intégrité des calculs, tant pour le dénominateur que pour le numérateur avec une NDI.
15. Plusieurs fonctions de transfert caractérisant un réseau donné partagent un dénominateur $D(s)$ commun lorsque la structure du circuit demeure inchangée à l'extinction de la source lors des différentes analyses. Si la structure change d'une analyse à l'autre, alors les dénominateurs des fonctions de transfert respectives seront différents.

Références

- [1] Wikibooks contributors, « Signals and Systems/Time Domain Analysis », http://en.wikibooks.org/wiki/Signals_and_Systems/Time_Domain_Analysis

- [2] V. Vorpérian, *Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits*, Cambridge University Press, 978-0-52162-442-8
- [3] J. DiStefano, A. Stubberud, I. Williams, *Feedback and Control Systems*, Schaum's Outlines, McGraw-Hill, 978-0-07163-512-7
- [4] C. Basso, *Designing Control Loops for Linear and Switching Power Supplies: a Tutorial Guide*, Artech House, Boston 2012, 978-1-60807-557-7
- [5] https://web.archive.org/web/20160401041428/http://ardem.com/D_OA_Rules&Tools/index.asp
- [6] A. Hajimiri, « Generalized Time- and Transfer-Constant Circuit Analysis », *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 57, Issue 6, p1105-1121, 2009

2.6 Annexe du chapitre 2

Compléments en ligne



Consultez les exemples documentés sur le site Dunod.com.

3

Superposition et le théorème de l'extra-élément

Dans le premier chapitre, nous avons passé en revue quelques-uns des outils communément utilisés dans l'analyse de circuits électriques. Parmi les théorèmes abordés, ceux décrits par Norton et Thévenin sont extrêmement utiles comme nous l'avons montré dans le deuxième chapitre. Cependant, lorsque l'on aborde des circuits dans lesquels deux ou plusieurs stimuli existent, le théorème de superposition occupe le haut de la liste et nous amène naturellement vers la définition du théorème de l'extra élément (*Extra-Element Theorem*, EET). En expliquant les fondements du théorème de superposition à l'aide d'exemples simples puis en expliquant son extension à la présence d'une seconde source, ce troisième chapitre ouvre la voie vers l'EET d'une façon simple et, espérons-le, intelligible.

3.1 Le théorème de superposition

3.1.1 Un système à une sortie

La Figure 3.1 représente une boîte abritant un système linéaire alimenté par deux entrées, u_1 and u_2 . Ces entrées peuvent être des sources de courant et/ou tension, cela n'a pas d'importance. Ces deux stimuli sont appliqués simultanément et forment une réponse y_1 définie par

$$y_1 = f(u_1, u_2) \quad (3.1)$$

Le théorème de superposition indique que la sortie y_1 est la somme algébrique des réponses respectivement obtenues pour u_1 et u_2 séparément éteintes à 0.

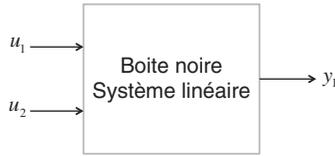


Figure 3.1 Ce système simple délivre une sortie y_1 formée par deux stimuli, u_1 et u_2 .

On pourrait écrire cette expression sous une forme généralisée comme ci-dessous :

$$y_1(u_1, u_2 \dots u_i) = y_1(u_1) \Big|_{u_2=u_i=0} + y_1(u_2) \Big|_{u_1=u_i=0} + \dots + y_1(u_n) \Big|_{u_2=u_i=0} \quad (3.2)$$

Mettre une source à 0 ou bien l'éteindre a été défini dans les chapitres précédents : une source de tension indépendante mise à 0 V est remplacée dans le circuit étudié par un court-circuit alors qu'une source de courant indépendante qui est éteinte à 0 A devient un circuit ouvert et disparaît physiquement du réseau étudié. Les sources dépendantes sont laissées intactes à moins que la source de contrôle ne soit éteinte à 0 durant l'analyse. Si l'on applique cette théorie à notre exemple, nous obtenons le schéma de la Figure 3.2.

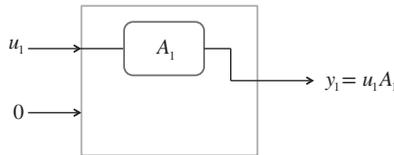


Figure 3.2 Dans cette configuration, u_2 est éteinte à 0 alors que u_1 contribue seule à la sortie.

À partir de ce schéma, on peut écrire

$$\frac{y_1}{u_1} \Big|_{u_2=0} \equiv A_1 \quad (3.3)$$

Maintenant, on peut éteindre u_1 et conserver u_2 active tout en observant y_1 . C'est que la Figure 3.3 illustre.

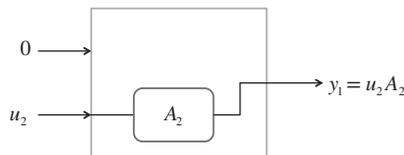


Figure 3.3 Dans cette deuxième configuration, u_1 est mise à 0 alors que u_2 contribue seule à la sortie.

3.1 Le théorème de superposition

En utilisant la notation précédente, on peut écrire

$$\left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv A_2 \quad (3.4)$$

La combinaison des deux entrées conduit à l'addition de (3.3) et (3.4). Le croquis représentant ce concept apparaît en Figure 3.4 et il peut être décrit par l'équation suivante :

$$y_1 = \left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{u_2=0} u_1 + \left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} u_2 = A_1 u_1 + A_2 u_2 \quad (3.5)$$

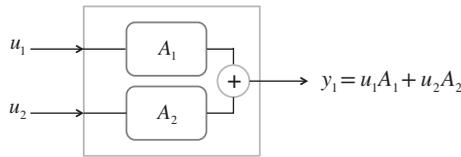


Figure 3.4 La sortie est la somme des deux sorties produites indépendamment par u_1 et u_2 dans les conditions décrites au dessus.

Abordons deux exemples simples afin d'illustrer l'utilisation du théorème de superposition. La Figure 3.5a représente un circuit combinant deux sources, tension et courant. La tension de sortie est mesurée aux bornes de la résistance R_3 . Éteignons d'abord V_1 à 0 V comme montré en Figure 3.5b : on remplace la source de tension par un court-circuit ou un simple fil.

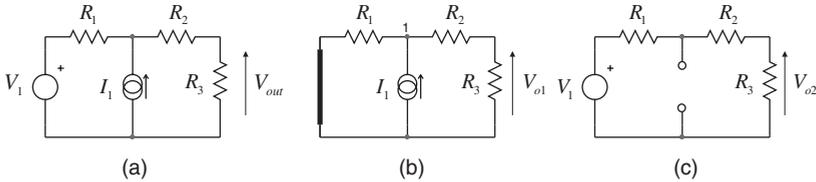


Figure 3.5 Cet exemple simple circuit combine des sources de courant et tension.

R_1 apparaît en parallèle avec la combinaison en série de R_2 et R_3 . La tension aux bornes de la source de courant au nœud 1 est ainsi égale à :

$$V_{(1)} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \quad (3.6)$$

La tension aux bornes de R_3 implique un diviseur résistif bâti autour de R_2 et R_3 :

$$V_{o1} = V_{(1)} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.7)$$

En substituant (3.6) dans (3.7), on obtient la première tension V_{o1} lorsque V_1 égale 0 V :

$$V_{o1} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \frac{R_3}{R_2 + R_3} \quad (3.8)$$

La seconde tension est obtenue à l'aide du croquis (c) dans lequel la source de courant est éteinte. La tension de sortie V_{o2} est obtenue, une fois encore, en utilisant le diviseur résistif impliquant R_3 en série avec R_1 et R_2 :

$$V_{o2} = V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.9)$$

La tension finale développée aux bornes de R_3 est ainsi la somme de V_{o1} et de V_{o2} qui donne :

$$V_{out} = V_{o1} + V_{o2} = I_1 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \frac{R_2}{R_2 + R_3} + V_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (3.10)$$

Nous pouvons vérifier nos calculs en simulant un point de polarisation (.DC) sous SPICE et en utilisant une simple feuille Mathcad® comme présenté en Figure 3.6.

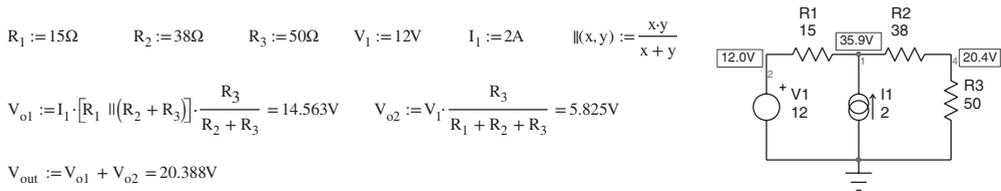


Figure 3.6 Une feuille Mathcad® et un calcul de point de polarisation sous SPICE nous confirment les calculs menés.

Un deuxième exemple comportant une source dépendante apparaît en Figure 3.7. Une source de tension polarise un réseau résistif et délivre un courant I_1 . Puis une source de courant I_a polarise le nœud intermédiaire 2 auquel se connecte une source de tension contrôlée par le courant I_1 via la résistance R_2 . Quelle est la valeur de I_1 ?

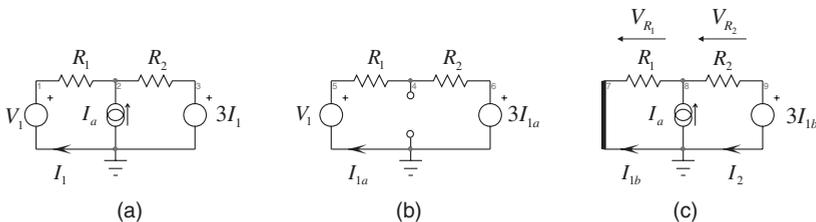


Figure 3.7 Dans cet exemple, une source dépendante délivrant $3I_1$ est ajoutée au côté droit du circuit et polarise le nœud 2 via la résistance R_2 .

3.1 Le théorème de superposition

Si l'on applique superposition, nous allons alternativement éteindre les sources indépendantes tout en laissant la source dépendante intacte. En Figure 3.7b, le courant I_{1a} est égal à la différence de tension entre R_1 et R_2 en série et divisée par la somme de R_1 et R_2 :

$$I_{1a} = \frac{V_1 - 3I_{1a}}{R_1 + R_2} \quad (3.11)$$

Si l'on développe et factorise, on obtient la première définition pour I_{1a} :

$$I_{1a} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.12)$$

À présent, nous éteignons la source de tension V_1 à 0 V (on court-circuite ses connexions de sortie) comme indiqué en Figure 3.7c puis l'on résout un système simple d'équations impliquant I_1 et I_2 . Le courant dans R_2 égale la tension aux bornes de ses connexions, V_{R_2} , divisée par R_2 :

$$I_2 = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{-V_{R_1} - 3I_{1b}}{R_2} = \frac{-R_1 I_{1b} - 3I_{1b}}{R_2} = -\frac{I_{1b}(R_1 + 3)}{R_2} \quad (3.13)$$

Le courant I_2 est également la somme de I_a et I_{1b}

$$I_2 = I_a + I_{1b} \quad (3.14)$$

Si l'on considère les équations (3.13) et (3.14) égales, alors en factorisant et réarrangeant I_1 , on obtient la seconde définition I_{1b} :

$$I_{1b} = -\frac{I_a}{1 + \frac{R_1 + 3}{R_2}} = -\frac{R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.15)$$

L'expression finale pour le courant I_1 est la somme de I_{1a} et I_{1b} :

$$I_1 = I_{1a} + I_{1b} = \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3} - \frac{R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} = \frac{V_1 - R_2 I_a}{R_1 + R_2 + 3} \quad (3.16)$$

Pour vérifier la validité de cette expression, nous avons suivi la méthode précédente articulant une feuille Mathcad® et un point de polarisation simulé par SPICE. Veuillez noter que le facteur 3 dans la source de courant contrôlée possède la dimension de l'ohm. Figure 3.8 confirme que nos calculs sont bons.

$$R_1 := 10\Omega \quad R_2 := 25\Omega \quad V_1 := 24V \quad I_a := 7A \quad ll(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$I_{1a} := \frac{V_1}{R_1 + R_2 + 3\Omega} = 0.632A \quad I_{1b} := -\frac{I_a}{1 + \frac{R_1 + 3\Omega}{R_2}} = -4.605A$$

$$I_1 := I_{1a} + I_{1b} = 3.974A$$

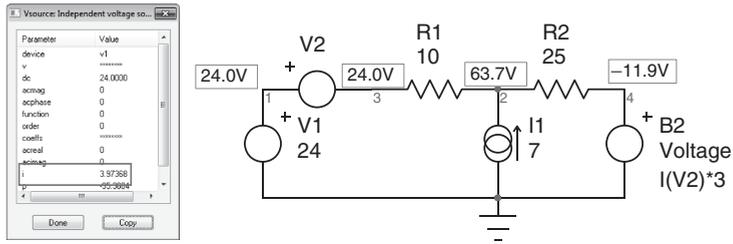


Figure 3.8 Une feuille Mathcad® et un calcul de point de polarisation nous confirment que nos calculs sont corrects.

Nous n'irons pas plus loin dans les exemples car le web abonde en exercices sur le sujet (voir [1] et [2] par exemple). Le lien donné en [2] est intéressant. Le deuxième exemple provient de cet article. L'auteur revisite le théorème de superposition et affirme que toutes les sources impliquées dans un circuit analysé par superposition peuvent être éteintes à 0 dans certaines conditions, y compris les sources dépendantes. Il met à l'épreuve sa découverte dans de nombreux exemples qui soutiennent son approche.

3.1.2 Un système à deux entrées et deux sorties

En Figure 3.1, notre circuit comprend de multiples entrées mais une seule sortie est considérée. Ajoutons une seconde sortie y_2 comme indiqué en Figure 3.9. Les réponses observées sur les sorties y_1 et y_2 dépendent des stimuli u_1 et u_2 . Comme nous l'avons fait avec le système 2-entrées/1-sortie, nous allons alternativement éteindre u_1 et u_2 afin de déterminer les éléments qui composent y_1 et y_2 . C'est que la Figure 3.10 illustre.

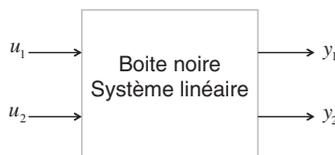


Figure 3.9 Une seconde sortie est ajoutée à la boîte qui devient un réseau 2-entrées/2-sorties.

3.1 Le théorème de superposition

La première configuration donne la définition de A_1

$$\left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \equiv A_1 \quad (3.17)$$

Alors que la seconde délivre la définition pour A_2

$$\left. \frac{y_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv A_2 \quad (3.18)$$

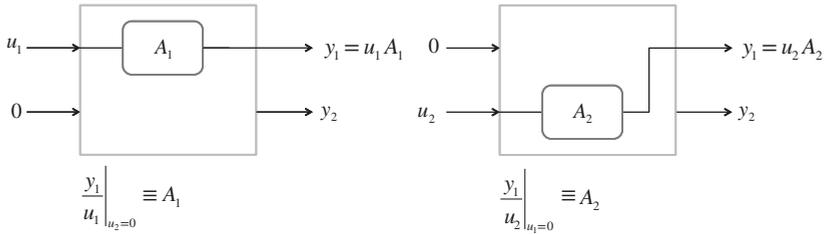


Figure 3.10 La sortie y_1 est obtenue en premier lorsque u_1 et u_2 sont alternativement mises 0.

L'exercice est répété mais cette fois pour la seconde sortie, y_2 . Les configurations de test sont données en Figure 3.11.

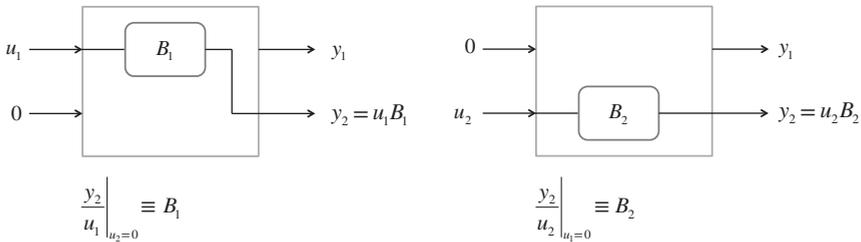


Figure 3.11 La sortie y_2 est obtenue lorsque u_1 et u_2 sont alternativement éteintes à 0.

À partir de ces dessins, on obtient deux définitions pour les gains B_1 et B_2 :

$$\left. \frac{y_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \equiv B_1 \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{y_2}{u_2} \right|_{u_1=0} \equiv B_2 \quad (3.20)$$

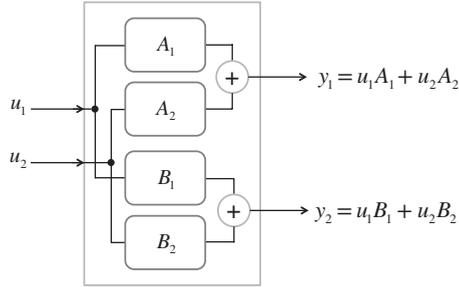


Figure 3.12 On peut combiner la Figure 3.10 et la Figure 3.11 pour finaliser le contenu de notre boîte noire.

En redessinant les blocs sous une forme plus lisible, nous obtenons la Figure 3.12 dans laquelle tous les chemins menant à y_1 et y_2 sont bien repérés. Dans un système à deux entrées, le théorème de superposition considère une entrée active alors que l'autre est mise à 0. Nous allons à présent considérer *deux* entrées actives en même temps, confirmant ainsi le terme de *double injection*. Si l'on considère y_1 et y_2 combinant linéairement u_1 et u_2 , ces sorties peuvent prendre n'importe quelle valeur. Une situation particulière apparaît cependant lorsque l'une des deux sorties est annulée par l'action combinée de u_1 et u_2 . C'est la double injection nulle (*null double injection* ou NDI) déjà évoquée pour identifier des zéros dans le réseau. Voyons maintenant comment on peut nullifier l'une des deux sorties, y_1 , en ajustant u_1 et u_2 . Nous avons vu que

$$y_1 = u_1 A_1 + u_2 A_2 \quad (3.21)$$

et

$$y_2 = u_1 B_1 + u_2 B_2 \quad (3.22)$$

Si l'on nullifie y_1 , alors les équations ci-dessus peuvent être réécrites considérant que u_1 et u_2 nullifient y_1 :

$$0 = u_1 \Big|_{y_1=0} A_1 + u_2 \Big|_{y_1=0} A_2 \quad (3.23)$$

La sortie 2 doit également être exprimée sachant que u_1 et u_2 sont ajustées pour nullifier y_1 :

$$y_2 \Big|_{y_1=0} = u_1 \Big|_{y_1=0} B_1 + u_2 \Big|_{y_1=0} B_2 \quad (3.24)$$

À partir de (3.23), on peut extraire la valeur de u_1 qui nullifie y_1

$$u_1 \Big|_{y_1=0} = -u_2 \Big|_{y_1=0} \frac{A_2}{A_1} \quad (3.25)$$

3.1 Le théorème de superposition

Cette expression peut se substituer dans l'équation (3.24) qui devient alors

$$y_2|_{y_1=0} = u_2|_{y_1=0} B_2 - u_2|_{y_1=0} \frac{A_2}{A_1} B_1 \quad (3.26)$$

En factorisant $u_2|_{y_1=0}$, on obtient

$$y_2|_{y_1=0} = u_2|_{y_1=0} \left[\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \right] \quad (3.27)$$

Si l'on réarrange l'ensemble sous la forme d'une fonction de transfert liant y_2 à u_2 lorsque y_1 est nullifiée, on obtient

$$\frac{y_2}{u_2} \Big|_{y_1=0} = \left[\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \right] \quad (3.28)$$

Veuillez noter que cette définition diffère de celle donnée par (3.20) qui correspond à l'entrée u_1 mise à 0. Ici, nous évoquons le même ratio, mais nous l'avons déterminé en nullifiant la sortie y_1 . De façon pratique, pour un système 2-entrées / 2-sorties pour lequel les gains internes A et B ont été identifiés, il est possible d'obtenir le gain liant y_2 à u_2 en nullifiant y_1 et en appliquant (3.28) sans mesurer y_2/u_2 .

Tentons une petite expérience afin de vérifier si ces expressions possèdent un sens physique. La Figure 3.13 montre à quoi notre boîte noire originale pourrait ressembler avec différentes valeurs pour A et B . Voyons si l'on peut calculer des valeurs de point de polarisation pour u_1 et u_2 si l'on souhaite nullifier y_1 comme indiqué auparavant. En utilisant (3.23) on extrait le ratio liant u_1 à u_2 lorsque y_1 est nullifiée :

$$\frac{u_1}{u_2} \Big|_{y_1=0} = -\frac{A_2}{A_1} \quad (3.29)$$

Nous obtenons le même résultant qu'avec (3.25)

$$u_1|_{y_1=0} = -\frac{A_2}{A_1} u_2|_{y_1=0} \quad (3.30)$$

En appliquant les valeurs de la Figure 3.13

$$u_1|_{y_1=0} = -\frac{2}{5} u_2|_{y_1=0} = -0.4 u_2|_{y_1=0} \quad (3.31)$$

De façon similaire, à partir de (3.28), nous pouvons calculer la valeur de la sortie 2 pour u_1 et u_2 qui nullifient y_1 :

$$y_2|_{y_1=0} = \left[\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \right] u_2|_{y_1=0} = \frac{5 \times 6 - 2 \times 3}{5} u_2|_{y_1=0} = 4.8 u_2|_{y_1=0} \quad (3.32)$$

Supposons que nous ayons polarisé u_2 à 5 V, quelle tension appliquée à l'entrée u_1 impose une tension nulle en sortie y_1 ? (3.30) nous donne la valeur :

$$u_1|_{y_1=0} = -0.4u_2|_{y_1=0} = -0.4 \times 5 = -2 \text{ V} \quad (3.33)$$

Ainsi, lorsque y_1 est nullifiée, quelle est la valeur de y_2 ? (3.32) nous aide pour la déterminer :

$$y_2|_{y_1=0} = 4.8u_2|_{y_1=0} = 4.8 \times 5 = 24 \text{ V} \quad (3.34)$$

Si nous balayons u_1 alors que u_2 est fixée à 5 V, nous obtenons les courbes de la Figure 3.14. Comme confirmé par cette figure, pour une polarisation de u_1 à -2 V, y_1 délivre 0 V et y_2 24 V. Pour cette combinaison de tensions, le gain liant y_2 à u_2 est donné par (3.28) et égale

$$\frac{y_2}{u_2} \Big|_{y_1=0} = \frac{5 \times 6 - 2 \times 3}{5} = \frac{24}{5} = 4.8 \quad (3.35)$$

C'est ce que la Figure 3.14 indique avec une sortie y_2 à 24 V obtenue par une polarisation d' u_2 à 5 V.

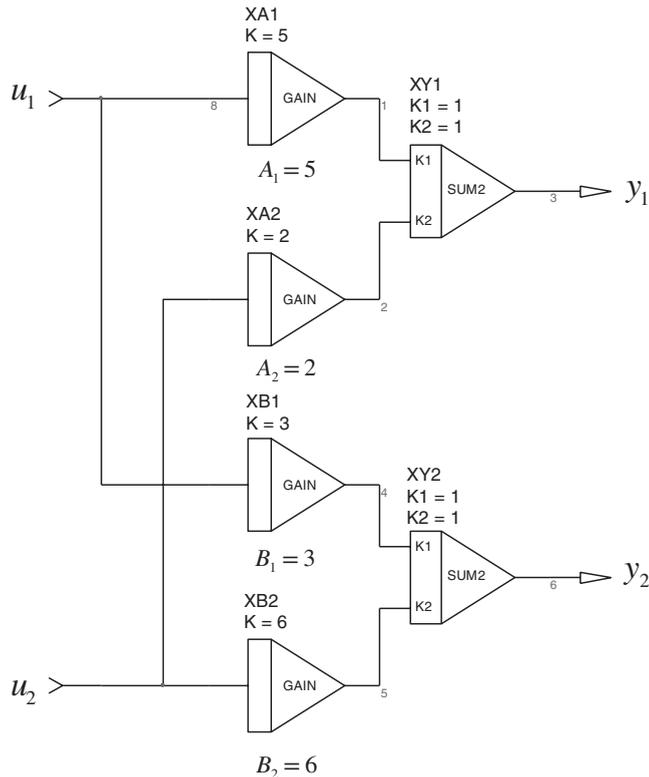


Figure 3.13 Notre boîte noire incluant les gains A et B.

3.1 Le théorème de superposition

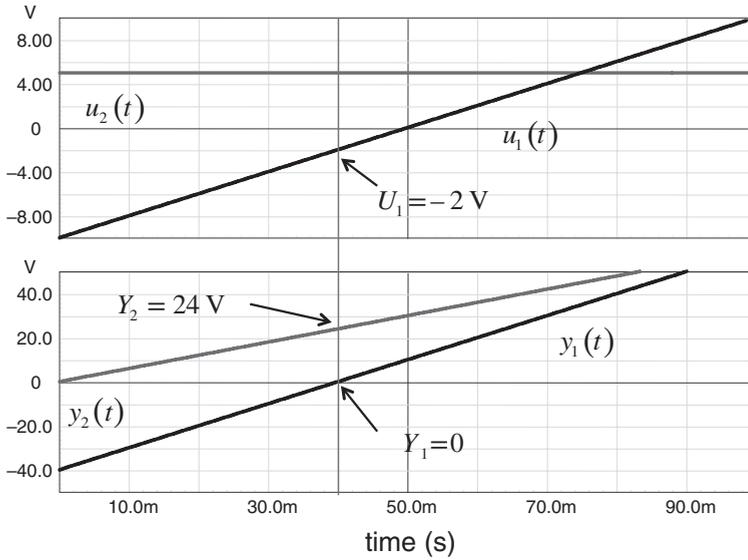


Figure 3.14 Pour une certaine combinaison de u_1 et u_2 , la sortie y_1 délivre 0 V. Dans cet exemple, j'ai balayé les sources continues u_1 et u_2 afin de nullifier la sortie y_1 .

Cette expérience fonctionne également en alternatif et faisait partie des exercices de laboratoire menés par Dr. Middlebrook tel que décrit dans son article fondateur [3]. Le schéma de simulation apparaît en Figure 3.15.

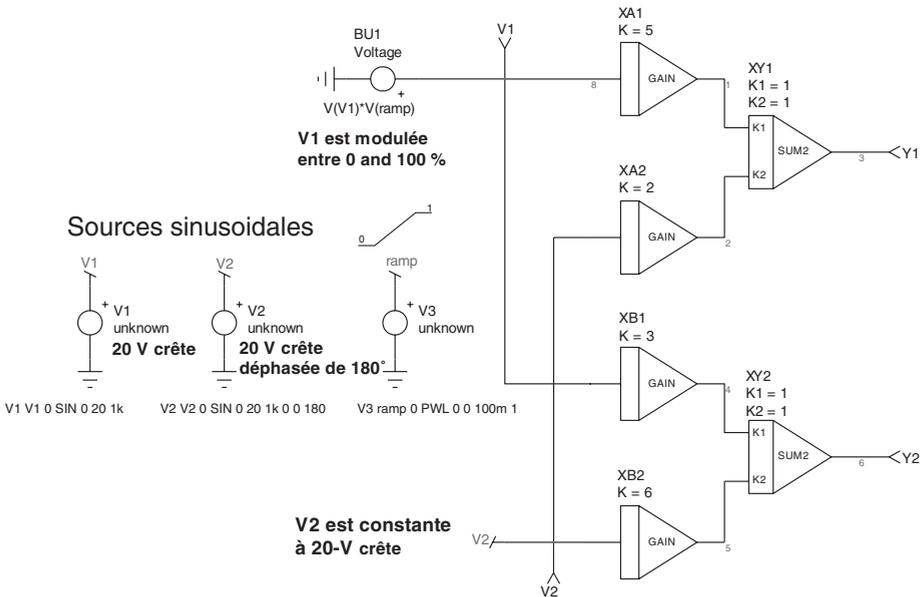


Figure 3.15 Les entrées de la boîte noire sont maintenant polarisées en alternatif et les sorties enregistrées.

Le nœud V_1 est une source sinusoïdale délivrant un signal d'amplitude 20 V crête. V_2 est similaire à V_1 mais déphasée de 180° . Le nœud *ramp* est une dent de scie montant de 0 à 1 V pendant 100 ms. Lorsque V_1 est multipliée par V_{ramp} dans la source BU1, vous obtenez un signal sinusoïdal augmentant linéairement de 0 V à 20 V crête en 100 ms. Lorsque V_2 (amplitude constante) est appliquée sur l'entrée u_2 alors que u_1 est la tension qui augmente en 100 ms, y_1 soudainement passe par 0 V comme le prouve la Figure 3.16. La nullification de y_1 est obtenue lorsque U_1 atteint 8 V crête comme indiqué par (3.30) : $20 \times 0.4 = 8$ V. Dans cette condition, (3.32) nous dit que y_2 atteint $4.8 \times 20 = 96$ V. Ces deux exemples montrent comment il est possible de nullifier une sortie dans un système à deux entrées/deux sorties lorsque deux signaux sont injectés simultanément.

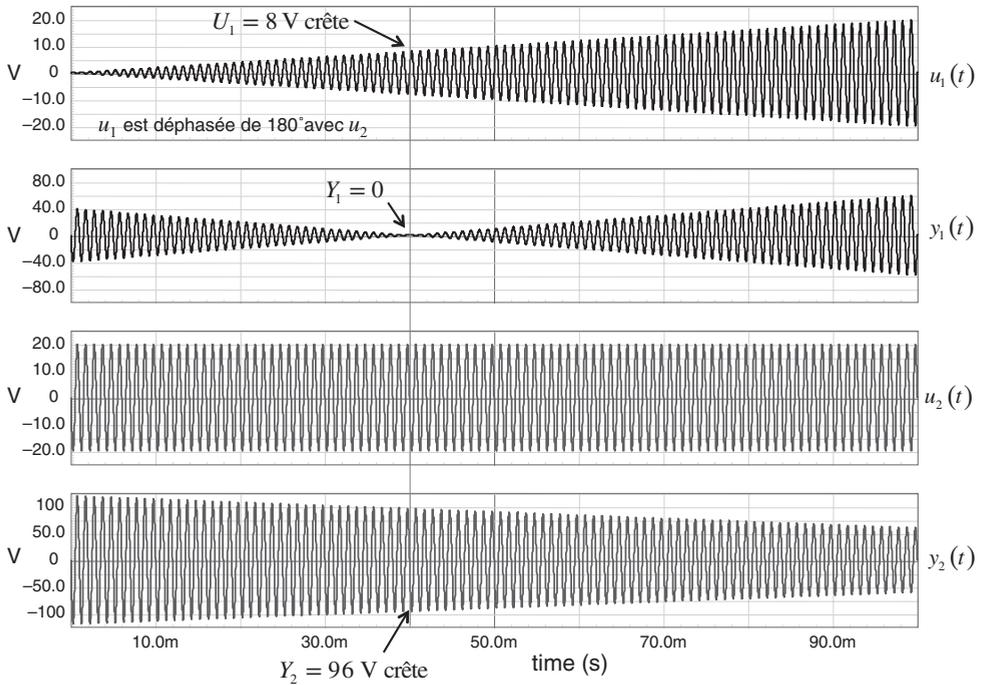


Figure 3.16 Pour une certaine combinaison des tensions d'entrée, la sortie y_1 passe par une valeur nulle.

Pourquoi sommes-nous intéressés par la nullification d'une sortie ? Parce que la nullification de la sortie est la manifestation mathématique d'un zéro dans le circuit transformé observé à $s = s_z$. Nous allons voir dans quelques lignes comment cette caractéristique intéressante est exploitée par le théorème de l'extra-élément (EET).

3.2 Le théorème de l'extra-élément

Jusqu'à présent, u_1 et u_2 sont des stimuli mais nous n'avons pas défini le type de source qui les caractérise, tension ou courant. Supposons que la source u_2 soit un générateur de courant i et que la variable de sortie en y_2 est une tension v . Nous pouvons redessiner la Figure 3.12 sous une forme différente comme présenté en Figure 3.17.

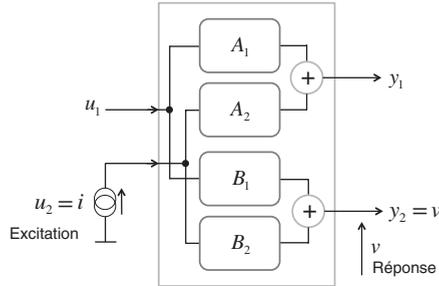


Figure 3.17 L'entrée u_2 est maintenant définie comme une source de courant.

À partir de ce circuit, on peut écrire deux équations de sortie :

$$y_1 = u_1 A_1 + i A_2 \quad (3.36)$$

et

$$v = u_1 B_1 + i B_2 \quad (3.37)$$

Si l'on considère que u_1 et i sont ajustées pour produire une nullification de y_1 , alors (3.36) retourne 0 pour cette combinaison particulière. Si vous extrayez u_1 de (3.36) puis substituez cette définition dans (3.37) et arrangez le résultat sous la forme d'un rapport v/i , vous devriez obtenir :

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{y_1=0} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.38)$$

Cette expression, une fonction de transfert reliant un courant d'excitation i à une réponse en tension v , est en fait une transimpédance comme défini au chapitre 1. Ce n'est pas une impédance car les variables v et i ne sont pas mesurées aux bornes d'un connecteur commun mais à deux endroits différents. Une seconde expression peut être obtenue de (3.37). C'est lorsque u_1 , l'excitation, est mise à 0. Dans ce cas, nous obtenons une nouvelle définition de transimpédance pour le rapport i/v suivant la forme de (3.20) :

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{u_1=0} \equiv B_2 \quad (3.39)$$

Dans les étapes précédentes, nous avons considéré une entrée et une sortie physiquement séparées, d'où la notion de transimpédance. Cependant, la technique que nous avons détaillée jusqu'ici utilise des résistances vues d'un port d'observation aux bornes duquel les grandeurs i et v sont mesurées. Comment pourrait-on modifier la Figure 3.17 afin de révéler des impédances ou des résistances ? Simplement en changeant l'endroit où la seconde sortie y_2 est observée : ce sera la tension v produite aux bornes du générateur de courant i . Le schéma mis à jour est celui de la Figure 3.18.

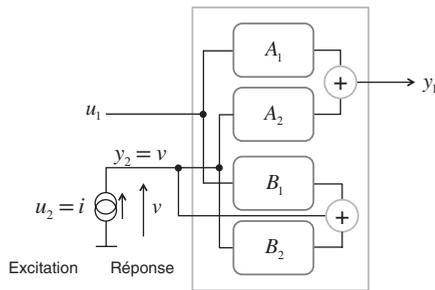


Figure 3.18 La sortie y_2 est maintenant observée aux bornes du générateur de courant i : le rapport i/v devient une impédance ou une résistance.

Le croquis ci-dessus est la représentation théorique des équations (3.38) et (3.39). En réalité, le port auquel le générateur de courant est connecté – cela devient maintenant plus clair – correspond aux connexions de l'un des éléments du circuit étudié, l'*extra-élément*. La Figure 3.19 illustre ce concept.

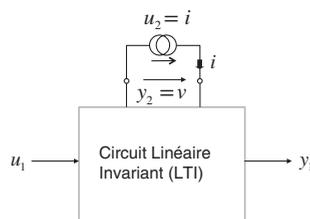


Figure 3.19 Les courant et tension respectivement désignés par i et v sont ceux observés aux bornes du composant considéré.

Dans cette configuration, comme i et v sont observés au même endroit – les connexions du générateur de courant – nos définitions de (3.38) et (3.39) deviennent des valeurs d'impédance ou résistance de type DPI (*driving point impedances*) repérées par le terme indicé DP (Z_{DP}). Parce que l'équation (3.38) est obtenue lorsque y_1 est nullifiée, le résultat délivré sera désigné par Z_n alors que l'équation (3.39) déterminée avec une excitation mise à zéro, recevra la

3.2 Le théorème de l'extra-élément

dénomination Z_d . Le « n » désigne le numérateur – lorsque le numérateur est égal à 0, la fonction retourne 0, $y_1 = 0$ – et le « d » indique le dénominateur dont les coefficients sont obtenus pour une excitation éteinte à 0, $u_1 = 0$. En utilisant ces notations, on peut écrire

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{y_1=0} = Z_{DP} \Big|_{y_1=0} \equiv Z_n = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1} \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{v}{i} \right|_{u_1=0} = Z_{DP} \Big|_{u_1=0} \equiv Z_d = B_2 \quad (3.41)$$

Plutôt que de considérer un générateur de courant constant, remplaçons la source par une impédance Z alors que i et v sont orientés dans la même direction pour cet exercice. Le nouveau circuit apparaît en Figure 3.20. Dans cette représentation, le courant i n'est plus forcé par le générateur de courant extérieur mais dépend de la tension v appliquée aux bornes de l'impédance Z . Mathématiquement, les relations définies en (3.21) et (3.22) sont toujours valides et la relation liant y_2 et u_2 maintenant imposée par Z devient :

$$i = -\frac{v}{Z} \quad (3.42)$$

Le signe négatif provient du fait que i et v sont orientés dans la même direction en accord avec les variables courant et tension de la Figure 3.18.

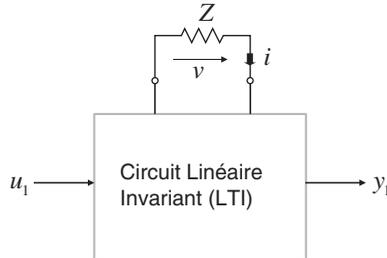


Figure 3.20 Une impédance Z est installée en lieu et place du générateur de courant. Les variables i et v de la Figure 3.19 sont toujours présentes mais sont colinéaires dans cette représentation.

Avec cette nouvelle définition, l'équation (3.36) peut être mise à jour :

$$y_1 = u_1 A_1 - \frac{A_2}{Z} v \quad (3.43)$$

À partir de celle-ci, on peut déterminer la tension v :

$$v = \frac{u_1 A_1 - y_1}{A_2} Z \quad (3.44)$$

Les équations (3.44) et (3.42) sont à présent substituées dans (3.37) afin de former l'équation suivante :

$$\frac{A_1 u_1 Z}{A_2} - \frac{y_1 Z}{A_2} = B_1 u_1 + \frac{B_2 y_1}{A_2} - \frac{A_1 B_2 u_1}{A_2} \quad (3.45)$$

On collecte les termes des deux côtés :

$$u_1 \left(\frac{A_1}{A_2} Z + \frac{A_1 B_2}{A_2} - B_1 \right) = y_1 \left(\frac{Z}{A_2} + \frac{B_2}{A_2} \right) \quad (3.46)$$

Et l'on définit le rapport y_1/u_1 :

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{\frac{A_1}{A_2} Z + \frac{A_1 B_2 - B_1 A_2}{A_2}}{\frac{Z}{A_2} + \frac{B_2}{A_2}} \quad (3.47)$$

Après factorisation de $\frac{A_1 Z}{A_2}$, il vient

$$\frac{y_1}{u_1} = \frac{\frac{A_1}{A_2} Z \left(1 + \frac{A_2}{A_1 Z} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_2} \right)}{\frac{Z}{A_2} \left(1 + \frac{A_2}{Z} \frac{B_2}{A_2} \right)} \quad (3.48)$$

On simplifie par $\frac{Z}{A_2}$ au numérateur et au dénominateur pour obtenir :

$$\frac{y_1}{u_1} = A_1 \frac{1 + \frac{1}{Z} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}}{1 + \frac{1}{Z} B_2} \quad (3.49)$$

Dans cette expression, le terme $\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1}$ est défini par (3.40) : c'est Z_n , l'impédance vue du port d'injection lorsque la sortie y_1 est nullifiée. Au dénominateur, le terme B_2 est simplement l'impédance vue du port d'injection lorsque l'entrée u_1 est mise à 0 : c'est le terme Z_d , défini par (3.41). Si l'on réécrit (3.49) avec ces définitions en main, on obtient l'expression du théorème de l'extra-élément :

$$\frac{y_1}{u_1} = A_1 \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \quad (3.50)$$

3.2 Le théorème de l'extra-élément

Lorsque l'impédance Z est physiquement retirée du circuit, sa valeur devient infinie dans (3.50). Dans cette condition particulière, la fonction de transfert devient :

$$\left. \frac{y_1}{u_1} \right|_{Z \rightarrow \infty} = A_1 \frac{1 + \frac{Z_n}{\infty}}{1 + \frac{Z_d}{\infty}} = A_1 \quad (3.51)$$

Si l'on désigne la fonction de transfert y_1/u_1 par la référence A dont la valeur dépend de l'extra-élément Z , alors, en utilisant (3.51), il est possible de reformuler (3.50) d'une manière plus formelle :

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \quad (3.52)$$

Ce théorème nous indique que le gain d'un système linéaire considérant un extra-élément Z est égal au gain de ce système déterminé avec Z physiquement retiré du circuit (le gain $A|_{Z=\infty}$), gain qui sera ensuite multiplié ensuite par un facteur correctif impliquant l'élément Z et deux impédances vues des connexions de l'extra-élément lorsque la sortie est nullifiée (Z_n) et l'excitation réduite à zéro (Z_d).

L'expression présentée en (3.52) peut être arrangée différemment si l'on factorise

$\frac{Z_n}{Z}$ et $\frac{Z_d}{Z}$ respectivement au numérateur et au dénominateur :

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{\frac{Z_n}{Z} \left(\frac{Z}{Z_n} + 1 \right)}{\frac{Z_d}{Z} \left(\frac{Z}{Z_d} + 1 \right)} = \left(A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \right) \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.53)$$

Dans cette nouvelle formule, Z se trouve au numérateur et peut être réduit à 0 plutôt qu'à l'infini comme dans (3.51) :

$$A|_{Z=0} = \left(A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \right) \frac{\frac{0}{Z_n} + 1}{\frac{0}{Z_d} + 1} = A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d} \quad (3.54)$$

En s'appuyant sur cette expression, $A|_{Z=\infty} \frac{Z_n}{Z_d}$ dans (3.53) peut simplement être remplacé par $A|_{Z=0}$ pour former la seconde définition du théorème de l'extra-élément :

$$A|_Z = A|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.55)$$

Cette seconde forme nous indique que le gain d'un système linéaire considérant un extra-élément Z est égal au gain de ce système déterminé avec Z physiquement court-circuité ($A|_{Z=0}$), gain qui sera ensuite multiplié par un facteur correctif impliquant l'élément Z et deux impédances vues des connexions de l'extra-élément lorsque la sortie est nullifiée (Z_n) et l'excitation réduite à zéro (Z_d).

Appliquer l'EET à un circuit du premier ordre implique les étapes suivantes :

1. Identifiez l'extra-élément Z . Ce peut être un élément de stockage énergétique comme L ou C mais également une résistance R . L'EET fonctionne également très bien avec des sources commandées mais nous n'étudierons pas cette option ici. L'extra-élément est habituellement le composant qui complique l'analyse du circuit, avec lequel la détermination de la fonction de transfert devient plus complexe.
2. Décidez si vous allez court-circuiter ou retirer l'extra-élément que vous avez sélectionné. Dans certains cas, si vous retirez l'élément, la fonction de transfert peut s'annuler et (3.52) ne pas être appliquée. C'est le cas pour les circuits qui possèdent un zéro à l'origine par exemple. Dans ce cas, il convient alors de court-circuiter l'élément et utiliser (3.55). Une fois l'extra-élément placé dans son *état de référence*, ouvert ou court-circuité, calculez le terme de tête $A|_{Z=0}$ ou $A|_{Z=\infty}$. Ce terme est appelé le *gain de référence*.
3. Appliquez les techniques vues aux chapitres 1 et 2. Réduisez la source d'excitation à 0 et évaluez la résistance vue du port créé lorsque l'extra-élément est retiré. Vous avez Z_d .
4. Utilisez la technique de double injection nulle (NDI) pour déterminer la résistance offerte par le port créé lorsque l'extra-élément est retiré du circuit et la réponse nullifiée. Vous avez Z_n .
5. Si le circuit de référence est purement résistif, alors $Z_d = R_d$ et $Z_n = R_n$ sont des résistances. Le facteur de correction donne directement les fréquences de coupure du circuit étudié.

Maintenant que nous possédons une procédure pour exploiter l'EET, mettons-la à l'œuvre avec quelques exemples.

3.2.1 L'EET au travail sur des circuits simples

Le premier exemple apparaît en Figure 3.21a et représente un pont de résistances. C'est un circuit purement résistif, sans réactances. La tension de sortie est observée aux bornes de la résistance R_4 . Quelle est la fonction de transfert qui relie V_{out} à V_{in} ? Au premier coup d'œil, R_5 est l'élément qui complique tout. Un observateur différent sélectionnerait peut-être R_4 (ou toute autre résistance) et en ferait son extra-élément. Il n'y a pas de problème, le cheminement dans l'obtention de la solution restera identique. Supposons que R_5 soit sélectionnée comme extra-élément. Nous pouvons la remplacer par un circuit ouvert ou un court-circuit et utiliser ensuite la forme de l'EET qui conviendra. Le but est choisir une configuration simplifiant drastiquement l'analyse. Remplaçons-la par un circuit ouvert (l'extra-élément devient infini) et vérifions l'existence d'un gain. Le dessin est celui de la Figure 3.21b et représente deux ponts découplés l'un de l'autre. Les résistances R_1 - R_3 ne jouent aucun rôle et V_{out} est lié à V_{in} via R_4 - R_2 qui forment un simple diviseur de tension. La première étape pour trouver notre gain de référence est immédiate :

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{R_5 \rightarrow \infty} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \quad (3.56)$$

Maintenant, l'excitation est réduite à 0, impliquant que la source V_{in} est remplacée par un court-circuit comme indiqué en Figure 3.21c. Si l'on replie les connexions supérieures de R_1 - R_2 à la masse, la résistance vue des connexions de R_5 est simplement la mise en série de R_1 - R_3 en parallèle avec R_2 - R_4 également en parallèle :

$$R_d = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4 \quad (3.57)$$

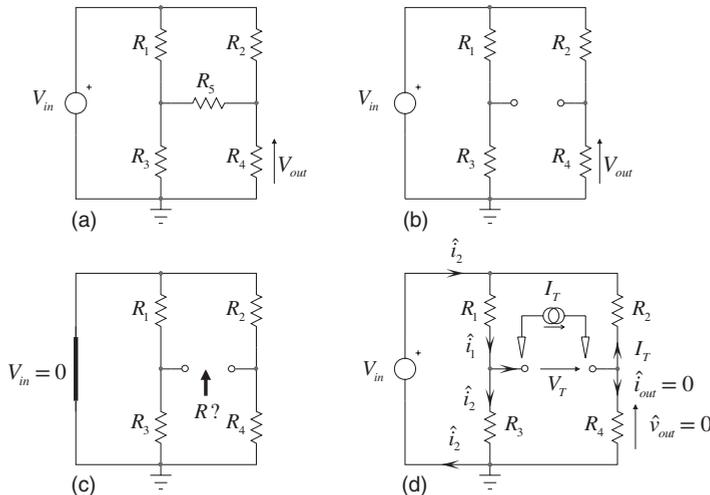


Figure 3.21 Ce circuit combine des résistances pour former un diviseur reliant V_{out} à V_{in} . Quelle est la fonction de transfert ?

Pour l'étape finale, nous considérons que \hat{v}_{out} est nullifiée alors que l'on détermine la résistance vue des connexions de R_5 une fois celle-ci retirée temporairement du circuit. Le schéma mis à jour est celui de la Figure 3.21d, V_{in} est de retour et participe à la double injection (NDI). Comme indiqué précédemment, associée avec la source de courant I_T , la source d'entrée assure la nullification de la sortie. Il n'est jamais nécessaire de connaître la valeur de V_{in} afin de déterminer la résistance vue des connexions de l'élément de stockage (C ou L) ou de la résistance comme ici. Comme \hat{v}_{out} est nullifiée, \hat{i}_{out} est aussi égal à zéro. Ainsi, tout le courant de test I_T traverse R_2 dont la connexion inférieure est à 0 V. La tension aux bornes de R_3 est alors $-V_T$ et le courant i_2 est simplement :

$$\hat{i}_2 = -\frac{V_T}{R_3} \quad (3.58)$$

Le courant i_1 est la somme de I_T et i_2 :

$$\hat{i}_1 = I_T + \hat{i}_2 \quad (3.59)$$

Comme la tension V_T apparaît aux bornes de R_2 et R_1 , il vient :

$$V_T = I_T R_2 + \hat{i}_1 R_1 \quad (3.60)$$

On peut extraire \hat{i}_1

$$\hat{i}_1 = \frac{V_T - R_2 I_T}{R_1} \quad (3.61)$$

Si l'on substitue (3.58) et (3.6) dans (3.59), on obtient :

$$\frac{V_T - R_2 I_T}{R_1} = -\frac{V_T}{R_3} + I_T \quad (3.62)$$

Factoriser V_T et I_T conduit alors à écrire :

$$V_T \left(1 + \frac{R_1}{R_3} \right) = I_T (R_1 + R_2) \quad (3.63)$$

La résistance R_n vue des connexions de R_5 lorsque V_{out} est nullifiée est ainsi égale à :

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = \frac{R_1 + R_2}{1 + \frac{R_1}{R_3}} \quad (3.64)$$

3.2 Le théorème de l'extra-élément

La fonction de transfert finale est obtenue en assemblant (3.56), et (3.64) :

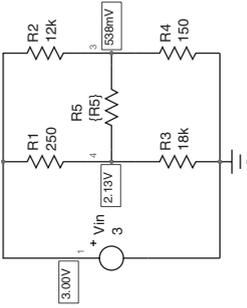
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{R_5}} \quad (3.65)$$

Cette expression a été saisie dans une feuille Mathcad® dont la copie d'écran apparaît en Figure 3.22.

$$\begin{aligned} R_1 &:= 250\Omega & R_2 &:= 12\text{k}\Omega & R_3 &:= 18\text{k}\Omega & R_4 &:= 150\Omega & R_5 &:= 470\Omega \\ \|(x,y) &:= \frac{x \cdot y}{x + y} & V_1 &:= 3\text{V} \\ H_1 &:= \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{R_5}} = 0.179 \end{aligned}$$

Figure 3.22 Mathcad® calcule efficacement la fonction de transfert qui implique des éléments mis en parallèle.

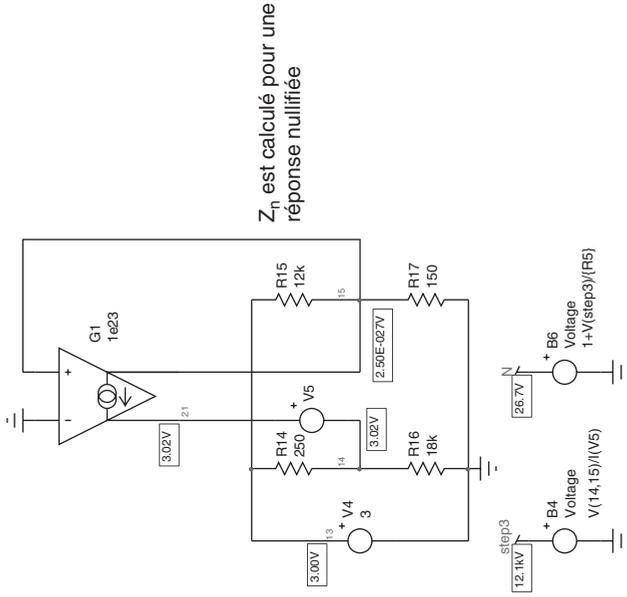
Comment sait-on si ce résultat est correct ? On peut appeler SPICE à la ressource comme nous l'avons fait précédemment. La Figure 3.23 représente le circuit complet dans lequel les étapes que nous avons décrites sont simulées et assemblées pour produire l'équation finale au travers de la source B_7 . Le nœud *TF* affiche la fonction de transfert originelle avec tous les éléments en place. Il indique exactement 0.179, ce que (3.65) retourne dans Mathcad®. Les trois étapes de calculs sont déroulées : étape 1 est obtenue lorsque R_5 est retirée, l'étape 2 correspond à V_{in} mise à 0 et, finalement, l'étape 3 utilise l'amplificateur à transconductance pour déterminer R_n . La combinaison de toutes ces étapes est affichée au nœud *TFEET* qui affiche 0.179, confirmant ainsi le cheminement adopté. Si vous modifiez la source V_4 (V_{in}) dans la procédure NDI, le courant injecté au travers de V_5 s'ajusterait pour maintenir $\hat{v}_{out} = 0$ mais la résistance calculée par B_4 resterait constante. Vérifiez bien que les mesures de tension et courant autour de l'amplificateur à transconductance respectent les polarités de la Figure 3.19. Dans SPICE, un courant qui circule dans un élément (résistance, source et ainsi de suite) est considéré comme positif si celui-ci quitte l'élément considéré par sa broche négative (-). Pour obtenir le signe correct, veuillez noter l'orientation de la source V_5 en série avec G_1 et les nœuds 14-15 utilisés par B_4 pour calculer Z_n .



paramètres

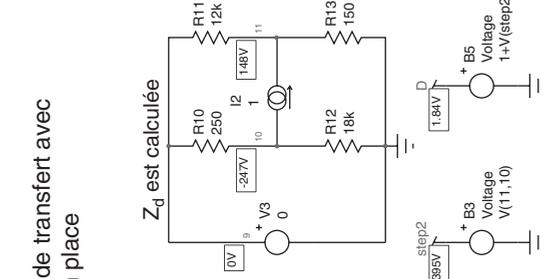
R5=470

Sonde de courant



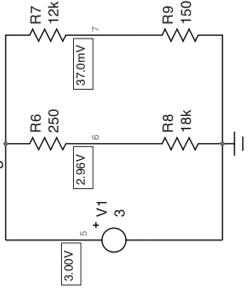
Z_n est calculé pour une réponse nullifiée

Étude de la fonction de transfert avec tous les éléments en place



Z_d est calculée

R_5 est retirée



Fonction de transfert finale obtenue avec le EET

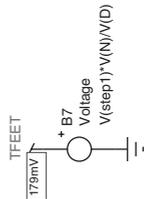


Figure 3.23 Une simulation SPICE permet de vérifier rapidement les résultats obtenus.

3.2.2 L'EET au travail – Exemple 2

Pour le deuxième exemple, considérons une bobine en lieu et place de R_5 . Le nouveau circuit apparaît en Figure 3.24. Avec cet élément en place, nous avons le choix d'appliquer (3.52) ou (3.55). Si nous appliquons la première définition, nous n'avons rien à faire : tout le travail a déjà été fait ! Il suffit de remplacer R_5 par l'impédance de la bobine qui est sL et la formule suivante apparaît :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{R_4}{R_4 + R_2} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{1 + R_1/R_3} \frac{sL}{sL}}{1 + \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{sL}} \quad (3.66)$$

Il s'agit de la nouvelle fonction de transfert liant V_{out} à V_{in} dans la Figure 3.24. Cependant, dans l'équation (3.66), vous voyez que s se situe au dénominateur et que l'ensemble ne satisfait pas vraiment notre définition de formule à *faible entropie*. L'idéal serait de suivre le format d'une fonction de transfert du premier ordre :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.67)$$

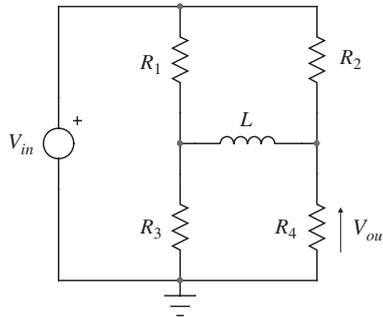


Figure 3.24 Une bobine remplace maintenant la résistance R_5 .

Plutôt que d'appliquer (3.52), prenons (3.55). Dans cette expression, l'impédance Z est réduite à 0, impliquant que L est remplacée par un court-circuit. Oui, il s'agit de la fonction de transfert en continu H_0 que nous avons calculée plusieurs fois dans les chapitres 1 et 2. En observant Figure 3.24, il n'est pas nécessaire d'écrire une seule ligne d'algèbre puisque nous voyons que lorsque L est

remplacée par un fil, R_1 - R_2 sont mises en parallèle ainsi que R_3 et R_4 . L'ensemble forme un diviseur résistif égal à :

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{L=0} = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \quad (3.68)$$

C'est terminé car nous avons déjà calculé les résistances qui pilotent L lorsque l'excitation est réduite à zéro (R_d) et quand la sortie est nullifiée (R_n). Il suffit d'assembler les éléments comme indiqué par l'équation (3.55) dans laquelle Z est simplement sL :

$$H(s) = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \frac{1 + s \frac{L}{R_1 + R_2}}{1 + R_1/R_3} \frac{L}{1 + s \frac{L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}} \quad (3.69)$$

C'est la forme *faible entropie* avec laquelle nous sommes familiers et qui suit le format fixé par (3.67).

$$H_0 = \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \quad (3.70)$$

$$\omega_z = \frac{R_1 + R_2}{(1 + R_1/R_3)L} \quad (3.71)$$

et

$$\omega_p = \frac{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}{L} \quad (3.72)$$

Les deux formules exprimées par (3.66) et (3.69) sont identiques et, une fois de plus, Mathcad® et SPICE délivrent des résultats similaires comme l'indiquent la Figure 3.25 et la Figure 3.26. Le pôle et le zéro respectivement calculés par SPICE par les sources B_5 - B_6 sont égaux à ceux trouvés en Figure 3.25. V_4 en Figure 3.26 est arbitrairement fixée à 4 V mais toute autre valeur ne produirait pas de différence puisque le courant dans V_5 serait ajusté afin de nullifier la sortie.

On pourrait également appliquer superposition en séparant V_{in} en deux sources séparées identiques qui polarisent respectivement la connexion supérieure de R_1 et de R_2 . Dans cette optique, on peut alternativement éteindre les sources et calculer les tensions de sortie correspondantes :

La source V_{in} branchée à R_1 est réduite à 0 V :

$$V_{out1}(s) = V_{in}(s) \frac{(R_1 \parallel R_3 + sL) \parallel R_4}{(R_1 \parallel R_3 + sL) \parallel R_4 + R_2} \quad (3.73)$$

3.2 Le théorème de l'extra-élément

$$R_1 := 250\Omega \quad R_2 := 12k\Omega \quad R_3 := 18k\Omega \quad R_4 := 150\Omega \quad R_5 := 470\Omega \quad L := 10mH$$

$$H(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_1 + \frac{R_2}{1 + \frac{R_3}{R_4}}}$$

$$H_2(s) := \frac{R_4}{R_4 + R_2} \cdot \frac{1 + \frac{s \cdot L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}}{1 + \frac{s \cdot L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}}$$

$$1 + s \frac{L}{R_1 + R_2} \cdot \frac{\frac{R_1}{1 + \frac{R_3}{R_4}}}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}$$

$$H_3(s) := \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4} \cdot \frac{L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}$$

$$H_0 := \frac{R_3 \parallel R_4}{R_1 \parallel R_2 + R_3 \parallel R_4}$$

$$\omega_z := \frac{R_1 + R_2}{\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right) \cdot L}$$

$$\omega_p := \frac{L}{R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4}$$

$$1 + \frac{s}{\omega_z} \cdot \frac{s}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

$$H_4(s) := H_0 \cdot \frac{\omega_z}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad \omega_z := \frac{192.294k\text{Hz}}{2\pi} \quad \omega_p := \frac{6.282k\text{Hz}}{2\pi}$$

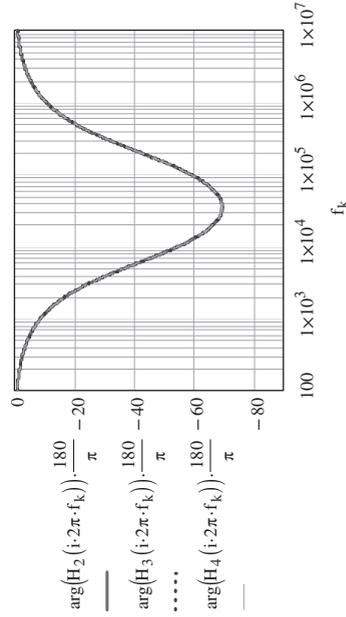
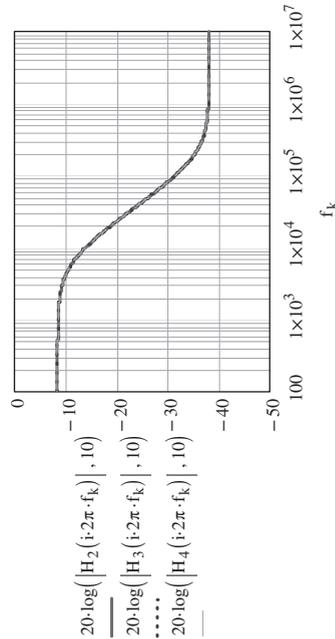


Figure 3.25 Mathcad® confirme que les équations (3.66) et (3.69) sont identiques.

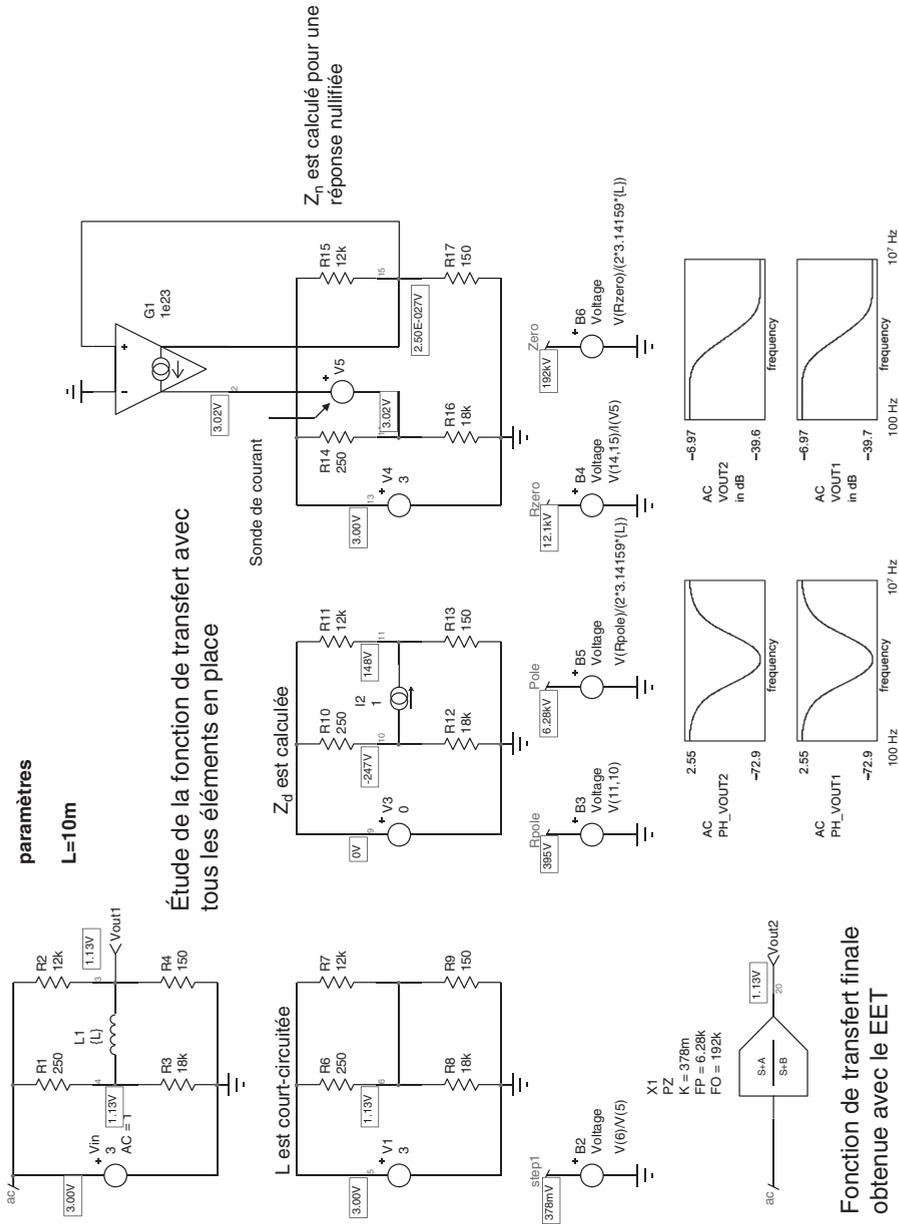


Figure 3.26 SPICE automatise le calcul du pôle et du zéro pour former une fonction de transfert dont la réponse est identique à celle délivrée par le circuit complet.

3.2 Le théorème de l'extra-élément

La source V_{in} branchée à R_2 est réduite à 0 V :

$$V_{out2}(s) = V_{in}(s) \frac{R_4 \parallel R_2}{R_4 \parallel R_2 + sL + R_1} \frac{R_3}{R_3 + R_1} \quad (3.74)$$

La fonction de transfert finale à *forte entropie* ou brute est ainsi définie par la somme des deux tensions intermédiaires :

$$\begin{aligned} V_{out}(s) &= V_{out1}(s) + V_{out2}(s) \\ &= V_{in}(s) \left[\frac{(R_1 \parallel R_3 + sL) \parallel R_4}{(R_1 \parallel R_3 + sL) \parallel R_4 + R_2} + \frac{R_4 \parallel R_2}{R_4 \parallel R_2 + sL + R_1} \frac{R_3}{R_3 + R_1} \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

Cette expression délivre la réponse exacte mais compte tenu de son écriture, je vous souhaite bon courage pour révéler le pôle et le zéro !

3.2.3 L'EET au travail – Exemple 3

Un troisième exemple apparaît en Figure 3.27a. C'est un circuit du premier ordre construit autour d'un condensateur. Si la capacitance C est infinie, impliquant le remplacement du condensateur par un court-circuit, est-ce que la réponse liant V_{out} à V_{in} existe toujours ? Oui, donc il existe un zéro associé à C . Commençons par l'étude en continu dans laquelle nous retirons C du circuit pour obtenir le gain de référence. C'est un gain continu, immédiatement déterminé par :

$$H|_{Z \rightarrow \infty} = H_0 = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \quad (3.76)$$

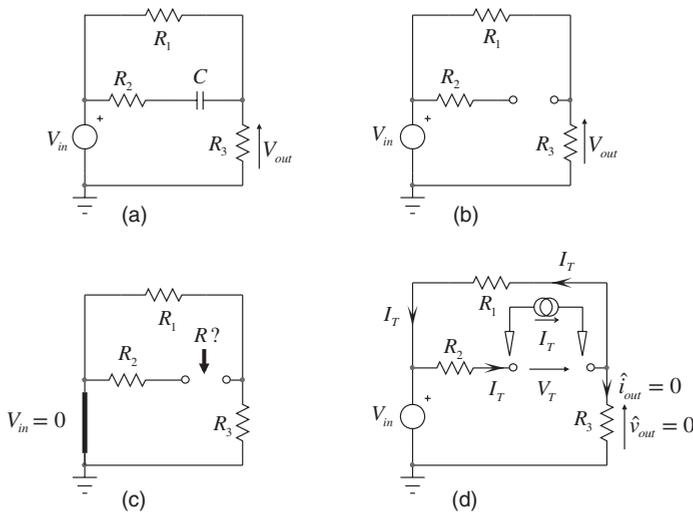


Figure 3.27 Le troisième exemple associe un condensateur et trois résistances.

La deuxième étape consiste à réduire l'excitation V_{in} à 0 V comme indiqué en Figure 3.27c. Compte tenu de la simplicité du circuit, la résistance vue des connexions du condensateur est :

$$R_d = R_2 + R_1 \parallel R_3 \quad (3.77)$$

Finalement, la nullification de \hat{v}_{out} à 0 est représentée en Figure 3.27d. Comme aucun courant ne circule dans R_3 , tout le courant de test I_T traverse R_1 et revient par R_2 . La résistance vue des connexions du condensateur dans ce mode est simplement :

$$R_n = R_1 + R_2 \quad (3.78)$$

La fonction de transfert finale $H(s)$ est obtenue en assemblant les équations selon le format de (3.52)

$$H(s) = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \frac{1 + \frac{R_1 + R_2}{1/sC}}{1 + \frac{R_2 + R_1 \parallel R_3}{1/sC}} = \frac{R_3}{R_3 + R_1} \frac{1 + s(R_1 + R_2)C}{1 + sC[R_2 + R_1 \parallel R_3]} \quad (3.79)$$

On peut arranger cette fonction de transfert afin qu'elle satisfasse la forme classique

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.80)$$

dans laquelle H_0 est définie par (3.76) alors que le pôle et le zéros sont définis par :

$$\omega_z = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \quad (3.81)$$

$$\omega_p = \frac{1}{C[R_2 + R_1 \parallel R_3]} \quad (3.82)$$

Nous n'avons pas écrit une seule ligne d'algèbre pour déterminer cette fonction de transfert.

3.2.4 L'EET au travail – Exemple 4

Le prochain exemple est décrit en Figure 3.28. C'est un simple amplificateur bipolaire qui possède une contre-réaction locale apportée par la résistance R_f . Le modèle équivalent petit-signal apparaît en Figure 3.29a. Nous allons d'abord supposer que le condensateur C_i est là uniquement pour couper la composante continue et sera considéré comme un court-circuit pour cette analyse. Dans cette configuration, l'élément qui nous gêne est la résistance R_f . On décide de la retirer

3.2 Le théorème de l'extra-élément

du circuit (Z tend vers l'infini) et on calcule la fonction de transfert dans cette condition, tel que représenté en Figure 3.29b. La tension de sortie est observée aux bornes de R_C qui se trouve traversée par le courant collecteur, βi_b :

$$V_{out} = -\beta i_b R_C \quad (3.83)$$

La tension de sortie se répartit entre la résistance d'entrée dynamique r_π (h_{11} en notation hybride) et la résistance d'émetteur :

$$V_{in} = r_\pi i_b + (\beta + 1) i_b R_E = i_b [r_\pi + (\beta + 1) R_E] \quad (3.84)$$

Il est possible de déterminer le courant de base à partir de cette équation :

$$i_b = \frac{V_{in}}{r_\pi + (\beta + 1) R_E} \quad (3.85)$$

et le substituer dans (3.83). Si l'on factorise V_{out} et V_{in} , nous obtenons :

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{R_f \rightarrow \infty} = - \frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta + 1) R_E} \quad (3.86)$$

Maintenant que nous possédons une partie de la réponse, voyons la valeur de la résistance R_d vue des connexions de R_f lorsque la source d'entrée V_{in} est réduite à 0 volt. Comme indiqué par la Figure 3.29c, les résistances r_π et R_E sont court-circuitées à la masse. Dans cette condition, il n'y a pas de courant de base et $i_b = 0$. Le générateur de courant βi_b est également égal à 0 (il disparaît du croquis) et la seule résistance qui est vue des connexions de R_f dans ces conditions est la résistance de collecteur R_C :

$$R_d = R_C \quad (3.87)$$

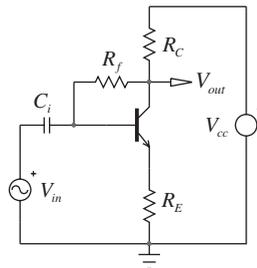


Figure 3.28 Ce schéma représente un transistor bipolaire avec une contre-réaction locale apportée par R_f . Quelle est la fonction de transfert de ce circuit ?

L'étape finale consiste à déterminer la résistance R_n vue des connexions de R_f lorsque la sortie est nullifiée. Le schéma est mis à jour comme indiqué en

Figure 3.29d. Si la tension de sortie est nulle, alors le courant de sortie est également nul. Ainsi, le courant de test I_T est absorbé par la source de courant $\beta \hat{i}_b$:

$$I_T = \beta \hat{i}_b \quad (3.88)$$

Le courant de base est alors

$$\hat{i}_b = \frac{I_T}{\beta} \quad (3.89)$$

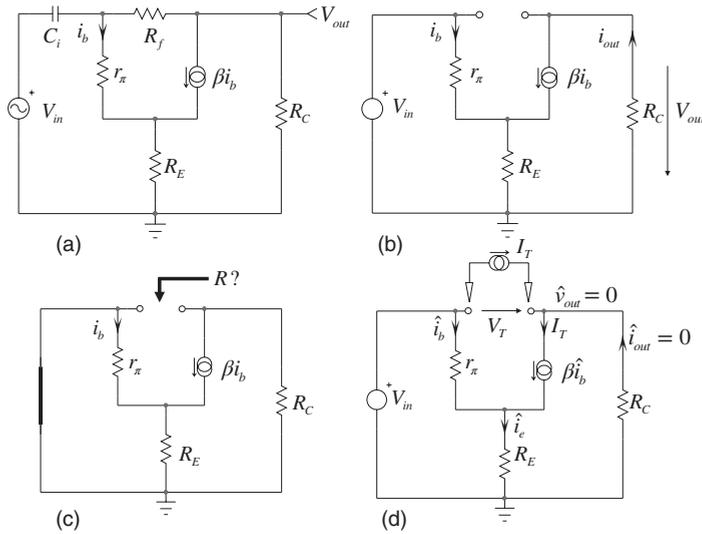


Figure 3.29 La fonction de transfert peut être trouvée en appliquant le théorème de l'extra-élément (EET) au travers de trois étapes distinctes.

Le courant circulant dans la résistance d'émetteur est la somme du courant de base et du courant de test I_T :

$$\hat{i}_e = \frac{I_T}{\beta} + I_T = I_T \left(\frac{1}{\beta} + 1 \right) \quad (3.90)$$

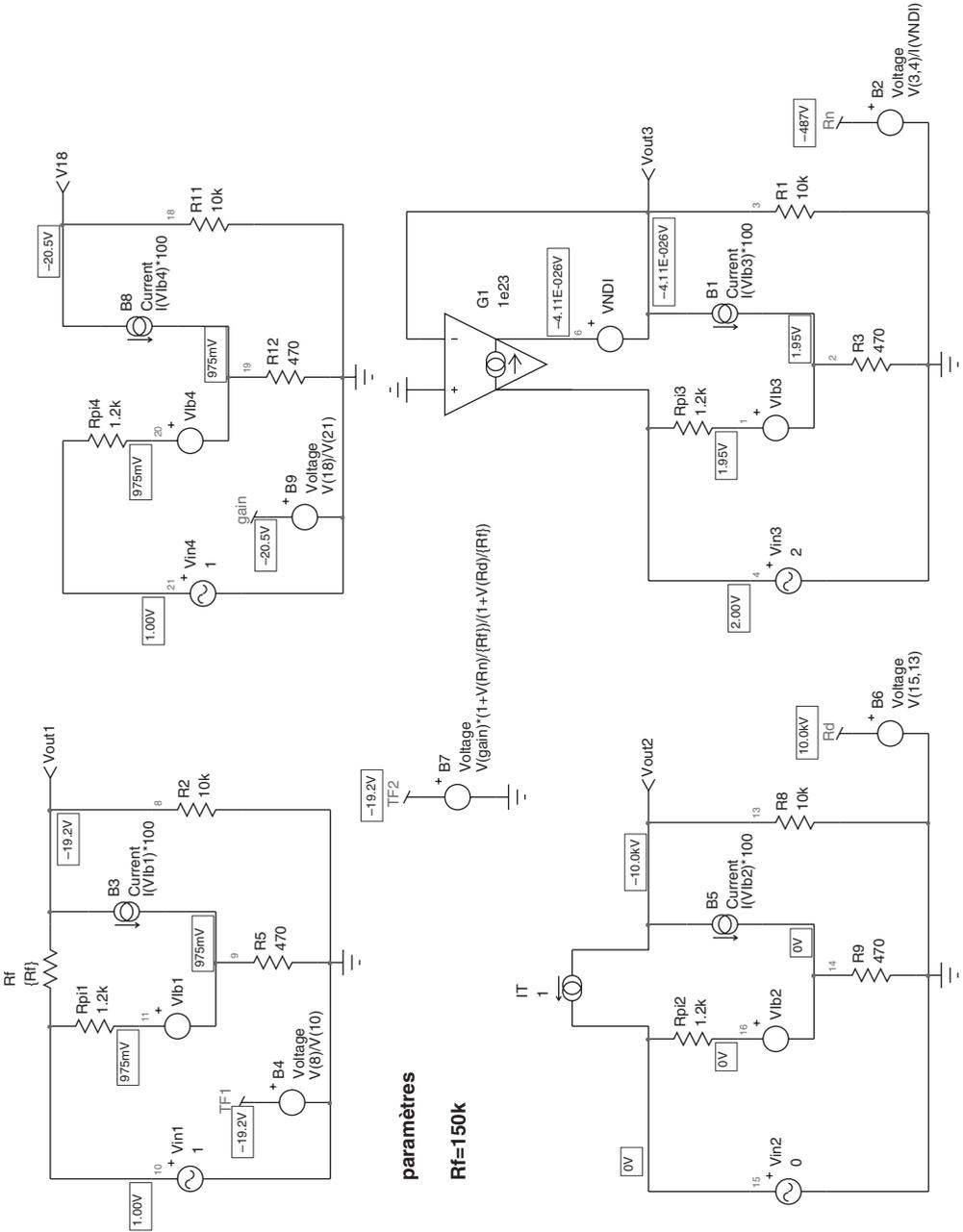
Puisque la connexion droite du générateur de test est à 0 V, alors sa connexion gauche est à $-V_T$. Il s'agit de la chute de tension aux bornes de r_π et R_E :

$$-V_T = r_\pi \frac{I_T}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) I_T \quad (3.91)$$

Si l'on arrange cette expression, l'on obtient la résistance présentée par les connexions de R_f lorsque la sortie est nullifiée, $\hat{v}_{out} = 0$.

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = - \left[\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (3.92)$$

3.2 Le théorème de l'extra-élément



paramètres

$R_f = 150k$

Figure 3.30 Le point de polarisation calculé par SPICE donne un gain de -19.2 pour le circuit (nœud TF1), identique à celui que donne l'EET en nœud TF2.

C'est une résistance négative. Si un condensateur était connecté à la place de R_f , alors la constante de temps négative résultante donnerait naissance à un zéro situé dans le demi-plan droit (*Right Half-Plane Zero* ou RHPZ).

Nous possédons maintenant toutes les pièces et il est possible de déterminer la fonction de transfert en utilisant (3.52) :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{\beta R_C}{r_{\pi} + (\beta + 1)R_E} \frac{1 - \frac{r_{\pi} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} = -\frac{\beta}{\beta + 1} \frac{R_C}{\frac{r_{\pi}}{\beta + 1} + R_E} \frac{1 - \frac{r_{\pi} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \quad (3.93)$$

Comme à notre habitude, nous avons testé toutes ces expressions individuelles avec SPICE et comparé les courbes avec celles délivrées par Mathcad®. Les résultats apparaissent en Figure 3.30 et Figure 3.31 et sont identiques.

$$\beta := 100 \quad R_C := 10\text{k}\Omega \quad r_{\pi} := 1.2\text{k}\Omega \quad R_E := 470\Omega \quad R_f := 150\text{k}\Omega$$

$$R_h := -\left[\frac{r_{\pi}}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right] = -486.7\Omega \quad R_d := R_C \quad H_0 := -\frac{\beta \cdot R_C}{r_{\pi} + (\beta + 1) \cdot R_E} = -20.547$$

$$G_1 := -\frac{\beta \cdot R_C}{r_{\pi} + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{1 - \frac{r_{\pi} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} = -19.2$$

Figure 3.31 Les résultats de Mathcad® sont identiques à ceux retournés par l'analyse en courant continu de SPICE de la Figure 3.30.

3.2.5 L'EET au travail – Exemple 5

Nous allons maintenant considérer la présence du condensateur C_i dans le circuit, comme le montre la Figure 3.28. Après tout, considérer son impédance comme un court-circuit au début de l'exercice était déjà une forme de EET – voir (3.55) – et nous avons déjà dérivé une partie du résultat avec (3.93). En appliquant l'EET, l'expression complète incluant le condensateur C_i est

3.2 Le théorème de l'extra-élément

$$\left. \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} \right|_{Z_{C_i}} = \left. \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} \right|_{Z_{C_i} \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{Z_{C_i}}{R_n}}{1 + \frac{Z_{C_i}}{R_d}} \quad (3.94)$$

La constante de temps impliquant R_d est déterminée en réduisant V_{in} à 0 V ce qui mène au circuit de la Figure 3.32. Avec ce type de schéma, malheureusement, trouver par inspection la résistance qui attaque le condensateur C_i n'est pas chose aisée compte tenu de la présence de la source contrôlée. La solution consiste à ajouter un générateur de test I_T et déterminer la tension V_T à ses bornes. Le rapport V_T/I_T est la résistance que nous recherchons.

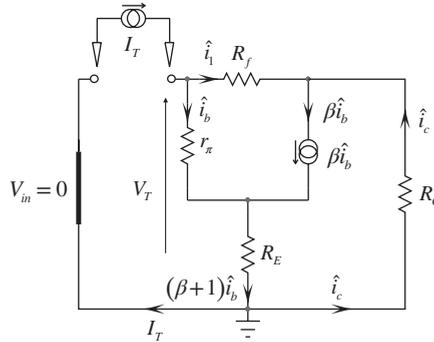


Figure 3.32 La résistance qui attaque le condensateur lorsque l'excitation est réduite à 0 nécessite l'adjonction d'un générateur de test et l'utilisation des lois des nœuds et mailles (KVL et KCL en anglais).

La loi des nœuds nous indique que

$$I_T = \hat{i}_1 + \hat{i}_b \quad (3.95)$$

mais également

$$I_T + \hat{i}_c = (\beta + 1)\hat{i}_b \quad (3.96)$$

Le courant qui traverse R_f est la tension à ses bornes divisée par R_f

$$\hat{i}_1 = \frac{V_T + R_C \hat{i}_c}{R_f} \quad (3.97)$$

Le courant de base \hat{i}_b est déterminé en réalisant que V_T est appliquée aux bornes du pont constitué par r_π et la résistance d'émetteur :

$$V_T = \hat{i}_b r_\pi + (\beta + 1)\hat{i}_b R_E \quad (3.98)$$

Le courant de base est alors aisément obtenu :

$$\hat{i}_b = \frac{V_T}{r_\pi + (\beta + 1)R_E} \quad (3.99)$$

En substituant (3.97) dans (3.95), on obtient

$$I_T = \frac{V_T + R_C \hat{i}_c}{R_f} + \hat{i}_b \quad (3.100)$$

Si maintenant on extrait \hat{i}_c de (3.96) et on le substitue dans (3.100), le courant de test I_T est égal à

$$I_T = \frac{V_T + R_C [(\beta + 1)\hat{i}_b - I_T]}{R_f} + \hat{i}_b \quad (3.101)$$

Il suffit maintenant de remplacer le courant de base par son expression de (3.99), puis, après factorisation, on obtient la résistance R_d vue des connexions du condensateur lorsque l'excitation V_{in} est coupée :

$$\frac{V_T}{I_T} = R_d = \frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)} \quad (3.102)$$

La seconde résistance R_n est obtenue lorsque la sortie est nullifiée. Le nouveau circuit apparaît en Figure 3.33.

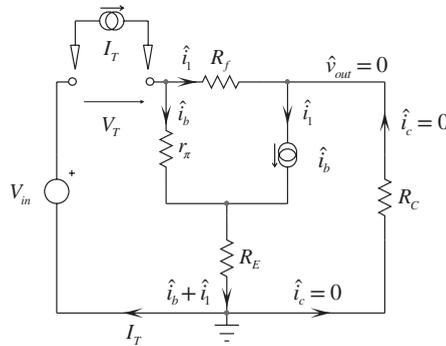


Figure 3.33 Dans cette configuration, la sortie est nullifiée, impliquant qu'il n'y a aucun courant circulant dans la résistance de collecteur R_C .

Dans ce circuit, comme la sortie est nullifiée, alors le courant collecteur \hat{i}_c est également nul.

$$\hat{v}_{out} = 0 \quad (3.103)$$

$$\hat{i}_c = 0 \quad (3.104)$$

3.2 Le théorème de l'extra-élément

Compte tenu de ce fait, le courant \hat{i}_1 dans R_f est $\beta\hat{i}_b$. Si l'on considère la sortie nullifiée, la tension aux bornes de R_f est égale à la tension aux bornes de r_π et de la résistance d'émetteur R_E :

$$\beta\hat{i}_b R_f = \hat{i}_b [r_\pi + (\beta+1)R_E] \quad (3.105)$$

La seule façon de satisfaire cette équation passe par un courant \hat{i}_b égal à 0. Si \hat{i}_b est 0, alors \hat{i}_1 est également nul. Comme le courant de test I_T est la somme de \hat{i}_b et \hat{i}_1 , alors I_T est également égal à zéro. Ainsi, la résistance vue des connexions du condensateur en double injection nulle tend vers l'infini :

$$R_n = \left. \frac{V_T}{I_T} \right|_{I_T=0} \rightarrow \infty \quad (3.106)$$

Ce résultat confirme le zéro placé à l'origine et observé en continu : lorsque C_i est retiré du circuit, la tension de sortie est 0 V, le gain est nul. Nous pouvons maintenant assembler ces résultats pour obtenir la fonction de transfert suivant (3.94)

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{C_i} = - \frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta+1)R_E} \frac{1 - \frac{\frac{r_\pi + R_E}{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \frac{1 + \frac{1/sC}{\infty}}{1 + \frac{1/sC}{\frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)}}}} \quad (3.107)$$

Cette expression peut être réécrite sous un format plus agréable :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}} \quad (3.108)$$

dans lequel

$$H_\infty = - \frac{\beta R_C}{r_\pi + (\beta+1)R_E} \frac{1 - \frac{\frac{r_\pi + R_E}{\beta} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{R_f}}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \quad (3.109)$$

et

$$\omega_p = \frac{1}{C_i \frac{(R_C + R_f)(R_E + r_\pi + \beta R_E)}{R_C + R_E + R_f + r_\pi + \beta(R_C + R_E)}} \quad (3.110)$$

(3.108) combine un zéro à l'origine plus un pôle. Veuillez noter la forme adoptée qui est plutôt inhabituelle comparée à celle de (3.80) dans laquelle s apparaît à une place différente. C'est ce que l'on nomme un pôle inversé (*inverted pole*) et vous pouvez sauter à la section suivante pour obtenir plus d'informations sur cette notation.

Pour vérifier nos calculs, nous avons simulé le circuit de la Figure 3.28 et comparé les résultats avec ceux retournés par Mathcad®. Le circuit SPICE est celui de la Figure 3.34. Le gain à 1 Hz est de -22.189 dB alors que le pôle à -3 dB est évalué à 247 Hz. L'asymptote haute fréquence est fixée par le gain calculé avec (3.93). La feuille de calcul automatisée est donnée en Figure 3.35 et les formules délivrent des valeurs et courbes similaires à ceux obtenus avec SPICE.

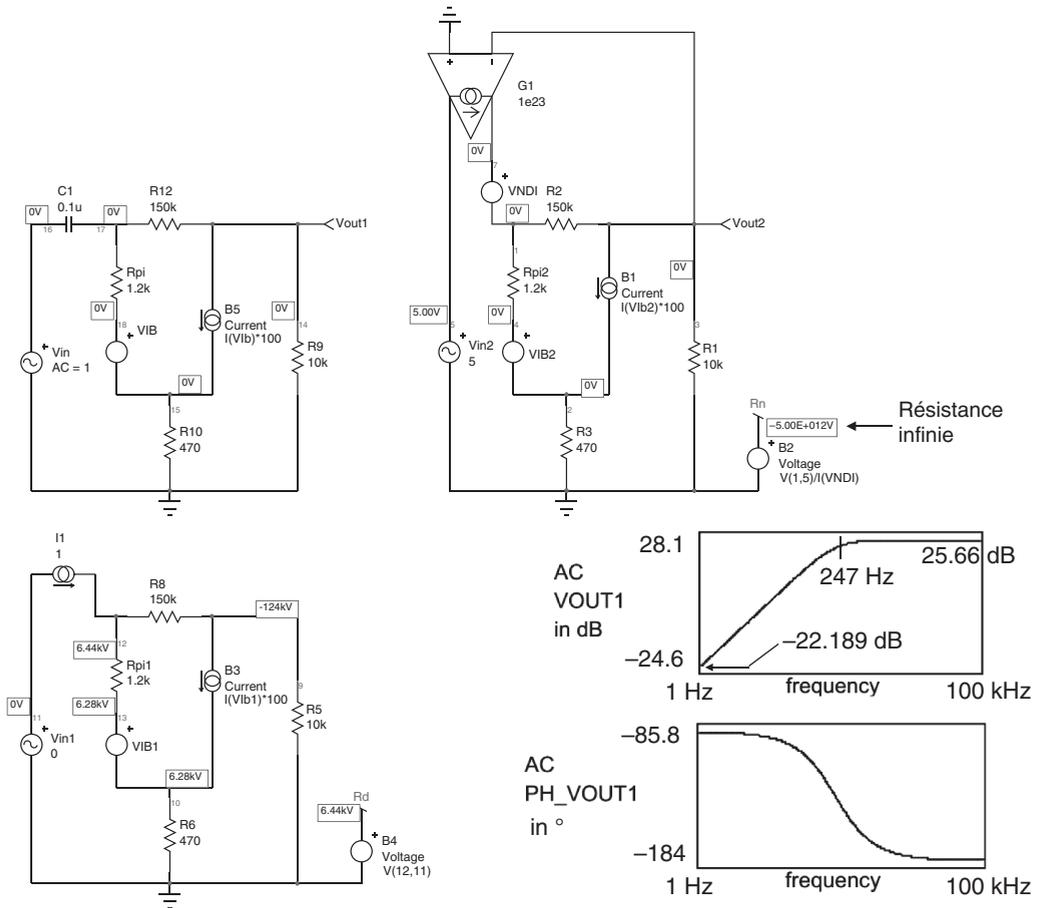


Figure 3.34 Les circuits de test nous permettent de confirmer rapidement si les calculs menés pour déterminer les différentes résistances sont corrects. Pour un zéro à l'origine, la résistance attaquant le condensateur obtenue pour une sortie nullifiée est infinie.

3.2 Le théorème de l'extra-élément

$\beta := 100$ $R_C := 10k\Omega$ $r_x := 1.2k\Omega$ $R_E := 470\Omega$ $R_f := 150k\Omega$ $C_1 := 0.1\mu F$

$$H_I(s) := \frac{\beta \cdot R_C}{r_x + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{R_f}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \cdot \frac{1}{C_1 \cdot s \cdot \frac{r_x + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta} + R_C + R_f + r_x + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta}$$

$$20 \cdot \log \left(\left| H_I(i \cdot 2\pi \cdot 1Hz) \right|, 10 \right) = -22.189 \quad 20 \cdot \log \left(\left| H_I(i \cdot 2\pi \cdot 10^6 Hz) \right|, 10 \right) = 25.666$$

$$\omega_p := \frac{1}{C_1 \cdot \frac{r_x + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta} + R_C + R_f + r_x + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 247.028 Hz$$

$$\omega_p := \frac{1}{C_1 \cdot \frac{r_x + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta} + R_C + R_f + r_x + R_C \cdot \beta + R_E \cdot \beta} = 6.443k\Omega$$

$$H_{inf}(s) := \frac{\beta \cdot R_C}{r_x + (\beta + 1) \cdot R_E} \cdot \frac{R_C}{1 + \frac{R_C}{R_f}} \cdot \frac{1}{s} \quad H_3(s) := -H_{inf} \cdot \frac{\omega_p}{1 + \frac{\omega_p}{s}}$$

$$\frac{r_x + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}{\beta}$$

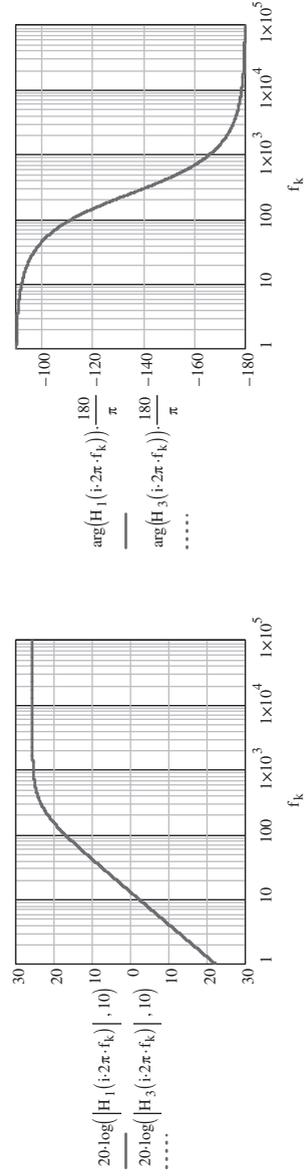


Figure 3.35 Les résultats de Mathcad® confirment ce que nous avons simulé. Les points principaux sont exactement ceux retournés par la simulation SPICE.

3.2.6 L'EET au travail – Exemple 6

Dans les problèmes du chapitre 1, nous avons proposé un circuit du premier ordre qui comprenait une bobine. On demandait de trouver la constante de temps et, plus tard, l'expression de la résistance en continu. Le circuit apparaît en Figure 3.36. Si l'on désigne L_1 comme l'extra-élément, nous pouvons appliquer (3.52) ou (3.55). Ici, si L_1 est assimilée à court-circuit, le circuit se transforme en celui de la Figure 3.37. C'est une configuration en pont pour laquelle il n'est pas possible de déterminer la résistance $R?$ vue des connexions de la bobine par inspection. Vous devrez appliquer l'EET avec R_3 comme extra-élément avant de poursuivre l'analyse. Rien d'insurmontable, bien sûr, mais cette approche requiert un effort supplémentaire. D'un autre côté, si L_1 est remplacée par un circuit ouvert (l'inductance devient infinie), alors il devient possible de déterminer $R?$ par inspection, comme le confirme la Figure 3.38. Si l'on adopte la définition du EET telle que définie par (3.52), alors nous obtenons

$$Z|_{L_1 \rightarrow \infty} = R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) \quad (3.111)$$

Maintenant, trouvons la résistance vue des connexions de la bobine pour une excitation réduite à 0. Comme nous déterminons une impédance, le signal d'excitation est une source de courant. La réduire à 0 revient à la retirer du circuit pour le calcul de la constante de temps. Le schéma devient celui de la Figure 3.39 que nous avons redessiné sous une forme plus pratique. Le résultat est celui donné au chapitre 1, solution dans laquelle R_4 et R_5 sont en série et mises en parallèle avec R_3 . Ce réseau se trouve connecté en série avec R_2 et r_L pour former une résistance totale R_d égale à

$$R_d = r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3 \quad (3.112)$$

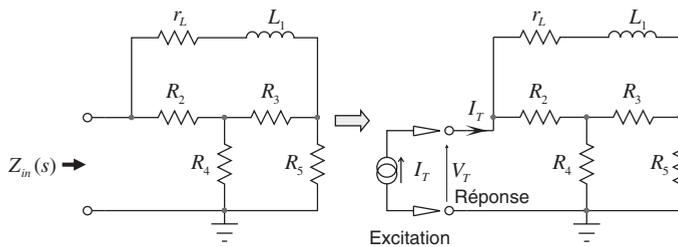


Figure 3.36 Pour déterminer l'impédance d'entrée de ce circuit du premier ordre, une source de courant I_T est appliquée et la tension V_T aux bornes de ses connexions est évaluée.

3.2 Le théorème de l'extra-élément

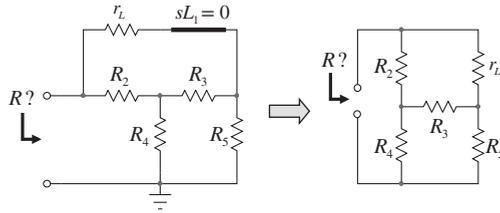


Figure 3.37 Si L_1 est réduite à 0, alors la résistance d'entrée du pont est compliquée à calculer et demande l'application de l'EET avec R_3 désignée comme extra élément.

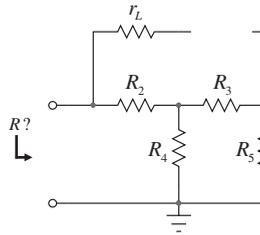


Figure 3.38 Remplacer L_1 par un circuit ouvert (inductance approchant l'infini) simplifie grandement le circuit et permet de déterminer la résistance d'entrée $R?$ très simplement par inspection.

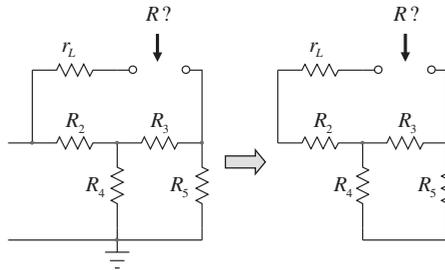


Figure 3.39 Réduire l'excitation en courant à 0 revient à la suppression de la source de courant.

Pour déterminer R_n , nous devons trouver la résistance vue des connexions de la bobine lorsque la réponse est nullifiée. Si vous vous souvenez de ce qui fût expliqué au chapitre 2, la nullification de la tension aux bornes d'un générateur de courant est un cas dégénéré et il est possible de remplacer le symbole

du générateur de courant par un fil. C'est que nous avons fait en Figure 3.40. Après une simple réorganisation des symboles, la valeur de la résistance $R?$ est évidente :

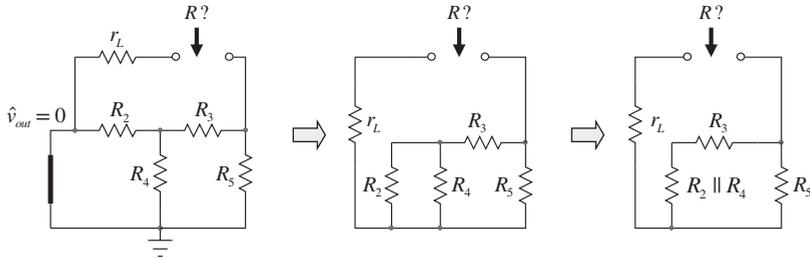


Figure 3.40 La nullification de la tension aux bornes d'une source de courant revient à court-circuiter le générateur : c'est un cas dégénéré.

$$R_n = r_L + R_5 \parallel \left[(R_2 \parallel R_4) + R_3 \right] \quad (3.113)$$

La fonction de transfert finale est obtenue en suivant (3.52)

$$Z_{in}(s) = R_2 + R_4 \parallel (R_3 + R_5) \frac{1 + \frac{r_L + R_5 \parallel \left[(R_2 \parallel R_4) + R_3 \right]}{sL_1}}{1 + \frac{r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3}{sL_1}} \quad (3.114)$$

Une application numérique est donnée en Figure 3.41 et montre deux asymptotes en continu et en haute fréquence. Nous avons sélectionné la forme du EET dans laquelle l'asymptote haute fréquence est représentée par le terme de tête. Si l'autre forme avait été retenue, alors le terme de tête eût été le gain en continu. Afin de vérifier nos calculs, nous avons construit un circuit SPICE dans lequel tous les termes individuels ont été calculés. Les résultats apparaissent en Figure 3.42 et correspondent à ceux retournés par Mathcad®.

3.2.7 Les pôles et zéros en notation inversée

Dans l'équation (3.67), nous pouvons identifier un zéro et un pôle affectant la réponse en fréquence d'une expression dont le gain statique est H_0 . Lorsque s est égal à 0, la valeur du gain est bien connue, par exemple, ce peut être A_{OL} , le gain en boucle ouverte de l'amplificateur opérationnel utilisé dans le circuit. Maintenant, supposons une fonction de transfert qui possède un zéro à l'origine et une

3.2 Le théorème de l'extra-élément

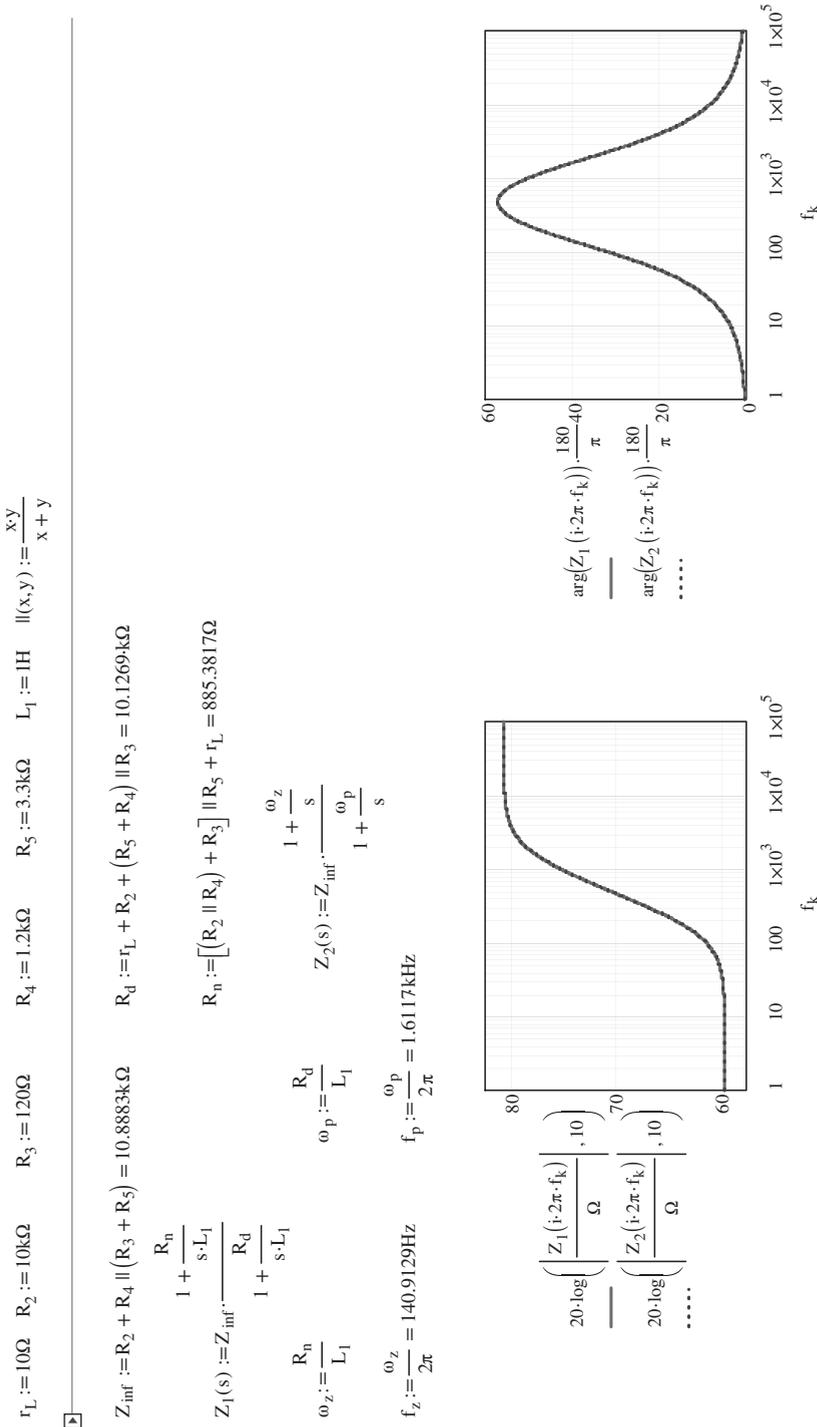


Figure 3.41 La formule finale est capturée dans Mathcad® afin de vérifier numériquement les résultats.

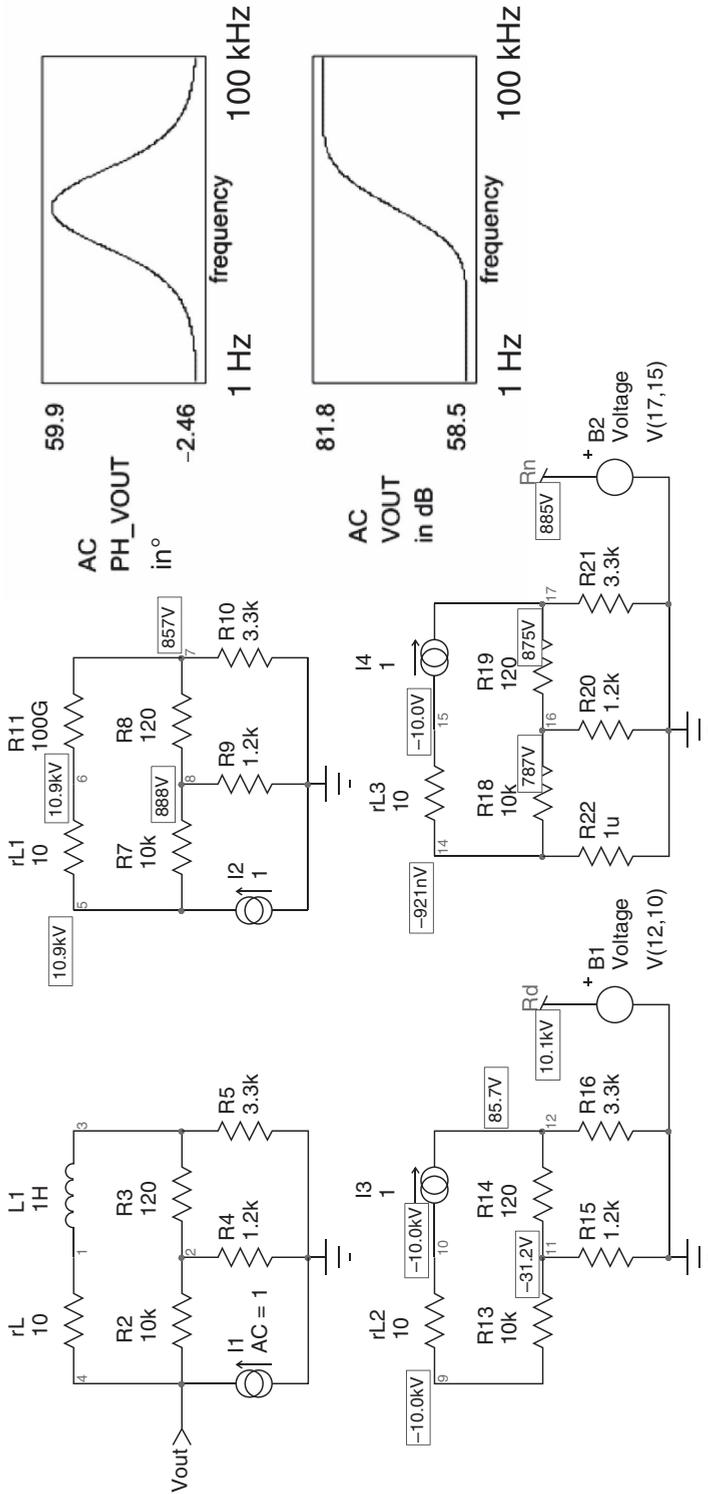


Figure 3.42 Le circuit de test SPICE donne des résultats similaires à ceux de Mathcad® tant en statique qu'en réponse dynamique.

3.2 Le théorème de l'extra-élément

asymptote haute fréquence H_∞ qui se manifeste après que le pôle ait fait effet. Une telle fonction de transfert pourrait s'écrire de la façon suivante :

$$H(s) = H_\infty \frac{\frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \quad (3.115)$$

et sa réponse pourrait être celle de la Figure 3.35. Cependant, il est possible d'écrire cette expression sous un format différent en factorisant s/ω_1 au numérateur et au dénominateur. La nouvelle expression s'écrit alors :

$$H(s) = H_\infty \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\frac{s}{\omega_1} + 1} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_1}{s}} \quad (3.116)$$

Ici, lorsque s approche l'infini, on peut immédiatement voir que le module de H atteint l'asymptote H_∞ . L'expression $1 + \omega_1/s$ au dénominateur est appelée un *pôle inversé*. Cette notation permet de réécrire (3.115) sous une forme plus compacte et lisible, conformément au concept de *faible entropie*.

Parfois, il est nécessaire de factoriser des termes dans l'expression brute afin d'obtenir un format simple proche de celui de (3.116) et gagner en lisibilité. Ce qui est intéressant avec l'EET, c'est qu'il mène directement à un résultat tel celui énoncé par (3.116). L'exemple 5 a montré comment mais appliquons une fois de plus la méthode au circuit de la Figure 3.43 et examinons la fonction obtenue.

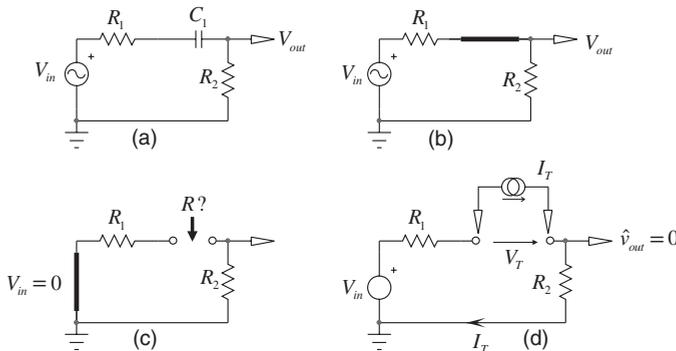


Figure 3.43 Dans cette expression, il existe un zéro à l'origine imposé par la présence de C_1 qui bloque toute composante continue.

Dans le dessin (a), nous observons un condensateur en série avec le signal d'excitation. Considérons-le comme notre extra élément. Parmi les formes de l'EET, (3.52) et (3.55), nous choisissons une définition qui nous donne une valeur pour l'asymptote basse ou haute fréquence. Ici, si l'on décidait de retirer C_1 , c'est-à-dire en utilisant (3.52), il n'y aurait pas de gain statique à factoriser ($H_0 = 0$ en l'absence de C_1). Utilisons plutôt (3.55) et calculons le gain pour l'impédance Z égale à zéro comme dessiné en Figure 3.43b :

$$H_\infty|_{Z \rightarrow 0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.117)$$

La résistance R_d pilotant le condensateur lorsque l'excitation est réduite à 0 est évidente en regardant la Figure 3.43c :

$$R_d = R_1 + R_2 \quad (3.118)$$

La résistance R_n attaquant le condensateur pour une sortie nullifiée est immédiate (Figure 3.43d). Si la sortie est nulle, alors le courant dans R_2 l'est également. Comme ce courant est celui du générateur de test I_T , il ne peut être nul que si la résistance offerte par les connexions du condensateur dans ce mode d'observation est également infinie, d'où :

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} \Big|_{I_T=0} \rightarrow \infty \quad (3.119)$$

D'après (3.55), la fonction de transfert est définie par

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + \frac{1/sC_1}{\infty}}{1 + \frac{1/sC_1}{R_1 + R_2}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{1}{sC_1(R_1 + R_2)}} = H_\infty \frac{1}{1 + \frac{\omega_p}{s}} \quad (3.120)$$

dans laquelle

$$\omega_p = \frac{1}{C_1(R_1 + R_2)} \quad (3.121)$$

(3.120) est définie sous une forme à *faible entropie* en utilisant un *pôle inversé* au dénominateur.

Voyons maintenant à quoi ressemble un *zéro inversé*. Supposons que l'on veuille déterminer la fonction de transfert du filtre représenté en Figure 3.44a. Nous pouvons remplacer l'op amp par une source de tension contrôlée en tension (*voltage-controlled voltage source*, primitive E sous SPICE) qui va amplifier la tension d'erreur entre les broches d'entrée par un gain de boucle ouverte noté A_{OL} .

3.2 Le théorème de l'extra-élément

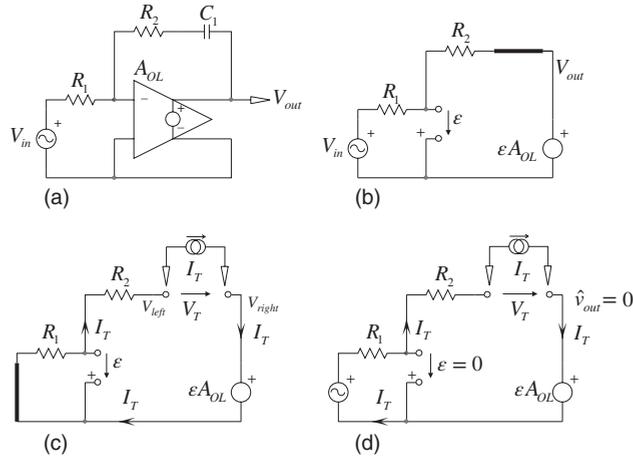


Figure 3.44 L'EET peut être appliqué à des circuits utilisant des amplificateurs opérationnels sans difficulté.

Dans cette représentation, on désigne C_1 comme étant l'extra élément que l'on va remplacer par un court-circuit comme recommandé par (3.55). La Figure 3.44b décrit cette configuration et le gain de cette configuration est obtenu après quelques lignes d'algèbre impliquant le théorème de superposition :

$$\varepsilon|_{V_{in}=0} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.122)$$

$$\varepsilon|_{V_{out}=0} = -V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.123)$$

La tension d'erreur totale est la somme de (3.122) et (3.123)

$$\varepsilon = \varepsilon|_{V_{in}=0} + \varepsilon|_{V_{out}=0} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.124)$$

La tension d'erreur ε est égale à la tension V_{out} divisée par le gain en boucle ouverte de l'op amp, A_{OL} :

$$\frac{V_{out}}{A_{OL}} = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{in} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.125)$$

Après factorisation, il vient :

$$\left. \frac{V_{out}}{V_{in}} \right|_{Z \rightarrow 0} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \quad (3.126)$$

La constante de temps est obtenue en formant le circuit de la Figure 3.44c dans lequel l'excitation est réduite à 0 V. La tension sur la broche inverseuse est facile à trouver et est définie par :

$$V_{(-)} = -I_T R_1 \quad (3.127)$$

La broche gauche du générateur de courant est polarisée à la tension négative développée aux bornes de R_1 et de R_2 :

$$V_{left} = -I_T R_1 - I_T R_2 = -I_T (R_1 + R_2) \quad (3.128)$$

La tension sur la broche de droite est :

$$V_{right} = \varepsilon A_{OL} = (V_{(+)} - V_{(-)}) A_{OL} = I_T R_1 A_{OL} \quad (3.129)$$

Ainsi

$$V_T = V_{right} - V_{left} = I_T R_1 A_{OL} + I_T (R_1 + R_2) \quad (3.130)$$

La résistance vue des connexions du condensateur lorsque l'excitation est réduite à 0 est donc définie par :

$$\frac{V_T}{I_T} = R_d = R_1 (A_{OL} + 1) + R_2 \quad (3.131)$$

Le zéro est obtenu par une double injection nulle comme dessiné en Figure 3.44d. Comme la sortie est nullifiée, cela implique que la tension d'erreur ε est également égale à zéro : la connexion gauche de R_2 est mise à la masse et le générateur de courant ne voit que cette résistance. Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{V_T}{I_T} = R_n = R_2 \quad (3.132)$$

Nous y sommes, il est maintenant possible d'assembler toutes les pièces à notre disposition comme le recommande (3.55). La fonction de transfert finale est faite de (3.126), (3.131) et (3.132):

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \frac{1 + \frac{1/sC_1}{R_2}}{1 + \frac{1/sC_1}{R_1 (A_{OL} + 1) + R_2}} = - \frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{A_{OL}}} \frac{1 + \frac{1}{sR_2 C_1}}{1 + \frac{1}{sC_1 [R_1 (A_{OL} + 1) + R_2]}} \quad (3.133)$$

Dans cette expression, si le gain A_{OL} de l'op amp approche l'infini, le dénominateur se simplifie à 1 et (3.133) devient :

$$H(s) = H_{\infty} \left(1 + \frac{\omega_z}{s} \right) \quad (3.134)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Expression dans laquelle H_∞ est défini par :

$$H|_\infty = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.135)$$

et le zéro par :

$$\omega_z = \frac{1}{R_2 C_1} \quad (3.136)$$

L'expression de (3.134) utilise une notation de *zéro inversé*.

La Figure 3.45 montre des réponses bâties autour d'une notation classique de pôle et zéro à côté de leur version impliquant des notations inversées. La réponse dynamique du zéro classique en module et phase est celle du pôle mais inversée par rapport aux axes verticaux de la réponse du pôle. Un pôle inversé (ou un zéro inversé) peut être vu comme la réponse dynamique en phase et module d'un pôle classique (ou d'un zéro classique) mais inversée par rapport à l'axe logarithmique horizontal. Cette notation particulière offre un moyen simple de faire ressortir une asymptote haute fréquence (H_∞) sous une forme à *faible entropie*.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

L'EET peut être appliqué de différentes façons, selon que l'extra-élément est considéré comme un court-circuit ou un circuit ouvert. Les deux formules (3.52) et (3.55) expriment ainsi des résultats identiques pour la fonction H mais présentés différemment :

$$H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \quad (3.137)$$

On peut manipuler cette expression de la façon suivante :

$$\frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = \frac{H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}}}{H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z}{Z_n}}{1 + \frac{Z}{Z_d}}} \quad (3.138)$$

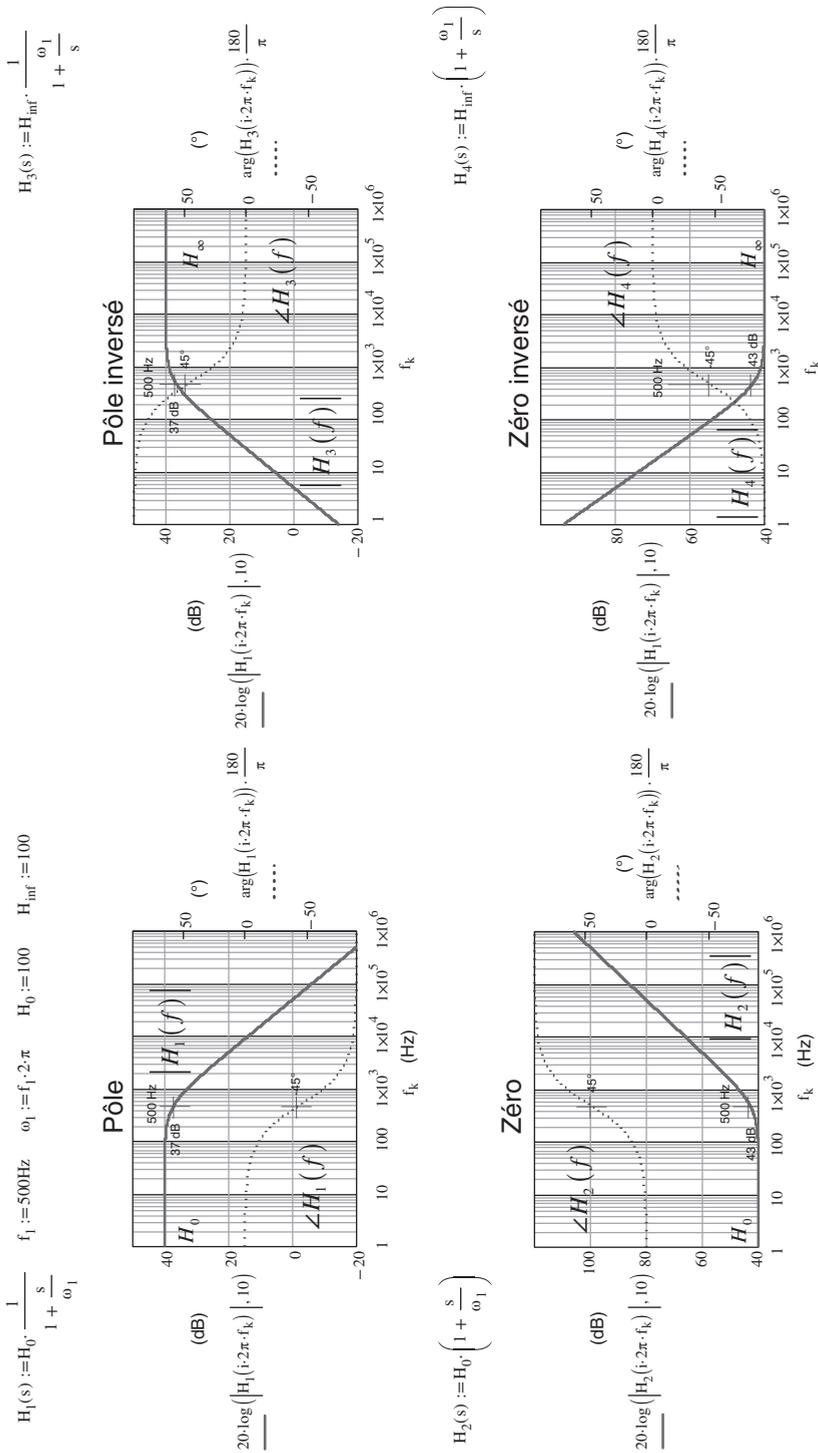


Figure 3.45 Les réponses dynamiques de pôle et zéro classiques et leurs équivalents inversés.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

En isolant les rapports de gain à droite, il vient :

$$\frac{\left(1 + \frac{Z_n}{Z}\right) \left(1 + \frac{Z}{Z_d}\right)}{\left(1 + \frac{Z_d}{Z}\right) \left(1 + \frac{Z}{Z_n}\right)} = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} \quad (3.139)$$

Si vous développez et simplifiez le terme de gauche, vous obtenez :

$$\frac{Z_n}{Z_d} = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} \quad (3.140)$$

Autrement dit

$$Z_n = \frac{H|_{Z=0}}{H|_{Z=\infty}} Z_d \quad (3.141)$$

ou encore

$$Z_d = \frac{H|_{Z=\infty}}{H|_{Z=0}} Z_n \quad (3.142)$$

Dans ces deux expressions :

$Z = 0$ implique que l'impédance de l'extra-élément est un court-circuit : C et L sont remplacés par un fil.

$Z = \infty$ désigne un circuit ouvert et dans ce cas, C et L sont retirés du circuit.

En utilisant ces définitions, on peut réécrire les équations fondamentales de l'EET en remplaçant Z_n par (3.141). Si l'on substitue (3.41) dans (3.55), il vient :

$$\begin{aligned} H|_Z &= H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z}{H|_{Z=0}} \frac{H|_{Z=0}}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} = \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=0} \frac{Z}{H|_{Z=0}} \frac{H|_{Z=0}}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \\ &= \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=\infty} \frac{Z}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} = H|_{Z=0} \frac{1 + \frac{H|_{Z=\infty}}{H|_{Z=0}} \frac{Z}{Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} \end{aligned} \quad (3.143)$$

De façon similaire, si l'on remplace (3.141) dans (3.52), on obtient

$$\begin{aligned}
 H|_Z &= H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{H|_{Z=0} Z_d}{H|_{Z=\infty} Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=0} \frac{H|_{Z=0} Z_d}{H|_{Z=\infty} Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \\
 &= \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=0} \frac{Z_d}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} = H|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{H|_{Z=0} Z_d}{H|_{Z=\infty} Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}}
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

Les expressions (3.143) et (3.144) sont équivalentes. Maintenant, dans (3.143), supposons que l'impédance Z désigne une inductance L . On peut alors mettre à jour l'équation :

$$H(s) = \frac{H|_{Z=0} + H|_{Z=\infty} \frac{sL}{Z_d}}{1 + \frac{sL}{Z_d}} \tag{3.145}$$

Si l'on considère que le premier terme est un gain en continu, ($Z = 0$ implique que L est court-circuitée) alors que le second terme représente un gain haute fréquence (L est remplacée par un circuit ouvert), nous pouvons utiliser la notation vue au chapitre 2 pour la fonction de transfert généralisée :

$$H_0 = H|_{Z=0} \tag{3.146}$$

$$H^1 = H|_{Z \rightarrow \infty} \tag{3.147}$$

En suivant ces étapes, (3.145) peut réécrite :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \frac{L}{Z_d}}{1 + s \frac{L}{Z_d}} \tag{3.148}$$

Le terme L/Z_d est la constante de temps τ_1 du circuit inductif qui apparaît au numérateur et au dénominateur. Finalement, nous avons :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \tag{3.149}$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Si Z est à présent un condensateur C , (3.144) devient

$$H(s) = \frac{H|_{Z=\infty} + H|_{Z=0} \frac{Z_d}{1/sC}}{1 + \frac{Z_d}{1/sC}} \quad (3.150)$$

Si l'on considère que le premier terme est un gain continu ($Z = \infty$ indique que le condensateur est retiré du circuit) et que le second un gain haute fréquence, (C est remplacé par un fil), la notation suivante est adoptée :

$$H_0 = H|_{Z=\infty} \quad (3.151)$$

$$H^1 = H|_{Z \rightarrow 0} \quad (3.152)$$

En suivant ces expressions, (3.150) peut être réécrite comme :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s Z_d C}{1 + s Z_d C} \quad (3.153)$$

$Z_d C$ est la constante de temps τ_1 du circuit capacitif qui apparaît au dénominateur et au numérateur. (3.153) peut alors être présentée sous la forme :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad (3.154)$$

(3.154) et (3.149) sont identiques et fonctionnent pour tous les circuits du premier ordre qu'ils soient capacitifs ou inductifs. C'est l'expression généralisée déjà vue au chapitre 2 mais obtenue par un cheminement différent de celui exposé dans [5]. Le terme H_0 peut prendre différentes valeurs : il peut être 0 si un zéro se trouve à l'origine. Il peut bien sûr être un gain ou une atténuation déterminés pour $s = 0$. Mais il peut aussi être une valeur infinie dans le cadre d'un circuit possédant un pôle à l'origine. Cependant, en pratique, ce gain infini serait limité par la constitution de l'op amp (ou d'un autre type d'amplificateur) et de son gain de boucle ouverte A_{OL} comme nous l'avons vu dans l'exemple 5.

3.3.1 Fonction de transfert généralisée – Exemple 1

Dans la Figure 3.37, remplacer L_1 par un fil transforme le circuit en un pont résistif dont la résistance d'entrée doit être déterminée. Nous pourrions appliquer l'EET mais un exercice de double injection nulle (NDI) serait nécessaire. Appliquons la fonction de transfert généralisée définie par (3.143) qui s'applique parfaitement à un pont résistif qui ne possède pas d'élément de stockage. Nous

commençons par réduire R_3 à 0Ω . Le nouveau circuit apparaît en Figure 3.46 et conduit immédiatement à la valeur de la résistance obtenue par inspection :

$$R|_{Z=0} = r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4 \quad (3.155)$$

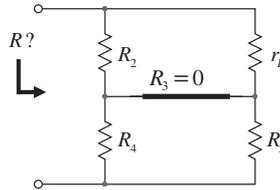


Figure 3.46 En réduisant R_3 à 0Ω , on découvre une simple configuration série-parallèle.

Le deuxième élément que nous devons identifier est la résistance offerte par le circuit lorsque R_3 est physiquement retirée (R_3 est remplacée par une résistance infinie). Le nouveau réseau apparaît en Figure 3.47.

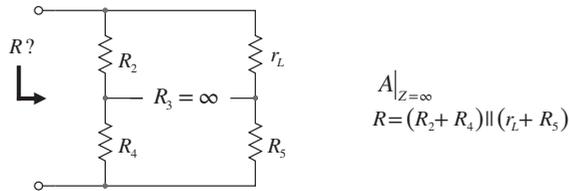


Figure 3.47 La suppression temporaire de R_3 donne naissance à une autre configuration série-parallèle.

Une fois de plus, pas de difficulté : la résistance est déterminée par inspection du schéma. La résistance est égale à :

$$R|_{Z=\infty} = (R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5) \quad (3.156)$$

L'étape finale est obtenue en déterminant la résistance offerte par les connexions de R_3 lorsque l'excitation est réduite à 0. Pour une source de courant, la réduction à $0 A$ revient à retirer la source du circuit électrique. C'est ce que montre la Figure 3.48.

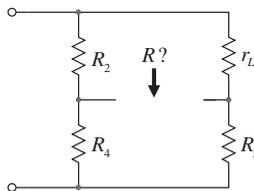


Figure 3.48 « Regarder » dans les connexions de R_3 est un exercice simple dans ce cas.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

La résistance vue des connexions de R_3 est :

$$Z_d = (r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4) \quad (3.157)$$

Nous avons tous les éléments nécessaires pour former l'expression qui décrit la résistance d'entrée de la Figure 3.37. A partir de (3.143), nous avons :

$$R_{in} = R \Big|_{Z=0} \frac{1 + \frac{R \Big|_{Z=\infty} Z}{R \Big|_{Z=0} Z_d}}{1 + \frac{Z}{Z_d}} = (r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4) \frac{1 + \frac{(R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5)}{r_L \parallel R_2 + R_5 \parallel R_4} \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4)}}{1 + \frac{R_3}{(r_L + R_2) \parallel (R_5 + R_4)}} \quad (3.158)$$

La référence [4] offre une formule différente, obtenue avec l'EET et une configuration NDI :

$$R_{in} = (R_2 + R_4) \parallel (r_L + R_5) \frac{1 + \frac{R_2 \parallel R_4 + r_L \parallel R_5}{R_3}}{1 + \frac{(R_2 + r_L) \parallel (R_4 + R_5)}{R_3}} \quad (3.159)$$

Les deux expressions sont identiques. La remarque formulée au chapitre 2, comparant ce que la fonction généralisée délivrait avec ce que produit l'EET fait sens dans cet exemple : la forme généralisée ne réclame pas de double injection nulle et s'obtient après trois étapes simples. Le résultat est ordonné mais les coefficients du numérateur sont compliqués. De l'autre côté, l'EET demande une double injection nulle (*null double injection*, NDI) – c'est simple ici car la nullification de la tension aux bornes de l'excitation en courant entraîne le remplacement de la source par un fil – mais il conduit rapidement à un résultat plus simple.

Maintenant que nous possédons notre expression de résistance en continu – lorsque L_1 est remplacée par un fil – on peut réutiliser (3.112) et (3.113) ensemble avec la seconde forme du EET donnée par (3.55). On obtient une nouvelle définition pour l'impédance d'entrée de la Figure 3.36 :

$$Z_{in}(s) = R_{in} \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_5 \parallel [(R_2 \parallel R_4) + R_3]}}{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_2 + (R_5 + R_4) \parallel R_3}} \quad (3.160)$$

Expressions (3.114) et (3.160) sont identiques mais écrites différemment. La feuille Mathcad® de Figure 3.49 compare les résultats et trace les réponses dynamiques.

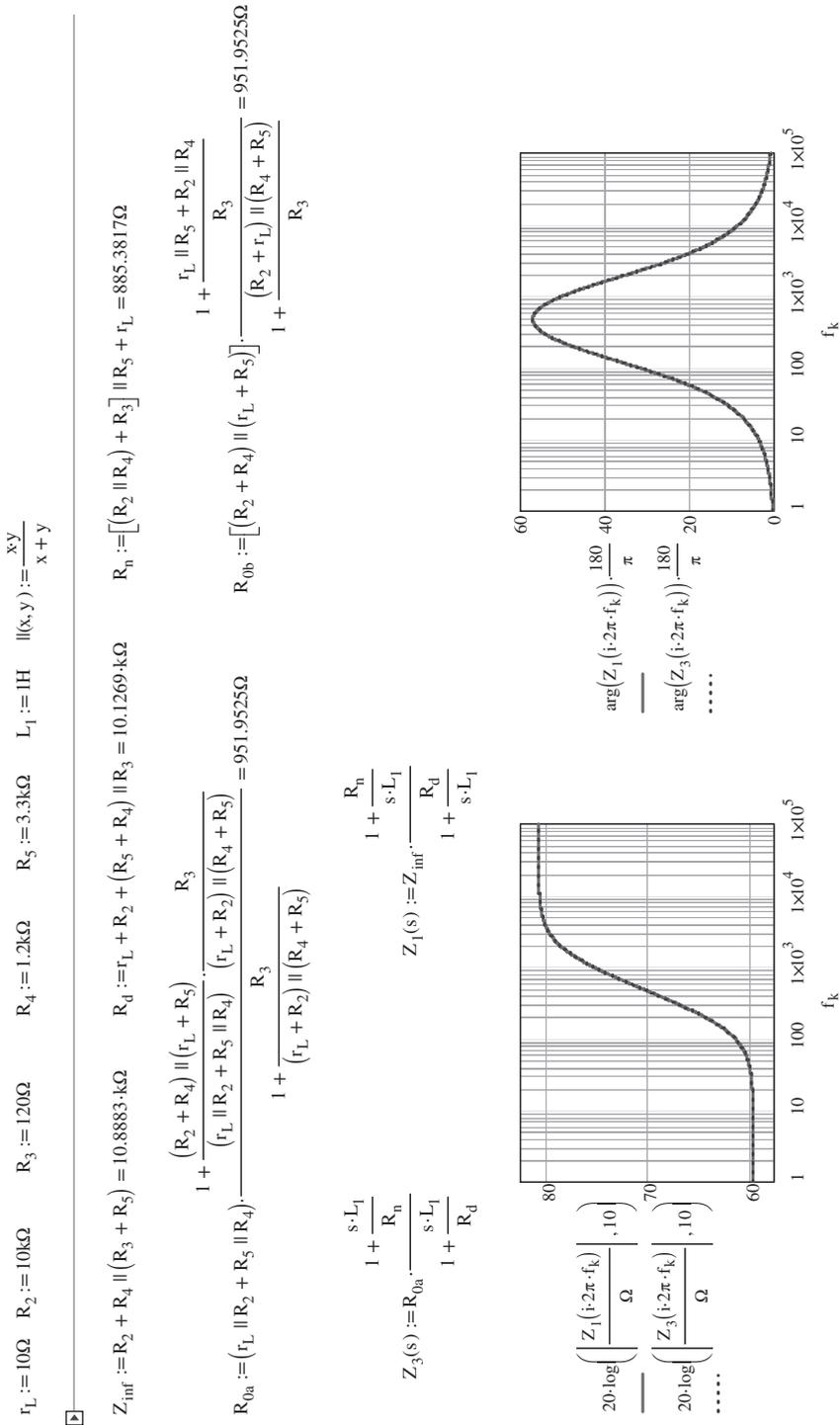


Figure 3.49 Utiliser l'EET ou la fonction de transfert généralisée mène à des résultats rigoureusement identiques.

3.3.2 Fonction de transfert généralisée – Exemple 2

La Figure 3.50 représente un transistor bipolaire dont le collecteur délivre une tension V_{out} . Le circuit surveille le nœud V_{in} et réduit V_{out} dès que la diode Zener commence à conduire et polarise Q_1 . C'est une structure classique trouvée dans les alimentations à découpage régulées au primaire. V_{out} est relié à la broche de contrôle du circuit intégré sélectionné et permet d'ajuster la puissance transmise en fonction de la demande. V_{in} est la tension auxiliaire redressée V_{cc} côté primaire. Entamons l'analyse avec le schéma équivalent petit-signal de la Figure 3.51.

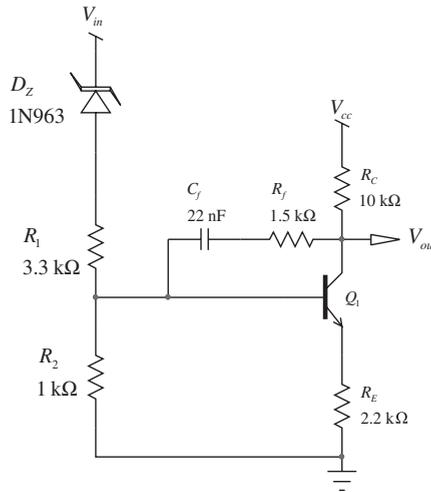


Figure 3.50 Ce simple amplificateur bipolaire est souvent utilisé dans des alimentations à régulation primaire.

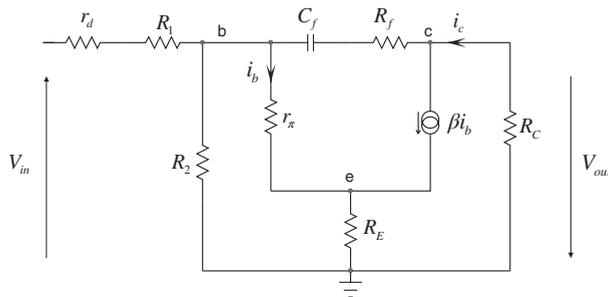


Figure 3.51 Le modèle petit-signal de la Figure 3.50 est très similaire à ce que nous avons déjà étudié dans les exemples précédents.

Pour cet exemple, nous allons généraliser la définition de l'EET pour un condensateur C (ou une bobine L). Comme un seul élément de stockage d'énergie est présent dans le circuit, le schéma décrit un réseau du premier ordre. En Figure 3.51,

si nous court-circuitons C_f est-ce que la réponse existe en V_{out} si V_{in} est présent ? Oui, le circuit se réduit à quelque chose déjà vu en Figure 3.29a : il y a un zéro associé à C_f . Une fonction de transfert du premier ordre qui possède un pôle, un zéro et une asymptote basse fréquence peut être écrite sous la forme suivante :

$$H(s) = H_0 \frac{1+s\tau_1}{1+s\tau_2} \quad (3.161)$$

C'est en fait l'expression (3.52) dans laquelle Z_n et Z_d sont les résistances R_n et R_d . R_n est déterminée avec une NDI alors que R_d est obtenue avec une excitation réduite à zéro. Z est simplement l'impédance du condensateur $1/sC$ (cela pourrait être sL avec une bobine à la place du condensateur). Dans cette définition, τ_1 est la constante de temps associant C_f avec la résistance R_n alors que τ_2 représente la constante de temps formée avec R_d et déterminée pour une excitation réduite à 0. Commençons avec le gain continu H_0 et un circuit modifié représenté en Figure 3.52. La tension de sortie est définie classiquement par :

$$V_{out} = -\beta i_b R_C \quad (3.162)$$

Le courant de base traverse la source d'entrée. Il est défini par :

$$i_b = \frac{V_{in} \frac{R_2}{r_d + R_1 + R_2} - V_b}{(r_d + R_1) \parallel R_2} \quad (3.163)$$

La tension de base est égale à la chute aux bornes de r_π plus la tension d'émetteur $V_{(e)}$

$$V_b = r_\pi i_b + v_{(e)} = i_b (r_\pi + (\beta + 1) R_E) \quad (3.164)$$

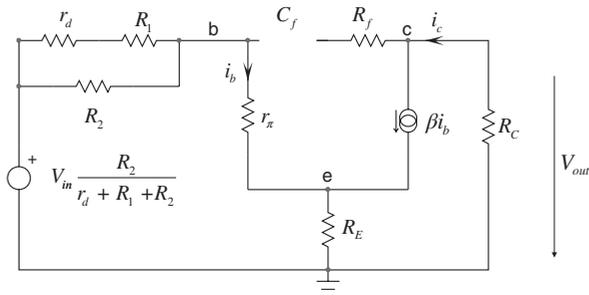


Figure 3.52 En courant continu, le condensateur C_f disparaît.

Si l'on substitue (3.164) dans (3.163) et que l'on extrait i_b :

$$i_b = \frac{V_{in}}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E (\beta + 1)] (R_1 + R_2 + r_d)}{R_2 (R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.165)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Dans (3.162), nous remplaçons i_b par sa définition de (3.165) et nous obtenons la fonction de transfert en continu recherchée :

$$H_0 = - \frac{\beta R_C}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E (\beta + 1)] (R_1 + R_2 + r_d)}{R_2 (R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.166)$$

Pour obtenir R_n , redessignons le schéma pour une double injection nulle (NDI). Il apparaît en Figure 3.53. Heureusement, nous avons déjà calculé cette résistance avec le schéma de la Figure 3.29d. Dans ce circuit, vous voyez que V_T , la tension de test, est directement appliquée sur la base. Cette tension n'implique pas la maille V_{in} et, quelles que soient les résistances r_d , R_1 et R_2 , l'analyse NDI pour la Figure 3.53 retourne une expression similaire à celle donnée par (3.92) exceptée la résistance R_f qui se trouve en série :

$$R_n = \frac{V_T}{I_T} = - \left[\frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] + R_f \quad (3.167)$$

Veillez noter que R_n est négative sans R_f mais peut devenir positive si R_f est supérieure à :

$$R_f > \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \quad (3.168)$$

La constante τ_1 du numérateur est définie par :

$$\tau_1 = C_f \left[R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right] \quad (3.169)$$

La constante de temps naturelle du circuit est déterminée pour une excitation réduite à 0. Il s'agit du schéma de la Figure 3.54.

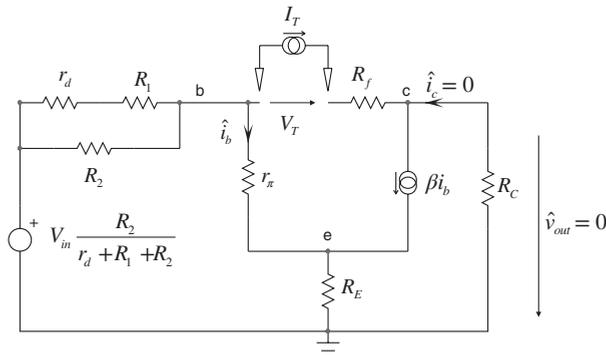


Figure 3.53 L'analyse NDI demande que la réponse soit nullifiée.

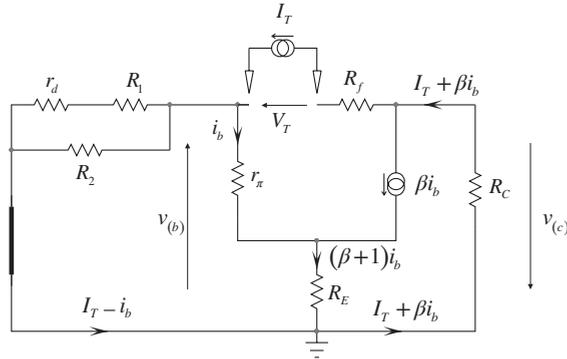


Figure 3.54 La constante de temps naturelle est déterminée en réduisant l'excitation à 0.

Nous allons procéder à l'analyse sans R_f et nous ajouterons cette dernière en fin de calcul. C'est une astuce typique des techniques de calculs rapides et qui s'applique également aux éléments en parallèle. Ici, en dépit de l'absence de tension d'entrée, un courant circule aux bornes du réseau d'entrée constitué de r_d , R_1 et R_2 . Ce courant produit une chute de tension $v_{(b)}$. Cette tension est égale à :

$$v_{(b)} = R_{eq} (I_T - i_b) \quad (3.170)$$

Dans laquelle

$$R_{eq} = (R_1 + r_d) \parallel R_2 \quad (3.171)$$

Cette tension se scinde entre r_π et R_E . Ainsi :

$$v_{(b)} = i_b r_\pi + (\beta + 1) i_b R_E = i_b [r_\pi + (\beta + 1) R_E] \quad (3.172)$$

Si l'on considère égales (3.170) et (3.172), en extrayant i_b et en factorisant, on obtient :

$$i_b = k I_T \quad (3.173)$$

k est défini par :

$$k = \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1) R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \quad (3.174)$$

La tension au nœud c est le courant traversant R_C multiplié par R_C :

$$v_{(c)} = -R_C (I_T + \beta i_b) \quad (3.175)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

La résistance que nous voulons est ainsi définie par :

$$R = \frac{V_T}{I_T} = \frac{v_{(b)} - v_{(c)}}{I_T} = \frac{R_{eq}(I_T - k \cdot I_T) + R_C(I_T + k \cdot I_T \beta)}{I_T} \quad (3.176)$$

$$= R_{eq}(1 - k) + R_C(1 + k\beta)$$

La valeur finale est alors :

$$R_d = R + R_f \quad (3.177)$$

Si l'on remplace à présent R_{eq} et k par leur valeur respective, la seconde constante de temps τ_2 est définie par :

$$\tau_2 = C_f \left[\left[(R_1 + r_d) \parallel R_2 \right] \left[1 - \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \right] \right. \\ \left. + R_C \left[1 + \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \beta \right] + R_f \right] \quad (3.178)$$

Enfin, la fonction de transfert recherchée est obtenue en assemblant (3.166), (3.169) et (3.178) :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.179)$$

Le gain continu est :

$$H_0 = - \frac{\beta R_C}{(R_1 + r_d) \left(\frac{[r_\pi + R_E(\beta + 1)](R_1 + R_2 + r_d)}{R_2(R_1 + r_d)} + 1 \right)} \quad (3.180)$$

Le zéro est défini par :

$$\omega_z = \frac{1}{C_f \left[R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \right]} \quad (3.181)$$

$$R_d := 150\Omega \quad R_C := 10k\Omega \quad R_E := 1200\Omega \quad r_\pi := 1k\Omega \quad R_f := 2.2k\Omega \quad C_f := 22nF$$

$$ll(x, y) := \frac{xy}{x + y} \quad \beta := 150 \quad R_1 := 470\Omega \quad R_2 := 1k\Omega$$



$$H_0 := \frac{\beta \cdot R_C}{(R_1 + r_d) \left[\frac{[r_\pi + R_E(\beta + 1)] \cdot (R_1 + R_2 + r_d)}{R_2(R_1 + r_d)} + 1 \right]} = -5.07127$$

condition pour RHPZ ou LHPZ

$$R_0 := R_f - \frac{r_\pi}{\beta} - R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 985.33333\Omega \quad \tau_1 := C_f \cdot R_0 = 21.67733\mu s \quad \frac{r_\pi}{\beta} + R_E \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) = 1.21467k\Omega$$

$$R_d := \left[(r_d + R_1) \parallel R_2 \right] \left[1 - \frac{1}{R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta} + R_C \left(1 + \frac{1}{\frac{(r_d + R_1) \parallel R_2}{R_E + r_\pi + R_E \cdot \beta} + 1} \right) \right] + R_f = 15.7261k\Omega$$

$$\tau_2 := C_f \cdot R_d = 345.9742\mu s$$

$$\omega_z := \frac{1}{\tau_1} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 7.342kHz \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_2} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 460.01968Hz \quad H_1(s) := H_0 \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

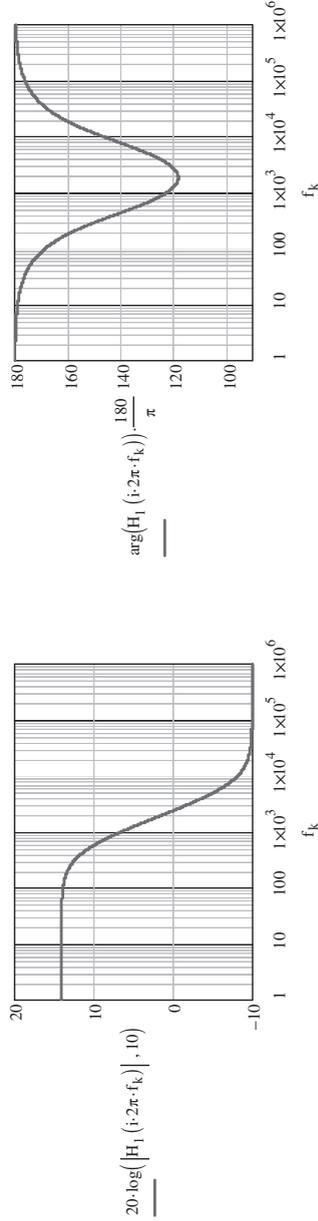


Figure 3.55 La feuille montre une réponse plate en continu, suivie d'un pôle puis d'un zéro à une fréquence supérieure.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

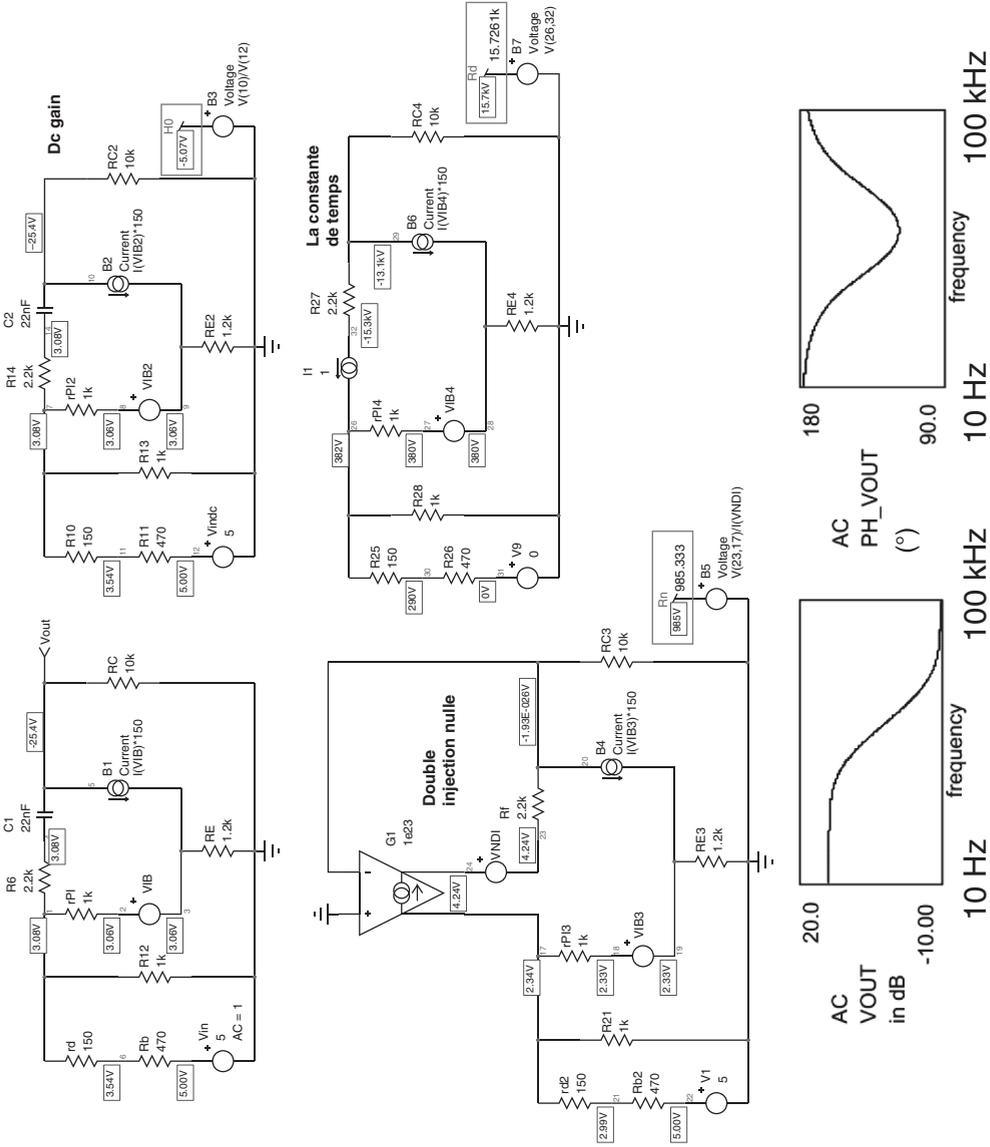


Figure 3.56 confirme les valeurs numériques et les réponses dynamiques.

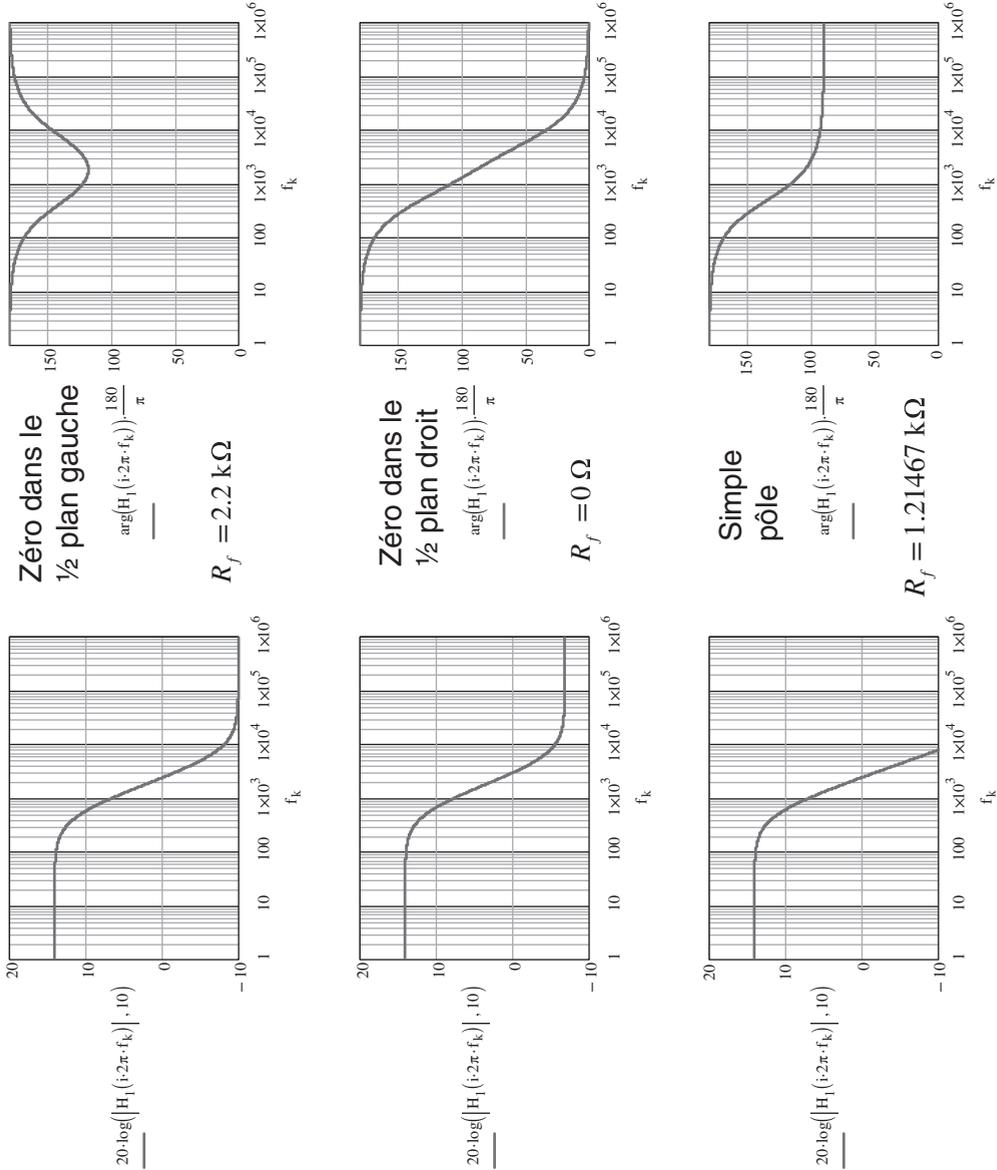


Figure 3.57 Des réponses différentes sont obtenues selon la valeur R_f .

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Et le pôle par :

$$\omega_p = \frac{1}{C_f \left[\left[(R_1 + r_d) \parallel R_2 \right] \left(1 - \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \right) + R_C \left(1 + \frac{1}{\frac{r_\pi + (\beta + 1)R_E}{(R_1 + r_d) \parallel R_2} + 1} \beta \right) + R_f \right]} \quad (3.182)$$

Pour vérifier ces résultats, les équations ont été capturées dans une feuille Mathcad® (Figure 3.55) et les courbes délivrées comparées aux résultats de la simulation SPICE (Figure 3.56). Les courbes sont parfaitement identiques.

L'expression (3.168) nous indique que le signe de R_n peut changer selon la valeur de la résistance série, R_f . Si R_f est remplacée par un fil, alors le zéro dans (3.181) saute dans le demi-plan droit et distord la phase : plutôt que d'observer une phase positive (*lead*) lorsque le zéro se manifeste, la phase sera retardée (*lag*) comme un pôle le ferait. Ensuite, si R_f annule parfaitement le zéro ($R_f = 1.2147 \text{ k}\Omega$), la fonction de transfert ne comprend qu'un unique pôle dont le retard de phase maximum est 90° . Finalement, quand R_f est au dessus de $1.2147 \text{ k}\Omega$, vous obtenez une réponse avec un pôle et un zéro comme représenté en Figure 3.56. La Figure 3.57 résume ces trois possibilités.

3.3.3 Fonction de transfert généralisée – Exemple 3

La Figure 3.58 montre un op amp câblé en inverseur dans lequel un condensateur relie le point milieu des résistances de contre-réaction à la masse. Pour déterminer la fonction de transfert, nous allons utiliser la fonction de transfert généralisée du premier ordre. Tout d'abord, calculons le gain continu en retirant temporairement C_1 du schéma indiqué en Figure 3.59. L'op amp présente un gain de boucle ouverte A_{OL} impliquant ainsi une tension d'erreur ε différente de zéro. Heureusement, nous avons déjà calculé cette fonction de transfert dans le problème 10 du chapitre 2. Le gain est donné par :

$$H_0 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\left(\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1 \right) \frac{1}{A_{OL}} + 1} \quad (3.183)$$

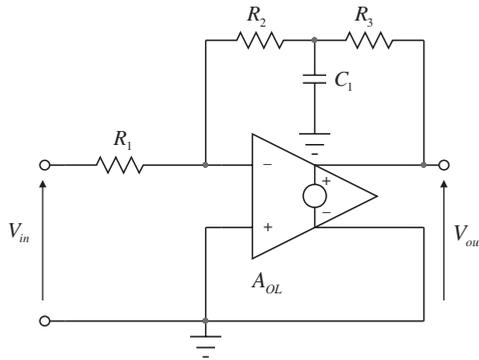


Figure 3.58 L'op amp combine des résistances et un condensateur pour former un filtre actif du premier ordre.

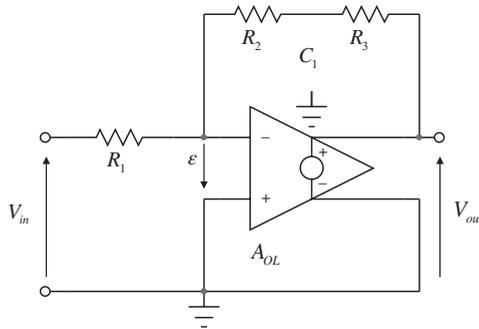


Figure 3.59 Si l'on retire C_1 , on retrouve une configuration classique inverseuse.

Le second gain dont nous avons besoin est établi lorsque C_1 est remplacé par un fil. Le circuit mis à jour est donné en Figure 3.60. R_3 disparaît du dessin car elle charge la sortie de l'op amp sans effet sur sa sortie (op amp parfait avec une impédance de sortie de 0Ω). Nous avons :

$$V_{out} = A_{OL}\varepsilon \quad (3.184)$$

L'op amp n'est plus en boucle fermée et la masse virtuelle est perdue. La tension entre les broches d'entrée est celle imposée par un simple diviseur résistif :

$$\varepsilon = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in} \quad (3.185)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

En substituant (3.185) dans (3.184), nous obtenons le gain recherché :

$$H^1 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{OL} \quad (3.186)$$

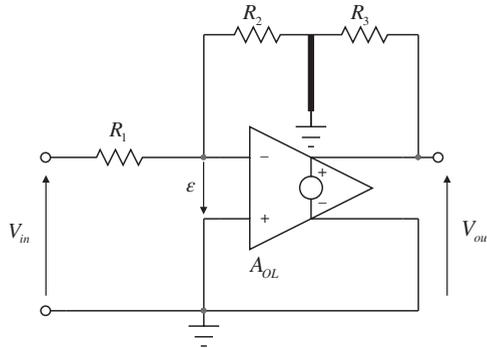


Figure 3.60 Remplacer C_1 par un court-circuit nous permet de calculer le gain haute fréquence H^1 .

Il est maintenant nécessaire de trouver la constante de temps du circuit. Pour ce faire, l'excitation est réduite à 0 V et le circuit devient celui de la Figure 3.61. Ici, il n'est pas possible d'obtenir la résistance par inspection, nous devons passer par un générateur de test I_T et déterminer la tension V_T à ses bornes. C'est ce que la Figure 3.62 illustre. Veuillez noter que j'ai inversé ϵ à dessein afin de simplifier les conventions de courant et aussi inverser ϵA_{OL} .

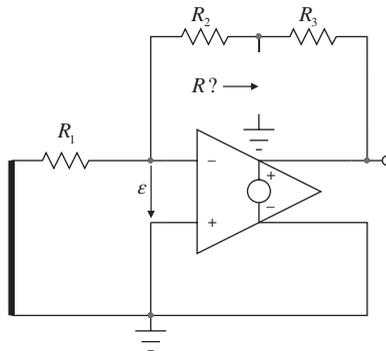


Figure 3.61 La réduction de la tension d'excitation à 0 V permet de déterminer la constante de temps naturelle du circuit.

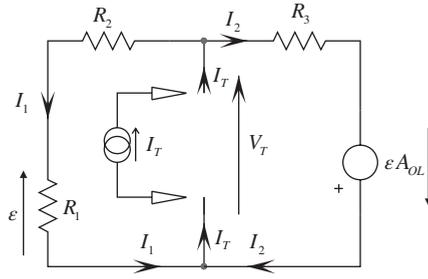


Figure 3.62 Dans ce montage, quelle est la tension V_T aux bornes du générateur I_T .

Commençons par le courant I_1 :

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} \quad (3.187)$$

qui est également égal à :

$$I_1 = \frac{V_T - \varepsilon}{R_2} \quad (3.188)$$

Si les deux équations sont égales et que l'on extrait ε , il vient :

$$\varepsilon = V_T \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (3.189)$$

Le courant de test I_T est la somme de I_1 et I_2 :

$$I_T = I_1 + I_2 = \frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{V_T + \varepsilon A_{OL}}{R_3} \quad (3.190)$$

En substituant (3.189) dans (3.190), il découle une expression pour le courant de test I_T fonction de V_T :

$$I_T = V_T \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_{OL}}{R_3} \right) \quad (3.191)$$

qui mène à la définition de la résistance vue des connexions de C_1 lorsque l'excitation est éteinte :

$$R = \frac{V_T}{I_T} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A_{OL}}{R_3} \right)} \quad (3.192)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

Après factorisation, ma constante de temps du circuit impliquant C_1 est ainsi égale à :

$$\tau_1 = C_1 \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL} R_1} \quad (3.193)$$

Nous avons tous les éléments pour assembler la fonction de transfert finale. Elle est définie par :

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = H_0 \frac{1 + \frac{H^1}{H_0} s \tau_1}{1 + s \tau_1} = H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.194)$$

dans laquelle

$$H_0 = -\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\left(\frac{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1}{A_{OL}} + 1 \right)} \quad (3.195)$$

$$\omega_z = \frac{H_0}{H_1 \tau_1} = \frac{-\frac{R_2 + R_3}{R_1} \frac{1}{\left(\frac{\frac{R_2 + R_3}{R_1} + 1}{A_{OL}} + 1 \right)}}{-\frac{R_2}{R_1 + R_2} A_{OL} C_1 \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL} R_1}} \quad (3.196)$$

Si l'on simplifie l'équation ci-dessus, on obtient un zéro égal à :

$$\omega_z = \frac{1}{C_1 (R_2 \parallel R_3)} \quad (3.197)$$

alors que le pôle est défini par :

$$\omega_p = \frac{1}{C_1 \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL} R_1}} \quad (3.198)$$

Nous avons saisi ces données dans une feuille Mathcad® et les résultats de calcul sont présentés en Figure 3.63. Une fois ces calculs effectués, une simple simulation SPICE nous confirmera si le parcours adopté était le bon ou nous demandera de corriger la copie. Le circuit de simulation est donné en Figure 3.64 et

$R_1 := 12\text{k}\Omega$ $R_3 := 10\text{k}\Omega$ $R_2 := 22\text{k}\Omega$ $C_1 := 22\text{nF}$ $A_{OL} := 100$

$$\| (x,y) := \frac{xy}{x+y}$$



$$H_0 := \frac{R_2 + R_3}{R_1} \cdot \frac{R_2 + R_3}{R_2 + R_3} \cdot \frac{1}{\frac{R_1}{R_2 + R_3} + 1} = -2.57235$$

$$H_1 := \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \cdot A_{OL} = -64.70588$$

$$R_D := \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + A_{OL} \cdot R_1} = 273.3119 \Omega$$

$$H_2(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{H_1}{H_0} \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1}$$

$$\tau_1 := C_1 \cdot R_D$$

$$\omega_z := \frac{H_0}{H_1 \cdot \tau_1} = 6.61157 \times 10^3 \frac{1}{s}$$

$$f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 1.05226 \text{ kHz}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 1.6631 \times 10^5 \frac{1}{s}$$

$$f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 26.46908 \text{ kHz}$$

$$\frac{1}{C_1(R_2 \parallel R_3)} = 6.61157 \times 10^3 \frac{1}{s}$$

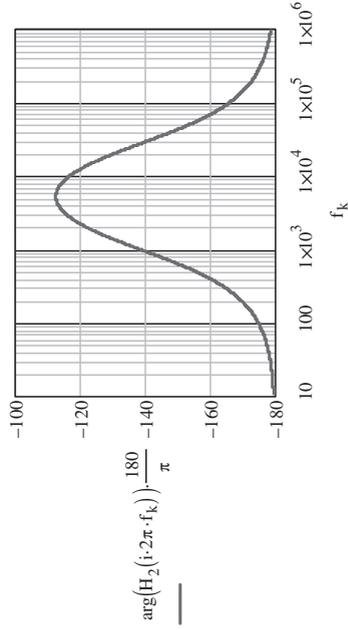
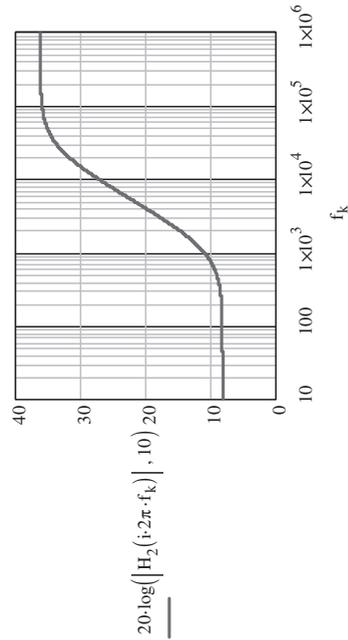


Figure 3.63 Mathcad® présente les résultats sous une forme claire et ordonnée qui peut être comparée à ce que délivre SPICE.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

les points de polarisation continue montre que les résultats sont corrects. Nous avons volontairement maintenu le gain de boucle ouverte de l'op amp bas (100 ou 40 dB) afin d'observer son impact sur les calculs.

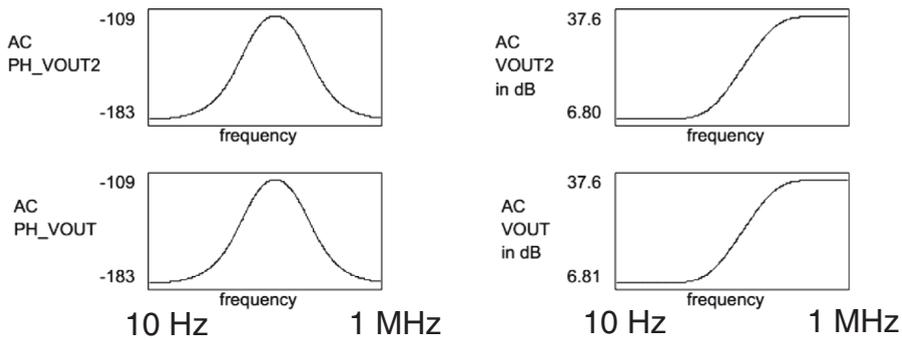
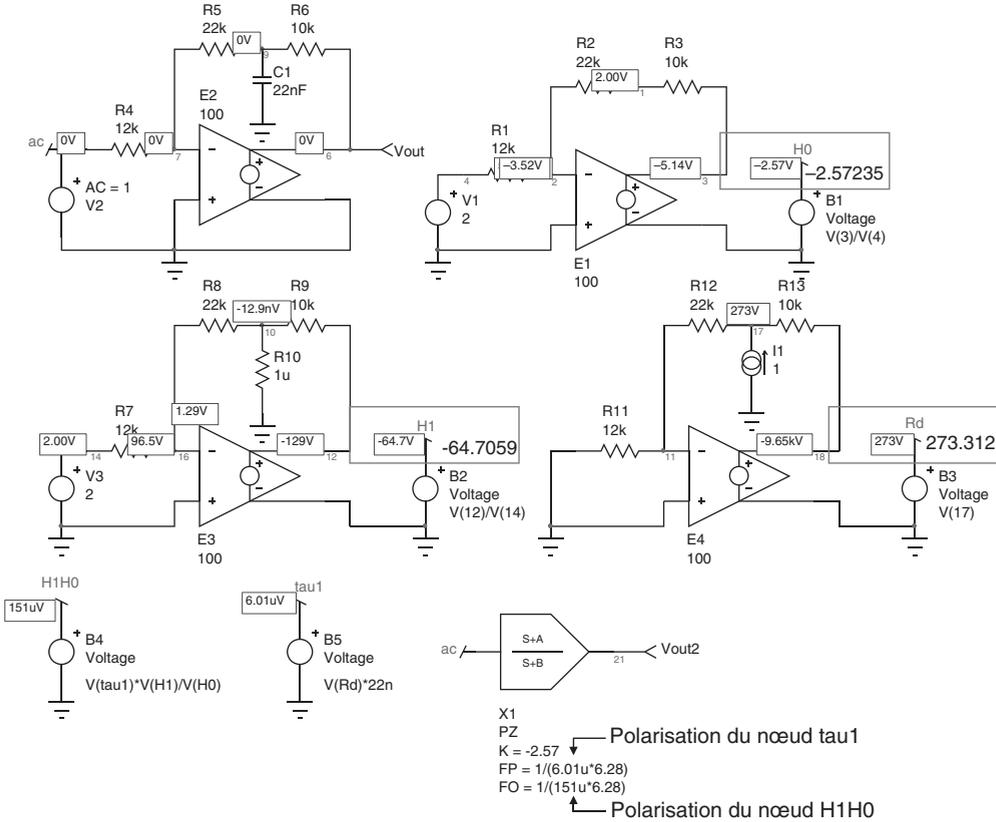


Figure 3.64 SPICE est vraiment utile pour vérifier que les résultats d'équations sont corrects. La résistance de $1 \mu\Omega$ utilisée lors du calcul de H^1 est un court-circuit car SPICE n'accepterait pas une résistance de 0Ω .

Le sous-circuit X_1 inclut un pôle, un zéro et du gain. Les paramètres passés sont ceux calculés par les sources B_4 and B_5 . La réponse dynamique de X_1 (V_{out2}) est comparée à celle du circuit original construit autour de E_2 , V_{out} . Comme les courbes du bas le montrent, les réponses sont identiques.

3.3.4 Fonction de transfert généralisée – Exemple 4

Un quatrième exemple est donné en Figure 3.65. C'est un circuit utilisant un op amp mais affecté cette fois par un gain de boucle ouverte infini. Calculons le gain en continu lorsque le condensateur est retiré du circuit. Le schéma correspondant est celui de la Figure 3.66. Le gain peut être obtenu en appliquant le théorème de superposition comme indiqué sur le côté droit de la figure. La première expression, lorsque la connexion gauche de R_1 est mise à la masse, place le circuit dans une configuration non-inverseuse affectée d'un gain H_a égal à :

$$H_a = \frac{R_2}{R_1} + 1 \quad (3.199)$$

Alors que le second gain H_b est obtenu quand la connexion gauche de R_3 est mise à la masse, plaçant alors le circuit dans une structure inverseuse. Le gain dans ce cas est égal à :

$$H_b = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.200)$$

Le gain final est obtenu en additionnant H_a et H_b . Cela donne :

$$H_0 = -\frac{R_2}{R_1} + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = 1 \quad (3.201)$$

La prochaine étape consiste à calculer le gain lorsque C_1 est remplacé par un fil comme en Figure 3.67.

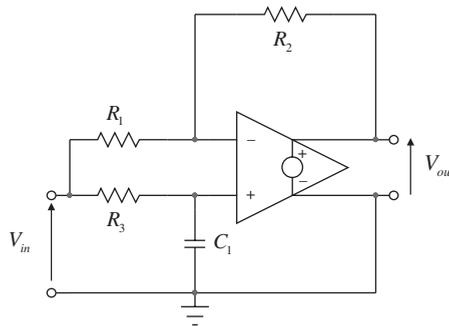


Figure 3.65 Ce filtre associe trois résistances et un condensateur. C'est un système du premier ordre.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

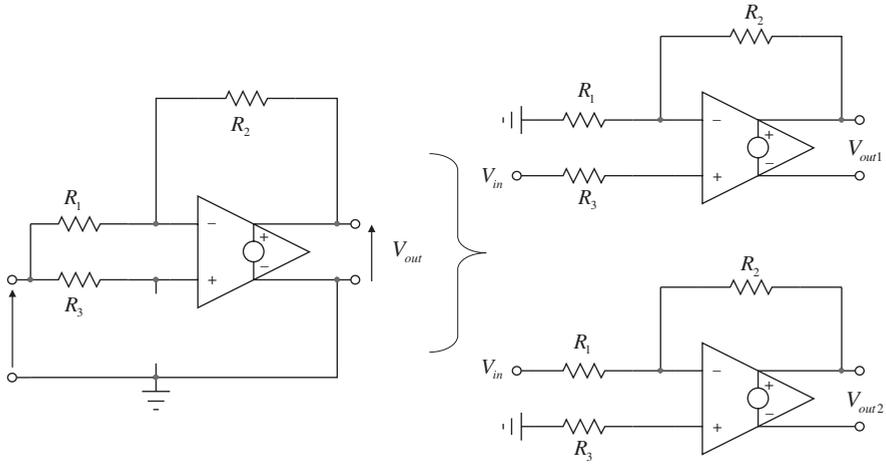


Figure 3.66 L'utilisation du théorème de superposition permet de déterminer le gain continu rapidement.

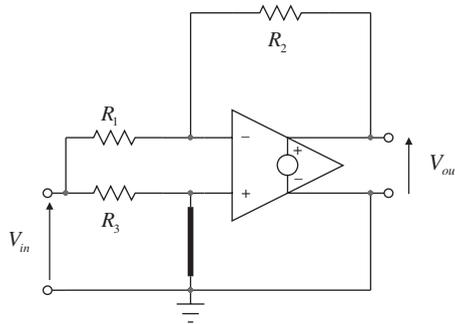


Figure 3.67 Lorsque C_1 est remplacé par un fil, l'expression du gain est simple à déterminer.

Nous obtenons un simple inverseur dont le gain est défini par (3.199) :

$$H^1 = -\frac{R_2}{R_1} \quad (3.202)$$

La constante de temps du circuit est obtenue en réduisant l'excitation à 0 V comme illustré en Figure 3.68. Dans ce mode, la seule résistance vue des connexions est la résistance R_3 puisque la broche non-inverseuse offre une impédance infinie. La constante de temps de ce circuit est alors égale à :

$$\tau_1 = R_3 C_1 \quad (3.203)$$

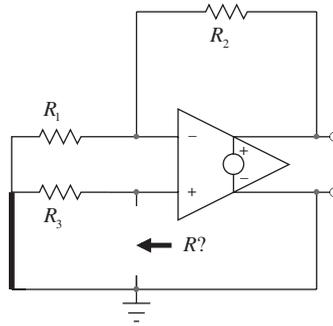


Figure 3.68 La résistance pilotant le condensateur est facile à trouver, il s'agit de R_3 .

Nous possédons tous les ingrédients pour assembler l'expression finale. Elle est définie par :

$$H(s) = H_0 \frac{1 + \frac{H^1}{H_0} s\tau_1}{1 + s\tau_1} = \frac{1 - s \frac{R_2}{R_1} R_3 C_1}{1 + s R_3 C_1} = \frac{1 - \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.204)$$

Dans laquelle

$$\omega_z = \frac{R_1}{R_2 R_3 C_1} \quad (3.205)$$

et

$$\omega_p = \frac{1}{R_3 C_1} \quad (3.206)$$

Comme vous le constatez avec (3.204), le circuit comporte un zéro situé dans le demi-plan droit. Associé avec le retard de phase de 90° apporté par le pôle, le signal sera alors déphasé de -180° . La Figure 3.69 et la Figure 3.70 confirment ces résultats avec Mathcad® et l'analyse SPICE.

3.3.5 Fonction de transfert généralisée – Exemple 5

Dans ce dernier exemple, nous allons appliquer la fonction de transfert généralisée autour du simple intégrateur de la Figure 3.71. Le gain continu H_0 est obtenu lorsque le condensateur C_1 est retiré temporairement du circuit comme illustré en Figure 3.72. Dans ce cas, le gain est simplement

$$H_0 = -A_{OL} \quad (3.207)$$

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

$$R_1 := 1\text{k}\Omega \quad R_2 := 4.7\text{k}\Omega \quad R_3 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 0.1\ \mu\text{F}$$



$$H_0 := 1 \quad \tau_1 := R_3 \cdot C_1 \quad H_1 := -\frac{R_2}{R_1} = -4.7 \quad H_{10}(s) := H_0 \cdot \frac{1 + \frac{H_1}{H_0} \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1}$$

$$\omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 1 \times 10^3 \frac{1}{\text{s}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 159.155\text{Hz} \quad \omega_z := -\frac{H_0}{H_1 \cdot \tau_1} = 212.766 \frac{1}{\text{s}} \quad f_z := \frac{\omega_z}{2\pi} = 33.863\text{Hz}$$

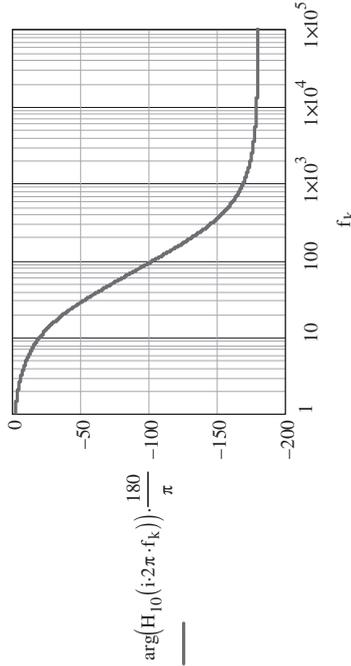
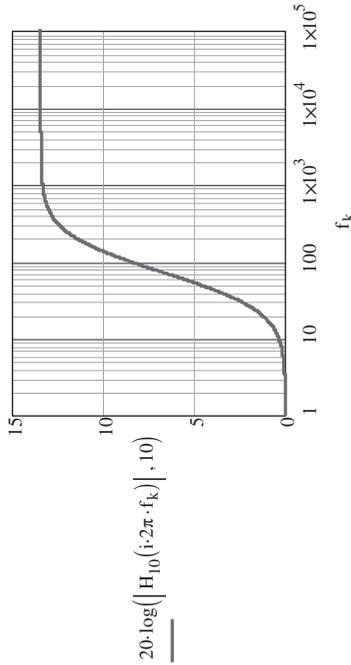


Figure 3.69 Mathcad® trace les réponses en fréquence que nous pouvons comparer avec celles de SPICE.

3 Superposition et le théorème de l'extra-élément

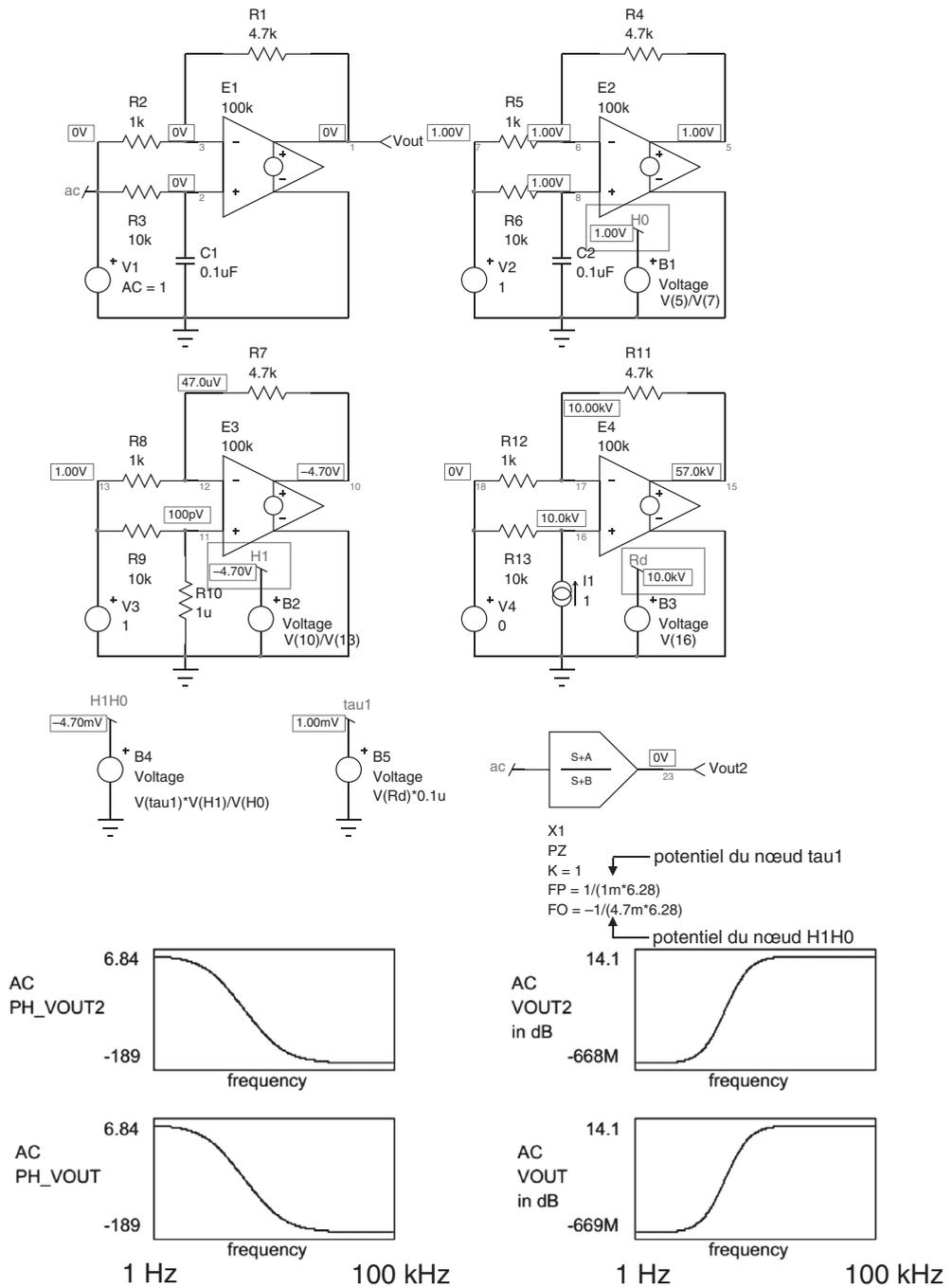


Figure 3.70 SPICE confirme nos calculs effectués par étapes puis combinés pour former la fonction de transfert finale.

3.3 Une fonction de transfert généralisée du premier ordre

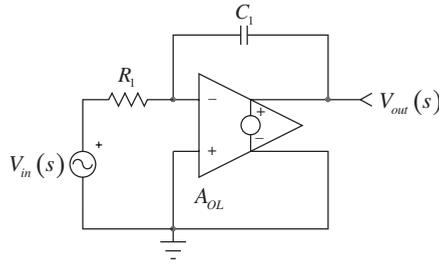


Figure 3.71 Un simple intégrateur est réalisé autour d'un op amp présentant un gain en boucle ouverte A_{OL} .

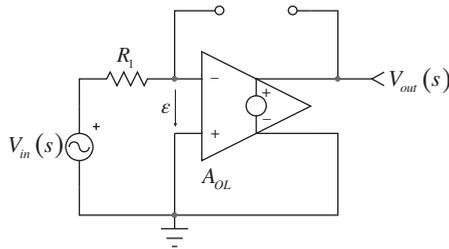


Figure 3.72 Pour une étude en continu, $s = 0$, le condensateur est supprimé du circuit.

Lorsque l'excitation est réduite à 0 V, nous installons un générateur de test I_T aux bornes des connexions de C_1 comme indiqué en Figure 3.73. La tension aux bornes de la source de courant est :

$$V_T = R_1 I_T - V_{out} \quad (3.208)$$

La tension de sortie de l'op amp est égale à :

$$V_{out} = \epsilon \cdot A_{OL} \quad (3.209)$$

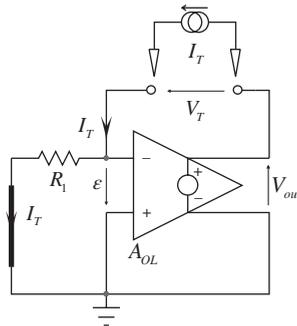


Figure 3.73 Le générateur de courant nous permet de déterminer la résistance qui attaque C_1 en présence d'une excitation réduite à zéro.

Expression dans laquelle

$$\varepsilon = -R_1 I_T \quad (3.210)$$

Si l'on substitue (3.210) dans (3.209) on obtient la définition :

$$V_{out} = -R_1 I_T A_{OL} \quad (3.211)$$

qui à son tour substituée dans (3.208) mène à :

$$V_T = I_T R_1 + R_1 I_T A_{OL} = I_T R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.212)$$

La résistance recherchée est alors obtenue par :

$$R = \frac{V_T}{I_T} = R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.213)$$

La constant de temps τ_1 est définie par :

$$\tau_1 = C_1 R_1 (1 + A_{OL}) \quad (3.214)$$

Lorsque l'on remplace C_1 par un fil (son état haute fréquence) comme en Figure 3.74, la réponse est 0 V :

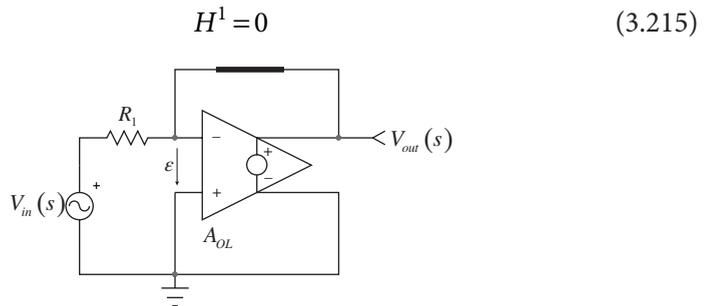


Figure 3.74 La fonction de transfert est égale à 0 lorsque C_1 est un court-circuit.

Si l'on applique la fonction de transfert généralisé, l'expression finale est :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} = -\frac{A_{OL}}{1 + s R_1 C_1 (1 + A_{OL})} = -\frac{A_{OL}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \quad (3.216)$$

Expression dans laquelle le pôle basse fréquence est exprimé par :

$$\omega_p = \frac{1}{R_1 C_1 (1 + A_{OL})} \quad (3.217)$$

3.4 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

On peut à présent factoriser A_{OL} pour obtenir :

$$H(s) = -\frac{A_{OL}}{A_{OL}} \frac{1}{\left(\frac{1}{A_{OL}} + sR_1C_1 \frac{1+A_{OL}}{A_{OL}}\right)} = -\frac{1}{\frac{1}{A_{OL}} + sR_1C_1 \frac{1+A_{OL}}{A_{OL}}} \quad (3.218)$$

Lorsque A_{OL} est très grand, cette expression se simplifie et devient :

$$H(s) = -\frac{1}{sR_1C_1} = -\frac{1}{\frac{s}{\omega_{po}}} \quad (3.219)$$

Et dans laquelle

$$\omega_{po} = \frac{1}{R_1C_1} \quad (3.220)$$

est désigné par le terme de « pôle à 0-dB », fréquence à laquelle le gain de (3.219) est de 1 ou 0 dB. La Figure 3.75 représente les réponses dynamiques des deux fonctions de transfert. H_2 représente (3.216) et confirme le pôle basse fréquence dont la valeur dépend de A_{OL} alors que H_3 confirme un pôle à 0 dB placé à 1.6 kHz lorsque A_{OL} tend vers l'infini.

3.4 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

Dans ce troisième chapitre, nous avons détaillé l'EET qui est au centre des techniques de calculs rapides et que nous avons appliqué dans plusieurs exemples. Voici un résumé de ce que nous avons appris dans ce texte :

1. Dans un circuit linéaire impliquant plusieurs sources indépendantes, le théorème de superposition indique que la réponse (un courant ou une tension) dans une branche est la somme algébrique des réponses produites par chacune des sources individuelles lorsque les autres sources sont réduites à 0. Une source de tension réduite à 0 V (ou éteinte) est remplacée par un fil (court-circuit) alors qu'une source de courant éteinte (0 A) est remplacée par un circuit ouvert.
2. Dans cette définition, une sortie (la réponse) et plusieurs entrées (les stimuli) sont considérées. La sortie totale est calculée en combinant les réponses obtenues lorsqu'une seule source est active à la fois. Le théorème de l'extra-élément (*Extra Element Theorem*, EET) découle du théorème de superposition en considérant deux sorties et deux entrées. Dans ce cas, deux entrées peuvent être actives simultanément et produisent deux grandeurs de sortie. Pour une certaine combinaison des entrées, l'une des sorties peut être nulli-

$$R_1 := 10\text{k}\Omega \quad C_1 := 10\text{nF} \quad A_{OL} := 10000$$

$$H_0 := -A_{OL} \quad H_1 := 0$$

$$R_d := R_1(1 + A_{OL}) \quad \tau_1 := C_1 \cdot R_d \quad \omega_p := \frac{1}{\tau_1} = 0.9999 \frac{1}{\text{s}} \quad f_p := \frac{\omega_p}{2\pi} = 0.15914 \text{ kHz}$$

$$H_2(s) := \frac{H_0 + H_1 \cdot s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_1} \quad H_3(s) := \frac{1}{s} \quad \omega_{po} := \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \quad f_{po} := \frac{\omega_{po}}{2\pi} = 1.59155 \text{ kHz}$$

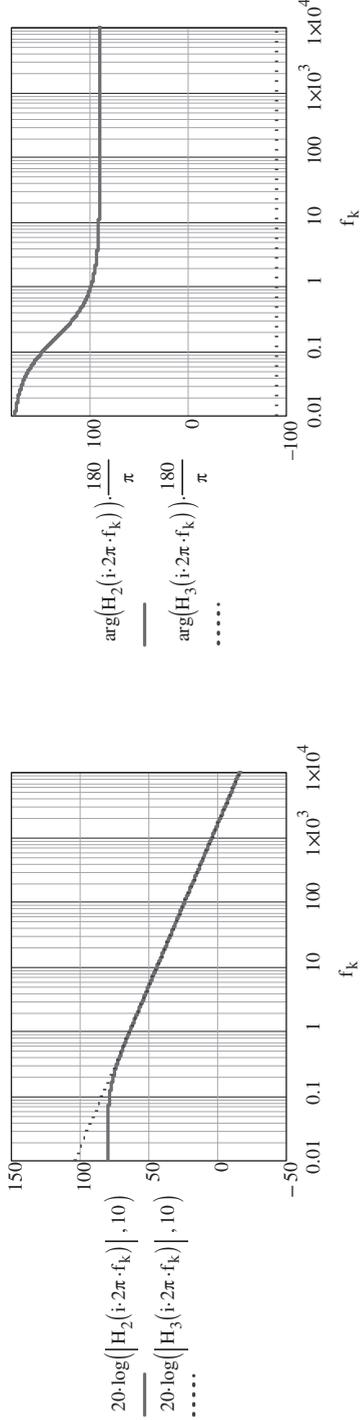


Figure 3.75 La réponse de l'intégrateur en continu est limitée par le gain en boucle ouverte de l'op amp (80 dB dans cet exemple).

3.4 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

fiée, impliquant qu'elle délivre 0 dans cette condition (V or A). Cette configuration est appelée la double injection nulle (*Null Double Injection*, NDI).

3. Pour appliquer l'EET, identifiez un élément du circuit dont la présence complique l'architecture du circuit : c'est l'extra-élément. Selon la forme de l'EET, cet extra-élément peut être physiquement retiré du circuit ou remplacé par un fil. On retient habituellement la forme de l'EET qui conduit à un circuit simplifié selon que l'extra-élément est remplacé par un fil ou un circuit ouvert. La fonction de transfert est alors évaluée dans l'une ou l'autre condition selon la forme retenue de l'EET.
4. Un zéro, s'il est présent, est situé au numérateur et combine l'élément de stockage avec la résistance R_n . Cette valeur est obtenue en déterminant la résistance vue des connexions de l'élément de stockage d'énergie (C ou L) lorsque ce dernier est temporairement déconnecté du circuit lors d'une analyse NDI : le signal d'entrée est présent et on détermine la résistance vue des connexions identifiée lorsque la réponse est nullifiée.
5. Le pôle est obtenu en réduisant à 0 le signal d'excitation et en déterminant la résistance R_d vue des connexions de l'élément de stockage d'énergie (C ou L) lorsque ce dernier est temporairement déconnecté du circuit. Cette résistance combinée avec l'élément considéré forme la constante de temps naturelle τ du circuit étudié.
6. L'EET peut être défini de différentes manières pour former une fonction de transfert généralisée du premier ordre. Dans cette expression, il n'est pas nécessaire d'obtenir R_n via une analyse NDI mais il convient plutôt de calculer un gain continu H_0 et un gain haute fréquence H^1 . En combinant ces deux éléments avec la constante de temps du circuit τ on détermine l'expression du numérateur. R_d est déterminée de la même façon que précédemment. Cette technique vous évite de passer par une analyse NDI mais débouche habituellement sur des coefficients plus complexes que ceux obtenus par l'EET. Il vous revient de choisir la méthode qui vous convient le mieux.
7. L'EET peut être appliqué à une variété de circuits et les exemples le montrent en action avec des circuits passifs, des transistors bipolaires ou des amplificateurs opérationnels. L'EET se prête bien à l'analyse de circuits actifs mais réclame plus d'attention pour déterminer R_n et R_d lorsque des sources dépendantes sont présentes.
8. SPICE est une excellente ressource pour vérifier les calculs qu'ils soient obtenus à la main ou par le biais d'un programme spécialisé. SPICE permet d'identifier R_d avec une simple source de courant qui pilote les connexions de l'élément de stockage d'énergie considéré (L ou C mais aussi R dans le cadre d'un réseau purement résistif) alors que l'excitation est réduite à 0. On peut

également trouver la valeur de R_n en analyse NDI grâce à l'emploi d'un amplificateur à transconductance qui polarise les connexions de l'élément de stockage considéré tout en assurant la nullification de la sortie. Ces étapes intermédiaires sont d'une aide précieuse en présence de circuits compliqués.

9. La Figure 3.76 résume les différentes formes de l'EET et comment vous pouvez combiner les constantes de temps pour former le numérateur (zéro) et le dénominateur (pôle) de la fonction de transfert étudiée. La Figure 3.77 donne la définition de la fonction de transfert généralisée pour un système du premier ordre et qui évite l'analyse NDI.

Le théorème de l'extra-élément ou *Extra Element Theorem* (EET) en anglais
 A est une fonction de transfert qui relie une réponse à une excitation
 Z est l'extra-élément
 Z_n est l'impédance vue des connexions de l'extra-élément lorsque la sortie est nullifiée et l'excitation maintenue
 Z_d est l'impédance vue des connexions de l'extra-élément lorsque l'excitation est réduite à 0

$$A|_Z = A|_{Z=\infty} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}} \qquad A|_Z = A|_{Z=0} \frac{1 + \frac{Z_n}{Z}}{1 + \frac{Z_d}{Z}}$$

<ol style="list-style-type: none"> 1. Calculer A quand Z est retirée 2. Calculer Z_n pour réponse nullifiée 3. Calculer Z_d pour une excitation à 0 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calculer A quand Z est court-circuitée 2. Calculer Z_n quand la réponse est nullifiée 3. Calculer Z_d quand l'excitation est à 0
--	---

Si Z est une capacitance C ou une inductance L
 R_n est la résistance vue des connexions de C ou L pour une réponse nullifiée avec l'excitation en place
 R_d est la résistance vue des connexions de C ou L pour une excitation réduite à 0

$Z = \frac{1}{sC}$ $\tau_1 = R_n C$ $\tau_2 = R_d C$	<p>Si un gain continu H_0 existe :</p> $H(s) = H_0 \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} = H_0 \frac{\omega_{z_1}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$	$Z = sL$ $\tau_1 = \frac{L}{R_n}$ $\tau_2 = \frac{L}{R_d}$
	<p>Si un gain H_∞ existe lorsque s approche ∞:</p> $H(s) = H_\infty \frac{1 + \frac{1}{s\tau_1}}{1 + \frac{1}{s\tau_2}} = H_\infty \frac{1 + \frac{\omega_{z_1}}{s}}{1 + \frac{\omega_p}{s}}$	

Figure 3.76 Résumé des formes que peut revêtir l'EET lors de l'étude de systèmes du premier ordre.

Lectures supplémentaires

Avec ce cinquième exemple se termine notre chapitre sur le théorème de l'extra-élément et ses applications. Je vous encourage à creuser le sujet en lisant d'autres articles et documents disponibles sur le web ou dans des livres déjà publiés. Outre le document fondateur écrit par le regretté Dr. Middlebrook [3], vous

3.4 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

La fonction de transfert généralisée du premier ordre
 A est une fonction de transfert liant une réponse à une excitation
 A_0 est la fonction de transfert quand le circuit est observé à $s = 0$ (dc)
 A^1 est la fonction de transfert quand le circuit est observé pour $s \rightarrow \infty$
 τ_1 est la constante de temps impliquant l'élément de stockage d'énergie C ou L

$$A(s) = \frac{A_0 + A^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1}$$

A^1 ← L'élément impliqué dans τ_1 est mis dans son état haute fréquence.

1. Calculer A_0 lorsque C est retiré ou L est court-circuitée
2. Déterminer R en exprimant la résistance vue des connexions de C ou L pour une excitation réduite à 0
3. Calculer $\tau_1 = RC$ ou $\tau_1 = LR$
4. Calculer A^1 quand C est court-circuité ou lorsque L est retirée
5. Si A_0 existe (différent de 0), on peut le factoriser au numérateur

$$A(s) = A_0 \frac{1 + \frac{A^1}{A_0} s \tau_1}{1 + s \tau_1}$$

A_0 ← L'élément qui stocke l'énergie est mis dans état continu (C est retiré, L est court-circuitée)

Figure 3.77 Résumé des définitions autour de la fonction de transfert généralisée.

pouvez visiter le site web dont l'adresse est donnée en [6] et qui contient la plupart des présentations et séminaires donnés par Dr. Middlebrook sur le sujet. Le cours aborde l'EET et abonde d'exemples et informations sur les techniques de conception. La référence [4] ne peut pas être ignorée et décrit rigoureusement l'EET avec beaucoup d'exemples allant du circuit de 1^{er} ordre à des réseaux plus complexes, en incluant de nombreuses structures peu communes. La référence [5] est intéressante car elle présente une approche différente dans laquelle la double injection nulle ou NDI n'est pas utilisée. Une fois de plus, c'est une question de choix : soit vous acceptez la NDI comme une étape nécessaire pour obtenir l'expression la plus simple du numérateur, soit vous préférez passer par l'expression de la fonction de transfert généralisée et « souffrir » sur l'expression finale afin d'en simplifier le numérateur. Les deux expressions sont semblables en termes de résultats, mais il est vrai que, avec sa manipulation des expressions de gain parfois complexes, la fonction de transfert généralisée peut conduire à des formules compliquées. La référence [7] offre une introduction intéressante à la technique des calculs rapides avec des détails historiques sur la façon dont l'EET et les moyens d'analyser efficacement les circuits sont apparus comme une solution afin de résoudre les problèmes posés. La référence [8] vous dirigera vers un site universitaire en Belgique dans lequel les auteurs ont mis en œuvre divers théorèmes du Dr. Middlebrook (EET mais aussi le théorème général du feedback ou *General Feedback Theorem* le GFT) dans un environnement de simulation Cadence®. Beaucoup de liens et de documents sont disponibles à cette adresse.

La référence [9] est un site d'utilisateurs Yahoo! Les concepteurs y discutent de points techniques et interagissent avec des experts des calculs rapides. Enfin, [10] n'est pas directement liée à l'EET mais couvre les techniques d'analyse de boucle en utilisant le GFT et contient beaucoup d'informations utiles.

En dépit de tous ces documents et des exemples donnés, rien ne remplace les exercices pratiques : vous devez investir du temps dans la résolution des circuits en utilisant l'EET et ses différentes formes afin de maîtriser la méthode. SPICE peut immédiatement confirmer vos résultats ou souligner une faute commise : c'est une aide précieuse dans l'étude de circuits actifs, notamment avec ceux incluant des sources commandées. Il vous indiquera également les mailles dans lesquelles les courants circulent ou encore leur direction lorsque la sortie est nullifiée lors d'une NDI. Cette approche se révèle très pratique pour traquer toute erreur que vous auriez pu commettre lors du cheminement. Maintenant que nous avons décrit comment résoudre les circuits du 1^{er} ordre, le chapitre 4 va nous apprendre à résoudre les réseaux du deuxième ordre. Avant de le lire, assurez-vous de maîtriser la résolution des exemples proposés en fin de chapitre.

Références

- [1] <http://www.solved-problems.com/circuits/circuits-articles/839/turning-sources-off/>
- [2] <http://users.ece.gatech.edu/mleach/papers/superpos.pdf>
- [3] R. D. Middlebrook, « Null Double Injection and the Extra Element Theorem », *IEEE Transactions on Education*, Vol. 32, NO. 3, August 1989.
- [4] V. Vorperian, *Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits*, Cambridge University Press.
- [5] A. Hajimiri, « Generalized Time- and Transfer-Constant Circuit Analysis », *Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 57, NO. 6, December 2009. http://www.ece.ucsb.edu/Faculty/rodwell/Classes/mixed_signal/Hajimiri_MOTC.pdf
- [6] https://web.archive.org/web/20160401041428/http://ardem.com/D_OA_Rules&Tools/index.asp
- [7] <http://www.edn.com/electronics-blogs/outside-the-box-/4404226/Design-oriented-circuit-dynamics>
- [8] <http://www.analogdesign.be/>
- [9] https://groups.yahoo.com/neo/groups/Design-Oriented_Analysis_D-OA/info
- [10] <https://sites.google.com/site/frankwiedmann/loopgain>

3.5 Annexe du chapitre 3

Compléments en ligne



Consultez les exemples documentés sur le site Dunod.com.

4

Fonctions de transfert du deuxième ordre

Dans le chapitre précédent, nous avons exploré le cœur de notre sujet, le théorème de l'extra-élément ou EET en anglais abrégé. Nous avons vu comment l'exprimer sous deux formes différentes selon que l'extra-élément est considéré comme un court-circuit ou physiquement retiré du réseau. Si les pôles ont été déterminés en réduisant l'excitation à zéro, l'obtention des zéros nécessite une double injection nulle (*null double injection* ou NDI). Cette dernière peut parfois être perçue comme un exercice difficile par le novice. Heureusement, nous avons pu reformuler le EET sous une forme différente ne demandant plus de calcul par NDI. Cette approche simplifie en effet l'exercice mais débouche sur une expression finale dans laquelle les coefficients du numérateur sont souvent plus compliqués que ceux obtenus par la NDI. Dans ce dernier chapitre, nous allons appliquer la technique de l'EET aux systèmes du second ordre et reformuler la théorie sous la forme du théorème aux deux extra-éléments, ou 2EET en anglais abrégé. L'approche se complexifie mais le principe reste identique : le EET est appliqué deux fois au lieu d'une. Nous allons d'abord explorer l'expression brute du 2EET pour ensuite obtenir une formule abordable et plus pratique à mettre en œuvre. De nombreux exemples illustreront notre parcours.

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Le théorème de l'extra-élément ou EET considère que tout circuit linéaire du premier ordre peut être exprimé sous la forme de deux termes : un terme de tête dénommé *gain de référence*, est obtenu avec l'extra-élément Z placé dans son état de *référence*. Dans ce mode, Z est soit retiré du circuit (Z est considéré infini) ou court-circuité (Z est égale à 0). Cette première expression est ensuite

suivie d'un second coefficient, un facteur de correction k . Ce facteur inclut le pôle et le zéro – s'ils existent – obtenus en déterminant la résistance offerte par les connexions de l'élément de stockage d'énergie (C ou L) lorsque le réseau est étudié dans des conditions particulières (l'excitation est réduite à 0 puis une analyse NDI est conduite). La Figure 4.1 illustre ces principes vus au chapitre 3.

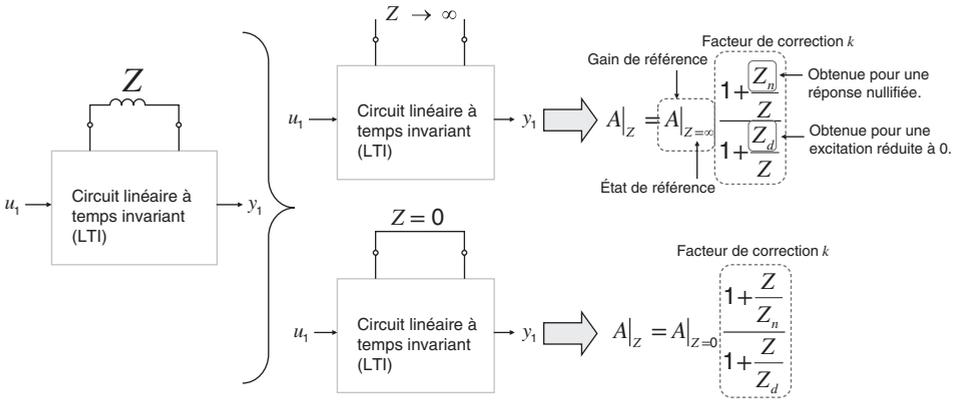


Figure 4.1 Le EET place l'extra-élément dans deux états différents et définit un facteur de correction k qui, une fois associé au gain de référence, donne la fonction de transfert finale.

L'idée derrière le théorème à deux extra-éléments (*two extra element theorem* ou 2EET) dont la théorie est détaillée en [1] consiste à appliquer le EET deux fois à un réseau contenant deux éléments de stockage d'énergie : Z_1 et Z_2 . Tout d'abord, l'un des éléments de stockage est identifié dans le circuit auquel le EET est appliqué une première fois. L'expression obtenue dans ce contexte devient le gain de référence A_{ref} pour le second EET. Comme vu au chapitre 3, l'élément identifié comme « extra » impédance dans le EET est considéré comme un court-circuit ($Z = 0$) ou retiré du circuit ($Z \rightarrow \infty$). Cette condition devient son *état de référence*. Cependant, lorsque le EET s'applique à cet unique élément, comment traiter le second élément lors de cette première étape ? En d'autres termes, comment considérez-vous cet élément alors que le EET est appliqué au premier ? La présence de deux éléments de stockage d'énergie impose quatre options possibles pour les combiner menant ainsi à quatre états de référence :

- $Z_1 = Z_2 = 0$
- $Z_1 = 0, Z_2 \rightarrow \infty$
- $Z_1 \rightarrow \infty, Z_2 = 0$
- $Z_1 \rightarrow \infty, Z_2 \rightarrow \infty$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Le nombre de combinaisons peut être déterminé en pensant à des puissances binaires dans lesquelles les éléments Z_1 et Z_2 peuvent être ouverts, « 1 », ou court-circuités « 0 ». Dans ce cas, le nombre de solutions possibles pour un système du deuxième ordre est donné par :

$$\text{Combinaisons} = 2^n = 2^2 = 4 \quad (4.1)$$

Lorsque vous appliquez le premier EET, vous avez le choix de sélectionner Z_1 et Z_2 selon l'une des quatre combinaisons proposées. À la fin, le 2EET délivrera 4 formulations différentes, toutes donnant des résultats identiques. Ce principe est illustré en Figure 4.2 dans laquelle 4 combinaisons possibles sont sélectionnées pour le calcul du gain de référence. Le facteur de correction k suit et il correspond à l'EET appliqué une seconde fois avec le premier extra-élément remis en place, Z_1 dans la figure.

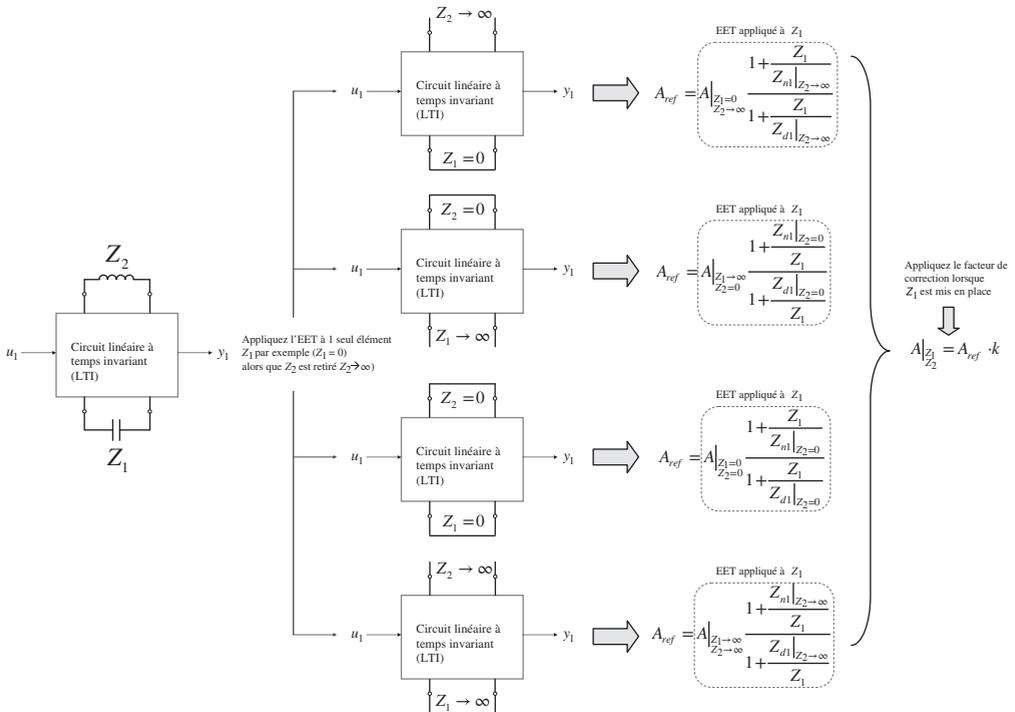


Figure 4.2 Le premier EET est appliqué au circuit lorsqu'un seul élément est considéré (Z_1 dans les dessins). Ensuite, le EET est appliqué une deuxième fois cet élément remis en place. Veuillez noter que toutes les expressions mènent à des résultats identiques.

Le théorème à deux extra-éléments peut être formulé selon quatre options possibles, couvrant les choix retenus pour Z_1 et Z_2 .

$$A\Big|_{Z_2}^{Z_1} = A\Big|_{Z_2 \rightarrow \infty}^{Z_1 \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{Z_{n1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}}{Z_1} \quad 1 + \frac{Z_{n2}}{Z_2}}{1 + \frac{Z_{d1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}}{Z_1} \quad 1 + \frac{Z_{d2}}{Z_2}} \quad (4.2)$$

$$A\Big|_{Z_2}^{Z_1} = A\Big|_{Z_2=0}^{Z_1=0} \frac{1 + \frac{Z_1}{Z_{n1}|_{Z_2=0}} \quad 1 + \frac{Z_2}{Z_{n2}}}{1 + \frac{Z_1}{Z_{d1}|_{Z_2=0}} \quad 1 + \frac{Z_2}{Z_{d2}}} \quad (4.3)$$

$$A\Big|_{Z_2}^{Z_1} = A\Big|_{Z_2 \rightarrow \infty}^{Z_1=0} \frac{1 + \frac{Z_1}{Z_{n1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}} \quad 1 + \frac{Z_{n2}}{Z_2}}{1 + \frac{Z_1}{Z_{d1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}} \quad 1 + \frac{Z_{d2}}{Z_2}} \quad (4.4)$$

$$A\Big|_{Z_2}^{Z_1} = A\Big|_{Z_2=0}^{Z_1 \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{Z_{n1}|_{Z_2=0}}{Z_1} \quad 1 + \frac{Z_2}{Z_{n2}}}{1 + \frac{Z_{d1}|_{Z_2=0}}{Z_1} \quad 1 + \frac{Z_2}{Z_{d2}}} \quad (4.5)$$

Dans nos exemples, lorsque le EET est appliqué avec l'élément sélectionné, Z_1 , Z_{n1} et Z_{d1} deviennent R_{n1} et R_{d1} , les résistances respectivement pilotant la réactance dans Z_1 (C ou L) quand la réponse est nullifiée (indice n pour numérateur) et l'excitation éteinte à 0 (indice d pour dénominateur). Dans le facteur de correction, l'extra-élément identifié lors du premier EET est remis en place. Ce qui pilote Z_2 , le deuxième élément, est vraiment une impédance impliquant Z_1 comme nous allons le voir dans le premier exemple d'application. Heureusement, les conditions pour déterminer Z_{n2} and Z_{d2} sont similaires à celles utilisées pour obtenir Z_{n1} et Z_{d1} .

Considérons le circuit du deuxième ordre de la Figure 4.3. Tout d'abord, sans utiliser le 2EET, nous pouvons appliquer la loi d'un diviseur impédant afin de déterminer la fonction de transfert H de ce circuit. Elle est donnée par la combinaison série-parallèle de C_1 - r_C et L_2 - r_L formant un diviseur impédant avec R_1 :

$$H(s) = \frac{\left(r_C + \frac{1}{sC_1} \right) \parallel (r_L + sL_2)}{R_1 + \left(r_C + \frac{1}{sC_1} \right) \parallel (r_L + sL_2)} \quad (4.6)$$

Cette expression brute, lorsque vous la développez, n'offre aucune information sur ce que pourrait être la réponse dynamique en identifiant par exemple un

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

gain ou une atténuation continue, des pôles ou des zéros factorisés. Cependant, la réponse dynamique est correcte et elle deviendra la référence à laquelle nous comparerons les résultats obtenus avec le 2EET.

Si l'on veut appliquer le 2EET à ce circuit, nous allons d'abord considérer le EET pour l'un des éléments. Nous choisissons Z_1 (impliquant C_1) pour cet exemple. Comme expliqué, nous pouvons choisir l'une des quatre combinaisons possibles pour l'état de référence de Z_1 et Z_2 . Supposons que les deux impédances sont considérées infinies pour l'état de référence comme proposé dans (4.2). Dans ce cas, C_1 et L_2 sont physiquement retirés du circuit et celui-ci devient celui de la Figure 4.4.

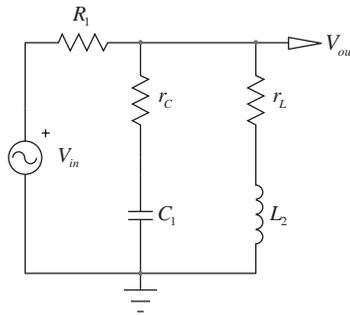


Figure 4.3 Ce circuit du second ordre combine un condensateur et une bobine. Il existe quatre possibilités pour appliquer le premier EET.

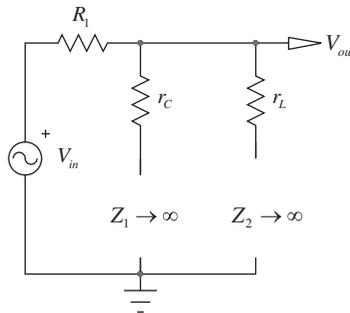


Figure 4.4 Le circuit de référence considère que Z_1 et Z_2 présentent des valeurs infinies (C_1 vaut zéro et L_2 offre une inductance infinie).

Le gain de référence intermédiaire de cette configuration est immédiat :

$$H \Big|_{\substack{Z_1 \rightarrow \infty \\ Z_2 \rightarrow \infty}} = 1 \quad (4.7)$$

Maintenant, à partir de ce circuit de référence, nous allons appliquer le EET considérant Z_1 comme l'extra-élément alors que Z_2 devient infinie comme adopté dans le circuit de référence. Nous évaluons d'abord R_d alors que l'excitation est

réduite à 0 V puis nous appliquons une NDI pour obtenir R_n . Le circuit est assez simple comme montré en Figure 4.5. Il est aisé de voir que la résistance vue des connexions de C_1 est définie par :

$$R_d|_{Z_2 \rightarrow \infty} = r_C + R_1 \tag{4.8}$$

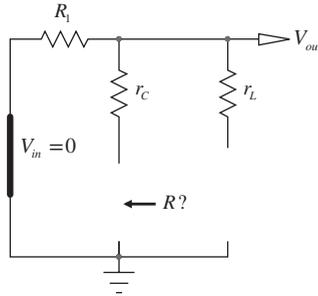


Figure 4.5 Le EET est appliqué à Z_1 alors que Z_2 est retirée. Ici, il s’agit de déterminer R_d .

Une NDI est maintenant étudiée sur le circuit qui, dans cette configuration, devient très simple comme l’atteste la Figure 4.6. Nul besoin de générateur de test dans ce cas, l’inspection est simple : si la connexion supérieure de la résistance r_C est à 0 V (la NDI considère une réponse nullifiée), alors la résistance vue des connexions de C_1 dans ce mode est simplement :

$$R_n|_{Z_2 \rightarrow \infty} = r_C \tag{4.9}$$

Avec tous ces éléments en main, nous pouvons écrire la première étape du 2EET. Celle-ci incarnera le gain de référence H_{ref} appliqué à notre réseau du deuxième ordre quand le circuit de référence est considéré avec les impédances Z_1 et Z_2 infinies (physiquement retirées du circuit) comme défini en (4.2) :

$$H_{ref}(s) = H|_{\substack{Z_1 \rightarrow \infty \\ Z_2 \rightarrow \infty}} = \frac{1 + \frac{Z_{n1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}}{Z_1}}{1 + \frac{Z_{d1}|_{Z_2 \rightarrow \infty}}{Z_1}} = 1 \cdot \frac{1 + \frac{r_C}{1}}{1 + \frac{r_C + R_1}{1}} = \frac{1 + sr_C C_1}{1 + s(r_C + R_1)C_1} \tag{4.10}$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

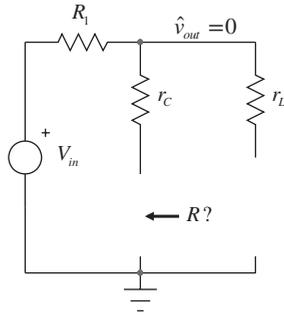


Figure 4.6 Une NDI est appliquée alors que Z_2 est considérée infinie.

Jusqu'ici, rien de bien compliqué comparé à ce que nous avons étudié au chapitre 3 : nous avons appliqué le EET à Z_1 , considérant Z_2 exclue du circuit. Le facteur de correction que nous allons maintenant calculer implique le second élément Z_2 mais nécessite le retour de Z_1 dans le réseau étudié. Le nouveau circuit menant à la définition du terme de correction apparaît en Figure 4.7. L'analyse NDI est d'abord considérée.

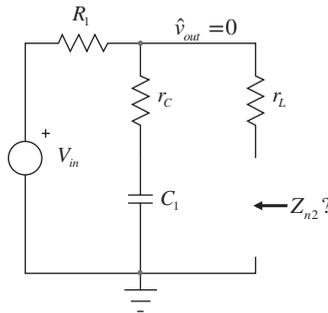


Figure 4.7 Appliquez le EET une seconde fois maintenant que C_1 est remis en place dans le circuit. La sortie est ici nullifiée lors de l'analyse NDI.

Une fois encore, par inspection, l'impédance vue des connexions de la bobine quand $\hat{v}_{out} = 0$ est purement résistive et égale les pertes ohmiques de la bobine :

$$Z_{n2} = r_L \tag{4.11}$$

Quand l'excitation est éteinte, comme dessiné en Figure 4.8, l'impédance vue des connexions de la bobine inclut à présent la capacitance de C_1 .

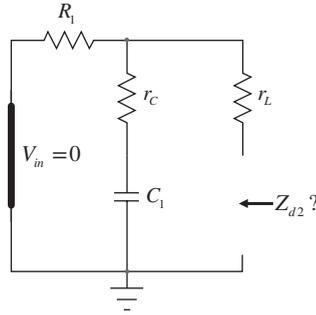


Figure 4.8 Pour le terme du dénominateur, il faut réduire l'excitation à 0 V et déterminer l'impédance vue des connexions de L_2 alors que C_1 est de retour dans le circuit.

Par inspection, l'impédance qui pilote L_2 dans ce mode est donnée par :

$$Z_{d2} = r_L + R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_1} + r_C \right) \quad (4.12)$$

Le facteur de correction factor k est alors égal à :

$$k = \frac{1 + \frac{Z_{n2}}{Z_2}}{1 + \frac{Z_{d2}}{Z_2}} = \frac{1 + \frac{r_L}{sL_2}}{1 + \frac{r_L + R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_1} + r_C \right)}{sL_2}} \quad (4.13)$$

En assemblant toutes les pièces, on peut formuler la fonction de transfert H liant V_{out} à V_{in} par

$$H(s) = H_{ref}(s) \cdot k = \frac{1 + sr_C C_1}{1 + s(r_C + R_1)C_1} \frac{1 + \frac{r_L}{sL_2}}{1 + \frac{r_L + R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_1} + r_C \right)}{sL_2}} \quad (4.14)$$

Nous pouvons également vérifier une autre option dans laquelle nous allons considérer Z_1 infinie et Z_2 un court-circuit. Cette approche revient à observer le circuit de référence pour $s = 0$, impliquant que les impédances soient placées dans leur état de référence suivant : C_1 en continu est retiré du circuit et L_2 est

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

remplacée par un court-circuit. La formule du 2EET correspondant à cette situation est celle définie par (4.5) et le cheminement vers la fonction de transfert finale est illustré en Figure 4.9.

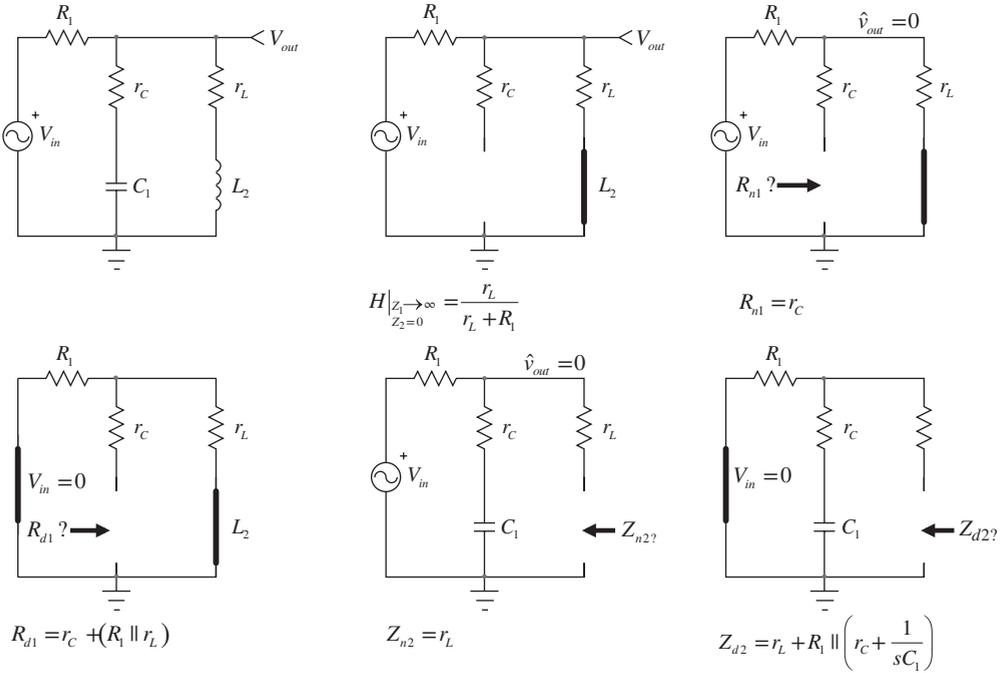


Figure 4.9 Nous pouvons considérer un gain de référence en continu, $s = 0$, dans lequel C_1 est retiré et L_2 remplacée par un court-circuit.

En assemblant toutes les étapes intermédiaires décrites en Figure 4.9, nous obtenons une nouvelle formulation de la fonction de transfert H :

$$H(s) = \frac{r_L}{r_L + R_1} \frac{1 + \frac{r_c}{sC_1}}{1 + \frac{r_c + R_1 \parallel r_L}{sC_1}} \frac{1 + \frac{sL_2}{r_L}}{1 + \frac{sL_2}{r_L + R_1 \parallel \left(\frac{1}{sC_1} + r_c \right)}} \quad (4.15)$$

Enfin, dans le cadre de cette découverte du 2EET, considérons Z_2 comme l'extra-élément (plutôt que Z_1 dans les cas précédents) et appliquons le EET alors que Z_1 est retirée. La formule 2EET dans cette configuration ($Z_2 = 0, Z_1 \rightarrow \infty$) devient :

$$A|_{Z_2} = A|_{Z_2=0} \frac{1 + \frac{Z_2}{Z_{n2}}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{d2}}} \frac{1 + \frac{Z_{n2}}{Z_1}}{1 + \frac{Z_{d2}}{Z_1}} \quad (4.16)$$

Si vous suivez les étapes que nous avons décrites, vous devriez trouver une nouvelle fonction de transfert H mais arrangée de façon différente :

$$H(s) = \frac{r_L}{r_L + R_1} \frac{1 + \frac{sL_2}{r_L}}{1 + \frac{sL_2}{r_L + R_1}} \frac{1 + \frac{r_C}{sC_1}}{1 + \frac{r_C + R_1}{sC_1} \parallel (sL_2 + r_L)} \quad (4.17)$$

Pour comparer ces formules avec l'expression brute définie en (4.6), nous les avons toutes rassemblées dans une feuille Mathcad® dans laquelle figure également un résultat de simulation SPICE. Comme le montre la Figure 4.10, toutes ces expressions délivrent des réponses dynamiques rigoureusement identiques. Pour ces tracés, nous avons adopté les valeurs de composants suivantes : $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ $r_C = 3.3 \Omega$ $r_L = 2.2 \Omega$ $C_1 = 10 \text{ nF}$ $L_2 = 250 \mu\text{H}$

4.1.1 Expressions du deuxième ordre à faible entropie

Toutes les formules déterminées avec le 2EET sont correctes comme le confirme la Figure 4.10. Malheureusement, les résultats obtenus sont bruts – quelle que soit la façon dont Z_1 et Z_2 sont combinées – et n'offrent pas vraiment la lisibilité escomptée pour déceler la présence de pôles et de zéros. À part les zéros, peut-être, pour lesquels l'inspection du circuit permet de révéler immédiatement leur position : quelles combinaisons d'impédance peuvent nullifier la réponse dans le circuit transformé de la Figure 4.3 lorsque nous l'examinons à $s = s_z$? Un court-circuit transformé amené par l'agencement en série de $1/sC_1 - r_C$ et $sL_2 - r_L$:

$$r_C + \frac{1}{sC_1} = 0 \rightarrow s_{z1} = -\frac{1}{r_C C_1} \quad (4.18)$$

$$sL_2 + r_L = 0 \rightarrow s_{z2} = -\frac{r_L}{L_2} \quad (4.19)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

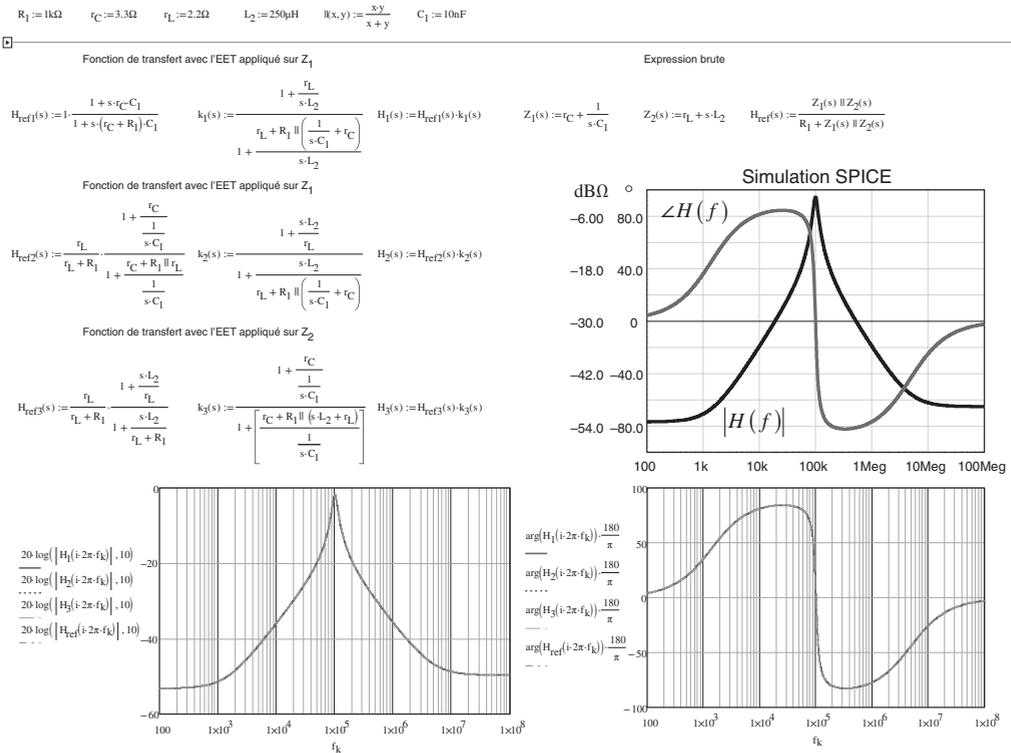


Figure 4.10 Les réponses des trois expressions sont tracées dans Mathcad® et comparées aux résultats de simulation SPICE : toutes les courbes se superposent.

Ainsi

$$N(s) = (1 + s r_C C_1) \left(1 + s \frac{L_2}{r_L} \right) \quad (4.20)$$

Le dénominateur, cependant, reste particulièrement compliqué. Il est donné ci-dessous, une fois isolé de (4.15) :

$$D(s) = (1 + s [r_C + R_1 \parallel r_L] C_1) \left(1 + \frac{s L_2}{r_L + R_1 \parallel \left(\frac{1}{s C_1} + r_C \right)} \right) \quad (4.21)$$

Si l'on développe (4.21), il vient :

$$D(s) = \left(1 + s C_1 \left[r_C + \left(\frac{r_L R_1}{r_L + R_1} \right) \right] \right) \left(1 + \frac{s L_2 (s r_C C_1 + s R_1 C_1 + 1)}{R_1 + r_L + s C_1 (r_C R_1 + r_L R_1 + r_C r_L)} \right) \quad (4.22)$$

En factorisant, l'expression suivante se fait jour :

$$D(s) = 1 + s \left[\frac{L_2}{r_L + R_1} + C_1 \frac{R_1 r_C + R_1 r_L + r_C r_L}{r_L + R_1} \right] + s^2 \frac{L_2}{R_1 + r_L} C_1 (R_1 + r_C) \quad (4.23)$$

C'est un polynôme du deuxième ordre qui suit le format :

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 \quad (4.24)$$

Dans une expression à faible entropie, le dénominateur et le numérateur sont sans unité car le terme de tête porte cette dernière, si toutefois la grandeur étudiée en possède une (une impédance s'exprime en ohms mais un gain, qu'il soit en tension ou courant est sans unité). Dans (4.24), vous distinguez le terme b_1 multiplié par s alors que b_2 l'est par s^2 . Comme démontré dans [2], si le polynôme est sans unité, cela signifie que la dimension de b_1 est du temps, [s], alors que la dimension de b_2 est du temps carré, [s²]. Il est possible de montrer que b_1 est la somme des constantes de temps du circuit alors que b_2 est le produit de deux constantes de temps impliquant les deux éléments de stockage d'énergie.

Les calculs de fonctions de transfert, quels que soient leurs ordres, débutent toujours par le calcul d'un gain de référence. Ici, et nous adopterons cette approche dans le reste du chapitre, nous allons considérer l'état de référence pour $s = 0$, valeur à laquelle le gain H_0 sera évalué. En observant la Figure 4.11, le gain de référence est immédiat :

$$H_0 = \frac{r_L}{r_L + R_1} \quad (4.25)$$

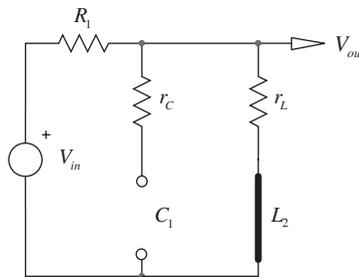


Figure 4.11 Le gain de référence H_0 est calculé pour $s = 0$ lorsque le condensateur est retiré et que la bobine est remplacée par un court-circuit.

Les constantes de temps du circuit τ_1 et τ_2 sont alors obtenues de façon classique avec une source excitation éteinte. Pour observer le circuit en condition de courant continu, retirez les condensateurs et court-circuitez les bobines : il s'agit alors de l'état de référence pour ces éléments de stockage d'énergie correspondant à l'une

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

des quatre options possibles pour Z_1 et Z_2 . Pourquoi d'ailleurs retenir celle-ci en particulier ? Parce que je pense qu'elle est la plus intuitive et se rapproche de la mesure d'un point de polarisation au laboratoire mais également lorsque l'on démarre une simulation SPICE. En effet, SPICE ne résout que des équations linéaires et commence chaque simulation (alternative .AC ou transitoire .TRAN) par un calcul de point de polarisation (*biaspoint*) avant de linéariser le circuit autour de ce point de fonctionnement. La Figure 4.12 montre le circuit en continu lorsque l'excitation est réduite à 0. Les constantes de temps peuvent être extraites en déterminant la résistance vue des connexions de C_1 alors que L_2 est court-circuitée, c'est-à-dire dans son état de référence (Figure 4.12a) :

$$R = r_C + R_1 \parallel r_L \quad (4.26)$$

D'où :

$$\tau_1 = (r_C + R_1 \parallel r_L) C_1 \quad (4.27)$$

Et en déterminant la résistance vue des connexions de L_2 alors que C_1 est dans son état de référence, c'est-à-dire retiré du circuit (Figure 4.12b) :

$$R = R_1 + r_L \quad (4.28)$$

Ce qui donne :

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R_1 + r_L} \quad (4.29)$$

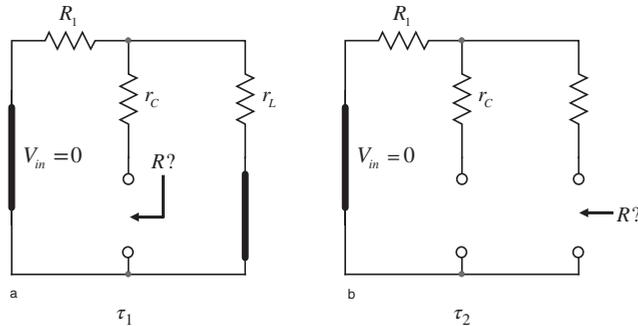


Figure 4.12 Les constantes de temps sont obtenues en étudiant le circuit placé dans son état continu avec une excitation éteinte.

Si l'on additionne ces constantes de temps, on obtient b_1 :

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 = (r_C + R_1 \parallel r_L) C_1 + \frac{L_2}{R_1 + r_L} \quad (4.30)$$

Ce qui est exactement l'expression dans (4.23) mais exprimé ici sous une forme plus compacte.

Le second terme b_2 combine les constantes de temps sous la forme d'un produit. L'une des deux constantes de temps est soit τ_1 ou τ_2 , vous choisissez. La seconde constante de temps est obtenue alors que l'élément de stockage impliqué dans la première constante de temps est placé dans son état de référence *opposé*. Comme nous considérerons toujours un état de référence continu, cet élément sera placé dans son état haute fréquence. Supposons que vous sélectionniez τ_1 pour la première constante de temps. Pour le calcul de la seconde constante de temps, ce condensateur C_1 qui est impliqué dans τ_1 sera placé dans son état haute-fréquence ou remplacé par un court-circuit. Si vous choisissez τ_2 plutôt, alors L_2 sera placée dans son état haute-fréquence ou retirée du circuit. Ensuite, vous regardez la résistance vue des connexions de l'autre élément de stockage avec le premier placé dans son état haute fréquence. Pour exprimer ce nouveau mode d'observation, la définition de b_2 adopte un nouveau formalisme :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 \tag{4.31}$$

Puisque l'on peut également choisir τ_2 comme première constante de temps, une expression redondante existe pour b_2 comme démontré dans [1] et [2]

$$b_2 = \tau_2 \tau_1^2 \tag{4.32}$$

Former et interpréter ces nouvelles expressions est simple comme illustré par la Figure 4.13.

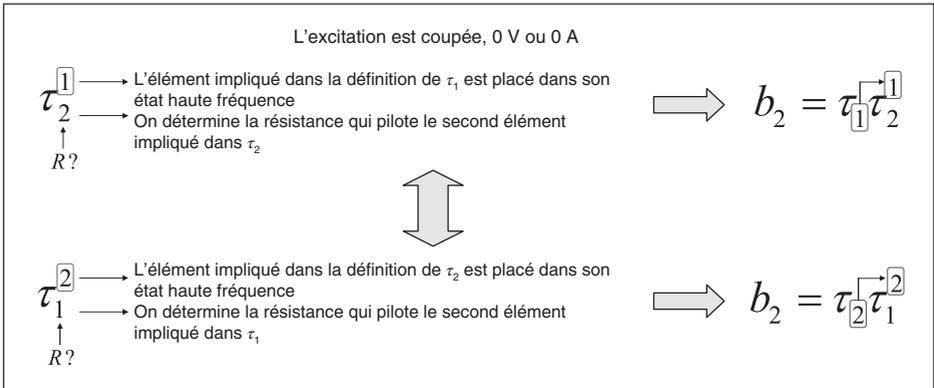


Figure 4.13 Le produit des constantes de temps suppose que l'élément associé à la première constante de temps soit placé dans son état haute-fréquence alors que l'on détermine la résistance vue des connexions du second élément dans cette configuration.

L'application pratique pour notre circuit du deuxième ordre est décrite en Figure 4.14. Dans le croquis (a), la résistance vue des connexions de C_1 alors que

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

L_2 est placée dans son état haute-fréquence (impédance infinie, la bobine est retirée du circuit) donne $r_C + R_1$. La première constante de temps associée est alors :

$$\tau_1^2 = C_1 (r_C + R_1) \quad (4.33)$$

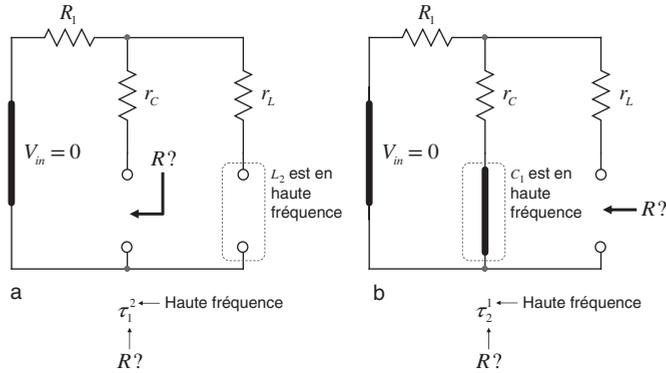


Figure 4.14 Le coefficient b_2 est déterminé en plaçant l'un des éléments de stockage d'énergie dans son état haute fréquence puis en déterminant la résistance offerte par les connexions du second élément temporairement retiré du circuit.

Dans le croquis (b), la résistance qui pilote la bobine L_2 alors que le condensateur C_1 est placé dans son état haute fréquence (un court-circuit) est $r_L + R_1 \parallel r_C$ ce qui donne la seconde constante de temps possible :

$$\tau_2^1 = \frac{L_2}{r_L + R_1 \parallel r_C} \quad (4.34)$$

Le dénominateur $D(s)$ peut alors être exposé sous une première forme polynomiale comme indiqué ci-dessous. Le coefficient de s est la somme des constantes de temps naturelles déterminées en (4.27) et (4.29). Le coefficient de s^2 est soit (4.31) ou (4.32) :

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 \quad (4.35)$$

En combinant les constantes de temps que nous avons déterminées, nous avons :

$$D(s) = 1 + s \left[C_1 (r_C + R_1 \parallel r_L) + \frac{L_2}{R_1 + r_L} \right] + s^2 \left[C_1 (r_C + R_1 \parallel r_L) \frac{L_2}{r_L + R_1 \parallel r_C} \right] \quad (4.36)$$

qui peut être aussi représenté par :

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_2 \tau_1^2 \quad (4.37)$$

Si l'on substitue les constantes de temps définies par (4.37), nous obtenons :

$$D(s) = 1 + s \left[C_1 (r_C + R_1 \parallel r_L) + \frac{L_2}{R_1 + r_L} \right] + s^2 \left[\frac{L_2}{R_1 + r_L} C_1 (r_C + R_1) \right] \quad (4.38)$$

Dans (4.36), b_2 est égal à :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = C_1 (r_C + R_1 \parallel r_L) \frac{L_2}{r_L + R_1 \parallel r_C} \quad (4.39)$$

Alors qu'en (4.38), il vaut :

$$b_2 = \tau_2 \tau_1^2 = \frac{L_2}{R_1 + r_L} C_1 (r_C + R_1) \quad (4.40)$$

Si vous développez (4.39), vous obtenez (4.40).

Quel est l'intérêt de pouvoir choisir entre deux expressions pour s^2 dans $D(s)$? Le premier avantage est la simplicité : selon la combinaison retenue, $\tau_1 \tau_2^1$ or $\tau_2 \tau_1^2$, on peut trouver que l'une des expressions est naturellement simple alors que la seconde réclame un effort supplémentaire pour la factoriser. Par exemple, dans notre cas, (4.40) est plus simple que (4.39) au premier abord. Pour cette raison, il est possible que vous vous engagiez en premier en faveur de $\tau_1 \tau_2^1$ pour ensuite réaliser que $\tau_2 \tau_1^2$ mène en fait à un résultat final plus facile à manipuler. Vous avez le choix, le résultat final restera identique quelle que soit la combinaison retenue. La seconde justification est la levée d'une possible indétermination qui peut se présenter lors du produit des constantes de temps. Mathématiquement, les indéterminations surviennent lors des opérations suivantes :

$$\begin{array}{c} \frac{\infty}{\infty} \\ \infty - \infty \\ \frac{0}{0} \\ 0 \cdot \infty \end{array}$$

Veuillez noter que $0/\infty$ n'est pas indéterminé et retourne 0.

Supposons une constante de temps τ_1 égale à 0 simplement parce que la résistance vue des connexions de L_1 pour $s = 0$ est infinie (l'une de ses branches est ouverte dans la configuration considérée) :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{\infty} = 0 \quad (4.41)$$

Lorsque cette constante de temps est multipliée par la seconde constante de temps τ_2^1 obtenue lorsque L_1 est placée dans son état haute impédance (la bobine

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

est retirée du circuit) un problème peut surgir selon l'expression résultant du produit. Si cette expression est finie, alors tout va bien et vous pourriez avoir :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = \frac{L_1}{\infty} R_2 C_2 = 0 \quad (4.42)$$

Cependant, si cette seconde constante de temps est infinie, alors survient l'indétermination :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = \frac{L_1}{\infty} \cdot \infty \cdot C_2 \quad (4.43)$$

Comment supprime-t-on cette indétermination ? En rebattant les combinaisons et en impliquant $\tau_2 \tau_1^2$ plutôt que $\tau_1 \tau_2^1$.

Une autre approche permet de lever cette indétermination. Si les connexions de l'élément considéré (C ou L) offrent une résistance infinie, pourquoi ne pas ajouter temporairement une résistance R_{inf} placée en parallèle sur les connexions de l'élément examiné ? Plus tard, dans la fonction de transfert finale, il vous sera possible de recalculer l'expression en considérant une résistance R_{inf} qui approche l'infini, engendrant les simplifications escomptées. Dans le même esprit, si la résistance vue des connexions de L ou C retourne 0Ω , pourquoi ne pas insérer une petite résistance en série avec l'une des connexions ? Une fois la fonction de transfert déterminée, il suffira de réduire cette résistance à 0 pour simplifier l'expression. Comme vous le lisez, même si le EET et le 2EET scinde un circuit complexe en sous-circuits plus simples, l'assemblage des différents éléments requiert toujours un minimum de recul (*engineering judgment*).

4.1.2 Déterminer la position des zéros

La remarque concernant l'unité du dénominateur est également valable pour le numérateur lorsque celui-ci est décrit par un polynôme du deuxième ordre dans le cas où deux zéros sont présents :

$$N(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 \quad (4.44)$$

N ne possédant pas de dimension, alors l'unité de a_1 est le temps [s] et la dimension de a_2 est du temps au carré, [s²]. Il est possible de montrer que a_1 est la somme des constantes de temps du circuit obtenues lorsque la sortie est nullifiée et que l'un des éléments de stockage d'énergie est placé dans son état de référence (C ouvert ou L court-circuitée dans notre cas). Concernant a_2 , le coefficient combine le produit de deux constantes de temps impliquant les deux éléments de stockage d'énergie lorsque la sortie est nullifiée avec l'un des éléments placé dans son état de référence *opposé*. Figure 4.15 détaille cette opération très similaire à ce que nous avons fait pour le dénominateur à l'exception près que l'excitation est remise en place et la réponse nullifiée. Pour distinguer ces constantes

de temps de celles du dénominateur (obtenues pour une excitation réduite à 0), nous allons ajouter l'indice N à la constante de temps considérée :

$$a_1 = \tau_{1N} + \tau_{2N} \tag{4.45}$$

et

$$a_2 = \tau_{1N} \tau_{2N}^1 \tag{4.46}$$

Également égal à :

$$a_2 = \tau_{2N} \tau_{1N}^2 \tag{4.47}$$

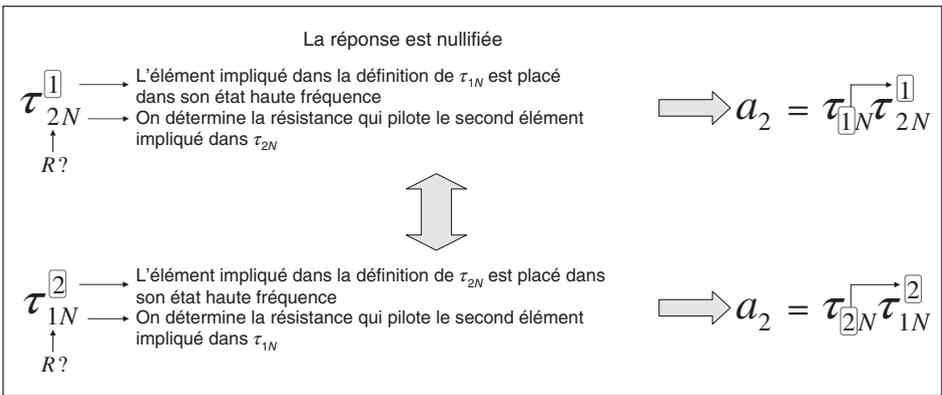


Figure 4.15 Le produit des constantes de temps implique que l'élément associé à la première constante de temps est placé dans son état haute-fréquence.

La Figure 4.15 explique comment construire le coefficient pour le terme du deuxième ordre. Le processus est similaire à celui adopté pour le dénominateur sauf que la réponse est nullifiée dans le cas présent. L'application de ces concepts nous mène à Figure 4.16 pour les premiers coefficients. Dans le croquis (a), comme la sortie est nullifiée et que la bobine est placée dans son état continu (un court-circuit) la résistance vue des connexions du condensateur est simplement r_C , donnant alors naissance à la constante de temps suivante :

$$\tau_{1N} = r_C C_1 \tag{4.48}$$

En Figure 4.16b, la résistance vue par la bobine L_2 alors que la sortie est nullifiée et le condensateur placé dans son état continu est retiré vaut r_L . Ainsi :

$$\tau_{2N} = \frac{L_2}{r_L} \tag{4.49}$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

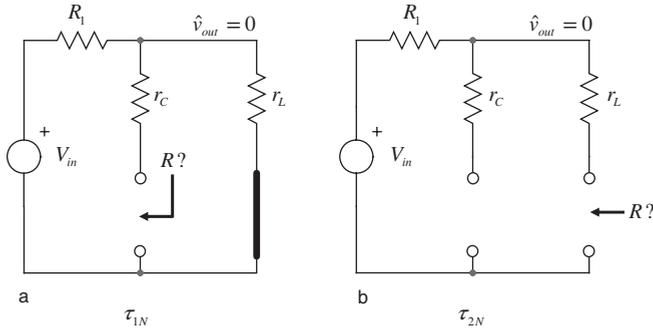


Figure 4.16 Les coefficients du premier ordre pour s sont obtenus lorsque la réponse est nullifiée et les éléments de stockage d'énergie placés dans leur état de référence (C ouvert et L court-circuitée).

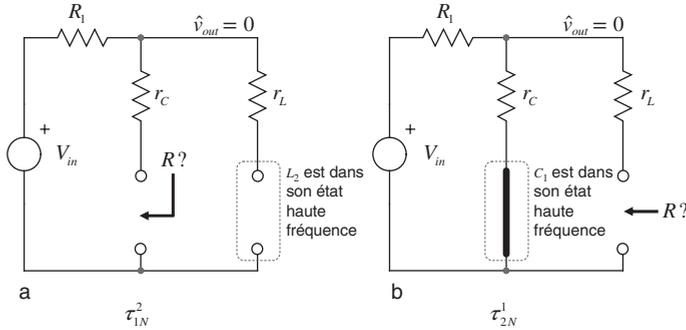


Figure 4.17 Les coefficients du second ordre pour s^2 sont également déterminés avec une réponse nullifiée mais l'un des éléments de stockage d'énergie est placé dans un état opposé à celui de référence (C remplacé par un court-circuit ou L ouverte). Rappelons que l'état de référence adopté correspond à $s = 0$.

En Figure 4.17, les deux croquis représentent les configurations grâce auxquelles les coefficients du deuxième ordre peuvent être déterminés lorsque la sortie est nullifiée. En (a), la résistance vue des connexions du condensateur alors que la bobine L_2 est placée dans son état haute fréquence, est, une fois encore, la résistance série r_C . La constante de temps associée est ainsi égale à :

$$\tau_{1N}^2 = r_C C_1 \quad (4.50)$$

Pas de difficulté pour le croquis (b) dans lequel la résistance vue des connexions de la bobine alors que le condensateur est remplacé par un court-circuit (état haute fréquence) est r_L :

$$\tau_{2N}^1 = \frac{L_2}{r_L} \quad (4.51)$$

On peut à présent assembler ces résultats et, de par la redondance des solutions, former deux numérateurs avec (4.48) et (4.51) ou en associant (4.49) et (4.50) pour s^2 :

$$N(s) = 1 + s \left(r_C C_1 + \frac{L_2}{r_L} \right) + s^2 \left(r_C C_1 \frac{L_2}{r_L} \right) \quad (4.52)$$

Égal à :

$$N(s) = 1 + s \left(r_C C_1 + \frac{L_2}{r_L} \right) + s^2 \left(\frac{L_2}{r_L} r_C C_1 \right) \quad (4.53)$$

En développant les termes entre parenthèses, il vient facilement :

$$N(s) = (1 + s r_C C_1) \left(1 + s \frac{L_2}{r_L} \right) \quad (4.54)$$

4.1.3 Vérifier les résultats et tracer la réponse dynamique

Pour tester l'intégrité de nos expressions, nous avons construit une feuille Mathcad® dans laquelle toutes les constantes de temps trouvées prennent place. La fonction de transfert de référence est celle obtenue avec (4.6) et nous allons comparer sa réponse avec celle délivrée par l'expression associant les constantes de temps entre elles. Pour écrire $N(s)$ et $D(s)$, je vous recommande de capturer les constantes de temps indépendamment les unes des autres dans Mathcad®. Ensuite, vous construisez D et N selon les définitions données en (4.36) et (4.52). De cette façon, si un problème est identifié (par exemple, une déviation évidente entre la réponse de la fonction de référence et celle délivrée en associant les constantes de temps), il suffit de vérifier les diverses étapes et ne corriger que la ou les constantes de temps fautives. Dans le cas où l'on calcule la fonction de transfert brutalement, la correction d'une faute peut s'avérer délicate, notamment en présence de circuits compliqués : on reprend tous les calculs depuis le départ. Au contraire, en exprimant clairement chacune des constantes de temps séparément, les corrections deviennent extrêmement simples et rapides. C'est l'une des caractéristiques majeures des techniques de calculs rapides. La Figure 4.18 montre les résultats obtenus, en particulier comment D et N peuvent revêtir différentes formes, selon la façon dont vous combinez les coefficients de s^2 entre eux.

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

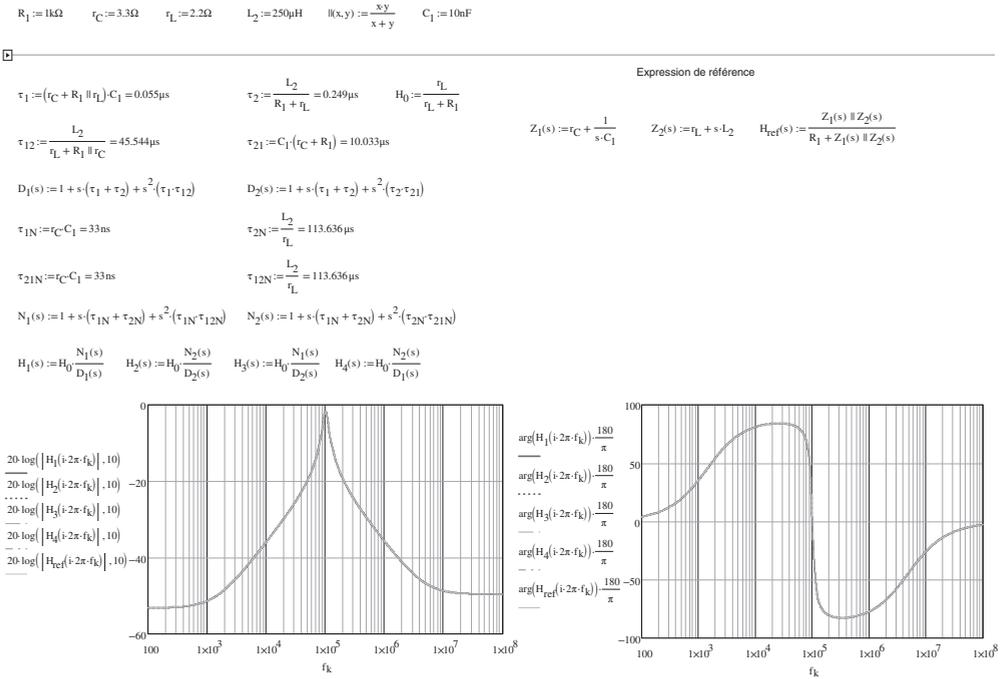


Figure 4.18 Toutes les réponses se superposent tant en phase qu'en amplitude.

Maintenant que nous avons des formes polynomiales pour N et D , nous pouvons les réarranger afin de suivre le format appris au chapitre 2. En partant du numérateur, nous avons :

$$N(s) = 1 + a_1s + a_2s^2 \tag{4.55}$$

Supposons que nous n'ayons pas immédiatement vu la forme factorisée donnée en (4.54). On peut évaluer le facteur de qualité Q_N défini par :

$$Q_N = \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} \tag{4.56}$$

Si l'on applique les valeurs numériques de la feuille Mathcad®, nous obtenons un Q_N de 0.017, indiquant que les zéros sont bien séparés ($Q_N \ll 1$) : on peut alors appliquer la formule approximative (*low-Q approximation*) définie au chapitre 2. En utilisant cet outil, on peut définir la position des deux zéros :

$$\omega_{z1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\tau_{1N} + \tau_{2N}}{\tau_{1N}\tau_{2N}} \tag{4.57}$$

$$\omega_{z2} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\tau_{1N} + \tau_{2N}} \tag{4.58}$$

Compte tenu des valeurs de composants, $\tau_{1N} = 33 \text{ ns}$ alors que $\tau_{2N} = 133.6 \mu\text{s}$. Les deux zéros peuvent ainsi être réécrits d'une façon simplifiée, puisque, dans le cas précis, $\tau_{2N} = \tau_{2N}^1$:

$$\omega_{z1} \approx \frac{\tau_{2N}}{\tau_{1N} \tau_{2N}^1} = \frac{1}{\tau_{1N}} = \frac{1}{r_C C_1} \quad (4.59)$$

$$\omega_{z2} \approx \frac{1}{\tau_{2N}} = \frac{r_L}{L_2} \quad (4.60)$$

$N(s)$ peut alors être factorisé selon un format similaire à celui obtenu avec (4.54):

$$N(s) = \left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right) \quad (4.61)$$

Concernant $D(s)$, une analyse identique s'applique, sauf que le facteur de qualité est supérieur, impliquant une réponse faiblement amortie :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = 5.2 \quad (4.62)$$

La pulsation de résonance ω_0 à laquelle le double pôle est positionné est définie par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = 632 \text{ krd/s} \quad (4.63)$$

ou

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 100.6 \text{ kHz} \quad (4.64)$$

Avec ces définitions en main, on peut récrire le dénominateur sous une forme canonique :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (4.65)$$

et assembler la fonction de transfert finale selon l'expression ci-après :

$$H(s) = H_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.66)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

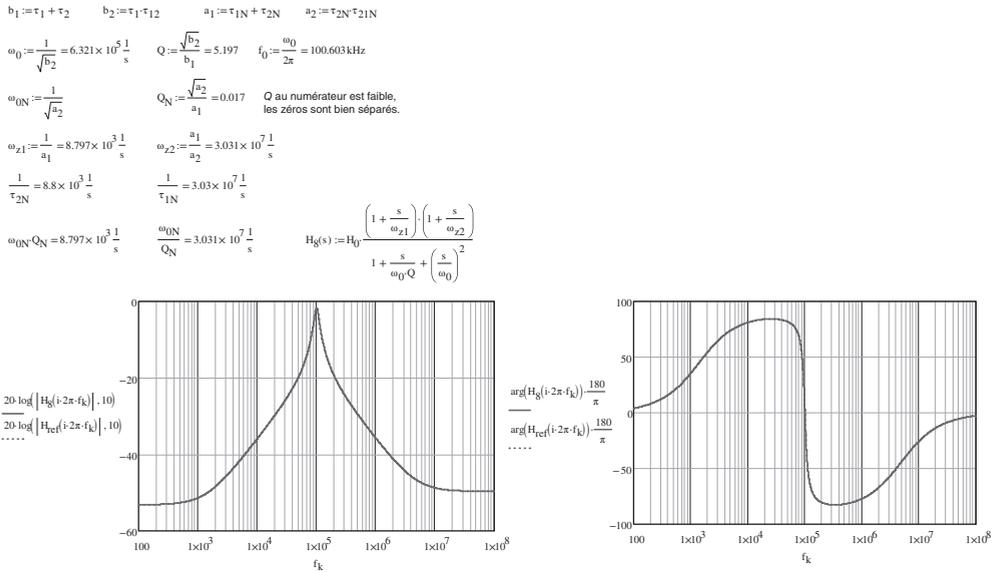


Figure 4.19 La réponse de la fonction de transfert exprimée sous une forme canonique correspond parfaitement à celle obtenue avec (4.6).

La Figure 4.19 montre la réponse en fréquence délivrée par (4.66) et confirme son accord avec celle obtenue en utilisant l'expression de référence en (4.6). Un résumé de la méthode décrite apparaît en Figure 4.20 pour le dénominateur alors que la Figure 4.21 détaille les étapes pour le numérateur. Dans de nombreux cas, les zéros peuvent être trouvés par inspection. Cela permet d'écrire le numérateur sous une forme factorisée en un instant, sans passer par toutes les étapes décrites. Nous verrons plus tard que l'inspection mène toujours (lorsqu'elle est possible bien sûr) à l'expression la plus simple possible du numérateur.

4.1.4 Exemple 1 – un filtre passe-bas

En Figure 4.22, il apparaît un filtre classique du second ordre. En appliquant la méthode du 2EET, nous allons déterminer la fonction de transfert liant V_{out} à V_{in} en un temps record. Toutes les étapes sont rassemblées en Figure 4.23 au travers de petits croquis. Nous vous encourageons, au moins au début, à illustrer chaque étape par un dessin sur lequel vous pourrez revenir en cas de doute sur la formule finale.

Déterminer le gain de référence

1. Dessinez le circuit en conditions de polarisation continue : retirez les condensateurs, court-circuituez les bobines.
2. Calculer la fonction de transfert dans cet état de référence, vous avez H_0

Déterminer le dénominateur

1. Eteignez la source d'excitation et déterminez les résistances pilotant chacun des éléments de stockage d'énergie. Lorsque vous évaluez une constante de temps, le second élément est maintenu dans son état de référence (C ouvert, L court-circuitée). Vous obtenez τ_1 et τ_2 .
- 2a. Sélectionnez τ_1 , placez l'élément associé dans son état haute-fréquence et déterminez la résistance qui attaque le second élément de stockage d'énergie : τ_2^1

- 2b. Sélectionnez τ_2 , placez l'élément associé dans son état haute-fréquence et déterminez la résistance qui attaque le second élément de stockage d'énergie : τ_1^2

⇒

$$D(s) = 1 + b_1s + b_2s^2$$

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2$$

$$b_2 = \tau_1\tau_2^1 \text{ ou } b_2 = \tau_2\tau_1^2$$

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}}$$

$$Q \ll 1 \left\{ \begin{array}{l} \omega_{p_1} = \frac{1}{b_1} \\ \omega_{p_2} = \frac{b_1}{b_2} \end{array} \right.$$

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$$

↓ $Q \ll 1$

$$D(s) \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_2}}\right)$$

Figure 4.20 La détermination du dénominateur réclame des étapes de calculs menées sur un circuit pour lequel l'excitation est coupée.

Commençons par l'étude en continu, $s = 0$, valeur pour laquelle le gain de référence sera déterminé : C_2 est retiré et L_1 remplacée par un court-circuit. Nous observons la Figure 4.23a. Le gain statique, dans ce mode, est immédiat :

$$H_0 = \frac{R_3}{r_L + R_3} \tag{4.67}$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

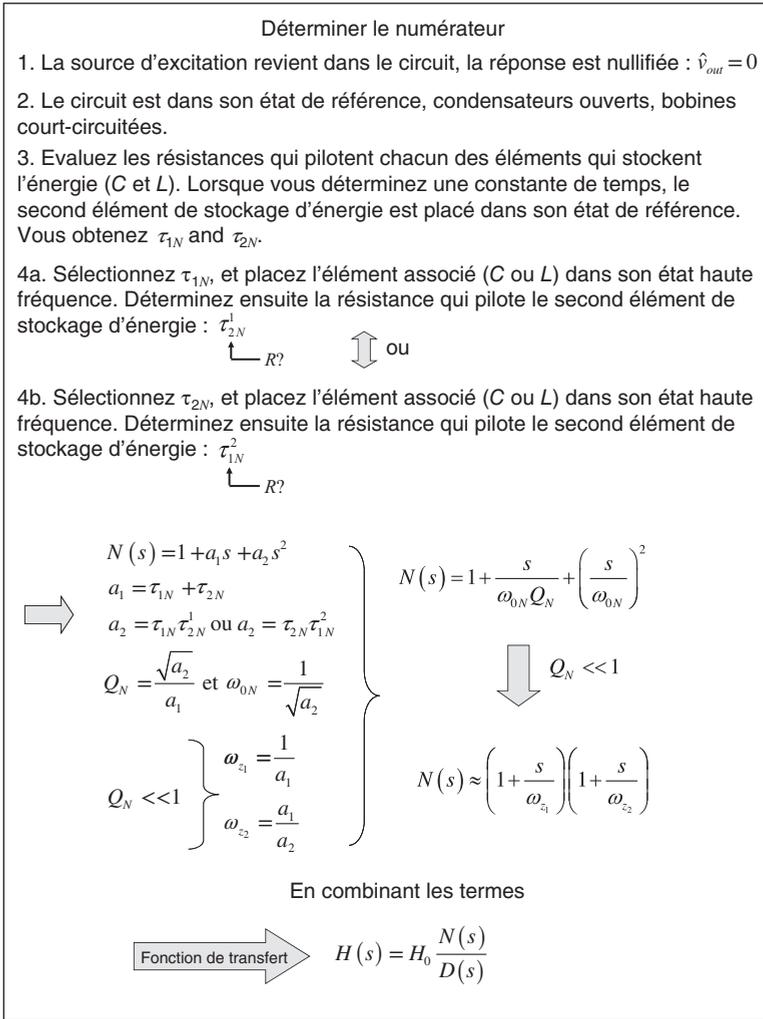


Figure 4.21 Le numérateur est obtenu selon un procédé identique à celui adopté pour le dénominateur mais la réponse du circuit est nullifiée avec une excitation remise en place.

En Figure 4.23b, nous calculons la constante de temps τ_2 associée à C_2 . Le résultat est trouvé en lisant le schéma :

$$\tau_2 = C_2 (r_C + r_L \parallel R_3) \tag{4.68}$$

En Figure 4.23c, la constante de temps τ_1 associée à L_1 est définie par :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_L + R_3} \tag{4.69}$$

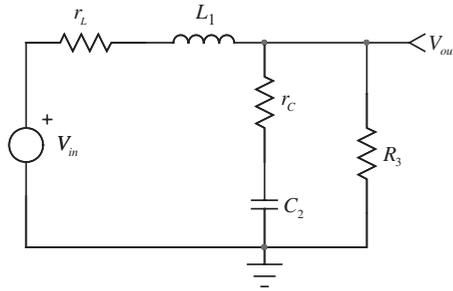


Figure 4.22 La fonction de transfert de ce filtre passe-bas peut être trouvée très rapidement en appliquant les étapes décrites en Figure 4.20 et Figure 4.21.

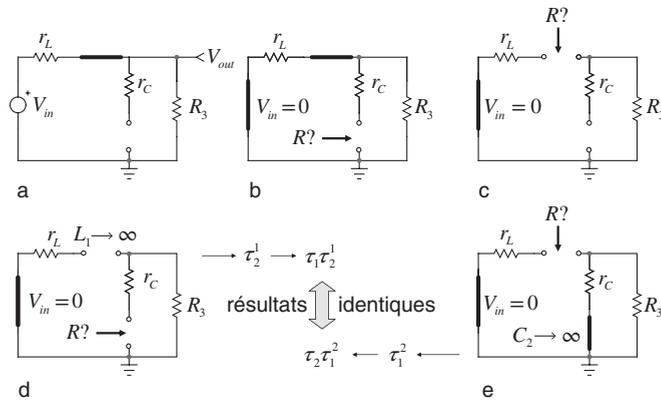


Figure 4.23 Nous recommandons de scinder l'analyse en plusieurs circuits sur lesquels vous pourrez revenir en cas de doute sur la formule finale.

Nous pouvons former b_1 :

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{L_1}{r_L + R_3} + C_2 (r_C + r_L \parallel R_3) \quad (4.70)$$

En Figure 4.23d, si nous plaçons L_1 dans son état haute-fréquence (la bobine est retirée du circuit) et que l'on détermine la résistance qui pilote C_2 dans ce mode, nous avons :

$$\tau_2^1 = C_2 (r_C + R_3) \quad (4.71)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Il est également possible de choisir une configuration différente comme illustré en Figure 4.23e. La constante de temps impliquant L_1 alors que C_2 est placé dans son état haute-fréquence (remplacé par un court-circuit) est définie par :

$$\tau_1^2 = \frac{L_1}{r_L + R_3 \parallel r_C} \quad (4.72)$$

Il semble que l'association de (4.71) avec (4.69) donnera un coefficient b_2 qui sera plus simple que si nous combinons (4.72) avec (4.68). Ainsi, b_2 sera exprimé par :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = \frac{L_1}{r_L + R_3} C_2 (r_C + R_3) \quad (4.73)$$

Nous pouvons à présent former le dénominateur $D(s)$:

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 = 1 + s \left[\frac{L_1}{r_L + R_3} + C_2 (r_C + r_L \parallel R_3) \right] + s^2 \left[\frac{L_1}{r_L + R_3} C_2 (r_C + R_3) \right] \quad (4.74)$$

Il est possible de le manipuler afin de suivre la forme canonique exprimée à la Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.75)$$

Dans laquelle :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{\frac{L_1}{r_L + R_3} C_2 (r_C + R_3)}}{\frac{L_1}{r_L + R_3} + C_2 (r_C + r_L \parallel R_3)} = \frac{\sqrt{C_2 L_1 (R_3 + r_C)(R_3 + r_L)}}{L_1 + C_2 (r_C r_L + r_C R_3 + r_L R_3)} \quad (4.76)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2} \sqrt{\frac{r_C + R_3}{r_L + R_3}}} \quad (4.77)$$

Le numérateur peut être déterminé en inspectant le circuit transformé comme dessiné en Figure 4.24. Dans un circuit transformé, C_2 et L_1 sont respectivement remplacés par leur impédance, $1/sC_2$ et sL_1 . Quelle condition d'impédance particulière entraîne la nullification de la réponse : si un court-circuit transformé

shunte la sortie à la masse. Si l'impédance créée par la connexion série de r_C avec C_2 devient un court-circuit pour $s = s_z$, alors le zéro se manifeste à cette valeur de pulsation :

$$Z(s) = r_C + \frac{1}{sC_2} = \frac{1 + sr_C C_2}{sC_2} = 0 \quad (4.78)$$

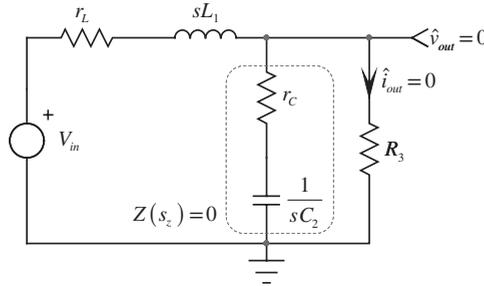


Figure 4.24 En inspectant le circuit transformé à la pulsation $s = s_z$, la réponse est nullifiée si r_C et C_2 forment un court-circuit transformé.

La racine est réelle et égale à :

$$s_z = -\frac{1}{r_C C_2} \quad (4.79)$$

Elle donne un zéro dans le demi-plan gauche et positionné à :

$$\omega_z = \frac{1}{r_C C_2} \quad (4.80)$$

Le numérateur $N(s)$ est immédiatement défini par :

$$N(s) = 1 + sr_C C_2 = 1 + \frac{s}{\omega_z} \quad (4.81)$$

La fonction de transfert finale $H(s)$ combine les résultats obtenus selon l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{R_3}{R_3 + r_L} \frac{1 + sr_C C_2}{1 + s \left[\frac{L_1}{r_L + R_3} + C_2 (r_C + r_L \parallel R_3) \right] + s^2 \left[\frac{L_1}{r_L + R_3} C_2 (r_C + R_3) \right]} \quad (4.82) \\ &= H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2} \end{aligned}$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Pour vérifier la validité de cette équation, nous allons tracer sa réponse dynamique et la comparer à celle de la fonction de transfert brute : en Figure 4.22, nous observons un diviseur formé par r_C - C_2 en parallèle avec R_3 et piloté par r_L - L_1 . La fonction de transfert brute est simplement donnée par :

$$H(s) = \frac{R_3 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right)}{R_3 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right) + r_L + sL_1} \quad (4.83)$$

La Figure 4.25 représente les résultats rassemblés sous une feuille Mathcad®. Vous pouvez voir toutes les constantes de temps évaluées individuellement et assemblées pour former $D(s)$. Si vous détectez une erreur quelque part, la correction de la constante de temps fautive est simple et immédiate. Comme confirmé par les tracés, les expressions (4.83) et (4.82) sont identiques.

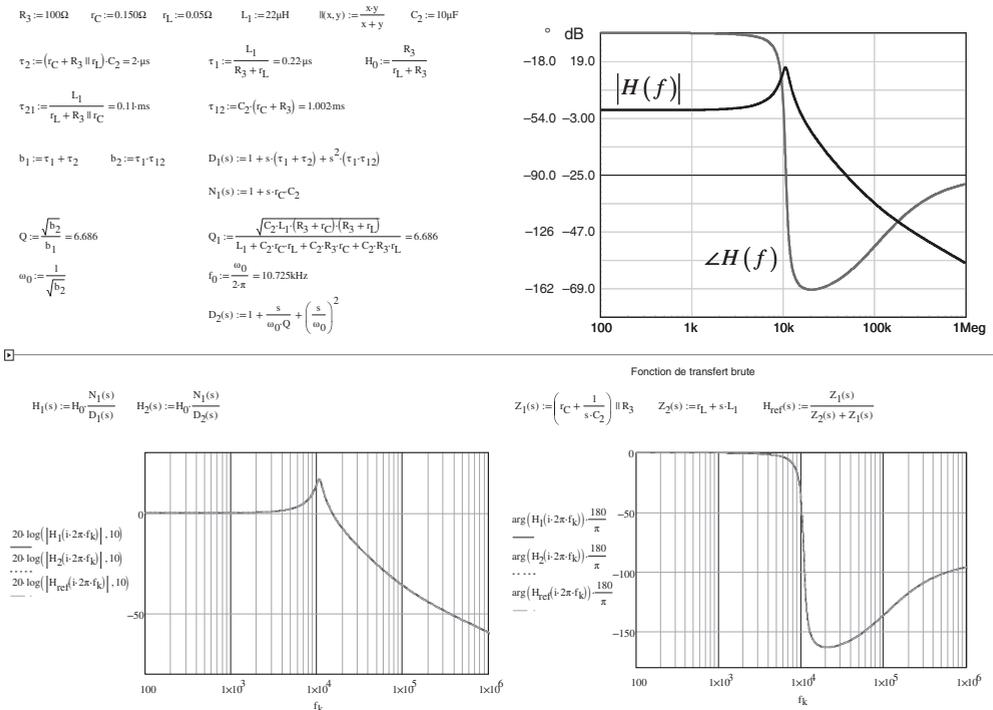


Figure 4.25 Une feuille Mathcad® associe toutes les constantes de temps pour former l'expression finale.

4.1.5 Exemple 2 – un filtre à deux condensateurs

Considérons à présent le filtre capacitif proposé en Figure 4.26. Nous pouvons identifier deux condensateurs dont les variables d'état sont indépendantes : il s'agit d'un circuit du deuxième ordre. Sa fonction de transfert peut être déterminée en appliquant les étapes décrites en Figure 4.20 et en Figure 4.21. En commençant par le dénominateur, la Figure 4.27 rassemble toutes les étapes nécessaires à la détermination de $D(s)$. Le croquis de la Figure 4.27a permet de déterminer la fonction de transfert en continu, lorsque $s = 0$: tous les condensateurs sont retirés du circuit :

$$H_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (4.84)$$

Les constantes de temps naturelles sont obtenues lorsque la source est éteinte et remplacée par un court-circuit comme indiqué en Figure 4.27b. Pour simplifier l'analyse, il est recommandé de redessiner le circuit en repliant les connexions supérieures de R_3/R_2 à la masse. C'est ce que la Figure 4.27c représente. En Figure 4.27d, la constante de temps associée à C_2 est :

$$\tau_2 = C_2 (R_3 + R_2 \parallel R_1) \quad (4.85)$$

En Figure 4.27e, la constante de temps impliquant C_1 est déterminée par :

$$\tau_1 = C_1 (R_2 \parallel R_1) \quad (4.86)$$

Nous avons la définition de b_1 :

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 = C_1 (R_2 \parallel R_1) + C_2 (R_3 + R_2 \parallel R_1) \quad (4.87)$$

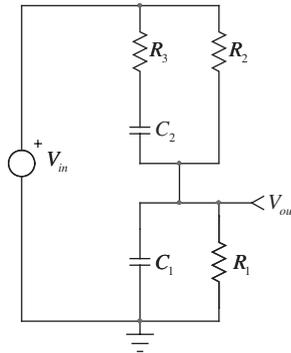


Figure 4.26 La fonction de transfert de ce filtre à 2 condensateurs peut être obtenue rapidement en appliquant le 2EET.

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Pour le coefficient de b_2 , la Figure 4.27f nous montre comment évaluer la constante de temps impliquant C_2 lorsque le condensateur C_1 est placé dans son état haute-fréquence (il est remplacé par un court-circuit) :

$$\tau_2^1 = R_3 C_2 \quad (4.88)$$

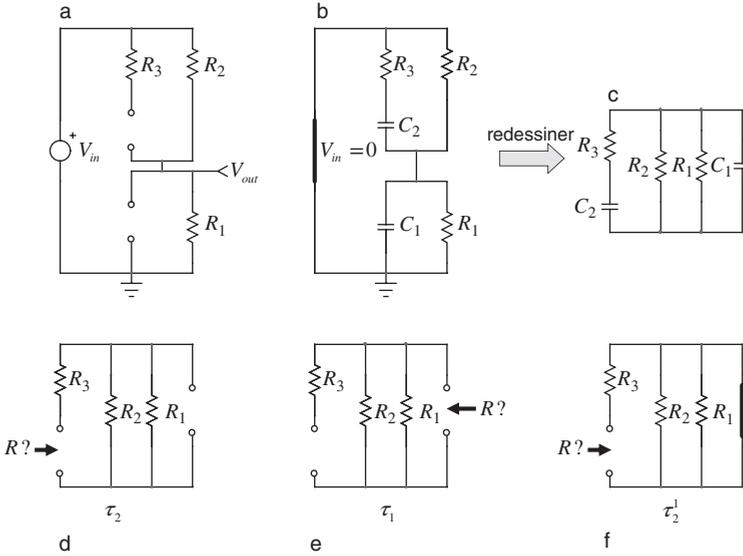


Figure 4.27 Le dénominateur est obtenu en évaluant les constantes de temps naturelles pour une source d'excitation réduite à 0 V.

Le coefficient b_2 est simplement égal à :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = C_1 (R_2 \parallel R_1) R_3 C_2 \quad (4.89)$$

Le dénominateur brut est défini par :

$$D(s) = 1 + b_1 s + b_2 s^2 = 1 + s [C_1 (R_2 \parallel R_1) + C_2 (R_3 + R_2 \parallel R_1)] + s^2 [C_1 (R_2 \parallel R_1) R_3 C_2] \quad (4.90)$$

On peut l'arranger selon la forme canonique donnée en in Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.91)$$

dans laquelle

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{C_1 C_2 (R_2 \parallel R_1) R_3}}{C_1 (R_2 \parallel R_1) + C_2 (R_3 + R_2 \parallel R_1)} \quad (4.92)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 (R_2 \parallel R_1) R_3}} \quad (4.93)$$

Si Q est très petit, nous pouvons considérer l'approximation (*low-Q approximation*) qui indique qu'un polynôme du deuxième ordre fortement amorti tel que le décrit (4.91) peut être remplacé par deux pôles cascades définis par :

$$\omega_{p_1} = \omega_0 Q = \frac{1}{b_1} \quad (4.94)$$

$$\omega_{p_2} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{b_1}{b_2} \quad (4.95)$$

Dans ce cas :

$$D(s) \approx \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p_2}}\right) \quad (4.96)$$

On peut déterminer le numérateur de différentes façons. La plus rapide et la plus simple reste l'inspection. En étudiant la Figure 4.28, quelle condition d'impédance dans le circuit transformé observé à $s = s_z$ pourrait nullifier la réponse ? $Z_2(s)$ qui serait un court-circuit transformé ?

$$Z_2(s) = \frac{R_1}{1 + sR_1C_1} = 0 \quad (4.97)$$

Cela ne peut arriver que si le dénominateur approche l'infini, c'est à dire si s approche l'infini : il n'y a pas de zéro associé à C_1 . Qu'en est-il si $Z_1(s)$ devient un circuit ouvert et bloque la propagation du stimulus d'entrée ? On peut déterminer son impédance dans notre tête : imaginez une source de courant I_T qui attaque le réseau constitué de R_2 en parallèle avec R_3 en série avec C_2 . La réponse est la tension aux bornes de la source I_T . Pour $s = 0$, I_T « voit » R_2 puisque C_2 est retiré à 0 Hz. Qu'est-ce qui pourrait nullifier la réponse aux bornes de la source I_T ? Un court-circuit transformé impliquant R_3 et C_2 . Et enfin, quelle résistance C_2 “voit-il” lorsque l'excitation I_T est coupée ? $R_2 + R_3$. Ainsi, Z_1 est définie par :

$$Z_1(s) = R_2 \frac{1 + sR_3C_2}{1 + sC_2(R_3 + R_2)} \quad (4.98)$$

Cette impédance devient infinie si son dénominateur s'annule. En d'autres termes, quel pôle affecte Z_1 ? Si l'on résout l'équation :

$$sC_2(R_2 + R_3) + 1 = 0 \quad (4.99)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

on obtient :

$$s_z = -\frac{1}{C_2(R_2 + R_3)} \tag{4.100}$$

ou

$$\omega_z = \frac{1}{C_2(R_2 + R_3)} \tag{4.101}$$

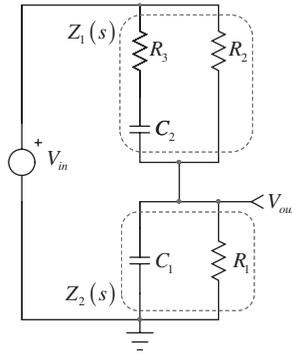


Figure 4.28 Le numérateur peut être obtenu par inspection : pour quelle condition le stimulus V_{in} pourrait ne pas se propager et nullifier ainsi la sortie ?

Dans ce cas, le pôle de Z_1 devient le zéro de la fonction de transfert.

La seconde option consiste à appliquer une NDI et déterminer τ_{2N} . Le circuit de test est celui présenté en Figure 4.29.

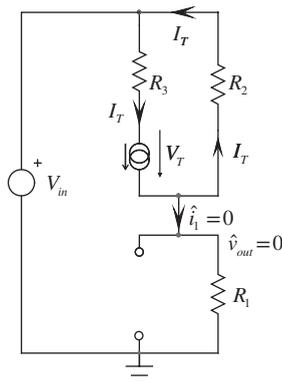


Figure 4.29 Une configuration NDI vous permet d'évaluer la position du zéro rapidement.

Puisque la sortie est nullifiée, le courant de test I_T ne peut circuler qu'au travers de R_3 et R_2 , donnant une constante de temps τ_{2N} égale à :

$$\tau_{2N} = C_2 (R_2 + R_3) \tag{4.102}$$

Le zéro est positionné à :

$$\omega_z = \frac{1}{\tau_{2N}} = \frac{1}{C_2 (R_2 + R_3)} \tag{4.103}$$

La fonction de transfert finale est alors définie par

$$H(s) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1 + sC_2 (R_2 + R_3)}{1 + s[C_1 (R_2 \parallel R_1) + C_2 (R_3 + R_2 \parallel R_1)] + s^2 [C_1 (R_2 \parallel R_1) R_3 C_2]} \tag{4.104}$$

$$= H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

Pour vérifier nos résultats, nous avons construit une feuille Mathcad® et lancé une simulation SPICE. La Figure 4.30 confirme que nos calculs sont corrects.

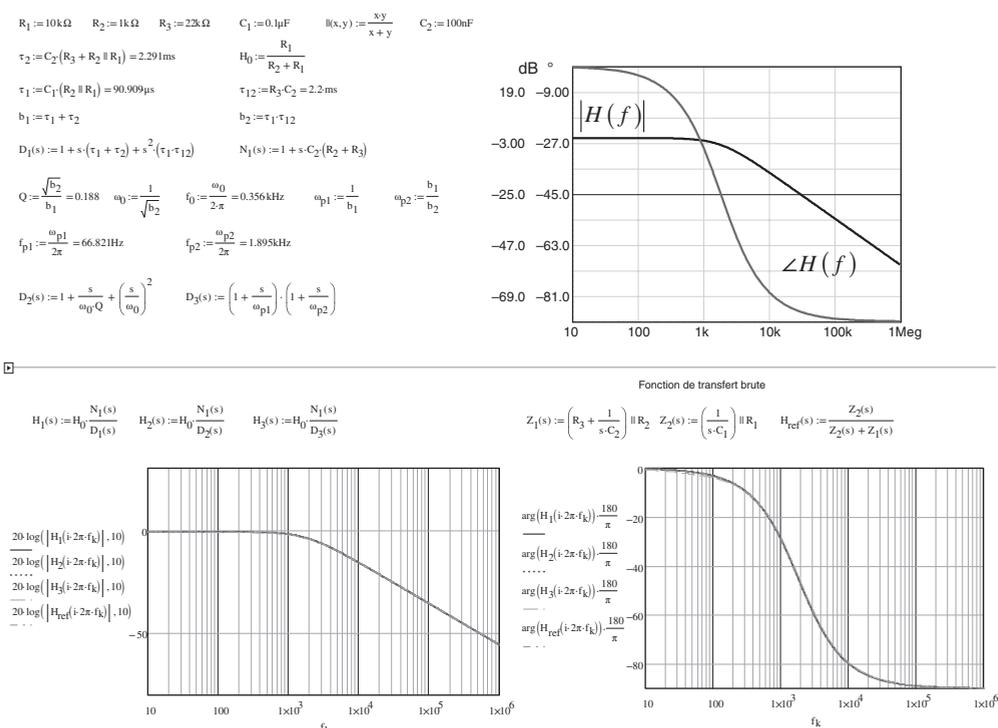


Figure 4.30 Mathcad® et SPICE s'accordent sur les résultats finaux.

4.1.6 Exemple 3 – un filtre réjecteur à deux condensateurs

Notre troisième exemple apparaît en Figure 4.31. Il s'agit du circuit présenté en [1] et nous allons appliquer la méthode du 2EET pour déterminer sa fonction de transfert. Les quatre étapes nécessaires à la détermination de son dénominateur sont présentées en Figure 4.32. Le premier circuit illustre la configuration pour $s = 0$, impliquant que les deux condensateurs sont retirés du montage comme dessiné en Figure 4.32a.

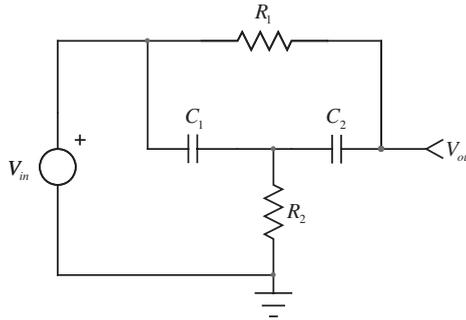


Figure 4.31 Deux condensateurs et deux résistances forment un simple filtre réjecteur du deuxième ordre.

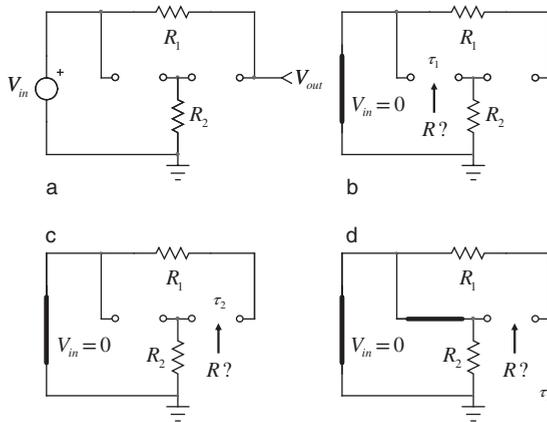


Figure 4.32 Quatre étapes sont nécessaires pour déterminer les coefficients du dénominateur.

La fonction de transfert est immédiate et égale à 1 :

$$H_0 = 1 \quad (4.105)$$

La première constante de temps τ_1 est obtenue en déterminant la résistance vue des connexions de C_1 alors que l'excitation est réduite à 0 comme en Figure 4.32b.

La résistance dans cette configuration est R_2 puisque R_1 possède l'une de ses connexions ouverte. La constante de temps est alors :

$$\tau_1 = R_2 C_1 \quad (4.106)$$

En Figure 4.32c, on peut déterminer la deuxième constante de temps τ_2 . Elle combine R_1 et R_2 en série pour donner :

$$\tau_2 = (R_1 + R_2) C_2 \quad (4.107)$$

La Figure 4.32d indique comment calculer le coefficient du deuxième ordre de b_2 . R_2 est court-circuitée et R_1 reste seule. La constante de temps est alors définie par :

$$\tau_2^1 = R_1 C_2 \quad (4.108)$$

Le dénominateur rassemble tous les termes dans l'expression suivante :

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 = 1 + s[R_2 C_1 + (R_1 + R_2) C_2] + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \quad (4.109)$$

On peut la réarranger selon la forme canonique de la Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.110)$$

dans laquelle,

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_2 C_1 + (R_1 + R_2) C_2} \quad (4.111)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.112)$$

L'application numérique nous dira si Q est suffisamment petit pour appliquer l'approximation consistant à remplacer le polynôme du deuxième ordre par deux pôles cascades.

Les zéros sont trouvés en appliquant une analyse NDI trois fois : deux fois pour former a_1 avec τ_{1N} et τ_{2N} , puis une troisième fois pour déterminer a_2 . Ces étapes apparaissent en Figure 4.33.

En Figure 4.33a, puisqu'aucun courant ne circule dans R_1 , la résistance vue des connexions de C_1 est simplement R_2 :

$$\tau_{1N} = R_2 C_1 \quad (4.113)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

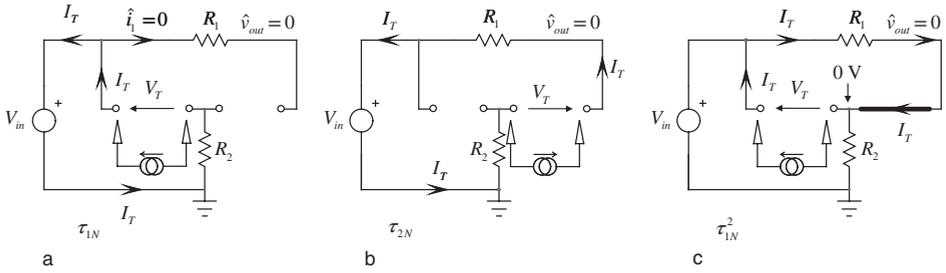


Figure 4.33 L'analyse NDI est appliquée dans trois configurations différentes.

En Figure 4.33b, le courant I_T circule dans R_1 et R_2 cependant, la connexion droite du générateur de courant est mise à la masse par la sortie nullifiée, $\hat{v}_{out} = 0$. La tension V_T est ainsi la tension aux bornes de R_2 . La résistance vue des connexions de C_2 est simplement R_2 . Ainsi :

$$\tau_{2N} = R_2 C_2 \quad (4.114)$$

En Figure 4.33c, C_2 est placé dans son état haute-fréquence (il est remplacé par un court-circuit) et nous voulons déterminer la résistance vue des connexions de C_1 . Compte tenu de la sortie nullifiée, la tension aux bornes de R_2 est également égale à 0 V et la seule résistance restant dans le circuit est R_1 . La constante de temps est égale à :

$$\tau_{1N}^2 = R_1 C_1 \quad (4.115)$$

Nous pouvons vérifier ces expressions en simulant le schéma de la Figure 4.33. C'est ce que la Figure 4.34 représente avec les amplificateurs à transconductance. Les résultats affichés aux nœuds R1N, R2N et R21N confirment nos calculs. Il est toujours intéressant de procéder à la simulation SPICE afin de vérifier ses calculs. Le calcul des points de polarisation est immédiat et l'on peut identifier une erreur dans une équation rapidement.

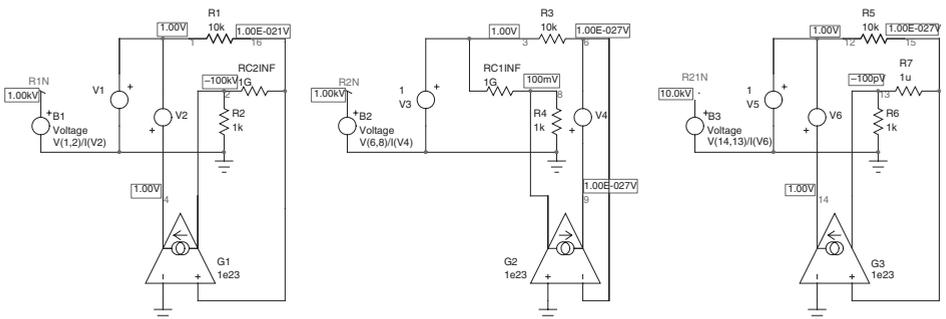


Figure 4.34 La simulation SPICE de la Figure 4.33 confirme nos résultats.

Avant de continuer dans nos calculs, il nous faut une fonction de transfert brute dont la réponse dynamique nous permettra de vérifier les réponses obtenues en utilisant le 2EET. Le circuit de la Figure 4.31 peut être redessiné en transformant la source V_{in} en deux générateurs distincts de telle sorte que le théorème de superposition soit applicable. La Figure 4.35a illustre cette idée.

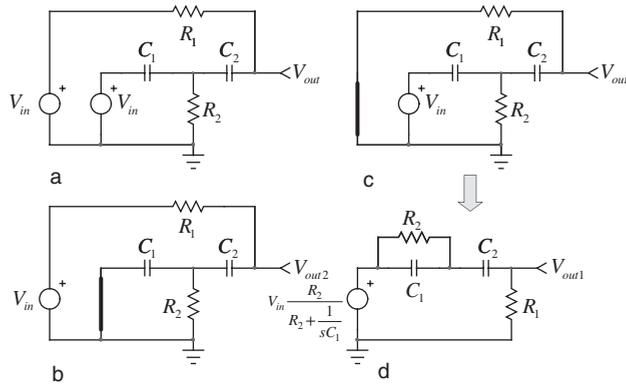


Figure 4.35 Superposition permet de déterminer la fonction de transfert rapidement.

En Figure 4.35b, la connexion gauche de C_1 est mise à la masse et la tension de sortie est obtenue en observant un diviseur résistif :

$$V_{out1} = V_{in} \frac{\frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1} \parallel R_2}{\frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1} \parallel R_2 + R_1} \quad (4.116)$$

En réduisant le second générateur à 0 V et en reliant à la masse la connexion gauche de R_1 , nous pouvons réarranger le croquis de la Figure 4.35c en celui proposé par la Figure 4.35d. Cette dernière utilise le générateur équivalent de Thévenin impliquant R_2 et C_1 . La seconde tension de sortie est alors définie par :

$$V_{out2} = V_{in} \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_1}{\frac{1}{sC_1} \parallel R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_1} \quad (4.117)$$

Si l'on combine ces deux équations en factorisant V_{in} , la fonction de transfert finale apparaît :

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1} \parallel R_2}{\frac{1}{sC_2} + \frac{1}{sC_1} \parallel R_2 + R_1} + \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_1}{\frac{1}{sC_1} \parallel R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_1} \quad (4.118)$$

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

Nul besoin de préciser que cette expression ne nous apporte aucune information sur la forme de la réponse dynamique (y-a-t-il un gain continu, où sont les pôles et les zéros etc.). On peut à présent confronter nos calculs et expressions avec la formule donnée par (4.118) et comparer les réponses. La feuille Mathcad® est présentée en Figure 4.36 et confirme la justesse de notre approche. (4.118) est capturée sous le nom de $H_{ref}(s)$ et sa réponse s'accorde parfaitement avec celle délivrée par les autres formules. Le facteur de qualité Q du dénominateur est de 0.264 et les pôles sont séparés. Cependant, on peut noter une petite différence lorsque la réponse de $H_3(s)$ est tracée. Il en est ainsi car Q n'est pas si petit devant 1. Enfin, la simulation SPICE délivre des courbes similaires à celles obtenues de façon analytique.

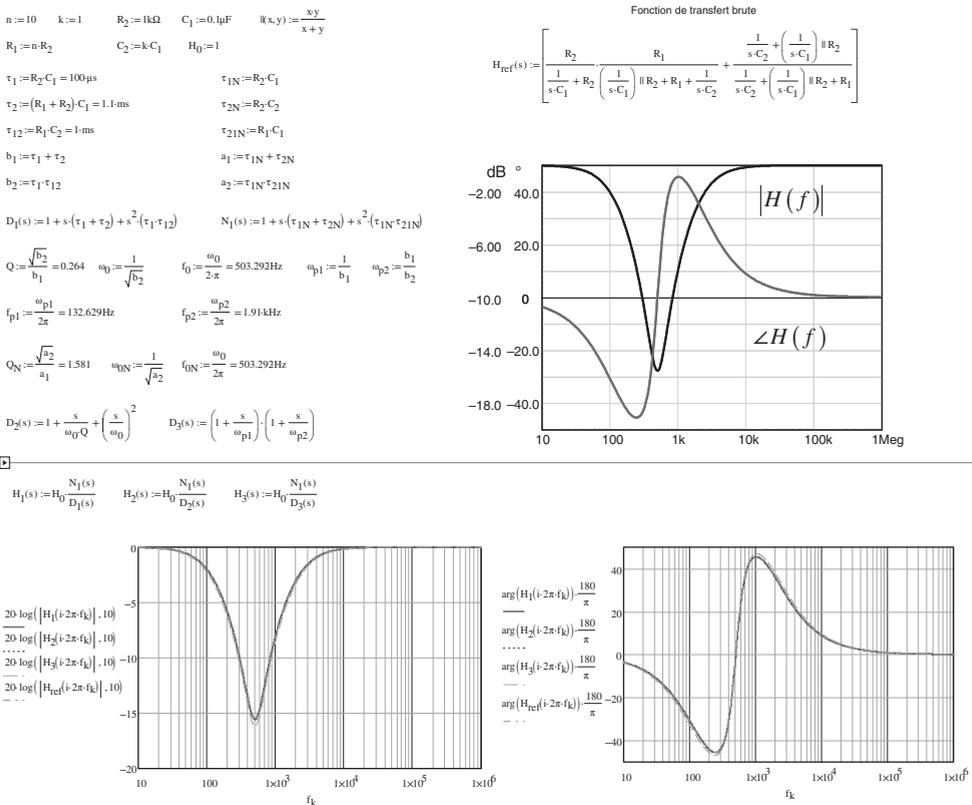


Figure 4.36 SPICE et les expressions analytiques délivrent des réponses identiques.

4.1.7 Exemple 4 – un filtre réjecteur LC

Un filtre à deux éléments de stockage d'énergie est présenté en Figure 4.37. Quelle fonction de transfert relie V_{out} à V_{in} ? Si nous appliquons la méthode traditionnelle du diviseur d'impédance, nous obtenons notre fonction de référence :

$$H(s) = \frac{R_1}{\left(sL_1 \parallel \frac{1}{sC_2} \right) + R_1} \tag{4.119}$$

En observant la Figure 4.38a, le gain en continu est facile à déterminer puisque la bobine L_1 est remplacée par un court-circuit pour $s = 0$. Nous avons :

$$H_0 = 1 \tag{4.120}$$

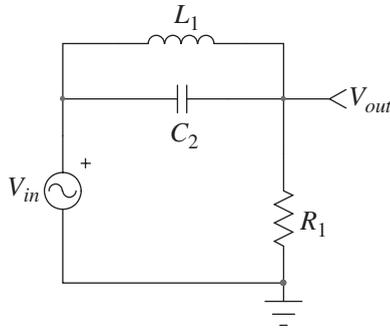


Figure 4.37 Le réjecteur est construit autour d'un condensateur et d'une bobine.

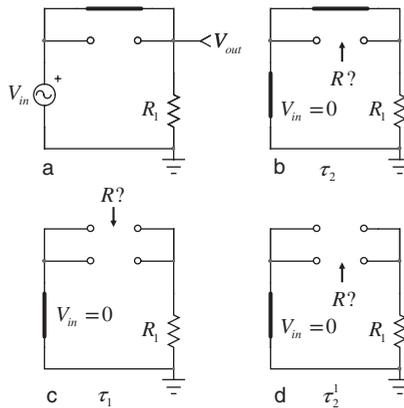


Figure 4.38 Quelques étapes sont nécessaires pour déterminer le dénominateur.

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

En Figure 4.38b, la source V_{in} est réduite à 0 V. La résistance vue des connexions de C_2 alors que L_1 est un court-circuit est 0Ω :

$$\tau_2 = 0 \cdot C_2 = 0 \quad (4.121)$$

En Figure 4.38c, la résistance pilotant L_1 alors que C_2 est retiré est R_1 :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad (4.122)$$

Avec ces deux valeurs, le coefficient b_1 est défini :

$$b_1 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{L_1}{R_1} \quad (4.123)$$

La seconde constante de temps τ_2^1 est identifiée en plaçant L_1 dans son état haute-fréquence (elle est retirée du circuit) alors que l'on détermine la résistance vue des connexions de C_2 . En Figure 4.38d, si l'on « regarde » dans les connexions de C_2 , on « voit » R_1 :

$$\tau_2^1 = R_1 C_2 \quad (4.124)$$

Le dernier coefficient b_2 est défini par :

$$b_2 = \tau_1 \tau_2^1 = \frac{L_1}{R_1} R_1 C_2 = L_1 C_2 \quad (4.125)$$

Le dénominateur $D(s)$ est alors exprimé par :

$$D(s) = 1 + s \frac{L_1}{R_1} + s^2 L_1 C_2 \quad (4.126)$$

On peut arranger cette expression selon la forme canonique de la Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.127)$$

dans laquelle

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{L_1 C_2}}{\frac{L_1}{R_1}} = R_1 \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} \quad (4.128)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (4.129)$$

Pour obtenir le numérateur, nous allons réaliser une analyse NDI trois fois, deux pour les constantes de temps (pour trouver a_1) et une troisième fois pour a_2 . Toutes ces étapes sont réunies en Figure 4.39. La constante de temps impliquant C_2 déterminée alors que la sortie est nullifiée ($\hat{v}_{out} = 0$) est trouvée en utilisant la Figure 4.39a. Le court-circuit induit par la bobine L_1 nous impose une résistance nulle :

$$\tau_{2N} = 0 \cdot C_2 = 0 \quad (4.130)$$

En Figure 4.39b, on “regarde” la résistance offerte par les connexions de L_1 lorsque la réponse est nullifiée. Comme aucun courant ne circule, la réponse est une résistance infinie :

$$\tau_{1N} = \frac{L_1}{\infty} = 0 \quad (4.131)$$

Le coefficient a_1 est ainsi défini par :

$$a_1 = \tau_{1N} + \tau_{2N} = 0 \quad (4.132)$$

La Figure 4.39c devrait nous donner une réponse pour une partie du coefficient de a_2 . Une fois encore, la nullification de V_{out} fait qu’aucun courant ne circule et la résistance offerte par les connexions du condensateur est infinie :

$$\tau_{2N}^1 = C_2 \cdot \infty \quad (4.133)$$

Voyons si la deuxième option τ_{1N}^2 nous délivre une réponse plus utilisable. La Figure 4.39d nous dit que :

$$\tau_{1N}^2 = \frac{L_1}{0} = \infty \quad (4.134)$$

Le coefficient a_2 est obtenu en combinant les réponses ci-dessus :

$$a_2 = \tau_{1N} \tau_{2N}^1 = \frac{L_1}{\infty} \cdot C_2 \cdot \infty \quad (4.135)$$

ou

$$a_2 = \tau_{2N} \tau_{1N}^2 = 0 \cdot C_2 \cdot \frac{L_1}{0} \quad (4.136)$$

Nous avons clairement une indétermination dans les deux expressions. Comment peut-on s’affranchir de cette difficulté ? Dans (4.135), on peut voir que le problème arrive d’abord en Figure 4.39b dans laquelle il manque une résistance dans le chemin du courant. Une solution pourrait consister en l’addition d’une résistance temporaire notée r_{dum} en parallèle avec C_2 . Cette résistance serait ensuite augmentée dans la fonction de transfert finale pour approcher l’infini. Une autre option serait d’insérer une résistance en série r_L avec L_1 et réduire ensuite cette

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

valeur à 0 dans la fonction de transfert finale. Nous allons explorer les deux solutions dans cet exemple.

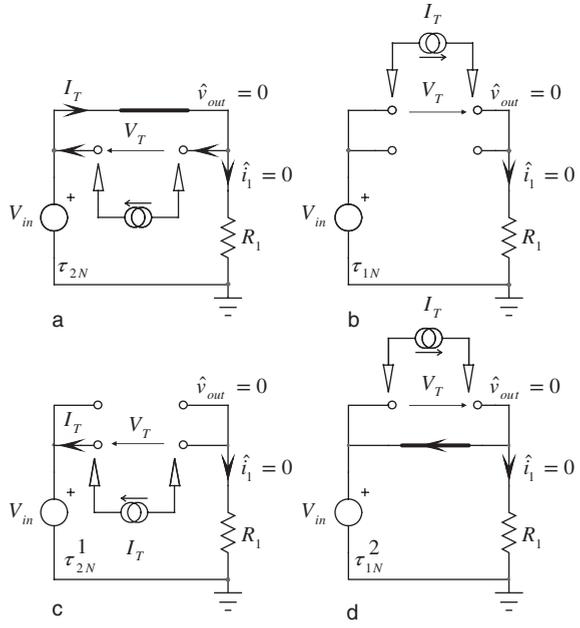


Figure 4.39 Une analyse NDI est réalisée trois fois pour obtenir les constantes de temps du numérateur.

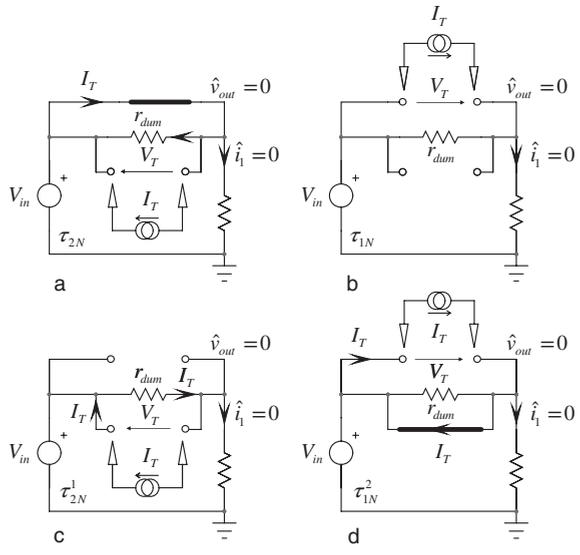


Figure 4.40 Pour lever l'indétermination lorsque le condensateur est placé dans son état continu, on ajoute une résistance r_{dum} aux bornes de ses connexions afin d'offrir un chemin au courant.

En Figure 4.40 lorsque la résistance r_{dum} est ajoutée en parallèle avec C_2 , les coefficients sont mis à jour de la façon suivante :

$$\tau_{2N} = 0 \tag{4.137}$$

$$\tau_{1N} = \frac{L_1}{r_{dum}} \tag{4.138}$$

$$\tau_{2N}^1 = r_{dum} C_2 \tag{4.139}$$

$$\tau_{1N}^2 = \frac{L_2}{0} = \infty \tag{4.140}$$

On peut à présent former le numérateur en utilisation τ_{1N} et τ_{2N}^1 puisque la combinaison de (4.137) et (4.140) entrainerait une indétermination. Nous obtenons :

$$N(s) = 1 + s \left(\frac{L_1}{r_{dum}} + 0 \right) + s^2 \left(\frac{L_1}{r_{dum}} C_2 r_{dum} \right) \tag{4.141}$$

r_{dum} peut disparaître du terme multiplié par s^2 et lorsque la résistance approche l'infini, N se réduit à :

$$N(s) = 1 + s^2 L_1 C_2 \tag{4.142}$$

Nous pouvons reprendre cet exercice mais, cette fois, en insérant une résistance r_L en série avec L_1 . C'est ce que la Figure 4.41 illustre. Les constantes de temps une fois cette résistance insérée deviennent :

$$\tau_{2N} = r_L C_2 \tag{4.143}$$

$$\tau_{1N} = \frac{L_1}{\infty} = 0 \tag{4.144}$$

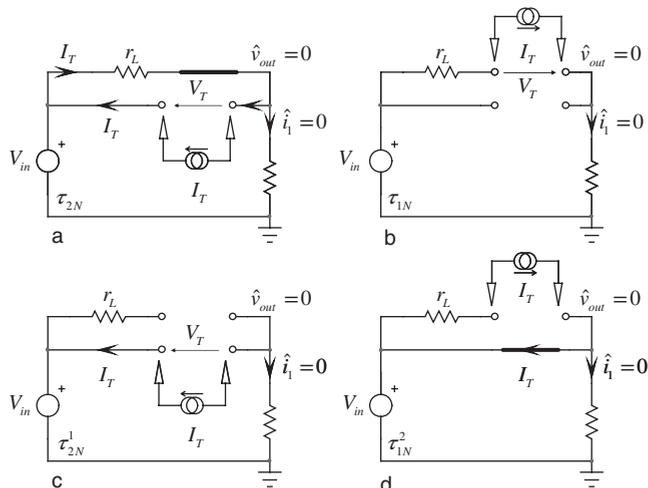


Figure 4.41 Pour supprimer l'indétermination lorsque la bobine est remplacée par un court-circuit, on peut insérer une résistance r_L en série avec L_1

4.1 Appliquer le théorème de l'extra-élément deux fois

$$\tau_{2N}^1 = \infty \cdot C_2 \quad (4.145)$$

$$\tau_{1N}^2 = \frac{L_1}{r_L} \quad (4.146)$$

On peut maintenant assembler le numérateur avec τ_{2N} et τ_{1N}^2 puisque (4.144) et (4.145) produirait une indétermination. Nous obtenons :

$$N(s) = 1 + s(0 + r_L C_2) + s^2 \left(C_2 r_L \frac{L_1}{r_L} \right) \quad (4.147)$$

On simplifie par r_L dans le terme en s^2 et lorsque la résistance se rapproche de 0, N se simplifie à :

$$N(s) = 1 + s^2 L_1 C_2 \quad (4.148)$$

Sous une forme canonique, le numérateur peut être factorisé selon la forme suivante :

$$N(s) = 1 + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.149)$$

dans laquelle ω_0 est définie par (4.129). La fonction de transfert finale apparaît ci-dessous et combine (4.120), (4.148) et (4.126)

$$H(s) = \frac{1 + s^2 L_1 C_2}{1 + s \frac{L_1}{R_1} + s^2 L_1 C_2} = \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2} \quad (4.150)$$

Comme à notre habitude, nous avons comparé les réponses délivrées par (4.119) et celles de (4.150) au sein d'une feuille Mathcad® (Figure 4.42). L'accord entre les différents tracés est excellent et la simulation SPICE de la Figure 4.37 confirme l'analyse. Veuillez noter que le nombre de points par décade est monté à 10000 afin de révéler le fort facteur de qualité.

Ce quatrième exemple est intéressant car vous avez vu comment l'indétermination peut être retirée en ajoutant un élément en série ou en parallèle avec un élément existant. L'addition temporaire de ce composant offre un chemin au courant et évite ainsi des résistances infinies ou nulles. La méthode a été illustrée avec la détermination du numérateur mais s'applique également lors de l'étude du dénominateur bien sûr.

Ici aussi, l'inspection du circuit nous aurait donné la position du zéro en un instant. Dans la version transformée de la Figure 4.37 (C et L sont remplacés par leur impédance respective), quelle condition d'impédance provoquerait la dis-

partition de la réponse ? Le stimulus ne pourrait pas se propager si l'assemblage parallèle de L_1/C_2 présentait une impédance infinie pour une certaine valeur de s_z . L'impédance de ce réseau est donnée par :

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{sC_2} sL_1}{\frac{1}{sC_2} + sL_1} = \frac{sL_1}{1 + s^2 L_1 C_2} \quad (4.151)$$

Les pôles de cette expression (les racines du dénominateur entraînant une impédance infinie) deviennent les zéros de notre fonction de transfert. L'impédance approche l'infini pour :

$$1 + s^2 L_1 C_2 = 0 \quad (4.152)$$

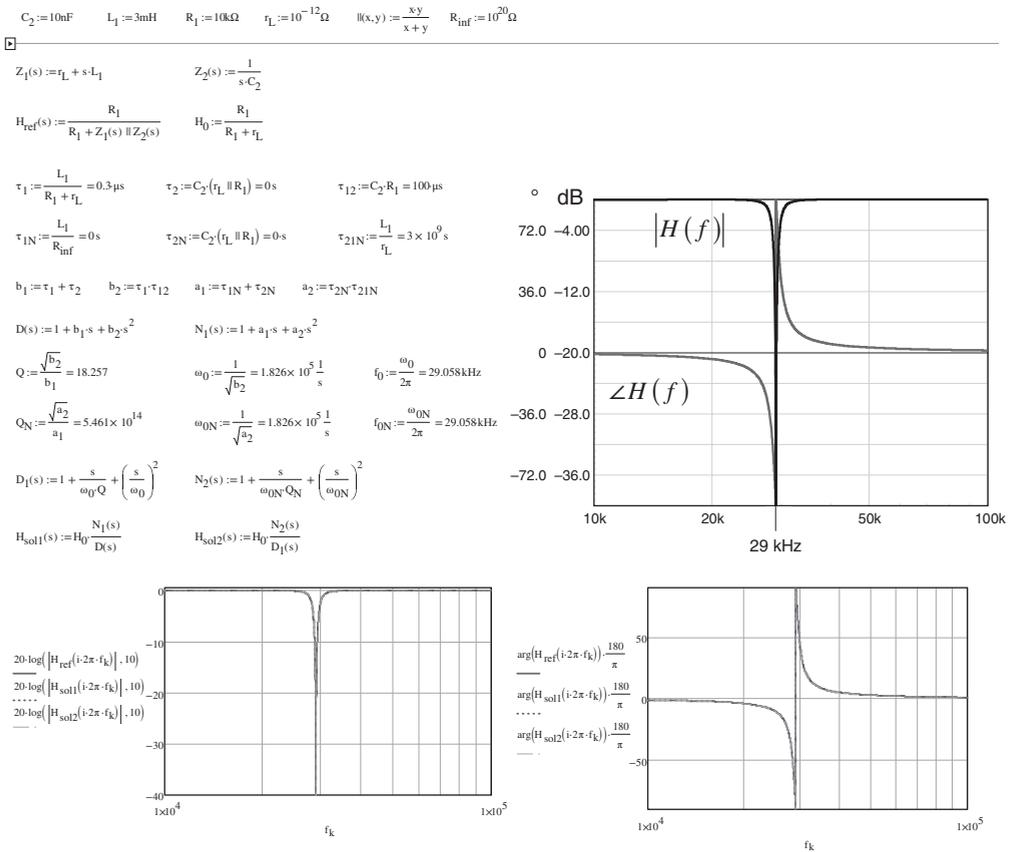


Figure 4.42 La feuille Mathcad® confirme l'adéquation parfaite entre les résultats de la formule brute et ceux retournés par le 2EET.

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

La racine est :

$$s_z = -\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (4.153)$$

donc $N(s) = 1 + s^2 L_1 C_2$.

Pas une ligne d'algèbre grâce à l'inspection.

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Dans le chapitre 3, nous avons vu comment les fonctions de transfert obtenues avec le EET pouvaient être réarrangées afin de satisfaire un format dans lequel il n'était plus nécessaire de passer par une analyse NDI. La formule est donnée ci-dessous et va nous servir de base pour son extension aux systèmes du deuxième ordre :

$$H(s) = \frac{H_0 + H^1 s \tau_1}{1 + s \tau_1} \quad (4.154)$$

L'idée sous-jacente à cette approche est de réutiliser la constante de temps τ_1 déjà obtenue au dénominateur et y appliquer un terme correcteur H^1 pour former le numérateur. H^1 représente la fonction de transfert obtenue en plaçant l'élément impliqué dans le calcul de τ_1 (C_1 ou L_1) dans son état haute-fréquence.

En [3], l'auteur a généralisé cette expression aux systèmes d'ordre n par le biais de simples manipulations des coefficients impliquant les deux éléments de stockage d'énergie naturellement présents dans un système du deuxième ordre. H^1 est la fonction de transfert obtenue en considérant le circuit avec l'élément de stockage impliqué dans la définition de τ_1 dans son état haute-fréquence (par exemple, C_1 court-circuité ou L_1 ouverte) alors que l'élément apparaissant dans la définition de τ_2 est placé dans son état continu : par exemple, C_2 retiré du circuit ou L_2 court-circuitée. Dans le même esprit, H^2 représente la fonction de transfert obtenue en plaçant l'élément C_2 ou L_2 contenu dans τ_2 dans son état haute-fréquence alors que l'élément contenu dans la définition de τ_1 est placé dans son état continu. Enfin, nous pouvons déterminer H^{12} ou H^{21} , en plaçant simultanément les deux éléments dans leur état haute-fréquence et en calculant la fonction de transfert correspondante. La Figure 4.43 propose un résumé de ces opérations. Elles restent relativement simples puisque les éléments de stockage sont tour à tour retirés du circuit ou remplacés par des courts-circuits, débouchant ainsi sur des circuits moins compliqués à traiter.

Une fois ces éléments définis, on peut montrer que le numérateur d'une fonction de transfert du deuxième ordre suit le format ci-dessous :

$$N(s) = H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2H^{12}\tau_1\tau_2^1 \quad (4.155)$$

Si l'on considère la redondance avec $\tau_2\tau_1^2$, nous avons :

$$N(s) = H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2H^{21}\tau_2\tau_1^2 \quad (4.156)$$

Dans les expressions ci-dessus, τ_1 , τ_2 et τ_2^1 sont des éléments déjà déterminés au dénominateur. L'application de cette méthode vous évite une analyse NDI en offrant la possibilité de réutiliser des constantes de temps déjà révélées. Dans le cas où H_0 est non-nul, il peut être avantageusement factorisé et $N(s)$ devient :

$$N(s) = H_0 \left[1 + s \left(\frac{H^1}{H_0} \tau_1 + \frac{H^2}{H_0} \tau_2 \right) + s^2 \frac{H^{12}}{H_0} \tau_1 \tau_2^1 \right] \quad (4.157)$$

- $H^{[1]}$ → L'élément C ou L impliqué dans τ_1 est placé dans son état haute-fréquence.
L'élément C ou L impliqué dans τ_2 est placé dans son état continu.
- $H^{[2]}$ → L'élément C ou L impliqué dans τ_2 est placé dans son état haute-fréquence.
L'élément C ou L impliqué dans τ_1 est placé dans son état continu.
- $H^{[12]}$
 $H^{[21]}$ → Les éléments C et L impliqués dans τ_1 et τ_2 sont tous les deux placés dans leur état haute-fréquence. H^{12} et H^{21} sont identiques.

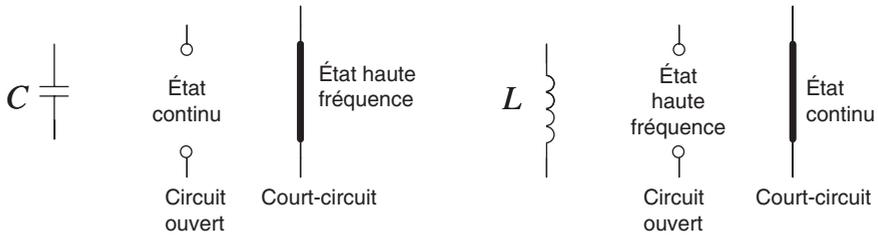


Figure 4.43 Le remplacement des éléments de stockage d'énergie par des courts-circuits ou des circuits ouverts participe avantageusement de la simplification du réseau.

Ou, en considérant plutôt $\tau_2\tau_1^2$:

$$N(s) = H_0 \left[1 + s \left(\frac{H^1}{H_0} \tau_1 + \frac{H^2}{H_0} \tau_2 \right) + s^2 \frac{H^{21}}{H_0} \tau_2 \tau_1^2 \right] \quad (4.158)$$

La fonction de transfert généralisée du deuxième ordre est entièrement exprimée en ajoutant la définition du dénominateur :

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2 H^{12}\tau_1\tau_2^1}{1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2^1} & (4.159) \\
 &= \frac{H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2 H^{21}\tau_2\tau_1^2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_2\tau_1^2}
 \end{aligned}$$

Ici aussi, le terme H_0 peut être factorisé s'il est différent de 0 :

$$\begin{aligned}
 H(s) &= H_0 \frac{1 + s\left(\frac{H^1}{H_0}\tau_1 + \frac{H^2}{H_0}\tau_2\right) + s^2 \frac{H^{12}}{H_0}\tau_1\tau_2^1}{1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2^1} & (4.160) \\
 &= H_0 \frac{1 + s\left(\frac{H^1}{H_0}\tau_1 + \frac{H^2}{H_0}\tau_2\right) + s^2 \frac{H^{21}}{H_0}\tau_2\tau_1^2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_2\tau_1^2}
 \end{aligned}$$

Le théorème 2EET et la fonction de transfert généralisée vont délivrer deux réponses dynamiques rigoureusement identiques. Appliquer le 2EET et l'analyse NDI vont toujours offrir la forme canonique la plus simple pour la fonction de transfert étudiée. Cependant, vous devrez appliquer l'analyse NDI plusieurs fois afin de révéler la position des zéros – s'ils existent bien sûr. À l'opposé, la formule généralisée ne réclame pas d'analyse NDI mais le résultat final, en dépit de sa justesse, sera souvent plus compliqué que celui obtenu par le 2EET. Après tout, vous pouvez très bien prendre les résultats délivrés par (4.159) ou (4.160) et tracer leurs réponses dynamiques en amplitude et phase. Vous pouvez également passer un peu de temps pour tenter de simplifier le numérateur : le temps que vous pensiez gagner en évitant l'analyse NDI sera partiellement perdu à retravailler l'expression finale. Ce choix reste le vôtre et vous choisirez la méthode qui vous convient le mieux selon votre agilité à simplifier les équations. Une troisième option existe lorsqu'elle est possible et c'est l'inspection. Si vous pouvez inférer la présence de zéros en observant le schéma électrique (quelles sont les conditions pour lesquelles la réponse disparaît dans le circuit transformé) alors vous obtiendrez la forme factorisée la plus simple qu'il soit. La Figure 4.44 résume toutes les étapes pour construire $N(s)$ sans analyse NDI.

4.2.1 Inférer la présence de zéros dans le circuit

La fonction de transfert généralisée nous enseigne un résultat très intéressant, lié aux différents gains calculés lorsque certains des éléments de stockage sont placés dans leur état haute-fréquence (C est court-circuité, L est retirée du circuit). En effet, les coefficients du numérateur n'existent dans la forme généralisée que

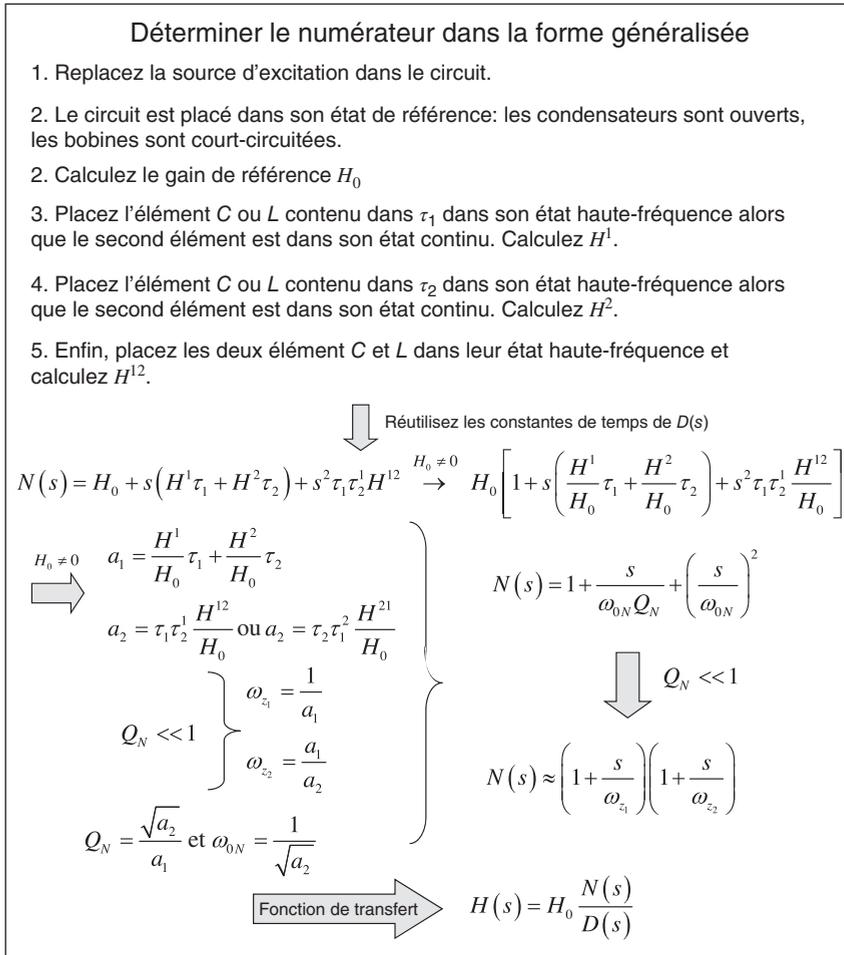


Figure 4.44 Résumé des opérations nécessaires à la formation du numérateur du deuxième ordre de la fonction de transfert généralisée.

si les gains H obtenus en plaçant le ou les éléments de stockage d'énergie dans leur état haute-fréquence sont non-nuls. Un gain non-nul signifie que l'application d'un stimulus à l'entrée de la configuration considérée produira une réponse observable. Pour vérifier la présence d'un zéro dans un circuit du premier ordre, il suffit de placer l'élément de stockage (C ou L) dans son état haute-fréquence et vérifier que cette configuration laisse le stimulus se propager et délivrer une réponse. S'il ne peut y avoir de réponse, alors il n'y a pas de zéro. Pour un système du deuxième ordre, le nombre de zéros dans le circuit étudié est égal au nombre d'éléments de stockage d'énergie que vous pouvez placer *simultanément*

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

dans leur état haute-fréquence et qui laisseront le stimulus se propager afin de produire une réponse. Comme application, voyons la Figure 4.45 dans laquelle quatre exemples sont rassemblés :

- ▶ Figure 4.45a : si vous retirez L_1 et court-circuitez C_2 , V_{in} peut se propager et la réponse en V_{out} existe : le gain est $r_C/(r_C + R_1)$: vous avez deux zéros au numérateur. Imaginez un circuit similaire sans R_1 et l'un des zéros disparaît.
- ▶ Figure 4.45b : lorsque L_1 et C_2 sont simultanément placés dans leur état haute-fréquence (C_2 est un court-circuit et L_1 est retirée du circuit), la réponse existe et le gain est $R_3/(R_1 + R_3)$: on compte deux zéros au numérateur.
- ▶ Figure 4.45c : si C_1 et/ou C_2 sont court-circuités individuellement ou ensemble, le stimulus ne peut se propager et produire une réponse. Il n'y a aucun zéro dans ce circuit.
- ▶ Figure 4.45d : si C_1 and C_2 sont simultanément court-circuités, la réponse existe toujours – le gain est de 1 – donc le numérateur possède deux zéros.

Revenons à notre exemple de la Figure 4.37 : si l'on retire L_1 et court-circuite C_2 , la réponse existe toujours. Il y a bien deux zéros au numérateur.

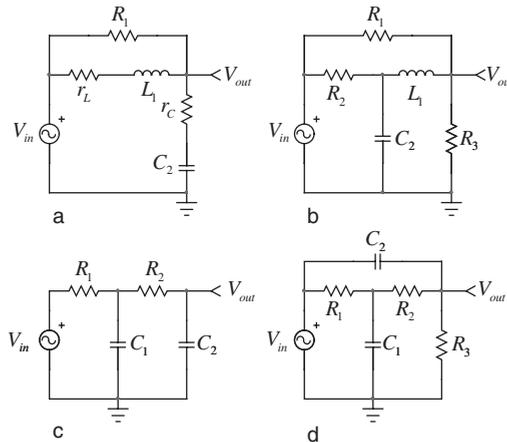


Figure 4.45 Si l'on court-circuite le condensateur ou l'on retire la bobine (circuit ouvert) alors que l'autre composant est dans son état continu et qu'une réponse est possible en sortie, alors il existe un zéro associé à l'élément considéré. Maintenant, si la réponse existe toujours lorsque les deux éléments de stockage d'énergie sont simultanément placés dans leur état haute-fréquence, alors deux zéros existent et le numérateur est du deuxième ordre.

4.2.2 Fonction de transfert généralisée du deuxième ordre – exemple 1

Le premier exemple apparaît en Figure 4.46 et montre un filtre associant une bobine et un condensateur. Nous allons appliquer la définition de la fonction de transfert généralisée à ce circuit et illustrer la simplicité apportée par cette approche.

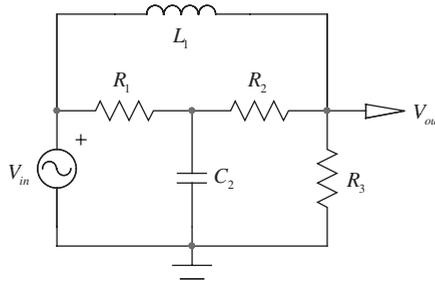


Figure 4.46 Ce circuit combine deux éléments de stockage d'énergie. Quelle est sa fonction de transfert ?

Nous commençons par déterminer la fonction de transfert en continu pour $s = 0$ comme illustré en Figure 4.47a où tous les éléments de stockage d'énergie sont placés dans leur état continu : L_1 est remplacée par un court-circuit et C_2 devient un circuit ouvert. Dans ce cas,

$$H_0 = 1 \tag{4.161}$$

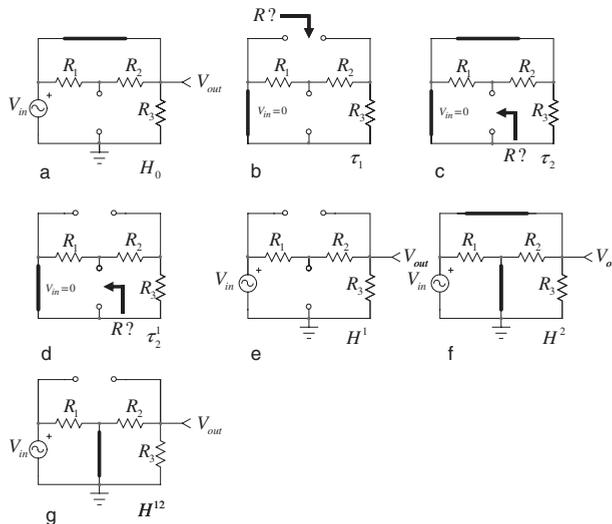


Figure 4.47 En étudiant des schémas intermédiaires simples, nous pouvons rapidement exprimer la fonction de transfert de ce système du deuxième ordre.

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

L'excitation est maintenant réduite à 0 V (les connexions de la source sont court-circuitées) et 3 constantes de temps doivent être déterminées. Commençons avec la résistance qui pilote la bobine L_1 . En Figure 4.47b, on voit que cette résistance égale R_3 mise en parallèle avec la somme de R_1 et R_2 . Ainsi,

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_2 + R_1)} \quad (4.162)$$

En Figure 4.47c, nous nous intéressons à la constante de temps impliquant C_2 . Aux travers de ses connexions, alors que L_1 est remplacée par un court-circuit, nous voyons que R_3 est court-circuitée alors que R_1 et R_2 sont associées en parallèle. Ainsi :

$$\tau_2 = C_2 (R_1 \parallel R_2) \quad (4.163)$$

La dernière constante de temps est calculée en plaçant L_1 dans son état haute-fréquence (circuit ouvert) et en déterminant la résistance vue des connexions de C_2 (Figure 4.47d). R_2 et R_3 sont en série et viennent en parallèle avec R_1 :

$$\tau_2^1 = C_2 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \quad (4.164)$$

Nous pouvons former le dénominateur $D(s)$:

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 = 1 + s \left(\frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_2 (R_1 \parallel R_2) \right) + s^2 \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} C_2 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)] \quad (4.165)$$

Il est possible de retravailler cette expression selon la forme canonique de la Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.166)$$

dans laquelle :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \frac{\sqrt{C_2}}{L_1} \frac{\sqrt{[R_1 \parallel (R_2 + R_3)][R_3 \parallel (R_1 + R_2)]}}{1 + \frac{C_2 (R_2 \parallel R_1)[R_3 \parallel (R_1 + R_2)]}{L_1}} \quad (4.167)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{R_3 \parallel (R_1 + R_2)}{R_1 \parallel (R_2 + R_3)}} \quad (4.168)$$

La détermination du numérateur nécessite trois étapes simples. On commence en Figure 4.47e : L_1 est placée en état haute-fréquence (circuit ouvert) alors que C_2 est placé en état continu (circuit ouvert). À partir de ce croquis, on voit immédiatement que :

$$H^1 = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (4.169)$$

En Figure 4.47f, L_1 est placée dans son état continu (court-circuit) alors que C_2 est placé dans son état haute-fréquence et devient également un court-circuit. Dans cette condition, le gain est simplement :

$$H^2 = 1 \quad (4.170)$$

Le dernier gain H^{12} est déterminé quand les deux éléments L_1 et C_2 sont placés dans leur état haute fréquence comme indiqué en Figure 4.47f. Dans ce mode :

$$H^{12} = 0 \quad (4.171)$$

Le numérateur $N(s)$ est défini par :

$$\begin{aligned} N(s) &= H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2H^{12}\tau_1\tau_2 \\ &= 1 + s\left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_2(R_1 \parallel R_2)\right) \end{aligned} \quad (4.172)$$

Il n'existe qu'un seul zéro puisque l'ouverture de L_1 et le court-circuit de C_2 – voir (4.171) annule la réponse. La fonction de transfert finale décrivant $H(s)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1 + s\left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_2(R_1 \parallel R_2)\right)}{1 + s\left(\frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_2(R_1 \parallel R_2)\right) + s^2 \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} C_2 [R_1 \parallel (R_2 + R_3)]} \\ &= \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.173)$$

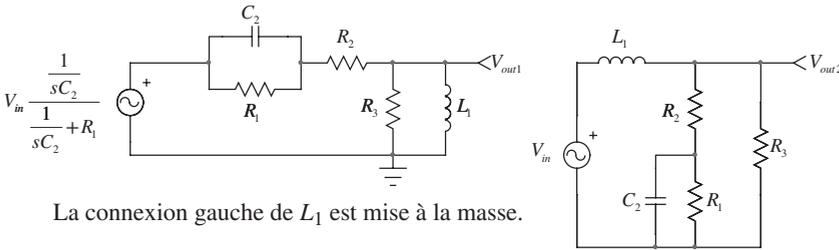
dans laquelle :

$$\omega_z = \frac{1}{\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \frac{L_1}{R_3 \parallel (R_1 + R_2)} + C_2(R_1 \parallel R_2)} = \frac{1}{\frac{L_1}{R_1 + R_2} + C_2(R_1 \parallel R_2)} \quad (4.174)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Pour vérifier notre expression, nous pouvons déterminer une fonction de transfert brute en appliquant le théorème de superposition comme nous l'avons fait en Figure 4.35. Les deux schémas intermédiaires sont présentés en Figure 4.48. À partir de ces croquis, la fonction de transfert est déterminée par :

$$H(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_2} \frac{R_3 \parallel sL_1}{R_3 \parallel sL_1 + R_2 + \left(R_1 \parallel \frac{1}{sC_2} \right)} + \frac{R_3 \parallel \left[R_2 + \left(R_1 \parallel \frac{1}{sC_2} \right) \right]}{R_3 \parallel \left[R_2 + \left(R_1 \parallel \frac{1}{sC_2} \right) \right] + sL_1} \quad (4.175)$$



La connexion gauche de L_1 est mise à la masse.

La connexion gauche de R_1 est mise à la masse.

Figure 4.48 Grâce à la superposition, nous pouvons rapidement déterminer une fonction de transfert certes brute mais qui peut être utilisée comme référence.

Nous possédons tous les éléments pour former une feuille Mathcad® et lancer une simulation SPICE. Tous les résultats apparaissent en Figure 4.49 et confirment la validité de notre approche. Comme à notre habitude, nous avons séparé chaque calcul de constante de temps afin, éventuellement, de corriger le ou les termes fautifs si vous percevez une différence notable entre les réponses dynamiques.

4.2.3 Fonction de transfert généralisée du deuxième ordre – exemple 2

Notre prochain exemple apparaît en Figure 4.50. Il s'agit d'un filtre LC mais cette fois, une résistance R_1 a été ajoutée entre l'entrée et la sortie. Comparé au croquis de la Figure 4.22, nous voyons immédiatement en Figure 4.50 que placer L_1 dans son état haute-fréquence (circuit ouvert) alors que C_2 est court-circuité donne toujours une réponse via R_1 : il y a deux zéros cette fois. Nous débutons l'analyse avec $s = 0$. En étudiant la Figure 4.51a, nous trouvons que le gain est de 1 dans cette configuration :

$$H_0 = 1 \quad (4.176)$$

La constante de temps impliquant L_1 est obtenue avec l'aide de la Figure 4.51b :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_L + R_1} \tag{4.177}$$

La seconde constante de temps est déterminée en court-circuitant L_1 et en déterminant la résistance vue des connexions de C_2 dans cette condition (Figure 4.51c) :

$$\tau_2 = C_2 (r_C + R_1 \parallel r_L) \tag{4.178}$$

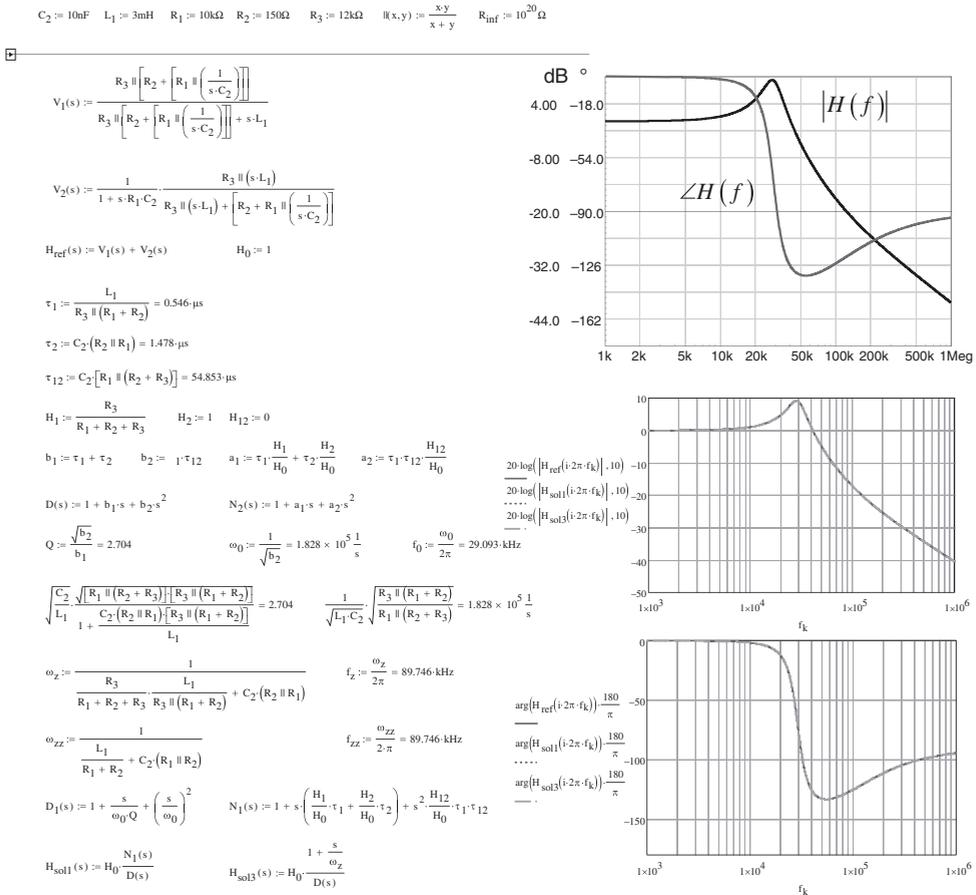


Figure 4.49 Une feuille Mathcad® nous aide à tester les équations dans différentes configurations.

Enfin, nous plaçons L_1 dans son état haute-fréquence (circuit ouvert) et nous déterminons la résistance vue des connexions de C_2 (Figure 4.51d) :

$$\tau_2^1 = C_2 (r_C + R_1) \tag{4.179}$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

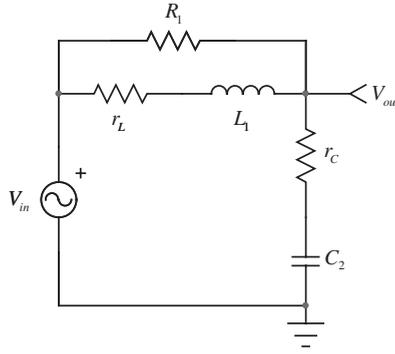


Figure 4.50 Ce filtre passe-bas RLC inclut un second zéro.

Nous pouvons former le dénominateur $D(s)$ par :

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2\tau_1\tau_2 = 1 + s\left(\frac{L_1}{r_L + R_1} + C_2(r_C + R_1 \parallel r_L)\right) + s^2\frac{L_1}{r_L + R_1}C_2(r_C + R_1) \quad (4.180)$$

Il est possible de retravailler cette expression selon la forme canonique de la Figure 4.20 :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad (4.181)$$

dans laquelle :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} \frac{\sqrt{(R_1 + r_C)(R_1 + r_L)}}{1 + \frac{C_2(r_C r_L + R_1 r_C + R_1 r_L)}{L_1}} \quad (4.182)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{r_L + R_1}{r_C + R_1}} \quad (4.183)$$

Le numérateur est obtenu en calculant 3 gains. Commençons par la Figure 4.51e, nous trouvons immédiatement :

$$H^1 = 1 \quad (4.184)$$

Puis, en Figure 4.51f :

$$H^2 = \frac{r_C}{r_C + r_L \parallel R_1} \quad (4.185)$$

Et enfin, en Figure 4.51g nous déterminons le troisième gain :

$$H^{12} = \frac{r_C}{r_C + R_1} \quad (4.186)$$

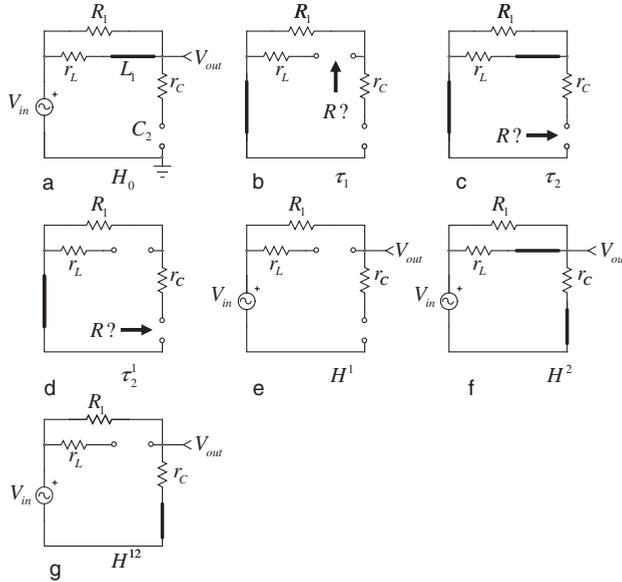


Figure 4.51 Ces petits croquis détaillent les différentes étapes nécessaires au calcul des constantes de temps.

En considérant un gain unitaire H_0 , le numérateur $N(s)$ est défini par :

$$\begin{aligned} N(s) &= H_0 + s(H^1\tau_1 + H^2\tau_2) + s^2 H^{12}\tau_1\tau_2^1 \quad (4.187) \\ &= H_0 \left[1 + s \left(\frac{H^1}{H_0}\tau_1 + \frac{H^2}{H_0}\tau_2 \right) + s^2 \frac{H^{12}}{H_0}\tau_1\tau_2^1 \right] \\ &= 1 + s \left(\frac{L_1}{r_L + R_1} + \frac{r_C}{r_C + r_L \parallel R_1} C_2 (r_C + R_1 \parallel r_L) \right) + s^2 \frac{r_C}{r_C + R_1} \frac{L_1}{r_L + R_1} C_2 (r_C + R_1) \end{aligned}$$

À partir de cette expression, nous pouvons extraire le facteur de qualité Q_N et une pulsation de résonance ω_{0N} :

$$Q_N = \frac{\sqrt{\frac{r_C}{r_C + R_1} \frac{L_1}{r_L + R_1} C_2 (r_C + R_1)}}{\frac{L_1}{r_L + R_1} + \frac{r_C}{r_C + r_L \parallel R_1} C_2 (r_C + R_1 \parallel r_L)} = \frac{\sqrt{\frac{L_1 C_2 r_C}{R_1 + r_L}}}{\frac{L_1}{R_1 + r_L} + r_C C_2} \quad (4.188)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

$$\omega_{0N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_C}{r_C + R_1} \frac{L_1}{r_L + R_1} C_2 (r_C + R_1)}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{R_1 + r_L}{r_C}} \quad (4.189)$$

Avec ces définitions en main et considérant un facteur Q_N faible et bien inférieur à 1, nous pouvons exprimer deux zéros parfaitement séparés et définis par :

$$\omega_{z1} = \omega_{0N} Q_N \quad (4.190)$$

et

$$\omega_{z2} = \frac{\omega_{0N}}{Q_N} \quad (4.191)$$

Compte tenu de la complexité des coefficients, les expressions résultantes seront plutôt laides. Une meilleure approche consiste à vérifier si l'inspection nous permettrait de déterminer les zéros plus rapidement. Le circuit transformé apparaît en Figure 4.52.

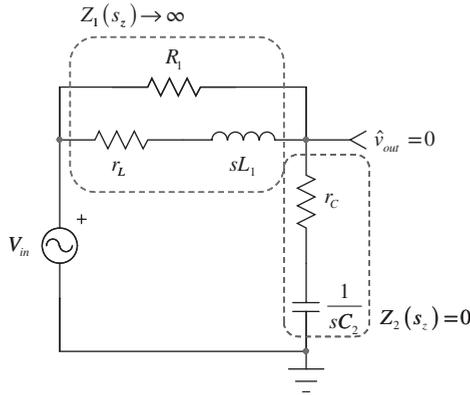


Figure 4.52 Les zéros sont déterminés par inspection dans le circuit transformé observé à $s = s_z$.

Pour nullifier la réponse, il faut deux conditions : un court-circuit transformé de V_{out} à la masse ou une impédance infinie transformée placée en série avec le stimulus qui bloque la propagation de ce dernier. Est-ce que $Z_1(s)$ peut devenir un circuit ouvert ? Cette impédance peut être trouvée immédiatement en utilisant les techniques de calculs rapides. Dans votre tête : pour $s = 0$, l'impédance est R_1 mise en parallèle avec r_L . La résistance vue des connexions de L_1 lorsque l'excitation (une source de courant pour une impédance) est éteinte à 0 A est $r_L + R_1$. Finalement, nous avons un zéro lorsque r_L et sL_1 forment un

court-circuit transformé aux bornes de la source de courant. En assemblant ces éléments, il vient :

$$Z_1(s) = (R_1 \parallel r_L) \cdot \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L}}{1 + s \frac{L_1}{r_L + R_L}} \quad (4.192)$$

Cette expression approche l'infini si l'on annule le dénominateur :

$$1 + s \frac{L_1}{r_L + R_1} = 0 \quad (4.193)$$

Nous obtenons $s_{z_1} = -\frac{r_L + R_1}{L_1}$ ou

$$\omega_{z_1} = \frac{r_L + R_1}{L_1} \quad (4.194)$$

Avec un peu d'habitude, vous verrez qu'il n'est pas nécessaire de calculer toute l'impédance lorsque cette dernière doit devenir infinie. En effet, il suffit de calculer son ou ses pôles pour obtenir les zéros de la fonction de transfert.

Le second zéro est obtenu lorsque $Z_2(s_z)$ devient un court-circuit transformé :

$$Z_2(s) = \frac{1 + sr_C C_2}{sC_2} = 0 \quad (4.195)$$

Cela arrive pour au point $s_{z_2} = -\frac{1}{r_C C_2}$. Le second zéro est positionné à :

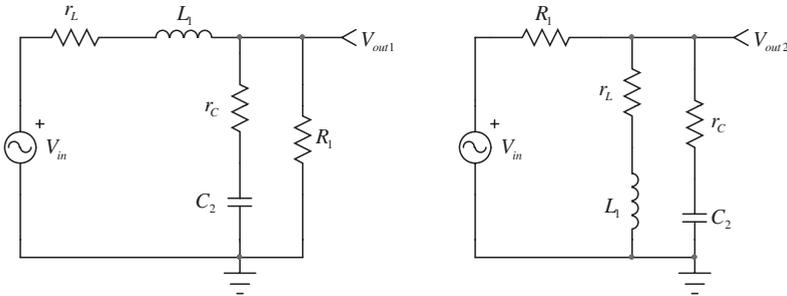
$$\omega_{z_2} = \frac{1}{r_C C_2} \quad (4.196)$$

En collectant tous les termes, la fonction de transfert finale $H(s)$ est définie par :

$$H(s) = \frac{\left(1 + s \frac{r_L + R_1}{L_1}\right) (1 + sr_C C_2)}{1 + s \left(\frac{L_1}{r_L + R_1} + C_2 (r_C + R_1 \parallel r_L)\right) + s^2 \frac{L_1}{r_L + R_1} C_2 (r_C + R_1)} = \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z_1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z_2}}\right)}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.197)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Avant que nous continuions avec cette expression, nous devons déterminer une fonction de référence à *haute-entropie* ou expression brute. Avec ces filtres, superposition fonctionne bien comme montré en Figure 4.53.



La connexion gauche de R_1 est mise à la masse. La connexion gauche de L_1 est mise à la masse.

Figure 4.53 Superposition nous permet de trouver la fonction de transfert de référence en quelques lignes.

La fonction de transfert brute est obtenue en additionnant V_{out1} et V_{out2} . Nous obtenons :

$$H(s) = \frac{R_1 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right)}{R_1 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right) + r_L + sL_1} + \frac{\left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right) \parallel (r_L + sL_1)}{\left(r_C + \frac{1}{sC_2} \right) \parallel (r_L + sL_1) + R_1} \quad (4.198)$$

Il est possible de capturer toutes ces données sous Mathcad® et l'on peut comparer les réponses dynamiques de toutes ces expressions. C'est ce qui est représenté en Figure 4.54 dans laquelle tous les résultats sont identiques.

4.2.4 Fonction de transfert généralisée du deuxième ordre – exemple 3

Pour ce troisième exemple, nous allons étudier un filtre construit autour d'un transistor bipolaire. Le schéma électrique apparaît en Figure 4.55. Quelle est la fonction de transfert de ce circuit ?

$$C_2 := 0.1\mu\text{F} \quad L_1 := 150\mu\text{H} \quad R_1 := 1\text{k}\Omega \quad r_L := 0.25\Omega \quad r_C := 0.12\Omega \quad h(x,y) := \frac{xy}{x+y} \quad R_{\text{inf}} := 10^{20}\Omega$$

□

$$V_1(s) := \frac{\left(r_C + \frac{1}{sC_2}\right) \parallel (r_L + sL_1)}{\left(r_C + \frac{1}{sC_2}\right) \parallel (r_L + sL_1) + R_1}$$

$$V_2(s) := \frac{R_1 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2}\right)}{R_1 \parallel \left(r_C + \frac{1}{sC_2}\right) + r_L + sL_1}$$

$$H_{\text{ref}}(s) := V_1(s) + V_2(s) \quad H_0 := 1$$

$$\tau_1 := \frac{L_1}{r_L + R_1} = 0.15\mu\text{s}$$

$$\tau_2 := C_2(r_C + r_L \parallel R_1) = 0.037\mu\text{s}$$

$$\tau_{12} := C_2(r_C + R_1) = 100.012\mu\text{s}$$

$$H_1 := 1 \quad H_2 := \frac{r_C}{r_C + r_L \parallel R_1} \quad H_{12} := \frac{r_C}{r_C + R_1}$$

$$b_1 := \tau_1 + \tau_2 \quad b_2 := \tau_1 \tau_{12} \quad a_1 := \tau_1 \frac{H_1}{H_0} + \tau_2 \frac{H_2}{H_0} \quad a_2 := \tau_1 \tau_{12} \frac{H_{12}}{H_0}$$

$$D(s) := 1 + b_1 s + b_2 s^2 \quad N_2(s) := 1 + a_1 s + a_2 s^2$$

$$Q := \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = 20.715 \quad \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{b_2}} = 2.582 \times 10^5 \frac{1}{\text{s}} \quad f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi} = 41.096\text{kHz}$$

$$\sqrt{\frac{C_2}{L_1}} \frac{\sqrt{(R_1 + r_C)(R_1 + r_L)}}{1 + \frac{C_2}{L_1}(r_C r_L + R_1 r_C + R_1 r_L)} = 20.715 \quad \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{r_L + R_1}{r_C + R_1}} = 2.582 \times 10^5 \frac{1}{\text{s}}$$

$$Q_N := \frac{\sqrt{b_2}}{a_1} = 0.262 \quad \omega_{0N} := \frac{1}{\sqrt{a_2}} = 2.357 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

$$Q_{NN} := \frac{\sqrt{\frac{C_2 L_1 r_C}{R_1 + r_L}}}{\frac{L_1}{R_1 + r_L} + C_2 r_C} = 0.262 \quad \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{R_1 + r_L}{r_C}} = 2.357 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

$$D_1(s) := 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 \quad N_1(s) := 1 + s \left(\frac{H_1}{H_0} \tau_1 + \frac{H_2}{H_0} \tau_2 \right) + s^2 \frac{H_{12}}{H_0} \tau_1 \tau_{12}$$

$$\omega_{z1} := \frac{r_L + R_1}{L_1} = 6.668 \times 10^6 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_{z2} := \frac{1}{r_C C_2} = 8.333 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}} \quad \sqrt{\omega_{z1} \omega_{z2}} = 2.357 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

$$\omega_{z11} := Q_N \omega_{0N} = 6.174 \times 10^6 \frac{1}{\text{s}} \quad \omega_{z22} := \frac{\omega_{0N}}{Q_N} = 9 \times 10^7 \frac{1}{\text{s}}$$

$$H_{\text{sol1}}(s) := H_0 \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad H_{\text{sol2}}(s) := H_0 \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad H_{\text{sol3}}(s) := H_0 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)}{D(s)}$$

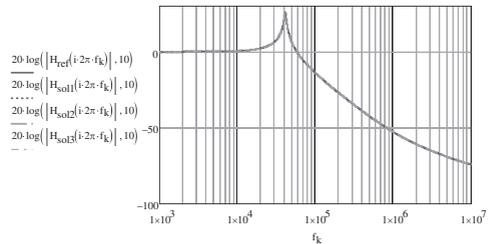
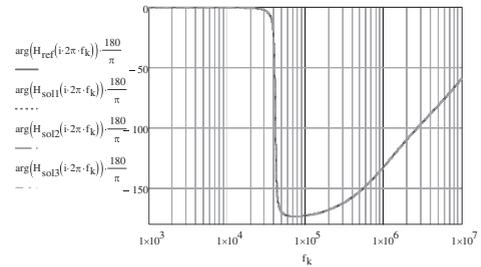
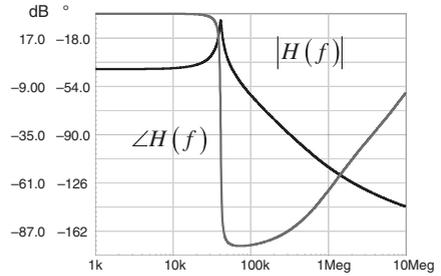


Figure 4.54 La feuille Mathcad® trace les différentes réponses dynamiques et montre qu'elles sont toutes identiques.

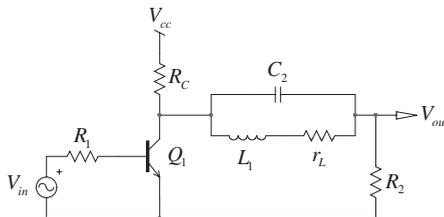


Figure 4.55 Une structure à émetteur commun pilote un filtre LC.

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Tout d'abord, il nous faut remplacer Q_1 par son modèle simplifié petit-signal comme représenté en Figure 4.56. Nous commençons par déterminer le gain H_0 pour $s = 0$: C_2 est ouvert et L_1 est remplacée par un court-circuit comme indiqué en Figure 4.57. r_π dans ce schéma exprime la résistance dynamique base-émetteur souvent désignée par h_{11} en notation hybride.

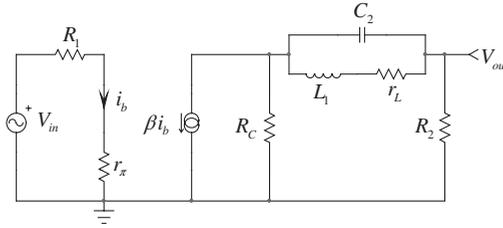


Figure 4.56 Il s'agit d'un schéma linéaire sur lequel nous pouvons appliquer la transformée de Laplace.

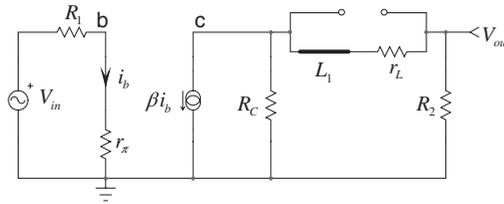


Figure 4.57 A 0 Hz, C_2 est retiré et L_1 remplacée par un court-circuit.

Le courant de base dépend de V_{in} et de la connexion en série de R_1 et r_π :

$$i_b = \frac{V_{in}}{R_1 + r_\pi} \quad (4.199)$$

La tension de sortie aux bornes de R_2 dépend de la tension aux bornes R_C , diminuée par r_L et R_2 . La tension du collecteur $V_{(c)}$ peut être exprimée par :

$$V_{(c)} = -\beta i_b [R_C \parallel (r_L + R_2)] \quad (4.200)$$

Cette tension apparaît en V_{out} affectée par le diviseur résistif formé de R_2 et r_L :

$$V_{out} = -\beta i_b [R_C \parallel (r_L + R_2)] \frac{R_2}{r_L + R_2} \quad (4.201)$$

En substituant (4.199) dans (4.201) et en réarrangeant, nous avons la définition du gain H_0 recherché :

$$H_0 = -\frac{\beta}{r_\pi + R_1} [R_C \parallel (r_L + R_2)] \frac{R_2}{r_L + R_2} = -\frac{R_2 R_C \beta}{(R_1 + r_\pi)(R_2 + R_C + r_L)} \quad (4.202)$$

Pour la constante de temps affectant L_1 , nous réduisons l'excitation à 0 V ($V_{in} = 0$), et le courant de base disparaît avec le courant collecteur βi_b . De la Figure 4.58, la résistance vue des connexions de L_1 est la connexion série de R_C , r_L et R_2 :

$$\tau_1 = \frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} \quad (4.203)$$

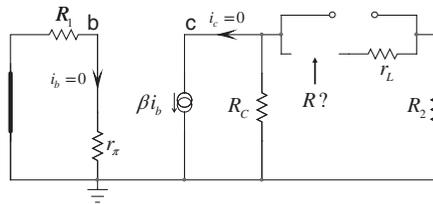


Figure 4.58 Quand le courant de base disparaît parce que la source V_{in} est éteinte à 0 V, le schéma se simplifie.

La seconde constante de temps est obtenue en remplaçant L_1 par un court-circuit et en déterminant la résistance vue des connexions de C_2 dans cette condition. Une fois encore, il est assez simple en observant la Figure 4.59 de noter la mise en parallèle de r_L avec R_C et R_2 en série :

$$\tau_2 = C_2 [r_L \parallel (R_C + R_2)] \quad (4.204)$$

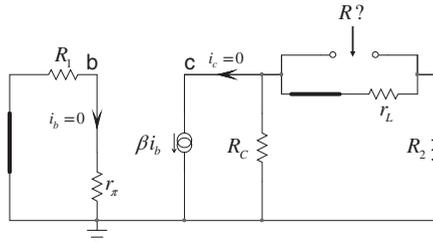


Figure 4.59 La détermination de τ_2 est immédiate dans ce schéma simplifié.

La dernière constante de temps est obtenue en plaçant L_1 dans son état haute-fréquence (circuit ouvert). Dans ce mode, nous déterminons la résistance vue des connexions de C_2 . La Figure 4.60 représente le circuit dans cette configuration. La constante de temps est immédiate car r_L est non-connectée :

$$\tau_2^1 = C_2 (R_C + R_2) \quad (4.205)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

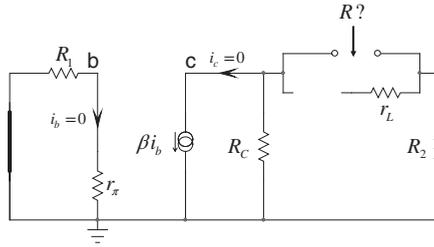


Figure 4.60 Nous pouvons facilement déterminer τ_2^1 en retirant L_1 du circuit et exprimant la résistance vue des connexions de C_2 .

Nous possédons à présent tous les éléments pour former notre dénominateur $D(s)$:

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 = 1 + s \left(\frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} + C_2 [r_L \parallel (R_C + R_2)] \right) \quad (4.206)$$

$$+ s^2 \frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} C_2 (R_C + R_2)$$

Cette expression peut être mise sous une forme canonique :

$$D(s) = 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 \quad (4.207)$$

dans laquelle :

$$Q = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} \frac{\sqrt{R_2 + R_C}}{\sqrt{\frac{1}{r_L + R_C + R_2} \left(1 + \frac{C_2 r_L (R_2 + R_C)}{L_1} \right)}} \quad (4.208)$$

et

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \sqrt{\frac{r_L + R_2 + R_C}{R_2 + R_C}} \quad (4.209)$$

Le numérateur demande le calcul de trois simples gains, H^1 , H^2 et H^{12} . L'exposant dans H désigne l'élément placé dans son état haute-fréquence alors que l'autre reste dans son état continu. Pour H^1 , L_1 est placée dans son état haute-fréquence (circuit ouvert) alors que C_2 reste dans son état continu soit un circuit ouvert également. La configuration apparaît en Figure 4.61 et le gain dans ce schéma est simplement :

$$H^1 = 0 \quad (4.210)$$

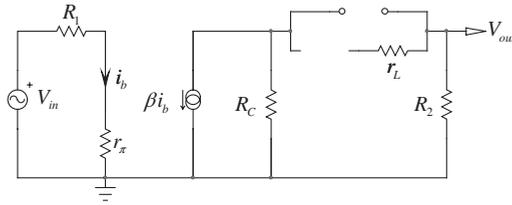


Figure 4.61 Quand L_1 et C_2 sont simultanément ouverts, le circuit est simple et la réponse est 0.

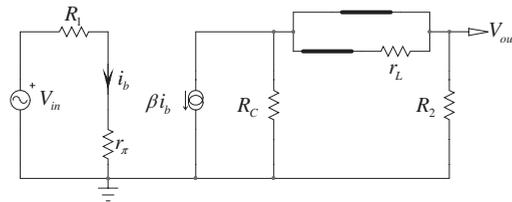


Figure 4.62 Quand le condensateur est ouvert alors que la bobine est remplacée par un court-circuit, il s'agit de la configuration continue déjà vue avec H_0 excepté r_L qui est court-circuitée par C_2 placé dans son état haute-fréquence.

Pour déterminer H^2 , le condensateur C_2 est remplacé par un court-circuit et L_1 , dans son état continu, est également un court-circuit comme dessiné en Figure 4.62. La fonction de transfert dans ce mode correspond à H_0 mais sans le terme r_L qui disparaît de par le court-circuit amené par C_2 . Ainsi :

$$H^2 = -\frac{\beta}{r_\pi + R_1} (R_C \parallel R_2) \quad (4.211)$$

Finalement, le gain H^{12} est obtenu lorsque les deux éléments de stockage d'énergie sont tous les deux placés en état haute-fréquence. C_2 court-circuitée à nouveau le chemin parallèle à L_1 qui est remplacée par un circuit ouvert en série avec ses pertes ohmiques r_L (Figure 4.63).

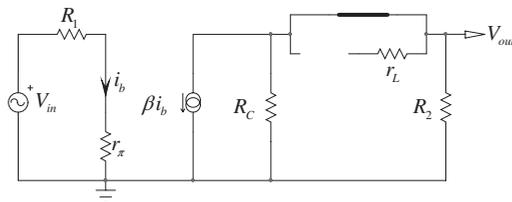


Figure 4.63 On peut facilement obtenir H^{12} en retirant L_1 du circuit et en court-circuitant C_2 .

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Le gain est identique à celui défini par (4.211) puisque r_L est toujours absente du circuit.

$$H^{12} = -\frac{\beta}{r_\pi + R_1} (R_C \parallel R_2) \quad (4.212)$$

Le numérateur peut désormais être assemblé en utilisant les gains que nous venons de déterminer :

$$\begin{aligned} N(s) &= H_0 + s(H^1 \tau_1 + H^2 \tau_2) + s^2 H^{12} \tau_1 \tau_2^1 \quad (4.213) \\ &= -\frac{\beta}{r_\pi + R_1} [R_C \parallel (r_L + R_2)] \frac{R_2}{r_L + R_2} \\ &\quad + s \left(0 - \frac{\beta}{r_\pi + R_1} (R_C \parallel R_2) \cdot C_2 [r_L \parallel (R_C + R_2)] \right) \\ &\quad + s^2 \left[-\frac{\beta}{r_\pi + R_1} (R_C \parallel R_2) \cdot \frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} C_2 (R_C + R_2) \right] \end{aligned}$$

Si nous considérons à présent r_L proche de 0, $N(s)$ se simplifie grandement lorsque l'on factorise H_0 puisque, dans ce cas, $H_0 \approx H^2 \approx H^{12}$:

$$N(s) \approx -\frac{\beta}{r_\pi + R_1} [R_C \parallel R_2] [1 + s^2 L_1 C_2] = H_0 \left(1 + \frac{s^2}{\omega_{0N}^2} \right) \quad (4.214)$$

(4.213) est l'expression exacte du numérateur alors que (4.214) représente une version approximée pour une valeur faible de r_L . La première formule est extrêmement complexe alors que la seconde ne reflète pas la contribution de la résistance r_L . Existe-t-il un chemin intermédiaire ? Bien sûr, l'inspection ! Si l'on observe la Figure 4.55, on peut voir que dans le cas où le réseau transformé constitué des éléments L_1 , C_2 et r_L offre une impédance infinie à $s = s_z$, alors la réponse est nullifiée. Ainsi, les pôles de ce réseau deviennent les zéros de notre fonction de transfert. On peut déterminer cette impédance dans notre tête ou passer rapidement par le biais d'un croquis tel celui dessiné en Figure 4.64.

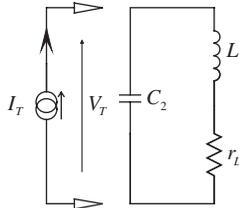


Figure 4.64 L'impédance de ce réseau est obtenue rapidement grâce aux techniques de calculs rapides.

Pour $s = 0$, l'impédance est $R_0 = r_L$. Supprimer l'excitation revient à retirer le générateur de test I_T . Dans ce cas, en continu, C_2 "voit" r_L alors que L_1 "voit" une valeur résistive infinie. Ainsi :

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{L_1}{\infty} = 0 \\ \tau_2 &= r_L C_2\end{aligned}\quad (4.215)$$

Maintenant, en considérant τ_1^2 , si C_2 est remplacé par un court-circuit alors L_1 "voit" r_L et nous avons :

$$\tau_1^2 = \frac{L_1}{r_L} \quad (4.216)$$

Le dénominateur $D(s)$ est égal à :

$$D(s) = 1 + sr_L C_2 + s^2 L_1 C_2 \quad (4.217)$$

Le zéro est déterminé dans le réseau transformé lorsque qu'une certaine valeur $s = s_z$ entraîne la nullification de la réponse V_T en Figure 4.64. Cette réponse disparaît si r_L en série avec L_1 forme un court-circuit transformé :

$$sL_1 + r_L = 0 \quad (4.218)$$

Ce qui implique :

$$s_z = -\frac{r_L}{L_1} \quad (4.219)$$

L'impédance peut alors être exprimée sous la forme suivante :

$$Z(s) = r_L \frac{1 + s \frac{L_1}{r_L}}{1 + sr_L C_2 + s^2 L_1 C_2} = R_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \quad (4.220)$$

Par identification, nous avons :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} \quad (4.221)$$

Q est défini par :

$$Q = \frac{1}{r_L} \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \quad (4.222)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

et

$$\omega_z = \frac{r_L}{L_1} \quad (4.223)$$

Comme dans l'exemple précédent, il n'était nul besoin de déterminer entièrement $Z(s)$ comme en (4.220), seuls les pôles nous suffisent puisqu'ils deviendront les zéros de la fonction de transfert. Nous aurions pu nous arrêter à (4.217).

Le dénominateur $N(s)$ de notre circuit utilisant un transistor bipolaire déjà exprimé en (4.213) peut maintenant être avantageusement remplacé par la formule de (4.217) :

$$N(s) = 1 + sr_L C_2 + s^2 L_1 C_2 = 1 + \frac{s}{\omega_{0N} Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N} Q_N} \right)^2 \quad (4.224)$$

Formule dans ω_{0N} et Q_N sont respectivement définis par (4.221) et (4.222). La fonction de transfert complète est maintenant développée en exploitant (4.213) ou (4.224) ensemble avec un dénominateur commun défini par (4.206) :

$$H(s) = - \frac{R_2 R_C \beta}{(R_1 + r_\pi)(R_2 + R_C + r_L)} \cdot \frac{1 + sr_L C_2 + s^2 L_1 C_2}{1 + s \left(\frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} + C_2 [r_L \parallel (R_C + R_2)] \right) + s^2 \frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} C_2 (R_C + R_2)}$$

$$= H_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_{0N} Q_N} + \left(\frac{s}{\omega_{0N} Q_N} \right)^2}{1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0 Q} \right)^2}$$

Une fois encore, vous constatez que l'inspection bat toutes les autres méthodes par sa vitesse et la facilité qu'elle offre à déterminer la position des zéros. Cependant, cet exercice est parfois impossible et vous ne pourrez éviter l'analyse NDI. Ou alors vous vous contenterez de la forme généralisée donnée dans cet exemple. Cette forme généralisée retournera un résultat identique à celui qu'une analyse NDI donnerait mais vous devrez peut-être investir un peu plus de temps pour simplifier les coefficients du numérateur. Maintenant que nous possédons des fonctions de transfert obtenues de différentes façons, nous pouvons comparer leurs réponses dynamiques avec une feuille Mathcad® (Figure 4.65). Toutes les combinaisons délivrent des courbes qui se superposent parfaitement !

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= 10k\Omega & r_n &:= 1k\Omega & R_2 &:= 10k\Omega & R_C &:= 2.2k\Omega & \parallel(x,y) &:= \frac{xy}{x+y} & R_{inf} &:= 10^{-20}\Omega \\
 C_2 &:= 15nF & L_1 &:= 100\mu H & \beta &:= 100 & r_L &:= 0.25\Omega & & & & \\
 H_0 &:= \frac{\beta}{r_n + R_1} \cdot \frac{R_C \parallel (r_L + R_2)}{R_2 + r_L} = -16.39311 & 20\log(|H_0|) &= 24.29323 \\
 H_{00} &:= \frac{R_2 R_C \beta}{(R_1 + r_n)(R_2 + R_C + r_L)} = -16.39311 \\
 H_1 &:= 0 & H_2 &:= -\frac{\beta}{r_n + R_1} (R_C \parallel R_2) = -16.39344 & H_{12} &:= -\frac{\beta}{r_n + R_1} (R_C \parallel R_2) = -16.39344 \\
 \tau_1 &:= \frac{L_1}{r_L + R_C + R_2} = 8.19655 \times 10^{-3} \mu s \\
 \tau_2 &:= C_2 [r_L \parallel (R_C + R_2)] = 3.74992 \times 10^{-3} \mu s \\
 \tau_{12} &:= C_2 (R_2 + R_C) = 183 \mu s \\
 b_1 &:= \tau_1 + \tau_2 & b_2 &:= \tau_1 \tau_{12} & a_1 &:= \tau_1 \frac{H_1}{H_0} + \tau_2 \frac{H_2}{H_0} & a_2 &:= \tau_1 \tau_{12} \frac{H_{12}}{H_0} \\
 D(s) &:= 1 + b_1 s + b_2 s^2 & N_2(s) &:= 1 + a_1 s + a_2 s^2 \\
 Q &:= \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} = 102.51829 & \omega_0 &:= \frac{1}{\sqrt{b_2}} = 8.16505 \times 10^5 \frac{1}{s} & f_0 &:= \frac{\omega_0}{2\pi} = 129.9508kHz \\
 \sqrt{\frac{C_2}{L_1}} &:= \frac{\sqrt{R_2 + R_C}}{\sqrt{r_L + R_C + R_2} \left[\frac{C_2 r_L (R_2 + R_C)}{L_1} + 1 \right]} = 102.51829 & \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} &:= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2} \sqrt{\frac{r_L + R_C + R_2}{R_2 + R_C}}} = 8.16505 \times 10^5 \frac{1}{s} \\
 Q_N &:= \frac{\sqrt{a_2}}{a_1} = 326.59863 & \omega_{0N} &:= \frac{1}{\sqrt{a_2}} = 8.16497 \times 10^5 \frac{1}{s} & f_{0N} &:= \frac{\omega_{0N}}{2\pi} = 129.94947kHz \\
 Q_{N2} &:= \frac{1}{L_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = 326.59863 & \omega_{0N2} &:= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} = 8.16497 \times 10^5 \frac{1}{s} \\
 N_3(s) &:= 1 + \frac{s}{\omega_{0N2} Q_{N2}} + \left(\frac{s}{\omega_{0N2}} \right)^2 & N_4(s) &:= -H_0 \left[1 + \left(\frac{s}{\omega_{0N}} \right)^2 \right] \\
 D_1(s) &:= 1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 & N_f(s) &:= 1 + s \left(\frac{H_1}{H_0} \tau_1 + \frac{H_2}{H_0} \tau_2 \right) + s^2 \frac{H_{12}}{H_0} \tau_1 \tau_{12} \\
 H_{sol1}(s) &:= H_0 \frac{N_f(s)}{D_1(s)} & H_{sol2}(s) &:= H_0 \frac{N_3(s)}{D(s)} & H_{sol3}(s) &:= H_0 \frac{N_4(s)}{D(s)} \\
 20\log(|H_{sol1}(i \cdot 2\pi \cdot f_0)|, 10) &= 14.22925
 \end{aligned}$$

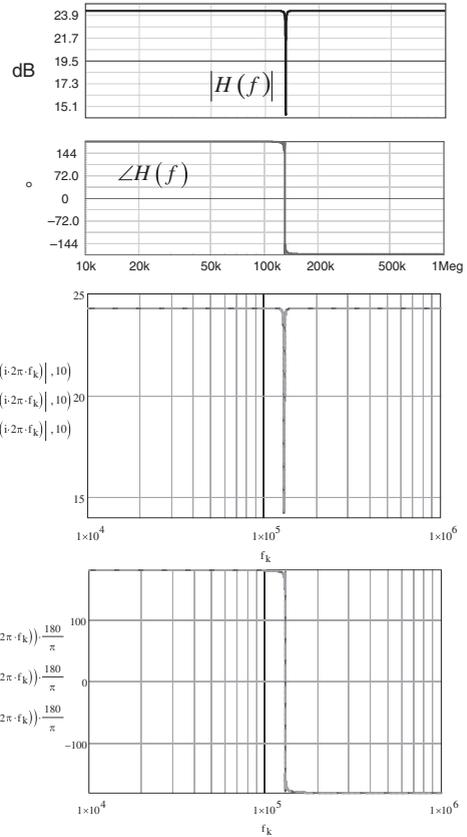


Figure 4.65 Mathcad® et SPICE délivrent des résultats similaires.

4.2.5 Fonction de transfert généralisée du deuxième ordre – exemple 4

Ce quatrième exemple provient de la référence [4] et est également étudié en [5]. C'est un montage intéressant car il s'agit d'un montage passif associant condensateurs et résistances mais dont le gain dépasse légèrement 1. Le schéma apparaît en Figure 4.66. Quelle est la fonction de transfert de circuit bâti autour de deux condensateurs ?

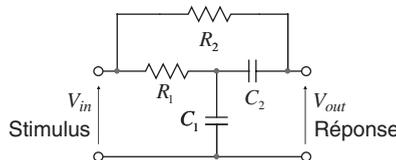


Figure 4.66 Ce montage à 2 condensateurs peut offrir un léger gain pour une certaine combinaison de ses éléments constitutifs.

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Comme à l'accoutumée, nous débuterons l'analyse avec $s = 0$ et continuerons avec les constantes de temps τ et et les différents gains H . Le cheminement complet apparaît en Figure 4.67.

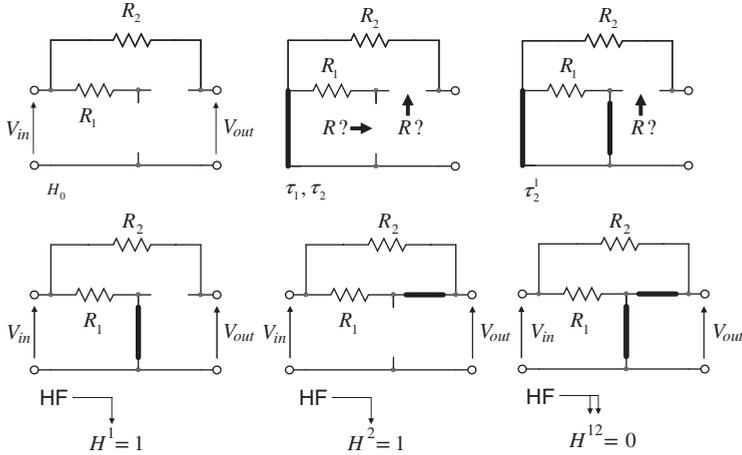


Figure 4.67 Une série de 6 schémas simples nous permet de déterminer la fonction de transfert recherchée.

À partir de ces croquis, vous devriez obtenir :

$$H_0 = 1 \quad (4.226)$$

$$\tau_1 = R_1 C_1 \quad (4.227)$$

$$\tau_2 = (R_1 + R_2) C_2 \quad (4.228)$$

$$\tau_2^1 = R_2 C_2 \quad (4.229)$$

$$H^1 = H^2 = 1 \quad (4.230)$$

et

$$H^{12} = 0 \quad (4.231)$$

Le dénominateur $D(s)$ est formé en combinant, (4.227), (4.228) et (4.229) :

$$D(s) = 1 + s(\tau_1 + \tau_2) + s^2 \tau_1 \tau_2^1 = 1 + s[R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2] + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \quad (4.232)$$

$N(s)$ assemble de façon similaire les gains déterminés avec (4.230) et (4.231) :

$$N(s) = H_0 + (\tau_1 H^1 + \tau_2 H^2) s + \tau_1 \tau_2^1 H^{12} s^2 = 1 + [R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2] s \quad (4.233)$$

La fonction de transfert finale est ainsi définie par :

$$H(s) = \frac{1+a_1s}{1+b_1s+b_2s^2} = \frac{1+[R_1C_1+(R_1+R_2)C_2]s}{1+[R_1C_1+(R_1+R_2)C_2]s+R_1R_2C_1C_2s^2} \quad (4.234)$$

Si vous observez cette équation, vous remarquez que a_1 et b_1 sont identiques. Ainsi, (4.234) peut être réécrite selon la forme suivante :

$$H(s) = \frac{1+b_1s}{1+b_1s+b_2s^2} \quad (4.235)$$

En considérant un faible facteur de surtension Q , le dénominateur peut être reformulé pour satisfaire le format $\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)$. Si nous continuons de cette

façon, ω_{p1} va neutraliser le zéro (même fréquence) et nous aurons construit un simple filtre passe-bas. Nous pourrions plutôt considérer des pôles coïncidents placés à ω_p lorsque Q est égal à 0.5 (voir chapitre 2). Dans ces conditions, on peut reformuler le dénominateur selon l'expression ci-après :

$$1 + \frac{s}{\omega_0 Q} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)^2 \quad (4.236)$$

dans laquelle :

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.237)$$

Pour écrire ces équations et assurer leur validité, nous avons arbitrairement choisi un facteur de qualité Q à 0.5. Quelles sont les valeurs des éléments parmi C_1 , C_2 , R_1 et R_2 qui mènent à un Q de 0.5 ? Depuis le chapitre 2, nous savons que $Q = \sqrt{b_2}/b_1$. Si $Q = 0.5$, alors nous devons satisfaire :

$$0.5 = \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \rightarrow b_1 = 2\sqrt{b_2} \quad (4.238)$$

Si nous remplaçons b_1 et b_2 par leur définition respective, $(\tau_1 + \tau_2)$ et $(\tau_1 \tau_2^1)$, alors il faut résoudre l'équation suivante :

$$R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2 = 2\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (4.239)$$

qui peut aussi être réécrite sous la forme suivante :

$$\left[R_1 C_1 - 2\sqrt{R_1 C_1} \sqrt{R_2 C_2} + R_2 C_2 \right] + R_1 C_2 = 0 \quad (4.240)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

Comme indiqué en [5], le terme de gauche peut être factorisé selon l'identité $(a-b)^2$ ce qui mène à :

$$\left(\sqrt{R_1 C_1} - \sqrt{R_2 C_2}\right)^2 + R_1 C_2 = 0 \quad (4.241)$$

Cette expression ne peut être résolue puisque le carré sera toujours positif. Cependant, [5] offre un moyen élégant de trouver une solution approchée en $\sqrt{R_1 C_1}$:

$$\left[\sqrt{R_1 C_1} \left(1 - \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}}\right)\right]^2 + R_1 C_2 = 0 \quad (4.242)$$

En extrayant $R_1 C_1$ et en factorisant le terme, il vient :

$$\left(1 - \sqrt{\frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}}\right)^2 + \frac{C_2}{C_1} = 0 \quad (4.243)$$

Si $R_2 C_2 = R_1 C_1$ alors le terme de gauche s'annule et un seul terme subsiste. Si l'on satisfait $\frac{C_2}{C_1} = \frac{R_1}{R_2} \ll 1$, nous obtenons une solution approximative pour résoudre (4.243). La fonction de transfert finale peut maintenant être approximée selon la forme suivante :

$$H(s) \approx \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)^2} \quad (4.244)$$

dans laquelle

$$\omega_z = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \quad (4.245)$$

et

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{b_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (4.246)$$

Si l'on considère maintenant les conditions pour lesquelles (4.244) est valide, $\tau_1 = \tau_2$, il est alors possible de simplifier (4.245) et (4.246) :

$$\omega_z = \frac{1}{2\tau} \quad (4.247)$$

$$\omega_p = \frac{1}{\tau} \quad (4.248)$$

avec $\tau = R_1 C_1 = R_2 C_2$. Dans ces conditions, le pôle est situé à deux fois la position du zéro :

$$\omega_p = 2\omega_z \quad (4.249)$$

Quelle est la fréquence à laquelle le gain est maximal ? On obtient cette valeur en dérivant (4.244) par rapport à ω et annulant le résultat :

$$\frac{d}{d\omega} |H(\omega)| = 0 \quad (4.250)$$

Le module d'un quotient est le module du numérateur divisé par le module du dénominateur. Nous avons alors :

$$\left| \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_z}}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \right| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \quad (4.251)$$

Si nous dérivons, nous obtenons :

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} = - \frac{\omega \cdot \omega_p^2 (\omega^2 - \omega_p^2 + 2\omega_z^2)}{\omega_z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} (\omega^2 + \omega_p^2)^2} = 0 \quad (4.252)$$

Il existe trois racines mais une seule nous intéresse :

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_p^2 - 2\omega_z^2} \quad (4.253)$$

Quelle est la valeur du gain à cette résonance ? Nous connaissons avec (4.249) la relation entre le pôle et le zéro. Grâce à ce résultat, on peut récrire (4.251) en considérant uniquement le zéro :

$$|H(\omega)| = \frac{4\omega_z^2 \sqrt{\frac{\omega^2 + \omega_z^2}{\omega_z^2}}}{\omega^2 + 4\omega_z^2} \quad (4.254)$$

En utilisant (4.249) à nouveau, (4.253) devient :

$$\omega_{\max} = \sqrt{2}\omega_z \quad (4.255)$$

4.2 Une fonction de transfert généralisée du deuxième ordre

En remplaçant ω par sa définition de (4.255), (4.254) donne le maximum théorique de la fonction :

$$|H(\omega_{\max})| = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.155 \quad (4.256)$$

Avant que nous continuions dans notre analyse, nous devons déterminer une fonction de transfert brute afin de pouvoir comparer la réponse de notre forme canonique finale. Ici encore, le théorème de superposition nous aide comme indiqué en Figure 4.68.

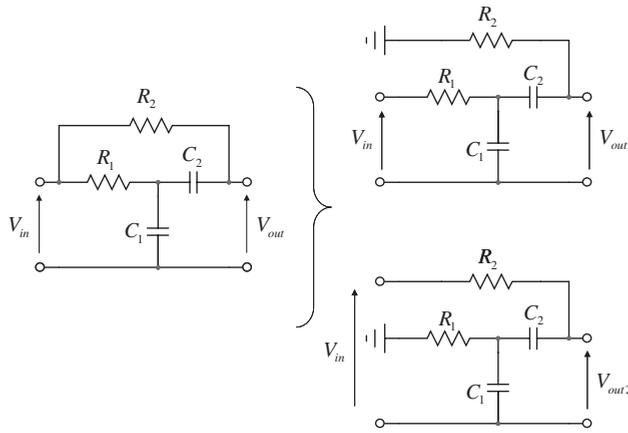


Figure 4.68 Le théorème de superposition nous aide à déterminer la fonction de transfert brute.

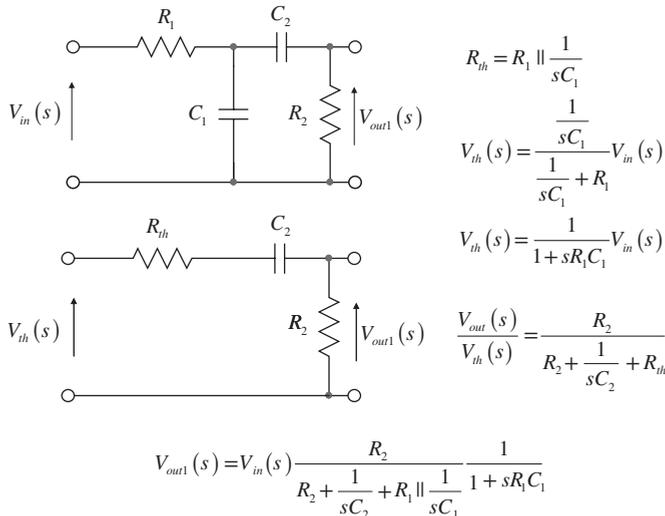


Figure 4.69 La première expression utilise le théorème de Thévenin.

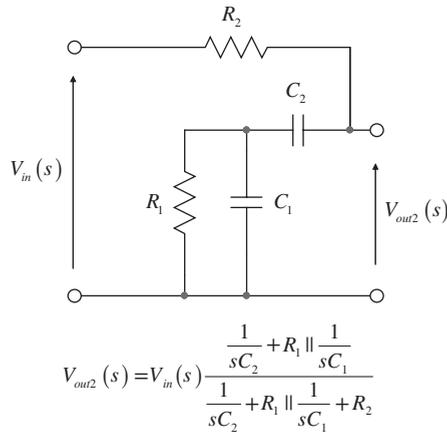


Figure 4.70 La seconde configuration considère un diviseur avec des impédances.

La fonction de transfert brute finale est obtenue en additionnant les expressions de V_{out1} et V_{out2} respectivement définies par la Figure 4.69 et la Figure 4.70 :

$$H(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_1 \parallel \frac{1}{sC_1}} \frac{1}{1 + sR_1C_1} + \frac{\frac{1}{sC_2} + R_1 \parallel \frac{1}{sC_1}}{\frac{1}{sC_2} + R_1 \parallel \frac{1}{sC_1} + R_2} \quad (4.257)$$

En réarrangeant, on obtient :

$$H(s) = \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2} + R_1 \parallel \frac{1}{sC_1}} \left(\frac{R_2}{1 + sR_1C_1} + \frac{1}{sC_2} + R_1 \parallel \frac{1}{sC_1} \right) \quad (4.258)$$

Maintenant que nous possédons toutes nos équations, il est possible de les saisir sous une feuille Mathcad® comme représenté en Figure 4.71. Toutes les équations délivrent une réponse identique, que ce soit à partir des expressions brutes définies en (4.257) et (4.258) ou à l'aide la version approximative de (4.244).

Ce réseau RC résonant est intéressant et je confesse que je n'avais jamais pensé qu'un circuit passif constitué de résistances et condensateurs puisse offrir du gain, si modeste soit-il. Si vous souhaitez creuser le sujet davantage, vous trouverez plus d'information en [6], [7] et [8].

4.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

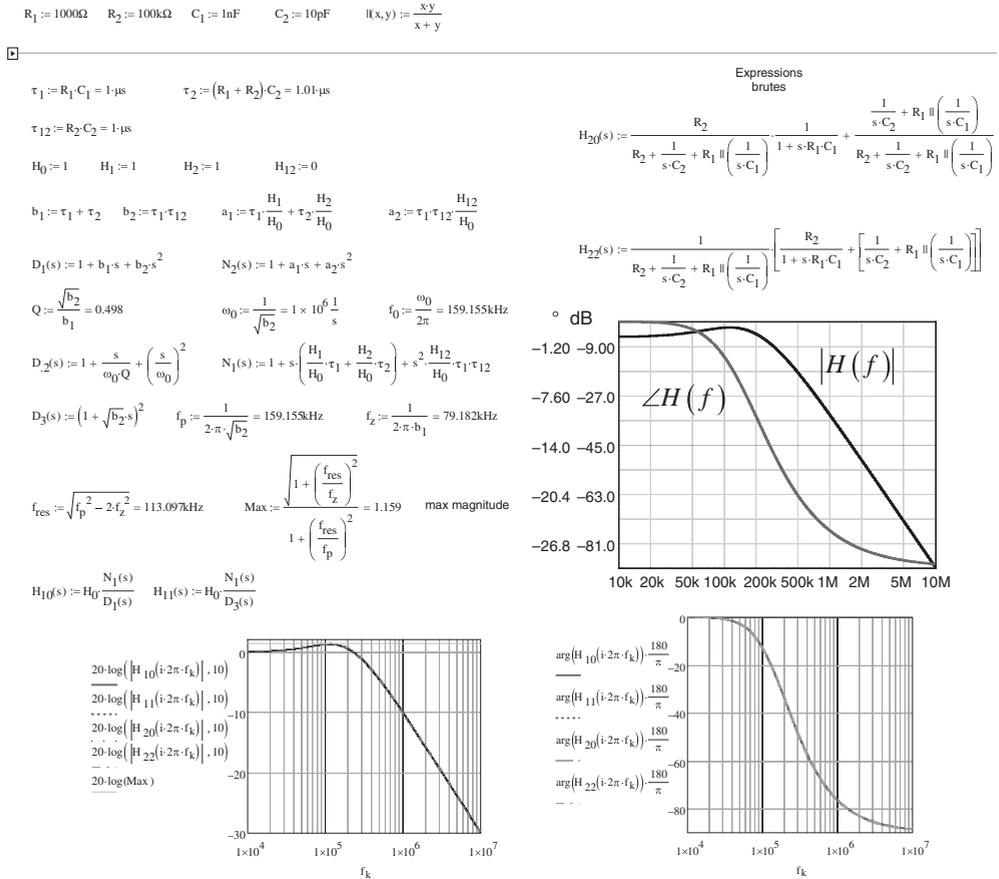


Figure 4.71 Toutes les équations délivrent une réponse identique et c'est appréciable !

4.3 Que dois-je retenir de ce chapitre ?

Dans ce quatrième chapitre, nous avons exploré les circuits du deuxième ordre en étendant la portée du théorème de l'extra-élément. Vous trouverez ci-dessous un résumé de ce que nous avons appris dans ce chapitre :

1. Le théorème aux deux extra-éléments ou 2EET décrit comment appliquer le EET deux fois en présence d'un système du deuxième ordre. Les éléments qui stockent l'énergie (condensateurs et bobines) peuvent être combinés dans différents états (état continu ou haute fréquence) afin de former le gain de référence. Le EET est appliqué à un premier élément de stockage d'énergie alors que le second est placé dans son état de référence. Le EET est ensuite

appliqué une seconde fois en considérant maintenant ce deuxième élément de stockage alors que le premier est de retour dans le circuit : on obtient alors des impédances plutôt que des résistances qui pilotent les L et C du circuit. L'assemblage de tous ces facteurs conduit à l'écriture de la fonction de transfert du deuxième ordre.

2. Le 2EET sous sa forme brute n'offre pas vraiment d'indication sur la position des pôles et des zéros présents dans le circuit. Pour développer une formule applicable et satisfaisant le concept de *faible entropie*, nous avons considéré un gain de référence défini pour $s = 0$: les condensateurs sont retirés du circuit et les bobines remplacées par des courts-circuits. C'est de cette façon que SPICE calcule un point de polarisation avant de lancer tout type de simulation.
3. Comme le numérateur et le dénominateur représentent des expressions sans unité (seul le terme de tête ou gain de référence porte l'unité, si elle existe), les termes multipliés par s , a_1 ou b_1 , doivent posséder une dimension de temps, [s]. a_1 ou b_1 sont alors la somme des constantes de temps du circuit lorsque celui-ci est observé selon deux conditions différentes. Les coefficients de a_1 sont déterminés lorsque la réponse est nullifiée (les coefficients du numérateur $N(s)$ se distinguent de ceux du dénominateur par l'ajout d'un suffixe N , τ_{1N} et τ_{2N}) alors que les termes b_1 sont obtenus pour une excitation réduite à 0 (les constantes de temps du dénominateur sont τ_1 et τ_2).
4. Les coefficients du deuxième ordre, a_2 ou b_2 , doivent posséder une unité de temps au carré, [s²]. Ce sont des produits de constantes de temps. Pour les former, vous pouvez sélectionner la première constante de temps τ_1 et la multiplier par une nouvelle constante de temps τ_2^1 obtenue lorsque l'élément impliqué dans τ_1 (L_1 ou C_1) est placé dans son état haute-fréquence alors que vous déterminez la résistance qui attaque l'élément 2. Grâce à la redondance, vous pouvez également choisir la seconde constante de temps τ_2 et la multiplier par une autre constante de temps τ_1^2 obtenue lorsque l'élément impliqué dans τ_2 (L_2 ou C_2) est placé dans son état haute-fréquence alors que vous déterminez la résistance qui attaque l'élément 1. Pour le numérateur, l'exercice est conduit lorsque la réponse est nullifiée et toutes les constantes de temps possèdent le suffixe N , $\tau_{1N}\tau_{2N}^1$ or $\tau_{2N}\tau_{1N}^2$. Dans le cas du dénominateur, vous déterminez $\tau_1\tau_2^1$ ou $\tau_2\tau_1^2$ lorsque la source d'excitation est réduite à 0.
5. Les numérateur et dénominateur du deuxième ordre peuvent être réarrangés sous une forme canonique impliquant un facteur de qualité Q et une pulsation de résonance ω_0 . Lorsque ce facteur de qualité est bien plus petit que 1, le numérateur et/ou le dénominateur peuvent être respectivement exprimés sous la forme de zéros et pôles bien séparés les uns des autres.

6. Les exemples du chapitre illustrent la puissance de la méthode et la concision du résultat obtenu. Scinder un circuit compliqué en petits croquis individuellement étudiés vous permet, le cas échéant, d'identifier une erreur et de la corriger en intervenant uniquement sur l'étape incriminée. La possibilité d'exprimer les calculs de constantes de temps dans une feuille Mathcad® vous permet de déterminer des fonctions de transfert d'une façon rapide et efficace.
7. Une fois encore, SPICE peut être utilisé d'une manière très simple pour vérifier l'intégrité des calculs en étude continue ($s = 0$) mais également s'il s'agit de déterminer les résistances attaquant les éléments de stockage pour une excitation réduite à 0 ou une sortie nullifiée en analyse NDI.

Références

- [1] R. D. Middlebrook, « The two extra element theorem » IEEE Proceedings Frontiers in Education, 21st Annual Conference, Purdue Univ., Sept. 21–24 1991, pp. 702–708.
- [2] R. D. Middlebrook, V. Vorpérian, J. Lindal, « The N Extra Element Theorem », *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 45, NO. 9, September 1998.
- [3] A. Hajimiri, « Generalized Time- and Transfer-Constant Circuit Analysis », *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 57, Issue 6, p1105-1121, 2009.
- [4] J. Holbrook, *Laplace Transform for Electronic Engineers*, Pergamon Press, 1959.
- [5] V. Vorpérian, *Fast Analytical Techniques for Electrical and Electronic Circuits*, Cambridge University Press, 978-0-52162-442-8.
- [6] H. Epstein, « Synthesis of Passive RC Networks with Gains Greater than Unity », *Proceedings of the IRE*, July, 1951, p. 83.
- [7] S. Takashi, T. Sugiura, « Some Properties of Passive RC Network Giving Over-Unity Gain », http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/download.php?file_id=95480.
- [8] K. Castor-Perry, « Ac Voltage Gain Using Just Resistors and Capacitors? », *The Filter Wizard* issue 36, Cypress Semiconductor, <http://www.cypress.com/?docID=45636>.

4.4 Annexe du chapitre 4

Compléments en ligne



Consultez les exemples documentés sur le site Dunod.com.

Conclusion

Le chapitre 4 clôt ce livre consacré aux techniques de calculs rapides. J'espère que vous aurez apprécié le parcours et partagé le plaisir que m'a procuré la rédaction de cet ouvrage. Si vous suivez le rythme adopté dans le livre et commencez pas à pas avec la résolution de problèmes simples, il n'y pas de raison d'échouer en présence de circuits plus complexes passifs ou actifs. En fait, avec l'aide de Mathcad® et d'un simulateur SPICE, vous possédez tous les outils vous permettant de vérifier vos calculs tant en présence d'une excitation réduite à zéro que dans le cadre d'une double injection nulle. Ce sera ma modeste contribution à la technique, donner au lecteur la possibilité de vérifier ses calculs avec un simulateur sous une forme vraiment simple. Et cela fonctionne ! Face à des divergences de réponses sur quelques-uns des exemples donnés, j'ai pu rapidement identifier la faute commise grâce aux petits schémas individuels et corriger immédiatement la constante de temps fautive. Avec l'approche traditionnelle qui délivre des expressions longues comme un jour sans fin, j'aurais dû repartir de zéro ou alors j'aurais jeté les feuilles du chapitre contre le mur !

Les références données en fin de chacun des chapitres sont intéressantes à lire et je vous invite à les parcourir si vous souhaitez accroître vos connaissances dans le domaine de la micro-électronique et le contrôle de boucle. Les articles et livres de Vatché Vorpérian ou de David Middlebrook sont certainement des documents à considérer car ils incluent de nombreuses démonstrations que je ne pouvais aborder ici. Après tout, ce livre peut être considéré comme une initiation à la méthode vous permettant, par la suite, d'aborder des ouvrages d'un niveau supérieur.

J'espère que ce livre contribuera à la découverte des techniques de calculs rapides et motivera des enseignants pour leur ménager une place dans les cours qu'ils dispensent. Ces techniques sont déjà enseignées outre-Atlantique dans quelques universités et je pense qu'elles trouveraient leur place dans le système français. Les FACTs ne remplacent pas les démarches enseignées en université mais au contraire, s'appuient sur ces dernières en étendant leur portée. Elles ne sont pas concurrentes mais bien complémentaires des techniques existantes. Je serai heureux de lire vos commentaires à ce sujet.

Christophe Basso
Septembre 2016

Index

A

2EET, 205
additivité, 39, 41
admittance, 13
admittance Yin, 119
amorti, 33, 226, 236
amortissement, 70
amplificateur
 à transconductance, 202
 opérationnel, 106
amplification, 4
amplitude, 2
analyse harmonique, 2, 53
analyse NDI, 179
Argand, 53
asymptote, 165
atténuation, 4

B

Bode, VIII
borné, 71
boucle fermée, 106, 113, 186
brute, 149

C

canonique, VIII, 39, 227
CEM, 18
circuit
 ouvert, 25, 263
 transformé, 134
coefficient, 79
coïncident, 75

combinaison, 221
compensateur, VII
compensation, 57
composante
 alternative, 43
 continue, 3, 43, 150
condition initiale, 81
confondu, 70
conjugué, 67
constante de temps, VIII, 6, 23, 44
constante de temps naturelle, 201
contre-réaction, 150
convertisseur, 18
court-circuit, 25, 65
court-circuité, 7

D

décade, 3, 72, 249
dégénéré, 82
degré, 65, 81
demi-plan, 54
 droit (*Right Half-Plane Zero* ou RHPZ),
 154
 gauche, 71
deuxième ordre, 68, 69, 205
développement limité, 73
différentiation, 45
différentiel, 9
dimension, 4
dissipation d'énergie, 70
distorsion, 2
diviseur, 19, 208
diviseur résistif, 60

double injection nulle (*Null double injection* ou NDI), 32, 105, 130
Driving Point Impedance (DPI), XI, 6
 dynamique, VIII

E

échelle logarithmique, 63
 échelon, 45, 70
 émetteur commun, 266
 EMI, 18
 énergie, 18, 29
engineering judgment, 221
 équation caractéristique, 52
 équation différentielle, 48
Equivalent Series Resistance (ESR), 26
 état continu (*dc state*), 91
 état de référence, 140, 218
 état haute fréquence (*HF state*), 91, 218
 excitation, 2
 éteinte, 121
 exponentiels, 71
 extra-élément (EET), IX, 140

F

facteur correctif, 139
 facteur d'amortissement, 33, 68
 facteur de correction, 206
 factorisé, 29
 FACTs, IX, 20
 faible entropie, VIII, 29, 120, 145
 filtre, 18, 73, 227
 filtre actif, 186
 fonction affine, 41
 fonction de transfert, VII
 force brutale (*brute-force analysis*), 20
 forme factorisée, VIII, 61
 forme généralisée, 25
 formule approximative (*low-Q approximation*), 75, 225
 forte entropie, 149
 forte entropie (*high-entropy equation*), 29

fraction, 67
 fréquence, 3
 fréquence angulaire, 3
 fréquentielle, 39

G

gain, 4, 29
 de référence, 140
 statique (*static gain*), 24, 58
 généralisée, 173
 générateur de fonctions, 1
 générateur de test, 8, 155

H

homogénéité, 40, 63

I

IC, 81
 idéal, 106
 imaginaire, 33, 53, 67
 impédance, 5, 12
 impédance d'entrée, 119
 incrémentale, 43
 indépendante, 234
 indétermination, 220
 indice, 63
 infini, 52
 injection
 double, 5
 unique, 5
 inspecté, 19
 inspection, VIII, 6, 19, 121, 210
 instable, 54
 intégration, 45
 intelligible, 29
 inverseur, 185

K

KCL, 155
 KVL, 155

Index

L

lag, 185
large signal, 3
LC, 259
lead, 185
LHPP, 55
LHPZ, 53
linéaire, VII, 3
linéarisation, 43, 120
linéariser, 217
logarithmique, 3
logspace, 64
loi des mailles (*Kirchhoff's voltage law*,
KVL), 20
loi des nœuds (*Kirchhoff's current law*,
ou KCL), 17, 20

M

magnitude, 4
maille, 82
masse virtuelle, 106, 186
modulation, 3
module, 3, 53
Modulus, 4
Monte Carlo, VIII

N

n EET, 15
naturelle, 61
nœud, 9
non-linéaire, 3, 41
non-oscillatoire, 70
Norton, IX, 15
notation hybride, 267
nulle, 31, 87
nullifiée, 67, 112

O

observation, 5
onde, 1

operational amplifier (op amp), 9
ordre d'un système, 81
ordre n , VIII
origine, 52
oscillatoire, 70

P

parallèle, 17, 62
parasite, 18
passe-bas, 47, 68
pente, 72, 86
perte ohmique, 211
perturbation, 43
petit signal, 3, 150
phase, 2, 3
phase boost, 57
phase lag, 4
phase lead, 4
plan complexe, 30
point de fonctionnement, 217
point de polarisation (*bias point*), 3, 43, 217
polariser, 114
pôle instable, 56
pôle inversé (*inverted pole*), 158, 165, 166
pôle, VII, 30
polynôme, 90
polynomiale, 51
pont de résistances, 141
pont, 141
premier ordre, 65, 140, 145
principe de superposition, 40
propagation, 2
proportionnalité, 39, 40
pulsation, 226

Q

qualité, 68

R

racine, 29, 52, 55
rapport cyclique, 2

redondance, 282
 réel, 33, 67, 70
 réjecteur, 239
 réjecteur (*notch filter*), 54
 réjection, 33
 réponse, VII
 dynamique, 224
 forcée, 46
 naturelle, 46
 nullifiée, 121
 temporelle, 45
 totale, 45
 réseau, 115
 réseau transformé (*transformed network*), 31
 résistance
 équivalente, 8
 infinie, 25
 résistif, 8
 résistive, 211
 résonance, 68
 retard pur, 52
 RHPP, 55

S

sans dimension, 4
 sans unité, 4
 saturation, 3
 saturé, 3
 schéma linéaire, 267
 second ordre, 33
 sensibilité, 29
 série-parallèle, 29, 208
 siemens, 11
 signal carré, 2
 singularité, 52
 sinusoïdale, 2
slew-rate, 3
 source de courant, 5
 source de tension contrôlée en tension
 (*voltage-controlled voltage source*), 166
 source muette, 113

SPICE, VIII, 81, 201
 stabilité, VII
 statique, 91
 stimuli, 5
 stimulus, VII
 stockage, 201
 stockage d'énergie, 50, 201
 structure, 50, 115
 structure originelle, 115
 subharmonique, 78
 superposition, 15, 123
 symbole, 17
 système linéaire, 19
 système linéaire invariant (*Linear Time-Invariant*, LTI), 42
 système, VIII
 système bouclé, 57

T

tau, 23
 terme de tête, 216
 terminologie, 91
 théorème, 14
 théorème de l'extra-élément (EET), 8, 15,
 106, 135, 165
 Thévenin, IX, 15, 19
 transadmittance, 10
 transconductance, 113
transfer impedance, 11
 transfert généralisée, 121
 transformé, 87
transformed open, 31
transformed short, 31
 transformée de Laplace, VII, 45
 transimpédance, 11, 135
 troisième ordre, 76
two extra element theorem, 206

U

unité, 63, 216

Index

V

valeur finale, 46
variable, 43
 complexes, 3
 d'état, 81, 234

Z

zéro, VII, 30, 52
 à l'origine, 158
 de coupure, 98
 inversé, 166, 169